UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

"SOBRE la INTEGRAL de KOLMOGOROV"

Tésis que para obtener el Título de Matemático presenta

Arturo H. Nieva Cochicoa

México D. F. 1967.

PREFACIO

Los principales objetivos que tiene la presente tesis son, primero, hacer una exposición sistemática, aunque no completa, de la teoría de la integral de Kolmogorov, asunto que hasta donde el autor sabe no ha sido hecho y, segundo, recibirme.

Lo que se hace en la presente tesis es:

i) definir lo que se entiende por la integral de Kolmogorov de una función y

ii) demostrar que toda función que es Riemann integrable, Riemann-Stieltjes integrable o Lebesgue integrable, es Kolmogorov integrable. (En vista de lo general que es el teorema 7, de esta tesis, es inmediato ver que una función que es Lebesgue-Stieltjes integrable lo es en el sentido de Kolmogorov) Además se da un ejemplo, original, bien sencillo de una función que es Kolmogorov integrable y no es integrable en el sentido de Riemann Stieltjes.

Por el hecho de que una integral de una función depende de un semi-anillo, de un anillo, o de un sigma-anillo de subconjuntos de un conjunto sobre el cual se integra, de un contenido o de una medida y de la clase de particiones (subclases del semi-anillo, anillo o sigma anillo del conjunto sobre el cual se integra) he visto la necesidad de definir dos tipos de integral, la integral de Kolmogorov y la integral de Kolmogorov en sentido restringido para abarcar, con la primera, a la integral de Lebesgue y a la integral de Lebesgue-Stieltjes y, con la segunda, a la integral de Riemann y a la integral de Riemann-Stieltjes.

Hay muchos temas relacionados con la teoría de esta integral que no son lo suficientemente populares en nuestro mundo occidental, quizás en la Unión Sovietica si lo sean, y que es muy importante tanto investigarlos como divulgarlos. Entre estos temas estan, por ejemplo, una teoría de lo que sería la medida de Kolmogorov, condiciones necesarias y suficientes para la existencia de la integral de Kolmogorov de una función, comparación entre este proceso de integración y el proceso de Daniell, comparación de esta integral con la de Denjoy-Perron, por ejemplo. Y temas, aparentemente más sencillos pero importantes como integración de funciones que tomen valores infinitos e integración de funciones multivaluadas. En fin, esta roja teoría espera ser construída, quizás al menos, en su versión occidental.

Agradezco al Dr. Emilio LLuis la ayuda que ma ha prestado hoy y a lo largo de mi Lebesgue integrable carrera.

Agradezco también a la querida Universidad de Sonora las facilidades concedidas para la elaboración de el presente trabajo.

Y desde luego mi agradecimiento al Profesor Enrique Valle Flores, mi director "espiritual" de tesis, sin cuyos consejos, paciencia y conocimientos este trabajo no se hubiera llevado a cabo.

Noviembre de 1967.

CAPITULO I

Integral de Kolmogorov

Sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos, de un conjunto A arbitrario, cerrada bajo intersecciones finitas o a lo más numerables. Además $A \in \mathcal{A}$

Sea $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ tal que:

i) $\mathcal{D}$ es finita, si $\mathcal{A}$ es cerrada bajo intersecciones finitas y $\mathcal{D}$ a lo más numerable si $\mathcal{A}$ es cerrada bajo intersecciones a lo más numerables.

ii) Si D_i y D_j están en $\mathcal{D}$, entonces $D_i \cap D_j = \phi$ para $i \neq j$

iii) $\bigcup \{ D_i \mid D_i \in \mathcal{D} \} = A$

llamo a $\mathcal{D}$ una partición de A con respecto a $\mathcal{A}$. La familia $\{\mathcal{D}\}$ de todas las particiones $\mathcal{D}$ tales la designo por $\mathcal{P}(A)$

<u>DEFINICION 1</u> Diré que $\mathcal{D}$ "es más fina que" $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$ en $\mathcal{P}(A)$, y se denotará por $\mathcal{D} \succ \mathcal{D}'$, si dado cualquier $D \in \mathcal{D}$ existe $D' \in \mathcal{D}'$ tal que $D \subset D'$

<u>PROPOSICION 1</u> La relación "es más fina qué" dirige a la clase $\mathcal{P}(A)$. Esto es que:

a) ordena parcialmente* a $\mathcal{P}(A)$

b) para cada $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$ en $\mathcal{P}(A)$ existe existe $\mathcal{D}''$ en $\mathcal{P}(A)$ tal que $\mathcal{D}'' \succ \mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'' \succ \mathcal{D}'$ (Basta tomar $\mathcal{D}'' = \mathcal{D}\mathcal{D}' = \{ D_i \cap D_j' \mid D_i \in \mathcal{D}, D_j' \in \mathcal{D}' \}$ y por otro lado es fácil ver que $\mathcal{D}'' \in \mathcal{P}(A)$

Por definición se dirá que la pareja $(\mathcal{P}(A), \succ) = \Delta$ es una dirección.

*Una relación $\succ$ sobre un conjunto T ordena parcialmente a T si

i) es reflexiva: si $t \succ t \quad \forall t \in T$

ii) antisimétrica: si $t \succ t'$ y $t' \succ t$ implica $t = t'$

iii) Transitiva: si $t \succ t'$ y $t' \succ t''$ implica $t \succ t''$

Sea ahora una función $\varphi:\mathcal{A}\to R$ (R denotará al sistema de los números reales) univaluada o multivaluada, aditiva o no (φ es una función multivaluada de $M \to N$ si $\varphi: M \to \mathcal{S}(N)$) (familia de subconjuntos de N); por abuso de notación se escribe " $\varphi: M \to N$ es multivaluada".)

Sea $N=\{1,2,\dots n\}$, para alguna n natural o $N=\{1,2,\dots\}$ Entonces por $r_1+r_2+\dots$ entendemos la suma $\sum_{k\in N} r_k$.

