



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

# ENERGÍA DE GRÁFICAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MATEMÁTICO

PRESENTA

**JORGE FERNÁNDEZ HIDALGO**

DIRECTOR DE TESIS:

**DR. OCTAVIO ARIZMENDI ECHEGARAY**

CIUDAD DE MÉXICO 2020





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis abuelos, Antonio, Carmen, Graciela y Jorge.

# Agradecimientos

Quiero aprovechar este trabajo para agradecer a quienes formaron gran parte de mi vida durante la universidad. A mis compañeros de muchas clases, Benjamín, Carlos, Gerardo, Chinney, Zeus, Félix y muchos más, al igual que amigos de la infancia que hicieron esta época mejor. A mis compañeros en las olimpiadas de informática y matemáticas, Oscar, Ariel, Victor, Tuirán, Chacón, José Luis y Santiago. A quienes me recibieron en Guanajuato, con quienes pasé un año que siempre recordaré con felicidad, Daniel, Tulio, Saúl, Adrián, Miguel y muchos más. También agradezco a los profesores cuyas clases disfruté más, Arocha, Bracho, Darío, Ballesteros y Rincón.

Creo importante mencionar a quienes trabajan dándole vida a muchos proyectos en los que participé y fueron grandes oportunidades, Isabel, Leonardo, Manuel y Luis Eduardo. Agradezco particularmente que Luis Eduardo me haya dado la oportunidad de ser su ayudante. Quiero darle las gracias de forma muy especial a mi tocayo Garza, quien me apoyó desde que estaba participando en la olimpiada en la preparatoria y además me presentó a Octavio. Me gustaría darle las gracias a el doctor Octavio por todas las horas de trabajo que me regaló a lo largo de varios años, sin las cuales este trabajo jamás existiría, por todas las cosas que me ha enseñado y por ser un ejemplo a seguir como investigador. También me gustaría agradecer a mi sinodales Mucuy-Kak, Oliver, Marcelino y Amanda por las detalladas correcciones y los consejos que fueron tomados en cuenta para este trabajo y para los trabajos que vengan en el futuro.

Por último me gustaría agradecer a toda mi familia por todo el apoyo incondicional que recibí de ellos, especialmente a mis padres.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>1. Prerrequisitos</b>	<b>9</b>
1.1. Teoría de gráficas . . . . .	9
1.2. Álgebra Lineal . . . . .	14
1.3. Desigualdades . . . . .	18
1.4. Algunos resultados en teoría espectral de gráficas . . . . .	20
1.5. Teoría de operadores . . . . .	21
1.5.1. Probabilidad no conmutativa . . . . .	22
1.5.2. Álgebra de adyacencia . . . . .	24
<b>2. Energía de Gráficas</b>	<b>25</b>
2.1. Ejemplos . . . . .	25
2.1.1. Un primer ejemplo . . . . .	25
2.1.2. Gráfica completa . . . . .	26
2.1.3. El hipercubo . . . . .	26
2.1.4. El ciclo . . . . .	28
2.1.5. El camino . . . . .	29
2.1.6. Gráficas bipartitas completas . . . . .	29
2.1.7. La gráfica de la amistad . . . . .	30
2.1.8. La gráfica del diente de león . . . . .	31
2.2. Interpretación Química . . . . .	32
2.3. La energía como descriptor molecular . . . . .	33
2.4. Normas de Ky Fan, norma nuclear y norma $p$ de Schatten . . . . .	34
2.5. La fórmula integral de Coulson . . . . .	35
<b>3. Cotas Para la Energía</b>	<b>39</b>
3.1. Cotas Superiores . . . . .	39
3.1.1. Desigualdad de McClelland . . . . .	39
3.1.2. Desigualdad de Koolen-Moulton . . . . .	40
3.1.3. Cotas para el radio espectral . . . . .	40
3.1.4. Desigualdad con la nulidad . . . . .	42
3.1.5. Desigualdad con los primeros 4 momentos . . . . .	42
3.2. Cotas Inferiores . . . . .	46
3.2.1. Una primera cota . . . . .	46
3.2.2. Cota con convexidad . . . . .	46

3.2.3. Cota inferior de McClelland . . . . .	47
3.3. Gráficas Hiperenergéticas . . . . .	48
3.4. Gráficas Hipoenergéticas . . . . .	48
<b>4. Energía de Vértices</b>	<b>51</b>
4.1. Introducción . . . . .	51
4.2. Ejemplos y contraejemplos . . . . .	53
4.2.1. Sobre las gráficas transitivas . . . . .	53
4.2.2. Algunas gráficas con muchas simetrías . . . . .	54
4.2.3. Gráficas bipartitas completas . . . . .	54
4.2.4. La gráfica de la amistad . . . . .	54
4.2.5. La gráfica del diente de león . . . . .	55
4.2.6. El camino . . . . .	56
4.2.7. Contraejemplos . . . . .	56
4.3. Cotas superiores para energía de vértices . . . . .	58
4.4. Cotas inferiores para energía de vértices . . . . .	60
4.5. Cotas para la energía total . . . . .	62
4.6. Gráficas hiperenergéticas por vértice . . . . .	63
4.7. Gráficas hipoenergéticas por vértice . . . . .	65
4.8. Gráficas localmente finitas . . . . .	66
4.9. Integral de Coulson . . . . .	68
<b>A. Resultados Numéricos</b>	<b>71</b>
A.1. Cotas para la energía de gráficas . . . . .	71
A.1.1. Cotas superiores . . . . .	71
A.1.2. Cotas inferiores . . . . .	71
A.2. Cotas Para la energía de vértices . . . . .	72
A.2.1. Cotas superiores . . . . .	72
A.2.2. Cotas inferiores . . . . .	72
A.3. Resultados . . . . .	72
<b>Bibliografía</b>	<b>89</b>

# Introducción

Esta tesis presenta una introducción general al tema de energía de gráficas, así como algunos resultados originales obtenidos durante su elaboración, publicados en los artículos Arizmendi, Fernandez-Hidalgo & Juárez-Romero [4] y Arizmendi & Fernández-Hidalgo [5].

El tema se enmarca en la teoría conocida como *teoría espectral de gráficas*, la cual es interesante pues involucra dos aspectos de la matemática originalmente separados, Teoría Espectral de Matrices y Operadores, y Teoría de Gráficas. Además esta tesis aporta un aspecto adicional al interpretar los objetos estudiados desde la perspectiva de Probabilidad No Conmutativa, con lo que se refinan y extienden definiciones, que por una parte conducen a dar cotas basadas en propiedades locales y por la otra permiten considerar gráficas infinitas. Debemos mencionar que este punto de vista más amplio ha generado un tema de investigación nuevo en el país, como se puede ver en la serie de artículos [4], [5], [2], [1], [27] [39].

Históricamente, el concepto de la energía de una gráfica molecular se origina en el ámbito químico alrededor de los años cuarenta del siglo pasado, ligado al método de Hückel cuyo objetivo era encontrar soluciones aproximadas a la ecuación de Schrödinger para los hidrocarburos conjugados. Sin embargo, el concepto generalizado de energía de una gráfica como objeto de estudio matemático fue introducido hasta el año 1978 en Gutman [21] en una revista especializada, por el matemático serbio Iván Gutman. Más adelante el concepto apareció publicado en obras de carácter más general, como por ejemplo Betten et al. [8].

El interés entre los investigadores matemáticos en la energía de gráficas (medido por el número de artículos publicados sobre el tema) permaneció a niveles modestos durante los veinte años posteriores a su introducción en 1978. Sin embargo, aproximadamente a partir del comienzo de este siglo, se puede observar un crecimiento explosivo en el tema. Dicho crecimiento se suscitó en las comunidades matemáticas de numerosos países. Para una presentación rigurosa y casi exhaustiva del tema y sus desarrollos hasta el año 2012, recomendamos el libro Li et al. [25], el cual ha sido un valioso apoyo en la elaboración de este trabajo. En particular en México, debemos mencionar el trabajo de Jose Antonio de la Peña [38].

Antes de describir más específicamente el contenido de la tesis, queremos mencionar que lo que aquí se entiende por energía de una gráfica es conocido en algunos contextos como «energía de adyacencia de una gráfica». Durante los últimos años han aparecido conceptos similares inspirados por el concepto original, como lo son la energía laplaciana, la energía de distancia etc. Para una exposición de estas variaciones referimos al lector al capítulo 11 de [25]. Varios de los resultados en esta tesis pueden ser adaptados a estas nuevas «energías».

El primer capítulo de esta tesis está dedicado a presentar los prerequisites esenciales en el desarrollo del resto de la obra. En particular se proporcionan definiciones fundamentales de teoría de gráficas, junto con algunos resultados de álgebra lineal. No obstante, se recomienda cierta familiaridad con álgebra lineal y teoría de gráficas para una lectura fluida del material.

También incluidas en este capítulo se recuerdan varias desigualdades elementales como por ejemplo Cauchy-Schwarz, Hölder y media aritmética-media geométrica (AM-GM) que se usarán más adelante. Por último incluimos una sección dedicada a la teoría de operadores y probabilidad no conmutativa.

