ESTRUCTURAS DE FACTORIZACION EN CATEGORIAS DE ALGEBRAS

TESIS DE MAESTRÍA

MARIO SOLAY ZIMAN*

FACULTAD DE CIENCIAS

UNAM 1981

*BECARIO DEL INSTITUTO DE MATEMATICAS

A mis padres, Don Isaac Solay
y Ana Zyman de Solay.

A mis hermanos.

Deseo expresar mi profundo reconocimiento a las siguientes personas. Al Dr Octavio García, asesor de ésta tésis, con quien he tenido el privilegio de compartir desde un primer curso hasta la emocionante aventura de la investigación en Matemáticas. A la Dra Graciela Salicrup, que me introdujo al fascinante tema de las estructuras de factorización y cuya influencia y estímulo en la elaboración de éste trabajo han sido invaluables. Al Dr Francisco González por su estimulante crítica y el valioso tiempo que me dedicó. A mi amigo y compañero M en C. Françisco Larrión por su interés en éste trabajo y por las pláticas telefónicas que tuvimos a altas horas de la noche discútiendo sobre la filosofía de la investigación en Matemáticas. Al Instituto de Matemáticas por su apoyo y finalmente a mi amigo Victor por su ayuda en los momentos críticos.

INDICE

INTRODUCCION

En el capítulo 0 damos un cuadro de definiciones y una lista de los teoremas que usamos posteriormente. Dicho cuadro tiene el propósito de que el lector encuentre con facilidad alguna definición que le interese especialmente. El objeto de éste capítulo es familiarizar al lector con la notación y los temas de Algebra Universal que empleamos en éste reporte. Por brevedad omitimos demostraciones, éstas se pueden encontrar en [1] y la mayor parte de ellas en [2] y [3] de la bibliografía. Usaremos libremente y casi sin dar referencia posterior los teoremas de Algebra universal.

En el capítulo I estudiamos algunas propiedades generales de estructuras de factorización. Estas propiedades están enunciadas en la proposición 1.2 de [6] . Sin embargo damos demostraciones de estas afirmaciones pués con frecuencia no sólo usaremos éstas afirmaciones sino sus demostraciones. Finalizamos éste capítulo con algunos ejemplos importantes, en particular, en 1.16 5) damos condiciones suficientes para que una categoría de t-álgebras posea la estructura de (co)factorización (epipozos extremados, homomorfismos inyectivos).

En el capítulo II damos condiciones suficientes y necesarias para que una categoría plena y repleta de t-álgebras posea la estructura de factorización (homomorfismos suryectivos, fuentes que separan puntos). (Ver 2.6). Esto nos permite en 2.9 ver que si K es una categoría de t-álgebras, ISPK es la envolvente (con respecto a sub-categorías plenas y repletas) homomorfismos suryectivos reflexiva de K en cualquier categoría de t-álgebras cerrada bajo la formación de productos, sub-álgebras e isomorfismos que la contenga; en particular en la categoría de todas las t-álgebras. En 2.12 mostramos que si K es una categoría plena y repleta de t-álgebras y U es cerrada bajo la formación de productos, sub-álgebras e isomorfismos y contiene a K entonces K es homomorfismos suryectivos reflexiva en U si y solo si K=ISPK.

En el capítulo III estudiamos la ISPK reflexión. Si K es una clase de t-álgebras, A es una t-álgebra y S es un sub-conjunto de AxA introducimos los conceptos de CONJUNTO DE A-ECUACIONES EN K ($e_A K$) y CLASE DE MODELOS DE S RESPECTO a A ($m_A S$). En 3.4 mostramos que ISP $m_A S = m_A S$. Si A es proyectivo con respecto a homomorfismos suryectivos en la categoría de t-álgebras damos en 3.6 una descripción de la reflexión en $m_A e_A K$; en particular en 3.7 en la variedad generada por K. En 3.8 mostramos que si A es absolutamente libre generado por M, $m_A e_A K$ es variedad y en 3.9 que $m_A e_A K$ no es necesariamente la variedad generada por K. Finalmente en 3.13 estudiamos que tan "alejado" está $m_A e_A K$ de K.

En el capítulo IV estudiamos algunas relaciones que hay entre álgebras K-libres y la ISPK reflexión. En 4.1 damos una descripción de la ISPK libre álgebra generada por un conjunto lo cual nos permite en 4.2 dar condiciones suficientes y necesarias para que el funtor que olvida $U: K \longrightarrow Set$ posea adjunto izquierdo.

En el capítulo V estudiamos los operadores de cerradura $m_A e_A$ y $e_A m_A$. Como una aplicación de la teoría que se ha introducido damos una generalización de la técnica que se emplea en [9] para el estudio del latice de sub-variedades de grupos. Si U es una variedad y F es U-libre en $|\alpha_t|$ variables en 5.10 se muestra que el latice de sub-variedades de U es anti-isomorfo con el latice de congruencias totalmente invariantes de F y se da una descripción explícita de los anti-isomorfismos.

En el capítulo VI definimos los conceptos de CLASE DE FORMULAS REFLEXIVAS DE K y CLASE DE LOS MODELOS DE UNA CLASE DE FORMULAS. En 6.5 mostramos que ISPK es la Clase de los modelos de la clase de fórmulas reflexivas de K. La idea intuitiva es ver que tipo de "fórmulas" que son comunes a todas las algebras de K se transmiten a ISPK. En 6.7 damos condiciones suficientes y necesarias para que ISPK sea la clase de los modelos de un conjunto de fórmulas reflexivas de K. Al momento de escribir éste reporte el autor desconoce si siempre se puede encontrar dicho conjunto. En 6.10 introducimos el concepto para t-álgebras de ser RESIDUALMENTE K. En 6.12 mostramos que si K es cerrada bajo la formación de sub-álgebras ISPK coincide con la clase de t-álgebras que son residualmente K. Finalizamos éste reporte estudiando algunos ejemplos importantes.

Sobre el título de la tésis " Estructuras de factorización en categorías de Algebras" quiero mencionar que no es adecuado pero por razones burocráticas se mantuvo. Un título más adecuado sería: "La estructura de factorización (homomorfismos suryectivos- fuentes que separan puntos) para categorías de Algebras"

Acerca de la notación que empleamos en este trabajo quiero decir que en opinión del autor es compacta, simple, la riqueza de cuantificadores en nuestras definiciones la hace muy cómoda y la intuición algebráica del autor se ha desarrollado con ese lenguaje. A continuación damos un cuadro donde explicamos dicha notación:

SÍMBOLO	SIGNIFICADO
$\neg$	no
$\wedge$	y
$\vee$	o
$\bigwedge$	para todo
$\bigvee$	existe
$\bigvee^{!}$	existe y es único.
$\Longrightarrow$	implica
$\Longleftrightarrow$	si y solo si
$:=$	por definición igual
S.E:	son equivalentes.
S.P.G	sin perdida de generalidad
$\cdot\ni\cdot$	tales que
	final de la prueba o ausencia de la misma.

Cuando digamos que un diagrama conmuta y en dicho diagrama intervienen fuentes o pozos entenderemos que conmuta para todos los índices posibles. Si el diagrama está formado por varios subdiagramas entenderemos que cada uno de ellos conmuta.

Como un ejemplo de la manera en que empleamos la notación y la convención anterior la definición 1.1 2) expresada con palabras diría: Si K es una categoría, E una clase de K-morfismos y M una clase de K-fuentes diremos que K tiene la propiedad de (E,M)-diagonalización si y solo si dados $e \in E$, $f \in$ MorK, $(m_i)_{i \in I} \in M$ y $(f_i)_{i \in I}$ K-fuente en caso de que para toda $i \in I$ conmute el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "e"] \arrow[d] & \cdot \arrow[d, "f_i"] \\ \cdot \arrow[r, "m_i"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

entonces existe y es único $g \in$ MorK tal que conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[dl, dashed, "g"] \\ \cdot & \end{tikzcd}$$

y para toda $i \in I$ cunmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f_i"] \\ \cdot \arrow[r, "m_i"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

Usaremos la terminología de [4] en lo referente a categorías.

" We are often told that pure and applied mathematics are hostile to each other. This is not true. Pure and applied mathematics are not hostile to each other. Pure and applied mathematics have never been hostile to each other. Pure and applied mathematics will never be hostile to each other. Pure and applied mathematics cannot be hostile to each other because, in fact, there is absolutely nothing in common between them."

David Hilbert.

CAPITULO O: ALGEBRA UNIVERSAL.

CONCEPTO	DEFINICIÓN, NOTACIÓN, COMENTARIOS.

1) TIPO DE ALGEBRAS.

Es una familia de ordinales $\tau = (\lambda_i)_{i\in I}$ que supondremos fijo y arbitrario en éste capítulo.

2) τ - ÁLGEBRA.

Es una pareja $\mathcal{A} = (A, (f_i)_{i\in I})$ donde A es un conjunto y $\bigwedge_{i\in I}$ $f_i : A^{\lambda_i} \longrightarrow A$ es <u>OPERACIÓN λ_i - ARIA en A</u>, es decir, f_i es función. En éste caso se suele denotar la τ-álgebra $\mathcal{A}$ por A.

3) HOMOMORFISMO DE τ- ÁLGEBRAS.

Es una terna $(\mathcal{A}, h, \mathcal{X})$ donde $\mathcal{A} = (A, (f_i)_{i\in I})$, $\mathcal{X} = (B, (g_i)_{i\in I})$ son τ-álgebras, $h : A \longrightarrow B$ es función y

$$\begin{tikzcd} A^{\lambda_i} \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\prod_{\xi<\lambda_i} h"'] & A \arrow[d, "h"] \\ B^{\lambda_i} \arrow[r, "g_i"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta, es decir,

$$\bigwedge_{i\in I} h(f_i((a_\xi)_{\xi<\lambda_i})) = g_i((h(a_\xi))_{\xi<\lambda_i})$$
$$(a_\xi)_{\xi<\lambda_i} \in A^{\lambda_i}$$

$h : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$ o bien $h : A \longrightarrow B$ denotarán a $(\mathcal{A}, h, \mathcal{X})$.

4) LA CATEGORÍA K_τ DE TODAS LAS τ- ÁLGEBRAS.

Sus objetos son las τ-álgebras, sus morfismos los homomorfismos de τ-álgebras con la composición usual de funciones.

5) $\mathbb{K}_\tau(\mathcal{A},\mathcal{X})$.	Denota a $Hom_{K_\tau}(\mathcal{A},\mathcal{X})$.
6) EL PRODUCTO DE LA FAMILIA $(\mathcal{A}_j)_{j\in J}$: $\prod_{j\in J} \mathcal{A}_j$.	Se obtiene definiendo las operaciones por coordenadas en $\prod_{j\in J} A_j$. Esta τ-álgebra con las correspondientes proyecciones que denotaremos por $(\pi_j : \prod_{j\in J} \mathcal{A}_j \twoheadrightarrow \mathcal{A}_j)_{j\in J}$ es un producto categórico de la familia $(\mathcal{A}_j)_{j\in J}$.
7) CONJUNTO DE ENDOMORFISMOS DE $\mathcal{A}$.	Es $K_\tau(\mathcal{A},\mathcal{A})$ y se suele denotar por $End(\mathcal{A})$.
8) $\mathcal{X}$ SUB-ÁLGEBRA DE $\mathcal{A}$.	Si la inclusión $i: \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{X}$ es homomorfismo.
9) M CERRADO EN $\mathcal{A}$.	Si $M \subseteq A \wedge \bigwedge_{i\in I} f_i(M^{\lambda i}) \subseteq M$.
10) M GENERA A $\mathcal{A}$.	Si $M \subseteq A$ y A es el mínimo conjunto, cerrado que contiene a M.
11) CONGRUENCIA EN $\mathcal{A}$.	Es una relación de equivalencia θ en A donde $\theta\times\theta$ es cerrado en $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$. En dicho caso, A/θ hereda una estructura natural de τ-álgebra $\mathcal{A}/\theta$ y la proyección natural $\nu: \mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{A}/\theta$ es homomorfismo.
12) CONJUNTO DE CONGRUENCIAS DE $\mathcal{A}$.	Se denota por $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.
13) DIAGONAL DE $\mathcal{A}$.	Es la congruencia denotada por $\Delta_\mathcal{A}$ donde $(a_1,a_2)\in \Delta_\mathcal{A} :\Longleftrightarrow a_1 = a_2$.

14) $\Pi_c\ \#$.

Denota la mínima congruencia que contiene a $\# \subseteq A \times A$.

15) CONGRUENCIA TOTALMENTE INVARIANTE EN A.

Es una congruencia θ en A donde

$$\bigwedge_{\substack{(p,q)\in A\times A \\ \varphi\in \mathrm{End}\, A}} (p,q)\in\theta \Rightarrow (\varphi(p),\varphi(q))\in\theta .$$

16) $\mathrm{Ker}\ \varphi$

Si $\varphi\in K_\tau(A, \mathcal{X})$, $\mathrm{Ker}\ \varphi$ es la congruencia donde $(a_1,a_2)\in \mathrm{Ker}\ \varphi :\Leftrightarrow: \varphi(a_1)=\varphi(a_2)$.

17) $\mathcal{X}$ IMÁGEN HOMOMÓRFICA DE A

Si existe $\varphi : A \longrightarrow \mathcal{X}$ homomorfismo suryectivo.

18) SK, HK, PK, IK.

Si $K\subseteq K_\tau$ denotan respectivamente las clases de sub-álgebras de K, imágenes homomórficas de K, productos de familias en K y álgebras isomorfas a las de K.

19) VARIEDAD.

$K\subseteq K_\tau$ se llama VARIEDAD si $HK\subseteq K$, $SK\subseteq K$ y $PK\subseteq K$. Se tiene que $HSPK$ es la mínima variedad que contiene a K, de aquí, K es variedad si y solo si $K = HSPK$.

20) K NO TRIVIAL.

Si $K\subseteq K_\tau$ posee al menos una τ-álgebra con mas de un elemento.

21) OPERADOR DE CERRADURA. SISTEMA DE CERRADURA. OPERADOR DE CERRADURA INDUCIDO.

Si A es un conjunto y $\mathcal{T} \subseteq PA$ (conjunto potencia de A), un OPERADOR DE CERRADURA es una función $\Gamma : PA \longrightarrow \mathcal{T}$ tal que si $M, N \in PA$, $M \subseteq \Gamma M$, $M \subseteq N \Rightarrow \Gamma M \subseteq \Gamma N$ y $\Gamma\Gamma M = \Gamma M$. Un SISTEMA DE CERRADURA EN A es una colección $\mathcal{T} \subseteq PA$ donde $\Theta \subseteq \mathcal{T}$ implica que $\cap \Theta \in \mathcal{T}$. En este caso el OPERADOR DE CERRADURA INDUCIDO es $\Gamma : PA \longrightarrow \mathcal{T}$ donde si $M \in PA$,

$\Gamma M = \cap \{ C \in \mathcal{T} \mid M \subseteq C \}$.

Así por ejemplo si $\mathfrak{A} \in K_\tau$, $\{ M \subseteq A \mid M$ es cerrado en $\mathfrak{A} \}$ es un sistema de cerradura en A y denotaremos por Γ el operador inducido.

22) F K-LIBRE GENERADO POR M.

Si $K \subseteq K_\tau$, $F \in K$ y $M \subseteq F$ se dice que F es K-LIBRE GENERADO POR M si $F = \Gamma M$ y F satisface la siguiente propiedad universal:

$$\bigwedge_{\substack{\mathfrak{A} \in K \\ \varphi : M \to A \text{ función}}} \quad \bigvee^{!}_{\hat{\varphi} \in K_\tau(F, \mathfrak{A})} \quad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook, "i"'] & A \\ F \arrow[ur, dashed, "\hat{\varphi}"'] & \end{tikzcd} \text{ commuta}$$

donde $i : M \hookrightarrow F$ es la inclusión.

23) F ABSOLUTAMENTE LIBRE GENERADO POR M.

Si F es K_τ- libre generado por M.