DEFINICION 2 a) Las sumas de Kolmogorov de φ respecto a la partición $\mathfrak{D}$ serán los conjuntos, de números reales, de la forma

$$\mathcal{S}(\mathfrak{D},\varphi)=\left\{r_1+r_2+\dots \mid r_i \text{ es algún valor de } \varphi(D_i),\ D_i\in\mathfrak{D}\right\}$$

b) Si $\mathcal{S}(\mathfrak{D},\varphi)\neq\phi$, por $|\mathcal{S}(\mathfrak{D},\varphi)-r|$, con r real, representaré a

$$\left\{|(r_1+r_2+\dots)-r| \;\middle|\; r_1+r_2+\dots\in\mathcal{S}(\mathfrak{D},\varphi)\right\}$$

c) Escribiré $|\mathcal{S}(\mathfrak{D},\varphi)-r|<\varepsilon$ (ε real mayor que cero) si, y sólo si,

$$|(r_1+r_2+\dots)-r|<\varepsilon \quad \text{para cada } r_1+r_2+\dots\in\mathcal{S}(\mathfrak{D},\varphi)$$

CONDICION DE KOLMOGOROV

Se dirá que $\varphi:\mathcal{A}\to R$ satisface la condición de Kolmogorov si existe un número real $\hat{\varphi}(A)$ tal que

$$\lim_{\Delta}\mathcal{S}(\mathfrak{D},\varphi)=\hat{\varphi}(A)$$

O sea que: existe un número real $\hat{\varphi}(A)$ tal que para cada ε real mayor que cero existe $\mathfrak{D}_\varepsilon\in\mathcal{P}(A)$ tal que

$$|\mathcal{S}(\mathfrak{D},\varphi)-\hat{\varphi}(A)|<\varepsilon$$

para toda $\mathfrak{D}\succ\mathfrak{D}_\varepsilon$, con $\mathfrak{D}\in\mathcal{P}(A)$.

Usaremos indistintamente $\hat{\varphi}(A)$ o $\int_A d\varphi$.

PROPOSICION 2 Si

$$\lim_{\Delta} \mathcal{S}(\mathcal{D},\varphi)$$

existe es único.

Demostración: Sean $\hat{\varphi}'(A)$ y $\hat{\varphi}(A)$ tales que para toda $\varepsilon>0$

$$\exists \; \mathcal{D}_\varepsilon, \mathcal{D}'_\varepsilon \in \mathcal{P}(A) \ni$$

$$|\hat{\varphi}'(A)-\mathcal{S}(\mathcal{D},\varphi)| < \varepsilon \quad \forall \; \mathcal{D} > \mathcal{D}'_\varepsilon \quad \text{y}$$

$$|\hat{\varphi}(A)-\mathcal{S}(\mathcal{D},\varphi)| < \varepsilon \quad \forall \; \mathcal{D} > \mathcal{D}_\varepsilon \quad .$$

Tomando ahora $\forall \; \mathcal{D} > \mathcal{D}_\varepsilon \mathcal{D}'_\varepsilon$ y cualquier

$$r_1 + r_2 + \ldots \in \mathcal{S}(\mathcal{D},\varphi)$$

entonces tenemos que

$$|\hat{\varphi}(A)-\hat{\varphi}'(A)| \leqslant |\hat{\varphi}'(A)-(r_1+r_2+\ldots)| + |\hat{\varphi}(A)-(r_1+r_2+\ldots)| < 2\varepsilon$$

$$\therefore \quad \hat{\varphi}'(A) = \hat{\varphi}(A)$$

Fijémonos ahora en $A, \mathcal{A}$, en una función univaluada $\mu : \mathcal{A} \to R$ con $\mu(A_i) \geqslant 0$ para cada $A_i \in \mathcal{A}$, y en la función univaluada $f : A \to R$ tal que $f(x) \geqslant 0$ para cada $x \in A$

Las definiciones de lo que son la Integral de Kolmogorov y la Integral de Kolmogorov restringida de una función no negativa, posteriormente, a finales de este capítulo las extenderé a funciones f no necesariamente no-negativas.

DEFINICION 3 Consideremos la f , A , μ y $\mathcal{A}$ anteriores. Sea

$$\varphi_\mu : \mathcal{A} \to R$$

con

$$\varphi_\mu(A_i) = \left\{ r\mu(A_i) \mid r = f(t_i) \text{ para alguna } t_i \in A_i \right\}$$

para cada $A_i \in \mathcal{A}$

Entonces:

a) f es Kolmogorov integrable si i) φ_μ satisface la condición de Kolmogorov y ii) $\mathcal{A}$ es cerrada bajo intersecciones a la más numerables.

b) f es Kolmogorov integrable en sentido restringido (O brevemente Kolmogorov integrable - r) cuando i) φ_μ satisfaga la condición de Kolmogorov y ii) cuando $\mathcal{A}$ sea cerrada bajo intersecciones finitas.

Ambos hechos se denotarán escribiendo

$$f \in \mathcal{K}_{(A,\mathcal{A},\mu)}$$

o brevemente

$$f \in \mathcal{K}_\mu$$

La integral de Kolmogorov o la integral de Kolmogorov - r de f la denotaré indistintamente por

$$\hat{\varphi}(A) = \int_A d\varphi = (K)\int_A f\,d\mu = I_\mu(f) = I(f)$$

Cuando no haya aclaración previa se entenderá que una proposición es cierta para ambas integrales

Por comodidad escribiré φ en lugar de φ_μ

Los siguientes teoremas de este capítulo harán ver que lo que hemos definido por "integral de Kolmogorov" satisface cuatro propiedades que generalmente se exigen a un operador para tener el privilegio de ser tratado como integral.

<u>DEFINICION 4</u> Por $S(\mathcal{D},\varphi^1) \oplus S(\mathcal{D},\varphi^2)$ se denotará al conjunto

$$\left\{(r_1^1+r_1^2)\mu(D_1)+(r_2^1+r_2^2)\mu(D_2)+\ldots\right\}$$

donde

$$r_i^j = f_j(t_i)$$

para alguna $t_i \in D_i$, $i \in N$ y $j=1,2$.

Observación: $S(\mathcal{D},\varphi^1) \oplus S(\mathcal{D},\varphi^2) = S(\mathcal{D}, \varphi^1+\varphi^2)$ en vista de la definición anterior y de que cada serie en cada uno de los sumandos del lado izquierdo son absolutamente convergentes.