El segundo capítulo comienza definiendo la energía de una gráfica y proporcionando información sobre el contexto químico de la misma. En esta parte se incluye una descripción somera del modelo orbital de Hückel, seguida de una breve presentación del trabajo Gutman et al. [22], en el cual se estudian las propiedades de la energía de gráficas como un descriptor molecular. La siguiente sección contiene información sobre la norma nuclear y las normas de Ky Fan, la primera de estas es igual a la energía de una gráfica, pero estudiada en un contexto distinto. La última sección incluye el resultado de la fórmula integral de Coulson. Esta última se puede interpretar como una forma alternativa de definir la energía y ayuda a entenderla usando propiedades del polinomio característico.

El tercer capítulo está dedicados a presentar y demostrar varias cotas que existen para la energía de gráficas, que es un tema estudiado extensamente en la literatura. La primera sección se refiere a las cotas superiores. Estudiamos las cotas de McClelland, Koulen-Moulton y variaciones de ellas (en algunas de las cuales se toma en cuenta el radio espectral y la nulidad de la matriz). Por último presentamos un resultado original para acotar la energía utilizando los primeros 4 momentos de la gráfica, publicado en [5]. La siguiente sección está dedicada a las cotas inferiores. Entre ellas aparece un resultado elemental que se deriva de la convexidad de la función cuadrática, una cota obtenida mediante Hölder y por último una desigualdad de McClelland que involucra AM-GM presente en McClelland [26]. Las últimas dos secciones tratan sobre las gráficas hiperenergéticas e hipoenergéticas.

El cuarto capítulo está dedicado a la energía de vértices, la cual es una forma de desglosar la energía de una gráfica, asignando a cada vértice una parte de ella. Esta definición es relativamente nueva y aparece por primera vez en Arizmendi y Juárez-Romero [3]. La mayoría de los resultados presentados en este capítulo son resultados originales, que fueron publicados en [4], en donde se desarrollan principios básicos de la teoría de energía de vértices. Los principales resultados obtenidos sobre energía de vértices son análogos a los presentados en los capítulos 2, 3 y 4 sobre energía de gráficas. Se incluye además una sección de ejemplos y contraejemplos en la que analizamos varias posibles conjeturas. Por último, incluimos la fórmula integral de Coulson para vértices, junto con una demostración. Este último resultado fue publicado en Arizmendi et al. [2].

El apéndice contiene una tabla con la energía total y de vértices de las gráficas de tamaños 2, 3, 4, 5 y 6. Estas cantidades fueron calculadas computacionalmente. Esperamos que estas tablas sirvan de guía para investigación futura. Incluimos una breve descripción del procedimiento utilizado para su elaboración. Las tablas también contienen las cantidades obtenidas al evaluar las distintas cotas presentadas en los capítulos 3 y 4. Creemos que esta información nos puede servir para comprender en cuáles casos son mejores cada una de estas cotas.

# Capítulo 1

## Prerrequisitos

### 1.1. Teoría de gráficas

Esta sección introduce los conceptos de teoría de gráficas que usaremos en los siguientes capítulos, es importante aclarar que hay muchos resultados básicos en teoría de gráficas que son de gran utilidad para otros propósitos y no se encuentran incluidos en esta sección (puesto que no son relevantes para nuestro trabajo). Para una introducción general a la teoría de gráficas recomendamos Diestel [16].

La definición de una gráfica es muy sencilla, sin embargo, como veremos más adelante se pueden obtener resultados interesantes cuando le agregamos estructura adicional.

Iniciamos introduciendo una notación:

**Definición 1.1.1.** Dado un conjunto  $X$  definimos  $\binom{X}{2}$  como  $\{S \subseteq X \mid |S| = 2\}$ , es decir el conjunto de subconjuntos de  $X$  de tamaño 2.

**Definición 1.1.2** (Gráfica). Definimos una gráfica  $G$  como un pareja ordenada  $(V, E)$  donde  $V$  es un conjunto y  $E$  es un subconjunto de  $\binom{V}{2}$ . Decimos que los elementos de  $V$  son los vértices de  $G$  y que los elementos de  $E$  son las aristas de  $G$ .

Algunos autores se refieren a los objetos previamente definidos como gráficas simples. Permitiendo que en gráficas generales  $E$  sea un multiconjunto (es decir que  $G$  contenga aristas multiples) y que  $E$  también contenga subconjuntos de  $V$  de tamaño 1 (llamados lazos). Sin embargo para nuestros propósitos basta considerar la versión más restrictiva.

Si el conjunto  $V$  es finito diremos que la gráfica  $G$  es finita. Nótese que si  $V$  es finito entonces  $E$  también lo es.

Para facilitar la lectura (y la escritura) de este trabajo asumiremos que todas las gráficas son finitas excepto cuando especifiquemos lo contrario.

**Definición 1.1.3** (Orden y tamaño). El número de vértices de una gráfica  $G$  se conoce como el orden de  $G$ . El número de aristas de una gráfica  $G$  se conoce como el tamaño de  $G$ . Estas cantidades serán denotadas con las variables  $n$  y  $m$  respectivamente.

Para nuestro trabajo será importante utilizar la matriz de adyacencia de una gráfica, la cual será definida posteriormente. Debido a esto será conveniente utilizar la convención  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , por motivos que se harán claros más adelante.

**Definición 1.1.4** (Adyacencia y vecinos). Diremos que dos vértices  $v_i, v_j \in V$  son adyacentes si  $\{v_i, v_j\} \in E$ , si esto ocurre también diremos que  $v_j$  es un vecino de  $v_i$ , o que  $v_i$  y  $v_j$  son vecinos y lo denotaremos como  $v_i \sim v_j$ . Nos referiremos al conjunto de vecinos de  $v_j$  como la vecindad de  $v_j$ .

**Definición 1.1.5** (Grado y hoja). Dado un vértice  $v_i$  de  $G$  definimos el grado  $v_i$  de  $G$  como el número de vecinos de  $v$ . Es decir el número de elementos  $e \in E$  tal que  $v_i \in e$ . La notación que usaremos para el grado de  $v_i$  es  $d(v_i)$  o más comunmente  $d_i$ . No habrá necesidad de atender al caso en que  $v_i$  tenga una cantidad infinita de vecinos. Si un vértice tiene grado 1 diremos que es una hoja.

**Definición 1.1.6.** Utilizamos la notación  $\min_{i=1}^n d_i = \delta$  y  $\max_{i=1}^n d_i = \Delta$  y nos referimos a estas cantidades como el grado mínimo y máximo de  $G$  respectivamente.

A continuación presentamos ejemplos de gráficas junto con visualizaciones de ellas:

**Ejemplo 1.1.7.** Dado un salón de clases consideramos una gráfica  $G$  en la cual  $V$  corresponde a las alumnas Ana, Aura, Alelí, Analy, Aitana y Alondra y donde  $E$  corresponde a las siguientes amistades.

- Ana es amiga de Alelí, Analy, Aitana y Alondra.
- Alondra es amiga de Ana, Analy Alelí y Aura.
- Aitana es amiga de Ana, Analy, Alelí y Aura.
- Analy es amiga de Ana, Alondra, Aitana y Aura.
- Alelí es amiga de Ana, Alondra, Aitana y Aura.
- Aura es amiga de Alondra, Aitana, Analy y Alelí.

Podemos representar esta situación mediante la siguiente gráfica de manera compacta,

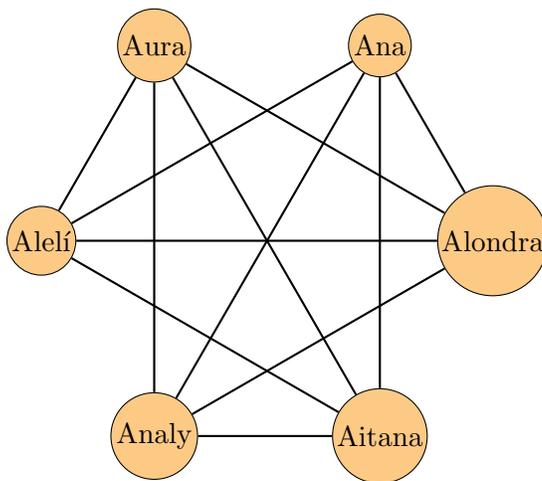


Figura 1.1: Gráfica del salón de clases

**Ejemplo 1.1.8.** Dada una cadena de supermercados consideramos una gráfica  $G$  en la cual  $V$  es el conjunto de sucursales  $\{\text{Águila, Buitre, Colibrí, Gaviota, Tucán, Paloma, Pato}\}$  y dos vértices son adyacentes si y solo si la distancia entre las sucursales es menor a 5 kilómetros.

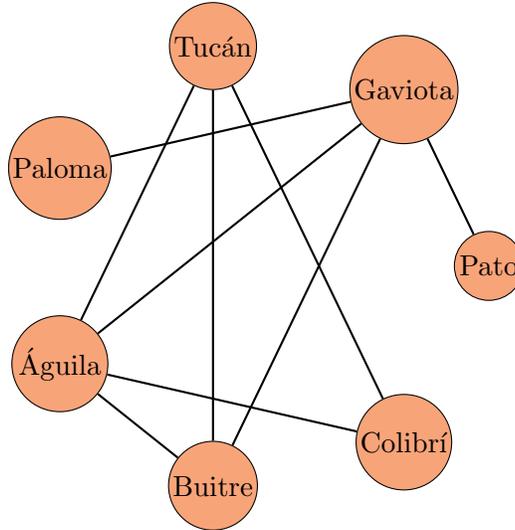


Figura 1.2: Gráfica de supermercados

**Definición 1.1.9** (Camino y  $v_i - v_j$  camino). Sea  $G$  una gráfica,

- Definimos un camino (o caminata) en una gráfica  $G$  como una sucesión finita de vértices  $u_1, u_2, \dots, u_s$  tal que  $u_i$  es adyacente a  $u_{i+1}$  para todo  $1 \leq i \leq s - 1$ . Diremos que la longitud de este camino es  $s - 1$ .
- Definimos un  $v_i - v_j$  camino como un camino  $u_1, \dots, u_s$  donde  $u_1 = v_i$  y  $u_s = v_j$ . Si  $v_i = v_j$  decimos que el camino es cerrado.
- Denotamos el número de  $v_i - v_i$  caminos de longitud  $k$  en  $G$  como  $M_k(G, i)$  y el número total de caminos cerrados de longitud  $k$  como  $M_k(G)$ , nos referimos a esta cantidad como el  $k$ -ésimo momento de  $G$ .

