Teoría de dispersión para perturbaciones de rango corto

Por

Fernando Brambila Paz

Mat........ U.N.A.M. (1978)

M.en C... U.N.A.M. (1980)

S.M........ M.I.T.(1982)

Tesis para obtener el grado de 1985
Doctor en Ciencias Matemáticas.

Indice

Introducción

Cuando una onda (electromagnética, acústica, elástica, etc.) interactúa con una perturbación, la onda puede ser reflejada, absorbida o transmitida, dependiendo de propiedades de la perturbación, de la frecuencia de la onda, etc.

El problema de dispersión es analizar el como la interacción toma lugar y el qué puede ser observado. Lo observable depende de el interés: Ya sea atómico o cosmológico.

Una clase de problemas abiertos en esta teoría es el problema inverso de dispersión: Cuando uno conoce la onda de entrada y se tiene cierta data de la onda de salida, entonces lo que se quiere es saber que tipo de perturbación pudo causar tal alteración.

Algunos casos han sido ampliamente estudiados tales como, el sonar y los rayos-x. Aplicaciones mas recientes las tenemos en medicina nuclear.

Actualmente es de gran interés el estudio de las ondas acústicas. El análisis matemático de las ondas de alta frecuencia, son la base de las técnicas usadas, en medicina para visualizar órganos internos y fetos dentro de el útero, en la geología para buscar y determinar en que regiones existen distintos tipos de yacimientos (petróleo).

Es pues de gran utilidad el estudiar la ecuación de onda y la teoría de dispersión para este tipo de ecuaciones en orden de conocer el comportamiento de las frecuencias altas.

Describamos ahora brevemente el metodo de Lax-Phillips para la teoría de dispersión. El estado de un sistema que depende del tiempo, es un elemento de un espacio de Hilbert.

Los movimientos de tal tipo de sistemas son funciones $u(t)$, $-\infty < t < +\infty$, con valores en el espacio estado. Tales movimientos son determinísticos, en el sentido que si dos trayectorias coinciden en el tiempo t_0, entonces coinciden en todos los tiempos . El movimiento es reversible, i.e. si $u(t)$ es una trayectoria, también lo es $R(u(-t)) = v(t)$ donde R es el operador que mapea puntos de el espacio estado a puntos en el mismo espacio. El movimiento es invariante bajo translaciones, si $u(t)$ es trayectoria también lo es $u(t+T)$ para toda T .

La teoría de dispersión es posible para tal tipo de movimiento si es posible dar una descripción asintótica de cada trayectoria cuando el tiempo t tiende a +infinito y cuando tiende a -infinito. Esta descripción es en cierto sentido mas sencillo que la trajectoria misma. Denotaremos esta descripción asintótica como u_+ y u_-. Se puede reconstruir u de el desarrollo asintótico de u_+ y u_-.

Los operadores de onda se denotarán como W_+, W_- y están definidos como

$$W_+ u = u_+$$

$$W_- u = u_-$$

y el operador de dispersión es

$$S(u_-) = u_+$$

de donde
esto es,

$$S = W_+ W_-^{-1}$$

La teoría de Lax-Phillips considera los movimientos que son
~~Los movimientos que consideraremos serán~~ soluciones de la ecuación de onda

$$(\partial_t^2 + \triangle + V(x))u(t,x) = 0$$

El grupo $\mathcal{U}_V(t)$ será el operador que manda la data inicial a la solución de la ecuación de onda con perturbación

$$\mathcal{U}_V(t)(f_0, f_1) = (u(t,x), u_t(t,x))$$

Si $V(x) = 0$ entonces denotamos al grupo como $\mathcal{U}_0(t)$

Como la ecuación de onda con data inicial tiene una solución única y la energía es conservada, entonces $\mathcal{U}_V(t)$ (resp.$\mathcal{U}_0(t)$) es un grupo de operadores unitarios que actúan en el espacio de la energía $\mathcal{H}_V$ (resp.$\mathcal{H}_0$) donde $\mathcal{H}_V$ es la completación de $C_0^\infty(R^n) \otimes C_0^\infty(R^n)$ bajo la norma

$$\|(f_0, f_1)\|_V^2 = \int (|\nabla f_0|^2 + V(x)|f_0|^2 + |f_1|^2) dx$$

(resp.$\| \ \|_0$ induce $\mathcal{H}_0$).

La transformada de Radon puede ser extendida a el mapeo

$$\mathcal{R} : \mathcal{E}'(R^n) \otimes \mathcal{E}'(R^n) \longrightarrow \mathcal{D}'(R \otimes S^{n-1})$$

Podemos definir así la transformada de Radon modificada de Lax-Phillips entre los mismos espacios

$$R(f_0, f_1) = c_n^{1/2}(D_s^{n-1/2}\mathcal{R}f_1 - D_s^{n+1/2}\mathcal{R}f_0)$$

Usamos la transformada modificada para simplificar el movimiento libre en $D'(R \otimes S^{n-1})$. Podemos considerar $\mathcal{U}_0(t)$ como el grupo de translación T_t donde

$$T_t f(s, w) = f(s - t, w)$$

y $s \in R$, $w \in S^{n-1}$.

Uno de los problemas de la teoría de dispersión es el de saber si los operadores de onda

$$\omega_\pm = lim_{t\to\pm\infty}\mathcal{U}_V(-t)\mathcal{U}_0(t)f$$

existen y son isomorfismos unitarios. Cuando cumplen tales propiedades se dice que ~~el~~ los operadores de onda ~~es~~ son completos.

En caso de que los operadores de onda sea completos, entonces se puede definir el operador de dispersión.

$$S : \overline{T}_{-}\omega_{-}(t)f \longrightarrow \overline{T}_{+}\omega_{+}(t)f.$$

donde el operador $\overline{T}$ esta definido de la siguiente forma:

$$\overline{T}_{\pm}\omega_{\pm}f = T_{\pm}f$$

y T es la representación libre que se obtuvo a partir sde la transformada de Radon.

Algunas de las ventajas de desarollar la teoría de dispersión a la manera de Lax-Phillips, es que para cierto tipo de perturbaciones uno puede describir de manera simple el comportamiento de la amplitud de dispersión para frecuencias largas, utilizando metodos de ecuación de onda .Este es el caso de un potencial C^{∞} con soporte compacto por ejemplo.

Sea $u(t,x,\omega)$la solución de la ecuación

$$(\partial_t^2 + \triangle + V(x))u(t,x,\omega) = 0$$

$$u(t,x,\omega) = \delta(t - x\omega), t << 0$$

donde $t \in R, x \in R^n, \omega \in S^{n-1}$ y $V(x) \in C_0^{\infty}$. Esto es $u(t,x,\omega)$ es un frente de onda con dirección ω en el pasado remoto . La solución puede ser escrita (módulo un error C^{∞})

$$u(t,x,\omega) = \delta(t - x\omega) + \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x,\omega)(t - x\omega)_+^i.$$

donde

$$x_+^i = \begin{cases} x^i & si & x \geq 0 \\ 0 & si & x < 0 \end{cases}$$

y ademas $a_i \in C^\infty(R^n \otimes S^{n-1})$

y $a_0(x,\omega)$ es solución de

$$\nabla a_0.\omega = -\frac{V(x)}{2}$$

Entonces, si uno pudiera conocer a priori a_0 uno podría determinar la integral de $V(x)$ sobre cualquier línea en la dirección ω y determinar $V(x)$

Teorema:Sea $n \geq 2$, entonces

$$a(\lambda,\theta,\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{n-2-1} a_i(\lambda(\theta - (\theta\omega)\omega),\omega)$$

$$a_0 = \widehat{V(x)}(\lambda(\theta - (\theta\omega)\omega))$$

donde $a_i \in S(R^{n-1} \otimes S^{n-1})$.

Entonces para amplitud de dispersión para frecuencias largas se puede determinar $V(x)$. Este resultado se puede obtener de otras maneras. Lo novedoso del teorema es la expansión asintótica completa. Nótese que cuando $(\theta = \omega)$ entonces a_0 determina

$$\int V(x)dx$$

Utilizando tecnicas de analisis microlocal se puede obtener un resultado de este tipo para perturbaciones

$$V(x) = \frac{b(x)}{|x|}$$

donde $b \in C_0^\infty(R^n)$ y $n \geq 3$.

Pasemos ahora a describir la aportación hecha en esta tesis. En su artículo "Scattering theory for the wave equation with short range perturbation" (P) Ralph S. Phillips demuestra que se puede desarrollar una teoría de dispersión para el siguiente tipo de perturbaciones . Sea $V(x)$ una función real en $L^p(R^n)$ donde $p = n/2$ para $n > 4, p > 2$ para $n = 4$ y $p = 2$ para $n = 3$ y tal que

$$V(x) = o(\frac{1}{r^\beta})$$

para $\beta > 2$.

Nuestra intención es demostrar que para el caso de que la perturbación sea: $V \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$p = n/2, \quad n > 4$

$p > 2, \quad n = 4$

$p = 2, \quad n > 3$

$$V(x) = o(\frac{1}{r^\beta})$$

para $\beta > 1$ entonces también se puede desarrallar una teoría de dispersión

El primer problema que surge cuando se considera $\beta > 1$ es que no sabemos si.

$$\int (V(x)|f_0|^2)dx$$

~~no tiene porque~~ esta~~r~~ acotado por

$$\int |\nabla f_0|^2 dx$$

y por la tanto de principio no tenemos que los espacios de la energía $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}_V$ sean isomorfos .

Obsérvese que en el caso que considera Phillips, se tiene dicha cota y por lo tanto tenemos que los espacios son isomorfos. Cabe tambien observar que cuando se considera la ecuación de Klein-Gordon

$$(\partial_t^2 + \triangle + m + V(x))u(t,x) = 0$$

con $m > 0$ se obtiene la siguiente cota:

$$\int (V(x)|f_0|^2)dx \leq \int (|\nabla f_0|^2 + m|f_0|^2)dx$$

obteniendo así que los respectivos espacios de energía también son isomorfos. El problema surge al considerar que la m sea igual a cero .

Es de esperarse que la teoría que desarrollemos para nuestra perturbación presente algunas dificultades, al no tenerse dicha cota.

En lugar de acotar dicha integral para la data inicial, la consideraremos utilizando la solución de la ecuación de onda sin perturbación y haciendo tender el tiempo a infinito .Demostramos que

$$\lim_{t \to +\infty} \int V(x)|u(t,x)|^2 dx = 0$$

Con ello obtendremos que basta considerar que la perturbación pertenezca a $L^{n/2}(R^n)$ y que decaiga en infinito mas rápidamente que $|x|^{-\beta}$ para obtener existencia de los operadores $\omega_\pm$.

$$\omega_\pm : \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_V$$

$$\omega_\pm f = lim_{n \to \infty} W_\pm f_n$$

donde $f_n \in \bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}^0_\pm \bigcap D(\mathcal{A}_V)$ y $W_\pm$ esta definido de la siguiente manera:

$$W_\pm f = lim_{t \longrightarrow \pm\infty} \mathcal{U}_V(-t)\mathcal{U}_0(t) f$$

Para la demostracion de la existencia de $W_\pm$ en el conjunto denso $\bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}^0_\pm \bigcap D(\mathcal{A}_V)$ ver lema 2.7 del capítulo 2. Para la demostración de la existencia de $\omega_+(t)$ ver teorema 2.9 del capítulo 2.

En la segunda parte de esta tesis se demuestra las hipótesis: a) $V(x)$ pertenezca a $L^2_{loc}(R^3)$ y $L^p_{loc}(R^n)$ para $p > 2$ si $n = 4$ y $p = n/2$ si $n > 4$. b) Que decaiga mas rapido que

$$|x|^{-\beta}$$

en infinito. Son suficientes para que los operadores $\omega_\pm$ sean completos.

Para facilitar la exposición y por falta de tiempo la demostración sea hace solo para cuando la dimensión es tres, y se asume que la perturbación es tal que a) $\triangle + V(x)$ no tiene espectro puntual . b)$V(x) \geq 0$. c)El conjunto nulo de $\mathcal{A}_V$ y de $\mathcal{A}^2_V$ es el cero . Todas estas restricciones pueden ser quitadas .

La demostración de que $\omega_\pm$ sean completos esta basado en la combinación de la descomposición de Enss y los axiomas de Lax-Phillips. Esto es.

Definimos el espacio de entrada (salida) para el caso de sistemas perturbados como:

$$\mathcal{D}^V_\pm = \omega_\pm \mathcal{D}^0_\pm.$$

donde $\mathcal{D}^0_\pm$ son los espacios de entrada(salida sin perturbación . Entonces demostramos que los espacios $\mathcal{D}^V_\pm$ satisfacen los axiomas de Lax-Phillips (ver lema 1.13 de el capítulo 2) . Este lema se prueba utilizando la descomposición de Enss.

Para demostrar que tal descomposición implica los axiomas de Lax-Phillips procedemos de la siguiente manera.

Sea $A_V f \in \mathcal{H}_V$ tal que $A_V f \notin \overline{\bigcup \mathcal{U}_V(t)\mathcal{D}^V_+}$, entonces A_V se puede descomponer en la suma de dos funciones g y h esto es

$$A_V f = g + h.$$

donde

$$g \in \bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}^0_+ \bigcap D(\overline{\mathcal{A}_V})$$

y

$$h \in \bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}^0_- \bigcap D(\tilde{\mathcal{A}}_V).$$

Utilizando tales propiedades se puede probar que

$$\|\mathcal{A}_V f\|^{\theta}_{6} = 0$$

y observando que

$$D(\mathcal{A}_V) \subset D(\mathcal{A}_0)$$

se ve que $f = 0$. Y por lo tanto

$$\mathcal{H}_V = \overline{\bigcup \mathcal{U}_V(t)\mathcal{D}^V_+}.$$

con lo cual obtenemos que el rango de $\omega_+(t)$ es el espacio $\mathcal{H}_V$.

1.

Sistemas sin perturbación

1.1. Los axiomas de Lax-Phillips

El sistema sin perturbación, está dado por la ecuación:

$$(\partial_t^2 + \triangle)u(t,x) = 0 \tag{1.1}$$

donde $x \in R^n$, $t \in R$ y $\triangle = -\sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2$, con data inicial $(u(0,x), u_t(0,x)) = (f_0(x), f_1(x))$.

