Funciones Definitivamente Positivas En Espacios Parcialmente Ordenados

Por

ROBERTO VAZQUEZ GARCIA

TESIS DOCTORAL

1947

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA DE GRADUADOS

INTRODUCCION Y RESUMEN

Introducción y resumen.

Se define función de distribución como una función real de variable real, con dominio en $(-\infty, +\infty)$, no decreciente y acotada. Con cada función de distribución está relacionada íntimamente su función característica: la función característica de la función de distribución $E(t)$ es la integral de Riemann-Stieltjes $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t}\, dE(t)$, que es una función con valores complejos definida para todo valor real α. Es fácil ver que toda función característica es definitivamente positiva; este último concepto se define como sigue:

$\varphi(\alpha)$ es función definitivamente positiva si y solo si

1o. $\varphi(\alpha)$ es continua y acotada en $(-\infty, +\infty)$.

2o. $\varphi(-\alpha) = \overline{\varphi(\alpha)}$.

3o. Para $n = 1, 2, \ldots$, $\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \varphi(\alpha_p - \alpha_q) \xi_p \overline{\xi}_q \geq 0$, donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son n números reales arbitrarios y $\xi_1, \ldots, \xi_n$ son n números complejos cualesquiera.

Recíprocamente, Bochner (véase [1] pág. 76) ha demostrado que toda función definitivamente positiva es función característica.

El objeto de esta tesis que me ha sugerido el profesor Bochner es el estudio, en una dirección análoga a la indicada por su teorema, de las funciones definitivamente positivas de variable real, cuyos valores son elementos de un cierto espacio vectorial S^2 con coeficientes complejos, previa extensión a este caso de los conceptos de funciones de distribución, característica y definitivamente positiva. El espacio S^2 es la extensión compleja de un espacio vectorial S con coeficientes reales y parcialmente ordenado; este orden parcial tiene las propiedades más débiles compatibles con la existencia de una -

integral de Riemann Stieltjes (véase [2], pág. 510-2[illegible]).

En este trabajo, el número 1 consiste de la definición del espacio S y de propiedades de las sucesiones monótonas acotadas de elementos de S; en el número 2 se da la definición más débil posible de convergencia de una sucesión de elementos de S y se deducen sus propiedades. La integral de Riemann Stieltjes se estudia en el número 3 y el espacio S^2 en el número 4; en este número se definen las funciones de distribución, característica y definitivamente positiva. Finalmente, en el número 5 se obtienen las propiedades de las funciones definitivamente positivas que enunciamos a continuación:

1a. Si $\varphi(\alpha)$ es definitivamente positiva, existe para cada número real $\mu > 0$ una función de distribución $E_\mu(t)$ tal que

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t}\, dE_\mu(t),$$

si $\mu\alpha$ es entero. En particular existe una sucesión de funciones de distribución $\{E_{m!}(t)\}$, $\underline{m}$ número natural, tal que

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t}\, dE_{m!}(t),$$

para todo número α que satisfaga la condición: $m!\alpha =$ entero.

2a. Para que $\varphi(\alpha)$, definitivamente positiva, sea función característica es necesario y suficiente que:

(a) la sucesión $\{E_{m!}(t)\}$ converja para todo valor de t:

$$E_{m!}(t) \xrightarrow[m\to\infty]{} E(t)\ ;$$

(b) $E(-\infty) = 0$, $E(+\infty) = \varphi(0)$;

y en este caso $\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t}\, dE(t)$ para todo número real α, esto es, φ resulta ser la función característica de

$E(t)$.

3a. Para cada función definitivamente positiva $\varphi(\alpha)$, existe una sucesión $\{\varphi_m(\alpha)\}$ de funciones características --------- $\varphi_m(\alpha)$ que converge a $\varphi(\alpha)$ si α es racional. Además si el espacio S es una red (lattice), dicha sucesión --------- $\{\varphi_m(\alpha)\}$ converge hacia φ en todo número real α .

México, D.F., diciembre de 1947.

1. El espacio S.

S es un grupo conmutativo de elementos T, U, V,..., ordenado parcialmente por una relación $\geq$ con las propiedades siguientes:

(i) $T \geq T$,

(ii) $T \geq U$, $U \geq T$ implica $T = U$,

(iii) $T \geq U$, $U \geq V$ implica $T \geq V$,

(iv) $T \geq U$ implica $T + V \geq U + V$ para cualquier V.

(v) S es un espacio vectorial con coeficientes reales, y $T \geq 0$, a (real) ≥ 0 implica $aT \geq 0$.

(vi) Si $T_n \leq T_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, y $T_n \leq U$ para alguna U, esto es, si $\{T_n\}$ es una sucesión monótona no decreciente y acotada, entonces existe un elemento T tal que $T_n \leq T$ y $T \leq U$ si U es cualquier elemento para el cual $T_n \leq U$. A un elemento como T se le designará "sup" de la sucesión $\{T_n\}$ y se escribirá $T = \sup T$.

1.1 Teorema: $T_1 \leq U_1$, $T_2 \leq U_2$ implica $T_1 + T_2 \leq U_1 + U_2$. $T \leq U$ implica $-T \geq -U$. El elemento sup es único.

Demostración: Utilizando (ii), (iii) y (iv) se deduce inmediatamente la afirmación anterior.

1.2 Observación: Si a los axiomas (i) - (iv) se agrega la condición: dados T, U existe un elemento V tal que $V \geq T$, $V \geq U$, y si $W \geq T$, $W \geq U$ para algún elemento W entonces $W \geq V$, se deduciría por el teorema 1.1: dados T, U existe un elemento V_1 tal que $V_1 \leq T$, $V_1 \leq U$, y si $W_1 \leq T$, $W_1 \leq U$ para algún W_1, entonces $W_1 \leq V_1$. Esto es, S se convertiría en una red (véase [3], pág. 16); en este caso la notación para V y V_1 es: $V = T \cup U$, $V_1 = T \cap U$.

1.3 <u>Teorema:</u> <u>Si</u> $\{U_n\}$ <u>es una sucesión monótona no creciente y acotada, o sea,</u> $U_n \geq U_{n+1}$, $U_n \geq V$ <u>para alguna</u> V, $n = 1, 2, \ldots,$ <u>entonces existe un elemento</u> U <u>tal que:</u>

$$U \leq U_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$U \geq V, \quad \text{si} \quad V \leq U_n \quad \text{para toda } n.$$

<u>A</u> U <u>se le llamará "inf" de</u> $\{U_n\}$: $U = \inf U_n$. <u>Además este elemento inf es único.</u>

<u>Demostración:</u> Por 1.1 la sucesión $\{-U_n\}$ es no decreciente y acotada. Sea

$$U = -\sup(-U_n).$$

$$\therefore \quad -U \geq -U_n,$$

$$U \leq U_n;$$

Por otra parte,

$$V \leq U_n \quad \text{implica} \quad -V \geq -U_n,$$

$$\therefore \quad -V \geq \sup(-U_n) = -U, \quad \text{por (vi)}.$$

$$\therefore \quad V \leq U.$$

Finalmente, por (ii) este elemento U es único.

El razonamiento anterior ha demostrado en otras palabras que:

1.31 $\inf U_n = -\sup(-U_n)$.

1.4 <u>Teorema:</u> <u>Si</u> $\{T_n\}$, $\{U_n\}$ <u>son dos sucesiones no decrecientes y acotadas, satisfaciéndose además:</u>

(a) <u>dado</u> T_n <u>existe</u> U_m <u>tal que</u> $T_n \leq U_m$,

(b) <u>dado</u> $U_{m'}$ <u>existe</u> $T_{n'}$ <u>tal que</u> $U_{m'} \leq T_{n'}$,

<u>entonces</u> $\sup T_n = \sup U_n$.

<u>Demostración:</u> Por (a), para <u>n</u> cualquiera se debe tener:

$$T_n \leq U_m \leq \sup U_n.$$

$$\therefore \quad \sup T_n \leq \sup U_n. \quad \text{por (vi)}.$$

Análogamente de (b) se deduce:

$$\sup U_n \leq \sup T_n .$$

$$\sup T_n = \sup U_n \qquad \text{por (ii).}$$

1.5 <u>Teorema</u>: <u>Sean</u> $\{T_n\}$, $\{U_n\}$ <u>dos sucesiones no crecientes acotadas, satisfaciendo las condiciones adicionales</u>:

(a) <u>dado</u> T_n <u>existe</u> U_m <u>tal que</u> $T_n \geq U$,

(b) <u>dado</u> $U_{m'}$ <u>existe</u> $T_{n'}$ <u>tal que</u> $U_{m'} \geq T_{n'}$,

<u>entonces</u> $\inf T_n = \inf U_n$.

<u>Demostración</u>: Análoga a la anterior.

1.6 <u>Teorema</u>: <u>Si</u> $\{T_n\}$, $\{U_n\}$ <u>son dos sucesiones no decrecientes y acotadas, es</u>:

$$\sup (T_n + U_n) = \sup T_n + \sup U_n .$$

<u>Demostración</u>: Sean $T = \sup T_n$, $U = \sup T_n$. Luego

$$T_n + U_n \leq T + U,$$

$\therefore$ de (vi) $\quad \sup (T_n + U_n) \leq T + U \qquad (1).$

Por otra parte

$$\sup (T_n + U_n) \geq T_n + U_n \geq T_n + U_m \quad \text{para } m \text{ fijo y } n \geq m.$$

$\therefore \quad \sup (T_n + U_n) - U_m \geq T_n .$

$\therefore \quad \sup (T_n + U_n) - U_m \geq T \qquad$ por (vi).

$\therefore \quad \sup (T_n + U_n) - T \geq U_m \quad$ para toda <u>m</u>.

$\therefore \quad \sup (T_n + U_n) - T \geq U.$

$\therefore \quad \sup (T_n + U_n) \geq T + U \qquad (2).$

Finalmente por (1) y (2) se deduce la afirmación.

1.7 <u>Teorema</u>. <u>Si</u> $\{T_n\}$, $\{U_n\}$ <u>son dos sucesiones no crecientes y acotadas, es</u>:

$$\inf (T_n + U_n) = \inf T_n + \inf U_n .$$

<u>Demostración</u>: Por 1.31 podemos escribir

$$\inf (T_n + U_n) = - \sup (- T_n - U_n),$$

$$= - \sup (- T_n) - \sup (-U_n) \quad \text{por 1.6,}$$

$= \inf T_n + \inf U_n$ por 1.31

1.8 Teorema: Sea $\{T_n\}$ no decreciente y acotada, y k un número real cualquiera, entonces:

$$\sup (k\, T_n) = k \sup T_n, \quad \text{si} \quad k \geq 0.$$

$$\inf (k\, T_n) = k \sup T_n, \quad \text{si} \quad k \leq 0.$$

Análogamente, si $\{T_n\}$ es no creciente y acotada:

$$\inf (k\, T_n) = k \inf T_n, \quad \text{si} \quad k \geq 0.$$

$$\sup (k\, T_n) = k \inf T_n, \quad \text{si} \quad k \leq 0.$$

Demostración: Para el caso $k=0$ la demostración es inmediata. Ahora consideremos el caso $\{T_n\}$ no decreciente y $k>0$. Sea $T = \sup T_n$.

$$\therefore \quad k\, T_n \leq k\, T,$$

$$\therefore \quad \sup (k\, T_n) \leq k\, T \qquad (1)$$

$$\therefore \quad \sup \left(\frac{1}{K}\cdot k\, T_n\right) \leq \frac{1}{K} \sup (k\, T_n),$$

o sea
$$T \leq \frac{1}{K} \sup (k\, T_n),$$

$$k\, T \leq \sup (k\, T_n) \qquad (2).$$

De (1) y (2) se deduce $\sup (k\, T_n) = k \sup T_n$. Utilizando este resultado y 1.31 se demuestran fácilmente las afirmaciones restantes.

1.9 Lema: Si $T \leq 0$ y $\{\epsilon_n\}$ es una sucesión de números reales no creciente que tiende a cero, entonces:

$$\sup (\epsilon_n T) = 0.$$

Demostración: Sea k un número positivo arbitrario; en estas -- condiciones la sucesión $\{k\, \epsilon_n T\}$ es no decreciente. Además, dado el elemento $\epsilon_n T$ existe $k\, \epsilon_m T$ tal que $k\, \epsilon_m T \geq \epsilon_n T$, y dado el elemento $k\, \epsilon_{m'} T$ existe $\epsilon_{n'} T$ tal que $\epsilon_{n'} T \geq$ ---- $k\, \epsilon_{m'} T$; por 1.4 se deduce:

$$\sup (k\, \epsilon_n T) = \sup (\epsilon_n T).$$

pero
$$\sup (k\, \epsilon_n T) = k \sup (\epsilon_n T) \qquad \text{por 1.8,}$$

$\therefore \qquad k \sup(\epsilon_n T) = \sup(\epsilon_n T).$

$\therefore \qquad (k-1) \sup(\epsilon_n T) = 0.$

$\therefore \qquad \sup(\epsilon_n T) = 0.$ l.q.q.d.

