



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

**GRAFICAS DE AUSLANDER-REITEN SIN CICLOS
DIRIGIDOS.**

T E S I S

Que para obtener el grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS

(Matemáticas)

P r e s e n t a :

LEONARDO SALMERON CASTRO

Miembro del Instituto de Ciencias de la

Universidad Autónoma de Puebla

México, D. F.

Abril, 1982



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Quiero expresar aquí mi agradecimiento a Raymundo Bautista por su interés y por su entusiasta dirección bajo la cual se ha realizado mi labor académica desde hace ya varios años y en particular el presente trabajo.

Deseo también agradecer a mi maestro Roberto Martínez así como a mis colegas Francisco Lassoñ y Horacio O'Brien por su gran interés y valiosas sugerencias para la elaboración de este trabajo. Finalmente, quiero hacer constar mi reconocimiento al Instituto de Ciencias de la Universidad Autónoma de Puebla cuyo apoyo ha hecho posible la realización de esta tarea.

<u>6.A</u> Algunos carcajes que son de Auslander-Reiten.	71
<u>6.B</u> Caracterización de carcajes de Auslander-Reiten sin ciclos dirigidos.	87
<u>7.</u> Sobre el problema de la estratificación de carcajes de Auslander-Reiten sin ciclos dirigidos.	93
<u>8.</u> Apéndice.	121
Bibliografía.	133

INTRODUCCION

Debido a la gran afinidad que existe entre los temas que se desarrollan en este trabajo y los tratados en la Tesis de F. Lamión [6], nos limitaremos a comentar brevemente los resultados que aquí se prueban y remitimos al lector interesado en un rápido panorama histórico a la introducción de [6].

con la intención de obtener una versión autocontenida y detallada de los resultados y pruebas que hemos de reportar aquí, se han incluido:

- Un capítulo 1 de preliminares, que contiene una corta exposición de nociones y resultados de la Teoría de Representaciones de Algebras que serán utilizados en el desarrollo del trabajo. Al mismo tiempo se aprovecha la oportunidad para introducir notación que se mantendrá a lo largo de toda la tesis.
- Un listado de definiciones y resultados importantes diseminados en [3], [4] y [6], que constituye el capítulo 2.
- Un breve repaso de la construcción del

grupo fundamental y la cubierta universal de un carcaj de translación, siguiendo [5], en la sección 4-A del capítulo 4.

Asimismo hemos preferido redactar pruebas completas, aún si existen pruebas similares en la literatura, con la intención de no fatigar al lector enviándolo constantemente a consultar las referencias. Mencionaremos, cada vez que este sea el caso, la "fuente de inspiración".

En el capítulo 3 se prueba que ciertos carcajes de translación (no necesariamente finitos) pueden describirse como subgráficas plenas de \mathbb{Z}^n para alguna n . De lo anterior resultan las caracterizaciones de los carcajes de Auslander-Reiten de las (P)-álgebras y de las (S)-álgebras en las secciones 3-A y 3-B respectivamente.

Es de especial interés el resultado que se obtiene en 4-B: Las álgebras simplemente conexas coinciden con las (S)-álgebras. Este interés radica principalmente en el hecho de que las (S)-álgebras están definidas por una condición intrínseca de su carcaj ordinario

y las simplemente conexas los están en términos de su carcaj de Auslander-Reiten. Cabe mencionar aquí que el estudio de las álgebras a través de su carcaj de Auslander-Reiten y sus cubiertas ha sido bastante desarrollado por la escuela de Zürich (por ejemplo en [5], [8] y [9]). Por otro lado, este resultado refuerza la conjetura (R. Bautista) de que el estudio de una gran familia de álgebras de tipo finito puede ser reducido al estudio de las (S) -álgebras.

También en la dirección marcada por esta conjetura, se prueba en 5 que todo carcaj de Auslander-Reiten sin ciclos dirigidos posee "levantamientos" dentro de su cubierta universal que son carcajes de Auslander-Reiten de (S) -álgebras.

Aplicando las técnicas desarrolladas en [4] en un contexto más general, se obtienen en 6-A condiciones suficientes para que un carcaj de traslación sin ciclos dirigidos sea un carcaj de Auslander-Reiten. En 6-B se estudia la necesidad de estas condiciones,

obteniendo como aplicación de los resultados obtenidos en 5, 6-B y [5] una caracterización de los carcajes de Auslander-Reiten finitos sin ciclos dirigidos.

En el capítulo 7 se prueba que todo carcaj de Auslander-Reiten C sin ciclos dirigidos posee una estratificación, esto es una numeración de vértices con ciertas propiedades específicas (véase la definición (7-1)). De esto se sigue que C es unión ajena de una familia ordenada de presecciones cuyo orden es "compatible" con la traslación de C . Lo anterior generaliza el Teorema principal de [3].

Se espera que el resultado anterior junto con la sección 6-A "escondan" alguna relación con el problema de hallar construcciones algorítmicas de álgebras sin ciclos dirigidos en su carcaj de Auslander-Reiten.

Finalmente incluimos un apéndice donde se presentan algunos ejemplos, y la posibilidad de mejorar los resultados que se obtienen en el capítulo 5.

Leonardo Salmerón.

1.- PRELIMINARES

A lo largo de todo este trabajo k denotará un campo algebraicamente cerrado fijo.

Para los dos primeros puntos vease [10].

(1-1) Una buena herramienta para el estudio de las álgebras en general es el concepto de carcaj: esto es una gráfica orientada -que puede tener lazos ó aristas múltiples-. Entonces un carcaj C consta de un conjunto C_0 de "vértices" y otro C_1 de "flechas", junto con una asignación que a cada flecha de C_1 le asocia sus vértices inicial y final en C_0 . Escribiremos $i \xrightarrow{\alpha} j$ en C cada vez que α es una flecha de C que principia en i y termina en j ($i, j \in C_0$).

Para cada carcaj C se define el álgebra de carcaj kC como sigue: kC es el k -espacio vectorial con base todos los caminos dirigidos de C (incluyendo un "camino trivial" extra, de longitud cero, por cada vértice); el producto de kC se define en la base como pegar caminos, cada vez que

esto tenga sentido y cero en los casos restantes.

Supongamos que C es finito y denotemos por F el ideal de kC generado por las flechas. Sea \mathcal{R} un ideal admisibile de kC , es decir un ideal bilateral tal que $F^n \subseteq \mathcal{R} \subseteq F^2$ para algún natural n . Entonces kC/\mathcal{R} resulta un álgebra de dimensión finita sobre k , y \mathcal{R} admite un número finito de generadores que llamaremos relaciones.

(1-2) El estudio de las k -álgebras de dimensión finita se reduce, debido a que k es algebraicamente cerrado, al estudio de las álgebras que acabamos de introducir. En efecto, fijemos una k -álgebra de dimensión finita Λ . Puesto que estamos interesados en las propiedades categóricas de $\text{Mod } \Lambda$ - la categoría de los Λ -módulos (izquierdos) -, podemos suponer que Λ es indescomponible, o sea que Λ no se descompone como suma directa de dos anillos. Del mismo modo, usando que todo anillo artiniiano es Morita-equivalente a uno básico,

podemos suponer que Λ es básica: es decir, que en la descomposición de Λ como suma directa de Λ -módulos izquierdos inescindibles no se repiten sumandos. En estas condiciones se prueba que Λ es un cociente de kC por un ideal admisible, donde C es el carcaj ordinario de Λ que se define como sigue:

Se elige un sistema $\{e_1, \dots, e_n\}$ completo de idempotentes primitivos ortogonales de Λ . C consta de un vértice i por cada idempotente e_i , y para cada pareja de vértices i, j hay $\dim_k e_j(\text{rad } \Lambda / \text{rad}^2 \Lambda)e_i$ flechas que van de i en j .

(1-3) Fijemos una k -álgebra Λ de dimensión finita. Por el Teorema de Krull-Schmidt se sabe que todo Λ -módulo finitamente generado se descompone, en forma única hasta isomorfía y permutación de índices, como suma directa de Λ -módulos inescindibles. Es por esto que, para estudiar la categoría de los Λ -módulos finitamente generados: $\text{mod } \Lambda$, estaremos primordialmente interesados en los

módulos inescindibles.

Denotaremos por $\text{ind } \Lambda$, $\text{proj } \Lambda$ las subcategorías plenas de $\text{mod } \Lambda$ definidas por los inescindibles y los proyectivos inescindibles de $\text{mod } \Lambda$ respectivamente. A menudo identificaremos estas categorías con sus esqueletos. Lo mismo haremos con cada Λ -módulo y su clase de isomorfismo.

Diremos que Λ es de tipo finito si el número de clases de isomorfía de inescindibles en $\text{mod } \Lambda$ es finito. Uno de los objetivos de la Teoría de Representaciones de Álgebras es determinar cuáles son las álgebras Λ de tipo finito, y para cada una de ellas describir $\text{mod } \Lambda$.

(1-4) Para describir las relaciones entre los módulos inescindibles, se cuenta con la noción de morfismo irreducible: un morfismo f es irreducible si no es sección ni retracción y cada vez que $f = gh$ se tiene que h es sección ó g es retracción.

Si Λ es de tipo finito, todo morfismo (no iso) entre módulos inescindibles es combinación lineal de composiciones de morfismos irreducibles.

Admiten una descripción sencilla los morfismos irreducibles con codominio P proyectivo, ya que estos son (hasta isomorfismo) la inclusión de un sumando directo de $\text{rad } P$. Análogamente, los irreducibles con dominio inyectivo I son esencialmente proyecciones a sumandos directos de $I/\text{soc } I$.

La información sobre los morfismos irreducibles restantes se halla contenida en las sucesiones que casi se dividen ó sucesiones de Auslander-Reiten: estas son sucesiones exactas en $\text{mod } \Lambda$

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\pi} C \rightarrow 0$$
con A y C inescindibles, tales que no se dividen y para cada morfismo $x \xrightarrow{h} C$ en $\text{mod } \Lambda$ que no es retracción existe $x \xrightarrow{g} B$ tal que $h = \pi g$. Se sabe que si C es inescindible no proyectivo (ó si A es inescindible no inyectivo) existe una sucesión de Auslander-Reiten
$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\pi} C \rightarrow 0$$
determinada (hasta isomorfismo) por cualquiera de sus extremos. Se sabe también que todo irreducible con dominio inescindible que llegue a C es la restricción de π a un sumando directo de B . Análogamente, σ contiene a todos los irreducibles entre inescindibles

que empiezan en A . Si Λ es de tipo finito, se sabe que en la descomposición de B en suma directa de inescindibles no se repiten sumandos. La asociación $C \mapsto A$ establece una biyección, que denotaremos por τ , entre los inescindibles no proyectivos y los inescindibles no inyectivos.

Diremos que un morfismo $A \rightarrow B$ en $\text{mod } \Lambda$ con dominio inescindible es mínimo casi se divide izquierdo si coincide con σ en la sucesión que casi se divide para A - en caso de que A no sea inyectivo - , o bien, en caso contrario, es precisamente la proyección $A \twoheadrightarrow A/\text{soc } A$.

(1-5) El radical de Jacobson de $\text{mod } \Lambda$ es el ideal (= subfunctor de $\text{Hom}_\Lambda(-, ?)$) definido como sigue:

Si $X, Y \in \text{mod } \Lambda$ tienen descomposiciones $X = \bigoplus X_i$, $Y = \bigoplus Y_j$ en módulos inescindibles X_i , Y_j , entonces $\text{rad}(X, Y)$ es el conjunto de morfismos $f \in \text{Hom}_\Lambda(X, Y)$ tales que $X_i \xrightarrow{f} Y \rightarrow Y_j$ no es invertible para cada pareja i, j de índices. Denotaremos por $\text{rad}^2(X, Y)$ el conjunto de

morfismos $f = (X \xrightarrow{h} Z \xrightarrow{g} Y)$ con $h \in \text{rad}(X, Z)$, $g \in \text{rad}(Z, Y)$ para algún $Z \in \text{mod } \Lambda$. También rad^2 resulta ser un ideal de $\text{mod } \Lambda$.

Observemos que, para X, Y indecomponibles, $\text{rad}(X, Y) \setminus \text{rad}^2(X, Y)$ coincide con el conjunto de irreducibles de X en Y .

(1-6) Siguiendo la idea de dar una presentación de $\text{mod } \Lambda$ a través de generadores y relaciones, se define el carcaj de Auslander-Reiten de Λ , que denotaremos por $\text{CAR}(\Lambda)$. Sus vértices son las clases de isomorfismo de los Λ -módulos indecomponibles, y hay una flecha $M \rightarrow N$ en $\text{CAR}(\Lambda)$ si existe algún morfismo irreducible $M \rightarrow N$ en $\text{mod } \Lambda$.

Es fácil ver que $\text{CAR}(\Lambda)$ no posee lazos, y por definición tampoco aparecen flechas dobles. Además, para cada x no proyectivo en $\text{CAR}(\Lambda)$ y cada irreducible $y \rightarrow x$ existe un único irreducible $z \rightarrow y$.

(1-7) Un carcaj de traslación $C = (C, \tau)$, definido por C. Riedtmann en [8], es un

carcaj C junto con una inyección $\tau: \mathcal{D} \rightarrow C_0$.
(con $\mathcal{D} \subseteq C_0$) tal que:

C no tiene lazos ni flechas dobles, y
 $x^- = \bar{\tau} x^+$ para cada $x \in \mathcal{D}$

donde $x^+ := \{y \in C_0 / x \rightarrow y \text{ en } C\}$ y
 $x^- := \{y \in C_0 / y \rightarrow x \text{ en } C\}$
para cada $x \in C_0$.

Denotamos por P_C el conjunto de vértices proyectivos de C , es decir, aquellos donde no se halla definida la translación $\bar{\tau}$. Cuando la inversa $\bar{\tau}$ de la translación no esté definida en $x \in C_0$, diremos que x es un vértice inyectivo de C .

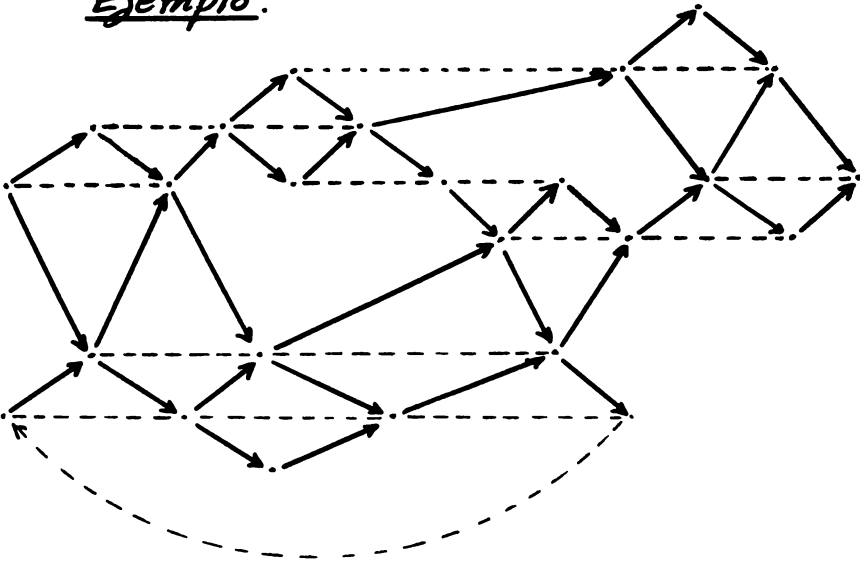
Para cada flecha $x \xrightarrow{\alpha} y$ en C con y no proyectivo, existe exactamente una flecha $\bar{\sigma} y \xrightarrow{\sigma \alpha} x$. Escribiremos $\bar{\sigma} \alpha := \sigma^2 \alpha$ cada vez que esto tenga sentido.

Usaremos la siguiente notación: si $\mathcal{J} \subseteq C_0$,

$$\tau^n \mathcal{J} = \{ \tau^n x / x \in \mathcal{J} \}, \quad \theta(\mathcal{J}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \tau^n \mathcal{J} \quad \text{y}$$

$$\theta^+(\mathcal{J}) = \bigcup_{n \geq 0} \tau^n \mathcal{J}.$$

Ejemplo:



Por convención, dibujamos una flecha punteada $\overleftarrow{x} \dashrightarrow x$ para cada x no proyectivo, y omitimos la dirección de la flecha si esta apunta de izquierda a derecha.

Supondremos a lo largo de todo el trabajo que los carcajes de translación C que aparezcan son localmente finitas: es decir x^+, x^- son finitas para cada $x \in C_0$. Supondremos también que son conexas: es decir que cada par de vértices $x, y \in C_0$ está conectado por un camino no dirigido constituido por flechas continuas o punteadas.

Diremos que un carcaj de translación es

\bar{c} -conexo si para cada x no proyectivo, $x^- \neq \emptyset$.

Un morfismo f de carcajes de translación es un morfismo de carcajes compatible con la translación: $f\bar{c}x = \bar{c}fx$ siempre que $\bar{c}x$ esté definido. Una inmersión de carcajes de translación es un monomorfismo de carcajes de translación cuya imagen tiene la estructura inducida por el codominio. Un morfismo de carcajes es pleno si toda flecha entre imágenes proviene de una entre las preimágenes.

(1-8) Estamos principalmente interesados en el carcaj de translación $CAR(\Omega)$. Una buena forma de estudiarlo es mediante su comparación con otros carcajes de translación de estructura más simple. Una de las gráficas que ha resultado más útil en esta dirección es la siguiente:

Supongamos que Γ es un carcaj sin ciclos dirigidos ni flechas dobles. Entonces $\mathbb{Z}\Gamma$ es el carcaj cuyo conjunto de vértices es $(\mathbb{Z}\Gamma)_0 := \Gamma_0 \times \mathbb{Z}$ y cuyas flechas aparecen según la regla:

hay una flecha $(x, z) \rightarrow (y, z')$ en $\mathbb{Z}\Gamma$ si y sólo si $z = z'$ y hay una flecha $x \rightarrow y$ en Γ o bien $z' = z + 1$ y hay una flecha $y \rightarrow x$ en Γ . $\mathbb{Z}\Gamma$ es un carcaj de translación si definimos $\bar{z}(x, z) := (x, z-1)$ para cada $(x, z) \in (\mathbb{Z}\Gamma)_0$.

También nos interesarán algunas subgráficas especiales de $\text{CAR}(\Lambda)$. De allí la siguiente definición general:

Si $C = (C, \bar{z})$ es un carcaj de translación y $S \subseteq C_0$, entonces S es una sección de C si se satisfacen los dos axiomas siguientes:

- (a) Siempre que $x \in S$ se tiene que $\bar{z}x \notin S$.
- (b) Si $x \rightarrow y$ es una flecha de C con $x \in S$, entonces $y \in S$ ó bien $\bar{z}y \in S$.

(1-9) Sea C un carcaj de translación. La categoría de caminos asociada: $k[C]$, tiene por objetos los vértices de C , y para cada $i, j \in C_0$, $\text{Hom}_{k[C]}(i, j)$ es el k -espacio vectorial cuya base está formada por todos los caminos dirigidos de i a j en C . La composición de $k[C]$ es la inducida por pegar caminos.

Consideremos el ideal \mathfrak{m} de $k[C]$ generado por las relaciones malla μ_x en C :

$$\mu_x = \left(\begin{array}{l} \text{suma de todos los caminos de} \\ \text{longitud 2 de } \bar{c}_x \text{ en } x \end{array} \right), \text{ para } x \text{ no proyectivo}$$

Llamaremos categoría de Riedtmann de C al cociente:

$$k(C) := k[C]/\mathfrak{m}.$$

El siguiente resultado, cuyo enunciado copiamos de [6], representa un gran avance en el esclarecimiento de las relaciones que los morfismos irreducibles guardan entre sí, y resalta la importancia de la categoría de Riedtmann:

(1-10) Teorema: Sea Λ una k -álgebra de dimensión finita y de tipo finito. Supongamos que se tiene una asociación Φ que manda a cada flecha $M \xrightarrow{\alpha} N$ de $\text{CAR}(\Lambda)$ en un morfismo irreducible $M \xrightarrow{\Phi(\alpha)} N$ en $\text{ind} \Lambda$ de tal manera que, para cada irreducible no proyectivo M ,

$$0 \longrightarrow \bar{c}M \xrightarrow{(\Phi(\alpha_i))} \bigoplus_{i=1}^t M_i \xrightarrow{(\Phi(\beta_i))} M \longrightarrow 0$$

es una sucesión de Auslander-Reiten, donde $\{M_i\}_{i=1}^t = M^-$ y $\sum M \xrightarrow{\alpha_i} M_i \xrightarrow{\beta_i} M$ son las flechas correspondientes en $\text{CAR}(\Lambda)$. (Por ejemplo, tal Φ siempre existe si $\text{CAR}(\Lambda)$ no tiene ciclos dirigidos). Entonces Φ puede extenderse a un funtor pleno y denso $\Phi: k[\text{CAR}(\Lambda)] \rightarrow \text{ind} \Lambda$ cuyo núcleo es el ideal de las relaciones malla en $\text{CAR}(\Lambda)$. Por lo tanto Φ induce una equivalencia $\Phi: k(\text{CAR}(\Lambda)) \cong \text{ind} \Lambda$. //

(1-11) Observemos que siempre que se tiene un carcaj de translación C y un subcarcaj D pleno (es decir la inclusión $D \hookrightarrow C$ es plena), hay una estructura inducida de carcaj de translación en D . En este caso, nos referiremos a D como un subcarcaj de translación pleno de D . También en este caso, hay una manera natural de identificar las categorías $k(D)$ y $k(C)/\mathcal{B}$, donde \mathcal{B} es el ideal de $k(C)$ generado por los vértices de $C \setminus D$.

(1-12) En parte de este trabajo, estaremos interesados en la categoría $\text{Mod} \Lambda = (\Lambda^{\text{op}}, \text{Mod} k)$

de k -funtores contravariantes de alguna categoría "localmente acotada" \mathcal{A} en la categoría de k -espacios vectoriales $\text{Mod } k$. Una k -categoría esquelética \mathcal{A} es localmente acotada [5] si para cada $x \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}(x, x)$ es local, y se satisfacen:

$$\sum_{y \in \mathcal{A}} \dim_k \mathcal{A}(x, y) < \infty \quad \text{y} \quad \sum_{y \in \mathcal{A}} \dim_k \mathcal{A}(y, x) < \infty.$$

Conviene mencionar aquí que $\text{Mod } \mathcal{A}$ es una categoría abeliana en donde: una sucesión de funtores es exacta si al evaluarse en cada \mathcal{A} -objeto resulta una sucesión exacta de k -espacios vectoriales, y el coproducto de una familia de funtores se calcula en cada \mathcal{A} -objeto como el coproducto de los funtores evaluados en ese mismo objeto.

