UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

INVARIANTES PROYECTIVOS
EN LAS
TRANSFORMACIONES CIRCULARES

por

ALBERTO BARAJAS CELIS

TESIS presentada para obtener el grado de MAESTRO EN CIENCIAS MATEMATICAS de la FACULTAD DE CIENCIAS

MEXICO
1942

INVARIANTES PROYECTIVOS
EN LAS
TRANSFORMACIONES CIRCULARES

A mis padres.
A mi hermana.

INDICE

CAPITULO PRIMERO

DEFINICIONES

Págs.

1.—Coordenadas del círculo. 1
2.—Potencia de dos circunferencias. 2
3.—Expresión de la potencia de dos circunferencias en función de los parámetros de sus ecuaciones. 3
4.—Obtención de la ecuación cartesiana de un círculo a partir de sus coordenadas potenciales. 3
5.—Angulo que forman dos circunferencias. 4
6.—Expresión de la potencia de dos circunferencias en función de sus coordenadas potenciales. 5
7.—Expresión vectorial de la potencia. 7

CAPITULO II

TRANSFORMACION DE LOS PUNTOS DEL ESPACIO EN CIRCULOS DEL PLANO

1.—Transformación de una recta. 8
2.—Transformación de un plano. 9

CAPITULO III

LUGARES DE CIRCULOS

1.—Círculos ortogonales a dos círculos dados. 11
2.—Sistemas conjugados. 11
3.—Lugar de los círculos que cortan a tres circunferencias bajo el mismo ángulo. 11

PREFACIO

Se habla en este trabajo de la transformación de los puntos de un espacio tridimensional y euclídeo E, en los círculos de un plano Π. Se efectúa la transformación utilizando la noción de potencia de dos circunferencias.

La tabla siguiente, que se explica por sí misma, le dará a usted una idea de los resultados esenciales.

Objeto en E.	**Su transformado en Π**
Punto.	Círculo.
Puntos de una cierta cuádrica S.	Puntos.
Plano polar, con respecto a S, de un punto M.	Familia de círculos ortogonales al transformado de M.
Recta.	Sistema coaxial.
Polar de la anterior respecto a S.	Sistema conjugado del anterior.
Recta tangente a S.	Haz de círculos tangentes.
Transformación proyectiva más general que deja a S invariante.	Transformación circular más general.
Perspectiva.	Inversión.

Quiero dar las gracias, públicamente, a todos mis maestros. A los señores sinodales DR. ALFONSO NÁPOLES GÁNDARA, DR. CARLOS GRAEF *e* ING. BRUNO MASCANZONI, *hago presente mi especial agradecimiento porque tuvieron la gentileza de aprobar esta tesis, a pesar de haberla leído. Su benevolencia me otorgará, espero, el grato título de Maestro en Ciencias Matemáticas.*

Agosto de 1942. *A. B. C.*

Invariantes Proyectivos en las Transformaciones Circulares

CAPITULO PRIMERO

DEFINICIONES

1. Coordenadas del círculo.

En una geometría del punto, los puntos quedan definidos por sus coordenadas y los lugares de puntos por ecuaciones. En una geometría en que el elemento fundamental sea el círculo, cada círculo estará caracterizado por sus coordenadas y las familias de círculos que cumplen determinados requisitos, por ecuaciones. El primer problema que se presenta, por lo tanto, en una geometría del círculo, es el de asignarles coordenadas a los círculos. Consideremos el conjunto de circunferencias del plano cuya ecuación en coordenadas rectangulares tiene la forma

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

donde a, b, c, son tres números reales cualesquiera. Este conjunto constituye una multiplicidad de tres dimensiones. Se puede, pues, establecer una correspondencia biunívoca entre los elementos del conjunto y las ternas ordenadas de números reales. Los tres números correspondientes a cada elemento serán sus coordenadas. Así, pueden utilizarse como coordenadas los tres parámetros a, b y c. La notación $K(a, b, c)$ indicará que la circunferencia K tiene por coordenadas las tres constantes de la ecuación $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$.

Estas coordenadas tienen la desventaja de no representar magnitudes de la misma especie: a y b representan distancias, c un área. Resulta más sugestivo tomar como coordenadas de una circunferencia sus potencias respecto a tres circunferencias arbitrarias que servirán de sistema de referencia. A estas tres potencias les llamo coordenadas potenciales.

2. Potencia de dos circunferencias.

Sean K_1 y K_2 dos circunferencias exteriores de traza real. Le llamo potencia de K_1 y K_2, ó bien potencia de K_1 respecto a K_2, ó de K_2 respecto a K_1, al promedio de los cuadrados de las tangentes comunes. Indicaré esta potencia con el símbolo K_1K_2.

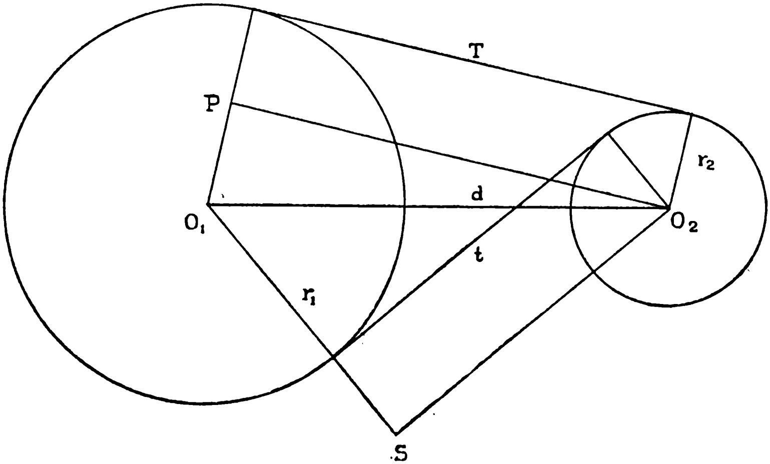

FIG. 1

$$K_1K_2 = \frac{T^2 + t^2}{2}$$

pero $T = O_2P$; $T^2 = \overline{O_2P}^2 = \overline{O_1O_2}^2 - \overline{O_1P}^2 = d^2 - (r_1 - r_2)^2$

$t = O_2S$; $t^2 = \overline{O_2S}^2 = \overline{O_1O_2}^2 - \overline{O_1S}^2 = d^2 - (r_1 + r_2)^2$

$$K_1K_2 = \frac{2d^2 - 2(r_1^2 + r_2^2)}{2} = d^2 - (r_1^2 + r_2^2)$$

La potencia de K_1 y K_2 es igual al cuadrado de la distancia de los centros menos la suma de los cuadrados de los radios.

