UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

TEOREMAS SOBRE LOS CIRCULOS GEODESICOS EN UNA SUPERFICIE

Por JAVIER BARROS SIERRA

TESIS para optar el grado de maestro en ciencias matemáticas

MEXICO 1947.

INDICE

I N D I C E.

NOTA PREVIA

NOTA PREVIA.

Estimo conveniente decir algo sobre el contenido de esta tesis.

El primer capítulo, es puramente introductorio y no contiene demostraciones. En los párrafos 2.1 a 2.4 del capítulo segùndo, la exposición es detallada y se incluyen demostraciones completas, algunas de las cuales implican trabajo personal mío.

Las demostraciones que se dan completas en los párrafos restantes del segundo capítulo, son originales.

El capítulo tercero, finalmente, es esencialmente idéntico del artículo "Teoremas sobre los círculos geodésicos y la curvatura gaussiana", del que somos autores Roberto Vázquez y yo, y que es resultado de investigaciones hechas en el Instituto de Matemáticas.

J.B.S.

CAPITULO I

COORDENADAS GAUSSIANAS EN UNA SUPERFICIE

CAPITULO I

COORDENADAS GEODESICAS EN UNA SUPERFICIE.

1.1 Forma geodésica del elemento de arco.

Si en una superficie S dada por la ecuación

$$\bar{r} = \bar{r}\,(u,v)$$

la red paramétrica está constituída por una familia de geodésicas (curvas v = cte.) y la familia correspondiente de trayectorias ortogonales (u = cte), se tiene en S, por definición, un sistema geodésico de coordenadas.

Sea, conforme a la notación usual:

$$\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}\right)^2 = \bar{r}_u^2 = E; \quad \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\right)^2 = \bar{r}_v^2 = G;$$

$$\bar{r}_u \cdot \bar{r}_v = F. \tag{1}$$

Necesariamente, en nuestro caso E es función de u solamente; además, $F = 0$. Luego la primera forma (cuadrática) fundamental puede escribirse en la forma "geodésica" (W.C.G., pág.150)

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2. \qquad (2)$$

Como u puede considerarse, evidentemente, la distancia sobre una curva cualquiera v = cte medida desde una trayectoria ortogonal arbitraria $u = 0$. Cada dos trayectorias ortogonales de las geodésicas comprenden arcos iguales en todas éstas; por ello, llámase a dichas trayectorias "paralelos geodésicos".

Recíprocamente, si ds^2 tiene la forma (2), entonces las curvas v = cte son geodésicas y las curvas u = cte (ortogonales a aquellas) son paralelos geodésicos; por tanto, u puede interpretarse como la distancia medida sobre una geodésica a partir de un paralelo inicial.

1.2 <u>Elemento de área</u> (W.C.G. pág.85)

Cuando se usan coordenadas geodésicas, el elemento de área en S es:

$$dA = \sqrt{G}\,du\,dv$$

y el área A de una región cerrada R en S:

$$A = \iint_R \sqrt{G}\,du\,dv \qquad (1)$$

1.3 <u>Curvatura gaussiana</u>.

La ecuación característica de Gauss, que expresa la curvatura total o gaussiana K, se reduce en este caso a la forma (W.C. G. pág.153):

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}\,. \qquad (1)$$

La curvatura "íntegra" T de una región R es:

$$T = \iint_R K\,dA = \iint_R K\sqrt{G}\;du\,dv \tag{2}$$

1.4 Curvatura geodésica.

La curvatura geodésica k_g de las curvas $u = \text{cte}$ (paralelos geodésicos) es (C.E.W., pág.114):

$$k_g = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} L\,\sqrt{G}. \tag{1}$$

CAPITULO II

LOS CIRCULOS GEODESICOS

CAPITULO II

LOS CIRCULOS GEODESICOS.

2.1 Coordenadas polares geodésicas. Círculos geodésicos.

De aquí en adelante, todas las consideraciones y resultados se referirán a superficies, o porciones de superficie, en las que por cada punto pasa una geodésica, y sólo una, en cada dirección y por cada dos puntos pasa una sola geodésica ------- (Darboux, págs.421 a 423).

Entonces, si elegimos como curvas v = cte a las geodésicas (mejor, semigeodésicas) que salen de un punto 0 (origen) y como curvas u = cte a las trayectorias ortogonales de dichas geodésicas, tenemos un sistema geodésico de coordenadas que, salvo en 0, no presenta ninguna singularidad, y en el que ds^2 tiene la forma 1.1(2).

Obviamente, puede escogerse como u la distancia r medida sobre cada geodésica a partir del origen 0. Luego las curvas r = cte. son los lugares de los puntos equidistantes (geodésicamente) de 0; como por otra parte son curvas cerradas y -

ortogonales a las geodésicas, reciben el nombre de <u>círculos geodésicos</u> (Eisenhart, pág.180).

