ANILLOS SEMILOCALES

POR

EMILIO LLUIS RIERA

1951

TESIS

Licenciatura

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

I N T R O D U C C I O N.

El desarrollo actual de la Geometría Algebraica ha requerido la introducción de numerosos conceptos algebraicos, entre los cuales figuran los de anillos locales y semilocales (W. Krull, C. Chevalley, O. Zariski, S. Cohen).

El objeto de esta tesis es presentar una exposición de la teoría de los anillos semilocales.

C O N T E N I D O.

C O N V E N C I O N E S.

Debido a que todos los anillos considerados serán conmutativos y con elemento unitario, nos referiremos a estos sin mencionar dichas propiedades. Además, al hablar de subanillos de un anillo convendremos en que sus elementos unitarios coinciden.

1.1. A N I L L O S D E S E R I E S D E P O T E N C I A S.

1.1.1. DEFINICION DE ANILLO DE SERIES DE POTENCIAS. Sea R un anillo y $X_1,\ldots,X_m$ m indeterminadas. Formamos el conjunto de símbolos, llamados series de potencias,

$$F=\sum_{n_1,\ldots,n_m=0}^{\infty} a_{n_1\ldots n_m} X_1^{n_1}\ldots X_m^{n_m}$$

donde las a son elementos de R. Dos elementos, F y $F'=\sum_{n_1,\ldots,n_m=0}^{\infty} a'_{n_1\ldots n_m} X_1^{n_1}\ldots X_m^{n_m}$, son iguales si y sólo si $a_{n_1\ldots n_m}=a'_{n_1\ldots n_m}$.

Definimos las operaciones de suma y producto de la siguiente manera:

$$F+F'=\sum_{n_1,\ldots,n_m=0}^{\infty} a''_{n_1\ldots n_m} X_1^{n_1}\ldots X_m^{n_m};\quad \text{siendo}$$

$$a''_{n_1\ldots n_m}= a_{n_1\ldots n_m}+a'_{n_1\ldots n_m};$$

$$FF'=\sum_{n_1,\ldots,n_m=0}^{\infty} a'''_{n_1\ldots n_m} X_1^{n_1}\ldots X_m^{n_m};\quad \text{con}$$

$$a'''_{n_1\ldots n_m}=\sum_{\mu_1+\nu_1=n_1}\cdots\sum_{\mu_m+\nu_m=n_m} a_{\mu_1\ldots\mu_m}a'_{\nu_1\ldots\nu_m}.$$

De esta manera se obtiene un anillo que designaremos con $R\{X_1,\ldots,X_m\}$ y que se llama el anillo de series de potencias en m indeterminadas, sobre R.

Claramente se ve que $R\{X_1,\ldots,X_m\}$ contiene (isomórficamente) al anillo R como subanillo. Además, una serie de potencias F es igual a cero si y sólo si $a_{n_1\ldots n_m}=0$.

Otra notación frecuentemente usada será: $F=\sum_{k=0}^{\infty}F_k$ con $F_k= \sum_{n_1+\cdots+n_m=k} a_{n_1\ldots n_m}X_1^{n_1}\ldots X_m^{n_m}$ es decir, con F_k - polinomio homogéneo de grado k.

1.1.2. Designaremos con $\mathfrak{x}$ el ideal generado por $X_1,\ldots,X_m$ en $R\{X_1,\ldots,X_m\}$.

De aquí resulta que

$$x^d = \{F = \sum_{k=0}^{\infty} F_k \mid F_k = 0 \text{ si } k<d\} = \{F = \sum_{k=d}^{\infty} F_k\}.$$

Si definimos además $x^0 = R\{X_1,\ldots,X_m\}$, resulta la siguiente propiedad importante: si F es una serie de potencias distinta de cero, existe un número d tal que $F \in x^d$ y $F \notin x^{d+1}$.

De esta propiedad resulta que $\bigcap_{n=0}^{\infty} x^n = (0)$ y además que dado esta F distinta de cero, existe un polinomio homogéneo de grado d tal que $F - F_d \in x^{d+1}$. El polinomio homogéneo F_d se llama <u>forma inicial</u> de F y queda determinado <u>unívocamente</u>. Su grado, d, se llama grado inicial (untergraden) de F.

1.1.3. TEOREMA. <u>Si el anillo</u> R <u>es Noetheriano,</u> $R\{X_1,\ldots,X_m\}$ <u>es también Noetheriano</u>.

Sea $a \neq (0)$ un ideal arbitrario de $R\{X_1,\ldots,X_m\}$ y a^* el conjunto formado por las formas iniciales de elementos de a y el polinomio cero. Demostraremos primero que a^* es un ideal en el anillo de polinomios $R[X_1,\ldots,X_m]$. Sea $a^{*\prime}$ el ideal generado por a^* en dicho anillo. Entonces, por ser $R[X_1,\ldots,X_m]$ Noetheriano, $a^{*\prime}$ tiene base finita que podemos suponer consta de elementos de a^*. Sea entonces $A_1^*,\ldots,A_r^*$ dicha base, con A_i^* - forma inicial de $A_i \in a$ y supongamos que $gr.A_i^* = d_i$. Si A^* es un polinomio de $a^{*\prime}$ distinto de cero, entonces $A^* = \sum B_i A_i^*$, y si A^* es de grado d, podemos suponer que $gr.B_i = d - d_i$ ($B_i = 0$ si $d < d_i$). Entonces A^* es forma inicial de $A = \sum A_i B_i$ y por ser a ideal, $A \in a$, de donde $A^* \in a^*$, es decir, $a^* = a^{*\prime}$.

Se demostrará ahora que $A_1,\ldots,A_r$ es una basede a. Sea C un elemento arbitrario de a. Definimos r sucesiones $\{C_{1n}\},\ldots,\{C_{rn}\}$ por inducción. Hacemos $C_{i0} = 0$. Suponemos definidos C_{ik}, $k \leq n-1$. Si la expresión

(1) $$C - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{r} C_{ik} A_i$$

es igual a cero, definimos $C_{in} = 0$, $i = 1,\ldots,r$. Si es distinta de cero, debido a que la expresión (1) está en $\mathfrak{a}$, tiene su forma inicial en $\mathfrak{a}^*$ y la podemos expresar como $\sum_{i=1}^{r} C_{in} A_i^*$ con $gr.C_{in} = e_n - d_i$ ($C_{in} = 0$ si $e_n < d_i$), donde e_n es el grado de dicha forma inicial. Así quedan definidos C_{in}. Ahora bien, si para alguna n (1) es igual a cero, $C = \sum_{i=1}^{r} (\sum_{k=0}^{n} C_{ik}) A_i$. Si para toda n (1) no se anula, tenemos que la expresión $C - \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{r} C_{ik} A_i \in x^{e_n}$ y $\notin x^{e_{n+1}}$. Además, como $C - \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{i=1}^{r} C_{ik} A_i = (C - \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=0}^{n} C_{ik} A_i) - (\sum_{i=1}^{r} C_{in+1} A_i)$ y las dos últimas expresiones encerradas en paréntesis tienen la misma forma inicial, resulta que $C - \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{i=1}^{r} C_{ik} A_i$ está contenido en x^{e_n+1}, de donde $x^{e_{n+1}} \subset x^{e_n+1}$(estrictamente), lo que implica $e_{n+1} > e_n$ y $e_n \longrightarrow \infty$. Entonces, debido a que $\bigcap_{n=0}^{\infty} x^n = (0)$ y que $C - \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{r} C_{ik} A_i \in x^{e_n}$, resulta $C = \sum_{i=1}^{r} (\sum_{k=0}^{\infty} C_{ik}) A_i$, con lo que queda demostrado el teorema.

1.2. ANILLOS DE COCIENTES.

1.2.1. Sea R un anillo y S un subconjunto de R no vacío, cerrado multiplicativamente y sin divisores de cero. Consideremos el conjunto de "cocientes" a/b con $a \in R$, $b \in S$. Dos elementos a/b y a'/b' son "iguales" si y sólo si $ab' = ba'$. Esta relación de equivalencia nos determina una partición del conjunto de cocientes en clases. Sea R_S el conjunto cuyos elementos son estas clases (generalmente escribiremos a/b refiriéndonos a la clase de la cual a/b es un representante). Definiendo en R_S las operaciones

$$a/b + a'/b' = (ab' + ba')/bb'$$

$$a/b \cdot a'/b' = aa'/bb' \ ,$$

R_S resulta un anillo y además R_S contiene a R (isomorficamente). El anillo R_S se llama anillo de cocientes del conjunto S respecto a R, o simplemente anillo de cocientes cuando, no haya lugar a confusión alguna.