Ahora, para dos circunferencias cualesquiera, la potencia vale por definición $d^2 - (r_1^2 + r_2^2)$. Si una de ellas se reduce a un punto, esta expresión nos da el valor de la potencia ordinaria de un punto respecto a una circunferencia; si las dos se reducen a puntos, el cuadrado de su distancia.

3. Expresión de la potencia de dos circunferencias en función de los parámetros de sus ecuaciones.

Sean las circunferencias $K_1(a_1, b_1, c_1)$ y $K_2(a_2, b_2, c_2)$

$$K_1 \;:\; x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0$$
$$K_2 \;:\; x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0$$
$$(x + a_1)^2 + (y + b_1)^2 = a_1^2 + b_1^2 - c_1$$
$$(x + a_2)^2 + (y + b_2)^2 = a_2^2 + b_2^2 - c_2$$
$$O_1 \;(-a_1, -b_1)$$
$$O_2 \;(-a_2, -b_2)$$
$$r_1^2 = a_1^2 + b_1^2 - c_1$$
$$r_2^2 = a_2^2 + b_2^2 - c_2$$
$$d^2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2$$
$$K_1K_2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 - a_1^2 - b_1^2 + c_1 - a_2^2 - b_2^2 + c_2$$
$$K_1K_2 = -2a_1a_2 - 2b_1b_2 + c_1 + c_2 \tag{1}$$

4. Obtención de la ecuación cartesiana de un círculo a partir de sus coordenadas potenciales.

Sean K_1, K_2, K_3, tres circunferencias cualesquiera y u, v, w, las potencias de K respecto a ellas. Se tiene por (1)

$$KK_1 = u = -2aa_1 - 2bb_1 + c + c_1$$
$$KK_2 = v = -2aa_2 - 2bb_2 + c + c_2$$
$$KK_3 = w = -2aa_3 - 2bb_3 + c + c_3$$

$$-2a_1a - 2b_1b + c = u - c_1$$
$$-2a_2a - 2b_2b + c = v - c_2$$
$$-2a_3a - 2b_3b + c = w - c_3$$

$$a = -\frac{\begin{vmatrix} u - c_1 & b_1 & 1 \\ v - c_2 & b_2 & 1 \\ w - c_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$(2) \qquad b = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & u - c_1 & 1 \\ a_2 & v - c_2 & 1 \\ a_3 & w - c_3 & 1 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & u - c_1 \\ a_2 & b_2 & v - c_2 \\ a_3 & b_3 & w - c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}}$$

Se ve que a, b, c, resultan funciones lineales de u, v, w.

$$(3) \qquad \begin{aligned} a &= \propto_1 u + \propto_2 v + \propto_3 w + \propto_4 \\ b &= \beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 w + \beta_4 \\ c &= \gamma_1 u + \gamma_2 v + \gamma_3 w + \gamma_4 \end{aligned}$$

5. Angulo que forman dos circunferencias.

Si K_1 y K_2 son dos circunferencias de contorno real que se cortan, se dice que forman un ángulo igual al que hay que hacer girar una de ellas alrededor de uno de los puntos de intersección para que queden tangentes exteriormente. Se considerarán sólo ángulos menores en valor absoluto que π. En la figura el ángulo que forman K_1 y K_2 es $\propto$ ó $-\propto$. Aunque el ángulo no queda determinado unívocamente, su coseno sí.

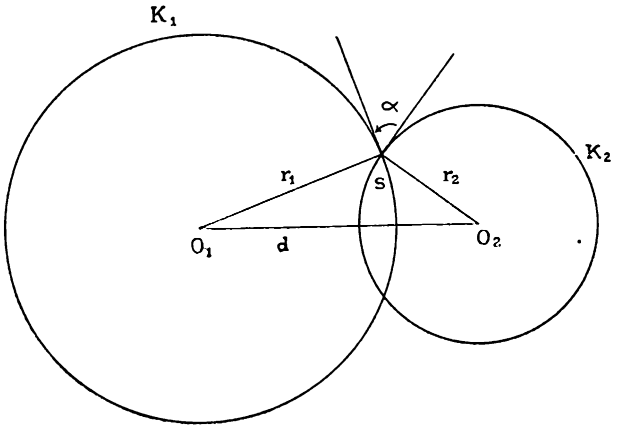

FIG. 2

$$d^2 = r_1{}^2 + r_2{}^2 - 2r_1r_2 \cos \angle O_1SO_2 = r_1{}^2 + r_2{}^2 + 2r_1r_2 \cos \alpha$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{d^2 - r_1{}^2 - r_2{}^2}{2r_1r_2} = \frac{K_1K_2}{2r_1r_2} \tag{4}$$

Cuando las circunferencias no cumplan las dos condiciones: tener contorno real y cortarse, el quebrado K_1K_2/r_1r_2 define el coseno del ángulo que forman. Si la potencia K_1K_2 es distinta de cero y alguno de los radios nulo, cos α no tiene sentido. Si la potencia también es nula, cos α queda indeterminado.

6. Expresión de la potencia de dos circunferencias en función de sus coordenadas potenciales.

K_1, K_2, K_3, son las tres circunferencias que forman el sistema de referencia. P y Q dos circunferencias cualesquiera cuyas coordenadas potenciales valen respectivamente u_1, v_1, w_1 y u_2, v_2, w_2; esto es:

$$P(a_p, b_p, c_p) = P(u_1, v_1, w_1); \quad Q(a_q, b_q, c_q) = Q(u_2, v_2, w_2)$$

$$PQ = - 2a_pa_q - 2b_pb_q + c_p + c_q$$

y por (2)

$$
PQ = -\frac{\begin{vmatrix} u_1 - c_1 & b_1 & 1 \\ v_1 - c_2 & b_2 & 1 \\ w_1 - c_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} u_2 - c_1 & b_1 & 1 \\ v_2 - c_2 & b_2 & 1 \\ w_3 - c_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}}
$$

$$
-\frac{\begin{vmatrix} a_1 & u_1 - c_1 & 1 \\ a_2 & v_1 - c_2 & 1 \\ a_3 & w_1 - c_3 & 1 \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_1 & u_2 - c_1 & 1 \\ a_2 & v_2 - c_2 & 1 \\ a_3 & w_2 - c_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}}
$$

$$
+\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & u_1 - c_1 \\ a_2 & b_2 & v_1 - c_2 \\ a_3 & b_3 & w_1 - c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}} + \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & u_2 - c_1 \\ a_2 & b_2 & v_2 - c_1 \\ a_3 & b_3 & w_2 - c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}}
$$

Evidentemente PQ no depende del sistema de referencia cartesiano a que están referidas K_1, K_2, K_3. Si tomamos como nuevo origen de coordenadas el centro radical de K_1, K_2 y K_3, se tiene $c_1 = c_2 = c_3 = h$.

