UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

P R O P A G A C I O N D E U N A O N D A P L A N A A T R A V E S D E D O S M E D I O S E L A S T I C O S S E P A R A D O S P O R U N A S U P E R F I C I E C I L I N D R I C A

por

MARCOS MOSHINSKY BORODIANSKY

Tesis presentada como requisito parcial para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS FISICAS

de la

FACULTAD DE CIENCIAS

México, D. F. 1944

A mis queridos

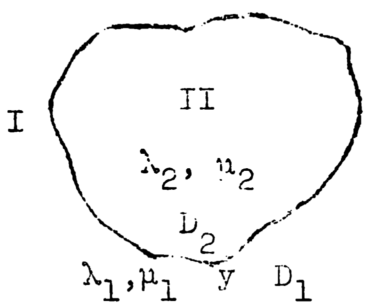
padres.

I N D I C E

INTRODUCCION

Antes de empezar el estudio de la propagación de una onda -- plana a través de una superficie de frontera cilíndrica, vamos a considerar si es posible establecer un método más sencillo que el generalmente empleado, para la resolución de problemas del tipo - siguiente:

Consideremos al espacio dividido en dos regiones separadas - por una superficie de frontera "S" que puede ser cerrada, o -- abierta, y en este último caso se extiende hasta el infinito. -- Una de las regiones que designáremos por I está ocupada por un material de constantes elásticas λ_1, μ_1 y de densidad D_1, y la otra región que designaremos por II está ocupada por un material de constantes elásticas λ_2, μ_2 y de densidad D_2.



Supongamos en el medio I una onda incidente que tiene la forma $\bar{\Lambda}_i$ (x,y,z,t), y que debe satisfacer la ecuación:

$$D_1 \frac{\partial^2 \bar{\Lambda}_i}{\partial t^2} = (2\mu_1 + \lambda_1)\, \nabla\, \nabla\cdot\bar{\Lambda}_i - \mu_1\, \nabla \times \nabla \times \bar{\Lambda}_i$$

Ecuación que satisfacen los desplazamientos en los medios elásticos (véase Page "Theoretical Physics" pág. 174-175). Se trata -- ahora de encontrar un desplazamiento reflejado $\bar{\Lambda}_f$ y uno refractado $\bar{\Lambda}_r$ tales que:

$$D_1\frac{\partial^2\bar{\Lambda}_f}{\partial t^2} = (2\mu_1 + \lambda_1)\ \nabla\ \nabla\cdot\bar{\Lambda}_f - \mu_1\ \nabla x\nabla x\ \bar{\Lambda}_f \qquad (1)$$

$$D_2\frac{\partial^2\bar{\Lambda}_r}{\partial t^2} = (2\mu_2 + \lambda_2)\ \nabla\ \nabla\cdot\bar{\Lambda}_r - \mu_2\ \nabla x\nabla x\ \bar{\Lambda}_r \qquad (2)$$

En donde además se satisfacen las condiciones a la frontera:

$$(\bar{\Lambda}_i + \bar{\Lambda}_f)_s = (\bar{\Lambda}_r)_s$$

$$(\bar{\sigma}_i + \bar{\sigma}_f)_s = (\bar{\sigma}_r)_s.$$

En donde el subíndice S significa que los valores de los vectores de desplazamiento y esfuerzo deben de tomarse en la superficie de frontera S, y $\bar{\sigma}$ en el vector de los esfuerzos correspondiente al vector de los desplazamientos $\bar{\Lambda}$ el cual se obtiene del producto contraído del vector unitario normal a la superficie y del tensor de los esfuerzos ψ_{ij}, el cual está ligado al tensor de los desplazamientos por la ecuación tensorial $\psi_{ij} = \lambda\nabla\cdot\bar{\Lambda}g_{ij} + 2\mu\varphi_{ij}$ en donde $\varphi_{ij} = S(\nabla\bar{\Lambda})$ (la parte simétrica del tensor $\nabla\bar{\Lambda}$).

El método usual de atacar el problema de la resolución de las ecuaciones (1) y (2) es descomponerla en sus tres componentes, en coordenadas tales que la superficie de frontera sea superficie de coordenadas, es decir, que a lo largo de ella una coordenada permanezca constante; y tratar entonces de resolver esos sistemas de ecuaciones con las simplificaciones que se puedan hacer tomando en cuenta el carácter de la onda incidente.

Vamos a ver si es posible simplificar el carácter de las ecuaciones que tenemos que resolver, ya que (1) y (2) presentan en general grandes dificultades.

En primer lugar si queremos estudiar el fenómeno en un intervalo de tiempo finito (-L,L) si $\bar{\Lambda}_i$ (x,y,z,t) satisface cier--

tas condiciones de continuidad tales como el de ser seccionalmente continua con respecto al tiempo en el intervalo $(-L,L)$ etc., condiciones que siempre satisfacen los problemas de la física, se tiene entonces $\overline{\Lambda}_i\ (x,y,z,t)$ puede expresarse como una suma de términos de la forma:

$$\overline{v}_{mi}\ (x,y,z)e^{i\omega_m t}.$$

En donde $\omega_m = \frac{m\pi}{L}$; considerando las ecuaciones (1) y (2) podemos poner $\overline{\Lambda}_f$ y $\overline{\Lambda}_r$ bajo la forma $\overline{\Lambda}_f = T(t)\overline{v}_f(x,y,z)$ y $\overline{\Lambda}_r = T'(t)\overline{v}_r(x,y,z)$. Haciendo la substitución se tiene dividiendo entre T y T' que:

$$D_1 \frac{\ddot{T}}{T}\overline{v}_f = (2\mu_1 + \lambda_1)\ \nabla\ \nabla\cdot\overline{v}_f - \mu_1\ \nabla \times \nabla \times \overline{v}_f \ \ldots\ldots (1')$$

$$D_2 \frac{\ddot{T}'}{T'}\overline{v}_r = (2\mu_2 + \lambda_2)\ \nabla\ \nabla\cdot\overline{v}_r - \mu_2\ \nabla \times \nabla \times \overline{v}_r \ \ldots\ldots (2')$$

Como los segundos miembros no dependen del tiempo se tiene que:

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -\ \omega^2 = \text{const} \qquad \frac{\ddot{T}'}{T'} = -\ \omega'^2 = \text{const} \qquad \text{y entonces}$$

$$T = A\ e^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \quad \text{y} \quad T' = A'e^{i\omega' t} + B'e^{-i\omega' t} \qquad \text{y}$$

$$-\ \omega^2\ D_1\overline{v}_f = (2\mu_1 + \lambda_1)\ \nabla\ \nabla\cdot\overline{v}_f - \mu_1\ \nabla \times \nabla \times \overline{v}_f \ \ldots\ldots\ldots\ldots (1'')$$

$$-\ \omega'^2\ D_2\overline{v}_r = (2\mu_2 + \lambda_2)\ \nabla\ \nabla\cdot\overline{v}_r - \mu_2\ \nabla \times \nabla \times \overline{v}_r \ \ldots\ldots\ldots\ldots (2'')$$

Ahora bien, la solución general $\overline{\Lambda}_f$ y $\overline{\Lambda}_r$ puede expresarse en el intervalo $(-L,L)$ como una suma de términos de la forma:

$$\overline{v}_{mf}\ (x,y,z)\ e^{i\omega_m t} \qquad \text{y} \qquad \overline{v}_{mr}\ (x,y,z)e^{i\omega_m t}$$

en donde $\overline{v}_{mf}$ y $\overline{v}_{mr}$ satisfacen las ecuaciones (1") y (2") cuando $\omega = \omega' = \omega_m$.

Las condiciones a la frontera que tenemos deben ser válidas para todo tiempo y como los desarrollos en serie de Fourier son únicos se tiene que las condiciones a la frontera nos establecen igualdades entre los coeficientes de la serie de Fourier para cada ω_m; y las condiciones a la frontera toman la forma:

$$\text{para toda } m \qquad \begin{aligned} (\overline{v}_{mf} + \overline{v}_{mi})_s &= (\overline{v}_{mr})_s \\ (\overline{\delta}_{mf} + \overline{\delta}_{mi})_s &= (\overline{\delta}_{mr})_s \end{aligned} \qquad (3)$$

en donde las $\overline{\sigma}$ están desarrolladas en serie de Fourier cuyos -- elementos toman la forma $\overline{\delta}_m\, e^{i\omega_m t}$.

De manera que si consideramos el problema en un intervalo finito de tiempo podemos considerar cada armónico $\overline{v}_{mi}\, e^{i\omega_m t}$ de la onda incidente $\overline{\Lambda}_i$ de una manera independiente y entonces el problema tomaría la forma de encontrar $\overline{v}_{mf}\,(x,y,z)$ y $\overline{v}_{mr}\,(x,y,z)$, tales que satisficieran (1"), (2") y las condiciones a la frontera (3).

Si el intervalo del tiempo no es finito $(-L,L)$ sino infinito $(-\infty,\infty)$, entonces en lugar de desarrollar la onda incidente en una serie de Fourier, la desarrollamos en una integral de Fourier siempre que cumpla las condiciones de ser seccionalmente continua con respecto al tiempo, que la integral $\int_{\infty}^{\infty} \overline{\Lambda}_i(x,y,z,t)\, dt$ converge etc., condiciones que están satisfechas por lo general - en problemas físicos. Entonces:

$$\overline{\Lambda}_i\,(x,y,z,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Lambda}_i\,(x,y,z,t')\, e^{i\omega(t'-t)}\, dt'$$

si damos el nombre $\overline{v}_i\left[x,y,z,\omega\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Lambda}_i\,(x,y,z,t')\, e^{i\omega t'}\, dt'$

se tiene entonces que:

$$\overline{\Lambda}_i\,(x,y,z,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \overline{v}_i\,(x,y,z,\omega)\, e^{-i\omega t} d\omega$$

Como las condiciones a la frontera deben ser válidas para todo tiempo t, se ve que como el caso anterior se puede considerar soluciones del tipo:

$$\overline{v}_f\,(x,y,z,\omega)e^{-i\omega t} \quad \text{y} \quad \overline{v}_r\,(x,y,z,\omega)e^{-i\omega t}$$

para una onda incidente del tipo $\bar{v}_i\ (x,y,z,\omega)e^{-i\omega t}$ donde $\bar{v}_f$ y $\bar{v}_r$ satisfacen las ecuaciones (1") y (2") y las condiciones a la frontera:

$$\left[\bar{v}_f\ (x,y,z,\omega) + \bar{v}_i\ (x,y,z,\omega)\right]_s = \left[\bar{v}_r\ (x,y,z,\omega)\right]_s$$
$$\left[\bar{\delta}_f\ (x,y,z,\omega) + \bar{\delta}_i\ (x,y,z,\omega)\right]_s = \left[\bar{\delta}_r\ (x,y,z,\omega)\right]_s$$

para todo valor de ω, y en donde $\bar{\delta}\ (x,y,z,\omega)$ es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\sigma}\ (x,y,z,t')e^{i\omega t'}dt'$$

y $\bar{\Lambda}_f$ y $\bar{\Lambda}_r$ toman la forma: $\bar{\Lambda}_f = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \bar{v}_f\ (x,y,z,\omega)e^{-i\omega t}d\omega$ y $\bar{\Lambda}_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \bar{v}_r\ (x,y,z,\omega)e^{-i\omega t}d\omega$.

De aquí vemos entonces que el problema general para una onda incidente del tipo $\bar{\Lambda}_i\ (x,y,z,\omega,t)$ se puede reducir sin perder generalidad al problema de una onda incidente del tipo:

$$\bar{v}_i\ (x,y,z)e^{-i\omega t}$$

en donde la onda reflejada y la refractada toman la forma

$$\bar{v}_f\ (x,y,z)\ e^{-i\omega t} \quad \text{y} \quad \bar{v}_r\ (x,y,z)\ e^{-i\omega t}$$

satisfaciendo las ecuaciones:

$$-\ \omega^2\ D_1\bar{v}_f = (2\mu_1 + \lambda_1)\ \nabla\ \nabla\cdot\bar{v}_f - \mu_1\ \nabla \times \nabla \times \bar{v}_f \ldots\ldots(4)$$

$$-\ \omega^2\ D_2\bar{v}_r = (2\mu_2 + \lambda_2)\ \nabla\ \nabla\cdot\bar{v}_r - \mu_2\ \nabla \times \nabla \times \bar{v}_r \ldots\ldots(5)$$

Y las condiciones a la frontera

$$\begin{aligned} (\bar{v}_i + \bar{v}_f)_s &= (\bar{v}_r)_s \\ (\bar{\delta}_i + \bar{\delta}_f)_s &= (\bar{\delta}_r)_s \end{aligned} \qquad (6)$$

en donde el vector de los esfuerzos correspondientes a cada onda toma la forma $\bar{\sigma} = \bar{\delta}e^{-i\omega t}$.

Parece que la simplificación obtenida en las ecuaciones que hay que resolver no es de importancia, pero sin embargo despejando $\bar{v}_f$ en (4) tenemos

$$\bar{v}_f = -\nabla\left\{\frac{2\mu_1+\lambda_1}{\omega^2 D_1}\nabla\cdot\bar{v}_f\right\} + \nabla \times \left[\frac{\mu_1}{\omega^2 D_1}\nabla \times \bar{v}_f\right] \quad \ldots\ldots\ldots(7)$$

ya que al ser $\lambda_1, \mu_1, D_1, \omega^2$ constantes se pueden introducir dentro de los signos ∇ y ∇x.

Ahora bien, vemos que la ecuación que tratamos de resolver por sí misma nos define el potencial vector y el potencial escalar del vector $\bar{v}_f$, ya que todo vector puede expresarse de una manera única como $\bar{v}_f = -\nabla\varphi + \nabla \times \bar{A}$ si los potenciales son continuos y seccionalmente diferenciables en la región, si adquieren valores dados en la frontera y si el vector $\bar{A}$ es solenoidal, es decir, $\nabla\cdot\bar{A} = 0$. Desde luego en el caso presente suponemos que los potenciales son continuos y con derivadas continuas y se ve también que $\nabla\cdot\nabla \times \bar{v}_f = 0$ de manera que el potencial vector es solenoidal.

Obtenido ahora el potencial escalar y el potencial vector de $\bar{v}_f$ el problema se reduce ahora a encontrar las ecuaciones que satisfacen esas potenciales ya que indudablemente no son arbitrarias, y sustituír los valores solución de esas ecuaciones en (7).

Para obtener las ecuaciones que satisfacen los potenciales acudimos a la ecuación (4) en donde sacando la divergencia de ambos miembros y teniendo en cuenta que $\nabla\cdot\nabla \times \bar{A} = 0$ se tiene:

$$-\omega^2 D_1\nabla\cdot\bar{v}_f = (2\mu_1 + \lambda_1)\nabla^2\nabla\cdot\bar{v}_f \quad \ldots\ldots\ldots(8)$$

En donde se ve de inmediato que $\nabla\cdot\bar{v}_f$ es una escalar que satisface una ecuación de onda en donde la parte dependiente del tiempo es de la forma $e^{\pm i\omega t}$ y la velocidad es $v_1 = \sqrt{\frac{2\mu_1+\lambda_1}{D_1}}$. Considerando otra vez a (4) si sacamos el rotacional de ambos miembros -

recordando que $\nabla \times \nabla\varphi = 0$ se tiene:

$$- \omega^2 D_1 \nabla \times \bar{v}_f = -\mu_1 \nabla \times \nabla \times (\nabla \times \bar{v}_f) \qquad \text{..........(9)}$$

en donde utilizando la fórmula:

$$\nabla \times \nabla \times (\nabla \times \bar{v}_f) = \nabla \quad \nabla\cdot\nabla \times \bar{v}_f \quad - \nabla^2 \nabla \times \bar{v}_f = -\nabla^2 \nabla \times \bar{v}_f$$

se tiene:

$$- \omega^2 D_1 \nabla \times \bar{v}_f = \mu_1 \nabla^2 \nabla \times \bar{v}_f \qquad \text{...............(9)}$$

y

$$\nabla \cdot \nabla \times \bar{v}_f = 0 \qquad \text{..................(10)}$$

En donde se ve de inmediato que $\nabla \times \bar{v}_f$ es un vector que satisface la ecuación de onda en la cual la parte que depende del tiempo es de la forma $e^{\pm i\omega t}$ y la velocidad $v_1' = \sqrt{\frac{\mu_1}{D_1}}$. Pero no cualquier vector solución de (9) puede ser un valor de $\nabla \times \bar{v}_f$ sino que sólo aquellos cuya divergencia sea nula ya que $\nabla\cdot\nabla \times \bar{v}_f = 0$.