Los funtores de la forma $(-, x) := \mathcal{A}(-, x)$ para algún \mathcal{A} -objeto x serán llamadas funtores representables. Denotaremos por $\text{mod } \mathcal{A}$ la subcategoría plena de $\text{Mod } \mathcal{A}$ definida por los funtores finitamente generados, es decir los cocientes de sumas directas finitas de funtores representables, o equivalentemente los k -funtores M tales que:

$$\sum_{y \in \Lambda} \dim_k M(y) < \infty.$$

Las definiciones y resultados listados de (1-1) a (1-6) han sido extendidos en [5] para categorías localmente acotadas Λ . En particular, la categoría $\text{mod } \Lambda$ admite sucesiones que casi se dividen y tiene sentido hablar de $\text{CAR}(\Lambda)$: el carcaj (de translación) de Auslander-Reiten de Λ .

Nos será de gran utilidad la siguiente:

(1-13) Proposición ([4] o [5]): Sea $C = (C, \tau)$ un carcaj de translación. Entonces para cada vértice x no proyectivo, la siguiente sucesión de funtores es exacta en $\text{Mod } k(C)$:

$$(-, \tau x) \longrightarrow \coprod_{z \in x^-} (-, z) \xrightarrow{\beta} \text{rad}(-, x) \longrightarrow 0.$$

Además, si x es proyectivo, β es isomorfismo. //

(Aquí $\text{rad}(z, x) = \{ \delta \in (z, x) / \delta \text{ no es invertible} \}$).

(1-14) Por último, supongamos que $C = \text{CAR}(\Lambda)$

no tiene ciclos dirigidos, con Λ como en (1-10).
Entonces, en virtud del Teorema (1-10), tenemos:

(A) Para cada vértice $x \in C_0$, existe $p \in P_C$
tal que $\text{Hom}_{k(C)}(p, x) \neq 0$.

[El mismo enunciado (A) tiene sentido para
un carcaj de translación arbitrario C . En este
contexto más general, decimos que el vértice
 x tiene soporte no vacío si satisface (A)].

Si x es un vértice inyectivo de C , tenemos
 $x \xrightarrow{\pi} \coprod_{i=0}^r x_i \rightarrow 0$ exacta en $\text{mod } \Lambda$, donde
si $\Phi: k(\text{CAR}(\Lambda)) \xrightarrow{\cong} \text{ind } \Lambda$ es el isomorfismo
de antes, π es el morfismo inducido por
 $\{\Phi(\alpha_i): x \rightarrow x_i\}$ con $\{x \xrightarrow{\alpha_i} x_i\}$ todas las
flechas que salen de x en $\text{CAR}(\Lambda)$.

Como $P_C = \text{proj } \Lambda$, en este caso tenemos:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\Lambda}(-, x) / \text{proj } \Lambda & \longrightarrow & \coprod \text{Hom}_{\Lambda}(-, x_i) / \text{proj } \Lambda \longrightarrow 0 \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ \text{Hom}_{k(C)}(-, x) / P_C & \longrightarrow & \coprod \text{Hom}_{k(C)}(-, x_i) / P_C \end{array}$$

entonces:

(B) Los inyectivos de C son admisibles en el siguiente sentido general:

Si C es un carcaj de translación arbitrario y x es inyectivo de C , diremos que x es admisible si se tiene:

$$\text{Hom}_{k(C)}(-, x) / \mathcal{P}_C \longrightarrow \coprod_{z \in x^+} \text{Hom}_{k(C)}(-, z) / \mathcal{P}_C \longrightarrow 0$$

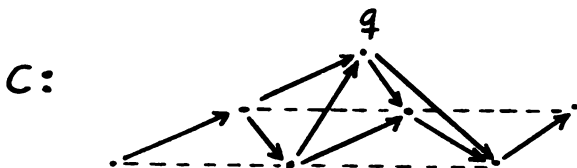
exacta.

En particular:

$$\text{Hom}_{k(C)}(-, x) / \mathcal{P}_C \twoheadrightarrow \text{Hom}_{k(C)}(-, z) / \mathcal{P}_C$$

para cada $z \in x^+$, y "geométricamente":
para cada $z \in x^+$, p proyectivo y cada camino dirigido $p \rightsquigarrow z$ no nulo en $k(C)$, este camino debe factorizarse por x en $k(C)$.

Ejemplo:



23

En C cada vértice tiene soporte no vacío,
pero f es un no objetivo admisible.

2.- (P)-ALGEBRAS Y CONDICION (S): REPASO

Como ya se ha mencionado antes, damos en esta parte un listado de definiciones y resultados (mas tecnicas que en 1), para futura referencia.

2.A (P)-álgebras y condición (S): ([3] y [6].)

Sea Λ un álgebra de k -dimensión finita, básica, indecomponible y cociente de hereditaria (ésto último significa que su carcaj ordinario no tiene ciclos dirigidos).

(2-1) Definición: Sea $P \in \text{proj } \Lambda$. Dos módulos $M, N \in \text{ind } \Lambda$ están (P)-conectados por P si existe un camino $M - P_1 - P_2 - \dots - P_r - N$ en $\text{CAR}(\Lambda)$ con $P_1, P_2, \dots, P_r \in P$. Dos subconjuntos S_1, S_2 de $\text{CAR}(\Lambda)$ están (P)-conectados por P si existen $M_1 \in S_1$ y $M_2 \in S_2$ que están (P)-conectados por P . Una familia \mathcal{F} de subconjuntos de $\text{CAR}(\Lambda)$ está (P)-conectada por P si para cualesquiera $S, T \in \mathcal{F}$ existe una subfamilia $\{S = S_1, \dots, S_t = T\}$ de \mathcal{F} tal que S_i, S_{i+1} están

(P)-conectados por \mathcal{P} para cada i .

(2-2) Definiciones:

(A) Una familia finita no vacía \mathcal{F} de secciones de $\text{CAR}(\Lambda)$ es una (P)-familia si se satisfacen los siguientes axiomas:

- (a) los elementos de \mathcal{F} son ajenos dos a dos.
- (b) S no tiene ciclos dirigidos, si $S \in \mathcal{F}$.
- (c) $\bigcup \mathcal{F}$ es conexa (i.e. el carcaj (sin traslación) definido por este conjunto es conexo).
- (d) si $S \in \mathcal{F}$, $\bar{\sigma}S = \bigcup_{i \in I(S)} S_i \setminus \{\text{inyectivos}\}$ para cierta familia $\{S_i / i \in I(S)\}$ tal que $\bar{\sigma}S_i \neq \emptyset$ para cada $i \in I(S)$.
- (e) La relación transitiva y reflexiva generada por $S_i \triangleleft S$ para cada $S \in \mathcal{F}$ e $i \in I(S)$ es un orden parcial \leq de \mathcal{F} .
- (f) Si $S \in \mathcal{F}$ es minimal (con respecto a \leq), entonces S es conexa.
- (g) Si $S \in \mathcal{F}$ no es minimal, entonces $\{\bar{\sigma}S_i / i \in I(S)\}$ está (P)-conectada por $\text{proj} \Lambda \cap S$.
- (h) Si $S \in \mathcal{F}$ no es minimal, cualquier proyectivo de S está (P)-conectado por $\text{proj} \Lambda \cap S$ con algún módulo no proyectivo de S .

(B) Una (P)-cubierta de $\text{CAR}(\Lambda)$ es una

(P)-familia \mathcal{F} de $\text{CAR}(\Lambda)$ tal que $U\mathcal{F} = \text{ind}\Lambda$.

(c) Λ es una (P)-álgebra si $\text{CAR}(\Lambda)$ admite una (P)-cubierta. (Esta (P)-cubierta resulta única).

(2-3) Definición: Un conjunto $\mathcal{C} \in \text{proj}\Lambda$ es débilmente conexo si para cualesquiera $x, y \in \mathcal{C}$ existen $x_1, x_2, \dots, x_r \in \mathcal{C}$ y morfismos no nulos $x \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_r \rightarrow y$ en $\text{mod}\Lambda$.

(2-4) Observaciones:

(a) Si $M \in \text{ind}\Lambda$, $\text{Supp}M := \{Q \in \text{proj}\Lambda / \text{Hom}_\Lambda(Q, M) \neq 0\}$ es débilmente conexo.

(b) Dado $P \in \text{proj}\Lambda$, como Λ es cociente de hereditaria, $\text{End}_\Lambda(P) \cong k$; entonces $\text{Supp} \text{rad} P \subseteq \text{proj}\Lambda \setminus \mathcal{D}(P)$ donde $\mathcal{D}(P) := \{Q \in \text{proj}\Lambda / \text{existe } P \xrightarrow{f_1} Q_1 \xrightarrow{f_2} \dots \rightarrow Q_r \xrightarrow{f_r} Q \text{ con } Q_i \in \text{proj}\Lambda \text{ y } f_i \text{ no nulo para cada } i\}$.

(2-5) Definiciones: $P \in \text{proj}\Lambda$ tiene radical separado si siempre que se tengan $M, N \in \text{ind}\Lambda$, sumandos directos no isomorfos de $\text{rad} P$, entonces $\text{Supp} M$ y $\text{Supp} N$ están contenidos en

distintas componentes débilmente conexas de $\text{proj} \Lambda \setminus \mathcal{D}(\Lambda)$

Se dice que Λ satisface la condición (S) ó que Λ es una (S)-álgebra si todo proyectivo $P \in \text{proj} \Lambda$ tiene radical separado.

(2-6) Teorema: Suponiendo que Λ satisface la condición (S), Λ es (P)-álgebra si y sólo si Λ es de tipo finito. //

2.B Algebras Γ -sumergibles y Algebras Forestales: ([4] y [6]).

Denotaremos por Γ un carcaj finito sin ciclos dirigidos ni flechas dobles.

(2-7) Definiciones: Las secciones canónicas de $\mathbb{Z}\Gamma$ son los subconjuntos de la forma $S_z := \Gamma_0 \times \{z\}$ para $z \in \mathbb{Z}$. Un conjunto de vértices de $\mathbb{Z}\Gamma$ es plano si es conexo y está contenido en alguna sección canónica de $\mathbb{Z}\Gamma$. Una flecha $x \rightarrow y$ de $\mathbb{Z}\Gamma$ es plana si $\{x, y\}$ es plano.

(2-8) Definición: Una familia $U = \{J_1, \dots, J_s\}$ de subconjuntos planos de $(Z\Gamma)_0$ es un sistema (P)-generador para $Z\Gamma$ si se cumplen los siguientes axiomas:

(a) $\emptyset(J_i) \cap \emptyset(J_j) = \emptyset$ siempre que $i \neq j$.

(b) No hay flechas planas de $\emptyset^+(J_i)$ en J_j si $j \neq i$.

(c) $(Z\Gamma)_0 = \bigcup_{i=1}^s \emptyset(J_i)$.

Fijemos un sistema (P)-generador $U = \{J_1, \dots, J_s\}$ y definamos $\mathcal{U} := \bigcup_{i=1}^s J_i$.

(2-9) Definiciones: $\mathbb{T}\Gamma$ es el subcarcaj de translación pleno de $Z\Gamma$ definido por $(\mathbb{T}\Gamma)_0 := (Z\Gamma)_0 \setminus \mathcal{B}_0$, donde $\mathcal{B}_0 := \emptyset^+(\mathcal{U}) \setminus \mathcal{U}$.

Denotamos también por \mathcal{U} a la subcategoría plena de $k(\mathbb{T}\Gamma)$ definida por los puntos de \mathcal{U} .

$\mathbb{I}\Gamma$ es el subcarcaj pleno de $\mathbb{T}\Gamma$ definido por $(\mathbb{I}\Gamma)_0 := (\mathbb{T}\Gamma)_0 \setminus \mathcal{B}_1$, con

$$\mathcal{B}_1 := \{x \in (\mathbb{T}\Gamma)_0 / \text{Hom}_{k(\mathbb{T}\Gamma)}(-, \mathbb{Z}^n x)|_{\mathcal{U}} = 0 \text{ para algún } n \geq 0\}$$

Nuevamente, usamos a \mathcal{U} para denotar a la

subcategoría plena de $k(\Gamma)$ definida por \mathcal{U} .

Denotamos por $\Lambda(\Gamma, \mathcal{U})$ al álgebra $\text{End}_{A(\Gamma)}^{\mathcal{U}}(\coprod_{p \in \mathcal{U}} p)$ donde $A(\Gamma)$ es la categoría aditiva generada por $k(\Gamma)$.

(2-10) Definición: Decimos que \mathcal{U} satisface la condición (*) si para cada flecha $x \rightarrow y$ en Γ , con $y \in \mathcal{U}$, se tiene que: $\text{Hom}_{k(\Gamma)}(-, x)_{/\mathcal{U}} \neq 0$.

(2-11) Definición: $L(\mathcal{U})$ es el subcarcaj de translación pleno de Γ definido por:

$$(L(\mathcal{U}))_0 := \{x \in \Gamma / \text{Hom}_{k(\Gamma)}(-, x)_{/\mathcal{U}} \neq 0\}.$$

(2-12) Teorema: Sea Γ un carcaj finito sin ciclos dirigidos y sin flechas dobles. Sea \mathcal{U} un sistema (P) -generador para $\mathbb{Z}\Gamma$ y supongamos que \mathcal{U} satisface la condición (*). Entonces $L(\mathcal{U})$ es isomorfo - como carcaj de translación - a la unión de las componentes proyectivas de $\text{CAR}(\Lambda(\Gamma, \mathcal{U}))$. En particular, si $\Lambda(\Gamma, \mathcal{U})$ es de tipo finito e indecomponible, $L(\mathcal{U}) \cong \text{CAR}(\Lambda(\Gamma, \mathcal{U}))$.

y $\Lambda(\Gamma, \mathcal{V})$ es una (P) -álgebra. //

(2-13) Definición: Si Λ es un álgebra de tipo finito e indecomponible, decimos que Λ es Γ -sumergible si $\Lambda \cong \Lambda(\Gamma, \mathcal{V})$ para algunas Γ y \mathcal{V} como en 2-12.

(2-14) Definición: Sea Λ una (P) -álgebra y \mathcal{F} su (P) -cubierta. Denotamos por Γ_Λ al carcaj definido como sigue: las vértices de Γ_Λ son las órbitas $\mathcal{O}(P)$ para $P \in \text{proj } \Lambda$ y ponemos una flecha $\mathcal{O}(P) \rightarrow \mathcal{O}(Q)$ en Γ_Λ si existen $S \in \mathcal{F}$, $M \in S \cap \mathcal{O}(P)$ y $N \in S \cap \mathcal{O}(Q)$ tales que hay una flecha $M \rightarrow N$ en $\text{CAR}(\Lambda)$.

(2-15) Teorema [6]: Λ es (P) -álgebra si y sólo si Λ es Γ -sumergible. De hecho, cada (P) -álgebra Λ es Γ_Λ -sumergible. //

(2-16) Definición: Λ es un álgebra forestal si Λ es una (P) -álgebra y Γ_Λ es un árbol orientado.

(2-17) Teorema [6]: Supongamos que Λ es de tipo finito. Entonces Λ es forestal si y sólo si Λ satisface la condición (S). //

3.- SOBRE CARCAJES DE AUSLANDER-REITEN DE (P)-ALGEBRAS Y ALGEBRAS FORESTALES.

3.A Caracterización de carcajes de Auslander-Reiten de (P)-álgebras.

Utilizaremos las técnicas introducidas por F. Larrón en [6] para obtener el resultado que se anuncia en el título de la sección. De paso, veremos que las álgebras Γ -sumergibles coinciden con las (P)-álgebras (como ya se indicó antes, esto último fue probado ya en [6]).

Precisemos primero algunos conceptos:

Sea C una componente preproyectiva, es decir un carcaj de translación $C = (C, \tau)$ que satisface:

Para cada vértice x de C , existe $n \geq 0$ tal que $\tau^n x$ es proyectivo de C .

(3-1) Definiciones: Una flecha $x \rightarrow y$ de C es plana si existe $n \geq 0$ tal que $\tau^n x \rightarrow \tau^n y$ es una flecha de C con $\tau^n y$ proyectivo.

Asociamos a C el carcaj $\Gamma = \Gamma_C$ siguiente:
 $\Gamma_0 := \{ \mathcal{O}(x) \mid x \text{ vértice de } C \}$. Ponemos una flecha $\mathcal{O}(x) \rightarrow \mathcal{O}(y)$ en Γ si existen $x' \in \mathcal{O}(x), y' \in \mathcal{O}(y)$ y una flecha plana $x' \rightarrow y'$ en C .

(3-2) Observaciones: Si C es finito, entonces Γ_C es finito, conexo y sin aristas múltiples. La conexidad se debe a que si $x \rightarrow y$ es una flecha en C , entonces $x \rightarrow y$ es plana ó $zy \rightarrow x$ es plana.

(3-3) Definición: Una cubierta estratificada de secciones \mathcal{F} de C es una familia de secciones ajenas dos a dos que satisface:

(a) $\bigcup \mathcal{F} = C_0$.

(b) \mathcal{F} posee una estratificación $h: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N}$ (es decir, una función tal que para cada vértice x no proyectivo vale $h(S_x) = h(S_x) - 1$ donde S_x denota la única sección de \mathcal{F} que contiene a x).

(c) si $x \rightarrow y$ es una flecha plana de C , entonces $S_x = S_y$.

Queremos establecer el siguiente:

(3-4) Teorema: Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(A) C es una componente preproyectiva finita que posee una cubierta estratificada de secciones, los inyectivos de C son admisibles, cada vértice de C tiene soporte no vacío y Γ_C no tiene ciclos dirigidos.

(B) C es carcaj de Auslander-Reiten de un álgebra Γ -sumergible.

(C) C es carcaj de Auslander-Reiten de una (P) -álgebra.

Demostración: La afirmación (B) \Rightarrow (C) forma parte del enunciado de (2-12). La afirmación (C) \Rightarrow (A) se sigue de (1-14) y del siguiente:

(3-5) Lema: Si Λ es una (P) -álgebra, entonces $C = \text{CAR}(\Lambda)$ es una componente preproyectiva que posee una cubierta de secciones estratificada y Γ_C no tiene ciclos dirigidos.

Demostración: Como se vio en [3], C es una componente preproyectiva sin ciclos dirigidos. Por otro lado, siempre que se tenga una flecha $\mathcal{O}(p) \rightarrow \mathcal{O}(q)$ en Γ_C con p y q proyectivos,

se tiene también un camino dirigido $p \rightarrow q$ en C y de allí que Γ_C no tenga ciclos dirigidos.

Como Λ es (P) -álgebra, C tiene una (P) -cubierta \mathcal{F} que es, entre otras cosas, una familia de secciones ajenas dos a dos que cubre a C . En (2-11)[6] se construye una estratificación $h: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N}$. Por último, si $x \rightarrow y$ es una flecha plana de C , entonces para alguna $t \geq 0$, $\bar{\sigma}^t_x \rightarrow \bar{\sigma}^t_y$ es una flecha de C con $\bar{\sigma}^t_y$ proyectivo. Entonces puesto que \mathcal{F} es (P) -familia $S_{\bar{\sigma}^t_x} = S_{\bar{\sigma}^t_y}$. Por otro lado, hay una única sección de \mathcal{F} que contiene a $\bar{\sigma}^t_x$, ésta debe ser entonces $S_x = S_y$. //

Nos concentraremos ahora en la prueba de la tercera afirmación: $(A) \Rightarrow (B)$; la cual quedará desglosada en la siguiente serie de resultados (de (3-6) a (3-12)).

(3-6) Lema: Si C es una componente proproyectiva que posee una cubierta estratificada por h . Entonces si $\mathcal{O}(x) \rightarrow \mathcal{O}(y)$ es una flecha de

Γ_C y $h(\Delta_x) = h(\Delta_y)$ entonces hay una flecha plana $x \rightarrow y$ en C .

Demostración: si $\mathcal{O}(x) \rightarrow \mathcal{O}(y)$ es una flecha de Γ_C , entonces hay una flecha $x' \rightarrow p$ en C con $x' \in \mathcal{O}(x)$ y $p \in \mathcal{O}(y) \cap P_C$. Sean $t, t' \in \mathbb{Z}$ tales que $\bar{e}^t p = y$, $\bar{e}^{t'} x' = x$ con $t \geq 0$.

Si $0 \leq t' < t$ entonces $x \rightarrow \bar{e}^{t'} p$ es plana, de donde $\Delta_x = \Delta_{\bar{e}^{t'} p}$ y por tanto $h(\Delta_x) = h(\Delta_{\bar{e}^{t'} p}) < h(\Delta_y)$, lo cual contradice una de las hipótesis.

Si $t' > t$, sucede que $\bar{e}^{t'} x' \rightarrow \bar{e}^t p = y$ es plana, y entonces $\Delta_y = \Delta_{\bar{e}^{t'} x'}$; y de allí que $h(\Delta_x) > h(\Delta_{\bar{e}^{t'} x'}) = h(\Delta_y)$ contradiciendo otra vez la misma hipótesis.

Tampoco puede suceder que $t' < 0$ ya que de allí se seguiría que $x' \rightarrow p$ es plana, por tanto $\Delta_{x'} = \Delta_p$ y entonces tendríamos $h(\Delta_x) < h(\Delta_{x'}) = h(\Delta_p) \leq h(\Delta_y)$ lo cual es imposible.

Entonces se tiene que $t = t'$ y $x = \bar{e}^{t'} x' \rightarrow \bar{e}^t p = y$ es plana. //

(3-7) Proposición: Si C es una componente preprojectiva con cubierta estratificada de secciones \mathcal{F} y $\Gamma = \Gamma_C$ no tiene ciclos dirigidos, entonces existe una inmersión plena de carcajes de translación: $C \hookrightarrow \mathbb{Z}\Gamma$.

Demostración: Supongamos que C tiene una cubierta estratificada por h y definamos para cada vértice $x \in C_0$, $\Psi(x) := (\mathcal{O}(x), h(\delta_x))$. Es claro que Ψ es inyectiva como función entre los vértices de C y los de $\mathbb{Z}\Gamma$ y también que Ψ preserva y refleja la translación. Probemos ahora que dados dos vértices x, y de C , se tiene $x \rightarrow y$ en C si y sólo si $\Psi(x) \rightarrow \Psi(y)$ en $\mathbb{Z}\Gamma$.

Supongamos primero que tenemos una flecha $x \rightarrow y$ en C . Si $x \rightarrow y$ es plana, entonces tenemos $\mathcal{O}(x) \rightarrow \mathcal{O}(y)$ en Γ_C y por otro lado $\delta_x = \delta_y$ vale por la definición de cubierta estratificada de secciones; entonces se tiene $\Psi(x) \rightarrow \Psi(y)$ en $\mathbb{Z}\Gamma$. Si $x \rightarrow y$ no es plana, entonces $zy \rightarrow x$ es plana y tenemos, como antes, $\mathcal{O}(y) \rightarrow \mathcal{O}(x)$ en Γ y $\delta_{zy} = \delta_x$; por tanto $\Psi(x) = (\mathcal{O}(x), h(\delta_x)) \rightarrow (\mathcal{O}(y), h(\delta_y)) = \Psi(y)$

es una flecha en $\mathbb{Z}\Gamma$.