Poniendo $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}$ resulta:

$$
PQ = -\frac{1}{2\Delta^2}\begin{vmatrix} u_1 & b_1 & 1 \\ v_1 & b_2 & 1 \\ w_1 & b_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_2 & b_1 & 1 \\ v_2 & b_2 & 1 \\ w_2 & b_3 & 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{2\Delta^2}\begin{vmatrix} a_1 & u_1 & 1 \\ a_2 & v_1 & 1 \\ a_3 & w_1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & u_2 & 1 \\ a_2 & v_2 & 1 \\ a_2 & w_2 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
+\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & u_1 \\ a_2 & b_2 & v_1 \\ a_3 & b_3 & w_1 \end{vmatrix} + \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & u_2 \\ a_2 & b_2 & v_2 \\ a_3 & b_3 & w_2 \end{vmatrix} - 2h
$$

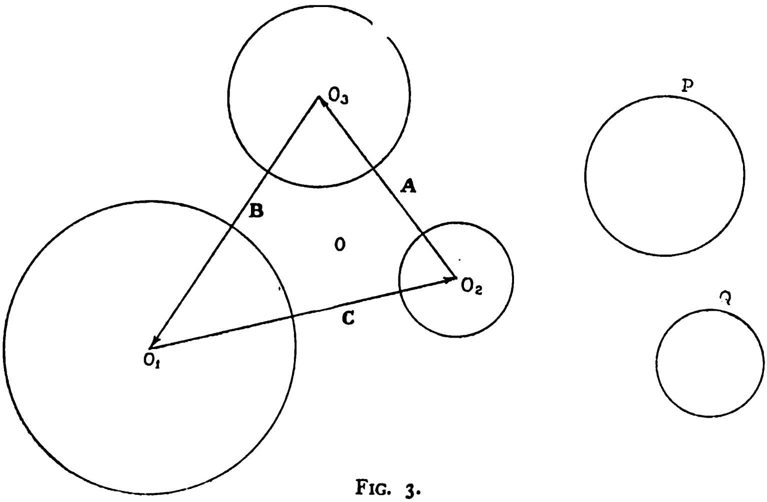

FIG. 3.

7. Expresión vectorial de la potencia.

Sean O_1, O_2, O_3 los centros de los círculos de referencia. O su centro radical. **A, B, C,** los tres vectores que forman el triángulo $O_1O_2O_3$: S_1 = área del triángulo OO_3O_2, S_2 = área de OO_3O_1, S_3 = área de OO_1O_2, S = área de $O_1O_2O_3$ y h la potencia de O respecto a los tres círculos. Es fácil ver que la potencia de PQ puede escribirse entonces en esta sugestiva forma:

$$(5) \qquad PQ = -\frac{1}{8S^2}(u_1\mathbf{A} + v_1\mathbf{B} + w_1\mathbf{C}) \cdot (u_2\mathbf{A} + v_2\mathbf{B} + w_2\mathbf{C})$$

$$+ \frac{(u_1 + v_2)S_1 + (v_1 + v_2)S_2 + (w_1 + w_2)S_3}{S} - 2h$$

Queda así expresada la potencia de dos circunferencias en función de sus coordenadas potenciales y de constantes que sólo tienen que ver con el tamaño y posición relativa de los círculos de referencia, independientemente del sistema de coordenadas cartesianas.

La fórmula anterior permite calcular fácilmente la distancia entre dos puntos cuando se conocen sus distancias a los vértices de un triángulo dado. En este caso O es el centro del círculo circunscrito.

Para que la expresión que da el valor de PQ tenga sentido se necesita que $S \neq 0$; es decir, los centros de los círculos de referencia deben no estar alineados.

CAPITULO II

TRANSFORMACION DE LOS PUNTOS DEL ESPACIO EN CIRCULOS DEL PLANO

1. Transformación de una recta.

Puesto que los círculos reales del plano se pueden hacer corresponder biunívocamente a las ternas de números reales, también será posible establecer una correspondencia biunívoca entre dichos círculos y los puntos reales del espacio (puntos de coordenadas cartesianas reales). Uno de los modos más simples de efectuar esta correspondencia es éste: a un círculo de coordenadas potenciales u, v, w, le va a corresponder un punto de coordenadas x, y, z, siendo $u = x$, $v = y$, $w = z$. Es decir $K(x, y, z) \leftrightarrow M(x, y, z)$. Diremos que K es el transformado de M y viceversa.

Veamos en qué figura se transforma una recta del espacio. Sean M_1, M_2, M_3, tres puntos cualesquiera, distintos, de la recta. Por estar los tres puntos alineados, existen tres constantes no todas nulas que satisfacen estas condiciones:

$$\begin{aligned} k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 &= \Sigma\, k_ix_i = 0 \\ k_1y_1 + k_2y_2 + k_3y_3 &= \Sigma\, k_iy_i = 0 \\ k_1z_1 + k_2z_2 + k_3z_3 &= \Sigma\, k_iz_i = 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 &= \Sigma\, k_i = 0 \end{aligned}$$

$$M_i(x_i, y_i, z_i) \leftrightarrow K_i(x_i, y_i, z_i) = K_i(a_i, b_i, c_i) \qquad i = 1,2,3$$

Pero por (3)

$$\begin{aligned} a_i &= \alpha_1x_i + \alpha_2y_i + \alpha_3z_i + \alpha_4 \\ b_i &= \beta_1x_i + \beta_2y_i + \beta_3z_i + \beta_4 \\ c_i &= \gamma_1x_i + \gamma_2y_i + \gamma_3z_i + \gamma_4 \end{aligned}$$

Multiplicando por k_i y sumando con respecto al índice i, se obtiene

$$\Sigma\, k_i a_i = \alpha_1 \Sigma k_i x_i + \alpha_2 \Sigma k_i y_i + \alpha_3 \Sigma k_i z_i + \alpha_4 \Sigma k_i = 0$$
$$\Sigma\, k_i b_i = \beta_1 \Sigma k_i x_i + \beta_2 \Sigma k_i y_i + \beta_3 \Sigma k_i z_i + \beta_4 \Sigma k_i = 0$$
$$\Sigma\, k_i c_i = \gamma_1 \Sigma k_i x_i + \gamma_2 \Sigma k_i y_i + \gamma_3 \Sigma k_i z_i + \gamma_4 \Sigma k_i = 0$$