Si además se elige como v el ángulo θ que forma en 0 una geodésica cualquiera con una geodésica arbitraria pero fija $\theta = 0$, el sistema geodésico de coordenadas pasa a llamarse <u>polar</u> y r y θ se designan por <u>coordenadas polares</u> (geodésicas) teniéndose:

$$ds^2 = dr^2 + G\, d\,\theta^2 \tag{1}$$

y además

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2} \tag{2}$$

<u>Teorema</u>. Es condición necesaria y suficiente para que un sistema geodésico, esto es, aquel en que ds^2 tiene la forma 1.1(2), sea polar que:

$$\sqrt{G} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = 1 \qquad \text{para} \quad u = 0. \tag{3}$$

a) La condición es necesaria. (Eisenhart, pág.181).

Demostración: Si u y v son coordenadas polares, es decir, si $u = r$ y $v = \theta$, el vector $\bar{r}\,(o,v)$ del origen 0 es independiente de v. Por consiguiente

$$\bar{r}_v\,(o,v) = 0,$$

y en vista de 1.1(1):

$$G\,(o,v) = 0,$$

de donde

$$\sqrt{G(o,v)} = 0.$$

Por otra parte se tiene:

$$\theta = \lim_{u \to 0} \frac{\int_0^\theta \sqrt{G(u,v)}\, dv}{u} = \lim_{u \to 0} \int_0^\theta \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\, dv,$$

aplicando el teorema de L'Hospital; pero

$$\int_0^\theta dv = \theta,$$

por lo que debe tenerse:

$$\lim_{u \to 0} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 1,$$

y por la continuidad de $\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}$:

$$\left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)_{u=0} = 1.$$

b) La condición es suficiente.

Demostración: la distancia entre las dos geodésicas (cualesquiera) $v = 0$ y $v = c$, medida sobre la curva $u = u$ es:

$$\lambda = \int_0^c \sqrt{G(u,v)}\, dv \;;$$

pero, por la primera parte de la hipótesis:

$$\lim_{u \to 0} \sqrt{G(u,v)} = \sqrt{G(0,v)} = 0$$

$$\therefore \quad \lambda \to 0 \quad \text{si} \quad u \to 0.$$

Esto es, todas las geodésicas (v = cte) concurren en un --- punto 0, al cual se reduce la curva $u = 0$; por ende, $u = r$ - (distancia geodésica).

Además:

$$\theta = \lim_{u \to 0} \frac{\int_0^c \sqrt{G(u,v)}\, dv}{u} = \lim_{u \to 0} \int_0^c \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\, dv.$$

Ahora, por la parte final de la hipótesis:

$$\theta \to c \quad \text{si} \quad u \to o.$$

Luego $\theta = c$ (ángulo polar).

En lo sucesivo, sólo usaremos coordenadas polares geodésicas.

2.2 Desarrollo en serie de $\sqrt{G}$. (W.C.G., pág.186)

Supongamos, en adelante, que $\sqrt{G}$ es función analítica. Se tiene pues:

$$\sqrt{G} = (\sqrt{G})_o + \left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\right)_o r + \left(\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}\right)_o \frac{r^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3\sqrt{G}}{\partial r^3}\right)_o \frac{r^3}{3!} + \ldots ,$$

desarrollando en serie de potencias de r.

Obtendremos los primeros coeficientes: por 2.1(3):

$$(\sqrt{G})_o = 0, \quad \left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\right)_o = 1 \tag{1}$$

Además, por 2.1(2):

$$\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2} = -K\sqrt{G} , \tag{2}$$

de donde:

$$\frac{\partial^3\sqrt{G}}{\partial r^3} = -K \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r} - \sqrt{G} \frac{\partial K}{\partial r} .$$

Por consiguiente:

$$\left(\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}\right)_o = 0; \quad \left(\frac{\partial^3\sqrt{G}}{\partial r^3}\right)_o = -K_o ,$$

Siendo K_o la curvatura gaussiana en el origen 0. Sustituyendo:

$$\sqrt{G} = r - \frac{1}{6} K_o r^3 + \ldots \tag{3}$$

2.3 Circunferencia y área de un círculo geodésico.

La circunferencia C y el área A de un círculo geodésico son funciones de r solamente y tienen por valores (W.C.G., pág.187):

$$C(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{G}\, d\theta = 2\pi r - \frac{\pi}{3} K_o\, r^3 + \ldots ; \qquad (1)$$

$$A(r) = \int_0^r \int_0^{2\pi} \sqrt{G}\, dr\, d\theta = \pi r^2 - \frac{\pi}{12} K_o r^4 + \ldots \qquad (2)$$

Se vé fácilmente que si r es suficientemente pequeño, la circunferencia y el área son menores o mayores que $2\pi r$ y πr^2, respectivamente, según que la curvatura gaussiana en 0 sea positiva o negativa, respectivamente.