De manera que a toda solución de (9) hay que imponerle la condición que su divergencia sea nula en todo punto para que pueda considerarse como valor posible de $\nabla \times \bar{v}_f$.

Tenemos entonces que si $\bar{\Lambda}_f = \bar{v}_f\, e^{-i\omega t}$ satisface (1), entonces $\bar{v}_f$ satisface (4) y $\nabla\cdot\bar{v}_f$ satisface (8), y $\nabla \times \bar{v}_f$ que es solenoidal satisface (9).

Ahora supongamos un vector de la forma $\bar{\Lambda} = \bar{v}\, e^{-i\omega t}$ donde $\bar{v}\,(x,y,z)$ depende sólo del punto, desde luego $\bar{v}$ admite una separación en dos partes, una solenoidal que admite un potencial vector $\bar{A}$ tal que $\nabla\cdot\bar{A} = 0$, y otra irrotacional que admite un potencial escalar φ, es decir, puede expresarse

$$\bar{v} = - \nabla\varphi + \nabla \times \bar{A} \qquad \text{donde} \qquad \nabla\cdot\bar{A} = 0$$

(Phillips, "Vector Analysis," pág. 187).

Si exigimos que $\varphi\, e^{-i\omega t}$ satisfaga la ecuación:

$$D_1 \frac{\partial^2 \varphi e^{-i\omega t}}{\partial t^2} = (2\mu_1 + \lambda_1)\, \nabla^2\varphi\, e^{-i\omega t}$$

es decir,

$$- D_1\, \omega^2\, \varphi = (2\mu_1 + \lambda_1)\, \nabla^2\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8')$$

Y si exigimos que $\bar{A}\, e^{-i\omega t}$ satisfaga la ecuación

$$D_1 \frac{\partial^2 \bar{A}\, e^{-i\omega t}}{\partial t^2} = \mu_1\, \nabla^2 \bar{A}\, e^{-i\omega t} \qquad (9')$$

es decir,

$$- D_1\, \omega^2 \bar{A} = \mu_1\, \nabla^2 \bar{A} \quad \text{y donde} \quad \nabla\cdot\bar{A} = 0.$$

Entonces se tiene que: $\bar{\Lambda} = \bar{v}\, e^{-i\omega t} = (-\nabla\varphi + \nabla x \bar{A})\, e^{-i\omega t}$ satisface (1), es decir:

$$D_1 \frac{\partial^2 \bar{\Lambda}}{\partial t^2} = (2\mu_1 + \lambda_1)\, \nabla\, \nabla\cdot\bar{\Lambda} - \mu_1\, \nabla \times \nabla \times \bar{\Lambda} \ldots\ldots\ldots (1')$$

Sustituyendo se tiene

$$\frac{\partial^2 \bar{\Lambda}}{\partial t^2} = - \omega^2 \left[- \nabla\varphi + \nabla \times \bar{A} \right] e^{-i\omega t}$$

$$\nabla\, \nabla\cdot\bar{\Lambda} = \nabla \left[- \nabla^2\varphi \right] e^{-i\omega t} \quad \text{ya que} \quad \nabla\cdot\nabla \times \bar{A} = 0$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\Lambda} = \nabla \times (\nabla \times \nabla \times \bar{A})\, e^{-i\omega t} = \nabla \times (\nabla\, \nabla\cdot\bar{A} - \nabla^2\bar{A})\, e^{-i\omega t}$$

$$= - \nabla \times \nabla^2 \bar{A} e^{-i\omega t} \quad \text{ya que} \quad \nabla\cdot\bar{A} = 0 \quad \text{y} \quad \nabla \times \nabla\varphi = 0.$$

Así pues:

$$-\omega^2 D_1 (-\nabla\varphi + \nabla x \bar{A}) e^{-i\omega t} = \left[(2\mu_1 + \lambda_1)\, \nabla(-\nabla^2\varphi) e^{-i\omega t} + \mu_1\, \nabla x \nabla^2 \bar{A} \right] e^{-i\omega t}.$$

Eliminando $e^{-i\omega t}$ en ambos miembros y ordenando:

$$\nabla \left[\omega^2 D_1 \varphi + (2\mu_1 + \lambda_1)\, \nabla^2\varphi \right] = \nabla x \left[\omega^2 D_1 \bar{A} + \mu_1 \nabla^2 \bar{A} \right]$$

y entonces por nuestras hipótesis $\nabla 0 = \nabla \times 0 = 0.$

De manera que para que $\bar{\Lambda} = \bar{v}\, (x,y,z)\, e^{-i\omega t}$ satisfaga la -- ecuación (1) es condición <u>necesaria</u> y <u>suficiente</u> que el potencial vector $\bar{A}$ y el escalar φ de $\bar{v}\, (x,y,z)$ tal que: $\bar{v} = -\nabla\varphi + \nabla x \bar{A}$, satisfagan las ecuaciones (8') y (9'), con la condición adicional de que $\bar{A}$ sea solenoidal, es decir, $\nabla\cdot\bar{A} = 0$.

En algunos problemas el imponer a un vector solución de la ecuación de onda la condición de que su divergencia sea nula podrá ofrecer dificultades, pero en otros como por ejemplo en el que se va a tratar aquí se puede satisfacer esa condición de manera sencilla.

Una vez obtenidos valores de φ y $\bar{A}$ que satisfagan (8') y (9'), que son iguales a (8) y (9), y la condición $\nabla \cdot \bar{A} = 0$ que es la (10), sustituyendo en (7) se tienen valores de $\bar{v}_f$.

Para cada valor particular de φ y $\bar{A}$ tenemos un valor particular de $\bar{v}_f$ y como las ecuaciones (8) y (9, 10) nos proporcionan una infinidad de soluciones particulares al resolverlas por separación de variables, se tiene que podemos construír una infinidad de soluciones de $\bar{v}_f$, dotando a cada solución con coeficientes arbitrarios, y formando una suma de estas soluciones lo que nos da una serie infinita, podemos encontrar valores para los coeficientes que satisfagan las condiciones a la frontera y que sean tales que la serie sea absoluta y uniformemente convergente. En ese caso tendremos un valor de $\bar{v}_f$ que es solución de nuestro problema.

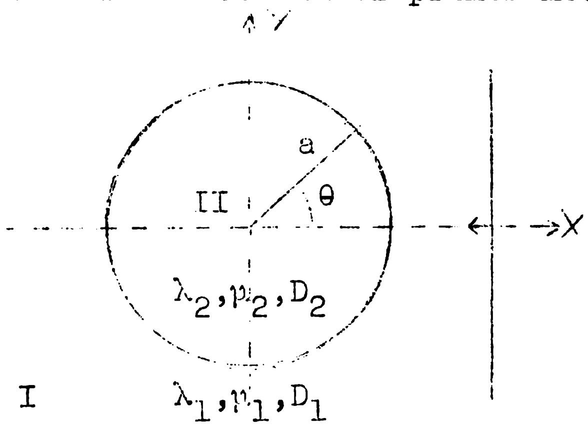
Los argumentos anteriores pueden repetirse paso por paso para la ecuación (5) y el vector $\bar{v}_r$ y tendremos como en el caso anterior, un valor de $\bar{v}_r$ que es solución de nuestro problema.

Con estos preliminares expuestos pasaremos al problema particular que se trata de resolver.

PROPAGACION DE UNA ONDA PLANA A TRAVES DE UNA SUPERFICIE DE FRONTERA CILINDRICA

En nuestro problema particular el medio I y el medio II están separados por una superficie cilíndrica de longitud infinita y de radio "a", el medio I tiene constantes elásticas λ_1, μ_1 y densidad D_1, y el medio II constantes elásticas λ_2, μ_2 y densidad D_2.

Escogemos el origen de coordenadas en un punto sobre el eje del cilindro. En el primer medio hay una onda plana de dilatación, en la que la dirección del desplazamiento es perpendicular al eje del cilindro, con esta dirección hacemos coincidir el eje de las x, de manera que por ser plana y coincidir la dirección del desplazamiento con el eje de las x, debe tener la forma siguiente:



$$\overline{\Lambda}_i = I\, A\, e^{i\frac{\omega}{v_1}(\ell x + my + nz - v_1 t)}$$

(en donde I,J,K son los vectores unitarios cartesianos), pero como es de dilatación, se tiene que $\nabla \times \overline{\Lambda}_i = 0$ o sea:

$$\begin{vmatrix} I & J & K \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{i\frac{\omega}{v_1}(\ell x+my+nz-v_1 t)} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(-J\,\frac{i\omega n}{v_1} + K\,\frac{i\omega m}{v_1}\right) e^{i\frac{\omega}{v_1}(\ell x+my+nz-v_1 t)} = 0.$$

De manera que $m = 0$, $n = 0$ y como $\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$ entonces $\ell = 1$ y la onda toma la forma $\overline{\Lambda}_i = I\, A\, e^{i\omega/v_1 (x-v_1 t)}$ en donde

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\mu_1+\lambda_1}{D_1}}.$$

De que esta expresión satisface la ecuación:

$$D_1 \frac{\partial^2 \bar{\Lambda}_i}{\partial t^2} = (2\mu_1 + \lambda_1)\, \nabla\, \nabla\cdot\bar{\Lambda}_i - \mu_1\, \nabla \times \nabla \times \bar{\Lambda}_i$$

se ve de inmediato por el hecho de que $\nabla \times \bar{\Lambda}_i = 0$ y $\nabla\times\nabla\times\bar{\Lambda}_i = \nabla\, \nabla\cdot\bar{\Lambda}_i - \nabla^2 \bar{\Lambda}_i = 0$; que la ecuación toma la forma:

$$D_1 \frac{\partial^2 \bar{\Lambda}_i}{\partial t^2} = (2\mu_1 + \lambda_1)\, \nabla^2 \bar{\Lambda}_i$$

y como $\bar{\Lambda}_i$ no depende de y y z entonces:

$$D_1 \frac{\partial^2 \bar{\Lambda}_i}{\partial t^2} = (2\mu_1 + \lambda_1) \frac{\partial^2 \bar{\Lambda}_i}{\partial x^2}$$

y de esta ecuación es evidentemente solución $\bar{\Lambda}_i = IAe^{i\frac{\omega}{v_1}(x-v_1 t)}$ ...(11)

En general la onda plana de dilatación debería ser de la forma $I\left[f_1(x-v_1t) + f_2(x+v_1t)\right]$ pero se puede siempre descomponer por medio de integrales o series de Fourier en la forma que tiene $\bar{\Lambda}_i$.

Para obtener $\bar{\Lambda}_f$ y $\bar{\Lambda}_r$ ponemos $\bar{\Lambda}_f = \bar{v}_f\,(x,y,z)\, e^{-i\omega t}$ y $\bar{\Lambda}_r = \bar{v}_r\, e^{-i\omega t}$ y procedemos como está indicado en la introducción, pero antes hacemos notar que por el carácter de la onda incidente y de las condiciones a la frontera se ve que $\bar{v}_f$ y $\bar{v}_r$ no deben depender de z y además que deben encontrarse en el plano xoy - lo que implica tanto para $\bar{v}_f$ como para $\bar{v}_r$ la forma:

$$\bar{v} = I\, f_1\,(x,y) + J\, f_2\,(x,y)$$

en cuyo caso:

$$\nabla \times \bar{v} = \begin{vmatrix} I & J & K \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix} = K\left[\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right].$$

De manera que $\nabla \times \bar{v}$ debe tener la dirección del eje del cilindro y es independiente de z.

Consideremos ahora como se vió en la introducción que:

$$\ddot{\bar{v}}_f = -\frac{2\mu_1+\lambda_1}{\omega^2 D_1}\nabla\,\nabla\cdot\bar{v}_f + \frac{\mu_1}{\omega^2 D_1}\nabla \times (\nabla \times \bar{v}_f) \quad \ldots\ldots\ldots(12)$$

En donde: $-\omega^2 D_1\,\nabla\cdot\bar{v}_f = (2\mu_1+\lambda_1)\,\nabla^2\nabla\cdot\bar{v}_f$

y $-\omega^2 D_1\,\nabla\times\bar{v}_f = \mu_1\,\nabla^2\nabla\times\bar{v}_f$ y $\nabla\cdot\nabla\times\bar{v}_f = 0$.

Y en donde, por el carácter del problema $\nabla\cdot\bar{v}_f$ es independiente de z al serlo $\bar{v}_f$ y $\nabla\times\bar{v}_f = K\alpha_f$, en donde α_f es una escalar independiente de z, y tenemos desde luego que si α_f es solución de: $-\omega^2 D_1\alpha_f = \mu_1\nabla^2\alpha_f$ y α_f es independiente de z entonces $\nabla\times\bar{v}_f = K\alpha_f$ satisface la relación $\nabla\cdot\nabla\times\bar{v}_f = 0 = \nabla\cdot K\alpha_f$ ya que:

$$\nabla\cdot\left[If_1 + Jf_2 + Kf_3\right] = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

y si $f_1 = f_2 = 0$ y f_3 independiente de z la divergencia es nula; de manera que el problema se reduce a encontrar soluciones independientes de z de las escalares $\beta_f = \nabla\cdot\bar{v}_f$ y α_f que satisfacen las ecuaciones:

$$-\omega^2 D_1\beta_f = (2\mu_1+\lambda_1)\,\nabla^2\beta_f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

$$-\omega^2 D_1\alpha_f = \mu_1\,\nabla^2\alpha_f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

De aquí en adelante utilizaremos exclusivamente coordenadas cilíndricas que son las que convienen al problema y en las cuales los vectores unitarios serán designados por i_1, i_2 e i_3, estando relacionados con los cartesianos por las relaciones:

$$I = i_1\cos\theta - i_2\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$J = i_1\,\mathrm{sen}\,\theta + i_2\cos\theta$$

$$K = i_3$$

y las coordenadas son (r, θ, z) dadas por $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \text{angtan}\frac{y}{x}$ y $z = z$. En coordenadas cilíndricas el Laplaciano toma la forma

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

sustituyendo en (13) y (14) y teniendo en cuenta que β_f y α_f son independientes de z lo que implica que:

$$\frac{\partial^2\beta_f}{\partial z^2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2\alpha_f}{\partial z^2} = 0$$

nos queda

$$-\omega^2 D_1\beta_f = (2\mu_1+\lambda_1)\left[\frac{\partial^2\beta_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\beta_f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\beta_f}{\partial\theta^2}\right]$$

$$-\omega^2 D_1\alpha_f = \mu_1\left[\frac{\partial^2\alpha_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\alpha_f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\alpha_f}{\partial\theta^2}\right].$$

Designando $\sqrt{\frac{2\mu_1+\lambda_1}{D_1}} = v_1$ y $\sqrt{\frac{\mu_1}{D_1}} = v_1'$ y poniendo:

$$\beta_f = R_1(r)\,\theta_1(\theta)$$
$$\alpha_f = R_2(r)\,\theta_2(\theta).$$

Sustituyendo y dividiendo entre β_f y α_f se tiene:

$$-\frac{\omega^2}{v_1^2} = \frac{\frac{d^2R_1}{dr^2}}{R_1} + \frac{1}{r}\frac{\frac{dR_1}{dr}}{R_1} + \frac{1}{r^2}\frac{\frac{d^2\theta_1}{d\theta^2}}{\theta_1} \quad \text{...........(13')}$$

$$-\frac{\omega^2}{v_1'^2} = \frac{\frac{d^2R_2}{dr^2}}{R_2} + \frac{1}{r}\frac{\frac{dR_2}{dr}}{R_2} + \frac{1}{r^2}\frac{\frac{d^2\theta_2}{d\theta^2}}{\theta_2} \quad \text{..........(14')}$$

De aquí vemos que $\frac{\frac{d^2\theta_1}{d\theta^2}}{\theta_1}$ tiene que ser constante a la cual designaremos por $-m^2$ de manera que:

$$\frac{d^2\theta_1}{d\theta^2} + m^2\theta_1 = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2\theta_2}{d\theta^2} + m^2\theta_2 = 0$$

Como se requiere que $\theta_1\ (\theta + 2\pi) = \theta_1\ (\theta)$ y $\theta_2\ (\theta+2\pi) = \theta_2(\theta)$ entonces m es entero, y tenemos las ecuaciones de Bessel

$$\frac{d^2R_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_1}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{v_1^{\,2}} - \frac{m^2}{r^2}\right) R_1 = 0$$

$$\frac{d^2R_2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_2}{dr^2} + \left(\frac{\omega^2}{v_1'^{\,2}} - \frac{m^2}{r^2}\right) R_2 = 0.$$

Tenemos entonces, que las ecuaciones últimas tienen por solución:

$$A_m' J_m\left(\frac{\omega}{v_1}r\right) \quad y \quad B_m' N_m\left(\frac{\omega}{v_1}r\right)\ / \quad y \quad J_m\left(\frac{\omega r}{v_1'}\right)\ / \quad N_m\left(\frac{\omega}{v_1'}r\right)$$

que son funciones de Bessel y de Neuman.