1.91 Teorema: Sean, T un elemento comparable con 0, y $\{\epsilon_n\}$ una sucesión de números reales que converja monótonamente a 0; entonces podemos afirmar:

$$\inf(\epsilon_n T) = 0 \qquad \text{si} \qquad T \leq 0,\ \epsilon_n \uparrow 0.$$

$$\inf(\epsilon_n T) = 0 \qquad \text{si} \qquad T \geq 0,\ \epsilon_n \downarrow 0.$$

$$\sup(\epsilon_n T) = 0 \qquad \text{si} \qquad T \geq 0,\ \epsilon_n \uparrow 0.$$

Demostración: Con 1.31 y 1.9 se deducen fácilmente las afirmaciones anteriores.

2. Convergencia en S.

Una definición de sucesión convergente de elementos de S, adecuada al tema que queremos estudiar, debe ser tal que se cumplan las condiciones siguientes:

1a: Una sucesión convergente no puede tender a límites diferentes.

2a: Toda sucesión monótona acotada $\{T_n\}$ debe ser convergente y su límite igual a $\sup T_n$ ó $\inf T_n$ según que sea no decreciente o creciente.

3a: Si $\{V_n\}$ y $\{W_n\}$ convergen a V y W respectivamente, la sucesión $\{a V_n + b W_n\}$ donde a y b son reales cualesquiera debe ser convergente y su límite igual con $a V + b W$.

4a: Si $U_n \rightarrow U$, $V_n \rightarrow V$, y $U_n \leq V_n$ a partir de cierto rango, entonces $U \leq V$.

5a: Si $T_n \leq W_n \leq U_n$ a partir de cierto rango, y $\lim T_n = \lim U_n$, entonces $\{W_n\}$ es convergente y $\lim W_n = \lim T_n = \lim U_n$.

A continuación se dará una definición de convergencia que cumple con las condiciones anteriores, y aún más, esta definición es la más débil posible.

2.1 <u>Definición</u>: <u>La sucesión</u> $\{W_n\}$ <u>de elementos de</u> S <u>es convergente si y solo si existen dos sucesiones</u> $\{T_n\}$, $\{U_n\}$ <u>monótonas acotadas, la primera de ellas no decreciente y la segunda no creciente, tales que</u>:

(a) $T_n \leq W_n \leq U_n$ <u>a partir de cierto rango</u> n_0,

(b) $\sup T_n = \inf U_n$.

<u>Al elemento</u> $W = \sup T_n = \inf U_n$ <u>se le llamará límite de</u> $\{W_n\}$ <u>y se abreviará</u>: $W = \lim W_n$.

2.2 <u>Teorema</u>: <u>El límite</u> W <u>de una sucesión convergente</u> $\{W_n\}$ <u>es único, esto es, resulta el mismo elemento</u> W <u>cualesquiera que sean las sucesiones monótonas que satisfagan las condiciones (a) y (b) de 2.1</u>

<u>Demostración</u>: Sean $\{T'_n\}$, $\{U'_n\}$ otras dos sucesiones monótonas acotadas que cumplan con (a) y (b).

De (a) se deduce fácilmente que:

$T'_n \leq U_m$, $T_n \leq U'_m$ para <u>m</u> y <u>n</u> arbitrarias.

$\therefore$ $\sup T'_n \leq U_m$, $\sup T_n \leq U'_m$ para toda <u>m</u>.

$\therefore$ $\sup T'_n \leq \inf U_m$, $\sup T_n \leq \inf U'_m$.

Ahora por (b):

$\sup T'_n = \inf U_m = \sup T_n = \inf U'_m$ l.q.q.d.

2.3 <u>Teorema</u>: <u>Toda sucesión monótona acotada</u> $\{T_n\}$ <u>es convergente y su límite es igual a</u> $\sup T_n$ <u>o</u> $\inf T_n$ <u>según que sea no decreciente o creciente</u>.

<u>Demostración</u>: Inmediata a partir de 2.1.

2.4 <u>Teorema</u>: <u>Si</u> $\{V_n\}$ <u>y</u> $\{W_n\}$ <u>convergen a</u> V <u>y</u> W <u>respectivamente, la sucesión</u> $\{a V_n + b W_n\}$ <u>es convergente y su límite</u>

es igual con $a\,V+b\,W$.

Demostración: Por hipótesis existen sucesiones monótonas ----

$\{T_n\}$, $\{U_n\}$, $\{T'_n\}$, $\{U'_n\}$ tales que:

$$T_n \leq V_n \leq U_n \quad , \quad T'_n \leq W_n \leq U'_n \quad \text{para } n \geq n_0 \qquad (1)$$

$$\sup T_n = \inf U_n = V \quad ; \quad \sup T'_n = \inf U'_n = W \qquad (2).$$

Si a y b son positivos, por (1) se deduce:

$$a\,T_n \leq a\,V_n \leq a\,U_n \quad , \quad b\,T'_n \leq b\,W_n \leq b\,U'_n \quad (n \geq n_0).$$

$$\therefore \quad a\,T_n + b\,T'_n \leq a\,V_n + b\,W_n \leq a\,U_n + b\,U'_n \qquad (n \geq n_0).$$

Pero por 1.6, 1.7 y 1.8 tenemos:

$$\sup\,(a\,T_n + b\,T'_n) = a \sup T_n + b \sup T'_n = a\,V + b\,W,$$

$$\inf\,(a\,U_n + b\,U'_n) = a \inf U_n + b \inf U'_n = a\,V + b\,W.$$

Esto es, la sucesión $\{a\,V_n + b\,W_n\}$ es convergente y tiende - a $a\,V+b\,W$. El caso en el que a y b no son ambos positivos se demuestra en forma análoga.

2.5 Teorema: Si $U_n \to U$, $V_n \to V$, y $U_n \leq V_n$ a partir de cierto rango, entonces $U \leq V$.

Demostración: Por hipótesis existen dos sucesiones no decre--- cientes $\{T_n\}$, $\{T'_n\}$ tales que:

$$T_n \leq U_n \quad ; \quad T'_n \geq V_n \quad \text{para} \quad n \geq n_0 \qquad (1),$$

$$\sup T_n = U \quad ; \quad \inf T'_n = V \qquad (2).$$

Por (1) y la segunda parte de la hipótesis:

$$T_n \leq T'_n \qquad \text{para} \quad n \geq n_0 \qquad (3).$$

Por (2) y (3):

$$T_n \leq V \qquad \text{para toda } n.$$

$$\therefore \qquad \sup T_n \leq V.$$

Por (2) nuevamente:

$$U \leq V \qquad\qquad \text{l.q.q.d.}$$

2.6 Teorema: Sea $V_n \leq W_n \leq V'_n$ a partir de cirto rango, y --- $\lim V_n = \lim V'_n$, entonces la sucesión $\{W_n\}$ es convergente y $\lim W_n = \lim V_n = \lim V'_n$.

<u>Demostración</u>: De la hipótesis se deduce que existen dos sucesiones monótonas $\{T_n\}$, $\{U_n\}$ tales que:

$$T_n \leq V_n \quad ; \quad V'_n \leq U_n \quad \text{si } n \geq n_o, \qquad (1),$$

$$\sup T_n = \lim V_n \quad ; \quad \lim V'_n = \inf U_n \qquad (2).$$

Por (1) y la primera parte de la hipótesis:

$$T_n \leq W_n \leq U_n \quad \text{a partir de cierto rango.} \qquad (3).$$

Por (2) y (3) la sucesión $\{W_n\}$ converge y $\lim W_n = \lim V_n$ $= \lim V'_n$.

2.7 Es evidente que toda sucesión convergente según 2.1 lo es también según cualquier definición de convergencia que satisfaga las condiciones 1a. a 5a. de 2. En otras palabras la definición 2.1 de convergencia es la más débil posible en las -- circunstancias indicadas en 2.

2.8 La definición 2.1 permite obtener algunos resultados más - que se utilizarán después y que enunciamos a continuación:

2.81 <u>Teorema</u>: <u>Si</u> $\{\epsilon_n\}$ <u>es una sucesión de números reales que tiende a cero, y</u> $\{V_n\}$ <u>una sucesión de elementos de</u> S <u>tal que</u> $0 \leq V_n \leq T$ <u>para toda</u> n <u>y algún elemento</u> T <u>de</u> S, <u>entonces</u> --- $\lim \epsilon_n V_n = 0$.

<u>Demostración</u>: Definamos para $n = 1, 2, \ldots$:

$$a_n = \inf (\epsilon_n, \epsilon_{n+1}, \ldots),$$

$$b_n = \sup (\epsilon_n, \epsilon_{n+1}, \ldots).$$

$$\therefore \quad a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq 0 \quad ; \quad a_n \uparrow 0 \qquad (1),$$

$$b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 0 \quad ; \quad b_n \downarrow 0 \qquad (2),$$

$$a_n \leq \epsilon_n \leq b_n \qquad (3).$$

Por (1) y (2) obtenemos:

$$0 \geq a_n V_n \geq a_n T \qquad (4),$$

$$0 \leq b_n \, V_n \leq b_n \, T \qquad (5).$$

Por 1.91: $\quad a_n \, T \longrightarrow 0 \;\; ; \;\; b_n \, T \longrightarrow 0 \qquad (6).$

Por 2.6, (4), (5) y (6): $\quad a_n \, V_n \longrightarrow 0 \;\; ; \;\; b_n \, V_n \longrightarrow 0 \qquad (7).$

Ahora por (3): $\quad a_n \, V_n \leq \epsilon_n V_n \leq b_n \, V_n \qquad (8).$

Finalmente por 2.6, (7) y (8) resulta $\epsilon_n V_n \longrightarrow 0$.

2.82 <u>Corolario</u>: <u>Si</u> $\{ l_n \}$ <u>es una sucesión de números réales que tiende a</u> 1 <u>y</u> $\{ W_n \}$ <u>una sucesión de elementos de</u> S <u>que converge a</u> W, <u>siendo</u> $W_n \geq 0$ <u>para toda</u> n, <u>entonces</u> $\lim l_n \, W_n = 1 \, W$.

<u>Demostración</u>: Sea $\epsilon_n = 1 - l_n$, de donde $\epsilon_n \longrightarrow 0$. Podemos - escribir:

$$l_n \, W_n = (1 - \epsilon_n) \, W_n = 1 \, W_n - \epsilon_n W_n.$$

Ahora bien:

$$1 \, W_n \longrightarrow 1 \, W \qquad \text{por 2.4,}$$

$$\epsilon_n W_n \longrightarrow 0 \qquad \text{por 2.81.}$$

$$\therefore \quad l_n \, W_n \longrightarrow 1 \, W \qquad \text{l.q.q.d.}$$

2.83 <u>Teorema</u>: <u>Cuando</u> S <u>es una red</u> (véase 1.2), <u>la sucesión</u> ---- $\{ W_m \}$ <u>converge a cero si se satisfacen las cuatro condiciones siguientes</u>:

1a. $W_m \geq 0$, <u>para toda</u> <u>m</u>.

2a. $U_{n,m} \geq W_m$ <u>para toda</u> <u>n</u> y <u>m</u>.

3a. Para cada valor de n converge la sucesión $\{ U_{n,m} \}$: -----

$U_{n,m} \xrightarrow[m \to \infty]{} U$.

4a. $U_n \longrightarrow 0$.

<u>Demostración</u>: Ya que $W_m \geq 0$, será suficiente demostrar la existencia de una sucesión no creciente $\{ Y_m \}$ que converja a cero y tal que $W_m \leq Y$ para toda <u>m</u>.

Por la 3a. condición existe para cada valor de <u>n</u> una sucesión $\{ V_{n,m} \}$ no creciente tal que

$$V_{n,m} \geq U_{n,m} \quad ; \quad V_{n,m} \xrightarrow[m \to \infty]{} U_n \qquad (1)$$

Definamos:

$$X_{1,m}= V_{1,m} \quad , \tag{2}$$

$$X_{n,m}= X_{n-1,m} \frown V_{n,m} \tag{3}$$

si $n>1$ (véase la notación mencionada en 1.2).

Por lo anterior se deducen estas consecuencias:

(a) $X_{n,m}\leq X_{n-1,m}$; $X_{n,m}\leq V_{n,m}$ (por (3)).

(b) $X_{n,m}\geq X_{n,m+1}$ <u>para toda n y m</u>.

Demostración de (b): En primer lugar $X_{n-1,m} \geq X_{n-1,m+1}$ implica - $X_{n,m}\geq X_{n,m+1}$; en efecto:

$$X_{n,m+1}\leq X_{n-1,m+1} \;;\; X_{n,m+1}\leq V_{n,m+1} \;,\; \text{por (a)};$$

pero $$V_{n,m+1}\leq V_{n,m} \;.$$

$$\therefore \quad X_{n,m+1}\leq X_{n-1,m} \;;\; X_{n,m+1}\leq V_{n,m} \;.$$

$$\therefore \quad X_{n,m+1}\leq X_{n-1,m} \frown V_{n,m}= X_{n,m} \;.$$

Además $X_{1,m}\geq X_{1,m+1}$ por (2), con lo que (b) queda demostrado -- por inducción.

(c) $W_m\leq X_{n,m}$ <u>para toda n y m</u>.

Demostración de (c): Por (1) y la 3a. condición: $W_m\leq V_{n,m}$ -- para toda n y m. Por consiguiente tomando en cuente (3): ---- $W_m\leq X_{n-1,m}$ implica $W_m\leq X_{n,m}$. Pero $W_m\leq X_{1,m}$, luego - (c) resulta por inducción.