**Ejemplo 1.1.10.** En el ejemplo anterior la sucesión Pato, Gaviota, Águila es un camino y tiene longitud 2.

Decimos que un subconjunto  $S \subseteq V$  es conexo si y solo si para todo  $s_1, s_2 \in S$  existe un  $s_1 - s_2$  camino tal que todos los vértices pertenecen a  $S$ . Si el conjunto  $V$  es conexo diremos que la gráfica es conexa.

El lector puede verificar que las gráficas de los dos ejemplos anteriores son conexas.

**Ejemplo 1.1.11.** A continuación presentamos un ejemplo de una gráfica que no es conexa

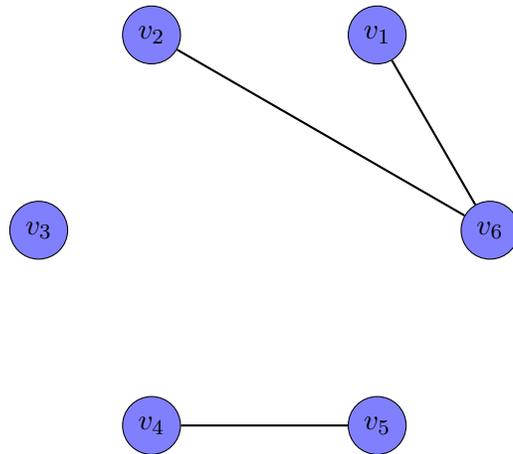


Figura 1.3: Gráfica no conexa

Una observación fundamental (y trivial) es que los subconjuntos conexos maximales de una gráfica particionan al conjunto de vértices. A estos subconjuntos maximales se les da el nombre de componente conexa. En el ejemplo 1.1.11 las tres componentes conexas son  $\{v_3\}$ ,  $\{v_1, v_2, v_6\}$  y  $\{v_4, v_5\}$

**Definición 1.1.12** (Distancia, diámetro, excentricidad y radio). ■ Sea  $G$  una gráfica y  $u, v$  dos vértices en la misma componente conexa, definimos la distancia entre  $u$  y  $v$  como la menor longitud entre todos los  $u - v$  caminos.

- Sea  $G$  una gráfica conexa, definimos el diámetro de  $G$  como la mayor distancia entre dos vértices.
- Sea  $G$  una gráfica conexa y  $u$  un vértice de  $G$ . Definimos la excentricidad de  $v$  como la mayor distancia entre  $u$  y algún vértice de  $G$ .
- Sea  $G$  una gráfica conexa, definimos el radio de  $G$  como la menor excentricidad de algún vértice de  $G$ .

A continuación definimos varios tipos de gráficas que serán relevantes más adelante.

**Definición 1.1.13** (Trayectorias ciclos y árboles). Sea  $G$  una gráfica,

- Decimos que un camino  $v_1, \dots, v_n$  es una trayectoria si  $v_i \neq v_j$  para todo  $1 \leq i \neq j \leq n$ .
- Decimos que un camino  $v_1, \dots, v_n$  es un ciclo si  $v_1 = v_n$  y  $v_1, \dots, v_{n-1}$  es una trayectoria.
- Decimos que una gráfica  $G$  es un árbol si es conexa y no tiene ciclos.

El siguiente teorema caracteriza los árboles de maneras distintas, la demostración se puede consultar en cualquier texto estandar, por ejemplo [16].

**Teorema 1.1.14** (Caracterización de árboles). Sea  $G$  una gráfica, las siguientes condiciones son equivalentes,

- $G$  es un árbol.
- $m = n - 1$  y  $G$  es conexa.
- Para cualesquiera dos vértices distintos  $v_i, v_j$  existe una única  $v_i - v_j$  trayectoria.

**Definición 1.1.15** (Gráfica bipartita). Decimos que una gráfica  $X = (V, E)$  es bipartita si  $V$  se puede particionar en dos subconjuntos  $X_1, X_2$  tal que para todo  $\{v_1, v_2\} \in E$  se cumple que  $|\{v_1, v_2\} \cap X_1| = 1$ .

Todos los árboles son bipartitos, y de forma más general se tiene la siguiente caracterización,

**Teorema 1.1.16** (Teorema de König). *Una gráfica  $G$  es bipartita si y solo si no contiene ciclos de longitud impar.*

*Demostración.* Primero demostraremos que si  $G$  es bipartita con conjuntos  $X, Y$  entonces no puede haber un ciclo de longitud impar. Sea  $X, Y$  una bipartición de  $G$ . Supongamos que  $c_1, \dots, c_{2k} = c_1$  es un ciclo impar, sin pérdida de generalidad  $c_1 \in X$ . Podemos demostrar inductivamente que  $c_1, c_3, \dots \in X$  y  $c_2, c_4, \dots \in Y$ . Por lo que  $c_1 = c_{2k}$  pertenecería a ambos conjuntos, una contradicción.

Ahora demostraremos que si  $G$  no tiene ciclos de longitud impar entonces es bipartita. Eliamos un vértice fijo  $v$ . El conjunto  $X$  consistirá en todos los vértices  $u$  tal que la distancia de  $v$  a  $u$  es par y el conjunto  $Y$  consistirá en todos los vértices  $u$  tales que la distancia de  $v$  a  $u$  es impar. Supongamos que existe una arista entre dos vértices de  $X$ :  $x_1, x_2$ . Sean  $x_1 = v_1, \dots, v_a$  y  $x_2 = u_1, \dots, u_b$  dos caminos de longitud mínima entre  $x_1$  y  $v$  y  $x_2$  y  $v$ . Notemos que el camino cerrado  $x_2, x_1, v_2, \dots, v_a, u_{b-1}, \dots, u_1$  es un camino cerrado de longitud impar. El cual debe contener un ciclo de longitud impar. Por un razonamiento análogo no puede haber aristas entre vértices de  $Y$ .  $\square$

A continuación introducimos el concepto de isomorfismo de gráficas, el cual nos servirá para decir cuándo dos gráficas son prácticamente iguales.

**Definición 1.1.17** (Isomorfismo de gráficas). Sean  $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$  dos gráficas de tamaño  $n$ .

- Decimos que una función biyectiva  $f : V_1 \rightarrow V_2$  es un isomorfismo de gráficas si se tiene  $v_i \sim v_j \iff f(v_i) \sim f(v_j)$  para todo  $1 \leq i \leq j \leq n$ . Decimos que un isomorfismo de este tipo es un isomorfismo entre  $G_1$  y  $G_2$ .
- Si  $G_1 = G_2$  decimos que  $f$  es un automorfismo de  $G_1$ .

Sea  $G$  una gráfica y sean  $u_i, u_j$  dos vértices tales que existe un automorfismo  $f$  de  $G$  tal que  $f(u_i) = u_j$ . Entonces de forma coloquial podemos decir que  $u_i$  y  $u_j$  están en posiciones simétricas. Esta idea nos permite definir una clase de funciones altamente simétricas.

**Definición 1.1.18** (Gráfica transitiva). Decimos que una gráfica  $G$  es transitiva si para todo  $i \neq j$  existe un automorfismo  $f$  de  $G$  tal que  $f(u_i) = u_j$ .

Para el trabajo será importante estudiar como cambian ciertas propiedades de gráficas al agregar o quitar vértices y aristas. Para esto será importante el concepto de subgráfica.

**Definición 1.1.19** (Subgráfica y subgráfica generadora). Decimos que  $G_1 = (V_1, E_1)$  es una subgráfica de  $G_2 = (V_2, E_2)$  si  $V_1 \subseteq V_2$  y  $E_1 \subseteq E_2$ . Si  $V_1 = V_2$  decimos que  $G_1$  es una subgráfica generadora de  $G_2$ .

Una clase importante de subgráficas es la de subgráficas inducidas.

**Definición 1.1.20** (Subgráfica inducida). Sea  $G = (V, E)$  una gráfica y sea  $U \subseteq V$ . Definimos la subgráfica de  $G$  inducida por  $U$  como la gráfica  $G' = (U, \{\{v_i, v_j\} \in E \mid v_i, v_j \in U\})$ .

Una rama muy importante de la teoría de gráficas es la llamada teoría espectral de gráficas. Esta rama intenta utilizar álgebra lineal para obtener información combinatoria de las gráficas.

El primer paso para ello consiste en construir matrices a partir de una gráfica. La matriz más comunmente utilizada es la llamada matriz de adyacencia.