PROPOSICION 3 Si f_1 y f_2 están en $\mathcal{K}_\mu$, entonces $f_1+f_2 \in \mathcal{K}_\mu$ y además $I(f_1+f_2) = I(f_1) + I(f_2)$.

Demostración: Sabemos que dada cualquier real positivo ε, existe $\mathcal{D}_\varepsilon \in \mathcal{P}(A)$ tal que

$$|S(\mathcal{D},\varphi^1) - I(f_1)| < \varepsilon$$

y

$$|S(\mathcal{D},\varphi^2) - I(f_2)| < \varepsilon$$

para toda $\mathcal{D} > \mathcal{D}_\varepsilon$, $\mathcal{D} \in \mathcal{P}(A)$

Sea

$$\forall\ (r_1^1+r_1^2)\mu(D_1)+(r_2^1+r_2^2)\mu(D_2)+\dots \in S(\mathcal{D},\varphi^1+\varphi^2)$$

$$\therefore\ \left|[(r_1^1+r_1^2)\mu(D_1)+(r_2^1+r_2^2)\mu(D_2)+\dots] - I(f_1) - I(f_2)\right|$$

$$\leq \left|(r_1^1\mu(D_1)+r_2^1\mu(D_2)+\dots) - I(f_1)\right| + \left|(r_1^2\mu(D_1)+r_2^2\mu(D_2)+\dots) - I(f_2)\right|$$

$$< 2\varepsilon$$

$$\therefore\ \left|S(\mathcal{D},\varphi^1+\varphi^2) - [I(f_1)+I(f_2)]\right| < 2\varepsilon$$

$\therefore$ $\varphi_1 + \varphi_2$

satisface la condición de Kolmogorov. Por lo tanto

$$f_1+f_2 \in \mathcal{K}_\mu$$

y además

$$I(f_1+f_2) = I(f_1) + I(f_2)$$

PROPOSICION 4 Sea $f \in \mathcal{K}_{(A,\mathcal{A},\mu)}$ y $f \in \mathcal{K}_{(A,\mathcal{A},\mu')}$, entonces

$$f \in \mathcal{K}_{(A,\mathcal{A},\mu+\mu')}$$

y además

$$(K)\int_A f\, d(\mu+\mu') = (K)\int_A f\, d\mu + (K)\int_A f\, d\mu'$$

Demostración: Por hipótesis, dado cualquier real positivo ε , existe $\mathcal{D}_\varepsilon \in \mathcal{P}(A)$ tal que

$$\left| S(\mathcal{D},\varphi_\mu) - I_\mu(f) \right| < \varepsilon$$

y

$$\left| S(\mathcal{D},\varphi_{\mu'}) - I_{\mu'}(f) \right| < \varepsilon$$

para toda $\mathcal{D} \succ \mathcal{D}_\varepsilon$, $\mathcal{D} \in \mathcal{P}(A)$.

Tomando cualquier elemento

$$r_1[\mu(D_1)+\mu'(D_1)] + r_2[\mu(D_2)+\mu'(D_2)] + \ldots$$

de

$$S(\mathcal{D},\ \varphi_{\mu+\mu'})$$

tenemos que

$$\left| r_1[\mu(D_1)+\mu'(D_1)] + r_2[\mu(D_2)+\mu'(D_2)] + \ldots - I_\mu(f) - I_{\mu'}(f) \right|$$

$$\leq \left| r_1\mu(D_1)+r_2\mu(D_2)+\ldots - I_\mu(f) \right| + \left| r_1\mu'(D_1)+r_2\mu'(D_2)+\ldots - I_{\mu'}(f) \right|$$

$$< 2\varepsilon$$

$$\therefore\ \left| S(\mathcal{D},\varphi_{\mu+\mu'}) - [I_\mu(f)+I_{\mu'}(f)] \right| < 2\varepsilon$$

$$\therefore\ f \in \mathcal{K}_{(A,\mathcal{A},\mu+\mu')}$$

y además

$$I_{\mu+\mu'}(f) = I_\mu(f) + I_{\mu'}(f)$$

PROPOSICION 5 Si $f \in \mathcal{K}_\mu$ y α es real no negativo, entonces $\alpha f \in \mathcal{K}_\mu$ y además

$$I(\alpha f) = \alpha I(f)$$

Antes de dar la demostración de esta preposición definimos $\alpha S(\mathcal{D}, \varphi)$ como el conjunto

$$\left\{\alpha r_1 \mu(D_1) + \alpha r_2 \mu(D_2) + \ldots \mid etc.\right\}$$

Es fácil ver que

$$\alpha S(\mathcal{D}, \varphi) = S(\mathcal{D}, \alpha\varphi)$$

Demostración: Con $\alpha > 0$ sabemos que para cada real no negativo ε existe $\mathcal{D}_\varepsilon \in \mathcal{P}(A)$ tal que

$$\alpha\varepsilon > \alpha \left|S(\mathcal{D}, \varphi) - I(f)\right| = \left|\alpha S(\mathcal{D}, \varphi) - \alpha I(f)\right|$$
$$= \left|S(\mathcal{D}, \alpha\varphi) - \alpha I(f)\right|$$

luego

$$\alpha f \in \mathcal{K}_\mu$$

y

$$I(\alpha f) = \alpha I(f) \quad .$$

Si $\alpha = 0$ la demostración es inmediata.

PROPOSICION 6 Si $f \in \mathcal{K}_\mu$ entonces $I(f) \geq 0$

Semostración: Para cada $\mathcal{D} \in \mathcal{P}(A)$, si $r \in S(\mathcal{D}, \varphi)$, con

$$r = r_1 \mu(D_1) + r_2 \mu(D_2) + \ldots \geq 0$$

Supóngase que $I(f) < 0$

Tomando $\varepsilon = -I(f)$; existe $\mathcal{D}_\varepsilon \in \mathcal{P}(A)$ y $r \in S(\mathcal{D}, \varphi)$ tal que

$$\varepsilon > \left|r - I(f)\right| = r - I(f) \geq -I(f) = \varepsilon$$

Por lo tanto $\varepsilon > \varepsilon$.

