SOBRE LA INMERSION DE VARIEDADES ALGEBRAICAS

Por
EMILIO LLUIS RIERA

1954

TESIS DOCTORAL

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

A Marta

1. INTRODUCCION

El tema general de este trabajo es el problema de proyectar birracional y birregularmente una variedad algebraica de un espacio proyectivo en otro de dimensión menor. El que la correspondencia sea birracional quiere decir que los campos de funciones algebraicas de la variedad original y de su proyección son iguales, y la birregularidad significa que el anillo local de un punto cualquiera de la variedad original es igual al anillo local de la imagen de este punto en la variedad proyectada.

El resultado principal que se demuestra (ver el teorema 2) es la posibilidad de proyectar, en la manera indicada arriba, una variedad del espacio proyectivo de cierta dimensión en otro de dimensión mínima; la dimensión de este último está en función de las singularidades de la variedad (más precisamente, de las dimensiones de los espacios tangentes de Zariski a la variedad). Como consecuencia de esta propiedad, se demuestra (ver el teorema 3) que toda variedad (proyectiva) sin singularidades, de dimensión r tiene un modelo birracional en el sentido estricto (es decir, birregular) contenido en el espacio proyectivo de dimensión $2r + 1$.

Al mismo tiempo se estudian otros puntos que no están directamente relacionados con el problema central mencionado, entre los cuales pueden indicarse los conjuntos algebraicos de secantes límites "en el sentido estricto y en el sentido amplio".

NOTACIONES. En este trabajo se han adoptado, de preferencia, las notaciones de A. Weil (Foundations of Algebraic Geometry), así como la convención de "dominio universal". Se usan constantemente los conceptos de especialización (ver también [6] para el caso homogéneo), derivaciones, extensiones regulares de campos, etc., tal como se definen en la obra mencionada. También en cuanto a la nomenclatura se sigue generalmente al mismo autor. Así, se habla de variedad (variedad absolutamente irreducible), punto genérico, conjunto algebraico (bunch of varieties o variedad no necesariamente irreducible), componentes de un conjunto algebraico, etc. El espacio afín de dimensión n se designa con A^n, y el proyectivo con P^n. Los puntos de A^n se han denotado con tipos latinos, (x), (y),..., y los de P^n, con griegos, (ξ), (η), etc. Si V es una variedad de un espacio proyectivo, el modelo afín que se considere, lo designaremos con la misma letra V.

* * *

El tema general de esta tesis me fué sugerido por el Prof. S. Lefschetz, a quien deseo expresar mi más profundo agradecimiento. Quiero también dar las gracias al Prof. Pierre Samuel, quien tan amablemente me brindó su incalculable ayuda, así como a mi amigo el Dr. Félix Recillas por su valiosa ayuda y constante estímulo.

Emilio Lluis Riera.

México, D. F., junio de 1954.

2. VARIEDAD SECANTE.

Sea V^r una variedad de dimensión r en el espacio proyectivo P^n. Supondremos que V^r no está contenida en el hiperplano $X_o = 0$. Sea k un campo de definición de V.

Tomamos dos puntos genéricos $(\xi_o,\ldots,\xi_n)$ y $(\eta_o,\ldots,\eta_n)$ de V sobre k tales que (ξ), (η) sean independientes (algebraicamente libres) sobre k. Si $x_i = \frac{\xi_i}{\xi_o}$, $y_i = \frac{\eta_i}{\eta_o}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ (ξ_o, η_o son distintos de cero debido a nuestras hipótesis), entonces (x), (y) son independientes sobre k y $\dim_k(x,y) = 2r$. Tomamos (τ_o, τ_1) algebraicamente independientes sobre $k(\xi,\eta)$. Sea $t = \tau_1\eta_o/\tau_o\xi_o$. Evidentemente t es trascendente sobre k(x,y). Así pues, (x, y, t) es de dimensión 2r+1 sobre k.

Sea (ζ) el punto de P^n definido por

$$\zeta_i = \tau_o\xi_i + \tau_1\eta_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant n.$$

$\zeta_0 \neq 0$ porque hemos supuesto (τ_0, τ_1) algebraicamente independientes sobre $k(\xi, \eta)$. Si $z_i = \frac{\zeta_i}{\zeta_0}$ $(1 \leq i \leq n)$, tenemos que $z_i = \frac{x_i + t y_i}{1+t}$, es decir, $k(z) \subset k(x, y, t)$. Esto implica que $k(z)$ es una extensión regular de k y de dimensión $s \leq 2r+1$, es decir, (ζ) tiene un lugar sobre k que designaremos con W^s. Por definición diremos que W^s es la variedad de secantes o <u>variedad secante</u> a V^r.

Si llamamos recta secante a V^r a una variedad lineal de dimensión 1 que tenga al menos dos puntos distintos comunes con V, vemos inmediatamente que un punto (ζ') está en la secante que intersecta a V en los puntos (ξ'), (η'), distintos, si y sólo si existe (τ_0', τ_1') tal que $\zeta_i' = \tau_0' \xi_i' + \tau_1' \eta_i'$.

PROPOSICION 1. <u>La variedad secante a V contiene a todas las rectas secantes a V.</u>

Si (ζ') está en la secante determinada por los puntos (ξ') y (η') de V, distintos, existen τ_0', τ_1' tales que $\zeta_i' = \tau_0' \xi_i' + \tau_1' \eta_i'$. Tenemos tres especializaciones sobre k:

$$(\xi) \longrightarrow (\xi'), \quad (\eta) \longrightarrow (\eta'), \quad (\tau) \longrightarrow (\tau')$$

(porque τ_0, τ_1 son variables independientes). Como

(ξ), (η) y (τ) son independientes y $k(\xi)$ y $k(\eta)$ regulares sobre k, entonces (ξ', η', τ') es una especialización de (ξ, η, τ) sobre k, de donde (ζ') está en W^s.

Ahora vamos a demostrar que W^s contiene a todas las variedades lineales tangentes a V^r en todos los puntos simples de V, es decir, que si (ξ') es un punto simple de V, la variedad lineal tangente a V en (ξ') está contenida en W. Podemos suponer que (ξ') está "a distancia finita" y podemos trabajar con coordenadas afines. Más aún, voy a suponer, para facilitar las notaciones, que este punto es el origen.