**Definición 1.1.21** (Matriz de Adyacencia). Dada una gráfica  $G$  tal que  $|V| = n$  definimos la matriz de adyacencia  $A(G)$  como la matriz de tamaño  $n \times n$  tal que  $A(G)_{i,j} = 1$  si  $v_i$  y  $v_j$  son adyacentes y  $A(G)_{i,j} = 0$  de lo contrario.

**Definición 1.1.22** (Rango y nulidad). Definimos el rango de una gráfica  $G$  como el rango de su matriz de adyacencia y la nulidad de una gráfica  $G$  como la nulidad de su matriz de adyacencia.

## 1.2. Álgebra Lineal

En esta sección introducimos varias definiciones imprescindibles para el estudio de la energía de gráficas. Para una introducción general a la teoría del álgebra lineal recomendamos Friedberg et al. [18]

**Definición 1.2.1** (Polinomio característico). Definimos el polinomio característico  $\phi(A, x)$  de una matriz  $A \in M_n(\mathbb{C})$  como el siguiente determinante,

$$\phi(A, x) = \det(A - xI). \quad (1.2.1)$$

A lo largo del texto nos permitiremos referirnos al polinomio carácterístico de la matriz de adyacencia de una gráfica  $G$  simplemente como  $\phi(G, x)$  en vez de  $\phi(A(G), x)$ .

**Definición 1.2.2** (Eigenvalores y eigenvectores). Sea  $A \in M_n(\mathbb{C})$ .

- Decimos que  $\lambda \in \mathbb{C}$  es un eigenvalor de  $A$  si  $\phi(A, \lambda) = 0$ .
- Decimos que  $v$  es un eigenvector de un eigenvalor  $\lambda$  si  $v \neq 0$  y  $Av = \lambda v$ . Ocasionalmente diremos simplemente que  $v$  es un  $\lambda$ -eigenvector.

Se puede demostrar que dada una matriz  $A$  y  $\lambda \in \mathbb{C}$  existe un eigenvector para  $\lambda$  si y sólo si  $\lambda$  es un eigenvalor de  $A$ . Se puede demostrar que dado un eigenvalor  $\lambda$  el conjunto de todos los eigenvectores de  $\lambda$  junto con el vector  $0$  forman un subespacio de  $\mathbb{C}^n$ .

**Definición 1.2.3** (Multiplicidad y diagonalizabilidad). Sea  $A \in M_n(\mathbb{C})$ .

- Dado un eigenvalor  $\lambda$  de  $A$  definimos su dimensión o multiplicidad algebraica como el número de veces que aparece  $(x - \lambda)$  en la factorización de  $\phi_A$ .

- Dado un eigenvalor  $\lambda$  de  $A$  definimos su dimensión geométrica como la dimensión del subespacio de eigenvectores de  $\lambda$ .
- Decimos que  $A$  es diagonalizable si existe una base de  $\mathbb{C}^n$  tal que cada vector es un eigenvector de algún eigenvalor de  $A$ . Esto es equivalente a que las dimensiones algebraicas y geométricas coincidan para cada eigenvalor de  $A$ .

Se puede verificar el siguiente resultado,

**Teorema 1.2.4.** *Sea  $A$  una matriz tal que  $u_1, \dots, u_n$  es una base de eigenvectores para los eigenvalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Sea  $\Lambda$  la matriz diagonal con diagonal  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  y sea  $U$  la matriz cuadrada con columnas  $u_1, \dots, u_n$ . Entonces se satisface,*

$$A = U^{-1}\Lambda U.$$

**Definición 1.2.5.** Decimos que una matriz real invertible  $A \in M_n(\mathbb{C})$  es ortonormal si  $AA^T = I$ .

**Proposición 1.2.6.** *Si  $A$  es ortonormal entonces  $A^T$  es ortonormal.*

*Demostración.* Notemos que si  $AA^T = I$  entonces  $A^T A = I$ . □

El siguiente teorema es conocido como el teorema espectral para matrices simétricas y es de vital importancia para el trabajo.

**Teorema 1.2.7.** *Sea  $A \in M_n(\mathbb{C})$  una matriz real simétrica. Entonces todos los eigenvalores de  $A$  son reales y existe una base  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  de vectores para  $\mathbb{C}^n$  tal que,*

- Las entradas de  $b_i$  son reales para todo  $i$ ,
- $b_i \cdot b_j = 0$  para todo  $i \neq j$ ,
- $b_i \cdot b_i = 1$  para todo  $i$ .

Notemos que las condiciones anteriores son equivalentes a que la matriz  $U$  definida en 1.2.4 sea ortonormal.

A continuación introducimos una notación para describir el espectro de una matriz real simétrica con eigenvalores distintos  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  y multiplicidades  $a_1, \dots, a_s$ , lo denotaremos,

$$\{[\lambda_1]^{a_1}, \dots, [\lambda_s]^{a_s}\}$$

A continuación discutimos brevemente algunos procesos para diagonalizar matrices y como se suele abordar el problema en la práctica. Un método general para diagonalizar una matriz (diagonalizable) se puede resumir de la siguiente forma:

- Paso 1. Calcule el polinomio característico  $\phi(A, x)$  de la matriz.
- Paso 2. Factorice el polinomio característico  $\phi(A, x)$  como el producto de sus raíces. Es decir  $\phi(A, x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$ .
- Paso 3. Para cada  $\lambda_i$  distinto calcule el kernel de la matriz  $A - \lambda_i$ .

- Paso 4. Encuentre una base para cada uno de estos eigenespacios.
- Paso 5.(opcional) Si la matriz es simétrica podemos usar Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal para cada eigenespacio, de tal forma que juntando todas las bases se obtiene una base ortonormal de eigenvalores para la matriz.

Este método es muy útil cuando podemos encontrar las raíces del polinomio característico de forma exacta. Sin embargo no resulta tan útil cuando se tiene una aproximación de las raíces.

En el caso de matrices simétricas existe un método numérico para aproximar los eigenvalores y eigenvectores de una matriz sin necesidad de calcular el polinomio característico. A continuación presentamos un resumen del algoritmo de eigenvalores de Jacobi. Comenzamos con una definición auxiliar:

**Definición 1.2.8** (Matriz de rotación de Givens). La matriz de rotación de Givens esencialmente corresponde a una rotación en un plano formado por dos vectores de coordenada. Explícitamente dado  $i < j$  y un ángulo  $\theta$  definimos la matriz de rotación de Givens  $G(i, j, \theta)$  como la matriz con todos los valores iguales a 0 excepto los siguientes:

$$\begin{aligned} G_{ii} &= \cos(\theta) \\ G_{jj} &= \cos(\theta) \\ G_{kk} &= 1 \text{ para } k \neq i, j \\ G_{ij} &= \sin(\theta) \\ G_{ji} &= -\sin(\theta) \end{aligned}$$

**Algoritmo 1.2.9** (Algoritmo de diagonalización de Jacobi). Sea  $S$  una matriz simétrica. Notemos que si  $G = G(i, j, \theta)$  es una matriz de rotación de Givens entonces  $S' = GSG^T$  también es una matriz simétrica. Explícitamente tenemos que las entradas de  $S$  son,

$$\begin{aligned} S'_{ii} &= c^2 S_{ii} - 2sc S_{ij} + s^2 S_{jj} \\ S'_{jj} &= s^2 S_{ii} + 2sc S_{ij} + c^2 S_{jj} \\ S'_{ij} &= S'_{ji} = (c^2 - s^2) S_{ij} + sc(S_{ii} - S_{jj}) \\ S'_{ik} &= S'_{ki} = c S_{ik} - s S_{jk} & k \neq i, j \\ S'_{jk} &= S'_{kj} = s S_{ik} + c S_{jk} & k \neq i, j \\ S'_{kl} &= S_{kl} & k, l \neq i, j \end{aligned}$$

donde  $s = \sin(\theta)$  y  $c = \cos(\theta)$ .

Puesto que  $G$  es ortogonal tenemos que  $S$  y  $S'$  tienen la misma norma de Frobenius (la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de todas las entradas). Notemos que podemos elegir  $\theta$  tal que  $S'_{ij}$  sea 0, Si hacemos eso tendremos que la suma de los cuadrados de los elementos en la diagonal aumenta. El ángulo requerido para que  $S'_{ij}$  sea 0 está dado por  $\tan(2\theta) = \frac{2S_{ij}}{S_{jj} - S_{ii}}$ .

El algoritmo de Jacobi puede ser descrito por el siguiente pseudocódigo, donde  $r$  es el número de iteraciones:

$$\begin{aligned} it &= r \\ D &= I_n \end{aligned}$$

```

while  $it > 0$  do
  Find  $i \neq j$  with maximal  $|S_{ij}|$ 
   $G = G(i, j, \theta)$ 
   $S = GSG^T$ 
   $D = GD$ 
   $it = it - 1$ 
end while

```

Asumiendo que  $r$  es suficientemente grande tendremos que al final de este proceso  $G$  será una matriz casi diagonal y  $D$  será una matriz muy cercana a una base de eigenvectores. El algoritmo es bastante bueno por lo que los tamaños de  $r$  necesitados para obtener una precisión aceptable son razonables.

El siguiente resultado nos servirá para comprobar fácilmente que algunos conjuntos forman bases.

**Teorema 1.2.10.** Sean  $v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbb{C}^n$  vectores no cero tales que  $v_i \cdot v_j = 0$  para todo  $i \neq j$ , entonces el conjunto  $\{v_1, \dots, v_m\}$  es linealmente independiente.

