



**ESTRUCTURAS DE FACTORIZACION  
EN CATEGORIAS DE ALGEBRAS**

**TESIS DE MAESTRIA  
MARIO SOLAY ZIMAN\***

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**UNAM**

**1981**

**\*BECARIO DEL INSTITUTO DE MATEMATICAS**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres, Don Isaac Solay  
y Ana Zyman de Solay.

A mis hermanos.

Deseo expresar mi profundo reconocimiento a las siguientes personas. Al Dr Octavio García, asesor de ésta tesis, con quien he tenido el privilegio de compartir desde un primer curso hasta la emocionante aventura de la investigación en Matemáticas. A la Dra Graciela Salicrup, que me introdujo al fascinante tema de las estructuras de factorización y cuya influencia y estímulo en la elaboración de este trabajo han sido invaluable. Al Dr Francisco González por su estimulante crítica y el valioso tiempo que me dedicó. A mi amigo y compañero M en C. Francisco Larrión por su interés en éste trabajo y por las pláticas telefónicas que tuvimos a altas horas de la noche discutiendo sobre la filosofía de la investigación en Matemáticas. Al Instituto de Matemáticas por su apoyo y finalmente a mi amigo Victor por su ayuda en los momentos críticos.

INDICE

INTRODUCCION.....-1-

CAPITULO 0: ALGEBRA UNIVERSAL.....-7-

CAPITULO I: ESTRUCTURAS DE FACTORIZACION.....-18-

CAPITULO II: LA ENVOLVENTE HOMOMORFISMOS SURYECTIVOS  
REFLEXIVA PARA CATEGORIAS DE t-ALGEBRAS.....-33-

CAPITULO III: LA ISFK REFLEXION.....-43-

CAPITULO IV: ALGEBRAS LIBRES Y LA ISFK REFLEXION.....-55-

CAPITULO V: LOS OPERADORES DE CERRADURA  $m_A \circ e_A$  y  $e_A m_A$ .....-60-

CAPITULO VI: ISFK, MODELOS Y PROPIEDADES RESIDUALES.....-70-

BIBLIOGRAFIA.....-83-

## INTRODUCCION

En el capítulo 0 damos un cuadro de definiciones y una lista de los teoremas que usamos posteriormente. Dicho cuadro tiene el propósito de que el lector encuentre con facilidad alguna definición que le interese especialmente. El objeto de éste capítulo es familiarizar al lector con la notación y los temas de Algebra Universal que empleamos en éste reporte. Por brevedad omitimos demostraciones, éstas se pueden encontrar en [1] y la mayor parte de ellas en [2] y [3] de la bibliografía. Usaremos libremente y casi sin dar referencia posterior los teoremas de Algebra universal.

En el capítulo I estudiamos algunas propiedades generales de estructuras de factorización. Estas propiedades están enunciadas en la proposición 1.2 de [6]. Sin embargo damos demostraciones de estas afirmaciones pues con frecuencia no sólo usaremos éstas afirmaciones sino sus demostraciones. Finalizamos éste capítulo con algunos ejemplos importantes, en particular, en 1.16 5) damos condiciones suficientes para que una categoría de  $t$ -álgebras posea la estructura de (co)factorización (epimorfismos extremados, homomorfismos inyectivos).

En el capítulo II damos condiciones suficientes y necesarias para que una categoría plena y repleta de  $t$ -álgebras posea la estructura de factorización (homomorfismos suryectivos, fuentes que separan puntos). (Ver 2.6). Esto nos permite en 2.9 ver que si  $K$  es una categoría de  $t$ -álgebras,  $ISP(K)$  es la envolvente (con respecto a sub-categorías plenas y repletas) homomorfismos suryectivos reflexiva de  $K$  en cualquier categoría de  $t$ -álgebras cerrada bajo la formación

de productos, sub-álgebras e isomorfismos que la contenga; en particular en la categoría de todas las t-álgebras. En 2.12 mostramos que si  $K$  es una categoría plena y repleta de t-álgebras y  $U$  es cerrada bajo la formación de productos, sub-álgebras e isomorfismos y contiene a  $K$  entonces  $K$  es homomorfismos suryectivos reflexiva en  $U$  si y solo si  $K=ISPK$ .

En el capítulo III estudiamos la ISPK reflexión. Si  $K$  es una clase de t-álgebras,  $A$  es una t-álgebra y  $S$  es un sub-conjunto de  $A \times A$  introducimos los conceptos de CONJUNTO DE A-ECUACIONES EN  $K$  ( $e_A K$ ) y CLASE DE MODELOS DE  $S$  RESPECTO a  $A$  ( $m_A S$ ). En 3.4 mostramos que  $ISPK m_A S = m_A S$ . Si  $A$  es proyectivo con respecto a homomorfismos suryectivos en la categoría de t-álgebras damos en 3.6 una descripción de la reflexión en  $m_A e_A K$ ; en particular en 3.7 en la variedad generada por  $K$ . En 3.8 mostramos que si  $A$  es absolutamente libre generado por  $M$ ,  $m_A e_A K$  es variedad y en 3.9 que  $m_A e_A K$  no es necesariamente la variedad generada por  $K$ . Finalmente en 3.13 estudiamos que tan "alejado" está  $m_A e_A K$  de  $K$ .

En el capítulo IV estudiamos algunas relaciones que hay entre álgebras  $K$ -libres y la ISPK reflexión. En 4.1 damos una descripción de la ISPK libre Álgebra generada por un conjunto lo cual nos permite en 4.2 dar condiciones suficientes y necesarias para que el funtor que olvida  $U$ :  $K \longrightarrow \text{Set}$  posea adjunto izquierdo.

En el capítulo V estudiamos los operadores de cerradura  $m_A e_A$  y  $e_A m_A$ . Como una aplicación de la teoría que se ha introducido damos una generalización de la técnica que se emplea en [9] para el estudio del lattice de sub-variedades de grupos. Si  $U$  es una variedad y  $F$  es  $U$ -libre en  $\aleph_t$  variables en 5.10 se muestra que el lattice de

sub-variedades de  $U$  es anti-isomorfo con el lattice de congruencias totalmente invariantes de  $F$  y se da una descripción explícita de los anti-isomorfismos.

En el capítulo VI definimos los conceptos de CLASE DE FORMULAS REFLEXIVAS DE  $K$  y CLASE DE LOS MODELOS DE UNA CLASE DE FORMULAS. En 6.5 mostramos que  $ISP(K)$  es la Clase de los modelos de la clase de fórmulas reflexivas de  $K$ . La idea intuitiva es ver que tipo de "fórmulas" que son comunes a todas las álgebras de  $K$  se transmiten a  $ISP(K)$ . En 6.7 damos condiciones suficientes y necesarias para que  $ISP(K)$  sea la clase de los modelos de un conjunto de fórmulas reflexivas de  $K$ . Al momento de escribir éste reporte el autor desconoce si siempre se puede encontrar dicho conjunto. En 6.10 introducimos el concepto para  $t$ -álgebras de ser RESIDUALMENTE  $K$ . En 6.12 mostramos que si  $K$  es cerrada bajo la formación de sub-álgebras  $ISP(K)$  coincide con la clase de  $t$ -álgebras que son residualmente  $K$ . Finalizamos éste reporte estudiando algunos ejemplos importantes.

Sobre el título de la tesis "Estructuras de factorización en categorías de Álgebras" quiero mencionar que no es adecuado pero por razones burocráticas se mantuvo. Un título más adecuado sería: "La estructura de factorización (homomorfismos suryectivos- fuentes que separan puntos) para categorías de Álgebras"

Acerca de la notación que empleamos en este trabajo quiero decir que en opinión del autor es compacta, simple, la riqueza de cuantificadores en nuestras definiciones la hace muy cómoda y la intuición algebraica del autor se ha desarrollado con ese lenguaje. A continuación damos un cuadro donde explicamos dicha notación:



SÍMBOLO

SIGNIFICADO

$\neg$

no

$\wedge$

y

$\vee$

o

$\bigwedge$

para todo

$\bigvee$

existe

$\bigvee !$

existe y es único.

$\Rightarrow$

implica

$\Leftrightarrow$

si y solo si

$:=$

por definición igual

S.E.:

son equivalentes.

S.P.G

sin perdida de generalidad

∴

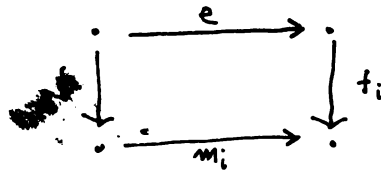
Tales que

$\square$

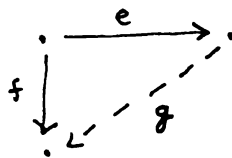
final de la prueba o  
ausencia de la misma.

Cuando digamos que un diagrama conmuta y en dicho diagrama intervienen fuentes o pozos entenderemos que conmuta para todos los índices posibles. Si el diagrama está formado por varios subdiagramas entenderemos que cada uno de ellos conmuta.

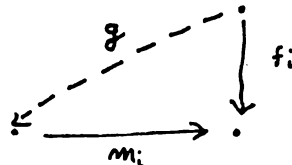
Como un ejemplo de la manera en que empleamos la notación y la convención anterior la definición 1.1 2) expresada con palabras diría: Si  $K$  es una categoría,  $E$  una clase de  $K$ -morfismos y  $M$  una clase de  $K$ -fuentes diremos que  $K$  tiene la propiedad de  $(E, M)$ -diagonalización si y solo si dados  $e \in E$ ,  $f \in \text{Mor}K$ ,  $(m_i)_{i \in I} \in M$  y  $(f_i)_{i \in I}$   $K$ -fuente en caso de que para toda  $i \in I$  conmute el siguiente diagrama:



entonces existe y es único  $g \in \text{Mor}K$  tal que conmuta el diagrama:



y para toda  $i \in I$  conmuta el diagrama:



Usaremos la terminología de [4] en lo referente a categorías.

" We are often told that pure and applied mathematics are hostile to each other. This is not true. Pure and applied mathematics are not hostile to each other. Pure and applied mathematics have never been hostile to each other. Pure and applied mathematics will never be hostile to each other. Pure and applied mathematics cannot be hostile to each other because, in fact, there is absolutely nothing in common between them."

David Hilbert.

CAPITULO 0: ALGEBRA UNIVERSAL.

CONCEPTO

DEFINICIÓN, NOTACIÓN, COMENTARIOS.

1) TIPO DE ALGEBRAS.

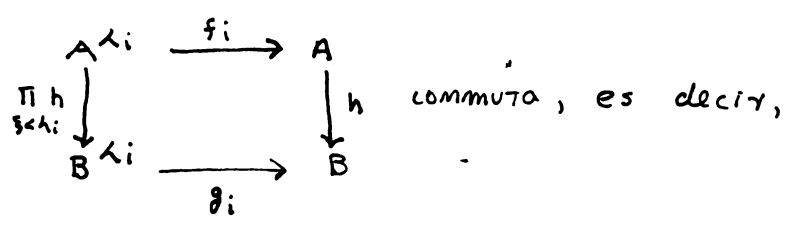
Es una familia de ordinales  $\tau = (\kappa_i)_{i \in I}$  que supondremos fijo y arbitrario en este capítulo.

2)  $\tau$ -ÁLGEBRA.

Es una pareja  $\mathcal{A} = (A, (f_i)_{i \in I})$  donde  $A$  es un conjunto y  $\bigwedge_{i \in I} f_i: A^{\kappa_i} \rightarrow A$  es OPERACIÓN  $\kappa_i$ -ARIA en  $A$ , es decir,  $f_i$  es función. En este caso se suele denotar la  $\tau$ -álgebra  $\mathcal{A}$  por  $A$ .

3) HOMOMORFISMO DE  $\tau$ -ÁLGEBRAS.

Es una terna  $(\mathcal{A}, h, \mathcal{X})$  donde  $\mathcal{A} = (A, (f_i)_{i \in I})$ ,  $\mathcal{X} = (B, (g_i)_{i \in I})$  son  $\tau$ -álgebras,  $h: A \rightarrow B$  es función y



$$\bigwedge_{i \in I} h(f_i((a_\xi)_{\xi < \kappa_i})) = g_i((h(a_\xi))_{\xi < \kappa_i})$$

$$(a_\xi)_{\xi < \kappa_i} \in A^{\kappa_i}$$

$h: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$  o bien  $h: A \rightarrow B$  denotarán a  $(\mathcal{A}, h, \mathcal{X})$ .

4) LA CATEGORÍA  $K_\tau$  DE TODAS LAS  $\tau$ -ÁLGEBRAS.

Sus objetos son las  $\tau$ -álgebras, sus morfismos los homomorfismos de  $\tau$ -álgebras con la composición usual de funciones.

- 5)  $K_{\tau}(A, \mathcal{A})$ . Demota a  $\text{Hom}_{K_{\tau}}(A, \mathcal{A})$ .
- 6) EL PRODUCTO DE LA FAMILIA  $(A_j)_{j \in J}$ :  $\prod_{j \in J} A_j$ . Se obtiene definiendo las operaciones por coordenadas en  $\prod_{j \in J} A_j$ . Esta  $\tau$ -álgebra con las correspondientes proyecciones que denotaremos por  $(\pi_j: \prod_{j \in J} A_j \rightarrow A_j)_{j \in J}$  es un producto categórico de la familia  $(A_j)_{j \in J}$ .
- 7) CONJUNTO DE ENDOMORFISMOS DE  $A$ . Es  $K_{\tau}(A, A)$  y se suele denotar por  $\text{End}(A)$ .
- 8)  $\mathcal{A}$  SUB-ÁLGEBRA DE  $A$ . Si la inclusión  $i: \mathcal{A} \hookrightarrow A$  es homomorfismo.
- 9)  $M$  CERRADO EN  $A$ . Si  $M \subseteq A \wedge \bigwedge_{i \in I} f_i(M^{A_i}) \subseteq M$ .
- 10)  $M$  GENERA  $A$ . Si  $M \subseteq A$  y  $A$  es el mínimo conjunto cerrado que contiene a  $M$ .
- 11) CONGRUENCIA EN  $A$ . Es una relación de equivalencia  $\theta$  en  $A$  donde  $\theta \times \theta$  es cerrado en  $A \times A$ . En dicho caso,  $A/\theta$  hereda una estructura natural de  $\tau$ -álgebra  $A/\theta$  y la proyección natural  $\nu: A \rightarrow A/\theta$  es homomorfismo.
- 12) CONJUNTO DE CONGRUENCIAS DE  $A$ . Se denota por  $\mathcal{K}(A)$ .
- 13) DIAGONAL DE  $A$ . Es la congruencia denotada por  $\Delta_A$  donde  $(a_1, a_2) \in \Delta_A \iff a_1 = a_2$ .

14)  $\Gamma_c \#$ .

Denota la mínima congruencia que contiene a  $\# \subseteq A \times A$ . -10-

15) CONGRUENCIA TOTAL-  
MENTE INVARIANTE  
EN  $A$ .

Es una congruencia  $\theta$  en  $A$  dando

$$\begin{array}{l} \wedge \\ (p, q) \in A \times A \\ \varphi \in \text{End } A \end{array} \quad (p, q) \in \theta \Rightarrow (\varphi(p), \varphi(q)) \in \theta.$$

16)  $\text{KER } \varphi$

Si  $\varphi \in K_c(A, \mathcal{A})$ ,  $\text{KER } \varphi$  es la congruencia donde  $(a_1, a_2) \in \text{KER } \varphi \Leftrightarrow \varphi(a_1) = \varphi(a_2)$ .

17)  $\mathcal{A}$  IMÁGEN HOMOMÓRFICA DE  $A$

Si existe  $\varphi: A \rightarrow \mathcal{A}$  homomorfismo suryectivo.

18)  $SK, HK, PK, IK$ .

Si  $K \in K_c$  denotan respectivamente las clases de sub-álgebras de  $K$ , imágenes homomórficas de  $K$ , productos de familias en  $K$  y álgebras isomorfas a las de  $K$ .

19) VARIEDAD.

$K \in K_c$  se llama VARIEDAD si  $HK \subseteq K$ ,  $SK \subseteq K$  y  $PK \subseteq K$ . Se tiene que  $HSPK$  es la mínima variedad que contiene a  $K$ , de aquí,  $K$  es variedad si y solo si  $K = HSPK$ .

20)  $K$  NO TRIVIAL.

Si  $K \in K_c$  posee al menos una  $\tau$ -álgebra con más de un elemento.

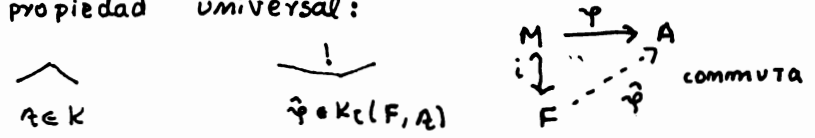
21) OPERADOR DE CERRADURA. Si  $A$  es un conjunto y  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}A$  (conjunto potencia de  $A$ ), un OPERADOR DE CERRADURA es una función  $\Gamma: \mathcal{P}A \rightarrow \mathcal{K}$  INDUCIDO.

tal que si  $M, N \in \mathcal{P}A$ ,  $M \in \Gamma M$ ,  $M \subseteq N \Rightarrow \Gamma M \subseteq \Gamma N$  y  $\Gamma \Gamma M = \Gamma M$ . Un SISTEMA DE CERRADURA EN  $A$  es una colección  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}A$  donde  $\emptyset \in \mathcal{K}$  implica que  $\bigcap \emptyset \in \mathcal{K}$ . En este caso el OPERADOR DE CERRADURA INDUCIDO es  $\Gamma: \mathcal{P}A \rightarrow \mathcal{K}$  donde si  $M \in \mathcal{P}A$ ,  $\Gamma M = \bigcap \{C \in \mathcal{K} \mid M \subseteq C\}$ .

Así por ejemplo si  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_c$ ,  $\{M \subseteq A \mid M \text{ es cerrado en } A\}$  es un sistema de cerradura en  $A$  y denotaremos por  $\Gamma$  el operador inducido.

22)  $F$   $K$ -LIBRE GENERADO POR  $M$ . Si  $K \subseteq \mathcal{K}_c$ ,  $F \in K$  y  $M \subseteq F$  se dice que  $F$  es  $K$ -LIBRE GENERADO POR  $M$  si

$F = \Gamma M$  y  $F$  satisfaci la siguiente propiedad universal:



$\varphi: M \rightarrow A$  función

donde  $i: M \hookrightarrow F$  es la inclusión.

