



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

V A R I E D A D E S

M I N I M A S

1985

de grado.
TESIS PROFESIONAL

Que Para Obtener el Título de
MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

p r e s e n t a :

JAVIER ELIZONDO

ELIZONDO HUERTA ENRIQUE JAVIER.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PARA ALICIA Y
MIS PADRES.

QUISIERA AGRADECER A SANTIAGO LÓPEZ DE MEDRANO, ALBERTO VERJOVSKY
Y AL DR. GUILLERMO TORRES POR LA PACIENCIA QUE ME TUVIERON Y SUS
INVALUABLES CONSEJOS.

QUISIERA TAMBIÉN AGRADECER LA GRAN AYUDA QUE ME DIÓ MI AMIGO
JESÚS MUCIÑO.

I N D I C E

CAPÍTULO I: SUBVARIEDADES MÍNIMAS

- 1) CONVENCIONES Y DEFINICIONES
- 2) PRIMERA FORMULA VARIACIONAL Y DEFINICION DE VARIEDAD MINIMA
- 3) SUBVARIEDADES MINIMAS EN EL ESPACIO EUCLIDEANO
- 4) SUBVARIEDADES MINIMAS EN LA ESFERA EUCLIDEANA

CAPÍTULO II: EL PROBLEMA DE PLATEAU

- 1) LA SOLUCION DE DOUGLAS-RADO
- 2) LA REGULARIDAD DE LA SOLUCION EN EL INTERIOR DEL DISCO
- 3) LA REGULARIDAD DE LA SOLUCION EN LA FRONTERA

CAPÍTULO III: SUPERFICIES MÍNIMAS COMPACTAS EN S^3

EXISTENCIA DE UNA SUPERFICIE MINIMA, COMPACTA Y ORIENTABLE EN S^3 DE GENERO ARBITRARIO

CAPITULO I: SUBVARIETADES MÍNIMAS.

1) CONVENCIONES Y DEFINICIONES

Sea M una variedad Riemanniana, por una subvariedad de M nosotros entendemos una inmersión $\varphi: N \rightarrow M$ donde N es variedad diferenciable y N tiene la métrica inducida por φ . Por el teorema de la función implícita sabemos que localmente φ es encaje, siempre que trabajemos con propiedades locales supondremos esto.

Sea \bar{M} una \bar{m} -variedad Riemanniana y $M \subset \bar{M}$ una subvariedad de dimensión m . Denotemos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la métrica en \bar{M} y la conexión Riemanniana en \bar{M} por $\bar{\nabla}$. Para cualquier punto $P \in M$ nosotros tenemos que $T_P(\bar{M}) = T_P(M) \oplus N_P(M)$ donde $T_P M$ es el espacio tangente a M en P y $N_P(M)$ el espacio normal. Sean $X, Y \in \chi_P$ donde χ_P es el conjunto de campos vectoriales de M cada uno de los cuales está definido en una vecindad de P en M .

La única conexión Riemanniana ∇ en M es

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^T$$

De manera análoga definimos un campo de vectores normales a M en P por

$$B_{X,Y} = (\bar{\nabla}_X Y)^N \quad \text{observando que}$$

$$(\bar{\nabla}_X Y)^N = (\bar{\nabla}_Y X + \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X)^N = (\bar{\nabla}_Y X + [X, Y])^N = (\bar{\nabla}_Y X)^N$$

obtenemos que $B_{X,Y} = B_{Y,X}$ y $B_{X,Y}$ en P depende sólo de

X_P y de Y_P y no de la elección de los campos locales X y Y , esto último se debe a propiedades de la conexión. A B le

llamamos la Segunda Forma Fundamental de la subvariedad M . En

cada punto P , B_P es una transformación bilineal y simétrica de $T_P M \times T_P M$ a $N_P M$. En base a esto definimos $K_P = \text{traza de } B_P$. Para cada P , K es un campo suave de vectores normales en M lo llamaremos el campo vectorial curvatura media. Localmente, si $E_1, \dots, E_m \in \chi_P$ son campos ortonormales entonces

$$K_P = \sum_{k=1}^m (\bar{\nabla}_{E_k} E_k)^N \quad \text{en una vecindad de } P.$$

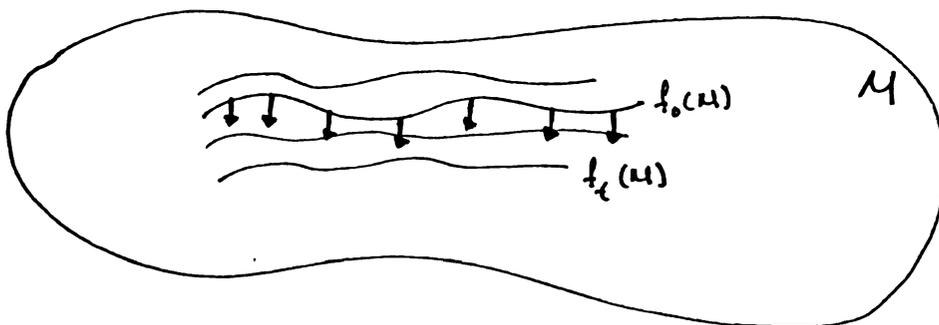
2) LA PRIMERA FORMULA VARIACIONAL; DEFINICION DE VARIEDAD MINIMA

Trataremos primero de dar una interpretación intuitiva del campo vectorial curvatura media.

El vector curvatura media es, gruesamente hablando, menos el gradiente de la función área en el espacio de inmersiones, $I(M, \bar{M})$ de M en \bar{M} .

Por ejemplo, supongamos que M es compacto, entonces $I(M, \bar{M})$ tiene naturalmente una estructura de una C^∞ -variedad (infinita-dimensional) para cada $f \in I(M, \bar{M})$ es espacio tangente corresponde al conjunto de $T(\bar{M})$ -campos de vectores valuados a lo largo de f . Una curva suave f_t en $I(M, \bar{M})$ con $f_0 = f$ corresponde a una variación suave de f , y el vector tangente $\left. \frac{df}{dt} \right|_{t=0}$ corresponde

al campo vectorial de variación



El producto interior en el espacio tangente a $I(M, \bar{M})$ en f está dado por integrar el producto interior de los campos de variaciones en \bar{M} sobre $f_0(M)$ (es decir, en M con la métrica inducida por f_0). Para cada $f \in I(M, \bar{M})$ definimos a $A(f)$ como el volumen de M en la métrica inducida por f . Entonces para cada $f \in I(M, \bar{M})$ nosotros esperamos que $-(\nabla A)_f$ sea el campo de vectores curvatura media de la inmersión. Esto significa que deformando f a lo largo del campo K decrece el área de M más rápidamente. Pero vamos a demostrar algo todavía más fuerte, si deformamos f a lo largo de otro campo E , la rapidez de cambio (infinitesimal) de A en f está dado por el producto interior de E con $-K$ (es decir, $(E \cdot A)_f = -\langle E, K \rangle_f = \langle E, \nabla A \rangle_f$) ahora, formalicemos lo dicho anteriormente.

Sea \bar{M} una variedad Riemanniana y sea $f: M \rightarrow \bar{M}$ una inmersión donde M es una variedad orientada compacta con frontera ∂M (posiblemente vacía).

Definición

Por una variación suave de f nosotros entendemos una C^∞ -mapeo $F: I \times M \rightarrow \bar{M}$, donde $I = (-1, 1)$, tal que:

- a) cada mapeo $f_t = F(t, \cdot): M \rightarrow \bar{M}$ es una inmersión
- b) $f_0 = f$
- c) $f_t|_{\partial M} = f|_{\partial M}$ para toda $t \in I$

Sea $\partial/\partial t$ el vector canónica a lo largo de I en $I \times M$. Y pongamos $E = F_* \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0}$. E es considerado como una sección de $TM \oplus NM$.