Se tiene entonces que:

$$\beta_f = (A_{fm} \cos m\theta + B_{fm} \operatorname{sen} \theta)\left(A_{fm}' J_m\left(\frac{\omega r}{v_1}\right) + B_{fm}' N_m\left(\frac{\omega r}{v_1}\right)\right) \quad (15)$$

$$\alpha_f = (C_{fm} \cos m\theta + D_{fm} \operatorname{sen} m\theta)\left(C_{fm}' J_m\left(\frac{\omega r}{v_1'}\right) + D_{fm}' N_m\left(\frac{\omega r}{v_1'}\right)\right) \quad (16)$$

Las expresiones anteriores son solución para todo valor entero de m. Sustituyendo en (12) con:

$$\nabla \times \bar{v}_f = i_3 \alpha_f \quad y \quad \nabla\cdot\bar{v}_f = \beta_f$$

$$\nabla\, \nabla\cdot\bar{v}_f = i_1 \frac{\partial\beta_f}{\partial r} + \frac{i_2}{r}\frac{\partial\beta_f}{\partial\theta} \qquad \nabla \times (\nabla \times \bar{v}_f) = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} i_1 & i_2 r & i_3 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \alpha_f \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{v}_f = \frac{1}{r}\left[i_1 \frac{\partial\alpha_f}{\partial\theta} - i_2\, r\, \frac{\partial\alpha_f}{\partial r}\right] = \frac{i_1}{r}\frac{\partial\alpha_f}{\partial\theta} - i_2 \frac{\partial\alpha_f}{\partial r}$$

De manera que:

$$\bar{v}_f = i_1\left(-\frac{v_1^{\,2}}{\omega^2}\frac{\partial\beta_f}{\partial r} + \frac{v_1'^{\,2}}{\omega^2}\frac{1}{r}\frac{\partial\alpha_f}{\partial\theta}\right) + i_2\left(\frac{v_1^{\,2}}{\omega^2}\frac{1}{r}\frac{\partial\beta_f}{\partial\theta} - \frac{v_1'^{\,2}}{\omega^2}\frac{\partial\alpha_f}{\partial r}\right) \quad (17)$$

Antes de proceder adelante en la obtención del valor de $\bar{v}_f$ conviene hacer notar que la aparición de los dos tipos de funciones de Bessel J_m y N_m obedece a que $\bar{v}_f$ es el vector que se refleja en el primer medio y que por lo tanto $r > a$ siempre para $\bar{v}_f$. En la onda refractada que penetra al II medio, r llega a alcanzar el valor $r = 0$ y como $N_m(0) = \infty$ para toda m, resulta que para $\bar{v}_r$ la única función de Bessel que se puede emplear es J_m. Si para $\bar{v}_f$ dejamos que A'_m y B'_m tengan valores arbitrarios entonces las condiciones a la frontera no nos determinan de una manera única los coeficientes, necesitamos determinar por algún método las razones $\frac{B'_m}{A'_m}$ y $\frac{D'_m}{C'_m}$.

Para obtener las razones B'_m/A'_m y D'_m/C'_m de los coeficientes en el primer medio, podemos acudir a un razonamiento matemático y a un razonamiento físico.

El matemático consiste en lo siguiente:
Las constantes elásticas λ y μ están definidas como constantes de proporcionalidad entre las componentes del tensor de las deformaciones y las componentes del tensor de los esfuerzos y pueden por lo tanto ser iguales a cualquier número real, consideraciones físicas posteriores que parten del hecho de que los coeficientes de Poisson observados no exceden a 1/2, en la práctica, limitan λ y μ a valores positivos, pero en el caso del problema visto desde un punto matemático λ y μ pueden ser positivos o negativos.

A distancias r grandes, $r \longrightarrow \infty$ se tiene que:

$$J_m\left(\frac{\omega r}{v_1}\right) \longrightarrow \sqrt{\frac{2v_1}{\omega\pi r}} \cos\left(\frac{\omega r}{v_1} - \frac{2m+1}{4}\pi\right)$$

$$N_m\left(\frac{\omega r}{v_1}\right) \longrightarrow \sqrt{\frac{2v_1}{\omega\pi r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega r}{v_1} - \frac{2m+1}{4}\pi\right).$$

Donde $v_1 = \sqrt{\frac{2\mu_1+\lambda_1}{D_1}}$. Si μ_1 y $\lambda_1 > 0$, v_1 es real; si μ_1 y $\lambda_1 < 0$ o bien, $\mu_1 < 0$ y $\lambda_1 < -2\,\mu_1/v_1$ es imaginario puro, es decir $v_1 = \pm\, iu_1$ donde u_1 es real y positiva.

Consideremos una combinación lineal de J_m y N_m:

$$A'_m J_m \left(\frac{\omega r}{v_1}\right) + B'_m N_m \left(\frac{\omega r}{v_1}\right) \longrightarrow \sqrt{\frac{2v_1}{\omega\pi r}} \left[A'_m \cos\left(\frac{\omega r}{v_1} - \frac{2m+1}{4}\pi\right) + B'_m \operatorname{sen}\left(\frac{\omega r}{v_1} - \frac{2m+1}{4}\pi\right)\right] \quad \text{si} \quad r \longrightarrow \infty$$

como: $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ y $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

sustituimos y agrupamos:

$$A'_m J_m \left(\frac{\omega r}{v_1}\right) + B'_m N_m \left(\frac{\omega r}{v_1}\right) \longrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2v_1}{\omega\pi r}} \left[\left(A'_m + \frac{B'_m}{i}\right) e^{i\left(\frac{\omega r}{v_1} - \frac{2m+1}{4}\pi\right)} + \left(A'_m - \frac{B'_m}{i}\right) e^{-i\left(\frac{\omega r}{v_1} - \frac{2m+1}{4}\pi\right)} \right] \quad \text{si} \quad r \longrightarrow \infty .$$

Ahora bien, supongamos el caso en que $V_1 = \pm iu_1$ en donde u_1 es real, $\dfrac{1}{v_1} = \dfrac{1}{\pm iu_1} = \mp \dfrac{i}{u_1}$ se tiene entonces que:

$$A'_m J_m \left(\frac{\omega r}{v_1}\right) + B'_m N_m \left(\frac{\omega r}{v_1}\right) \longrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2v_1}{\omega\pi r}} \left[\left(A'_m + \frac{B'_m}{i}\right) e^{\pm \frac{\omega r}{u_1}} e^{-i\frac{2m+1}{4}\pi} + \left(A'_m - \frac{B'_m}{i}\right) e^{\mp \frac{\omega r}{u_1}} e^{+i\frac{2m+1}{4}} \right] \quad \text{si} \quad r \longrightarrow \infty .$$

Ahora bien, $v_1 = \pm iu_1$, si ponemos $v_1 = iu_1$ entonces el primer sumando es $e^{\omega r/u_1}$ y el segundo es $e^{-\omega r/u_1}$; en todo problema físico se exige a las soluciones que no se hagan infinitas en ningún punto, y mucho menos en el infinito, pero como se tiene que $e^{\omega r/u_1} \longrightarrow \infty$ si $r \longrightarrow \infty$, se deduce de inmediato que -- $A'_m + \dfrac{B_m}{i} = 0$ o sea $\dfrac{A'_m}{B'_m} = -\dfrac{1}{i}$, mientras que $e^{-\omega r/u_1} \longrightarrow 0$ si - $r \longrightarrow \infty$. Si $v_1 = -iu_1$, entonces debe de ser 0 el coeficiente del segundo sumando, ya que éste será $e^{\omega r/u_1}$ y se tiene entonces $\dfrac{A'_m}{B'_m} = \dfrac{1}{i}$.

Para ver cuál de estas relaciones debemos preferir acudimos al hecho de que nuestro problema requiere soluciones del tipo --

$\bar{\Lambda}_f = \bar{v}_f\, e^{-\omega t i}$ y $\nabla\cdot\bar{\Lambda}_f = \nabla\cdot\bar{v}_f\, e^{-i\omega t}$, y los valores particulares de $\nabla\cdot\bar{\Lambda}_f$ están dados por:

$$(A_m \cos m\theta + B_m \operatorname{sen} m\theta)\left(A'_m J_m\left(\frac{\omega r}{v_1}\right) + B'_m N_m\left(\frac{\omega r}{v_1}\right)\right) e^{-i\omega t}$$

Sabemos que $\frac{A'_m}{B'_m} = \pm\frac{1}{i}$ de manera que un valor particular de $\nabla\cdot\bar{\Lambda}_f$ es:

$$(A_m \cos m\theta + B_m \operatorname{sen} m\theta)\left[J_m\left(\frac{\omega r}{v_1}\right) \pm iN_m\left(\frac{\omega r}{v_1}\right)\right] e^{-i\omega t}$$

en donde A'_m se introduce dentro de A_m y B_m.

Ahora si $r \longrightarrow \infty$ entonces $\nabla\cdot\bar{\Lambda}_f$ tiende a:

$$(A_m \cos m\theta + B_m \operatorname{sen} m\theta)\sqrt{\frac{2v_1}{\omega\pi r}}\, e^{\mp i\frac{2m+1}{4}\pi}\, e^{i\omega\left[\pm\frac{r}{v_1} - t\right]}$$

Ahora bien, si se toma el signo + se tiene $e^{i\omega\left[\frac{r}{v_1} - t\right]}$ que nos dice que cuando $r \longrightarrow \infty$, en el potencial escalar los frentes de onda son circunferencias y el potencial sufre un retraso en su fase a medida que se aleja del cilindro, es decir, las ondas viajan hacia afuera, lo que tiene sentido físico y se verifica en la realidad en problemas electromagnéticos, mientras que si escogemos el signo −, tenemos $e^{-i\omega(r/v_1+t)}$ y el potencial sufre un adelanto en su fase al alejarse del cilindro, lo que no sucede en ningún problema físico conocido. Así pues vemos que tenemos que escoger la razón $\frac{A_m}{B_m} = \frac{1}{i}$.

Desde el punto de vista físico el escoger $\frac{A_m}{B_m} = \frac{1}{i}$ satisface nuestro concepto intuitivo de que dado un cilindro no necesariamente circular de sección normal finita, a una distancia considerable del cilindro los frentes de onda toman una forma cada vez más aproximada a la circular a medida que se alejan del cilindro, es decir, que la onda tiende a la forma:

$$f(r,\theta)\, e^{i\omega\left(\frac{r}{v_1} - t\right)}$$

cuando $r \longrightarrow \infty$. (Este argumento intuitivo está utilizado implícitamente por Morse "Theory of Sound" pág. 234, 235, 263; y Margenau and Murphy "Mathematics of Physics and Chemistry," pág. 230).

El razonamiento seguido anteriormente para $\nabla \cdot \bar{v}_f = \beta_f$ se puede repetir para $\nabla \times \bar{v}_f = i_3 \alpha_f$ y se ve entonces que tanto α_f como β_f deben tomar la forma:

$$\beta_f = (A_{fm} \cos m\theta + B_{fm} \operatorname{sen} m\theta)\, H_m \left(\frac{\omega r}{v_1}\right) \quad ....(15')$$

$$\alpha_f = (C_{fm} \cos m\theta + D_{fm} \operatorname{sen} m\theta)\, H_m \left(\frac{\omega r}{v_1'}\right) \quad ....(16')$$

En donde se utiliza la notación siguiente:

$$J_m \left(\frac{\omega r}{v_1}\right) + i\, N_m \left(\frac{\omega r}{v_1}\right) = H_m \left(\frac{\omega r}{v_1}\right)$$

$$J_m \left(\frac{\omega r}{v_1'}\right) + i\, N_m \left(\frac{\omega r}{v_1'}\right) = H_m \left(\frac{\omega r}{v_1'}\right).$$

La regla de derivación que es válida para las funciones de Bessel y Neumann sigue válida para una combinación lineal como H_m de manera que:

$$\frac{dH_m(z)}{dz} = \frac{1}{2}\left[H_{m-1}(z) - H_{m+1}(z)\right] \qquad \frac{2m}{z} H_m(z) = \left[H_{m-1}(z) + H_{m+1}(z)\right].$$

Sustituyendo en (17) tenemos que para $m \geq 1$.

$$\bar{v}_f = i_1 \left\{ -\frac{v_1^2}{\omega^2} (A_{fm} \cos m\theta + B_{fm} \operatorname{sen} m\theta) \frac{\omega}{2v_1} \left[H_{m-1}\left(\frac{\omega r}{v_1}\right) - H_{m+1}\left(\frac{\omega r}{v_1}\right)\right] + \frac{v_1'^2}{\omega^2} (-C_{fm} \operatorname{sen} m\theta + D_{fm} \cos m\theta) \frac{\omega}{2v_1'} \left[H_{m-1}\left(\frac{\omega r}{v_1'}\right) + H_{m+1}\left(\frac{\omega r}{v_1'}\right)\right] \right\} + i_2 \left\{ -\frac{v_1^2}{\omega^2} (-A_{fm} \operatorname{sen} m\theta + B_{fm} \cos m\theta) \frac{\omega}{2v_1} \left[H_{m-1}\left(\frac{\omega r}{v_1}\right) + H_{m+1}\left(\frac{\omega r}{v_1}\right)\right] - \frac{v_1'^2}{\omega^2} (C_{fm} \cos m\theta + \right.$$

$$+ D_{fm} \text{ sen } m\theta) \frac{\omega}{2v_1'} \left[H_{m-1}\left(\frac{\omega r}{v_1'}\right) - H_{m+1}\left(\frac{\omega r}{v_1'}\right)\right] .$$

Ordenando y haciendo algunas simplificaciones se tiene:

$$\bar{v}_f = i_1 \left\{ \cos m\theta \left[A_{fm} \left(-\frac{v_1}{2\omega}\right) \left[H_{m-1}\left(\frac{\omega r}{v_1}\right) - H_{m+1}\left(\frac{\omega r}{v_1}\right)\right] \right.\right.$$

$$\left. + D_{fm} \frac{v_1'}{2\omega} \left[H_{m-1}\left(\frac{\omega r}{v_1'}\right) + H_{m+1}\left(\frac{\omega r}{v_1'}\right)\right]\right] + \text{sen } m\theta \left[B_{fm}\left(-\frac{v_1}{2\omega}\right) \left[H_{m-1}\left(\frac{\omega r}{v_1}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. H_{m+1}\left(\frac{\omega r}{v_1}\right)\right] + C_{fm}\left(-\frac{v_1'}{2\omega}\right)\left[H_{m-1}\left(\frac{\omega r}{v_1'}\right) + H_{m+1}\left(\frac{\omega r}{v_1'}\right)\right]\right]\right\} + i_2 \left\{ \cos m\theta \left[-\frac{v_1}{2\omega} B_{fm} \right.\right.$$

$$\left. \left[H_{m-1}\left(\frac{\omega r}{v_1}\right) + H_{m+1}\left(\frac{\omega r}{v_1}\right)\right] - \frac{v_1'}{2\omega} C_{fm} \left[H_{m-1}\left(\frac{\omega r}{v_1'}\right) - H_{m+1}\left(\frac{\omega r}{v_1'}\right)\right]\right] + \text{sen } m\theta$$

$$\left.\left[A_{fm} \frac{v_1}{2\omega} \left[H_{m-1}\left(\frac{\omega r}{v_1}\right) + H_{m+1}\left(\frac{\omega r}{v_1}\right)\right] - \frac{v_1'}{2\omega} D_{fm} \left[H_{m-1}\left(\frac{\omega r}{v_1'}\right) - H_{m+1}\left(\frac{\omega r}{v_1'}\right)\right]\right]\right\}.$$

Aquí conviene introducir algunas simplificaciones en la es--critura

$$\frac{v_1}{2\omega} \left[H_{m+1}\left(\frac{\omega r}{v_1}\right) - H_{m-1}\left(\frac{\omega r}{v_1}\right)\right] = \left[-m,1 \right]$$

$$\frac{v_1}{2\omega} \left[H_{m+1}\left(\frac{\omega r}{v_1}\right) + H_{m-1}\left(\frac{\omega r}{v_1}\right)\right] = \left[m,1 \right]$$

$$\frac{v_1'}{2\omega} \left[H_{m+1}\left(\frac{\omega r}{v_1'}\right) - H_{m-1}\left(\frac{\omega r}{v_1'}\right)\right] = \left[-m,1' \right] \qquad \text{............(18)}$$

$$\frac{v_1'}{2\omega} \left[H_{m+1}\left(\frac{\omega r}{v_1'}\right) + H_{m-1}\left(\frac{\omega r}{v_1'}\right)\right] = \left[m,1' \right].$$