Evidentemente se tiene:

$$\frac{dA}{dr} = C, \qquad (3)$$

que es la relación fundamental que liga el área y la circunferencia de un círculo geodésico de radio variable r.

2.4 Nuevas expresiones de la curvatura gaussiana en un punto.

De 2.3(1) y 2.3(2) resulta (W.C.G., pág.187):

$$K_o = \frac{3}{\pi} \lim_{r \to o} \frac{2\pi r - C}{r^3} \qquad (1)$$

$$K_o = \frac{12}{\pi} \lim_{r \to o} \frac{\pi r^2 - A}{r^4} . \qquad (2)$$

Con estas expresiones de K_o como límite se comprueba que la curvatura gaussiana en un punto sólo depende de la métrica de la superficie, ya que sólo intervienen distancias medidas sobre geodésicas y áreas.

2.5 El teorema de Gauss-Bonnet en los círculos geodésicos.

Para el caso en que se usan coordenadas polares, se cum- plen 1.3(1), 1.3(2) y 1.4(1). Luego:

$$\iint_R K dA = \iint_R - \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2} dr\, d\theta = - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2} dr. \qquad (1)$$

Integrando:

$$\iint_R K dA = - \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} + \phi(\theta) \right]_0^r = - \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} - 1 \right),$$

ya que $\phi(\theta)$ es una función (arbitraria) de θ y además se cumple 2.2(1). Por tanto:

$$\iint_R K dA = 2\pi - \int_0^{2\pi} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} d\theta = 2\pi - \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} \sqrt{G}\, d\theta \qquad (2)$$

$$= 2\pi - \int_c k_g ds, \qquad (3)$$

quedando así demostrado el teorema de Gauss-Bonnet (Eisenhart, pág.191) en el caso particular de los círculos geodésicos.

2.6 Relación entre el área de un círculo geodésico y la curvatura geodésica en la circunferencia.

De 2.3(3) y 2.3(1):

$$\frac{d^2A}{dr^2} = \frac{dC}{dr} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} d\theta$$

y como consecuencia de 2.5(2) se obtiene

$$\frac{d^2A}{dr^2} = \int_c k_g ds,$$

resultado establecido por Garrett Birkhoff.

2.7 Algunos teoremas sobre círculos geodésicos en las superficies de curvatura constante.

Teorema 1. Si K es función de r solamente, cualquiera que sea el origen elegido en S, entonces K es constante en S.

Demostración: consideremos todos los círculos geodésicos con centro en O. Por la hipótesis, cada uno de ellos es una curva K = cte. Ahora, consideremos un círculo geodésico con centro en O. En todos los puntos de este último círculo la curvatura K es la misma, por la hipótesis; pero como el valor de K no depende del sistema de referencia, se sigue que en todos los círculos geodésicos con centro en O la curvatura K es la misma. Luego la superficie es de curvatura constante.

Teorema 2. Es condición necesaria y suficiente para que S sea de curvatura constante que $\sqrt{G}$ sea función de r solamente, para cualquier origen elegido.

a) La condición es necesaria: si K = cte se tiene, integrando la ecuación diferencial 2.2(2) y sujetando la solución a las condiciones iniciales 2.2(1) (Eisenhart, pág.277):

$$\begin{array}{lll} \sqrt{G} = \operatorname{sen}(\sqrt{K}\, r) & \text{si} & K > 0 \\ \sqrt{G} = \operatorname{sen} h(\sqrt{-K}\, r) & \text{si} & K < 0 \\ \sqrt{G} = r & \text{si} & K = 0 \end{array} \qquad (1)$$

En cada caso, $\sqrt{G}$ es función de r solamente.

b) La condición es suficiente: si $\sqrt{G}$ es función de r sólo, entonces de 2.2(2) resulta $K = K(r)$. Luego por el teorema 1: K = cte.

Teorema 3. Es condición necesaria y suficiente para que S sea de curvatura constante que las áreas o las circunferen--

cias de todos los círculos geodésicos de igual radio r en S sean iguales.

a) La condición es necesaria: si $K = cte$, entonces $\sqrt{G}$ es función de r solamente, por el teorema 2 a), y tiene una de las expresiones 2.7(1), cualquiera que sea el origen elegido. Luego, por 2.3(1) y 2.3(2), $C(r)$ y $A(r)$ tienen los mismos valores, para cada r, independientemente del centro considerado.

b) La condición es suficiente: si $A(r)$ o $C(r)$ son las mismas funciones de r para cualquier origen, resulta de 2.4(1) y 2.4(2) que K es la misma para todo punto de S.