Finalmente, sea $A(t)$ el volumen de M en el

tiempo t , es decir sea dV_t el elemento de volumen con la métrica inducida por f_t y pongamos $A(t) = \int_M dV_t$ entonces

TEOREMA 1 (La primera fórmula variacional)

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_{t=0} = - \int_M \langle K, E \rangle dV_0$$

Den

Observemos que $\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} \int_M dV_t = \int_M \frac{d}{dt} dV_t$

Demostremos que $\left. \frac{d}{dt} dV_t \right|_{t=0} = - \langle K, E \rangle dV_0 + d\Omega$

donde Ω es una $(m-1)$ -forma en M tal que $\Omega|_{\partial M} = 0$.

Sea ω la 1-forma en M dada por $\omega(X) = \langle E, X \rangle$ para campos vectoriales tangentes X en M . Entonces definimos Ω como

$$\Omega = *\omega \quad \text{y como } E|_{\partial M} = 0 \text{ tenemos que } \Omega|_{\partial M} = 0.$$

Sea $P \in M$ y escogemos $E_1, \dots, E_m \in \chi_P$ tal que:

- 1) E_1, \dots, E_m son ortonormales en la métrica inducida por f_0
- 2) $(\nabla_{E_i} E_j)_P = (\bar{\nabla}_{f_{0*} E_i} f_{0*} E_j)_{f(P)}^T = 0 \quad \forall i, j.$

Sea $\omega_1, \dots, \omega_m$ las 1-formas duales a E_1, \dots, E_m entonces la métrica inducida por f_t puede ser escrita como

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^m g_{ij}(t) \omega_i \otimes \omega_j \quad \text{donde } g_{ij}(t) = \langle f_{t*} E_i, f_{t*} E_j \rangle$$

de esta forma obtenemos $dV_t = \sqrt{g(t)} \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_m = \sqrt{g(t)} dV_0$

donde $g(t) = \det((g_{ij}(t)))$ y en el punto P tenemos

$$\frac{d}{dt} dv_t \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \sqrt{g(t)} \Big|_{t=0} dv_0 = \frac{1}{2} \frac{dg}{dt} (0) dv_0 \quad \text{utilizando el lema}$$

1 (al final de la demostración) obtenemos que

$$\frac{d}{dt} dv_t \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} \frac{dg}{dt} (0) dv_0 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{dg_{kk}}{dt} (0) dv_0$$

ahora extendemos E_1, \dots, E_m en $I \times (\text{vecindad de } P) \subset I \times M$ en la manera usual y observemos que $[\frac{\partial}{\partial t}, E_K] = 0$ para $k=1, \dots, m$.

Sea $\tilde{E}, \tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_m$ las imágenes de esos campos vectoriales por F . Entonces $g_{kk}(t) = \langle f_{t*} E_K, f_{t*} E_K \rangle = \langle \tilde{E}_K, \tilde{E}_K \rangle$ en $F(t, P)$

$$\begin{aligned} \text{y } \frac{dg_{kk}}{dt}(t) &= \tilde{E} \langle \tilde{E}_K, \tilde{E}_K \rangle = 2 \langle \tilde{\nabla}_{\tilde{E}} \tilde{E}_K, \tilde{E}_K \rangle = 2 \langle \tilde{\nabla}_{\tilde{E}_K} \tilde{E}, \tilde{E}_K \rangle = \\ &= 2 [\tilde{E}_K \langle \tilde{E}, \tilde{E}_K \rangle - \langle \tilde{E}, \tilde{\nabla}_{\tilde{E}_K} \tilde{E}_K \rangle] = \end{aligned}$$

$$\text{de aquí } \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} \frac{dg_{kk}}{dt} (0) = - \langle E, K \rangle + \sum_{k=1}^m E_K \langle E, E_K \rangle$$

falta demostrar que $\sum_{k=1}^m E_K \langle E, E_K \rangle = d\Omega$. Esto se logra con algu-

nas hojas más de cálculos y observando que $\omega = \sum_k \langle E, E_K \rangle \omega_K$ y

$$*\omega = \Omega = \sum_{K=1}^m (-1)^{k+1} \langle E, E_K \rangle \omega_1 \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_K \wedge \dots \wedge \omega_m \quad \text{sin embargo lo importan}$$

te que hay que notar para demostrar el teorema es que por el teo-

rema de Stokes tenemos que $\int_M d\Omega = \int_{\partial M} \Omega = 0$ ya que $\Omega|_{\partial M} = 0$ y

por lo tanto

$$\frac{dA}{dt} \Big|_{t=0} = - \int_M \langle K, E \rangle dv_0$$

LEMA 1

Sea $A(t) = (a_{ij}(t))$ una familia suave de $m \times m$ matrices tal

que $A(0) = \text{identidad}$ entonces

$$\left. \frac{d}{dt} \det(A(t)) \right|_{t=0} = \text{traza}(A'(0)).$$

Dem

Cada $A(t)$ puede ser considerada como la matriz de una transformación lineal $A(t): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ con respecto a la base canónica $\{e_1, \dots, e_m\}$. Sea ω una m -forma alternante en \mathbb{R}^m tal que $\omega(e_1, \dots, e_m) = 1$. Entonces $\det(A(t)) = \omega(A(t)e_1, \dots, A(t)e_m)$ y

$$\left. \frac{d}{dt} \det(A(t)) \right|_{t=0} = \left. \sum_{k=1}^m \omega(A(t)e_1, \dots, A'(t)e_k, \dots, A(t)e_m) \right|_{t=0} = \sum_{k=1}^m \omega(e_1, \dots, A'(0)e_k, \dots, e_m) = \sum_{k=1}^m A'_{kk}(0) = \text{traza}(A'(0)).$$

OBSERVACION

Si restringimos la variación anterior a ser normal, esto es, si pedimos que E sea normal a la inmersión entonces $\omega \equiv 0$ y la fórmula permanece válida sin condiciones en la frontera.

El teorema anterior demuestra que K es el gradiente de la función área. La ecuación $K = 0$ son simplemente las ecuaciones de Euler-Lagrange para la variación del área. Una inmersión satisfaciendo la condición $K = 0$ será llamada una inmersión mínima o subvariedad mínima.

3) SUBVARIETADES MINIMAS EN EL ESPACIO EUCLIDEANO

Sea M una m -variedad Riemanniana y conexa, el operador de Laplace-Beltrami en M es la transformación $\Delta: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$

definida en la forma siguiente.

Sea $P \in M$ y $f \in C^\infty(M)$; entonces si $E_1 \dots E_m \in \chi_P$ son ortonormales entonces

$$\Delta f = \sum_{k=1}^m [E_k E_k f - (\nabla_{E_k} E_k) f]. \text{ en una vecindad de } P.$$

no es difícil ver que en un sistema de coordenadas (x^1, \dots, x^m) tenemos que

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} \cdot g^{ij}) \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

donde la métrica es $ds^2 = \sum g_{ij} dx^i dx^j$, $(g^{ij}) = (g_{kl})^{-1}$ y $g = \det (g_{ij})$.

Sea \mathbb{R}^n el espacio de las n -éadas (x_1, \dots, x_n) con la métrica usual $ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2$. identificamos para cada $P \in \mathbb{R}^n$

$T_P \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$, por traslación, entonces

PROPOSICION

Sea $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ una inmersión isométrica y sea K el vector curvatura media de ψ . Entonces $\Delta \psi = K$ donde

$$\Delta \psi = (\Delta \psi_1, \dots, \Delta \psi_n).$$

Dem

Sean $P \in M$ y $E_1, \dots, E_m \in \chi_P$ una base ortonormal en una vecindad de P . Entonces para cada K tenemos que $E_K \psi = E_K$ y $E_K E_K \psi = \bar{\nabla}_{E_K} E_K$ donde $\bar{\nabla}$ denota la conexión euclideana. Por lo tanto,

$$\nabla f = \sum_K [E_K E_K \psi - (\nabla_{E_K} E_K) \psi] = \sum_K [\bar{\nabla}_{E_K} E_K - \nabla_{E_K} E_K] = \sum_K (\bar{\nabla}_{E_K} E_K)^N = K$$

COROLARIO 1

Sea $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ una inmersión isométrica, entonces ψ es mínima si y sólo si ψ es armónica.