En donde los paréntesis cuadrados se van a referir siempre a las funciones H_m y los redondos se referirán a J_m. Se tiene entonces que:

$$\bar{v}_f = i_1 \left\{ \cos m\theta \left(A_{fm}[-m,1] + D_{fm}[m,1']\right) + \text{sen } m\theta \left(B_{fm}[-m,1] \right.\right.$$

$$\left.\left. - C_{fm}[m,1'] \right)\right\} + i_2 \left\{ \cos m\theta \left(- B_{fm}[m,1] + C_{fm}[-m,1'] \right)\right.$$

$$\left. + \text{sen } m\theta \left(A_{fm} [m,1] + D_{fm} [-m,1'] \right)\right\} \qquad \text{................(19)}$$

Este es el valor de $\bar{v}_f$ para toda $m \geqslant 1$, pero para $m = 0$ tenemos que:

$$\beta_f = A_{fo} H_o \left(\frac{\omega r}{v_1}\right) \quad y \quad \alpha_f = C_{fo} H_o \left(\frac{\omega r}{v_1'}\right).$$

Sustituyendo en (17) y teniendo en cuenta que:

$$\frac{dH_o(z)}{dz} = - H_1(z)$$

se tiene:

$$\bar{v}_f = i_1 \frac{v_1}{\omega} A_{fo} H_1 \left(\frac{\omega r}{v_1}\right) + i_2 \frac{v_1'}{\omega} C_{fo} H_1 \left(\frac{\omega r}{v_1'}\right).$$

Usando los símbolos:

$$\frac{v_1}{\omega} H_1 \left(\frac{\omega r}{v_1}\right) = [0,1] \quad y \quad \frac{v_1'}{\omega} H_1 \left(\frac{\omega r}{v_1'}\right) = [0,1']$$

se tiene

$$\bar{v}_f = i_1 A_{fo} [0,1] + i_2 C_{fo} [0,1'] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

Si escribimos ahora $\bar{\Lambda}_f = \bar{v}_f e^{-i\omega t}$ y en lugar de $\bar{v}_f$ ponemos la expresión (19) para una $m \geqslant 1$ o la (20), tendremos que - $\bar{\Lambda}_f$ es solución de:

$$D_1 \frac{\partial^2 \bar{\Lambda}_f}{\partial t^2} = (2\mu_1 + \lambda_1) \nabla \nabla \cdot \bar{\Lambda}_f - \mu_1 \nabla \times \nabla \times \bar{\Lambda}_f \quad \ldots\ldots (1')$$

Comprobaremos esto fácilmente recordando que:

$$\bar{v}_f = - \frac{v_1^2}{\omega^2} \nabla \beta_f + \frac{v_1'^2}{\omega^2} \nabla \times i_3 \alpha_f$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\Lambda}_f}{\partial f^2} = - \omega^2 \left[- \frac{v_1^2}{\omega^2} \nabla \beta_f + \frac{v_1'^2}{\omega^2} \nabla \times i_3 \alpha_f \right] e^{-i\omega t}$$

$$\nabla \nabla \cdot \bar{\Lambda}_f = \nabla \left(- \frac{v_1^2}{\omega^2} \nabla^2 \beta_f \right) e^{-i\omega t}$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\Lambda}_f = \frac{v_1'^2}{\omega^2} \nabla \times \left[\nabla \times (\nabla \times i_3 \alpha_f) \right] e^{-i\omega t}$$

$$= \frac{v_1'^2}{\omega^2} \nabla \times (\nabla \nabla \cdot i_3 \alpha_f - \nabla^2 i_3 \alpha_f) e^{-i\omega t}$$

$$= \frac{v_1'^2}{\omega^2} \nabla \times \nabla^2 i_3 \alpha_f e^{-i\omega t} \quad \text{porque} \quad \nabla \cdot i_3 \alpha_f = \frac{\partial \alpha_f}{\partial z} = 0.$$

sustituyendo:

$$-\omega^2 D_1 \left(-\frac{v_1^2}{\omega^2} \nabla \beta_f + \frac{v_1'^2}{\omega^2} \nabla \times i_3 \alpha_f\right) e^{-i\omega t} = (2\mu_1+\lambda_1)\left(-\frac{v_1^2}{\omega^2}\right) \nabla\, \nabla^2 \beta_f e^{-i\omega t}$$

$$+ \mu_1 \frac{v_1'^2}{\omega^2} \nabla \times \nabla^2\, i_3 \alpha_f\, e^{-i\omega t}$$

simplificando $e^{-i\omega t}$ y agrupando:

$$\left(-\frac{v_1^2}{\omega^2}\right) \nabla \left[-\omega^2 D_1 \beta_f - (2\mu_1 + \lambda_1)\, \nabla^2 \beta_f\right] =$$

$$\left(\frac{v_1'^2}{\omega^2}\right) \nabla \times i_3 \left(\omega^2 D_1 \alpha_f + \mu_1 \nabla^2 \alpha_f\right).$$

Pero los paréntesis son precisamente las ecuaciones que nos definen a β_f y α_f de manera que:

$$-\frac{v_1^2}{\omega^2} \nabla\, 0 = \frac{v_1'^2}{\omega^2} \nabla \times i_3\, 0 = 0.$$

Y entonces si $\bar{v}_f$ tiene la forma (19 o 20) entonces $\bar{v}_f\, e^{-i\omega t}$ satisface (1'), y en el caso de que $\bar{v}_f$ sea de la forma (19) lo satisface para cualquier valor entero y positivo de m. Ahora como la ecuación (1') es lineal, una suma de soluciones es solución, y vamos a considerar una suma infinita de soluciones a reserva de que una vez encontrada la solución a nuestro problema se pruebe que esa serie tiene las condiciones necesarias de convergencia para que, la suma de un infinito de términos cada uno de los cuales es solución de (1'), sea también solución.

Vamos entonces a dar a $\bar{v}_f$ el siguiente valor:

$$\bar{v}_f = i_1 \Big\{ A_{fo}\, [0,1] + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \left(A_{fm}[-m,1] + D_{fm}[m,1']\right)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen} m\theta \left(B_{fm}\, [-m,1] - C_{fm}\, [m,1']\right) \Big\} + i_2 \Big\{ C_{fo}\, [0,1'] \quad \ldots.(21)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \left(-B_{fm}[m,1] + C_{fm}[-m,1']\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen} m\theta \left(A_{fm}[m,1] + D_{fm}[-m,1']\right) \Big\}$$

Y ponemos $\Lambda_f = \bar{v}_f \, e^{-i\omega t}$, con $\bar{v}_f$ de la forma (21).

Pasemos ahora a considerar a $\bar{v}_r$, se pueden repetir paso a paso los razonamientos empleados para $\bar{v}_f$ con la diferencia de que las velocidades de propagación son $v_2 = \sqrt{\frac{2\mu_2+\lambda_2}{D_2}}$ y $v' = \sqrt{\frac{\mu_2}{D_2}}$, y además como es la solución en el interior del cilindro, y la función de Neumann para $r = 0$ es $N_m(0) = \infty$ resulta que sólo existe la función $J_m(\frac{\omega r}{v_2})$ y $J_m(\frac{\omega r}{v_2'})$ en lugar de $H_m(\frac{\omega r}{v_1})$ y $H_m(\frac{\omega r}{v_1'})$. Si repetimos el simbolismo de las fórmulas (18) reemplazando J_m por H_m, y el número 2 en lugar del 1 para el segundo índice del paréntesis, utilizando paréntesis redondos en lugar de cuadrados para indicar que se trata de J_m en lugar de H_m, por ejemplo:

$$\frac{v_2}{2\omega}\left[J_{m+1}\left(\frac{\omega r}{v_2}\right) - J_{m-1}\left(\frac{\omega r}{v_2}\right)\right] = (-m,2) \text{ etc} \ldots\ldots\ldots (22)$$

y de manera análoga para las demás fórmulas de (18); tenemos entonces que:

$$\bar{v}_r = i_1 \left\{ \cos m\theta \left[A_{rm}(-m,2) + D_{rm}(m,2')\right] + \right.$$
$$\left. \operatorname{sen} m\theta \left[B_{rm}(-m,2) - C_{rm}(m,2')\right]\right\} + i_2 \left\{ \cos m\theta \right.$$
$$\left[-B_{rm}(m,2) + C_{rm}(-m,2')\right] + \operatorname{sen} m\theta \left[A_{rm}(m,2) + \right.$$
$$\left.\left. D_{rm}(-m,2')\right]\right\} \quad \text{si} \quad m \geq 1 \quad \text{y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$
$$\bar{v}_r = i_1 A_{ro}(0,2) + i_2 C_{ro}(0,2') \quad \text{para} \quad m = 0.$$

Y construimos $\bar{v}_r$ general bajo la forma:

$$\bar{v}_r = i_1 \left\{ A_{ro}(0,2) + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \left[A_{rm}(-m,2) + D_{rm}(m,2')\right] \right.$$
$$\left. + \operatorname{sen} m\theta \left[B_{rm}(-m,2) - C_{rm}(m,2')\right]\right\} + i_2 \left\{ C_{ro}(0,2') + \right.$$
$$\sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \left[-B_{rm}(m,2) + C_{rm}(-m,2')\right] + \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen} m\theta \left[A_{rm}(m,2) + \right. \ldots (24)$$
$$\left.\left. D_{rm}(-m,2')\right]\right\}.$$

Y ponemos $\bar{\Lambda}_r = \bar{v}_r\, e^{-i\omega t}$ con $\bar{v}_r$ de la forma (24).

Pasemos ahora a la onda incidente $\bar{\Lambda}_i = IAe^{i\,\omega/v_1(x-v_1t)}$ y entonces $\bar{v}_i = I\, Ae^{i\,\omega x/v_1}$, como $\nabla \times \bar{v}_i = 0$, $\bar{v}_i$ admite potencial escalar $\bar{v}_i = \nabla\varphi$ el cual es:

$$\varphi = \int \bar{v}_i \cdot d\bar{r} = \int Ae^{i\frac{\omega x}{v_1}}\, dx = -\, i\,\frac{v_1}{\omega}\, Ae^{i\frac{\omega x}{v_1}}.$$

De manera que se tiene $\bar{v}_i = -\,\frac{iv_1}{\omega}\, A\, \nabla\, e^{\frac{i\omega x}{v_1}}$

Consideremos ahora $e^{\frac{i\omega x}{v_1}} = \cos\frac{\omega x}{v_1} + i\,\operatorname{sen}\frac{\omega x}{v_1}$.

Tenemos $x = r\cos\theta$ de manera que:

$$e^{i\omega x/v_1} = \cos\left(\frac{\omega}{v_1}\, r\cos\theta\right) + i\,\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{v_1}\, r\cos\theta\right).$$

En el Woods' ("Advanced Calculus" pág. 281) tenemos deducidas muy sencillamente de la función generadora de las funciones de Bessel de orden entero $e^{x/2(t-1/t)}$ las fórmulas:

$$\cos\,(y\,\operatorname{sen}\varphi) = J_o(y) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(y)\cos 2m\varphi$$

$$\operatorname{sen}\,(y\,\operatorname{sen}\varphi) = 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m-1}(y)\,\operatorname{sen}\,(2m-1)\,\varphi\,.$$

Si se pone $y = \frac{\omega r}{v_1}$ y $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$ se tiene sustituyendo:

$$\cos\left(\frac{\omega}{v_1}\, r\cos\theta\right) = J_o\left(\frac{\omega r}{v_1}\right) + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m J_{2m}\left(\frac{\omega r}{v_1}\right)\cos 2m\theta$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{v_1}\, r\cos\theta\right) = 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1} J_{2m-1}\left(\frac{\omega r}{v_1}\right)\cos\,(2m-1)\,\theta.$$

Por lo tanto $e^{i\,\omega x/v_1}$, combinando los dos anteriores toma la forma:

$$e^{i\,\omega x/v_1} = J_o\left(\frac{\omega r}{v_1}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} 2i^m\cos m\theta\, J_m\left(\frac{\omega r}{v_1}\right) \quad \ldots.(25)$$

Ahora como necesitamos tener a $\bar{v}_i$ en coordenadas cilíndricas tomamos el gradiente de $e^{i\omega x/v_1}$ en coordenadas cilíndricas, de manera que:

$$\nabla\, e^{i\omega x/v_1} = i_1 \frac{\partial e^{i\omega x/v_1}}{\partial r} + \frac{i_2}{r}\frac{\partial e^{i\omega x/v_1}}{\partial \theta}.$$

Reemplazando en lugar de $e^{i\omega x/v_1}$ su valor en (25) se tiene:

$$\frac{\partial e^{i\omega x/v_1}}{\partial r} = -\frac{\omega}{v_1} J_1\left(\frac{\omega r}{v_1}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} i^m \cos m\theta\, \frac{\omega}{v_1}\left[J_{m-1}\left(\frac{\omega r}{v_1}\right) - J_{m+1}\left(\frac{\omega r}{v_1}\right)\right]$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial e^{i\omega x/v_1}}{\partial \theta} = -\sum_{m=1}^{\infty} i^m \operatorname{sen} m\theta\, \frac{\omega}{v_1}\left[J_{m-1}\left(\frac{\omega r}{v_1}\right) + J_{m+1}\left(\frac{\omega r}{v_1}\right)\right].$$

Si usamos las abreviaciones:

$$\frac{v_1}{2\omega}\left[-J_{m-1}\left(\frac{\omega r}{v_1}\right) + J_{m+1}\left(\frac{\omega r}{v_1}\right)\right] = (-m,1)$$

Para toda $m \geqslant 1$

$$\frac{v_1}{2\omega}\left[J_{m-1}\left(\frac{\omega r}{v_1}\right) + J_{m+1}\left(\frac{\omega r}{v_1}\right)\right] = (m,1) \qquad \ldots\ldots\ldots(26)$$

$$\frac{v_1}{\omega} J_1\left(\frac{\omega r}{v_1}\right) = (0,1).$$

Se tiene que $\overline{v}_i = -i\,\frac{v_1}{\omega}\nabla A\, e^{i\omega x/v_1}$ toma la forma

$$\overline{v}_i = i_1\left[A\, i(0,1)\,\frac{\omega}{v_1} + \sum_{m=1}^{\infty} 2\, i^{m+1} A \cos m\theta\, (-m,1)\,\frac{\omega}{v_1}\right]$$

$$+\; i_2 \sum_{m=1}^{\infty} 2\,\frac{\omega}{v_1}\, i^{m+1} A \operatorname{sen} m\theta\, (m,1) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(27)$$

Ahora ya estamos en condiciones de aplicar la primera de las condiciones a la frontera que nos dice que:

$$(\overline{\Lambda}_i + \overline{\Lambda}_f)_{r=a} = (\overline{\Lambda}_r)_{r=a}.$$

Como $\overline{\Lambda}_f = \overline{v}_i\, e^{-i\omega t}$; $\overline{\Lambda}_f\, e^{-i\omega t}$ y $\overline{\Lambda}_r = \overline{v}_r\, e^{-i\omega t}$

esa condición se reduce a:

$$(\overline{v}_i + \overline{v}_f)_{r=a} = (\overline{v}_r)_{r=a} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(28)$$

Estas igualdades deben ser válidas para toda θ y como en la superficie $r = a$, $r = \text{const}$, entonces $\overline{v}_i$, $\overline{v}_r$ y $\overline{v}_f$ son funciones de θ desarrolladas en serie de Fourier con respecto a θ, y como los coeficientes de esas series son únicos, la relación -- (28), implica que debemos igualar los coeficientes de sen $m\theta$ y cos $m\theta$ tanto en la componente i_1 como en la i_2, y tenemos -- las ecuaciones siguientes de (21), (24) y (27).

$$i\,A\,(0,1)\,\frac{\omega}{v_1} + A_{fo}[0,1] = A_{ro}(0,2) \qquad \text{........(29-a)}$$

$$2A\,i^{m+1}(-m,1)\frac{\omega}{v_1}+A_{fm}[-m,1]+D_{fm}[m,1'] = A_{rm}(-m,2)+D_{rm}(m,2') \qquad \text{(29-b)}$$

$$B_{fm}[-m,1] - C_{fm}[m,1'] = B_{rm}(-m,2) - C_{rm}(m,2') \qquad \text{...........(29-c)}$$

Esto para la componente i_1, donde los paréntesis están valuados para $r = a$ y las dos últimas ecuaciones son para toda -- $m \geqslant 1$.