1.2.2. LEMA. <u>Si $\mathfrak{a}$ es un ideal del anillo R_S, entonces $(\mathfrak{a} \cap R)R_S$ es igual con $\mathfrak{a}$.</u>

Sea $a/b \in \mathfrak{a}$, $a \in R$, $b \in S$; $a = b(a/b)$ está en $\mathfrak{a} \cap R$; de aquí, $b \cdot (a/b)\ (1/b) = a/b \in (\mathfrak{a} \cap R)\ R_S$. Es decir, $\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{a} \cap R)\ R_S$, y como la inclusión inversa es inmediata, resulta el lema.

1.2.3. COROLARIO. <u>Si el anillo R es Noetheriano, R_S es también Noetheriano</u>.

Sea $\mathfrak{a}$ un ideal arbitrario de R_S. La base finita del ideal de R, $\mathfrak{a} \cap R$, es al mismo tiempo base para el ideal extendido $(\mathfrak{a} \cap R)\ R_S$.

1.2.4. LEMA. <u>Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo del anillo R y $\mathfrak{q}$ un pri-</u>

mario asociado a $\mathfrak{p}$. a). Si $\mathfrak{p}\cap S\neq\emptyset$, entonces $\mathfrak{p}R_S=\mathfrak{q}R_S=R_S$. b). Si $\mathfrak{p}\cap S=\emptyset$, entonces $\mathfrak{p}R_S$ es primo y $\mathfrak{q}R_S$ un primario asociado. Se tiene además $\mathfrak{q}R_S\cap R=\mathfrak{q}$.

a). Sean $a/b\in R_S$ ($a\in R$, $b\in S$) y x un elemento de $\mathfrak{p}\cap S$. a/b lo podemos escribir como $x\cdot(a/bx)$ con $x\in\mathfrak{p}$ y $a/bx\in R_S$, de donde se sigue que $a/b\in\mathfrak{p}R_S$, y de aquí que $R_S=\mathfrak{p}R_S$.

Este mismo razonamiento demuestra que $\mathfrak{q}R_S=R_S$, si vemos primero que $\mathfrak{p}\cap S\neq\emptyset$ implica $\mathfrak{q}\cap S\neq\emptyset$. Esto último resulta de que si $x\in\mathfrak{p}\cap S$, $x^{\rho}\in\mathfrak{q}$ y en S.

b). Demostraremos primero que en este caso $\mathfrak{p}R_S$ y $\mathfrak{q}R_S$ son distintos de R_S. En efecto, si 1 estuviera en $\mathfrak{p}R_S$, 1 sería igual a $a\cdot(b/c)$, con $a\in\mathfrak{p}$, $b\in R$, $c\in S$; de aquí, $ab=c\in\mathfrak{p}$ y $c\in\mathfrak{p}\cap S$ contra la hipótesis. Además, como $\mathfrak{q}\subseteq\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}R_S\subseteq\mathfrak{p}R_S$, de donde tambien $\mathfrak{q}R_S\neq R_S$.

$\mathfrak{q}R_S$ es primario: Sean a/b y a'/b' elementos de R_S. Supongamos que $(a/b)(a'/b')$ está en $\mathfrak{q}R_S$, pero a'/b' no ($a'\notin\mathfrak{q}$). Entonces hay un elemento c/c' ($c\in\mathfrak{q}$, $c'\in S$) tal que $aa'c'=bb'c\in\mathfrak{q}$. Como $c'\notin\mathfrak{p}$ (por estar en S), $aa'\in\mathfrak{q}$, de donde $a^{\rho}\in\mathfrak{q}$ para alguna ρ, y $(a/b)^{\rho}\in\mathfrak{q}R_S$.

El mismo argumento prueba que $\mathfrak{p}R_S$ es primo.

Además, $\mathfrak{q}R_S$ es primario de $\mathfrak{p}R_S$ ya que $\mathfrak{q}R_S\subseteq\mathfrak{p}R_S$ y dado a/b de $\mathfrak{p}R_S$, existe ρ tal que $a^{\rho}\in\mathfrak{q}$, es decir, tal que $(a/b)^{\rho}$ está en $\mathfrak{q}R_S$.

Sea finalmente $a\in\mathfrak{q}R_S\cap R$; $a=b/c$ ($b\in\mathfrak{q}$, $c\in S$) y de aquí, $ac=b\in\mathfrak{q}$, de donde $a\in\mathfrak{q}$ ya que $c\notin\mathfrak{p}$. Esto demuestra que $\mathfrak{q}\supseteq\mathfrak{q}R_S\cap R$ y como la inclusión en el otro sentido es obvia, se sigue que $\mathfrak{q} = \mathfrak{q} R_S \cap R$.

1.2.5. LEMA. <u>Sea</u> R <u>un anillo Noetheriano y</u> $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_h$ <u>una representación irredundante de un ideal</u> $\mathfrak{a}$ <u>de</u> R <u>en primarios. Si</u> $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_h$ <u>son los ideales primos asociados y</u>

$$\mathfrak{p}_i \cap S = \emptyset \quad \underline{\text{para}} \quad i = 1, \ldots, h_1$$

$$\mathfrak{p}_i \cap S \neq \emptyset \quad \underline{\text{para}} \quad i = h_1 + 1, \ldots, h ,$$

<u>entonces</u> $\mathfrak{a} R_S = \mathfrak{q}_1 R_S \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{h_1} R_S$ <u>es una representación irredundante de</u> $\mathfrak{a} R_S$ <u>en primarios</u>.

Como $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{h_1}$, $\mathfrak{a} R_S \subseteq \mathfrak{q}_1 R_S \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{h_1} R_S$.

Inversamente, si a es un elemento de $\mathfrak{q}_1 R_S \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{h_1} R_S$, entonces para $i = 1, \ldots, h_1$, $a = b_i / c_i$ $(b_i \in \mathfrak{q}_i$, $c_i \in S)$. Si $i = h_1 + 1, \ldots, h$, $\mathfrak{q}_i \cap S \neq \emptyset$ (ver demostración de 1.2.4.); sea c_i un elemento de $\mathfrak{q}_i \cap S$. Si $c = c_1 \cdots c_{h_1} c_{h_1+1} \cdots c_h$, resulta que $a = b/c$ con $b = b_1 \cdots b_{h_1} c_{h_1+1} \cdots c_h \in \mathfrak{a}$, de donde $a \in \mathfrak{a} R_S$.

Además la representación es irredundante ya que si para alguna k, $\mathfrak{q}_k R_S$ estuviera contenido en la intersección de los restantes, debido a que $\mathfrak{q}_k = \mathfrak{q}_k R_S \cap R$, $\mathfrak{q}_k$ resultaría contenido en la intersección de los restantes $\mathfrak{q}_i$, contra la hipótesis.

Los lemas de este párrafo son de carácter algebraico y de ellos se hará uso más adelante.

1.3.1. LEMA. <u>Un dominio entero</u> (conmutativo) R <u>con condiciones mínimas es un campo</u>.

Demostraremos lasolubilidad de la ecuación $xa = b$. Formando la cadena descendente de ideales, $Ra \supseteq Ra^2 \supseteq \ldots$, se tiene, para alguna m, que $Ra^m = Ra^{m+1}$ de donde, $ba^m = ca^{m+1}$ y de aquí, $b = ca$.

COROLARIO. <u>En un anillo</u> R <u>con condiciones mínimas, todo ideal primo</u> $\mathfrak{p}$ <u>es máximo</u>.

Aplicando el lema anterior, resulta inmediato.

1.3.2. LEMA. <u>La suma</u> (no necesariamente directa) $R = R_1 + \cdots + R_s$ <u>de</u> $\mathfrak{o}$<u>- módulos con condiciones mínimas es un</u> $\mathfrak{o}$ <u>- módulo con condiciones mínimas</u>.

Para la demostración ver (1), pág. 13.

COROLARIO. <u>Si</u> $\mathfrak{G}$ <u>es un álgebra</u> (finita) <u>sobre un campo y</u> $(0) = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_h$ <u>es una descomposición irredundante del ideal</u> (0), <u>entonces</u> $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{G}_h$ <u>con</u> $\mathfrak{G}_i \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{q}_i$. (Además, $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}\varepsilon_i$ con $\varepsilon_i \varepsilon_j = \delta_{ij}$).

Por lo antes demostrado, $\mathfrak{G}$ satisface la condición descendente de cadena y por lo tanto, todo primo es máximo, de donde, los primos asociados a (0) son sin divisores comunes. Esto implica que también los primarios lo sean, de donde $(0) = \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_h$ y de aquí que (ver (7), pág. 39) $\mathfrak{G}/(0) = \mathfrak{G}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{G}_h$ con $\mathfrak{G}_i \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{q}_i$.

COROLARIO. <u>Si</u> $\mathfrak{G}$ <u>es un álgebra</u> (finita) <u>sobre un campo, el núme-</u>

mero de ideales primos de $\mathfrak{S}$ *es finito*.

En efecto, todo ideal primo en $\mathfrak{S}$ es divisor de algún primo asociado a (0), por lo tanto, ya que todo primo es máximo, coincide con él.