*Demostración.* Sean  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$  tal que  $\sum_{i=1}^m a_i v_i = 0$ . Notemos que para todo  $1 \leq i \leq m$  se tiene,

$$0 = v_i \cdot \left( \sum_{j=1}^m a_j v_j \right) = \sum_{j=1}^m a_j (v_i \cdot v_j) = a_i (v_i \cdot v_i)$$

Concluimos que  $a_i$  debe ser cero. □

**Definición 1.2.11** ( $f(A)$ ). Sea  $A$  una matriz diagonalizable con base de eigenvectores  $b$  y sea  $f$  una función compleja definida en el espectro de  $A$ . Definimos la matriz  $f(A)$  a través de la base  $b$ , si  $Av = \lambda v$  para  $v \in b$ , entonces  $f(A)v = f(\lambda)v$ .

**Proposición 1.2.12.**  $f(A)$  está bien definido.

*Demostración.* Sean  $b$  y  $b'$  dos bases de eigenvectores de  $A$ . Basta demostrar que la definición de  $f(A)$  utilizando la base  $b$  satisface  $f(A)v = f(\lambda)v$  para todo  $\lambda$ -eigenvector de  $b'$ . Podemos demostrar en general que  $f(A)v = f(\lambda)v$  para todo  $\lambda$ -eigenvector  $v$ . Para ello escribimos  $v$  como una suma de  $\lambda$ -eigenvectores en  $b$  y utilizamos linealidad para evaluar  $f(A)v$ . □

Creemos conveniente mencionar que esta construcción forma parte de la teoría conocida como cálculo funcional.

**Definición 1.2.13** (Valor absoluto de una matriz autoadjunta). Sea  $A$  una matriz real autoadjunta. Definimos el valor absoluto de  $A$  como  $f(A)$  donde  $f$  es la función valor absoluto. Denotaremos el valor absoluto de  $A$  como  $|A|$ . Notemos que el espectro de  $A$  está contenido en  $\mathbb{R}$  por lo que podemos utilizar la función valor absoluto.

### 1.3. Desigualdades

Para demostrar desigualdades para la energía de gráficas y vértices necesitaremos varias desigualdades generales. Algunas desigualdades son para vectores en  $\mathbb{R}^n$  mientras que otras son desigualdades para matrices. En secciones posteriores presentaremos desigualdades para operadores que serán utilizadas para gráficas infinitas. Sin embargo, muchas de esas desigualdades son análogas a las de esta sección. Comenzamos con la desigualdad elemental entre la media aritmética y la media geométrica.

**Definición 1.3.1** (Media aritmética). Dados reales  $a_1, a_2, \dots, a_n$  definimos su media aritmética como  $\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}$ .

**Definición 1.3.2** (Media geométrica). Dados reales positivos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  definimos su media geométrica como  $(\prod_{i=1}^n a_i)^{1/n}$ .

**Teorema 1.3.3** (Desigualdad AM-GM). *Dados reales positivos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  su media aritmética es mayor o igual a su media geométrica. Con igualdad si y solo si todos son iguales.*

*Demostración.* Primero lo demostraremos cuando  $n$  es potencia de dos por inducción. Para  $2^0$  el resultado es claro, y para  $2^1$  tenemos lo siguiente,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \iff (a+b)^2 \geq 4ab \iff (a-b)^2 \geq 0 \quad (1.3.1)$$

Donde la última igualdad se da solo si  $a-b=0$

Ahora sean  $a_1 > \dots > a_{2^n}$  los valores en cuestión. Denotamos por  $s_1$  y  $s_2$  las sumas de los primeros  $2^{n-1}$  y últimos  $2^{n-1}$  valores respectivamente. De manera similar denotamos por  $p_1$  y  $p_2$  los productos. Entonces se tiene,

$$\frac{s_1 + s_2}{2^n} = \frac{s_1/2^{n-1} + s_2/2^{n-1}}{2} \geq \sqrt{(s_1/2^{n-1})(s_2/2^{n-1})} \geq \sqrt{(p_1^{1/2^{n-1}} p_2^{1/2^{n-1}})} \quad (1.3.2)$$

Uno puede observar que el lado izquierdo es la media aritmética y el lado derecho es la media geométrica de los  $2^n$  números en cuestión.

Para que se de la igualdad necesitamos que los primeros  $2^{n-1}$  valores y los últimos  $2^{n-1}$  valores sean iguales entre si, y necesitamos que  $s_1$  sea igual a  $s_2$ . Como los valores están en orden decreciente concluimos que todos los valores deben ser iguales.

Ahora demostramos que si la desigualdad se cumple para  $n$  valores entonces se cumple para  $n-1$  valores. Sean  $a_1, \dots, a_{n-1}$  los valores en cuestión. Si agregamos un valor  $a_n$  que sea igual a cualquiera de las dos medias obtenemos una desigualdad que rápidamente nos da la desigualdad deseada. □

Una desigualdad que resultará útil es la de Cauchy-Schwarz, la cual se puede formular para espacios normados de la siguiente forma,

**Teorema 1.3.4** (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). *Sean  $u, v \in V$  dos vectores de un espacio vectorial complejo con producto escalar, entonces se satisface*

$$|(u, v)|^2 \leq (u, u)(v, v).$$

*Demostración.* Consideremos el polinomio complejo  $(\lambda v - w, \lambda v - w)$ .

Expandiendo obtenemos,

$$|\lambda^2|(v, v) + (w, w) - \lambda(v, w) - \bar{\lambda}(v, w) =$$

$$|\lambda^2|(v, v) + (w, w) - 2\Re(\lambda)(v, w) \leq |\lambda^2|(v, v) + (w, w)|\lambda|^2\|v\|^2 + 2|\lambda|(v, w) + \|w\|^2,$$

Esta última expansión podemos pensarla como un polinomio real (que solo toma valores no-negativos). Como esta expresión es siempre no-negativa (puesto que es mayor o igual a norma) concluimos que el discriminante debe ser menor o igual a cero,

$$4|(v, w)|^2 - 4(v, v)(w, w) \leq 0.$$

□

A la siguiente desigualdad se le suele conocer como el caso finito de Cauchy Schwarz, se obtiene cuando nuestro espacio vectorial es  $\mathbb{R}^n$  con el producto punto usual.

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (1.3.3)$$

Existe una generalización de este último resultado

**Teorema 1.3.5** (Desigualdad de Hölder finita). Sean  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , entonces,

$$\left(\sum_{i=1}^n (|x_i y_i|)^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q} \quad (1.3.4)$$

**Teorema 1.3.6** (Principio de Rayleigh). Dada una matriz hermitiana  $A \in M_n(\mathbb{C})$  y un vector no-cero  $x$  definimos el cociente de Rayleigh como la cantidad,

$$R(M, x) = \frac{x^* M x}{x^* x}. \quad (1.3.5)$$

El principio de Rayleigh asegura que  $R(M, x) \leq \lambda_n$ , donde  $\lambda_n$  es el eigenvalor más grande de  $M$ .

Existe una generalización de este principio que aparece en Tao [33] conocida como el Teorema minimax,

**Teorema 1.3.7** (Teorema minimax de Courant-Fischer). Dada una matriz hermitiana  $M \in M_n(\mathbb{C})$  tenemos la siguiente identidad en términos de los subespacios  $V$  de  $\mathbb{R}^n$ .

$$\lambda_i = \sup_{\dim(V)=i} \inf_{v \in V} \frac{v^* M v}{v^* v}$$

$$\lambda_i = \inf_{\dim(V)=n-i+1} \sup_{v \in V} \frac{v^* M v}{v^* v}$$

## 1.4. Algunos resultados en teoría espectral de gráficas

Para una introducción general al tema de la teoría espectral de gráficas recomendamos Cvetkovic [12]. Comenzamos esta sección con un teorema de vital importancia, pues nos permite darle una interpretación combinatoria a las potencias de la matriz de adyacencia.

**Teorema 1.4.1** (Interpretación combinatoria de  $A^k$ ). *Dada una gráfica  $G$  con matriz de adyacencia  $A$  y dados un entero positivo  $k$  y dos vértices  $v_i, v_j$  se tiene que  $A_{i,j}^k$  es igual al número de  $v_i - v_j$  caminos de longitud  $k$ .*

*Demostración.* Procedemos por inducción sobre  $k$ .

Cuando  $k = 1$  es claro que existe un camino de longitud 1 de  $v_i$  a  $v_j$  si y solo si existe una arista entre  $v_i$  y  $v_j$ . Es decir si y sólo si  $A_{i,j}^k = 1$ .

Para  $k > 1$  asumimos que el resultado es válido para  $k - 1$ . Para contar los caminos de  $v_i$  a  $v_j$  podemos clasificarlos dependiendo de cual es el penúltimo vértice. El número de caminos tal que el penúltimo vértice es  $v_l$  es  $A_{i,l}^{k-1}$  si  $v_i \sim v_l$  y 0 de lo contrario. Concluimos que el número total de caminos es,

$$\sum_{l=1}^n A_{i,l}^{k-1} A_{l,j} = A_{i,j}^k. \quad (1.4.1)$$

□

Este resultado conduce al siguiente corolario para los momentos de una matriz. Más adelante se verá que los momentos de una matriz están íntimamente relacionados a la energía, por lo que tener una interpretación combinatoria de ellos es deseable.