23)  $F$  ABSOLUTAMENTE LIBRE GENERADO POR  $M$ . Si  $F$  es  $\mathcal{K}_c$ -libre generado por  $M$ .



24)  $\alpha_\tau$

Demota el minimo ordinal infinito

tal que  $\bigwedge_{i \in I} |\kappa_i| < |\alpha_\tau|$ . (Recordemos

que  $\tau = \langle \kappa_i \mid i \in I \rangle$  es un tipo de álgebras). Nótese

que si todas las operaciones son finitarias,

es decir, si  $\bigwedge_{i \in I} |\kappa_i|$  es finito,  $\alpha_\tau = \omega$ .

25)  $\forall \alpha_\tau, \tau_c(\alpha_\tau)$ .

$\forall \alpha_\tau$  demotará un conjunto de cardinal

$|\alpha_\tau|$  y  $\tau_c(\alpha_\tau)$  una  $\tau$ -álgebra absolutamente

libre generada por  $\forall \alpha_\tau$ . (Dicha  $\tau$ -álgebra

existe como corolario de un teorema de

Birkhoff).

26) CLASE DE LOS MO-  
DELOS DE  $\Sigma$ .

Si  $\Sigma \in \tau_c(\alpha_\tau) \times \tau_c(\alpha_\tau)$ ,

$m_\Sigma := \{ \varphi \in \mathcal{K}_\tau \mid \bigwedge_{\substack{P \in \mathcal{K}_\tau(\tau_c(\alpha_\tau), \mathcal{A}) \\ (P, \varphi) \in \Sigma}} \varphi(P) = \tau(\varphi) \}$  se llama

CLASE DE LOS MODELOS DE  $\Sigma$ .

27) CONJUNTO DE  
ECUACIONES DE  $\mathcal{K}$ .

Si  $\mathcal{K} \in \mathcal{K}_\tau$ ,

$e_{\mathcal{K}} := \{ (P, \varphi) \in \tau_c(\alpha_\tau) \times \tau_c(\alpha_\tau) \mid \bigwedge_{\substack{P \in \mathcal{K} \\ \varphi \in \mathcal{K}_\tau(\tau_c(\alpha_\tau), \mathcal{A})}} \varphi(P) = \tau(\varphi) \}$  se

llama CONJUNTO DE ECUACIONES DE  $\mathcal{K}$ .

Un teorema de Birkhoff nos dice que

$\mathcal{K}$  es variedad si y solo si  $\mathcal{K} = m_{e_{\mathcal{K}}}$ .

0.2 TEOREMA-

$\tau = \{K_i\}_{i \in I}$  tipo de álgebras,  $\alpha$  cardinal

$\Rightarrow$

i)  $\underbrace{\hspace{2cm}}_{\substack{\beta \text{ cardinal} \\ \text{infinito}}} \quad \underbrace{\hspace{2cm}}_{\substack{A \in K_i \\ M \subseteq A}} \quad |M| \leq \alpha \Rightarrow |\cap M| \leq \beta$

ii)  $I$  finito  $\wedge \underbrace{\hspace{2cm}}_{i \in I} K_i$  finito

$\Rightarrow$

$\underbrace{\hspace{2cm}}_{\substack{A \in K_i \\ M \subseteq A}} \quad |M| \leq \alpha \Rightarrow |\cap M| \leq \aleph_0 + \alpha \cdot \text{⊕}$

0.3 TEOREMA DEL HOMOMORFISMO

$h: A \rightarrow \mathcal{X}$  homomorfismo.

$\theta$  congruencia en  $A \Rightarrow \theta \subseteq \text{Ker } h, \nu_\theta: A \rightarrow A/\theta$  la proyección natural

$\Rightarrow$

i)  $\underbrace{\hspace{2cm}}_{x \in K_\tau(A/\theta, \mathcal{X})} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & \mathcal{X} \\ \nu_\theta \downarrow & \searrow \text{---} \nearrow & \\ A/\theta & & x \end{array} \quad \text{COMMUTA.}$

ii)  $\theta = \text{Ker } h \Rightarrow \underbrace{\hspace{2cm}}_{x \in K_\tau(A/\theta, \mathcal{X})} \text{ INYECTIVO} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & \mathcal{X} \\ \nu_\theta \downarrow & \searrow \text{---} \nearrow & \\ A/\theta & & x \end{array} \quad \text{COMMUTA.}$

iii)  $\theta = \text{Ker } h \wedge h$  suryectiva

$\Rightarrow$

$\underbrace{\hspace{2cm}}_{x \in K_\tau(A/\theta, \mathcal{X})} \text{ ISOMORFISMO} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & \mathcal{X} \\ \nu_\theta \downarrow & \searrow \text{---} \nearrow & \\ A/\theta & & x \end{array} \quad \text{COMMUTA.} \text{⊕}$

0.4 PRIMER TEOREMA DE ISOMORFIA.-

$\mathcal{X}$  sub-álgebra de  $A$ .  $i_{\mathcal{X}}: \mathcal{X} \hookrightarrow A$  la inclusión.

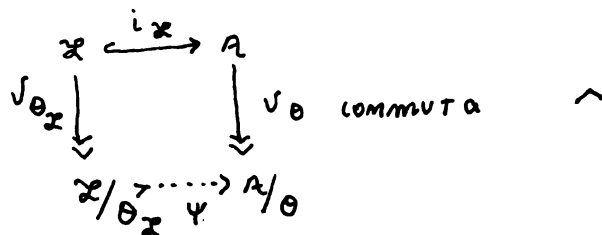
$\theta$  congruencia en  $A$ ,  $\theta_{\mathcal{X}} := \theta \cap \mathcal{X} \times \mathcal{X}$

$\nu_{\theta}: A \rightarrow A/\theta$  y  $\nu_{\theta_{\mathcal{X}}}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}/\theta_{\mathcal{X}}$  las proyecciones naturales

$\Rightarrow$

!

$\nu \in \text{Ker}(\nu_{\theta_{\mathcal{X}}}, \nu_{\theta})$  inyectivo



$$\nu_{\theta}(\mathcal{X}) \cong \mathcal{X}/\theta_{\mathcal{X}}$$

0.5 SEGUNDO TEOREMA DE ISOMORFIA.-

$\theta \in \text{Ker}$ ,  $\theta$  congruencia en  $A$

$$\sigma: \{ \psi \in \text{Ker}(A) \mid \theta \subseteq \psi \subseteq A \times A \} \longrightarrow \text{Ker}(A/\theta)$$

$$\psi \longmapsto \psi/\theta \text{ donde}$$

$$([a]_{\theta}, [a_2]_{\theta}) \in \psi/\theta$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(a_1, a_2) \in \psi$$

$\Rightarrow$

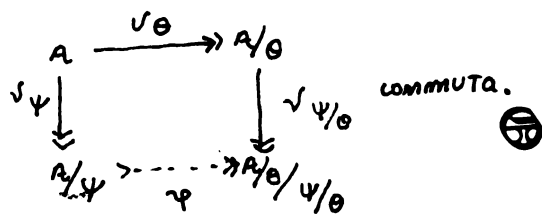
i)  $\sigma$  es isomorfismo de retices completos.

ii)  $\psi \in \text{Ker}(A) \rightarrow \theta \subseteq \psi \subseteq A \times A$

$\Rightarrow$

!

$\nu \in \text{Ker}(\nu_{\psi}, \nu_{\psi/\theta})$  isomorfismo



0.6 TEOREMA:

$$K \subseteq K_c$$

$\Rightarrow$

i) HSPK es la mínima variedad que contiene a K.

ii) K es variedad  $\Leftrightarrow K = HSPK$ .  $\odot$

0.7 TEOREMA [Birkhoff]:

$K \subseteq K_c$  no trivial  $\Rightarrow IK \subseteq K, SK \subseteq K \wedge PK \subseteq K$

$\Rightarrow$

$\underbrace{\quad}$  M conjunto  $\underbrace{\quad}$   $F_M \in K$   $F_M$  es K-libre generado por M.  $\odot$

0.8 TEOREMA:

$F \in K_c$  absolutamente libre generada por M

$\mathfrak{g}$  sub-álgebra de F

$\Rightarrow$

$\underbrace{\quad}$   $N \in \mathfrak{g}$   $\mathfrak{g}$  es absolutamente libre generada por N.  $\odot$

0.9 TEOREMA:

$$K \subseteq K_c$$

$F_1$  K-libre generado por  $M_1$

$F_2$  K-libre generado por  $M_2$

$\Rightarrow$

$$|K_c| \leq |M_1| \leq |M_2| \Rightarrow F_2 \in \text{ISP } F_1 \quad \odot$$

0.10 TEOREMA [Birkhoff]:

$$K \subseteq K_T$$

$\Rightarrow$

$K$  es variedad  $\Leftrightarrow K = m e K$ .  $\oplus$

0.11 TEOREMA [B.H. Neumann]:

$$\Sigma \subseteq \mathcal{G}_T(\alpha_T) \times \mathcal{G}_T(\alpha_T)$$

$\Rightarrow$

$\Sigma = e m \Sigma \Leftrightarrow \Sigma$  es congruencia totalmente invariante de  $\mathcal{G}_T(\alpha_T)$ .  $\oplus$

" What I'm really interested in is whether God could have made the world in a different way that is, whether the necessity of logical simplicity leaves any freedom at all ".

Albert Einstein.

CAPITULO I. ESTRUCTURAS DE FACTORIZACION.

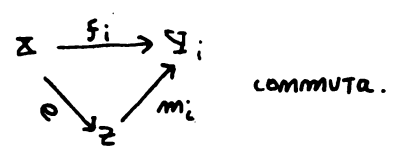
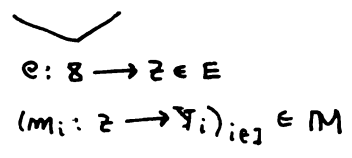
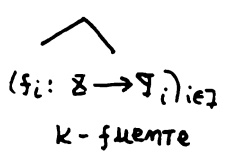
1.1 DEFINICIONES.-

$K$  categoria,  $E \in \text{Mor}K$ ,  $IM$  clase de  $k$ -fuentes.

$\Rightarrow$

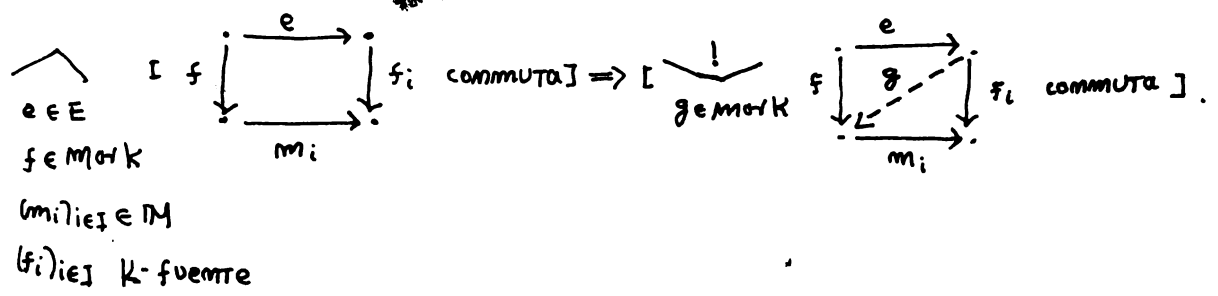
1)  $K$  se llama  $(E, IM)$ - FACTORIZABLE

$\Leftrightarrow$



2)  $K$  tiene la PROPIEDAD DE  $(E, IM)$ - DIAGONALIZACION.

$\Leftrightarrow$



3)  $K$  se llama  $(E, IM)$ - CATEGORIA y  $(E, IM)$  se llama

ESTRUCTURA DE FACTORIZACION EN K

$\Leftrightarrow$

- i)  $E$  y  $IM$  son cerradas bajo la composicion con isomorfismos.
- ii)  $K$  es  $(E, IM)$ -factorizable y tiene la propiedad de  $(E, IM)$ - diagonalizacion.

1.2 OBSERVACION.-

En este capitulo  $K$  sera una categoria y  $(E, IM)$  una estructura de factorizacion en  $K$ .

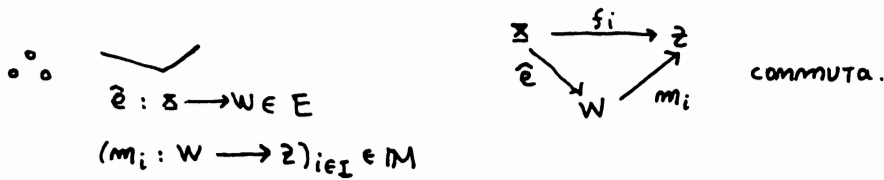
1.3 PROPOSICION.

$E$  es una clase de  $K$ -epimorfismos.

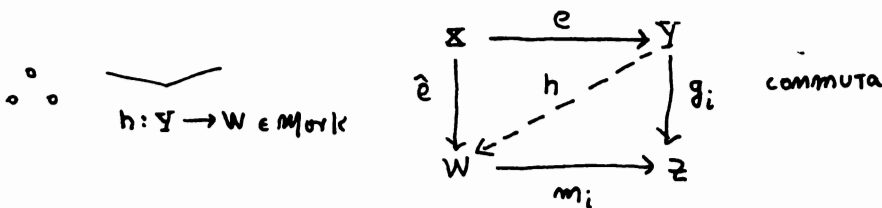
Dem.:

Sean  $e: X \rightarrow Y \in E$  y  $\tau: Y \rightarrow Z \in \text{Mor } K$ .  $\exists$ .  $\tau \circ e = s \circ e$

Sea  $I := \text{Mor } K$ . Definimos  $\bigwedge_{i \in I} f_i := \tau \circ e = s \circ e$ .



Definimos  $\bigwedge_{i \in I} g_i := \begin{cases} \tau & \text{si } m_i \circ i = s \\ s & \text{en caso contrario.} \end{cases}$



$\circ \circ$   $m_h \circ h = g_h = \begin{cases} \tau & \text{si } m_h \circ h = s \\ s & \text{en caso contrario} \end{cases}$

$\circ \circ$   $m_h \circ h = s$ ,  $\circ \circ$   $\tau = g_h = m_h \circ h = s$ .  $\odot$



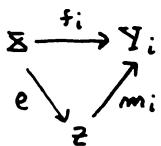
1.4 OBSERVACIÓN.-

Por la proposición anterior, la unicidad en la definición de la propiedad de diagonalización es redundante.

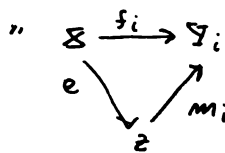
1.5 NOTACIÓN.-

Sean  $(f_i: X \rightarrow Y_i)_{i \in I}$   $k$ -fuente,  $e: X \rightarrow Z \in E$  y  $(m_i: Z \rightarrow Y_i)_{i \in I} \in IM$ .

Diremos que  $(e, (m_i)_{i \in I})$  es  $(E, IM)$ -FACTORIZACIÓN DE  $(f_i)_{i \in I}$  si



commuta. En tal caso escribiremos:



es  $(E, IM)$ -factorización de  $(f_i)_{i \in I}$ .

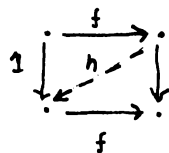
1.6 PROPOSICIÓN.-

$E \cap IM$  es la clase de los  $k$ -isomorfismos.

Dem.-

" $\subseteq$ "

Sea  $f \in E \cap IM$ . Como  $\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{f} & \cdot \\ 1 \downarrow & & \downarrow 1 \\ \cdot & \xrightarrow{f} & \cdot \end{array}$  commuta,



commuta,  $\circ \circ f$  es isomorfismo.

" $\supseteq$ "

Sea  $f$  isomorfismo. Sea  $\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{f} & \cdot \\ e \searrow & & \nearrow m \\ & & \end{array}$   $(E, IM)$ -factorización de  $f$ .

$\circ \circ e$  es sección y por 1.3 es epimorfismo.  $\circ \circ e$  es isomorfismo.

$\circ \circ f \in IM$  y como  $f \circ e^{-1} = m$ ,  $m$  es isomorfismo,  $\circ \circ f \in E$ .



1.7 PROPOSICIÓN.-

Las  $(E, \mathcal{M})$ -factorizaciones son únicas salvo por isomorfismos.

Dem.

Sea  $(f_i: X \rightarrow Y_i)_{i \in I}$   $K$ -fuente.

Sean  $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_i} & Y_i \\ e \searrow & & \nearrow m_i \\ Z & & \end{array}, \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_i} & Y_i \\ \hat{e} \searrow & & \nearrow \hat{m}_i \\ W & & \end{array}$   $(E, \mathcal{M})$ -factorizaciones de  $(f_i)_{i \in I}$ .

$\circ \circ$   $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{e} & Z \\ \hat{e} \downarrow & & \downarrow m_i \\ W & \xrightarrow{\hat{m}_i} & Y_i \end{array}$  commuta con  $e \in E$  y  $(m_i)_{i \in I} \in \mathcal{M}$

$\wedge$   $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\hat{e}} & W \\ e \downarrow & & \downarrow \hat{m}_i \\ Z & \xrightarrow{m_i} & Y_i \end{array}$  commuta con  $\hat{e} \in E$  y  $(m_i)_{i \in I} \in \mathcal{M}$

$\circ \circ$   $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{e} & Z \\ \hat{e} \downarrow & \searrow h & \downarrow m_i \\ W & \xrightarrow{k} & Y_i \\ & \nearrow \hat{m}_i & \end{array}$  commuta

$h: Z \rightarrow W \in \mathcal{M}$  or  $k: W \rightarrow Y_i \in \mathcal{M}$

$\circ \circ$   $k \circ h \circ e = k \circ \hat{e} = e = 1_Z \circ e \wedge h \circ k \circ \hat{e} = h \circ e = \hat{e} = 1_W \circ \hat{e}$ .

Por 1.3  $e$  y  $\hat{e}$  son epimorfismos,  $\circ \circ$   $k \circ h = 1_Z \wedge h \circ k = 1_W$

$\circ \circ$   $h$  es isomorfismo y  $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_i} & Y_i \\ e \searrow & & \nearrow m_i \\ Z & & \\ \downarrow h & & \\ W & & \end{array}$  commuta.  $\oplus$

1.8 PROPOSICIÓN.-

Todas las fuentes extremadas, en particular todos los límites y secciones pertenecen a  $\mathcal{IM}$ .