Ahora supongamos que en $\mathbb{Z}\Gamma$ hay una flecha
 $(\mathcal{O}(x), h(\mathcal{D}_x)) = \Psi(x) \rightarrow \Psi(y) = (\mathcal{O}(y), h(\mathcal{D}_y))$.

Si $h(\mathcal{D}_x) = h(\mathcal{D}_y)$, entonces $\mathcal{O}(x) \rightarrow \mathcal{O}(y)$ en Γ
 y por 3-6, tenemos una flecha $x \rightarrow y$ en C .

Si $h(\mathcal{D}_x) \neq h(\mathcal{D}_y)$, entonces $h(\mathcal{D}_x) + 1 = h(\mathcal{D}_y)$
 y hay una flecha $\mathcal{O}(y) \rightarrow \mathcal{O}(x)$ en Γ . Veamos
 que no puede suceder que simultáneamente x
 sea inyectivo y y proyectivo de C : si así
 fuera, como se tiene $\mathcal{O}(y) \rightarrow \mathcal{O}(x)$ en Γ enton-
 ces existirían $m, n \geq 0$ tales que $\bar{e}_y^n \rightarrow \bar{e}_x^m$
 es plana en C ; tendríamos entonces que
 $\mathcal{D}_{\bar{e}_y^n} = \mathcal{D}_{\bar{e}_x^m}$ y en consecuencia

$h(\mathcal{D}_y) \leq h(\mathcal{D}_{\bar{e}_y^n}) = h(\mathcal{D}_{\bar{e}_x^m}) \leq h(\mathcal{D}_x) = h(\mathcal{D}_y) - 1$
 lo cual es imposible. Utilizando esto, podemos
 razonar como sigue:

Si x no es inyectivo, entonces hay una flecha
 $\mathcal{O}(y) \rightarrow \mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(\bar{e}_x)$ en Γ y $h(\mathcal{D}_{\bar{e}_x}) = h(\mathcal{D}_x) + 1 = h(\mathcal{D}_y)$.
 Usando 3-6, obtenemos una flecha $y \rightarrow \bar{e}_x$ en
 C y de allí otra $x \rightarrow y$ también en C .

Si y no es proyectivo, entonces tenemos
 $\mathcal{O}(\bar{e}_y) = \mathcal{O}(y) \rightarrow \mathcal{O}(x)$ en Γ y $h(\mathcal{D}_{\bar{e}_y}) = h(\mathcal{D}_y) - 1 = h(\mathcal{D}_x)$
 y meramente por 3-6 obtenemos $x \rightarrow y$ en C . //

Supongamos ahora que C es una componente preproyectiva finita que satisface las hipótesis de la proposición anterior y consideremos, para cada $S \in \mathcal{F}$, las componentes conexas de $P_C \cap S$ (dos puntos están conectados si hay un camino no orientado en $P_C \cap S$ que los une).

Sean v_1, \dots, v_s todas las componentes no vacías que se obtienen cuando S recorre todo \mathcal{F} y definamos $J_i := \Psi(v_i)$ para cada i . Entonces $U := \{J_1, \dots, J_s\}$ es claramente una familia de subconjuntos planos de \mathbb{Z}^n , y además:

(3-8) Lema: U es un sistema (P)-generador de \mathbb{Z}^n .

Demostración: Es claro que $\emptyset(J_i) \cap \emptyset(J_j) = \emptyset$ si $i \neq j$, y $(\mathbb{Z}^n)_0 = \bigcup_{i=1}^s \emptyset(J_i)$. Veamos entonces que no hay flechas planas de $\emptyset^+(J_i)$ en J_j para $i \neq j$. Tomemos $i, j \in \{1, \dots, s\}$, $\psi(p) \in J_i$, $\psi(q) \in J_j$ y supongamos que en \mathbb{Z}^n hay una flecha plana $\tau^n \psi(p) \rightarrow \psi(q)$ para alguna $n \geq 0$. Mostraremos que $i = j$.

como $\bar{c}^n \psi(p) \rightarrow \psi(q)$ es plana, hay una flecha $\mathcal{O}(p) \rightarrow \mathcal{O}(q)$ en Γ y de allí que exista una $m \geq 0$ tal que $\bar{c}^m q \rightarrow q$ es plana en C .
 Entonces $\mathcal{S}_{\bar{c}^m p} = \mathcal{S}_q$ y $h(\mathcal{S}_p) \leq h(\mathcal{S}_{\bar{c}^m p}) = h(\mathcal{S}_q)$.
 Como $(\mathcal{O}(p), h(\mathcal{S}_p) - n) = \bar{c}^n \psi(p) \rightarrow \psi(q) = (\mathcal{O}(q), h(\mathcal{S}_q))$ es plana y $n \geq 0$, $h(\mathcal{S}_q) = h(\mathcal{S}_p) - n \leq h(\mathcal{S}_p)$,
 por tanto $h(\mathcal{S}_p) = h(\mathcal{S}_q)$ y $n = 0$. Por 3-6, sabemos que existe una flecha plana $p \rightarrow q$ en C y entonces $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q$. Se sigue que p y q están en el mismo \mathcal{V}_i y de allí que $i = j$ //

(3-9) Lema: ψ puede restringirse a una inmersión plena de carcajes de translación $C \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n$.

Demostración: $B_i = \{(\mathcal{O}(p), z) / p \in \mathcal{P}_i \text{ y } z < h(\mathcal{S}_p)\}$ y claramente no contiene vértices de $\text{Im } \psi$ //

(3-10) Lema: ψ vuelve a restringirse a una inmersión plena de carcajes de translación $C \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n$ si pedimos que cada vértice de C tenga soporte no vacío.

Demostración: Sea $x \in C_0$, veamos que

$\psi(x) \notin \mathcal{B}_1$. Sea $n \geq 0$ tal que $\bar{c}^n \psi(x) \in \mathbb{N}\Gamma$, probaremos que $\text{Hom}_{k(\mathbb{N}\Gamma)}(-, \bar{c}^n \psi(x))|_{\mathcal{U}} \neq 0$.

Sea $r \geq 0$ tal que $\bar{c}^r x$ es proyectivo de C , entonces $h(\Delta_{\bar{c}^r x}) = h(\Delta_x) - r$ y por tanto $r \geq 0$. De allí que $\bar{c}^n x \in C_0$ y $\bar{c}^n \psi(x) = \psi(\bar{c}^n x)$.

Como $\bar{c}^n x$ tiene soporte no vacío, hay un proyectivo p de C tal que $\text{Hom}_{k(C)}(p, \bar{c}^n x) \neq 0$.

Pero, por 1-11, hay un epimorfismo:

$$\text{Hom}_{k(\mathbb{N}\Gamma)}(\psi(p), \bar{c}^n \psi(x)) \twoheadrightarrow \text{Hom}_{k(C)}(p, \bar{c}^n x)$$

y como $\psi(p) \in \mathcal{U}$, hemos terminado. //

(3-11) Lema: Bajo las mismas condiciones que aparecen en el lema anterior, \mathcal{V} satisface la condición (+).

Demostración: sea $y = (\mathcal{O}(p), h(\Delta_p)) = \psi(p) \in \mathcal{U}$ y consideremos una flecha $x \rightarrow y$ en $\mathbb{N}\Gamma$. Podemos escribir $x = (\mathcal{O}(q), z)$ con q proyectivo. Veamos primero que $x \rightarrow y$ es una flecha plana: como $x \in \mathbb{N}\Gamma$, $x \in \mathbb{N}\Gamma$ y $z \geq h(\Delta_q)$, $n := z - h(\Delta_q) \geq 0$ y si $x \rightarrow y$ no fuera plana,

lo sería $y \rightarrow \bar{e}x$ y también $\bar{e}^{n+1}y \rightarrow \bar{e}^{n+1}\bar{e}x = \bar{e}^n x = \psi(q)$.
 Esto último contradice el hecho de que \mathcal{V} es un sistema (P)-generador, pues como $n+1 > 0$, $\psi(p)$ y $\psi(q)$ pertenecen a distintos \mathcal{J}_i 's.

Como $x \rightarrow y$ es plana, tenemos una flecha $\mathcal{O}(q) \rightarrow \mathcal{O}(p)$ en Γ y, por definición de Γ , hay otra flecha plana $w \rightarrow p$ para algún $w \in \mathcal{O}(q)$. Entonces:

$$x = (\mathcal{O}(q), \bar{e}) = (\mathcal{O}(q), h(\bar{e}p)) = (\mathcal{O}(q), h(\bar{e}w)) = \psi(w).$$

Usando que cada vértice de C tiene soporte no vacío como en la prueba del lema anterior, obtenemos que $\text{Hom}_{k(\mathcal{H}\Gamma)}(-, x)|_{\mathcal{U}} \neq 0$. //

(3-12) Proposición: Suponiendo que cada vértice de C tiene soporte no vacío y que los injectivos de C son admisibles, entonces ψ se restringe a un isomorfismo de carcajes de translación: $C \xrightarrow[\cong]{\psi} L(\mathcal{U})$.

Demostación: Como en la prueba de 3-10, volvemos a obtener que ψ puede restringirse a una inmersión plena de carcajes de translación $\psi: C \hookrightarrow L(\mathcal{U})$. Bastará mostrar que todo

vértice x de $L(U)$ está en $\text{Im } \psi$.

Probaremos lo anterior por inducción sobre el orden parcial definido en los vértices de $L(U)$ por sus flechas (podemos hacer esto puesto que $L(U)$ no tiene ciclos dirigidos).

Si $x \in U$, entonces por definición de U , $x \in \text{Im } \psi$.

Sea $x \in L(U) \setminus U$ y supongamos que todos los vértices de $L(U)$ menores que x pertenecen a $\text{Im } \psi$.

Por el teorema 2-12, $L(U)$ es la componente preprojectiva de $\Lambda(\Gamma, U)$ y entonces como $x \notin U$, $\bar{\alpha}x \in L(U)$ y $\text{Hom}_k(L(U))(\bar{\alpha}x) \neq 0$.

Sea $\{y_0, \dots, y_r\} = x^-$ en $L(U)$.

Por hipótesis de inducción, existen m_0, m_1, \dots, m_r en C_0 tales que $\psi(m_i) = y_i$ y $\psi(m) = \bar{\alpha}x$; por lo mismo, sabemos que $\bar{\alpha}x, y_i$'s están en una "zona" de $L(U)$ isomorfa a la correspondiente de C . Entonces puede verse que

$$\text{Hom}_k(L(U))(\bar{\alpha}x) \cong \text{Hom}_k(C)(m) \big|_{P_C}$$

y similarmente para las y_i 's y los m_i 's.

Si m fuera inyectivo, por hipótesis, sería inyectivo admisible y entonces tendríamos por 1-13 el siguiente diagrama conmutativo y exacto:

$$\begin{array}{ccccc}
 \circ & & \circ & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 \text{Hom}_{k(L(U))}(-, \bar{x})|_U & \longrightarrow & \coprod \text{Hom}_{k(L(U))}(-, y_i)|_U & \longrightarrow & \text{rad Hom}_{k(L(U))}(-, x)|_U \longrightarrow \circ \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 \text{Hom}_{k(C)}(-, m)|_{P_C} & \longrightarrow & \coprod \text{Hom}_{k(C)}(-, m_i)|_{P_C} & \longrightarrow & \circ \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 \circ & & \circ & &
 \end{array}$$

de donde $\text{rad Hom}_{k(L(U))}(-, x)|_U = 0$. Pero entonces $\text{Hom}_{k(L(U))}(-, x)|_U = 0$ contradiciendo el hecho de que $L(U)$ es la componente preproyectiva de $\Lambda(\Gamma, U)$.
Entonces m no es inyectivo y $x = \psi(\bar{x}m)$. //

Con lo anterior termina la prueba de 3-4. //

Gracias a 1-14, podemos enunciar también el siguiente:

(3-13) Corolario: Sea Λ un álgebra de dimensión finita sobre k , básica, indecomponible y de tipo finito. Entonces son equivalentes:

- (A) $C = \text{CAR}(\Lambda)$ es una componente preproyectiva finita que posee una cubierta estratificada de secciones y Γ_C no tiene ciclos.
- (B) Λ es Γ -sumergible.
- (C) Λ es (P)-álgebra. //

3.8 Caracterización de carcajes de Auslander-Reiten de álgebras forestales.

En esta sección nos interesa primordialmente establecer el siguiente:

(3-14) Teorema: Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (A) C es componente preproyectiva finita sin ciclos orientados, los inyectivos de C son admisibles, cada vértice de C tiene soporte no vacío y Γ_C es un árbol.
- (B) C es carcaje de Auslander-Reiten de alguna álgebra forestal.

Mostraremos primero:

(3-15) Proposición: Sea C una componente preprojectiva, sin ciclos orientados, \bar{c} -conexa y tal que Γ_C es un árbol. Entonces C posee una cubierta estratificada de secciones.

Demostración: Definamos para cada vértice x de C , $S_x := \{y \in C_0 \mid \text{hay un camino plano } x \rightsquigarrow y \text{ en } C\}$ (donde un camino plano es sencillamente un camino no orientado de flechas planas de C).

Bastará probar la veracidad de las afirmaciones:

Afirm. 1: $\mathcal{F} = \{S_x \mid x \in C_0\}$ es una familia de secciones apenas dos a dos.

Afirm. 2: El carcaj B que se define a continuación es un árbol:

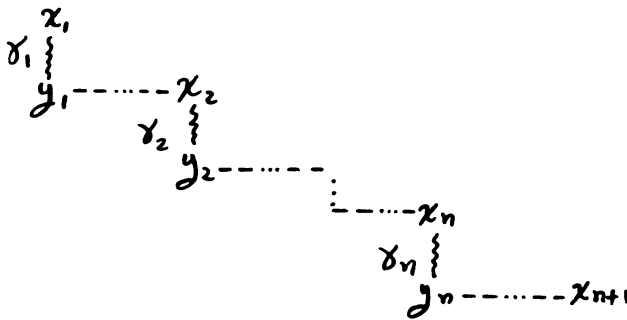
$B_0 := \mathcal{F}$ y ponemos una flecha $S_x \rightarrow S_y$ en B si existen $x' \in S_x, y' \in S_y$ y una flecha no plana $x' \rightarrow y'$ en C .

En efecto, se prueba en [6] que para cada

árbol orientado B puede definirse una función $h: B \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $h(p) = h(q) + 1$ siempre que $p \rightarrow q$ es una flecha de B . En nuestro caso particular, es claro que esta h es una estratificación de \mathcal{H} .

Antes de probar las afirmaciones enunciadas conviene precisar lo siguiente:

Un intervalo δ de longitud m de C es un subcarcaj de C de la forma:



donde cada δ_i es un camino plano, $y_i = z^i x_{i+1}$ para algún $z_i \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $m = \sum_i$ longitud de δ_i y los δ_i 's son ajenos o bien coinciden. Diremos que δ es circular si $x_{n+1} = x_1$.

La parametrización por δ es el morfismo de carcajes $\delta \xrightarrow{\bar{\delta}} \Gamma_C$ que a cada vértice x de δ

le asocia $\alpha(x)$ y a cada flecha $x \rightarrow y$ de δ le asocia la única flecha $\alpha(x) \rightarrow \alpha(y)$ en Γ_C . Los recorridos en Γ_C son las imágenes de las parametrizaciones. Un doblez de una parametrización δ es una pareja $(x \xrightarrow{\alpha} y, z \xrightarrow{\beta} w)$ de flechas (planas) de δ tales que $\delta(\alpha) = \delta(\beta)$ y $z = y$ ó bien $y = z_i$, $z = x_{i+1}$ para alguna $i \in \{1, \dots, n\}$.

(3-16) Lema: Supongamos que $x \xrightarrow{\alpha} y$, $w \xrightarrow{\beta} z$ son flechas planas de C que inducen la misma flecha en Γ_C , entonces $\delta^t \beta = \alpha$ si $y = \delta^t w$.

Demostración: Supongamos que $y = \delta^t w$. Como Γ_C es un árbol, entonces la dirección de α determina la de β . Específicamente $x \xrightarrow{\alpha} y$ si y sólo si $w \xleftarrow{\beta} z$.

Consideremos primero el caso en que $y = w$.

Cualquiera de las dos situaciones que aparecen en este caso, suponiendo que $x \neq z$, contradicen la siguiente observación general:

(3-17) Observación: Sea C un carcaj de traslación \mathbb{Z} -conexo y sin ciclos dirigidos. Entonces

siempre que se tengan flechas

$$x \xrightarrow{\alpha} y, \quad z^n x \xrightarrow{\beta} y \quad \text{en } C$$

$$(\text{ó } x \xleftarrow{\alpha} y, \quad z^n x \xleftarrow{\beta} y)$$

también se tiene $n=0$ y $\alpha=\beta$. //

Consideremos ahora el caso $y \neq w$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $y = z^t w$ con $t > 0$.

Si $z < x$ en $\mathcal{O}(x)$, tendríamos un ciclo dirigido en C ya que C es z -conexo. Específicamente:

$$\begin{array}{ccc} y & \rightsquigarrow & w \\ \alpha \uparrow & & \downarrow \sigma \beta \\ x & \rightsquigarrow & \bar{z}z \end{array} \quad \text{si } x \xrightarrow{\alpha} y$$

y

$$\begin{array}{ccc} \bar{z}y & \rightsquigarrow & w \\ \sigma \alpha \uparrow & & \downarrow \beta \\ x & \rightsquigarrow & z \end{array} \quad \text{si } x \xleftarrow{\alpha} y.$$

Entonces $x \leq z$. Por el caso anterior, como $\alpha \neq \beta$ entonces también $z \neq x$.

Como $z > x$ en $\mathcal{O}(x)$, existe $t' > 0$ tal que $z^{t'} = x$. Si $s := \min\{t, t'\}$, entonces $\bar{z}^s \alpha$ es plana y toca a β . Por el caso anterior, $\bar{z}^s \alpha = \beta$ y $t = t' = s$. //

Demostración de la afirmación 1: Basta ver que cada S_x es sección. Como Γ_C es árbol, de 3-16 se sigue, por inducción, que si hay caminos planos $x \overset{\bar{\gamma}}{\rightsquigarrow} y$, $x \overset{\bar{\gamma}'}{\rightsquigarrow} z^n y$ en C , entonces $n=0$ y $\bar{\gamma}=\bar{\gamma}'$. Esto prueba que si $y \in S_x$, entonces $z^n y \notin S_x$.

Tomemos ahora una flecha $y \rightarrow y'$ en C con $y \in S_x$. Si $y \rightarrow y'$ es plana, $y' \in S_x$ por definición de S_x . Si $y \rightarrow y'$ no es plana, $z^n y' \rightarrow y$ si lo es y $z^n y' \in S_x$. //

Demostración de la afirmación 2: Es claro que un ciclo de n flechas en B está inducido por un intervalo circular $\bar{\gamma}$ de longitud n en C . El recorrido en Γ_C parametrizado por $\bar{\gamma}$ no es ciclo, pues Γ_C es árbol, y entonces hay al menos dos dobles de $\bar{\gamma}$. Por 3-16, podemos eliminar estos dobles obteniendo nuevamente un intervalo circular $\bar{\gamma}'$ pero esta vez de longitud menor. Este último ya no induce ciclos en B por hipótesis de inducción, y entonces tampoco $\bar{\gamma}$ lo hace. De allí que B sea un árbol. //



Aquí termina la prueba de 3-15. // 51

Demostración del Teorema 3-14: La parte $(B) \Rightarrow (A)$ es consecuencia directa de 3-4 y de la definición de álgebra forestal. La parte $(A) \Rightarrow (B)$ se sigue del hecho de que todo carcaj de translación tal que cada vértice tiene soporte no vacío es \bar{c} -conexo, de 3-15 y de 3-4. //

(3-18) Corolario: Sea Λ un álgebra de dimensión finita sobre k , básica, indecomponible y de tipo finito. Entonces Λ es forestal si y sólo si $C = \text{CAR}(\Lambda)$ no tiene ciclos dirigidos y Γ_C es árbol.

Demostración: Basta hacer notar que como C es finito, y no tiene ciclos dirigidos, entonces C es una componente preprojectiva y Γ_C tiene sentido.

El resto es aplicación directa de 3-14 y 1-14. //

4.- GRUPO FUNDAMENTAL, CUBIERTA UNIVERSAL Y CONDICION (S).

Damos a continuación un breve repaso de la construcción del grupo fundamental y de la cubierta universal de un carcaj de translación C en un punto x .

4.A Grupo fundamental y cubierta universal: [5].

(4-1) Dado un carcaj de translación C , se introduce un carcaj auxiliar \hat{C} con los mismos vértices que C pero agregando a C_1 nuevas flechas $\overrightarrow{x - \delta_x} \rightarrow x$, una por cada vértice no proyectivo x de C (las nuevas flechas coinciden con la representación gráfica de la translación introducida en los preliminares).

Dados $x, y \in C_0$, un camino no dirigido en \hat{C} de x en y es una sucesión:

$$\alpha_n \dots \alpha_1 := (y \xrightarrow{\alpha_n} \dots \xrightarrow{\alpha_1} x) \text{ con } \alpha_i \in \hat{C}_1$$

(hacemos notar que el camino $x \xrightarrow{\alpha_1} \dots \xrightarrow{\alpha_n} y$, que va de y en x , es distinto del anterior. Para una formulación rigurosa de todo esto, véase [5]).

Si $w' = \alpha_n \cdots \alpha_1$, es un camino de x en y ,
y $w = \beta_m \cdots \beta_1$, es otro de y en z , entonces
podemos formar la composición de éstas:

$$ww' := \beta_m \cdots \beta_1 \alpha_n \cdots \alpha_1.$$

Sea W el conjunto de todos los caminos no
dirigidos de \hat{C} , incluyendo el camino trivial
 w_x para cada vértice x de C .

Se define en W la relación de homotopía
como la relación de equivalencia generada por
las siguientes "relaciones elementales":

- (a) $(x \xrightarrow{\alpha} y \xrightarrow{\alpha} x) \sim w_x$ para cada flecha $x \xrightarrow{\alpha} y$ de \hat{C} .
- (b) $(x \xleftarrow{\alpha} y \xleftarrow{\sigma \alpha} zx) \sim (x \xleftarrow{\delta_x} zx)$ y $(zx \xrightarrow{\sigma \alpha} y \xrightarrow{\alpha} x) \sim (zx \xrightarrow{\delta_x} x)$
para cada flecha $y \xrightarrow{\alpha} x$ de C con x no proyectivo.
- (c) si $w \sim w'$ según (a) ó (b), entonces
 $w_1 w w_2 \sim w_1 w' w_2$ siempre que esto tenga sentido.