COROLARIO 1 Si $f_1 \geqslant f_2$ entonces $I(f_1) \geqslant I(f_2)$

El siguiente teorema vale solamente cuando f es Kolmogorov integrable (Ver Def. 3)

TEOREMA 1 Sea la sucesión $\{f_n\}$, $f_n \in \mathcal{K}_\mu$, $n = 1, 2, \ldots$, con la condición de que $f_n \downarrow 0$ (Convergencia puntual). Entonces

$$I(f_n) \downarrow 0$$

Demostración: Por corolario 1 tenemos que $I(f_1) \geqslant I(f_2) \geqslant \ldots \geqslant 0$ por lo tanto

$$\lim_{n \to \infty} I(f_n) = \alpha \geqslant 0$$

Veremos que $\alpha = 0$

Sabemos que dado cualquier real positivo ε existen $\mathcal{D}_\varepsilon^1, \mathcal{D}_\varepsilon^2, \ldots$ en $\mathcal{P}(A)$ tal que

$$|S(\mathcal{D}, \varphi^1) - I(f_1)| < \varepsilon \quad \forall\ \mathcal{D} \succ \mathcal{D}_\varepsilon$$

$$|S(\mathcal{D}, \varphi^2) - I(f_2)| < \varepsilon \quad \forall\ \mathcal{D} \succ \mathcal{D}_\varepsilon$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

con $\mathcal{D} \in \mathcal{P}(A)$

Sabemos también que $\mathcal{D}_\varepsilon = \mathcal{D}_\varepsilon^1 \mathcal{D}_\varepsilon^2 \ldots$ es más fina que toda $\mathcal{D}_\varepsilon^i$, $i = 1, 2, \ldots$

Construyo ahora la sucesión

$$S_1 = f_1(t_1)\mu(D_1) + f_1(t_2)\mu(D_2) + \ldots \quad \in S(\mathcal{D}, \varphi^1)$$

$$S_2 = f_2(t_1)\mu(D_1) + f_2(t_2)\mu(D_2) + \ldots \quad \in S(\mathcal{D}, \varphi^2)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$S_n = f_n(t_1)\mu(D_1) + f_n(t_2)\mu(D_2) + \dots \in S(\mathcal{D}, \varphi^n)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

Con $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \dots\}$.

Notando que $S_1 \geqslant S_2 \geqslant \dots \geqslant 0$ y teniendo en cuenta que $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(t_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots$, recordemos (Ver [1])

i) que

$$\lim_{p,q \to \infty} g(p,q) = a$$

si para todo real positivo ε existe N, natural, tal que

$$|g(p,q) - a| < \varepsilon$$

para toda $p, q > N$

y ii) el teorema: Si

$$\lim_{p,q \to \infty} g(p,q) = a$$

y si para cada p fija

$$\lim_{q \to \infty} g(p,q) = a$$

existe, entonces

$$\lim_{p \to \infty}\left(\lim_{q \to \infty} g(p,q)\right) = a = \lim_{q \to \infty}\left(\lim_{p \to \infty} g(p,q)\right)$$

Defino

$$g(p,q) = f_q(t_1)\mu(D_1) + \dots f_q(t_p)\mu(D_p)$$

(p-ésima suma parcial de S_q).

Veamos que

$$\lim_{p,q\to\infty} g(p,q)=\alpha$$

y de esto, aplicando el teorema citado, tenemos que

$$\lim_{p\to\infty}\left(\lim_{q\to\infty} g(p,q)\right)=\lim_{p\to\infty}(0)=0$$

$$\therefore\quad \alpha=0$$

$$\therefore\quad I(f_n)\downarrow 0$$

Demostraré ahora que

$$\lim_{p,q\to\infty} g(p,q)=\alpha$$

Dado cualquier real positivo ε existe N' tal que.

$$|I(f_p)-\alpha|<\varepsilon$$

para toda $p>N'$

Ahora, dado

$$\varepsilon'=\frac{\varepsilon-|I(f_{N'+1})-\alpha|}{2}$$

existe $\mathcal{D}_{\varepsilon'}$ tal que

$$|S(\mathcal{D},\varphi^p)-I(f_p)|<\varepsilon'$$

para toda $\mathcal{D}\succ\mathcal{D}_{\varepsilon'}$ y $p>N'$

$$\therefore |f_p(t_1)\mu(D_1)+f_p(t_2)\mu(D_2)+\ldots-I(f_p)|<\varepsilon'$$

para todo elemento de $S(\mathcal{D},\varphi^p)$

Ahora, para ε' existe N'' tal que

$$|f_p(t_1)\mu(D_1)+f_p(t_2)\mu(D_2)+\ldots f_p(t_q)\mu(D_q)-I(f_p)|<\varepsilon'$$

para todo $q>N''$

$$\therefore |f_p(t_1)\mu(D_1)+\ldots+f_p(t_q)\mu(D_q)-\alpha|\leqslant$$

$$\left|f_p(t_1)\mu(D_1)+\cdots f_p(t_q)\mu(D_q)-I(f_p)\right|+\left|a-I(f_p)\right|$$

$< \varepsilon' + \varepsilon < 2\varepsilon$

y esto para todo p y q mayor que $N = \max\{N', N''\}$

Sea $f: A \to R$ una función univaluada arbitraria. Por f^+ y f^- entenderemos $f^+: A \to R \ni f^+(x) = f(x)$ si $f(x) \geq 0$ y $f^+(x) = 0$ si $f(x) < 0$ y $f^-: A \to R \ni f^-(x) = -f(x)$ si $f(x) < 0$ y $f^-(x) = 0$ si $f(x) \geq 0$ respectivamente. Entonces

DEFINICION 5 Diré que $f \in \mathcal{K}_\mu$ si f^+ y f^- están en $\mathcal{K}_\mu$ y defino

$$I(f) = I(f^+) - I(f^-)$$

Los teoremas 1, 2 y los que a continuación siguen, en este capítulo, hacen ver que lo que he definido por "integral de Kolmogorov" satisface cuatro propiedades que generalmente se exigen a un operador para tener el privilegio de llamarse Integral.