1.3.4. LEMA. *Para que un anillo Noetheriano satisfaga las condiciones mínimas es necesario y suficiente que todo ideal primo sea a su vez máximo*.

La condición es necesaria por el corolario 1.3.1. Es también suficiente ya que entonces (0) se descompone en producto de ideales primarios sin divisores comunes. De aquí, el anillo resulta suma directa de anillos primarios cada uno de los cuales satisface las condiciones mínimas.

1.3.5. *Si* R *es un subanillo de* R' *y* R' *un* R - *módulo finito, se tiene*:

a) *Si* $\mathfrak{a}'$ *es un ideal arbitrario de* R' *y* $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' \cap R$, *entonces* $R/\mathfrak{a}$ *es subanillo de* $R'/\mathfrak{a}'$, *y* $R'/\mathfrak{a}'$ *es un* $R/\mathfrak{a}$ - *módulo finito*.

b) *Si* $\mathfrak{a}$ *es un ideal arbitrario de* R, $R'/\mathfrak{a}R'$ *es un álgebra sobre* $R/\mathfrak{a}$.

c) *Si* $\mathfrak{p}'$ *es un ideal primo máximo en* R', $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap R$, *es primo máximo en* R, *y*

d) *el número de ideales primos en* R' *que contienen a* $\mathfrak{p}$ *es finito*.

a) Evidentemente, $R'/\mathfrak{a}' \supseteq \mathfrak{a}' + R/\mathfrak{a}' \cong R/\mathfrak{a}$ y si $R' = \sum R x_i$, resulta $R'/\mathfrak{a}' = \sum R/\mathfrak{a}\,(x_i + \mathfrak{p}')$.

b) Definiendo la ley de operación externa $(a + \mathfrak{a})(x_i + \mathfrak{a}R') = ax_i + \mathfrak{a}R'$, $R'/\mathfrak{a}R'$ resulta un $R/\mathfrak{a}$ - módulo finito con $x_i + \mathfrak{a}R'$

como base. Directamente se comprueba que es álgebra sobre $R/\mathfrak{a}$.

Antes de dar las demostraciones de c) y d) veremos los siguientes lemas:

1.3.6. LEMA. *Sea R un anillo Noetheriano sin divisores de cero y R' un anillo que contiene a R como subanillo y que es un R-módulo finito. Entonces, si $\mathfrak{a}$ es un ideal de R distinto de R, $\mathfrak{a}R'$ es distinto de R'.*

Sea $y_1 = 1, y_2, \ldots, y_n$ una base de R' respecto a R; del conjunto de subsistemas de ésta, linealmente independientes y que contengan al 1, elegimos uno máximo, digamos $x_1 = 1, x_2, \ldots, x_m$. Existe en R una $c \neq 0$ tal que $cy_i \in \sum Rx_i$, es decir, tal que $cR' \subseteq \sum Rx_i$. Entonces $c\,\mathfrak{a}^n R' \subseteq \sum \mathfrak{a}^n x_i$. Sea $c = \sum c_{in} x_i$ con c_{in} en $\mathfrak{a}^n$. Si $\mathfrak{a}R'$ fuera igual a R', por ser las x_i linealmente independientes y $x_1 = 1$, se tendría $c = c_{1n}$, de donde, c estaría en $\mathfrak{a}^n$ para toda n. De aquí que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n \neq (0)$ y por lo tanto (ver 4.2), existiría $a \equiv 1\ (\mathfrak{a})$ tal que $a = 0$, por lo que $\mathfrak{a}$ coincidiría con R contra la hipótesis.

1.3.7. *En el lema anterior puede omitirse la condición de ser R sin divisores de cero.*

Será suficiente demostrarlo para el caso en que $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$ sea primo, debido a que todo ideal está contenido en algún primo.

Sea $(0) = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_h$ una descomposición irredundante de (0) en ideales primarios y $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_h$ los primos asociados. Entonces $\mathfrak{p}$ con- algún $\mathfrak{p}_i$, digamos $\mathfrak{p}_1$. Demostraremos ahora que $\mathfrak{p}_1 R' \cap R = \mathfrak{p}_1'$ coincide con $\mathfrak{p}_1$. Sabemos que $\mathfrak{q}_1 : \mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{q}_1$, de donde, $(\mathfrak{q}_1 : \mathfrak{p}_1) \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_h \neq (0)$; sea c un elemento, distinto de cero, de esta intersección; $c \notin \mathfrak{q}_1$; $c\,\mathfrak{p}_1 = (0)$; $c\,\mathfrak{p}_1' = (0)$. Si existiera un elemento a de $\mathfrak{p}_1'$ tal que

$a \notin \mathfrak{p}_1$ entonces $ca = 0 \in \mathfrak{p}_1$ de donde c estaría en $\mathfrak{p}_1$, lo que no ocurre. Como $\mathfrak{p}_1' \supseteq \mathfrak{p}_1$ queda demostrado que $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_1 R' \cap R$. Por 1.3.5.a) podemos aplicar 1.3.6. al ideal $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_1$ del subanillo $R/\mathfrak{p}_1$ de $R'/\mathfrak{p}_1 R'$ de donde resulta $\mathfrak{p} R' \neq R'$, q.e.d.

Pasamos ahora a la demostración de 1.3.5,c) y d).

c) Como $R'/\mathfrak{p}'$ es campo, por a) y 1.3.7, los únicos ideales de $R/\mathfrak{p}$ son (0) y (1); en efecto, si $\mathfrak{a}/\mathfrak{p}$ es un ideal de $R/\mathfrak{p}$ distinto del total, su extensión $\mathfrak{a}/\mathfrak{p} \cdot R'/\mathfrak{p}' \neq R'/\mathfrak{p}'$, de donde es igual a cero; por lo tanto, $\mathfrak{a}/\mathfrak{p} = (0)$. De aquí que $\mathfrak{p}$ sea máximo.

d) Se sigue inmediatamente de b) y el corolario de 1.3.3.

SUCESIONES NULAS DE IDEALES. ANILLOS - $\mathfrak{m}$.

2.1. DEFINICION. Una sucesión $\{a_n\}$ de ideales de un anillo R se llama <u>sucesión</u> <u>nula</u> si $a_0 \supseteq a_1 \supseteq \cdots$ y $\bigcap_{n=0}^{\infty} a_n = (0)$.

Dos sucesiones nulas $\{a_n\}$ y $\{a_n'\}$ se llaman equivalentes si todo a_n contiene algún a_m', e inversamente, todo a_n' contiene algún a_m.

2.2. Como es bien conocido (ver (2), L III, parr.1 y 5), dado un conjunto <u>cualquiera</u> (no vacío) de ideales de un anillo R, existe una y solamente una topología en R compatible con la estructura de anillo, para la cual dicho conjunto sea un sistema fundamental de vecindades de cero. (En efecto, las condiciones loc. cit. (GV_I'), (GV_{II}'), (GV_{III}') y (AV_I), (AV_{II}) se satisfacen automáticamente por ser el conjunto de ideales.)

En este anillo topológico el conjunto $\{u + a_n\}$ es un sistema fundamental de vecindades del punto u.

El anillo topológico es separado o de Hausdorff si y sólo si el conjunto (0) es cerrado, lo que equivale, evidentemente, a que $\bigcap_{n=0}^{\infty} a_n = (0)$, lo que sucede cuando el conjunto de ideales elegido es una sucesión nula.

Además, como esta topología satisface el primer axioma de numerabilidad (es decir, que todo punto tenga un sistema fundamental de vecindades numerable), es suficiente trabajar con sucesiones.

2.3. Una sucesión de R, $\{u_n\}$ se llama de Cauchy si $u_{n+1} - u_n \in a_{m(n)}$ con $m(n) \longrightarrow \infty$.

$u = \lim u_n$ si $u_n - u \in a_{m(n)}$ con $m(n) \longrightarrow \infty$.

2.4. Dos sucesiones nulas de ideales definen en R la misma topología si y sólo si son equivalentes. Esto se sigue de la definición le sucesiones equivalentes y del criterio de Hausdorff.

2.5. DEFINICION. Un anillo Noetheriano con la topología definida a partir de una sucesión nula de ideales $\{a_n\}$ se llama <u>anillo</u> - $\mathfrak{m}$ si dicha sucesión está formada por las potencias del ideal $\mathfrak{m}$ de R, es decir, si $a_n = \mathfrak{m}^n$ (suponemos generalmente que $\mathfrak{m}^0 = R$).

2.6. Si R es un anillo - $\mathfrak{m}$, de aquí en adelante consideraremos, <u>sin pérdida de generalidad</u>, que $\mathfrak{m}$ es <u>intersección de ideales primos</u>. En efecto, si $\mathfrak{m}'$ es el radical de $\mathfrak{m}$, (*) $\mathfrak{m}' \supseteq \mathfrak{m}$ y $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{m}'^{\rho}$, es decir, las sucesiones $\{\mathfrak{m}^n\}$ y $\{\mathfrak{m}'^n\}$ son equivalentes, y al considerar R como $\mathfrak{m}'$- anillo no alteramos la topología.