DEFINICION. Sea (x) un punto genérico de V sobre k, t una variable sobre k(x), (y) el punto definido por $y_i = tx_i$ y $u = \frac{1}{t}$. Diremos que un punto (y') "está en una secante límite a V a través del origen" si y sólo si (0, y', 0) es una especialización de (x, y, u) sobre k. *)

*) Este concepto queda definido, por traslación, para cualquier punto de V. Así, diremos que un punto (y') está en una secante límite a V a través del punto (x') de V si $(x,y,u) \longrightarrow (x',y',0)/k$, en donde $u = t^{-1}$ y $y_i = tx_i + (1-t)x'_i$.

Evidentemente el conjunto de todos los puntos que están en secantes límites a través del origen, es un subconjunto del conjunto de puntos de la variedad secante W^s.

Vamos a demostrar que si el origen es un punto simple de V, entonces el conjunto de puntos que están en secantes límites a través del origen es igual a la variedad lineal tangente a V en el origen. Para ello nos valdremos de la siguiente construcción.

Sean como antes, (x) un punto genérico de V sobre k, t una variable sobre $k(x)$, (y) el punto de coordenadas $y_i = tx_i$ y $u = t^{-1}$. Evidentemente $\dim_k(x, y, t) = \dim_k(x,t) = r+1$. Como $k(x, y, u)$ es regular sobre k, (x, y, u) tiene un lugar W_0^{r+1} sobre k. W_0^{r+1} está en el espacio producto $A^n \times A^n \times A^1$. Consideramos el conjunto algebraico (<u>bunch of varieties</u>) $\mathfrak{B} = W_0 \cap (A^n \times A^n \times (0))$.

LEMA 1. <u>El conjunto algebraico</u> $\mathfrak{B}$ <u>es puramente r-dimensional</u>.

Efectivamente, si U es una componente de $\mathfrak{B}$, $\dim U \geq r+1+2n-(2n+1) = r$, de donde la dimensión de U es r o bien $r+1$. Si $\dim U$ fuera igual a $r+1$, $U = W_0$ y W_0 estaría contenido en $A^n \times A^n \times (0)$, lo cual es falso. Es decir, todas las componentes de $\mathfrak{B}$ son de dimensión r, que es lo que se quería demostrar.

Si $\mathfrak{B}$ es un conjunto algebraico en $A^n \times A^m$ y $\mathfrak{B} = U_1 \cup \ldots \cup U_h$, donde las U_i son las componentes de $\mathfrak{B}$, por definición diremos que la proyección $\mathfrak{B}'$ de $\mathfrak{B}$ en A^n es el conjunto algebraico $U_1' \cup \ldots \cup U_h'$, donde U_i' es la proyección de U_i en el mismo factor A^n.

LEMA 2. *La proyección* $\mathfrak{S}$ *de* $\mathfrak{B}$ *en el segundo factor de* $A^n \times A^n \times A^1$ *es igual al conjunto de puntos de secantes límites a* V *a través del origen*.

Si (y') está en una secante límite a través del origen, con las notaciones anteriores tenemos $(x,y,u) \longrightarrow (0, y', 0)$ sobre k. Esto implica que $(0, y', 0)$ pertenece a W_0 y por lo tanto a $\mathfrak{B}$. De aquí se sigue que (y') está en la proyección $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{B}$. Inversamente, si (y') está en $\mathfrak{S}$, (y') está en la proyección de una componente U de $\mathfrak{B}$, es decir, existe $(x',y',0)$ tal que $(x, y, u) \longrightarrow (x', y', 0)$ sobre k. Como (x,y,u) satisface la relación $uy=x$ tenemos $0y' = x' = 0$, de donde, (x, y, u) se especializa en $(0, y', 0)$ sobre k, lo que, según la definición, equivale a decir que (y') está en una secante límite a través del origen.

LEMA 3. $\mathfrak{S}$ *es un conjunto algebraico puramente* r-*dimensional*.

Sea U' una componente de $\mathfrak{H}$ y U una componente de $\mathfrak{B}$ que se proyecta en U'. Si (y') es un punto genérico de U' sobre k, existe un punto genérico de U de la forma $(x', y', 0)$. Sabemos que $\dim_k(x', y', 0) = r$. Como $(x', y', 0)$ está también en W_0, éste es una especialización sobre k de (x,y,u) y la relación $x = u \cdot y$ implica $x' = 0$. De aquí resulta que $\dim_k(y') = \dim_k(x', y', 0) = r$. Es decir, la dimensión de U' es igual a r.

LEMA 4. <u>Si el origen es un punto simple de</u> V, <u>el conjunto de puntos de secantes límites a</u> V <u>a través del origen es igual a la variedad lineal tangente a</u> V <u>en el origen</u>.

Debido a los lemas 2 y 3 bastará demostrar que $\mathfrak{H}$ está contenido en la variedad lineal tangente a V en el origen. Sea $F(X)$ un polinomio del ideal de la variedad V. Con las notaciones anteriores tenemos $F(x) = 0 = F(uy) = u\Delta_0 F(y) + u^2Q(y,u)$, donde, como de costumbre, $\Delta_x F(X) = \Sigma \partial F/\partial x_i (X_i - x_i)$. Así pues, $\Delta_0 F(y) + uQ(y,u) = 0$. Si (y') está en $\mathfrak{H}$, $(x, y, u) \rightarrow (0, y', 0)$ sobre k, de donde $\Delta_0 F(y') = 0$. Como esto vale para cualquier polinomio del ideal de la variedad, queda demostrado que (y') está en la variedad lineal tangente a V en el origen.

Por lo tanto, del lema 4 y de la observación que precede al lema 1, se sigue que:

PROPOSICION 2. _La variedad secante a_ V _contiene a todas las variedades lineales tangentes a_ V _en los puntos simples de_ V. *)

---

*) Más adelante se demostrará una propiedad más general que la de esta proposición. Ver el corolario de la proposición 4.

3. CONO DE TANGENTES Y ESPACIO TANGENTE DE ZARISKI

En esta sección usaremos únicamente coordenadas afines debido a que los objetos tratados serán de carácter local.