24) α_τ

Demota el mínimo ordinal infinito tal que $\bigwedge_{i\in I} |\kappa_i| < |\alpha_\tau|$. (Recordemos que $\tau = (\kappa_i)_{i\in I}$ es un tipo de álgebras). Nótese que si todas las operaciones son finitarias, es decir, si $\bigwedge_{i\in I} |\kappa_i|$ es finito, $\alpha_\tau = \omega$.

25) V_{α_τ}, $\mathfrak{F}_\tau(\alpha_\tau)$.

V_{α_τ} denotará un conjunto de cardinal $|\alpha_\tau|$ y $\mathfrak{F}_\tau(\alpha_\tau)$ una τ-álgebra absolutamente libre generada por V_{α_τ}. (Dicha τ-álgebra existe como corolario de un teorema de Birkhoff).

26) CLASE DE LOS MODELOS DE Σ.

Si $\Sigma \subseteq \mathfrak{F}_\tau(\alpha_\tau) \times \mathfrak{F}_\tau(\alpha_\tau)$,

$$m\Sigma := \{ \mathfrak{A} \in K_\tau \mid \bigwedge_{\substack{\varphi \in K_\tau(\mathfrak{F}_\tau(\alpha_\tau), \mathfrak{A}) \\ (p,q) \in \Sigma}} \varphi(p) = \varphi(q) \}$$ se llama CLASE DE LOS MODELOS DE Σ.

27) CONJUNTO DE ECUACIONES DE K.

Si $K \subseteq K_\tau$,

$$eK := \{ (p,q) \in \mathfrak{F}_\tau(\alpha_\tau) \times \mathfrak{F}_\tau(\alpha_\tau) \mid \bigwedge_{\substack{\mathfrak{A} \in K \\ \varphi \in K_\tau(\mathfrak{F}_\tau(\alpha_\tau), \mathfrak{A})}} \varphi(p) = \varphi(q) \}$$ se llama CONJUNTO DE ECUACIONES DE K.

Un teorema de Birkhoff nos dice que K es variedad si y solo si $K = meK$.

0.2 TEOREMA.-

$\tau = (K_i)_{i\in I}$ tipo de álgebras, α cardinal

$\Rightarrow$

i) $\underset{\substack{\beta \text{ cardinal} \\ \text{infinito}}}{\bigvee} \quad \underset{\substack{A\in K_\tau \\ M\subseteq A}}{\bigwedge} \quad |M| \leq \alpha \Rightarrow |\Gamma M| \leq \beta$

ii) I finito $\wedge$ $\underset{i\in I}{\bigwedge} \; K_i$ finito

$\Rightarrow$

$\underset{\substack{A\in K_\tau \\ M\subseteq A}}{\bigwedge} \quad |M| \leq \alpha \Rightarrow |\Gamma M| \leq \aleph_0 + \alpha$.

0.3 TEOREMA DEL HOMOMORFISMO

$h: A \rightarrow \mathfrak{X}$ homomorfismo.

θ congruencia en $A \ni\cdot\ \theta \subseteq \operatorname{Ker} h$, $\nu_\theta : A \twoheadrightarrow A/\theta$ la proyección natural

$\Rightarrow$

i) $\underset{x\in K_\tau(A/\theta,\, \mathfrak{X})}{\overset{!}{\bigvee}}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\nu_\theta"'] & \mathfrak{X} \\ A/\theta \arrow[ur, dotted, "x"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

ii) $\theta = \operatorname{Ker} h \Rightarrow \underset{x\in K_\tau(A/\theta,\, \mathfrak{X}) \text{ inyectivo}}{\overset{!}{\bigvee}}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\nu_\theta"'] & \mathfrak{X} \\ A/\theta \arrow[ur, dotted, "x"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

iii) $\theta = \operatorname{Ker} h \wedge h$ suryectiva

$\Rightarrow$

$\underset{x\in K_\tau(A/\theta,\, \mathfrak{X}) \text{ isomorfismo}}{\overset{!}{\bigvee}}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\nu_\theta"'] & \mathfrak{X} \\ A/\theta \arrow[ur, dotted, "x"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

0.4 PRIMER TEOREMA DE ISOMORFÍA.-

$\mathfrak{X}$ sub-álgebra de A. $i_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X} \hookrightarrow A$ la inclusión.

θ congruencia en A, $\theta_{\mathfrak{X}} := \theta \cap \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$

$\nu_\theta : A \twoheadrightarrow A/\theta$ y $\nu_{\theta_{\mathfrak{X}}} : \mathfrak{X} \twoheadrightarrow \mathfrak{X}/\theta_{\mathfrak{X}}$ las proyecciones naturales

$\Rightarrow$

$$\underbrace{\exists !}\ \psi \in K_\tau(\mathfrak{X}/\theta_{\mathfrak{X}}, A/\theta) \text{ inyectivo} \qquad \begin{tikzcd} \mathfrak{X} \arrow[r, hook, "i_{\mathfrak{X}}"] \arrow[d, two heads, "\nu_{\theta_{\mathfrak{X}}}"'] & A \arrow[d, two heads, "\nu_\theta"] \\ \mathfrak{X}/\theta_{\mathfrak{X}} \arrow[r, tail, dotted, "\psi"'] & A/\theta \end{tikzcd} \text{ commuta } \wedge$$

$$\nu_\theta(\mathfrak{X}) \cong \mathfrak{X}/\theta_{\mathfrak{X}}.$$

0.5 SEGUNDO TEOREMA DE ISOMORFÍA.-

$A \in K_\tau$, θ congruencia en A

$$\sigma : \{\psi \in \mathfrak{C}(A) \mid \theta \subseteq \psi \subseteq A \times A\} \longrightarrow \mathfrak{C}(A/\theta)$$

$$\psi \longmapsto \psi/\theta \text{ donde}$$

$$([a_1]_\theta, [a_2]_\theta) \in \psi/\theta \iff (a_1, a_2) \in \psi$$

$\Rightarrow$

i) σ es isomorfismo de lattices completos.

ii) $\psi \in \mathfrak{C}(A) \ni \cdot\ \theta \subseteq \psi \subseteq A \times A$
$\Rightarrow$

$$\underbrace{\exists !}\ \varphi \in K_\tau(A/\psi, (A/\theta)/(\psi/\theta)) \text{ isomorfismo} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "\nu_\theta"] \arrow[d, two heads, "\nu_\psi"'] & A/\theta \arrow[d, two heads, "\nu_{\psi/\theta}"] \\ A/\psi \arrow[r, tail, two heads, dashed, "\varphi"'] & (A/\theta)/(\psi/\theta) \end{tikzcd} \text{ commuta.}$$

0.6 TEOREMA.-

$K \subseteq K_\tau$

$\Longrightarrow$

i) $HSPK$ es la mínima variedad que contiene a K.

ii) K es variedad $\Longleftrightarrow$ $K = HSPK$.

0.7 TEOREMA [Birkhoff]:

$K \subseteq K_\tau$ no trivial $\ni\cdot$ $IK \subseteq K$, $SK \subseteq K$ $\wedge$ $PK \subseteq K$

$\Longrightarrow$

$\bigwedge_{M \text{ conjunto}} \bigvee_{F_M \in K}$ F_M es K-libre generado por M.

0.8 TEOREMA.-

$F \in K_\tau$ absolutamente libre generada por M

$\mathcal{G}$ sub-álgebra de F

$\Longrightarrow$

$\bigvee_{N \subseteq \mathcal{G}}$ $\mathcal{G}$ es absolutamente libre generada por N.

0.9 TEOREMA.-

$K \subseteq K_\tau$

F_1 K-libre generado por M_1

F_2 K-libre generado por M_2

$\Longrightarrow$

$|\alpha_\tau| \leq |M_1| \leq |M_2| \Longrightarrow F_2 \in ISPF_1$.

0.10 TEOREMA [Birkhoff]:

$K \subseteq K_\tau$

$\Rightarrow$

K es variedad $\Leftrightarrow$ $K = meK$.

0.11 TEOREMA [B.H. Neumamm]:

$\Sigma \subseteq \mathcal{G}_\tau(\alpha_\tau) \times \mathcal{G}_\tau(\alpha_\tau)$

$\Rightarrow$

$\Sigma = em\Sigma$ $\Leftrightarrow$ Σ es congruencia totalmente invariante de $\mathcal{G}_\tau(\alpha_\tau)$.

" What I'm really interested in is whether God could have made the world in a different way, that is, whether the necessity of logical simplicity leaves any freedom at all ".

Albert Einstein.

CAPITULO I. ESTRUCTURAS DE FACTORIZACIÓN.

1.1 DEFINICIONES.-

K categoría, $E \subseteq \mathrm{Mor}\,K$, $\mathbb{M}$ clase de K-fuentes.

$\Rightarrow$

1) K se llama $(E, \mathbb{M})$- FACTORIZABLE

$\Leftrightarrow$

$\bigwedge\limits_{\substack{(f_i:\, X \to Y_i)_{i\in I} \\ K\text{-fuente}}} \quad \bigvee\limits_{\substack{e:\, X \to Z \in E \\ (m_i:\, Z \to Y_i)_{i\in I} \in \mathbb{M}}}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "e"'] & & Y_i \\ & Z \arrow[ur, "m_i"'] & \end{tikzcd}$$

commuta.

2) K tiene la PROPIEDAD DE $(E, \mathbb{M})$- DIAGONALIZACIÓN.

$\Leftrightarrow$

$\bigwedge\limits_{\substack{e \in E \\ f \in \mathrm{Mor}\,K \\ (m_i)_{i\in I} \in \mathbb{M} \\ (f_i)_{i\in I}\ K\text{-fuente}}}$ [
$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[d, "f_i"] \\ \cdot \arrow[r, "m_i"'] & \cdot \end{tikzcd}$$
commuta] $\Rightarrow$ [$\bigvee\limits^{!}_{g \in \mathrm{Mor}\,K}$
$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[d, "f_i"] \arrow[dl, dashed, "g"'] \\ \cdot \arrow[r, "m_i"'] & \cdot \end{tikzcd}$$
commuta].

3) K se llama $(E, \mathbb{M})$- CATEGORÍA y $(E, \mathbb{M})$ se llama

ESTRUCTURA DE FACTORIZACIÓN EN K

$\Leftrightarrow$

i) E y $\mathbb{M}$ son cerradas bajo la composición con isomorfismos.

ii) K es $(E, \mathbb{M})$- factorizable y tiene la propiedad de $(E, \mathbb{M})$- diagonalización.

1.2 OBSERVACIÓN.-

En este capítulo K será una categoría y $(E, \mathbb{M})$ una estructura de factorización en K.

1.3 PROPOSICION.-

E es una clase de $\mathbb{K}$- epimorfismos.

Dem.-

Sean $e : X \longrightarrow Y \in E$ y $r, s : Y \longrightarrow Z \in Mor\,K$.∋. $r \circ e = s \circ e$

Sea $I := Mor\,K$. Definimos $\bigwedge\limits_{i \in I} f_i := r \circ e = s \circ e$.

$$\therefore \quad \bigvee_{\substack{\hat{e} : X \longrightarrow W \in E \\ (m_i : W \longrightarrow Z)_{i \in I} \in \mathbb{M}}} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "\hat{e}"'] & & Z \\ & W \arrow[ur, "m_i"'] & \end{tikzcd} \quad \text{commuta.}$$

Definimos $\bigwedge\limits_{i \in I} g_i := \begin{cases} r & \text{si } m_i \circ i = s \\ s & \text{en caso contrario.} \end{cases}$

$$\therefore \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\hat{e}"'] & Y \arrow[d, "g_i"] \\ W \arrow[r, "m_i"'] & Z \end{tikzcd} \quad \text{commuta con } e \in E \text{ y } (m_i)_{i \in I} \in \mathbb{M}$$

$$\therefore \quad \bigvee_{h : Y \longrightarrow W \in Mor\,K} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\hat{e}"'] & Y \arrow[d, "g_i"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ W \arrow[r, "m_i"'] & Z \end{tikzcd} \quad \text{commuta}$$

$\therefore \quad m_h \circ h = g_h = \begin{cases} r & \text{si } m_h \circ h = s \\ s & \text{en caso contrario} \end{cases}$

$\therefore \quad m_h \circ h = s$, $\quad \therefore \quad r = g_h = m_h \circ h = s$.

1.4 OBSERVACIÓN.-

Por la proposición anterior, la unicidad en la definición de la propiedad de diagonalización es redundante.

1.5 NOTACIÓN.-

Sean $(f_i : X \longrightarrow Y_i)_{i\in I}$ K-fuente, $e : X \longrightarrow Z \in E$ y $(m_i : Z \longrightarrow Y_i)_{i \in I} \in \mathbb{M}$.

Diremos que $(e,(m_i)_{i\in I})$ es <u>(E, M)- FACTORIZACIÓN DE $(f_i)_{i\in I}$</u> si

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "e"'] & Y_i \\ & Z \arrow[u, "m_i"'] \end{tikzcd}$$

commuta. En tal caso escribiremos:

" $\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "e"'] & & Y_i \\ & Z \arrow[ur, "m_i"'] & \end{tikzcd}$ es (E, M)- factorización de $(f_i)_{i\in I}$ ".

1.6 PROPOSICIÓN.-

$E \cap \mathbb{M}$ es la clase de los K-isomorfismos.

<u>Dem.-</u>

"$\subseteq$"

Sea $f \in E \cap \mathbb{M}$. Como $\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"'] & \cdot \arrow[d, "1"] \\ \cdot \arrow[r, "f"'] & \cdot \end{tikzcd}$ commuta,

$\therefore \underbrace{\hphantom{xxxx}}_{h \in \mathrm{Mor}\,K}$ $\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"'] & \cdot \arrow[d, "1"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ \cdot \arrow[r, "f"'] & \cdot \end{tikzcd}$ commuta, $\therefore$ f es isomorfismo.

"$\supseteq$"

Sea f isomorfismo. Sea $\begin{tikzcd} \cdot \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "e"'] & & \cdot \\ & \cdot \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd}$ (E, M)- factorización de f.

$\therefore$ e es sección y por 1.3 es epimorfismo. $\therefore$ e es isomorfismo.

$\therefore$ $f \in \mathbb{M}$ y como $f \circ e^{-1} = m$, m es isomorfismo, $\therefore$ $f \in E$.

1.7 PROPOSICIÓN.-

Las $(E,\mathbb{M})$-factorizaciones son únicas salvo por isomorfismos.

__Dem.-__

Sea $(f_i : X \longrightarrow Y_i)_{i\in I}$ K-fuente.

Sean
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "e"'] & & Y_i \\ & Z \arrow[ur, "m_i"'] & \end{tikzcd} , \quad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "\hat{e}"'] & & Y_i \\ & W \arrow[ur, "\hat{m}_i"'] & \end{tikzcd}$$
$(E,\mathbb{M})$-factorizaciones de $(f_i)_{i\in I}$.

$\therefore$
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\hat{e}"'] & Z \arrow[d, "m_i"] \\ W \arrow[r, "\hat{m}_i"'] & Y_i \end{tikzcd}$$
commuta con $e \in E$ y $(\hat{m}_i)_{i\in I} \in \mathbb{M}$

$\wedge$
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\hat{e}"] \arrow[d, "e"'] & W \arrow[d, "\hat{m}_i"] \\ Z \arrow[r, "m_i"'] & Y_i \end{tikzcd}$$
commuta con $\hat{e} \in E$ y $(m_i)_{i\in I} \in \mathbb{M}$

$\therefore$ $\underbrace{\qquad}$ $h : Z \longrightarrow W \in Mor K$, $k : W \longrightarrow Z \in Mor K$
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\hat{e}"'] & Z \arrow[d, "m_i"] \arrow[dl, dashed, bend right=10, "h"'] \\ W \arrow[r, "\hat{m}_i"'] \arrow[ur, dashed, bend right=10, "k"'] & Y_i \end{tikzcd}$$
commutan

$\therefore$ $k \circ h \circ e = k \circ \hat{e} = e = 1_Z \circ e \;\wedge\; h \circ k \circ \hat{e} = h \circ e = \hat{e} = 1_W \circ \hat{e}$.