Ahora para las componentes de i_2 en donde los paréntesis - también están valuados para $r = a$ se tiene:

$$C_{fo}\,(0,1') = C_{ro}\,(0,2') \qquad \text{..............(30-a)}$$

$$-B_{fm}[m,1] + C_{fm}[-m,1'] = -\,B_{rm}(m,2)+C_{rm}(-m,2') \qquad \text{..(30-b)}$$

$$2A\,i^{m+1}\,(m,1)\,\frac{\omega}{v_1} + A_{fm}[m,1] + D_{fm}[-m,1'] =$$

$$A_{rm}(m,2) + D_{rm}(-m,2') \qquad \text{.........................(30-c)}$$

las dos últimas ecuaciones válidas para toda $m \geqslant 1$.

Para la segunda condición a la frontera partimos de la ecuación tensorial de Hooke que nos liga el tensor de los esfuerzos - con el de los desplazamientos en un medio isótropo:

$$\psi_{ij} = \lambda\,\nabla\cdot\bar{\Lambda}\,\bar{g}_{ij} + 2\mu\,\varphi_{ij} \qquad \text{.............(31)}$$

(Page, "Theoretical Physics," pág. 161). En donde ψ_{ij} es el tensor de los esfuerzos y φ_{ij} el de los desplazamientos, si - multiplicamos ψ_{ij} por el vector normal a la superficie --- $\alpha_j = (1,0,0)$ en coordenadas cilíndricas tanto unitarias como covariantes y contravariantes, tenemos que el vector de los esfuerzos:

$$\alpha^j\psi_{ij} = \lambda\, \nabla\cdot\bar{\Lambda}\alpha_i + 2\mu\alpha^j\varphi_{ij}$$

en donde j es índice mudo y como g_{ij} es el tensor métrico fundamental $\alpha^j g_{ij} = \alpha_i$. Ahora bien, utilizaremos como base los vectores covariantes $e_1 = i_1$, $e_2 = \frac{i_2}{r}$, $e_3 = i_3$ en donde i_1, i_2, i_3 son los vectores unitarios; $\alpha^j = \alpha_j = (1,0,0)$ y si $\bar{\Lambda}$ es un vector de desplazamiento dado por $\bar{\Lambda} = e_j \xi_j$ con j índice mudo, entonces se tiene que φ_{ij} es la parte simétrica del tensor $\nabla\bar{\Lambda} = \xi_{i,j}$ que es la derivada covariante con respecto al tensor métrico fundamental del vector $\bar{\Lambda}$.

$$\nabla\bar{\Lambda} = \xi_{i,j} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x^j} - \left\{ {h \atop ij} \right\} \xi_h.$$

$$x^1 = r \quad x^2 = \theta \quad y \quad x^3 = z$$

en donde $\left\{ {h \atop ij} \right\}$ es el símbolo de Christophel de segunda especie.- Entonces:

$$\varphi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\xi_{i,j} + \xi_{j,i}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \xi_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x^i} - \left\{ {h \atop ij} \right\}\xi_h - \left\{ {h \atop ji} \right\}\xi_h\right]$$

y el vector $\alpha^j\varphi_{ij}$ toma la forma:

$$\frac{1}{2}\alpha^j\left[\frac{\partial \xi_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x^i} - 2\left\{ {h \atop ij} \right\}\xi_h\right]$$

donde j es índice mudo.

Ahora bien, como $\alpha^j = (1,0,0)$ es decir $\alpha^1 = 1$, $\alpha^2 = \alpha^3 = 0$ entonces el vector:

$$\alpha^j\varphi_{ij} = \alpha^1\varphi_{i1}$$

$$\alpha^j\varphi_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \xi_i}{\partial x^1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x^i} - 2\left\{ {h \atop i1} \right\}\xi_h\right].$$

Como las coordenadas son cilíndricas ortogonales, se tiene que:

$$g_{11} = 1 \quad g_{22} = r^2 \quad g_{33} = 1 \quad y \quad g_{ij} = 0 \quad si \quad i \neq j$$

en donde g_{ij} son las componentes del tensor métrico fundamen--

tal y deducidas de éstas se tiene que:

$$g^{11} = 1 \quad g^{22} = \frac{1}{r^2} \quad g^{33} = 1 \quad y \quad g^{ij} = 0 \quad si \quad i \neq j.$$

Por otra parte en nuestro problema $\xi_3 = 0$ y ξ_1, ξ_2 no - dependen de x^3. Recordando que:

$$\left\{ {h \atop ij} \right\} = \frac{1}{2} g^{hs} \left[\frac{\partial g_{js}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{is}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s} \right]$$

en donde s es índice mudo, se tiene que las tres componentes -- del vector $\alpha^j \varphi_{ij}$ son:

cuando $i = 1$

$$\alpha^j \varphi_{1j} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \xi_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x^1} - 2 \left\{ {h \atop 11} \right\} \xi_h \right]$$

y $\left\{ {h \atop 11} \right\} = \frac{1}{2} g^{hs} \left(\frac{\partial g_{1s}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1s}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^s} \right)$ con s índice mudo

pero como $g^{hs} = 0$ si $h \neq s$ se tiene:

$\left\{ {h \atop 11} \right\} = \frac{1}{2} g^{hh} \left[2 \frac{\partial g_{1h}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^h} \right]$. Como $g_{11} = 1$

$\frac{\partial g_{11}}{\partial x^h} = 0$ y $g_{1h} = 0$ si $1 \neq h$, se tiene $\left\{ {h \atop 11} \right\} = 0$

de manera que la componente de $\alpha^j \varphi_{ij}$ cuando $i = 1$ es: $\frac{\partial \xi_1}{\partial x^1}$.

Ahora si $i = 2$ se tiene la componente:

$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \xi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x^1} - 2 \left\{ {h \atop 12} \right\} \xi_h \right]$ y $\left\{ {h \atop 12} \right\} = \frac{1}{2} g^{hh} \left[\frac{\partial g_{2h}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1h}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^h} \right]$

ya que $g^{hs} = 0$ si $h \neq s$.

$g_{12} = 0$, $g_{11} = 1$, $g_{22} = (x^1)^2$, entonces solo:

$\left\{ {2 \atop 12} \right\} \neq 0$ y es $\left\{ {2 \atop 12} \right\} = \frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{1}{2} (x^1)^{-2} \frac{\partial (x^1)^2}{\partial x^1} = \frac{1}{x^1}$

De manera que para $i = 2$ la componente $\alpha^j \varphi_{ij}$ es:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial \xi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x^1} - \frac{2}{x^1}\xi_2\right].$$

La componente para $i = 3$ es cero. Ahora el vector $\alpha^j\varphi_{ij}$ tiene por vectores de base a los vectores covariantes e_1, e_2, e_3 y si lo sustituimos por los unitarios tendremos:

$$\alpha^j\varphi_{ij} = i_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x^1} + \frac{i_2}{2x^1}\left[\frac{\partial \xi_2}{\partial x^1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x^2} - \frac{2\xi_2}{x^1}\right].$$

Y ahora, $\bar{\Lambda}$ estaba dado por $\bar{\Lambda} = e_j\,\xi_j = i_1\xi_1 + \frac{i_2}{x^1}\xi_2$ si $\bar{\Lambda}$ está dada como $\bar{\Lambda} = i_1\eta_1 + i_2\eta_2$ entonces, $\xi_1 = \eta_1$ y --- $\xi_2 = x^1\eta_2$ sustituyendo y regresando a la notación antigua para las coordenadas:

$$\alpha^j\varphi_{ij} = i_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial r} + i_2\,\frac{1}{2}\left[\frac{\partial \eta_2}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \eta_1}{\partial \theta} - \frac{\eta_2}{r}\right]$$

y
$$\nabla\cdot\bar{\Lambda}\alpha_i = i_1\,\nabla\cdot\bar{\Lambda}.$$

De manera que:

$$\alpha^j\psi_{ij} = i_1\left[\lambda\,\nabla\cdot\bar{\Lambda} + 2\mu\frac{\partial \eta_1}{\partial r}\right] + i_2\,\mu\left[\frac{\partial \eta_2}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \eta_1}{\partial \theta} - \frac{\eta_2}{r}\right] = \bar{\sigma}$$

donde $\bar{\sigma}$ es pues el vector de los esfuerzos en la superficie -- $r = a$.

Ahora la segunda condición a la frontera nos dice lo siguiente:

$$(\bar{\sigma}_i + \bar{\sigma}_f)_{r=a} = (\bar{\sigma}_r)_{r=a}.$$

En donde el subíndice indica a qué desplazamiento corresponde el esfuerzo. Como conocemos $\bar{\Lambda}_i$, $\bar{\Lambda}_f$, $\bar{\Lambda}_r$ procederemos al cálculo de los vectores $\bar{\sigma}$.

Como las $\bar{\Lambda}$ se expresan $\bar{\Lambda} = \bar{v}\,e^{-i\omega t}$, las $\bar{\sigma}$ tomarían la forma $\bar{\sigma} = \bar{\delta}\,e^{-i\omega t}$, como las $e^{-i\omega t}$ figuran en ambos miembros - la condición a la frontera se vuelve

$$(\bar{\delta}_i + \bar{\delta}_f)_{r=a} = (\bar{\delta}_r)_{r=a}$$

en donde:

$$\bar{\delta} = i_1 \left[\lambda \nabla\cdot\bar{v} + 2\mu \frac{\partial \eta_1}{\partial r}\right] + i_2 \mu \left[\frac{\partial \eta_2}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \eta_1}{\partial \theta} - \frac{\eta_2}{r}\right]$$

si $\bar{v} = i_1 \eta_1 + i_2 \eta_2$ ....(32)

Empezamos a calcular las $\bar{\delta}$; para $\bar{\delta}_f$ tenemos $\nabla\cdot\bar{v}_f$ obtenida directamente de (15) y es:

$$\nabla\cdot\bar{v}_f = A_{fo} H_o\left(\frac{\omega r}{v_1}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} (A_{fm} \cos m\theta + B_{fm} \operatorname{sen} m\theta)\, H_m\left(\frac{\omega r}{v_1}\right).$$

Pero:

$$H_m\left(\frac{\omega r}{v_1}\right) = \frac{r}{2m}\frac{\omega}{v_1}\left[H_{m+1}\left(\frac{\omega r}{v_1}\right) + H_{m-1}\left(\frac{\omega r}{v_1}\right)\right].$$

Usando el simbolismo (18) tenemos que:

$$H_m\left(\frac{\omega r}{v_1}\right) = \frac{r}{m}\frac{\omega^2}{v_1^2}[m,1]$$

y

$$\nabla\cdot\bar{v}_f = A_{fo} H_o\left(\frac{\omega r}{v_1}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} A_{fm} \frac{r}{m}\frac{\omega^2}{v_1^2}[m,1] \cos m\theta$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} B_{fm} \frac{r}{m}\frac{\omega^2}{v_1^2}[m,1] \operatorname{sen} m\theta .$$

De la fórmula (21) se tiene:

$$\frac{\partial \eta_{f1}}{\partial r} = A_{fo}\frac{d[0,1]}{dr} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \left(A_{fm}\frac{d[-m,1]}{dr} + D_{fm}\frac{d[m,1']}{dr}\right)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen} m\theta \left(B_{fm}\frac{d[-m,1]}{dr} - C_{fm}\frac{d[m,1']}{dr}\right)$$

usando el simbolismo $\frac{d[m,1]}{dr} = [m,1]'$ etc., se tiene que la componente i_1 de $\bar{\delta}_f$ toma la forma:

$$A_{fo}\left(\lambda_1 H_o\left(\frac{\omega r}{v_1}\right) + 2\mu_1[0,1]'\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \left\{A_{fm}\left(\frac{\lambda_1 r}{m}\frac{\omega^2}{v_1^2}[m,1]\right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\mu_1[-m,1]'\right) + D_{fm}\, 2\mu_1 [m,1']'\right\} + \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen} m\theta \left\{B_{fm}\left(\frac{\lambda_1 r}{m}\frac{\omega^2}{v_1^2}[m,1]\right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\mu_1[-m,1]'\right) - C_{fm}\, 2\mu_1 [m,1']'\right\}$$ ....(33)

Para la componente i_2 se tiene de (21) y usando el simbo-- lismo $\frac{d[m,1]}{dr} = [m,1]'$ etc.

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial r} = C_{fo}[0,1]' + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \, (-B_{fm}[m,1]' + C_{fm}[-m,1]')$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen} m\theta \, (A_{fm}[m,1]' + D_{fm}[-m,1]')$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \eta_1}{\partial \theta} = - \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen} m\theta \, \frac{m}{r} (A_{fm}[-m,1] + D_{fm}[m,1])$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \, \frac{m}{r} (B_{fm}[-m,1] - C_{fm}[m,1])$$

$$-\frac{\eta_2}{r} = -\frac{1}{r} C_{fo}[0,1] - \frac{1}{r}\sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \, (-B_{fm}[m,1] + C_{fm}[-m,1])$$

$$-\frac{1}{r}\sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen} m\theta \, (A_{fm}[m,1] + D_{fm}[-m,1]).$$

Sumando se tiene que la componente i_2 toma la forma:

$$C_{fo}(\mu_1[0,1]' - \frac{\mu_1}{r}[0,1]) + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \Big\{ B_{fm}\, \mu_1(-[m,1]' + \frac{m}{r}[-m,1]$$

$$+ \frac{[m,1]}{r}) + C_{fm}\mu_1 \, ([-m,1]' - \frac{[m,1]\, m}{r} - \frac{[-m,1]}{r})\Big\} +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen} m\theta \Big\{ A_{fm}\, \mu_1 \, ([m,1]' - \frac{m}{r}[-m,1] - \frac{1}{r}[m,1]) + D_{fm}\, \mu_1 \, ([-m,1]'$$

$$- \frac{[m,1]\, m}{r} - \frac{1}{r}[-m,1])\Big\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

Tenemos entonces las dos componentes de $\bar{\delta}_f$, por analogía - que tienen $\bar{v}_f$ con $\bar{v}_r$ podemos obtener $\bar{\delta}_r$ reemplazando los paréntesis cuadrados por redondos y el segundo índice 1 por el índice 2, y las constantes elásticas λ_1, μ_1 por λ_2, μ_2, de manera que la componente i_1 de $\bar{\delta}_r$ toma la forma:

$$A_{ro}[\lambda_2 J_o(\frac{\omega r}{v_2}) + 2\mu_2(0,2)'] + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \Big\{ A_{rm}\Big[\frac{\lambda_2 r}{m}\frac{\omega^2}{v_2^2}(m,2) + 2\mu_2(-m,2)'\Big]$$

$$+ D_{rm}\, 2\mu_2 \, (m,2)'\Big\} + \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen} m\theta \Big\{ B_{rm}\Big[\frac{\lambda_2 r}{m}\frac{\omega^2}{v_2^2}(m,2) + 2\mu_2(-m,2)'\Big]$$

$$- C_{rm}\, 2\mu_2\, (m,2')'\Big\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(35)$$

Y la componente i_2 de $\overline{\delta}_r$ la forma:

$$C_{ro}\left[\mu_2\, (0,2')' - \frac{\mu_2}{r}(0,2')\right] + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \Big\{ B_{rm} \left[- (m,2)' + \frac{m}{r}(-m,2)\right.$$

$$\left. + \frac{(m,2)}{r}\right] + C_{rm}\left[(-m,2')' - \frac{(m,2')m}{r} - \frac{(-m,2')}{r}\right]\Big\} \mu_2 +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sen} m\theta \Big\{ A_{rm}\, \mu_2 \left[(m,2)' - \frac{m}{r}(-m,2) - \frac{1}{r}(m,2)\right] + D_{rm}\, \mu_2 \left[(-m,2')'\right.$$

$$\left. - \frac{(m,2')m}{r} - \frac{1}{r}(-m,2')\right]\Big\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(36)$$

Nos toca ahora encontrar $\overline{\delta}_i$, aplicando (32), como:

$$\overline{v}_i = -\frac{iv_1}{\omega} A\, \nabla\, e^{i\omega x/v_1}$$

$$\nabla\cdot\overline{v}_i = -\frac{iv_1}{\omega} A\, \nabla^2\, e^{i\omega x/v_1} = -\frac{iv_1}{\omega} A \frac{\partial^2}{\partial x^2}\, e^{i\omega x/v_1}$$

$$\nabla\cdot\overline{v}_i = \frac{i\omega}{v_1} A\, e^{i\omega x/v_1} = \frac{i\omega}{v_1} A\, J_o(\frac{\omega r}{v_1}) + \sum_{m=1}^{\infty} 2i^{m+1} A \cos m\theta \frac{\omega}{v_1} J_m(\frac{\omega r}{v_1})$$

$$J_m(\frac{\omega r}{v_1}) = \frac{r}{2m}\frac{\omega}{v_1}\left[J_{m-1}(\frac{\omega r}{v_1}) + J_{m+1}(\frac{\omega r}{v_1})\right].$$