Sea V^r una variedad de dimensión r definida sobre un campo k y supongamos que el origen es un punto de V. Si (x) es un punto genérico de V sobre k, el anillo local de V en el origen es $\mathfrak{o} = k[x]_{\mathfrak{x}}$ donde $\mathfrak{x}$ es el ideal $(x_1,\ldots,x_n)$ de $k[x]$. El ideal máximo de $\mathfrak{o}$ es $\mathfrak{m} = \mathfrak{o}x_1 + \cdots + \mathfrak{o}x_n$ y $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ es isomorfo a k. Sea $G(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}/\mathfrak{m} + \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 + \cdots$ el anillo graduado asociado al anillo $\mathfrak{o}$, filtrado por las potencias del ideal $\mathfrak{m}$ [7]. Como $\mathfrak{m}^n$ está generado en $k[x]$ por los monomios de grado n en las x_i, el anillo graduado $G(\mathfrak{o})$ está generado sobre k por los elementos $\bar{x}_i$ = clase de x_i módulo $\mathfrak{m}^2$, es decir,

$$G(\mathfrak{o}) = k[\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n].$$

De aquí se sigue que $G(\mathfrak{o}) = k[X_1,\ldots X_n]/\mathfrak{a}$, donde $\mathfrak{a}$

es evidentemente un ideal homogéneo del dominio poli nomial $k[X_1,\ldots,X_n]$.

DEFINICION. El conjunto algebraico definido sobre k por el ideal $\mathfrak{a}$ se llama cono de tangentes a V en el origen.

PROPOSICION 3. *El ideal* $\mathfrak{a}$ *está generado por el conjunto de todas las formas de grado mínimo de los polinomios del ideal* $\mathfrak{p}$ *de la variedad* V *en el anillo* $k[X_1,\ldots,X_n]$.

Primeramente demostraremos que $\mathfrak{m}^s \cap k[x]=\mathfrak{x}^s$. En efecto, sea $F(x) \in \mathfrak{m}^s \cap k[x]$; $F(x) = G(x)/H(x)$, con $G(x) \in \mathfrak{x}^s$ y $H(0) \neq 0$. De aquí, $F(x)H(x) \in \mathfrak{x}^s$, y como $\mathfrak{x}$ es homogéneo, si $F_q(x)$ es la forma inicial (la forma de grado mínimo) de $F(x)$, $F_q(x)H(0) \in \mathfrak{x}^s$, es decir, $q \geq s$, de donde $F(x) \in \mathfrak{x}^s$. La inclusión en el otro sentido es trivial. Vamos ahora a la proposición. $F_s(X) + F_{s+1}(X) + \ldots + F_{s+h}(X) \in \mathfrak{p}$ (F_{s+i}-forma homogénea de grado $s+i$) si y sólo si $F_s(x) + F_{s+1}(x) + \ldots = 0$, lo cual equivale a $F_s(x) \in \mathfrak{x}^{s+1}$, y como $F_s(x) \in k[x]$, esta última relación equivale a $F_s(x) \in \mathfrak{m}^{s+1}$, o bien a $F_s(x) = 0$ y, finalmente, a $F_s(X) \in \mathfrak{a}$, q.e.d.

LEMA 5. *Sea* $(x_1,\dots,x_n)$ *un conjunto de cantidades y* $\mathfrak{p}$ *su ideal sobre un campo* k. *Si* u *es trascendente sobre* k(x) *y* (y) *es tal que* $x_i = uy_i$, *entonces el ideal de* (y, u) *sobre* k *está generado por los polinomios* $g_s(Y)+Ug_{s+1}(Y)+\cdots+U^{s+h}g_{s+h}(Y)$ *donde* $g_s(X)+g_{s+1}(X)+\cdots+g_{s+h}(X)$ *está en* $\mathfrak{p}$ *y* g_{s+i} *es una forma homogénea de grado* s + i.

Desde luego, si $g_s(x)+g_{s+1}(x)+\dots=0$, entonces $u^s g_s(y)+u^{s+1}g_{s+1}(y)+\dots=0$, de donde $g_s(y)+u\,g_{s+1}(y)+\dots=0$. Inversamente, sea ahora F(Y, U) un polinomio tal que F(y, u) = 0. Escribamos $F(Y,U)=\sum_{i,j} g_{ij}(Y)U^i$, donde g_{ij} es una forma homogénea de grado j. Si hacemos $Y = X/U$, $F(Y,U)=\sum_{i,j} g_{ij}(X)U^{i-j}=\sum_{d}\left(\sum_{j-i=d} g_{ij}(X)\right)U^d$ (d puede tomar valores negativos). Pero como u es trascendente sobre k(x) y $F(y,u)=0$, $\sum_{j-i=d} g_{ij}(X)\in\mathfrak{p}$ para toda d. Sea $g_{is(d)}(X)$ la forma de grado mínimo del polinomio $\sum_{j-i=d} g_{ij}(X)$. Considero $\sum_{j-i=d} g_{ij}(Y)U^{j-s(d)}$ el cual es de la forma estipulada en el lema. Evidentemente, $F(y,u)=0$ si y sólo si $\sum_{j-i=d} g_{ij}(x)=0$ para toda d, lo cual equivale a $\sum_{j-i=d} g_{ij}(y)u^j=0$, o bien, finalmente, a $\sum_{j-i=d} g_{ij}(y)u^{j-s(d)}=0$ para toda d, puesto que $u\neq 0$. Con esto queda demostrado el lema.

PROPOSICION 4. <u>El cono de tangentes a</u> V <u>en el origen es igual al conjunto de puntos de secantes límites a</u> V <u>a través del origen</u>.

Si (y') está en una secante límite a V a través del origen, $(0, y', 0)$ es una especialización de (x, y, u) sobre k, donde (x) es un punto genérico de V sobre k, $x_i = uy_i$, u trascendente sobre $k(x)$. Si $g_s(X) + g_{s+1}(X) + \cdots + g_{s+h}(X)$ está en el ideal de V, $g_s(Y) + Ug_{s+1}(Y) + \cdots + U^h g_{s+h}(Y)$ está en el ideal de (y,u) sobre k, y como $(y,u) \longrightarrow (y',0)$, $g_s(y') = 0$. Como esto es cierto para cualquier polinomio del ideal de V, la proposición 3 implica que (y') está en el cono de tangentes a V en el origen.

Inversamente, sea (y') un punto del cono de tangentes; debido al lema anterior, los polinomios $g_s(Y) + Ug_{s+1}(Y) + \cdots$, donde $g_s(X) + g_{s+1}(X) + \ldots$ está en el ideal de V, generan el ideal de (y,u) sobre k. Debido a nuestra hipótesis, $g_s(y') = 0$, de donde $g_s(y') + 0 \cdot g_{s+1}(y') + \ldots = 0$, y por consiguiente, $(y', 0)$ es una especialización de (y,u) sobre k. Sea $(x', y', 0)$ una especialización de (x,y,u), extensión de la anterior. Como $x = uy$, $x' = 0$, es decir, $(0, y', 0)$ es una especialización de (x,y,u) sobre k, y (y') está en una secante límite a V a través del origen.