Dem. Obvio por 1.3.  $\odot$

1.9 PROPOSICIÓN.-

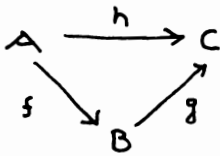


diagrama conmutativo en  $K$ .

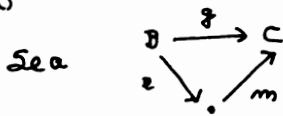
$\Rightarrow$

(a)  $h \in E \wedge f$  epimorfismo  $\Rightarrow g \in E$

(b)  $f \in E \wedge g \in E \Rightarrow h \in E$

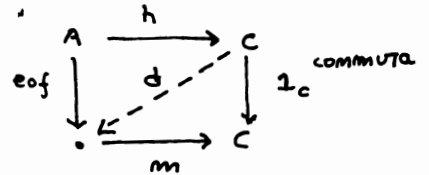
Dem.-

"(a)"



Sea  $(E, \mathcal{IM})$ -factorización de  $g$ .

como  $h \in E$  y  $m \in \mathcal{IM}$ ,  $\circ \circ d: C \rightarrow \bullet \in \mathcal{M} \text{ o } \mathcal{K}$



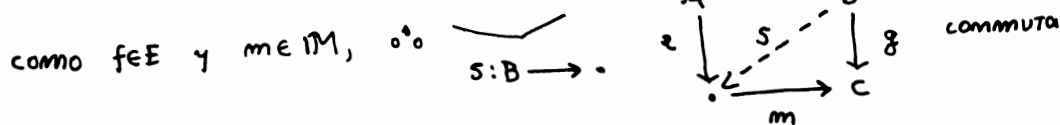
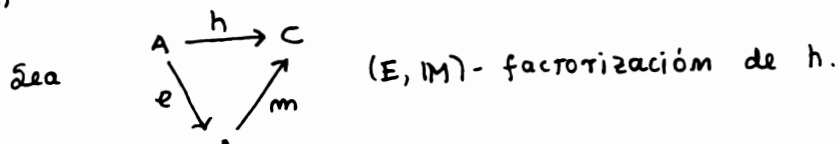
$\circ \circ d$  es sección y  $e \circ f = d \circ h$

por 1.3  $e$  es epimorfismo y por hipótesis  $f$  lo es,

$\circ \circ d$  es epimorfismo,  $\circ \circ d$  es isomorfismo

$\circ \circ m$  es isomorfismo,  $\circ \circ g \in E$ .

"(b)"



$\circ \circ$   $d$  es sección.

como  $e \in E$ , por 1.3  $e$  es epimorfismo,  $\circ \circ$   $s$  es epimorfismo,

$\circ \circ$   $d$  es epimorfismo,  $\circ \circ$   $d$  es isomorfismo,

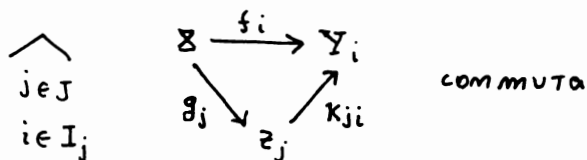
$\circ \circ$   $m$  es isomorfismo,  $\circ \circ$   $h \in E$ .  $\odot$

1.10 PROPOSICIÓN.-

$(f_i: X \rightarrow Y_i)_{i \in I}$   $\mathcal{K}$ -fuente

$\left( (g_j: X \rightarrow Z_j)_{j \in J}, ((k_{ji}: Z_j \rightarrow Y_i)_{i \in I_j})_{j \in J} \right)$  factorización de

$(f_i)_{i \in I}$ , es decir,  $(I_j)_{j \in J}$  es una partición de  $I$  y, además



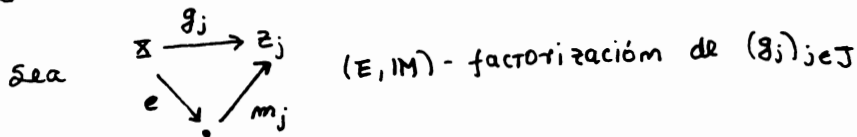
$\Rightarrow$

(a)  $(f_i)_{i \in I} \in M \Rightarrow (g_j)_{j \in J} \in M$

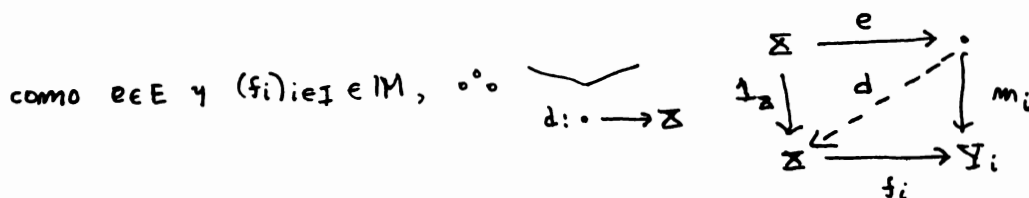
(b)  $(g_j)_{j \in J} \in M \wedge \bigwedge_{j \in J} (k_{ji})_{i \in I_j} \in M \Rightarrow (f_i)_{i \in I} \in M$ .

Demo:

"(a)"



Definimos  $\bigwedge_{i \in J} m_i := k_{ji} \circ m_j$  si  $i \in I_j$

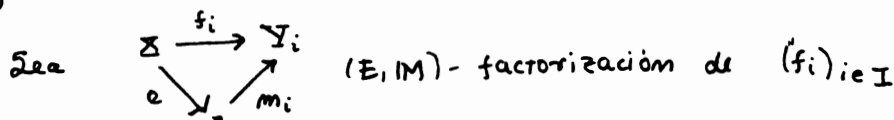


$\circ \circ$  e es secci3n y como  $e \in E$  por 1.3 e es epimorfismo

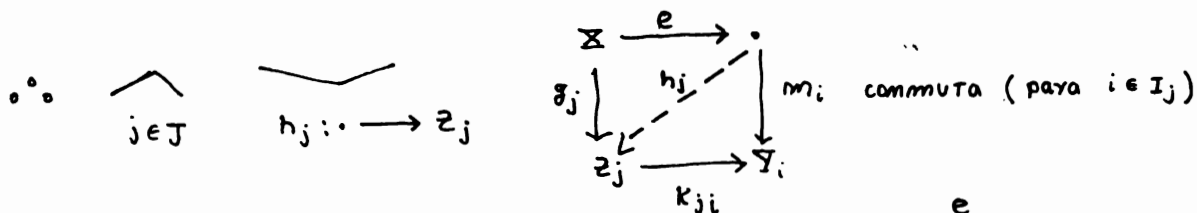
$\circ \circ$  e es isomorfismo, y como  $(m_j)_{j \in J} \in \mathcal{M}$ ,

$\circ \circ$   $(g_j)_{j \in J} \in \mathcal{M}$ .

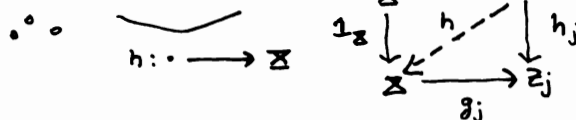
"(b)"



como  $e \in E$  y  $\bigwedge_{j \in J} (k_{ji})_{i \in I_j} \in \mathcal{M}$ ,



como  $e \in E$  y  $(g_j)_{j \in J} \in \mathcal{M}$ ,



$\circ \circ$  e es secci3n y como  $e \in E$  por 1.3 e es epimorfismo.

$\circ \circ$  e es isomorfismo y como  $(m_i)_{i \in I} \in \mathcal{M}$ ,  $\circ \circ$   $(f_i)_{i \in I} \in \mathcal{M}$ .  $\textcircled{Q.E.D.}$

1.11 PROPOSICIÓN.

$(f_i: X \rightarrow Y_i)_{i \in I}$  K-fuente  $\exists$   $\bigwedge_{J \subseteq I} (f_i: X \rightarrow Y_i)_{i \in J} \in \mathcal{M}$

$\Rightarrow$

$(f_i: X \rightarrow Y_i)_{i \in I} \in \mathcal{M}$ .

Dem.:

Sea  $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_i} & Y_i \\ & \searrow e & \nearrow m_i \end{array}$   $(E, \mathcal{M})$ -factorización de  $(f_i)_{i \in I}$

$\circ \circ$   $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_i} & Y_i \\ & \searrow e & \nearrow m_i \end{array}$  es factorización de  $(f_i)_{i \in J}$

como  $(f_i)_{i \in J} \in \mathcal{M}$ , por 1.10 a)  $e \in \mathcal{M}$

$\circ \circ$   $e \in E \cap \mathcal{M}$ ,  $\circ \circ$   $e$  es isomorfismo,  $\circ \circ$   $(f_i)_{i \in I} \in \mathcal{M}$ .  $\oplus$

1.12 PROPOSICIÓN.-

$E$  y  $\mathcal{M}$  se determinan mutuamente a través de la propiedad de diagonalización, es decir:

(a)  $E = \{ f \in \mathcal{M} \text{ or } K \mid K \text{ es } (f, \mathcal{M})\text{-diagonalizable} \}$

(b)  $\mathcal{M} = \{ (f_i)_{i \in I} \text{ K-fuente} \mid K \text{ es } (E, (f_i)_{i \in I})\text{-diagonalizable} \}$

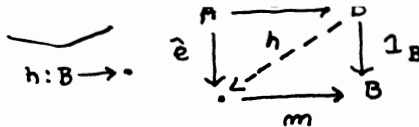
Dem.:

"(a)"

" $\subseteq$ " obvio

" $\supseteq$ " sea  $e: A \rightarrow B \in \mathcal{M} \text{ or } K$   $\exists$   $K$  es  $(e, \mathcal{M})$ -diagonalizable

Sea  $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{e} & B \\ & \searrow e & \nearrow m \end{array}$   $(E, \mathcal{M})$ -factorización de  $e$ .

como  $m \in M$ ,  $\therefore$   -26-

por 1.3  $h$  es epimorfismo,  $\circ \circ h$  es isomorfismo,

$\circ \circ m$  es isomorfismo,  $\circ \circ e \in E$ .

"(b)"

Se obtiene en forma similar a (a).  $\odot$

### 1.13 COROLARIO:

$(E', M)$  estructura de factorización en  $K$

$(E, M')$  estructura de factorización en  $K$

$\Rightarrow$

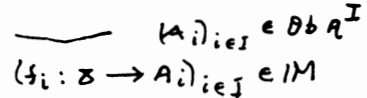
$E = E' \wedge M = M'$   $\odot$

### 1.14 OBSERVACIÓN:

En el siguiente teorema se probará que toda sub-categoría plena de  $K$  posee envolvente  $E$ -reflexiva. Dicha envolvente se tomará con respecto a sub-categorías plenas y repletas de  $K$ .

### 1.15 TEOREMA:

$\mathcal{A}$  sub-categoría plena de  $K$ .

$\mathcal{B}$  la sub-categoría plena de  $K \rightarrow \exists \Sigma \in \text{Ob } \mathcal{B} \Leftrightarrow$  

$\Rightarrow$

$\mathcal{B}$  es la envolvente  $E$ -reflexiva de  $\mathcal{A}$  en  $K$ .

Dem:

Por 1.6,  $\bigwedge_{A \in \text{Ob } \mathcal{A}} 1_A \in \mathcal{M}$ ,  $\circ \circ \text{Ob } \mathcal{A} \subseteq \text{Ob } \mathcal{B}$ .

Sea  $\mathcal{X} \in \text{Ob } \mathcal{K}$

Sea  $(f_i: \mathcal{X} \rightarrow A_i)_{i \in I}$  la fuente de todos los  $\mathcal{K}$ -morfismos con dominio  $\mathcal{X}$  y codominio en  $\text{Ob } \mathcal{A}$ .

Sea  $(E, \mathcal{M})$  factorización de  $(f_i)_{i \in I}$

$\circ \circ e \in E \wedge A \in \text{Ob } \mathcal{B}$ .

Sea  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$   $\mathcal{K}$ -morfismo  $\circ \circ \mathcal{Y} \in \text{Ob } \mathcal{B}$ .

$\circ \circ \bigwedge_{(z_j)_{j \in J} \in \text{Ob } \mathcal{A}^J}$   
 $(g_j: \mathcal{Y} \rightarrow z_j)_{j \in J} \in \mathcal{M}$

$\circ \circ \bigwedge_{j \in J} \bigvee_{i \in I} g_j \circ f = f_i = m_{ij} \circ e$

$\circ \circ$  commuta.

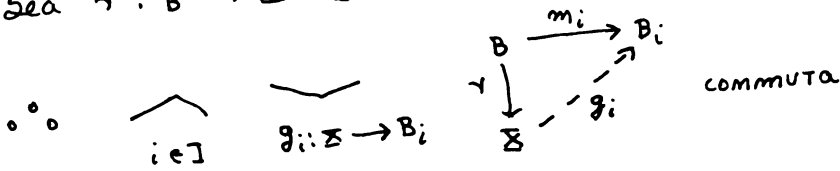
$\circ \circ \mathcal{B}$  es sub-categoría  $E$ -reflexiva de  $\mathcal{K}$ .

Sea  $\mathcal{D}$  sub-categoría  $E$ -reflexiva de  $\mathcal{K} \circ \circ \text{Ob } \mathcal{A} \subseteq \text{Ob } \mathcal{D}$ .

Sea  $B \in \text{Ob } \mathcal{B}$ ,  $\circ \circ \bigwedge_{(B_i)_{i \in I} \in \text{Ob } \mathcal{A}^I}$   
 $(m_i: B \rightarrow B_i)_{i \in I} \in \mathcal{M}$



Sea  $\gamma: B \rightarrow \mathcal{B}$  la  $E$ -reflexión de  $B$  en  $\mathcal{D}$ .



como  $(m_i)_{i \in I} \in \mathcal{M}$ , por 1.10 (a)  $\gamma \in E \cap \mathcal{M}$ , y de aquí por 1.6  $\gamma$  es isomorfismo. Finalmente, por ser  $\mathcal{D}$  repleta y  $\mathcal{B} \in \text{Ob } \mathcal{D}$ ,  $B \in \text{Ob } \mathcal{D}$ . •••  $\text{Ob } \mathcal{B} \subseteq \text{Ob } \mathcal{D}$ .  $\oplus$

1.16 EJEMPLOS DE ESTRUCTURAS DE FACTORIZACIÓN.-

1) Toda categoría tiene la estructura de factorización (isomorfismos, fuentes) y se conoce como estructura trivial.

2) [7]. Remark. 2.2:

La categoría de conjuntos  $\text{Set}$  tiene precisamente dos estructuras de factorización:

1°.- La trivial, dada por (funciones biyectivas, fuentes).

2°.- La regular, es decir, (epis regulares, monofuentes)

dada por (funciones suryectivas, fuentes que separan puntos).

3) [5]. PROP 3.24:

si  $\mathcal{K}$  es una categoría concreta topológica, entonces  $\mathcal{K}$

(a) (cocientes, monofuentes)

-29-

(b) (epimorfismos, fuentes extremadas)

(c) (epimorfismos, inmersiones)

(d) (pozos extremados, monomorfismos)

En particular en la categoría de espacios topológicos  $\text{TOP}$  estas estructuras están dadas por:

(a) (identificaciones, fuentes que separan puntos).

(b) (funciones continuas suryectivas, fuentes que separan puntos  $(f_i: (X_i, \tau_i) \rightarrow (Y, \sigma))_{i \in I}$  donde  $\tau$  es la topología inicial respecto a  $(f_i, \tau_i)_{i \in I}$ ).

(c) (pozos que cubren puntos, inmersiones)

(d) (pozos que cubren puntos  $(g_i: (X_i, \tau_i) \rightarrow (Y, \sigma))_{i \in I}$  donde  $\sigma$  es la topología final respecto a  $(g_i, \tau_i)_{i \in I}$ , funciones continuas inyectivas).

4) En el capítulo II de este trabajo veremos que una categoría (plena y repleta)  $K$  de  $\tau$ -álgebras es (homomorfismos suryectivos, fuentes que separan puntos) - categoría si y solo si  $K = HK \cap \text{ISP}K$ .

5)  $K \subseteq K_c \ni$  el funtor que olvida  $u: K \rightarrow \text{Set}$  posee adjunto izquierdo  $\wedge SK \subseteq K$

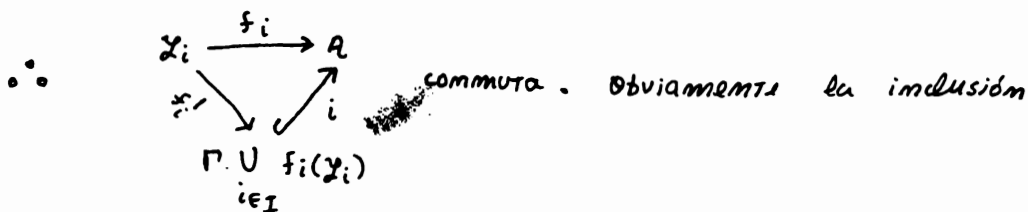
$\Rightarrow$

$K$  es (epipozos extremados, homomorfismos inyectivos) - categoría.

Dem.

claramente las clases "epipozos extremados" y "homomorfismos inyectivos" son cerradas bajo la composición con isomorfismos.

Sea  $(\mathcal{X}_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I}$   $K$ -pozo.



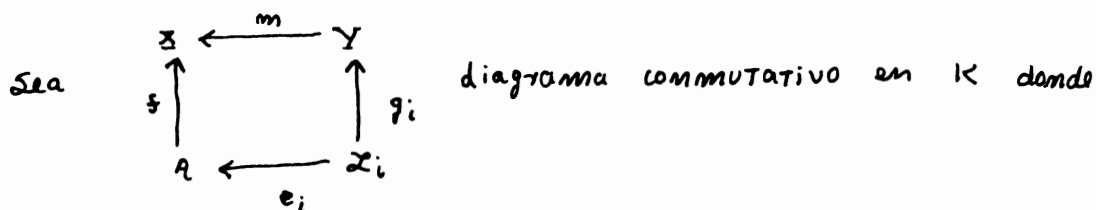
$i: \Gamma \cup_{i \in I} f_i(\mathcal{X}_i) \hookrightarrow A$  es homomorfismo inyectivo y

$(f_i': \mathcal{X}_i \rightarrow \Gamma \cup_{i \in I} f_i(\mathcal{X}_i))_{i \in I}$  es epipozo que resulta extremado

pues  $u: K \rightarrow \text{Set}$  posee adjunto izquierdo y de aquí que los

$K$ -homomorfismos son inyectivos. (Nótese que  $\Gamma \cup_{i \in I} f_i(\mathcal{X}_i) \in K$ )

pues  $SK \subseteq K$ ).