TEOREMA 2 Si $f \in \mathcal{K}_\mu$ y α está en R, entonces

$$\alpha f \in \mathcal{K}_\mu$$

y

$$I(\alpha f) = \alpha I(f)$$

Demostración: i) si $\alpha > 0$, aplicando la proposición 6 y la definición 5, la afirmación vale.

ii) Si $\alpha = 0$, es obvio

iii) Si $\alpha < 0$. Aplicando la proposición 6, la defiinición 5, el resultado de i) de este Teorema y el hecho de que $\alpha f = -\alpha f^- - (-\alpha f^+)$

tenemos por definición que

$$I(\alpha f) = I(-\alpha f^-) - I(-\alpha f^+) = -\alpha I(f^-) - (-\alpha) I(f^+)$$

$$= \alpha\left[I(f^+) - I(f^-)\right] = \alpha I(f)$$

<u>TEOREMA 3</u> Si f_1 y f_2 están en $\mathcal{K}_\mu$ entonces

$$f_1 + f_2 \in \mathcal{K}_\mu$$

y

$$I(f_1+f_2) = I(f_1) + I(f_2)$$

Demostración: Tenemos que $f_1+f_2 = (f_1^+ + f_2^+) - (f_1^- + f_2^-)$. Por definición 5

$$I(f_1+f_2) = I(f_1^+ + f_2^+) - I(f_1^- + f_2^-)$$

$$= I(f_1^+) + I(f_2^+) - I(f_1^-) - I(f_2^-) = I(f_1) + I(f_2)$$

<u>TEOREMA 4</u> Si $f_n \to 0$ monotonamente $I(f_n) \to 0$ monotonamente.

Demostración: es inmediata.

Los teoremas 1, 2, 3 y 4 hacen ver que I merece el Título de Integral.

<u>TEOREMA 5</u> Si $f \in \mathcal{K}_{(A, \mathcal{A}, \mu)}$ y $f \in \mathcal{K}_{(A, \mathcal{A}, \mu')}$ entonces

$$f \in \mathcal{K}_{(A, \mathcal{A}, \mu+\mu')}$$

y además que

$$I_{\mu+\mu'}(f) = I_\mu(f) + I_{\mu'}(f)$$

Demostración: es inmediata.

CAPITULO II

Comparación de la Integral de Kolmogorov en sentido restringido con la Integral de Riemann-Stietjes.

Integral de Riemann-Stieltjes.

Se dará la definición para un intervalo $[a, b]$ y funciones f y α, α creciente sobre $[a, b]$ y con valores reales, definidas en $[a, b]$.

Una división P de $[a, b]$ será un conjunto finito de puntos, esto es $P=\{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ tales que $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$

Se dice que la división P es más fina que la división P' si $P\supset P'$. La clase de todas las divisiones de $[a, b]$ se denotará por $\mathcal{P}'[a, b]$.

El símbolo $\Delta\alpha_k$ denotará, como es usual, la diferencia

$$\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})$$

Una suma de la forma $S(P,f,\alpha)=\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta\alpha_k$, para $t_k\in[x_{k-1}, x_k]$, se dirá que es una suma de Riemann-Stieltjes de f con respecto a α y la partición P.

Se dice que f es Rieman-Stieltjes integrable con respecto a α sobre $[a, b]$, y se escribe " $f\in\mathcal{R}(\alpha)$ sobre $[a, b]$ " si existe un número real r con la siguiente propiedad: dada $\forall\varepsilon>0\ \exists\ P_\varepsilon\in\mathcal{P}'[a, b] \ni \forall\ P\supset P_\varepsilon$, $P\in\mathcal{P}'[a, b]$, y para cualquier selección de los puntos $t_k\in[x_{k-1}, x_k]$, se tiene que $|S(P,f,\alpha)-r|<\varepsilon$. Se denota a r por $r=\int_a^b f\,d\alpha$.

COMPARACION

$\mathcal{A}$ será la clase de los subintervalos de $[a,b]$ cerrados por la izquierda Notese que $\mathcal{A}$ es cerrada bajo intersecciones finitas.

La clase que consta de los elementos de la forma $\mathcal{D}=\{[x_0,x_1),[x_1,x_2)\ldots[x_{n-1},x_n]\}$ la denotaré por $\mathcal{P}[a,b]$.

Notese que cada clase $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}[a,b]$ es una partición finita de $[a, b]$ (Ver Cap. 1).

Defino

$$m_\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow R$$

como

$$m_\alpha([x,y]) = \alpha(y) - \alpha(x) \qquad \forall\, [x,y] \in \mathcal{A}$$

y

$$m_\alpha([x,y)) = \alpha(y) - \alpha(x) \qquad \forall\, [x,y) \in \mathcal{A}$$

Debino también

$$\varphi_{m_\alpha} : \mathcal{A} \longrightarrow R$$

tal que

$$\varphi_{m_\alpha}(D_K) = \left\{ r\, m_\alpha(D_K) \,\middle|\, r = f(t_K)\text{ , para alguna } t_K \in D_K \right\}$$

$\forall\, D_K \in \mathcal{A}$. Por comodidad escribiré φ por φ_{m_α}

<u>TEOREMA 6</u> Si $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ entonces $f \in \mathcal{K}_{([a,b],\, \mathcal{A},\, m_\alpha)}$ y también

$$\int_a^b f\, d\alpha = (K)\int_{[a,b]} f\, dm_\alpha$$

Demostración: Por hipótesis para cada real positivo ε existe $P_\varepsilon \in \mathcal{P}'[a,b]$ tal que

$$\left| S(P, f, \alpha) - \int_a^b f\, d\alpha \right| < \varepsilon$$

para toda $P \in \mathcal{P}'[a,b]$, $P \supset P_\varepsilon$ y cualquier selección de los puntos t_K de $[x_{K-1}, x_K]$ A partir de $P_\varepsilon = \{x'_0, x'_1, \ldots x'_m\}$ tomemos

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \left\{ [x'_0, x'_1), [x'_1, x'_2), \ldots [x'_{m-1}, x'_m] \right\}$$

Sea

$$\mathcal{D} = \left\{ [x_0, x_1), [x_1, x_2), \ldots [x_{n-1}, x_n] \right\}$$

más fina que $\mathcal{D}_\varepsilon$ (en el sentido del Cap. 1).