<u>Teorema</u> 4. Es condición necesaria y suficiente para que S sea de curvatura constante que los círculos geodésicos de S sean curvas de curvatura geodésica constante (Bianchi, pág.291).

a) La condición es necesaria: si $K = cte$, entonces $\sqrt{G}$ es función de r solamente, por el teorema 2 a). Luego, por 1.4(1), k_g resulta función de r exclusivamente; por tanto k_g es constante para cada curva $r = cte$.

b) la condición es suficiente: se tiene para los círculos geodésicos, por 1.4(1):

$$k_g = \frac{\partial L\sqrt{G}}{\partial r} .$$

Si todas las curvas $r = cte$ son tales que en cada una $k_g = cte$ se tiene, integrando la ecuación anterior:

$$\sqrt{G} = \phi(\theta)\ e^r,$$

en que $\phi(\theta)$ es una función arbitraria de θ. Resulta:

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r} = \phi(\theta)\ e^r;$$

pero $\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r} = 1$ para $r = o$. Por tanto $\phi(\theta) = 1$ para $r = o$.

Se concluye que debe ser $\phi(\theta) = cte = 1$, ya que $\phi(\theta)$ es independiente de r. Entonces, $\sqrt{G}$ es función de r solamente y del teorema 2 b) se sigue que $K = cte$ en S.

CAPITULO III

NUEVOS TEOREMAS SOBRE LOS CIRCULOS GEODESICOS Y LA CURVATURA GAUSSIANA

CAPITULO III

NUEVOS TEOREMAS SOBRE LOS CIRCULOS GEODESICOS Y LA CURVATURA GAUSSIANA.

3.1 Introduccion y Resumen.

George D. Birkhoff se ocupó, meses antes de su muerte, en ciertos aspectos de la teoría de las superficies. Entre otros problemas, intentó la caracterización de las superficies por medio de relaciones entre áreas, circunferencias y radios de círculos geodésicos. Con respecto a esta cuestión, planteó la siguiente conjetura: si para cierta $a > 0$ fija, todos los círculos geodésicos de radio a en una superficie tienen la misma área, entonces la superficie es de curvatura (gaussiana) constante.

Paralelamente, puede emitirse esta otra conjetura: si existe una cierta $a > 0$ para la cual las circunferencias de todos los círculos geodésicos de radio a en la superficie son iguales, entonces la superficie es de curvatura constante.

R.Vázquez y yo hemos obtenido algunos resultados al intentar la demostración de la conjetura de Birkhoff. Resumiremos a continuación dichos resultados:

I. A cada punto P de una superficie S puede asociársele una superficie de revolución σ_p con polo p, a la que llamaremos "imagen" y que tiene las siguientes propiedades:

a) Círculos geodésicos de iguales radios con centros en P y p tienen iguales áreas y circunferencias.

b) Las curvaturas gaussianas en P y p son iguales; más aún, las integrales de las curvaturas gaussianas a lo largo de circunferencias y las curvaturas "íntegras" en círculos del mismo radio con centros en P y p son iguales, de donde resulta la igualdad de curvaturas medias sobre las circunferencias y dentro de los círculos.

c) La condición necesaria y suficiente para que la curvatura gaussiana en P sea igual a la curvatura media en todo círculo o en toda circunferencia con centro en P es que σ_p sea de curvatura constante.

II. Cada una de las hipótesis siguientes, relativas a dos puntos P y P_1 de la misma superficie o de superficies distintas, implica la identidad de las imágenes σ_p y σ_{p1} y por lo tanto la igualdad de curvaturas "integras" y de integrales de contorno de las curvaturas gaussianas, respectivamente, en círculos y circunferencias de igual radio con centros en P y P_1, etc. (véase I).

a) Que la igualdad de áreas de círculos geodésicos con centros en P y P_1 implique la igualdad de las circunferencias respectivas, o recíprocamente.

b) Que las curvaturas medias en círculos de igual área con centros en P y P_1 o las curvaturas medias a lo largo de las -

circunferencias correspondientes sean iguales.

c) Que para círculos geodésicos de igual área con centros en P y P_1 la igualdad de curvaturas medias a lo largo de -- las circunferencias implique la igualdad de curvaturas medias- dentro de los círculos y además exista un cierto radio para el cual las áreas sean iguales.

III. Si existe algún radio para el cual los círculos geo- désicos con centros en P y P_1 tienen igual área, entonces - existen círculos de igual área, interiores a los primeros, en- los cuales las curvaturas íntegras son iguales. Un corolario- de este teorema es que existen dos puntos, uno dentro de cada- círculo interior, en que las curvaturas gaussianas son iguales.

IV. Si en todo punto P de una superficie S, la curvatu ra gaussiana es igual a la curvatura media a lo largo de toda- circunferencia geodésica con centro en P y para cada par de- puntos de S existe un radio $a > 0$ (no necesariamente el -- mismo para todo par de puntos) para el que las áreas de los círculos geodésicos correspondientes son iguales, entonces la su- perficie es de curvatura constante.