(d) <u>Existe</u> $\lim\limits_{m\to\infty} X_{n,m}$ <u>y se tiene</u>: $\lim\limits_{m\to\infty} X_{n,m}\leq U_n$.

Demostración de (d): De (b) y (c) se deduce que la sucesión --- $\{X_{n,m}\}$ con n fija es no creciente y acotada; por lo tanto -- existe $\lim\limits_{m\to\infty} X_{n,m}$. De (a) se deduce que $\lim\limits_{m\to\infty} X_{n,m}\leq U_n$.

La sucesión $\{X_{n,m}\}$ con m fija es no creciente y acotada - debido a (a) y (c). Ahora sea $Y_m= \lim\limits_{n\to\infty} X_{n,m}$.

Por (c) y (b) resulta:

$$W_m\leq Y_m \;;\; Y_m \geq Y_{m+1} \;.$$

En consecuencia existe $Y=\lim\limits_{m\to\infty} Y_m$ y es $Y\geq 0$. Pero $Y_m\leq$ -----

$X_{n,m}$ para toda m, entonces por (d):

$$Y \leq \lim_{m\to\infty} X_{n,m} \leq U_n .$$
$$Y \leq \lim_{n\to\infty} U_n = 0$$
$$Y = 0.$$

En resumen: se ha demostrado la existencia de una sucesión no creciente $\{Y_m\}$ que converge a cero y tal que $W_m \leq Y$ para toda m.

$$\lim W_m = 0.$$

2.9 Continuidad de funciones con valores en S.

Introducido el concepto de convergencia, el espacio vectorial S adquiere una estructura topológica general con la -- cual ya tiene sentido hablar de la continuidad de funciones - con valores en S, en particular la de funciones de variable - real; consecuentemente definimos:

2.91: Una función $\psi(\alpha)$ de variable real α y con valores en S es continua en $\alpha = \alpha_0$, si para cualquier sucesión $\{\alpha_m\}$ convergiendo a α_0 la sucesión $\{\psi(\alpha_m)\}$ converge a $\psi(\alpha_0)$.

3. Integral de Riemann Stieltjes.

En este párrafo daremos la definición de Bochner (véase - [2], pág. 519-526) de la integral en $a \leq t \leq b$ de una función -- real continua f(t) con respecto a una función no decreciente - $\Xi(t)$ con valores en S. Después definiremos la integral de --- Riemann Stieltjes con extremos infinitos empleando la definición 2.1 de convergencia.

3.1. Sea f(t) una función real continua en $a \leq t \leq b$ y - $\Xi(t)$ una función no decreciente en el mismo intervalo con valores en el espacio S. Consideremos una división ----------- D $(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos cuyos extremos son los puntos $t_0, \ldots, t_n$: $a = t_0 < \ldots < t_n = b$.

Sean M_i, m_i las fronteras superior e inferior respectivamente de f(t) en el subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Definamos:

$$z(D) = \sum_{i=1}^{n} m_i [E(t_i) - E(t_{i-1})] \quad ; \quad Z(D) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} M_i [E(t_i) - E(t_{i-1})] .$$

Se ve inmediatamente que:

$$m [E(b) - E(a)] \leq z(d) \leq Z(D) \leq M [E(b) - E(a)] \quad .(1)$$

donde M y m son las fronteras de f(t) en $[a, b]$.

Por otra parte tenemos:

$$Z(D) - z(D) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) [E(t_i) - E(t_{i-1})] \qquad (2).$$

Ahora, sea $\epsilon = \max (M_i - m_i)$, entonces por (1) y (2):

$$0 \leq Z(D) - z(D) \leq \epsilon [E(b) - E(a)] \qquad (3).$$

La división $D'(t'_0, \ldots, t'_{n'})$ se llama <u>refinamiento</u> de D $(t_0, \ldots, t_n)$ si todos los puntos t_i son t'_j. Se demuestra sin dificultad que:

$$z(D) \leq z(D') \quad ; \quad Z(D') \leq Z(D) \qquad (4).$$

Se acostumbra designar por norma $\delta(D)$ de la división D a la longitud máxima de los subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$. Consideremos ahora una sucesión de divisiones $\{D_n\}$ en donde D_{n+1} es un refinamiento de D_n para $n = 1, 2, \ldots$, y $\delta(D_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Por (4) la sucesión $\{z(D_n)\}$ es no decreciente y $\{Z(D_n)\}$ es no creciente; por (1) ambas sucesiones están acotadas, por consiguiente son convergentes según 2.3. De (3) podemos escribir:

$$0 \leq Z(D_n) - z(D_n) \leq \epsilon_n [E(b) - E(a)] \qquad (5)$$

donde $\epsilon_n \longrightarrow 0$ puesto que $\delta(D_n) \longrightarrow 0$. Aplicando 2.81 obtenemos $\epsilon_n [E(b) - E(a)] \longrightarrow 0$, luego por (5) y 2.6:

$$\lim [Z(D_n) - z(D_n)] = 0.$$
$$\lim Z(D_n) = \lim z(D_n).$$

Es fácil ver que con cualquier otra sucesión de divisiones $\{D'_n\}$ que cumpla con los mismos requisitos que $\{D_n\}$ resulta ta: $\lim Z(D_n') = \lim Z(D_n)$. Es este elemento de S el que -- por definición se llamará la integral de Riemann Stieltjes de a a b de f(t) con respecto a E(t):

$$\int_a^b f(t)\, d\,E(t) = \lim Z(D_n) = \lim z(D_n).$$

Si $a = b$, definimos $\int_a^a = 0$; si $a > b$, $\int_a^b = -\int_b^a$. Como se - ve el proceso seguido aquí es muy semejante al correspondiente a las funciones reales; prosiguiendo con la semejanza se pue-- den demostrar las tres propiedades siguientes:

3.1: $\int_a^b [k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)]\, d\,E(t) = k_1 \int_a^b f_1(t)\, d\,E(t) +$ $+ k_2 \int_a^b f_2(t)\, d\,E(t)$, <u>donde</u> k_1, k_2 <u>son reales cualesquiera</u>.

3.2: $\left(\int_a^b + \int_b^c\right) f(t)\, d\,E(t) = \int_a^c f(t)\, d\,E(t)$.

3.3: $m[E(b) - E(a)] \leq \int_a^b f(t)\, d\,E(t) \leq M[E(b) - E(a)]$ siendo $a < b$.

3.4: Si $t_n \uparrow t$, la sucesión $\{E_n(t)\}$ es no decreciente y -- por 1.4 converge a un valor independiente de la sucesión particular $\{t_n\}$. A tal límite lo designaremos por $E(t-0)$; es claro que:

$$E(t-0) \leq E(t) \qquad (1).$$

Por otra parte si $t_1 < t_2$ entonces $E(t_1 - 0) \leq E(t_2 - 0)$, así pues la función $E^*(t) = E(t-0)$ también es no decre-- ciente. Supongamos ahora que $t_1 < t_2 < \dots < t_n \to t$, por consiguiente:

$$E^*(t-0) = \lim E^*(t_n) = \lim E(t_n - 0) \qquad (2).$$

Pero $E^*(t_n) = E(t_n - 0) \geq E(t_{n-1})$, de donde tomando límites y teniendo en cuenta (2):

$$E^*(t-0) \geq E(t-0) = E^*(t) \qquad (3).$$

Combinando (3) con el resultado (1) aplicado a E se llega a:

$$E^*(t-0) = E^*(t) \qquad (4).$$

3.5 <u>Teorema</u>: <u>Sean</u> , $f(t)$ <u>continua y</u> $E(t)$ <u>no decreciente</u> - <u>en</u> $[a', b]$. <u>Si</u> $E^*(t) = E(t-0)$ (véase 3.5) y ------- $a' < a < b$; <u>entonces</u>:

$$\int_a^b f(t)\, d\, E^*(t) = \int_a^b f(t)\, d\, E(t) + f(a)\left[E(a) - E^*(a)\right] -$$

$$- f(b)\left[E(b) - E^*(b)\right].$$

<u>Demostración</u>: Denotemos por $M(\alpha, \beta)$, $m(\alpha, \beta)$ a -- las fronteras superior e inferior respectivamente, de $f(t)$ - en el intervalo $[\alpha, \beta]$. Sea ahora $D(t_o, \ldots, t_n)$ una división de $[a, b]$; entonces $D'(t_o, t_1 - h, \ldots, t_n - h, t_n)$, donde $0 < h < \min(t_i - t_{i-1})$ es otra división de -- $[a, b]$. Sabemos por la primera parte de este párrafo 3 -- que:

$$z(D') \leq \int_a^b f(t)\, d\, E(t) \leq Z(D') \qquad (1).$$

Supongamos que <u>h</u> toma una sucesión de valores positivos h_K -- con límite cero; en vista de 2.82 se deduce:

$m(t_o, t_1 - h_K)\left[E(t_1 - h_K) - E(t_o)\right] \longrightarrow m(t_o, t_1)\left[E^*(t_1) - E(t_o)\right] = m(t_o, t_1)\left[E^*(t_1) - E^*(t_o)\right] + m(t_o, t_1)\left[E^*(a) - E(a)\right]$ (2)

$m(t_{i-1} - h_K, t_i - h_K)\left[E(t_n - h) - E(t_{i-1} - h_K)\right] \longrightarrow$ ---- $m(t_{i-1}, t_i)\left[E^*(t_i) - E^*(t_{i-1})\right]$ (3)

$m(t_n - h_K, t_n)\left[E(t_n) - E(t_n - h_K)\right] \longrightarrow f(b)\left[E(b) - E^*(b)\right]$ (4),

e iguales resultados sustituyendo las <u>m</u> por las M. Por otra -- parte definiendo:

$$z(D) = \sum_{i=1}^{n} m(t_{i-1}, t_i)\left[E^*(t_i) - E^*(t_{i-1})\right] \quad ; \quad Z^*(D) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} M(t_{i-1}, t_i)\left[E^*(t_i) - E^*(t_{i-1})\right] ,$$

obtenemos de (1), (2), (3) y (4):

$$z^*(D) + m(t_0, t_1)\left[E^*(a) - E(a)\right] + f(b)\left[E(b) - E^*(b)\right] \leq$$

$$\leq \int_a^b f(t)\, d\, E(t) \leq Z^*(D) + M(t_0, t_1)\left[E^*(a) - E(a)\right] +$$

$$+ f(b)\left[E(b) - E^*(b)\right] \qquad (5).$$

Ahora si la norma de la división D tiende a cero, de (5) re--- sulta lo que se quería demostrar.

3.6 Integral de Riemann Stieltjes con extremos infinitos.

Supongamos ahora que $f(t)$ es continua en $(-\infty, +\infty)$ y $E(t)$ con valores en S es no decreciente en el mismo intervalo. Por lo dicho al principio de este párrafo existe ------ $\int_c^d f(t)\, d\, E(t)$ siendo c y d números reales cualesquiera. Consideremos dos sucesiones $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ de números reales tales que $c_n \longrightarrow -\infty$, $d_n \longrightarrow +\infty$; si la sucesión ---------- $\left\{ \int_{c_n}^{d_n} f(t)\, d\, E(t) \right\}$ de elementos de S converge a un mismo elemento, independiente de las sucesiones particulares -------- $\{c_n\}$, $\{d_n\}$, tal elemento es por definición la integral de $-\infty$ a $+\infty$ de $f(t)$ con respecto a $E(t)$: -------- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, d\, E(t)$.

A continuación daremos una condición suficiente para la - existencia de la integral:

3.61 Lema: Si $f(t)$ es continua, acotada y conserva su signo en $(-\infty, +\infty)$ y $E(t)$ es no decreciente y acotada en el - mismo intervalo, existe $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, d\, E(t)$.

Demostración: Supongamos, para concretar, que $f(t) \geq 0$ en --- $(-\infty, +\infty)$ Por hipótesis existen un real M y dos elementos V_1 y V_2 de S tales que:

$$f(t) \leq M \quad , \quad V_1 \leq E(t) \leq V_2 \, , \tag{1}$$

para toda t de $(-\infty, +\infty)$. Si $\underline{c} < \underline{d}$ son dos reales cualesquiera, podemos escribir por 3.4 y (1):

$$\int_c^d f(t) \, d\, E(t) \leq M \, [E(d) - E(c)] \leq M \, (V_2 - V_1) \tag{2}$$

Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que:

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \longrightarrow -\infty,$$
$$b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n \longrightarrow +\infty.$$

Definiendo $T_n = \int_{a_n}^{b_n} f(t) \, d\, E(t)$, vemos que $\{T_n\}$ es no decreciente a partir de cierto rango, y acotada en vista de (2); por consiguiente converge a un elemento T. Ahora si --------- $\{a'_n\}$, $\{b'_n\}$ son otras dos sucesiones monótonas tales que $a'_n \longrightarrow -\infty$, $b_n \longrightarrow +\infty$, y definimos $T'_n = \int_{a'_n}^{b'_n} f(t) \, d\, E(t)$, se ve fácilmente por 1.5 que $\lim T'_n = T$. En otras palabras, - la sucesión $\left\{ \int_{c_n}^{d_n} f(t) \, d\, E(t) \right\}$ converge a un mismo límite cualesquiera que sean las sucesiones monótonas $\{c_n\}$ y $\{d_n\}$; en el caso general en que tales sucesiones no son necesariamente monótonas, pongamos:

$$a_n = \sup \, (c_n, c_{n+1}, \ldots\ldots),$$
$$b_n = \inf \, (d_n, d_{n+1}, \ldots\ldots).$$

$$\therefore \quad a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \longrightarrow -\infty$$
$$b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n \longrightarrow +\infty \, ,$$

y a partir de cierto rango: $c_n \leq a_n \leq b_n \leq d_n$ (3).