Construimos a partir de esta a $P=\{x_0, x_1, \dots x_n\}$ por lo tanto $P \supset P_\varepsilon$ (ya que x'_k debe ser algún x_ℓ para $k \leq \ell$).

La suma de Kolmogorov de φ respecto a $\mathcal{D}$ será

$$S(\mathcal{D},\varphi)=\Big\{ r_1\, m_\alpha([x_0,x_1)) + \dots r_n\, m_\alpha([x_{n-1},x_n]) \;\Big|$$

$$r_i = f(t_i) \text{ para alguna } t_i \in [x_{i-1}, x_i) \;, \; i<n,$$

$$\text{o} \quad t_n \in [x_{n-1}, x_n] \Big\}$$

Cada elemento de $S(\mathcal{D},\varphi)$ debe cumplir, por hipótesis, la siguiente condición

$$\left| r_1[\alpha(x_1)-\alpha(x_0)] + \dots + r_n[\alpha(x_n)-\alpha(x_{n-1})] - \int_a^b f\,d\alpha \right| < \varepsilon$$

Por lo tanto

$$\left| S(\mathcal{D},\varphi) - \int_a^b f\,d\alpha \right| < \varepsilon$$

para la $\mathcal{D}$ más fina que $\mathcal{D}_\varepsilon$ escogida arbitrariamente o sea, que φ satisface la condición de Kolmogorov y por lo tanto

$$f \in \mathcal{K}_{([a,b],\mathcal{A},m_\alpha)}$$

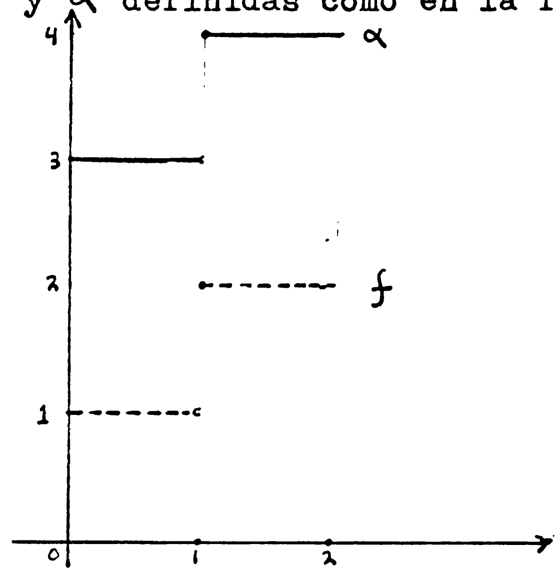
Además que

$$\int_a^b f\,d\alpha = (K)\int_{[a,b]} f\,dm_\alpha$$

Como ya es conocido, el desarrollo de la integral de Riemann-Stieltjes interesa, y se hace, para funciones α de variación acotada. Y más aún, como toda función de variación acotada α es igual a la diferencia de dos funciones crecientes, es suficiente con hacer la teoría para α creciente. Y como la integral de Riemann-Stieltjes de f respecto a α , (en general α de variación acotada) es lineal respecto a α , por Teore ma 5 tendríamos la teoría completa

COROLARIO 2 La contención $\mathcal{R}(\alpha) \subset \mathcal{K}_{([a,b],\mathcal{A},m_\alpha)}$ es propia.

Demostración: Sean f y α definidas como en la figura.



la integral de Riemann-Stieltjes de f con respecto a α sobre $[a,b]$ no existe ya que para cada división P, con $x_k = 1 \in P$ se tiene

$$S(P,f,\alpha) = f(t_k)[\alpha(1) - \alpha(x_{k-1})] = f(t_k)\cdot 1 = f(t_k)$$

y esta suma vale 1 si $t_k < 1$ y 2 si $t_k = 1$

Por lo tanto $\int_0^2 f\,d\alpha$ nó existe.

Sin embargo es Kolmogorov integrable-r. Esto se puede ver a partir de cómo son los elementos de toda partición más fina que $\mathcal{D} = \{[0,1),[1,2]\}$. Ya que ningún elemento de toda partición más fina que $\mathcal{D}$ tiene en su interior a 1.

Notando que $S(\mathcal{D}',\varphi) = \{1\cdot 1 + 2\cdot 1\}$ para toda $\mathcal{D}' \succ \mathcal{D}$ tenemos que

$$(K)\int f\,dm_\alpha = 3$$

COROLARIO 3 Si $\alpha(x)=x$ entonces toda función Riemann integrable sobre $[a, b]$ es Kolmogorov integrable sobre $[a, b]$ y además ambas integrales coinciden.

CAPITULO III

Comparación de la Integral de Kolmogorov con la Integral respecto a una medida μ.

Integral de funciones numéricas definidas en conjuntos arbitrarios.

Consideremos un conjunto arbitrario A , un σ-anillo $\mathcal{A}$ de subconjuntos de A y una medida μ definida sobre $\mathcal{A}$. Que $\mathcal{A}$, no vacía, sea σ-anillo quiere decir:

i) Si $D_1, D_2, \ldots \in \mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i \in \mathcal{A}$

ii) Si D_1 y D_2 están en $\mathcal{A}$, entonces $D_1 - D_2 \in \mathcal{A}$ (D_1 y D_2 arbitrarios) y que μ sea una medida definida sobre $\mathcal{A}$ quiere decir que:

i) $\mu(D) \geq 0$ para toda $D \in \mathcal{A}$

ii) $\mu(\phi) = 0$

iii) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(D_i)$ si $D_i \cap D_j = \phi$ para $i \neq j$ y $D_i \in \mathcal{A}, i=1,2,\ldots$

Diremos que los elementos de $\mathcal{A}$ son μ-medibles.