(4-2) Las asignaciones de principio y final
de caminos son compatibles con \sim e inducen

las correspondientes asignaciones en W/N .

Asimismo, la composición de caminos induce una composición de clases de homotopía:

$\bar{w}\bar{w}'$ está definido siempre que $w w'$ lo esté, y en ese caso $\bar{w}\bar{w}' := \overline{w w'}$. En particular, dado $x \in C_0$, el conjunto $\pi(C, x)$ de clases de homotopía de caminos de x en x forma un grupo con la composición mencionada. $\pi(C, x)$ es el grupo fundamental de C en x .

(4-3) Un carcaj de translación C se llama simplemente conexo si $\pi(C, x) = \{1\}$ para alguna $x \in C_0$. Esto implica que $\pi(C, y) = \{1\}$ para cualquier $x \in C_0$.

(4-4) La cubierta universal \tilde{C} de C en el punto $x \in C_0$ es por definición el siguiente carcaj de translación:

Los vértices de \tilde{C} son las clases de homotopía \bar{w} de elementos de W que empiezan en el vértice dado x . Las flechas de \tilde{C} son las parejas (α, \bar{w}) formadas por una clase de

homotopía $\bar{w} \in \tilde{C}_0$ y una flecha $z \xleftarrow{\alpha} x$ de C donde el final de \bar{w} es x ; el principio y el final de (α, \bar{w}) son \bar{w} y $\overline{\alpha w}$ respectivamente. Finalmente, la translación de \tilde{C} está definida por:

$$\bar{z\bar{w}} := \overline{\delta_x w} \quad \text{donde } x = \text{final de } w,$$

siempre que x no sea proyectivo de C , de otra forma \bar{w} resulta proyectivo de \tilde{C} . (Ver ejemplo al final de la sección).

El morfismo $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ tal que $\pi(\bar{w}) := (\text{final de } w)$ es cubriente universal en el sentido que se precisa a continuación.

(4-5) Un morfismo de caraceras de translación $\pi: C' \rightarrow C$ es cubriente izquierdo si para cada vértice $x \in C'_0$, la transformación inducida $x^- \rightarrow (\pi x)^-$ es biyectiva. Pedimos además que $\bar{z}x$ esté definido siempre que $z\pi x$ lo esté.

Un morfismo cubriente derecho se define análogamente, y diremos que un morfismo es cubriente si es cubriente izquierdo y derecho.

Un morfismo cubriente $C' \xrightarrow{\pi} C$ es universal si se factoriza de manera única a través de cualquier otro morfismo cubriente $C'' \rightarrow C$ como lo indica el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} C' & \dashrightarrow & C'' \\ \pi \downarrow & \varphi \swarrow & \\ C & & \end{array}$$

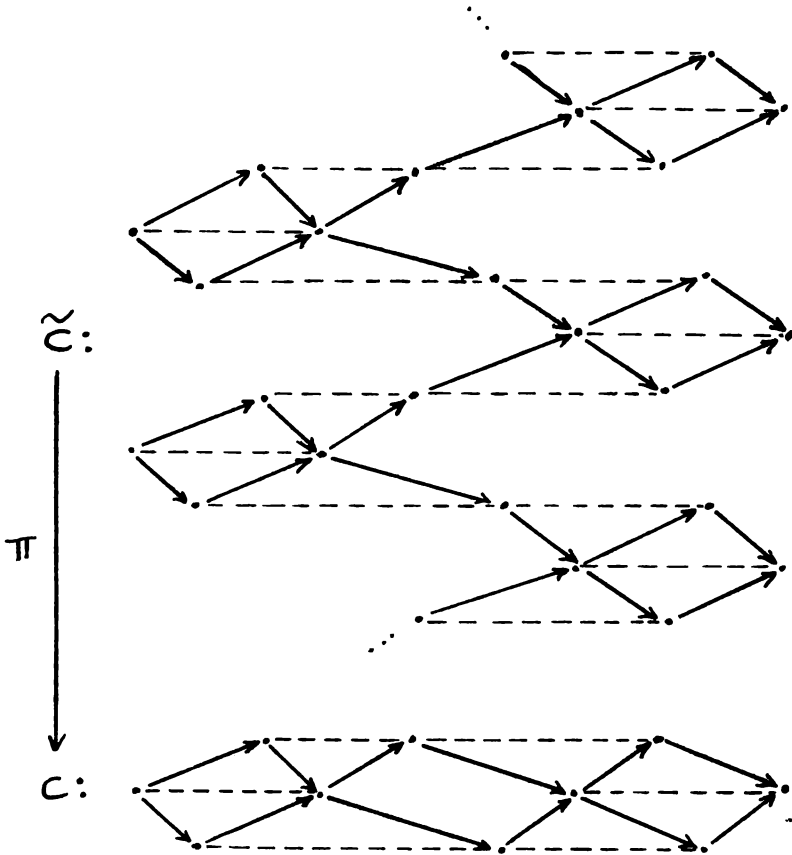
(4-6) A continuación listamos algunas de las propiedades bien conocidas de la cubierta universal $\tilde{C} \xrightarrow{\pi} C$ que nos serán de utilidad:

(a) $\pi(z)$ es proyectivo (inyectivo) en C si y sólo si z es proyectivo (resp. inyectivo) en \tilde{C} .

(b) Para cada camino w de C que empiece en x y cada $z \in \pi^{-1}(x)$, w se levanta de manera única a un camino \tilde{w} de \tilde{C} que empiece en z .

(c) \tilde{C} no tiene ciclos dirigidos.

(d) C es simplemente conexo si y sólo si \tilde{C} coincide con C .

(4-7) Ejemplo :

(Por convención, los vértices en la fibra $\pi^{-1}(x)$ de x con respecto a π se hallan sobre la vertical que pasa por x).

Véase también el ejemplo (8-2) pag. 199.

4.B Las álgebras simplemente conexas coinciden con las (S)-álgebras.

En [5] Gabriel y Bongartz introducen para cada carcaj de translación C una gráfica (no orientada) G_C que, en caso de que C sea una componente preprojectiva, está muy relacionada con Γ_C . En este caso, G_C se construye como sigue:

Los vértices de G_C son las σ -órbitas $\mathcal{O}(x)$ de los vértices x de C . Por cada σ -órbita que conecte las órbitas $\mathcal{O}(x), \mathcal{O}(y)$ se pone una arista $\mathcal{O}(x) - \mathcal{O}(y)$ en G_C (si $x \xrightarrow{\alpha} y$ es una flecha de C , se define su σ -órbita α^σ como el conjunto:

$$\alpha^\sigma := \{ \sigma^m \alpha \mid m \in \mathbb{Z} \text{ y } \sigma^m \alpha \text{ definido} \}.$$

Estamos interesados en esta gráfica en vista de un resultado de Gabriel [5] que abarca como caso particular el siguiente:

(4-8) Teorema: Si C es una componente preprojectiva, entonces C y G_C tienen el mismo tipo de homotopía. //

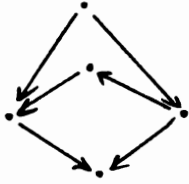
Precisaremos primero la relación existente entre G_C y Γ_C , y a continuación mostraremos el resultado que anuncia el título de la sección.

(4-9) Lema: Sea C una componente preproyectiva, \bar{c} -conexa y sin ciclos dirigidos. Entonces $\bar{\Gamma}_C = G_C$ donde $\bar{\Gamma}_C$ es la gráfica subyacente a Γ_C .

Demostración: Los vértices de G_C coinciden con los de $\bar{\Gamma}_C$. Si α^σ es una arista de G_C , entonces existe una flecha plana β de C tal que $\beta^\sigma = \alpha^\sigma$; entonces cada arista de G_C está inducida por una de $\bar{\Gamma}_C$. Supongamos ahora que $\beta^\sigma, \alpha^\sigma$ son dos aristas de G_C con β, α flechas planas de C que determinan en $\bar{\Gamma}_C$ la misma flecha. Entonces, por 3-17, tenemos que $\alpha = \beta$ //

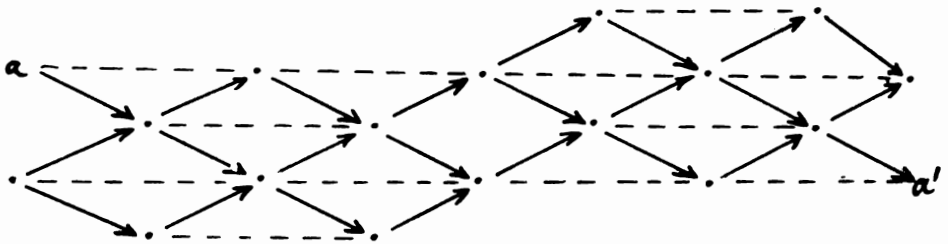
(4-10) Como puede verse en el ejemplo lo anterior no vale en general, ni aún si Γ_C es árbol y C es carcaj de Auslander-Reiten.

Ejemplo: Sea Ω la k -álgebra de carcaj ordinario

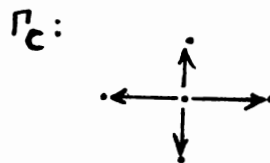
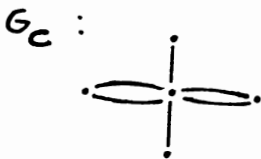


con las relaciones:
composición de dos flechas = 0,

entonces $C = \text{CAR}(\Omega)$ se obtiene identificando en la siguiente gráfica a con a' :



entonces tenemos:



(4-11) Teorema: Sea Λ una k -álgebra de dimensión finita, básica, indescomponible y de tipo finito. Entonces $\text{CAR}(\Lambda)$ es simplemente conexo si y sólo si Λ satisface la condición (S).

Demostración: Por el resultado de Lema 2-17, Λ es (S)-álgebra si y sólo si Λ es forestal. Si Λ es forestal, $C = \text{CAR}(\Lambda)$ no tiene ciclos dirigidos y Γ_C es árbol. Por 4-8 y 4-9, G_C también es árbol y C es simplemente conexo. Recíprocamente, si $C = \text{CAR}(\Lambda)$ es simplemente conexo, entonces G_C es un árbol y C coincide con \tilde{C} que no tiene ciclos dirigidos. Entonces Γ_C es árbol y C no tiene ciclos dirigidos. Por 3-18, Λ es forestal //

5.- ALGUNOS CARCAJES DE AUSLANDER-REITEN
DE (S)-ALGEBRAS DENTRO DE LA CUBIERTA
UNIVERSAL.

Supondremos en este capítulo que $C = (C, \bar{c})$ es un carcaj de translación finito sin ciclos dirigidos. Supondremos también que C tiene inyectivos admisibles y que cada uno de sus vértices tiene soporte no vacío.

Denotaremos por $\tilde{C} \xrightarrow{\pi} C$ la cubierta universal de C .

(5-1) Notación: Si D es un carcaj de translación y $E \in D_0$, entonces:

$$[-, E] := \{ y \in D_0 \mid \text{hay un camino dirigido } y \rightarrow x \text{ para algún punto } x \in E \}.$$

Probaremos el siguiente:

(5-2) Teorema: Para cada subcarcaj finito y conexo E de \tilde{C} , existe un subcarcaj de translación pleno D de \tilde{C} que es carcaj de Auslander-Reiten de una (S)-álgebra y tal que $[-, E] \subseteq D_0$ y $P_D = [-, E] \cap P_E$.
 ($\therefore \pi|_D$ preserva projectivos).

(5-3) Observaciones:

(A) Si $E \subseteq \tilde{C}_0$ y E es finito, entonces $[-, E]$ también es finito. Esto se debe a que en \tilde{C} no hay caminos dirigidos de longitud arbitrariamente grande. De hecho, cualquier camino dirigido de longitud $> |C|$ produciría al menos un ciclo dirigido en C : un tal camino obviamente cortaría al menos dos veces alguna de las fibras de π .

(B) Veamos que existe una E como la que aparece en el enunciado de 5-2 con $\pi|_E$ suprayectiva:

Si m_1, \dots, m_t son las inyectivas maximales de C (con respecto al orden dado por las flechas), como C es π -conexo, existen caminos δ que recorren todos los m_i 's. Sean $\tilde{\delta}$ un levantamiento de alguno de estos caminos y $E := [-, \tilde{\delta}]$. Entonces el morfismo $\tilde{C} \xrightarrow{\pi} C$ se restringe a una función sobre $\pi|_E: E \rightarrow C$. Lo anterior se debe a que $C = \bigcup_i^+ [-, m_i]$ y a que cada camino dirigido $x \rightsquigarrow m_i$ se levanta a otro camino dirigido dentro de E .

(c) Por (B), el teorema 5-2 reduce, "en principio," el problema de dar una lista completa de los carcajes finitos de Auslander-Reiten sin ciclos dirigidos al mismo problema para las (S) -álgebras. En efecto, si D es el carcaj de Auslander-Reiten de una (S) -álgebra, se construyen todos los epimorfismos f con dominio D que preserven proyectivos y tales que $|f(x)^+| \geq |x^+|$ (y lo mismo con $-$) para cada $x \in D_0$. Estos son un número finito, y se verifica en cada caso si el codominio es carcaj de Auslander-Reiten. Por supuesto que este proceso es impracticable en general por la gran cantidad de casos a analizar. Véase el apéndice 7 () para un ejemplo donde D tiene pocas vértices.

Fijemos ahora un subconjunto finito y conexo E de \tilde{E}_0 . Denotemos por D al subcarcaj de translación pleno de \tilde{E} determinado por:

$$D_0 := [-, E].$$

(5-4) Lema: Las inyectivos de \tilde{C} son admisibles.

Demostración: utilizaremos fuertemente el siguiente resultado de la escuela de Zurich.[5].

(5-5) Teorema: Si $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ es un morfismo cubriente, entonces π induce un k -functor $k(\pi): k(\tilde{C}) \rightarrow k(C)$, que a su vez induce isomorfismos:

$$\coprod_{z \in \pi^{-1}\pi y} k(\tilde{C})(x, z) \cong k(C)(\pi x, \pi y) \cong \coprod_{t \in \pi^{-1}\pi x} k(\tilde{C})(t, y) \quad //$$

Tomemos un inyectivo y de \tilde{C} , entonces πy es inyectivo en C y por tanto admisible. Entonces para cada proyectivo x de \tilde{C} , se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} k(C)(\pi x, \pi y) & \xrightarrow{((-, k(\pi)(y \rightarrow y_i))} & \coprod_{y_i \in y^+} k(C)(\pi x, \pi y_i) \\ \parallel & & \parallel \\ \coprod_{t \in \pi^{-1}\pi x} k(\tilde{C})(t, y) & & \coprod_{t \in \pi^{-1}\pi x} \coprod_{y_i \in y^+} k(\tilde{C})(t, y_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ k(\tilde{C})(x, y) & \xrightarrow{((-, y \rightarrow y_i))} & \coprod_{y_i \in y^+} k(\tilde{C})(x, y_i) \end{array} \quad //$$

(5-6) Observación: Si Δ es un subcarcaj de translación pleno de \tilde{C} tal que $P_\Delta \subseteq P_{\tilde{C}}$, entonces si $x \in \Delta_0$ es un inyectivo admisible de \tilde{C} , también lo es en Δ . En efecto, como $k(\Delta)$ es cociente de $k(\tilde{C})$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 k(\tilde{C})(-, x)|_{P_\Delta} & \xrightarrow{\quad} & \coprod_{x_i \in x_{\tilde{C}}^+} k(\tilde{C})(-, x_i)|_{P_\Delta} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 k(\Delta)(-, x)|_{P_\Delta} & \xrightarrow{\quad} & \coprod_{x_i \in x_{\tilde{C}}^+} k(\Delta)(-, x_i)|_{P_\Delta} \\
 & \searrow & \parallel \\
 & & \coprod_{x_i \in x_\Delta^+} k(\Delta)(-, x_i)|_{P_\Delta}
 \end{array}$$

//

Demostración de 5-2: Observemos primero que cada vértice x de D tiene soporte no vacío: como πx tiene soporte no vacío en C , hay un camino dirigido $p \xrightarrow{\quad} \pi x$ en C desde algún proyectivo p y tal que su clase en $k(C)$ no es cero; por 5-5, este camino

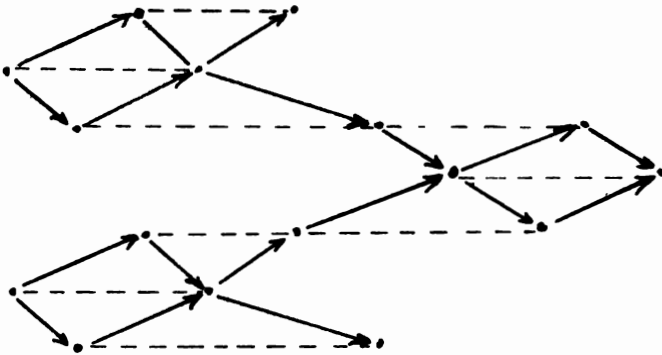
se levanta a otro $\tilde{p} \xrightarrow{\tilde{f}} x$ cuya clase en $k(\tilde{E})$ tampoco es cero. Finalmente, como $[-, \mathcal{D}] \in \mathcal{D}$, \tilde{f} tampoco tiene clase cero en $k(\mathcal{D})$.

Por 5-3 (A), \mathcal{D} es finito. Como $[-, \mathcal{D}] \in \mathcal{D}$ y \tilde{E} es $\bar{\tau}$ -conexo, \mathcal{D} es una componente preproyectiva. Puesto que $\Gamma_{\tilde{E}}$ es árbol y $\mathcal{D} \subseteq \tilde{E}$, $\Gamma_{\mathcal{D}}$ es árbol y \mathcal{D} no tiene ciclos dirigidos. Entonces, por 3-15, \mathcal{D} posee una cubierta estratificada de secciones.

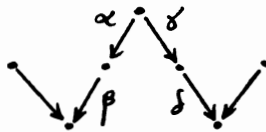
Usando lo anterior y 3-7, ..., 3-11 se obtiene que \mathcal{U} definido como en 3.A, para \mathcal{D} , es un sistema (P)-generador de $\mathbb{Z}\Gamma_{\mathcal{D}}$ que satisface la condición (+), y hay una inmersión plena $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathbb{Z}\Gamma_{\mathcal{D}}$. Tiene sentido, entonces, hablar de $L(\mathcal{U})$. Además, como en la prueba de 3-10, Ψ puede restringirse a una inmersión $\mathcal{D} \hookrightarrow L(\mathcal{U})$.

Finalmente, la inclusión $\mathcal{D} \hookrightarrow \tilde{E}$ se extiende a una inmersión $L(\mathcal{U}) \hookrightarrow \tilde{E}$: esta extensión se define, como en la prueba de 3-12 (usando 5-6), por inducción sobre el orden parcial dado por las flechas de $L(\mathcal{U})$. //

(5-7) Ejemplo: para C como en el ejemplo 4-7 y E como en 5-3(B), el carcaj de Auslander-Reiten D al que se refiere el teorema 5-2 es el siguiente:

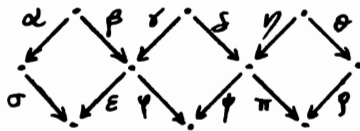


y corresponde a la (S)-álgebra cuyo carcaj ordinario es:

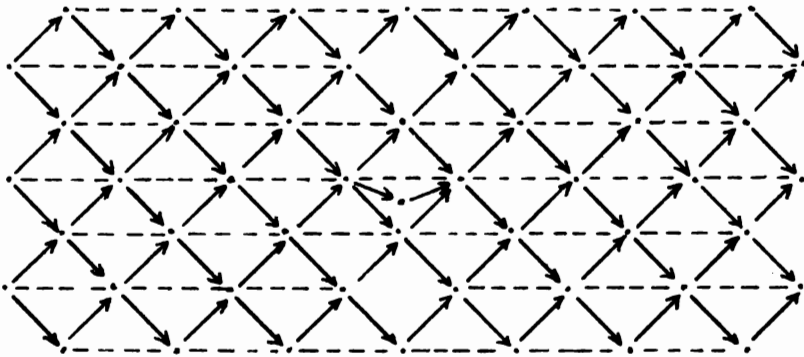


con las relaciones $\beta\alpha=0, \delta\delta=0$.

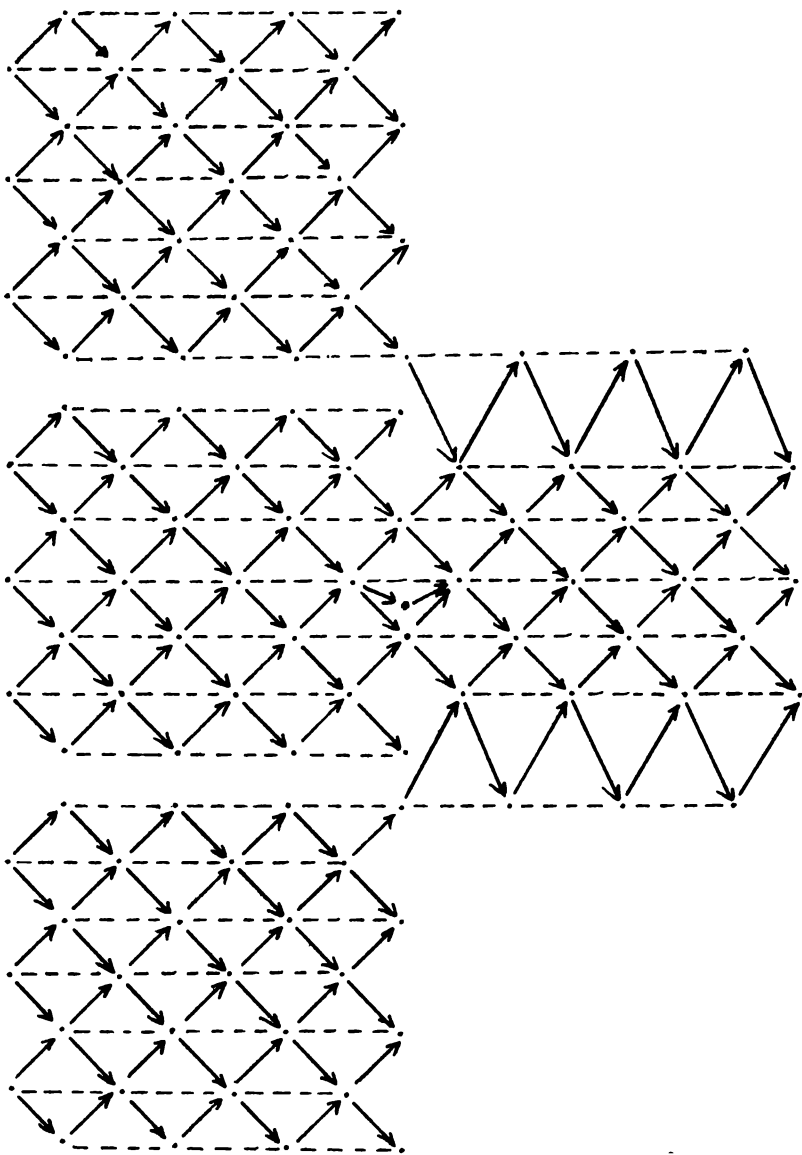
(5-8) Ejemplo: Del mismo modo que en el ejemplo anterior, si Λ es el álgebra cuyo carcaj ordinario es:



con las relaciones: $\psi\gamma = \psi\delta$ y $\sigma\alpha, \epsilon\beta, \psi\beta, \epsilon\gamma, \rho\theta, \pi\eta, \pi\delta, \psi\eta = 0$, entonces



es $C = \text{CAR}(\Lambda)$, y el carcaj de Auslander-Reiten de (S)-álgebra asociado es:



6.- SOBRE CARCAJES DE AUSLANDER-REITEN
SIN CICLOS DIRIGIDOS.