Además dado $\underline{n}$ existe $\underline{m}$ tal que:

$$a_m \leq c_n \quad ; \quad d_n \leq b_m \tag{4}$$

Por (3) tenemos, a partir de cierto rango:

$$T_n \leq \int_{c_n}^{d_n} f(t)\, d\, E(t) \qquad (5).$$

Por (4) podemos escribir:

$$\int_{c_n}^{d_n} f(t)\, d\, E(t) \leq T_m \leq T \qquad (6).$$

Por (5) y (6) vemos que existe $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, d\, E(t)$.

3.62 Teorema: Si $f(t)$ es continua y acotada en $(-\infty, +\infty)$ y $E(t)$ es no decreciente y acotada en el mismo intervalo, -- existe $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, d\, E(t)$.

Demostración: Consideremos $f^{+}(t)$, $f^{-}(t)$ que son la parte no negativa y la no positiva respectivamente de $f(t)$, -- que se definen como sigue:

$$f^{+}(t) = \sup\,(0, f(t)) \quad ; \quad f^{-}(t) = \inf\,(0, f(t)).$$

Estas funciones son continuas y acotadas en $(-\infty, +\infty)$ y $f^{+}(t) \geq 0$, $f^{-}(t) \leq 0$ en dicho intervalo; además $f(t) = f^{+}(t) + f^{-}(t)$,

$$\therefore \quad \int_{c_n}^{d_n} f(t)\, d\, E(t) = \int_{c_n}^{d_n} f\ (t)\, d\, E(t) + \int_{c_n}^{d_n} f\ (t)\, d\, E(t) \quad \ldots (1).$$

Por 3.61 y (1) queda demostrado el teorema.

3.63: Cuando $f(t)$ es continua en $[a, +\infty)$ definimos ------ $\int_{a}^{+\infty} f(t)\, d\, E(t)$ como el límite, si existe, de ------------ $\int_{a}^{b_n} f(t)\, d\, E(t)$ cuando $b_n \longrightarrow +\infty$, siempre que dicho límite sea independiente de la sucesión particular $\{ b_n \}$. Como en 3.62 podemos demostrar que $\int_{a}^{+\infty} f(t)\, d\, E(t)$ existe si $f(t)$ - es continua y acotada en $[a, +\infty)$ y $E(t)$ no decreciente y acotada en dicho intervalo. Lo que se acaba de decir se aplica igualmente, con sólo cambios secundarios, al caso ---------

$\int_{-\infty}^{b} f(t)\, d\, E(t).$

Al ser $E(t)$ no decreciente y acotada en $(-\infty, +\infty)$, existen los límites de $E(t_n)$, $E(t'_n)$ cuando $t_n \longrightarrow -\infty$, --- $t'_n \longrightarrow +\infty$ que designaremos respectivamente por $E(-\infty)$ y ---- $E(+\infty)$; claramente estos límites son independientes de las sucesiones particulares $\{t_n\}$, $\{t'_n\}$. Si $f(t)$ es continua y $E(t)$ no decreciente en $(-\infty, +\infty)$ y ambas acotadas en dicho intervalo, se demuestra fácilmente con ayuda de 3.1 a 3.3 las tres relaciones:

3.64: $$\int_{-\infty}^{+\infty} [k_1 f(t) + k_2 f_2(t)]\, d\, E(t) = k_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\, d\, E(t) + k_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)\, d\, E(t),$$

<u>donde</u> k_1, k_2 <u>son reales cualesquiera</u>. <u>Igual resultado si solo un extremo, y el mismo en cada integral, es infinito, siendo el extremo restante un mismo número real arbitrario</u>.

3.65: $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, d\, E(t) = \left(\int_{-\infty}^{a} + \int_{a}^{b} + \int_{b}^{+\infty}\right) f(t)\, d\, E(t).$$

3.66: $$m\,[E(+\infty) - E(-\infty)] \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dE(t) \leq M\,[E(+\infty) - E(-\infty)],$$

$$m\,[E(+\infty) - E(a)] \leq \int_{a}^{+\infty} f(t) dE(t) \leq M\,[E(+\infty) - E(a)],$$

$$m\,[E(b) - E(-\infty)] \leq \int_{-\infty}^{b} f(t) dE(t) \leq M\,[E(b) - E(-\infty)],$$

donde en cada caso M y m son las fronteras de $f(t)$ en el intervalo de integración correspondiente.

3.67 <u>Teorema</u>: <u>Si</u> $f(t)$ <u>es continua y acotada en</u> $(-\infty, +\infty)$ <u>y</u> $E(t)$ <u>no decreciente y acotada en el mismo intervalo</u>,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, d\, E^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, d\, E(t),$$

donde $E^*(t) = E(t - 0)$.

Demostración: Por 3.5 podemos escribir:

$$\int_{c_n}^{d_n} f(t)dE^*(t) = \int_{c_n}^{d_n} f(t)dE(t) + f(c_n)\left[E(c_n) - E^*(c_n)\right] -$$
$$- f(d_n)\left[E(d_n) - E^*(d_n)\right] \qquad (1).$$

Por otra parte:

$$m\left[E(c_n)-E^*(c_n)\right] \leq f(c_n)\left[E(c_n)-E^*(c_n)\right] \leq M\left[E(c_n)-E^*(c_n)\right] \qquad (2).$$

Pero $E(c_n) - E^*(c_n) \longrightarrow 0$, entonces por 2.4 tenemos:

$$m\left[E(c_n) - E(c_n^*)\right] \longrightarrow 0 \quad ; \quad M\left[E(c_n) - E^*(c_n)\right] \longrightarrow 0 \qquad (3).$$

En vista de 2.6, (2) y (3):

$$f(c_n)\left[E(c_n) - E^*(c_n)\right] \longrightarrow 0. \qquad (4).$$

Análogamente se demostraría:

$$f(d_n)\left[E(d_n) - E^*(d_n)\right] \longrightarrow 0. \qquad (5).$$

Con (1), (4) y (5) queda demostrado el teorema.

3.68 Lema: Sea $\{\beta_m\}$ una sucesión de números reales que converja a cero. Si $E(t)$ es no decreciente y acotada en ---------- $(-\infty, +\infty)$ se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\operatorname{sen} \beta_m t| \, dE(t) \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad m \longrightarrow \infty .$$

Demostración: Sea $p_m = \dfrac{1}{\sqrt{|\beta_m|}}$ si $\beta_m \neq 0$; $p_m = m$ si $\beta_m = 0$, por consiguiente $p_m \longrightarrow +\infty$. Ahora para t tal que $-p_m \leq t \leq p_m$ resulta:

$$- p_m |\beta_m| \leq |\beta_m| t \leq p_m |\beta_m| .$$

$$\therefore \qquad - \sqrt{|\beta_m|} \leq |\beta_m| t \leq \sqrt{|\beta_m|} .$$

$$\therefore \qquad |\operatorname{sen} \beta_m t| \leq \operatorname{sen} \sqrt{|\beta_m|} \qquad (1).$$

Por 3.3 y (1) obtenemos:

$$0 \leq \int_{-p_m}^{p_m} |\operatorname{sen}\beta_m t|\, dE(t) \leq [E(p_m) - E(-p_m)] \operatorname{sen}\sqrt{|\beta_m|} \leq$$
$$\leq [E(+\infty) - E(-\infty)] \operatorname{sen}\sqrt{|\beta_m|} \qquad (2).$$

Utilizando 3.66 resulta:

$$0 \leq \int_{-\infty}^{-p_m} |\operatorname{sen}\beta_m t|\, dE(t) \leq E(-p_m) - E(-\infty) \qquad (3)$$

$$0 \leq \int_{p_m}^{+\infty} |\operatorname{sen}\beta_m t|\, dE(t) \leq E(+\infty) - E(p_m) \qquad (4).$$

Ahora bien por 3.65:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\operatorname{sen}\beta_m t|\, dE(t) = \left(\int_{-\infty}^{-p_m} + \int_{-p_m}^{p_m} + \int_{p_m}^{+\infty} \right) \operatorname{sen}\beta_m t\, dE(t) \qquad (5).$$

Por (2), (3), (4) y (5) se deduce que:

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\operatorname{sen}\beta_m t|\, dE(t) \leq E(-p_m) - E(-\infty) + E(+\infty) - E(p_m) +$$
$$+ [E(+\infty) - E(-\infty)] \operatorname{sen}\sqrt{|\beta_m|}$$

Como $p_m \longrightarrow +\infty$, el tercer miembro de esta desigualdad tiende a cero cuando $m \longrightarrow +\infty$, lo que demuestra el lema.

3.69 <u>Teorema</u>: <u>Si</u> $E(t)$ <u>es no decreciente y acotada en</u> ------- $(-\infty, +\infty)$ <u>y la sucesión</u> $\{\alpha_m\}$ <u>converge hacia</u> α, <u>entonces</u>:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\alpha_m t\, dE(t) \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\alpha t\, dE(t)$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}\alpha_m t\, dE(t) \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}\alpha t\, dE(t),$$

<u>cuando</u> $m \longrightarrow \infty$.

<u>Demostración</u>: Sea $\beta_m = \frac{1}{2}(\alpha - \alpha_m)$. Ahora:

$$\cos\alpha t - \cos\alpha_m t = -2 \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha_m)\, t \operatorname{sen}\beta_m t \,, \qquad (1)$$

$$\operatorname{sen}\alpha t - \operatorname{sen}\alpha_m t = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha_m)\, t \operatorname{sen}\beta_m t \qquad (2).$$

Por otra parte tenemos:

$$-|\operatorname{sen}\beta_m t| \leq \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha_m)\, t \operatorname{sen}\beta_m t \leq |\operatorname{sen}\beta_m t|.$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} |\operatorname{sen}\beta_m t| dE(t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha_m)\, t \operatorname{sen}\beta_m t \; dE(t) \leq$$
$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\operatorname{sen}\beta_m t| dE(t) \qquad (3).$$

Análogamente se obtene:

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} |\operatorname{sen}\beta_m t| dE(t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha_m)\, t \operatorname{sen}\beta_m t \; dE(t) \leq$$
$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\operatorname{sen}\beta_m t| dE(t) \qquad (4).$$

Pero $\beta_m \longrightarrow 0$ cuando $m \longrightarrow \infty$; en consecuencia aplicando -- 3.68 y en vista de (1), (2), (3) y (4) queda demostrado el teo rema.

3.691 Observación: Por la definición 2.91 de continuidad y el teorema 3.69 vemos que las funciones de variable real α

$$\varphi'(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\alpha t \; dE(t) \quad ; \quad \varphi''(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}\alpha t dE(t)$$

definidas en $(-\infty, +\infty)$ y con valores en S, son continuas - para todo valor de α.

4. El espacio S^2.

Los elementos de S^2 son las parejas ordenadas (T, U) de elementos de S. Definiremos dos operaciones: la primera es la adición en este conjunto de parejas y la segunda la multiplicación de un complejo arbitrario por una pareja cualquiera:

1a. $(T, U)+(V, W)=(T+V, U+W)$.

2a. $(a+ib)(T, U)=(aT - bU, aU+bT)$.

Se vé fácilmente que con estas dos operaciones, S^2 es un espacio vectorial con coeficientes complejos. Además el conjunto S^* de elementos de S^2 de la forma $(T, 0)$ es un espacio vectorial con coeficientes reales isomorfo a S; por lo tanto podemos sustituir S^* por S y de acuerdo con las dos operaciones definidas antes tenemos que $(T, U)=T+i\,U$.

4.1 Convergencia en S^2.

Definición: Una sucesión $\{T_n+i\,U_n\}$ de elementos de S^2 es convergente si y solo si las sucesiones $\{T_n\}$, $\{U_n\}$ son convergentes en S. En tal caso el límite de $\{T_n+i\,U_n\}$ es $T+i\,U$, donde T y U son los límites de $\{T_n\}$; $\{U_n\}$ respectivamente.

4.2 Funciones con valores en S^2.

Toda función $\varphi(\alpha)$ de variable real α, con valores en S^2, puede escribirse en la forma $\varphi'(\alpha)+i\,\varphi''(\alpha)$ -- donde $\varphi'(\alpha)$ y $\varphi''(\alpha)$ son funciones de α con valores en S.

4.21 Definición: $\varphi(\alpha)$ definida en $(-\infty, +\infty)$ se llamará acotada si $\varphi'(\alpha)$, $\varphi''(\alpha)$ lo son en tal intervalo. En otras palabras, si existen elementos de S -------- V_1', V_2', V_1'', V_2'' tales que:

$$V_1' \leq \varphi'(\alpha) \leq V_2' \quad ; \quad V_1'' \leq \varphi''(\alpha) \leq V_2''$$

para todo α de $(-\infty, +\infty)$.

4.22 Definición: $\varphi(\alpha)$ es continua en $\alpha = \alpha_0$ si y solo si para toda sucesión $\{\alpha_m\}$ que converja a α_0, la sucesión $\{\varphi(\alpha_m)\}$ converge a $\varphi(\alpha_0)$.