Y usando el simbolismo (26) se tiene:

$$J_m(\frac{\omega r}{v_1}) = \frac{r}{m}\frac{\omega^2}{v_1^2}(m,1)$$

de manera que:

$$\nabla\cdot\overline{v}_i = \frac{i\omega}{v_1} A\, J_o(\frac{\omega r}{v_1}) + \sum_{m=1}^{\infty} 2i^{m+1} A \cos m\theta \frac{r}{m}\frac{\omega^3}{v_1^3}(m,1).$$

Partiendo de (27) se tiene:

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial r} = A\, i\, (0,1)' \frac{\omega}{v_1} + \sum_{m=1}^{\infty} 2Ai^{m+1} \cos m\theta\, (-m,1)' \frac{\omega}{v_1}$$

de manera que la componente i_1 de $\overline{\delta}_i$ es:

$$(\lambda_1 \frac{i\omega}{v_1} J_o(\frac{\omega r}{v_1}) + 2\mu_1 i\, (0,1)' \frac{\omega}{v_1})\, A +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta\, 2i^{m+1} A\left[\lambda_1 \frac{r}{m}\frac{\omega^3}{v_1^3}(m,1) + 2\mu_1 \frac{\omega}{v_1}(-m,1)'\right] \ldots\ldots\ldots(37)$$

Para la componente i_2 de $\overline{\delta}_i$ se tiene:

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial r} = \sum_{m=1}^{\infty} 2i^{m+1} A \text{ sen } m\theta \frac{\omega}{v_1} (m,1)'$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \eta_1}{\partial \theta} = \sum_{m=1}^{\infty} - 2i^{m+1} A \text{ sen } m\theta \frac{m}{r}\frac{\omega}{v_1} (-m,1)$$

$$-\frac{\eta_2}{r} = \sum_{m=1}^{\infty} - 2i^{m+1} A \text{ sen } m\theta \frac{\omega}{r\, v_1} (m,1)$$

y sumando:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \text{sen } m\theta \; A \left\{ 2i^{m+1} \frac{\omega}{v_1}(m,1)' - 2i^{m+1} \frac{m}{r}\frac{\omega}{v_1}(-m,1) - 2i^{m+1}\frac{\omega}{r v_1}(m,1) \right\} \mu_1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(38)$$

se tiene la componente i_2 de $\overline{\delta}_i$. Ahora aplicando la condición a la frontera

$$(\overline{\delta}_i + \overline{\delta}_f)_{r=a} = (\overline{\delta}_r)_{r=a}$$

tenemos que para $r = a$ $\overline{\delta}_i$, $\overline{\delta}_f$, $\overline{\delta}_r$ son funciones de θ exclusivamente, y como los desarrollos en serie de Fourier son únicos y las igualdades deben ser válidas para toda θ se tiene que los coeficientes de sen $m\theta$ y cos $m\theta$ tanto para i_1 como para i_2 deben igualarse, y tenemos entonces las siguientes ecuaciones:

$$A_{fo} \left(\lambda_1 H_o \left(\frac{\omega a}{v_1}\right) + 2\mu_1 [0,1]'\right) + \left[i\lambda_1 \frac{\omega}{v_1} J_o\left(\frac{\omega a}{v_1}\right) + 2\mu_1 i (0,1)' \frac{\omega}{v_1}\right] A$$

$$= A_{ro} \left[\lambda_2 J_o \left(\frac{\omega a}{v_2}\right) + 2\mu_2 (0,2)'\right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(39\text{-a})$$

$$A_{fm} \left(\frac{\lambda_1 a}{m}\frac{\omega^2}{v_1^2}[m,1] + 2\mu_1 [-m,1]'\right) + D_{fm}\, 2\mu_1 [m,1']'$$

$$+ 2i^{m+1} A \left[\lambda_1 \frac{a}{m}\frac{\omega^3}{v_1^3}(m,1) + 2\mu_1 \frac{\omega}{v_1}(-m,1)'\right] =$$

$$A_{rm} \left[-\frac{\lambda_2 a}{m}\frac{\omega^2}{v_2^2}(m,2) + 2\mu_2 (-m,2)'\right] + D_{rm}\, 2\mu_2 (m,2')' \qquad \ldots\ldots(39\text{-b})$$

$$B_{fm}\left(-\frac{\lambda_1 a}{m}\,\frac{\omega^2}{v_1^2}\,[m,1] + 2\mu_1\,[-m,1]'\right) - C_{fm}\,2\mu_1\,[m,1']' =$$

$$B_{rm}\left[\frac{\lambda_2 a}{m}\,\frac{\omega^2}{v_2^2}\,(m,2) + 2\mu_2\,(-m,2)'\right] - C_{rm}\,2\mu_2\,(m,2')' \quad \ldots\ldots\ldots(39\text{-c})$$

$$C_{fo}\left(\mu_1\,[0,1']' - \frac{\mu_1}{a}\,[0,1]\right) = C_{ro}\left[\mu_2\,(0,2')' - \frac{\mu_2}{a}(0,2')\right] \ldots(40\text{-a})$$

$$B_{fm}\,\mu_1\left(-[m,1]' + \frac{m}{a}\,[-m,1] + \frac{[m,1]}{a}\right) + C_{fm}\,\mu_1\left([-m,1']' - \frac{[m,1']m}{a}\right.$$

$$\left. - \frac{[-m,1']}{a}\right) = B_{rm}\,\mu_2\left[-(m,2)' + \frac{m}{a}\,(-m,2) + \frac{(m,2)}{a}\right]$$

$$+ C_{rm}\,\mu_2\left[(-m,2')' - \frac{(m,2')m}{a} - \frac{(-m,2')}{a}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(40\text{-b})$$

$$A_{fm}\,\mu_1\left([m,1]' - \frac{m}{a}\,[-m,1] - \frac{1}{a}\,[m,1]\right) + D_{fm}\,\mu_1\left([-m,1']' -\right.$$

$$\left.\frac{[m,1']m}{a} - \frac{1}{a}\,[-m,1']\right) + A2i^{m+1}\,\frac{\omega}{v_1}\left[(m,1)' - \frac{m}{a}\,(-m,1) - \frac{1}{a}\,(m,1)\right]\mu_1$$

$$= A_{rm}\,\mu_2\left[(m,2)' - \frac{m}{a}\,(-m,2) - \frac{1}{a}\,(m,2)\right] +$$

$$D_{rm}\,\mu_2\left[(-m,2')' - \frac{(m,2')m}{a} - \frac{1}{a}\,(-m,2')\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(40\text{-c})$$

Donde los paréntesis están valuados para $r = a$ y las ecuaciones (39-b), (39-c), (40-b), (40-c) son válidas para todo valor de m. Viendo a (30-a) y (40-a) tenemos 2 ecuaciones homogéneas en C_{fo} y C_{ro} y a menos que el determinante del sistema sea 0 se tiene que $C_{fo} = C_{ro} = 0$.

Tomando en cuenta ahora a (29-c), (30-b), (39-c) y (40-b) tenemos cuatro ecuaciones homogéneas en B_{fm}, B_{rm}, C_{fm}, C_{rm} y a menos que el determinante del sistema sea 0 se tiene que:

$$B_{fm} = B_{rm} = C_{fm} = C_{rm} = 0 \qquad \text{para toda} \quad m \geqslant 1$$

Nos conviene ahora fijarnos en la expresión (27) para ver -- que los determinantes de esos sistemas de ecuaciones homogéneas - no pueden ser 0.

Examinando (27) que nos da la expresión $\bar{v}_i$ del desplaza--- miento incidente, vemos de inmediato que la componente normal al cilindro de $\bar{v}_i$, o sea en la dirección i_1 es simétrica respecto al eje de las x ya que $\cos\theta = \cos(-\theta)$ y la componente en la dirección perpendicular a la normal del cilindro es antisimé-- trica respecto al eje de las x ya que $\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}(-\theta)$, ahora bien, por simetría se ve que tanto el desplazamiento reflejado como el refractado deben tener las mismas características, de que su componente normal sea simétrica y la perpendicular a la normal antisimétrica, el exámen de (21) y (24) muestra que eso sólo puede ser posible en caso de que:

$$C_{fo} = C_{ro} = 0 \quad y \quad B_{fm} = B_{rm} = C_{fm} = C_{rm} = 0 \quad \text{para} \quad m \geqslant 1.$$

De aquí deducimos de inmediato que los determinantes de los sistemas homogéneos (30-a), (40-a) y de (29-c), (39-c), (30-b) y (40-b) son diferentes de 0, lo que es de importancia por el hecho de que el determinante del sistema (29-c), (39-c), (30-b) y -- (40-b) es el mismo que el determinante del sistema (29-b), (39-b), (30-c) y (40-c) el cual nos determina A_{fm}, D_{fm}, A_{rm}, D_{rm}, como lo muestra un simple examen de esas ecuaciones, y por lo tanto el determinante del sistema (29-b), etc., es diferente de 0. Por - otro lado si examinamos las ecuaciones que nos definen a los coeficientes, y si sabemos que $N_m(c)$ donde c = const crece indefinidamente si $m \longrightarrow \infty$ y $J_m(c) \longrightarrow 0$ si $m \longrightarrow \infty$, vemos en el sistema de ecuaciones que definen a A_{fm}, D_{fm}, A_{rm}, D_{rm}, - que si despejamos A_{rm} y D_{rm}, están definidos por una razón en la que el numerador y denominador tienen el mismo orden de magnitud cuando $m \to \infty$, y en que según lo visto anteriormente, el determinante del sistema de ecuaciones que es el denominador no puede hacerse 0; de esto podemos inferir la posibilidad de que A_{rm} y D_{rm} sean acotados, es decir, $|A_{rm}|$ y $|D_{rm}| \leqslant M$ para toda m y eso nos bastaría para demostrar la convergencia absoluta y uniforme de la serie que representa a $\bar{v}_r$; ya que recordando que B_{rm}, $C_{rm} = 0$ y aprovechando (12) vemos que $\bar{v}_r$ toma la forma

$$\bar{v}_r = -\frac{v_2^2}{\omega^2} \nabla \left[A_{ro} J_o\left(\frac{\omega r}{v_2}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} A_{rm} \cos m\theta \; J_m\left(\frac{\omega r}{v_2}\right) \right]$$

$$+ \frac{(v_2)^2}{\omega^2} \nabla \times i_3 \sum_{m=1}^{\infty} D_{rm} \operatorname{sen} m\theta \; J_m\left(\frac{\omega r}{v_2}\right).$$

Consideremos a $A_{ro} J_o\left(\frac{\omega r}{v_2}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} A_{rm} \cos m\theta \; J_m\left(\frac{\omega r}{v_2}\right)$, como $|\cos m\theta| \leqslant 1$ tenemos que:

$$\left| A_{ro} J_o\left(\frac{\omega r}{v_2}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} A_{rm} \cos m\theta \; J_m\left(\frac{\omega r}{v_2}\right) \right| \leqslant M \sum_{m=o}^{\infty} \left| J_m\left(\frac{\omega r}{v_2}\right) \right|.$$

Recordemos las fórmulas usadas antes:

$$\cos (y \operatorname{sen} \varphi) = J_o(y) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos 2m\varphi \; J_{2m}(y)$$

$$\operatorname{sen} (y \operatorname{sen} \varphi) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m-1}(y) \operatorname{sen} (2m - 1) \varphi .$$

Ahora bien $\cos (y \operatorname{sen} \varphi)$ y $\operatorname{sen}(y \operatorname{sen} \varphi)$ son funciones continuas de φ en el intervalo $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$ y sus derivadas respecto a φ son continuas en ese intervalo, entonces la serie de Fourier del desarrollo correspondiente a $\cos (y \operatorname{sen} \varphi)$ y $\operatorname{sen} (y \operatorname{sen} \varphi)$ es absoluta y uniformemente convergente en el intervalo $(-\pi, \pi)$. (Churchill, "Fourier Series and Boundary Problems," pág. 83). De manera que:

$$|J_o(y)| + 2 \sum_{m=1}^{\infty} |\cos 2m\varphi \; J_{2m}(y)| \leqslant L \quad \text{para toda } \varphi \text{ y } y$$

$$2\sum_{m=1}^{\infty}\left|\operatorname{sen}(2m-1)\varphi\, J_{2m-1}(y)\right|\leqslant R \quad \text{para toda} \quad \varphi \;\; y \;\; y.$$

Si tomamos $\varphi = 0$ en la primera expresión tenemos:

$$\frac{1}{2}\left|J_o(y)\right| + \sum_{m=1}^{\infty}\left|J_{2m}(y)\right|\leqslant \frac{L}{2}.$$

Y si tomamos $\varphi = \frac{\pi}{2}$ en la segunda se tiene:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left|J_{2m-1}(y)\right|\leqslant \frac{R}{2}$$

y entonces:

$$\sum_{m=o}^{\infty}\left|J_m(y)\right|\leqslant \frac{L}{2} + \frac{R}{2} + \frac{1}{2}\left|J_o(y)\right|.$$

Como $\frac{1}{2}\left|J_o(y)\right| \leqslant \frac{1}{2}$ se tiene

$$\sum_{m=o}^{\infty}\left|J_m(y)\right|\leqslant \frac{L+R+1}{2}.$$

De manera que:

$$\left|A_{ro}J_o\left(\frac{\omega r}{v_2}\right) + \sum_{m=1}^{\infty}A_{rm}\cos m\theta\, J_m\left(\frac{\omega r}{v_2}\right)\right|\leqslant\left(\frac{L+R+1}{2}\right) M.$$

En donde L, R, M son cantidades finitas y por lo tanto la serie es convergente, pero también es absolutamente convergente porque:

$$\left|A_{ro}J_o\left(\frac{\omega r}{v_2}\right)\right| + \sum_{m=1}^{\infty}\left|A_{rm}\cos m\theta\, J_m\left(\frac{\omega r}{v_2}\right)\right|\leqslant M\sum_{m=o}^{\infty}\left|J_m\left(\frac{\omega r}{v_2}\right)\right|.$$

Y uniformemente convergente porque:

$$\sum_{m=p}^{\infty}\left|A_{rm}\cos m\theta\, J_m\left(\frac{\omega r}{v_2}\right)\right|\leqslant M\sum_{m=p}^{\infty}\left|J_m\left(\frac{\omega r}{v_2}\right)\right|$$

y como $\sum_{m=o}^{\infty}\left|J_m(y)\right|$ es absolutamente y uniformemente convergente - para toda y, se tiene que dada una $\varepsilon > 0$ para toda r y θ se puede encontrar una p tal que:

$$\sum_{m=p}^{\infty}\left|A_{rm}\cos m\theta\, J_m\left(\frac{\omega r}{v_2}\right)\right| < \varepsilon$$

Ya que escogiendo p suficientemente grande $\sum_{m=p}^{\infty} \left| J_m(\frac{\omega r}{v_2}) \right| < \varepsilon$: -- Así pues se tiene que la serie es absoluta y uniformente convergente. Se puede entonces derivar término a término, para probar que: $\nabla \left[A_{ro} J_o(\frac{\omega r}{v_2}) + \sum_{m=1}^{\infty} A_{rm} \cos m\theta \; J_m(\frac{\omega r}{v_2}) \right]$ es absoluta y uniformemente convergente, se hacen las derivaciones término a término y tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[A_{ro} J_o(\frac{\omega r}{v_2}) + \sum_{m=1}^{\infty} A_{rm} \cos m\theta \; J_m(\frac{\omega r}{v_2}) \right] =$$

$$- A_{ro} \; J_1(\frac{\omega r}{v_2}) + \sum_{m=1}^{\infty} A_{rm} \cos m\theta \; \frac{\omega}{2v_2} \; J_{m-1}(\frac{\omega r}{v_2})$$

$$- \sum_{m=1}^{\infty} A_{rm} \cos m\theta \; \frac{\omega}{2v_2} \; J_{m+1}(\frac{\omega r}{v_2}).$$

Y considerando cada serie por separado el proceso de razonamiento aplicado a $A_{ro} J_o(\frac{\omega r}{v_2}) + \sum_{m=1}^{\infty} A_{rm} \cos m\theta \; J_m(\frac{\omega r}{v_2})$ nos da de inmediato su convergencia. para toda θ y r; en cuanto a la derivada:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[A_{ro} J_o(\frac{\omega r}{v_2}) + \sum_{m=1}^{\infty} A_{rm} \cos m\theta \; J_m(\frac{\omega r}{v_2}) \right] =$$

$$- \sum_{m=1}^{\infty} A_{rm} \text{ sen } m\theta \; \frac{m}{r} \; J_m(\frac{\omega r}{v_2}) \qquad \text{pero}$$

$$\frac{m}{r} \; J_m(\frac{\omega r}{v_2}) = \frac{\omega}{2v_2} \left[J_{m+1}(\frac{\omega r}{v_2}) + J_{m-1}(\frac{\omega r}{v_2}) \right].$$

Y entonces por el proceso anterior se prueba por el mismo camino que:

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_{rm} \text{ sen } m\theta \; \frac{\omega}{2v_2} \; J_{m+1}(\frac{\omega r}{v_2}) \qquad \text{y} \qquad \sum_{m=1}^{\infty} A_{rm} \text{ sen } m\theta \; \frac{\omega}{2v_2} \; J_{m-1}(\frac{\omega r}{v_2})$$

son convergentes.