**Corolario 1.4.2.** *Dada una gráfica  $G$  con matriz de adyacencia  $A$  y un entero positivo  $k$  se cumple que la traza de  $A^k$  es igual al número de caminos cerrados de longitud  $k$  en la gráfica.*

A continuación presentamos un ejemplo que ilustra una conexión entre una propiedad combinatoria y una propiedad espectral de  $G$ .

**Teorema 1.4.3** (Teorema diámetro-espectro). *Toda gráfica conexa de diámetro  $d$  tiene al menos  $d + 1$  eigenvalores distintos.*

*Demostración.* Supongamos que no. Sea  $s \leq d$  el número de eigenvalores distintos. Recordemos que el polinomio mínimo de una matriz diagonalizable es  $\prod (x - \lambda_i)$  donde los  $\lambda_i$  son los eigenvalores distintos. Sea el polinomio mínimo  $x^s + a_{s-1}x^{s-1} + \dots + a_0$ . Por definición de polinomio mínimo se tiene  $A^s + a_{s-1}A^{s-1} + \dots + a_0I = 0$ . Notemos que existen dos vértices  $v_i, v_j$  a distancia  $s$ . Por lo que si  $t < s$  se tiene  $A_{ij}^t = 0$  y  $A_{ij}^s \neq 0$ . Esto es una contradicción pues tendríamos  $(A^s + a_{s-1}A^{s-1} + \dots + a_0I)_{ij} \neq 0$  □

**Corolario 1.4.4.** *Si  $G$  es una gráfica conexa con al menos dos vértices entonces para todo  $1 \leq i < j \leq n$  tenemos que  $v_i$  y  $v_j$  son adyacentes.*

El siguiente teorema caracteriza las gráficas bipartitas en términos de su espectro,

**Teorema 1.4.5** (Caracterización espectral de gráficas bipartitas). *Una gráfica es bipartita si y solo si su espectro es simétrico, es decir para todo  $\lambda$  en el espectro se tiene que  $-\lambda$  también está en el espectro y tiene la misma dimensión algebraica.*

*Demostración.* Supongamos que una gráfica tiene espectro simétrico, entonces por el teorema 1.4.2 el número de caminatas de cualquier longitud impar es 0, por lo que la gráfica es bipartita.

Supongamos que una gráfica tiene un espectro que no es simétrico y tomemos  $\lambda$  con mayor valor absoluto tal que la dimensión del eigenspacio de  $\lambda$  es distinta a la de  $-\lambda$ . Notemos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \lambda_i^{2k+1}$  es  $\infty$  o  $-\infty$  dependiendo del signo de  $\lambda$ . Por lo que existe una longitud  $2k+1$  para la cual la cantidad de caminatas es distinta de cero, implicando que  $G$  no es bipartita.  $\square$

A continuación presentamos el teorema de Sachs. Para algunas gráficas este teorema nos permite calcular el polinomio característico de manera muy sencilla, lo cual puede ser útil para conocer el espectro de la matriz. Este teorema también nos permite controlar el polinomio característico de algunas gráficas al hacerles cambios menores.

**Teorema 1.4.6** (Teorema de Sachs). *Sea  $G$  una gráfica con polinomio característico  $\phi(G, x) = \sum_{i=1}^n a_k x^{n-k}$ . Entonces,*

$$a_k = \sum_{S \in L_k} (-1)^{\omega(S)} 2^{c(S)}, \quad (1.4.2)$$

donde  $L_k$  es el conjunto de subgrafos de  $G$  con  $k$  vértices tales que cada componente tiene tamaño 2 o es un ciclo,  $\omega(S)$  es el número de componentes conexas de  $S$  y  $c(S)$  es el número de ciclos contenidos en  $S$ .

Por último incluimos un resultado muy bonito que ilustra las conexiones posibles entre los eigenvalores de una gráfica y sus propiedades combinatorias. Para ello primero introducimos las siguientes definiciones elementales.

**Definición 1.4.7** (Coloración propia y número cromático). Sea  $G = (V, E)$  una gráfica.

- Decimos que  $f : V \rightarrow \mathbb{N}$  es una coloración propia en  $k$  colores si  $v_i \sim v_j \implies f(v_i) \neq f(v_j)$  y el rango de  $f$  tiene tamaño  $k$ .
- Definimos el número cromático de  $G$  como el menor  $k$  tal que existe una coloración propia de  $G$  en  $k$  colores. Denotaremos el número cromático de  $G$  como  $\chi(G)$ .

**Teorema 1.4.8** (Desigualdad de Hoffman). *Sea  $G$  una gráfica con al menos una arista, entonces se tiene,*

$$\chi(G) \geq \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{-\lambda_n}. \quad (1.4.3)$$

Para una demostración de este resultado referimos al lector a Hoffman[23].

## 1.5. Teoría de operadores

La matriz de adyacencia nos permite traducir gráficas en matrices, lo cual nos permite utilizar técnicas de Algebra Lineal para estudiar gráficas (claro que a nosotros nos gustaría obtener resultados combinatorios de la gráfica). Uno de los resultados más importantes sobre matrices simétricas es que son diagonalizables, por lo que en algún sentido podemos pensarlas como matrices diagonales, o medidas de probabilidad en  $\mathbb{R}$  (su espectro).

**Definición 1.5.1** (Álgebra sobre un campo). Definimos un álgebra sobre un campo  $F$  como un conjunto  $A$  junto con tres operaciones,

- Una operación de suma  $+$  :  $A \times A \rightarrow A$ .
- Una operación de multiplicación  $\times$  :  $A \times A \rightarrow A$ .
- Una operación de multiplicación escalar  $\cdot$  :  $F \times A \rightarrow A$ .

Tal que  $(A, +, \cdot)$  sea un espacio vectorial sobre  $F$  y se satisfagan los siguientes axiomas para todo  $x, y, z \in A$  y  $a, b \in F$ ,

$$(x + y)z = xz + yz. \quad (1.5.1)$$

$$z(x + y) = zx + zy. \quad (1.5.2)$$

$$(ax)(by) = ab(xy). \quad (1.5.3)$$

**Definición 1.5.2** (Álgebra de Banach). Definimos una álgebra de Banach como un álgebra  $A$  sobre el campo  $\mathbb{C}$  o  $\mathbb{R}$  junto con una norma tal que  $A$  es un espacio de Hilbert y se cumple la desigualdad:

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \quad \forall x, y \in A. \quad (1.5.4)$$

**Definición 1.5.3** (Álgebra  $C^*$ ). Definimos una álgebra  $C^*$  como un álgebra de Banach  $A$  junto con un operador  $*$  :  $A \rightarrow A$  tal que lo siguiente se cumple para todo  $x, y \in A$ ,

$$(x^*)^* = x. \quad (1.5.5)$$

$$(x + y)^* = x^* + y^*. \quad (1.5.6)$$

$$(xy)^* = y^* x^*. \quad (1.5.7)$$

$$(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*. \quad (1.5.8)$$

$$\|xx^*\| = \|x\|\|x^*\|. \quad (1.5.9)$$

Decimos que una álgebra  $C^*$  es unitaria si existe un elemento  $1 \in A$  tal que  $1x = x$  para todo  $x \in A$ .

### 1.5.1. Probabilidad no conmutativa

A continuación presentamos algunos resultados de probabilidad no conmutativa que se usarán sobre todo cuando tratemos energía de vértices para gráficas infinitas, para una introducción al tema de probabilidad no conmutativa recomendamos Nica [28]. Comenzamos con la siguiente definición central.

**Definición 1.5.4** (Espacio de probabilidad no conmutativo). Un espacio de probabilidad no conmutativo es una pareja  $(\mathcal{A}, \varphi)$  tal que  $\mathcal{A}$  es un álgebra sobre  $\mathbb{C}$  unitaria y  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  es un funcional positivo unitario tal que  $\varphi(1) = 1$ . Si  $\mathcal{A}$  es un espacio  $C^*$  diremos que es un espacio de probabilidad  $C^*$ . Los elementos de  $\mathcal{A}$  son llamados variables aleatorias.

El funcional  $\varphi$  debe ser pensado como la esperanza en probabilidad clásica, es decir  $\varphi(a)$  es interpretado como el valor esperado de la variable aleatoria  $a$ .

Nos concentraremos únicamente en los espacios de probabilidad  $C^*$  a partir de este punto.

**Definición 1.5.5** (Funcional positivo y tracial). Sea  $(\mathcal{A}, \varphi)$  un espacio de probabilidad  $C^*$ .

- Decimos que el funcional  $\varphi$  es positivo si  $\varphi(a^*a) \geq 0$  para todo  $a \in \mathcal{A}$ .
- Decimos que el funcional  $\varphi$  es tracial si  $\varphi(ab) = \varphi(ba)$  para todo  $a, b \in \mathcal{A}$ .

**Definición 1.5.6** (Variable aleatoria positiva y autoadjunta). Sea  $(\mathcal{A}, \varphi)$  un espacio de probabilidad  $C^*$ .

- Decimos que una variable aleatoria  $a \in A$  es autoadjunta si  $a = a^*$
- Decimos que una variable aleatoria  $a \in A$  es positiva si  $a = bb^*$  para algún  $b \in \mathcal{A}$ .