Por 1.3 e y $\hat{e}$ son epimorfismos, $\therefore$ $k \circ h = 1_Z \wedge h \circ k = 1_W$

$\therefore$ h es isomorfismo y
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "e"] \arrow[ddr, bend right, "\hat{e}"'] & & Y_i \\ & Z \arrow[ur, "m_i"] \arrow[d, "h"] & \\ & W \arrow[uur, bend right, "\hat{m}_i"'] & \end{tikzcd}$$
commuta. ∎

1.8 PROPOSICIÓN.-

Todas las fuentes extremadas, en particular todos los límites y secciones pertenecen a $\mathbb{M}$.

Dem. obvio por 1.3. ∎

1.9 PROPOSICIÓN.-

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

diagrama conmutativo en K.

$\Rightarrow$

(a) $h \in E \wedge f$ epimorfismo $\Rightarrow g \in E$

(b) $f \in E \wedge g \in E \Rightarrow h$ [illegible]

Dem.-

"(a)"

Sea
$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "e"'] & & C \\ & \bullet \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd}$$
$(E, \mathbb{M})$- factorización de g.

como $h \in E$ y $m \in \mathbb{M}$, $\therefore$ $d : C \to \bullet \in \operatorname{Mor} K$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "e \circ f"'] & C \arrow[d, "1_C"] \arrow[dl, dashed, "d"'] \\ \bullet \arrow[r, "m"'] & C \end{tikzcd}$$
conmuta

$\therefore$ d es sección y $e \circ f = d \circ h$

Por 1.3 e es epimorfismo y por hipótesis f lo es,

$\therefore$ d es epimorfismo, $\therefore$ d es isomorfismo

$\therefore$ m es isomorfismo, $\therefore$ $g \in E$.

"(b)"

Sea
$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "e"'] & & C \\ & \cdot \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd}$$
$(E, \mathbb{M})$- factorización de h.

como $f \in E$ y $m \in \mathbb{M}$, $\therefore$ $\bigvee_{s : B \to \cdot}$
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "s"'] \\ \cdot \arrow[r, "m"'] & C \end{tikzcd}$$
commuta

como $g \in E$ y $m \in \mathbb{M}$, $\therefore$ $\bigvee_{d : C \to \cdot}$
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s"'] & C \arrow[d, "1_C"] \arrow[dl, dashed, "d"'] \\ \cdot \arrow[r, "m"'] & C \end{tikzcd}$$
commuta

$\therefore$ d es sección.

Como $e \in E$, por 1.3 e es epimorfismo, $\therefore$ s es epimorfismo,

$\therefore$ d es epimorfismo, d es isomorfismo,

$\therefore$ m es isomorfismo, $\therefore$ $h \in E$.

1.10 PROPOSICIÓN.-

$(f_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ K- fuente

$\left((g_j : X \to Z_j)_{j \in J}, \left((k_{ji} : Z_j \to Y_i)_{i \in I_j} \right)_{j \in J} \right)$ factorización de

$(f_i)_{i \in I}$, es decir, $(I_j)_{j \in J}$ es una partición de I y además

$\bigwedge_{\substack{j \in J \\ i \in I_j}}$
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "g_j"'] & & Y_i \\ & Z_j \arrow[ur, "k_{ji}"'] & \end{tikzcd}$$
commuta

$\Rightarrow$

(a) $(f_i)_{i \in I} \in \mathbb{M} \Rightarrow (g_j)_{j \in J} \in \mathbb{M}$

(b) $(g_j)_{j \in J} \in \mathbb{M} \wedge \bigwedge_{j \in J} (k_{ji})_{i \in I_j} \in \mathbb{M} \Rightarrow (f_i)_{i \in I} \in \mathbb{M}$.

Dem:

"(a)"

Sea $\begin{tikzcd} \mathbb{X} \arrow[rr, "g_j"] \arrow[dr, "e"'] & & Z_j \\ & \cdot \arrow[ur, "m_j"'] & \end{tikzcd}$ $(E, \mathbb{M})$- factorización de $(g_j)_{j\in J}$

Definimos $\bigwedge\limits_{i\in I} \quad m_i := k_{ji} \circ m_j$ si $i \in I_j$

como $e \in E$ y $(f_i)_{i\in I} \in \mathbb{M}$, $\therefore$ $\bigvee\limits_{d : \cdot \longrightarrow \mathbb{X}}$ $\begin{tikzcd} \mathbb{X} \arrow[r, "e"] \arrow[d, "1_{\mathbb{X}}"'] & \cdot \arrow[d, "m_i"] \arrow[dl, dashed, "d"'] \\ \mathbb{X} \arrow[r, "f_i"'] & \mathbb{Y}_i \end{tikzcd}$

$\therefore$ e es sección y como $e \in E$ por 1.3 e es epimorfismo

$\therefore$ e es isomorfismo, y como $(m_j)_{j\in J} \in \mathbb{M}$,

$\therefore$ $(g_j)_{j\in J} \in \mathbb{M}$.

"(b)"

Sea $\begin{tikzcd} \mathbb{X} \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "e"'] & & \mathbb{Y}_i \\ & \cdot \arrow[ur, "m_i"'] & \end{tikzcd}$ $(E, \mathbb{M})$- factorización de $(f_i)_{i\in I}$

como $e \in E$ $\wedge$ $\bigwedge\limits_{j\in J} (k_{ji})_{i\in I_j} \in \mathbb{M}$,

$\therefore$ $\bigwedge\limits_{j\in J}$ $\bigvee\limits_{h_j : \cdot \longrightarrow Z_j}$ $\begin{tikzcd} \mathbb{X} \arrow[r, "e"] \arrow[d, "g_j"'] & \cdot \arrow[d, "m_i"] \arrow[dl, dashed, "h_j"'] \\ Z_j \arrow[r, "k_{ji}"'] & \mathbb{Y}_i \end{tikzcd}$ conmuta (para $i \in I_j$)

como $e \in E$ y $(g_j)_{j\in J} \in \mathbb{M}$, $\therefore$ $\bigvee\limits_{h : \cdot \longrightarrow \mathbb{X}}$ $\begin{tikzcd} \mathbb{X} \arrow[r, "e"] \arrow[d, "1_{\mathbb{X}}"'] & \cdot \arrow[d, "h_j"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ \mathbb{X} \arrow[r, "g_j"'] & Z_j \end{tikzcd}$

$\therefore$ e es sección y como $e \in E$ por 1.3 e es epimorfismo.

$\therefore$ e es isomorfismo y como $(m_i)_{i\in I} \in \mathbb{M}$, $\therefore$ $(f_i)_{i\in I} \in \mathbb{M}$.

1.11 PROPOSICIÓN.-

$(f_i : X \longrightarrow Y_i)_{i\in I}$ K-fuente $\ni$. $\underset{J\subseteq I}{\smile}$ $(f_i : X \longrightarrow Y_i)_{i\in J} \in \mathbb{M}$

$\Rightarrow$

$(f_i : X \longrightarrow Y_i)_{i\in I} \in \mathbb{M}$.

Dem.:

Sea
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "e"'] & & Y_i \\ & \bullet \arrow[ur, "m_i"'] & \end{tikzcd}$$
$(E, \mathbb{M})$- factorización de $(f_i)_{i\in I}$

$\therefore$
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "e"'] & & Y_i \\ & \bullet \arrow[ur, "m_i"'] & \end{tikzcd}$$
es factorización de $(f_i)_{i\in J}$

como $(f_i)_{i\in J} \in \mathbb{M}$, por 1.10 a) $e \in \mathbb{M}$

$\therefore$ $e \in E \cap \mathbb{M}$, $\underset{1.6}{\therefore}$ e es isomorfismo, $\therefore$ $(f_i)_{i\in I} \in \mathbb{M}$.

1.12 PROPOSICIÓN.-

E y $\mathbb{M}$ se determinan mutuamente a través de la propiedad de diagonalización, es decir:

(a) $E = \{ f \in Mor\, K \mid K$ es $(f, \mathbb{M})$- diagonalizable $\}$

(b) $\mathbb{M} = \{ (f_i)_{i\in I}$ K-fuente $\mid K$ es $(E, (f_i)_{i\in I})$- diagonalizable $\}$

Dem.:

"(a)"

"$\subseteq$" obvio

"$\supseteq$" Sea $e : A \to B \in Mor\, K$ $\ni$. K es $(e, \mathbb{M})$- diagonalizable

Sea
$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "e"] \arrow[dr, "a"'] & & B \\ & \bullet \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd}$$
$(E, \mathbb{M})$- factorización de e.

como $m \in M$, $\therefore$ $h: B \to \cdot$
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\hat{e}"'] & B \arrow[d, "1_B"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ \cdot \arrow[r, "m"'] & B \end{tikzcd}$$
conmuta

por 1.3 h es epimorfismo, $\therefore$ h es isomorfismo,

$\therefore$ m es isomorfismo, $\therefore$ $e \in E$.

"(b)" Se obtiene en forma similar a (a).

1.13 COROLARIO.-

(E', M) estructura de factorización en K

(E, M') estructura de factorización en K

$\Rightarrow$

$E = E' \wedge M = M'$.

1.14 OBSERVACIÓN.-

En el siguiente teorema se probará que toda sub-categoría plena de K posee envolvente E-reflexiva. Dicha envolvente se tomará con respecto a sub-categorías plenas y repletas de K.

1.15 TEOREMA.-

A sub-categoría plena de K.

B la sub-categoría plena de K $\ni$ $Z \in Ob\, B \Leftrightarrow (A_i)_{i \in I} \in Ob\, A^I$ $(f_i : Z \to A_i)_{i \in I} \in M$

$\Rightarrow$

B es la envolvente E-reflexiva de A en K.

Dem:

Por 1.6, $\bigwedge_{A\in Ob\,\mathcal{A}} 1_A \in \mathbb{M}$, $\therefore$ $Ob\,\mathcal{A} \subseteq Ob\,\mathcal{B}$.

Sea $X \in Ob\,K$

Sea $(f_i: X \longrightarrow A_i)_{i\in I}$ la fuente de todos los K-morfismos con dominio X y codominio en $Ob\,\mathcal{A}$.

Sea
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "e"'] & & A_i \\ & A \arrow[ur, "m_i"'] & \end{tikzcd}$$
$(E, \mathbb{M})$ factorización de $(f_i)_{i\in I}$

$\therefore$ $e\in E$ $\wedge$ $A \in Ob\,\mathcal{B}$.

Sea $f: X \longrightarrow Y$ K-morfismo $\Rightarrow$ $Y \in Ob\,\mathcal{B}$.

$\therefore$ $\bigvee_{(Z_j)_{j\in J}\in Ob\,\mathcal{A}^J} (g_j: Y \longrightarrow Z_j)_{j\in J} \in \mathbb{M}$

$\therefore$ $\bigwedge_{j\in J} \bigvee_{i_j\in I} g_j\circ f = f_{i_j} = m_{i_j}\circ e$

$\therefore$ $\overset{!}{\bigvee}_{h:A \longrightarrow Y}$
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "m_{i_j}"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ Y \arrow[r, "g_j"'] & Z_j = A_{i_j} \end{tikzcd}$$
commuta.

$\therefore$ $\mathcal{B}$ es sub-categoria E-reflexiva de K.

Sea $\mathcal{D}$ sub-categoria E-reflexiva de K $\Rightarrow$ $Ob\,\mathcal{A} \subseteq Ob\,\mathcal{D}$.

Sea $B\in Ob\,\mathcal{B}$, $\therefore$ $\bigvee_{(B_i)_{i\in I}\in Ob\,\mathcal{A}^I} (m_i: B \longrightarrow B_i)_{i\in I} \in \mathbb{M}$

Sea $r : B \longrightarrow X$ la E-reflexión de B en $\mathcal{D}$.

$$\therefore \ \underset{i\in I}{\forall} \ \exists \ g_i : X \longrightarrow B_i \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "m_i"] \arrow[d, "r"'] & B_i \\ X \arrow[ur, dashed, "g_i"'] & \end{tikzcd} \quad \text{commuta}$$

como $(m_i)_{i\in I} \in \mathbb{M}$, por 1.10 (a) $r \in E \cap \mathbb{M}$, y de aquí por 1.6 r es isomorfismo. Finalmente, por ser $\mathcal{D}$ repleta y $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$, $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$. $\therefore$ $\mathrm{Ob}\,\mathbb{B} \subseteq \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$. ∎

1.16 EJEMPLOS DE ESTRUCTURAS DE FACTORIZACIÓN.-

1) Toda categoría tiene la estructura de factorización (isomorfismos, fuentes) y se conoce como estructura trivial.

2) [7]. Remark. 2.2:

La categoría de conjuntos $\mathcal{S}et$ tiene precisamente dos estructuras de factorización:

1°.- La trivial, dada por (funciones biyectivas, fuentes).

2°.- La regular, es decir, (epis regulares, monofuentes) dada por (funciones suryectivas, fuentes que separan puntos.

3) [5]. PROP 3.24:

Si K es una categoría concreta topológica, entonces K

(a) (cocientes, monofuentes)

(b) (epimorfismos, fuentes extremadas)

(c) (epipozos, inmersiones)

(d) (pozos extremados, monomorfismos)

En particular en la categoría de espacios topológicos TOP estas estructuras estan dadas por:

(a) (identificaciones, fuentes que separan puntos).

(b) (funciones continuas suryectivas, fuentes que separan puntos $(f_i : (X,\tau) \longrightarrow (X_i,\tau_i))_{i\in I}$ donde τ es la topología inicial respecto a $(f_i,\tau_i)_{i\in I}$).

(c) (pozos que cubren puntos, inmersiones)

(d) (pozos que cubren puntos $(g_i : (Y_i,\sigma_i) \longrightarrow (Y,\sigma))_{i\in I}$ donde σ es la topología final respecto a $(g_i,\sigma_i)_{i\in I}$, funciones continuas inyectivas).

4) En el capítulo II de este trabajo veremos que una categoría (plena y repleta) K de τ-algebras es (homomorfismos suryectivos, fuentes que separan puntos)-categoría si y solo si $K = HK \cap ISPK$.

5) $K \subseteq K_\tau$ $\cdot\ni\cdot$ el funtor que olvida $U: K \longrightarrow Set$ posee adjunto izquierdo $\wedge$ $SK \subseteq K$

$\Rightarrow$

K es (epipozos extremados, homomorfismos inyectivos) - categoría.

Dem.:

Claramente las clases "epipozos extremados" y "homomorfismos inyectivos" son cerradas bajo la composición con isomorfismos.

Sea $(\mathfrak{X}_i \xrightarrow{f_i} A)_{i\in I}$ K- pozo.

$$\therefore \quad \begin{tikzcd} \mathfrak{X}_i \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "f_i'"'] & & A \\ & \Gamma \bigcup\limits_{i\in I} f_i(\mathfrak{X}_i) \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

commuta. Obviamente la inclusión

$i : \Gamma \bigcup\limits_{i\in I} f_i(\mathfrak{X}_i) \hookrightarrow A$ es homomorfismo inyectivo y

$(f_i' : \mathfrak{X}_i \longrightarrow \Gamma \bigcup\limits_{i\in I} f_i(\mathfrak{X}_i))_{i\in I}$ es epipozo que resulta extremado

pués $U: K \to Set$ posee adjunto izquierdo y de aquí que los K-monomorfismos son inyectivos. (Nótese que $\Gamma \bigcup\limits_{i\in I} f_i(\mathfrak{X}_i) \in K$ pués $SK \subseteq K$).