$\therefore$ las ecuaciones

$$x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 2a_3x + 2b_3y + c_3 = 0$$

son linealmente dependientes, puesto que existen tres constantes k_i, tales que

$$\Sigma\, k_i a_i = \Sigma\, k_i b_i = \Sigma\, k_i c_i = \Sigma\, k_i = 0$$

y es un resultado bien conocido que si tres ecuaciones de la forma $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ son linealmente dependientes, los círculos que esas tres ecuaciones representan tienen el mismo eje radical. Tenemos, pues: *Una recta del espacio se transforma en una familia de círculos coaxiales.*

2. Transformación de un plano.

Vimos que la potencia de dos circunferencias P y Q de radios r_1 y r_2 respectivamente vale:

$$PQ = d^2 - (r_1^2 + r_2^2)$$
$$PP = -2r_1^2$$
$$QQ = -2r_2^2$$

Por lo tanto (4) se puede escribir en esta forma:

(6) $$\cos\alpha = \frac{PQ}{\sqrt{PP}\,\sqrt{QQ}}$$

Si introducimos coordenadas homogéneas x_1, x_2, x_3, x_4 definidas por las igualdades:

$$x = \frac{x_1}{x_4}$$

$$y = \frac{x_2}{x_4}$$

$$z = \frac{x_3}{x_4}$$

la (5) toma esta forma:

$$(7) \qquad PQ = \frac{a_{ij}\ x_i y_j}{x_4 y_4} \qquad i, j = 1,2,3,4$$

donde x_1, x_2, x_3, x_4 son las coordenadas homogéneas de P y y_1, y_2, y_3, y_4, las de Q

$$(8) \qquad \therefore \quad \cos \alpha = \frac{a_{ij} x_i y_j}{\sqrt{a_{ij} x_i x_j}\ \sqrt{a_{ij} y_i y_j}}$$

$a_{ij}\, x_i y_j$ significa como es costumbre $\Sigma\ a_{ij}\, x_i y_j$ donde i y j varían desde 1 hasta 4.

Si P es una circunferencia de radio nulo $PP = 0 = a_{ij}\ x_i x_j$. Es decir, todos los puntos del plano de los círculos satisfacen la ecuación

$$(9) \qquad a_{ij}\ x_i x_j = 0$$

Por consiguiente sus transformados pertenecerán a la cuádrica S cuya ecuación en coordenadas cartesianas homogéneas es:

$$a_{ij}\, x_i x_j = 0$$

Sea $N(y_1\ y_2\ y_3\ y_4)$ un punto cualquiera del espacio. La ecuación de su plano polar respecto a S es

$$(10) \qquad a_{ij}\ x_i y_j = 0$$

donde las x_i son las coordenadas variables de un punto M del plano polar.

Sea Q la circunferencia correspondiente de N y P la de M.

Según (8)

$$\cos \alpha = \frac{a_{ij} x_i y_j}{\sqrt{a_{ij} x_i x_j}\ \sqrt{a_{ij} y_i y_j}}$$

pero como $a_{ij} x_i y_j = 0$ resulta

$$\cos \alpha = 0$$

Esto es:

Los puntos de un plano en el espacio, se transforman en circunfencias ortogonales a cierta circunferencia. Esta circunferencia es la transformada del polo de dicho plano respecto a la cuádrica S.

En particular se ve que un plano tangente a S se transforma en una familia de círculos concurrentes. El punto de concurso es el transformado del punto de tangencia del plano con S.

Los puntos de una sección plana de la cuádrica S se transforman en puntos de un círculo.

CAPITULO III

LUGARES DE CIRCULOS

1. Círculos ortogonales a dos círculos dados.

Las conclusiones establecidas en el capítulo anterior nos permiten resolver de un modo muy simple los problemas que siguen:

¿Cuál es el lugar de los círculos que cortan ortogonalmente a dos círculos dados?

Tomamos a los círculos dados K_1 y K_2 como dos de los círculos de referencia. Sea K el círculo variable ortogonal a los otros dos. Es decir $x = 0$, $y = 0$. Estas ecuaciones definen una recta R en el espacio; por consiguiente *el lugar buscado es una familia de círculos coaxiales.*

2. Sistemas conjugados.

Además, los planos polares de los puntos de R pasan por una cierta recta R'. (Llamaremos a R' la polar de K). Las circunferencias transformadas de los puntos de R' serán ortogonales, por lo tanto, a las transformadas de los puntos de R. Quiere decir que K_1 y K_2 definen una familia de círculos coaxiales, cada uno de los cuales es ortogonal a los de la familia de círculos ortogonales a K_1 y K_2. Estas dos familias de círculos, llamadas como se sabe, sistemas conjugados, tienen por correspondientes, pues, dos rectas polares.

3. Lugar de los círculos que cortan a tres circunferencias dadas bajo el mismo ángulo.

Tomemos como sistema de referencia las circunferencias dadas. Sean r_1, r_3 y r_2 sus radios respectivos; r el radio de la circunferencia móvil K.

Se tiene $$\frac{x}{2rr_1} = \frac{y}{2rr_2} = \frac{z}{2rr_3} = \cos \alpha \ ;$$

o bien $$\frac{x}{y} = \frac{r_1}{r_2} \ ; \ \frac{x}{z} = \frac{r_1}{r_2}$$

Estas son las ecuaciones de una recta en el espacio, *o las de un sistema de círculos coaxiales en el plano.*

4. Generalización del problema anterior.

Se puede generalizar el resultado anterior imponiéndole a K la condición de que corte a los círculos dados bajo ángulos cuyos cosenos estén en una relación constante. Llamando α, β, γ a dichos ángulos, la condición es:

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = m \ ; \ \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = n \ ; \ \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} = \frac{1}{mn}$$

o sea $$\frac{x}{rr_1} : \frac{y}{rr_2} = m \ ; \ \frac{y}{rr_2} : \frac{z}{rr_3} = n$$

$\frac{x}{y} = \text{const.}$; $\frac{z}{y} = \text{const.}$ *Ecuaciones de un sistema coaxial.*

5. Circunferencias tangentes a dos dadas.

Las circunferencias que cortan a dos circunferencias dadas bajo ángulos cuyos cosenos están en una relación constante, son ortogonales a cierta circunferencia.

En efecto, $\frac{x}{rr_1} : \frac{y}{rr_2} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ es equivalente a la ecuación $\frac{x}{y} = \text{const.}$ En el espacio la ecuación representa un plano, en el plano una familia de círculos ortogonales a cierta circunferencia.