6.A Algunos carcajes que son de Auslander-Reiten.

En general, dado un carcaj de translación C , no es fácil decidir si éste es de Auslander-Reiten: es decir si existe una categoría localmente acotada Λ tal que $\text{CAR}(\Lambda) \cong C$. Utilizando las mismas técnicas que en [4] y el nuevo concepto de "estratificación", que se define más adelante, es posible dar condiciones suficientes para que un carcaj de translación sin ciclos orientados sea de Auslander-Reiten.

(6-1) Definición: Sea $C = (C, \tau)$ un carcaj de translación. Una estratificación h de C es una función $h: C_0 \rightarrow \mathbb{N}$ que tiene las siguientes propiedades:

- (a) si $x \rightarrow y$ es una flecha de C , entonces $h(x) \leq h(y)$.
- (b) si $x \rightarrow p$ es una flecha de C con p proyectivo, entonces $h(x) = h(p)$.

(c) $h(2x) < h(x)$ siempre que x sea un vértice no proyectivo de C .

Por supuesto, decimos que C es estratificable si existe una estratificación de C .

El resultado que queremos obtener es:

(6-2) Teorema: Sea C un carcaj de translación estratificable, sin ciclos dirigidos, con inyectivos admisibles y tal que cada vértice tiene soporte no vacío. Supongamos además que no hay caminos dirigidos de longitud arbitrariamente grande en C cuya clase en $k(C)$ no sea nula. Entonces C es la componente preproyectiva de un carcaj de Auslander-Reiten.

Dividiremos los argumentos que prueban 6-2 en dos grupos:

1er Grupo: Mod P en términos de Mod $k(C)$.

Fijamos un carcaj de translación C sin ciclos dirigidos, $\bar{\sigma}$ -conexo y con inyectivos admisibles. Denotamos por P a la subcategoría plena de $k(C)$

cuya clase de objetos es \mathcal{P}_C .

Consideremos la pareja de funtores adjuntos:

$$\text{Mod } \mathcal{P} \begin{array}{c} \xrightarrow{H} \\ \xleftarrow{\text{Res}} \end{array} \text{Mod } k(C)$$

donde Res es el funtor restricción y H es su adjunto derecho dado por:

$$H(N)(x) = ((-, x)|_{\mathcal{P}}, N)$$

para $N \in \text{Mod } \mathcal{P}$ y $x \in C_0$. Tenemos además que $\text{Res } H \cong \text{id}$, pues \mathcal{P} es subcategoría plena [1].

Mostraremos que:

$\text{Mod } \mathcal{P} \xrightarrow{H} \{M/M \cong H(N) \text{ para alguna } N \in \text{Mod } \mathcal{P}\}$
es una equivalencia de categorías y daremos otra descripción de esta categoría.

(6-3) Lema: La siguiente sucesión de funtores es exacta en $\text{Mod } \mathcal{P}$ siempre que $x, \bar{e}x \in C_0$.

$$(-, x)|_{\mathcal{P}} \rightarrow \coprod_{x_i \in x^+} (-, x_i)|_{\mathcal{P}} \rightarrow (-, \bar{e}x)|_{\mathcal{P}} \rightarrow 0$$

Demostración: Como $\bar{e}x \notin \mathcal{P}$, $\text{rad}(-, \bar{e}x)|_{\mathcal{P}} = (-, \bar{e}x)|_{\mathcal{P}}$.

Aplicando el funtor Res , que es exacto, a la sucesión que aparece en la proposición 1-13 se obtiene el resultado deseado. //

(6-4) Proposición: si $M = H(N)$ con $N \in \text{Mod } \mathcal{P}$ y $x \in C_0$, entonces

$$0 \rightarrow M(\bar{x}) \rightarrow \coprod_{x_i \in x^+} M(x_i) \xrightarrow{f} M(x) \text{ es exacta}$$

si $\bar{x} \in C$ y f es monomorfismo si x es inyectivo de C .

Demostración: Aplicando el funtor $(-, N)$ a la sucesión de 6-3, obtenemos:

$$0 \rightarrow ((-, \bar{x})|_{\mathcal{P}}, N) \rightarrow \coprod_{x_i \in x^+} ((-, x_i)|_{\mathcal{P}}, N) \rightarrow ((-, x)|_{\mathcal{P}}, N)$$

que es lo que se quería si $\bar{x} \in C$.

Si x es inyectivo de C , entonces es admisible y se hace lo mismo con la sucesión exacta que existe por esa razón. //

(6-5) Definición: $\mathcal{R}(\mathcal{P})$ es la subcategoría plena de $\text{Mod } k(C)$ cuyos objetos son los funtores M tales que para cada $x \in C_0$ vale la conclusión de 6-4.

(6-6) Lema: Si $x \in C_0$ y $M \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$, entonces hay un monomorfismo:

$$M(x) \xrightarrow{M(\delta|_{\mathcal{P}})} \coprod_{p \in \mathcal{P}} \eta_p M(p)$$

donde cada $\delta_{ip} \in (p, x)$ para $1 \leq i_p \leq n_p$.

Demostración: La prueba es directa: por inducción sobre el orden parcial en C_0 dado por las flechas. (prueba detallada en [4]). //

(6-7) Observación: Si $M \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$, $x \in C_0$ y $0 \neq m \in M(x)$, entonces existen $p \in \mathcal{P}$ y $\varphi \in (p, x)$ tales que $M(\varphi)(m) \neq 0$. //

(6-8) Proposición: Sea $x \in C_0$. Entonces $(-, x) \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$ si y sólo si para cada $z \in C_0$ y $0 \neq \alpha \in (z, x)$, existen $p \in \mathcal{P}$ y $\varphi \in (p, z)$ tales que $\alpha\varphi \neq 0$.

Demostración: Si $(-, x) \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$, por 6-7 se satisface la otra condición.

Ahora supongamos esta última condición y veamos que $(-, x) \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$. Por el dual de 1-13, la sucesión

$$(\bar{z}, -) \rightarrow \coprod_{z_i \in z^+} (z_i, -) \xrightarrow{\delta} \text{rad}(z, -) \rightarrow 0$$

es exacta si $z, \bar{z} \in C_0$. (Si $\bar{z} \notin C_0$, δ es $\frac{1}{2}$).

Entonces $(\bar{z}, -) \rightarrow \coprod_{z_i \in z^+} (z_i, -) \xrightarrow{\delta'} (z, -)$ es exacta.

(Si $\bar{z} \notin C_0$, sólo se tiene que δ' es mono.).

En particular:

$(\bar{z}x, x) \rightarrow \coprod_{z_i \in z^+} (z_i, x) \xrightarrow{\mathcal{J}'} (z, x)$ es exacta

(Si $\bar{z}z \notin C_0$, \mathcal{J}' es mono.).

Veamos ahora que $0 \rightarrow (\bar{z}z, x) \xrightarrow{\mathcal{E}} \coprod_{z_i \in z^+} (z_i, x)$ es exacta.

Si $0 \neq \alpha \in (\bar{z}z, x)$, entonces existe $\Psi \in (p, \bar{z}z)$ con $p \in \mathcal{P}$ y $\alpha\Psi \neq 0$. Podemos suponer que Ψ es un camino y entonces debe factorizarse por alguna flecha $z_i \xrightarrow{\delta} \bar{z}z$. Como $\alpha\Psi \neq 0$, $(\delta, z)(\alpha) = \alpha\delta$ no es cero. Por tanto, \mathcal{E} que está inducido por las flechas $z_i \rightarrow \bar{z}z$ en C es mono. //

(6-9) Lema: Si $x \in C_0$, $\text{rad}(-, x)$ está contenido en algún $M \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$ y x tiene soporte no vacío, entonces $(-, x) \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$.

Demostración: Para cada $z \in C_0$ tal que $z \neq x$, conmuta:

$$\begin{array}{ccc} (z, x) = \text{rad}(z, x) & \hookrightarrow & M(z) \\ \downarrow \bar{\delta} & & \downarrow \delta \\ \coprod_{p \in \mathcal{P}} \eta_p \text{rad}(p, x) & \hookrightarrow & \coprod_{p \in \mathcal{P}} \eta_p M(p) \end{array}$$

donde δ es el morfismo dado en (6-6). De allí que $\bar{\delta}$ también sea monomorfismo; si $z=x$,

tenemos que $(-, x)|_{\mathcal{P}} \neq 0$. Entonces, en ambos casos, la condición de la proposición anterior se cumple. //

(6-10) Proposición:

(A) si $M, \bar{M} \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$ tales que $M|_{\mathcal{P}} \cong \bar{M}|_{\mathcal{P}}$, entonces $M \cong \bar{M}$.

(B) si $M \xrightarrow[\psi]{\varphi} \bar{M}$ en $\mathcal{R}(\mathcal{P})$ con $\varphi|_{\mathcal{P}} = \psi|_{\mathcal{P}}$, entonces $\varphi = \psi$.

Demostración: Para probar (A), construiremos una extensión $M \xrightarrow{\bar{\varphi}} \bar{M}$ del isomorfismo dado $M|_{\mathcal{P}} \xrightarrow{\varphi} \bar{M}|_{\mathcal{P}}$. Haremos esto por inducción sobre el orden parcial en C_0 definido por las flechas.

Si x es minimal, $\bar{\varphi}_x = \varphi_x$ está definido pues, siendo C \bar{z} -conexo, $x \in \mathcal{P}$.

Supongamos que hemos definido $\bar{\varphi}_z$ para cada $z < x$ de tal forma que siempre que se tenga una flecha $z' \xrightarrow{\alpha} z$ en C , conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M(z') & \xrightarrow{M(\alpha)} & M(z) \\ \bar{\varphi}_{z'} \downarrow & & \downarrow \bar{\varphi}_z \\ \bar{M}(z') & \xrightarrow{\bar{M}(\alpha)} & \bar{M}(z) \end{array} .$$

Definiremos $\bar{\varphi}_x$ de tal modo que:

(*) : para cada flecha $z \xrightarrow{\alpha} x$ en C conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 M(x) & \xrightarrow{M(\alpha)} & M(z) \\
 \bar{\psi}_x \downarrow & & \downarrow \bar{\psi}_z \\
 \bar{M}(x) & \xrightarrow{\bar{M}(\alpha)} & \bar{M}(z)
 \end{array}$$

y esto terminará la prueba.

Si $x \in \mathcal{P}$, definimos $\bar{\psi}_x := \psi_x$. Sea $z \xrightarrow{\alpha} x$ una flecha de \mathcal{C} . Por 6-6, hay un monomorfismo

$$\bar{M}(z) \longrightarrow \coprod_{p \in \mathcal{P}} n_p \bar{M}(p).$$

Consideremos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 M(x) & \xrightarrow{M(\alpha)} & M(z) & \longrightarrow & \coprod_{p \in \mathcal{P}} n_p M(p) \\
 \psi_x = \bar{\psi}_x \downarrow & & \downarrow \bar{\psi}_z & & \downarrow \coprod \bar{\psi}_p = \coprod \psi_p \\
 \bar{M}(x) & \xrightarrow{\bar{M}(\alpha)} & \bar{M}(z) & \xrightarrow{\beta} & \coprod_{p \in \mathcal{P}} n_p \bar{M}(p)
 \end{array}$$

Por hipótesis de inducción (b) conmuta; el rectángulo exterior conmuta porque ψ es natural. Entonces (a) también conmuta, pues β es mono.

Si $x \notin \mathcal{P}$, entonces $x = \bar{z}z$ para algún $z \in \mathcal{C}_0$. Entonces, puesto que $M, \bar{M} \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$, las sucesiones $0 \rightarrow M(\bar{z}z) \rightarrow \coprod_{z_i \in z^+} M(z_i) \rightarrow M(z)$ y la correspondiente para \bar{M} son exactas. Además,

cada $z_i < \bar{z}$, y $z < \bar{z}$; y por tanto hay isomorfismos $\bar{\varphi}_{z_i}, \bar{\varphi}_z$ tales que conmuta el siguiente diagrama, implicando así la existencia de $\bar{\varphi}_{\bar{z}}$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M(\bar{z}) & \longrightarrow & \coprod M(z_i) & \longrightarrow & M(z) \\ & & \downarrow \bar{\varphi}_{\bar{z}} & & \downarrow \coprod \bar{\varphi}_{z_i} & & \downarrow \bar{\varphi}_z \\ 0 & \longrightarrow & \bar{M}(\bar{z}) & \longrightarrow & \coprod \bar{M}(z_i) & \longrightarrow & \bar{M}(z) \end{array} .$$

De la conmutatividad de este diagrama se sigue (*).

La prueba de (B) es similar, y la omitimos. //

(6-11) Teorema:

$\mathcal{R}(\mathcal{P}) = \{ M / M \cong H(N) \text{ para algún } N \in \text{Mod } \mathcal{P} \}$

Demostración: Si $M \cong H(N)$, por 6-4 $M \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$.

Si $M \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$, sea $\bar{M} := H(M|_{\mathcal{P}})$. Entonces $\bar{M} \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$ pero \mathcal{P} es subcategoría plena de $k(C)$ y entonces $\bar{M}|_{\mathcal{P}} \cong M|_{\mathcal{P}}$. El resultado se sigue de la proposición anterior. //

(6-12) Corolario:

$\text{Mod } \mathcal{P} \xrightarrow{H} \mathcal{R}(\mathcal{P})$ es equivalencia de categorías.

Demostración: Como $\text{Res } H \cong \text{id}$, H es fiel.

Por el teorema anterior, H es denso. Por 6-10(B), H es pleno //

(6-13) Observación: Hemos supuesto desde los preliminares que C es localmente finito. Como C no tiene ciclos dirigidos, cada $k(C)(x,x)$ es local, para $x \in C_0$. Supongamos de aquí en adelante (hasta el final de la sección) que en C no hay caminos dirigidos de longitud arbitrariamente grande que no se anulen en $k(C)$.

Por lo anterior, $k(C)$ y \mathcal{P} resultan categorías localmente acotadas (ver 1-12). Entonces resulta fácil ver que la equivalencia de 6-12 se restringe a otra equivalencia

$$\text{mod } \mathcal{P} \xrightarrow{H} \mathcal{R}(\mathcal{P})$$

donde $\mathcal{R}(\mathcal{P}) = (\text{mod } k(C)) \cap \mathcal{R}(\mathcal{P})$.

2° Grupo: Sucesiones que casi se dividen en mod \mathcal{P} .

Aquí supondremos, además de las condiciones que le pedíamos a C en el primer grupo, que C es estratificable y que cada uno de sus

vértices tiene soporte no vacío.

Probaremos el siguiente:

(6-14) Teorema: Si $x \in C_0$, entonces:

(A) $(-, x) \in \mathfrak{r}(\mathcal{P})$.

(B) $(-, x) \mid_{\mathcal{P}} \rightarrow \coprod_{x_i \in x^+} (-, x_i) \mid_{\mathcal{P}}$ es mínimo.

que casi se divide izquierdo, y cada $(-, x_i) \in \mathfrak{r}(\mathcal{P})$.

(C) Si $(-, x) \mid_{\mathcal{P}}$ no es inyectivo, entonces x tampoco lo es y

$$0 \rightarrow (-, x) \mid_{\mathcal{P}} \rightarrow \coprod_{x_i \in x^+} (-, x_i) \mid_{\mathcal{P}} \rightarrow (-, \bar{x}) \mid_{\mathcal{P}} \rightarrow 0$$

es una sucesión que casi se divide con cada $(-, x_i) \in \mathfrak{r}(\mathcal{P})$ y también $(-, \bar{x}) \in \mathfrak{r}(\mathcal{P})$.

(D) $(-, x) \mid_{\mathcal{P}}$ es inyectivo si y sólo si x lo es en C .

(6-15) Observación: El Teorema 6-2 se sigue de lo anterior: si $\Lambda := \mathcal{P}$, entonces C es la componente preprojectiva de $\text{CAR}(\Lambda)$.

(6-16) Lema: Si (A), (B), (C) valen para cierta $x \in C_0$, entonces también (D).

Demostración: Si $(-, x)|_P$ no es inyectivo, por (c) tampoco x lo es. Si $(-, x)|_P$ es inyectivo, por (b), $(-, x)|_P \rightarrow \coprod_{x_i \in x^+} (-, x_i)|_P$ es mínimo que casi se divide izquierdo y es epimorfismo. Si x no fuera inyectivo, por 6-3, \bar{x} tendría soporte vacío y esto es absurdo. //

(6-17) Lema: Sea $(-, x) \in r(P)$ tal que para cada flecha $x \rightarrow x_i$ en C , $(-, x_i) \in r(P)$. Si $(-, x)|_P \rightarrow \coprod_{x_i \in I} (-, x_i)|_P$ es mínimo que casi se divide izquierdo con $I \subseteq x^+$, entonces $I = x^+$.

Demostración: Si $x \xrightarrow{\delta_{x, x_j}} x_j$ es una flecha en C , entonces $(-, x_j) \in r(P)$. Sea $\alpha := (-, \delta_{x, x_j})$, entonces $\alpha|_P : (-, x)|_P \rightarrow (-, x_j)|_P$. El morfismo $i : (-, x) \rightarrow \coprod_{x_i \in I} (-, x_i)$ está dado por la matriz $((-, \delta_{x, x_i}))$ y tenemos $i|_P : (-, x)|_P \rightarrow \coprod_{x_i \in I} (-, x_i)|_P$.

Como $i|_P$ es casi se divide izquierdo, $\alpha|_P$ puede factorizarse a través de $i|_P$. Entonces $\alpha|_P = \sigma \circ i|_P$ para alguna σ . Aplicando H y usando 6-10 (b), obtenemos:

$$\alpha = H(\alpha|_P) = H(\sigma) \circ H(i|_P) = H(\sigma) \circ i.$$

Además, $H(\sigma) : \coprod_{i \in I} (-, x_i) \rightarrow (-, x_j)$ está inducido por morfismos $\delta_{x_i, x_j} : x_i \rightarrow x_j$. Entonces

$\delta_{x, x_j} = \sum_{x_i \in I} \delta_{x_i, x_j} \circ \delta_{x, x_i}$, y esto es imposible a menos que $x_j \in I$. //

(6-18) Lema: Si $(-, x) \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$ y

$$0 \rightarrow (-, x) |_{\mathcal{P}} \rightarrow \coprod_{x_i \in \mathcal{X}^+} (-, x_i) |_{\mathcal{P}} \rightarrow L \rightarrow 0$$

es una sucesión que casi se divide con cada $(-, x_i) \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$, entonces $(-, \bar{x}) \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$ y

$$0 \rightarrow (-, x) |_{\mathcal{P}} \rightarrow \coprod_{x_i \in \mathcal{X}^+} (-, x_i) |_{\mathcal{P}} \rightarrow (-, \bar{x}) |_{\mathcal{P}} \rightarrow 0$$

es una sucesión que casi se divide.

Demostración: Si x fuera inyectivo, sería inyectivo admisible y tendríamos $L=0$. Entonces x no es inyectivo, y del lema 6-3 se obtiene:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow (-, x) |_{\mathcal{P}} & \rightarrow & \coprod_{x_i \in \mathcal{X}^+} (-, x_i) |_{\mathcal{P}} & \rightarrow & L & \rightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \cong & & \\ & & (-, x) |_{\mathcal{P}} & \rightarrow & \coprod_{x_i \in \mathcal{X}^+} (-, x_i) |_{\mathcal{P}} & \rightarrow & (-, \bar{x}) |_{\mathcal{P}} \rightarrow 0 \end{array}$$

Por 1-13, usando que H es exacto izquierdo,

existe un monomorfismo f en el siguiente diagrama conmutativo con renglones exactos:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & (-, x) & \longrightarrow & \coprod_{x_i \in x^+} (-, x_i) & \longrightarrow & H(L) \\
 & & \parallel & & \parallel & & \uparrow \delta \\
 & & (-, x) & \longrightarrow & \coprod_{x_i \in x^+} (-, x_i) & \longrightarrow & \text{rad}(-, \bar{x}) \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

Entonces, del lema 6-9, se sigue que $(-, \bar{x}) \in \mathcal{P}$. //

Demostración de 6-14: Observemos que si h es la estratificación de C , sus fibras nos determinan una partición de C_0 . Si $x \in E_n := h^{-1}(n)$, diremos que x tiene estrato n .

Probaremos 6-14 por inducción sobre el estrato. Supongamos que el Teorema vale para cada z cuyo estrato $h(z) < n$, para cierta n fija, y veamos que también vale para cada x de estrato n .

Omitiremos la base de la inducción: en los puntos de estrato mínimo.

Paso I: (A) vale para cada $z \in E_n \cap \mathcal{P}$.

Supongamos que x es minimal en $E_n \cap \mathcal{P}$, con respecto al orden parcial dado por las flechas. De 1-13, tenemos $\text{rad}(-, x) \cong \coprod_{z_i \in x^-} (-, z_i)$; además,

como x es minimal, ningún $z_i \in E_n \cap P$.

Si $z_i \in E_n$, $\bar{z}z_i$ tiene estrato menor que n ; por hipótesis $(-, \bar{z}z_i)|_P$ no es inyectivo y $(-, z_i) \in \mathcal{E}_x(P)$.

Si $z_i \notin E_n$, z_i tiene estrato menor que n y otra vez, usando la hipótesis de inducción, $(-, z_i) \in \mathcal{E}_x(P)$.

El resultado se sigue de 6-9.

Ahora, suponiendo que (A) vale para cada $z \in E_n \cap P$ tal que $z < x$ para algún $x \in E_n \cap P$, deberíamos probar (A) para esta x . La prueba es similar a la anterior.

Paso II: (A) vale para cada $x \in E_n$.

Si $x \in E_n$, podemos suponer que $x \notin P$; entonces $\bar{z}x$ tiene sentido, y estrato menor que n . Por tanto, $(-, \bar{z}x)|_P$ no es inyectivo y $(-, x) \in \mathcal{E}_x(P)$.