Sea

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Z} & Y \arrow[l, "m"'] \\ A \arrow[u, "f"] & \mathfrak{X}_i \arrow[l, "e_i"] \arrow[u, "g_i"'] \end{tikzcd}$$

diagrama conmutativo en K donde

m es inyectivo y $(e_i)_{i\in I}$ es epipozo extremado.

$$\therefore \quad f\Big(\bigcup_{i\in I} e_i(X_i)\Big) \subseteq m(Y) \in S(Z)$$

$$\therefore \quad f\Big(\Gamma \bigcup_{i\in I} e_i(X_i)\Big) = \Gamma\Big(f\big(\bigcup_{i\in I} e_i(X_i)\big)\Big) \subseteq m(Y).$$

como $(e_i)_{i\in I}$ es extremado, $\Gamma \bigcup_{i\in I} e_i(X_i) = A$

$\therefore \quad f(A) \subseteq m(Y)$ y como m es inyectiva,

$\therefore \quad \underbrace{\hphantom{xx}}_{\exists !}$ $h : A \to Y$ homomorfismo

$$\begin{tikzcd}
Z & Y \arrow[l, "m"'] \\
A \arrow[u, "f"] \arrow[ur, dashed, "h"] & X_i \arrow[l, "e_i"] \arrow[u, "g_i"']
\end{tikzcd}$$

conmuta. $\blacksquare$

" By an " aggregate " we are to understand any collection into a whole M of definite and separate objets m of our intuition or our thought. We shall call by the name " power " or " cardinal number " of M the general concept which, by means of our active faculty of thought, arises from the aggregate M when we make abstraction of the nature of its various elements m and of the order in which they are given. We denote de result of this double act of abstraction, the cardinal number or power of M, by $\overline{\overline{M}}$. "

Georg Cantor.

CAPITULO II. LA ENVOLVENTE HOMOMORFISMOS SURYECTIVOS REFLEXIVA PARA CATEGORIAS DE τ- ALGEBRAS.

2.1 DEFINICIÓN.-

$K \subseteq K_\tau$

$\Longrightarrow$

K se llama CERRADA BAJO FUENTES QUE SEPARAN PUNTOS

$\Longleftrightarrow$

$$K = \Big\{ A \in K_\tau \;\Big|\; \underbrace{\qquad}_{\substack{(X_i)_{i\in I} \in K^I \\ (f_i : A \to X_i)_{i \in I} \; K_\tau\text{- fuente}}} \quad (f_i)_{i\in I} \text{ separa puntos} \Big\}$$

2.2 OBSERVACIÓN.-

$\{ K \subseteq K_\tau \mid K$ es cerrada bajo fuentes que separan puntos $\}$ es un sistema de cerradura. Además si $\mathfrak{W} \subseteq K_\tau$, la mínima clase cerrada bajo fuentes que separan puntos es:

$$\Big\{ A \in K_\tau \;\Big|\; \underbrace{\qquad}_{\substack{(X_i)_{i\in I} \in \mathfrak{W}^I \\ (f_i : A \to X_i)_{i \in I} \; K_\tau\text{- fuente}}} \quad (f_i)_{i\in I} \text{ separa puntos} \Big\}.$$

2.3 LEMA.-

$K \subseteq K_\tau$

$\Longrightarrow$

$$ISP\,K = \Big\{ A \in K_\tau \;\Big|\; \underbrace{\qquad}_{\substack{(X_i)_{i\in I} \in K^I \\ (f_i : A \to X_i)_{i \in I} \; K_\tau\text{- fuente}}} \quad (f_i)_{i\in I} \text{ separa puntos} \Big\}$$

Dem.:

"$\subseteq$" Trivial

"$\supseteq$"

Sean $A \in K_\tau$, $(\mathcal{L}_i)_{i\in I} \in K^I$ y $(f_i : A \longrightarrow \mathcal{L}_i)_{i\in I}$ K_τ- fuente

que separa puntos.

por [5] PROP 1.3, $\underbrace{\qquad}_{J \subseteq I \text{ conjunto}}$ $(f_i)_{i\in J}$ separa puntos.

$\therefore$ $\underbrace{\qquad}_{m \in K_\tau(A,\ \prod_{i\in J} \mathcal{L}_i)}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "m"] \arrow[dr, "f_i"'] & \prod_{i\in J} \mathcal{L}_i \arrow[d, "\pi_i"] \\ & \mathcal{L}_i \end{tikzcd}$$

commuta.

finalmente como $(f_i)_{i\in J}$ separa puntos,

m es inyectiva, $A \in ISPK$.

2.4 LEMA:

$K \subseteq K_\tau$

$\Rightarrow$

$$HK \cap ISPK = \{ \mathcal{L} \in K_\tau \mid \underbrace{\qquad}_{\substack{A \in K \\ (\mathcal{L}_i)_{i\in I} \in K^I \\ (f_i :\, A \longrightarrow \mathcal{L}_i)_{i\in I}\ K\text{-fuente}}} \quad \mathcal{L} \cong A / \bigcap_{i\in I} \ker f_i \}$$

"$\subseteq$"

Sea $\mathcal{L} \in HK \cap ISPK$.

por 2.3, $\underbrace{\qquad}_{\substack{A \in K \\ (\mathcal{L}_i)_{i\in I} \in K^I \\ e :\, A \twoheadrightarrow \mathcal{L} \text{ homomorfismo suryectivo} \\ (f_i :\, \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}_i)_{i\in I}\ K_\tau\text{- fuente}}}$ $(f_i)_{i\in I}$ separa puntos.

$\therefore$
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_i \circ e"] \arrow[dr, "e"'] & \mathcal{L}_i \\ & \mathcal{L} \arrow[u, "f_i"'] \end{tikzcd}$$
conmuta $\wedge$ $\operatorname{Ker} e = \bigcap_{i \in I} \operatorname{Ker} f_i \circ e$

$\therefore \quad \mathcal{L} \cong A/\operatorname{Ker} e = A/\bigcap_{i \in I} \operatorname{Ker} f_i \circ e$

"$\supseteq$"

Sea $\mathcal{L} \in K_t \ \therefore \ \underbrace{\quad}_{\substack{A \in K \\ (\mathcal{L}_i)_{i \in I} \in K^I \\ (f_i : A \to \mathcal{L}_i)_{i \in I} \ K\text{-fuente}}} \quad \mathcal{L} \cong A/\bigcap_{i \in I} \ker f_i$

Observemos que solo hay un conjunto de congruencias distintas en $\{\ker f_i\}_{i \in I}$, $\therefore \bigcap_{i \in I} \ker f_i \in \pi(A)$,

$\therefore \quad \mathcal{L} \in IHK = HK.$

Sea $\nu : A \longrightarrow A/\bigcap_{i \in I} \ker f_i$ la proyección natural.

$\therefore \quad \overbrace{\quad}^{}_{i \in I} \quad \underbrace{\quad}_{m_i \in K_t(A/\bigcap_{i \in I} \ker f_i,\ \mathcal{L}_i)}$
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\nu"'] & \mathcal{L}_i \\ A/\bigcap_{i \in I} \ker f_i \arrow[ur, "m_i"'] & \end{tikzcd}$$
conmuta

y obviamente $(m_i)_{i \in I}$ separa puntos.

De aquí por 2.3, $A/\bigcap_{i \in I} \ker f_i \in ISPK$.

$\therefore \quad \mathcal{L} \in IISPK = ISPK.$

2.5 LEMA.-

$K \subseteq K_\tau$

$\Longrightarrow$

K tiene la propiedad de (homomorfismos suryectivos, fuentes que separan puntos diagonalización).

Dem.-

Sea
$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{X} \arrow[d, "f_i"] \\ \mathcal{B} \arrow[r, "m_i"'] & \mathcal{D}_i \end{tikzcd}$$
diagrama conmutativo en K

donde e es suryectiva y $(m_i)_{i \in I}$ separa puntos.

$\therefore$ Ker e $\subseteq$ Ker f y como e es suryectiva,

$\therefore$ $\exists!$ $h: \mathcal{X} \to \mathcal{B}$ homomorfismo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{X} \arrow[d, "f_i"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ \mathcal{B} \arrow[r, "m_i"'] & \mathcal{D}_i \end{tikzcd}$$
conmuta.

2.6 TEOREMA.-

$K \subseteq K_\tau$ repleta

$\Longrightarrow$

K es (homomorfismos suryectivos, fuentes que separan puntos)- categoría

$\Longleftrightarrow$

$K = HK \cap ISPK$.

Dem.-

"$\Longleftarrow$"

claramente las clases "homomorfismos suryectivos" y "fuentes que separan puntos" son cerradas bajo la composición con isomorfismos.

Sea $(f_i : A \longrightarrow \mathcal{X}_i)_{i\in I}$ K-fuente

Consideremos la factorización
$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "\nu"'] & & \mathcal{X}_i \\ & A/\bigcap\limits_{i\in I} \mathrm{Ker} f_i \arrow[ur, "m_i"'] & \end{tikzcd}$$
como en 2.4.

Tenemos que la proyección natural ν es suryectiva,

$(m_i)_{i\in I}$ separa puntos y $A/\bigcap\limits_{i\in I}\mathrm{Ker} f_i \in HK \cap ISPK = K$. Finalmente

por 2.5 se obtiene la conclusión.

"$\Longrightarrow$"

Sea $\mathcal{X} \in HK \cap ISPK$

por 2.4
$$\overbrace{\begin{matrix} A \in K \\ (\mathcal{X}_i)_{i\in I} \in K^I \\ (f_i : A \longrightarrow \mathcal{X}_i)_{i\in I} \text{ K-fuente} \end{matrix}} \quad \mathcal{X} \cong A/\bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker} f_i$$

Sea
$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "e"'] & & \mathcal{X}_i \\ & \mathcal{D} \arrow[ur, "r_i"'] & \end{tikzcd}$$
factorización de $(f_i)_{i\in I}$ donde

$\mathcal{D} \in K$, e es suryectiva y $(r_i)_{i\in I}$ separa puntos.

por "$\Leftarrow$" K_I es (homomorfismos suryectivos, fuentes que separan puntos categoría). Consideremos la factorización
$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "\nu"'] & & \mathcal{X}_i \\ & A/\bigcap\limits_{i\in I} \mathrm{Ker} f_i \arrow[ur, "m_i"'] & \end{tikzcd}$$
como en 2.4. De aquí por 1.7,

$\mathcal{X} \cong A/\bigcap\limits_{i\in I}\mathrm{Ker} f_i \cong \mathcal{D} \in K$. $\therefore$ Como K es repleta $\mathcal{X} \in K$.

2.7 COROLARIO.-

$K \subseteq K_c$

$\Rightarrow$

i) $HK \subseteq K \Rightarrow K$ es (hom. suryectivos, fuentes que separan puntos)- categoría.

ii) $ISPK \subseteq K \Rightarrow K$ es (epis regulares, mono fuentes)- categoría.

Dem.:

"i)" directo por 2.6

"ii)" El diagrama "
$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker} h \arrow[r, hook, "i"] & X \times X \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[r, shift right, "\pi_2"'] & X \arrow[r, two heads, "h"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[dl, dashed, "! \, p"] \\ & & D & \end{tikzcd}$$
" muestra

que si h es K- homomorfismo suryectivo, h es K - epimorfismo

regular. ($\operatorname{Ker} h \in SPK \subseteq ISPK = K$ y h es coigualador de $\pi_1 \circ i$ y $\pi_2 \circ i$).

De aquí por la demostración de 2.6 se obtiene que

K es (epis regulares, mono fuentes) factorizable.

Sea
$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, shift left, "l"] \arrow[r, shift right, "m"'] & A \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "f_i"] \\ & G \arrow[r, "m_i"'] & D_i \end{tikzcd}$$
diagrama conmutativo en K

donde e es epi regular, coigualador de l y m, y $(m_i)_{i \in I}$ es

K mono fuente. $\therefore \underbrace{\ }_{i \in I} m_i \circ f \circ l = f_i \circ e \circ l = f_i \circ e \circ m = m_i \circ f \circ m$.

Como $(m_i)_{i \in I}$ es K- monofuente, $\therefore f \circ l = f \circ m$,

$\therefore \underbrace{!}_{h : Y \to G}$
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "f_i"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ G \arrow[r, "m_i"'] & D_i \end{tikzcd}$$
conmuta. ∎

2.8 COROLARIO.-

$K \subseteq K_\tau \cdot\ni\cdot ISPK = K$

$\Rightarrow$

La clase de K-homomorfismos suryectivos coincide con la clase de K-epimorfismos regulares.

Dem:

Por la demostración de 2.7, K es (epis regulares, fuentes que separan puntos)- categoría.

Por 2.6, K es (homomorfismos suryectivos, fuentes que separan puntos) -categoría.

De aquí por 1.13 se obtiene la conclusión.

2.9 PROPOSICIÓN.-

$K \subseteq \mathcal{W} \subseteq K_\tau \cdot\ni\cdot ISP\mathcal{W} = \mathcal{W}.$

$\Rightarrow$

$ISPK$ es la envolvente homomorfismos suryectivos reflexiva de K en $\mathcal{W}$ y en particular de K en K_τ.

Dem:

Recordemos (1.14) que estamos tomando la envolvente con respecto a sub-categorías plenas y repletas.

Por 2.6, $\mathcal{W}$ y K_τ son (homomorfismos suryectivos, fuentes que separan puntos) - categorías.

Por 2.3, $ISPK = \{ A \in K_\tau \mid \underset{(X_i)_{i\in I} \in K^I}{\exists} \underset{(f_i : A \to X_i)_{i\in I}\ K_\tau\text{-fuente}}{\exists} (f_i)_{i\in I} \text{ separa puntos} \}$

como $K \subseteq \mathcal{W} = ISP\,\mathcal{W}$ se obtiene que:

$$ISPK = \Big\{ A \in \mathcal{W} \;\Big|\; \underbrace{\qquad\quad}_{\substack{(X_i)_{i\in I} \in K^I \\ (f_i : A \to X_i)_{i\in I}}} (f_i)_{i\in I} \text{ separa puntos} \Big\}$$

De aquí por 1.15 se obtiene la conclusión.

2.10 OBSERVACIÓN.-

Por 2.9, si $K \subseteq K_\tau$, $ISPK$ es epirreflexiva en cualquier sub-categoría $\mathcal{C} \subseteq K_\tau \Rightarrow ISPK \subseteq \mathcal{C}$. En particular tenemos:

2.11 COROLARIO.- ([8]. TEOREMA 2.3)

Cualquier variedad $\mathcal{V}$ es epirreflexiva en toda categoría (plena) de τ-álgebras que la contenga.

2.12 PROPOSICIÓN.-

$K \subseteq K_\tau$ repleta, $\mathcal{W} \subseteq K_\tau \Rightarrow ISPK \subseteq \mathcal{W}$

S.E:

(a) $K = ISPK$.

(b) K es homomorfismos suryectivos reflexiva en K_τ.

(c) K es homomorfismos suryectivos reflexiva en $\mathcal{W}$.

Dem:

"(a) $\Rightarrow$ (b)" directo por 2.9

"(b) $\Rightarrow$ (c)" obvio

"(c) $\Rightarrow$ (a)"

Sea $X \in ISPK$, por 2.3, $\underbrace{\qquad\quad}_{\substack{(X_i)_{i\in I} \in K^I \\ (f_i : X \to X_i)_{i\in I}\ K_\tau\text{-fuente}}}$ $(f_i)_{i\in I}$ separa puntos.

como $\mathcal{X} \in ISPK \subseteq \mathcal{V}$, por (a):

$\bigvee$ $(\mu, \mathcal{D})$ es la hom. suryectivos reflexión de $\mathcal{X}$ en K.
$\mathcal{D} \in K$
$\mu : \mathcal{X} \twoheadrightarrow \mathcal{D}$ hom. suryectivo

$\therefore \bigwedge_{i \in I} \bigvee \hat{f}_i : \mathcal{D} \to \mathcal{X}_i$ homomorfismo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, two heads, "\mu"'] & \mathcal{X}_i \\ \mathcal{D} \arrow[ur, "\hat{f}_i"'] & \end{tikzcd}$$
conmuta.

como $(f_i)_{i \in I}$ es inyectiva, μ es inyectiva,

$\therefore \mathcal{X} \cong \mathcal{D} \in K$ y como K es repleta, $\therefore \mathcal{X} \in K$.

$\therefore K = ISPK$.

" Si no esperáis lo inesperado, no lo encontraréis; puesto que es penoso descubrirlo y, además, difícil ".