3.2 Imagen de una superficie en un punto.

Consideremos un sistema de coordenadas polares geodésicas- con origen en el punto P de una superficie S; la métrica es- tá dada por 2.1(1), estando $\sqrt{G}$ sujeta a las condiciones 2.2(3). La curvatura gaussiana está expresada por 2.2(2).

Los círculos geodésicos son las curvas r = constante; la- circunferencia y el área de un círculo geodésico de radio r - están dadas por 2.3(1) y 2.3(2), respectivamente, Cumpliéndose 2.3(3).

Sea:

$$\sqrt{g(r)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{G(r,\theta)}\, d\theta. \tag{1}$$

Resulta evidentemente, de 2.2(1):

$$\sqrt{g} = 0, \quad \frac{d\sqrt{g}}{dr} = 1 \quad \text{en el origen.}$$

Luego se tiene un sistema polar geodésico con métrica:

$$ds^2 = dr^2 + g d\theta^2 ,$$

en que $\sqrt{g}$ es independiente de θ. Llamaremos a esta superficie σ, la imagen de la superficie S en P; sea p el polo de la imagen. Esta tiene las siguientes propiedades:

3.2.1 <u>Círculos geodésicos de iguales radios con centros en P y p tienen iguales áreas y circunferencias.</u>

En efecto, por 3.2(1):

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{g}\, d\theta = 2\pi \sqrt{g} = \int_0^{2\pi} \sqrt{G}\, d\theta$$

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} \sqrt{g}\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^r \sqrt{g}\, dr = \int_0^r \int_0^{2\pi} \sqrt{G}\, dr\, d\theta .$$

3.2.2 <u>Las curvaturas gaussianas K_p y k_p en P y p son iguales.</u>

Esta propiedad es consecuencia inmediata de 3.2.1 si se examina cualquiera de las expresiones 2.4(1) y 2.4(2), ya que las circunferencias y las áreas de círculos geodésicos con centros en P y p son iguales para toda r.

3.2.3 <u>Las circulaciones o integrales de contorno de las curvatu-</u>

ras gaussianas en circunferencias del mismo radio en S y en su imagen son iguales.

Demostración por 2.1(2) y 3.2(1):

$$\frac{d^2\sqrt{g}}{dr^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2} \; d\theta \; = \; -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K\sqrt{G}\; d\theta$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} k\sqrt{g}\; d\theta = 2\pi k\sqrt{g} = \int_0^{2\pi} K\sqrt{G}\; d\theta \;, \qquad (2)$$

puesto que en la imagen, $k = k(r)$.

Como consecuencia, las curvaturas medias en circunferencias del mismo radio en S y σ son iguales, resultado más amplio que 3.2.2.

3.2.4 Las curvaturas "íntegras" (en el sentido de Gauss) en círculos de radios iguales en S y en su imagen son iguales.

Demostración: De 3.2(2):

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} k\sqrt{g}\; dr\; d\theta = \int_0^r \int_0^{2\pi} K\sqrt{G}\; dr\; d\theta.$$

Como corolario, debido a la igualdad de áreas, resulta que las curvaturas medias dentro de círculos de igual radio con centros en P y p son iguales, de donde se sigue también 3.2.2.

3.2.5 La condición necesaria y suficiente para que la curvatura gaussiana en P sea igual a la curvatura media en todo círculo o en toda circunferencia con centro en P es que la imagen sea de curvatura constante.

La demostración es inmediata en vista de 3.2.3 y 3.2.4.

3.2.6 Si en dos puntos P y P_1 de una misma superficie o de -

superficies distintas las imágenes son idénticas, resulta de 2.1 a 2.4 que:

3.2.61 Círculos geodésicos del mismo radio con centros en P y P_1 tienen iguales áreas y circunferencias.

3.2.62 Las curvaturas gaussianas en P y P_1 son iguales.

3.2.63 Las integrales de contorno de las curvaturas gaussianas en circunferencias de igual radio son iguales y por tanto las curvaturas medias en dichas circunferencias son iguales.

3.2.64 Las curvaturas "íntegras" en círculos de igual radio son iguales, siéndolo por tanto las curvaturas medias dentro de los círculos.

3.3 Círculos geodésicos de igual área.

Sean P y P_1 dos puntos de una misma superficie S o de dos superficies distintas. Para el sistema polar geodésico con origen en P_1 se tiene:

$$ds_1^2 = dr_1^2 + G_1\, d\theta_1^2$$

Definamos implícitamente a r_1 como función de r del modo siguiente:

$$A_1(r_1) = A(r). \tag{1}$$

A_1 es el área de un círculo geodésico con centro en P_1; luego r_1 es el radio del círculo con centro en P_1 que tiene igual área que el círculo de radio r con centro en P.