Tomando en cuenta 4.1 y 2.91 vemos que el hecho de ser continua $\varphi(\alpha)$ en α_0 es equivalente a que $\varphi'(\alpha)$ y $\varphi''(\alpha)$ lo sean para $\alpha = \alpha_0$.

4.23 Integrales de funciones complejas.

Si $f(t) = f_1(t) + i\, f_2(t)$ es continua en $[a, b]$, f_1 y f_2 reales, entonces por definición:

$$\int_a^b f(t)\, d\, E(t) = \int_a^b f_1(t)\, d\, E(t) + i \int_a^b f_2\,(t)\, d\, E(t).$$

Si $f(t) = f_1(t) + i\, f_2(t)$ es continua en $(-\infty, +\infty)$ y existen las integrales $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\, d\, E(t)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)\, d\, E(t)$, entonces por definición:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, d\, E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\, d\, E(t) + i \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)\, d\, E(t).$$

4.3 Funciones de distribución.

Llamaremos función de distribución a toda función $E(t)$ definida en $(-\infty, +\infty)$ con valores en S, no decreciente y acotada en dicho intervalo

4.31 Nota: De aquí en adelante la letra E, con o sin índice, representará únicamente funciones de distribución.

4.4 Funciones características.

Por el teorema 3.62 vemos que para toda función de distribución $E(t)$ existe (véase 4.23) la función $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t}\, d\, E(t)$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\alpha t \, dE(t) + i \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}\alpha t \, dE(t)$, definida en ------ $(-\infty, +\infty)$ y con valores en S^2. A tal función la llamaremos <u>función característica</u> de $E(t)$. Con los resultados obtenidos hasta aquí podemos dar algunas propiedades de las funciones características:

4.41 <u>Toda función característica es continua en</u> $(-\infty, +\infty)$.
<u>Demostración</u>: Por 3.691 y 4.22.

4.42 <u>Toda función característica está acotada en</u> $(-\infty, +\infty)$.
<u>Demostración</u>: Por 3.66 tenemos que:

$$-[E(+\infty) - E(-\infty)] \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\alpha t \, dE(t) \leq E(+\infty) - E(-\infty),$$

$$-[E(+\infty) - E(-\infty)] \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}\alpha t \, dE(t) \leq E(+\infty) - E(-\infty),$$

lo que indica, según 4.21, que la función característica está acotada.

4.43 <u>Toda función característica es hermitiana. En otras palabras</u> $\varphi(-\alpha) = \overline{\varphi(\alpha)}$ <u>si</u> $\varphi(\alpha)$ <u>es característica, donde</u> $\overline{\varphi(\alpha)} = \varphi'(\alpha) - i\,\varphi''(\alpha)$.
<u>Demostración</u>: Inmediata.

4.44 <u>Si</u> $\varphi(\alpha)$ <u>es función característica, dados n números -- reales cualesquiera</u> $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ <u>y n números complejos arbitrarios</u> $\xi_1, \ldots \xi_n$, <u>se tiene</u>:

$$\sum_{p,q=1}^{n} \varphi(\alpha_p - \alpha_q) \xi_p \bar{\xi}_q \geq 0,$$

para $n = 1, 2, \ldots$.

<u>Demostración</u>: De 3.64 se deduce fácilmente que:

$$\sum_{p,q=1}^{n} \varphi(\alpha_p - \alpha_q) \xi_p \bar{\xi}_q = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{p,q=1}^{n} e^{i(\alpha_p - \alpha_q)t} \xi_p \bar{\xi}_q \right] dE(t) \ldots (1).$$

Por otra parte:

$$\sum_{p,q=1}^{n} e^{i(\alpha_p-\alpha_q)t}\xi_p\bar{\xi}_q = (\sum_{p=1}^{n} e^{i\alpha_p t}\xi_p)\overline{(\sum_{q=1}^{n} e^{i\alpha_q t}\xi_q)} \geq 0 \quad (2).$$

De (1) y (2) se deduce la afirmación.

4.5 Funciones definitivamente positivas.

Una función $\varphi(\alpha)$ definida en $(-\infty, +\infty)$ y con valores - en S^2 es definitivamente positiva si y solo si:

1o. $\varphi(\alpha)$ es continua en $(-\infty, +\infty)$.

2o. $\varphi(\alpha)$ está acotada en $(-\infty, +\infty)$.

3o. $\varphi(\alpha)$ es hermitiana: $\varphi(-\alpha) = \overline{\varphi(\alpha)}$.

4o. Dados n números reales cualesquiera $\alpha_1, \ldots \alpha_n$, y n números complejos arbitrarios $\xi_1, \ldots \xi_n$, se tiene:

$$\sum_{p,q=1}^{n} \varphi(\alpha_p-\alpha_q)\xi_p\bar{\xi}_q \geq 0,$$

para $n=1, 2, \ldots$.

Utilizando de 4.41 a 4.45 se deduce el siguiente teorema:

4.6 Teorema: Toda función característica es función definitivamente positiva.

5. Propiedades de las funciones definitivamente positivas.

Tomando como modelo el teorema de Bochner (véase introducción), procuraremos representar a toda función definitivamente positiva por medio de funciones características. El método que se va a seguir es análogo al empleado por F. Riesz (véase [4]) y S. Bochner (véase [2]); en términos generales este método consiste en construir, para cada función definitivamente positiva, una transformación A del conjunto de las funciones periódicas continuas a un subconjunto de S, siendo tal transformación distributiva y positiva, esto es: $A(\xi_1 f_1 + \xi_2 f_2) = \xi_1 A(f_1) + \xi_2 A(f_2)$, y $A(f) \geq 0$ si $f(t)$ es no negativa, donde f_1, f_2, f son funciones periódicas (f_1 y f_2 del mismo período) continuas, con valores complejos, y ξ_1, ξ_2 son números complejos cualesquiera.

5.1 Dada una función definitivamente positiva $\varphi(\alpha)$, el primer paso en la construcción de A es definir una cierta transformación A^*, distributiva y positiva, que asocie un elemento de S^2 a cada polinomio trigonométrico; la transformación A resultará como una extensión de A^* a todas las funciones periódicas continuas. Antes de seguir adelante es necesario precisar los conceptos que se van a emplear, lo que se hace a continuación:

5.11 Polinomios trigonométricos.

Consideremos una expresión de la forma $\sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\alpha_\nu t}$, donde $c_{-\nu} = \overline{c}_\nu$, $0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$, y $\alpha_{-\nu} = -\alpha_\nu$; es claro que tal expresión representa una función real y continua para todo valor de t. Por otra parte es fácil demostrar que ninguna función puede representarse en tal forma de más de una manera; en otras palabras, si $\sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\alpha_\nu t} = \sum_{\nu=-n'}^{n'} c'_\nu e^{i\alpha'_\nu t}$ para toda t, entonces $c_\nu = c'_\nu$, $\alpha_\nu = \alpha'_\nu$, $n=n'$. Supongamos además -- que existe un número real $\mu > 0$ tal que para $\nu = 1, \ldots, n$, $\mu \alpha_\nu$ sea entero; entonces $\sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\alpha_\nu t}$ es una función periódica de período $2\mu\pi$.

Llamaremos <u>polinomio trigonométrico</u> a una función $\sigma(t)$ definida como sigue:

1o. $\sigma(t) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\alpha_\nu t} + i \sum_{\nu=-n'}^{n'} c'_\nu e^{i\alpha'_\nu t}$.

2o. $c_{-\nu} = \bar{c}_\nu$, $\alpha_{-\nu} = -\alpha_\nu$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$; análogamente, $c'_{-\nu} = \bar{c}'_\nu$, $\alpha'_{-\nu} = -\alpha_\nu$, $0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$.

3o. Existe un número $\mu > 0$ tal que $\mu\alpha_\nu$ y $\mu\alpha'_\nu$ son enteros para todos los valores asignados a ν .

De lo dicho al principio de este número se sigue que todo polinomio trigonométrico $\sigma(t)$ es una función periódica continua de período $2\mu\pi$, con valores complejos, y cuya representación en esta forma es única.

5.12 <u>Formas hermitianas</u>.

Por definición (véase [5] pág. 131), $\sum_{p,q=1}^{n} h_{pq} x_p \bar{x}_q$ es una -- <u>forma hermitiana</u> si $h_{pq} = \overline{h}_{pq}$, esto es, si su matriz ------ $H = [h_{pq}]$ es hermitiana: $H = \overline{H}'$. El valor de la forma hermitiana es real cualquiera que sea el vector $x = (x_1, \ldots, x_n)$; diremos que es <u>no negativa</u> si su valor es ≥ 0 cualquiera que sea x. Utilizando matrices se puede escribir la forma hermitiana como $x H \bar{x}'$.

5.13 <u>Definición de la transformación</u> A^*.

Dada una función definitivamente positiva $\varphi(\alpha)$, y si ----

$\sigma(t)$ es un polinomio trigonométrico (véase 5.11), definimos

$$A^*(\sigma) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu \varphi(\alpha_\nu) + i \sum_{\nu=-n'}^{n'} c'_\nu \varphi(\alpha'_\nu).$$

Por ser única la representación en forma de polinomio trigonométrico, la transformación A^* asocia uno y solo un elemento de S^2 a cada σ . De la definición de A^* se deduce sin dificultad que:

5.14 Teorema: A^* es distributiva.

Para demostrar que A^* es positiva necesitamos los lemas siguientes:

5.15 Lema: Si la forma hermitiana $x H \bar{x}'$ (véase 5.12) es no negativa, existen números l_{pq} , p, q=1, ..., tales que

$$h_{pq} = \sum_{K=1}^{n} l_{Kp} \bar{l}_{Kq}.$$

Demostración: Por medio de una transformación lineal no singular de matriz P, escribimos la forma hermitiana en su forma normal (véase [5] pág. 131):

$$x H \bar{x}' = \sum_{K=1}^{r} \gamma_K y_K \bar{y}_K \tag{1}$$

donde $y = xP$, r es el rango de H y las γ_K son reales diferentes de cero. Por ser no negativa la forma considerada, los coeficientes γ_K deben ser positivos; por consiguiente existe una transformación lineal no singular $z = y\,Q$ tal que:

$$x H \bar{x}' = z_1 \bar{z}_1 + \ldots + z_r \bar{z}_r \tag{2}$$

donde $z = x R$, siendo $R = P\,Q$.

Si la matriz J tiene los r primeros elementos de su diagonal principal iguales a 1 y sus elementos restantes son nulos, podemos escribir (2) como

$$x\, H\, \bar{x}' = z\, J\, \bar{z}' \qquad (3).$$

Sustituyendo z por x R en (3), obtenemos:

$$x\, H\, \bar{x}' = x\, R\, J\, \bar{R}'\, \bar{x}'.$$

$$\therefore \qquad H = R\, J\, \bar{R}' \qquad (4).$$

Ahora, si λ_{pq} son los elementos de la matriz R', tenemos -- por (4) que $h_{pq} = \sum_{K=1}^{r} \lambda_{Kp} \bar{\lambda}_{Kq}$. Por último, si definimos - $l_{pq} = \lambda_{pq}$ si $p \leq r$; $l_{pq} = 0$ si $p > r$, resulta:

$$h_{pq} = \sum_{K=1}^{n} l_{Kp} \bar{l}_{Kq}.$$

5.16 <u>Lema</u>: Si $\psi(\alpha)$ <u>es cualquier función definitivamente</u> -- <u>positiva y</u> $\sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu t}$, <u>con</u> $c_{-\nu} = \bar{c}_\nu$, <u>es no negativa para todo valor de t, entonces</u>:

$$\sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu \psi(\nu) \geq 0.$$

<u>Demostración</u>: Sea $g(t) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu t}$; poniendo $c_{-\nu} = c_\nu = 0$ para $\nu > n$, se tiene $g(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\nu t}$. Por hipótesis $g(t) \geq 0$; por un teorema de Toeplitz (véase [6] pág. 191-192) se sabe que el hecho de ser $g(t)$ no negativa implica que las formas hermitianas $\sum_{p,q=1}^{m} c_{p-q} x_p \bar{x}_q$ sean no negativas para $m = 1, 2, \ldots$; por consiguiente por el lema 5.15 -- deducimos que para cada valor de <u>m</u> existen números ---------- l_{pq} , $p, q = 1, \ldots, m$ tales que:

$$c_{p-q} = \sum_{K=1}^{m} l_{Kp} \bar{l}_{Kq}.$$

$$\therefore \qquad \sum_{p,q=1}^{m} c_{p-q}\, \psi(p-q) = \sum_{p,q=1}^{m} \sum_{K=1}^{m} l_{Kp} \bar{l}_{Kq}\, \psi(p-q) =$$
$$= \sum_{K=1}^{m} \sum_{p,q=1}^{m} \psi(p-q)\, l_{Kp} \bar{l}_{Kq} \qquad (1).$$

Por otra parte, para cada valor de k:

$$\sum_{p,q=1}^{m} \psi(p - q)\, t_{kp}\, t_{kq} \geq 0 \qquad (2)$$

puesto que ψ es definitivamente positiva (véase 4.5). De -- (1) y (2) se tiene:

$$\sum_{p,q=1}^{m} c_{p-q}\, \psi(p - q) \geq 0 \qquad (3).$$

para $m = 1, 2, \ldots$.