Heráclito.

CAPITULO III. LA ISPK REFLEXIÓN.

3.1 DEFINICIÓN.-

$K \subseteq K_\tau$, $A \in K_\tau$, $\Sigma \subseteq A \times A$

$\Rightarrow$

i) $e_A K := \{ (p,q) \in A \times A \mid \bigwedge_{\substack{X \in K \\ \varphi \in K_\tau(A,X)}} \varphi(p) = \varphi(q) \}$ se llama

CONJUNTO DE A- ECUACIONES EN K.

ii) $m_A \Sigma := \{ X \in K_\tau \mid \bigwedge_{\substack{(p,q) \in \Sigma \\ \varphi \in K_\tau(A,X)}} \varphi(p) = \varphi(q) \}$ se llama

CLASE DE MODELOS DE Σ RESPECTO A A.

3.2 OBSERVACIONES.-

Sean $K \subseteq K_\tau$ y $A \in K_\tau$.

1) Sea $(f_i : A \rightarrow X_i)_{i \in I}$ la fuente de todos los K_τ- morfismos con codominios en K. Nótese que $e_A K = \bigcap_{i \in I} \ker f_i$. Además, por la demostración de 1.15 y por 2.9 la proyección natural $\nu : A \twoheadrightarrow A/e_A K$ es la homomorfismos suryectivos reflexión de A en ISPK.

2) Por 1), $$ISPK \subseteq \left\{ \mathcal{X}\in K_\tau \;\middle|\; \bigwedge_{\varphi\in K_\tau(A,\mathcal{X})} \;\bigvee_{\tilde\varphi\in K_\tau(A/e_AK,\,\mathcal{X})} \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{X} \\ {\scriptstyle\nu}\downarrow & \nearrow{\scriptstyle\tilde\varphi} & \\ A/e_AK & & \end{array} \text{ commuta} \right\} =$$

$$= \left\{ \mathcal{X}\in K_\tau \;\middle|\; e_AK \subseteq \bigcap_{\varphi\in K_\tau(A,\mathcal{X})} \ker\varphi \right\} =$$

$$= \left\{ \mathcal{X}\in K_\tau \;\middle|\; \bigwedge_{\substack{(p,q)\in e_AK \\ \varphi\in K_\tau(A,\mathcal{X})}} \varphi(p)=\varphi(q) \right\} = m_Ae_AK.$$

Además observemos que m_Ae_AK es la máxima clase de τ-álgebras donde se extiende la propiedad universal de $\nu : A \longrightarrow A/e_AK$.

3) Nótese que si $A = \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)$, $e_AK = eK$ y $m_Ae_AK = meK$. Además es usual que $ISPK \subsetneq HSPK = meK$ que es la mínima variedad que contiene a K.

4) $$ISPK = \bigcap_{A\in K_\tau} m_Ae_AK.$$

Dem.:

"$\subseteq$" directo por 2)

"$\supseteq$" Sea $\mathcal{X}\in \bigcap_{A\in K_\tau} m_Ae_AK$. $\therefore$ $\mathcal{X}\in m_\mathcal{X}e_\mathcal{X}K$ y como

$1_\mathcal{X}\in K_\tau(\mathcal{X},\mathcal{X})$, $\bigwedge_{b_1,b_2\in\mathcal{X}} (b_1,b_2)\in e_\mathcal{X}K \Rightarrow b_1=b_2$

$$\therefore \bigwedge_{b_1,b_2 \in \mathcal{X}} b_1 \neq b_2 \Rightarrow \bigvee_{\substack{\mathcal{B} \in K \\ \varphi \in K_\tau(\mathcal{X},\mathcal{B})}} \varphi(b_1) \neq \varphi(b_2)$$

De aquí por 2.3, $\mathcal{X} \in ISPK$.

3.3 OBSERVACIÓN.-

$K \subseteq K_\tau$, $\mathfrak{A}$ K-libre generado por M

$\Rightarrow$

$\mathfrak{A}$ es K-proyectivo con respecto a homomorfismos suryectivos.

3.4 LEMA.-

$\mathfrak{A} \in K_\tau$, $\Sigma \subseteq A \times A$

$\Rightarrow$

$ISP\, m_{\mathfrak{A}}\Sigma = m_{\mathfrak{A}}\Sigma$

Dem.-

Sean $(\mathcal{X}_j)_{j\in J} \in m_{\mathfrak{A}}\Sigma^J$, $\mathcal{X} \in K_\tau$ y $(f_j : \mathcal{X} \to \mathcal{X}_j)_{j\in J}$ K_τ-fuente

que separa puntos.

Sean $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathcal{X}$ homomorfismo y $(p,q) \in \Sigma$

$\therefore \bigwedge_{j\in J} f_j \circ \varphi(p) = f_j \circ \varphi(q)$ y como $(f_j)_{j\in J}$ separa puntos,

$\therefore \varphi(p) = \varphi(q)$, $\therefore \mathcal{X} \in m_{\mathfrak{A}}\Sigma$. Finalmente por 2.3

se obtiene la conclusión. ∎

3.5. COROLARIO.-

$K \subseteq K_\tau$, $A \in K_\tau$

$\Rightarrow$

$m_A e_A K$ coincide con su envolvente homomorfismos suryectivos reflexiva en cualquier clase de τ-álgebras cerrada bajo fuentes que separan puntos que la contenga. De aquí que $m_A e_A K$ es epirreflexiva en cualquier subcategoría $\mathcal{C} \subseteq K_\tau$ tal que $m_A e_A K \subseteq \mathcal{C}$.

Dem.-

directo por 3.4, 2.9 y 2.10.

3.6 PROPOSICIÓN.-

$K \subseteq K_\tau$

$\Rightarrow$

1) $$\bigwedge_{A,\mathcal{X}\in K_\tau} \Gamma_c \{ (b_1,b_2) \in \mathcal{X}\times\mathcal{X} \mid \bigvee_{\substack{(a_1,a_2)\in e_A K \\ \varphi\in K_\tau(A,\mathcal{X})}} \varphi(a_1)=b_1 \wedge \varphi(a_2)=b_2 \} \subseteq e_{\mathcal{X}} K.$$

2) A K_τ- proyectivo con respecto a homomorfismos suryectivos

$\Rightarrow$

$$\bigwedge_{\mathcal{X}\in K_\tau} \Gamma_c \{ (b_1,b_2) \in \mathcal{X}\times\mathcal{X} \mid \bigvee_{\substack{(a_1,a_2)\in e_A K \\ \varphi\in K_\tau(A,\mathcal{X})}} \varphi(a_1)=b_1 \wedge \varphi(a_2)=b_2 \} = e_{\mathcal{X}}\, m_A e_A K$$

Dem.-

"1)" inmediato.

"2)" "$\subseteq$" inmediato.

"$\supseteq$" Sea $\mathcal{X} \in K_\tau$.

Sea $\theta := \Gamma_c \{ (b_1, b_2) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \mid \bigvee_{\substack{(a_1,a_2) \in e_A K \\ \varphi \in K_\tau(A, \mathcal{X})}} \varphi(a_1) = b_1 \wedge \varphi(a_2) = b_2 \}$

Demostraremos que $\mathcal{X}/\theta \in m_A e_A K$:

Sean $h : A \longrightarrow \mathcal{X}/\theta$ homomorfismo y $(p,q) \in e_A K$

Sea $\nu_\theta : \mathcal{X} \twoheadrightarrow \mathcal{X}/\theta$ la proyección natural.

como A es K_τ-proyectivo,

$\therefore \bigvee_{\sigma \in K_\tau(A, \mathcal{X})}$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{X} \arrow[d, "\nu_\theta"] \\ A \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[r, "h"'] & \mathcal{X}/\theta \end{tikzcd}$$

commuta.

Por definición de θ, $(\sigma(p), \sigma(q)) \in \theta$

$\therefore h(p) = \nu_\theta \circ \sigma(p) = \nu_\theta \circ \sigma(q) = h(q)$

$\therefore \mathcal{X}/\theta \in m_A e_A K$ y de aquí por definición,

$\therefore e_{\mathcal{X}} m_A e_A K \subseteq \ker \nu_\theta = \theta$. ∎

3.7 COROLARIO.-

$k \subseteq K_\tau$, $\mathfrak{X} \in K_\tau$, $\theta := \Gamma_c \left\{ (b_1, b_2) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \mid \bigvee_{\substack{(p,q) \in ek \\ \varphi \in K_\tau(\mathfrak{F}_\tau(\alpha_\tau), \mathfrak{X})}} \varphi(p) = b_1 \wedge \varphi(q) = b_2 \right\}$

$\Rightarrow$

$\mathfrak{X}/\theta$ es la reflexión de $\mathfrak{X}$ en mek, es decir, en la mínima variedad que contiene a k. ⦶

3.8 PROPOSICIÓN.-

$A \in K_\tau$ absolutamente libre generada por M

$\Rightarrow$

i) $m_A e_A k$ es variedad $\wedge$ $mek \subseteq m_A e_A k$

ii) $|M| \geq |\alpha_\tau| \Rightarrow mek = m_A e_A k$.

Dem.-

"i)" Por 2.4 basta probar que $H\, m_A e_A k \subseteq m_A e_A k$:

Sean $\mathfrak{X} \in K_\tau$, $\mathfrak{B} \in m_A e_A k$ y $h : \mathfrak{B} \twoheadrightarrow \mathfrak{X}$ homomorfismo suryectivo.

Sean $(a_1, a_2) \in e_A k$ y $\varphi : A \to \mathfrak{X}$ homomorfismo.

Por 3.3, $\bigvee_{\sigma \in K_\tau(A, \mathfrak{B})}$

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{B} \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[r, "\varphi"'] & \mathfrak{X} \end{tikzcd}$$

conmuta.

$\therefore$ $\sigma(a_1) = \sigma(a_2)$, $\therefore$ $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$, $\therefore$ $\mathfrak{X} \in m_A e_A k$

y por ser mek la mínima variedad que contiene a k, $\therefore$ $mek \subseteq m_A e_A k$.

"ii)" Sea $|M| \geq |\alpha_\tau|$

"$\subseteq$" Directo por i).

"$\supseteq$"

Sea $\mathcal{X} \in m_A e_A K$. Sean $h : \mathfrak{T}_\tau(\alpha_\tau) \longrightarrow \mathcal{X}$ homomorfismo

y $(p,q) \in eK$.

Como $|M| \geq |\alpha_\tau|$, S.P.G. $\mathfrak{T}_\tau(\alpha_\tau) \in S(A)$.

Sea $\varphi : M \longrightarrow \mathcal{X}$ función $\ni\cdot$ $\varphi|_{V_{\alpha_\tau}} = h|_{V_{\alpha_\tau}}$

Sea $\hat{\varphi} : A \to \mathcal{X}$ la extensión de φ a un homomorfismo, $\therefore$

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{X} \\ \mathfrak{T}_\tau(\alpha_\tau) \arrow[urr, "h"] \arrow[rr, hook] & & A \arrow[u, "\hat{\varphi}"'] \end{tikzcd}$$

commuta.

Como $(p,q) \in eK$, por 3.6 i), $(p,q) \in e_A K$ y como $\mathcal{X} \in m_A e_A K$, $\therefore$ $\hat{\varphi}(p) = \hat{\varphi}(q)$, $\therefore$ $h(p) = h(q)$,

$\therefore$ $\mathcal{X} \in meK$. ■

3.9 EJEMPLO.-

Sea $K := \{ (B,\cdot) \in K_{\langle 2 \rangle} \mid \bigwedge_{x,y \in B} x \cdot y = y \cdot x \}$

Sea A $\langle 2 \rangle$-absolutamente libre generado por un conjunto singular $\{s\}$.

$\Longrightarrow$

$K = meK \subsetneq m_A e_A K$.

Dem.-

Observemos que $\{ (B,\cdot) \in K_{(2)} \mid \bigwedge_{b \in B} \Gamma\{b\} \in K \} \subseteq m_A e_A K$.

En efecto, si $(B,\cdot) \in K_{(2)}$.∋. $\bigwedge_{b \in B} \Gamma\{b\} \in K$, dados

$(p,q) \in e_A K$ y $\varphi : A \longrightarrow (B,\cdot)$ homomorfismo,

$\varphi(A) = \varphi(\Gamma\{s\}) = \Gamma\{\varphi(s)\} \in K \subseteq m_A e_A K$ y

como $(p,q) \in e_A K$, $\varphi(p) = \varphi(q)$. ∴ $(B,\cdot) \in m_A e_A K$.

El grupo de permutaciones de 3 elementos

S_3 interpretado en $K_{(2)}$ satisface que

$\bigwedge_{x \in S_3} \Gamma\{x\} \in K$ pero S_3 no es abeliano,

∴ $S_3 \in m_A e_A K$ pero $S_3 \notin K = meK$. ∎

3.10 OBSERVACIÓN.-

$K \subseteq K_\tau$, $A \in K_\tau$

$\Rightarrow$

$m_A e_A K = K_\tau \Leftrightarrow A \in ISPK$

Dem.-

"$\Leftarrow$" Si $A \in ISPK$, por 2.3 $e_A K = \Delta_A$. ∴ $m_A e_A K = K_\tau$

"$\Rightarrow$" Si $m_A e_A K = K_\tau$, $A \in m_A e_A K$, ∴ $\bigwedge_{(a_1,a_2) \in e_A K} a_1 = 1_A(a_1) = 1_A(a_2) = a_2$,

∴ $e_A K = \Delta_A$ y por 2.3, ∴ $A \in ISPK$. ∎

3.11 PROPOSICIÓN.-

F absolutamente libre generado por $M \neq \emptyset$

$A \in K_t$

$\Rightarrow$

$$K_t(A,F) \neq \emptyset \iff \bigvee_{\substack{P \in S(A) \text{ retracto} \\ X \subseteq P}} P \text{ es absolutamente libre generado por } X$$

Dem.-

"$\Rightarrow$"

Sea $h : A \longrightarrow F$ homomorfismo, $\therefore$ $A/_{\ker h} \cong h(A) \in S(F)$.

Como F es absolutamente libre gen por M,

$\therefore$ $\bigvee_{\tilde{X} \subseteq A/_{\ker h}}$ $A/_{\ker h}$ es absolutamente libre generado por $\tilde{X}$.

Sean $\nu : A \longrightarrow A/_{\ker h}$ la proyección natural y $\varphi : \tilde{X} \longrightarrow A$, $[a]_{\ker h} \longmapsto a$

función de elección.

Sea $\hat{\varphi} : A/_{\ker h} \longrightarrow A$ la extensión a un homomorfismo

de φ. $\therefore$ $\nu \circ \hat{\varphi} = 1_{A/_{\ker h}}$.

Sean $X := \hat{\varphi}(\tilde{X})$ y $P := \hat{\varphi}(A/_{\ker h})$

$\therefore$ $P \in S(A)$, P es absolutamente libre generado por X

y como

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right, "1_P"'] & A \arrow[r, "\hat{\varphi}^{|P} \circ \nu"] & P \end{tikzcd}$$

conmuta, P es retracto.

"$\Leftarrow$"

como $M \neq \emptyset$, $K_\tau(P,F) \neq \emptyset$. Sea $\sigma : P \longrightarrow F$ homomorfismo.

Sea $r : A \longrightarrow P$ retracto, $\therefore$ $\sigma \circ r \in K_\tau(A,F)$, $\therefore$ $K_\tau(A,F) \neq \emptyset$.

3.12 COROLARIO

$K \subseteq K_\tau$, $A \in K_\tau$ $\cdot\ni\cdot$ $m_A e_A K \subsetneq K_\tau$

$\Rightarrow$

$m_A e_A K$ variedad $\Rightarrow$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{\substack{P \in S(A) \text{ retracto} \\ Z \subseteq P}}$ P es absolutamente libre generado por Z.

Dem.-

como $m_A e_A K$ es sub-variedad propia de K_τ y como toda t-álgebra es imagen homomorfica de un absolutamente libre, $\therefore$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{\substack{M \text{ conjunto} \\ F \text{ absolutamente} \\ \text{libre generado por } M}}$ $\notin m_A e_A K$.