$m$  es inyectivo y  $(e_i)_{i \in I}$  es epipozo extremado.

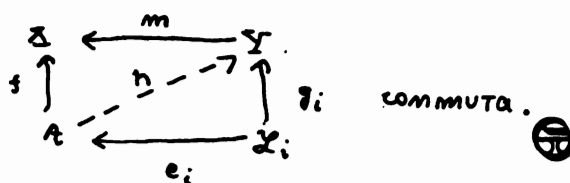
•••  $f \left( \bigcup_{i \in I} e_i(x_i) \right) \subseteq m(Y) \in S(X)$

•••  $f \left( \Gamma \bigcup_{i \in I} e_i(x_i) \right) = \Gamma \left( f \left( \bigcup_{i \in I} e_i(x_i) \right) \subseteq m(Y) \right)$ .

como  $(e_i)_{i \in I}$  es extremado,  $\Gamma \bigcup_{i \in I} e_i(x_i) = A$

•••  $f(A) \subseteq m(Y)$  y como  $m$  es inyectiva,

•••  $\underbrace{\quad}_!$   
 $h: A \rightarrow Y$   
 homomorfismo



" By an " aggregate " we are to understand any collection into a whole  $M$  of definite and separate objects  $m$  of our intuition or our thought. We call by the name " power " or " cardinal number " of  $M$  the general concept which, by means of our active faculty of thought, arises from the aggregate  $M$  when we make abstraction of the nature of its various elements  $m$  and of the order in which they are given. We denote the result of this double act of abstraction, the cardinal number or power of  $M$ , by  $\overline{M}$ . "

Georg Cantor.

CAPITULO II. LA ENVOLVENTE HOMOMORFISMOS  
SURJECTIVOS REFLEXIVA PARA CATEGORIAS  
DE  $\tau$ -ALGEBRAS.

2.1 DEFINICIÓN.-

$$K \subseteq K_\tau$$

$\Rightarrow$

$K$  se llama CERRADA BAJO FUENTES QUE SEPARAN PUNTOS

$\Leftrightarrow$

$$K = \left\{ A \in K_\tau \mid \underbrace{\left( \begin{array}{l} (x_i)_{i \in I} \in K^I \\ (f_i: A \rightarrow x_i)_{i \in I} \text{ } K_\tau\text{-fuente} \end{array} \right)}_{(f_i)_{i \in I} \text{ separa puntos}} \right\}$$

2.2 OBSERVACIÓN.-

$\{ K \subseteq K_\tau \mid K \text{ es cerrada bajo fuentes que separan puntos} \}$  es un sistema de cerradura. Además si  $\mathcal{L} \subseteq K_\tau$ , la mínima clase cerrada bajo fuentes que separan puntos es:

$$\left\{ A \in K_\tau \mid \underbrace{\left( \begin{array}{l} (x_i)_{i \in I} \in \mathcal{L}^I \\ (f_i: A \rightarrow x_i)_{i \in I} \text{ } K_\tau\text{-fuente} \end{array} \right)}_{(f_i)_{i \in I} \text{ separa puntos}} \right\}.$$

2.3 LEMA.-

$$K \subseteq K_\tau$$

$\Rightarrow$

$$ISP K = \left\{ A \in K_\tau \mid \underbrace{\left( \begin{array}{l} (x_i)_{i \in I} \in K^I \\ (f_i: A \rightarrow x_i)_{i \in I} \text{ } K_\tau\text{-fuente} \end{array} \right)}_{(f_i)_{i \in I} \text{ separa puntos}} \right\}$$

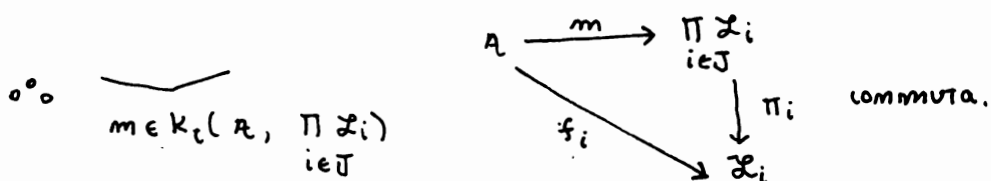
Demo:

" $\subseteq$ " trivial

" $\supseteq$ "

Sean  $A \in K_T$ ,  $(\mathcal{X}_i)_{i \in I} \in K^I$  y  $(f_i: A \rightarrow \mathcal{X}_i)_{i \in I}$   $K_C$ -fuente que separa puntos.

por [5] PROP 1.3,  $\bigcup_{J \subseteq I} \text{conjunto}$   $(f_i)_{i \in J}$  separa puntos.



finalmente como  $(f_i)_{i \in J}$  separa puntos,

$m$  es inyectiva,  $A \in \text{ISP } K$ .  $\odot$

2.4 LEMA:

$K \subseteq K_C$

$\Rightarrow$

$$\text{HK} \cap \text{ISP } K = \left\{ \mathcal{X} \in K_C \mid \bigcup_{\substack{A \in K \\ (\mathcal{X}_i)_{i \in I} \in K^I \\ (f_i: A \rightarrow \mathcal{X}_i)_{i \in I} \text{ K-fuente}}} \mathcal{X} \cong A / \bigcap_{i \in I} \ker f_i \right\}$$

" $\subseteq$ "

Sea  $\mathcal{X} \in \text{HK} \cap \text{ISP } K$ .

por 2.3,  $\bigcup_{A \in K} (f_i)_{i \in I}$  separa puntos.

$(\mathcal{X}_i)_{i \in I} \in K^I$

$e: A \rightarrow \mathcal{X}$  homomorfismo suryectivo

$(f_i: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_i)_{i \in I}$   $K_T$ -fuente



$\circ \circ \quad \mathcal{Z} \cong A / \text{Ker } e = A / \bigcap_{i \in I} \text{Ker } f_{i \in I}$

" $\supseteq$ "

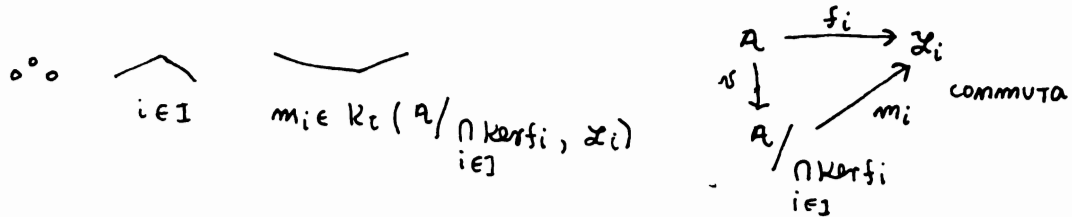
Sea  $\mathcal{Z} \in \mathcal{K}_c \cdot \exists \cdot \underbrace{\quad}_{A \in K} \quad \mathcal{Z} \cong A / \bigcap_{i \in I} \text{Ker } f_i$   
 $(\mathcal{Z}_i)_{i \in I} \in K^I$   
 $(f_i: A \rightarrow \mathcal{Z}_i)_{i \in I}$   $K$ -fuente

Observemos que solo hay un conjunto de congruencias

distintas en  $\{\text{Ker } f_i\}_{i \in I}$ ,  $\circ \circ \bigcap_{i \in I} \text{Ker } f_i \in \mathcal{K}(A)$ ,

$\circ \circ \quad \mathcal{Z} \in \text{HK} = \text{HK} \cdot$

Sea  $\nu: A \rightarrow A / \bigcap_{i \in I} \text{Ker } f_i$  la proyección natural.



y obviamente  $(m_i)_{i \in I}$  separa puntos.

De aquí por 2.3,  $A / \bigcap_{i \in I} \text{Ker } f_i \in \text{ISPK}$ .

$\circ \circ \quad \mathcal{Z} \in \text{ISPK} = \text{ISPK} \cdot \textcircled{10}$



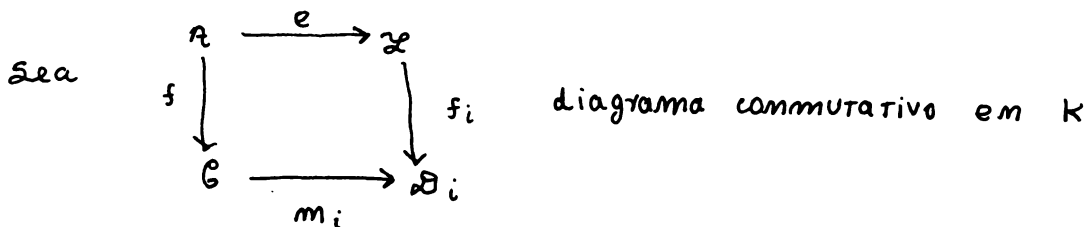
2.5 LEMA:

$K \subseteq K_c$

$\Rightarrow$

$K$  tiene la propiedad de (homomorfismos suryectivos, fuentes que separan puntos diagonalizaci3n).

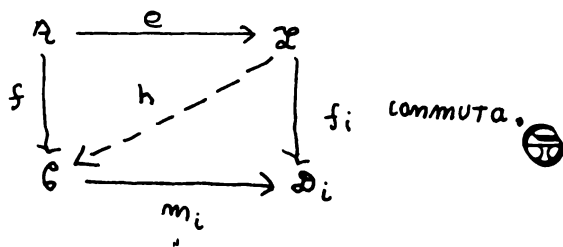
Dem.:



donde  $e$  es suryectiva y  $(m_i)_{i \in I}$  separa puntos.

$\circ^\circ$   $\text{ker } e \subseteq \text{ker } f$  y como  $e$  es suryectiva,

$\circ^\circ$   $h: X \rightarrow C$  homomorfismo



2.6 TEOREMA:

$K \subseteq K_c$  repleta

$\Rightarrow$

$K$  es (homomorfismos suryectivos, fuentes que separan puntos) - categoria

$\Leftrightarrow$

$K = HK \cap \text{SPK}$ .

Dem.:

" $\Leftarrow$ "

claramente las clases "homomorfismos suryectivos" y

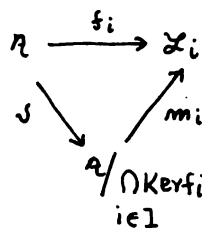
"fuentes que separan puntos" son cerradas bajo la

composici3n con isomorfismos.

Sea  $(f_i: R \rightarrow \mathcal{L}_i)_{i \in I}$   $K$ -fuente

-37-

Consideremos la factorización



como en 2.4.

Tenemos que la proyección natural  $\nu$  es suryectiva,

$(m_i)_{i \in I}$  separa puntos y  $R / \bigcap_{i \in I} \text{Ker } f_i \in \text{HK} \cap \text{ISP}K = K$ . Finalmente

por 2.5 se obtiene la conclusión.

" $\Rightarrow$ "

Sea  $\mathcal{L} \in \text{HK} \cap \text{ISP}K$

por 2.4  $\mathcal{L} \cong R / \bigcap_{i \in I} \text{Ker } f_i$   
 $(\mathcal{L}_i)_{i \in I} \in K^I$   
 $(f_i: R \rightarrow \mathcal{L}_i)_{i \in I}$   $K$ -fuente

Sea  $\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{L}_i \\ \downarrow e & & \uparrow \gamma_i \\ \emptyset & & \end{array}$  factorización de  $(f_i)_{i \in I}$  donde

$\emptyset \in K$ ,  $e$  es suryectiva y  $(\gamma_i)_{i \in I}$  separa puntos.

por " $\Leftarrow$ "  $K_1$  es (homomorfismos suryectivos, fuentes

que separan puntos categoría). Consideremos la facto-

rización  $\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{L}_i \\ \downarrow \nu & & \uparrow m_i \\ R / \bigcap_{i \in I} \text{Ker } f_i & & \end{array}$  como en 2.4. De aquí por 1.7,

$\mathcal{L} \cong R / \bigcap_{i \in I} \text{Ker } f_i \cong \emptyset \in K$ .  $\therefore$  Como  $K$  es repleta  $\mathcal{L} \in K$ .  $\odot$

$$K \subseteq K_c$$

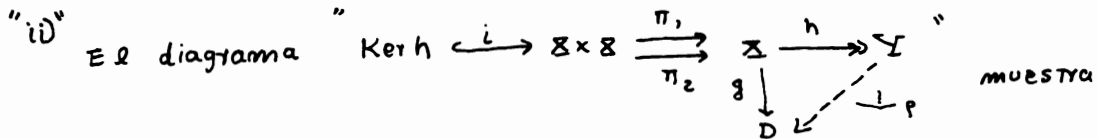
$\Rightarrow$

i)  $HK \subseteq K \Rightarrow K$  es (hom. suryectivos, fuentes que separan puntos) - categoría.

ii)  $ISP K \subseteq K \Rightarrow K$  es (epis regulares, monofuentes) - categoría.

Dem.

"i)" directo por 2.6

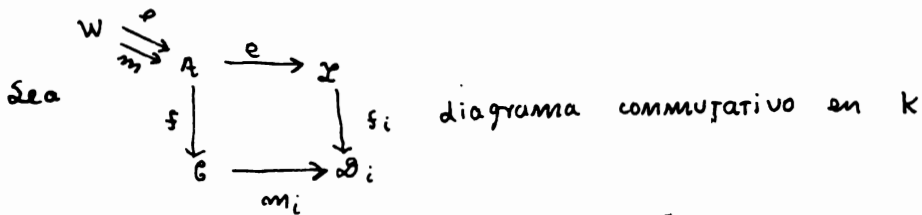


que si  $h$  es  $K$ -homomorfismo suryectivo,  $h$  es  $K$ -epimorfismo

regular. ( $\text{Ker } h \in \text{SPK} \subseteq \text{ISPK} = K$  y  $h$  es coigualador de  $\pi_{1o_i}$  y  $\pi_{2o_i}$ ).

De aquí por la demostración de 2.6 se obtiene que

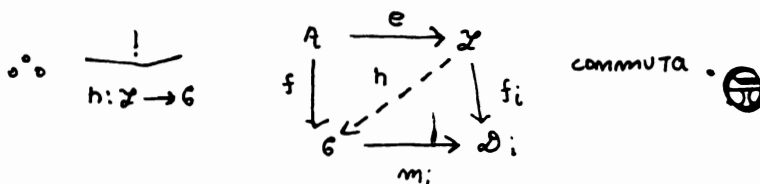
$K$  es (epis regulares, monofuentes) factorizable.



donde  $e$  es epi regular, coigualador de  $l$  y  $m$ , y  $(m_i)_{i \in I}$  es

$K$  monofuente.  $\circ \circ \bigwedge_{i \in I} m_i \circ f \circ l = f_i \circ e \circ l = f_i \circ e \circ m = m_i \circ f \circ m$ .

Como  $(m_i)_{i \in I}$  es  $K$ -monofuente,  $\circ \circ f \circ l = f \circ m$ ,



## 2.8 COROLARIO.-

- 39 -

$$K \subseteq K_{\tau} \quad \exists \cdot \text{ISP}K = K$$

$\Rightarrow$

La clase de  $K$ -homomorfismos suryectivos coincide con la clase de  $K$ -epimorfismos regulares.

Dem:

Por la demostración de 2.7,  $K$  es (epis regulares, fuentes que separan puntos) - categoría.

Por 2.6,  $K$  es (homomorfismos suryectivos, fuentes que separan puntos) - categoría.

De aquí por 1.13 se obtiene la conclusión.  $\odot$

## 2.9 PROPOSICIÓN.-

$$K \subseteq W \subseteq K_{\tau} \quad \exists \cdot \text{ISP}W = W$$

$\Rightarrow$

$\text{ISP}K$  es la envolvente homomorfismos suryectivos reflexiva de  $K$  en  $W$  y en particular de  $K$  en  $K_{\tau}$ .

Dem:

Recordemos (1.14) que estamos tomando la envolvente con respecto a sub-categorías plenas y repletas.

Por 2.6,  $W$  y  $K_{\tau}$  son (homomorfismos suryectivos, fuentes que separan puntos) - categorías.

$$\text{por 2.3, } \text{ISP}K = \left\{ A \in K_{\tau} \mid \underbrace{\quad}_{\{f_i\}_{i \in I} \in K^I} \text{ (} f_i\text{)}_{i \in I} \text{ separa puntos} \right\}$$

$f_i: A \rightarrow X_i\}_{i \in I}$   $K_{\tau}$ -fuente

como  $K \in \mathcal{H} = \text{ISP } \mathcal{H}$  se obtiene que:

$$\text{ISP } K = \left\{ A \in \mathcal{H} \mid \underbrace{\left( \begin{array}{l} (f_i)_{i \in I} \text{ separa puntos} \\ (x_i)_{i \in I} \in K^I \\ (f_i: A \rightarrow X_i)_{i \in I} \end{array} \right)} \right\}$$

De aquí por 1.15 se obtiene la conclusión.  $\odot$

### 2.10 OBSERVACIÓN.-

por 2.9, si  $K \subseteq K_c$ ,  $\text{ISP } K$  es epirreflexiva en cualquier sub-categoría  $\mathcal{G} \subseteq K_c \Rightarrow \text{ISP } K \subseteq \mathcal{G}$ . En particular tenemos:

### 2.11 COROLARIO.- ([8]. TEOREMA 2.3)

Cualquier variedad  $\mathcal{V}$  es epirreflexiva en toda categoría (plena) de  $\tau$ -álgebras que la contenga.  $\odot$

### 2.12 PROPOSICIÓN.-

$K \subseteq K_c$  repleta,  $\mathcal{H} \in K_c \Rightarrow \text{ISP } K \subseteq \mathcal{H}$

S.E.:

(a)  $K = \text{ISP } K$ .

(b)  $K$  es homomorfismos suryectivos reflexiva en  $K_c$ .

(c)  $K$  es homomorfismos suryectivos reflexiva en  $\mathcal{H}$ .