Ahora pongamos $T_m = \sum_{\nu=-m}^{m} c_\nu\, \psi(\nu)$; por inducción se - demuestra fácilmente que:

$$\sum_{k=0}^{m} T_k = \sum_{p,q=1}^{m+1} c_{p-q}\, \psi(p - q) \quad (m = 0, 1, \ldots) \qquad (4).$$

Por (3) y (4) se deduce:

$$\sum_{k=0}^{m} T_k \geq 0 \qquad (m = 0, 1, \ldots) \qquad (5).$$

Ya que $c_{-\nu} = c_\nu = 0$ para $\nu > n$, se ve por la definición de T_m que $T_m = T_n$ para $m > n$. De (5) resulta:

$$\sum_{k=0}^{n} T_k + (m - n)\, T_n \geq 0 \qquad (m \geq n).$$

$$\therefore \qquad T_n \geq -\frac{1}{m+n} \sum_{k=0}^{n} T_k \qquad (6).$$

Ahora bien $\sum_{k=0}^{n} T_k \geq 0$ por (5), y $-\frac{1}{m+n} \to 0$ cuando -------- $m \to \infty$; entonces podemos aplicar el teorema 2.81, obteniendo de (6): $T_n \geq 0$. Pero T_n es precisamente $\sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu\, \psi(\nu)$, con lo que el lema queda demostrado.

5.17 <u>Teorema</u>: A^* <u>es positiva</u>.

<u>Demostración</u>: Sea $\sigma(t) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu\, e^{i\alpha_\nu t}$ un polinomio -- trigonométrico (véase 5.11) real no negativo y de período ---- $2\mu\pi$; se tiene que demostrar que $A^*(\sigma) \geq 0$. Utilizaremos

la función auxiliar $g(t)=\sigma(\mu t)=\sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\mu\alpha_\nu t}$; esta -- función $g(t)$ es de período 2π y no negativa. Por otra parte la función $\psi(\alpha)=\varphi(\frac{1}{\mu}\alpha)$ es también definitivamente positiva como se vé fácilmente, luego podemos aplicar el lema 5.16 a las funciones $g(t)$ y $\psi(\alpha)$ y resulta:

$$\sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu \psi(\mu\alpha_\nu)\geq 0 \qquad (1).$$

Pero por la definición de ψ tenemos que $\psi(\mu\alpha_\nu)=$ $=\varphi(\alpha_\nu)$; además $A^*(\sigma)=\sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu \varphi(\alpha_\nu)$ por definición de A^*. Entonces por (1):

$$A^*(\sigma)\geq 0 \qquad \text{l.q.q.d.}$$

5.18 <u>Observación</u>: Si $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$ son dos polinomios -- trigonométricos reales de igual período tales que ----------- $\sigma_1(t)\geq\sigma_2(t)$, entonces por los teoremas 5.14 y 5.17 se deduce inmediatamente que $A^*(\sigma_1)\geq A^*(\sigma_2)$. En otras palabras, la transformación A^* <u>preserva el orden</u>.

5.2 <u>La transformación</u> A .

Para definir A demostraremos a continuación que si $f(t)$ es función periódica continua y $\{\omega_m(t)\}$ es una sucesión de polinomios trigonométricos (del mismo período que $f(t)$) que - converge uniformemente a $f(t)$, entonces la sucesión ------ $\{A^*(\omega_m)\}$ de elementos de S^2 converge, y su límite es independiente de la sucesión particular $\{\omega_m(t)\}$; tal límite será $A(f)$ por definición. Después se demostrará que A es distributiva y positiva, y en consecuencia preserva el orden (véase 5.18).

5.21 <u>Lema</u>: <u>Si $f(t)$ es una función real periódica y continua, existen dos sucesiones monótonas</u> $\{\sigma_m(t)\}$, $\{\tau_m(t)\}$ <u>de</u>

polinomios trigonométricos reales, la primera creciente y la segunda decreciente, que convergen uniformemente a $f(t)$. Dichos polinomios son de igual período que $f(t)$.

Demostración: Por un teorema de Fejer (véase [7] pág. 414) existe para cada m un polinomio trigonométrico $\sigma_m(t)$ tal que:

$$\left| f(t) - \frac{1}{m} - \sigma_m(t) \right| < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) \qquad (1)$$

para toda t de $(-\infty, +\infty)$; esto es, la sucesión $\{\sigma_m(t)\}$ converge uniformemente a $f(t)$. Además, por (1) también:

$$\sigma_{m+1}(t) > f(t) - \frac{1}{m+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right) >$$

$$> f(t) - \frac{1}{m} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) > \sigma_m(t),$$

lo que demuestra que la sucesión $\{\sigma_m(t)\}$ es creciente.

Análogamente existe la sucesión $\{\tau_m(t)\}$ de polinomios trigonométricos tales que:

$$\left| f(t) + \frac{1}{m} - \tau_m(t) \right| < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right);$$

por consiguiente $\{\tau_m(t)\}$ es decreciente y converge uniformemente a $f(t)$.

5.22 Teorema: Si $f(t)$ es una función periódica continua y $\{\omega_m(t)\}$ es una sucesión de polinomios trigonométricos del mismo período que $f(t)$, que converge uniformemente hacia $f(t)$, entonces la sucesión $\{A^*(\omega_m)\}$ de elementos de S^2 converge y su límite es independiente de la sucesión particular $\{\omega_m(t)\}$.

Demostración: De la afirmación para $f(t)$ real se deduce fácilmente el teorema para $f(t)$ compleja; por consiguiente sólo demostraremos el caso en que $f(t)$ es real. Consideremos las sucesiones $\{\sigma_m(t)\}$, $\{\tau_m(t)\}$ del lema 5.21; por 5.18 las sucesiones $\{A^*(\sigma_m)\}$, $\{A^*(\tau_m)\}$ son no decreciente y no creciente respectivamente, y es claro que están acotadas; además:

$$0 < \tau_m(t) - \sigma_m(t) < \frac{3}{m} - \frac{1}{m+1}.$$

$$0 \leq A(\tau_m) - A^*(\sigma_m) \leq A^*\left(\frac{3}{m} - \frac{1}{m+1}\right) = \left(\frac{3}{m} - \frac{1}{m+1}\right)\varphi(0) \qquad (1),$$

utilizando las propiedades de A . Si se hace tender m al infinito vemos por (1) que $\lim A^*(\tau_m) = \lim A^*(\sigma_m)$.

Sea ahora $\{\omega_m(t)\}$ una sucesión cualquiera de polinomios trigonométricos que converja uniformemente a $f(t)$; definamos $\epsilon_m = \sup|f(t) - \omega_m(t)|$, de donde $\epsilon_m \longrightarrow 0$. Por otra parte se puede escribir:

$$\sigma_m(t) - \epsilon_m < f(t) - \epsilon_m \leq \omega_m(t) \leq f(t) + \epsilon_m < \tau_m(t) + \epsilon_m .$$

$$\therefore \quad A^*(\sigma_m) - \epsilon_m\,\varphi(0) < A^*(\omega_m) < A^*(\tau_m) + \epsilon_m\,\varphi(0),$$

lo que implica que $\{A^*(\omega_m)\}$ converge (véase 2.6) y su límite es igual a cualquiera de los valores $\lim A^*(\tau_m)$, $\lim A^*(\sigma_m)$, puesto que $\epsilon_m\,\varphi(0) \longrightarrow 0$ por 2.81.

5.23: Definición de A .

Si $f(t)$ es función periódica continua, definimos:

$$A(f) = \lim A^*(\omega_m),$$

donde $\{\omega_m(t)\}$ es cualquier sucesión de polinomios trigonométricos convergiendo uniformemente a $f(t)$. Por 5.22 la transformación A asocia a cada función periódica continua un elemento de S^2 y sólo uno; además $A(\sigma) = A^*(\sigma)$ para todo polinomio trigonométrico, lo que indica que A es una extensión de A^*.

5.24 Teorema: A es distributiva.

Demostración: Sean $f_1(t)$, $f_2(t)$ dos funciones continuas del mismo período y ξ_1 , ξ_2 dos números complejos arbitrarios. Consideremos dos sucesiones $\{\omega_{1,m}(t)\}$, $\{\omega_{2,m}(t)\}$ de polinomios trigonométricos que converjan uniformemente a $f_1(t)$, $f_2(t)$ respectivamente; es claro que -

la sucesión $\{\xi_1 \omega_{1,m}(t) + \xi_2 \omega_{2,m}(t)\}$ converge uniforme--- mente a $\xi_1 f_1(t) + \xi_2 f_2(t)$; entonces por la definición de A y la distributividad de A^* podemos escribir:

$$\begin{aligned} A(\xi_1 f_1 + \xi_2 f_2) &= \lim A^*(\xi_1 \omega_{1,m} + \xi_2 \omega_{2,m}) \\ &= \lim \left[\xi_1 A^*(\omega_{1,m}) + \xi_2 A^*(\omega_{2,m})\right] \\ &= \xi_1 \lim A^*(\omega_{1,m}) + \xi_2 \lim A^*(\omega_{2,m}) \\ &= \xi_1 A(f_1) + \xi_2 A(f_2), \end{aligned}$$

que era lo que se quería demostrar.

5.25 <u>Teorema</u>: <u>A es positiva</u>.

<u>Demostración</u>: Supongamos que $f(t)$ es periódica continua y no negativa. Consideremos la sucesión decreciente --------- $\{\tau_m(t)\}$ de polinomios trigonométricos del lema 5.21; de la hipótesis resulta $\tau_m(t) \geq 0$ para toda <u>m</u>, de donde se deduce por 5.17 que $A^*(\tau_m) \geq 0$ para toda <u>m</u>, pero:

$$A(f) = \lim A^*(\tau_m).$$

$$\therefore \qquad A(f) \geq 0 \qquad\qquad \text{l.q.q.d.}$$

5.26 <u>Observación</u>: Como en 5.18, podemos deducir inmediatamente de 5.24 y 5.25 que la transformación A <u>preserva el orden</u>. Además es evidente que A es la <u>única extensión</u> posible de A^* que - sea distributiva y positiva.

5.3 <u>Las funciones de distribución</u> E_μ .

Sean μ, ρ, ϵ tres números reales satisfaciendo estas -- condiciones: $\mu > 0$; $|\rho| < \mu\pi$; $0 < \epsilon < \frac{1}{2}(\mu\pi + \rho)$. En lo que sigue utilizaremos dos funciones auxiliares ----------- $\omega_{\mu,\rho,\epsilon}(t)$, $\Omega_{\mu,\epsilon}(t)$, de período $2\mu\pi$ definidas como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} \omega_{\mu,\rho,\epsilon}(t) &= \tfrac{1}{\epsilon}(t + \mu\pi) && \text{si } -\mu\pi \leq t \leq -\mu\pi + \epsilon \\ &= 1 && \text{si } -\mu\pi + \epsilon \leq t \leq \rho - \epsilon \end{aligned}$$

$$\omega_{\mu,\rho,\epsilon}(t) = \frac{1}{\epsilon}(\rho - t) \quad \text{si} \quad \rho-\epsilon \leq t \leq \rho$$
$$= 0 \quad \text{si} \quad \rho \leq t \leq \mu\pi$$
$$\Omega_{\mu,\epsilon}(t) = 1 - \frac{1}{\epsilon}(t+\mu\pi) \quad \text{si} \quad -\mu\pi \leq t \leq -\mu\pi+\epsilon$$
$$= 0 \quad \text{si} \quad -\mu\pi+\epsilon \leq t \leq \mu\pi-\epsilon$$
$$= 1 - \frac{1}{\epsilon}(-t+\mu\pi) \quad \text{si} \quad \mu\pi-\epsilon \leq t \leq \mu\pi \,.$$

Estas funciones son continuas y no negativas; además cuando --- ϵ disminuye, perteneciendo fijas μ y ρ , ω crece y --- Ω decrece; cuando ρ aumenta, quedando fijas μ y ϵ , la - función ω crece. Supongamos ahora que ϵ toma una suce--- sión monótona de valores positivos ϵ_n que tienda a cero; por lo anterior y 5.26 existe $\lim A\ (\omega_{\mu,\rho,\epsilon})$, y tal límite es independiente de la sucesión particular $\{\epsilon_n\}$. En estas con diciones podemos definir <u>la función de distribución</u> $E_\mu(t)$ (véase 4.3) del modo siguiente:

$$E_\mu(\rho) = \lim A\ (\omega_{\mu,\rho,\epsilon_n}) \quad \text{si} \quad -\mu\pi < \rho < \mu\pi$$
$$= 0 \quad \text{si} \quad \rho \leq -\mu\pi$$
$$= \varphi(0) \quad \text{si} \quad \rho \geq \mu\pi$$

Con esta definición de las funciones $E_\mu(t)$ se obtiene -- una relación entre la transformación A y las integrales de Rie- mann Stieltjes con respecto a dichas funciones, como se vé en - el lema siguiente:

5.31 <u>Lema: Si</u> $f(t)$ <u>es una función continua de período</u> ------- $2\mu\pi$ <u>entonces</u>

$$A\ (f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, d\, E_\mu(t) \,.$$

<u>Demostración</u>: En vista de 4.23 y 5.24 será suficiente de- mostrar el lema cuando $f(t)$ es real. Sea <u>c</u> un número positi- vo arbitrario; consideremos una división $D\ (t_0, \ldots, t_n)$ del - intervalo $[-\mu\pi, \mu\pi]$, y sean M_K , m_K las fronteras su-

perior e inferior, respectivamente, de $f(t)$ en el subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$. Supongamos que la norma δ de D sea suficientemente pequeña para que:

$$|f(t') - f(t'')| < \frac{c}{4} \quad \text{si} \quad |t' - t''| < 4\delta \quad ;$$

en particular:

$$|m_k - m_{k+1}| < \frac{c}{4} \quad ; \quad |M_k - M_{k+1}| < \frac{c}{4} \quad ; \; k = 1, \ldots, n-1. \quad (1)$$

Tomemos $\epsilon < \frac{1}{2} \min (t_k - t_{k-1})$ y definamos (véase 5.3):

$$F(t) = m_1 \Omega_{\mu,\epsilon}(t) + m_1 \omega_{\mu,t,\epsilon}(t) +$$

$$+ \sum_{k=2} m_k \left[\omega_{\mu,t_k,\epsilon}(t) - \omega_{\mu,t_{k-1},\epsilon}(t) \right] \qquad (2)$$

Por (1) y (2) se obtiene:

$$f(t) + c > F(t).$$

$$\therefore \quad A(f) + c\,\varphi(0) \geq A(F) \qquad (3)$$

Pero $\omega_{\mu,t_n,\epsilon}(t) + \Omega_{\mu,\epsilon}(t) = 1$, por consiguiente:

$$m_n A(\omega_{\mu,t_n,\epsilon}) + m_1 A(\Omega_{\mu,\epsilon}) = m_n E_\mu(t_n) + (m_1 - m_n) A(\Omega_{\mu,\epsilon}).$$

$$\therefore \; A(F) = m_1 A(\omega_{\mu,t_1,\epsilon}) + \sum_{k=2}^{n-1} m_k \left[A(\omega_{\mu,t_k,\epsilon}) - A(\omega_{\mu,t_{k-1},\epsilon}) \right] +$$

$$+ m_n \left[E_\mu(t_n) - A(\omega_{\mu,t_{n-1},\epsilon}) \right] + (m_1 - m_n) A(\Omega_{\mu,\epsilon}) \qquad (4)$$

Ahora si ϵ toma una sucesión de valores positivos ϵ_j que tienda a cero, se deduce de (4) y 5.3:

$$\lim A(F) = \sum_{k=1}^{n} m_k \left[E_\mu(t_k) - E_\mu(t_{k-1}) \right] +$$

$$+ (m_1 - m_n) \lim A(\Omega_{\mu,\epsilon_j}) \qquad (5)$$

Por (3) y (5) podemos escribir:

$$A(f) + c\,\varphi(0) \geq \sum_{k=1} m_k \left[E_\mu(t_k) - E_\mu(t_{k-1}) \right] +$$

$$+ (m_1 - m_n) \lim A(\Omega_{\mu,\epsilon_j}) \qquad (6)$$

En la misma forma se demuestra que:

$$A(f) - c\,\varphi(0) \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \left[E_\mu(t_k) - E_\mu(t_{k-1}) \right] +$$

$$+(M_1 - M_n)\lim A(\Omega_{\mu,\epsilon_j}) \qquad (7).$$

Ahora considerando una sucesión de divisiones ordenada por refinamiento (véase 3.1) y en donde la norma tienda a cero, tenemos:

$$m_1 - m_n \longrightarrow 0 \quad ; \quad M_1 - M_n \longrightarrow 0 \qquad (8)$$

por ser $f(t)$ periódica continua. Además $\lim A(\Omega_{\mu,\epsilon_j}) \geq 0$, entonces por 2.81 y (8) resulta:

$$(m_1 - m_n)\lim A(\Omega_{\mu,\epsilon_j}) \longrightarrow 0 \quad ; \quad (M_1 - M_n)\lim A(\Omega_{\mu,\epsilon_j}) \longrightarrow 0 \qquad (9).$$

De (6), (7) y (9) se deduce, al tender la norma a cero, que:

$$A(f) + c\,\varphi(0) \geq \int_{-\mu\pi}^{\mu\pi} f(t)\, d\,E_\mu(t) \quad ;$$

$$A(f) - c\,\varphi(0) \leq \int_{-\mu\pi}^{\mu\pi} f(t)\, d\,E_\mu(t) \quad ,$$

lo que implica, por ser c arbitrario, que:

$$A(f) = \int_{-\mu\pi}^{\mu\pi} f(t)\, d\,E_\mu(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, d\,E_\mu(t) \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Una propiedad de las funciones E_μ que se puede mencionar aquí, es:

5.32 **Teorema: Si h es un número positivo, se tiene:**

$$E_\mu(h\pi\mu) \longrightarrow \varphi(0) \quad , \quad E_\mu(-h\pi\mu) \longrightarrow 0,$$

cuando $\mu \longrightarrow \infty$.

Demostración: En el caso $h \geq 1$ la afirmación es evidente; supongamos pues que $0 < h < 1$. Sea ahora ϵ un número positivo menor que h; definamos la función continua $\gamma_{\mu,h,\epsilon}(t)$, de período $2\mu\pi$ siendo $\mu \geq 1$, del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu,h,\epsilon}(t) &= 1 && \text{si } 0 \leq t \leq h\mu\pi - \epsilon \\ &= -\tfrac{1}{\epsilon}(t - h\mu\pi) && \text{si } h\mu\pi - \epsilon \leq t \leq h\mu\pi \\ &= 0 && \text{si } h\mu\pi \leq t \leq \mu\pi. \end{aligned}$$

$$\gamma_{\mu,h,\epsilon}(-t) = \gamma_{\mu,h,\epsilon}(t).$$

De esta definición y por 5.31, 3.65 y 3.66 se deduce:

$$A(\gamma_{\mu,h,\epsilon}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{\mu,h,\epsilon}(t)dE \quad (t) \leq E_{\mu}(h\mu\pi)-E_{\mu}(-h\mu\pi) \qquad (1)$$

Por otra parte se vé fácilmente que si ϵ es suficientemente pequeño, se tiene para cualquier valor de t:

$$\gamma_{\mu,h,\epsilon}(t) \geq 1 - \frac{1-\cos\frac{t}{\mu}}{1-\cos h\pi} = 1 - \frac{1}{1-\cos h\pi}\left\{1 - \frac{1}{2}\left[e^{\frac{it}{\mu}} + e^{-\frac{it}{\mu}}\right]\right\} .$$

$$\therefore \quad A(\gamma_{\mu,h,\epsilon}) \geq \varphi(0) - \frac{1}{1-\cos h\pi}\left\{\varphi(0) - \frac{1}{2}\left[\varphi(\tfrac{1}{\mu}) + \varphi(-\tfrac{1}{\mu})\right]\right\} \qquad (2)$$

Por la definición de E_{μ} y (1) y (2) se deduce:

$$\varphi(0) \geq E_{\mu}(h\pi\mu) - E_{\mu}(-h\pi\mu) \geq$$

$$\geq \varphi(0) - \frac{1}{1-\cos h\pi}\left\{\varphi(0) - \frac{1}{2}\left[\varphi(\tfrac{1}{\mu}) + \varphi(-\tfrac{1}{\mu})\right]\right\}$$

$$\therefore \quad E_{\mu}(h\pi\mu) - E_{\mu}(-h\pi\mu) \xrightarrow[\mu\to\infty]{} \varphi(0).$$

Pero $\varphi(0) \geq E_{\mu}(h\pi\mu) \geq E_{\mu}(h\pi\mu) - E_{\mu}(-h\pi\mu)$,

$$\therefore \quad E_{\mu}(h\pi\mu) \longrightarrow \varphi(0);$$

$$\therefore \quad E \quad (-h\pi\mu) \longrightarrow 0.$$

5.4 Con los resultados obtenidos hasta ahora deduciremos va--- rias propiedades de las funciones definitivamente positivas -- $\varphi(\alpha)$, a saber:

5.41 <u>Teorema</u>: $\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t}\, d\, E_{\mu}(t)$,

<u>para todo número real</u> α <u>tal que</u> $\mu\alpha$ <u>sea entero</u>.

<u>Demostración</u>: Si $\mu\alpha$ es entero, la función $e^{i\alpha t}$ tiene período igual a $2\mu\pi$; entonces por 5.31 tenemos:

$$A\ (e^{i\alpha t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t}\, d\, E \quad (t).$$

Pero $$A\ (e^{i\alpha t}) = \varphi(\alpha) ,$$

con lo que el teorema queda demostrado.

5.42 <u>Corolario</u>: <u>Si</u> α <u>es racional y m es un número natrual</u> -

ral suficientemente grande:

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t}\, d\, E_{m!}(t).$$

Demostración: Inmediata en vista de 5.41.

5.43 Teorema: Existe una sucesión $\{\varphi_m(\alpha)\}$ de funciones características que converge a $\varphi(\alpha)$ para todo valor racional de α.

Demostración: Definamos la sucesión $\{\varphi_m(\alpha)\}$ de funciones características como sigue:

$$\varphi_m(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t}\, d\, E_{m!}(t) .$$

Cuando α es racional, por 5.42 tenemos:

$$\varphi_m(\alpha) = \varphi(\alpha),$$

a partir de un cierto valor de m en adelante, lo que implica -- que la sucesión de funciones características converge hacia --- $\varphi(\alpha)$.

La sucesión $\{E_{m!}(t)\}$ de funciones de distribución es - fundamental en lo que se refiere a la propiedad de ser $\varphi(\alpha)$ función característica, como lo indican los dos teoremas si---- guientes:

5.44: Teorema: Si la sucesión $\{E_{m!}(t)\}$ converge para todo valor de t y su límite $E(t)$ es tal que $E(-\infty)=0$, --------- $E(+\infty)=\varphi(0)$, entonces $\varphi(\alpha)$ es la función característica de dicha función $E(t)$.

Demostración: La función $E(t)$ es no decreciente por ser igual a $\lim E_{m!}(t)$; además:

$$0 \leq E_{m!}(t) \leq \varphi(0) \qquad \text{para toda } m \text{ y } t.$$

$$\therefore \qquad 0 \leq E(t) \leq \varphi(0) \qquad \text{para toda } t,$$

$$\therefore \qquad 0 \leq E(-\infty) \quad ; \quad E(+\infty) \leq \varphi(0),$$

lo que expresa que $E(t)$ es función de distribución y por hipótesis: $E(-\infty) = 0$, $E(+\infty) = \varphi(0)$.

Ahora sea α racional y $\underline{m}$ suficientemente grande para que -- $m!\,\alpha$ sea entero; por 5.42 podemos escribir:

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t}\, d\, E_{m!}(t) = \int_{-m!\pi}^{m!\pi} e^{i\alpha t}\, d\, E_{m!}(t) \qquad (1)$$

Escribiendo $\varphi(\alpha)$ en la forma $\varphi'(\alpha) + i\,\varphi''(\alpha)$, se deduce de (1):

$$\varphi'(\alpha) = \int_{-m!\pi}^{m!\pi} \cos\alpha t\, d\, E_{m!}(t) \quad ;$$

$$\varphi''(\alpha) = \int_{-m!\pi}^{m!\pi} \operatorname{sen}\alpha t\, d\, E_{m!}(t) \qquad (2).$$

Tomemos p tal que $0 < p < m!\,\pi$; por 3.3 se tiene:

$$-E_{m!}(-p) \leq \int_{-m!\pi}^{m!\pi} \cos\alpha t\, d\, E_{m!}(t) \leq E_{m!}(-p) \qquad (3)$$

$$-\varphi(0) + E_{m!}(p) \leq \int_{p}^{m!\pi} \cos\alpha t\, d\, E_{m!}(t) \leq \varphi(0) - E_{m!}(p) \qquad (4).$$

Por otra parte sea $D(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ una división del intervalo $[-p, p]$, y definamos l_k, L_k , como las fronteras inferior y superior respectivamente de $\cos\alpha t$ en el subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$. Se sabe por 3 que:

$$\sum_{k=1}^{n} l_k \left[E_{m!}(t_k) - E_{m!}(t_{k-1})\right] \leq \int_{-p}^{p} \cos\alpha t\, d\, E_{m!}(t) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} L_k \left[E_{m!}(t_k) - E_{m!}(t_{k-1})\right] \qquad (5).$$

De (2) a (5) se deduce:

$$-E_{m!}(-p) - \varphi(0) + E_{m!}(p) + \sum_{k=1}^{n} l_k\left[E_{m!}(t_k) - E_{m!}(t_{k-1})\right] \leq \varphi'(\alpha)$$

$$\leq E_{m!}(-p) + \varphi(0) - E_{m!}(p) + \sum_{k=1}^{n} L_k\left[E_{m!}(t_k) - E_{m!}(t_{k-1})\right] \qquad (6)$$

Si $\underline{m}$ tiende al infinito, resulta por (6):

$$-E\,(-p) - \varphi(0) + E\,(p) + \sum_{k=1}^{n} l_k\left[E\,(t\,) - E\,(t_{k-1})\right] \leq \varphi'(\alpha)$$

$$\leq E\,(-p) + \varphi(0) - E\,(p) + \sum_{k=1}^{n} L_k\left[E\,(t) - E\,(t_{k-1})\right] \qquad (7)$$

Ahora hagamos tender a cero la norma de D; por (7) se llega a:

$$-E\,(-p) - \varphi(0) + E\,(p) + \int_{-p}^{p} \cos\alpha t\, d\, E\,(t) \leq \varphi'(\alpha) \leq$$

$$\leq E\,(-p) + \varphi(0) - E\,(p) + \int_{-p}^{p} \cos\alpha t\, d\, E\,(t).$$

Si $p \longrightarrow +\infty$, se deduce (véase 3.6 y 3.62) de la última desigualdad que:

$$\varphi'(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\alpha t\, d\, E\,(t\,) \quad , \quad \text{si} \quad \alpha \quad \text{es racional}$$

Análogamente se deduciría:

$$\varphi''(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}\alpha t\, d\, E\,(t) \qquad \text{si} \quad \alpha \quad \text{es racional.}$$

En consecuencia tenemos: $\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t} d\, E\,(t)$ si α es racional; pero $\varphi(\alpha)$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t}\, d\, E\,(t)$ son funciones continuas de α (véase 4.41 y 4.5), por consiguiente el que coincidan para los valores racionales de α implica que coinciden para todo valor real de α, que era lo que se quería demostrar.