Observemos que si $K_\tau(A,F) = \emptyset$, por vacuedad $F \in m_A e_A K$

$\therefore$ $K_\tau(A,F) \neq \emptyset$ y por 3.11 se obtiene la conclusión.

3.13 OBSERVACIÓN.-

Por 3.10 si $K \subseteq K_\tau$ y $A \in K_\tau$, $m_A e_A K = K_\tau \Leftrightarrow A \in ISPK$. Nos interesa analizar cuando $m_A e_A K$ esta "suficientemente cerca" de $ISPK$. Así pués sean $K \subseteq K_\tau$ y $A \in K_\tau$ $\cdot\ni\cdot$ $A \notin ISPK$. Distinguimos dos casos:

1er CASO: $K_\tau(A, \gamma_\tau(\alpha_\tau)) = \emptyset$

$\therefore$ $\gamma_\tau(\alpha_\tau) \in m_A e_A K$ y POR 3.4 ISP $\gamma_\tau(\alpha_\tau) \subseteq m_A e_A K$

$\therefore$ $F \in$ ISP $\gamma_\tau(\alpha_\tau) \subseteq m_A e_A K$

M conjunto
F absolutamente libre
generado por M

De aquí que $m_A e_A K \subsetneq K_\tau$ pero en general "muy alejado" de ISPK.

2° CASO: $K_\tau(A, \gamma_\tau(\alpha_\tau)) \neq \emptyset$

En esta caso, por 3.11, P es abs. libre generado por X.

$P \in S(A)$ retracto
$X \subseteq P$

$\therefore$ $m_A e_A K \subseteq m_P e_P K$ que POR 3.8 es variedad, además si $|X| \geq |\alpha_\tau|$ $m_P e_P K$ es la mínima variedad que contiene a K. Si $|X| < |\alpha_\tau|$ vimos en 3.9 que puede suceder que $meK \subsetneq m_P e_P K$. De cualquier forma $m_A e_A K \subseteq m_P e_P K$ que es la variedad generada por K o bien una variedad que tiene buena información de K. De aquí que en este segundo caso $m_A e_A K$ esta "suficientemente cerca" de ISPK.

The slogan is " Adjoint functors arise everywhere ".

S. Mac Lane.

CAPITULO IV. ALGEBRAS K-LIBRES Y LA ISPK REFLEXIÓN.

4.1 TEOREMA.-

$K \leq K_t$, F K-libre generado por M, τ absolutamente libre generado por M

$\Rightarrow$

i) $F \cong \tau/e_{\tau K}$

ii) Si K es no trivial y $\nu: \tau \twoheadrightarrow \tau/e_{\tau K}$ es la proyección natural,

$\Rightarrow$

$|\nu(M)| = |M| \wedge \tau/e_{\tau K}$ es ISPK-libre generado por $\nu(M)$.

Dem.-

"i)"

Sea $\varphi: \tau \twoheadrightarrow F$ homomorfismo suryectivo $\ni$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \tau \arrow[r, two heads, "\varphi"'] & F \end{tikzcd}$$

conmuta

$\therefore$ $\tau/_{Ker\,\varphi} \cong F$

Demostraremos que $Ker\,\varphi = e_{\tau K}$:

"$\supseteq$" obvio pués $F \in K$

"$\subseteq$" Sea $(p,q) \in Ker\,\varphi$ y sean $A \in K$ y $h: \tau \to A$ homomorfismo

$\therefore$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{\psi \in K_t(F,A)}$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d] \arrow[dr, "i\circ h"] \arrow[dd, bend right=60, "(1)"'] & \\ \tau \arrow[r, "h"] \arrow[d, two heads, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & A \\ F \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta en el exterior

De aquí, como (1) conmuta, la unicidad de h implica que (3) conmuta, y como $(p,q) \in \operatorname{Ker} \varphi$

$\therefore\ h(p) = h(q)$, $\therefore\ (p,q) \in e_{\tau}K$.

$$\therefore\ F \cong \tau/_{\operatorname{Ker}\varphi} = \tau/_{e_{\tau}K}\,.$$

"ii)"

Como K es no trivial, $\underbrace{\qquad}_{\mathcal{X} \in K}$ $|\mathcal{X}| > 1$.

Sean $b_1, b_2 \in \mathcal{X} \ni b_1 \neq b_2$.

Demostraremos que $|\nu(M)| = |M|$:

Sean $m_1, m_2 \in M \ni m_1 \neq m_2$

Sea $\ell : M \longrightarrow \mathcal{X}$

$m_1 \longmapsto b_1$

$x \longmapsto b_2$ si $x \neq m_1$

Sea $\hat{\ell} : \tau \longrightarrow \mathcal{X}$ homomorfismo $\ni$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\ell"] \arrow[d] & \mathcal{X} \\ \tau \arrow[ur, "\hat{\ell}"'] & \end{tikzcd}$$ conmuta

como $\mathcal{X} \in K$, por 3.2 i), $\underbrace{\qquad}_{\hat{\hat{\ell}} \in K_{\tau}(\tau/_{e_{\tau}K},\, \mathcal{X})}$

$$\begin{tikzcd} \tau \arrow[r, "\hat{\ell}"] \arrow[d, "\nu"'] & \mathcal{X} \\ \tau/_{e_{\tau}K} \arrow[ur, "\hat{\hat{\ell}}"'] & \end{tikzcd}$$ conmuta

$\therefore\ \nu(m_1) \neq \nu(m_2)$, $\therefore\ |\nu(M)| = |M|$.

como $\mathcal{T}/e_{\tau k} = \nu(\mathcal{T}) = \nu(\Pi M) = \Pi\, \nu(M)$,

$\therefore$ $\nu(M)$ genera a $\mathcal{T}/e_{\tau k}$.

Sean $\mathcal{D} \in ISPK$ y $h: \nu(M) \longrightarrow \mathcal{D}$ función.

$\therefore$ $\hat{h} \in K_\tau(\mathcal{T}, \mathcal{D})$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, two heads, "\nu"] \arrow[d] & \nu(M) \arrow[r, "h"] & \mathcal{D} \\ \mathcal{T} \arrow[urr, "\hat{h}"'] & & \end{tikzcd}$$

conmuta

De aquí por OBS 3.2 1),

$\therefore$ $\hat{\hat{h}} \in K_\tau(\mathcal{T}/e_{\tau k}, \mathcal{D})$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T} \arrow[r, "\hat{h}"] \arrow[d, two heads, "\nu"'] & \mathcal{D} \\ \mathcal{T}/e_{\tau k} \arrow[ur, "\hat{\hat{h}}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta

Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail, two heads, "\nu"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & \nu(M) \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "h"] \arrow[ddr, phantom, "(3)"] & \\ \mathcal{T} \arrow[r, "\nu"'] \arrow[drr, bend right, "\hat{h}"'] \arrow[drr, phantom, "(2)"] & \mathcal{T}/e_{\tau k} \arrow[dr, "\hat{\hat{h}}"] & \\ & & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

$\therefore$ conmutan (1), (2) y el diagrama exterior y como $M \overset{\nu}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} \nu(M)$ es epi conmuta (3)

$\therefore$ $\mathcal{T}/e_{\tau k}$ es ISPK-libre generado por $\nu(M)$.

4.2 COROLARIO.-

$K \subseteq K_\tau$ repleta no trivial

S.E:

(1) $\bigwedge\limits_{M \text{ conjunto}} \; \bigvee\limits_{F_M \in K}$ F_M es K-libre generado por M.

(2) $\bigwedge\limits_{M \text{ conjunto}}$ $\left[\, \mathcal{T} \text{ absolutamente libre generado por } M \Rightarrow \mathcal{T}/e_{\tau K} \in K \,\right]$.

(3) El funtor que olvida $U: K \longrightarrow Set$ posee adjunto izquierdo.

" Old theorems never die, they turn
into definitions."

E. Hewitt.

CAPITULO V. LOS OPERADORES DE CERRADURA $m_A e_A$ Y $e_A m_A$.

5.1 LEMA.-

$K_1, K_2 \subseteq K_\tau,\ A \in K_\tau,\ \Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq A \times A$

$\Longrightarrow$

i) $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \Rightarrow m_A \Sigma_2 \subseteq m_A \Sigma_1$

ii) $K_1 \subseteq K_2 \Rightarrow e_A K_2 \subseteq e_A K_1$

iii) $\Sigma_1 \subseteq e_A m_A \Sigma_1 \ \wedge\ K_1 \subseteq m_A e_A K_1$

iv) $m_A e_A m_A \Sigma_1 = m_A \Sigma_1 \ \wedge\ e_A m_A e_A K_1 = e_A K_1$

v) $\Sigma_1 = e_A m_A \Sigma_1 \Leftrightarrow \bigvee_{K \subseteq K_\tau} \Sigma_1 = e_A K$

vi) $K_1 = m_A e_A K_1 \Leftrightarrow \bigvee_{\Sigma \subseteq A \times A} K_1 = m_A \Sigma$.

5.2 DEFINICIÓN.-

$A \in K_\tau$

$\Longrightarrow$

i) $K \subseteq K_\tau$ se llama A-CERRADA $\Leftrightarrow K = m_A e_A K$

ii) $\Sigma \subseteq A \times A$ se llama A-CERRADO $\Leftrightarrow \Sigma = e_A m_A \Sigma$

5.3 OBSERVACIÓN.-

$A \in K_\tau$

$\Longrightarrow$

i) $\{K \subseteq K_\tau \mid K$ es A-cerrada$\}$ es un sistema de cerradura.

El operador de cerradura inducido es $m_A e_A$.

ii) $\{\Sigma \subseteq A \times A \mid \Sigma$ es A-cerrado$\}$ es un sistema de cerradura.

El operador de cerradura inducido es $e_A m_A$.

Dem.: directo por las primeras cuatro afirmaciones de 5.1

5.4 COROLARIO.-

$A \in K_\tau$

$$e_A : (\{K \subseteq K_\tau \mid K \text{ es } A\text{-cerrada}\}, \subseteq) \longrightarrow (\{\Sigma \subseteq A \times A \mid \Sigma \text{ es } A\text{-cerrado}\}, \subseteq)$$

$$K \longmapsto e_A K$$

$$m_A : (\{\Sigma \subseteq A \times A \mid \Sigma \text{ es } A\text{-cerrado}\}, \subseteq) \longrightarrow (\{K \subseteq K_\tau \mid K \text{ es } A\text{-cerrada}\}, \subseteq)$$

$$\Sigma \longmapsto m_A \Sigma$$

$\Longrightarrow$

i) e_A y m_A son anti-isomorfismos de latices completos.

ii) $e_A^{-1} = m_A$.

5.5 PROPOSICIÓN.-

$A \in K_{\tau}$, $\Sigma \subseteq A \times A$

$\Rightarrow$

i) Σ es A-cerrado $\Rightarrow$ Σ es congruencia totalmente invariante de A

ii) A absolutamente libre generado por M

$\Rightarrow$

Σ es A-cerrado $\Leftrightarrow$ Σ es congruencia totalmente invariante de A.

Dem.-

"i)" Sea $\Sigma = e_A m_A \Sigma$.

Como $e_A m_A \Sigma = \bigcap_{\mathfrak{X} \in m_A \Sigma} \bigcap_{\varphi \in K_{\tau}(A,\mathfrak{X})} \ker \varphi$, Σ es congruencia.

Sean $\varphi \in \operatorname{End} A$, $(p,q) \in \Sigma$, $\mathfrak{X} \in m_A \Sigma$ y $h: A \to \mathfrak{X}$ homomorfismo.

$\therefore$ $h \circ \varphi(p) = h \circ \varphi(q)$, $\therefore$ $(\varphi(p), \varphi(q)) \in e_A m_A \Sigma = \Sigma$

$\therefore$ Σ es congruencia totalmente invariante de A.

"ii)" "$\Rightarrow$" Se sigue de i)

"$\Leftarrow$" Como A es absolutamente libre generado por M,

por 3.3, $\bigwedge_{\varphi \in K_{\tau}(A, A/\Sigma)} \bigvee_{h \in \operatorname{End} A}$
$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, two heads, "\nu_\Sigma"] \\ A \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "\varphi"'] & A/\Sigma \end{tikzcd}$$
commuta.

Como Σ es totalmente invariante, $\therefore$ $\bigwedge_{\substack{\varphi \in K_{\tau}(A,A/\Sigma) \\ (p,q) \in \Sigma}} \varphi(p) = \varphi(q)$

$\therefore$ $A/\Sigma \in m_A \Sigma$. $\therefore$ $\bigwedge_{(p,q) \in e_A m_A \Sigma} \nu_\Sigma(p) = \nu_\Sigma(q)$. $\therefore$ $e_A m_A \Sigma \subseteq \Sigma$.

5.6 OBSERVACIÓN.-

Como una aplicación de la teoría que hemos introducido, daremos una generalización de la técnica que se emplea en [9] para el estudio del latice de sub-variedades de grupos. Para el lector interesado recomendamos que vea [9] en especial el teorema 14.31 o bien el capítulo II de [8] donde se encuentra una magnífica introducción a las variedades de grupos. Veremos que esta técnica se generaliza de manera natural para estudiar el latice de sub-variedades de cualquier variedad de τ-algebras.

5.7 PROPOSICIÓN.-

$K \subseteq \mathcal{V} \subseteq K_\tau \ni \mathcal{V}$ es variedad

F $\mathcal{V}$-libre en α_τ-variables

$\Longrightarrow$

$m_F e_F K \cap \mathcal{V} = m e K.$

Dem.-

"$\supseteq$"

Por 3.4 y 2.2 bastará probar que $H(m_F e_F K \cap \mathcal{V}) \subseteq m_F e_F K \cap \mathcal{V}$:

Sean $G \in K_\tau$, $\mathcal{X} \in m_F e_F K \cap \mathcal{V}$ y $h: \mathcal{X} \twoheadrightarrow G$ homomorfismo suryectivo.

Sean $\varphi \in K_\tau(F, G)$ y $(p, q) \in e_F K$

como $\mathcal{X} \in \mathcal{W}$ que es variedad, $G \in H(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{W}$

De aquí por 3.3, $\underbrace{\qquad\qquad}_{\sigma \in K_\tau(F,\mathcal{X})}$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{X} \arrow[d, "h"] \\ F \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[r, "\varphi"'] & G \end{tikzcd}$$ conmuta

como $\mathcal{X} \in m_F e_F K$ y $(p,q) \in e_F K$, $\sigma(p) = \sigma(q)$, $\therefore$ $\varphi(p) = \varphi(q)$

$\therefore$ $G \in m_F e_F K \cap \mathcal{W}$, $\therefore$ $m_F e_F K \cap \mathcal{W}$ es variedad,

$\therefore$ $meK \subseteq m_F e_F K \cap \mathcal{W}$.

"$\subseteq$"

Sean $\mathcal{X} \in m_F e_F K \cap \mathcal{W}$, $\sigma \in K_\tau(T_\tau(\alpha_\tau), \mathcal{X})$ y $(p,q) \in eK$.