Corolario: *las circunferencias tangentes exteriormente a dos círculos dados son ortogonales a cierto círculo.* Como las tangentes exteriores comunes pertenecen a la familia de círculos tangentes, el centro de ese cierto círculo es evidentemente el punto de concurso de las tangentes.

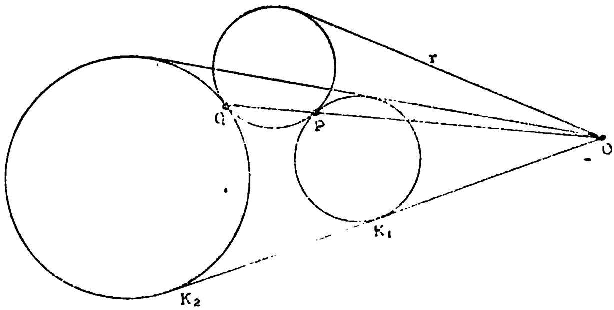

FIG. 4.

Para determinar su radio basta llevar desde O una tangente a cualquiera de los círculos tangentes a K_1 y K_2. En la figura $r^2 = OP \cdot OQ$. Se ve que el círculo de que se trata no es otro que el círculo externo de antisimilitud.

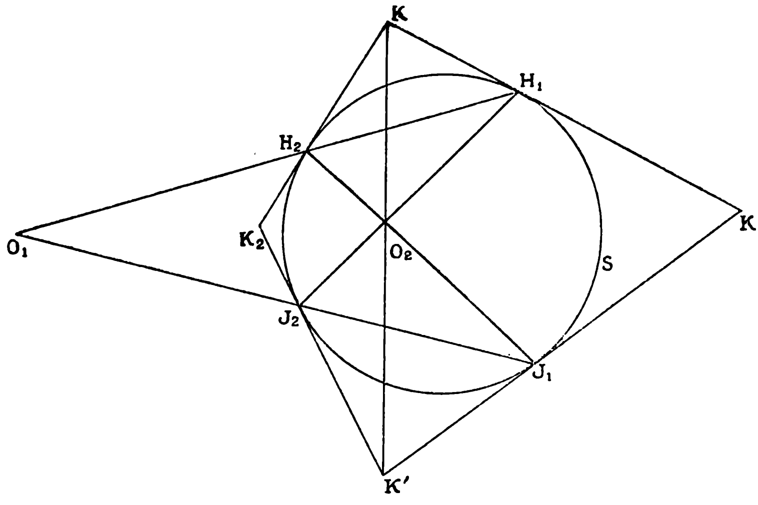

FIG. 5.

Consideremos la figura correspondiente en el espacio. El punto K_1 representa el transformado de la circunferencia K_1. El K_2 de la K_2. S es la cuádrica transformada del plano. Como la circunferencia K es tangente a K_1 y K_2, el punto móvil K define con los puntos K_1 y K_2 tangentes a la cuádrica S. El lugar de K es por lo tanto la intersección de los conos tangentes a S y cuyos vértices son K_1 y K_2.

Como estos conos están en perspectiva, las rectas que unen puntos correspondientes son concurrentes.

Este punto de concurso O_1, es el polo del plano KK'. Por consiguiente la circunferencia K es perpendicular a la circunferencia O_1.

6. Una propiedad de los círculos de antisimilitud.

Como los puntos O_1 K_2, K_3 están alineados, las circunferencias transformadas son coaxiales. Por estar alineados los puntos H_1, H_2, O_1, los puntos de contacto de la circunferencia variable K con K_1 y K_2 estarán alineados con el centro de O_1. Este centro será entonces el punto de contacto de las tangentes exteriores comunes de K_1 y K_2.

Consideraciones análogas para el punto O_2, también centro de perspectiva de los conos de vértice K_1 y K_2, hacen ver que O_2 es el transformado del otro círculo de antisimilitud de K_1 y K_2.

Resumiendo: *Los dos círculos de antisimilitud de dos círculos dados, son coaxiales con estos círculos.*

7. Círculos de antisimilitud de tres circunferencias.

Otra propiedad proyectiva de las figuras en el espacio que tiene su correspondiente en la geometría del círculo es la que sigue:

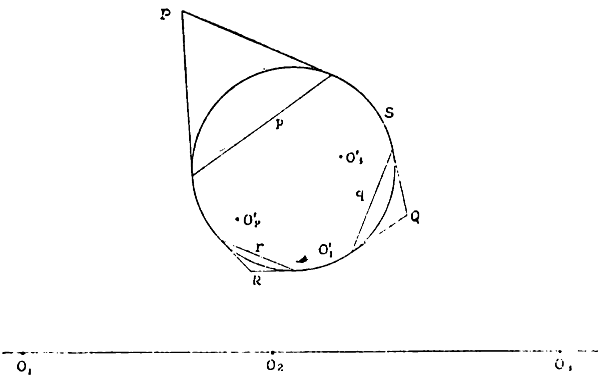

FIG. 6.

Sean P, Q, R tres puntos arbitrarios. p, q, r sus planos polares respecto a la cuádrica S. Los conos tangentes a S de vértices P, Q, R, pueden ponerse, por parejas, en perspectiva. Sean O_1 O_2 O_3 O_1' O_2' O_3' los centros de perspectiva. Estos 6 centros yacen, por ternas, en 4 rectas.

El teorema correspondiente en el plano es:

Los seis círculos de antisimilitud de tres círculos dados, pertenecen, por ternas, a cuatro sistemas coaxiales.

Corolario: *los seis centros de similitud de 4 círculos están alojados, por ternas, en 4 rectas; son, por lo tanto, los vértices de un cuadrilátero completo.*

8. Propiedad del círculo de similitud.

Teorema. *Los círculos cuyas potencias respecto a dos círculos están en la misma relación que los cuadrados de los radios de éstos, son ortogonales al círculo de similitud de los círculos dados.*

La condición impuesta es:

$$\frac{x}{y} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

que es la ecuación de una familia de círculos ortogonales a cierto círculo. A la familia pertenecen los círculos de radio nulo, que son los puntos del contorno de ese cierto círculo.

Evidentemente, los centros de similitud de los círculos dados pertenecen a la familia. Por consiguiente, el círculo ortogonal a los miembros de ésta es el círculo de similitud de las circunferencias dadas.