Los mismos razonamientos rigen para:

$$\sum_{m=1}^{\infty} D_{rm} \text{ sen } m\theta \; J_m\left(\frac{\omega r}{v_2'}\right) \qquad y$$

a
$$\nabla \times i_3 \sum_{m=1}^{\infty} D_{rm} \text{ sen } m\theta \; J_m\left(\frac{\omega r}{v_2'}\right).$$

Y se tiene entonces demostrado que en:

$$\bar{v}_r = -\frac{v_2^{\,2}}{\omega^2} \nabla \left[A_{ro} J_o\left(\frac{\omega r}{v_2}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} A_{rm} \cos m\theta \; J_m\left(\frac{\omega r}{v_2}\right)\right]$$

$$+ \frac{v_2'^{\,2}}{\omega^2} \nabla \times i_3 \sum_{m=1}^{\infty} D_{rm} \text{ sen } m\theta \; J_m\left(\frac{\omega r}{v_2'}\right).$$

se puede hacer las diferenciaciones término a término y que la serie resultante es absoluta y uniformemente convergente.

En cuanto a $\bar{v}_f$ se encuentran dificultades para probar su convergencia, por el hecho de haber encontrado poca información respecto a la serie de funciones $N_m(x)$, y esta falta de información también nos dificulta la demostración de que son acotadas A_{rm} y D_{rm}.

Sin embargo la demostración de convergencia de $\bar{v}_r$ y $\bar{v}_f$ no es fundamental al problema físico, porque si tomamos la serie que represente a $\bar{v}_i$ y la analizamos como se hizo con $\bar{v}_r$ se vería desde luego su convergencia absoluta y uniforme y esto nos dice que en lugar de tomar a $\bar{v}_i$ como una serie infinita, podemos tomar un número finito de términos dependiendo este número de la aproximación con que deseamos que esa suma finita represente a $\bar{v}_i$; el examen de las ecuaciones que nos dan A_{rm}, D_{rm}, A_{fm}, D_{fm} provinientes de las condiciones a la frontera, nos muestra que si $\bar{v}_i$ está representada por una suma finita, también serán finitas las sumas que representan a $\bar{v}_r$ y $\bar{v}_f$ y no hay entonces problema de convergencia. Y además el hecho de que el determinante del sistema de las ecuaciones (29-b), (39-b), (30-c), (40-c) no se -

hace 0 nos indica que los coeficientes A_{fm}, D_{fm}, A_{rm}, D_{rm} son finitos y la suma finita que representa a $\bar{v}_r$ y $\bar{v}_f$, si $\bar{v}_i$ está dado por una suma finita, es acotada y continua al serlo cada sumando.

Demostración de que la solución es única

Hemos encontrado soluciones $\bar{\Lambda}_f = \bar{v}_f\ e^{-i\omega t}$ y $\bar{\Lambda}_r = \bar{v}_r\ e^{-i\omega t}$ de nuestro problema determinadas sin arbitrariedad por las series anteriores y las que nos dan por lo tanto $\bar{\Lambda}_r$ y $\bar{\Lambda}_f$ como funciones de r, θ y t. Se trata de encontrar ahora una manera de demostrar que esas soluciones son únicas. Tenemos que tener en cuenta que las condiciones a la frontera:

$$(\bar{\Lambda}_i + \bar{\Lambda}_f)_{r=a} = (\bar{\Lambda}_r)_{r=a}$$

$$(\bar{\sigma}_i + \bar{\sigma}_f)_{r=a} = (\bar{\sigma}_r)_{r=a}$$

son dobles en el sentido de que cualquier par de soluciones $\bar{\Lambda}'_f$ y $\bar{\Lambda}'_r$ de las ecuaciones (1) y (2) para satisfacer las condiciones a la frontera no deben ser:

$$(\bar{\Lambda}'_f)_{r=a} = (\bar{\Lambda}_f)_{r=a} \qquad \text{y}$$

$$(\bar{\Lambda}'_r)_{r=a} = (\bar{\Lambda}_r)_{r=a}$$

sino que sólo deben cumplir con el hecho de que:

$$(\bar{\Lambda}'_r - \bar{\Lambda}'_f)_{r=a} = (\bar{\Lambda}_r - \bar{\Lambda}_f)_{r=a}$$

y de manera análoga si $\bar{\sigma}'_r$ y $\bar{\sigma}'_f$ son los vectores de esfuerzos correspondientes a $\bar{\Lambda}'_r$ y $\bar{\Lambda}'_f$ basta que cumplan:

$$(\bar{\sigma}'_r - \bar{\sigma}'_f)_{r=a} = (\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_f)_{r=a}$$

para que las condiciones a la frontera queden satisfechas. Tenemos entonces que la diferencia de dos soluciones del problema en el segundo medio que satisfacen la ecuación (2) ya que ésta es lineal y que designamos por $\overline{K}_r = \overline{\Lambda}'_r - \overline{\Lambda}_r$ no se hace 0 para --- $r = a$, ya que no es necesario que $(\overline{\Lambda}'_r)_{r=a} = (\overline{\Lambda}_r)_{r=a}$ para satisfacer la condición a la frontera, y lo mismo se puede decir de - $\overline{X}_r = \overline{\sigma}'_r - \overline{\sigma}_r$ de manera que no se puede utilizar aquí el método - clásico de las matemáticas para demostrar que la solución es única; consistente en ver si es posible demostrar que sólo 0 pueda ser solución de la ecuación que se discuta, que se hace 0 en la frontera y que en caso de que satisfaga condiciones inciales se - haga 0 para $t = 0$ etc.

Debido a la dificultad de probar matemáticamente que la solución es única, trataremos de dar una demostracion física basada - en la ley de la conservación de la energía que nos pruebe que de haber una solución a nuestro problema no puede coexistir otra.

Con una onda incidente $\overline{\Lambda}_i = I\,A\,e^{i\omega[x/v_1 - t]}$ - hemos obtenido las ondas $\overline{\Lambda}_f = \overline{v}_f\, e^{-i\omega t}$ y $\overline{\Lambda}_r = \overline{v}_r\, e^{-i\omega t}$, con $\overline{v}_f$ y $\overline{v}_r$ dadas por (21) y (24) y los coeficientes dados por (29), (30), (39), y (40), esos coeficientes son en general complejos como lo muestra un simple examen de las ecuaciones. Si tomamos la parte real de $\overline{\Lambda}_i$ a ella corresponden las partes reales de $\overline{\Lambda}_f$ y $\overline{\Lambda}_r$ y que designaremos con un circulito arriba, e indicaremos con $\overline{v}_{1f}$, $\overline{v}_{1r}$ las partes reales de $\overline{v}_r$ y $\overline{v}_f$ y con $\overline{v}_{2f}$, $\overline{v}_{2r}$ las partes imaginarias, y se tiene entonces:

$$\mathring{\overline{\Lambda}}_i = I\,A \cos \omega \left[\frac{x}{v_1} - t\right]$$

$$\mathring{\overline{\Lambda}}_f = \overline{v}_{1f} \cos \omega t - \overline{v}_{2f} \operatorname{sen} \omega t; \quad \mathring{\overline{\Lambda}}_r = \overline{v}_{1r} \cos \omega t - \overline{v}_{2r} \operatorname{sen} \omega t$$

Son en realidad estas partes reales las soluciones que nos - interesan y que tratamos de probar únicas.

Ahora bien, sabemos que la energía potencial es una función cuadrática de las componentes del tensor de las deformaciones que es siempre positiva (Page, "Theoretical Physics," pág. 162). Como la energía es $E = T + V$ donde T es la energía cinética y - V la potencial, si $V \geqslant 0$ y como T es $\frac{1}{2} mv^2$ también es $T \geqslant 0$, se tiene que si $E \longrightarrow 0$ entonces tanto $V \longrightarrow 0$ como $T \longrightarrow 0$. Vamos a aprovechar esta propiedad.

La energía cinética de cada una de las ondas por unidad de - volumen es:

$$T_i = \frac{1}{2}D_1\left(\frac{\partial \overset{o}{\bar{\Lambda}}_i}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}D_1\omega^2A^2\operatorname{sen}^2\omega\left(\frac{x}{v_1} - t\right)$$

$$T_f = \frac{1}{2}D_1\left(\frac{\partial \overset{o}{\bar{\Lambda}}_f}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}D_1\omega^2(\bar{v}_{1f}{}^2\operatorname{sen}^2\omega t + 2\bar{v}_{1f}\cdot\bar{v}_{2f}\operatorname{sen}\omega t\cos\omega t + \bar{v}_{2f}{}^2\cos^2\omega t)$$

$$T_r = \frac{1}{2}D_2\left(\frac{\partial \overset{o}{\bar{\Lambda}}_r}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}D_2\omega^2(\bar{v}_{1r}{}^2\operatorname{sen}^2\omega t + 2\bar{v}_{1r}\cdot\bar{v}_{2r}\operatorname{sen}\omega t\cos\omega t + \bar{v}_{2r}{}^2\cos^2\omega t).$$

Calculemos la energía potencial de la onda incidente; como la -- fuerza por unidad de volumen es:

$$\overset{o}{\bar{F}}_i = D_1\frac{\partial^2\overset{o}{\bar{\Lambda}}_i}{\partial t^2}$$

por la ley de Newton y entonces:

$$\overset{o}{\bar{F}}_i = -\bar{1}\,D_1A\,\omega^2\cos\omega\left(\frac{x}{v_1} - t\right) = -D_1\,\omega^2\,\overset{o}{\bar{\Lambda}}_i$$

y la energía potencial es:

$$V_i = -\int\overset{o}{\bar{F}}_i\cdot d\overset{o}{\bar{\Lambda}}_i = \frac{D_1\omega^2}{2}(\overset{o}{\bar{\Lambda}}_i)^2 = \frac{1}{2}D_1A^2\,\omega^2\cos^2\omega\left(\frac{x}{v_1} - t\right)$$

de manera que la energía total de la onda incidente toma la forma:

$$E_i = V_i + T_i = \frac{1}{2} D_1 A^2 \omega^2 .$$

Supongamos ahora una onda incidente $\bar{\Lambda}_i'$ de amplitud $A+\Delta A$ es decir $\overset{o}{\bar{\Lambda}}{}_i' = I(A + \Delta A) \cos \omega (\frac{x}{v_1} - t)$ y obtengamos por cual-- quier medio dos expresiones $\bar{\Lambda}_f'$ y $\bar{\Lambda}_r'$ que satisfacen las ecua-- ciones (1) y (2), las condiciones (3) a la frontera y las condi-- ciones de la pág. 17 en el infinito y que son tales que cuando -- $\Delta A \longrightarrow 0$, $\bar{\Lambda}_f'$ y $\bar{\Lambda}_r'$ <u>no</u> tienden a $\bar{\Lambda}_f$ y $\bar{\Lambda}_r$. Desde luego por - las condiciones a la frontera $\bar{\Lambda}_f'$ y $\bar{\Lambda}_r'$ tienen la forma ---- $\bar{\Lambda}_f' = \bar{v}_f' e^{-i\omega t}$ y $\bar{\Lambda}_r' = \bar{v}_r' e^{-i\omega t}$ y usando la convención anterior -- sus partes reales toman la forma:

$$\overset{o}{\bar{\Lambda}}{}_f' = \bar{v}_{1f}' \cos \omega t - \bar{v}_{2f}' \operatorname{sen} \omega t \qquad \text{y}$$

$$\overset{o}{\bar{\Lambda}}{}_r' = \bar{v}_{1r}' \cos \omega t - \bar{v}_{2r}' \operatorname{sen} \omega t .$$

Ahora considerando las diferencias $\overset{o}{\bar{\Lambda}}{}_i' - \overset{o}{\bar{\Lambda}}_i$, $\overset{o}{\bar{\Lambda}}{}_f' - \overset{o}{\bar{\Lambda}}_f$, y -- $\overset{o}{\bar{\Lambda}}{}_r' - \overset{o}{\bar{\Lambda}}_r$, como tanto el minuendo como el sustraendo satisfacen -- las ecuaciones (1) y (2), y éstas son lineales, la diferencia satisface (1) y (2), como las condiciones a la frontera son linea-- les si el minuendo y el sustraendo las satisfacen, la satisface - la resta, y evidentemente la diferencia satisface las condicion-- nes al infinito.

De manera que una onda incidente del tipo:

$$\overset{o}{\bar{\Lambda}}{}_i' - \overset{o}{\bar{\Lambda}}_i = I \, \Delta A \cos \omega \left(\frac{x}{v_1} - t\right)$$

tiene por ondas reflejadas y refractadas:

$$\overset{o}{\bar{\Lambda}}{}_f' - \overset{o}{\bar{\Lambda}}_f = (\bar{v}_{1f}' - \bar{v}_{1f}) \cos \omega t - (\bar{v}_{2f}' - \bar{v}_{2f}) \operatorname{sen} \omega t \qquad \text{y}$$

$$\overset{o}{\bar{\Lambda}}{}_r' - \overset{o}{\bar{\Lambda}}_r = (\bar{v}_{1r}' - \bar{v}_{1r}) \cos \omega t - (\bar{v}_{2r}' - \bar{v}_{2r}) \operatorname{sen} \omega t .$$

La energía de la onda incidente es $\frac{1}{2} D_1 (\Delta A)^2\omega^2$; la energía cinética de la onda reflejada es:

$$\frac{1}{2} D_1\omega^2 \left[(\bar{v}'_{1f}-\bar{v}_{1f})^2 \operatorname{sen}^2 \omega t + 2(\bar{v}'_{1f}-\bar{v}_{1f}) \cdot (\bar{v}'_{2f}-\bar{v}_{2f}) \cos \omega t \operatorname{sen} \omega t \right.$$
$$\left. + (\bar{v}'_{2f}-\bar{v}_{2f})^2 \cos^2 \omega t \right]$$

y la de la onda refractada es:

$$\frac{1}{2} D_2\omega^2 \left[(\bar{v}'_{1r}-\bar{v}_{1r})^2 \operatorname{sen}^2 \omega t + 2(\bar{v}'_{1r}-\bar{v}_{1r})\cdot(\bar{v}'_{2r}-\bar{v}_{2r}) \cos \omega t \operatorname{sen} \omega t \right.$$
$$\left. + (\bar{v}'_{2r}-\bar{v}_{2r})^2 \cos^2 \omega t. \right]$$

Ahora bien, en el supuesto de la posibilidad de que la solución - obtenida no fuera única, hicimos la suposición de que $\bar{\Lambda}'_f$, $\bar{\Lambda}'_r$ <u>no</u> tienden a $\bar{\Lambda}_f$ y $\bar{\Lambda}_r$ cuando $\Delta A \longrightarrow 0$ o sea que las diferen--- cias $(\bar{v}'_{1f}-\bar{v}_{1f})$ y $(\bar{v}'_{2f}-\bar{v}_{2f})$ se mantienen finitas cuando $\Delta A \rightarrow 0$ y lo mismo para $(\bar{v}'_{1r}-\bar{v}_{1r})$ y $(\bar{v}'_{2r}-\bar{v}_{2r})$.