2.7. Sabemos que una topología definida como en 2.2 es distinta de la discreta si ninguna intersección finita de ideales del conjunto se reduce a cero. En el caso de los anillos -$\mathfrak{m}$ la topología no será discreta si $\mathfrak{m} \neq (0)$.

(*) El radical de un ideal $\mathfrak{m}$ es el conjunto de todos los x de R tales que elevados a alguna potencia están en $\mathfrak{m}$. Otra definición equivalente es: el radical de $\mathfrak{m}$ es la intersección de los ideales primos aislados de $\mathfrak{m}$. Si R es Noetheriano y $\mathfrak{m}'$ el radical de $\mathfrak{m}$, existe ρ tal que $\mathfrak{m}'^{\rho} \subseteq \mathfrak{m}$.

3. COMPLETACION DE UN ANILLO - $\mathfrak{m}$.

Sea R un anillo $-\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{m} = Ra_1 + \cdots + Ra_m$. Construímos el anillo de series de potencias en m indeterminadas $R\{X_1,\ldots,X_m\}$ y el ideal $\mathfrak{x}$ generado por $X_1,\ldots,X_m$ en $R\{X_1,\ldots,X_m\}$.

Para toda serie de potencias $F = \sum_{k=0}^{\infty} F_k$ (F_k - forma homogénea de grado k) definimos

$$u_n(F) = \sum_{k=0}^{n} F_k(a_1,\ldots,a_m) \in R.$$

Las sucesiones $\{u_n(F)\}$ son de Cauchy, cualquiera que sea F, ya que $u_{n+1} - u_n = F_{n+1}(a_1,\ldots,a_m) \in \mathfrak{m}^{n+1}$. Sea $\mathfrak{n}$ el ideal de $R\{X_1,\ldots,X_m\}$ formado por las series de potencias F tales que $\lim u_n(F) = 0$. Definimos ahora

$$R^* = R\{X_1,\ldots,X_m\}/\mathfrak{n} .$$

R^* <u>contiene a</u> R <u>como subanillo</u>:

En efecto, $R \cap \mathfrak{n} = (0)$ ya que si $0 \neq F_0 \in R$, $u_n(F_0) = F_0 \neq 0$, de donde F_0 no estaría en $\mathfrak{n}$. De aquí, $R^* \supseteq R + \mathfrak{n}/\mathfrak{n} \cong R/R\cap\mathfrak{n} = R$.

<u>Si definimos</u> $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{x} + \mathfrak{n}/\mathfrak{n}$, R^* <u>resulta un anillo</u> $-\mathfrak{m}^*$:

Por 1.1.3 $R\{X_1,\ldots,X_m\}$ es Noetheriano por lo que también R^* lo es. Además $\{\mathfrak{m}^{*n}\}$ es una sucesión nula por serlo $\{\mathfrak{x}^n\}$ (ver 1.1.2).

También resulta que $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{m}R^*$; $X_j \equiv a_j \ (\mathfrak{m})$ ya que $u_n(X_j - a_j) = a_j - a_j = 0$ si $n > 0$, y esto demuestra la fórmula, puesto que $\mathfrak{m}^*$ está generado por las clases $X_1 + \mathfrak{n},\ldots, X_m + \mathfrak{n}$ y $\mathfrak{m}R^*$ por $a_1 + \mathfrak{n},\ldots, a_m + \mathfrak{n}$.

R^* <u>es completo</u>:

Sea $\{u_n\}$ una sucesión de Cauchy en R^*, $u_{n+1} - u_n \in \mathfrak{m}^{*m(n)}$, $m(n) \to \infty$. Sea $u_{n+1} - u_n = V_n + \mathfrak{n}$ con $V_n \in \mathfrak{x}^{m(n)}$. Entonces $\lim u_n = u_1 + (\sum_{i=0}^{\infty} V_i + \mathfrak{n})$:

$$u_{n+1} - u_1 - \sum^{\infty}(V_i + \mathfrak{n}) = \sum^{n} V_i - \sum^{\infty} V_i + \mathfrak{n} = \sum_{n}^{\infty} V_i + \mathfrak{n} \in \mathfrak{x}^{m(n)} + \mathfrak{n}/\mathfrak{n}$$

(ya que podemos suponer $m(n)$ creciente).

R <u>es subespacio de</u> R^*:

Esto resulta inmediatamente de la fórmula $m^{*n} \cap R = m^n$ cuya demostración es:

Sea $x \in m^{*n} \cap R$; entonces x es una clase residual de un elemento F de x^n; $x - F \in n$ y por estar además x en R, $u_k(x - F)$ es igual a $x - u_k(F)$; de aquí, dado n, existe N (suponemos $N > n$) tal que $x - u_N(F) \in m^n$; entonces, debido a que F está en x^n, $u_N(F) = \sum_{k=n}^{N} F_k \in m^n$; de donde $x \in m^n$. Demostramos que $m^{*n} \cap R \subseteq m^n$, y como el inverso es obvio resulta la fórmula.

R <u>es denso en</u> R^*:

Dado un elemento $u = F + n$ de R^*, existe en R la sucesión $\{\sum_{k=0}^{n} F_k(a_1, \ldots, a_m)\}$ que tiene a u como límite; en efecto, $F + n - \sum_{k=0}^{n} F_k(a) + n = \sum^{\infty} F_k(X) + n - \sum^{n} F_k(X) + n = \sum_{n+1}^{\infty} F_k(X) + n \in x^{n+1} + n/n$.

De esta manera queda demostrada la primera parte del teorema siguiente:

3.1. TEOREMA. <u>Si</u> R <u>es un anillo</u> - m, <u>existe un anillo</u> - m^*, R^*, <u>con</u> $m^* = mR^*$, <u>completo, que contiene a</u> R <u>como subanillo y subespacio y en el cual</u> R <u>es denso. Si</u> R_1^* <u>es otro anillo con las mismas propiedades de</u> R^*, <u>entonces</u> R^* <u>y</u> R_1^* <u>son isomorfos</u>.

Al m^*- anillo R^* lo llamaremos la completación de R, considerado como anillo - m, o simplemente <u>la completación de</u> R, cuando no haya lugar a confusión alguna.

La segunda parte de este teorema resulará inmediatamente del teorema más general 3.3, pero antes demostraremos el lema

3.2. LEMA. <u>Sean</u> R <u>y</u> R_1 <u>anillos</u> - m <u>y</u> m_1 <u>respectivamente y</u>

supongamos que R es subanillo de R_1. Entonces, R es subespacio de R_1 si y sólo si $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_1$ y $\mathfrak{m}_1^n \cap R \subseteq \mathfrak{m}^{m(n)}$ con $m(n) \longrightarrow \infty$.

R es subespacio de R_1 si y sólo si las sucesiones nulas $\{\mathfrak{m}^n\}$ y $\{\mathfrak{m}_1^n \cap R\}$ son equivalentes. Evidentemente, las dos últimas condiciones del teorema garantizan la equivalencia de éstas. Inversamente, si las sucesiones son equivalentes, $\mathfrak{m}_1^n \cap R \subseteq \mathfrak{m}^{m(n)}$ y $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_1^k$ para alguna k, pero por ser $\mathfrak{m}$ intersección de primos, $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_1$.

3.3. TEOREMA. Sean R y R_1 anillos - $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{m}_1$ respectivamente, y R^*, R_1^* sus correspondientes completaciones. Si R es subanillo y subespacio de R_1, R^* es subanillo y subespacio de R_1^*.

Por 3.2, $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_1$ y del hecho de que los anillos sean Noetherianos se sigue que si $\mathfrak{m} = Ra_1 + \cdots + Ra_m$, podemos hacer $\mathfrak{m}_1 = R_1a_1 + \cdots + R_1a_m + \cdots + R_1a_{m_1}$ $(m_1 \geq m)$. Entonces tenemos $R\{X_1, \ldots, X_m\} \subseteq R_1\{X_1, \ldots, X_{m_1}\}$ como subanillo. Pero si $F \in \mathfrak{n}$, $u_n(F) \in \mathfrak{m}^{m(n)}$ resulta que $u_{1n}(F) \in \mathfrak{m}_1^{m(n)}$, $F \in \mathfrak{n}_1$. Y de aquí, debido a que $R^* = R\{X_1, \ldots, X_m\}/\mathfrak{n}$ y $R_1^* = R_1\{X_1, \ldots, X_{m_1}\}/\mathfrak{n}_1$ resulta que R^* está contenido en R_1^* como subanillo.

R^* es subespacio de R_1^* debido a que R^* es homeomorfo con la cerradura de R en el espacio topológico R_1^*.