9. Teorema de Steiner.

Otro ejemplo sugestivo de esta conexión entre la geometría Proyectiva y la Geometría del Círculo es el siguiente:

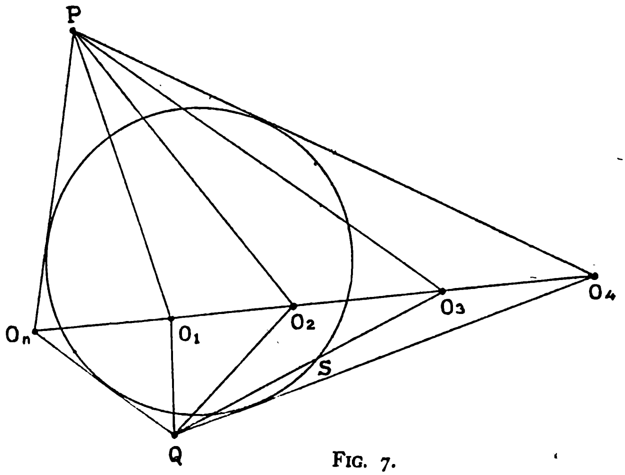

FIG. 7.

Sean P y Q dos puntos arbitrarios exteriores a la cuádrica S, equivalente proyectivamente a una esfera.

Tómese el punto O_1 tal que las rectas PO_1 y QO_1 sean tangentes a S. Tenemos en seguida el punto O_2 tal que las rectas PO_2, QO_2 y O_1O_2 sean tangentes a S. Después tomamos el punto O_3 tal que PO_3 QO_3 y O_2O_3 sean también tangentes a S. Continuando en forma análoga se obtienen los puntos O_4, O_5, O_6, etc. Puede que alguna vez se llegue al punto de partida O_1 ó puede que la sucesión de puntos O_i sea infinita. En el primer caso diremos que la cadena de puntos O_i es cerrada, en el segundo abierta; pues bien, *si para un punto inicial, particular O_1 la cadena es cerrada, también cerrará para cualquier otro punto inicial.*

Proyectivamente se puede ver la verdad de este bonito teorema con mucha sencillez. En efecto: puede transformarse a la cuádrica S, por medio de una transformación proyectiva, en una esfera, de tal modo que los puntos P y Q queden alojados en un diámetro. Las rectas PO_i serán las generatrices de un cono circular cuyo eje es el diámetro PQ. Cosa análoga para las rectas QO_i. Por lo tanto, los puntos O_1, O_2 pertenecerán a la circunferencia que es intersección de los dos conos. Las rectas O_1O_2, O_2O_3, O_3O_4 etc., serán tangentes a una circunferencia concéntrica con la anterior, y el teorema resulta obvio.

En el plano la figura correspondiente es:

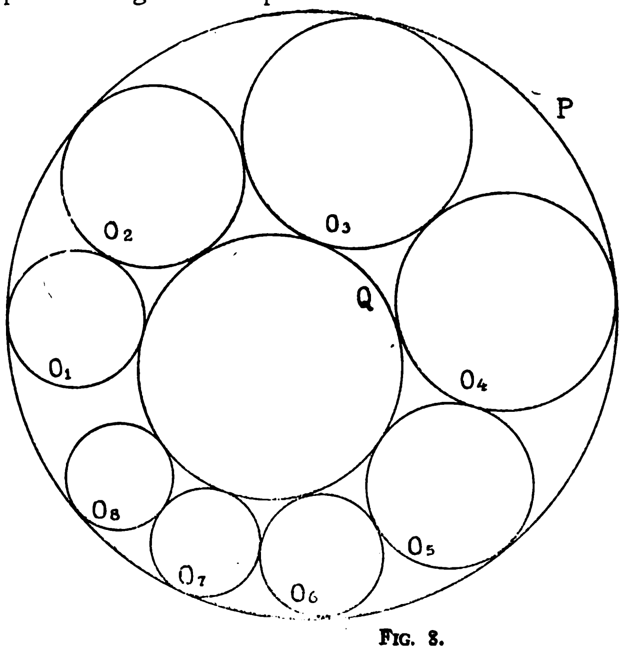

Fig. 8.

Al punto P le corresponde una circunferencia y al punto Q otra. A O_1 una circunferencia tangente a P y Q. A O_2 una circunferencia tangente a P, Q y O_1. A O_3 una circunferencia tangente a P, Q y O_2 etc. Por lo tanto, *si la cadena de círculos* O_i *en que cada eslabón es tangente a P y Q y el eslabón anterior, es cerrada para un cierto círculo inicial* O_1 *también será cerrada para cualquier otro círculo inicial.*

10. El problema de Apolonio. Solución geométrica.

Este famoso problema consiste en trazar un círculo tangente a tres circunferencias dadas. Hemos visto que a un círculo le corresponde, por un lado, un punto del espacio; por otro, una sección plana de la cuádrica S. Esta sección está en el plano polar de dicho punto respecto a S. Por consiguiente, el problema se transforma en el de trazar una sección plana de S, tangente a tres secciones dadas.

Sean A, B y C las circunferencias dadas. Llamaré a los puntos correspondientes del espacio, los puntos A, B y C; a las secciones planas respectivas, las curvas A, B, C.

El plano 1 2 3 4 es el plano polar de A. El 1 2 6 5 el de B. El 3 4 5 6 El de C. Sean X y X′ dos de las soluciones buscadas; a, b, c los puntos de contacto de la curva X con las curvas A, B, C. a′, b′ c′, los puntos de contacto de X′ con A, B, C.

O_1 el centro de perspectiva de las curvas B y C; O_3 el de las curvas A y B, O_2 el de las A y C. I el de X y X′.

La línea ac, según hemos visto, pasa por O_2, la ab por O_3 y la bc por O_1 ∴ el plano de X contiene a los tres centros O_1O_2, y O_3. Lo mismo pasa con el plano de X′. Como la línea $O_1O_2O_3$ resulta intersección de los planos de X y X′, su transformada es una familia de círculos ortogonales a las circunferencias X y X′. Los centros de estos círculos estarán por consiguiente en el eje radical de X y X′. Es decir, el eje radical de X y X′ contiene a tres de los centros de similitud de los tres círculos dados.