Por la ley de la conservación de la energía, la energía de - la onda incidente se reparte entre las reflejadas y las refractadas, como esa energía tiene la forma $\frac{1}{2} D_1\omega^2 (\Delta A)^2$ cuando $\Delta A \rightarrow 0$ entonces la energía de la onda incidente tiende a 0 y como la - energía potencial es mayor que 0, se tiene que la energía cinética tanto de la onda refractada como de la reflejada deben ten-- der a 0 para todo instante de tiempo, en el instante $t = 0$ -- esas energías toman la forma:

$$\frac{1}{2} D_1\omega^2 (\bar{v}'_{2f} - \bar{v}_{2f})^2 \qquad \text{y}$$

$$\frac{1}{2} D_2\omega^2 (\bar{v}'_{2r} - \bar{v}_{2r})^2$$

y en el instante $t = \frac{\pi}{2\omega}$ toman la forma:

$$\frac{1}{2} D_1\omega^2 (\bar{v}'_{1f} - \bar{v}_{1f})^2 \qquad y$$

$$\frac{1}{2} D_2\omega^2 (\bar{v}'_{1r} - \bar{v}_{1r})^2.$$

Y tenemos que para cumplir la ley de la conservación de la - energía si $\Delta A \longrightarrow 0$, entonces:

$$\bar{v}'_{1f} \rightarrow \bar{v}_{1f},\ \bar{v}'_{1r} \rightarrow \bar{v}_{1r},\ \bar{v}'_{2r} \rightarrow \bar{v}_{2r} \quad y \quad \bar{v}'_{2f} \rightarrow \bar{v}_{2f}$$

o sea que:

$$\bar{\Lambda}'_f \longrightarrow \bar{\Lambda}_f \quad y \quad \bar{\Lambda}'_r \longrightarrow \bar{\Lambda}_r.$$

Y entonces la suposición de la posibilidad de la existencia de -- dos o más soluciones nos llevaría a un absurdo si la ley de la -- conservación de la energía es válida, y por lo tanto a menos que neguemos la ley de la conservación de la energía podemos considerar que el proceso anterior muestra que la solución obtenida es - única.

RESUMEN DE RESULTADOS OBTENIDOS

En un medio elástico una onda incidente dada por:

$$\bar{\Lambda}_i = IA\, e^{i\omega(\frac{x}{v_1} - t)}$$

provoca un desplazamiento reflejado $\bar{\Lambda}_f$ y uno refractado $\bar{\Lambda}_r$ dados por las series :

$$\bar{\Lambda}_f = \left\{ - \frac{v_1^2}{\omega^2} \nabla \left[A_{fo} H_o(\frac{\omega r}{v_1}) + \sum_{m=1}^{\infty} A_{fm} \cos m\theta\, H_m(\frac{\omega r}{v_1}) \right] \right.$$

$$\left. + \frac{v_1'^2}{\omega^2} \nabla \times i_3 \sum_{m=1}^{\infty} D_{fm} \operatorname{sen} m\theta\, H_m(\frac{\omega r}{v_1'}) \right\} e^{-i\omega t} \qquad \text{donde}$$

$$H_m = J_m + i\, N_m \qquad \text{y}$$

$$\bar{\Lambda}_r = \left\{ - \frac{v_2^2}{\omega^2} \nabla \left[A_{ro} J_o(\frac{\omega r}{v_1}) + \sum_{m=1}^{\infty} A_{rm} \cos m\theta\, J_m(\frac{\omega r}{v_1}) \right] \right.$$

$$\left. + \frac{v_2'}{\omega^2} \nabla \times i_3 \sum_{m=1}^{\infty} D_{rm} \operatorname{sen} m\theta\, J_m(\frac{\omega r}{v_2'}) \right\} e^{-i\omega t}.$$

Y las sumas de un número infinito de términos, pueden reducirse a sumas finitas de p términos, si en lugar de:

$$Ie^{i\frac{\omega}{v_1}(x-v_1 t)} = I \left[J_o(\frac{\omega r}{v_1}) + \sum_{m=1}^{\infty} 2i^m \cos m\theta\, J_m(\frac{\omega r}{v_1}) \right] e^{-i\omega t}$$

ponemos una onda incidente de la forma:

$$I \left[J_o(\frac{\omega r}{v_1}) + \sum_{m=1}^{p} 2i^m \cos m\theta\, J_m(\frac{\omega r}{v_1}) \right] e^{-i\omega t}$$

en donde p puede escogerse de manera que esta nueva onda difiera de la plana tan poco como se desee, y por lo tanto no hay en -

este caso problema de convergencia.

Los coeficientes A_{fm}, D_{fm}, A_{rm}, D_{rm} y A_{fo}, A_{ro} están dados por las ecuaciones

$$A_{fo}[0,1] - A_{ro}(0,2) = -iA(0,1)\frac{\omega}{v_1}$$

$$A_{fo}\left\{\lambda_1 H_o\left(\frac{\omega a}{v_1}\right) + 2\mu_1[0,1]'\right\} - A_{ro}\left[\lambda_2 J_o\left(\frac{\omega a}{v_2}\right) + 2\mu_2(0,2)'\right]$$

$$= -iA\left[\lambda_1\frac{\omega}{v_1}J_o\left(\frac{\omega a}{v_1}\right) + 2\mu_1(0,1)'\frac{\omega}{v_1}\right]$$

$$A_{rm}(-m,2) + D_{rm}(m,2') - A_{fm}[-m,1] - D_{fm}[m,1'] = 2A\, i^{m+1}(-m,1)\frac{\omega}{v_1}$$

$$A_{rm}(m,2) + D_{rm}(-m,2') - A_{fm}[m,1] - D_{fm}[-m,1'] = 2A\, i^{m+1}(m,1)\frac{\omega}{v_1}$$

$$A_{rm}\left[\frac{\lambda_2 a}{m}\frac{\omega^2}{v_2^2}(m,2) + 2\mu_2(-m,2)'\right] + D_{rm}\,2\mu_2(m,2')'$$

$$- A_{fm}\left(\frac{\lambda_1 a}{m}\frac{\omega^2}{v_1^2}[m,1] + 2\mu_1[-m,1]'\right) - D_{fm}\,2\mu_1[m,1']'$$

$$= 2A\, i^{m+1}\frac{\omega}{v_1}\left[\frac{\lambda_1 a}{m}\frac{\omega^2}{v_1^2}(m,1) + 2\mu_1(-m,1)'\right].$$

$$A_{rm}\,\mu_2\left[(m,2)' - \frac{m}{a}(-m,2) - \frac{1}{a}(m,2)\right] + D_{rm}\left[(-m,2')'\right.$$

$$\left. - \frac{(m,2')m}{a} - \frac{1}{a}(-m,2')\right]\mu_2 - A_{fm}\left([m,1]' - \frac{m}{a}[-m,1] - \frac{1}{a}[m,1]\right)\mu_1$$

$$\mu_1 D_{fm}\left([-m,1']' - \frac{m[m,1']}{a} - \frac{1}{a}[-m,1']\right) = A2i^{m+1}\frac{\omega}{v_1}\left[(m,1)' - \frac{m}{a}(-m,1) - \frac{1}{a}(m,1)\right]\mu_1$$

Donde los paréntesis cuyo significado está dado en el texto están valuados para $r = a$ y las últimas cuatro ecuaciones son válidas para toda m. También se mostró que si la ley de la conservación de la energía es válida, entonces la solución anterior es única.

APLICACION A ALGUNOS CASOS PARTICULARES

El primer caso de interés, que puede servirnos de comprobación a la solución del problema es aquél en que las constantes elásticas de los medios I y II son iguales y asimismo las densidades, lo que significa que el cilindro es del mismo material que el medio en que está sumergido y la intuición nos dice de inmediato que la onda refractada $\bar{\Lambda}_r$ debe ser igual a la incidente $\bar{\Lambda}_i$ y que $\bar{\Lambda}_f = 0$. Esto se deduce de inmediato fijándonos en las ecuaciones de las págs. 45 y 46, si $\mu_1 = \mu_2, \lambda_1 = \lambda_2$, $D_1 = D_2$ entonces $v_1 = v_2$ y $v_1' = v_2'$ y en ese caso en los paréntesis que multiplican a los coeficientes A_{rm}, D_{rm} se puede reemplazar el índice 2 por el índice 1, y en ese caso la simple inspección muestra que A_{rm} está multiplicada en todas las ecuaciones por un coeficiente que es proporcional (con un factor de proporcionalidad igual a $2A\, i^{m+1} \frac{\omega}{v_1}$) al término independiente, y se deduce de inmediato en ese caso de la teoría de los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales que D_{rm}, A_{fm}, D_{fm} son 0 para toda m y que $A_{rm} = 2A\, i^{m+1} \frac{\omega}{v_1}$ si $m \geq 1$ y $A_{ro} = A\, i \frac{\omega}{v_1}$, y sustituyendo en la expresión para $\bar{v}_r$ se ve que $\bar{\Lambda}_r = \bar{\Lambda}_i$ y al ser $A_{fm} = D_{fm} = 0$ para toda m entonces $\bar{\Lambda}_f = 0$.

Podemos hacer notar una observación de interés, si suponemos las constantes elásticas del primer medio fijas, y en la región dentro del cilindro vamos substituyendo medios de diferentes constantes elásticas λ_2, μ_2 en donde la densidad D_2 conserva el mismo orden de magnitud, si tomamos materiales en los que λ_2 y μ_2 son cada vez más pequeños entonces $v_2 = \sqrt{\frac{2\mu_2+\lambda_2}{D_2}}$ y $v_2' = \sqrt{\frac{\mu_2}{D_2}}$ también se hacen cada vez más pequeñas, conocemos la propiedad de $J_m(x)$ consistente en que si $x \longrightarrow \infty$, $J_m(x) \longrightarrow 0$. Ahora si $x = \frac{\omega r}{v_2}$ o $\frac{\omega r}{v_2'}$, si ωr permanece constante $\frac{\omega r}{v_2}$ y $\frac{\omega r}{v_2'}$ se hacen cada vez más grandes a medida de que v_2 y v_2' se hacen más pequeños y por lo tanto fijándonos en la forma de $\bar{\Lambda}_r = \bar{v}_r' e^{-i\omega t}$ dada en la página 45 o en la formula (24) vemos que, a medida de que v_2 y $v_2' \longrightarrow 0$ entonces $\bar{\Lambda}_r$ se hace más pequeña en cada punto para una frecuencia fija, y fijándonos en la forma de la energía cinética T_r de la pág. 41 vemos que esta también se hace más pequeña en cada punto a medida de que v_2 y v_2' se hace más pequeña, es decir, a medida de que λ_2 y μ_2 son más pequeños, lo que puede ayudar a explicar de un modo cualitativo el hecho de que en regiones donde el subsuelo es arcilloso rodeadas por regiones de subsuelo rocoso se sienten con menos intensidad las ondas sísmicas.

Otro caso de interés es aquel en que el cilindro está vacío, en ese caso podemos aplicar un razonamiento similar al usado en el caso general para obtener la Λ_f que se refleja en la superficie cilíndrica, teniendo en cuenta que $\bar{\Lambda}_f$ debe satisfacer la ecuación (1) y que las condiciones a la frontera son exclusivamente, que en lo que respecta al vector de los esfuerzos $\bar{\sigma}$, se verifique la ecuación $(\bar{\sigma}_f)_{r=a} + (\bar{\sigma}_i)_{r=a} = 0$, ya que los desplazamientos no deben sumar necesariamente 0; tenemos entonces que las ecuaciones que nos determinan a A_{fm}, D_{fm} son las siguientes:

$$A_{fo}\left(\lambda_1 H_o\left(\frac{\omega a}{v_1}\right) + 2\mu_1 [0,1]'\right) = -iA\left[\lambda_1 \frac{\omega}{v_1} J_o\left(\frac{\omega a}{v_1}\right) + 2\mu_1 (0,1)' \frac{\omega}{v_1}\right].$$

$$-A_{fm}\left(\frac{\lambda_1 a}{m} \frac{\omega^2}{v_1^2} [m,1] + 2\mu_1 [-m,1]'\right) - D_{fm}\, 2\mu_1 [m,1]'$$

$$= 2A\, i^{m+1} \frac{\omega}{v_1} \left[\frac{\lambda_1 a}{m} \frac{\omega^2}{v_1^2} (m,1) + 2\mu_1 (-m,1)'\right]$$

$$-A_{fm}\mu_1([m,1]' - \frac{m}{a}[-m,1] - \frac{1}{a}[m,1]) \quad - D_{fm}\mu_1([-m,1']' - \frac{m}{a}[m,1'] - \frac{1}{a}[-m,1']) = 2Ai^{m+1}\mu_1 \frac{\omega}{v_1}\left[(m,1)' - \frac{m}{a}(-m,1) - \frac{1}{a}(m,1)\right]$$

y B_{fm} y C_{fm} son 0 al satisfacer un sistema de dos ecuaciones homogéneas, siendo el determinante del sistema diferente de 0.

Tenemos pues en el caso de que el cilindro esté vacío una solución determinada sin ambiguedad para la onda reflejada, y se puede demostrar que la solución es única por el mismo proceso que para el caso general.

El último caso particular que vamos a tratar es cuando el cilindro tiene una rigidez infinita, es decir, $\mu_2 = \infty$ en cuyo caso la onda incidente no hace mella sobre el cilindro, y la presencia de éste, sólo provoca una onda reflejada o dispersada; para conocer esta onda Λ_f, se ve desde luego que debe de satisfacer la ecuación (1) y la única condición a la frontera es que para $r = a$, $(\Lambda_f)_{r=a} + (\Lambda_i)_{r=a} = 0$ dado que la rigidez del cilindro no permite que sufra deformación en la frontera, a la vez que permite que la suma de los esfuerzos no tenga que ser necesariamente 0. Las ecuaciones que determinan A_{fm} y D_{fm} son las siguientes:

$$A_{fo}[0,1] = -iA\frac{\omega}{v_1}(0,1)$$

$$-A_{fm}[-m,1] - D_{fm}[m,1'] = 2Ai^{m+1}(-m,1)\frac{\omega}{v_1}$$

$$-A_{fm}[m,1] - D_{fm}[-m,1'] = 2Ai^{m+1}(m,1)\frac{\omega}{v_1}$$

y B_{fm} y C_{fm} son 0 por satisfacer ecuaciones homogéneas cuyo determinante del sistema es diferente de 0.

Como caso particular de este último caso tenemos el que ocurre cuando $\mu_1 = 0$ o sea cuando el primer medio es un líquido o gas sin rigidez, desde luego $D_{fm} = 0$ porque el vector $\bar{\Lambda}_f$ que es solución debe ser irrotacional y por lo tanto D_{fm} que es coeficiente de la parte solenoidal, debe ser tal que esta parte sea 0.

Y en cuanto a las condiciones a la frontera, vemos que al no tener rigidez el primer medio, la componente tangencial de $(\bar{\Lambda}_f)_{r=a} + (\bar{\Lambda}_i)_{r=a}$ no debe ser necesariamente 0 ya que siendo un medio sin rigidez puede sufrir una deformación tangencial al cilindro sin provocar una deformación tangencial del cilindro. Pero sigue siendo válido el hecho de que la componente normal de la suma anterior debe ser 0 porque en caso contrario deformaría al cilindro, lo que no es posible por ser éste de rigidez infinita. Así pues: $i_1 \cdot \left[(\bar{\Lambda}_f)_{r=a} + (\bar{\Lambda}_i)_{r=a}\right] = 0$ y se tienen las ecuaciones siguientes para el coeficiente A_{fm}:

$$A_{fo}[0,1] = -iA\frac{\omega}{v_1}(0,1) \qquad \text{y}$$

$$-A_{fm}[-m,1] = 2Ai^{m+1}(-m,1)\frac{\omega}{v_1}$$

y la A_{fm} obtenida de aquí nos da para $\bar{\Lambda}_f$ el mismo valor que por otros conductos obtiene el Morse "Theory of Sound", pág. 263 para la forma de la onda de sonido dispersada (scattered) por un cilindro de rigidez ∞ cuando sobre él incide una onda plana.

B I B L I O G R A F I A

A.E.H. Love, "Mathematical Theory of Elasticity," (Cambridge --- University Press; Cambridge).

S. Timoshenko, "Theory of Elasticity," (McGraw-Hill Book Co.; New York).

Ph. M. Morse, "Vibration and Sound," (McGraw-Hill Book Co; New -- York).

L. Page, "Introduction to Theoretical Physics," (D. Van Nostrand Co; New York).

H.B. Phillips, "Vector Analysis," (John Wiley and Sons; New York).

A.J. McConnell, "Applications of the Absolute Differential Calculus," (Blackie and Son; London, 1931).

H. Margenau and G.M. Murphy, "Mathematics of Physics and Chemistry," (D. Van Nostrand Co; New York).

F.S. Woods, "Advanced Calculus," (Ginn and Co; New York).

J.G.C. Coffin, "Vector Analysis," (John Wiley and Son; New York).

R.V. Churchill, "Fourier Series and Boundary Value Problems," -- (McGraw-Hill Book Co; New York).

M. Plank, "Introduction to Theoretical Physics," (Macmillan and - Co; London), Vol. II.