3.4. TEOREMA. Sea R un anillo - $\mathfrak{m}$ y S el conjunto de los elementos s de R que son congruentes con 1 módulo $\mathfrak{m}$. Entonces el anillo de cocientes R_S es un anillo - $\mathfrak{M}$ con $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}R_S$. Además, las completaciones de R y R_S coinciden.

Como se vió en 1.2.3, el anillo R_S es Noetheriano.

Sea ahora a/s un elemento de $\mathfrak{M}^n$ $(a \in R,\ s \in S)$. De la definición de $\mathfrak{M}$, $a/s = a'/s'$ con a' en $\mathfrak{m}^n$ y s' en S. De aquí, $as' =$

$= sa'$ y $s' = 1 - b$ con $b \in m$. Por lo tanto $a \equiv ab\ (m^n)$, $ab \equiv ab^2\ (m^n), \ldots, ab^{i-1} \equiv ab^i\ (m^n)$ y $a \equiv ab^i\ (m^n)$, $i = 1,2,\ldots$ Para $i = n$ tenemos $a \equiv 0\ (m^n)$ ya que $b^n \in m^n$. Es decir, si $a/s \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{M}^n$, $a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} m^n = (0)$, de donde $a/s = 0$ y $\{\mathfrak{M}^n\}$ es una sucesión nula.

Si en el razonamiento anterior suponemos además que a/s está en R, resulta que a/s está en m, es decir, $\mathfrak{M}^n \cap R = m^n$ lo que demuestra que R es subespacio de R_S.

Por el teorema 3.3 será suficiente demostrar que R es denso en R_S para que quede demostrado 3.4, lo que es evidente ya que si a/s es un elemento de R_S, $a/s = a + am + am^2 + \cdots$ con $m = 1 - s \in m$.

4. IDEALES EN LOS ANILLOS - $\mathfrak{m}$

4.1. LEMA. <u>Si</u> M <u>es un subconjunto arbitrario del</u> $\mathfrak{m}$ - <u>anillo</u> R <u>y</u> $\bar{M}$ <u>denota la adherencia de</u> M <u>en</u> R, <u>se tiene</u>:

$$\bar{M} = \bigcap_{n=1}^{\infty}(M + \mathfrak{m}^n).$$

En efecto, x es adherente a M si y sólo si $(x + \mathfrak{m}^n) \cap M \neq \emptyset$ para toda n, lo que equivale a que x esté en $M + \mathfrak{m}^n$ para toda n, es decir, a que x esté en $\bigcap_{n=1}^{\infty} (M + \mathfrak{m}^n)$.

4.2. LEMA. <u>Si</u> $\mathfrak{a}$ <u>es un ideal arbitrario de un anillo</u> R, <u>las dos condiciones que siguen son equivalentes</u>:

a) <u>Si</u> $x \equiv 1\ (\mathfrak{a})$ <u>entonces</u> x <u>no es divisor de cero en</u> R.

b) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n = (0)$.

a) implica b): Sea $\mathfrak{n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n$ y $\mathfrak{n}\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$ una descomposición irredundante del ideal $\mathfrak{n}\mathfrak{a}$ en primarios. Designaremos con $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ los ideales primos correspondientes. Si para alguna i fija $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}_i$, como $\mathfrak{n}\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{q}_i$ resulta $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{q}_i$; si $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$, existe k tal que $\mathfrak{a}^k \subseteq \mathfrak{q}_i$, y como $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{a}^k$, $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{q}_i$; es decir, en ambos casos $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{q}_i$. De aquí resulta $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{q}_i$, $i = 1, \ldots, r$, de donde $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}\mathfrak{a}$.

Si $n_1, \ldots, n_s$ es una base del ideal $\mathfrak{n}$, por el resultado anterior tenemos $n_i = \sum a_{ij} n_j$ con $a_{ij} \in \mathfrak{a}$. De aquí resulta $\sum (\delta_{ij} - a_{ij}) n_j = 0$, $i = 1, \ldots, s$. Si $\delta = 1 - |a_{ij}|$, $\delta \equiv 1\ (\mathfrak{a})$ y como $\delta n_i = 0$, a) implica $n_i = 0$ para toda i, de donde, $\mathfrak{n} = (0)$.

b) implica a): Suponiendo que existen elementos a de $\mathfrak{a}$ y b de R tales que $(a + 1)b = 0$, tenemos $b = -ab$, $-ab = (-1)^2 a^2 b, \ldots, (-1)^{n-1} a^{n-1} b = (-1)^n a^n b$, de donde $b = (-1)^n a^n b \in \mathfrak{a}^n$ para toda n. De aquí resulta $\bigcap \mathfrak{a}^n \neq (0)$.

4.3. TEOREMA. *Si $\mathfrak{a}$ es un ideal arbitrario de un $\mathfrak{m}$- anillo R, las cuatro siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *$\mathfrak{a}$ es un conjunto cerrado.*

b) $\mathfrak{a} = \bigcap^{\infty} (\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^n)$.

c) *Si $s \equiv 1\ (\mathfrak{m})$, entonces $\mathfrak{a}:(s) = \mathfrak{a}$ (es decir, s es primo relativo de $\mathfrak{a}$).*

d) $\mathfrak{p} + \mathfrak{m} = (1)$ *para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{a}$.*

3.1 demuestra la equivalencia de a) y b).

b) y c) son equivalentes: Formamos $\bar{R} = R/\mathfrak{a}$ y $\bar{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} + \mathfrak{a} / \mathfrak{a}$. Entonces b) equivale a que en $\bar{R}$, $\bigcap^{\infty} \bar{\mathfrak{m}}^n = (\bar{0})$. Ya que la condición de ser $\bar{s} \equiv \bar{1}\ (\bar{\mathfrak{m}})$ se cumple debido a que $s \equiv 1\ (\mathfrak{m})$, $\bigcap^{\infty} \bar{\mathfrak{m}}^n$ es igual a cero si y sólo si $(\bar{0}):(\bar{s}) = (\bar{0})$, es decir, si y sólo si $(\mathfrak{a}):(s)$ es igual con $\mathfrak{a}$.

c) es equivalente a d): Suponiendo d), si s es un elemento de R congruente con 1 módulo $\mathfrak{m}$ entonces s no está en ningún ideal primo de $\mathfrak{a}$, de donde se sigue que $\mathfrak{a}:(s) = \mathfrak{a}$. Inversamente, si algún ideal primo $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{a}$ es tal que $\mathfrak{p} + \mathfrak{m} = (1)$, existe s de $\mathfrak{p}$ tal que $s \equiv 1\ (\mathfrak{m})$ y s no es primo relativo de $\mathfrak{a}$.

4.4. COROLARIO. *Si R es un anillo -$\mathfrak{m}$ completo, todo ideal de R es cerrado.*

En efecto, en un anillo - $\mathfrak{m}$ completo todo elemento s congruente con 1 módulo $\mathfrak{m}$ es primo relativo de cualquier ideal: si $m = 1-s$ m está en $\mathfrak{m}$, $s = 1 - m$ y $x = 1 + m + m^2 + \cdots$(contenido en R por ser éste completo) es inverso de s, es decir, s es unidad en R de donde $\mathfrak{a}:(s) = \mathfrak{a}$.

4.5. TEOREMA. <u>Sea</u> R <u>un anillo</u> - $\mathfrak{m}$ <u>y</u> R^* <u>su completación</u>. <u>Si</u> $\bar{\mathfrak{a}}$ <u>y</u> $\bar{\mathfrak{a}}^*$ <u>designan la adherencia de un ideal</u> $\mathfrak{a}$ <u>arbitrario de</u> R <u>en</u> R <u>y</u> R^* <u>respectivamente, se tiene</u>:

$$\bar{\mathfrak{a}}^* = \mathfrak{a}R^*$$

$$\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}R^* \cap R.$$

Por ser R^* un $\mathfrak{m}^*$- anillo completo $\mathfrak{a}R^*$ es cerrado y como $\mathfrak{a}$ está contenido en $\mathfrak{a}R^*$, su adherencia $\bar{\mathfrak{a}}^*$ también lo está. Inversamente, sea x^* un elemento de $\mathfrak{a}R^*$. Si $a_1,\dots,a_r$ es una base de $\mathfrak{a}$ en R podemos escribir $x^* = a_1x_1^* + \cdots + a_rx_r^*$ con x_i^* en R^*. Además, $x_i^* = \lim x_{in}$ con x_{in} en R, y dado k existe n tal que $x_i^* - x_{in} \in \mathfrak{m}^{*k}$, $i = 1,\dots,r$. Si hacemos $x_n = a_1x_{1n} + \cdots + a_rx_{rn}$ se tiene $x^* = \lim x_n$ con x_n en $\mathfrak{a}$, de donde x^* es adherente a $\mathfrak{a}$ en R^*.

La segunda fórmula es una consecuencia inmediata de la primera.