Antes de ver el Corolario 2 veamos unas definiciones. Para cada par de vectores $v, \omega \in \mathbb{R}^n$ definimos

$$H_{v, \omega} = \{v + x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \omega \rangle \geq 0\}.$$

Para cualquier subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, la cerradura convexa de X es el conjunto

$$C(X) = \bigcap \{H_{v, \omega} \mid v, \omega \in \mathbb{R}^n \text{ y } X \subset H_{v, \omega}\}.$$

Supongamos que $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una inmersión isométrica mínima y para cada $v, \omega \in \mathbb{R}^n$ consideramos la función $f_{v, \omega}: M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_{v, \omega}(x) = \langle \psi(x) - v, \omega \rangle$, por corolario 1 esta función es armónica. Aplicando el principio del mínimo obtenemos

COROLARIO 2

Sea $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ una inmersión mínima donde M es compacta. Entonces si $M^\circ = M - \partial M$ tenemos que $\psi(M) \subset C[\psi(\partial M)]$ y si $\psi(M)$ no está en un subespacio afín propio, $\psi(M^\circ) \subset C[\psi(\partial M)]^\circ$. En particular, si M es compacta sin frontera no hay una inmersión mínima de M en \mathbb{R}^n .

Antes de ver unos ejemplos veamos el siguiente teorema.

TEOREMA

Si $\psi: V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ es una inmersión conforme de un abierto V en \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^k , entonces $\Delta\psi = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \psi_K}{\partial x_i^2} = 0$

Den

$$\Delta\psi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial X_i} (\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial\psi}{\partial X_j}) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2\psi}{\partial X_i^2} = \frac{1}{\lambda n} \frac{\partial^2\psi}{\partial X_i^2} \quad l=1, \dots, K$$

ya que como ψ es conforme tenemos

$$g^{ij} = 0 \quad i \neq j \quad \text{y} \quad g^{ji} = \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{donde} \quad g_{kl} = 0 \quad k \neq l \quad \text{y} \quad g_{ll} =$$

EJEMPLOS

1) Superficie mínima de enneper en \mathbb{R}^3

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(u,v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, \quad v - \frac{v^3}{3} + vu^2, \quad u^2 - v^2)$$

f es inmersión y es conforme $g_{11} = g_{22} = (1+u^2+v^2)^2 = (\lambda(u,v))^2$

$$\Delta f = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) = 0$$

2) Catenóide

$$f(u,v) = a(\cos h(v) \cos u, \quad \cos h(v) \sin u, \quad v)$$

3) Helicoide

$$f(u,v) = a(\cos h(v) \cos u, \quad \cos h(v) \sin u, \quad u)$$

2 y 3 se demuestran igual que 1.

4) SUBVARIETADES MINIMAS EN LA ESFERA EUCLIDEANA

Sea $\bar{M} \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad encajada, y para cualquier $P \in \bar{M}$ y $X \in T_P(\mathbb{R}^n)$ sea X^T la proyección ortonormal de X en $T_P \bar{M}$.

Supongamos que $\psi: M \rightarrow \bar{M} \subset \mathbb{R}^n$ es una inmersión con curvatura media K en \bar{M} y K^* en \mathbb{R}^n . Entonces

$K = (K^*)^T = (\Delta\psi)^T$ ya que $K = \sum (\bar{\nabla}_{E_K} E_K)^N = \sum [(\nabla_{E_K}^* E_K)^T]^N =$
 $= (\sum (\nabla_{E_K}^* E_K)^N)^T = (K^*)^T$ donde $\bar{\nabla}, \nabla^*$ son las conexiones en \bar{M}
 y R^n respectivamente si $\bar{M} = S^n = \{X \in R^{n+1} \mid |X| = 1\}$ tenemos

PROPOSICION

Sea M una m -variedad Riemanniana y se $\psi: M \rightarrow S^n \subset R^{n+1}$ una
 inmersión isométrica, entonces ψ es una inmersión mínima en
 S^n si y sólo si $\Delta\psi = -m\psi$.

Dem

Primero demostraremos un lema

Sea $f \in C^\infty(M)$ entonces $\frac{1}{2} \Delta f^2 = f \Delta f + |\Delta f|^2$ donde localmente
 $(\nabla f)^2 = \sum_{K=1}^m (E_K f)^2$ para campos de vectores ortonormales

Dem. del lema

Sea $P \in M$ y escojamos un campo de vectores ortonormales
 E_1, \dots, E_m de tal forma que $(\nabla_{E_i} E_j)_P = 0 \quad \forall i, j$. Entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \Delta f^2(P) &= \frac{1}{2} \sum_K E_K E_K f^2(P) = \sum E_K (f E_K f)(P) = \sum [f E_K E_K f(P) + \\
 &+ E_K f)^2(P)] = f \Delta f(P) + |\nabla f|^2(P).
 \end{aligned}$$

DEM. DEL TEOREMA

ψ es mínima si $0 = K = (\Delta\psi)^T$ y esto último si y sólo si
 $\Delta\psi = \lambda\psi$, $\lambda \in C^\infty(M)$ es decir si $\Delta\psi$ es paralela a la normal
 S^n en $\psi(P)$.

Entonces por el lema y la condición $|\psi|^2 = 1$. Tenemos que si

$$\Delta\psi = \lambda\psi \quad \text{entonces} \quad 0 = \frac{1}{2} \Delta|\psi|^2 = \langle \psi, \Delta\psi \rangle + |\nabla\psi|^2 = \lambda|\psi|^2 + |\nabla\psi|^2 =$$

$$= \lambda + |\nabla\psi|^2 \quad \text{por lo tanto} \quad \lambda = -|\nabla\psi|^2 = -\sum_K \langle E_K \psi, E_K \psi \rangle = -\sum_K |\psi_* E_K|^2 = -m.$$

PROPOSICION (T.TAKAHASHI)

Sea M una m -variedad Riemanniana y $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ una inmersión isométrica tal que $\Delta\psi = -\lambda\psi$ para alguna constante $\lambda \neq 0$.

Entonces

- a) $\lambda > 0$
- b) $\psi(M) \subset S^n(r)$ donde $r^2 = \frac{m}{\lambda}$
- c) La inmersión $\psi: M \rightarrow S^n(r)$ es mínima

Dem

De la última proposición tenemos que $\Delta\psi = -\lambda\psi$, y por lo tanto en cualquier punto $P \in M$ el vector $\psi(P)$ es normal a la inmersión. De esto, tenemos que para cualquier campo vectorial tangente X en M tenemos $X \langle \psi, \psi \rangle = 2 \langle X \psi, \psi \rangle = 2 \langle \psi_* X, \psi \rangle (= 2 \langle X, \psi \rangle) = 0$ y por tanto $|\psi|^2 = \text{constante} = r^2$. Entonces como antes

$$0 = \frac{1}{2} \Delta|\psi|^2 = \langle \psi, \Delta\psi \rangle + |\nabla\psi|^2 = -\lambda r^2 + m \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{m}{r^2} > 0. \quad \text{La minimalidad se deduce de} \quad K = (\Delta\psi)^T = (-\lambda\psi)^T = 0.$$

EJEMPLO (Toro de Clifford)

Sea $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la inmersión dada por $f(t) = (\cos t, \sin t)$, consideremos la inmersión producto $f \times f: T^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$
 $f(t, s) = (\cos t, \sin t, \cos s, \sin s)$.