Paso III: 6-14 vale para cada x minimal en E_n .

Consideremos el morfismo mínimo que casi se divide izquierdo: $(-, x)|_P \rightarrow \coprod B_i$ con cada B_i indecible.

Si B_i no es proyectivo, hay un morfismo irreducible $\bar{z}B_i \rightarrow (-, x)|_P$.

Si $x \notin P$, $\bar{z}x$ tiene estrato menor que n y entonces, aplicando (c), $\bar{z}B_i \cong (-, z)|_P$ para alguna $z \in x^-$.

Si $x \in P$, $\text{rad}(-, x) \cong \coprod_{z \in x^-} (-, z)$ y también se

tiene $\bar{c}B_i \cong (-, z)/\mathcal{P}$ con $z \in x^-$.

En ambos casos, z tiene estrato menor que n pues x es mínimo en En . Entonces $\bar{c}x \in C_0$, $B_i \cong \bar{c}(-, z)/\mathcal{P} \cong (-, \bar{c}z)/\mathcal{P}$ con $(-, \bar{c}z) \in \mathcal{P}$.

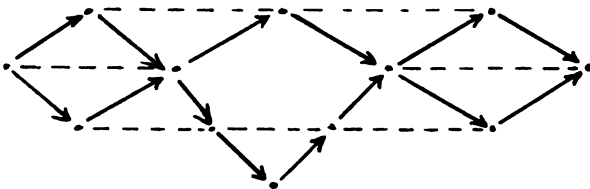
Si B_i es proyectivo, $B_i \cong (-, p)/\mathcal{P}$ para algún $p \in \mathcal{P}$ y hay una flecha $x \rightarrow p$. Entonces $n = h(x) = h(p)$ y $p \in En \cap \mathcal{P}$. Por el paso I, $(-, p) \in \mathcal{P}$.

El resto se sigue de los lemas 6-16, 6-17, 6-18.

Paso IV: Asumiendo que 6-14 vale para cada $z \in En$ tal que $z < x$, para algún $x \in En$; entonces también vale para x .

Este paso es similar al anterior y se omite. //

(6-19) Ejemplo: el siguiente carcaj de trans-lación muestra que 6-14 es más general que 6-1 de [4], aún en el caso en que C es finito:



6.8 Caracterización de carcajes de Auslander-Reiten sin ciclos dirigidos.

En esta sección estableceremos el siguiente:

(6-20) Teorema: Sea C una componente preprojectiva finita sin ciclos dirigidos. Entonces C es un carcaj de Auslander-Reiten si y sólo si los injectivos de C son admisibles y cada uno de sus vértices tiene soporte no vacío.

Demstración: Una de las dos implicaciones se encuentra verificada en 1-14. Para verificar la restante, consideremos la cubierta universal $\tilde{C} \xrightarrow{\Pi} C$ de C .

Tenemos:

(6-21) Proposición: La asignación $x \mapsto k(\tilde{C})(-, x) / \tilde{\mathcal{P}}$ define un isomorfismo $\sigma: \tilde{C} \xrightarrow{\cong} \text{CAR}(\Lambda)$, donde $\Lambda = \tilde{\mathcal{P}}$ es la subcategoría plena de $k(\tilde{C})$ que consta de los vértices proyectivos de \tilde{C} .

($k(\tilde{C})$ es localmente acotada pues $k(C)$

lo es ([5], 2-5). De allí que también Λ lo sea).

Este isomorfismo σ induce un funtor "bien portado" ([8], 2-2) $F: k(\tilde{C}) \rightarrow \text{ind } \Lambda$, es decir un k -funtor que manda cada vértice $x \in \tilde{C}_0$ sobre σx y cada clase $\bar{\alpha}$ de $k(\tilde{C})$, donde α es una flecha, en un morfismo irreducible de $\text{mod } \Lambda$.

Por ([5], 3-1), F es un "funtor cubriente", es decir: F induce biyecciones

$$\coprod_{z \in \sigma^{-1}y} k(\tilde{C})(x, y) \cong \text{ind } \Lambda(\sigma x, \sigma y) \cong \coprod_{t \in \sigma^{-1}x} k(\tilde{C})(t, y).$$

Entonces F es isomorfismo, $k(\tilde{C}) \cong \text{ind } \Lambda$.

Una aplicación directa de ([5], 2-9), muestra que entonces C es un carcaj de Auslander-Reiten. //

Demostración de 6-21: Bastará probar:

(6-22) Lema: Para cada $x \in \tilde{C}_0$, el morfismo $k(\tilde{C})(-, x) |_{\tilde{\mathcal{P}}} \rightarrow \coprod_{x_i \in x^+} k(\tilde{C})(-, x_i) |_{\tilde{\mathcal{P}}}$ es mínimo casi se divide izquierdo en $\text{mod } \Lambda$.

En efecto, de 6-22 se sigue que \tilde{C} es isomorfo a la componente preprojectiva de $\text{CAR}(\Lambda)$ (σ es este isomorfismo).

Supongamos que $M \in \text{CAR}(\Lambda) \setminus \text{Im} \sigma$. Como $\text{Im} \sigma$ es componente conexa, el morfismo no nulo que existe en $\text{mod} \Lambda$ desde algún $Q \in \text{proj} \Lambda$ en M , pertenece a

$$\text{rad}^{\infty}(Q, M) := \bigcap_n \text{rad}^n(Q, M).$$

Entonces hay caminos de irreducibles de longitud arbitrariamente grande en $\text{Im} \sigma$, pero esto es imposible ya que $|C_0|$ es una cota para la longitud de los caminos de \tilde{C} (ver 5-3 (A)). //

Demostración de 6-22: Sean $x \in \tilde{C}_0$ y $k(\tilde{C})(-, x) |_{\tilde{\mathcal{P}}} \rightarrow M$ un morfismo de $\text{mod} \Lambda$ que no es sección.

Como M es finitamente generado, tiene soporte $S = \{x \in \tilde{\mathcal{P}} / M(x) \neq 0\}$ finito.

Sea E un subcarcaj finito y conexo de \tilde{C} que contenga a $S \cup x^+$.

Por 5-2, existe un subcascaraj de trans-
laci3n \mathcal{D} de $\tilde{\mathcal{C}}$ que es cascaraj de Auslander-
Reiten y tal que $[-, E] \subseteq \mathcal{D}$ y $\mathcal{P}_{\mathcal{D}} = [-, E] \cap \mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{C}}}$.

Observemos que la inclusi3n $\mathcal{P}_{\mathcal{D}} \subset \mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{C}}}$ define
una inmersi3n $\mathcal{P}_{\mathcal{D}} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{P}}$ donde $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$ denota
la subcategoría plena de $k(\mathcal{D})$ definida
por los v3rtices proyectivos de \mathcal{D} . Esto se
debe al hecho de que para cada
 $p \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}$ y $z \in [-, E]$ vale:

$$k(\mathcal{D})(p, z) = k(\tilde{\mathcal{C}})(p, z).$$

Observemos tambi3n que $x_z^+ = x_{\mathcal{D}}^+$, y
 $k(\tilde{\mathcal{C}})(-, x) |_{\tilde{\mathcal{P}}} \longrightarrow \coprod_{x_i \in x^+} k(\tilde{\mathcal{C}})(-, x_i) |_{\tilde{\mathcal{P}}}$ no se divide,

pues su imagen bajo el funtor restricci3n
 $\text{mod } \tilde{\mathcal{P}} \longrightarrow \text{mod } \mathcal{P}_{\mathcal{D}}$ es

$$k(\mathcal{D})(-, x) |_{\mathcal{P}_{\mathcal{D}}} \longrightarrow \coprod_{x_i \in x^+} k(\mathcal{D})(-, x_i) |_{\mathcal{P}_{\mathcal{D}}} \text{ que no}$$

se divide. (De hecho es m3nimo que casi
se divide izquierdo por 6-14 (B)).

Ahorabi3n, si $\eta |_{\mathcal{P}_{\mathcal{D}}}$ fuera secci3n con in-

versa izquierda δ , entonces la transformación natural $\bar{\delta}$ tal que:

$$\bar{\delta}_z = \begin{cases} \delta_z & \text{si } z \in \mathcal{P}_D \\ 0 & \text{si } z \in \tilde{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{P}_D \end{cases}$$

es una inversa izquierda para η en $\text{mod } \tilde{\mathcal{P}}$ lo cual es absurdo, pues η no es sección.

Entonces existe θ tal que:

$$\begin{array}{ccc} k(D)(-, x)|_{\mathcal{P}_D} & \xrightarrow{\quad} & \coprod_{x_i \in x^+} k(D)(-, x_i)|_{\mathcal{P}_D} \\ \eta \downarrow & \nearrow \theta & \\ M|_{\mathcal{P}_D} & & \end{array} \quad \text{conmuta en mod } \mathcal{P}_D.$$

De allí que:

$$\begin{array}{ccc} k(\tilde{E})(-, x)|_{\tilde{\mathcal{P}}} & \xrightarrow{\quad} & \coprod_{x_i \in x^+} k(\tilde{E})(-, x_i)|_{\tilde{\mathcal{P}}} \\ \eta \downarrow & \nearrow \bar{\theta} & \\ M & & \end{array}$$

también conmuta en $\text{mod } \tilde{\mathcal{P}}$, donde $\bar{\theta}$ es la transformación natural tal que:

$$\bar{\theta}_z := \begin{cases} \theta_z & \text{si } z \in \mathcal{P}_D \\ 0 & \text{si } z \in \tilde{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{P}_D \end{cases}.$$

Hemos mostrado que

$$k(\tilde{E})(-, x) |_{\tilde{\mathcal{P}}} \rightarrow \coprod_{x_i \in x^+} k(\tilde{E})(-, x_i) |_{\tilde{\mathcal{P}}}$$

es morfismo que casi se divide a izquierda. Como antes, es fácil verificar que si este morfismo no fuera mínimo, su imagen bajo la restricción $\text{mod } \tilde{\mathcal{P}} \rightarrow \text{mod } \mathcal{P}_D$ tampoco lo sería, contradiciendo así 6-14 (B). //

7- SOBRE EL PROBLEMA DE LA ESTRATIFICACIÓN
DE CARCAJES DE AUSLANDER-REITEN SIN
CICLOS DIRIGIDOS.

- (7-1) Definición: Sea $C = (C, \alpha)$ un carcaj de translación. Entonces una estratificación de C es una función $h: C_0 \rightarrow \mathbb{N}$ tal que:
- (i) si $x \rightarrow y$ es una flecha en C , entonces $h(x) \leq h(y)$.
 - (ii) si $x \rightarrow p$ es una flecha en C con p vértice proyectivo, entonces $h(x) = h(p)$.
 - (iii) Si x es un vértice de C no proyectivo, entonces $h(\alpha x) < h(x)$.

Mostraremos en este capítulo el siguiente:

(7-2) Teorema: Si $C = \text{CAR}(\Lambda)$ con Λ k -álgebra de tipo finito y C sin ciclos orientados, entonces C es estratificable: esto es que existe una estratificación de C .

Este resultado nos da una descripción geométrica de C : en efecto, si recordamos que una presección δ es un subconjunto $\delta \subseteq C_0$ tal que $x \in \delta \Rightarrow \alpha x \notin \delta$, entonces es claro que de la

existencia de una estratificación h se sigue que $C = \bigcup S_n$ con cada S_n presección (basta tomar $S_n := h^{-1}(n)$). Esto es una generalización del Teorema de [3].

El interés de una descripción de C de este tipo está en que permite probar algunas propiedades de los vértices de C haciendo una doble inducción: primero sobre "el estrato" (n) y después, dentro de cada presección S_n , sobre el orden parcial determinado por las flechas. Véase por ejemplo la sección (6-A).

A continuación iniciamos una discusión que culminará al final de la sección con la prueba de (7-2).

(7-3) Definición: Sea $C = (C, \vec{c})$ un carcaj de translación. Sea \sim la relación de equivalencia en C_0 generada por las siguientes relaciones elementales:

$x \sim p$ siempre que exista $x \rightarrow p$ en C
con p proyectivo.

Denotemos por C' el carcaj cuyo conjunto de vértices es $C'_0 := C_0/\sim$ y cuyas flechas se colocan según la siguiente regla:

ponemos $\bar{x} \rightarrow \bar{y}$ en C' siempre que $\bar{x} \neq \bar{y}$,
y existan $x' \in \bar{x}$, $y' \in \bar{y}$, $x' \rightarrow y'$ en C .

De aquí en adelante supondremos que C
es como en (7-2).

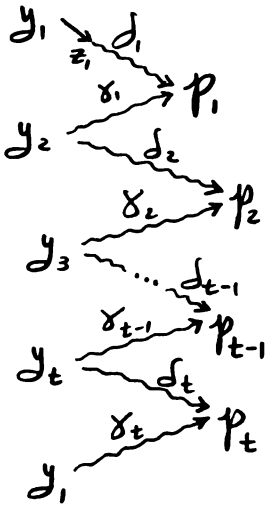
(7-4) Observación: Para mostrar que C es
estratificable basta probar que:

(a) C' no tiene ciclos dirigidos.

(b) $x \sim p \Rightarrow \exists x \not\sim p$ para cada vórtice
 $x \in C_0$ y p proyectivo de C .

En efecto, si C' no tiene ciclos orientados,
 C' admite una numeración de sus vórtices
 $h': C'_0 \rightarrow \mathbb{N}$ tal que para cada flecha
 $x \rightarrow y$ en C' se cumple que $h'(x) < h'(y)$
(esta h' se construye fácilmente por inducción
sobre el orden parcial en C' determinado
por las flechas). Claramente, esta h' induce
una estratificación $h: C_0 \rightarrow \mathbb{N}$ si y sólo
si se cumple (b).

(7-5) Observación: Puesto que C no tiene ciclos dirigidos, cada ciclo dirigido de C' debe estar producido por un camino escalonado δ en C de la forma:



donde: $t \geq 1$; todos los vértices que aparecen en los caminos dirigidos δ_i son proyectivos excepto posiblemente las fuentes y_i ; los caminos δ_i, δ_j tienen todos longitud mayor o igual que 1; $\delta_i \neq \delta_j$ para cada i, j ; $\delta_t \neq \delta_i$;

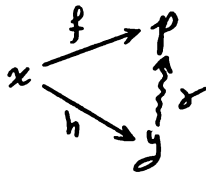
Diremos que un camino en C es irreducible si corta a lo más una vez cada \bar{c} -órbita de C , y además es Hamiltoniano.

Mostraremos primero que no hay caminos escalonados irreducibles en C , y analizaremos después bajo qué condiciones todo camino escalonado de C "se reduce" a

uno escalonado irreducible.

Antes damos un lema tecnico que nos será de utilidad.

(7-6) Lema (Bautista): En C no aparece la siguiente situación:



donde p es proyectivo de C y δ es un camino orientado de y en p de longitud ≥ 1 tal que δh no se anula en $k(C)$.

Demostración: Supongamos que sí aparece, y consideremos la familia infinita de morfismos $\{x \xrightarrow{f-\lambda gh} p\}_{\lambda \in k}$ donde g es la composición de los morfismos que constituyen δ .

Como $f \in \text{rad}(x, p) \setminus \text{rad}^2(x, p)$ y $\lambda gh \in \text{rad}^2(x, p)$, entonces cada $f - \lambda gh \in \text{rad}(x, p) \setminus \text{rad}^2(x, p)$ y es por tanto irreducible. Puesto que p es proyectivo, cada $f - \lambda gh$ es monomorfismo.

Consideremos ahora los conúcleos:

$$0 \longrightarrow x \xrightarrow{f-\lambda gh} p \longrightarrow K_\lambda .$$

Nótese que todos los K_λ son módulos con la misma k -dimensión finita $d = \dim_k p - \dim_k x$ y entonces, puesto que Λ es de tipo finito, no hay más que un número finito de posibles K_λ no isomorfos. En particular, existen $\lambda, \lambda' \in k$ distintos con $K_\lambda \cong K_{\lambda'}$.

Como p es proyectivo, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & x & \longrightarrow & p & \longrightarrow & K_\lambda \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow s & & \downarrow t & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & x & \longrightarrow & p & \longrightarrow & K_{\lambda'} \longrightarrow 0 \end{array} .$$

Como C no tiene ciclos dirigidos, $\text{End}_\Lambda(x) \cong k$. En consecuencia s, t son escalares y tenemos:

$$f - \lambda gh = t^{-1}(f - \lambda' gh)s = t^{-1}s f - t^{-1}\lambda' ghs$$

de donde $f \equiv t^{-1}s f \pmod{\text{rad}^2(x, p)}$.

Entonces $s = t$, por tanto $\lambda gh = \lambda' gh$ y, puesto que $gh \neq 0$, $\lambda = \lambda'$ lo cual es contradictorio. //

(77) Proposición: No hay caminos escalonados irreducibles en C .

Demostración: Supongamos que hay un camino escalonado irreducible δ en C . Consideremos $\mathcal{D}(\delta)$ el subcategoría de transacción de C definido por:

$$\mathcal{D}(\delta) := \{ \bar{\sigma}^n x / x \in \delta, n \in \mathbb{Z} \text{ y } \bar{\sigma}^n \text{ definido} \} \text{ y}$$

$$\mathcal{D}(\delta)_1 := \{ \bar{\sigma}^n \alpha / \alpha \text{ es una flecha de } \delta, n \in \mathbb{Z} \text{ y } \bar{\sigma}^n \text{ definido} \}.$$

Mostraremos que $\mathcal{D}(\delta)$ es infinito, y para esto nos será de utilidad el siguiente:

(7-8) Lema (Larrón): Sean $x, y \in \mathcal{D}(\delta)_0$, digamos que $x \in \bar{\sigma}^r \delta$, $y \in \bar{\sigma}^s \delta$. Entonces, si hay un camino dirigido en $\mathcal{D}(\delta)$ de la forma $x \rightsquigarrow y$, debe suceder que $r \leq s$.

Demostración: Obsérvese primero que δ es sección en $\mathcal{D}(\delta)$ y después hágase inducción sobre la longitud del camino. //

Consideremos la siguiente numeración de los vértices de δ : (vease la figura en (7-5))

$$\delta: x_1 = y_1 \longrightarrow x_2 = z_1 \text{ --- } x_3 \text{ --- } \dots \text{ --- } x_r = y_r.$$

Diremos que un camino dirigido δ de $\mathcal{D}(\delta)$ es hélice-positivo si siempre que $z \rightarrow z'$ sea una flecha de δ se tiene que: $\mathcal{O}(z) = \mathcal{O}(x_i)$ y $\mathcal{O}(z') = \mathcal{O}(x_s)$ para alguna $i \in \{1, \dots, r\}$, donde s es el resto de dividir $i+1$ entre r .

Nótese que un camino hélice-positivo es "seccional" (esto es: no contiene ningún subcamino de la forma $z \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow x$) y por lo tanto no se anula nunca en $k(C)$.

Probaremos la siguiente afirmación por inducción sobre n :

(A): Para cada $n \geq 0$ se tiene que:

$\bar{e}^n x$ está definido para cada vértice x de δ . Mas aún, para cada i y cada vértice z de δ_i no fuente, hay un camino hélice-positivo en $\mathcal{D}(\delta)$ desde algún proyectivo p de δ a $\bar{e}^n z$.

Para $n=0$, la afirmación es obvia. Así que supongamos (A) válida para n y probémosla para $n+1$.

Sea $z \in \delta_i$ no pozo. Entonces hay un camino hélice-positivo $p \xrightarrow{\delta} \bar{e}^n y$ en $\mathcal{D}(\delta)$, donde y está determinado por la flecha $z \rightarrow y$ que aparece en δ_i y p es un proyectivo de C que está en δ .

Para ver que $\bar{e}^n z$ no es vértice de \mathcal{J} , supongamos lo contrario y busquemos una contradicción. Consideremos el tramo $\bar{e}^n z \xrightarrow{\mathcal{J}'} \bar{e}^n y$ de \mathcal{J} . Observemos que, por la forma en que hemos elegido la numeración de δ , si \mathcal{J}' fuera de longitud 1 entonces \mathcal{J} no sería hélice-positivo ya que tendría una flecha $\mathcal{O}(z) \rightarrow \mathcal{O}(y)$. Entonces tenemos dentro de $\mathcal{D}(\delta)$ la situación:



Del lema (8-8) se sigue que \mathcal{J}' está totalmente contenido en $\bar{e}^n \delta$. Entonces, trasladando la situación dentro de δ , mediante la aplicación de \bar{e}^n , se obtiene una contradicción con el lema (7-6).

Hemos mostrado que $\bar{e}^n z$ no es vértice de \mathcal{J} .

De esto se sigue que δ es un camino que no se anula y que no se factoriza por $\bar{c}^n z$ en $k(c)$, y de allí que $\bar{c}^n z$ no es inyectivo (pues no es admisible). Entonces $\bar{c}^{n+1} z$ está definido y, además, es claro que $p \xrightarrow{\delta} \bar{c}^n y \rightarrow \bar{c}^{n+1} z$ es un camino hélice-positivo.

Hemos probado el paso inductivo de (A) para cada z vértice no pozo de δ_i .

Consideremos ahora un subcamino de δ del tipo:

$$\delta_i = (y_i = \delta_1 \rightarrow \delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \delta_u = p_i)$$

y definamos:

$$f_j := \begin{cases} \bar{c}^{n+1} \delta_j & \text{si tiene sentido y } i \leq j \leq u. \\ \bar{c}^n q & \text{si } j=0 \text{ y } y_i \xrightarrow{\alpha} q \\ & \text{es la flecha de } \delta_i \\ & \text{que sale de } y_i. \end{cases}$$

Hace poco se probó que $\bar{c}^n \delta_1$ no es inyectivo y que desde algún proyectivo p en δ llega a f_0 un camino hélice-positivo δ que no se factoriza por $\bar{c}^n \delta_1$. (*): Nótese que si $s \rightarrow f_0$ es la flecha de δ que

que termina en f_0 , $s \in \bar{c}^{n-1} \delta$ siempre que $n \geq 1$).

Probaremos ahora la siguiente afirmación por inducción sobre j :

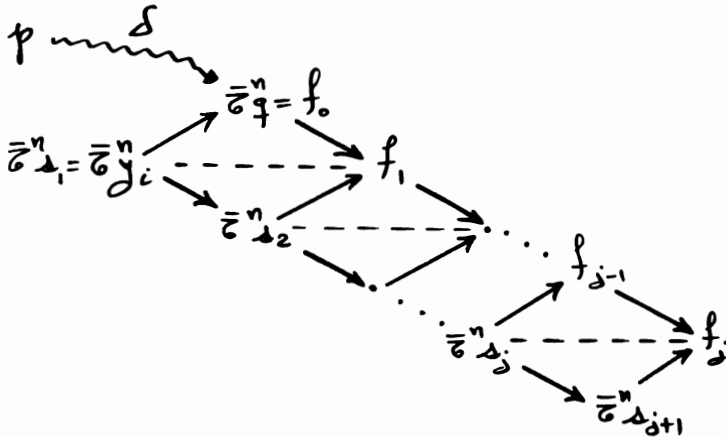
(B): Para cada j tal que $1 \leq j \leq u$ se tiene: $\bar{c}^n s_j$ no es inyectivo y, mas aún, $p \overset{\delta}{\rightsquigarrow} f_0 \rightarrow f_1 \rightarrow \dots \rightarrow f_{j-1}$ tiene sentido y es un camino hélice-positivo que no se factoriza por $\bar{c}^n s_j$.