4.6. TEOREMA. <u>Sea</u> R <u>un anillo</u> - $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_h$ <u>una descomposición irredundante del ideal</u> $\mathfrak{a}$ <u>en primarios y</u> $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_h$ <u>los primos asociados</u>. Si

$$\mathfrak{p}_i + \mathfrak{m} \neq (1) \qquad \underline{\text{para}} \quad i = 1,\dots,h_1$$

<u>y</u>

$$\mathfrak{p}_i + \mathfrak{m} = (1) \qquad \underline{\text{para}} \quad i = h_1+1,\dots,h\,,$$

<u>entonces</u> $\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{h_1}$.

Si $i = h_1+1,\dots,h$, existen elementos s_i de $\mathfrak{p}_i$ tales que $s_i \equiv 1$ $(\mathfrak{m})$. Entonces $s_i^{\rho_i} \equiv 0$ $(\mathfrak{q}_i)$. Si hacemos $s = \prod s_i^{\rho_i}$, resulta $s \equiv 0$ $(\mathfrak{q}_{h_1+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_h)$ y $s \equiv 1$ $(\mathfrak{m})$.

Sea $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{h_1}$ y x un elemento de $\mathfrak{b}$. Si $s - 1 = m \in \mathfrak{m}$ entonces $xs = x - xm \in \mathfrak{a}$, de donde $x \equiv xm$ $(\mathfrak{a})$, $xm \equiv xm^2$ $(\mathfrak{a})$,... y $x \equiv xm^n$ $(\mathfrak{a})$. Y como $xm^n \equiv 0$ $(\mathfrak{m}^n)$, resulta que x está en $\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^n$ para toda n, es decir, $x \in \bar{\mathfrak{a}}$. Quedó demostrado que $\mathfrak{b} \subseteq \bar{\mathfrak{a}}$. Inversamente, como $\mathfrak{b}$ satisface 4.3 d), $\mathfrak{b}$ es cerrado y por estar $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ resulta $\bar{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{b}$.

4.7. TEOREMA. <u>Si en un</u> $\mathfrak{m}$ - <u>anillo</u>, R, $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_h$ <u>es una intersección de ideales primos divisores de</u> $\mathfrak{m}$, <u>entonces el ideal extendido</u> $\mathfrak{a}R^*$ <u>es igual a</u> $\mathfrak{p}_1^* \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_h^*$ <u>donde</u> $\mathfrak{p}_i^* = \mathfrak{p}_i R^*$ <u>son ideales primos en el anillo</u> R^*.

Primero demostraremos que si $x^* = \lim x_i$ es un elemento de R^* entonces $x^* \in \mathfrak{a}R^*$ si y sólo si $x_0 \in \mathfrak{a}$. Como $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{m}$, $\bigcap^{\infty}(\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^n) = \mathfrak{a}$, de donde $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}R^* \cap R$. Si x_0 está en $\mathfrak{a}$, como $\mathfrak{m}^m \subseteq \mathfrak{a}$ y $x_n - x_{n-1} \in \mathfrak{m}^{m(n)}$, resulta que $x_n \in \mathfrak{a}$, de donde x^* está en la adherencia de $\mathfrak{a}$ en R^*, es decir, x^* está en $\mathfrak{a}R^*$. Inversamente, si $x^* \in \mathfrak{a}R^*$, $x^* = \lim y_n$ con y_n contenido en $\mathfrak{a}$; entonces $x_n \equiv y_n\ (\mathfrak{m})$ si $n \geqslant n_0$ y también $x_n \equiv y_n(\mathfrak{a})$ de donde $x_n \in \mathfrak{a}$ y debido a que $x_n - x_0 \in \mathfrak{m}^m \subseteq \mathfrak{a}$, resulta que x_0 está en $\mathfrak{a}$.

Ahora podemos ya demostrar que la extensión $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}R^*$ de un ideal primo en R, divisor de $\mathfrak{m}$, es un ideal primo en R^*. En efecto, si $x^*y^* \equiv 0\ (\mathfrak{p}^*)$ y $y^* \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}^*)$ entonces $x_0 y_0 \equiv 0\ (\mathfrak{p})$ y $y_0 \not\equiv 0\ (\mathfrak{p})$ de donde $x_0 \equiv 0\ (\mathfrak{p})$, es decir, $x^* \equiv 0\ (\mathfrak{p}^*)$.

Finalmente, $x^* \in \mathfrak{a}R^*$ si y sólo si $x_0 \in \mathfrak{p}_i$, $i = 1,\ldots,h$, lo que equivale a que $x^* \in \mathfrak{p}_i R^* = \mathfrak{p}_i^*$, de donde $\mathfrak{a}R^* = \mathfrak{p}_1^* \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_h^*$.

4.8. COROLARIO. <u>Si en el</u> $\mathfrak{m}$ - <u>anillo</u> R $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_h$, <u>con</u> $\mathfrak{p}_i$ <u>ideales primos, entonces en la completación</u> R^*, $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{m}R^*$ <u>es igual con</u> $\mathfrak{p}_1^* \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_h^*$, <u>donde</u> $\mathfrak{p}_i^* = \mathfrak{p}_i R^*$ <u>son ideales primos de</u> R^*. <u>Además</u>, $\mathfrak{p}_i^* \cap R$ <u>es igual a</u> $\mathfrak{p}_i$.

5. ANILLOS SEMILOCALES GENERALIZADOS.

Designaremos con $\mathfrak{k}$ la intersección de todos los ideales primos máximos del anillo R. $\mathfrak{k}$ se llama en núcleo de R.

5.1. DEFINICION. <u>Diremos que un $\mathfrak{m}$ - anillo R es semilocal generalizado si $\mathfrak{m}$ es distinto del ideal nulo y está contenido en el núcleo $\mathfrak{k}$ de R.</u>

De aquí en adelante supondremos siempre, sin enunciarlo, que $\mathfrak{m}$ es distinto del ideal cero puesto que si $\mathfrak{m}$ es igual a cero la topología es discreta y la completación es trivial.

5.2. TEOREMA. <u>Si R es un anillo - $\mathfrak{m}$ las siguientes condiciones son equivalentes</u>:

a) <u>R es semilocal generalizado</u>.

b) <u>Si un elemento s de R es $\equiv 1$ ($\mathfrak{m}$), entonces s es unidad</u>.

c) $R = R_S$ <u>(como antes, S denota el conjunto de los elementos s de R que son $\equiv 1$ ($\mathfrak{m}$))</u>.

d) <u>Todo ideal de R es cerrado</u>.

a) implica b): Sea $s \in S$; entonces s no está en ningún ideal primo máximo ya que $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{k}$. Por consiguiente s es unidad (si no lo fuera, $sR \neq R$, de donde sR estaría contenido en algún ideal primo máximo, lo que contradice la hipótesis).

b) implica a): Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo máximo. Si $\mathfrak{p} + \mathfrak{m}$ fuera igual a (1), entonces $\mathfrak{p}$ contendría un elemento s congruente con 1 ($\mathfrak{m}$) lo que es imposible ya que por b) s es una unidad.

b) y c) son equivalentes: Si $R = R_S$ evidentemente vale b). Inversamente, si R tiene la propiedad b), todo elemento de S es uni dad, de donde R resulta igual a R_S.

c) equivale a d): La fórmula $\bar{\mathfrak{a}} = R_S\mathfrak{a} \cap R$ nos dice que si R y R_S son iguales, $\mathfrak{a}$ y su adherencia también lo son. Supongamos ahora que s es un elemento de S; entonces s es también $\equiv 1$ ($\mathfrak{m}$), de donde s es unidad en R_S y $sR_S = R_S$. Por d) y la fórmula antes mencionada se tiene $sR = sR \cdot R_S \cap R = R$, es decir, s es unidad en R.

5.3. COROLARIO. La completación de un anillo - $\mathfrak{m}$ es un anillo semilocal generalizado.

Se sigue inmediatamente de 4.4 y la condición d).

5.4. **TEOREMA.** Sea R un anillo - $\mathfrak{m}$ semilocal generalizado y R^* su completación. La correspondencia $\mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}^* = \mathfrak{a} R^*$ es biunívoca entre los ideales de R que dividen a $\mathfrak{m}$ y los de R^* que dividen a $\mathfrak{m}^*$. Si $\mathfrak{a}^*$ es el correspondiente de $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{m}$, $R/\mathfrak{a}$ es isomorfo a $R^*/\mathfrak{a}^*$.