Derivando respecto a r:

$$C_1(r_1)\ \frac{dr_1}{dr} = C(r)\ ; \tag{2}$$

siendo C_1 la circunferencia de un círculo geodésico con centro-en P_1. Se tiene:

$$C_1(r_1) = 2\pi\sqrt{g_1}\ ;\quad C(r) = 2\pi\sqrt{g}\ ,$$

siendo $\sqrt{g_1}$ tal que:

$$ds_1^2 = dr_1^2 + g_1\, d\theta_1^2$$

en la imagen de revolución correspondiente a P_1. Por consiguiente:

$$\sqrt{g} = \sqrt{g_1}\,\frac{dr_1}{dr} \qquad (3)$$

de donde resulta:

$$\frac{d\sqrt{g}}{dr} = \frac{d\sqrt{g_1}}{dr_1}\left(\frac{dr_1}{dr}\right)^2 + \sqrt{g_1}\,\frac{d^2r_1}{dr^2}\ . \qquad (4)$$

Se obtiene:

$$\frac{dr_1}{dr} = 1 \quad \text{para} \quad r = 0$$

Ahora

$$\frac{d^2\sqrt{g}}{dr^2} = \frac{d^2\sqrt{g_1}}{dr_1^{\,2}}\left(\frac{dr_1}{dr}\right)^3 + 3\,\frac{d\sqrt{g_1}}{dr_1}\,\frac{dr_1}{dr}\,\frac{d^2r_1}{dr^2} + \sqrt{g_1}\,\frac{d^3r_1}{dr^3}\ .$$

Luego:

$$\frac{d^2r_1}{dr^2} = 0 \quad \text{para} \quad r = 0.$$

Derivando una vez más:

$$\frac{d^3\sqrt{g}}{dr^3} = \frac{d^3\sqrt{g_1}}{dr_1^{\,3}}\left(\frac{dr_1}{dr}\right)^4 + 6\,\frac{d^2\sqrt{g_1}}{dr_1^{\,2}}\left(\frac{dr_1}{dr}\right)^2\frac{d^2r_1}{dr^2} +$$

$$+\ 4\,\frac{d\sqrt{g_1}}{dr_1}\,\frac{dr_1}{dr}\,\frac{d^3r_1}{dr^3} + 3\,\frac{d\sqrt{g_1}}{dr_1}\left(\frac{d^2r_1}{dr^2}\right)^2 + \sqrt{g_1}\left(\frac{dr_1}{dr}\right)^4\ ;$$

pero por 3.2(1) y 3.2.2:

$$\frac{d^3\sqrt{g}}{dr^3} = -K_p \qquad y \qquad \frac{d^3\sqrt{g_1}}{dr_1^3} = -K_{p1}$$

para $r = 0$ (y por tanto $r_1 = 0$)

Haciendo $r = 0$ y sustituyendo:

$$\frac{d^3 r_1}{dr^3} = \frac{K_{p1} - K_p}{4}, \quad \text{para } r = 0.$$

Por consiguiente

$$r_1 = r + \frac{K_{p1} - K_p}{24} r^3 + \ldots$$

Podemos deducir ahora algunos teoremas.

3.3.1 Si la igualdad de áreas de círculos geodésicos con centros en P y P_1 implica la igualdad de las circunferencias respectivas, entonces las imágenes P y P_1 son idénticas, de donde se siguen 3.2.61 a 3.2.64.

Demostración: la hipótesis equivale a

$$C_1(r_1) = C(r)$$

para toda r. Comparando con 3.3(2) resulta:

$$\frac{dr_1}{dr} = 1$$

$$\therefore \quad r_1 = r,$$

de donde, por 3.3(3), las imágenes en P y P_1 son idénticas.

3.3.2 Si la igualdad de las circunferencias de círculos geodésicos con centros en P y P_1 implica la igualdad de las áreas correspondientes, entonces las imágenes en P y P_1 son idénticas.

Demostración: por ser

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r} = 1 \text{ en } P,$$

$C(r)$ es función creciente de r en una vecindad de P. Luego puede definirse, en dicha vecindad, una función $\lambda = \lambda(r)$, creciente, tal que:

$$C_1(\lambda) = C(r) \;;$$

pero, por hipótesis, la igualdad anterior implica

$$A_1(\lambda) = A(r).$$

Luego, por 3.3(1), $\lambda = r_1$, y de (2) resulta:

$$\frac{dr_1}{dr} = 1$$

$$\therefore \quad r_1 = r.$$

3.3.3 Si existe algún radio común $a>0$ para el cual los círculos geodésicos con centros en P y P_1 tienen igual área, entonces existe un radio a'', comprendidos entre 0 y a, tal que los círculos con centros en P y P_1 y radios a'' y $r_1(a'')$ respectivamente, tienen curvaturas íntegras iguales.