En particular, el lema 3 de la sección anterior demuestra que el cono de tangentes a V^r en un punto de V es un conjunto algebraico puramente r-dimensional.

El corolario siguiente es una generalización de la proposición 2.

COROLARIO. *La variedad secante a* V *contiene a todos los conos de tangentes a* V *en todos los puntos de* V.

Este es una consecuencia inmediata de la proposición anterior, ya que un punto que está en una secante límite a V en un punto de V, está en la variedad secante a V.

Sea V^r una variedad de dimensión r en el espacio A^n, definida sobre un campo k. Si $\mathfrak{o}$ es el anillo local de V en un punto P y $\mathfrak{m}$ el ideal de las no unidades de $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ es un espacio vectorial sobre $\mathfrak{o}/\mathfrak{m} = k(P)$, [10]. La dimensión de este espacio es mayor o igual que r y menor o igual que n. El punto P es simple si y sólo si la dimensión de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ es r. Para facilitar las notaciones supondremos que P es el origen. Entonces si (x) es un punto genérico de V sobre k, el anillo local $\mathfrak{o}$ de V en el origen es igual al anillo de cocientes del ideal $(x_1,\ldots,x_n)$ con respecto a $k[x_1,\ldots,x_n]$, es decir, $\mathfrak{o} = k[x_1,\ldots,x_n]_{(x_1,\ldots,x_n)}$, y el ideal máximo de $\mathfrak{o}$ está generado por $x_1,\ldots,x_n$, es decir, $\mathfrak{m} = \mathfrak{o}x_1 + \cdots + \mathfrak{o}x_n$. Resulta inmediato que $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ es isomorfo (como espacio vectorial sobre k) al espacio de las formas lineales $\sum a_i X_i$ $(a_i \in k)$ reducido módulo las formas lineales $\sum a_i X_i$ tales que $\sum a_i x_i \in \mathfrak{m}^2$.

DEFINICION. *Llamaremos espacio tangente de Zariski a V en P, al dual del espacio vectorial* $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. *Lo designaremos con* $Z(P)$.

Así pues, $Z(O)$ puede identificarse con la variedad lineal definida sobre k por las formas $\sum a_i X_i$ tales que $\sum a_i x_i \in \mathfrak{m}^2$. Debido a que $\mathfrak{m} \cap k[x] = \mathfrak{x}$ (ver la proposición 3), resulta que $Z(O)$ es el conjunto de puntos que satisfacen las formas lineales de todos los polinomios del ideal de la variedad V. En otras palabras, $Z(O)$ es la "variedad lineal asociada al origen" ([8], pág 98). En general, si $F_\alpha(X) = 0$ es un sistema de ecuaciones de V y (x') el punto considerado, $Z(x')$ es la variedad lineal de ecuaciones: $\Delta_{x'} F_\alpha(X - x') = \sum \partial F_\alpha/\partial x'_i \cdot (X_i - x'_i) = 0$ definida sobre $k(x')$.

En particular, de lo dicho arriba resulta que el espacio tangente de Zariski en un punto contiene al cono de tangentes a la variedad en el mismo punto. En un punto simple, el espacio tangente de Zariski, por ser de dimensión r, coincide con la variedad lineal tangente a V^r y, por lo tanto, con el cono de tangentes.

DEFINICION. Sean (x) y (y) dos puntos genéricos de V sobre k algebraicamente independientes sobre k, u trascendente sobre k(x,y), $t = u^{-1}$, y (z) el punto definido por $z_i = tx_i + (1-t)y_i$. Supongamos que el origen es un punto de V. Por definición diremos que un punto (z') "está en una secante límite en el sentido amplio a V a través del origen" si (0, 0, z', 0) es una especialización de (x, y, z, u) sobre k. (Por traslación este concepto queda definido para un punto cualquiera de V.)

Se sigue de la definición que el conjunto de puntos que están en secantes límites en el sentido amplio a V a través del origen, es un conjunto algebraico (usando un método análogo a la construcción que precede al lema 1) contenido en la variedad secante a V y que contiene al cono de tangentes a V en el origen.

PROPOSICION 5. <u>El conjunto de puntos que están en secantes límites a V en el sentido amplio a tra-</u>

vés del origen está contenido en el espacio tangente de Zariski a V en el origen.

Sea $F(X) = \sum a_i X_i + F_2(X) + \cdots + F_s(X)$ un polinomio del ideal de la variedad. Entonces $\sum a_i x_i + F_2(x) + \cdots + F_s(x) = 0$, y $\sum a_i y_i + F_2(y) + \cdots + F_s(y) = 0$. Como $uz_i = x_i + (u-1)y_i$, de las dos igualdades anteriores obtenemos:

$$u\sum a_i z_i + [F_2(x) + (u-1)F_2(y)] + \cdots + [F_s(x) + (u-1)F_s(y)] = 0.$$

Sea $2 \leqslant d \leqslant s$. Tenemos

$$F_d(x) + (u-1)F_d(y) = F_d(uz + (1-u)y) + (u-1)F_d(y) =$$
$$=(1-u)^d F_d(y) + (1-u)^{d-1} u \sum \partial F_d/\partial y_i \cdot z_i + u^2 Q(u,y,z) +$$
$$+(u-1)F_d(y) =$$
$$=u\sum \partial F_d/\partial y_i\, z_i - (d-1)uF_d(y) + u^2 Q'(u,y,z).$$

Así pues, obtenemos

$$u\sum a_i z_i + u(\sum \partial F_2/\partial y_i\, z_i + \cdots + \sum \partial F_s/\partial y_i \cdot z_i) -$$
$$- u(F_2(y) + 2F_3(y) + \cdots + (s-1)F_s(y)) + u^2 Q''(u,y,z) = 0.$$

Simplificando por u y suponiendo que $(0,0,z',0)$ es una especialización de (x,y,z,u), resulta que $\sum a_i z'_i = 0$. En otras palabras, si suponemos que (z') está en una secante límite a V en el sentido amplio, entonces $\Delta_o F(z') = 0$, q.e.d.