Como la métrica inducida es $g_{11} = g_{22} = 1 \quad g_{12} = 0$ tenemos que

$$\Delta(f \times f) = (-\cos t, -\sin t, -\cos s, -\sin s) = -f \times f \Rightarrow$$

$$\Delta(f \times f) + f \times f = 0$$

Por la última proposición tenemos que $f \times f (T^2) \subset S_{\sqrt{2}}^3$ es mínima.

CAPITULO II: EL PROBLEMA DE PLATEAU

1) LA SOLUCION DE DOUGLAS-RADO

El problema, gruesamente hablando, puede ser formulado de la siguiente manera: dada una curva de Jordan Γ en \mathbb{R}^n , hay que encontrar una superficie en \mathbb{R}^n de menor área teniendo Γ como frontera. El problema se complica al ver que Γ puede tener varios tipos topológicos. Más aún, pueden existir superficies mínimas de diferentes tipos topológicos con una misma Γ como frontera (sólo una de ellas representa un mínimo absoluto en el área.

Nosotros nos restringimos a superficies homeomorfas a un disco y Γ una curva de Jordan, es decir, un subconjunto homeomorfo a un círculo. Nuestras superficies serán inmersiones de una dos variedad en \mathbb{R}^n .

Empezemos, no tenemos de otra, con algunas definiciones. Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ una curva de Jordan y $\Delta = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \mid X^2 + Y^2 \leq 1\}$. Una transformación $\psi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ es llamado C^1 por piezas si, excepto a lo largo $\partial\Delta$ y un número finito de C^1 -arcos y puntos en Δ° , ψ es de clase C^1 .

El problema de Plateau para Γ_g es el semidisco que está contenido en el plano (X_2, X_3) con frontera Γ_g , al reflejar obtenemos todo el plano (X_2, X_3) y este es una hiperesfera geodésica en S^3 .

Sea X un subconjunto de S^3 , la cerradura convexa de S^3 es $C(X) = \bigcap_{H \in H_X} H$.

Donde H_X es el conjunto de hemisferios cerrados de S^3 que contienen a X . En la demostración del teorema usaremos algunos de los teoremas, generalizados a S^3 , que hemos demostrado en R^n . Las demostraciones de ellos en S^3 son completamente análogas y citaremos las referencias donde éstos se encuentran.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA

AFIRMACION

Existe un encaje conforme no singular del disco unitario cerrado, Δ , en S^3 el cual representa una solución al problema de Plateau para la curva cerrada Γ_g . Además el encaje es analítico en el interior, continuo en el interior y transforma a Δ en la cerradura convexa de Γ_g .

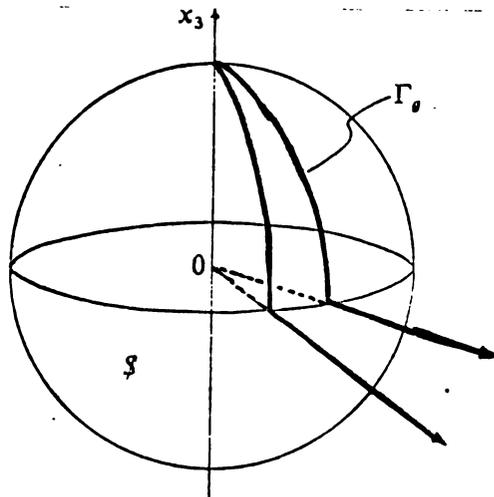
Por el teorema 1 (generalizado por Morrey) existe una transformación continua $\psi: \Delta \rightarrow S^3$ el cual es conforme y analítica en el interior, es un homeomorfismo de $\partial\Delta$ a Γ_g y minimiza las integrales de área y de Dirichlet. Por otro lado sabemos que:

- a) $\psi(\Delta) \subset C(\Gamma_g)$ y $\psi(\Delta^\circ) \subset C(\Gamma_g)^\circ$
- b) Si $P \in \Delta^\circ$ y rango $(d\psi_P) < 2$, entonces cualquier hiperesfera totalmente geodésica que pasa por $\psi(P)$ intersecta a Γ_g en al menos 4 puntos.
- c) Si $P \in \Delta^\circ$ y rango $(d\psi_P) = 2$ y si S_P es una hiperesfera totalmente geodésica y tangente a la superficie en $\psi(P)$. Entonces $\Gamma_g \cap S_P$ tiene a lo menos cuatro componentes.

NOTA:

Estos teoremas fueron generalizados de \mathbb{R}^n (expuestos antes) a S por H.B. Lawson en Complete minimal surfaces in S^3 , Ann. of Math. 92.

Ahora consideremos Γ_g en el sistema de coordenadas obtenido por proyección estereográfica desde el punto antipodal al punto original de la proyección hecha antes. Con este cambio de coordenadas el interior y el exterior de S^2 son intercambiados. Ahora Γ_g se ve como en la figura siguiente



La cerradura convexa de Γ_g está determinada por S^2 , P y dos planos que contienen al eje X_3 y se intersectan en un ángulo $\Pi/g+1$

Observemos que las hiperesferas totalmente geodésicas de S^3 son todos los planos que pasan por 0 y todas las esferas en R^3 que intersectan a S^2 en un círculo máximo de S^2 .

Usando (a) y (b) y la familia de planos que contienen al eje X_3 vemos que $\text{rango}(d\psi) \equiv 2$. En Δ° ya que hay muchos planos que no intersectan a Γ_g en ningún punto y, sin embargo pasan por $\psi(P)$, $P \in \Delta^\circ$.

Teorema (c) demuestra que no hay planos tangentes perpendiculares al plano P de aquí tenemos que si $\Pi: R^3 \rightarrow P$ es la proyección entonces $\Pi \circ \psi$ es una transformación de Δ en Δ el cual localmente es un homeomorfismo y lleva a la frontera del disco homeomorficamente sobre sí mismo. Por un argumento de monodromía, sabemos que $\Pi \circ \psi$ es un homeomorfismo (la región es simplemente conexa). Y por lo tanto ψ es uno a uno sobre su imagen.

NOTA

Compárese esta demostración con la efectuada en el teorema de unicidad de la solución en R^n .

La superficie M_g (la solución a Γ_g) la podemos extender analíticamente como una superficie mínima por reflejar a través de los arcos geodésicos de Γ_g . (Este teorema es una generalización del principio de reflexión expuesto antes, la demostración para

S^3 es esencialmente la misma y se puede ver en H.B. Lawson, The global behavior of minimal surfaces in S^n , Ann. of Math. 92).

Después de reflejar, a lo más $2(g+1)$ veces, obtenemos una superficie cerrada mínima Σ_g encajada en S^3 con posibles singularidades en el proceso de reflejar de los puntos singulares de Γ_g . Pero al reflejar los ángulos en esos puntos llega a ser Π . Y de aquí Σ_g es regular en todo punto. Para ver esto último tenemos que recordar lo que significa reflejar a través de una curva geodésica γ . Como S^3 es homogénea y simétrica, sin pérdida de generalidad podemos suponer que γ está dada por $x_3 = x_4 = 0$.

DEF

Una reflexión a través de γ es una transformación $r_\gamma: S^3 \rightarrow S^3$ de S^3 en S^3 donde $r_\gamma(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, -x_3, -x_4)$.

Ahora, Σ_g puede ser descompuesta como un complejo celular de la siguiente manera:

Sea B^+ y B^- los hemisferios cerrados determinados por S^2 .

Hay 2 2-celdas, $\Sigma_g \cap B^+$ y $\Sigma_g \cap B^-$, las $2g + 2$ 1-celdas obtenidas por $\Sigma_g \cap S^2$ y las dos 0-celdas dadas por el polo norte y el polo sur. De aquí Σ_g tiene género g .