Para cada elemento auto-adjunto  $a \in A$  existe una única medida de probabilidad  $\mu_a$  en  $\mathbb{R}$  que tiene los mismos momentos que  $a$ . Es decir,

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \mu_a = \varphi(a^k), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Decimos que una sucesión  $a_n \in \mathcal{A}_n$  converge en distribución a un  $a \in A$  si  $\mu_{a_n}$  converge en distribución a  $\mu_a$ . En este contexto la convergencia de momentos es usada más a menudo que la convergencia en distribución.

Sea  $(\mathcal{A}_n, \varphi_n)$  una secuencia de espacios de probabilidad  $C^*$  y sea  $a \in (\mathcal{A}, \varphi)$  autoadjunto. Decimos que  $a_n$  converge a  $a$  en momentos si,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(a_n^k) = \varphi(a^k), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Si  $a$  está acotada entonces la convergencia en momentos implica la convergencia en distribución.

Un objeto que es muy útil es el espectro de un elemento  $x \in \mathcal{A}$ . El cual se define como el conjunto de todos los  $\alpha \in \mathbb{C}$  tal que  $x - \alpha 1$  no es invertible.

**Definición 1.5.7.** Si todos los elementos del espectro de una variable aleatoria  $x$  son positivos diremos que la matriz es positiva.

Un resultado muy importante es el teorema de Riesz-Markov-Kakutani. El cual nos asegura que para todo elemento  $a$  auto-adjunto existe una única medida de probabilidad  $\mu_a$  para  $\mathbb{R}$  con los mismos momentos que  $a$ . Es decir una única medida  $\mu_a$  tal que se cumple,

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \mu_a(dx) = \varphi(a^k), \quad (1.5.10)$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Vale la pena observar que el resultado aplica para polinomios arbitrarios y no solo  $x^k$ .

Una norma importante es la norma  $L_p$  para una variable aleatoria,

**Definición 1.5.8.** Sea  $p > 0$ , la norma  $L_p$  de  $a$  se define como  $\|a\|_p = \varphi(|a|^p)^{1/p}$ .

A continuación presentamos una desigualdad que se puede obtener en este contexto.

**Teorema 1.5.9** (desigualdad de Hölder). Sean  $0 < r, p, q$  tales que  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ , entonces se tiene,

$$\|ab\|_r \leq \|a\|_p \|b\|_q.$$

El caso particular  $r = 1$  y  $p, q = 2$  nos brinda la desigualdad,

**Teorema 1.5.10** (Desigualdad de Cauchy-Schwarz).

$$|\varphi(ab)| \leq \varphi(aa^*)^{1/2} \varphi(bb^*)^{1/2}.$$

### 1.5.2. Álgebra de adyacencia

Consideremos el álgebra  $M_d(\mathbb{C})$  de matrices cuadradas complejas de dimensión  $d$ . Notemos que  $M_d(\mathbb{C})$  junto con el operador usual  $*$  de transpuesta conjugada es un álgebra  $\mathbb{C}^*$  unitaria. Si le agregamos el funcional  $\varphi(A) = \text{tr}(A)/d$  obtenemos un espacio de probabilidad  $C^*$ , el cual será conocido como el álgebra de adyacencia o espacio de adyacencia de dimensión  $d$  (pensando en que estamos interesados en la matrices de adyacencia de gráficas)

Durante el capítulo que trata energía de vértices nos interesará trabajar con matrices de tamaño infinito. Para ello definimos el álgebra de adyacencia para matrices infinitas.

**Definición 1.5.11** (Gráfica localmente finita). Decimos que una gráfica es localmente finita si cada vértice es incidente con una cantidad finita de aristas

Para evitar cambiar la notación nos será conveniente utilizar gráficas donde el conjunto de vértices  $V$  es de la forma  $V = \{v_i | i \in I\}$  donde  $I$  es algún conjunto de subíndices. Sea  $G = (V, E)$  una gráfica localmente finita, para cada  $v_i \in V$  podemos considerar la función indicadora  $V \rightarrow \mathbb{R}$  del conjunto  $\{v\}$ , la cual denotaremos como  $\delta(v_i)$ .

El conjunto de estas funciones forma una base ortonormal de Hilbert para el espacio  $l^2(V)$  con el producto interior usual.

Identificamos  $G$  con el operador simétrico densamente definido en  $l^2(V)$  definido por:

$$A\delta(v) = \sum_{v \sim v'} \delta(v')$$

Notemos que la suma del lado derecho es finita. Se puede demostrar que el operador es acotado si y solo si el grado de  $G$  está acotado, en cuyo caso el radio espectral está acotado por  $\Delta$ .

**Definición 1.5.12** (Álgebra de adyacencia). Definimos el álgebra generada por  $A$  y  $1$  como el álgebra de adyacencia de  $G$ , es decir el álgebra de todos los polinomios en  $A$ . Denotaremos esta álgebra como  $\mathcal{A}$ .

Dado un vértice  $v_i \in V$  y un elemento  $T \in \mathcal{A}$  definimos  $\varphi_i(T) = (T\delta(v_i), \delta(v_i))$ . El lector podrá notar que al igual que en el caso finito, el  $k$ -ésimo momento de  $G$  con el funcional  $\varphi_i$  es igual al número de caminos cerrados de longitud  $k$ .

## Capítulo 2

# Energía de Gráficas

Iniciamos este capítulo presentando la definición central del texto, la energía de una gráfica.

Sea  $G$  una gráfica con eigenvalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  (recordemos que los eigenvalores de  $G$  son los eigenvalores de su matriz de adyacencia), definimos la energía de  $G$  de la siguiente forma.

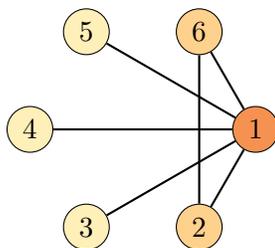
**Definición 2.0.1.** Energía de una gráfica

$$\mathcal{E}(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|. \quad (2.0.1)$$

### 2.1. Ejemplos

#### 2.1.1. Un primer ejemplo

Consideremos la siguiente gráfica representada por el dibujo:



La matriz de adyacencia de la gráfica bajo esa numeración de vértices es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los eigenvalores de la gráfica son aproximadamente  $-2.086$ ,  $-1.000$ ,  $0.000$ ,  $0.000$ ,  $0.572$  y  $2.514$ . Por lo que la energía de la gráfica es aproximadamente  $6.172$ .

### 2.1.2. Gráfica completa

**Definición 2.1.1** (Gráfica completa). Definimos la gráfica completa  $K_n$  como la gráfica con vértices  $\{v_1, \dots, v_n\}$  y aristas  $\{\{v_i, v_j\} \mid v_i \neq v_j\}$ . Es decir la gráfica con todas las aristas posibles.

Para calcular la energía de la gráfica completa con  $n$  vértices podemos encontrar sus eigenvalores de la siguiente manera. Sea  $J$  la matriz del mismo tamaño que consiste únicamente de unos. El vector que consta de  $n$  unos es un eigenvector de  $J$  para el valor  $n$  y como el rango de  $J$  es 1 tenemos que los demás eigenvalores son 0. Puesto que  $J$  es simultáneamente diagonalizable con la matriz identidad concluimos que el espectro de  $J - I$  es  $\{[-1]^{n-1}, [n-1]^1\}$ . Esto se debe a que si  $v$  es un  $\lambda$ -eigenvector de  $J$  entonces  $v$  es un  $\lambda - 1$ -eigenvector de  $J - I$  ( En el caso general se necesita tomar una base de eigenvectores común a ambas matrices, pero como todo vector no-cero es un eigenvector de  $I$  no se necesita esa precisión). Por último señalamos que  $J - I$  es la matriz de adyacencia de  $K_n$ . Por lo tanto tenemos,

$$\mathcal{E}(K_n) = 2(n - 1). \quad (2.1.1)$$

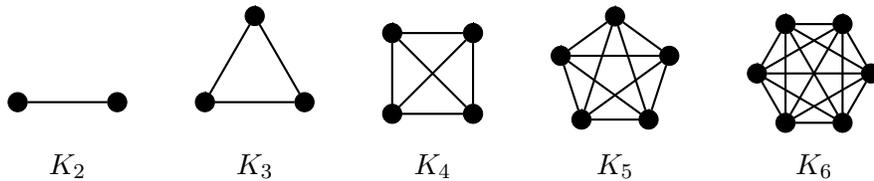


Figura 2.1: Gráfica completa  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $K_4$ ,  $K_5$  y  $K_6$ .

### 2.1.3. El hipercubo

**Definición 2.1.2** (hipercubo de dimensión  $n$ ). Definimos el hipercubo de dimensión  $n$ , denotado por  $H_n$ , como la gráfica cuyos vértices son los vectores de  $\mathbb{R}^n$  que solo tienen coordenadas 0 o 1 y el vector  $x$  es adyacente al vector  $y$  si y solo si  $x_i = y_i$  para todos los valores de  $i$  salvo exactamente uno.

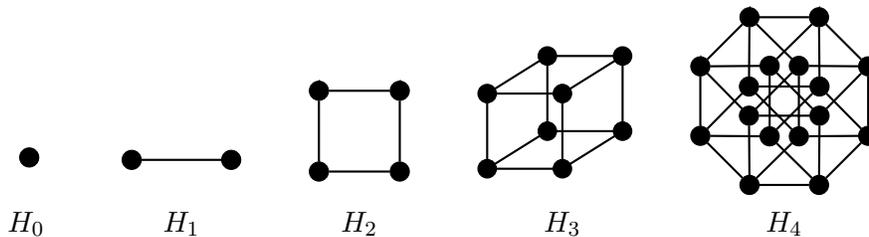


Figura 2.2: Hipercubos de dimensiones 0, 1, 2, 3 y 4.