Conociendo ya la validez de (B) para $j=1$, supongamos que vale para j y mostremosla para $j+1$.

Por hipótesis de inducción $f_j = \bar{c}^{n+1} s_j$ está definido y claramente

$\delta' = (p \overset{\delta}{\rightsquigarrow} f_0 \rightarrow \dots \rightarrow f_{j-1} \rightarrow f_j)$ es un camino hélice-positivo.

Vease la siguiente figura:



Veamos que \mathcal{S}' no se factoriza por $\bar{c}_{\Delta_{j+1}}^n$.
 Para esto, debido a que \mathcal{S}' es seccional,
 basta ver que \mathcal{S}' no pasa por allí.

Claramente se tiene que $\bar{c}_{\Delta_{j+1}}^n \neq f_t$ para
 cada t donde $1 \leq t \leq j$.

Por otro lado, como se mencionó en (*), si
 $s \rightarrow f_0$ es la flecha de \mathcal{S} que termina
 en f_0 , $s \in \bar{c}^{n-1}$. Por el lema (7-8),
 se tiene que $\mathcal{S} \cap \bar{c}^{n-1} = \{f_0\}$. Entonces

$\bar{e}^n_{\Delta_{j+1}} \notin \mathcal{D}'$ a menos que coincida con f_0 .
 Esto último no puede suceder debido a
 que γ es Hamiltoniano.

Entonces $\bar{e}^n_{\Delta_{j+1}}$ no es inyectivo, ya que no
 es admisible: \mathcal{D}' es un camino que no
 se anula y que no se factoriza por $\bar{e}^n_{\Delta_{j+1}}$
 en $k(C)$.

La afirmación (B) realiza el paso inductivo
 de la afirmación (A) para los vértices de Δ_i .
 Claramente (A) implica que $\mathcal{D}(\gamma)$ es
 infinito y eso es imposible. //

(7-9) Observación: Vamos a suponer
 de aquí en adelante, hasta (7-10),
 que C satisface la siguiente condición:

(R): Todo camino no dirigido en C de la
 forma $x \rightsquigarrow \bar{e}^n x$ tiene longitud $\geq 2n$.

Hasta ahora el autor desconoce ejemplos en los cuales esta condición no se cumpla, y conjetura que (R) vale en general.

Precisemos ahora el significado de "reducción". Diremos que el camino escalonado δ se reduce a δ' si δ' se obtiene de δ por medio de un número finito de operaciones de algunos de los siguientes cuatro tipos:

1er Tipo: Dado un camino escalonado δ , consideremos la numeración de los vértices de δ introducida en la prueba de (7-7). Sea i el mínimo índice tal que $x_i = x_{itj}$ para algún vértice x_{itj} de δ (con $j \neq 0$), y sea s el mínimo índice j con esa propiedad. Entonces el tramo:

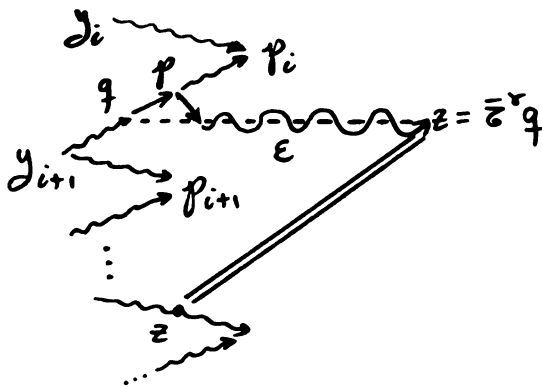
$$\delta' = (x_i \text{---} x_{it_1} \text{---} \dots \text{---} x_{its})$$

de δ es claramente un camino escalonado de C de longitud menor o igual que la de δ .

Un camino δ' que ha resultado de una reducción del primer tipo será llamado Hamiltoniano.

2° Tipo: Sea δ un camino escalonado Hamiltoniano. Supongamos que q es un vértice de algún camino δ_i de δ que no es fuente ni pozo de δ . Sea $q \rightarrow p$ la flecha que sale de q en δ_i . Supongamos también que existe otro vértice z de δ tal que $O(q) = O(z)$. Entonces $z = \bar{\sigma}^r q$ para una $r > 0$. Para una indexación adecuada de los vértices de δ ("girando a δ "), se puede suponer que z está más abajo que δ_i (ver figura). Sabemos que hay un $\bar{\sigma}$ -camino de q en z , es decir un camino $q \rightsquigarrow z$ tal que cada una de sus flechas $x \rightarrow y$ toca en x ó en y la órbita $O(q)$. Podemos suponer además que este $\bar{\sigma}$ -camino es de la forma $q \rightarrow p \xrightarrow{\varepsilon} z$. Cortemos δ en los vértices p y z , desechemos el tramo que contiene a q , e insertemos el camino ε en su lugar.

Vease la figura:



Hemos obtenido así un camino escalonado δ' de longitud estrictamente menor que la longitud de δ . Esto sucede debido a que, por (R), $q \rightarrow p \rightsquigarrow^{\varepsilon} z$ es un camino de longitud mínima de q en z .

3er Tipo: Sea δ un camino escalonado Hamiltoniano y supongamos que existen S_i y x, z vértices distintos de S_i tales que $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(z)$. Asumamos que x es el vértice de S_i más cercano a la fuente y_i tal que $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(z)$ para algún $z \neq x$ donde z también es vértice de S_i .

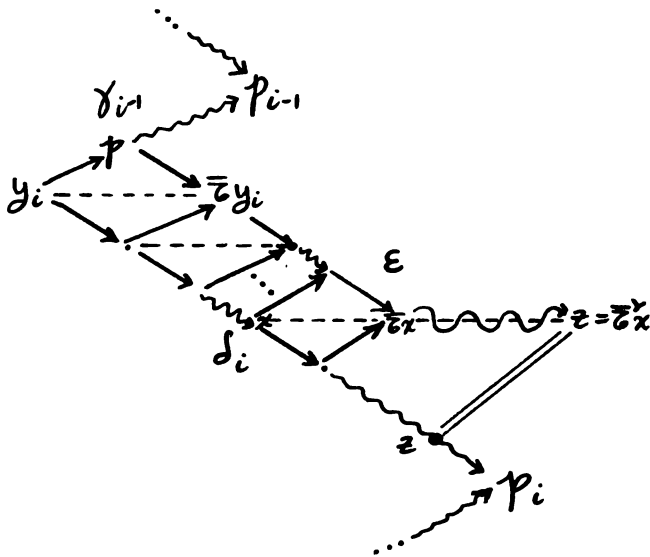
Nótese que no puede suceder que $z = \bar{c}^r x$ para $r < 0$, pues se tendría un ciclo dirigido en C . Entonces $z = \bar{c}^r x$ para algún $r > 0$.

Puede probarse como en la parte (B) de la demostración de (7-7) que \bar{c}_s está definido para cada vértice s de S_i entre y_i y x . Sea $y_i \rightarrow p$ la flecha de δ_{i-1} que parte de y_i . Entonces tenemos un camino:

$$\varepsilon = (p \rightarrow \bar{c} y_i \rightarrow \dots \rightarrow \bar{c} x \rightsquigarrow z)$$
 donde $\bar{c} x \rightsquigarrow z$ es un \bar{c} -camino.

Cortemos δ en p y en z , desechemos el tramo que contiene a y_i e insertemos en su lugar el camino ε .

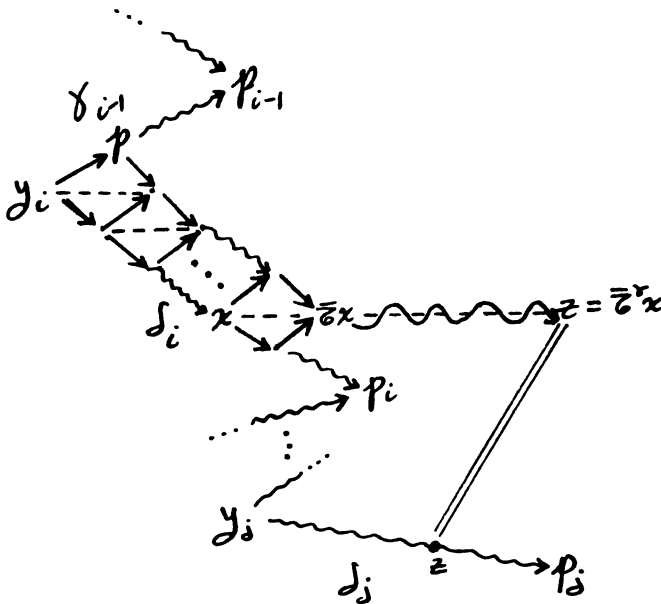
Vease la figura:



Nuevamente hemos obtenido un camino escalonado δ' de longitud estrictamente menor que la de δ (Aquí hemos usado otra vez (R)).

4º Tipo: Observemos que aplicando un número finito de veces las operaciones 1 y 3, podemos reducir cualquier camino escalonado a otro δ que es Hamiltoniano y tiene la propiedad de que cada δ_i es irreducible.

Supongamos que δ es un camino escalonado que ha sido reducido de esa manera, y supongamos además que existen dos vértices distintos x, z de δ contenidos en diferentes δ_i, δ_j respectivamente tales que $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(z)$. Para una indicización adecuada de δ , sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $z = \bar{c}^r x$ para algún $r > 0$, y $j > i$.
 Vease la figura:



Recortando como en la reducción del 3^{er} Tipo, obtenemos aquí también un camino δ' escalonado

de longitud menor estrictamente que la de δ .

Finalmente, si δ es un camino escalonado en C , por ser finito, no pueden aplicarsele indefinidamente operaciones de los tipos anteriores. De modo que podemos reducir δ a un camino δ' escalonado irreducible.

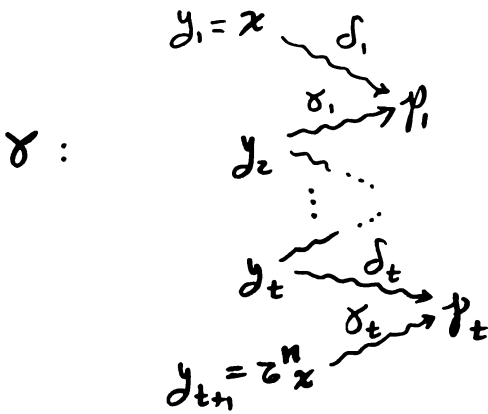
Hemos probado:

(7-10) Proposición: Si vale la condición (R), entonces C no tiene caminos escalonados. Entonces, por (7-5), C' no posee ciclos dirigidos //

Veamos ahora que (b) de (7-4) vale siempre:

(7-11) Proposición: Sean x, p vertices de C tales que p es proyectivo y $x \sim p$. Entonces $\bar{c} x \neq p$.

Demostración: Supongamos que $\bar{c}^n x \sim p \sim x$ para alguna $n \neq 0$. Entonces existe un camino δ como se indica en la figura siguiente:



donde: valen todas las propiedades que se indican en (7-5) excepto que aquí $y_i \neq y_{t+1}$; los vertices de cada δ_i son proyectivos tambien, excepto

posiblemente las fuentes.

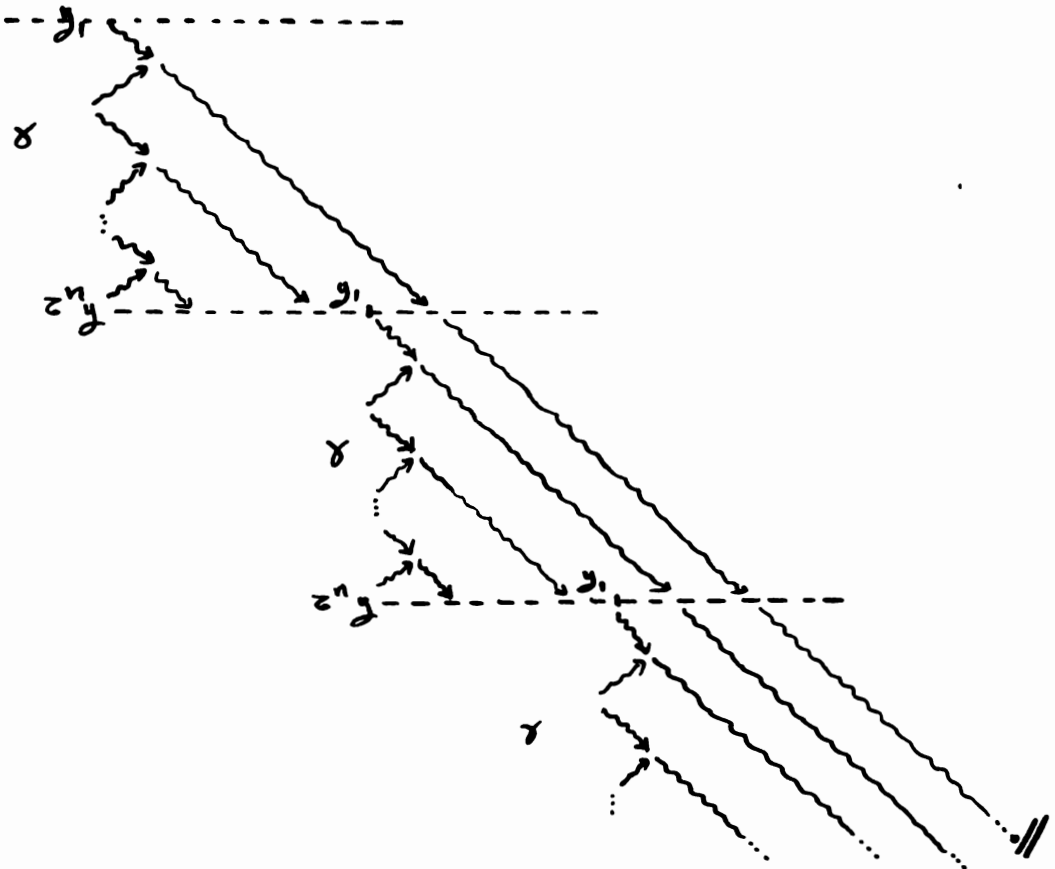
Sea δ' un subcamino no trivial de δ con la propiedad de ser de longitud mínima entre los subcaminos de δ que tienen extremos cuyas órbitas coinciden. Siendo δ' del mismo "tipo" que δ , supongamos que $\delta = \delta'$. Entonces, quitando cualquier extremo de δ se obtiene un camino irreducible.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $y_{t+n} = z^n y_1$ con $n > 0$.

Definiendo $D(\delta)$ como en la prueba de (7-7) y utilizando las técnicas que allí se manejan, se prueba de manera análoga que: $D(\delta)$ es infinito en caso de que

$\sum_{i=1}^t \text{longitud}(\delta_i) < n$ y en caso contrario aparece un ciclo dirigido en C . Una contradicción en cualquiera de los dos casos.

Para ilustrar la última afirmación, incluimos el siguiente esquema que representa a $D(\delta)$ "desenvuelto", y se han marcado algunos caminos no nulos importantes:



El siguiente Teorema es básico en la prueba de (7-2):

(7-12) Teorema (Bautista): Existe un morfismo cubriente $p: \tilde{C} \rightarrow C$ tal que \tilde{C} es un carcaj finito de Auslander-Reiten que satisface la condición (R).

Demostración:

1. Notación y observaciones preliminares:

Fijemos un vértice arbitrario x_0 de C . Si γ es un camino cerrado (no orientado) de C que comienza y termina en x_0 (diremos que está basado en x_0), definimos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta^+(\gamma) := \# \text{ de flechas en la dirección de } \gamma. \\ \delta^-(\gamma) := \# \text{ de flechas en la dirección opuesta a la de } \gamma. \\ \delta(\gamma) := \delta^+(\gamma) - \delta^-(\gamma). \end{array} \right.$$

(Recordemos que los caminos están dados por sucesiones finitas de flechas y vértices:

$\gamma = (v_0, \alpha_0, v_1, \alpha_1, \dots, \alpha_n, v_n)$, entonces la flecha α_i es una flecha en la dirección de γ

si $v_i \xrightarrow{\alpha_i} v_{i+1}$, y es una flecha en la dirección opuesta a la de δ si $v_i \xleftarrow{\alpha_i} v_{i+1}$).

Observemos que si δ_1, δ_2 son dos caminos cerrados basados en x_0 que son homotópicos (ver § 4-A), entonces $d(\delta_1) = d(\delta_2)$.

Entonces d induce una función $d: \pi(C, x_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ que claramente es un morfismo de grupos pues $d(\delta_1 \delta_2) = d(\delta_1) + d(\delta_2)$. Siendo \mathbb{Z} abeliano, se induce otro morfismo que también denotamos con la misma letra:

$$d: \pi(C, x_0) / \pi'(C, x_0) \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Ahora bien, en [5] se muestra que $\pi(C, x_0)$ es grupo libre, de donde $\pi(C, x_0) / \pi'(C, x_0)$ es grupo libre abeliano. Siendo $\pi(C, x_0)$ finitamente generado, también lo es el cociente, y obtenemos:

$$\pi(C, x_0) / \pi'(C, x_0) \cong \pi_1 \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \pi_r \mathbb{Z}$$

para algún sistema libre de generadores $\{\pi_1, \dots, \pi_r\}$.

2° Construcción de $\tilde{C} \xrightarrow{p} C$.

Puesto que C no tiene ciclos dirigidos, para cada vértice x de C existe un entero $n(x) > 0$ tal que $\tau^{n(x)} x$ es proyectivo.

Sea $n(C) := \max \{n(x) \mid x \in C_0\}$.

Nótese que si $\tilde{C} \xrightarrow{f} C$ es un morfismo cubriente arbitrario, vale $n(\tilde{C}) = n(C)$.

Sea $n_0 := n(C)$ y elijamos un número primo $q > 4n_0$. Tomemos $B \triangleleft \Pi(C, x_0)$ tal que:

$$\Pi(C, x_0)/B \cong \prod_i \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \prod_r \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}.$$

Sean \tilde{C} la cubierta universal de C , $\tilde{C} := \tilde{C}/B$ y $p: \tilde{C} \rightarrow C$ el morfismo cubriente inducido.

Afirmación A: Si γ es un camino cerrado de \tilde{C} basado en \tilde{x}_0 (donde $p(\tilde{x}_0) = x_0$) tal que $\mathcal{L}(\gamma) > 0$, entonces $\mathcal{L}(\gamma) > 4n_0$.

Demostración: Tenemos que $p(\gamma)$ es un camino cerrado de C basado en x_0 , entonces $\pi := \overline{p(\gamma)} \in \Pi(C, x_0)$.

Se sabe que $\Pi(C, x_0)/B$ actúa libremente

te en \tilde{C} a través de la siguiente acción:

Si $\overline{\pi}$ denota la clase de $\pi \in \Pi(C, x_0)$ módulo \mathcal{B} y $\tilde{x} \in \tilde{C}_0$ con $p(\tilde{x}) = x_0$, entonces $\overline{\pi} \tilde{x}$ es el final del camino $\tilde{\pi}_i$ que se obtiene en \tilde{C} al levantar el camino $\pi_i \in \Pi$, de C a \tilde{C} comenzando en \tilde{x} .

Puesto que $\overline{\pi} \tilde{x}_0 = \tilde{x}_0$, se tiene que $\pi \in \mathcal{B}$.

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi \in \Pi(C, x_0) & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{Z} \\
 \downarrow & \searrow \delta & \\
 \sum a_i \pi_i = \overline{\pi} \in \frac{\Pi(C, x_0)}{\Pi'(C, x_0)} = \pi_1 \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \pi_r \mathbb{Z} & & \\
 \downarrow & & \\
 \sum \bar{a}_i \overline{\pi}_i = \overline{\pi} = 0 \in \frac{\Pi(C, x_0)}{\mathcal{B}} = \overline{\pi}_1 \mathbb{Z}_q \oplus \dots \oplus \overline{\pi}_r \mathbb{Z}_q & &
 \end{array}$$

de allí se desprende que cada $a_i \equiv 0 \pmod{q}$.

Entonces:

$$\begin{aligned}
 \delta(x) &= \delta(p(x)) = \delta(\overline{p(x)}) = \delta(\pi) = \delta(\overline{\pi}) = \\
 &= \delta(\sum a_i \pi_i) = \sum a_i \delta(\pi_i) \equiv 0 \pmod{q}.
 \end{aligned}$$

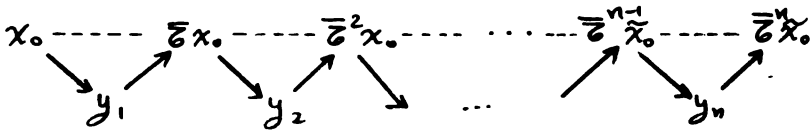
Siendo $\delta(x) > 0$, se tiene que $\delta(x) > q > 4n_0$. //

Afirmación B: \tilde{C} es un carcaj finito de Auslander-Reiten que cumple la condición (R).

Demostración: Puesto que $C \cong \tilde{C}/(\pi(C, x_0)/B)$ es finito y $\pi(C, x_0)/B$ también, \tilde{C} es finito. Además, por otro de los resultados básicos de [5], \tilde{C} es carcaj de Auslander-Reiten.

Proberemos entonces que \tilde{C} satisface la condición (R):

Sea δ un camino no orientado en \tilde{C} de \tilde{x}_0 en $\bar{c}^n \tilde{x}_0$ (donde \tilde{x}_0 es un vértice arbitrario de \tilde{C}). Tenemos también un camino orientado σ de la forma:



y claramente $d(\sigma) = 2n$.

Tenemos que $\delta^{-1}\sigma$ es un camino cerrado basado en \tilde{x}_0 .

Caso 1: Si $d(\delta^{-1}\sigma) \leq 0$,
entonces $2n - d^+(\delta) + d^-(\delta) = d(\sigma) - d(\delta) = d(\delta^{-1}\sigma) \leq 0$.
De allí resulta:

longitud de $\delta \geq \delta^+(\delta) \geq \delta^-(\delta) + 2n \geq 2n$.

Caso 2: Si $\delta(\delta^{-1}\sigma) > 0$,
entonces $2n - \delta(\delta) = \delta(\sigma) - \delta(\delta) = \delta(\delta^{-1}\sigma) > 4n \geq 4n$.