Ahora veamos cómo es en general la construcción geométrica.

Para esto, veamos el toro de Clifford. (véase abajo). Como las figuras hablan por sí solas, escribiré en cada una de ellas tan solo las indicaciones mínimas.

En la Figura I, tenemos la solución M_g de Plateau a Γ_g .

Esta está contenida en la región determinada por Γ_g y S^2 (cerradura convexa de Γ_g). M_g se "parece" a una rebanada de aguacate.

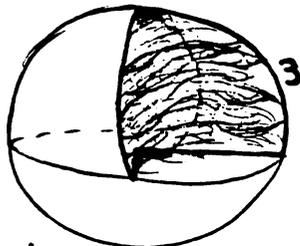


FIGURA I

En la Figura II, tenemos la reflexión de M_g sobre uno de los meridianos geodésicos de Γ_g .

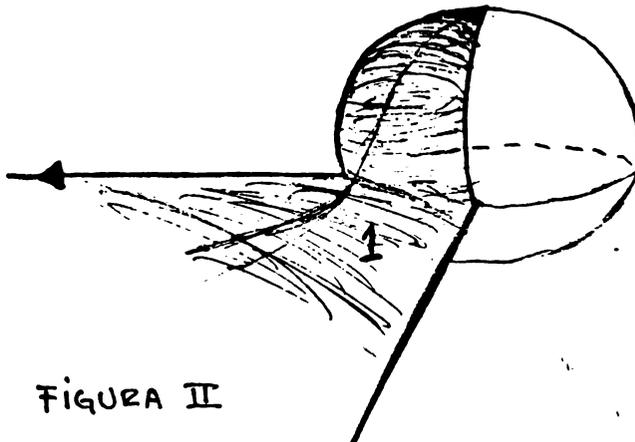


FIGURA II

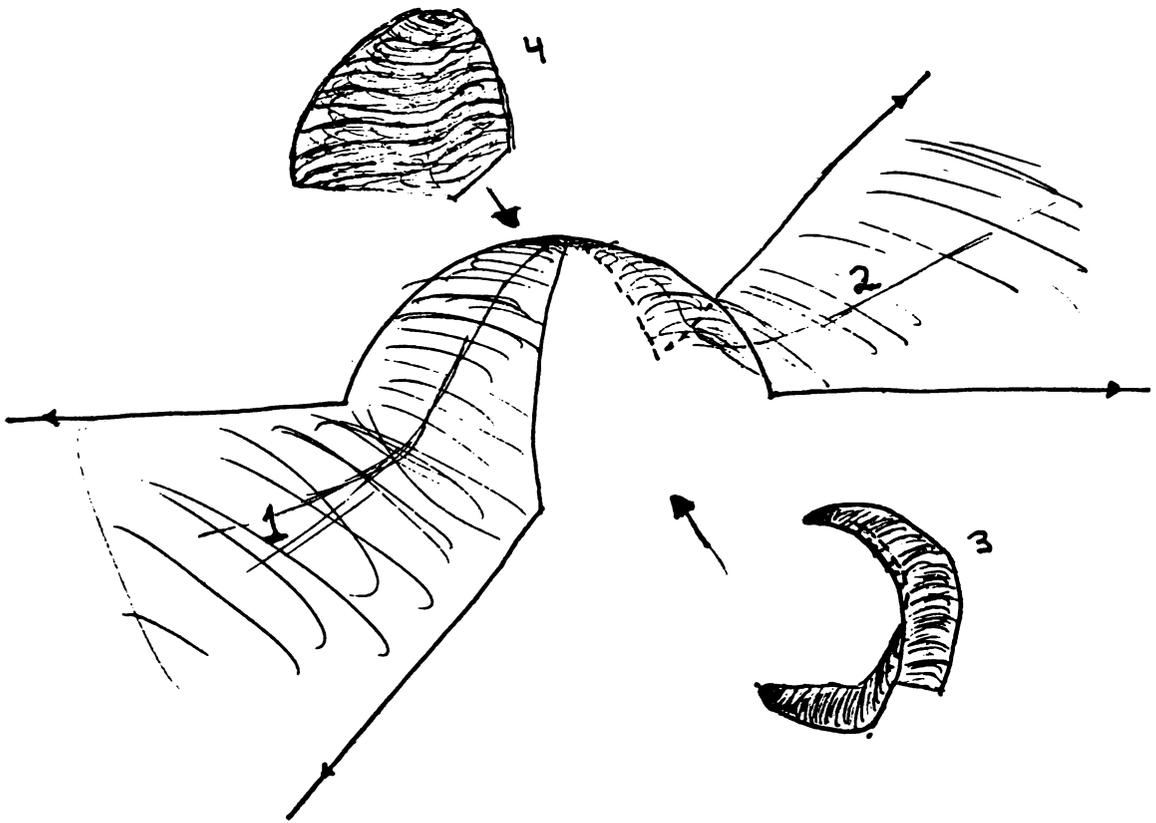
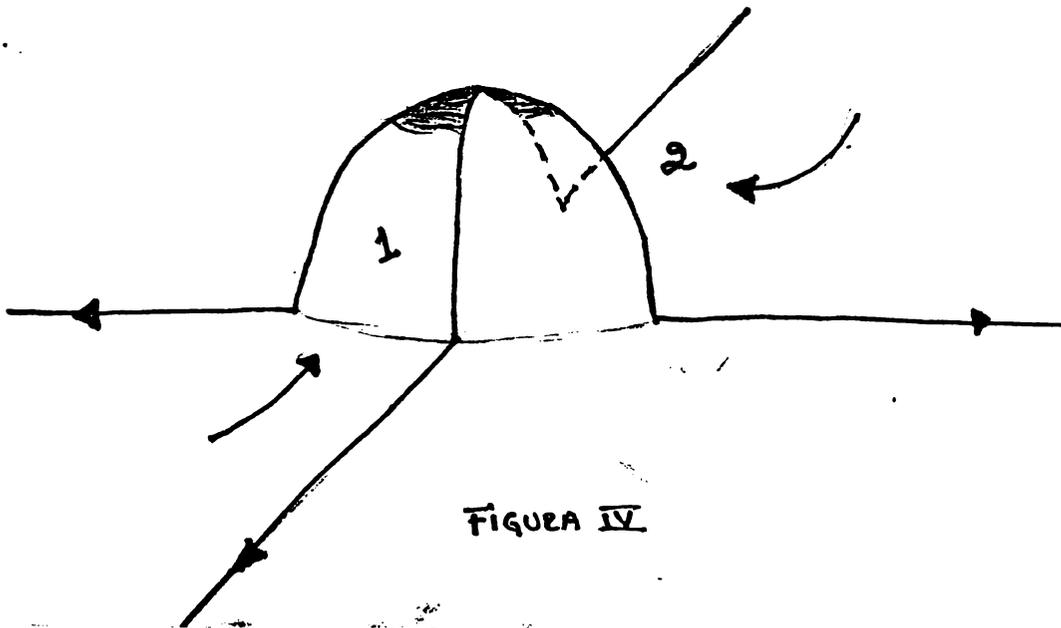


FIGURA III

En la Figura III, tenemos la parte "superior" de la superficie Σ_g . Las partes 3 y 4 son idénticas así como las partes 1 y 2.

La Figura IV se obtiene bajo una transformación continua aplicada a parte 1 y 2 de figura III. Parte 1 y 2 de figura III están conectadas en ∞ , y este lo hemos quitado del toro para ver figura IV.



Entonces no es difícil ver, que topológicamente, la parte "superior" de M_g es como figura V.