El inverso de la proposición anterior no es cierto, pues puede tomarse una variedad de dimensión r en un espacio de dimensión mayor o igual a $2r+1$ de tal manera que la dimensión del espacio tangente de Zariski sea en cierto punto de V igual a la dimensión del espacio entero, mientras que el conjunto de puntos de secantes límites está siempre contenido en la variedad secante, cuya dimensión es no mayor que $2r+1$.

PROPOSICION 6. <u>Sea V^r una variedad y $\mathfrak{B}$ el conjunto algebraico de puntos singulares de V. Entonces $\bigcup_{(x)\in\mathfrak{B}} Z(x)$ está contenido en un conjunto algebraico de dimensión menor o igual a $r+d-1$, donde</u>

$$d = \max_{(x)\in V}(\dim Z(x)).$$

Sea k un campo de definición de V y $F_\alpha(X)=0$ un sistema de ecuaciones de V sobre k. Consideremos el sistema de ecuaciones en $k[X,A]$

$$(1)\qquad \begin{aligned} &F_\alpha(X) = 0 \\ &\sum \partial F_\alpha/\partial X_i\,(A_i - X_i) = 0 \end{aligned}$$

y el conjunto algebraico $\mathfrak{B}\times A^n$. Entonces existe un conjunto algebraico $\mathfrak{B}$ en $A^n\times A^n$ tal que un punto de $A^n\times A^n$ está en $\mathfrak{B}$ si y sólo si está en $\mathfrak{B}\times A^n$ y satisface al sistema de ecuaciones (1). $\bar{k}$ es un campo de definición de $\mathfrak{B}$. Sea $\mathfrak{B}'$ la proyección de

$\mathfrak{B}$ en el segundo factor de $A^n \times A^n$. Resulta inmediato de esta construcción que $\mathfrak{B}' \supset \bigcup_{(x)\in\mathfrak{B}} Z(x)$. Esto demuestra la primera parte de la proposición. Sea ahora U una componente de $\mathfrak{B}$ y $(\bar{x},\bar{a})$ un punto genérico de U sobre $\bar{k}$. Como $(\bar{x},\bar{a})$ está en $\mathfrak{B} \times A^n$, $(\bar{x})$ está en $\mathfrak{B}$, de donde $\dim_{\bar{k}}(\bar{x}) = \dim_k(\bar{x}) \leqslant r-1$. Como $\sum \partial F_\alpha/\partial \bar{x}_i(\bar{a}_i - \bar{x}_i) = 0$, $(\bar{a}) \in Z(\bar{x})$, de donde $\dim_{k(\bar{x})}(\bar{a}) = \dim_{\bar{k}(\bar{x})}(\bar{a}) \leqslant d$. Esto implica que $\dim_{\bar{k}}(\bar{x},\bar{a}) \leqslant r+d-1$, es decir, la dimensión de $\mathfrak{B}'$ es menor o igual a $r+d-1$.

Esta proposición es cierta también, desde luego, en el caso proyectivo. En el teorema que sigue no mencionaremos el espacio ambiente por ser cierto también en ambos casos.

TEOREMA 1. *Sea V^r una variedad de dimensión r definida sobre un campo k. Entonces existe un conjunto algebraico, definido sobre $\bar{k}$, de dimensión menor o igual al $\max(r+d-1, 2r+1)$, donde $d = \max_{(x)\in V}(\dim Z(x))$ y tal que contiene a todas las rectas secantes a V y a todos los espacios tangentes de Zariski $Z(x)$ a V.*

En efecto, si W es la variedad secante y $\mathfrak{B}'$ el conjunto algebraico definido en la proposición anterior, consideramos $W \cup \mathfrak{B}'$. Evidentemente, su dimensión es menor o igual al $\max(r+d-1, 2r+1)$. También es inmediato que contiene a todas las rectas se cantes a V, según la proposición 1. Sea (x) un punto de V y $Z(x)$ su espacio tangente de Zariski. Si (x) es simple, $Z(x)$ es la variedad lineal tangente a V en (x) que, según la proposición 2, está contenida en W. Finalmente, si (x) es un punto singular, $Z(x)$ está en $\mathfrak{B}'$ según la proposición 6, con lo que queda completamente demostrado el teorema.

Además, el número $\max(r+d-1,\ 2r+1)$ es el mínimo que puede tomarse para que el teorema sea cierto. En lo que respecta a la dimensión de W es claro que puede ser igual a $2r+1$. El ejemplo que se da a continuación demuestra que la dimensión de $\mathfrak{B}'$ puede ser igual a $r+d-1$.

Sean $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{r-1},\bar{t}$ variables independientes sobre k. Consideremos la variedad de Veronese U de punto genérico $(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{r-1},\ \bar{x}_i\bar{x}_j)$ sobre k y la curva C de punto genérico $(\bar{t}^s,\ \bar{t}^{s+1},\ldots,\bar{t}^{2s-1})$ sobre k. La variedad producto $C\times U$ es de dimensión r. U es una variedad sin singularidades por ser un modelo birracional birregular del espacio A^r. Como el único punto singular de C es el origen, es claro que el conjunto algebraico singular $\mathfrak{B}$ de $C\times U$ es el conjunto de puntos de $C\times U$ cuya proyección en C es el origen. Si P es un punto de $\mathfrak{B}$, tenemos $\dim Z(P) = s+r-1$ (debido a que la dimensión del espacio tangente de Zariski en el punto (0) de C es el espacio A^s entero). Así pues, la d del teorema es, en este ejemplo, $s+r-1$. Vamos ahora a demostrar que la dimensión de $\mathfrak{B}'$ es igual a la $\dim \bigcup_{P\in \mathfrak{B}} Z(P) = r+d-1 = r+(s+r-1)-1 = s+2r-2$. Como $X_{ij} - X_iX_j = 0$ es un sistema de ecuaciones de U, el sistema de ecuaciones del espacio tangente de Zariski en un punto $(0,\ldots,0, x_1,\ldots,x_{r-1}, x_ix_j)$ de $\mathfrak{B}$ será

$$(1) \qquad X_{ij} - X_ix_j - X_jx_i - x_ix_j = 0.$$

Entonces se trata de calcular la dimensión del conjunto de puntos $(T_1,\ldots,T_s, X_1,\ldots,X_{r-1}, X_{ij})$ tales que exista $(x_1,\ldots,x_r)$ tal que se satisfaga la relación (1). Sean (x), (y) dos conjuntos de $r-1$ variables algebraicamente independientes sobre k. $k(x,y) \supset k(y,y_{ij})$, donde $y_{ij} = y_ix_j + y_jx_i - x_ix_j$. El campo $k(x,y)$ es una extensión algebraica de $k(y,y_{ij})$ porque x_i satisface la relación $x_i^2 - 2x_iy_i + y_{ii} = 0$ y por lo tanto, $\dim_k(y,y_{ij}) = \dim_k(x,y) = 2r-2$. Así pues, si $t_1,\ldots,t_s$ son variables algebraicamente independientes sobre $k(y)$, la componente de $\mathfrak{B}'$ de punto genérico (t, y, y_{ij}) es de dimensión $s+2r-2 = r+d-1$, q.e.d.