La forma de la energía para la ecuación $(1,1)$ está dada por,

$$E_0(f) = \int (|\nabla f_0|^2 + |f_1|^2)dx \tag{1.2}$$

Si empezamos con data $f \in C_0^\infty(R^n) \otimes C_0^\infty(R^n)$ y completamos con respecto a la norma de la energía definida como :

$$\| f \|_0 = (E_0(f))^{\frac{1}{2}} \tag{1.3}$$

obtenemos el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_0$. Si la dimensión n es mayor o igual que tres, entonces, el espacio $\mathcal{H}_0$ consiste de funciones definidas en casi todas partes, esto es, la inclusión

$$i : \mathcal{H}_0 \longrightarrow L_{loc}^2(R^n) \otimes L^2(R^n) \tag{1.4}$$

es acotada, ya que :

$$\int_{|x|\leq r}(|\ f_0\ |^2)dx \leq \int(|\ \nabla f_0\ |^2)dx \tag{1.5}$$

(ver lema (1.1) pag.95 de[L-P])

Si la dimensión n es menor que tres, entonces, la inclusión (1.4) no es acotada. (ejemplo : Sea $f_0 = \varphi(c)max(0, c - log(1+ \mid x \mid)$,entonces f_0 no pertenece a L^2_{loc} pero $\int(|\ \nabla f_0\ |^2)dx < \infty$). De donde, la primera componente de la data $\mathcal{H}_0$, esta determinada solamente módulo una constante . Por lo cuál, en dimensión 1 y 2 trabajaremos con $\mathcal{H}_0/[(c,0)]$ y definiremos la energía como :

$$G_0(f_0, f_1) = \int(|\ \nabla f_0\ |^2 + \mid f_1 \mid^2)dx + \int_{|x|\leq 1}(|\ f_0\ |^2)dx. \tag{1.6}$$

Asumamos por el momento que la dimensión $n$es tres .

Recordemos el principio de Huygens para $n = 3$. Los valores de la solución de (1.1) en el punto (t, x_0) dependen de los valores de la data inicial y de sus derivadas en los puntos de la esfera $\mid x - x_0 \mid = t$.

Sea $\mathcal{U}_0(t)$ el operador de onda, esto es, el operador que relaciona la solución de la ecuación de onda(1.1) en el tiempo cero con la solución de onda (1.1) en el tiempo t.

$$\mathcal{U}_0(t)(f_0, f_1) = (u(t,x), u_t(t,x)) \tag{1.7}$$

Es facil comprobar que $\mathcal{U}_0(t)$ definido de $\mathcal{H}_0$ a$\mathcal{H}_0$ es un grupo unitario , esto es $\mathcal{U}_0(t)\ \mathcal{U}_0(s) = \mathcal{U}_0(t+s)$, $\|\mathcal{U}_0(t)f\|_0 = \|f\|_0$ y $\mathcal{U}_0(t)^{-1} = \mathcal{U}_0(-t)$

Por lo tanto utilizando el teorema de Stone (Yosida 345) existe un operador auto-adjunto(negativo)$\mathcal{A}_0$ tal que

$$\mathcal{U}_0(t)f = e^{i\mathcal{A}_0 t}f \tag{1.8}$$

si f pertenece al dominio de $\mathcal{A}_0$, esto es, si $f \in \mathcal{H}_0$ y $\mathcal{A}_0 f \in \mathcal{H}_0$.

Nótese que:

$$\begin{aligned}\partial_t \mathcal{U}_0(t) f &= (u_t(t,x), u_{tt}(t,x)) \\ &= (u_t, \triangle u) \\ &= \mathcal{A}_0 \mathcal{U}_0(t) f\end{aligned} \tag{1.9}$$

donde $\mathcal{A}_0$ es el operador matricial dado por:

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \triangle & 0 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

Sigue de estas ecuaciones, que $\mathcal{A}_0$ es el generador infinitesimal del operador $\mathcal{U}_0(t)$.

Para proceder de la manera inversa demostremos que $\mathcal{A}_0$ es un operador auto-adjunto (negativo) y por lo tanto existe un grupo unitario tal que su generador infinitesimal es $\mathcal{A}_0$.Y por (,) el grupo unitario es $\mathcal{U}_0(t)$.

Otras propiedades de $\mathcal{U}_0(t)$ y de E_0 son:

$$E_0(t)(\mathcal{U}_0(t)f) = E_0(0)(\mathcal{U}_0(t)f), \forall t \tag{1.11}$$

Sea $\mathcal{D}_+^{00}$ el conjunto de f en $C_0^\infty(R^3) \otimes C_0^\infty(R^3)$, tales que, la solución de (1.1) con data inicial f sea cero en el cono con origen en el punto $(0,0)$ y cuyo interior es el conjunto de puntos (t,x) tales que $|\, x \,| \leq t$ y t es positivo .Tal cono lo denotaremos como $C_{[(0,0),|x|\leq t]}$.

$$C_{[(0,0),|x|\leq t]} = \{(t,x) : |\, x \,| \leq t \ \text{ con } \ t \geq 0\}. \tag{1.12}$$

Sea $\mathcal{D}_-^{00}$ el conjunto que se obtiene considerando tiempos negativos .

El siguiente lema garantiza que $\mathcal{D}_\pm^{00}$satisface los 3 axiomas de Lax-Phillips.

Lema 1.13: Si $\mathcal{D}_\pm^{00} = \{f \in C_0^\infty(R^3) \otimes C_0^\infty(R^3) : \quad \mathcal{U}_0(t)f(x) = 0 \ \text{ para } \ |\, x \,| < \pm t \ \text{ con } \ t > 0\}$, entonces:

(i) $\mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_\pm^{00} \subset \mathcal{D}_\pm^{00}$ para $t > 0$.

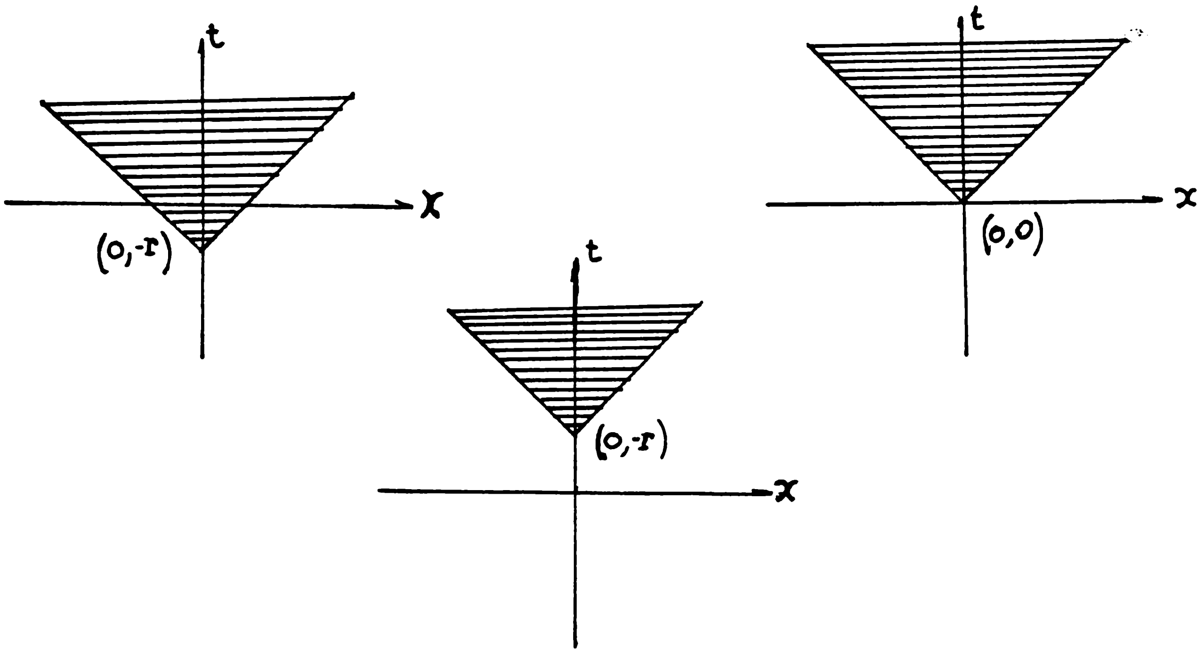
(ii) $\bigcap \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_{\pm}^{00} = \{0\}$.

(iii) $\overline{\bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_{\pm}^{00}} = \mathcal{H}_0$.

Un resultado similar se obtiene para tiempos negativos.

Demostración **: La prueba se llevará a cabo para los tiempos positivos, los mismo argumentos pueden ser utilizados para demostrar que $\mathcal{D}_{-}^{00}$ cumple las propiedades equivalentes .**

Sea$C_{[(0,-r),|x|\leq t+r]}$ **el cono** $\{(t,x) : | x | \leq t + r \text{ y } t + r \geq 0\}$ **. Entonces dependiendo de la r el cono se puede graficar de la siguiente manera :**



Consideremos ahora el punto (t_0, x_0)**, entonces el cono** $C_{[(0,-r)],|x|\leq t+r]}$ **donde** $r \geq | x_0 | - t_0$ **contiene a** (t_0, x_0).

(i) $\mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_+^{00} \subseteq \mathcal{D}_+^{00}$ para $t \geq 0$

Sea $r \geq 0$ y $f \in \mathcal{D}_+^{00}$ entonces $\mathcal{U}_0(t)\mathcal{U}_0(r)f = \mathcal{U}_0(t+r)f(x) = 0$ en $C_{[(0,-r),|x|\leq t+r]}$, este cono contiene al cono $C_{[(0,0),|x|\leq t]}$ y entonces $\mathcal{U}_0(t)(\mathcal{U}_0(r)f(x)) = 0$ en $C_{[(0,0),|x|\leq t]}$ y por lo tanto $\mathcal{U}_0(r)f \in \mathcal{D}_+^{00}$.

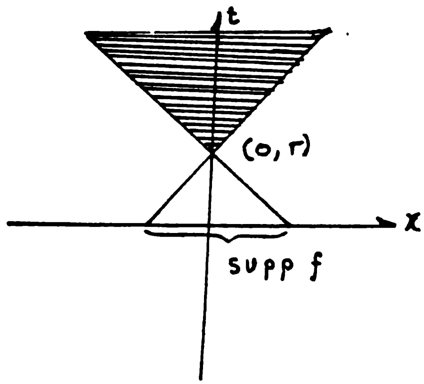
(ii) $\bigcap \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_+^{00} = \{0\}$.

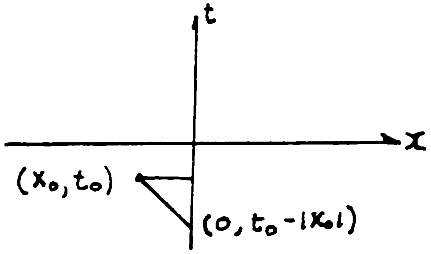
Sea $(t_0, x_0) \in R \otimes R^3$. Cualquier elemento en $\mathcal{U}_0(t+ \mid r \mid)\mathcal{D}_+^{00}$ donde $r \geq\mid x_0 \mid -t_0$ se anula en el punto(x_0, t_0) pero $\bigcap \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_+^{00} \subset \mathcal{U}_0(t+ \mid r \mid)\mathcal{D}_+^{00}$y por lo tanto cualquier elemento de$\bigcap \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_+^{00}$ satisface la misma propiedad .

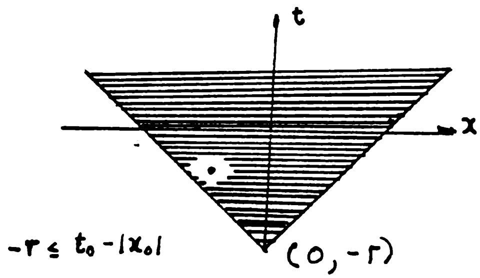
(iii) $\overline{\bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_+^{00}} = \mathcal{H}_V$

Demostraremos que$C_0^\infty(R^3) \otimes C_0^\infty(R^3) \subset \bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_+^{00}$ y como $\overline{C_0^\infty(R^3) \otimes C_0^\infty(R^3)} = \mathcal{H}_0$ tendremos que$\mathcal{H}_V = \overline{\bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_+^{00}}$

Sea$f \in C_0^\infty(R^3) \otimes C_0^\infty(R^3)$ y supongamos que el soporte de f esta contenido en la esfera de radio $r > 0$ (B_r).Entonces por el principio de Huygens la solución de la ecuación de onda (1,1) con data inicial f es cero en el cono $C_{[(0,+r),|x|\leq t]}$







y por lo tanto $\mathcal{U}_0(t)f(x) = 0$ en dicho cono . Lo cual implica que $\mathcal{U}_0(t)\mathcal{U}_0(r)f(x) = 0$ en el cono con origen en (0,0). y esto quiere decir que $\mathcal{U}_0(r)f(x) = \mathcal{D}_-^{00}$ pero entonces $\mathcal{U}_0(-r)\mathcal{U}_0(r)f(x) = f(x) \in \bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_+^{00}$. ∎

Sea $\mathcal{D}_\pm^0 = \{f \in \mathcal{H}_0 : \mathcal{U}_0(t)f(x) = 0, \mid x \mid \leq \pm t\}$ entonces por el lema anterior tenemos que $\mathcal{D}_\pm^0$ satisfacen los axiomas de Lax y Phillips. ($\mathcal{D}_\pm^{00} \subset \mathcal{D}_\pm^0$).

1.2. Comportamiento de la ecuación de onda para tiempos $t \to \infty$

La finalidad de esta sección, es el demostrar que si $u(t,x)$es solución de la ecuación de onda $(1,1)$ y $V(x)$ es una función real tal que $V(x) \leq C \mid x \mid^{-\beta}$ para $\beta \geq 1$ y x suficientemente grande entonces :

$$\lim_{t \to +\infty} \int (V(x) \mid u(t,x) \mid^2) dx = 0 \tag{2.1}$$

donde $\mathcal{U}_0(t)f = (u, u_t)$ y $f \in \mathcal{H}_0$.

El siguiente lema nos da cotas del comportamiento de $u(t,x)$cuando el tiempo tiende a infinito .

Lema 2.2: Sea u(t,x)solución de la ecuación de onda (1,1) con data inicial en $\mathcal{S} \otimes \mathcal{S}$ (funciones de rapido decaimiento).Entonces :

(i) Para cada N y $\epsilon \geq 0$ existe $C_{N,\epsilon} \geq 0$ tal que

$$\mid u(t,x) \mid \leq C_{N,\epsilon}(1+ \mid x \mid + \mid t \mid)^{-N}$$

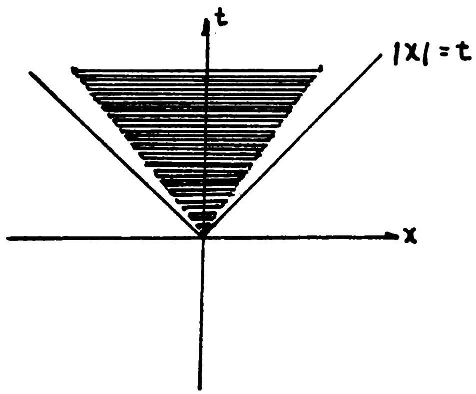
para (t,x) en el cono $C_{[(0,0),(1-\epsilon)|t| \geq |x|]}$ y tambien para(t,x) en el cono $C_{[(0,0),|x| \geq (1+\epsilon)|t|]}$

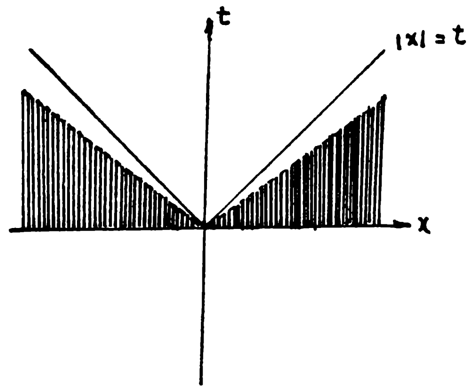
(ii) Existe d tal que

$$\mid u(t,x) \mid \leq d(1+ \mid t \mid)^{-1}$$

para todo t yx .