Una función (numérica) $f: A \to R$ se dice que es descriptivamente μ-medible (d.μ-m.) si para todo real c el conjunto $\{x \in A \mid f(x) < c\}$ es un elemento de $\mathcal{A}$. Es fácil ver que esta definición equivale a decir que f es d.μ-m. si $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$, donde $\mathcal{B}$ es la familia de los conjuntos de Borel de R . f se dice que es simple si $f(A)$ es numerable a lo más y d. μ-m. Decimos que f simple es μ-integrable si la serie $\sum_{K=1}^{\infty} y_K \, \mu(f^{-1}(y_K))$ es absolutamente convergente ($f(A) = \{y_1, y_2, \ldots\}$ con $y_i \neq y_j$ para $i \neq j$) En caso que f sea μ-integrable la suma de dicha serie se denota por $\int_A f \, d\mu$ y se dice que es la integral de f sobre A , respecto a μ . $f: A \to R$ es llamada constructivamente μ-mediable si existe una sucesión de funciones simples $\{f_n\}$ que converge a f , sobre A , uniformemente.

Veamos ahora un teorema de central importancia para la comparación que se quiere hacer. El teorema dice: Sea $f: A \to R$. Entonces f es descriptivamente μ-medible si, y sólo si, es constructivamente μ-medible.

a) Sea f d.μ-m.. Se define $f_n: A \to R$ tal que $f_n(x) = \frac{k}{n}$ con x en $\{x \in A \mid \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n}\}$, k entero y n natural. Vemos que i) f_n es simple para toda n. ii) Que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f ya que $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$ para toda n.

b) Sea f constructivamente μ-medible, veamos que f es d.μ-m.. Sea la sucesión $\{f_n\}$, de funciones simples, que converge uniformemente a f. Tenemos que $\{x \mid f(x) < c\} = \bigcup_k \bigcup_n \bigcap_{m>n} \{x \mid f_m(x) < c - \frac{1}{k}\}$ Ya que si $f(x) < c$, existe k tal que $f(x) < c - \frac{1}{k}$ Para n suficientemente grande se tiene que $f_m(x) < c - \frac{1}{k}$ para toda $m > n$. Y esto quiere decir que todo elemento que está en el conjunto de la izquierda está en el conjunto de la derecha. Sea ahora x un elemento del conjunto de la derecha, entonces existe k tal que $f_m(x) < c - \frac{1}{k}$ para m suficientemente grande. Por lo tanto $f(x) < c$ y x pertenece al conjunto de la izquierda. Como las f_n son simples entonces los conjuntos $\{x \mid f_m(x) < c - \frac{1}{k}\}$ son elementos de $\mathcal{A}$. Por ser $\mathcal{A}$ σ-anillo, el conjunto de la derecha es elemento de $\mathcal{A}$. Y queda demostrado el teorema.

De ahora en adelante, en vista del teorema anterior, llamaré, como es usual, a las funciones de.μ -m. y c.μ -m. simplemente como funciones μ -medibles.

$f: A \to R$ es μ-integrable si existe una sucesión de funciones simples f_n integrables sobre A que converge uniformemente a f sobre A y que el límite $\lim \int_A f_n d\mu$, denotado por $\int_A f d\mu$, sea finito. De $\int_A f d\mu$ se dice que es la integral sobre A de f respecto a μ. Por $\mathcal{L}_{(A,\mathcal{A},\mu)}$ se querrá decir que f es μ-integrable.

Comparación.

Tenemos una colección $\mathcal{A}$, de subconjuntos de A, cerrada bajo intersecciones a lo más numerables. Se recuerda que $\mathcal{P}(A)$ es la colección de todas las particiones de A, donde cada partición $\mathcal{D}$ es un subconjunto de $\mathcal{A}$, es a lo más numerable, etc. etc. Además la relación "$>$", definida en el Cap. 1, dirige a la colección $\mathcal{P}(A)$.

PROPOSICION 7 Sea $f: A \to R$ no negativa tal que $f \in \mathcal{L}_{(A,\mathcal{A},\mu)}$. Entonces

$$f \in \mathcal{K}_{(A,\mathcal{A},\mu)}$$

y además

$$\int_A f d\mu = (k)\int_A f d\mu$$

Demostración: Sea la sucesión $\{f_n\}$, $f_n: A \to R$ tal que

$$f_n(x) = \frac{m}{n}$$

para

$$x \in D_{mn} = \left\{ x \in A \,\middle|\, \frac{m}{n} \leq f(x) < \frac{m+1}{n} \text{, } m \text{ entero no negativo, } n \text{ natural} \right\}$$

Por lo dicho anteriormente se tiene que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f sobre A y además D_{mn} pertenece a $\mathcal{A}$.

Ahora asocio a cada f_n la colección

$$\mathcal{D}_n = \{ D_{on}, D_{1n}, \ldots \}$$

donde

$$D_{Kn} = \left\{ x \in A \;\middle|\; \frac{K}{n} \leq f(x) < \frac{K+1}{n} \right\}$$

Y nótese que $\mathcal{D}_n$ pertenece a $\mathcal{P}(A)$.

La subsucesión $\{\mathcal{D}_{2^n}\}$ de $\{\mathcal{D}_n\}$ tiene la propiedad de que

$$\mathcal{D}_{2^0} < \mathcal{D}_{2^1} < \ldots < \mathcal{D}_{2^n} < \ldots$$

Tomo $D_{K2^{n+1}} \in \mathcal{D}_{2^{n+1}}$, entonces si

i) K es cero o par

$$D_{K2^{n+1}} \subset D_{\frac{K}{2}, 2^n}$$

ii) K es impar

$$D_{K2^{n+1}} \subset D_{\frac{K-1}{2}\, 2^n}$$

$$\therefore \quad \mathcal{D}_{2^n} < \mathcal{D}_{2^{n+1}}.$$

Defino $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ de tal manera que

$$\varphi(D) = \{ r\mu(D) \mid r = f(t), \text{ alguna } t \in D \}$$

para toda D en $\mathcal{A}$.

$$\therefore\ S(\mathcal{D}_{2^n}, \varphi) = \{ r_1\mu(D_{o2^n}) + r_2\mu(D_{12^n}) + \ldots \mid r_k = f(t_{K2^n}), t_{K2^n} \in D_{K2^n} \}$$

De el hecho que

$$0 \leq f(t_{K2^n}) - \frac{K}{2^n} < \frac{1}{2^n} \quad , \quad \forall\, t_{K2^n} \in D_{K2^n}$$

se tiene que (Por comodidad usaré $I(f)$ en lugar de $\int_A f d\mu$)

$$\left| S(\mathcal{D}_{2^n},\varphi) - I(f_{2^n}) \right| < \frac{1}{2^n}\mu(A)$$

para $n=1,2,\ldots$ (Supongo que $\mu(A)$ es finita).