4. PROYECCION Y BIRRACIONALIDAD.

TEOREMA 2. <u>Sea</u> V^r <u>una variedad de dimensión</u> r <u>en un espacio proyectivo definida sobre un campo</u> k. <u>Sea</u> $m = \max(r+d-1, 2r+1)$, <u>donde</u> d <u>es el máximo de las dimensiones de los espacios tangentes de Zariski a</u> V. <u>Entonces existe una correspondencia birracional birregular definida sobre</u> k *) <u>entre</u> V <u>y una variedad</u> V' <u>contenida en el espacio proyectivo de dimensión</u> m.

Supongamos que V^r está en el espacio proyectivo P^n y que $n > m$. El teorema se demostrará por inducción, demostrando la existencia de una variedad V', imagen birracional birregular de V y contenida en P^{n-1}.

Debido al teorema 1, existe un conjunto algebrai

---

*) O, en caso de que k tenga solamente un número finito de elementos, la correspondencia estará definida sobre una extensión finita k' de k.

co de dimensión menor o igual a $m < n$ que contiene a todas las rectas secantes a V y a todos los espacios tangentes de Zariski a V. Entonces existe un punto en el espacio proyectivo P^n el cual no pertenece a este conjunto algebraico (ver la nota de pie de página) y que, mediante una transformación proyectiva podemos suponer que es $(0,\ldots,0,1)$. Proyectamos V^r desde este punto al hiperplano $X_n = 0$. Sea V' la proyección de V^r en este P^{n-1}. Esta correspondencia tiene las propiedades siguientes:

a) <u>es biunívoca</u>, y

b) <u>ninguna recta proyectante está en los espacios tangentes de Zariski a</u> V.

Pasando ahora a coordenadas afines y a los modelos afines de V y V', si $(x_1,\ldots,x_n)$ es un punto genérico de V sobre k, $(x_1,\ldots,x_{n-1})$ es un punto genérico de V' sobre k. En esta sección demostraremos que la proyección establecida, debido a que cumple las propiedades a) y b), es una correspondencia birracional definida sobre k entre V y V'. Para ello bastará demostrar que

PROPOSICION 7. <u>Las condiciones</u> a) <u>y</u> b) <u>implican que</u> $k(x_1,\ldots,x_n)$ <u>es igual a</u> $k(x_1,\ldots,x_{n-1})$.

En primer lugar, $k(x_1,\ldots,x_n)$ <u>es una extensión</u>

algebraica de $k(x_1,\ldots,x_{n-1})$. Efectivamente, si x_n fuera trascendente sobre $k(x_1,\ldots,x_{n-1})$, siendo $t \neq x_n$ una variable sobre este último campo, tendríamos $k(x_1,\ldots,x_n) \cong k(x_1,\ldots,x_{n-1},t)$. Entonces $(x_1,\ldots,x_{n-1},t)$ sería una especialización genérica de (x) sobre k y por lo tanto un punto de V distinto de (x) y con la misma proyección que (x) en V', lo cual contradice la condición a).

$k(x_1,\ldots,x_n)$ es una extensión puramente inseparable de $k(x_1,\ldots,x_{n-1})$. En efecto, si no fuera puramente inseparable entonces el grado de separabilidad $[k(x_1,\ldots,x_n) : k(x_1,\ldots,x_{n-1})]_s$ sería distinto de uno y, por consiguiente, existiría al menos un conjugado x' de x_n, distinto de x_n, sobre $k(x_1,\ldots,x_{n-1})$. Entonces $k(x_1,\ldots,x_n)$ es isomorfo a $k(x_1,\ldots,x_{n-1},x')$, y el mismo razonamiento que se usó arriba conduce a la contradicción de la condición a).

Finalmente, $k(x_1,\ldots,x_n)$ es una extension separable de $k(x_1,\ldots,x_{n-1})$. Supongamos que no es así, o sea, que x_n no es separable sobre $k(x_1,\ldots,x_{n-1})$. Entonces existe una derivación D en $k(x_1,\ldots,x_n)$ sobre $k(x_1,\ldots,x_{n-1})$ (es decir, tal que $D(k(x_1,\ldots,x_{n-1}))=0$) y podemos elegir $Dx_n = 1$ ([8], Cap I, § 5).

Sea $F_\alpha(X) = 0$ $(1 \leqslant \alpha \leqslant h)$ un sistema de ecuaciones de V sobre k. Como $F_\alpha(x) = 0$, $DF_\alpha(x) = 0$ y ya que $DF_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \sum \partial F/\partial x_i \cdot Dx_i = \partial F_\alpha/\partial x_n$, resulta que $\partial F_\alpha/\partial x_n = 0$, $(1 \leqslant \alpha \leqslant h)$. Entonces, la matriz

$$\left\| \begin{array}{cccccc} \partial F_1/\partial x_1 & \partial F_1/\partial x_2 & \cdots\cdots & \partial F_1/\partial x_{n-1} & \partial F_1/\partial x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \partial F_h/\partial x_1 & \partial F_h/\partial x_2 & \cdots\cdots & \partial F_h/\partial x_{n-1} & \partial F_h/\partial x_n \\ 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{array} \right\|$$

es de rango $n - 1$, lo cual implica que la variedad lineal tangente a V^r en (x) contiene a la recta de ecuaciones $X_1 - x_1 = 0, \ldots, X_{n-1} - x_{n-1} = 0$, que es una recta proyectante. Esto contradice la condición b), con lo que queda demostrada la afirmación.

Las tres últimas afirmaciones demostradas prueban la proposición 7 ya que una extensión algebraica de un campo K que sea separable y puramente inseparable sobre K es igual a K.