Este lema se puede demostrar usando argumentos similares a aquellos, que surgen en el método de fase estacionaria, donde se determinan estimaciones del comportamiento en tiempos largos de la ecuación de Schrodinger.También, utilizando fórmulas explícitas de la solución de la ecuación de onda$(1,1)$. Para proceder como en el primer caso véase pag.46 (Reed-Simon vol III)





Observación 2.3: Para cada t y cada $\epsilon \geq 0$ el volumen del conjunto

$$C_{[(0,0),|x|>(1+\epsilon)|t|]} - C_{[(0,0),|x|\geq|t|]} = \{x \in R^3 : \mid t \mid \leq \mid x \mid < (1+\epsilon) \mid t \mid\}$$

es $c\pi(3\epsilon + 3\epsilon^2 + \epsilon^3) \mid t \mid^3$

Nótese también que la $C_{N,\epsilon}$ tiende a infinito cuando ϵ tiende a cero .

Consideremos ahora $f \in \bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_+^0$, entonces, existe $g \in \mathcal{D}_+^0$ y $T \in R$ tales que $f = \mathcal{U}_0(T)g$ y por lo tanto , si $t+T \geq 0$, entonces $\mathcal{U}_0(t)f(x) = \mathcal{U}_0(t+T)g(x) = 0$ en el cono $C_{[(0,-T),|x|\leq t+T]}$

En lo que resta de este capítulo:

(i) $V(x)$ denotará una función real, que pertenezca localmente a $L^{3/2}$ y tal que para las x mayores que alguna r , $V(x) \leq c \mid x \mid^{-\beta}$ para $\beta \geq 1$ ($V \in L^{3/2}(B_r), V \in L^3(B_r'))$.

(ii) $Q(x)$ denotará una función real tal que $Q(x) \in L^2_{loc}$ y es de orden $\mid x \mid^{-\alpha}$ en infinito para $\alpha \geq 2$. Entonces $Q(x)$ es un caso particular de las funciones del tipo $V(x)$.

(iii) $f = (f_0, f_1)$ denotará una función en el conjunto $\bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}^0_+$. A menos que otra cosa se diga explicitamente.

Lema 2.4: Sea$V(x)$,$f \in \mathcal{H}_0$ y $\mathcal{U}_0(t)f = (u, u_t)$, entonces existe una constante $c > 0$ tal que $\int_{B_r}(V(x) \mid u(t,x) \mid^2)dx \leq c\|f\|_0$.

Demostración: Usando la desigualdad de Holder , la de Sobolev y la propiedad de que $\mathcal{U}_0(t)$ es unitario obtenemos que :

$$\int_{B_r}(V(x) \mid u(t,x) \mid^2)dx \leq (\int_{B_r}(\mid V(x) \mid^{3/2})dx)^{2/3}(\int(\mid u(t,x) \mid^6)^{1/3}dx \leq$$

$$c\int(\mid \nabla u(t,x) \mid^2)dx \leq c\|\mathcal{U}_0(t)f\|_0 = c\|f\|_0$$

∎

Corolario 2.5: Sea $Q(x)$,$f \in \mathcal{H}_0$ y $\mathcal{U}_0(t)f = (u, u_t)$, entonces existe una constante tal que: $\int(Q(x) \mid f_0 \mid^2)dx \leq c\|f\|_0$ y por lo tanto

$$\|f\|_Q = \int(\mid \nabla f_0 \mid^2 + Q \mid f_0 \mid^2 + \mid f_1)dx = \|f\|_0 + \int(Q \mid f_0 \mid^2)dx \leq c'\|f\|_0.$$

Demostración: $Q(x) \in L^2 \subset L^{3/2}$ ∎

Corolario 2.6: Sea f en el espacio de la energía de Klein-Gordon (ver comentario abajo) entonces existe $C > 0$ tal que:

$$\int(V(x) \mid f_0 \mid^2)dx \leq C\int(\mid \nabla f_0 \mid^2 + \mid f_0 \mid^2)dx$$

Del primer corolario podemos concluir que $\mathcal{H}_0$ es isomorfo a $\mathcal{H}_Q$ como espacios de Banach , donde $\mathcal{H}_Q$ es la cerradura de $C_0^\infty(R^3) \otimes C_0^\infty(R^3)$ con respecto a la norma $\|f\|_Q$.(Asumiendo a),b)y c) de la introducción)

Del segundo corolario podemos concluir que si consideramos la ecuación de Klein-Gordon

$$(\partial_t^2 + \triangle + m)u(t,x) = 0 \tag{2.7}$$

donde m es estrictamente positivo . en lugar de la ecuación de onda $(1,1)$, obtenemos que $\mathcal{H}_0$es isomorfo a $\mathcal{H}_V$ como espacios de Banach .(Asumiendo a),b)y c) de la introducción) Las normas el el caso de Klein-Gordon son:

$$\|f\|_0^2 = \int (\mid \nabla f_0 \mid^2 + \mid f_0 \mid^2 + \mid f_1 \mid^2) dx.$$

$$\|f\|_V^2 = \|f\|_0^2 + \int (V(x) \mid f_0 \mid^2) dx.$$

Observación 2.8: Cabe notar que en el caso de la ecuación de onda y con una perturbación del tipo $V(x)$ no se sabe si :

$$\|f\|_V \leq \|f\|_0. \tag{2.9}$$

ya que , no se sabe si :

$$\int (V(x) \mid f_0 \mid^2) dx \leq \int (\mid \nabla f_0 \mid^2) dx. \tag{2.10}$$

Nuestro proposito es demostrar que para este caso se tiene que :

$$\lim_{t \to +\infty} \int (V(x) \mid u(t,x) \mid^2) dx = 0 \tag{2.11}$$

donde $\mathcal{U}_0(t)f = (u, u_t)$. Con esto basta para definir los operadores de onda:

$$\omega_\pm : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_V$$

tales que :

a)existan b)$\|\omega_{\pm} f\|_V = \|f\|_0$ y c)que su rango sea $\mathcal{H}_V$.

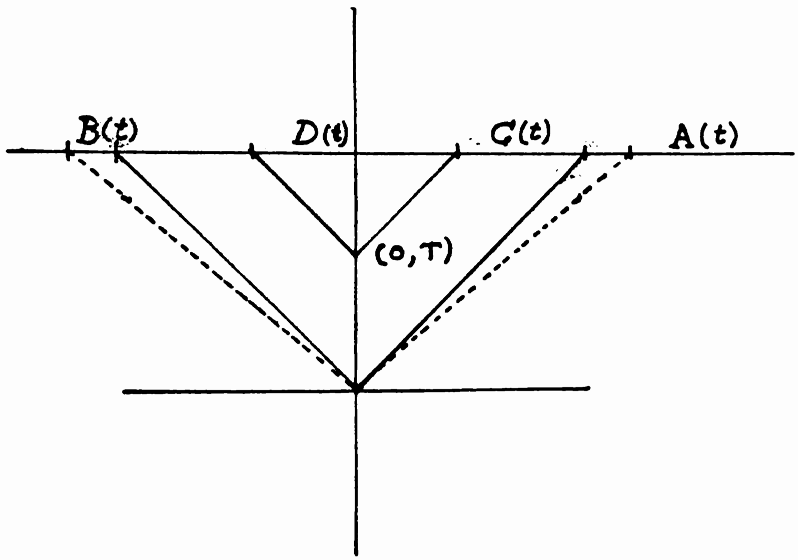
El siguiente corolario nos sera de utilidad mas adelante .

Corolario 2.12: Sea $V(x), f \in \mathcal{H}_0$ y $\mathcal{U}_0(t)f = (u, u_t)$, entonces existe una constante C tal que : $\int_{B'_r}(| V(x) |^2 | u(t,x) |^2)dx \leq C\|f\|_0$

Demostración:

$| V(x) |^2 \in L^{3/2}(B'_r)$ ∎

Supongamos que $f = \mathcal{U}_0(T)g$ donde $g \in \mathcal{D}^0_+$ .Y consideremos las siguientes regiones :



Sea:

$A(t) = \{x \in R^3 :| x |\geq (1+\epsilon) \mid t \mid \; para \; \epsilon \geq 0 \; y \; x \notin B_r\}$.

$B(t) = \{x \in R^3 :| t |\leq| x |\leq (1+\epsilon) \mid t \mid \; para \; \epsilon \geq 0 \; y \; x \notin B_r\}$.

$C(t) = \{x \in R^3 :| t | +T \leq| x |\leq| t | \; y \; ademas \; 0 \leq| t | +Tcon\}$

$\{| t |\geq max(| T |^3 + | T |, 2) \; y \; x \notin B_r\}$.

Nótese que si $T \geq 0$ entonces $C(t) = \emptyset$

$D(t) = \{x \in R^3 :| x |\leq| t | +T \; y \; 0 \leq| t | +T\}$

Como $f \in \bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_+^0$,entonces, $\mathcal{U}_0(t)f(x) = 0$ si $x \in D(t)$. Y por la observación (2,3) tenemos que el volumen de $B(t)$ es $c\pi(3\epsilon + 3\epsilon^2 + \epsilon^3) \mid t \mid^3$.

Lema 2.13: Sea $V(x)$,$f \in \bigcap \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_+^0$ y $\mathcal{U}_0(t)f = (u, u_t)$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que :

$$\int_{A(t)} (V(x) \mid u(t,x) \mid^2)dx \leq \frac{c}{\mid t \mid^\delta}.$$

Demostración: Sea $x \in A(t)$, entonces, como $x \notin B_r$ tendremos que $V(x) \leq C \mid x \mid^{-\beta}$ para alguna $\beta > 1$. Además, tenemos que $\mid t \mid \leq (1+\epsilon) \mid t \mid < \mid x \mid$ y por lo tanto :

$$V(x) \leq \frac{1}{\mid x \mid^{1+\delta}} \leq (\frac{1}{\mid t \mid^{\delta/2}})(\frac{1}{\mid x \mid^{1+\delta/2}}).$$

para alguna $\delta > 0$. Utilizando el lema (,) y la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{(1 + \mid x \mid + \mid t \mid)^2} \leq \frac{1}{\mid x \mid^2}$$

podemos concluir que :

$$\int_{A(t)} (V(x) \mid u(t,x) \mid^2)dx \leq \int_{A(t)} (\frac{C_{2,\epsilon}}{\mid x \mid^\beta (1 + \mid x \mid + \mid t \mid)^2})dx \leq$$

$$\int_{A(t)} (\frac{C_{2,\epsilon}}{\mid t \mid^{\delta/2} \mid x \mid^{1+\delta/2} + \mid x \mid^2})dx \leq \frac{1}{\mid t \mid^{\delta/2}} \int (\frac{C_{2,\epsilon}}{\mid x \mid^{3+\delta/2}})dx \leq \frac{c}{\mid t \mid^\delta}.$$

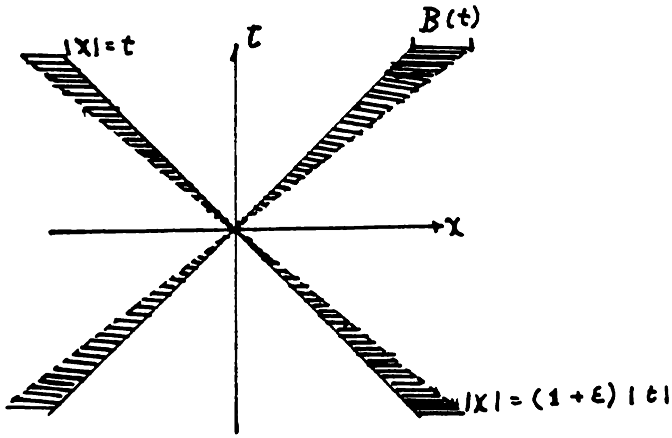
∎

El siguiente corolario nos da una estimación de la norma en L_2 restringida a $A(t)$ de $V(x)u(t,x)$.

Corolario 2.14: Sea $V(x)$ y $u(t,x)$ como en el lema anterior , entonces si definimos la norma $\|Vu\|_2^{A(t)}$ como $\int_{A(t)} (\mid V(x)u(t,x) \mid^2)dx$ tendremos que, existe una constante k_V tal que:

$$\|Vu\|_2^{A(t)} \leq \frac{k}{\mid t \mid^{1+\delta}}.$$

Demostración : Si $x \in A(t)$ entonces $| V(x) |^2 \leq | x |^{2(\beta)}$ para β mayores estrictamente que uno. Ahora,usemos la demostración del lema anterior . ∎



El siguiente lema nos da cotas en la region $B(t)$.