Dem.:

"(a)  $\Rightarrow$  (b)" directo por 2.9

"(b)  $\Rightarrow$  (c)" obvio

"(c)  $\Rightarrow$  (a)"

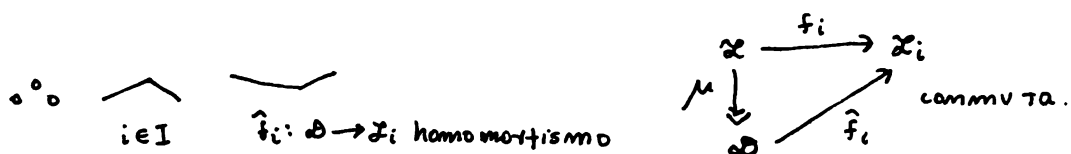
Sea  $X \in \text{ISP } K$ , por 2.3,  $\underbrace{\left( \begin{array}{l} (f_i)_{i \in I} \text{ separa puntos} \\ (x_i)_{i \in I} \in K^I \\ (f_i: X \rightarrow X_i)_{i \in I} \text{ } K_c\text{-fuente} \end{array} \right)}$

como  $\mathcal{X} \in \text{ISP}K \subseteq \mathcal{N}$ , por (a):

-41-

$\bigwedge_{\mathcal{D} \in K} (\mu, \mathcal{D})$  es la hom. suryektivis reflexión de  $\mathcal{X}$  en  $K$ .

$\mu: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{D}$  hom. suryektivis



como  $(f_i)_{i \in I}$  es inyektivis,  $\mu$  es inyektivis,

$\circ \circ \mathcal{X} \cong \mathcal{D} \in K$  y como  $K$  es completa,  $\circ \circ \mathcal{X} \in K$ .

$\circ \circ K = \text{ISP}K$ .



" Si no esperáis lo inesperado, no lo encontraréis;  
puesto que es penoso descubrirlo y, además, difícil. "

Heráclito.

### CAPITULO III. LA ISPK REFLEXIÓN.

#### 3.1 DEFINICIÓN.-

$$K \subseteq K_c, R \in K_c, \Sigma \subseteq R \times R$$

$\Rightarrow$

$$i) e_{AK} := \left\{ (p, q) \in R \times R \mid \bigwedge_{\substack{x \in K \\ \varphi \in K_c(R, x)}} \varphi(p) = \varphi(q) \right\} \text{ se llama}$$

#### CONJUNTO DE A- ECUACIONES EN K.

$$ii) m_{R\Sigma} := \left\{ x \in K_c \mid \bigwedge_{\substack{(p, q) \in \Sigma \\ \varphi \in K_c(R, x)}} \varphi(p) = \varphi(q) \right\} \text{ se llama}$$

#### CLASE DE MODELOS DE $\Sigma$ RESPECTO A $A$ .

#### 3.2 OBSERVACIONES.-

Sean  $K \in K_c$  y  $A \in K_c$ .

- i) Sea  $(f_i: A \rightarrow x_i)_{i \in I}$  la fuente de todos los  $K_c$ -morfismos con codomínios en  $K$ . Nótese que  $e_{AK} = \bigcap_{i \in I} \text{Ker } f_i$ . Además, por la demostración de 1.15 y por 2.9 la proyección natural  $\nu: A \rightarrow A/e_{AK}$  es la homomorfismos suryectivos reflexión de  $A$  en ISPK.



2) Por 1),  $ISP_K \subseteq \{ \mathcal{X} \in K_c \mid \bigwedge_{\varphi \in K_c(A, \mathcal{X})} \bigvee_{\tilde{\varphi} \in K_c(A/e_A K, \mathcal{X})} \text{commuta} \} =$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{X} \\ \downarrow \nu & & \nearrow \tilde{\varphi} \\ A/e_A K & & \end{array}$$

$$= \{ \mathcal{X} \in K_c \mid e_A K \subseteq \bigcap_{\varphi \in K_c(A, \mathcal{X})} \text{Ker } \varphi \} =$$

$$= \{ \mathcal{X} \in K_c \mid \bigwedge_{(\varphi, \tilde{\varphi}) \in e_A K} \varphi(p) = \tilde{\varphi}(q) \} = m_A e_A K.$$

Además observemos que  $m_A e_A K$  es la máxima clase de  $\tau$ -álgebras donde se extiende la propiedad universal de  $\nu: A \rightarrow A/e_A K$ .

3) Nótese que si  $A = \tilde{\nu}_c(K_c)$ ,  $e_A K = e_K$  y  $m_A e_A K = m_e K$ . Además es usual que  $ISP_K \subseteq HSP_K = m_e K$  que es la mínima variedad que contiene a  $K$ .

4)  $ISP_K = \bigcap_{A \in K_c} m_A e_A K.$

Dem.:

" $\subseteq$ " directo por 2)

" $\supseteq$ " Sea  $\mathcal{X} \in \bigcap_{A \in K_c} m_A e_A K$ .  $\circ\circ$   $\mathcal{X} \in m_{\mathcal{X}} e_{\mathcal{X}} K$  y como

$$1_{\mathcal{X}} \in K_c(\mathcal{X}, \mathcal{X}), \bigwedge_{b_1, b_2 \in \mathcal{X}} (b_1, b_2) \in e_{\mathcal{X}} K \Rightarrow b_1 = b_2$$

$$\circ \circ \bigwedge_{b_1, b_2 \in \mathcal{X}} b_1 \neq b_2 \Rightarrow \underbrace{\mathcal{A} \in \mathcal{K}}_{\varphi \in \mathcal{K}_\tau(\mathcal{X}, \mathcal{A})} \varphi(b_1) \neq \varphi(b_2)$$

De aquí por 2.3,  $\mathcal{X} \in \text{ISP} \mathcal{K}$ .

3.3 OBSERVACIÓN:

$\mathcal{K} \in \mathcal{K}_\tau$ ,  $\mathcal{A}$   $\mathcal{K}$ -libre generado por  $M$

$\Rightarrow$

$\mathcal{A}$  es  $\mathcal{K}$ -proyectivo con respecto a homomorfismos suryectivos.

3.4 LEMA.-

$$\mathcal{A} \in \mathcal{K}_\tau, \Sigma \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$$

$\Rightarrow$

$$\text{ISP } m_{\mathcal{A}} \Sigma = m_{\mathcal{A}} \Sigma$$

Dem.

Sean  $(\mathcal{X}_j)_{j \in J} \in m_{\mathcal{A}} \Sigma^J$ ,  $\mathcal{X} \in \mathcal{K}_\tau$  y  $(f_j: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_j)_{j \in J}$   $\mathcal{K}_\tau$ -fuente

que separa puntos.

Sean  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$  homomorfismo y  $(p, q) \in \Sigma$

$$\circ \circ \bigwedge_{j \in J} f_j \circ \varphi(p) = f_j \circ \varphi(q) \quad \text{y como } (f_j)_{j \in J} \text{ separa puntos,}$$

$\circ \circ \varphi(p) = \varphi(q)$ ,  $\circ \circ \mathcal{X} \in m_{\mathcal{A}} \Sigma$ . Finalmente por 2.3

se obtiene la conclusión.  $\odot$

3.5. COROLARIO.-

$K \in K_{\tau}, A \in K_{\tau}$

$\Rightarrow$

$m_{A \in K} K$  coincide con su envolvente homomorfismos suryectivos reflexiva en cualquier clase de  $\tau$ -álgebras cerrada bajo

fuentes que separan puntos que la contenga. De aquí que

$m_{A \in K} K$  es epirreflexiva en cualquier subcategoría  $\mathcal{C} \in K_{\tau}$

Tal que  $m_{A \in K} K \in \mathcal{C}$ .

Dem.-

directo por 3.4, 2.9 y 2.10.



3.6 PROPOSICIÓN.-

$K \in K_{\tau}$

$\Rightarrow$

1)  $\bigwedge_{A, \mathcal{X} \in K_{\tau}} \Gamma_{\mathcal{C}} \{ (b_1, b_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \mid \underbrace{\{ (a_1, a_2) \in e_{A, K} \mid \varphi(a_1) = b_1, \wedge \varphi(a_2) = b_2 \}}_{\varphi \in K_{\tau}(A, \mathcal{X})} \} \subseteq e_{\mathcal{X}, K}$

2)  $A$   $K_{\tau}$ -proyectivo con respecto a homomorfismos suryectivos

$\Rightarrow$

$\bigwedge_{\mathcal{X} \in K_{\tau}} \Gamma_{\mathcal{C}} \{ (b_1, b_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \mid \underbrace{\{ (a_1, a_2) \in e_{A, K} \mid \varphi(a_1) = b_1, \wedge \varphi(a_2) = b_2 \}}_{\varphi \in K_{\tau}(A, \mathcal{X})} \} = e_{\mathcal{X}} m_{A \in K} K$

Dem.-

"1)" inmediato.

"2)" " $\subseteq$ " inmediato.

" $\Rightarrow$ " Sea  $\mathcal{Z} \in K_T$ .

-47-

Sea  $\theta := \bigcap_c \{ (\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \mid \begin{array}{l} (a_1, a_2) \in e_A K \\ \varphi \in K_T(R, \mathcal{Z}) \\ \varphi(a_1) = b_1, \wedge \varphi(a_2) = b_2 \end{array} \}$

Demostremos que  $\mathcal{Z}/\theta \in m_A e_A K$ :

Sean  $h: R \rightarrow \mathcal{Z}/\theta$  homomorfismo y  $(p, q) \in e_A K$

Sea  $\nu_\theta: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}/\theta$  la proyección natural.

como  $A$  es  $K_T$ -proyectivo,

$$\begin{array}{ccc} \circ \circ & \xrightarrow{\quad} & \circ \circ \\ & \sigma \nearrow & \downarrow \nu_\theta \\ & A & \mathcal{Z} \\ & \xrightarrow{h} & \mathcal{Z}/\theta \end{array} \text{ commuta.}$$

Por definición de  $\theta$ ,  $(\sigma(p), \sigma(q)) \in \theta$

$$\circ \circ \quad h(p) = \nu_\theta \circ \sigma(p) = \nu_\theta \circ \sigma(q) = h(q)$$

$\circ \circ \quad \mathcal{Z}/\theta \in m_A e_A K$  y de aquí por definición,

$$\circ \circ \quad e_{\mathcal{Z}} m_A e_A K = \text{ker } \nu_\theta = \theta. \quad \text{⊖}$$

3.7 COROLARIO.-

$$K \subseteq K_{\mathcal{Z}}, \mathcal{Z} \in K_{\mathcal{Z}}, \theta := \Gamma_{\mathcal{Z}} \{ (b_1, b_2) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \mid \underbrace{(p, q) \in e_K}_{\forall (p, q) \in e_K} \varphi(p) = b_1, \wedge \varphi(q) = b_2 \}$$

$$\varphi \in K_{\mathcal{Z}}(\mathcal{Z}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{Z}), \mathcal{Z})$$

$\Rightarrow$

$\mathcal{Z}/\theta$  es la reflexi3n de  $\mathcal{Z}$  en  $m_{e_K}$ , es decir, en la m3nima variedad que contiene a  $K$ .  $\odot$

3.8 PROPOSICI3N.-

$A \in K_{\mathcal{Z}}$  absolutamente libre generada por  $M$

$\Rightarrow$

i)  $m_{Ae_AK}$  es variedad  $\wedge m_{e_K} \subseteq m_{Ae_AK}$

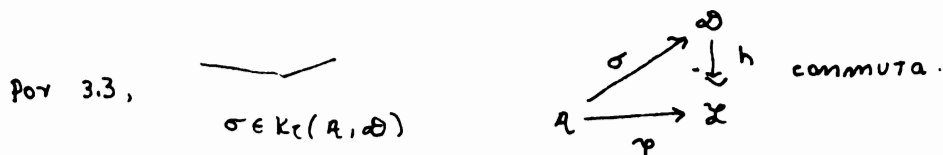
ii)  $|M| \gg |\alpha_{\mathcal{Z}}| \Rightarrow m_{e_K} = m_{Ae_AK}$ .

Dam.-

"i)" por 2.4 basta probar que  $m_{Ae_AK} \subseteq m_{e_K}$ :

Sean  $\mathcal{Z} \in K_{\mathcal{Z}}, \vartheta \in m_{Ae_AK}$  y  $h: \vartheta \rightarrow \mathcal{Z}$  homomorfismo suryectivo.

Sean  $(a_1, a_2) \in e_{AK}$  y  $\varphi: A \rightarrow \mathcal{Z}$  homomorfismo.



$\circ \circ \sigma(a_1) = \sigma(a_2), \circ \circ \varphi(a_1) = \varphi(a_2), \circ \circ \mathcal{Z} \in m_{Ae_AK}$

y por ser  $m_{e_K}$  la m3nima variedad que

contiene a  $K, \circ \circ m_{e_K} \subseteq m_{Ae_AK}$ .

"i)" Sea  $|M| > |\alpha_c|$

" $\Leftarrow$ " Directo por i).

" $\Rightarrow$ "

Sea  $\mathcal{L} \in \text{MAEAK}$ . Sean  $h: \mathcal{V}_{\alpha_c} \rightarrow \mathcal{L}$  homomorfismo

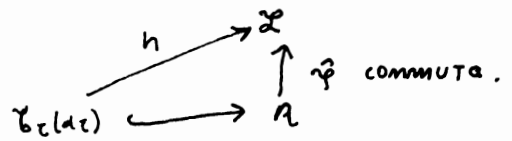
y  $(p, q) \in e_K$ .

Como  $|M| > |\alpha_c|$ , S.P.G  $\mathcal{V}_{\alpha_c} \in \mathcal{S}(A)$ .

Sea  $\varphi: M \rightarrow \mathcal{L}$  función  $\cdot \exists \cdot \varphi|_{\mathcal{V}_{\alpha_c}} = h|_{\mathcal{V}_{\alpha_c}}$

Sea  $\hat{\varphi}: A \rightarrow \mathcal{L}$  la extensión de  $\varphi$  a un

homomorfismo,  $\circ \circ$



como  $(p, q) \in e_K$ , por 3.6 i),  $(p, q) \in e_{AK}$  y como

$\mathcal{L} \in \text{MAEAK}$ ,  $\circ \circ \hat{\varphi}(p) = \hat{\varphi}(q)$ ,  $\circ \circ h(p) = h(q)$ ,

$\circ \circ \mathcal{L} \in \text{MEK}$ .  $\odot$

### 3.9 EJEMPLO.-

Sea  $K := \{ (A, \cdot) \in K_{\langle \rangle} \mid \bigwedge_{x, y \in A} x \cdot y = y \cdot x \}$

Sea  $A \langle \rangle$  - absolutamente libre generado por un conjunto singular  $\{s\}$ .

$\Rightarrow$

$K = \text{MEK} \cong \text{MAEAK}$ .

Dem.

Observemos que  $\{ (B, \cdot) \in K_{(2,2)} \mid \bigwedge_{b \in B} \{b\} \in K \} \subseteq m_A e_A K$ .

En efecto, si  $(B, \cdot) \in K_{(2,2)} \cdot \exists \cdot \bigwedge_{b \in B} \{b\} \in K$ , dados

$(p, q) \in e_A K$  y  $\varphi: A \longrightarrow (B, \cdot)$  homomorfismo,

$$\varphi(A) = \varphi(\{p, q\}) = \{ \varphi(p), \varphi(q) \} \in K \subseteq m_A e_A K \quad \forall$$

como  $(p, q) \in e_A K$ ,  $\varphi(p) = \varphi(q)$ .  $\circ \circ (B, \cdot) \in m_A e_A K$ .

El grupo de permutaciones de 3 elementos

$S_3$  interpretado en  $K_{(2,2)}$  satisface que

$\bigwedge_{x \in S_3} \{x\} \in K$  pero  $S_3$  no es abeliano,

$\circ \circ S_3 \in m_A e_A K$  pero  $S_3 \notin K = m e K$ .  $\odot$

### 3.10 OBSERVACIÓN.-

$$K \subseteq K_\tau, A \in K_\tau$$

$\Rightarrow$

$$m_A e_A K = K_\tau \Leftrightarrow A \in \text{ISP} K$$

Dem.

" $\Leftarrow$ " Si  $A \in \text{ISP} K$ , por 2.3  $e_A K = \Delta_A$ .  $\circ \circ m_A e_A K = K_\tau$

" $\Rightarrow$ " Si  $m_A e_A K = K_\tau$ ,  $A \in m_A e_A K$ ,  $\circ \circ \bigwedge_{(a_1, a_2) \in e_A K} a_1 = \mathfrak{I}_A(a_1) = \mathfrak{I}_A(a_2) = a_2$ ,

$\circ \circ e_A K = \Delta_A$  y por 2.3,  $\circ \circ A \in \text{ISP} K$ .  $\odot$

$F$  absolutamente libre generado por  $M \neq \emptyset$

$A \in \mathcal{K}_t$

$\Rightarrow$

$\mathcal{K}_t(A, F) \neq \emptyset \iff \underbrace{\quad}_{P \in S(A) \text{ retracto}} P \text{ es absolutamente libre generado por } \Sigma$   
 $\Sigma \subseteq P$

Demo.

" $\Rightarrow$ "

Sea  $h: A \rightarrow F$  homomorfismo,  $\circ \circ A/\ker h \cong h(A) \in S(F)$ .

Como  $F$  es absolutamente libre gen por  $M$ ,

$\circ \circ \underbrace{\quad}_{\tilde{\Sigma} \subseteq A/\ker h} A/\ker h \text{ es absolutamente libre generado por } \tilde{\Sigma}$ .

Sean  $\nu: A \rightarrow A/\ker h$  la proyección natural y  $\varphi: \tilde{\Sigma} \rightarrow A$   
 $[a]_{\ker h} \mapsto a$

función de elección.

Sea  $\hat{\varphi}: A/\ker h \rightarrow A$  la extensión a un homomorfismo

de  $\varphi$ .  $\circ \circ \nu \circ \hat{\varphi} = \text{id}_{A/\ker h}$ .

Sean  $\Sigma := \hat{\varphi}(\tilde{\Sigma})$  y  $P := \hat{\varphi}(A/\ker h)$

$\circ \circ P \in S(A)$ ,  $P$  es absolutamente libre generado por  $\Sigma$

y como  $P \xrightarrow{\quad} A \xrightarrow{\hat{\varphi} \circ \nu} P$  commuta,  $P$  es retracto.  
 $\text{id}_P$



" $\Leftarrow$ "

como  $M \neq \emptyset$ ,  $K_T(P, F) \neq \emptyset$ . Sea  $\sigma: P \rightarrow F$  homomorfismo.