La recta aa′ pasa por I. Lo mismo las rectas bb′ y cc′. Como estas rectas pertenecen respectivamente a los planos polares de A, B y C quiere decir que I es el punto común de estos planos. El círculo transformado de I es por lo tanto ortogonal a los tres dados y su

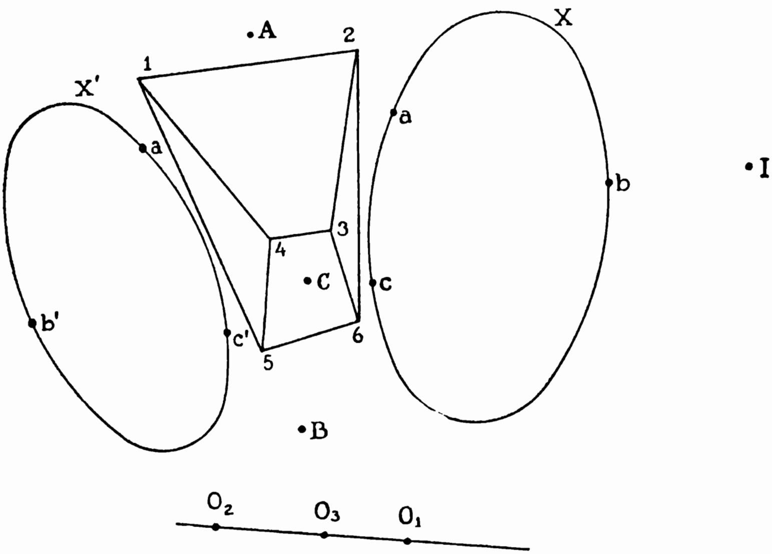

FIG. 9.

centro es el centro radical de dichos círculos. Los puntos a y a', en las circunferencias buscadas X y X', estarán alineados con el centro radical.

Las tangentes a la curva A en a y a' concurren en la recta $O_1O_2O_3$. Por consiguiente, las tangentes a la circunferencia A en los puntos a y a' concurrirán en la línea que contiene a los tres centros de similitud $O_1O_2O_3$. Es decir, el polo de aa' cae en $O_1O_2O_3$; por consiguiente el polo de $O_1O_2O_3$ estará en aa'. He designado con $O_1O_2O_3$ tanto a los centros de perspectiva en el espacio como a los centros de similitud correspondientes, en el plano).

De aquí la famosa construcción de Gergonne:

Determínense los polos con respecto a los círculos dados de las rectas que contienen ternas de sus centros de similitud. Las rectas que unen estos polos con el centro radical de los tres círculos, cortan al círculo respectivo en dos puntos que son los de contacto con una pareja de soluciones.

11. Solución analítica del problema de Apolonio.

Tomamos como sistema de referencia a los círculos dados A, B, C. Sea K (x, y, z) una circunferencia que forma un ángulo de cero grados con las anteriores; es decir, es tangente a ellas exteriormente. Por (4) tenemos

$$(1') \qquad \frac{x}{2rr_1} = 1$$

donde r es el radio de K y r_1 el de A.

Análogamente

$$\frac{y}{2rr_2} = 1$$

$$\frac{z}{2rr_3} = 1$$

De estas tres ecuaciones se obtiene:

$$\frac{x}{r_1} = \frac{y}{r_2} = \frac{z}{r_3}$$

que es la ecuación de un sistema coaxial. A saber: el de las circunferencias que cortan a las tres dadas bajo el mismo ángulo.

Evidentemente las circunferencias $I(0, 0, 0)$ $J(r_1, r_2, r_3)$ pertenecen al sistema.

Por consiguiente el problema corresponde en el espacio a encontrar la intersección de la recta apoyada en I y J con la superficie $\frac{x}{2rr_1} = 1$.

Empleando coordenadas homogéneas se tiene: $K(x_1, x_2, x_3\ x_4)$, $I(0, 0, 0, 1)$, $J(r_1\ r_2\ r_3\ 1)$.

Por (6)

$$\frac{KA}{\sqrt{KK}\ \sqrt{AA}} = 1 = \frac{x_1}{\sqrt{a_{ij}\ x_i x_j}\ \sqrt{-2r_1^2}}$$

$$x_1^2 = -2r_1^2 a_{ij}\ x_i x_j$$

Poniendo $\qquad b_{ij} = a_{ij}$ para $i \neq 1$, $j \neq 1$

y $\qquad b_{11} = a_{11} - \frac{1}{2r_1^2}$

la (1′) queda en esta forma:

$$(2') \qquad b_{ij}\ x_i x_j = 0$$

La ecuación de una recta apoyada en dos puntos $I(z_1\ z_2\ z_3\ z_4)$ y $J(y_1\ y_2\ y_3\ y_4)$ es:

$$(3') \qquad x_i = z_i + \lambda y_i$$

Las intersecciones de (2′) y (3′) están dadas por la ecuación

$$(4') \qquad b_{ij}\, z_i z_j + 2\lambda\, b_{ij} z_i y_j + \lambda^2 b_{ij}\, y_i y_j = 0$$

La solución de nuestro problema se obtiene, por lo tanto, poniendo en (4′)

$$z_1 = z_2 = z_3 = 0; \quad z_4 = y_4 = 1; y_1 = r_1; \quad y_2 = r_2; \quad y_3 = r_3$$

El sistema de ecuaciones que corresponde a una circunferencia que forme con las tres dadas un ángulo de 180° es:

$$\frac{x}{2rr_1} = -1$$

$$\frac{y}{2rr_2} = -1$$

$$\frac{z}{2rr_3} = -1$$

La resolución de este sistema nos conduce evidentemente a la misma ecuación de 2° grado (4′). Quiere decir que la (4′) nos suministra las circunferencias tangentes interiormente y exteriormente a las tres dadas.

Las otras soluciones son las que corresponden a los sistemas:

$$\begin{array}{lll} \dfrac{x}{2rr_1} = 1 & \dfrac{x}{2rr_1} = 1 & \dfrac{x}{2rr_1} = -1 \\[2ex] \dfrac{y}{2rr_2} = 1 & \dfrac{y}{2rr_2} = -1 & \dfrac{y}{2rr_2} = 1 \\[2ex] \dfrac{z}{2rr_3} = -1 & \dfrac{z}{2rr_3} = 1 & \dfrac{z}{2rr_3} = 1 \end{array}$$

Por lo tanto el problema tiene cuando más 8 soluciones distintas.

CAPITULO IV

TRANSFORMACIONES CIRCULARES

1. Definición.

Se llama transformación de círculo cualquier transformación analítica que transforma círculos del plano en círculos.

Si $K(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$ se transforma en $K'(x_1'\ x_2'\ x_3'\ x_4')$ Se tendrá $x_i' = x_i'\ (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$.

Supongamos además que círculos de radio nulo se transforman en círculos de radio nulo; es decir, puntos en puntos. Supongamos también que la transformación es biunívoca y que si el punto A está en el círculo K, el punto A′ transformado de A estará en K′ transformado de K. Una transformación tal se llama transformación circular.