Lema 2.15: Sean $V(x), f$ y u como en el lema (,) , entonces ,existe una constante k_V tal que :

$$\int_{B(t)} (V(x) \mid u(t,x) \mid^2) dx \leq \frac{k}{\mid t \mid^{\delta}}.$$

Demostación : Como $| t | \leq | x |$ y $| t |^2 < (1 + | t |)^2$ entonces :

$$\left(\frac{1}{\mid x \mid^{\beta}}\right)\left(\frac{1}{(1+\mid t \mid)^2} \leq \left(\frac{1}{\mid t \mid^{\beta}}\right)\left(\frac{1}{\mid t \mid^2}\right) \leq \frac{1}{\mid t \mid^{3+\delta}}.$$

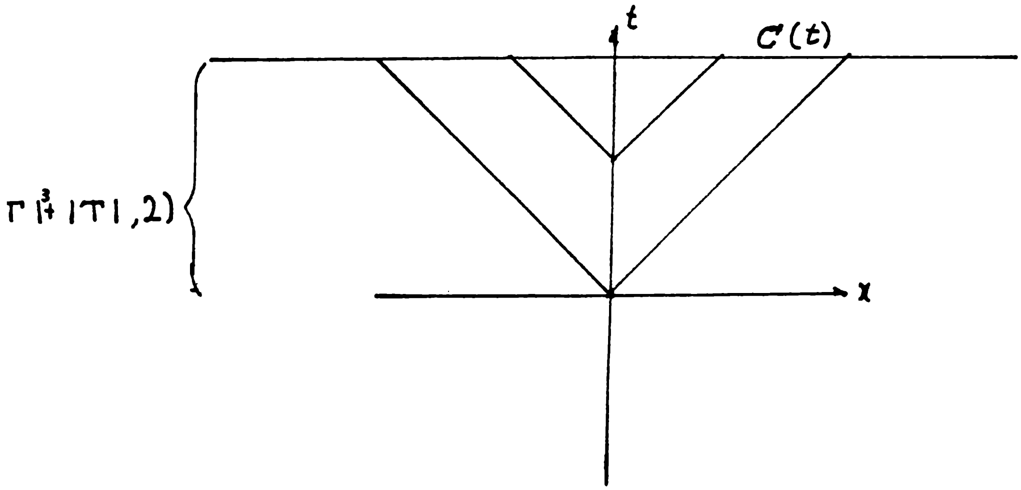
Ahora utilizemos el lema(,)y el hecho de que el volumen de $B(t)$ es $K\pi\epsilon \mid t \mid^3$. para obtener que :

$$\int_{B(t)} (V(x) \mid u(t,x) \mid^2) dx \leq \int_{B(t)} \left(\frac{d}{\mid x \mid^{\beta} (1+ \mid t \mid)^2}\right) dx \leq \int_{B(t)} \left(\frac{d}{\mid t \mid^{3+\delta}}\right) dx \leq$$

$$\left(\frac{k}{\mid t \mid^{3+\delta}}\right) \int_{B(t)} dx \leq \frac{k \; volB(t)}{\mid t \mid^{3+\delta}} \leq \frac{k \; \pi\epsilon \mid t \mid^3}{\mid t \mid^{3+\delta}} = \frac{k}{\mid t \mid^{\delta}}.$$

Corolario 2.16: $\|Vu\|_2^{B(t)} \leq \frac{k}{|t|^{1+\delta}}$

La región $C(t)$ se puede graficar como:



Lema 2.17: Sean$V(x), f$ y u como en el lema anterior .Supongamos que $f = \mathcal{U}_0(T)g$ donde $g \in \mathcal{D}_+^0$ y $T < 0$, entonces existe una constante C_V tal que

$$\int_{C(t)} (V(x) \mid u(t,x) \mid^2) dx \leq \frac{c}{(\mid t \mid + T)^{\delta}}$$

donde δ es estrictamente positiva .

Demostración:

Como en $C(t)$ tenemos que $0 <\mid t \mid +T <\mid x \mid<\mid t \mid< 1+ \mid t \mid$ entonces

$$(\frac{1}{\mid x \mid^{\beta}})(\frac{1}{(1+ \mid t \mid)^2}) \leq (\frac{1}{(\mid t \mid +T)^{\beta}})(\frac{1}{\mid t \mid +T)^2}) = (\frac{1}{(\mid t \mid +T)^{\delta}})(\frac{1}{(\mid t \mid +T)^3}).$$

Ahora , utilizando el lema (,) obtenemos que

$$\int_{C(t)} (V(x) \mid u(t,x) \mid^2) dx \leq \int_{C(t)} (\frac{1}{\mid x \mid^{\beta}})(\frac{d}{(1+ \mid t \mid)^2}) dx \leq (\frac{1}{(\mid t \mid +T)^{\delta}}) \int_{C(t)} (\frac{d}{(\mid t \mid +T)^3}) dx$$

Pero el volumen de $C(t)$ es $k\pi \mid T \mid^3$ (volumen de la esfera de radio $\mid t \mid$ menos el volumen de la esfera de radio$\mid t \mid +T$ con $T > 0$). Ahora consideremos dos casos .

a) Si $\mid T \mid > 1$ entonces como $\mid t \mid > \mid T \mid^3 + \mid T \mid$ tenemos que $\mid t \mid +T > \mid T \mid^3$, lo cual implica que $(\mid t \mid +T)^3 > \mid T \mid^9 > \mid T \mid^3$. Y entonces :

$$(\frac{1}{(\mid t \mid +T)^\delta}) \int_{C(t)} (\frac{d}{(\mid t \mid +T)^3}) dt \leq (\frac{k\pi \mid T \mid^3}{\mid T \mid^3})(\frac{1}{(\mid t \mid +T)^\delta}) = \frac{c}{(\mid t \mid +T)^\delta}.$$

b) Si $\mid T \mid \leq 1$ entonces como $\mid t \mid > 2$ obtendremos que $(\mid t \mid +T)^3 > 1 > \mid T \mid^3$ y por lo tanto

$$(\frac{1}{(\mid t \mid +T)^\delta}) \int_{C(t)} (\frac{d}{(\mid t \mid +T)^3}) dx \leq (\frac{1}{(\mid t \mid +T)^\delta})(\frac{k\pi \mid T \mid^3}{\mid T \mid^3}) \leq \frac{c}{(\mid t \mid +T)^\delta}.$$

∎

Corolario 2.18:

$$\|Vu\|_2^{C(t)} \leq \frac{c}{(\mid t \mid +T)^{1+\delta}}$$

La siguiente proposición nos será de gran importancia en las demostraciones de existencia de operadores de onda .

Proposición 2.19: Siendo $V(x)$, f y u como en los lemas anteriores tenemos que :

(i) $\lim_{t \to +\infty} \int (V(x) \mid u(t,x) \mid^2) dx = 0$

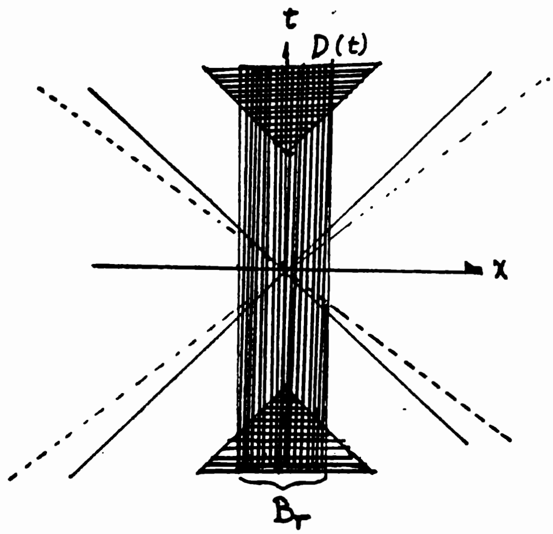
(ii) $lim_{r,s \longrightarrow \infty} \int_s^r (\|V(x)u(t,x)\|_2) dt = 0$

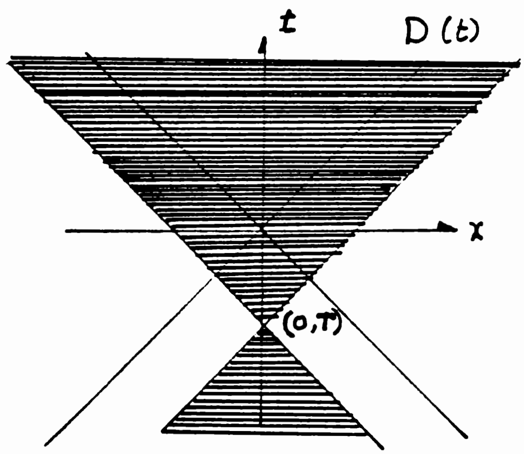
Demostración: Dado que $f \in \bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_+^0$ entonces si $f = \mathcal{U}_0(T)g$ con $g \in \mathcal{D}_+^0$ tendremos que $\mathcal{U}_0(t)f(x) = 0$ en $D(t)$. Sea $T_0 = max(\mid T \mid^3 + \mid T \mid, r, 2)$. Entonces, como $u(t,x) = 0$ para $\mid x \mid \leq \mid t \mid +T$ tenemos que para las $t > T_0$ obtendremos : $\|V(x)u(t,x)\|_2 = \|V(x)u(t,x)\|_2^{|x|>|t|+T}$. Ahora , por los corolarios (,)(,)y(,) podemos concluir que

$$\int_{T_0}^{\infty} (\|V(x)u(t,x)\|_2) dt = \int_{T_0}^{\infty} (\frac{c}{(\mid t \mid +T)^{1+\delta}}) + (\frac{c'}{\mid t \mid^{1+\delta}}) dt < \infty$$

y por lo tanto

$$lim \int_s^r \int_{R^3} (|\, V(x)u(t,x)\, |^2)\, dx dt = 0$$





2.

Sistemas con perturbación

2.1. El espacio de Hilbert $\mathcal{H}_V$ y el grupo $\mathcal{U}_V(t)$

Consideremos la ecuación de onda:

$$\begin{aligned}(\partial_t^2 + \triangle + V(x))u(t,x) &= 0\\ u(x,0) &= f_0 \\ u_t(x,0) &= f_1\end{aligned} \tag{1.1}$$

Donde $V(x)$ es una función real, que pertenece localmente a $L^{3/2}(R^3)$ y de orden $|x|^{-\beta}$ en infinito para $\beta > 1$ ($V \in L^{3/2}, V \in L^3(B_r'))$.

La forma de la energía para la ecuación de onda perturbada $(1.1)_V$. esta dada por :

$$E_V(t)[(u(t,x),u_t(t,x)),(v(t,x),v_t(t,x))] = \int(\nabla u(t,x)\overline{\nabla v(t,x)}+V(x)u(t,x)\overline{v(t,x)}+u_t(t,x)\overline{v_t(t,x)})d \tag{1.2}$$

donde $u(t,x)$ y $v(t,x)$ son soluciones de $(1.1)_V$.

En la demostración de el lema (,) demostraremos que $E_V(t)(u,u_t) = E_0(t)(u,u_t)$ por lo tanto

$$E_V(f) = \int(|\nabla f_0|^2 + V|f_0| + |f_1|)dx \tag{1.3}$$

Definición 1.4: El espacio de Hilbert $\mathcal{H}_V$ será, el espacio obtenido despues de considerar la cerradura del espacio $C_0^\infty(R^3)\otimes C_0^\infty(R^3)$ con respecto a la norma inducida por (1,3).

$$\|f\|_V = [E_V(f)]^{1/2}. \tag{1.5}$$

Definición 1.6: Sea $\mathcal{U}_V(t)$el operador que relaciona la data inicial f con la solución $(u(t,x), u_t(t,x))$ de la ecuación de onda perturbada en el tiempo t .

$$\mathcal{U}_V(t)(f_0(x), f_1(x)) = (u(t,x), u_t(t,x)). \tag{1.7}$$

En el siguiente lema y su corolario veremos que el operador $\mathcal{U}_V(t)$ es unitario .

Lema 1.8: Si $f \in C_0^\infty(R^3) \otimes C_0^\infty(R^3)$, entonces, tenemos que :

$\|\mathcal{U}_V(t)f\|_V = \|f\|_V$

.

*Demostración:*Sea $u(t,x)$ una solución de $(1,1)_V$ con data inicial $f \in C_0^\infty(R^3)\otimes C_0^\infty(R^3)$(esto es $u(t,x)$ tiene soporte compacto con respecto a x). Entonces:

Afimación:$E_V(t)(u(t,x), u_t(t,x)) = E_V(0)(u(t,x), u_t(t,x))$.

Demostación de la afirmación:

$$E_V(t)(u,u_t) - E_V(0)(t)(u,u_t) = \int_0^t (\partial_s E_V(s)(u(s,x), u_s(s,x)))ds =$$

$$\int_0^t \int_{R^3} (\partial_s(|\nabla u(s,x)|^2 + V(x)|u(s,x)|^2 + |u_s(s,x)|^2))dxds$$

Integrando por partes, se obtiene que este ultimo termino es igual a :

$$\int_0^t \int_{R^3} (\triangle u\overline{u_s} + u_s\triangle u + Vu\overline{u_s} + u_sV\overline{u} + u_{ss}\overline{u_s} + u_s\overline{u_{ss}})dxds =$$

$$\int_0^t \int_{R^3} ((\Box_V u)(u_s) + u(\Box_V u))dxds = 0$$

Ahora, regresemos a la demostración del lema :

$$\|\mathcal{U}_V(t)f\|_V = \|u(t,x), u_t(x,t)\|_V = [E_V(t)(u(t,x), u_t(t,x))]^{1/2} =$$

$$[E_V(0)(u(t,x), u_t(t,x))]^{1/2} = [E_V(0)(f)]^{1/2} = \|f\|_V$$

∎

De este lema podemos concluir que :

Corolario 1.9: Si $f \in \mathcal{H}_V$ entonces:

$$\|\mathcal{U}_V(t)f\|_V = \|f\|_V.$$

Demostración: Sea f_n una sucesión de funciones en $C_0^\infty(R^3) \otimes C_0^\infty(R^3)$ que converge a f en $\mathcal{H}_V$.

Como $\mathcal{U}_V(t)(f+g) = \mathcal{U}_V(t)f + \mathcal{U}_V(t)g$ para toda f y $g \in \mathcal{H}_V$ entonces:

$$\mathcal{U}_V(t)f_n - \mathcal{U}_V(t)f = \mathcal{U}_V(t)(f_n - f)$$

y por lo tanto

$$\| \lim_{n\to\infty} \mathcal{U}_V(t)f_n - \mathcal{U}_V(t)f\|_V = 0$$

esto es

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{U}_V(t)f_n\|_V = \|\mathcal{U}_V(t)f\|_V$$

pero para cada n tenemos que

$$\|\mathcal{U}_V(t)f_n\|_V = \|f_n\|_V$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_V = \|f\|_V$$

. ∎

Después de este corolario, es fácil demostrar que $\mathcal{U}_V(t)$ es un grupo uno-paramétrico de operadores unitarios en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_V$. Y por lo tanto, utilizando el teorema de Stone (Yosida 345) existe un operador auto-adjunto (negativo) A con la propiedad de que si $f \in D(A)$ (el dominio de A)entonces

$$\mathcal{U}_V(t)f = e^{itA}f \tag{1.10}$$

A continuación demostraremos que el operador A es igual a el operador matricial dado por:

$$\mathcal{A}_V = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \triangle + V & 0 \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

Para $f \in A$ tenemos que

$$\partial_t \mathcal{U}_V(t)f = A\ e^{itA}\ f \tag{1.12}$$

pero por otro lado sabemos que

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{U}_V(t)f =& (u_t, u_{tt}) \\ =& (u_t, (\triangle + V)u) \\ =& \mathcal{A}_V \mathcal{U}_V(t)f \end{aligned} \tag{1.13}$$

De donde concluimos que $A = \mathcal{A}_V$. El operador matricial A_V es llamado el generador infinitesimal del grupo $\mathcal{D}_+^V$

También es posible proceder de la manera inversa. Esto es, demostrar que la matriz $\mathcal{A}_V$ es un operador auto-adjunto(negativo) y por lo tanto existe un grupo uno-parámetro unitario $(\mathcal{U}_V(t))$ tal que $\mathcal{A}_V$ es su generador infinitesimal .

2.2. Completitud de los operadores de onda $\omega_\pm$

En esta sección se demostrará que los operadores $W_\pm$ (2.2) definidos en $\bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_\pm^0 \bigcap D(\mathcal{A}_V)$ existen y por lo tanto los operadores $\omega_\pm$ (2.4) existen definidos en el espacio $\mathcal{H}_0$.