Sea  $\tau: A \rightarrow P$  retracto,  $\circ \circ \sigma \circ \tau \in K_T(A, F)$ ,  $\circ \circ K_T(A, F) \neq \emptyset$ .  $\oplus$

### 3.12 COROLARIO

$K \subseteq K_T$ ,  $A \in K_T \cdot \exists \cdot m_{A \in K} \neq K_T$

$\Rightarrow$

$m_{A \in K}$  variedad  $\Rightarrow$   $\underbrace{\hspace{2cm}}$   $P$  es absolutamente libre generado por  $Z$ .  
 $P \in K_T$  retracto  
 $Z \in P$

Dem.

como  $m_{A \in K}$  es sub-variedad propia de  $K_T$  y como toda  $t$ -álgebra es imagen homomorfica de un absolutamente

libre,  $\circ \circ$   $\underbrace{\hspace{2cm}}$   $M$  conjunto  
 $F$  absolutamente libre generado por  $M$   $\neq m_{A \in K}$ .

Observemos que si  $K_T(A, F) = \emptyset$ , por vaciedad  $F \in m_{A \in K}$

$\circ \circ K_T(A, F) \neq \emptyset$  y por 3.11 se obtiene la conclusión.  $\oplus$

### 3.13 OBSERVACIÓN

por 3.10 si  $K \subseteq K_T$  y  $A \in K_T$ ,  $m_{A \in K} = K_T \Leftrightarrow A \in ISP_K$ . Nos

interesa analizar cuando  $m_{A \in K}$  esta "suficientemente cerca"

de  $ISP_K$ . Así pues Sean  $K \subseteq K_T$  y  $A \in K_T \cdot \exists \cdot A \notin ISP_K$ . Distinguimos

dos casos:

1er CASO:  $K_{\tau}(A, \mathcal{V}_{\tau}(\alpha_{\tau})) = \emptyset$

◦◦  $\mathcal{V}_{\tau}(\alpha_{\tau}) \in m_{A \otimes K}$  y POR 3.4 ISP  $\mathcal{V}_{\tau}(\alpha_{\tau}) \subseteq m_{A \otimes K}$

◦◦  $\bigwedge$   $F \in \text{ISP } \mathcal{V}_{\tau}(\alpha_{\tau}) \subseteq m_{A \otimes K}$   
 $M$  CONJUNTO  
 $F$  absolutamente libre  
 generado por  $M$

De aquí que  $m_{A \otimes K} \not\subseteq K_{\tau}$  pero en general "muy alejado"

de  $\text{ISP } K_{\tau}$ .

2º CASO:  $K_{\tau}(A, \mathcal{V}_{\tau}(\alpha_{\tau})) \neq \emptyset$

En esta caso, por 3.11,  $\bigwedge$   $P$  es abs. libre generado por  $\mathcal{Z}$ .  
 $P \in S(A)$  retracto  
 $\mathcal{Z} \subseteq P$

◦◦  $m_{A \otimes K} \subseteq m_{P \otimes K}$  que POR 3.8 es variedad, además si

$|\mathcal{Z}| > |K_{\tau}|$   $m_{P \otimes K}$  es la mínima variedad que contiene

a  $K$ . Si  $|\mathcal{Z}| < |K_{\tau}|$  vimos en 3.9 que puede suceder

que  $m_{K \otimes K} \not\subseteq m_{P \otimes K}$ . De cualquier forma  $m_{A \otimes K} \subseteq m_{P \otimes K}$

que es la variedad generada por  $K$  o bien una

variedad que tiene buena información de  $K$ . De aquí

que en este segundo caso  $m_{A \otimes K}$  está "suficientemente cerca" de  $\text{ISP } K_{\tau}$ .

The slogan is "Adjoint functors arise everywhere".

S. Mac Lane.

CAPITULO IV. ALGEBRAS K-LIBRES Y LA  
1SPK REFLEXIÓN.

4.1 TEOREMA.

$K \subseteq K_T$ ,  $F$   $K$ -libre generado por  $M$ ,  $\mathcal{T}$  absolutamente libre generado por  $M$

$\Rightarrow$

i)  $F \cong \mathcal{T}/e_{\mathcal{T}K}$

ii) Si  $K$  es no trivial y  $v: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}/e_{\mathcal{T}K}$  es la proyección natural,

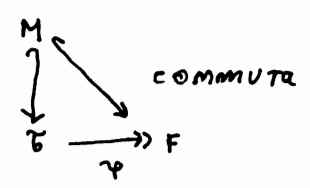
$\Rightarrow$

$|v(M)| = |M| \wedge \mathcal{T}/e_{\mathcal{T}K}$  es 1SPK-libre generado por  $v(M)$ .

Dem.-

"i)"

Sea  $\varphi: \mathcal{T} \rightarrow F$  homomorfismo suryectivo.  $\exists$ .

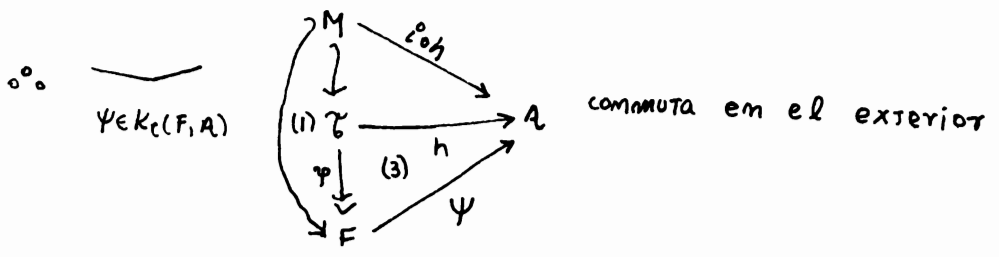


$\circ \circ \mathcal{T}/\text{ker } \varphi \cong F$

Demostremos que  $\text{ker } \varphi = e_{\mathcal{T}K}$ :

" $\supseteq$ " obvio pues  $F \in K$

" $\subseteq$ " Sea  $(p, \varphi) \in \text{ker } \varphi$  y sean  $A \in K$  y  $h: \mathcal{T} \rightarrow A$  homomorfismo



De aquí, como (1) conmuta, la unicidad de  $h$  implica que (3) conmuta, y como  $(p, q) \in \text{Ker } \varphi$   
 $\circ \circ h(p) = h(q)$ ,  $\circ \circ (p, q) \in \mathcal{C}_{\mathcal{Z}K}$ .

$$\circ \circ F \cong \mathcal{V} / \text{Ker } \varphi = \mathcal{V} / \mathcal{C}_{\mathcal{Z}K}.$$

"ii")

Como  $K$  es no trivial,  $\bigwedge_{\alpha \in K} |\alpha| > 1$ .

Sean  $b_1, b_2 \in \mathcal{Z} \ni b_1 \neq b_2$ .

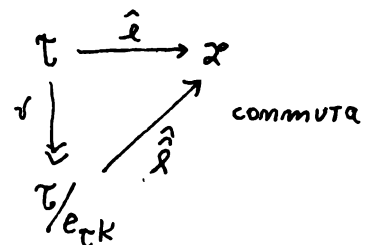
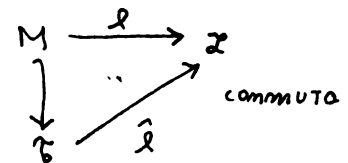
Demostremos que  $|v(M)| = |M|$ :

Sean  $m_1, m_2 \in M \ni m_1 \neq m_2$

Sea  $l: M \longrightarrow \mathcal{Z}$   
 $m_1 \longmapsto b_1$   
 $x \longmapsto b_2$  si  $x \neq m_1$

Sea  $\hat{l}: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{Z}$  homomorfismo  $\ni$ .

como  $\mathcal{Z} \in K$ , por 3.2 i),  $\hat{\hat{l}} \in \text{Ker}(\mathcal{V} / \mathcal{C}_{\mathcal{Z}K}, \mathcal{Z})$

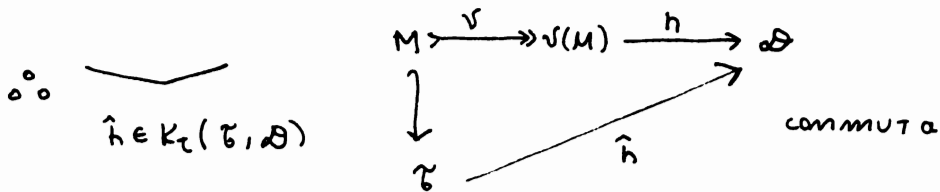


$\circ \circ v(m_1) \neq v(m_2)$ ,  $\circ \circ |v(M)| = |M|$ .

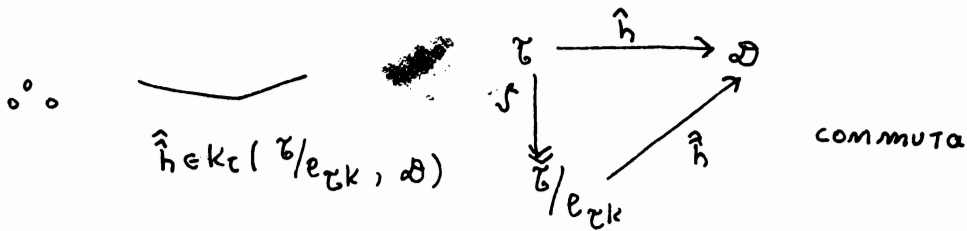
Como  $\mathcal{V}/e_{\mathcal{V}K} = \mathcal{V}(\mathcal{V}) = \mathcal{V}(\Gamma M) = \Gamma \mathcal{V}(M)$ ,

◦◦  $\mathcal{V}(M)$  genera a  $\mathcal{V}/e_{\mathcal{V}K}$ .

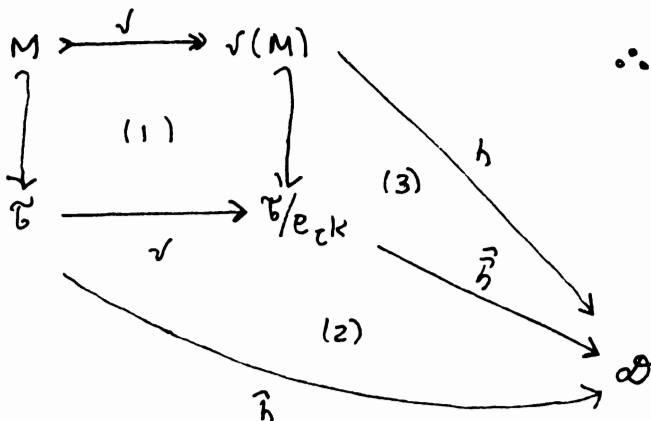
Sean  $\mathcal{D} \in \text{ISPK}$  y  $h: \mathcal{V}(M) \rightarrow \mathcal{D}$  función.



De aquí por OBS 3.2 1),



Consideremos el diagrama:



◦◦ COMMUTAN (1), (2) y el diagrama exterior y como  $M \xrightarrow{v} \mathcal{V}(M)$  es epi COMMUTA (3)

◦◦  $\mathcal{V}/e_{\mathcal{V}K}$  es ISPK-libre generado por  $\mathcal{V}(M)$ .


4.2 COROLARIO.-

$K \subseteq K_c$  repleta no trivial

S.E:

(1)  $\begin{array}{c} \wedge \\ M \text{ conjunto} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vee \\ F_M \in K \end{array} \quad F_M \text{ es } K\text{-libre generado por } M.$

(2)  $\begin{array}{c} \wedge \\ M \text{ conjunto} \end{array} \quad [ \mathcal{F} \text{ absolutamente libre generado por } M \Rightarrow \mathcal{F} / e_{\mathcal{F}K} \in K ] .$

(3) El funtor que olvida  $u: K \rightarrow \text{Set}$  posee adjunto izquierdo. 

" Old theorems never die, they turn  
into definiteness."

E. Hewitt.



$m_A e_A$  y  $e_A m_A$ .

5.1 LEMA.-

$K_1, K_2 \in K_T, A \in K_T, \Sigma_1, \Sigma_2 \in R \times R$

$\Rightarrow$

i)  $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \Rightarrow m_A \Sigma_2 \subseteq m_A \Sigma_1$

ii)  $K_1 \subseteq K_2 \Rightarrow e_A K_2 \subseteq e_A K_1$

iii)  $\Sigma_1 \subseteq e_A m_A \Sigma_1 \wedge K_1 \subseteq m_A e_A K_1$

iv)  $m_A e_A m_A \Sigma_1 = m_A \Sigma_1 \wedge e_A m_A e_A K_1 = e_A K_1$

v)  $\Sigma_1 = e_A m_A \Sigma_1 \Leftrightarrow \underbrace{\Sigma_1}_{K \subseteq K_T} = e_A K$

vi)  $K_1 = m_A e_A K_1 \Leftrightarrow \underbrace{K_1}_{\Sigma \in R \times R} = m_A \Sigma \quad \text{⊗}$

5.2 DEFINICIÓN.-

$A \in K_T$

$\Rightarrow$

i)  $K \in K_T$  se llama A-CERRADA  $\Leftrightarrow K = m_A e_A K$

ii)  $\Sigma \in R \times R$  se llama A-CERRADO  $\Leftrightarrow \Sigma = e_A m_A \Sigma$

5.3 OBSERVACIÓN.-

$A \in K_T$

$\Rightarrow$

i)  $\{K \in K_T \mid K \text{ es } A\text{-cerrada}\}$  es un sistema de cerradura.

El operador de cerradura inducido es  $m_A e_A$ .

ii)  $\{\Sigma \subseteq A \times A \mid \Sigma \text{ es } A\text{-cerrado}\}$  es un sistema de cerradura.

El operador de cerradura inducido es  $e_A m_A$ .

Dem. directo por las primeras cuatro afirmaciones de 5.1

5.4 COROLARIO.

$$A \in K_L$$

$$e_A: (\{K \subseteq K_L \mid K \text{ es } A\text{-cerrado}\}, \subseteq) \longrightarrow (\{\Sigma \subseteq A \times A \mid \Sigma \text{ es } A\text{-cerrado}\}, \subseteq)$$

$$K \longmapsto e_A K$$



$$m_A: (\{\Sigma \subseteq A \times A \mid \Sigma \text{ es } A\text{-cerrado}\}, \subseteq) \longrightarrow (\{K \subseteq K_L \mid K \text{ es } A\text{-cerrado}\}, \subseteq)$$

$$\Sigma \longmapsto m_A \Sigma$$

$\Rightarrow$

i)  $e_A$  y  $m_A$  son anti-isomorfismos de lattices completos.

ii)  $e_A^{-1} = m_A$ .

5.5 PROPOSICIÓN.-

$A \in K_c, \Sigma \subseteq A \times A$

$\Rightarrow$

i)  $\Sigma$  es  $A$ -cerrado  $\Rightarrow \Sigma$  es congruencia totalmente invariante de  $A$

ii)  $A$  absolutamente libre generado por  $M$

$\Rightarrow$

$\Sigma$  es  $A$ -cerrado  $\Leftrightarrow \Sigma$  es congruencia totalmente invariante de  $A$ .

Dem.-

"i)" sea  $\Sigma = e_R m_A \Sigma$ .

como  $e_R m_A \Sigma = \bigcap_{\varphi \in K_c(A, X)} \bigcap_{\psi \in K_c(A, X)} \text{Ker } \psi, \Sigma$  es congruencia.

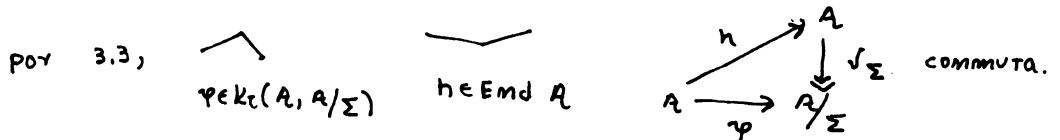
Sea  $\varphi \in \text{End } A, (p, q) \in \Sigma, \varphi \in m_A \Sigma$  y  $h: A \rightarrow X$  homomorfismo.

o.o  $h \circ \varphi(p) = h \circ \varphi(q), \text{ o.o } (\varphi(p), \varphi(q)) \in e_R m_A \Sigma = \Sigma$

o.o  $\Sigma$  es congruencia totalmente invariante de  $A$ .

"ii)" " $\Rightarrow$ " se sigue de i)

" $\Leftarrow$ " como  $A$  es absolutamente libre generado por  $M$ ,



como  $\Sigma$  es totalmente invariante, o.o  $\varphi(p) = \varphi(q)$   
 $\varphi \in K_c(A, A/\Sigma)$   
 $(\varphi(p), \varphi(q)) \in \Sigma$

o.o  $A/\Sigma \in m_A \Sigma. \text{ o.o } \varphi_S(p) = \varphi_S(q). \text{ o.o } e_R m_A \Sigma \subseteq \Sigma. \text{ o.o } \text{ (circled symbol) }$

## 5.6 OBSERVACIÓN.-

-13-

Como una aplicación de la teoría que hemos introducido, daremos una generalización de la técnica que se emplea en [9] para el estudio del lattice de sub-variedades de grupos. Para el lector interesado recomendamos que vea [9] en especial el teorema 14.31 o bien el capítulo II de [8] donde se encuentra una magnífica introducción a las variedades de grupos. Veremos que esta técnica se generaliza de manera natural para estudiar el lattice de sub-variedades de cualquier variedad de  $\tau$ -álgebras.

## 5.7 PROPOSICIÓN.-

$K \subseteq U \subseteq K_\tau \Rightarrow U$  es variedad

$F$   $U$ -libre en  $\alpha_\tau$ -variables

$\Rightarrow$

$$m_{F \in F} K \cap U = m_{E \in K}.$$

Dem.:

" $\supseteq$ "

Por 3.4 y 2.2 bastará probar que  $H(m_{F \in F} K \cap U) \subseteq m_{F \in F} K \cap U$ :

Sean  $G \in K_\tau$ ,  $x \in m_{F \in F} K \cap U$  y  $h: x \rightarrow G$  homomorfismo

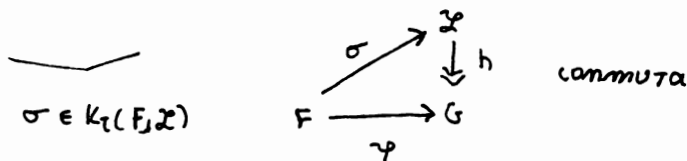
surjectivo.