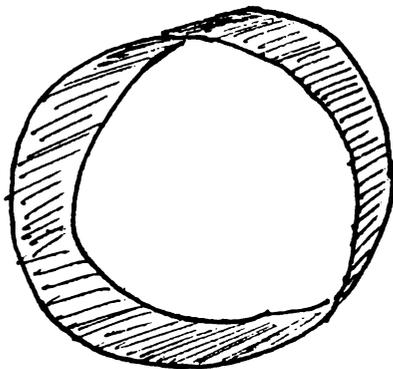


FIGURA V

Por último, la parte "inferior" de M_g es totalmente simétrica, pero se encuentra rotada $\Pi/2$. De aquí tenemos que M_g es Topológicamente como Figura VI. Y ésta no es otra cosa que un toro sin un punto. (en nuestro caso es el ∞).

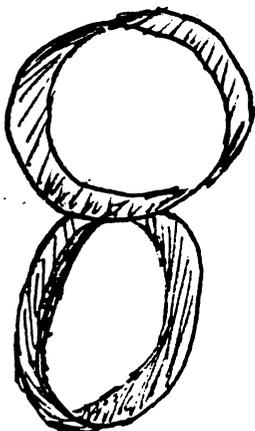


FIGURA VI

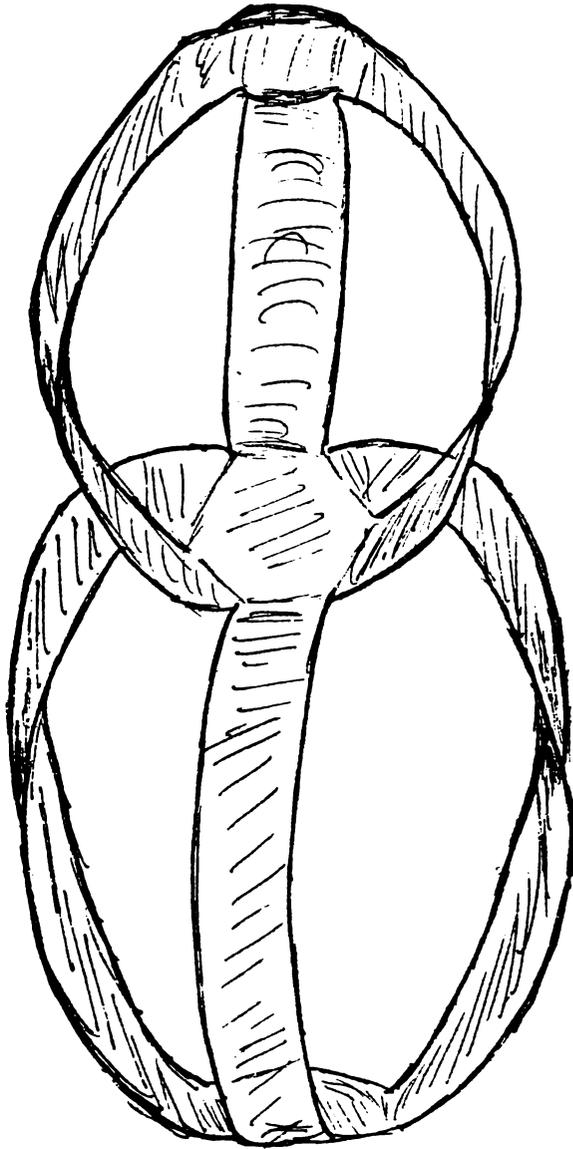
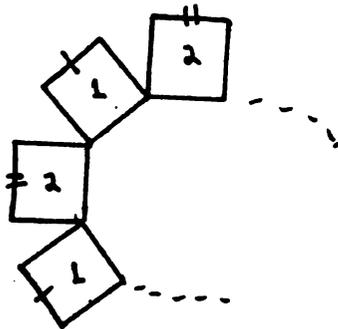


FIGURA VII.

De la misma manera obtenemos que el doble toro, visto topológicamente, en nuestra construcción es cómo en Figura VII.



En general obtenemos, para $g = n \geq 1$, un $2g + 2$ polígono y en cada arista una banda, las bandas con el mismo número son aquéllas que están unidas entre sí como antes.

Claramente es un n -toro.

Una transformación continua $b: \partial\Delta \rightarrow \Gamma$ es llamada monótona si para toda $P \in \Gamma$ el conjunto $b^{-1}(P)$ es conexo.

Sea $X_\Gamma = \{\psi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \psi \text{ es } C^1 \text{ por pieza y } \psi|_{\partial\Delta} \text{ es una parametrización monótona}\}$

La función área la definimos como:

$$A: X_\Gamma \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \text{ por } A(\psi) = \iint_{\Delta} |\psi_X \times \psi_Y| \, dx dy.$$

$$\text{donde } |\psi_X \times \psi_Y|^2 = |\psi_X|^2 |\psi_Y|^2 - \langle \psi_X, \psi_Y \rangle^2.$$

Nuestro problema es encontrar $\psi \in X_\Gamma$ tal que $A(\psi) = a_\Gamma$ donde $a_\Gamma = \inf_{\psi \in X_\Gamma} A(\psi)$.

NOTA

Aquí pediremos que $a_\Gamma < \infty$. Esto se resuelve si Γ es rectificable en el caso de geodésicas el problema fue resuelto por encontrar curvas que minimizaran la integral de la energía. En este caso es totalmente análogo. La integral de energía es llamada la integral de Dirichlet.

$$D(\psi) = \iint_{\Delta} (|\psi_X|^2 + |\psi_Y|^2) \, dx dy.$$

Para cualesquiera dos vectores $v, \omega \in \mathbb{R}^n$ tenemos que

$$|v \times \omega|^2 = |v|^2 |\omega|^2 - \langle v, \omega \rangle^2 \leq |v|^2 |\omega|^2 \leq \frac{1}{4} (|v|^2 + |\omega|^2)^2$$

donde la igualdad se da si y sólo si $|v| = |\omega|$ y $\langle v, \omega \rangle = 0$.

De esto concluimos que si $\psi \in X_\Gamma$ $A(\psi) \leq \frac{1}{2} D(\psi)$ la igualdad se da si $|\psi_X| = |\psi_Y|$ y $\langle \psi_X, \psi_Y \rangle = 0$ una transformación cumpliendo esto último se llama casi conforme. Es conforme si preserva

ángulos. Una transformación conforme induce una métrica en Δ de la forma $ds^2 = F(dx^2 + dy^2)$ donde $F = |\psi_x|^2 = |\psi_y|^2$ y a los parámetros (X, Y) se le llama coordenadas isotermas.

Existe un teorema de existencia de coordenadas isotermas que dice.

TEOREMA

Sea $\psi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ ψ continuo y $\psi|_{\Delta^\circ}$ es inmersión entonces existe un homeomorfismo $d: \Delta \rightarrow \Delta$ tal que $d|_{\Delta^\circ}$ es C^K y $\psi' = \psi \circ d$ es conforme.

De este teorema tenemos dos consecuencias importantes.

COROLARIO 1 $a_\Gamma = \frac{1}{2} d_\Gamma$

COROLARIO 2 Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ una curva de Jordan con $a_\Gamma < \infty$. Entonces si $\psi \in X_\Gamma$ $D(\psi) = d_\Gamma \Leftrightarrow A(\psi) = a_\Gamma$ y ψ es casi conforme.

De aquí nuestro problema es encontrar $\psi \in X_\Gamma$ tal que ψ minimize la integral de Dirichlet. Esto es resuelto con teoría de funciones armónicas y se expresa con el siguiente teorema.

TEOREMA 1 (J. DOUGLAS)

Sea Γ una curva de Jordan en \mathbb{R}^n tal que $a_\Gamma < \infty$. Entonces existe un mapeo continuo $\psi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

- 1) $\psi|_{\partial\Delta}$ es una transformación monótona de $\partial\Delta$ a Γ .
- 2) $\psi|_{\Delta^\circ}$ es armónica y casi conforme
- 3) $D(\psi) = d_\Gamma$ y $A(\psi) = a_\Gamma$.