Luego demostraremos que $\mathcal{D}_{\pm}^{V}$ satisface los axiomas de Lax-Phillips,con lo cual obtenemos que los operadores $\omega_{\pm}$son completos de $\mathcal{H}_0$ a $\mathcal{H}_V$.

Definamos $W(t)$ y $W_{\pm}(t)$ como :

$$W(t) = \mathcal{U}_V(-t)\mathcal{U}_0(t)f \tag{2.1}$$

$$W_{\pm}(t) = s - \lim_{t\to\pm\infty} W(t)f \tag{2.2}$$

donde $f \in \bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_{\pm}^{0} \bigcap D(\mathcal{A}_V)$.

Dado que

$$C_0^{\infty}(R^3) \otimes C_0^{\infty}(R^3) \subset \bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_{\pm}^{00} \subset \bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_{\pm}^{0} \bigcap D(\mathcal{A}_V)$$

Entonces $W(t)$ y $W_{\pm}(t)$ están definidos en un conjunto denso de $\mathcal{H}_0$ En el lema (,) demostraremos que si f pertenece a dicho conjunto , entonces

$$\partial_t W(t)f = \mathcal{U}_V(-t)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -V & 0 \end{pmatrix}\mathcal{U}_0(t)f \tag{2.3}$$

y utilizando este resultado se puede ver que $W_{\pm}(t)$ existe .

Definamos $\omega_{\pm}(t) : \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_V$ como el operador

$$\omega_{\pm}(t)f = \lim_{t\to+\infty} W_{\pm}(t)f_n \tag{2.4}$$

donde $f_n \in \bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_{\pm}^{0} \bigcap D(\mathcal{A}_V)$ y f_n converge a f en $\mathcal{H}_0$.

En el lema (2.8) veremos que la definición anterior es independiente de la sucesión de f_n que se escoja . Y en los teoremas 2.9,2.10,2.13. veremos que el operador $\omega_{\pm}$ es completo, y por lo tanto $\mathcal{H}_0$ es isomorfo a $\mathcal{H}_V$.

Lema 2.5: Sea $f \in \bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_{\pm}^{0} \bigcap D(\mathcal{A}_V)$. Entonces:

$$\lim_{t\to+\infty} \|W(t)\|_V = \|f\|_0.$$

Demostración: Dado que el operador $\mathcal{U}_V(t)$ es unitario tenemos que :

$$\|\mathcal{U}_V(-t)\mathcal{U}_0(t)\|_V^2 = \|\mathcal{U}_0(t)f\|_V^2$$

pero, por definición:

$$\|\mathcal{U}_0(t)f\|_V^2 = \|\mathcal{U}_0(t)f\|_0^2 + \int (V(x)|u(t,x)|^2)d$$

donde $u(t,x)$ es la solución de la ecuación de onda sin perturbación y con data inicial f . Ahora utilizamos el hecho de que $\mathcal{U}_0(t)$ también es un operador unitario y por lo tanto

$$\|\mathcal{U}_0(t)f\|_0 = \|f\|_0$$

y finalmente por la proposición (2.19) del capítulo uno tenemos que

$$\lim_{t\to+\infty} \int (V(x)|u(t,x)|^2)dx = 0$$

∎

Lema 2.6: Sea $f \in \bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_\pm^0 \cap D(\mathcal{A}_V)$

Entonces,

$$\partial_t W(t)f = \mathcal{U}_V(-t)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -V & 0 \end{pmatrix}\mathcal{U}_0(t)f$$

.

Demostración : Como $f \in \bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_\pm^0 \cap D(\mathcal{A}_V)$. Entonces tenemos que

$$\partial_t W(t)f = \partial_t \mathcal{U}_V(-t)\mathcal{U}_0(t)f = \partial_t(e^{-i\mathcal{A}_V t}e^{i\mathcal{A}_0 t}f)$$

$$= -i\mathcal{A}_V\mathcal{U}_V(-t)\mathcal{U}_0(t)f + \mathcal{U}_V(-t)i\mathcal{A}_0\mathcal{U}_0(t)f$$

ahora utilizando las propiedades de que $\mathcal{A}_V\mathcal{U}_V(t) = \mathcal{U}_V(t)\mathcal{A}_V$,

$\mathcal{U}_V(t)(f+g) = \mathcal{U}_V(t)(f) + \mathcal{U}_V(t)(g)$ y de que $\mathcal{A}_V f + \mathcal{A}_0 f = (\mathcal{A}_V \mathcal{A}_0)f$.

Se sigue que

$$= \mathcal{U}_V(-t)(-i)\mathcal{A}_V\mathcal{U}_0(t)f + \mathcal{U}_V(-t)i\mathcal{A}_0\mathcal{U}_0(t)f = \mathcal{U}_V(-t)(-i\mathcal{A}_V\mathcal{U}_0(t)f + i\mathcal{A}_0\mathcal{U}_0(t)f)$$

$$= \mathcal{U}_V(-t)i(\mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_V)\mathcal{U}_0(t)f = \mathcal{U}_V(-t)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -V & 0 \end{pmatrix}\mathcal{U}_0(t)f$$

∎

Lema 2.7: Sea $f \in \bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}^0_{\pm} \bigcap D(\mathcal{A}_V)$.Entonces

$$W_{\pm}(t)f$$

existe $(W_{\pm}(t)f \in \mathcal{H}_V)$

Demostración: La prueba se llevará a cabo solo para tiempos positivos, para tiempos negativos se usan argumentos análogos . Queremos demostrar que

$$\|W(r)f - W(s)f\|_V \longrightarrow 0$$

cuando r y s tienden a infinito . Con lo cual obtendremos que $\lim_{t\to+\infty} W(t)f = W_+(t)f$ forma una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}_V$ que es un espacio completo . Utilizando el lema anterior se sigue que

$$\|W(r)f - W(s)f\|_V = \|\int_s^r (\partial_t W(t)f)dt\|_V$$

$$\leq \int_s^r (\|\partial_t W(t) f\|_V) dt = \int \|\mathcal{U}_V(-t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -V & 0 \end{pmatrix} \mathcal{U}_0(t) f\|_V) dt$$

nuevamente, utilizemos la propiedad de que $\mathcal{U}_V(t)$ es isométrico

$$\leq \int_s^r (\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -V & 0 \end{pmatrix} \mathcal{U}_0(t) f\|_V) dt$$

$$= \int_s^r (\|(0, Vu(t,x))\|_V) dt = \int_s^r (\|Vu(t,x)\|_2) dt$$

.

y finalmente por la proposición (2.19) del capítulo uno tenemos que

$$lim_{r,s \longrightarrow \infty} \int_s^r \int_{R^3} (\|Vu(t,x)\|^2) dx dt = 0$$

∎

De este último lema podemos concluir que el operador $W_{\pm}(t)$ está definido de $\mathcal{H}_0$ a $\mathcal{H}_V$

$$W_{\pm}(t) : \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_V$$

Y que su dominio es $\bigcup \mathcal{U}_0(t) \mathcal{D}_{\pm}^0 \bigcap D(\mathcal{A}_V)$, el cual es denso en $\mathcal{H}_0$.

Lema 2.8: Sean f_n y f_m dos sucesiones distintas que pertenezcan a $\bigcup \mathcal{U}_0(t) \mathcal{D}_{\pm}^0 \bigcap D(\mathcal{A}_V)$ y que además converjan a f en $\mathcal{H}_0$. Entonces

$$\|W_{\pm}(t) f_n - W_{\pm}(t) f_m\|_V \longrightarrow 0$$

cuando n y m tiende a infinito .

Demostración: Utilizando la definición de $W_{\pm}(t)$ y el lema (2.5) se demuestra

$$\|s - \lim_{t\to+\infty} W(t)f_n - s - \lim_{t\to+\infty} W(t)f_m\|_V \leq$$

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \|W(t)(f_n - f_m)\|_V = \|f_n - f_m\|_O$$

ahora, haciendo tender n y m a infinito obtenemos el lemma . ▮

Teorema 2.9: Sea $\omega_\pm(t)$ como en la ecuación (,). Entonces

$$\omega_\pm(t) : \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_V$$

existe

Demostración: La prueba de este lema es básicamente los dos lemas anteriores . Queremos demostrar que si $f \in \mathcal{H}_0$ entonces

$$\omega_\pm(t)f = \lim_{n\to\infty} W_\pm(t)f_n$$

existe, donde $f_n \in \bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}^0_\pm \bigcap D(\mathcal{A}_V)$ y $f_n \longrightarrow f$ en $\mathcal{H}_0$.

Pero por lema (,) $\forall \epsilon > 0, \exists N$ tal que si N y m son mayores que N tendremos que

$$d_V(W_+(t)f_n, W_+(t)f_m) < \epsilon$$

(donde d_V significa la distancia inducida por la norma $\| \ \|_V$)

esto quiere decir que $\omega_\pm(t)$ forma una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}_V$, un espacio completo . ▮

Teorema 2.10: Sea $f \in \mathcal{H}_0$. Entonces

$$\|\omega_\pm(t)f\|_V = \|f\|_0.$$

Demostración: La prueba será sólo para tiempos positivos .

Sea $f_n \in \bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}^0_\pm \cap D(\mathcal{A}_V)$ tal que $f_n \longrightarrow f$ en $\mathcal{H}_0$. Entonces por definición

$$\|\omega_\pm(t)f\|_V = \|\lim_{n\to\infty} W_+(t)f_n\|_V \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\|W_+(t)f_n\|_V$$

pero utilizando el lema (2.5)

$$\|W_+(t)f_n\|_V = \|s - \lim_{t\to+\infty} W(t)f_n\|_V \leq s - \overline{\lim_{t\to+\infty}}\|W(t)f_n\|_V = \|f_n\|_0$$

de donde, se obtiene

$$\|\omega_+(t)f\|_V \leq \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_0 = \|f\|$$

Para demostrar la otra desigualdad procedamos de la siguiente manera. Como estamos asumiendo que la perturbación es positiva ($V \geq 0$) , entonces :

$$\|f_n\|_0^2 = \|\mathcal{U}_0(t)f_n\|_0^2 \leq$$

$$\|\mathcal{U}_0(t)f_n\|_0^2 + \int (V(x)|u(t,x)|^2)dx =$$

$$\|\mathcal{U}_0(t)f_n\|_V^2 = \|\mathcal{U}_V(-t)\mathcal{U}_0(t)f_n\|_V^2.$$

Y como esto es cierto para toda t, entonces hemos demostrado que :

$$\|f_n\|_0^2 \leq \|W_+(t)f_n\|_V$$

Pero,

$$\|f\|_0^2 = \| \lim_{n\to\infty} f_n\|_0^2 \leq$$

$$\| \lim_{n\to\infty} W_+(t) f_n\|_V = \|\omega_+(t) f\|_V$$

. ∎

En el siguiente lema veremos que el operador $\omega_\pm(t)$ posee la propiedad de intercambio.

Lema 2.11: Sea $f \in \mathcal{H}_0$. Entonces :

$$\mathcal{U}_V(t)\omega_\pm(t)f = \omega_\pm(t)\mathcal{U}_0(t)f.$$

Demostración: La prueba se hará sólo para casos positivos . Supongamos que $f \in \bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}^0_\pm \bigcap D(\mathcal{A}_V)$. Entonces, utilizando que en este caso $\omega_+(t)f = W_+(t)f$ y que los operadores $\mathcal{U}_V(t)$ y $\mathcal{U}_0(t)$ son grupos tenemos que :

$$\mathcal{U}_V(r)\omega_+(t)f = \mathcal{U}_V(r)s - \lim_{t\to+\infty} \mathcal{U}_V(-t)\mathcal{U}_0(t)f$$

$$= s - \lim_{t\to+\infty} \mathcal{U}_V(-t+r)\mathcal{U}_0(t)f = s - \lim_{t\to+\infty} \mathcal{U}_V(-t)\mathcal{U}_0(t+r)f$$

$$= \omega_+(t)f\mathcal{U}_0(r)f.$$

Con esto queda demostrado el lema para el caso de que $f \in \bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}^0_\pm \bigcap D(\mathcal{A}_V)$.

Ahora, supongamos que $f \in \mathcal{H}_0$ y sea f_n una sucesión que pertenezca al conjunto $\bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}^0_\pm \bigcap D(\mathcal{A}_V)$ y que tienda a f cuando n tiende a infinito . Entonces, por definición tenemos que

$$W_+(t)f_n \longrightarrow \omega_+(t)f$$

cuando la n tiende a infinito . Pero como $\mathcal{D}_+^V$ es continuo en $\mathcal{H}_V$ entonces

$$\mathcal{U}_V(t)W_+(t)f_n \longrightarrow \mathcal{U}_V(t)\omega_+(t)f$$

cuando n tiende a infinito . Pero por la primera parte de la demostración tenemos que :

$$\mathcal{U}_V(t)W_+(t)f_n = W_+(t)\mathcal{U}_0(t)f_n$$

para toda n . Y por último, como

$$\|\mathcal{U}_0(t)f_n - \mathcal{U}_0(t)f_m\|_0 = \|\mathcal{U}_0(t)(f_n - f_m)\| = \|(f_n - f_m)\|_0$$

entonces obtenemos que:

$$W_+(t)\mathcal{U}_0(t)f_n \longrightarrow \omega_+(t)\mathcal{U}_0(t)f$$

cuando n tiende a infinito . ∎

A continuación definiremos los espacios de entrada y salida para el sistema perturbado en el sentido de Lax-Phillips .

Definición : El espacio de salida esta definido por :

$$\mathcal{D}_+^V = \omega_+(t)\mathcal{D}_+^0$$

El espacio de entrada se define de la misma forma pero considerando tiempos negativos .

En el siguiente lema se demostrará que estos espacios satisfacen los axiomas de Lax-Phillips. Cabe notar que la demostración de el último inciso hace uso de los resultados que se obtiene en el capítulo 3. Mas aún, el capítulo 3 es la demostración de este inciso.

Lema 2.12: (i) $\mathcal{U}_V(t)\mathcal{D}_+^V \subset \mathcal{D}_+^V$ si el tiempo t es positivo $(t \geq 0)$

(ii) $\bigcap \mathcal{U}_V(t)\mathcal{D}_+^V = 0$

(iii) $\overline{\bigcup \mathcal{U}_V(t)\mathcal{D}_+^V} \subseteq \mathcal{H}_V$

(iv) $\overline{\bigcup \mathcal{U}_V(t)\mathcal{D}_+^V} \supseteq \mathcal{H}_V$

Los axiomas analogos para tiempos negativos, tambien se llevan a cabo .

Demostración: La prueba se llevará a cabo solo para tiempos positivos, la demostración para tiempos negativos, es análoga, incluyendo el capítulo 3.

Utilizando la propiedad de intercambio de $\omega_+(t)$ ver lema(2.11), los axiomas de Lax-Phillips para $\mathcal{D}_+^0$,que $\omega_+(t)$ es isométrico y la definicion de el espacio de salida $(\mathcal{D}_+^V)$se pueden demostrar los tres primeros incisos .