2. Transformación correspondiente en el espacio.

Puesto que los puntos del plano están en correspondencia biunívoca con los puntos de la cuádrica S, cualquier transformación del espacio que deje a S invariante transformará puntos del plano en puntos. Si el círculo K pasa por los puntos A y B el círculo K′ pasará por A′ y B′; pero los círculos que pasan por dos puntos forman un sistema coaxial; quiere decir que la transformación en el espacio transformará rectas en rectas. Por lo tanto: la transformación puntual biunívoca más general que transforma a puntos concíclicos en puntos concíclicos corresponde en el espacio a una transformación proyectiva que deja invariante a la cuádrica S.

3. Invariante principal.

Un punto $K(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$ satisface la ecuación

$$a_{ij}\,x_i x_j = 0$$

El transformado también la satisface:

$$a_{ij}\,x_i' x_j' = 0$$

quiere decir que

$$a_{ij} x_i x_j = k\, a_{ij}\, x_i' x_j'$$

y

$$\frac{a_{ij}\,x_i y_j}{\sqrt{a_{ij} x_i x_j}\sqrt{a_{ij}\,y_i y_j}} = \frac{a_{ij}\,x_i' y_j'}{\sqrt{a_{ij}\,x_i' x_j'}\ \sqrt{a_{ij}\,y_i' y_j'}}$$

Lo cual significa que el valor absoluto del coseno del ángulo que forman dos círculos es covariante absoluto. Esto es, la transformación considerada es conforme.

4. Transformación por radios vectores recíprocos.

Transformemos la cuádrica S de modo que dos puntos de ella alineados con el punto F sean correspondientes. Esto es, F es el centro de perspectiva. El plano polar de F se transforma en sí mismo.

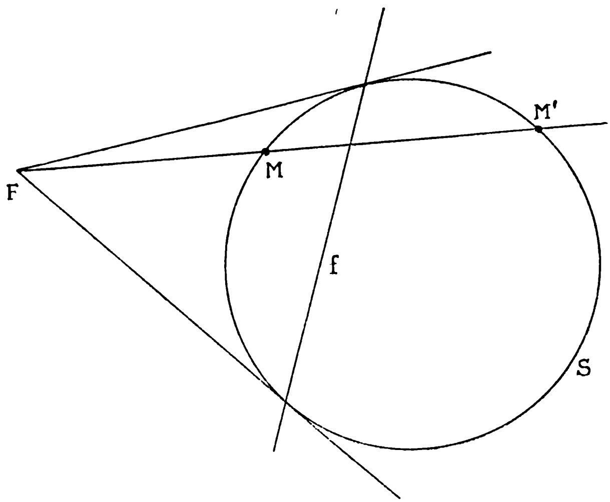

Fig. 10.

La transformación correspondiente en el plano será:

El círculo F se transforma en sí mismo, puesto que los puntos de él son los transformados de la intersección de S con el plano polar de F. Más todavía, cada punto es su propio correspondiente. Los puntos de f, corresponden a círculos ortogonales al círculo F. Estos círculos, se transforman en sí mismos. Como M y M′ están alineados con F en el espacio, sus correspondientes en el plano estarán alineados con el centro de F. De aquí la siguiente construcción geométrica para obtener el transformado de un punto M en el plano:

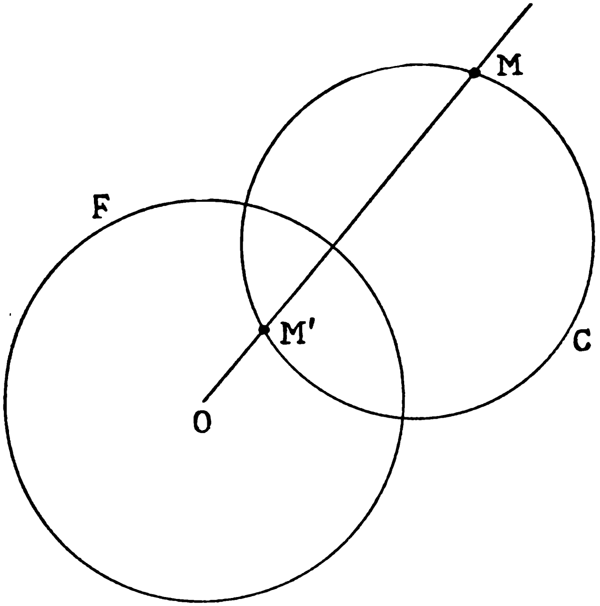

FIG. 11.

Trácese por M un círculo cualquiera C ortogonal al círculo F. Unase el centro de F, O, con M. La intersección de la recta OM con el círculo C, es el punto buscado M′. Se ve que se trata, pues, de la inversión. El círculo de inversión es el correspondiente del centro de perspectiva en el espacio.

5. Expresión analítica de la inversión.

Sean las coordenadas del punto F, v_1 v_2 v_3 v_4. Las de M, x_1 x_2 x_3 x_4. Las de M′ y_1 y_2 y_3 y_4. Por estar M′ alineado con M y F se puede escribir:

$$y_i = x_i + \lambda v_i$$

Por estar M' en S

$$a_{ij}\, y_i y_j = 0$$

ó

$$a_{ij}\, (x_i + \lambda v_i)\, (x_j + \lambda v_j) = 0$$

$$a_{ij}\, x_i x_j + 2\, \lambda\, a_{ij} x_i v_j + \lambda^2 a_{ij} v_i v_j = 0$$

Por pertenecer M a la cuádrica S resulta:

$$2\, \lambda\, a_{ij} x_i v_j + \lambda^2\, a_{ij} v_i v_j = 0$$

$$\lambda = -\frac{2 a_{ij}\, x_i v_j}{a_{ij}\, v_i v_j}$$

$$\therefore \qquad y_i = x_i - \frac{2 a_{st}\, v_s v_t}{a_{st} x_s\, v_t}\; v_i$$

Esta es la ecuación de transformación por radios vectores recíprocos en coordenadas potenciales. Tiene la forma muy simple:

$$y_i = b_{ij}\, x_j$$

BIBLIOGRAFIA

F. KLEIN. Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint.
The Macmillan Company.

W. GRAUSTEIN. Introduction to Higher Geometry.
The Macmillan Company.

M. BÔCHER. Introduction to Higher Algebra.
The Macmillan Company.

J. COOLIDGE. A Treatise on the Circle and the Sphere.
Oxford University Press.

J. COOLIDGE. History of Geometrical Methods.
Oxford University Press.

L. CREMONA. Elements of Projective Geometry.
Oxford University Press.