Sean  $\varphi \in K_\tau(F, G)$  y  $(p, q) \in e_{F, K}$

Como  $\mathcal{Z} \in \mathcal{H}$  que es variedad,  $G \in H(\mathcal{Z}) \subseteq \mathcal{H}$

-64-

De aquí por 3.3,



Como  $\mathcal{Z} \in M_F E_F K$  y  $(P, Q) \in E_F K$ ,  $\sigma(P) = \sigma(Q)$ ,  $\circ \circ \psi(P) = \psi(Q)$

$\circ \circ G \in M_F E_F K \cap \mathcal{H}$ ,  $\circ \circ M_F E_F K \cap \mathcal{H}$  es variedad,

$\circ \circ M \in K \subseteq M_F E_F K \cap \mathcal{H}$ .

" $\subseteq$ "

Sean  $\mathcal{Z} \in M_F E_F K \cap \mathcal{H}$ ,  $\sigma \in K_L(\mathcal{Z}_L(\mathcal{A}_L), \mathcal{Z})$  y  $(P, Q) \in E_K$ .

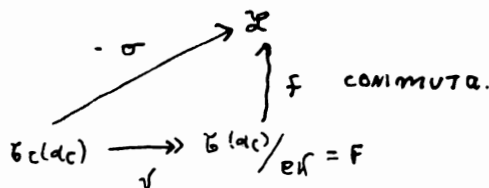
S.P.G (Teorema 4.1):  $F \mathcal{Z}_L(\mathcal{A}_L) / e_{\mathcal{H}}$

Sean  $\nu: \mathcal{Z}_L(\mathcal{A}_L) \rightarrow \mathcal{Z}_L(\mathcal{A}_L) / e_{\mathcal{H}} = F$  y  $\psi: \mathcal{Z}_L(\mathcal{A}_L) / e_{\mathcal{H}} = F \rightarrow F / e_{FK}$

las proyecciones naturales.

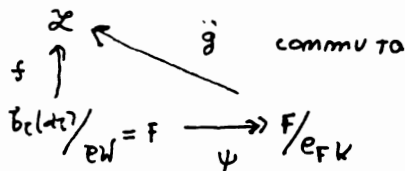
Como  $\mathcal{Z} \in \mathcal{H}$ , por 3.2 i),

$\sigma \in K_L(F, \mathcal{Z})$

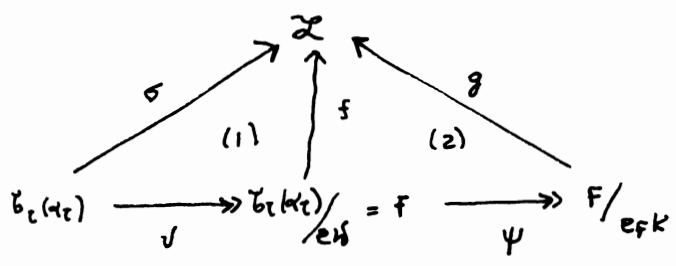


Como  $\mathcal{Z} \in M_F E_F K$ , por 3.2 2),

$g \in K_L(F / e_{FK}, \mathcal{Z})$



$\circ \circ$  en el siguiente diagrama conmutan (1) y (2):



◦◦◦ commuta el diagrama exterior

como  $(p, q) \in e_k$ , por 3.6 i),  $(\nu(p), \nu(q)) \in \mathfrak{e}_F K$

◦◦◦  $\psi \circ \nu(p) = \psi \circ \nu(q)$ , ◦◦◦  $\sigma(p) = \sigma(q)$ , ◦◦◦  $\mathcal{Z} \in m_e K$ .  $\odot$

5.8 COROLARIO.-

$K \subseteq \mathcal{W} \subseteq K_r \rightarrow \mathcal{W}$  es variedad

$F$   $\mathcal{W}$ -libre en  $\alpha_r$ -variables

$\Rightarrow$

$K$  es variedad  $\Leftrightarrow K = m_F \mathfrak{e}_F K \cap \mathcal{W}$ .  $\odot$

5.9 OBSERVACION.-

$\mathcal{W} \subseteq K_r$  variedad

$F$   $\mathcal{W}$ -libre en  $\alpha_r$ -variables

$\Rightarrow$

$\Sigma$  es  $f$ -cerrado  $\Leftrightarrow \Sigma$  es congruencia totalmente invariante de  $F$ .

Dem.- esencialmente la misma que en 5.5 (i) observando que por 3.3  $f$  es  $\mathcal{W}$ -proyectivo con respecto a homomorfismos suryectivos.  $\odot$

### 5.10 TEOREMA.

$W \subseteq K^r$  variedad

$F$   $W$ -libre en  $\alpha_r$ -variables.

$$e_F : (\{K \subseteq W \mid K \text{ es variedad}\}, \subseteq) \longrightarrow (\{\Sigma \subseteq F \times F \mid \Sigma \text{ es } F \text{ cerrado}\}, \subseteq)$$
$$K \longmapsto e_F K$$

$$m_{F \cap W} : (\{\Sigma \subseteq F \times F \mid \Sigma \text{ es } F \text{ cerrado}\}, \subseteq) \longrightarrow (\{K \subseteq W \mid K \text{ es variedad}\}, \subseteq)$$
$$\Sigma \longmapsto m_{F \cap W} \Sigma$$

$\Rightarrow$

$e_F$  y  $m_{F \cap W}$  son anti-isomorfismos de lattices completos; de hecho,  $e_F^{-1} = m_{F \cap W}$ .

Dem.

Observemos que si  $\Sigma \subseteq F \times F$  es  $F$ -cerrado repitiendo esencialmente la misma prueba de 5.7 " $\supseteq$ ",  $m_{F \cap W} \Sigma$  es variedad.

$\circ^\circ$   $m_{F \cap W} \Sigma$  es funci3n. Por 5.1,  $e_F$  y  $m_{F \cap W}$  son homomorfismos de lattices (obviamente completos).

Por 5.8  $m_{F \cap W} \circ e_F = 1$ .

Finalmente probaremos que  $e_F \circ m_{F \cap W} = 1$ :

Sea  $\Sigma \subseteq F \times F \Rightarrow \Sigma$  es  $F$ -cerrado.

demostraremos que  $e_F(m_F \Sigma \cap \mathcal{H}) = \Sigma$ :

" $\supseteq$ "

como  $\Sigma$  es  $F$ -cerrado,  $\Sigma = e_F m_F \Sigma$ .

como  $m_F \Sigma \cap \mathcal{H} \subseteq m_F \Sigma$ , por 5.1 ii),

$\circ^\circ$   $\Sigma = e_F m_F \Sigma \subseteq e_F (m_F \Sigma \cap \mathcal{H})$ .

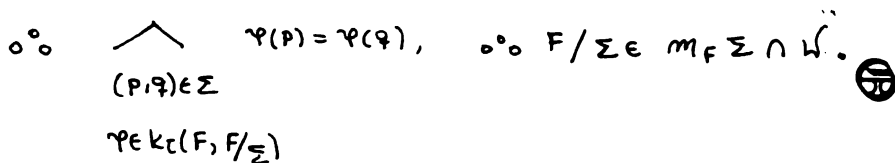
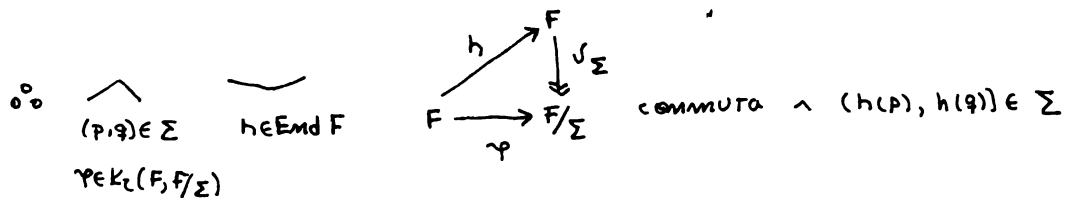
" $\subseteq$ "

Sea suficiente probar que  $F/\Sigma \in m_F \Sigma \cap \mathcal{H}$ :

como  $\mathcal{H}$  es variedad,  $F/\Sigma \in \mathcal{H}$

como  $\Sigma$  es  $F$ -cerrado, por 5.9,  $\Sigma$  es congruencia

totalmente invariante de  $F$ . De aqui por 3.3,





5.11 COROLARIO.-

$\mathcal{H} \subseteq K_t$  variedad

$F$   $\mathcal{H}$ -libre en  $\kappa_t$ -variables.

$$\mu: (\{K \in K_t \mid K \text{ es } F\text{-cerrada}\}, \subseteq) \longrightarrow (\{K \in \mathcal{H} \mid K \text{ es variedad}\}, \subseteq)$$

$$K_1 \longmapsto m_{F \circ F} K \cap \mathcal{H} = K \cap \mathcal{H}$$

$$m_{F \circ F}: (\{K \in K_t \mid K \text{ es variedad}\}, \subseteq) \longrightarrow (\{K \in \mathcal{H} \mid K \text{ es } F\text{-cerrada}\}, \subseteq)$$

$$K_1 \longmapsto m_{F \circ F} K$$

$\Rightarrow$

$\mu$  y  $m_{F \circ F}$  son isomorfismos de lattices completos;

de hecho,  $\mu^{-1} = m_{F \circ F}$ .

Dem:

directo por 5.10 y 5.4.



" Por suerte, las mentes creadoras olvidan las creencias filosóficas dogmáticas cuando la persistencia en ellas podría impedir resultados constructivos. Tanto para entendidos como para profanos no es la filosofía, y sí únicamente la experiencia activa en matemáticas, la que puede responder a la pregunta: ¿ Qué es la matemática ? ".

R. Courant.

6.1 NOTACIÓN.-

$\tau$  será un tipo de álgebras arbitrario en este capítulo.

$\mathcal{G}$  denotará la clase de todos los cardinales,  $\mathcal{S}\mathcal{E}\mathcal{I}$  denotará la

clase de todos los conjuntos y  $\bigwedge_{\alpha \in \mathcal{G}} F_\alpha$  denotará la  $\tau$ -álgebra

absolutamente libre en  $\alpha$ -variables.

6.2 DEFINICIONES.-

1)

$\mathcal{J} := \bigcup_{(\alpha, I) \in \mathcal{G} \times \mathcal{S}\mathcal{E}\mathcal{I}} F_\alpha \times F_\alpha \times F_\alpha^I \times F_\alpha^I$  se llama CLASE DE  $\tau$ -FORMULAS REFLEXIVAS.

2)

$K \in K_\tau$

$\Rightarrow$

$$FK := \bigcup_{(\alpha, I) \in \mathcal{G} \times \mathcal{S}\mathcal{E}\mathcal{I}} \{ (x, y, (z_i)_{i \in I}, (w_i)_{i \in I}) \in F_\alpha \times F_\alpha \times F_\alpha^I \times F_\alpha^I \mid \bigwedge_{\varphi \in K} [\varphi(x) \neq \varphi(y) \Rightarrow \bigvee_{i \in I} \varphi(z_i) \neq \varphi(w_i)] \}$$

$\varphi \in K_\tau(F_\alpha, A)$

se llama CLASE DE FORMULAS REFLEXIVAS DE  $K$ .

3)

$\Sigma \in \mathcal{J}$

$\Rightarrow$

$$\mathcal{M}_\Sigma := \{ \mathcal{X} \in K_\tau \mid \bigwedge_{(\alpha, I) \in \mathcal{G} \times \mathcal{S}\mathcal{E}\mathcal{I}} [ (x, y, (z_i)_{i \in I}, (w_i)_{i \in I}) \in \Sigma \Rightarrow \bigwedge_{\varphi \in K_\tau(F_\alpha, \mathcal{X})} [\varphi(x) \neq \varphi(y) \Rightarrow \bigvee_{i \in I} \varphi(z_i) \neq \varphi(w_i)] ] \}$$

$(x, y, (z_i)_{i \in I}, (w_i)_{i \in I}) \in F_\alpha \times F_\alpha \times F_\alpha^I \times F_\alpha^I$

se llama CLASE DE LOS MODELOS DE LAS FORMULAS  $\Sigma$ .

### 6.3 LEMA.-

$$K \subseteq K_T$$

$\Rightarrow$

$$K \subseteq \text{MFK} = \text{ISP MFK}.$$

Dem.:

Por 6.2 es inmediato que  $K \subseteq \text{MFK}$ .

Sean  $(\mathcal{X}_j)_{j \in J} \in \text{MFKJ}$ ,  $\mathcal{X} \in K_T$  y  $(f_j: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_j)_{j \in J}$   $K_T$ -fuente que separa puntos.

Demostremos que  $\mathcal{X} \in \text{MFK}$ :

Sean  $(\alpha, I) \in \mathcal{G} \times \text{Set}$  y  $(x, y, (z_i)_{i \in I}, (w_i)_{i \in I}) \in \text{FK}$

Sea  $\varphi: F_{\alpha} \rightarrow \mathcal{X}$  homomorfismo  $\Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y)$

$$\circ \circ \bigwedge_{j \in J} f_j \circ \varphi(x) \neq f_j \circ \varphi(y)$$

como  $\mathcal{X}_j \in \text{MFK}$ ,  $\circ \circ \bigwedge_{i \in I} f_j \circ \varphi(z_i) \neq f_j \circ \varphi(w_i)$

$\circ \circ \varphi(z_i) \neq \varphi(w_i)$ ,  $\circ \circ \mathcal{X} \in \text{MFK}$ . De aquí por 2.2 y 2.3

se obtiene que  $\text{MFK} = \text{ISP MFK}$ .  $\oplus$

### 6.4 OBSERVACIÓN.-

Sea  $K \subseteq K_T$

i) Sean  $(\alpha, I) \in \mathcal{G} \times \text{Set}$  y  $(x, y, (z_i)_{i \in I}, (w_i)_{i \in I}) \in \text{FK}$ . Cuando por

el contexto sea claro quien es  $\alpha$ , en lugar de escribir

$(x, y, (z_i)_{i \in I}, (w_i)_{i \in I})$  emplearemos una notación más expresiva;

escribiremos: " $x \neq y \Rightarrow \bigwedge_{i \in I} z_i \neq w_i$ "

-70-

2) Sea  $(p, q) \in eK$ . Consideremos la fórmula " $p \neq q \Rightarrow p \neq p$ ".

(En este caso  $\alpha = |I|$  y  $I$  es un conjunto singular).

Como  $(p, q) \in eK$ ,  $\therefore \bigwedge_{A \in K} \varphi(p) = \varphi(q)$ . De aquí por 6.2,  
 $\varphi \in K_c(F_{|I|}, A)$

" $p \neq q \Rightarrow p \neq p$ "  $\in FK$ .

Observemos que  $\bigwedge_{x \in K_2} \varphi(x) = \varphi(x)$ . De aquí que  
 $\varphi \in K_c(F_{|K_2|}, \mathcal{A})$

$(p, q) \in eK \Leftrightarrow "$   ~~$p \neq q \Rightarrow p \neq p$~~   $" \in FK$  y  $\mathcal{MFK} = meK$ .

### 6.5 TEOREMA.-

$K \subseteq K_c$

$\Rightarrow$

$ISP K = \mathcal{MFK}$ .

Dem.-

" $\subseteq$ " directo por 6.3.

" $\supseteq$ " Sea  $\mathcal{A} \in \mathcal{MFK}$ . Sean  $b_1, b_2 \in \mathcal{A}$ .

Sea  $\alpha := |\mathcal{A}|$

Sea  $h: F_\alpha \rightarrow \mathcal{A}$  homomorfismo suryectivo

Sea  $d: \mathcal{A} \rightarrow F_\alpha$  función de elección  $\exists$ .  $\text{nod} = 1_{\mathcal{A}}$

Sean  $x := d(b_1)$  y  $y := d(b_2)$ .

Sea  $\tau = (K_\mu)_{\mu \in U}$  el tipo de álgebras

Sean  $(f_\mu^{F_\alpha})_{\mu \in U}$  y  $(f_\mu^{\mathcal{X}})_{\mu \in U}$  las familias de operaciones

de  $F_\alpha$  y  $\mathcal{X}$  respectivamente.

$$\text{Sea } I := \bigcup_{\mu \in U} \mathcal{X}^{\wedge \mu}$$

Supongamos que:

$$x \neq y \Rightarrow \bigwedge_{(\mu, (b_s)_{s < \wedge \mu}) \in I} d(f_\mu^{\mathcal{X}}((b_s)_{s < \wedge \mu})) \neq f_\mu^{F_\alpha}((d(b_s)_{s < \wedge \mu})) \in FK$$

como  $\mathcal{X} \in MK$ , he  $K_\tau(F_\alpha, \mathcal{X})$  y  $h(x) = b_1 \neq b_2 = h(y)$ , por 6.2,

$$\bigwedge_{(\mu, (b_s)_{s < \wedge \mu}) \in I} \text{nod}(f_\mu^{\mathcal{X}}((b_s)_{s < \wedge \mu})) \neq h\left(f_\mu^{F_\alpha}((d(b_s)_{s < \wedge \mu}))\right) \text{ lo}$$

cual es una contradicción pues  $h$  es homomor-

fismo y  $\text{nod} = 1_{\mathcal{X}}$ . De aquí por 6.2,

$$\bigwedge_{\substack{A \in K \\ \varphi \in K_\tau(F_\alpha, A)}} \varphi(x) \neq \varphi(y) \wedge \bigwedge_{(\mu, (b_s)_{s < \wedge \mu}) \in I} \varphi(d(f_\mu^{\mathcal{X}}((b_s)_{s < \wedge \mu}))) = \varphi\left(f_\mu^{F_\alpha}((d(b_s)_{s < \wedge \mu}))\right)$$

$$\circ \circ \quad \varphi \text{od} \in K_\tau(\mathcal{X}, A) \wedge \varphi \text{od}(b_1) = \varphi(1_K) \neq \varphi(y) = \varphi \text{od}(b_2)$$

$$\circ \circ \quad \bigwedge_{b_1, b_2 \in \mathcal{X}} [b_1 \neq b_2 \Rightarrow \bigwedge_{\substack{A \in K \\ \sigma \in K_\tau(\mathcal{X}, A)}} \sigma(b_1) \neq \sigma(b_2)]$$

de aquí por 2.3,  $\mathcal{X} \in \text{ISP}K$ .  $\odot$

6.6 COROLARIO.-

$$K \subseteq K_{\tau}$$

$\Rightarrow$

$$K = \text{ISP}K \Leftrightarrow K = \mathcal{M}FK. \quad \odot$$

6.7 PROPOSICIÓN.-

$$K \subseteq K_{\tau}$$

S.E.:

(a)  $\mathcal{X} \subseteq FK$  conjunto  $\text{ISP}K = \mathcal{M}\mathcal{X}$

(b)  $\beta$  cardinal infinito  $\mathcal{X} \in K_{\tau}$   $[|\mathcal{A}| \leq \beta \Rightarrow \mathcal{A} \in \text{ISP}K] \Rightarrow [\mathcal{X} \in \text{ISP}K]$ .