(i) $\mathcal{U}_V(t)\mathcal{D}_+^V = \mathcal{U}_V(t)\omega_+(t)\mathcal{D}_+^0 = \omega_+(t)\mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_+^0 \subset \omega_+(t)\mathcal{D}_+^0 = \mathcal{D}_+^V.$

(ii) $\bigcap \mathcal{U}_V(t)\mathcal{D}_+^V = \bigcap \mathcal{U}_V(t)\omega_+(t)\mathcal{D}_+^0 = \bigcap \omega_+(t)\mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_+^0$

$\omega_+(t)\bigcap \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_+^0 = \omega_+(t)0 = 0$

(iii) $\overline{\bigcup \mathcal{U}_V(t)\mathcal{D}_+^V} = \overline{\bigcup \mathcal{U}_V(t)\omega_+(t)\mathcal{D}_+^0} =$

$\overline{\bigcup \omega_+(t)\mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_+^0} = \omega_+(t)\overline{\bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_+^0} =$

$\omega_+(t)\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}_V$

(iv) Como ya mencionamos anteriormente, la prueba de este último inciso esta basada en el capítulo 3. Así que asumamos por el momento los resultados que ahí se obtienen .

Queremos demostrar que $\mathcal{H}_V \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{U}_V(t)\mathcal{D}_+^V}$. Supongamos que no es cierto que la afirmación es cierta, entonces existiría una función f distinta de cero en $\mathcal{H}_V$ tal que no pertenecería al conjunto $\overline{\bigcup \mathcal{U}_V(t)\mathcal{D}_+^V}$. Usando el lema (1.7) de el capítulo 3 se puede ver que si tal es el caso, entonces $\mathcal{A}_V\mathcal{U}_V(t)f$ es E_V-ortogonal a $\mathcal{D}_+^V$ para toda t.

Ahora, por el lema (1.9)de el capítulo $\mathcal{A}_V f$ se puede descomponer en $g+h$ donde g y h satisfacen :

$$\mathcal{U}_0(t)g = 0\ ,\ |x| < n - 1/2$$

$$\mathcal{U}_0(-n)h = 0\ ,\ |x| < n - 1/2$$

pero por el capítulo 3 tenemos que

$$< \mathcal{A}_V f, g >_0 = 0$$

$$< \mathcal{A}_V f, h >_0 = 0$$

y por lo tanto

$$\|\mathcal{A}_V f\|_0 = 0$$

pero por el lema (,) se sabe que si $f \in D(\mathcal{A}_V)$ entonces $f \in \mathcal{H}^2 \otimes \mathcal{H}^1$ donde $\mathcal{H}^n$ es el espacio de Sobolev $n-$dimensional . Y por lo tanto

$$\|\mathcal{A}_V f\|_0 = \int (|\nabla f_1|^2)dx + \int (|(\triangle + V)f_0|^2)dx = 0$$

Pero estamos asumiendo que el operador de Schroedinger $(\triangle + V)$ no tiene espectro puntual. Por lo cual f tiene que ser igual a la pareja $(0, c)$ donde c es una constante, pero además estamos asumiendo que f es E_V−ortogonal a $\bigcup \mathcal{U}_V(t)\mathcal{D}_+^V$, por lo tanto $\forall\ g \in C_0^\infty(R^3) \otimes C_0^\infty(R^3)$ tenemos que $< f, g >_V = 0$, pero

$$< f, g >_V = < (0, c), (g_0, g_1) >_V = \int (c\ \overline{g_1}) dx = 0$$

esto significa que la constante c es igual a cero . Y entonces $f = 0$, contradiciendo nuestra suposición de que f fuera distinta de cero. Y por lo tanto

$$\mathcal{H}_V = \overline{\bigcup \mathcal{U}_V(t)\mathcal{D}_+^V}$$

. ∎

Este último lema y su demostración nos da como corolario que el rango de el operador $\omega_+(t)$ sea todo el espacio $\mathcal{H}_V$.

Teorema 2.13: El operador $\omega_+(t)$ es completo .

Demostración :

$$\omega_+(t)\mathcal{H}_0 = \omega_+(t)\overline{\bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_+^0} =$$

$$\overline{\bigcup \omega_+(t)\mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_+^0} = \overline{\bigcup \mathcal{U}_V(t)\omega_+(t)\mathcal{D}_+^V}$$

$$= \overline{\bigcup \mathcal{U}_V(t)\mathcal{D}_+^V} = \mathcal{H}_V.$$

∎

Hemos, demostrado que

$$\omega_+(t) : \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_V$$

cumple con las tres propiedades que se requieren para que un operador de onda sea completo .

A continuación definiremos el operador de dispersión S(scattering) .

Sea $T_{\pm}$ la representación de translación (ver L-P)

$$T_{\pm} : \mathcal{H}_0 \longrightarrow L^2(R, S^{n-1}) \tag{2.14}$$

Dicha translación se obtiene utilizando la transformada de Radon y modificando, de manera que tenga inversa.(Ver B)

Definamos el operador $\overline{T_{\pm}}$ de el espacio $\mathcal{H}_V$ a el espacio $L^2(R, S^{n-1})$ de la siguiente manera

Sea $f \in \mathcal{H}_0$ entonces

$$\overline{T_{\pm}}\omega_{+}(t)f = T_{\pm}f \tag{2.15}$$

Entonces, finalmente podemos definir el operador de dispersión S (scattering) como

$$S : \overline{T_{-}}\omega_{-}(t)f \longrightarrow \overline{T_{+}}\omega_{+}(t)f. \tag{2.16}$$

de esta manera el operador de dispersión S (scattering) está definido de $L^2(R, S^{n-1})$ a el mismo .

3.

Descomposición de Enss y el decaimiento de la energía

3.1. Descomposición de Enss

En esta sección asumiremos que $f \in \mathcal{H}_V$ y que $f \notin \overline{\bigcup \mathcal{U}_V(t)\mathcal{D}_+^V}$. Esto es que f satisface las hipótesis de la demostración de el inciso (iv) de el lema 2.12 .

Bajo tales hipótesis se puede demostrar que $\mathcal{A}_V f$ se puede descomponer en dos funciones $g + h$ tales que satisfagan :

$$< \mathcal{A}_V f, g >_0 = 0 \tag{1.1}$$

$$< \mathcal{A}_V f, h >_0 = 0 \tag{1.2}$$

Los siguiente lemas tienen como finalidad demostrar que la ecuación (1,1) se satisface . La demostración de (1,2) es analoga . La prueba consiste, en demostrar, las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
< \mathcal{A}_V f, g >_0 &= lim_{t_{n's}\longrightarrow} < \mathcal{U}_0(t_{n's})\mathcal{A}_V f, \mathcal{U}_0(t_{n's})g >_0 \\
&= lim_{t_{n's}\longrightarrow} < \mathcal{U}_V(t_{n's})\mathcal{A}_V f, \mathcal{U}_0(t_{n's})g >_0 \\
&= lim_{t_{n's}\longrightarrow} < \mathcal{U}_V(t_{n's})\mathcal{A}_V f, \mathcal{U}_0(t_{n's})g >_V \\
&= lim_{t_{n's}\longrightarrow} < \mathcal{U}_V(t_{n's})\mathcal{A}_V f, \omega_+(t)\mathcal{U}_0(t_{n's})g >_V \\
&= 0.
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

La primera de ellas es conclución directa de el hecho de que $\mathcal{U}_0(t)$ es un operador unitario:

$$
< \mathcal{A}_V f, g >_0 = < \mathcal{U}_0(t)\mathcal{A}_V f, \mathcal{U}_0(t)g >_0 \tag{1.4}
$$

La segunda igualdad se obtiene demostrando que existe una subsucesión $t_{n's}$ tal que $t_n \to \infty$ que satisface lo siguiente :

$$
lim_{t_{n's}\longrightarrow\infty} \|\mathcal{U}_V(t_{n's})\mathcal{A}_V f - \mathcal{U}_0(t_{n's})\mathcal{A}_V f\|_0 = 0 \tag{1.5}
$$

esto es lo que se demuestra en el lema (1.17).

La tercera igualdad se concluye, después de la sección 2 de el capítulo 1 .Y se demuestra en el lema (1.16).

La cuarta igualdad se obtiene de la siguiente manera, dado que $g \in \bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_+^0 \bigcap D(\overline{\mathcal{A}_V})$ ver (1.8) entonces $\omega_+(t)f = W_+(t)f$ de donde se concluye vía el método de Cooks, que:

$$
\|\omega_+(t)\mathcal{U}_0(t_{n,s}g - \mathcal{U}_0(t_{n,s}g\|_V = 0 \tag{1.6}
$$

Cuando las $t_{n's}$tiende a infinito.

Y la última desigualdad se obtiene, demostrando que si $\mathcal{U}_0(t)g \in \mathcal{D}_+^0$ entonces, por definición tenemos $\omega_+(t)\mathcal{U}_0(t)g \in \mathcal{D}_+^V$. Pero $\mathcal{A}_V\mathcal{U}_V(t)f$ es E_V-ortogonal a $\mathcal{D}_+^V$ para toda t .Con lo cual obtenemos (1.14) Procedamos a demostrar los lemas que justifican cada uno de estos pasos.

Lema 1.7: Sea $f \in \mathcal{H}_V$ tal que $f \notin \overline{\bigcup \mathcal{U}_V(t)\mathcal{D}_+^V}$. Entonces, $\mathcal{A}_V\mathcal{U}_V(t)f$ es E_V-ortogonal a $\mathcal{D}_+^V$para toda t. (De donde podemos concluir que $f \in D(\mathcal{A}_V^j)$ $,j = 0,1,2,$)

Demostación Como $f \notin \overline{\bigcup \mathcal{U}_V(t)\mathcal{D}_+^V}$ entonces f es E_V-ortogonal a $\bigcup \mathcal{U}_V(t)\mathcal{D}_+^V$ (cualquier combinación de elementos de $\bigcup \mathcal{U}_V(t)\mathcal{D}_+^V$ pertenece a este mismo conjunto) Esto es

$$< f, \mathcal{U}_V(t)g >_V = 0 \; \forall t \; y \; \forall g \in \mathcal{D}_+^V$$

Y de las propiedades de $\mathcal{U}_V(t)$ se ve que

$$< \mathcal{U}_V(t)f, g >_V = 0 \; \forall t \; y \; \forall g \in \mathcal{D}_+^V$$

y por lo tanto

$$\frac{\mathcal{U}_V(t+\epsilon) + \mathcal{U}_V(t)}{\epsilon}$$

es E_V-ortogonal a $\mathcal{D}_+^V$ para toda t.

De donde podemos concluir que

$$\partial_t \mathcal{U}_V(t)f = \mathcal{A}_V\mathcal{U}_V(t)f$$

es E_V-ortogonal a $\mathcal{D}_+^V$ para toda t . $(\partial_t \mathcal{A}_V\mathcal{U}_V(t)f = \mathcal{A}_V^2\mathcal{U}_V(t)$) ∎

En el siguiente lema hacemos uso de la siguiente definición :

$D(\overline{\mathcal{A}_V}) = \{f \in \mathcal{H}_0 : \mathcal{A}_V f \in \mathcal{H}_V\}$.

$(\mathcal{A}_V f \in \mathcal{H}_V$ en el sentido débil)

Nótese que $D(\mathcal{A}_V) \subseteq D(\overline{\mathcal{A}_V})$.

Lema 1.8: Supongamos que f es como en el lema anterior, entonces $\mathcal{A}_V f = g + h$ donde $g \in \bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_+^0 \cap D(\overline{\mathcal{A}_V})$ y $h \in \bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_-^0 \cap D(\overline{\mathcal{A}_V})$.

Demostración: Usando la transformada de Radon, podemos obtener la representación de la translación del espacio libre (ver B , L-P)

$T : \mathcal{H}_0 \longrightarrow L^2(R, S^{n-1})$

Dicha translación satisface que $\mathcal{U}_0(t)f \longrightarrow k(s-t)$.

Consideremos $T\mathcal{A}_V f$ y descompongámoslo en su parte entrante y su parte saliente, a la manera de Volker Enss.Escojamos φ y ψ en $C^\infty(R)$ de manera que satisfagan lo siguiente :

$0 \leq \varphi \leq 1$

$\varphi(s) = \begin{cases} 1 & para \quad s > 1/2 \\ 0 & para \quad s < -1/2 \end{cases}$

y $\psi = 1 - \varphi$

ahora definamos g y h como la funciones que satisfacen :

$$Tg = \varphi T\mathcal{A}_V f \tag{1.9}$$

$$Th = \psi T\mathcal{A}_V f \tag{1.10}$$

Entonces tenemos que $\mathcal{A}_V f = g + h$ (Como T es un operador unitario , entonces $\|g\|_0 \leq \|\mathcal{A}_V f\|_0$)

Utilizando las propiedades de la translación obtenemos

$T\mathcal{U}_0(n)g = k(s-n)$

donde $k(s-n) = 0$ para $s - n < -1/2$

y por lo tanto $\mathcal{U}_0(n)g = 0$ para $|x| < n - 1/2$.

Análogamente se puede demostrar que $\mathcal{U}_0 h = 0$ para $|x| < n - 1/2$.

Por último habrá que demostrar que $\mathcal{A}_V g$ pertenece a $\mathcal{H}_V$ en el sentido débil .

Sabemos que

$$T\mathcal{A}_0 g = \partial_s Tg = \partial_s(\varphi T\mathcal{A}_V f)$$

de donde

$$T\mathcal{A}_0 g = (\partial_s\varphi)T\mathcal{A}_V f + \varphi(\partial s T\mathcal{A}_V f)$$

$$\leq \varphi T\mathcal{A}_V f + \varphi T\mathcal{A}_0\mathcal{A}_V f$$

por lo tanto

$$\|\mathcal{A}_0\|_0 \leq \|\mathcal{A}_V f\|_0 + \|\mathcal{A}_0\mathcal{A}_V f\|_0.$$

Hemos demostrado que g pertenece al dominio de $\mathcal{A}_0$ $(D(\mathcal{A}_0))$. Pero por el lema (,) de la siguiente sección se tiene que

$$D(\mathcal{A}_0) = D(\overline{\mathcal{A}_V}) \tag{1.11}$$

de donde concluimos que g pertenece a $D(\overline{\mathcal{A}_V})$. De la misma forma se demuestra que h pertenece a ese conjunto . ∎

Queda abierta la siguiente pregunta :

$g \in D(\mathcal{A}_V)$?.

Una posible manera de demostrar esto es tratar de verificar si la siguiente desigualdad se lleva a cabo :

$\int(V(x)|g_0|^2)dx \leq \int(V(x)|f_1|^2)dx \leq \|\mathcal{A}_V f\|_V < \infty$

Regresemos ahora a la demostracion de esta sección .