5. BIRREGULARIDAD.

En esta sección demostraremos que la correspondencia birracional establecida mediante la proyección es birregular, es decir, que si P es un punto de V y P' su proyección en V', entonces los anillos locales $\mathfrak{o}$ y $\mathfrak{o}'$ de V y V' en P y P' respectivamente sobre un campo de definición k, son iguales. Evidentemente, puede suponerse que P y P' son los orígenes de A^n y A^{n-1} respectivamente. Entonces si $(x_1,\dots,x_n)$ es un punto genérico de V sobre k,

$$\mathfrak{o} = k[x_1,\dots,x_n]_{(x_1,\dots,x_n)} ,$$

$$\mathfrak{o}' = k[x_1,\dots,x_{n-1}]_{(x_1,\dots,x_{n-1})} .$$

Es claro que $\mathfrak{o}'$ es un subanillo de $\mathfrak{o}$ y si $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{m}'$ son los ideales máximos de $\mathfrak{o}$ y $\mathfrak{o}'$ respectivamente, se tiene $\mathfrak{m} = \mathfrak{o}x_1 + \cdots + \mathfrak{o}x_n$ y $\mathfrak{m}' = \mathfrak{o}'x_1 + \cdots + \mathfrak{o}'x_{n-1}$, y también $\mathfrak{m}' \subset \mathfrak{m}$.

LEMA 6. *Si la recta de ecuaciones* $X_1 = 0,\dots,X_{n-1} = 0$ *no está en el espacio tangente de Zariski a* V *en el origen, entonces* $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'\mathfrak{o}$.

Como el punto $(0,\dots,0,x_n)$ está en dicha recta, este punto no pertenece al espacio tangente de Zariski a V en el origen y, por consiguiente, existen $d_1,\dots,d_n$ en k tales que $d_1\cdot 0+\dots+d_{n-1}\cdot 0+d_nx_n \neq 0$ y $\sum_{i=1}^{n} d_ix_i \in \mathfrak{m}^2$. De aquí resulta que $d_n \neq 0$, y como $\sum_{i=1}^{n-1} d_ix_i \in \mathfrak{m}'$, se sigue que $d_nx_n \in \mathfrak{o}\mathfrak{m}'+\mathfrak{m}^2$, de donde, $x_n \in \mathfrak{o}\mathfrak{m}' + \mathfrak{m}^2$. Esto implica evidentemente que $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{o}\mathfrak{m}' + \mathfrak{m}^2$ y por inducción $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{o}\mathfrak{m}' + \mathfrak{m}^n$ para toda n, de donde, $\mathfrak{m} \subset \bigcap_n (\mathfrak{o}\mathfrak{m}' + \mathfrak{m}^n)$. Es decir, $\mathfrak{m} = \mathfrak{o}\mathfrak{m}'$.

LEMA 7. *Si el punto al infinito en el eje* OX_n *no está en* V, *entonces* x_n *es entero sobre el anillo* $k[x_1,\dots,x_{n-1}]$ (y, por consiguiente, sobre $\mathfrak{o}'$).

Debido a nuestra suposición de que el punto de coordenadas homogéneas $(0,\dots,0,1)$ no está en V, existe una forma $F(X_0,\dots,X_n)$ del ideal homogéneo de V tal que $F(0,\dots,0,1) \neq 0$, y por consiguiente, si $\xi_i = x_i/x_0$, (ξ) es un punto de V, de lo cual se sigue que $\xi_n^d + F_1(\xi_0,\ldots,\xi_{n-1})\,\xi_n^{d-1} + \cdots = 0$, es decir, $x_n^d + F_1(1,x_1,\ldots,x_{n-1})\,x_n^{d-1} + \cdots = 0$, q.e.d.

Así pues, como en nuestro caso, debido a la forma en que se ha establecido la proyección, se cumplen las condiciones de los lemas anteriores, tenemos $\mathfrak{m} = \mathfrak{o}\,\mathfrak{m}'$ y x_n es entero sobre $\mathfrak{o}'$.

Debido a esta última propiedad, el anillo $\mathfrak{o}'[x_n]$ es un $\mathfrak{o}'$-módulo finito. Como $\mathfrak{o}'$ es local, el anillo $\mathfrak{o}'[x_n]$ es semilocal, [2] y si $\mathfrak{m}_1,\ldots,\mathfrak{m}_h$ son los ideales máximos de este anillo semilocal, $\mathfrak{m}_i \cap \mathfrak{o}' = \mathfrak{m}'$. Sea $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{m}_i \cap k[x_1,\ldots,x_n]$. Entonces

$$\mathfrak{p}_i \cap k[x_1,\ldots,x_{n-1}] = \mathfrak{m}_i \cap k[x_1,\ldots,x_{n-1}] =$$
$$= \mathfrak{m}' \cap k[x_1,\ldots,x_{n-1}] = (x_1,\ldots,x_{n-1})$$

(ideal generado en $k[x_1,\ldots,x_{n-1}]$), que es un ideal máximo (el del origen). Así pues, $\mathfrak{p}_i$ es evidentemente primo, $\mathfrak{p}_i \cap k[x_1,\ldots,x_{n-1}]$ es máximo y $k[x_1,\ldots,x_n]$ es entero sobre $k[x_1,\ldots,x_{n-1}]$. Esto implica, [6] que $\mathfrak{p}_i$ es un ideal máximo de $k[x_1,\ldots,x_n]$ y, por consiguiente, es el ideal de un punto P_i de V que, como $\mathfrak{p}_i \cap k[x_1,\ldots,x_{n-1}] = (x_1,\ldots,x_{n-1})$ = ideal del origen de A^{n-1}, P_i se proyecta en el origen.

Por otro lado, tenemos que

$$\mathfrak{o}'[x_n]_{\mathfrak{m}_i} = k[x_1,\ldots,x_n]_{\mathfrak{p}_i}.$$

En efecto, $\mathfrak{o}'[x_n] \supset k[x_1,\dots,x_n]$, y debido a que $\mathfrak{m}_i \cap k[x_1,\dots,x_n] = \mathfrak{p}_i$, $k[x]_{\mathfrak{p}_i} \subset \mathfrak{o}'[x_n]_{\mathfrak{m}_i}$. Inversamente, como $k[x]_{\mathfrak{p}_i} \supset \mathfrak{o}'[x_n]$ y $\mathfrak{p}_i k[x]_{\mathfrak{p}_i} \cap \mathfrak{o}'[x_n] = \mathfrak{m}_i$ tenemos que $k[x]_{\mathfrak{p}_i} \supset \mathfrak{o}'[x_n]_{\mathfrak{m}_i}$, q.e.d.