Dem.:

"(a)  $\Rightarrow$  (b)"

Sea  $S := \{ \alpha \in \mathcal{G} \mid \bigwedge_{I \in \text{Set}} (x, y, (z_i)_{i \in I}, (w_i)_{i \in I}) \in \mathcal{X} \}$   
 $(x, y, (z_i)_{i \in I}, (w_i)_{i \in I}) \in F_{\alpha} \times F_{\alpha} \times F_{\alpha}^I \times F_{\alpha}^I$

como  $\mathcal{X}$  es un conjunto,  $S$  es un conjunto.

Distinguimos dos casos:

1er CASO:  $S = \emptyset$

••  $\mathcal{X} = \emptyset$ , ••  $\text{ISP}K = \mathcal{M}\mathcal{X} = \mathcal{M}\emptyset = K_{\tau}$ . De aquí que cualquier

cardinal infinito  $\beta$  hace verdadero (b).

2º CASO:  $S \neq \emptyset$

-75-

$$\text{Sea } \delta := \sum_{\alpha \in S} \alpha$$

Por 0.2,  $\underbrace{\quad}_{\substack{p \text{ cardinal} \\ \text{infinito}}} \quad \underbrace{\quad}_{\substack{A \in K_2 \\ M \subseteq A}} \quad |M| \leq \delta \Rightarrow |\cap M| \leq \beta$

Sea  $\mathcal{X} \in K_2 \quad \exists \quad \underbrace{\quad}_{\mathcal{B} \in S(\mathcal{X})} \quad |\mathcal{B}| \leq \beta \Rightarrow \mathcal{B} \in \text{ISPK}$ .

Probaremos que  $\mathcal{X} \in \text{ISPK}$ , para lo cual, por (a) bastará

probar que  $\mathcal{X} \in \mathcal{ML}\mathcal{I}$ :

Sean  $(\alpha, I) \in \mathcal{S} \times \text{Set}$  y  $(x, y, (z_i)_{i \in I}, (w_i)_{i \in I}) \in F_\alpha \times F_\alpha \times F_\alpha^I \times F_\alpha^I \quad \exists$ .

$(x, y, (z_i)_{i \in I}, (w_i)_{i \in I}) \in \mathcal{I}$ .

Sea  $\varphi: F_\alpha \rightarrow \mathcal{X}$  homomorfismo  $\exists \quad \varphi(x) \neq \varphi(y)$ .

Por definición de  $\mathcal{S}$ ,  $\alpha \in \mathcal{S}$ ,  $\circ \circ \alpha \leq \delta$ ,  $\circ \circ |F_\alpha| \leq \beta$

$\circ \circ | \varphi(F_\alpha) | \leq \beta \wedge \varphi(F_\alpha) \in S(\mathcal{X})$ ,  $\circ \circ \varphi(F_\alpha) \in \text{ISPK} = \mathcal{ML}\mathcal{I}$ .

De aquí por 6.2,  $\underbrace{\quad}_{i \in I} \quad \varphi(z_i) \neq \varphi(w_i)$ .  $\circ \circ \mathcal{X} \in \mathcal{ML}\mathcal{I} = \text{ISPK}$ .

"(b)  $\Rightarrow$  (a)"

Sea  $\Sigma := \bigcup_{I \in \text{Set}} \{ (x, y, (z_i)_{i \in I}, (w_i)_{i \in I}) \in F_\beta \times F_\beta \times F_\beta^I \times F_\beta^I \mid (x, y, (z_i)_{i \in I}, (w_i)_{i \in I}) \in FK \}$



AFIRMACIÓN TÉCNICA:  $ISP_K = M\Sigma$ .

Dem.

" $\subseteq$ " Como  $\Sigma \in FK$ ,  $MFK \subseteq M\Sigma$ . De aquí por 6.5,  $ISP_K = MFK \subseteq M\Sigma$ .

" $\supseteq$ " Sea  $\mathcal{X} \in M\Sigma$ . Para probar que  $\mathcal{X} \in ISP_K$ , por (b) bastará

probar que:  $\bigwedge_{\mathcal{B} \in S(\mathcal{X})} |\mathcal{B}| \leq p \Rightarrow \mathcal{B} \in ISP_K$ .

Sea  $\mathcal{B} \in S(\mathcal{X}) \Rightarrow |\mathcal{B}| \leq p$ .

o.o.



$h: F_p \rightarrow \mathcal{B}$  homomorfismo suryectivo.

de aquí, utilizando la misma técnica del

Teorema 6.5 se obtiene que  $\mathcal{B} \in ISP_K$ .  $\square$

Sea  $J := F_p \times F_p \setminus \Delta$

Sea  $\mathcal{J}' := \{ (x, y, (z_j)_{j \in J}, (w_j)_{j \in J}) \in F_p \times F_p \times F_p^J \times F_p^J \mid (x, y, (z_j)_{j \in J}, (w_j)_{j \in J}) \in \Sigma \}$

o.o.  $\mathcal{J}'$  es un conjunto. Demostraremos que  $M\mathcal{J}' = M\Sigma$  y de

aquí por la afirmación técnica se obtiene (a):

" $\supseteq$ "

como  $\mathcal{J}' \subseteq \Sigma$ , o.o.  $M\Sigma \subseteq M\mathcal{J}'$ .

" $\subseteq$ "

Sea  $\mathcal{X} \in M\mathcal{J}'$ . Sean  $I \in S(\mathcal{X})$  y  $(x, y, (z_i)_{i \in I}, (w_i)_{i \in I}) \in F_p \times F_p \times F_p^I \times F_p^I$

$\Rightarrow (x, y, (z_i)_{i \in I}, (w_i)_{i \in I}) \in \Sigma$

Sea  $\varphi: F_p \rightarrow \mathcal{X}$  homomorfismo  $\rightarrow \exists \cdot \varphi(x) \neq \varphi(y)$ .

Definimos  $\bigwedge_{l, m \in I} l \sim m \Leftrightarrow z_l = z_m \wedge w_l = w_m$ .

Claramente  $\sim$  es una relación de equivalencia en  $I$ .

Sea  $E \subseteq I \rightarrow \bigwedge_{l \in I} |E \cap [l]_{\sim}| = 1$

Sea  $T := \{ i \in E \mid z_i \neq w_i \}$

Sea  $\sigma: T \rightarrow F_p \times F_p \setminus \Delta$  Obviamente  $\sigma$  es inyectiva.  
 $i \mapsto (z_i, w_i)$


como  $(x, y, (z_i)_{i \in I}, (w_i)_{i \in I}) \in \Sigma$ ,  $(x, y, (z_i)_{i \in T}, (w_i)_{i \in T}) \in \Sigma$ .

Definimos  $\bigwedge_{j \in F_p \times F_p \setminus \Delta} \left\{ \begin{array}{l} z_j = z_i \text{ si } j = \sigma(i) \\ z_j = x \text{ si } j \notin \sigma(T) \\ w_j = w_i \text{ si } j = \sigma(i) \\ w_j = x \text{ si } j \notin \sigma(T) \end{array} \right.$

o.o.  $(x, y, (z_j)_{j \in J}, (w_j)_{j \in J}) \in \mathcal{A}$ .

como  $\mathcal{X} \in \mathcal{M} \mathcal{A}$ , o.o.  $\bigwedge_{j \in J} \varphi(z_j) \neq \varphi(w_j)$ . o.o.  $z_j \neq w_j$ ,

o.o.  $j \in \sigma(T)$ , o.o.  $\bigwedge_{i \in I} \sigma(i) = j$ . o.o.  $z_j = z_i \wedge w_j = w_i$ ,

o.o.  $\bigwedge_{i \in I} \varphi(z_i) \neq \varphi(w_i)$ , o.o.  $\mathcal{X} \in \mathcal{M} \Sigma$ . 

6.8 PROBLEMA.-

Si  $K \subseteq K_\tau$ , ¿  $\exists \mathcal{A} \subseteq FK$  CONJUNTO  $ISP K = M\mathcal{A}$  ?

Al momento de escribir este reporte el autor desconoce la respuesta. En el intento de resolverlo llegamos a la siguiente:

CONJETURA.

" Existen clases  $K$  de  $\tau$ -álgebras para las cuales  $ISP K$  no se puede expresar como los modelos de ningún conjunto de fórmulas,,

En particular recomendamos al lector interesado que intente ver que pasa (tomando en cuenta 6.7) con la clase de grupos residualmente finitos.

6.9 OBSERVACIÓN.-

A continuación daremos una generalización a  $\tau$ -álgebras de propiedades "residuales", lo cual nos va a permitir dar una gama amplia de ejemplos de clases  $ISP K$  cerradas. Terminamos este reporte con una lista de ejemplos distinguidos de clases  $ISP K$  cerradas.

6.10 DEFINICIÓN.-

$K \subseteq K_T, A \in K_T$

$\Rightarrow$

A se llama RESIDUALMENTE K

$\Leftrightarrow$

$$\bigwedge_{(\theta_i)_{i \in I} \in \mathcal{K}(A)^I} \left[ \bigcap_{i \in I} \theta_i = \Delta_A \wedge \bigwedge_{i \in I} A/\theta_i \in |K|. \right]$$

6.11 PROPOSICIÓN.-

$K \subseteq K_T, A \in K_T$

S.E.:

(1) A es residualmente K

(2)  $\bigwedge_{(\alpha_i)_{i \in I} \in K^I} \bigwedge_{i \in I} \pi_i \circ \rho$  es suryectiva.  
 $\rho \in \mathcal{K}_T(A, \prod_{i \in I} \alpha_i)$  inyectivo

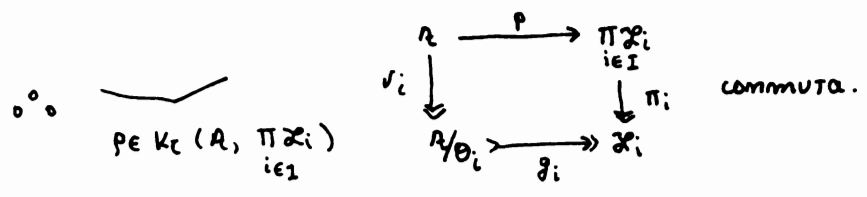
(3)  $\bigwedge_{a_1, a_2 \in A} a_1 \neq a_2 \Rightarrow \bigwedge_{\alpha \in K} \varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$ .  
 $\varphi \in \mathcal{K}_T(A, \alpha)$  suryectivo

Dem.:

"(1)  $\Rightarrow$  (2)"

Sea  $(\theta_i)_{i \in I} \in \mathcal{K}(A)^I \ni \bigcap_{i \in I} \theta_i = \Delta_A \wedge \bigwedge_{i \in I} A/\theta_i \in |K|$   $\bigwedge_{\alpha_i \in K} g_i$  es isomorfismo  
 $g_i \in \mathcal{K}_T(A/\theta_i, \alpha_i)$

Def  $\bigwedge_{i \in I} f_i: A \rightarrow A/\theta_i$  la proyección natural.



$\circ \circ \bigwedge_{i \in I} \pi_i \circ p = g_i \circ \nu_i$  que es composición de suryectivas

$\circ \circ \bigwedge_{i \in I} \pi_i \circ p$  es suryectiva.

Finalmente como  $\bigcap_{i \in I} \theta_i = \Delta_A$ ,  $p$  es inyectivo

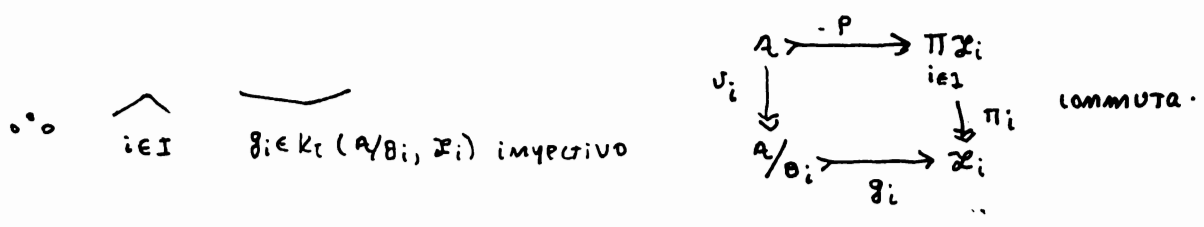
"(2)  $\Leftrightarrow$  (3)" obvio

"(2)  $\Rightarrow$  (1)"

Sean  $(R_i)_{i \in J} \in K^I$  y  $p \in K^I$ ,  $(\pi_i)_{i \in I}$  inyectivo  $\Rightarrow$

$\bigwedge_{i \in J} \pi_i \circ p$  es suryectiva

Definimos  $\bigwedge_{i \in I} \theta_i := \text{Ker}(\pi_i \circ p)$  y  $\nu_i: A \rightarrow A/\theta_i$  la proyección natural



como  $p$  es inyectivo,  $\circ \circ \bigcap_{i \in I} \theta_i = \Delta_A$ .

como  $\bigwedge_{i \in J} \pi_i \circ p = g_i \circ \nu_i$  es suryectiva,  $\circ \circ \bigwedge_{i \in I} g_i$  es suryectiva.

$\circ \circ \bigwedge_{i \in I} A/\theta_i \in K$ .

## 6.12 LEMMA.-

-21-

$$K \subseteq K_c \cdot \exists \cdot SK \subseteq K$$

$\Rightarrow$

$$ISP K = \{ K \in K_c \mid K \text{ es residualmente } K \}.$$



## 6.13 EJEMPLOS.-

1) Sean  $K$  la clase de grupos finitos y  $R$  la clase de grupos residualmente finitos. Por 6.12,  $R = ISP K$ .

2) Sea  $\mathcal{F}$  la clase de todos los semigrupos. (En este caso  $\tau = \langle \cdot \rangle$ )

$$\text{Sean } \mathcal{F}_c := \{ (A, \cdot) \in \mathcal{F} \mid \bigwedge_{x, y, z \in A} x \cdot y = x \cdot z \Rightarrow y = z \}$$

$$c\mathcal{F} := \{ (A, \cdot) \in \mathcal{F} \mid \bigwedge_{x, y, z \in A} y \cdot x = z \cdot x \Rightarrow y = z \}$$

Es decir,  $\mathcal{F}_c$  y  $c\mathcal{F}$  son las clases de semigrupos

donde se vale cancelar por la derecha y por la izquierda respectivamente.

Sean  $\alpha, \beta, \gamma$  tres variables distintas de  $V_w$

Consideremos las fórmulas:

$$\varphi_1 := "\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \neq (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma \Rightarrow \alpha \neq \alpha"$$

$$\varphi_2 := "\beta \neq \gamma \Rightarrow \alpha \cdot \beta \neq \alpha \cdot \gamma"$$

$$\varphi_3 := "\beta \neq \gamma \Rightarrow \beta \cdot \alpha \neq \gamma \cdot \alpha"$$

Se verifica facilmente que:

-82-

$$f_c = \mathcal{M}\{\varphi_1, \varphi_2\}, \quad c \mathcal{J} = \mathcal{M}\{\varphi_1, \varphi_3\} \quad \text{y} \quad f_c \cap c \mathcal{J} = \mathcal{M}\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}.$$

3) Sea  $\text{Grm}$  la clase de todos los grupos. (En este caso  $\tau = \langle 2, 1, 0 \rangle$ )

Sean  $x \in V_w$  y  $e$  el elemento distinguido de  $\mathcal{V}_{\langle 2, 1, 0 \rangle}(w)$ .

Consideremos  $\bigwedge_{m \in \mathbb{N}}$  la formula  $\varphi_m := "x \neq e \Rightarrow x^m \neq e"$

Se verifica facilmente que la clase de todos los

grupos libres de torsión es  $\text{Grm} \cap \mathcal{M}\{\varphi_m\}_{m \in \mathbb{N}}\}$ .

4) Si  $K \subseteq K_2$ ,  $m \in K = \mathcal{M}\{p \neq q \Rightarrow p \neq p^m \mid (p, q) \in e_K\}$ . (ver 6.4).

De aquí que toda variedad de  $\tau$ -álgebras se pueda expresar como los modelos de un conjunto de fórmulas que son esencialmente las fórmulas de  $K$ .

5) Sea  $\mathcal{D}$  la clase de los dominios enteros. Como  $\mathbb{Z} \in \mathcal{D}$

pero  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \notin \mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D} \notin \text{ISP } \mathcal{D}$ . Es interesante notar que

el axioma " $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$ " que define los

dominios enteros no es una fórmula reflexiva

de  $\mathcal{D}$ .

BIBLIOGRAFIA

- [1]** Bruns G. Apuntes de Algebra Universal tomados por el Dr. Octavio García en la Universidad de Mc. Master. (1971).
- [2]** Cohn F.M. Universal Algebra. Harper and Row. New York-London. (1965).
- [3]** Grätzer G. Universal Algebra. Van Nostrand. Princeton. (1968).
- [4]** Herrlich H. Strecker G. Category Theory. Allyn and Bacon. Boston. (1973).
- [5]** Salicrup G. Epirreflexividad y Conexidad en Categorías Concretas Topológicas. Anales del Instituto de Matemáticas. UNAM. 18. N° 2. 1978. 29-122.
- [6]** Herrlich H. Salicrup G y Vázquez R. Dispersed Factorization Structures. Canadian Journal of Mathematics. Vol XXXI. N° 5. 1979. pp 1059-1071.
- [7]** Herrlich H. Strecker G. Semi-Universal Maps and Universal Initial Completions. Pacific Journal Math. 82. N° 2. 1979. 407-428.
- [8]** Larrión F. Inyectividad en Variedades de Grupos. Tesis Profesional. Facultad de Ciencias. UNAM. 1979.
- [9]** Neumann H. Varieties of Groups. Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete. Band 37. Springer Verlag. New York. (1967).