5.45: <u>Teorema</u>: <u>Si $\varphi(\alpha)$ es función característica, entonces la sucesión $\{E_{m!}(t)\}$ converge hacia una función de distribución $E(t)$ para todo valor de t. Además $\varphi(\alpha)$ es la función característica de $E(t)$.</u>

__Demostración__: Por 3.4 y 3.67 podemos definir $E(t)$ como la función de distribución de la cual es la función característica, y satisfaciendo además las condiciones:

$$E(-\infty)=0 \quad ; \quad E(+\infty)=\varphi(0) \quad ; \quad E(t-0)=E(t) \qquad (1).$$

Sea ahora $\sigma(t)=\sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\alpha_\nu t}$ un polinomio trigonométrico; volviendo a la transformación A^* de 5.1 podemos escribir:

$$A^*(\sigma)=\sum_{-n}^{n} c_\nu \varphi(\alpha_\nu)=\sum_{-n}^{n} c_\nu \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha_\nu t}\, d\,E(t)=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(t)\, d\,E(t) \qquad (2).$$

Por otra parte, definamos una transformación A^{**}; distributiva y positiva, entre el conjunto de las funciones $f(t)$ periódicas continuas y un subconjunto de S^2, del modo siguiente:

$$A^{**}(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, d\,E(t). \qquad (3).$$

Por (2) y (3) se vé que A^{**} es una extensión, distributiva y positiva, de A^*; por consiguiente, de 5.26 deducimos:

$$A^{**}(f)=A(f),$$

o sea
$$A(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, d\,E(t) \qquad (4)$$

Utilizando otra vez las funciones ω de 5.3, podemos escribir en vista de (4):

$$A(\omega_{m!,t,\epsilon})=\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_{m!,t,\epsilon}(\tau)\, d\,E(\tau)=$$
$$=\left(\int_{-\infty}^{-2m!\pi}+\int_{-2m!\pi}^{2m!\pi}+\int_{2m!\pi}^{+\infty}\right)\omega_{m!,t,\epsilon}(\tau)\, d\,E(\tau) \qquad (5)$$

Pero por 3.66:

$$-E(-2m!\pi)\leq \int_{-\infty}^{-2m!\pi} \omega_{m!,t,\epsilon}(\tau)\, d\,E(\tau)\leq E(-2m!\pi) \qquad (6),$$

$$E(2m!\pi)-\varphi(0)\leq \int_{2m!\pi}^{+\infty} \omega_{m!,t,\epsilon}(\tau)\, d\,E(\tau)\leq \varphi(0)-E(2m!\pi) \qquad \ldots.(7),$$

$$E(t-\epsilon) - E(-2m!\pi+\epsilon) \leq \int_{-2m!\pi}^{2m!\pi} \omega_{m!,t,\epsilon}(\tau)\, dE(\tau) \leq$$
$$\leq E(t) - E(-2m!\pi) \qquad (8).$$

De (5) a (8) deducimos:

$$-E(-2m!\pi)+E(t-\epsilon) - E(-2m!\pi+\epsilon)+E(2m!\pi) - \varphi(0) \leq$$
$$\leq A(\omega_{m!,t,\epsilon}) \leq E(t)+\varphi(0) - E(2m!\pi). \qquad (9).$$

Si ϵ toma una sucesión de valores positivos ϵ_j que tienda a cero, entonces por definición (véase 5.3) -------------- $\lim A(\omega_{m!,t,\epsilon}) = E_{m!}(t)$; por consiguiente de (9) y (1) tenemos:

$$-E(-2m!\pi)+E(t) - E(-2m!\pi+0)+E(2m!\pi) - \varphi(0) \leq$$
$$\leq E_{m!}(t) \leq E(t)+\varphi(0) - E(2m!\pi) \qquad (10).$$

Finalmente si <u>m</u> tiende al infinito, de (10) y (1) resulta:

$$\lim E_{m!}(t) = E(t) \qquad \text{l.q.q.d.}$$

5.46: En 5.43 se demostró que la sucesión $\{\varphi_m(\alpha)\}$ de funciones características converge a $\varphi(\alpha)$ si α es racional. Si el espacio S es una red puede demostrarse que dicha sucesión converge a φ para <u>todo</u> valor de α ; para hacer ver ésto necesitamos primero el resultado siguiente:

5.461 <u>Lema</u>: <u>Si</u> S <u>es</u> <u>una</u> <u>red</u>, <u>entonces</u>:

$$\int_{-m!\pi}^{m!\pi} \left|\operatorname{sen}\frac{1}{2}\frac{t}{m!}\right| dE_{m!}(t) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

<u>Demostración</u>: Sea <u>h</u> un número positivo; por 3.2 podemos escribir:

$$\int_{-m!\pi}^{m!\pi} \left|\operatorname{sen}\frac{1}{2}\frac{t}{m!}\right| dE_{m!}(t) = \left(\int_{-m!\pi}^{-hm!\pi} + \int_{-hm!\pi}^{hm!\pi} + \int_{hm!\pi}^{m!\pi}\right) \left|\operatorname{sen}\frac{1}{2}\frac{t}{m!}\right| dE_{m!}(t) \qquad (1)$$

Las tres integrales del segundo miembro de (1) son menores o -- iguales respectivamente que $E_{m!}\left[-h(m!\pi)\right]$, $\varphi(0)\operatorname{sen}\frac{1}{2}h\pi$, $\varphi(0)-E_{m!}\left[h\ (m!\pi)\right]$, en vista de 3.3. Por consiguiente:

$$\int_{-m!\pi}^{m!\pi}\left|\operatorname{sen}\frac{1}{2}\frac{t}{m!}\right|dE_{m!}(t) \leq E_{m!}\left[-h(m!\pi)\right]+\varphi(0)\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}h\pi+$$
$$+\varphi(0)-E_{m!}\left[h(m!\pi)\right] \qquad (2)$$

Ahora sea $\{h_n\}$ una sucesión de numeros positivos que converja a cero y definamos:

$$W_m=\int_{-m!\pi}^{m!\pi}\left|\operatorname{sen}\frac{1}{2}\frac{t}{m!}\right|d\ E_{m!}(t) \qquad (3)$$

$$U_{n,m}=E_{m!}\left[-h_n(m!\pi)\right]+\varphi(0)\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}h_n+\varphi(0)-$$
$$-E_{m!}\left[h_n(m!\pi)\right] \qquad (4).$$

Por ser no negativo el integrando en (3), se tiene:

$$W_m\geq 0 \qquad \text{para toda } \underline{m} \qquad (5).$$

. Por (2), (3) y (4) resulta:

$$U_{n,m}\geq W_m \qquad \text{para toda } \underline{n} \text{ y } \underline{m} \qquad (6).$$

De (4) también se deduce que la sucesión $\{U_{n,m}\}$ converge para cada valor de $\underline{n}$; llamando U_n al límite, obtenemos:

$$U_{n,m}\xrightarrow[m\to\infty]{}U_n=\varphi(0)\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}h_n\pi \qquad (7),$$

$$\therefore \qquad U_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0. \qquad (8).$$

En vista de (5) a (8) podemos aplicar el teorema 2.83 con lo - que resulta $W_m\longrightarrow 0$, que es lo que se quería demostrar.

5.462 <u>Teorema</u>: <u>Si</u> S <u>es una red, la sucesión de funciones características</u> $\varphi_m(\alpha)$ <u>converge hacia</u> $\varphi(\alpha)$ <u>para todo número - real</u> α .

<u>Demostración</u>: Pongamos $\beta_m=\alpha-\alpha_m$; entonces:

$$\cos\alpha_m t=\cos\alpha\, t+2\ \operatorname{sen}\ (\alpha-\tfrac{1}{2}\beta_m)\ t\ \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\beta_m t,$$
$$\operatorname{sen}\alpha_m t=\operatorname{sen}\alpha\, t-2\ \cos\ (\alpha-\tfrac{1}{2}\beta_m)\ t\ \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\beta_m t.$$

$$\int_{-m!\pi}^{m!\pi} e^{i\alpha_m t}\, dE_{m!}(t) = \int_{-m!\pi}^{m!\pi} e^{i\alpha t}\, dE_{m!}(t) + 2\,(V_m - iW_m) \qquad (1)$$

donde:

$$V_m = \int_{-m!\pi}^{m!\pi} \operatorname{sen}\,(\alpha - \tfrac{1}{2}\beta_m)\, t\, \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\beta_m t \qquad (2)$$

$$W_m = \int_{-m!\pi}^{m!\pi} \cos\,(\alpha - \tfrac{1}{2}\beta_m)\, t\, \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\beta_m t \qquad (3).$$

Volviendo a la definición de las funciones $E_{m!}(t)$, ------- $\varphi_m(\alpha)$ (véase 5.3 y 5.43) podemos escribir en vista de (1):

$$\varphi_m(\alpha_m) = \varphi_m(\alpha) + 2\,(V_m - iW_m) \qquad (4).$$

Por otra parte se sabe (véase [8] pág. 49), que todo número -- real α puede escribirse en la forma $I + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{K_\nu}{\nu!}$, siendo k_ν e I números enteros y $0 \leq k_\nu \leq \nu - 1$. Sea:

$$\alpha_m = I + \sum_{\nu=2}^{m} \frac{K_\nu}{\nu!} \;; \qquad \beta_m = \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \frac{K_\nu}{\nu!} \leq \frac{1}{m!} \qquad (5);$$

en consecuencia $m!\,\alpha_m$ es entero, y tenemos por el corolario 5.42 que $\varphi_m(\alpha_m) = \varphi(\alpha_m)$ Por consiguiente (4) se transforma en:

$$\varphi(\alpha_m) = \varphi_m(\alpha) + 2\,(V_m - iW_m) \qquad (6).$$

En vista de (2) y (3):

$$-\int_{-m!\pi}^{m!\pi} \left|\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\beta_m t\right| dE_{m!}(t) \leq V_m \leq \int_{-m!\pi}^{m!\pi} \left|\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\beta_m t\right| dE_{m!}(t) \qquad (7),$$

$$-\int_{-m!\pi}^{m!\pi} \left|\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\beta_m t\right| dE_{m!}(t) \leq W_m \leq \int_{-m!\pi}^{m!\pi} \left|\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\beta_m t\right| dE_{m!}(t) \qquad (8).$$

Además por la desigualdad de (5):

$$\int_{-m!\pi}^{m!\pi} \left|\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\beta_m t\right| dE_{m!}(t) \leq \int_{-m!\pi}^{m!\pi} \left|\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\,\frac{t}{m!}\right| dE_{m!}(t) \qquad (9).$$

Del lema 5.461 y de (9) deducimos:

$$\int_{-m!\pi}^{m!\pi} \left| \operatorname{sen} \frac{1}{2} \beta_m t \right| dE_{m!}(t) \xrightarrow[m \longrightarrow \infty]{} 0 \qquad (10).$$

Por (6), (7), (8) y (10) resulta:

$$\varphi_m(\alpha) \xrightarrow[m \longrightarrow \infty]{} \varphi(\alpha) \qquad \text{l.q.q.d.}$$

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA.

[1] S. Bochner : Vorlesungen über Fouriersche Integrale. Mathematik in -- Monographien und Lehrbuchen. Leipzig, 1932.

[2] S. Bochner : Completely Monotone Functions in partially ordered spaces. Duke Mathematical Journal. -- Vol. 9, Number 3. September - 1942.

[3] G. Birkhoff : Lattice Theory. American Mathematical Society. Coll--- oquium publications. 1940.

[4] F. Riesz : Ueber die linearen trans---- formationen des complexen -- Hilbertschen Raumes. Acta - Szeged. Vol. 5. 1930.

[5] B.L. Van der Waerden : Moderne Algebra. Zweiter Teil 1940.

[6] O. Toeplitz : Uber die Fourier-Entwicklung positiver Funktionen. Ren--- diconti del Circolo Matema-- tico di Palermo, Vol. 32. -- 1911.

[7] E. C. Titchmarsh : The Theory of Functions. Sec-- ond edition. Oxford University Press.

[8] E. W. Hobson : The Theory of Functions of a - Real Variable. Volume I. Cam-- bridge University Press.