Por 4.2.d) $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}R^* \cap R$, de donde la correspondencia mencionada es biunívoca entre los ideales de R y sus imágenes. Si $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{m}$, entonces $\mathfrak{a}^* \supseteq \mathfrak{m}^*$. Inversamente, si $\mathfrak{a}^*$ divide a $\mathfrak{m}^*$ demostraremos que si $\mathfrak{a}^* \cap R$ es igual con $\mathfrak{a}$ (que desde luego divide a $\mathfrak{m}$), $\mathfrak{a}$ se proyecta en $\mathfrak{a}^*$, es decir que $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a} R^*$. Dado un elemento x^* de R^* existe x_0 en R tal que $x^* \equiv x_0 (\mathfrak{m}^*) \equiv 0 \ (\mathfrak{a}^*)$. Si además x^* está en $\mathfrak{a}^*$, x_0 está en $\mathfrak{a}^* \cap R = \mathfrak{a}$. De aquí que $\mathfrak{a}^* \subseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{m}R^*$.

La segunda parte del teorema resulta de que $R + \mathfrak{a}^* = R^*$ (debido a que dado un elemento x^* de R^*, existe x en R tal que son congruentes módulo $\mathfrak{a}^*$). Entonces $R^*/\mathfrak{a}^* \cong R/R \cap \mathfrak{a}^* = R/\mathfrak{a}$.

Tenemos ahora el siguiente corolario:

5.5. COROLARIO. *La correspondencia* $\mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}R^*$ *induce una correspondencia biunívoca entre los ideales primos máximos del* $\mathfrak{m}$ *- anillo* semilocal generalizado *R y los de su completación*.

5.6. COROLARIO. *Si* $\mathfrak{k}$ *es el núcleo del* $\mathfrak{m}$ *- anillo semilocal generalizado* R, $\mathfrak{k}R^*$ *es el núcleo de su completación*.

Ambos corolarios son consecuencias inmediatas.

5.7. TEOREMA. *Si* R *es un anillo -* $\mathfrak{m}$ *y* $\tau R = \bar{R}$ *una imagen hohomomorfa de* R, *entonces*:

a) *Si* $\tau^{-1}(0) = \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}$ *es cerrado en* R *si y sólo si* $\bar{R}$ *es un anillo -* $\bar{\mathfrak{m}}$ *con* $\bar{\mathfrak{m}} = \tau\mathfrak{m}$.

b) *Si* $\mathfrak{n}$ *no divide a* $\mathfrak{m}$ *y todo ideal primo máximo que divida a* $\mathfrak{n}$, *divide a* $\mathfrak{m}$ *entonces* $\bar{R}$ *es un* $\bar{\mathfrak{m}}$ *- anillo semilocal generalizado, e inversamente*.

c) *Si* R *es completo,* $\bar{R}$ *también lo es*.

a) Como $\tau^{-1}(\bar{\mathfrak{m}}^n) = \mathfrak{n} + \mathfrak{m}^n$, $\bigcap\limits^{\infty} \bar{\mathfrak{m}}^n = (\bar{0})$ si y sólo si $\bigcap\limits^{\infty} (\mathfrak{n} + \mathfrak{m}^n) = \mathfrak{n}$, es decir, si y sólo si $\mathfrak{n}$ es cerrado.

b) Si $\mathfrak{m}$ no es múltiplo de $\mathfrak{n}$ entonces $\bar{\mathfrak{m}} \neq (\bar{0})$. Si todo ideal primo máximo, divisor de $\mathfrak{n}$ lo es de $\mathfrak{m}$, ya que los ideales primos máximos de $\bar{R}$ son imágenes de los primos máximos de R divisores de $\mathfrak{n}$, resulta que $\bar{\mathfrak{m}} \subseteq \bar{\mathfrak{k}}$. Inversamente, si tenemos $(\bar{0}) \neq \bar{\mathfrak{m}} \subseteq \bar{\mathfrak{k}}$, $\mathfrak{n}$ no es divisor de $\mathfrak{m}$. Además la imagen de un ideal primo máximo, divisor de $\mathfrak{n}$, de R, contiene a $\bar{\mathfrak{m}}$, por lo tanto divide a $\mathfrak{m}$.

c) Sea $\{\bar{x}_n\}$ una sucesión de elementos de $\bar{R}$ tal que $\bar{x}_n - \bar{x}_{n-1} \in \bar{\mathfrak{m}}^{m(n)}$. Entonces existe v_n en $\mathfrak{m}^{m(n)}$ tal que $\tau v_n = \bar{x}_n - \bar{x}_{n-1}$. Sea $\bar{x}_0$ la imagen de x_o; hacemos $x_n = x_o + \sum_{i=1}^{n} v_i$; $\{x_n\}$ es convergente en R ya que $v_n \in m^{m(n)}$, de donde tiene un límite x en R. Entonces $\lim \bar{x}_n = \tau x$ ya que $\tau x_n = \tau x_{n-1} + \tau v_n = \bar{x}_n + \tau x_{n-1} - x_{n-1} = \bar{x}_n + \tau x_{n-1} - x_{n-2} = \cdots = \bar{x}_n + \tau x_o - \bar{x}_o = \bar{x}_n$.

6. ANILLOS SEMILOCALES.

6.1. DEFINICION. Un anillo $-\mathfrak{k}$, R, se llama semilocal si el número de ideales primos máximos es finito.

Entonces, si $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_h$ son los ideales primos máximos de R se tiene $\mathfrak{k} = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_h = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_h$

6.2. TEOREMA. Si R es un anillo semilocal y $\mathfrak{a}$ es un ideal de R distinto de R, entonces $R/\mathfrak{a}$ es semilocal. Si R es completo, $R/\mathfrak{a}$ es completo.

Sean $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_{h_1}$ los ideales primos máximos de R que dividen a $\mathfrak{a}$ ($h_1 > 0$ ya que todo ideal está contenido en algún ideal primo máximo). Entonces los ideales primos máximos de $R/\mathfrak{a}$ son precisamente $\mathfrak{p}_i/\mathfrak{a}$, $i = 1,\dots,h_1$, es decir $R/\mathfrak{a}$ es un $\bar{\mathfrak{k}}$- anillo semilocal con $\bar{\mathfrak{k}} = \mathfrak{p}_1/\mathfrak{a} \dots \mathfrak{p}_{h_1}/\mathfrak{a}$.

La segunda parte es consecuencia inmediata de 5.7 c).

6.3. TEOREMA. La completación de un anillo semilocal es un anillo semilocal.

Se sigue de 5.5.

6.4. LEMA. Si R es un anillo semilocal y $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_h$ los ideales primos máximos, dados h elementos $a_1,\dots,a_h$ de R y el número n, el sistema de congruencias $x \equiv a_i\ (\mathfrak{p}_i^n)$ tiene solución en R y única módulo $\mathfrak{k}^n$.

Si $\mathfrak{a}_i = \prod_{j\neq i} \mathfrak{p}_j$ entonces $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{p}_i = (1)$, de donde existe $e_i \equiv 1\ (\mathfrak{p}_i)$, con $e_i \in \mathfrak{a}_i$. Formamos $e_{in} = 1 - (1 - e_i^n)$. Se tiene $e_{in} \equiv 0\ (\mathfrak{a}_i^n)$ y $e_{in} \equiv 1\ (\mathfrak{p}_i^n)$ (lo primero se sigue del desarrollo $e_{in} = 1 - 1 + e_i^n - \cdots$, y lo segundo de que $e_i^n - 1 \equiv 0\ (\mathfrak{p}_i^n)$). De aquí $x = \sum a_i e_{in} \equiv a_i\ (\mathfrak{p}_i^n)$, es decir,

$\sum a_i e_{in}$ es solución.

Si suponemos ahora que x' es otra solución tenemos que $(x - x')\cdot$ $\cdot\sum e_{in} \equiv 0$ $(\mathfrak{k}^n)$ de donde $e_{in} - 1 \equiv 0$ $(\mathfrak{p}_i^n)$, es decir, $\sum e_{in}$ no está en ningún ideal primo máximo. Esto implica que $\sum e_{in}$ es unidad, de donde $x \equiv x'$ $(\mathfrak{k}^n)$, q.e.d.

6.5. TEOREMA. Sea R un subanillo de R′ y R′ un R - módulo finito. Si R es semilocal, R′ es semilocal. Además si R es completo, R′ también lo es.

Sea $\{\mathfrak{p}_i'\}_{i\in I}$ el conjunto de ideales primos máximos en R'. Por 1.3.5 c) la relación $\mathfrak{p}_i' \cap R = \mathfrak{p}_k$ define una partición finita del conjunto de índices $I = I_1 \cup \cdots \cup I_h$, con $\mathfrak{p}_i' \supseteq \mathfrak{p}_k$ si $i \in I_k$. Por 1.3.5 d) I_k es finito para toda k, de donde R' es semilocal.