A ψ se le llama la solución al problema de Plateau para Γ este teorema es realmente muy fuerte si uno observa, por ejemplo, que Γ puede ser un nudo complicado en \mathbb{R}^3 .

C.B. Morrey demostró que el Teorema 1 es cierto para cualquier variedad Riemanniana completa. (Veáse, Multiple integrals in the calculus of variation por C.B. Morrey, pag. 309).

2) LA REGULARIDAD DE LA SOLUCION EN EL INTERIOR DEL DISCO.

Como ψ , solución al problema de Plateau, es armónica, nosotros tenemos que $\frac{d}{dz} \frac{d}{dz} \psi = 0$. Entonces la función \mathbb{C}^n -valuada

$$\varphi = \frac{d\psi}{dz} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \text{ es holomorfa en } \Delta^\circ.$$

$$\text{Además } 4\varphi^2 = 4 \sum \varphi_K^2 = |\psi_X|^2 - |\psi_Y|^2 - 2i \langle \psi_X, \psi_Y \rangle \text{ y}$$

$$4|\varphi|^2 = 4 \sum |\varphi_K|^2 = |\psi_X|^2 + |\psi_Y|^2$$

como ψ es casi conforme tenemos $\varphi^2 = 0$ y $|\varphi|^2 = F$.

Donde la métrica inducida por ψ es $ds^2 = 2F|dz|^2$

ψ es regular en los puntos donde $F \neq 0$ y como $|\varphi|^2 = F$ y

φ es holomorfa tenemos

LEMA

La solución ψ dada en teorema 1 es una inmersión en cualquier punto Δ° excepto posiblemente en puntos aislados.

A los puntos de irregularidad les llamaremos puntos singulares.

3) LA REGULARIDAD DE LA SOLUCION EN LA FRONTERA

La primera pregunta es: supongamos que la curva Γ es "bonita", ¿la solución ψ es "bonita" en la frontera?.

Supongamos que Γ es una curva regular de clase C^K para $1 \leq K \leq \infty$. Esto significa que para cada $P \in \Gamma$ existe una vecindad U de P en \mathbb{R}^n y un difeomorfismo $\varphi: U \rightarrow D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$ de clase C^K tal que $\varphi(\Gamma \cap U) =$ la línea recta $\{(x_1, 0, \dots, 0) \mid -1 < x_1 < 1\}$.

La pregunta entonces es si la solución al problema de Plateau para Γ es de clase C^K en el disco cerrado.

Si Γ contiene una recta γ entonces usamos el principio de reflexión para.

PROPOSICION

Cada solución al problema de Plateau para Γ puede ser continuada analíticamente como una superficie mínima (con puntos singulares) por reflexión a través de γ .

Dem

Sea $\psi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ una solución y $\Delta^+ = \{z \in \Delta \mid \text{Im}(z) \geq 0\}$.

con una transformación conforme podemos pensar que ψ va de Δ^+ a \mathbb{R}^n y tal que $\psi[\Delta^+ \cap (X - \text{eje})] = \gamma$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que γ es parte de la línea

$x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$. Entonces $\psi_2(X, 0) = \dots = \psi_n(X, 0) = 0$.

Y por el principio de reflexión para funciones armónicas (complex

analysis, ahlfors, pag 172, 3ª edición) podemos extender

ψ_2, \dots, ψ_n a todo el disco definiendo $\psi_K(X, Y) = -\psi_K(X, -Y)$

$K = 2, \dots, n$. De aquí que $\psi_K = \frac{\partial \psi_K}{\partial Z}$ $2 \leq K \leq n$ se extiende a

una función holomorfa en Δ y es puramente imaginaria en el X - eje y habíamos visto que $\varphi = 0$ entonces

$\varphi_1^2 = -(\varphi_2^2 + \dots + \varphi_n^2)$. Donde $-(\varphi_2^2 + \dots + \varphi_n^2) \geq 0$ en el X - eje

de aquí que los valores límites de φ_1 son reales en el X - eje.

Usando el principio de reflexión para funciones holomorfas (misma referencia) obtenemos que φ_1 se extiende a todo el disco

como $\check{\varphi}_1(\bar{Z}) = \overline{\varphi_1(Z)}$

Integrando, $\psi_1(Z) = \operatorname{Re} \int_0^Z \varphi_1(Z) dZ$, tenemos que ψ_1 se extien-

de a todo el disco como $\psi_1(X, Y) = \psi_1(X, -Y)$. Y obviamente es mínima la función extendida.

En 1959 se demostró una generalización a esto

TEOREMA (H. LEWY)

Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ un arco real analítica y suponga que $\psi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una solución al problema de Plateau para Γ . Entonces ψ puede extenderse analíticamente, como una superficie mínima, a través de la frontera.

Y no fue sino hasta 1968 que se demostró

TEOREMA (S. HILDEBRANDT)

Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ una curva de Jordan de clase $C^{K, \alpha}$ para

$4 \leq K \leq \infty$ y $0 \leq \alpha < 1$. Entonces si $\psi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ es solución

al problema de Plateau, ψ es de clase $C^{K,\alpha}$ en la frontera. Aquí, $C^{n,\alpha}$ es clase C^n con la n -ésima derivada α -Holder continua.

3) Condiciones para que la solución sea uno a uno.

En esta sección se darán condiciones geométricas a Γ de tal forma que la solución del teorema 1 sea 1-1, sin puntos singulares y única.

DEF

$$H_{V,S} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \langle X, V \rangle = S\} \quad \forall V \in \mathbb{R}^n, \quad S \in \mathbb{R}.$$

$H_{V,S}$ tiene contacto de orden K con la superficie

$\psi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ en $P \in \Delta$: si

$$1) \langle \psi(P), V \rangle = S$$

$$2) \left\langle \frac{\partial^{\ell} \psi}{\partial X^i \partial Y^j} (P), V \right\rangle = 0 \quad 0 \leq i + j \leq \ell \leq K$$

Empecemos con el siguiente

TEOREMA 2

Sea $\psi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ una solución al problema de Plateau para la curva Γ , y supongamos que el hiperplano $H_{V,S}$ tiene contacto de orden K con ψ en $P \in \Delta_0$. Entonces, si $H_{V,S} \nmid \Gamma$, el conjunto $\Gamma \cap H_{V,S}$ tiene al menos $2K+2$ componentes.

Den

Consideremos la función armónica f en Δ dada por $f = \langle \psi, V \rangle - S$.

Sin perdida de generalidad tomemos $P = (0,0)$ y (ξ, η) coordenadas en una vecindad del cero como f es real analítica, entonces tenemos que

$$f(\xi, \eta) = \sum_{j=m}^{\infty} P_j(\xi, \eta) \quad \text{donde una } P_j \text{ es un polinomio homogeneo de grado } j \text{ y } m \geq K + 1 \text{ con } P_m \neq 0.$$

$$\Delta f = \langle \Delta \psi, V \rangle = 0 \quad \text{ya que } \Delta \psi = 0 \text{ entonces}$$

$$\Delta f = \sum_{j=m}^{\infty} \Delta P_j \quad \text{y de aquí } \Delta P_m = 0. \quad \text{Sea } F = \frac{\partial P_m}{\partial \xi} - i \frac{\partial P_m}{\partial \eta} \text{ esta}$$

$$\text{función es holomorfa en } Z = \xi + i\eta. \quad \text{y } F = \sum_{i=1}^{m-1} a_i z^j \quad a_i = \frac{F^i(0)}{i!}$$

$$\text{Pero como } P_m \text{ es homogenea } F = \sum_{i=1}^{m-1} a_i z^j = a_{m-1} z^{m-1} \text{ y obtene--}$$