Observación 1.12: Como $g \in \bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_+^0$ entonces $\mathcal{U}_0(t_{n's})g \in \mathcal{D}_+^0$ (para $t_{n's}$suficientemente grandes) y por definición $\omega_+(t)\mathcal{U}_0(t_{n's})g \in \mathcal{D}_+^V$. Pero por el primer lema de esta sección se sabe que $\mathcal{A}_V\mathcal{U}_V(t_{n's})f$ es E_V-ortogonal a $\mathcal{D}_+^V$ para toda t . Y por ello hemos demostrado :

$$lim_{t_{n's}\to\infty} < \mathcal{A}_V\mathcal{U}_V(t_{n's})f, \omega_+(t)\mathcal{U}_0(t_{n's})g >_V = 0. \tag{1.13}$$

En lo que resta de esta sección f y g serán como en el último lema.

Lema 1.14:

$$lim_{t_{n's}\to\infty}\|\omega_+(t)\mathcal{U}_0(t_{n's})g - \mathcal{U}_0(t_{n's})g\|_V = 0.$$

Demostración : Usando la propiedad de intercambio de $\omega_+(t)$ lema(2.11) del segundo capítulo se puede ver que

$\|\omega_+(t)\mathcal{U}_0(t_{n's})g - \mathcal{U}_0(t_{n's})g\|_V = \|\mathcal{U}_V(t_{n's})\omega_+(t)g - \mathcal{U}_0(t_{n's})g\|_V$

y ahora usando que $\mathcal{U}_V(t)$ es una isometría

$= \|\mathcal{U}_V(-t_{n's}+t_{n's})\omega_+(t)g - \mathcal{U}_V(-t_{n's})\mathcal{U}_0(t_{n's})g\|_V = \|\omega_+(t)g - \mathcal{U}_V(t_{n's})\mathcal{U}_0(t_{n's})\|_V$

Pero ya que $g \in \bigcup \mathcal{U}_0(t)\mathcal{D}_+^0 \bigcap D(\overline{\mathcal{A}_V})$ entonces $\omega_+(t)g = W_+g$ de donde, se sigue que

$\leq lim_{t\to\infty}\|w(t)g - W(t_{n's})g\|_V$

y por lo tanto

$lim_{t_{n's}\longrightarrow\infty}\|\omega_+(t)\mathcal{U}_0(t_{n's})g - \mathcal{U}_0(t_{n's})g\|_V \leq lim_{t_{n's}\longrightarrow\infty} lim_{t\longrightarrow\infty}\|W(t)g - W(t_{n's}g\|_V$

$\leq \int_{t_{n's}}^{t}(\|\partial_t W(r)g\|_V)ds = 0$ ∎

En el siguiente lema se ve que cuando el tiempo es suficientemente grande la diferencia entre los productos interiores es tan pequena como se quiera.

Lema 1.15: $lim_{t_{n's}\longrightarrow\infty} < \mathcal{U}_V(t_{n's})\mathcal{A}_V f, \mathcal{U}_0(t_{n's})g >_V = lim_{t_{n's}\longrightarrow\infty} < \mathcal{U}_V(t_{n's})\mathcal{A}_V f, \mathcal{U}_0(t_{n's})g >_0$

Demostración : Por definicíon tenemos que

$$< (f_0, f_1), (g_0, g_1) >_V = < (f_0, f_1), (g_0, g_1) >_0 + \int (V(x) f_0 \overline{g_0}) dx$$

por lo tanto

$|\lim_{t_{n's}\to+\infty} < \mathcal{U}_V(t_{n's})\mathcal{A}_V f - \mathcal{U}_0(t_{n's})g >_V - < \mathcal{U}_V(t_{n's})\mathcal{A}_V f - \mathcal{U}_0(t_{n's})g >_0 |$

$\leq |\lim_{t_{n's}\to+\infty} \int (V(x)(\mathcal{U}_V(t_{n's})\mathcal{A}_V f)_0 \overline{(\mathcal{U}_0(t_{n's})g)_0}) dx|$

donde $(\ )_0$ significa que estamos considerando solamente la primera componente.

Ahora, utilizando la desigualdad de Holder (recuerdemos que estamos asumiendo $V \geq 0$)

$\leq |\lim_{t_{n's} \to +\infty} (\int V(x) |(\mathcal{U}_V(t_{n's}) \mathcal{A}_V f)_0|^2 dx)^{1/2} (\int V(x) |(\mathcal{U}_0(t_{n's}) g)_0|^2 dx)^{1/2}|$

$\leq \|\mathcal{A}_V f\|_V |\lim_{t_{n's} \to +\infty} (\int V(x) |(\mathcal{U}_0(t_{n's}) g)_0|^2 dx)^{1/2}|$

Finalmente utilizando la proposición (2.19)del capítulo 1.Par obtener que la ultima desigualdad es igual a cero . ∎

Lema 1.16: Existe una subsucesión de $t_{n's}$ tal que $t_n \to \infty$ y

$\lim_{t_{n's} \to +\infty} \|\mathcal{U}_V(t_{n's}) \mathcal{A}_V f - \mathcal{U}_0(t_{n's}) \mathcal{A}_V f\|_0 = 0$

Demostación: Sea $u(t,x), v(t,x)$ y $U(s,t,x)$ las soluciones de la siguiente ecuaciones respectivamente .

$$\begin{aligned} \Box_V u(t,x) &= 0 \\ u(t,x) &= f_0 \\ u_t(t,x) &= f_1 \end{aligned} \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned} \Box v(t,x) &= 0 \\ v(t,x) &= f_0 \\ v_t(t,x) &= f_1 \end{aligned} \tag{1.18}$$

y por ultimo

$$\begin{aligned} \Box U(s,t,x) &= 0 \\ U(s,t,x) &= 0 \\ U_s(s,t,x) &= V(x) u(t,x) \end{aligned} \tag{1.19}$$

Entonces, utilizando el principio de Duhamel se puede ver que

$$\mathcal{U}_V(t) f - \mathcal{U}_0(t) f = \int_0^t (U_0(t-s) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ V(x) & 0 \end{pmatrix} \mathcal{U}_V(s) f) ds. \tag{1.20}$$

Y, por lo tanto

$$\|\mathcal{U}_V(t)\mathcal{A}_V f - \mathcal{U}_0(t)\mathcal{A}_V f\|_0 \le$$

$$\int_0^t \|\mathcal{U}_0(t-s)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ V(x) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Delta + V(x) & 0 \end{pmatrix}\mathcal{U}_V(s)f\|_0 ds =$$

$$\int_0^t \|\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ V(x) & 0 \end{pmatrix}\mathcal{U}_V(s)f\|_0 ds \le$$

$|t|$ max $_{|s|<|t|}\|(0, V(x)u_s(s,x))\|_0$

donde

$$(u(s,x), u_s(s,x)) = \mathcal{U}_V(s)f$$

.

Ahora sea $R > |t|$, entonces, como

$$\int_{|x|>R}(|V(x)u_s(s,x)|^2)dx \le \int_{|x|>R}(\frac{|u_s(s,x)^2}{|x|^{2\beta}})dx.$$

para $\beta > 1$. Y como $|x|^{-2\beta} < R^{-2\beta}$, entonces

$$\frac{1}{R^{2\beta}}\int(|u_s(s,x)|^2)dx \le \frac{\|\mathcal{U}_V(s)f\|_0}{R^{2\beta}}$$

por lo cual

$\lim_{t\to+\infty} |t|\ \max_{|s|<|t|}\|(0, V(x)u_s(s,x)\|_0^{|x|>R} \le \lim_{t\to+\infty} \frac{|t|c}{R^{2\beta}}$

pero $R > |t|$ y entonces este límite es cero .

Para concluir basta con demostrar que existe una subsucesión de $t_{n's}$ tal que $t_n \to \infty$ y

$\lim_{t_{n's}\to+\infty} |t_{n's}|$ max $_{|s|<|t_{n's}|}\|(0, V(x)u_s(s,x))\|_0^{|x|<R} = 0$

Procedamos a demostrar este último paso.

Usando las desigualdades de Holder y de Sobolev podemos obtener

$\int_{|x|<R}(|V(x)u_s(s,x)|^2)dx \leq (\int_{|x|<R}|V(x)|^3dx)^{2/3}(\int_{|x|<R}|\nabla u_s(s,x)|^2dx)^{1/3}$

$c\|\mathcal{A}_V\mathcal{U}_V(s)f\|_0^{|x|<R}$.

Ahora bien, por el lema (,) de la siguiente sección existe una subsucesión $t_{n's}$ de t_n tal que

$$\|\mathcal{A}_V\mathcal{U}_V(t_{n's})f\|_0^{|x|<R} < n \tag{1.21}$$

para toda N . Y por lo tanto

$\lim_{t_{n's}\to+\infty}|t_{n's}| \max_{|s|<|t_{n's}|}\|(0,V(x)u_s(s,x))\|_0^{|x|<R} \leq \lim_{t_{n's}\to+\infty}\frac{|t_{n's}|c}{n}$

luego entonces este límite es cero. ∎

3.2. Decaimiento de la energía

En esta sección demostraremos que el dominio de el operador matricial $\mathcal{A}_V$ ($D(\mathcal{A}_V)$) está contenido en el dominio del operador matricial $D(\mathcal{A}_V)$. También demostraremos que si $f \in D(\mathcal{A}_V^j)$ $j = 0,1,2$, entonces existe una subsucesión $t_{n's}$ de $t_n \to \infty$ tal que

$$\lim_{t_{n's}\to+\infty}\|\mathcal{A}_V\mathcal{U}_V(t_{n's})f\|_0^{|x|<R} = 0. \tag{2.1}$$

La prueba de este último resultado consiste en demostrar que para dicho f se tiene que

$\mathcal{A}_V f \in \mathcal{H}^2(B_r) \otimes \mathcal{H}^1(B_r)$

y entonces utilizando el Teorema de Rellich obtenemos que:

La inclusión

$i : \mathcal{H}^2(B_r) \otimes \mathcal{H}^1(B_r) \hookrightarrow \mathcal{H}^1(B_r) \otimes \mathcal{H}^0(B_r)$, es compacta .

obtenemos que el conjunto de $f \in D(\mathcal{A}_V^j) j = 0,1,2$ es compacto en $\mathcal{H}_0$ Por lo cual basta demostrar que existe una sucesión t_n tal que $\mathcal{A}_V \mathcal{U}_V(t_n) f$ converja débilmente a cero en $\mathcal{H}_0$ cuando $t_n \to \infty$.Esto es :

$$lim_{t_n} \to \infty < \mathcal{A}_V \mathcal{U}_V(t_n) f, g >_0 \tag{2.2}$$

para todas las g en el espacio $\mathcal{H}_V$. Para poder concluir que existe una subsucesión $t_{n's}$ de $t_n \to \infty$

tal que $\mathcal{A}_V \mathcal{U}_V(t_{n's}) f$ converge fuertemente a cero en $\mathcal{H}_0^{|x|<R}$ cuando las $t_{n,s}$ tienden a infinito .Esto es

$$\lim_{t_{n's} \to +\infty} \|\mathcal{A}_V \mathcal{U}_V(t_{n's}) f\|_0^{|x|<R} = 0 \tag{2.3}$$

Recordemos la definición del dominio de los operadores $\mathcal{A}_V^n$ f se dice que esta en $D(\mathcal{A}_V^n)$ si satisface las siguientes propiedades. a)Que f pertenezca a el espacio $\mathcal{H}_V$. b)En caso de que n sea impar, entonces :

$$((\triangle + V(x))^{n-1/2} f_1, (\triangle + V(x))^{n+1/2} f_0) \in \mathcal{H}_V$$

en el sentido débil . c)Y en caso de que n sea par, entonces :

$$((\triangle + V(x))^{n/2} f_0, (\triangle + V(x))^{n/2} f_1) \in \mathcal{H}_V$$

Sabemos que si f es tal que pertenezca a $\mathcal{H}_V$ pero que no pertenezca a $\bigcup \mathcal{U}_0(t) \mathcal{D}_\pm^0 \bigcap D(\mathcal{A}_V)$ entonces f pertenece al dominio de los operadores $\mathcal{A}_V^n$ para $n = 0,1,2$. En el siguiente lema demostraremos que si tal es el caso, entonces $\mathcal{A}_V f$ pertenece al producto de espacios de Sobolev $\mathcal{H}^2(B_r) \otimes \mathcal{H}^1(B_r)$.

Lema 2.4: Si $f \in D(\mathcal{A}_V^j)$ $j = 0,1,2$ entonces $\mathcal{A}_V f \in \mathcal{H}^2(B_r) \otimes \mathcal{H}^1(B_r)$.

Demostración: Puesto que

$$\int (|\triangle + V(x)) f_0|^2) dx \leq \|\mathcal{A}_V f\|_V$$

y

$$\int (|\nabla(\triangle + V(x))f_0|^2)dx \leq \|\mathcal{A}_V^2 f\|_V$$

entonces podemos concluir que $(\triangle + V(x))f_0 \in \mathcal{H}^1(B_r)$

Para probar que $f_1 \in \mathcal{H}^2(B_r)$ es suficiente demostrar que f_1 ,∇f_1 y $\triangle f_1$ pertenecen al espacio $L^2(R^3)$ (Que tal es suficiente viene de el siguiente hecho:

Como $\xi_i \xi_j \leq C(|\xi_i|^2 + |\xi_j|^2) = C|\xi|^2$

entonces

$$\int |\widehat{\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j} f}|^2 dx = \int |\xi_i \xi_j \hat{f}|^2 dx \leq$$

$$\int |(|\xi|^2)\hat{f}|^2 dx = \int |\widehat{\triangle f}|^2 dx \int |\triangle f|^2 dx.)$$

Dado que $\int |f_1|^2 dx \leq \|f\|_V$, entonces f_1 pertenece al espacio L^2. También es fácil observar que $\int |\nabla f_1|^2 dx \leq \|\mathcal{A}_V f\|_V^2$ de donde se concluye que tambien ∇f pertenece a el espacio L^2. Para demostrar el último paso observemos que :

$$\int |\triangle f_1|^2 dx \leq \|\mathcal{A}_0 \mathcal{A}_V f\|_0^2$$

y entonces basta con demostra que esta última norma converge .

Nótese que

$$\mathcal{A}_0 \mathcal{A}_V f = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \triangle & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ (\triangle + V(x)) & 0 \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} (\triangle + V(x)) & 0 \\ 0 & \triangle \end{pmatrix} f$$

Entonces obtenemos que la norma es igual a :

$$\|\mathcal{A}_0 \mathcal{A}_V f\|_0 = \int |\nabla(\triangle + V(x))f_0|^2 + |\triangle f_1|^2 dx$$

Ahora bien, dado que $f \in D(\mathcal{A}_V^2)$ entonces $\mathcal{A}_V f \in D(\mathcal{A}_V)$ pero por el elma (.) sabemos que $D(\mathcal{A}_V) \subseteq D(\mathcal{A}_0)$ y por lo tanto tenemos que $\mathcal{A}_V f \in D(\mathcal{A}_0)$ que por definición significa que $\mathcal{A}_0(\mathcal{A}_V f) \in \mathcal{H}_0$ y por lo tanto

$$\|\mathcal{A}_0 \mathcal{A}_V f\|_0 < \infty$$

$\blacksquare$

Ahora, pasaremos a demostrar que existe una sucesión t_n tal que $\mathcal{A}_V \mathcal{U}_V(t_n)$ converge débilmente en $\mathcal{H}_0$.