De allí se sigue:

$$\delta^-(\delta) - \delta^+(\delta) = -\delta(\delta) > 2n$$

y entonces:

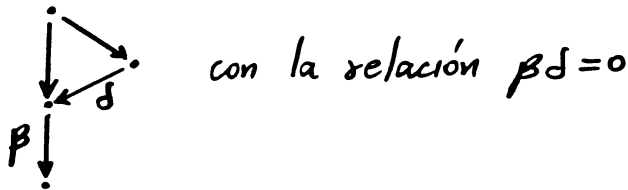
$$\text{longitud de } \delta \geq \delta^-(\delta) \geq 2n + \delta^+(\delta) > 2n. //$$

Demostración de (7-2): Por (7-5) y (7-11), basta probar que C' no tiene ciclos orientados. Sea $\tilde{C} \xrightarrow{f} C$ como aparece en el enunciado del teorema anterior. Entonces f induce un morfismo de carcajes $(\tilde{C})' \xrightarrow{f'} C'$ con la propiedad de levantar caminos. Si C' tuviera un ciclo orientado, éste se levanta a un ciclo orientado en \tilde{C} , ya que éste último es finito. Pero \tilde{C} tiene la condición (R) y por (7-10) no posee ciclos orientados, Entonces, C' no tiene ciclos orientados. //

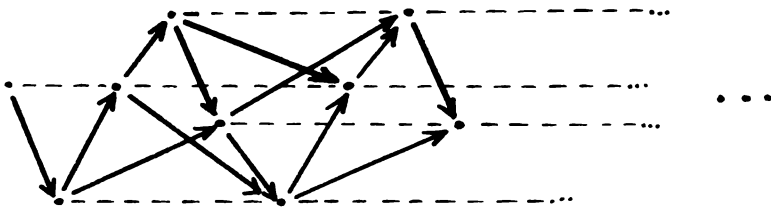
Por último consideremos las siguientes:

(7-13) Ejemplos:

(1) Sea Λ la k -álgebra de carcaj ordinario:



En seguida se presenta parte de la componente preprojectiva de $\text{CAR}(\Lambda)$ que claramente no es estratificable (Λ es de tipo infinito).



(2) El ejemplo (4-10) muestra un $\text{CAR}(\Lambda)$ finito no estratificable, pero con ciclos dirigidos.

8.- APENDICE.

(8-1) Observación: En todos los ejemplos, conocidos por el autor, de la situación que aparece en el Teorema 5-2 sucede que Π_D es cubriente izquierdo. Sin embargo, es un problema abierto saber si esto sucede en general.

Indicamos a continuación una posible dirección para la solución de este problema:

Definición: $D^0 := [-, E]$, y para $n > 0$
 $D^n := D^{n-1} \cup \{U \uparrow [-, x] / \exists x \text{ es inyectivo no admisible}\}$
 de D^{n-1} .

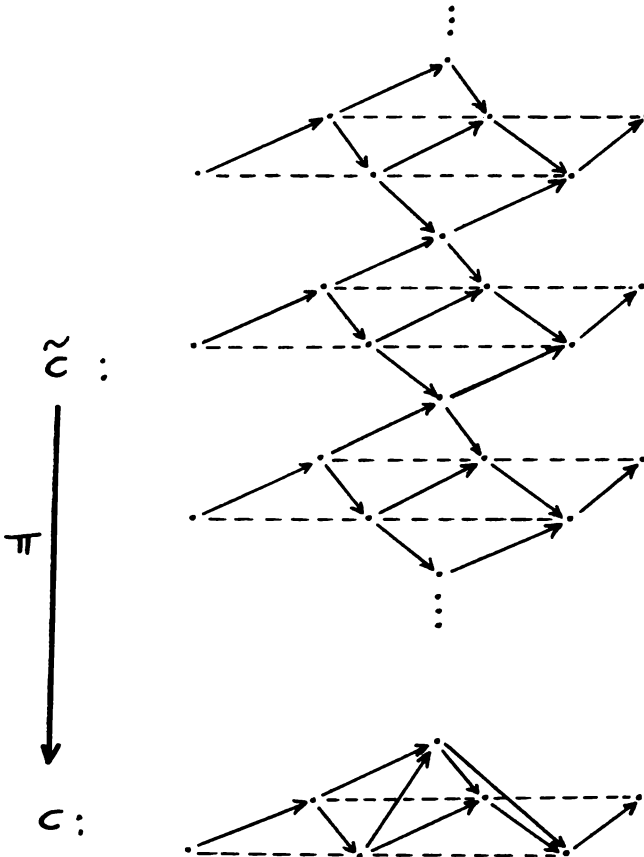
A cada D^i le damos la translación inducida por la de \tilde{C} . Denotamos $D := \bigcup_{i \geq 0} D^i$.

Conjetura: La cadena $D^0 \subseteq D^1 \subseteq \dots$ es estacionaria. Equivalentemente, por 5-4 y 5-6, la cadena $P_{D^0} \subseteq P_{D^1} \subseteq \dots$ es estacionaria.

La prueba de 5-2 "mejorado" se sigue de la conjetura anterior, del hecho de que los vértices de D tienen soporte no vacío, y de 3-14.

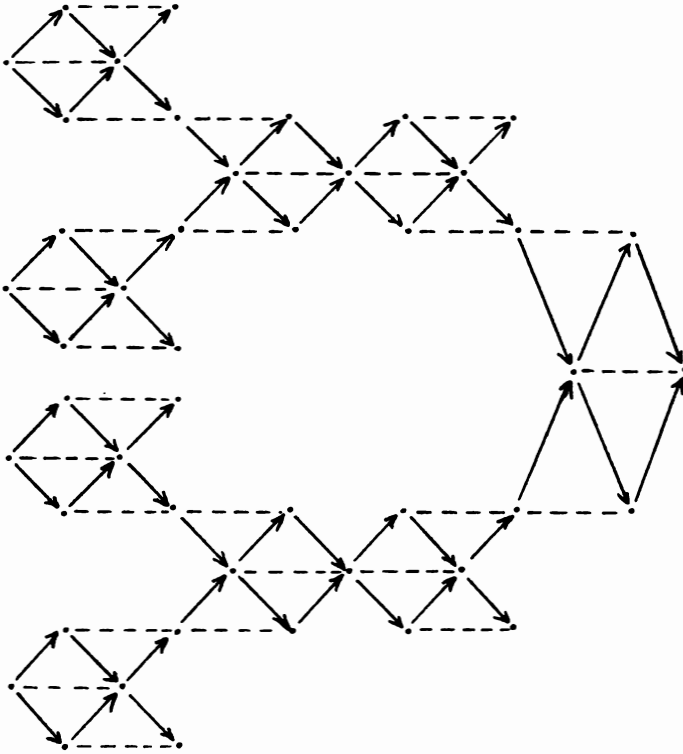
La conjetura es falsa si C no es carcaj de Auslander-Reiten, como lo muestra el siguiente ejemplo. (Véase 1-14 (ejemplo) y 6-20)

(8-2) Ejemplo:

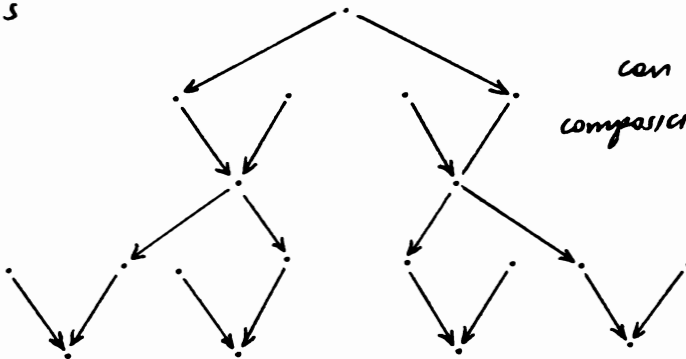


(8-3) Ejemplo: sea D el carcaj de Auslander-Reiten:

(0):

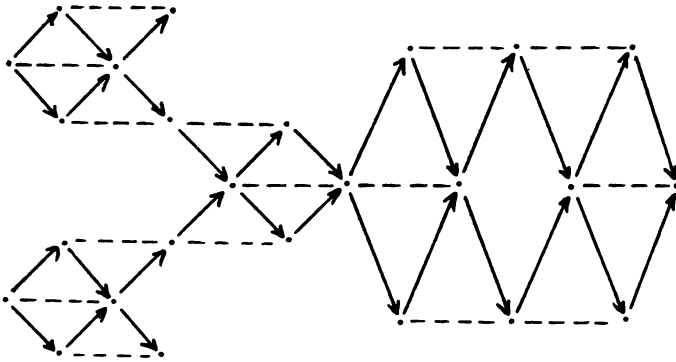


correspondiente a la (S) -álgebra cuyo carcaj ordinario es

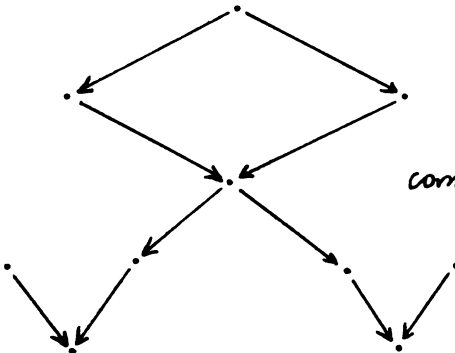


con relaciones:
composición de dos flechas = 0.

Entonces la lista que damos a continuación es una lista completa de todos los carcajes de Auslander-Reiten sin ciclos dirigidos que aparecen como codominio de un morfismo cubriente 12 -quiescente de dominio D que preserve proyectivos.
 (1):

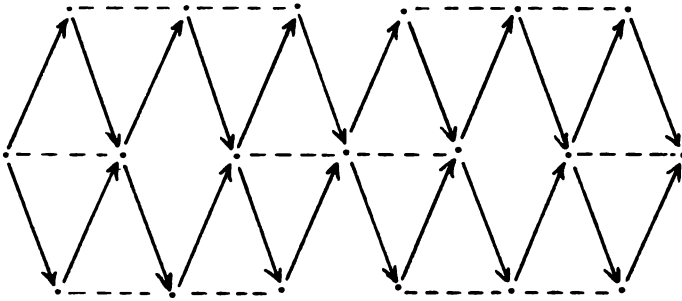


que corresponde al álgebra de carcajes ordinario:

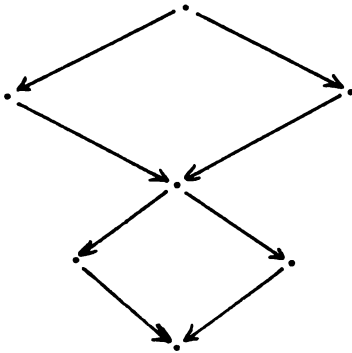


con relaciones:
 composición de dos flechas = 0.

(2):

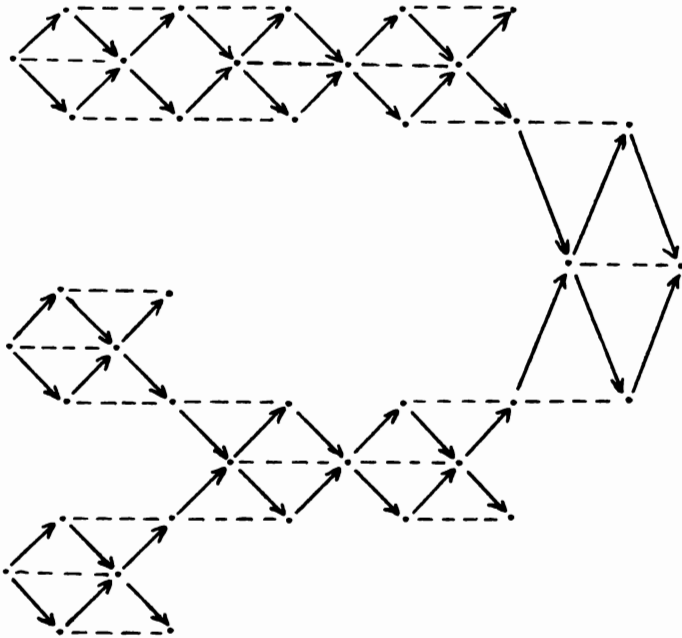


que corresponde al álgebra de carcaj ordinario:

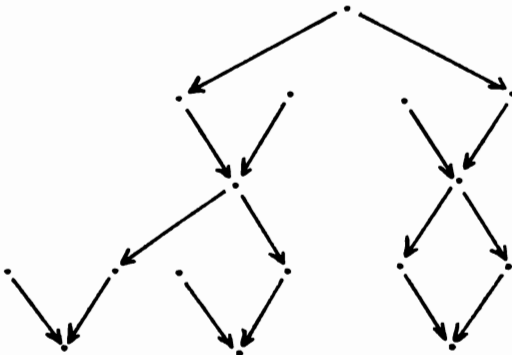


con relaciones : composición de dos flechas = 0.

(3):

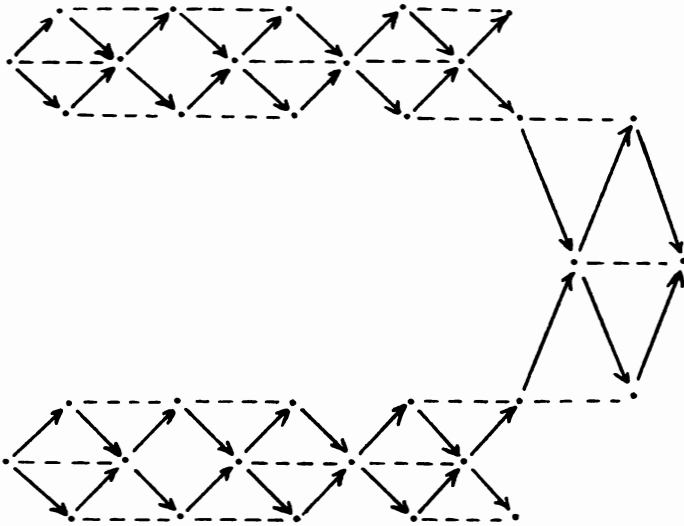


que corresponde al álgebra de carcaj ordinario:

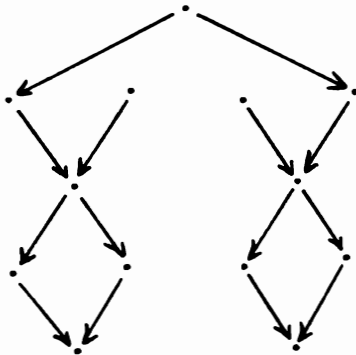


con relaciones:
composición de dos flechas=0.

(4):

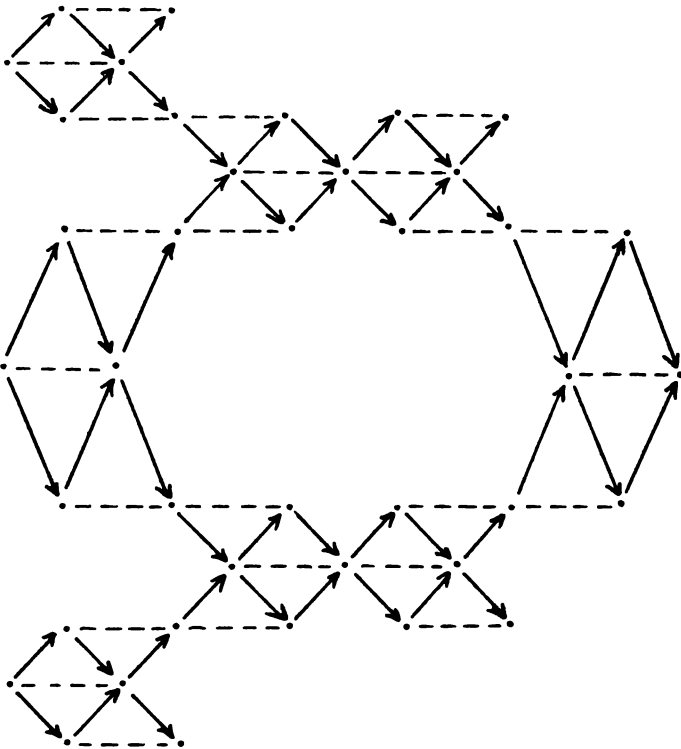


que corresponde al álgebra de carrajes ordinario:

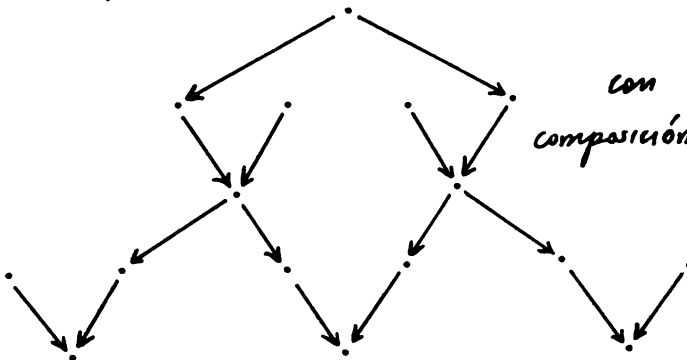


con relaciones:
composición de las flechas = 0.

(5):

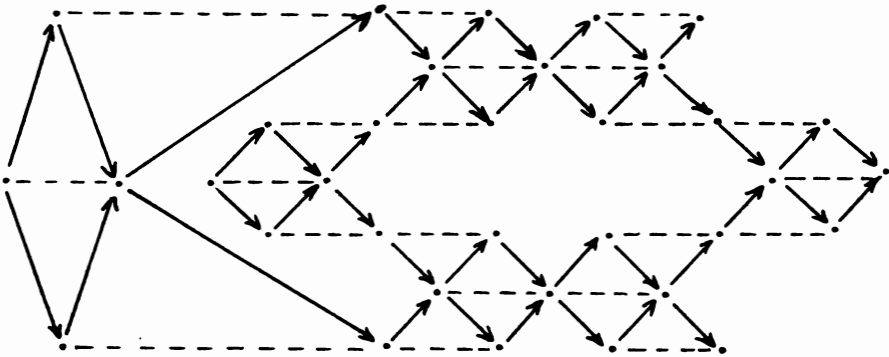


correspondiente al álgebra de carcaj ordinario:

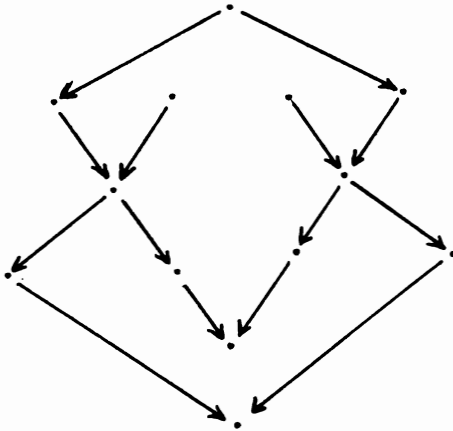


con relaciones:
composición de dos flechas = 0.

(6):



que corresponde al álgebra de cascaj ordinario:



con relaciones: composición de dos flechas = 0.

No demostraremos con detalle que la lista que acabamos de dar es efectivamente completa, pero daremos una guía para el cálculo de todos los morfismos cubrientes requeridos con dominio fijo D (con D y codominio sin ciclos dirigidos), que preservan proyectivos. Por simplicidad llamemos cocientes de D a los carcajes de translación que resulten codominio de alguno de estos morfismos.

0.- Consideremos una lista (L) que comienza siendo vacía y que al final del "proceso" contendrá todos los cocientes de D .

1.- Tomemos un vértice maximal m (con respecto al orden parcial en D_0 determinado por las flechas de D), y hallemos los vértices m_i que "pueden" identificarse con m ; tomando en cuenta que no se identifican:

- vértices proyectivos con no proyectivos.
- vértices x, y tales que $x^- \neq y^-$.
- vértices unidos por un camino dirigido.
- x con y si $x \neq y$ con $x, y \in \mathbb{Z}^-$ para alguna e .

2.- En cada caso, usando que: si x se identifica con y , se identifica una órbita comple-

ta con parte de la otra, y también alguna $z \in x$ con otra $z' \in y$, determinemos si existen y cuales son los cocientes de D generados por el pegamento de m con m_i (i.e. que identifique la menor cantidad de vértices posible además de m con m_i). Para cada uno de estos cocientes de D podemos suponer por inducción (en el número de vértices) que ya sabemos cuales son sus cocientes. Copiamos en (l) todas estos cocientes de cocientes de D que también son cocientes de D .

3.- También podemos suponer, ahora por inducción sobre el orden parcial en D , determinado por las flechas de D , que (l) contiene todos los cocientes de D en los cuales se identifica algún punto de D mayor que cierta x con algún otro. Pasemos entonces a buscar los vértices con los cuales puede identificarse x , teniendo cuidado de ver si al identificar un vértice con x esto implica que deba identificarse también un vértice mayor que x con otro: si esta es la situación, ya hemos considerado ese caso, y podemos pasar a un siguiente vértice menor que x .

4.- Se sugiere también considerar las simetrías de la gráfica D para evitar análisis repetidos.

5.- Puesto que D es finito, en un número finito de pasos habremos completado (1).

Este proceso permite mostrar que la lista del ejemplo 8-3 es completa.

Un proceso análogo permite construir listas de mortuos q como en 5-3 (c).

BIBLIOGRAFIA

- [1] AUSLANDER, M. Representation Theory of Artin Algebras I, Comm. in Algebra, 1(3), 177-268 (1974).
- [2] AUSLANDER, M. and REITEN, I. Representation Theory of Artin Algebras III, Comm. in Algebra, 3(3), 239-294 (1975).
- [3] BAVTISTA, R. and LARRIÓN, F. Auslander-Reiten quivers for certain algebras of finite representation type. Publ. Preliminares del Inst. de Mat., UNAM 8 (1980).
- [4] BAVTISTA, R. and SALMERÓN, L. Preprojective components for certain finite dimensional algebras. Publ. Preliminares del Inst. de Mat., UNAM. 30 (1981).
- [5] BONGARTZ, K. and GABRIEL, P. Covering spaces in Representation Theory. Por publicarse.
- [6] LARRIÓN, F. Algebras Forestales. Tesis doctoral, UNAM., (1981).

- [7] MAC LANE, S. *Categories for the Working Mathematician*. Springer Verlag (1971).
- [8] RIETDMANN, C. Algebren, Darstellungsköcher, Überlagerungen und Zurück, *Comment. Math. Helv.* 55, 199-224, (1980).
- [9] RIETDMANN, C. Representation-finite self-injective algebras of class A_n , *Proc. Int. Conf. Rep. Alg.*, Ottawa (1979).
- [10] CIBILS, C.; LARRION, F.; SALMERON, L. Métodos Diagramáticos en Teoría de Representaciones de Algebras. Por publicarse en *Monografías del Instituto de Matemáticas (U.N.A.M.)*.