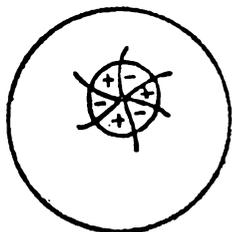
mos que

$$P_m(z) = \frac{1}{2} \int \operatorname{Re}(a_{m-1} z^{m-1}) d\xi - \frac{1}{2} \int \operatorname{Im}(a_{m-1} z^{m-1}) d\eta = a \operatorname{Re}(z^m) + b \operatorname{Im}(z^m)$$

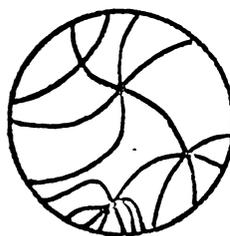
a, b constantes. Donde la última igualdad se puede demostrar por inducción.

$$\therefore P_m(z) = a \operatorname{Re}(z^m) + b \operatorname{Im}(z^m) = C \operatorname{Re}[e^{i\theta} z^m] \quad \theta, C \text{ constantes.}$$

Sea $Z = \{q \in \Delta \mid f(q) = 0\}$, para alguna vecindad suficientemente pequeña de P , la divide en $2m$ regiones tales que f tiene signos opuestos en dos regiones vecinas



The behavior of f near p



General Picture of the set Z

veremos que

El conjunto $C = \Delta - Z$ intersecta a $\partial\Delta$ en al menos $2m$ componentes. Cada componente C_α de C tiene la propiedad que $\partial C_\alpha \cap \partial\Delta$ contiene un intervalo abierto de $\partial\Delta$. Si esto no fuera así, por el principio del máximo tendríamos que $f \equiv 0$ en C_α ya que $f|_{\partial C_\alpha} = 0$. Y por ser f analítica $f \equiv 0$ y entonces $\Gamma \subset H_{V,S}$ contrario a lo que supusimos. Es claro ahora que cada una de las regiones de C que dimos en una vecindad de P pertenecen a distintas componentes de C . De aquí C tiene al menos $2m$ componentes y por lo tanto también $\partial C \cap \partial\Delta$ y por último $\partial\Delta - C = \partial\Delta \cap Z$ tiene $2m$ componentes. La proposición se demuestra observando que $\psi|_{\partial\Delta}$ es monótona.

OBSERVACION

Este teorema fue generalizado por H.B. Lawson para S^3 en su tesis doctoral.

Ahora sí, tenemos el siguiente

TEOREMA

Si la curva de Jordan Γ tiene una proyección convexa y uno a uno sobre el plano $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^n$, entonces la solución al problema de Plateau para Γ es única, sin puntos singulares y puede ser expresada como la gráfica de una función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{n-2}$.

Dem

Sea $\Pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección y ψ una solución al problema de

Plateau para Γ . Como $\Pi(\Gamma)$ es convexa tenemos que $\Pi[C(\Gamma)^\circ] = C(\Pi[\Gamma])^\circ =$ el dominio Δ acotado por $\Pi[\Gamma]$ en \mathbb{R}^2 . Por corolario 2 del teorema 1 (dice $\psi(M) \subset C[\psi(\partial M)]$, $\psi(M^\circ) \subset C[\psi(\partial M)]^\circ$) tenemos que $\Pi \circ \psi : \Delta^\circ \rightarrow \Delta$ y además $\Pi \circ \psi|_{\partial\Delta} : \partial\Delta \rightarrow \partial\Delta$ es un homeomorfismo.

Vamos a demostrar que $d(\Pi \circ \psi)$ es no singular en Δ° .

Sea $P \in \Delta^\circ$ y supongamos que el rango de $d(\Pi \circ \psi)_P$ es menor o igual a uno. Entonces existe una línea $\ell \subset \mathbb{R}^2$ en el punto $\Pi \circ \psi(P)$ tal que ℓ contiene a los vectores $(\Pi \circ \psi)_X(P) = \Pi(\psi_X(P))$ y $(\Pi \circ \psi)_Y(P) = \Pi(\psi_Y(P))$.

De aquí que el hiperplano $H = \Pi^{-1}(\ell)$ tiene contacto de primer orden con ψ en P . Pero $H \cap \Gamma =$ dos puntos, ya que $\Pi(\Gamma)$ es convexo y Π/Γ es uno a uno. Esto contradice el último teorema, por lo tanto $d(\Pi \circ \psi)$ tiene rango 2 en Δ° .

De aquí que $\Pi \circ \psi$ es un difeomorfismo local, por monodromía tenemos que $\Pi \circ \psi$ es un homeomorfismo de Δ con $\bar{\Delta}$, por lo tanto ψ es no singular y uno a uno, y puede ser expresada como la gráfica de una función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{n-2}$. Como f es mínima, sabemos (Osserman, a survey of minimal surface, pag. 17) que f cumple con la ecuación $(1+|f_Y|^2) f_{XX} - 2 \langle f_X, f_Y \rangle f_{XY} + (1+|f_X|^2) f_{YY} = 0$.

(Por Courant, Methods of mathematical physics, Vol. II, pag. 321)

sabemos que la solución a esta última ecuación es única.

CAPITULO III: SUPERFICIES MÍNIMAS COMPACTAS EN S^3 .

En este capítulo expondremos un teorema debido a Lawson que apareció en un artículo titulado Compact minimal surface in S^3 .

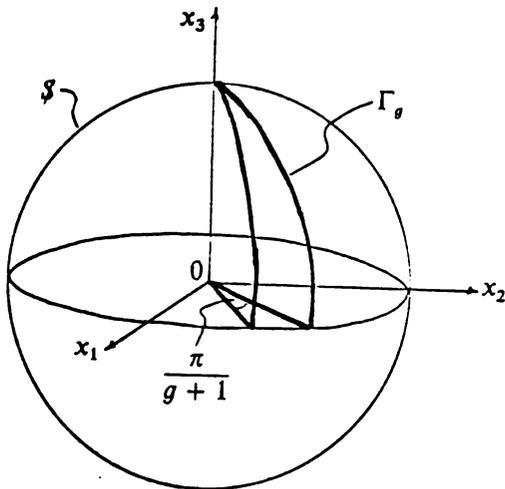
El teorema a grandes rasgos nos dice que existe una superficie mínima compacta de género arbitrario en S^3 .

Vamos a empezar por dar una idea de la demostración y algunas construcciones que se van a usar.

Consideremos a R^3 como un sistema de coordenadas para S^3 por medio de proyección estereográfica desde un punto fijo. El origen, 0, en R corresponde al polo sur de la proyección y la esfera unitaria S^2 alrededor de 0 corresponde a la hiperesfera ecuatorial. Todas las líneas rectas a través de 0 y los círculos máximos de S^2 son geodésicas. (no son todas las geodésicas). Sea g un entero no negativo. Vamos a construir una curva cerrada, geodésica por tramos de la siguiente manera.

Sean (X_1, X_2, X_3) coordenadas en 0 , y sea P el plano (X_1, X_2) ($X_3 = 0$). Consideremos dos radios de S^2 y que esten en P tales que su intersección sea un ángulo $\Pi/(g+1)$. La curva que buscamos es los dos radios y los círculos máximos de S^2 más cortos que unen los puntos finales de los radios con el punto $S^2 \cap X_3$ - eje positivo a esta curva la denotamos por

Γ_g



Por la forma en que fue construido Γ_g existe una solución bastante "bonita" al problema de Plateau par Γ_g reflejando geodésicamente sobre los arcos frontera un número suficiente de veces obtendremos una superficie orientable, compacta, no singular Σ_g de género g y Σ_g está encajada en S^3 .

Veamos un ejemplo antes de hacer la demostración formal.

Sea $g = 0$ Entonces Γ_g es el ecuador que está en $S^2 \cap (x_2, x_3)$ -plano.