S.P.G (Teorema 4.1) : F [illegible] $T_\tau(\alpha_\tau)/e\mathcal{W}$

Sean $\nu : T_\tau(\alpha_\tau) \twoheadrightarrow T_\tau(\alpha_\tau)/e\mathcal{W} = F$ y $\psi : T_\tau(\alpha_\tau)/e\mathcal{W} = F \twoheadrightarrow F/e_F K$

las proyecciones naturales.

como $\mathcal{X} \in \mathcal{W}$, por 3.2 1), $\underbrace{\qquad\qquad}_{f \in K_\tau(F,\mathcal{X})}$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{X} \\ T_\tau(\alpha_\tau) \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[r, two heads, "\nu"'] & T_\tau(\alpha_\tau)/e\mathcal{W} = F \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$ conmuta.

como $\mathcal{X} \in m_F e_F K$, por 3.2 2), $\underbrace{\qquad\qquad}_{g \in K_\tau(F/e_F K, \mathcal{X})}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} & \\ T_\tau(\alpha_\tau)/e\mathcal{W} = F \arrow[u, "f"] \arrow[r, two heads, "\psi"'] & F/e_F K \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$ conmuta

$\therefore$ en el siguiente diagrama conmutan (1) y (2) :

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{X} & & \\
\mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau) \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[r, two heads, "\nu"'] & \mathcal{T}_\tau(\alpha_\tau)/e\mathcal{W} = F \arrow[u, "f"] \arrow[ul, phantom, "(1)"] \arrow[r, two heads, "\psi"'] & F/e_F K \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, phantom, "(2)"]
\end{tikzcd}
$$

$\therefore$ conmuta el diagrama exterior

como $(p,q) \in eK$, por 3.6 i), $(\nu(p), \nu(q)) \in e_F K$

$\therefore \psi \circ \nu(p) = \psi \circ \nu(q)$, $\therefore \sigma(p) = \sigma(q)$, $\therefore \mathcal{X} \in \mathfrak{M}eK$.

5.8 COROLARIO.-

$K \leq \mathcal{W} \leq K_\tau \ni \mathcal{W}$ es variedad

F $\mathcal{W}$-libre en α_τ-variables

$\Rightarrow$

K es variedad $\Leftrightarrow K = \mathfrak{M}_F e_F K \cap \mathcal{W}$.

5.9 OBSERVACIÓN.-

$\mathcal{W} \leq K_\tau$ variedad

F $\mathcal{W}$-libre en α_τ-variables

$\Rightarrow$

Σ es f-cerrado $\Leftrightarrow$ Σ es congruencia totalmente invariante de F.

Dem.- Esencialmente la misma que en 5.5 ii) observando que por 3.3 F es $\mathcal{W}$-proyectivo con respecto a homomorfismos suryectivos.

5.10 TEOREMA.-

$\mathcal{W} \subseteq \mathcal{K}_\tau$ variedad

F $\mathcal{W}$- libre en α_τ- variables.

$$e_F : (\{\mathcal{K} \subseteq \mathcal{W} \mid \mathcal{K} \text{ es variedad}\}, \subseteq) \longrightarrow (\{\Sigma \subseteq F \times F \mid \Sigma \text{ es } F \text{ cerrado}\}, \subseteq)$$
$$\mathcal{K} \longmapsto e_F \mathcal{K}$$

$$m_F \cap \mathcal{W} : (\{\Sigma \subseteq F \times F \mid \Sigma \text{ es } F \text{ cerrado}\}, \subseteq) \longrightarrow (\{\mathcal{K} \subseteq \mathcal{W} \mid \mathcal{K} \text{ es variedad}\}, \subseteq)$$
$$\Sigma \longmapsto m_F \Sigma \cap \mathcal{W}$$

$\Rightarrow$

e_F y $m_F \cap \mathcal{W}$ son anti-isomorfismos de latices completos; de hecho, $e_F^{-1} = m_F \cap \mathcal{W}$.

Dem.-

Observemos que si $\Sigma \subseteq F \times F$ es F- cerrado repitiendo esencialmente la misma prueba de 5.7 "$\supseteq$", $m_F \Sigma \cap \mathcal{W}$ es variedad.

$\therefore$ $m_F \Sigma \cap \mathcal{W}$ es función. Por 5.1, e_F y $m_F \cap \mathcal{W}$ son homomorfismos de latices (obviamente completos).

Por 5.8 $m_F \cap \mathcal{W} \circ e_F = 1$.

Finalmente probaremos que $e_F \circ m_F \cap \mathcal{W} = 1$:

Sea $\Sigma \leq F \times F \ni \Sigma$ es F- cerrado.

Demostraremos que $e_F(m_F \Sigma \cap \mathcal{W}) = \Sigma$:

"$\supseteq$"

como Σ es F- cerrado, $\Sigma = e_F m_F \Sigma$.

como $m_F \Sigma \cap \mathcal{W} \leq m_F \Sigma$, por 5.1 ii),

$\therefore\ \Sigma = e_F m_F \Sigma \leq e_F\,(m_F \Sigma \cap \mathcal{W})$.

"$\subseteq$"

Sera suficiente probar que $F/_\Sigma \in m_F \Sigma \cap \mathcal{W}$:

como $\mathcal{W}$ es variedad, $F/_\Sigma \in \mathcal{W}$

como Σ es F- cerrado, por 5.9, Σ es congruencia

totalmente invariante de F. De aqui por 3.3,

$$\therefore \bigwedge_{\substack{(p,q)\in\Sigma \\ \varphi \in K_\tau(F, F/_\Sigma)}} \ \bigvee_{h \in \operatorname{End} F} \quad
\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "\nu_\Sigma"] \\ F \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "\varphi"'] & F/_\Sigma \end{tikzcd}
\ \text{conmuta} \wedge (h(p), h(q)) \in \Sigma$$

$$\therefore \bigwedge_{\substack{(p,q)\in\Sigma \\ \varphi \in K_\tau(F, F/_\Sigma)}} \varphi(p) = \varphi(q), \quad \therefore\ F/\Sigma \in m_F \Sigma \cap \mathcal{W}.$$

5.11 COROLARIO.-

$\mathcal{W} \subseteq K_\tau$ variedad

F $\mathcal{W}$-libre en α_τ-variables.

$$\mu : (\{ K \subseteq K_\tau \mid K \text{ es } F \text{ cerrada} \}, \subseteq) \longrightarrow (\{ K \subseteq \mathcal{W} \mid K \text{ es variedad} \}, \subseteq)$$
$$K \longmapsto m_F e_F K \cap \mathcal{W} = K \cap \mathcal{W}$$

$$m_F e_F : (\{K \subseteq K_\tau \mid K \text{ es variedad} \}, \subseteq) \longrightarrow (\{ K \subseteq \mathcal{W} \mid K \text{ es } F\text{-cerrada} \}, \subseteq)$$
$$K \longmapsto m_F e_F K$$

$\Longrightarrow$

μ y $m_F e_F$ son isomorfismos de latices completos ;

de hecho, $\mu^{-1} = m_F e_F$.

Dem.-

directo por 5.10 y 5.4.

" Por suerte, las mentes creadoras olvidan las creencias filosóficas dogmáticas cuando la persistencia en ellas podría impedir resultados constructivos. Tanto para entendidos como para profanos no es la filosofía, y sí únicamente la experiencia activa en matemáticas, la que puede responder a la pregunta: ¿ Qué es la matemática ? ".

R. Courant.

CAPÍTULO VI. ISPK, MODELOS Y PROPIEDADES RESIDUALES.

6.1 NOTACIÓN.-

τ será un tipo de álgebras arbitrario en este capítulo.

$\mathcal{C}$ denotará la clase de todos los cardinales, Set denotará la clase de todos los conjuntos y $\bigwedge_{\alpha \in \mathcal{C}} F_\alpha$ denotará la τ-álgebra absolutamente libre en α-variables.

6.2 DEFINICIONES.-

1)

$$\mathfrak{F} := \bigcup_{(\alpha, I) \in \mathcal{C} \times \mathrm{Set}} F_\alpha \times F_\alpha \times F_\alpha^I \times F_\alpha^I$$ se llama CLASE DE τ- FORMULAS REFLEXIVAS.

2)

$K \subseteq K_\tau$

$\Rightarrow$

$$FK := \bigcup_{(\alpha, I) \in \mathcal{C} \times \mathrm{Set}} \left\{ (x, y, (z_i)_{i\in I}, (w_i)_{i \in I}) \in F_\alpha \times F_\alpha \times F_\alpha^I \times F_\alpha^I \;\middle|\; \bigwedge_{\substack{A \in K \\ \varphi \in K_\tau(F_\alpha, A)}} [\varphi(x) \neq \varphi(y) \Rightarrow \bigvee_{i \in I} \varphi(z_i) \neq \varphi(w_i)] \right\}$$

se llama CLASE DE FORMULAS REFLEXIVAS DE K.

3)

$\Sigma \subseteq \mathfrak{F}$

$\Rightarrow$

$$\mathcal{M}\Sigma := \left\{ \mathfrak{X} \in K_\tau \;\middle|\; \bigwedge_{\substack{(\alpha, I) \in \mathcal{C} \times \mathrm{Set} \\ (x, y, (z_i)_{i \in I}, (w_i)_{i \in I}) \in F_\alpha \times F_\alpha \times F_\alpha^I \times F_\alpha^I}} \left[(x, y, (z_i)_{i \in I}, (w_i)_{i \in I}) \in \Sigma \Rightarrow \bigwedge_{\varphi \in K_\tau(F_\alpha, \mathfrak{X})} [\varphi(x) \neq \varphi(y) \Rightarrow \bigvee_{i \in I} \varphi(z_i) \neq \varphi(w_i)] \right] \right\}$$

se llama CLASE DE LOS MODELOS DE LAS FORMULAS Σ.

6.3 LEMA.-

$K \leq K_\tau$

$\Rightarrow$

$K \leq \mathcal{M}FK = ISP\,\mathcal{M}FK$.

Dem.-

Por 6.2 es inmediato que $K \leq \mathcal{M}FK$.

Sean $(\mathcal{X}_j)_{j\in J} \in \mathcal{M}FK^J$, $\mathcal{X} \in K_\tau$ y $(f_j : \mathcal{X} \to \mathcal{X}_j)_{j\in J}$ K_τ- fuente que separa puntos.

Demostraremos que $\mathcal{X} \in \mathcal{M}FK$:

Sean $(\alpha, I) \in G \times Set$ y $(x, y, (z_i)_{i\in I}, (w_i)_{i\in I}) \in FK$

Sea $\varphi : F_\alpha \to \mathcal{X}$ homomorfismo $\ni \cdot$ $\varphi(x) \neq \varphi(y)$

$\therefore \underset{j\in J}{\smile}$ $f_j \circ \varphi(x) \neq f_j \circ \varphi(y)$

como $\mathcal{X}_j \in \mathcal{M}FK$, $\therefore \underset{i\in I}{\smile}$ $f_j \circ \varphi(z_i) \neq f_j \circ \varphi(w_i)$

$\therefore \varphi(z_i) \neq \varphi(w_i)$, $\therefore \mathcal{X} \in \mathcal{M}FK$. De aquí por 2.2 y 2.3

se obtiene que $\mathcal{M}FK = ISP\,\mathcal{M}FK$.

6.4 OBSERVACIÓN.-

Sea $K \subseteq K_\tau$

i) Sean $(\alpha, I) \in G \times Set$ y $(x, y, (z_i)_{i\in I}, (w_i)_{i\in I}) \in FK$. Cuando por el contexto sea claro quien es α, en lugar de escribir $(x, y, (z_i)_{i\in I}, (w_i)_{i\in I})$ emplearemos una notación mas expresiva;

escribiremos: " $x \neq y \Rightarrow \bigvee_{i \in I} z_i \neq w_i$ "

2) Sea $(p,q) \in eK$. Consideremos la fórmula " $p \neq q \Rightarrow p \neq p$ ".

(En este caso $\alpha = |\alpha_\tau|$ y I es un conjunto singular).

Como $(p,q) \in eK$, $\therefore$ $\bigwedge_{\substack{A \in K \\ \varphi \in K_\tau(F_{|\alpha_\tau|}, A)}} \varphi(p) = \varphi(q)$. De aqui por 6.2,

" $p \neq q \Rightarrow p \neq p$ " $\in FK$.

Observemos que $\bigwedge_{\substack{\mathcal{X} \in K_\tau \\ \varphi \in K_\tau(F_{|\alpha_\tau|}, \mathcal{X})}} \varphi(p) = \varphi(p)$. De aqui que

$(p,q) \in eK \Leftrightarrow$ " $p \neq q \Rightarrow p \neq p$ " $\in FK$ y $\mathcal{M}FK \subseteq meK$.

<u>6.5 TEOREMA.-</u>

$K \subseteq K_c$

$\Rightarrow$

$ISPK = \mathcal{M}FK$.

<u>Dem:-</u>

" $\subseteq$ " directo por 6.3.

" $\supseteq$ " Sea $\mathcal{X} \in \mathcal{M}FK$. Sean $b_1 \neq b_2 \in \mathcal{X}$.

Sea $\alpha := |\mathcal{X}|$

Sea $h: F_\alpha \twoheadrightarrow \mathcal{X}$ homomorfismo suryectivo

Sea $d: \mathcal{X} \longrightarrow F_\alpha$ función de elección $\ni$. $h \circ d = 1_{\mathcal{X}}$

Sean $x := d(b_1)$ y $y := d(b_2)$.

Sea $t=(\kappa_\mu)_{\mu\in U}$ el tipo de álgebras

Sean $(f_\mu^{F_\alpha})_{\mu\in U}$ y $(f_\mu^{\mathcal{X}})_{\mu\in U}$ las familias de operaciones de F_α y $\mathcal{X}$ respectivamente.

Sea $I := \biguplus_{\mu\in U} \mathcal{X}^{\kappa_\mu}$

Supongamos que:

" $x\neq y \Rightarrow \bigvee_{(\mu,(b_\xi)_{\xi<\kappa_\mu})\in I} d\left(f_\mu^{\mathcal{X}}((b_\xi)_{\xi<\kappa_\mu})\right) \neq f_\mu^{F_\alpha}((d(b_\xi))_{\xi<\kappa_\mu})$ " $\in FK$

como $\mathcal{X}\in \mathcal{U}FK$, $h\in K_\tau(F_\alpha,\mathcal{X})$ y $h(x)=b_1\neq b_2=h(y)$, por 6.2,

$$\bigvee_{(\mu,(b_\xi)_{\xi<\kappa_\mu})\in I} h\circ d\left(f_\mu^{\mathcal{X}}((b_\xi)_{\xi<\kappa_\mu})\right)\neq h\left(f_\mu^{F_\alpha}((d(b_\xi))_{\xi<\kappa_\mu})\right)$$ lo

cuál es una contradicción pues h es homomorfismo y $h\circ d=1_{\mathcal{X}}$. De aquí por 6.2,

$$\bigvee_{\substack{A\in K\\ \varphi\in K_\tau(F_\alpha,A)}} \varphi(x)\neq\varphi(y)\wedge \bigwedge_{(\mu,(b_\xi)_{\xi<\kappa_\mu})\in I}\varphi\circ d\left(f_\mu^{\mathcal{X}}((b_\xi)_{\xi<\kappa_\mu})\right)=\varphi\left(f_\mu^{F_\alpha}((d(b_\xi))_{\xi<\kappa_\mu})\right)$$

$\therefore\ \varphi\circ d\in K_\tau(\mathcal{X},A)\wedge \varphi\circ d(b_1)=\varphi(x)\neq\varphi(y)=\varphi\circ d(b_2)$

$$\therefore\ \bigwedge_{b_1,b_2\in\mathcal{X}}\left[b_1\neq b_2\Rightarrow \bigvee_{\substack{A\in K\\ \sigma\in K_\tau(\mathcal{X},A)}}\sigma(b_1)\neq\sigma(b_2)\right]$$

De aquí por 2.3, $\mathcal{X} \in ISPK$. ⊕

6.6 COROLARIO.-

$K \subseteq K_\tau$

$\Rightarrow$

$K = ISPK \iff K = \mathcal{M}FK$. ⊕

6.7 PROPOSICIÓN.-

$K \subseteq K_\tau$

S.E.:

(a) $\displaystyle\bigvee_{\mathcal{Y} \subseteq FK \text{ conjunto}} ISPK = \mathcal{M}\mathcal{Y}$

(b) $\displaystyle\bigvee_{\beta \text{ cardinal infinito}} \ \bigwedge_{\mathcal{X} \in K_\tau} \left[\bigwedge_{\mathcal{B} \in S(\mathcal{X})} |\mathcal{B}| \leq \beta \Rightarrow \mathcal{B} \in ISPK \right] \Rightarrow [\mathcal{X} \in ISPK]$.