Como

$$I(f_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} I(f),$$

para cada real positivo ε existe N' tal que

$$\left| I(f_{2^n}) - I(f) \right| < \varepsilon$$

para toda n mayor que N'

Tomo N'' tal que

(1) $$\frac{1}{2^n}\mu(A) < \varepsilon$$

para toda $n > N''$. Tomando $N = \max\{N', N''\}$ se tiene

$$\left| S(\mathcal{D}_{2^n},\varphi) - I(f_{2^n}) \right| < \varepsilon$$

para toda $n > N$ y que

$$\left| I(f_{2^n}) - I(f) \right| < \varepsilon$$

para toda $n > N$.

Ahora para cada $r \in S(\mathcal{D}_{2^n},\varphi)$

$$\left| I(f) - r \right| \leq \left| I(f) - I(f_{2^n}) \right| + \left| I(f_{2^n}) - r \right| < 2\varepsilon$$

para toda $n > N$

$$\therefore \left| S(\mathcal{D}_{2^n},\varphi) - I(f) \right| < 2\varepsilon$$

para toda $n > N$. O lo que es lo mismo

$$\left| S(\mathcal{D}_{2^n},\varphi) - I(f) \right| < \varepsilon$$

para toda $\mathcal{D}_{2^n} > \mathcal{D}_{2^N}$

Sea ahora $\mathcal{D}$ más fina que $\mathcal{D}_{2^n}$, entonces

$$D^{0_1}, \ldots, D^{0_{p_0}}, \ldots \subset D_{02^n}$$

$$D^{1_1}, \ldots, D^{1_{p_1}}, \ldots \subset D_{12^n}$$

$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$$

donde los elementos de $\mathcal{D}$ son los D^{jp_j} con $j = 0, 1, 2, \ldots$ y $p_j = 1, 2, \ldots$ Sea entonces

(2) $$\sum_i f(t^{0_i})\mu(D^{0_i}) + \sum_i f(t^{1_i})\mu(D^{1_i}) + \ldots \in \mathcal{S}(\mathcal{D}, \varphi)$$

y

$$f(t_{02^n})\mu(D_{0i}) + f(t_{12^n})\mu(D_{12^n}) + \ldots \in \mathcal{S}(\mathcal{D}_{2^n}, \varphi)$$

Nótese que los términos de cualquier elemento de $\mathcal{S}(\mathcal{D},\varphi)$ se puede escribir de una manera semejante a como aparece en (2), ya que cada serie de una de estas sumas de Kolmogorov es absolutamente convergente.

De (2) y (3), y por ser μ σ-aditiva, se obtiene

$$\left|\sum_i \left[f(t^{0_i}) - f(t_{02^n})\right]\mu(D^{0_i}) + \sum_i \left[f(t^{1_i}) - f(t_{12^n})\right)\mu(D^{1_i}) + \ldots\right|$$

$$\leq \sum_i \left|f(t^{0_i}) - f(t_{02^n})\right|\mu(D^{0_i}) + \sum_i \left|f(t^{1_i}) - f(t_{12^n})\right|\mu(D^{1_i}) + \ldots$$

$$\leq \frac{1}{2^n}\mu(A)$$

O sea que todo elemento r de $\mathcal{S}(\mathcal{D},\varphi)$ se tiene que

$$\left|\mathcal{S}(\mathcal{D}_{2^n}, \varphi) - r\right| < \frac{1}{2^n}\mu(A).$$

(4) $$\left|S(\mathcal{D}_{2^n},\varphi)-r\right| < \frac{1}{2^n}\mu(A)$$

Téngase presente la siguiente desigualdad

(5) $$\left|r-I(f)\right| \leq \left|r-I(f_{2^n})\right| + \left|I(f_{2^n})-I(f)\right|$$

De (4), usando (1), para n mayor que N obtengo

$$\left|S(\mathcal{D}_{2^n},\varphi)-r\right| < \varepsilon$$

y

$$\left|S(\mathcal{D}_{2^n},\varphi)-I(f_{2^n})\right| < \varepsilon$$

y también tengo que

$$\left|r-I(f_{2^n})\right| < 2\varepsilon$$

para toda n mayor que N. Aplicando estos resultados a (5), obtengo que

$$\left|r-I(f)\right| < 3\varepsilon$$

para n mayor que N

$$\therefore \left|S(\mathcal{D},\varphi)-I(f)\right| < 3\varepsilon \quad \forall\, \mathcal{D} > \mathcal{D}_\varepsilon$$

Por lo tanto φ satisface la condición de Kolmogorov

$$\therefore \quad f \in \mathcal{K}_{(A,\mathcal{A},\mu)}$$

y además

$$\int_A f\,d\mu = (K)\int_A f\,d\mu.$$

Por definición 5 y por la proposición anterior se tiene

<u>TEOREMA 7</u> Si $f \in \mathcal{L}_{(A,\mathcal{A},\mu)}$. Entonces

$$f \in \mathcal{K}_{(A,\mathcal{A},\mu)}$$

y además

$$\int_A f\,d\mu = (k)\int_A f\,d\mu$$

En particular si $A=\{\bar{x}\in R^n \mid 0\leq x_i\leq 1,\ i=1,2,\dots n\}$, $\mathcal{A}$ la familia de los conjuntos Borelianos de A y μ la medida de Lebesgue definida sobre $\mathcal{A}$, por el teorema 7 tenemos el

<u>COROLARIO 4</u> Si $f:A\rightarrow R$ es Lebesgue integrable entonces es Kolmogorov integrable. Ademas la integral de Lebesgue de f es igual a la integral de Kolmogorov de f

BIBLIOGRAFIA

1) "Mathematical Analysis" de Tom M. Apostol.

2) "Probability Theory" de Michel Loeve.

3) "Theory of a Real Variable" Volúmenes I y II de I. P. Natanson.

4) "An Introduction to Abstract Harmonic Analysis" de Lynn H. Loomis.

5) "Functional Analysis" Volúmen II de Kolmogorov y Fomin.