Demostración: en vista de 3.2.4, bastará probar que:

$$\int_0^r k\sqrt{g}\, dr = \int_0^{r_1} k_1 \sqrt{g_1}\, dr_1 \quad \text{para} \quad r = a''.$$

Ahora, por 3.2(1):

$$\int_0^r k\sqrt{g}\, dr = -\int_0^r \frac{d^2\sqrt{g}}{dr^2}\, dr = 1 - \frac{d\sqrt{g}}{dr}.$$

Y análogamente:

$$\int_0^{r_1} k_1 \sqrt{g_1}\, dr_1 = 1 - \frac{d\sqrt{g_1}}{dr_1} .$$

Luego es suficiente demostrar que

$$\frac{d\sqrt{g}}{dr} = \frac{d\sqrt{g_1}}{dr_1} \quad \text{para} \quad r = a''.$$

Por 5.3(4):

$$\frac{d\sqrt{g_1}}{dr_1} - \frac{d\sqrt{g}}{dr} = \left[1 - \left(\frac{dr_1}{dr}\right)^2\right] \frac{d\sqrt{g_1}}{dr_1} - \sqrt{g_1}\, \frac{d^2 r_1}{dr^2}$$

y por hipótesis:

$$r_1 - r = 0 \qquad \text{para} \quad r = 0,\ a.$$

$$\therefore\ \frac{dr_1}{dr} - 1 = 0 \qquad \text{para} \quad r = a',\ 0 < a' < a.$$

De donde

$$g_1 \left[1 - \left(\frac{dr_1}{dr}\right)^2\right] = 0 \quad \text{para} \quad r = 0,\ a'.$$

Por consiguiente:

$$\frac{d}{dr}\left\{ g_1 \left[1 - \left(\frac{dr_1}{dr}\right)^2\right]\right\} = 0 \quad \text{para} \quad r = a'';\ 0 < a'' < a'.$$

Pero

$$\frac{d}{dr}\left\{ g_1 \left[1 - \left(\frac{dr_1}{dr}\right)^2\right]\right\} =$$

$$2\sqrt{g_1}\,\frac{dr_1}{dr}\left\{\left[1 - \left(\frac{dr_1}{dr}\right)^2\right] \frac{d\sqrt{g_1}}{dr_1} - \sqrt{g_1}\ \frac{d^2 r_1}{dr^2}\right\}$$

$$= 2\sqrt{g_1}\,\frac{dr_1}{dr}\left(\frac{d\sqrt{g_1}}{dr_1} - \frac{d\sqrt{g}}{dr}\right) \tag{5}$$

$$\therefore\ \frac{d\sqrt{g_1}}{dr_1} - \frac{d\sqrt{g}}{dr} = 0 \qquad \text{para} \quad r = a''$$

Por ser igual área los círculos de radios a'' y $r_1(a'')$, - resulta, como corolario, que las curvaturas medias en los dos -- círculos son iguales. Por tanto hay dos puntos, uno dentro de - cada círculo, en que las curvaturas gaussianas son iguales.

3.3.4 <u>Si las curvaturas medias en círculos de igual área con centros en P y P_1 son iguales, entonces las imágenes en P y P_1 son idénticas.</u>

Demostración: por hipótesis (véase 3.3.3)

$$\frac{d\sqrt{g_1}}{dr_1} = \frac{d\sqrt{g}}{dr} \quad \text{para toda} \quad r.$$

Ahora, por 3.3(5):

$$\frac{d}{dr}\left\{ g_1 \cdot \left[1 - \left(\frac{dr_1}{dr}\right)^2\right]\right\} = 0$$

$$\therefore \quad g_1 \left[1 - \left(\frac{dr_1}{dr}\right)^2\right] = \text{const.} = 0,$$

ya que g_1 se anula para $r = 0$. Por consiguiente

$$\frac{dr_1}{dr} = 1,$$

de donde $r_1 = r$.