Observación 2.5: Si el especto de $\mathcal{A}_V$ es absolutamente continuo, entonces para cada $f \in D(\mathcal{A}_V)$

$$\lim_{t \to +\infty} < \mathcal{U}_V(t) f, g >_V = 0$$

para todos las h en el espacio $\mathcal{H}_V$.

Demostración : Sea $f \in D(\mathcal{A}_V)$ y $h \in \mathcal{H}_V$, entonces usando el teorema espectral

$$< e^{i\mathcal{A}_V(t)} f, h >_V = \int_{\sigma(\mathcal{A}_V)} e^{i\lambda t} d < E(\lambda) f, h >_V \; = \int_{\sigma(\mathcal{A}_V)} e^{i\lambda t} d < E(\lambda) f, h >_V .$$

y por ser $dm(\lambda)$ una medida absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue dx tenemos que existe l en L^1 tal que

$$\int f dm(\lambda) = \int fl \; dx$$

de donde, si aplicamos el teorema de Riemann-Lebesgue ($\|\widehat{f}\|_\infty \leq (2\pi)^{-n/2} \|f\|_1$)

tenemos que $\widehat{m}(t) \in C_\infty(R^n)$ el espacio de Banach, con la norma del supremo y que consiste de las funciones continuas que se hacen cero en infinito .

Y por lo tanto

$$\lim_{t \to +\infty} < \mathcal{A}_V \mathcal{U}_V(t) f, h >_V = 0$$

para todas las h en el espacio $\mathcal{H}_V$. $\blacksquare$

Nosotros estamos asumiendo que nuestra perturbación es tal que el operador matricial $\mathcal{A}_V$ no tiene espectro puntual. En el siguiente lema demostraremos que si tal es el caso, entonces obtenemos convergencia débil en el espacio $\mathcal{H}_V$. Y en el lema que le sigue demostraremos que eso implica convergencia débil en $\mathcal{H}_0$ que es lo que necesitamos obtener, para poder demostrar decaimiento de la energía .

Lema 2.6: Si $\mathcal{A}_V$ no tiene espectro puntual, entonces existe una sucesión $\{t\}$ tal que

$$\lim_{t\to+\infty} < \mathcal{A}_V \mathcal{U}_V(t)f, h >_V = 0$$

para todas las h en el espacio $\mathcal{H}_V$.

La demostración de este lema está basada en el teorema de Wiener y su corolario. Ver demostración en L-P pag.145 sección V lema(2.3).

La demostración de el siguiente lema, utiliza el lema de representación de Riesz

.

Lema 2.7: Si $f \in D(\mathcal{A}_V)$ y $\lim_{t\to+\infty} < \mathcal{U}_V(t)\mathcal{A}_V f, h >_V = 0$ para toda $h \in \mathcal{H}_V$, entonces

$$\lim_{t\to+\infty} < \mathcal{U}_V(t)\mathcal{A}_V f, h >_0$$

para toda $h \in \mathcal{H}_V$

Definamos la funcional $F_h : \mathcal{H}_V \to R$ con $h \in \mathcal{H}_V$ de la siguiente manera

$$F_h(\mathcal{U}_V(t)f) = < \mathcal{U}_V(t)f, h >_0$$

esta funcional es acotada, ya que

$$|F_h(f)| \leq \|\mathcal{U}_V(t)f\|_0 \|h\|_0 \leq c\|\mathcal{U}_V(t)f\|_V \|h\|_V = k\|f\|_V$$

y utilizando el teorema de representación de Riesz sabemos que existe una función $l \in \mathcal{H}_V$ tal que

$$F_g(\mathcal{U}_V(t)f) = < \mathcal{U}_V(t)f, l >_V$$

Ahora consideremos $f \in D(\mathcal{A}_V)$. Por lo anterior podemos concluir que, para todas las h en el espacio $\mathcal{H}_V$ existe l en el mismo espacio tal que

$$< \mathcal{U}_V(t)\mathcal{A}_V f, g >_0 = < \mathcal{U}_V(t)\mathcal{A}_V f, l >_V .$$

Ahora tomando límites cuando t tiende a infinito de los dos lados de la igualdad y utilizando la hipótesis de que $\mathcal{U}_V(t)\mathcal{A}_V f$ converge débilmente en $\mathcal{H}_V$ (ver lema anterior) concluimos la prueba. ∎

Como corolario de los lemas anteriores, obtenemos el siguiente lema

Lema 2.8: Si $f \in D(\mathcal{A}_V^j)$ $j = 0, 1, 2$, entonces existe una subsucesión $t_{n's}$ de t_n $\to \infty$

$$\|\mathcal{A}_V \mathcal{U}_V(t_{n's}) f\|_0^{|x|<R} < n$$

para toda n .

Ahora pasemos a el lema de los dominios .

Definición: Sea $D(\overline{\mathcal{A}_V})$ el conjunto de las funciones f que pertenezcan a el espacio $\mathcal{H}_0$ y que satisfagan que $\mathcal{A}_V f$ pertenece a el espacio $\mathcal{H}_V$ en el sentido débil .

En el siguiente lema demostraremos que este conjunto es igual al dominio de $\mathcal{A}_0$ .Y ya que $\mathcal{H}_V \subseteq \mathcal{H}_0$ entonces este conjunto contiene a el dominio de $\mathcal{A}_V$

Lema 2.9: $D(\overline{\mathcal{A}_V}) = D(\mathcal{A}_0)$

Demostración Sea $f \in D(\mathcal{A}_0)$, entonces tenemos que

$$\|f\|_0^2 = \int (|\nabla f_0|^2 + |f_1|^2) dx < \infty$$

y

$$\|\mathcal{A}_0 f\|_0^2 = \int (|\nabla f_1^2 + |\triangle f_0|^2) dx < \infty$$

Para demostrar que $f \in D(\overline{\mathcal{A}_V})$ basta probar que

$$\|\mathcal{A}_V f\|_V = \int (|\nabla f_1|^2 + V(x)|f_1|^2 + |(\triangle + V(x)) f_0|^2) dx < \infty$$

Asumamos que $V(x) \leq M$ para $|x| > R$ (dado que $V(x) = o(|x|^{-\beta})$) Entonces recordando que $V(x) \in L^2_{loc} \subset L^{3/2}_{loc}$ y utilizando las desigualdades de Holder y de Sobolev tenemos que

$$\int (V(x)|f_1|^2) dx \leq \int_{|x|<R} (V(x)|f_1|^2) dx + M \int_{|x|>R} |f_1|^2 dx \leq$$

$$\left(\int_{|x|<R} |V(x)|^{3/2} ds\right)^{2/3} \left(\int_{|x|<r} |f_1|^2 dx\right)^{1/3} + M\|f\|_0 \leq$$

$$C\left(\int |\nabla f_1|^2 dx\right)^{1/3} + M\|f\|_0 \leq C\|\mathcal{A}_0 f\|_0 + M\|f\|_0 < \infty$$

Ahora demostremos que $\int |(\triangle + V(x))f_0|^2 dx < \infty$

Dado que

$$\int |(\triangle + V(x))f_0|^2 dx \leq \int |\triangle f_0|^2 + |V(x)f_0|^2 + 2|\triangle f_0||V(x)|dx \leq$$

$$\leq \|\mathcal{A}_0 f\|_0 + \int |V(x)f_0|^2 dx$$

entonces basta probar que

$$\int |V(x)f_0|^2 dx < \infty$$

Esto último lo haremos en dos pasos

a)

$$\int_{|x|>R} |V(x)f_0|^2 dx \leq \int_{|x|>R} \frac{|f_0^2}{|x|^{2\beta}} dx \leq$$

$$\leq \left(\int |x|^{-3\beta} dx\right)^{2/3} \left(\int |f_0|^6 dx\right)^{1/3} \leq C\int |\nabla f_0|^2 dx \leq C\|f\|_0 < \infty$$

.

b)Para demostra que tambien es cierto, en el interior de la esfera (B_r))

$$\int_{|x|<R} |V(x)f_0|^2 dx \leq \int_{|x|<R} |V(x)| dx sup_{|x|<R} |f_0^2$$

$$\leq c\int_{|x|<R} |\nabla f_0|^2 dx \leq c\int |\triangle f_0|^2 dx + \int_{|x|<R} |f_0|^2 dx |leq$$

$$\|\mathcal{A}_0 f\|_0 + \int |\nabla f_0 dx \leq \|\mathcal{A}_0 f\|_0 + \|f\|_0 < \infty$$

Por lo cual podemos concluir que :

$$D(\mathcal{A}_0) \subseteq D(\overline{\mathcal{A}_V})$$

Para demostrar la otra contensión, llamemos A' a la restricción de $\mathcal{A}_V$ a $D(\mathcal{A}_0)$. Si $\mathcal{A}_V$ fuera una extensión propia de A' entonces para λ tal que el rango de $\lambda - \mathcal{A}_V = \mathcal{H}_0$ vemos que $\lambda - \mathcal{A}_V$ tiene que tener un vector nulo f no trivial

$$\lambda f - \mathcal{A}_0 f = 0$$

esto es $\lambda f_0 - f_1 = 0$ y $\lambda f_1 - (\triangle + V(x))f_0 = 0$

Y por lo tanto $\lambda^2 f_0 - (\triangle + V(x))f_0 = 0$ como distribuciones .

Sea $\overline{\theta} \in C_0^\infty$, entonces

$(\lambda^2 f_0 - (\triangle + V(x))f_0)\overline{\theta} = \int(\lambda^2 f_0\overline{\theta} + \triangle f_0\overline{\theta} + V(x)f_0\overline{\theta})dx = 0$

Pero $f_0 \in \mathcal{H}^1$ y aproximándolo por funciones C_0^∞ obtenemos que

$$\int(\lambda^2|f_0|^2 + |\nabla f_0|^2 + V(x)|f_0|^2)dx = 0$$

y si λ es escogida de manera que $\lambda^2 > M$, entonces

$$\int V(x)|f_0|^2 dx \leq \int_{|x|<R} V(x)|f_0|^2 dx + M\int_{|x|>R} |f_0^2 dx \leq \int \lambda^2|f_0|^2 dx + \int |\nabla f_0|^2 dx$$

y por lo tanto f_0 , pero $\lambda f_0 = f_1$ y finalmente $f = 0$ lo cual es una contradición con lo supuesto . ∎

Observación 2.10: $D(\mathcal{A}_0)_{|x|<R} = D(\mathcal{A}_V)_{|x|<R}$

La demostración directa de que $\mathcal{A}_V$ es un operador auto-adjunto(negativo) se puede encontrar en (P).

Biliografía

Libros

[B] Brambila, F.,Scattering amplitude for large frequencies, Thesis, M.I.T., 1982.

[Be] Berthier,A.,M.,Spectral theory and wave operators for the Schrodinger equation, Pitmann, 1985.

[C] Carrier,G., F., Partial differential equations, Academic Press, 1976.

[C-H] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of mathematical physics, Vol.1,2, 1962.

[C-K] Colton,D., and Kress,R., Integral equation methods in scattering theory, Wiley-Interscience,1983.

[G,G-V] Gel'fand,I.M., Graev, M.I., and Vilenkin, N.,Ya., Generalized functions, Vol. 1,2,3,4,5., Academic Press, 1966.

[G-G] Golubitsky, M., and Guillemin, V., Stable mapping and their singularities , Springer Verlag, Berlin, 1973.

[H] Hormander,L., Linear partial differential operators, Springer Verlag , Berlin , fourth edition, 1954.

[H]$_{1,2}$ Hormander,L., The analysis of Linear partial differential operators, Vol. 1,2, Springer Verlag, 1983.

[J] John, Fritz, Partial differential equations, Springer Verlag, third edition, 1982.

[K] Kato, T., Perturbation theory for linear operators, Springer Verlag, New York, 1976.

[K-F] Kolmogorov, A., and Fomin, S., Elementos de la teoria de funciones y del análisis funcional, M.I.R.,1972.

[L-P] Lax, P., and Phillips., S.,Scattering theory, Academic Press,1969.

[R-S] Reed, M., and Simon, B., Methods of modern mathematical physics, Vol. 1,2,3,4, Academic Press, 1980,1975,1978,1978.

[R] Rudin,W., Functional analysis, McGraw Hill, 1973.

[R1] Rudin,W., Real and complex analysis, McGraw Hill, 1967.

[Ro] Royden, H., L., Real analysis, second edition, Macmillan,1968.

[T] Taylor,M., Pseudodifferential operators, Princeton University press, 1981.

[T] Treves.F., Topological vector spaces distributions and kernels, Academic Press, 1967.

[Y] Yosida, K., Functional analysis, Springer Verlag, Berlin, 1965.

Artículos

[C-L] Courant,R., and Lax, p., The propagation of discontinuities in wave motion, Proc., N., A., S., 1956.

[D-T] Deift, P., and Trubowitz,E., Inverse scattering on the line , Comm. on pure and applied math, 1979.

[E] Enss, V., Asymptotic completness for quantum mechanical potential scattering , Comm. in mathematical physics 1,2, Springer Verlag, 1978,1979.

[E] Ehrenpreis, L., Solutions of some problems of division, Am.J. math., 1954.

[H] Helgason, S., The Radon transform on euclidean spaces,compact two poitns, homogeneous and Grassmann manifolds, Acta math., 113, 1965.

[Ho] Hormander, L., Fourier integral operators I, Acta math., 1971.

[L] Lax, P., Asymptotic solutions of ascillatory initial value problem, Duke math. journal,1957.

[L-P]$_1$ Lax,P., and Phillips. R., Analitic properties of the Schroedinger scattering matrix, perturbation theory and its applications in quantum mechanics, C.Wilcox Ed., New York, 1966.

[L-P]$_2$ Lax. P., and Phillips, R., A logaritmic bound on the location of the poles of the scattering matrix, Archive for Rational Mechanics and Analysis , Vol. 40 , 1971.

[L-P]$_3$ Lax,P., and Phillips, R., The acustic equation with an indefinite energy form and the Schrodinger equation, Journal of functional analysis, 1967.

[M] Melrose, R., Asymtotic expansion of the scattering amplitude in potential scattering, Sin publicar.

[P] Phillips,R., Scattering theory for the wave equation with a short range perturbation, Indiana university math. journal., vol.31 , No. 5 (1982) , 609 -639.

[P]$_1$ Phillips,R., Scattering theory for the wave equation with a short range perturbation II , Por aparecer .

[illegible]

fin.