Dem.-

"(a) $\Rightarrow$ (b)"

Sea $\displaystyle S := \left\{ \alpha \in \mathcal{C} \;\middle|\; \bigvee_{\substack{I \in Set \\ (x,y,(z_i)_{i\in I},(w_i)_{i\in I}) \in F_\alpha \times F_\alpha \times F_\alpha^I \times F_\alpha^I}} (x,y,(z_i)_{i\in I},(w_i)_{i\in I}) \in \mathcal{Y} \right\}$

como $\mathcal{Y}$ es un conjunto, S es un conjunto.

Distinguimos dos casos:

1er CASO: $S = \emptyset$

$\therefore \mathcal{Y} = \emptyset$, $\therefore ISPK = \mathcal{M}\mathcal{Y} = \mathcal{M}\emptyset = K_\tau$. De aquí que cualquier cardinal infinito β hace verdadero (b).

2° CASO: $S \neq \emptyset$

Sea $\delta := \sum_{\alpha \in S} \alpha$

Por 0.2, $\bigvee_{\substack{\beta \text{ cardinal} \\ \text{infinito}}} \bigwedge_{\substack{A \in K_\tau \\ M \leq A}} |M| \leq \delta \Rightarrow |\Gamma M| \leq \beta$

Sea $\mathfrak{X} \in K_\tau$ ∋. $\bigwedge_{B \in S(\mathfrak{X})} |B| \leq \beta \Rightarrow B \in ISPK$.

Probaremos que $\mathfrak{X} \in ISPK$, para lo cuál, por (a) bastará probar que $\mathfrak{X} \in \mathcal{M}\gamma$:

Sean $(\alpha, I) \in 6 \times Set$ y $(x, y, (z_i)_{i\in I}, (w_i)_{i \in I}) \in F_\alpha \times F_\alpha \times F_\alpha^I \times F_\alpha^I$ ∋. $(x, y, (z_i)_{i\in I}, (w_i)_{i\in I}) \in \gamma$.

Sea $\varphi : F_\alpha \longrightarrow \mathfrak{X}$ homomorfismo ∋. $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Por definición de S, $\alpha \in S$, ∴ $\alpha \leq \delta$, ∴ $|F_\alpha| \leq \beta$

∴ $|\varphi(F_\alpha)| \leq \beta \wedge \varphi(F_\alpha) \in S(\mathfrak{X})$, ∴ $\varphi(F_\alpha) \in ISPK = \mathcal{M}\gamma$.

De aquí por 6.2, $\bigvee_{i \in I} \varphi(z_i) \neq \varphi(w_i)$. ∴ $\mathfrak{X} \in \mathcal{M}\gamma = ISPK$.

"(b) ⇒ (a)"

Sea $\Sigma := \bigcup_{I \in Set} \{(x, y, (z_i)_{i\in I}, (w_i)_{i\in I}) \in F_\beta \times F_\beta \times F_\beta^I \times F_\beta^I \mid (x, y, (z_i)_{i\in I}, (w_i)_{i \in I}) \in FK\}$

AFIRMACIÓN TÉCNICA: $ISPK = \mathcal{M}\Sigma$.

Dem.:

"$\subseteq$" Como $\Sigma \subseteq FK$, $\mathcal{M}FK \subseteq \mathcal{M}\Sigma$. De aquí por 6.5, $ISPK = \mathcal{M}FK \subseteq \mathcal{M}\Sigma$.

"$\supseteq$" Sea $\mathcal{X} \in \mathcal{M}\Sigma$. Para probar que $\mathcal{X} \in ISPK$, por (b) bastará

probar que: $\bigwedge\limits_{B \in S(\mathcal{X})} |B| \leq \beta \Rightarrow B \in ISPK$.

Sea $B \in S(\mathcal{X})$ $\ni$ $|B| \leq \beta$.

$\therefore \bigvee\limits_{h:F_\beta \twoheadrightarrow B}$ homomorfismo suryectivo.

De aquí, utilizando la misma técnica del

Teorema 6.5 se obtiene que $B \in ISPK$.

Sea $J := F_\beta \times F_\beta \setminus \Delta$

Sea $\gamma := \{ (x, y, (z_j)_{j\in J}, (w_j)_{j\in J}) \in F_\beta \times F_\beta \times F_\beta^J \times F_\beta^J \mid (x, y, (z_j)_{j\in J}, (w_j)_{j\in J}) \in \Sigma \}$

$\therefore$ γ es un conjunto. Demostraremos que $\mathcal{M}\gamma = \mathcal{M}\Sigma$ y de

aquí por la afirmación técnica se obtiene (a):

"$\supseteq$"

como $\gamma \subseteq \Sigma$, $\therefore$ $\mathcal{M}\Sigma \subseteq \mathcal{M}\gamma$.

"$\subseteq$"

Sea $\mathcal{X} \in \mathcal{M}\gamma$. Sean $I \in Set$ y $(x, y, (z_i)_{i\in I}, (w_i)_{i\in I}) \in F_\beta \times F_\beta \times F_\beta^I \times F_\beta^I$

$\ni$ $(x, y, (z_i)_{i\in I}, (w_i)_{i\in I}) \in \Sigma$

Sea $\varphi : F_\beta \longrightarrow \mathcal{X}$ homomorfismo $\ni \cdot$ $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Definimos $\bigwedge_{l,m \in I}$ $l \sim m \iff z_l = z_m \wedge w_l = w_m$.

Claramente $\sim$ es una relación de equivalencia en I.

Sea $E \subseteq I \ni \cdot \bigwedge_{l \in I} |E \cap [l]_\sim| = 1$

Sea $T := \{ i \in E \mid z_i \neq w_i \}$

Sea $\sigma : T \longrightarrow F_\beta \times F_\beta \setminus \Delta$. Obviamente σ es inyectiva.
$i \longmapsto (z_i, w_i)$

como $(x, y, (z_i)_{i \in I}, (w_i)_{i \in I}) \in \Sigma$, $(x, y, (z_i)_{i \in T}, (w_i)_{i \in T}) \in \Sigma$.

Definimos $\bigwedge_{j \in F_\beta \times F_\beta \setminus \Delta} \begin{cases} z_j = z_i & \text{si } j = \sigma(i) \\ z_j = x & \text{si } j \notin \sigma(T) \\ w_j = w_i & \text{si } j = \sigma(i) \\ w_j = x & \text{si } j \notin \sigma(T) \end{cases}$

$\therefore (x, y, (z_j)_{j \in J}, (w_j)_{j \in J}) \in \gamma$.

como $\mathcal{X} \in \mathcal{M}\gamma$, $\therefore \bigvee_{j \in J} \varphi(z_j) \neq \varphi(w_j)$. $\therefore z_j \neq w_j$,

$\therefore j \in \sigma(T)$, $\therefore \bigvee_{i \in I} \sigma(i) = j$. $\therefore z_j = z_i \wedge w_j = w_i$,

$\therefore \bigvee_{i \in I} \varphi(z_i) \neq \varphi(w_i)$, $\therefore \mathcal{X} \in \mathcal{M}\Sigma$.

6.8 PROBLEMA.-

Si $K \leq K_\tau$, ¿ $\underbrace{\qquad\qquad}_{\Sigma \subseteq FK \text{ conjunto}}$ $ISPK = M\Sigma$?

Al momento de escribir este reporte el autor desconoce la respuesta. En el intento de resolverlo llegamos a la siguiente:

CONJETURA.-

"Existen clases K de τ-álgebras para las cuales ISPK no se puede expresar como los modelos de ningún conjunto de fórmulas"

En particular recomendamos al lector interesado que intente ver que pasa (tomando en cuenta 6.7) con la clase de grupos residualmente finitos.

6.9 OBSERVACIÓN.-

A continuación daremos una generalización a τ-álgebras de propiedades "residuales", lo cuál nos va a permitir dar una gama amplia de ejemplos de clases ISPK cerradas. Terminamos este reporte con una lista de ejemplos distinguidos de clases ISPK cerradas.

6.10 DEFINICIÓN.-

$K \subseteq K_\tau$, $A \in K_\tau$

$\Rightarrow$

A se llama **RESIDUALMENTE K**

$\Leftrightarrow$

$$\bigvee_{(\theta_i)_{i\in I} \in \mathcal{K}(A)^I} \left[\bigcap_{i \in I} \theta_i = \Delta_A \wedge \bigwedge_{i\in I} A/\theta_i \in \mathbb{K}. \right]$$

6.11 PROPOSICIÓN.-

$K \subseteq K_\tau$, $A \in K_\tau$

S.E:

(1) A es residualmente K

(2) $$\bigvee_{\substack{(X_i)_{i\in I} \in K^I \\ \rho \in K_\tau(A, \prod_{i\in I} X_i) \text{ inyectivo}}} \bigwedge_{i\in I} \pi_i \circ \rho \text{ es suryectiva.}$$

(3) $$\bigwedge_{a_1, a_2 \in A} a_1 \neq a_2 \Rightarrow \bigvee_{\substack{X \in K \\ \varphi \in K_\tau(A, X) \text{ suryectivo}}} \varphi(a_1) \neq \varphi(a_2).$$

Dem.-

"(1) $\Rightarrow$ (2)"

Sea $(\theta_i)_{i\in I} \in \mathcal{K}(A)^I$ $\ni$. $\bigcap_{i\in I} \theta_i = \Delta_A \wedge \bigwedge_{i\in I} \bigvee_{\substack{X_i \in K \\ g_i \in K_\tau(A/\theta_i, X_i)}} g_i$ es isomorfismo

Def $\bigwedge_{i\in I} \nu_i : A \twoheadrightarrow A/\theta_i$ la proyección natural.

$\therefore \bigvee\limits_{\rho \in K_r(A,\, \prod\limits_{i\in I} \mathcal{X}_i)}$
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, two heads, "\nu_i"'] & \prod\limits_{i\in I} \mathcal{X}_i \arrow[d, "\pi_i"] \\ A/\theta_i \arrow[r, tail, two heads, "g_i"'] & \mathcal{X}_i \end{tikzcd}$$
commuta.

$\therefore \bigwedge\limits_{i\in I} \pi_i \circ \rho = g_i \circ \nu_i$ que es composición de suryectivas

$\therefore \bigwedge\limits_{i\in I} \pi_i \circ \rho$ es suryectiva.

Finalmente como $\bigcap\limits_{i\in I} \theta_i = \Delta_A$, ρ es inyectivo

"$(2) \Leftrightarrow (3)$" obvio

"$(2) \Rightarrow (1)$"

Sean $(\mathcal{X}_i)_{i\in I} \in K^I$ y $\rho \in K_r(A, \prod\limits_{i\in I} \mathcal{X}_i)$ inyectivo $\Rightarrow$.

$\bigwedge\limits_{i\in I} \pi_i \circ \rho$ es suryectiva

Definimos $\bigwedge\limits_{i\in I} \theta_i := \ker(\pi_i \circ \rho)$ y $\nu_i : A \twoheadrightarrow A/\theta_i$ la proyección natural

$\therefore \bigwedge\limits_{i\in I} \bigvee\limits_{g_i \in K_r(A/\theta_i,\, \mathcal{X}_i) \text{ inyectivo}}$
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "\rho"] \arrow[d, two heads, "\nu_i"'] & \prod\limits_{i\in I} \mathcal{X}_i \arrow[d, two heads, "\pi_i"] \\ A/\theta_i \arrow[r, tail, "g_i"'] & \mathcal{X}_i \end{tikzcd}$$
commuta.

como ρ es inyectivo, $\therefore \bigcap\limits_{i\in I} \theta_i = \Delta_A$.

como $\bigwedge\limits_{i\in I} \pi_i \circ \rho = g_i \circ \nu_i$ es suryectiva, $\therefore \bigwedge\limits_{i\in I} g_i$ es suryectiva.

$\therefore \bigwedge\limits_{i\in I} A/\theta_i \in \mathbb{K}$.

6.12 COROLARIO.-

$K \subseteq K_\tau \cdot\ni\cdot SK \subseteq K$

$\Rightarrow$

$ISPK = \{ \mathfrak{A} \in K_\tau \mid \mathfrak{A}$ es residualmente $K \}$.

6.13 EJEMPLOS.-

1) Sean K la clase de grupos finitos y R la clase de grupos residualmente finitos. Por 6.12, $R = ISPK$.

2) Sea $\mathcal{S}$ la clase de todos los semigrupos. (En este caso $\tau = \langle 2 \rangle$)

Sean $\mathcal{S}_c := \{ (A, \cdot) \in \mathcal{S} \mid \bigwedge_{x,y,z \in A} x \cdot y = x \cdot z \Rightarrow y = z \}$

$${}_c\mathcal{S} := \{ (A, \cdot) \in \mathcal{S} \mid \bigwedge_{x,y,z \in A} y \cdot x = z \cdot x \Rightarrow y = z \}$$

Es decir, $\mathcal{S}_c$ y ${}_c\mathcal{S}$ son las clases de semigrupos donde se vale cancelar por la derecha y por la izquierda respectivamente.

Sean α, β, γ tres variables distintas de V_ω

consideremos las fórmulas:

$\varphi_1 :=$ "$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \neq (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma \Rightarrow \alpha \neq \alpha$"

$\varphi_2 :=$ "$\beta \neq \gamma \Rightarrow \alpha \cdot \beta \neq \alpha \cdot \gamma$"

$\varphi_3 :=$ "$\beta \neq \gamma \Rightarrow \beta \cdot \alpha \neq \gamma \cdot \alpha$"

Se verifica facilmente que:

$\mathcal{S}_c = \mathcal{M}\{\varphi_1, \varphi_2\}$, $c\mathcal{S} = \mathcal{M}\{\varphi_1, \varphi_3\}$ y $\mathcal{S}_c \cap c\mathcal{S} = \mathcal{M}\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

3) Sea Gru la clase de todos los grupos. (En este caso $\tau = \langle 2,1,0\rangle$)

Sean $x \in V\omega$ y e el elemento distinguido de $\mathcal{T}_{\langle 2,1,0\rangle}(\omega)$.

Consideremos $\bigwedge_{m \in \mathbb{N}}$ la formula $\varphi_m :=$ " $x \neq e \Rightarrow x^m \neq e$ "

Se verifica facilmente que la clase de todos los grupos libres de torsión es Gru $\cap\, \mathcal{M}\{(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}\}$.

4) Si $K \subseteq K_\tau$, $m e K = \mathcal{M}\{ p \neq q \Rightarrow p \neq p'' \mid (p,q) \in eK\}$. (ver 6.4).

De aquí que toda variedad de τ- algebras se pueda expresar como los modelos de un conjunto de fórmulas que son esencialmente las fórmulas de K.

5) Sea $\mathcal{D}$ la clase de los dominios enteros. Como $\mathbb{Z} \in \mathcal{D}$ pero $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \notin \mathcal{D}$, $\mathcal{D} \subsetneq ISP\,\mathcal{D}$. Es interesante notar que el axioma " $x\cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$ " que define los dominios enteros no es una fórmula reflexiva de $\mathcal{D}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bruns G. Apuntes de Algebra Universal tomados por el Dr. Octavio García en la Universidad de Mc. Master. (1971).

[2] Cohn P.M. Universal Algebra. Harper and Row. New York-London. (1965).

[3] Grätzer G. Universal Algebra. Van Nostrand. Princeton. (1968).

[4] Herrlich H. Strecker G. Category Theory. Allyn and Bacon. Boston. (1973).

[5] Salicrup G. Epirreflexividad y Conexidad en Categorías Concretas Topológicas. Anales del Instituto de Matemáticas. UNAM. 18. N° 2. 1978. 29-122.

[6] Herrlich H. Salicrup G y Vázquez R. Dispersed Factorization Structures. Canadian Journal of Mathematics. Vol XXXl. N° 5. 1979. pp 1059-1071.

[7] Herrlich H. Strecker G. Semi-Universal Maps and Universal Initial Completions. Pacific Journal Math. 82. N° 2. 1979. 407-428.

[8] Larrión F. Inyectividad en Variedades de Grupos. Tésis Profesional. Facultad de Ciencias. UNAM. 1979.

[9] Neumann H. Varieties of Groups. Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete. Band 37. Springer Verlag. New York. (1967).