3.3.5 <u>Si las curvaturas medias en las circunferencias de círculos de igual área con centros en P y P_1 son iguales, entonces las imágenes son idénticas.</u>

Demostración: se tiene:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{d\sqrt{g_1}}{dr_1} - \frac{d\sqrt{g}}{dr}\right) = \frac{d^2\sqrt{g_1}}{dr_1^2}\frac{dr_1}{dr} - \frac{d^2\sqrt{g}}{dr^2}$$

$$= - k_1 \sqrt{g_1}\frac{dr_1}{dr} + k\sqrt{g},$$

en vista de 3.2(1). Ahora, por 3.3(3)

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{d\sqrt{g_1}}{dr_1} - \frac{d\sqrt{g}}{dr}\right) = (k - k_1)\sqrt{g}.$$

Por hipótesis:

$$k(r) = k_1(r_1)$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dr}\left(\frac{d\sqrt{g_1}}{dr_1} - \frac{d\sqrt{g}}{dr}\right) = 0 \; ;$$

luego $r_1 = r$, por 3.3.4

3.3.6 <u>Si para círculos geodésicos de igual área con centros en P y P_1 la igualdad de curvaturas medias a lo largo de las circunferencias implica la igualdad de curvaturas medias dentro de los círculos correspondientes y además hay un cierto radio para el cual las areas son iguales, entonces las imágenes en P y P_1 son idénticas.</u>

Demostración: se tiene (véase 3.3.5):

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{d\sqrt{g_1}}{dr_1} - \frac{d\sqrt{g}}{dr}\right) = (k - k_1)\sqrt{g} \; .$$

Como por hipótesis:

$$A_1\,(a) = A\,(a), \quad a>0$$

entonces

$$\frac{d\sqrt{g_1}}{dr_1} - \frac{d\sqrt{g}}{dr} = 0 \qquad \text{para} \quad r = a' \qquad (0 < a' < a)$$

y por tanto

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{d\sqrt{g_1}}{dr_1} - \frac{d\sqrt{g}}{dr}\right) = 0 \quad \text{para} \quad r = a'' \qquad (0 < a'' < a').$$

Esto es,

$$k = k_1 \qquad \text{para} \quad r = a''.$$

Ahora bien, por hipótesis, esto implica que

$$\frac{d\sqrt{g_1}}{dr_1} - \frac{d\sqrt{g}}{dr} = 0 \qquad \text{para} \quad r = a''.$$

Repitiendo el razonamiento se llega a:

$$\frac{d\sqrt{g_1}}{dr_1} = \frac{d\sqrt{g}}{dr}$$

Luego $r_1 = r$.

3.3.7 Si en todo punto P de una superficie, la curvatura gaussiana es igual a la curvatura media a lo largo de toda circunferencia geodésica con centro en P y para cada par de puntos de S existe un radio $a > 0$ (no necesariamente el mismo para todo par de puntos) para el que las áreas de los círculos correspondientes son iguales, entonces la superficie es de curvatura constante.

Demostración: por la primera hipótesis y por 3.2.5, la imagen es de curvatura constante; pero, por la segunda hipótesis y por el corolario de 3.3.3, todas las imágenes tienen la misma curvatura. Luego, por 3.2.2, la superficie es de curvatura constante.

A P E N D I C E

APENDICE.

En relación con la conjetura de Birkhoff, A. Barajas y R.-Vázquez han demostrado que si dos círculos geodésicos del mismo radio a y centros 0 y 0_1 en una superficie tienen áreas - iguales, hay dos puntos P y P_1, uno dentro de cada círculo y a iguales distancias de los centros respectivos, en que la curvatura gaussiana tiene el mismo valor.

Se cumple la misma conclusión suponiendo la igualdad de -- las circunferencias.

El teorema se generaliza del modo siguiente: las imágenes - en 0 y 0_1 satisfacen las mismas hipótesis (igualdad de áreas o de circunferencias); pero por 3.2.3 las curvaturas medias so-- bre los círculos geodésicos de radios $0P$ y $0P_1$ (iguales) son iguales. Luego existen dos círculos del mismo radio, uno con - centro 0 y el otro con centro 0_1, en los cuales la curvatura gaussiana media es la misma.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA.

LIBROS:

Bianchi, L. Lezioni di Geometria Differenziale. Terza Edizione. Vol.I.

Darboux, G. Lecons sur la Théorie Générale des Surfaces. 1894. Vols. 2 y 3.

W.C.G. Graustein, W.C. Differential Geometry. 1935.

Eisenhart, L.P. An Introduction to Differential Geometry. 1940.

C.E.W. Weatherburn, C.E. Differential Geometry of Three ----- Dimensions. 1939. Vol. I.

Blaschke, W. Vorksungen über Differential Geometrie. Vol. I. - 1945.

ARTICULOS:

Vázquez, R. y Barros J. Teoremas sobre los círculos geodésicos y la curvatura gaussiana. Bol. Soc.Mat.Mex.,Vol.III Nos. 3 y 4. Julio-Octubre, 1946.

Birkhoff, Garrett Formulación de una conjetura de G.D.Birkhoff mediante una ecuación integral. Bol. Soc.Mat.Mex., Vol.III, Nos. 3 y 4. Julio-Octubre, 1946.

Barajas, A. y Vázquez, R. Un teorema relacionado con una conjetura de G.D.Birkhoff. Bol. Soc.Mat.Mex., Vol.III, Nos 3 y 4. Julio-Octubre, 1946.