Así pues, $\mathfrak{o}'[x_n]_{\mathfrak{m}_i} = k[x]_{\mathfrak{p}_i}$ *es el anillo local de un punto* P_i *tal que se proyecta en el origen de* A^{n-1}.

Como en nuestro caso la proyección es biunívoca, $h = 1$, es decir, $\mathfrak{o}'[x_n]$ es local y, por consiguiente $\mathfrak{o}'[x_n] = \mathfrak{o}'[x_n]_{\mathfrak{m}_1}$ el cual es igual al anillo local del punto que se proyecta en el origen de A^{n-1}, es decir, al anillo local $\mathfrak{o}$. Como $\mathfrak{o}'[x_n]$ es un $\mathfrak{o}'$-módulo finito, hemos demostrado que $\mathfrak{o}$ *es un* $\mathfrak{o}'$-*módulo finito* y, por consiguiente (ver [6]), $\mathfrak{o}'$ *es un subespacio topológico de* $\mathfrak{o}$.

Como $\mathfrak{o}/\mathfrak{m} = \mathfrak{o}'/\mathfrak{m}'$, tenemos $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}' + \mathfrak{m} = \mathfrak{o}' + \mathfrak{o}\mathfrak{m}' = \mathfrak{o}' + (\mathfrak{o}' + \mathfrak{o}\mathfrak{m}')\mathfrak{m}' = \mathfrak{o}' + \mathfrak{o}\mathfrak{m}'^2 = \dots = \mathfrak{o}' + \mathfrak{o}\mathfrak{m}'^n = \mathfrak{o}' + \mathfrak{m}^n$ para toda n. De aquí, $\mathfrak{o} = \bigcap(\mathfrak{o}' + \mathfrak{m}^n)$, y por el teorema de Krull extendido a módulos, como $\mathfrak{o}'$ es subespacio de $\mathfrak{o}$, $\bigcap(\mathfrak{o}' + \mathfrak{m}^n) = \mathfrak{o}'$, de donde, $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}'$, con lo que queda demostrada la birregularidad.

6. UN CASO PARTICULAR.

Aplicando el teorema 2 a una variedad sin singularidades, obtenemos el siguiente resultado:

TEOREMA 3. Sea V^r una variedad sin singularidades en un espacio proyectivo y k un campo de definición de V. Entonces existe una correspondencia birracional birregular definida sobre k (o sobre una extensión finita de k, si éste tiene sólo un número finito de elementos) entre V y una variedad V' sumergida en el espacio proyectivo de dimensión 2r + 1.

7. NOTA COMPLEMENTARIA.

Al estudiar el cono de tangentes (o conjunto algebraico de puntos de secantes límites) surgió la idea de comparar el número de componentes del cono de tangentes en un punto de una variedad, con el número de ramas analíticas *) de la variedad en el mismo punto. Los ejemplos que damos a continuación, nos indican que el primero puede ser igual, mayor o menor que el segundo.

a). En un punto simple de una curva irreducible del plano complejo hay una sola rama y el cono de tangentes es igual a la recta tangente que es irreducible, es decir, en este caso los dos números son 1.

b). En el plano complejo, la curva de ecuación:

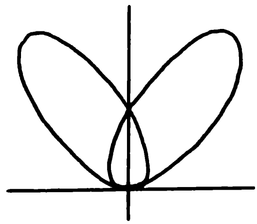
$$2X^4 - 3X^2Y + Y^2 - 2Y^3 + Y^4 = 0,$$

(ver la figura en la pag. siguiente) tiene dos ramas en el origen. Por otro lado, el cono de tangentes al

---

*) D. G. Northcott. The number of analytic branches of a variety. J. London Math. Soc., Vol 25 (1950).

ser irreducible tiene una sola componente; es irreducible porque está definido por el ideal (Y^2) que es primario.



c). Consideremos la superficie de ecuación

$$X^2 + Y^2 + Z^3 = 0,$$

en el espacio tridimensional sobre los complejos. Demostraremos primero que es analíticamente irreducible en el origen, es decir, que tiene una sola rama analítica; en efecto, si $X^2 + Y^2 + Z^3$ fuera igual al producto $(aX + bY + cZ + F_2(X,Y,Z) + F_3(X,Y,Z) + \dots)$ $(a'X + b'Y + c'Z + F_2'(X,Y,Z) + F_3'(X,Y,Z) + \dots)$, donde las F_i son formas homogéneas de grado i, entonces $aa' = 1$, $bb' = 1$, $cc' = 0$, $ab' + a'b = 0$, $ac' + a'c = 0$, $bc' + b'c = 0$. De estas igualdades se ve fácilmente que $c = c' = 0$. Por lo tanto, como la forma de tercer grado del producto de estas dos series es $(aX + bY)\cdot F_2'(X,Y,Z) + (a'X + b'Y)\cdot F_2(X,Y,Z)$, vemos que el coeficiente de Z^3 en el producto de las dos series es igual a cero. Esto contradice la descomposición supuesta.

Por otro lado, el cono de tangentes tiene por ecuación a $X^2 + Y^2 = 0$, y por lo tanto es reducible, siendo sus componentes las dos rectas $X + iY = 0$, y $X - iY = 0$. Es decir, en este tercer ejemplo <u>el número de componentes del cono de tangentes es mayor que el número de ramas analíticas</u>.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. Chevalley. On the theory of local rings, Ann. of Math., vol. 44 (1943).

[2] C. Chevalley. Intersections of algebraic and algebroid varieties, Trans.Am.Math. Soc., vol. 57 (1945).

[3] S. Lefschetz. Algebraic Geometry, Princeton Un. Press (1953).

[4] P. Samuel. La notion de multiplicité..., J. Math.Pures et Appl. (1951).

[5] P. Samuel. Singularités des varietés algébriques, Bull.Soc.Math. de France, (1951)

[6] P. Samuel. Commutative algebra, Notes, Cornell Univ. (1953).

[7] P. Samuel. Algèbre locale, Gauthier-Villars, Mém. Sc. Math. (1953).

[8] A. Weil. Foundations of algebraic geometry A.M.S., Coll. Publ. (1946).

[9] O. Zariski. Found. of a general theory of birrational corr., Trans.Am.M. Soc., vol 53 (1943).

[10] O. Zariski. The concept of a simple point,..., Trans.Am.Math.Soc., vol62 (1947).

I N D I C E