Sabemos que $R/\mathfrak{k}$ es isomorfo con la suma directa de los campos $R/\mathfrak{p}_i$ (ver (7), pag. 39). Por lo tanto $R/\mathfrak{k}$ tiene condiciones mínimas y por 1.3.5 b) $R'/\mathfrak{k}R'$ también satisface la condición descendente de cadena. Aplicando 1.3.3 queda demostrado que todo ideal primo $\mathfrak{p}'$ de R' que divida a $\mathfrak{k}R'$ es máximo. Ahora bien, si $\mathfrak{k}R' = \mathfrak{q}_1' \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r'$ y $\mathfrak{p}_1', \ldots,$ $\mathfrak{p}_r'$ son los primos asociados, por ser máximos, según lo anterior, se tiene que $\mathfrak{k}R' = \mathfrak{q}_1' \cdots \mathfrak{q}_r'$ y como $\mathfrak{k}' \subseteq \mathfrak{p}_1' \cdots \mathfrak{p}_r'$, $\mathfrak{k}'^{\rho} \subseteq \mathfrak{k}R'$.

Sea $\{u_n'\}$ una sucesión de Cauchy en R', y $u_{n+1}' - u_n' \in \mathfrak{k}'^{m(n)} \subseteq \mathfrak{k}^{m(n)}$ por lo demostrado anteriormente. Si $R' = \sum^m Rx_i$, $v_n' = \sum^m v_{ni} x_i$ y $u_1' = \sum^m u_{1i} x_i$; haciendo $u_{ni} = u_{1i} + \sum_{k=1}^{n-1} v_{ki}$ se tiene $u_n' = \sum u_{ni} x_i$. Las sucesiones $\{u_{ni}\}$ son de Cauchy en el anillo completo R, por lo tanto $\lim u_{ni} = u_i$. Entonces $u' = \sum^m u_i x_i$ es el límite de la sucesión $\{u_n'\}$, es decir, R' es también completo.

6.6. LEMA. Si R es un anillo semilocal completo y $\{a_n\}$ una sucesión nula de ideales, entonces $\mathfrak{a}_n \subseteq \mathfrak{k}^{m(n)}$ con $m(n) \longrightarrow \infty$.

$R/\mathfrak{k}^n$ es isomorfo con la suma directa $R/\mathfrak{p}_1^n + \cdots + R/\mathfrak{p}_h^n$. En efecto, $x + \mathfrak{k}^n \longrightarrow (x + \mathfrak{p}_1^n) + \cdots + (x + \mathfrak{p}_h^n)$ es una correspondencia biunívoca puesto que si $x_1 - x_2 \in \mathfrak{k}^n$, $x_1 - x_2 \in \mathfrak{p}_i^n$. Además es sobre, ya que dados $x_i + \mathfrak{p}_i^n$, $i = 1, \ldots, h$, existe según 6.4 una x tal que $x \equiv x_i(\mathfrak{p}_i^n)$. Además, la unicidad de la solución módulo $\mathfrak{k}^n$ demuestra que la correspondencia es biunívoca. De aquí que sea isomorfismo. En $R/\mathfrak{p}_i^n$ el único ideal primo es $\mathfrak{p}_i$, que es máximo, por lo tanto según 1.3.4 el anillo satisface la condición descendente de cadena. Así resulta que $R/\mathfrak{k}^n$ tiene condiciones mínimas.

Para una h fija construímos $\mathfrak{b}_h = \bigcap_{n=0}^{\infty} (\mathfrak{k}^h + \mathfrak{a}_n)$. Se tiene entonces:

(1) $$\mathfrak{b}_h = \mathfrak{k}^h + \mathfrak{a}_n \qquad \text{si} \quad n \geqslant N(h),$$

debido a que $R/\mathfrak{k}^h$ tiene condiciones mínimas. De la definición de $\mathfrak{b}_h$ tenemos:

(2) $$\mathfrak{b}_h = \mathfrak{k}^h + \mathfrak{b}_{h+1}.$$

Construiremos ahora sucesiones $\{b_{h+n}\}$ con $b_{h+n} \in \mathfrak{b}_{h+n}$ por inducción. Sea b_h un elemento arbitrario de $\mathfrak{b}_h$. Suponiendo construídos b_{h+n}, la relación (2) nos determina $b_{h+n+1} \in \mathfrak{b}_{h+n+1}$ con las propiedades

(3) $$b_{h+n+1} \equiv b_{h+n}(\mathfrak{k}^{h+n}), \qquad b_{h+n} \equiv b_h \ (\mathfrak{k}^h).$$

Como las sucesiones son de Cauchy y R es completo, sea $b(h) = \lim b_{h+n}$ De (3) se sigue

(4) $$b(h) \equiv b_{h+n}\ (\mathfrak{k}^{h+n}),$$

y por la definición de $\mathfrak{b}_{h+n}$, $b_{h+n} \in \bigcap_{m=0}^{\infty} (\mathfrak{k}^{h+n} + \mathfrak{a}_m)$. Esto nos dice que para todas m, n, $b(h) \in \mathfrak{k}^{h+n} + \mathfrak{a}_m$. De aquí, $b(h) \in \bigcap_{n=0}^{\infty} (\mathfrak{k}^{h+n} + \mathfrak{a}_m) = \mathfrak{a}_m$ ya que el anillo es semilocal. Por lo tanto las sucesiones $\{b_{h+n}\}$ tienden a cero. Entonces por (4), $b_h \in \mathfrak{k}^{h+n}$ y como b_h era un elemento arbitrario de $\mathfrak{b}_h$, resulta $\mathfrak{b}_h \subseteq \mathfrak{k}^h$. Por (2) se tiene que $\mathfrak{b}_h = \mathfrak{k}^h$ y de (1) $\mathfrak{a}_n \subseteq \mathfrak{k}^h$ si $n \geqslant N(h)$, q.e.d.

6.7. TEOREMA. *Sea* R *un anillo semilocal completo y subanillo de* R'. *Si* $\{\mathfrak{k}^n R'\}$ *es una sucesión nula y* $R'/\mathfrak{k}R'$ *es un* $R/\mathfrak{k}$ *módulo finito, entonces* R' *es semilocal y completo*.

Será suficiente demostrar que R' es un R - módulo finito y aplicar 6.5. El lema 6.6 nos dice que $\mathfrak{k}^n R' \cap R \subseteq \mathfrak{k}^{m(n)}$ con $m(n) \to \infty$.

Sea ahora $v_1^*, \ldots, v_r^*$ una base de $R'/\mathfrak{k}R'$ respecto a $R/\mathfrak{k}$ y $v_i \in R'$ un representante de v_i^*. Entonces todo elemento de R' es congruente módulo $\mathfrak{k}R'$ con una combinación lineal de $v_1, \ldots, v_r$ con coeficientes en R. Sea $\mathfrak{k} = Ra_1 + \cdots + Ra_m$ y $\xi_1, \ldots, \xi_N$ los monomios de grado n en a_i; $\mathfrak{k}^n R' = R'\xi_1 + \cdots + R'\xi_N$. Sea x un elemento arbitrario de R'. Construímos por inducción las sucesiones $\{x_{in}\}$ $i = 1, \ldots, r$ y con $x_{in} \in R$, con la propiedad $x \equiv \sum x_{in} v_i$ $(\mathfrak{k}^n R')$. Hacemos $x_{i0} = 0$. Por la hipótesis de inducción $x - \sum x_{in} v_i \in \mathfrak{k}^n R'$ y por lo anterior, $x - \sum x_{in} v_i = \sum y_k \xi_k$ con $y_k \in R'$; sea $y_k \equiv \sum y_{ki} v_i$ $(\mathfrak{k}R')$. Definiendo entonces $x_{i\,n+1} = x_{in} + \sum y_{ki} \xi_k$ vemos con un sencillo cálculo que las sucesiones satisfacen la propiedad exigida. Además, como $x_{i\,n+1} - x_{in} = \sum y_{ki} \xi_i \in \mathfrak{k}^n$, las sucesiones son convergentes. Si $\lim x_{in} = x_i$ se tiene que $x - \sum x_i v_i \equiv \sum (x_{in} - x_i) \cdot v_i$ $(\mathfrak{k}^n R')$ y según lo demostrado al principio también módulo $\mathfrak{k}^{m(n)}$; de aquí resulta $x = \sum x_i v_i$.

B I B L I O G R A F I A.

(1) A r t i n, E.: Rings with Minimum Conditions. Univ. of Michigan Press, 1946.

(2) B o u r b a k i, N.: Éléments de Mathémetique, L II, Algèbre, L III, Topologie générale.

(3) C h e v a l l e y, C.: On the theory of local rings. Ann. of Math. V 44, 1943.

(4) J a c o b s o n, N.: Theory of Rings. Am. Math. Soc. 1943.

(5) K r u l l, W,: Idealtheorie. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grezgebiete, 1935.

(6) K r u l l, W.: Dimensionstheorie in Stellenringen. J. Reine Angew. Math. V 179, 1938.

(7) v a n d e r W a e r d e n, B. L.: Moderne Algebra, V II. Berlin, J. Springer, 1937.

(8) Z a r i s k i, O.: Generalized semi - local rings. Sum. Bras. Math. V I, 1946.