Sea  $A_n$  la matriz de adyacencia de  $H_n$ , entonces tenemos

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} I_{2^n} & A_n \\ A_n & I_{2^n} \end{pmatrix} \quad (2.1.2)$$

**Proposición 2.1.3.** *Sea  $u$  un  $\lambda$ -eigenvector de  $A_n$ , entonces  $(u, -u)$  es un  $\lambda - 1$ -eigenvector de  $A_{n+1}$  y  $(u, u)$  es un  $\lambda + 1$ -eigenvector de  $A_{n+1}$ .*

La proposición anterior nos permite obtener una base de eigenvectores para  $H_{n+1}$  a partir de una base de eigenvectores de  $H_n$ .

Recordemos que  $H_1 = K_2$  tiene espectro  $\{1, -1\}$ . Se sigue que  $H_2$  tiene espectro  $\{2, [0]^2, -2\}$

En general tendremos que los eigenvalores de  $H_n$  son los reales  $-n + 2k$  con  $0 \leq k \leq n$ , donde  $-n + 2k$  tiene multiplicidad  $\binom{n}{k}$ .

Una vez calculado el espectro se obtiene,

$$\mathcal{E}(H_n) = \sum_{k=0}^n |n - 2k| \binom{n}{k} = 2 \lceil \frac{n}{2} \rceil \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}.$$

Para una fuente donde se demuestra la identidad de la suma anterior y se calcula la energía de la gráfica complemento referimos al lector al artículo de Chen y Xie [13]

Cabe mencionar que el fenómeno que ocurre en 2.1.3 se puede generalizar, iniciamos con la siguiente definición.

**Definición 2.1.4** (Producto cartesiano de gráficas). Sean  $G_1 = (V_1, E_1)$  y  $G_2 = (V_2, E_2)$  dos gráficas.

Definimos el producto cartesiano  $G = G_1 \times G_2$  como la gráfica  $(V_1 \times V_2, E)$  tal que  $(v_1, v_2) \sim (u_1, u_2)$  si y solo si ocurre alguno de los dos siguientes caso,

- $v_1 = u_1$  y  $v_2 \sim u_2$ .
- $v_1 \sim u_1$  y  $v_2 = u_2$ .

El siguiente lema caracteriza el espectro de un producto cartesiano de gráficas.

**Lema 2.1.5.** *Sea  $G_1$  de orden  $n_1$  con eigenvalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_1}$  y sea  $G_2$  de orden  $n_2$  con eigenvalores  $\kappa_1, \dots, \kappa_{n_2}$ . Entonces los  $n_1 n_2$  eigenvalores de  $G_1 \times G_2$  son  $\lambda_i + \kappa_j$  donde  $1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_2$ ,*

*Demostración.* Asumimos que el vértice  $(v_i, u_j)$  adquiere el número  $n_2(i - 1) + j$ . Sea  $A = \{a_1, \dots, a_{n_1}\}$  una base ortogonal de eigenvectores de  $G_1$  y  $B = \{b_1, \dots, b_{n_2}\}$  una base ortogonal de eigenvectores de  $G_2$ . El vector  $c_{i,j}$  de longitud  $n_1 \times n_2$  definido mediante  $(c_{i,j})_{n_2 i' + j'} = (a_i)_{i'} \cdot (b_j)_{j'}$  es un eigenvector de  $G_1 \times G_2$ . Si el eigenvalor de  $a_i$  es  $\lambda$  y el eigenvalor de  $b_j$  es  $\kappa$  entonces el eigenvalor de  $c$  es  $\lambda + \kappa$ .

Para ver que  $c_{i,j}$  es un eigenvector definimos las subgráficas  $T_1$  y  $T_2$  de  $G$  con los mismos vértices que  $G$  donde la primera gráfica solo tiene las aristas de  $G$  donde las primeras coordenadas son iguales y donde  $T_2$  solo contiene las aristas donde las segundas coordenadas son iguales. Es fácil verificar que  $c_{i,j}$  es un eigenvector de  $T_1$  y  $T_2$  por lo que  $c_{i,j}$  es un eigenvector de la suma de sus matrices de adyacencia, que es la matriz de adyacencia de  $G$ . El conjunto de todos estos vectores forma una base ortogonal de eigenvectores para  $G$ .

Para ver que el conjunto de los  $c_{i,j}$  es una base basta demostrar que  $c_{i_1, j_1} \cdot c_{i_2, j_2} = 0$  si  $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ ,

$$c_{i_1, j_1} \cdot c_{i_2, j_2} = \sum_{i'=1}^{n_1} \sum_{j'=1}^{n_2} (a_{i_1})_{i'} (b_{j_1})_{j'} (a_{i_2})_{i'} (b_{j_2})_{j'} = \quad (2.1.3)$$

$$\sum_{i'=1}^{n_1} ((a_{i_1})_{i'}(a_{i_2})_{i'}) \sum_{j'=1}^{n_2} (b_{j_1})_{j'}(b_{j_2})_{j'} = \left( \sum_{i'=1}^{n_1} (a_{i_1})_{i'}(a_{i_2})_{i'} \right) \left( \sum_{j'=1}^{n_2} (b_{j_1})_{j'}(b_{j_2})_{j'} \right). \quad (2.1.4)$$

Por lo que si  $i_1 \neq i_2$  o  $j_1 \neq j_2$  tendremos que alguno de los dos factores es 0. Por lo tanto cualesquiera dos vectores distintos son ortogonales y el conjunto es linealmente independiente.  $\square$

#### 2.1.4. El ciclo

**Definición 2.1.6** (El ciclo). Definimos el ciclo  $C_n$  como la gráfica con vértices  $\{v_1, \dots, v_n\}$  y aristas  $\{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{\{v_1, v_n\}\}$ .

Para calcular la energía del ciclo utilizaremos el siguiente resultado que caracteriza los espectros de una clase más general de matrices,

**Definición 2.1.7** (Matriz circulante). Decimos que  $A \in M_n(\mathbb{C})$  es circulante si para cada  $1 \leq i, j \leq n$  se cumple  $A_{i,j} = A_{i+1,j+1}$ . Donde definimos  $A_{n+1,j} = A_{1,j}$  y  $A_{i,n+1} = A_{i,1}$ .

**Lema 2.1.8.** Sea  $A \in M_n(\mathbb{C})$  una matriz circulante donde la primera fila es el vector  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  y sea  $\omega$  una raíz primitiva de la unidad de grado  $n$ , entonces los eigenvalores de  $A$  están dados por,

$$\lambda_j = c_1 + c_2(\omega^j) + c_3(\omega^j)^2 + \dots + c_n(\omega^j)^{n-1}, \quad j = 1, \dots, n.$$

En el caso del ciclo tenemos  $c_2 = c_n = 1$  y  $c_i = 0$  para cualquier otro valor de  $i$ . Por lo tanto tenemos,

$$\lambda_j = (\omega^j) + (\omega^j)^{n-1} = \omega^j + \omega^{-j} = 2\Re(\omega^j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Por lo tanto la energía de el ciclo se puede escribir como una suma de senos. Al manipular esta suma se obtiene la expresión,

$$\mathcal{E}(C_n) = \begin{cases} \frac{4 \cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}}, & \text{si } n \equiv 0 \text{ mód } 4, \\ \frac{4}{\sin \frac{\pi}{n}}, & \text{si } n \equiv 2 \text{ mód } 4, \\ \frac{2}{\sin \frac{\pi}{2n}}, & \text{si } n \equiv 1 \text{ mód } 2. \end{cases}$$

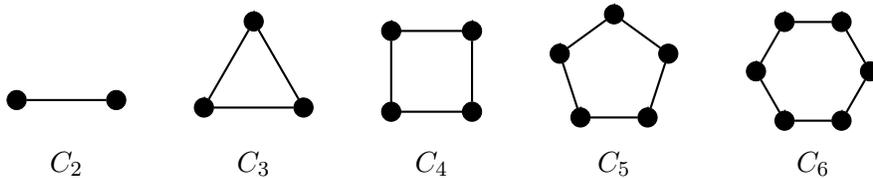


Figura 2.3: Los ciclos  $C_2, C_3, C_4, C_5$  y  $C_6$ .

### 2.1.5. El camino

**Definición 2.1.9** (El camino). Definimos el camino  $P_n$  como la gráfica con vértices  $\{v_1, \dots, v_n\}$  y aristas  $\{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$

Es posible encontrar los eigenvalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$  y eigenvectores correspondientes para el camino  $P_n$ . Obtenemos los siguientes eigenvalores,

$$\lambda_j = 2 \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right), \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.1.5)$$

con la siguiente matriz de eigenvectores,

$$u_{ij} = \frac{\sqrt{2} \sin(ij\pi/(n+1))}{\sqrt{n+1}}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (2.1.6)$$

La energía del camino  $P_n$  esta dada por la fórmula,

$$\mathcal{E}(P_n) = \begin{cases} \frac{2}{\sin \frac{\pi}{2(n+1)}} - 2, & \text{si } n \equiv 0 \text{ mód } 2, \\ \frac{2 \cos \frac{\pi}{2n+1}}{\sin \frac{\pi}{2(n+1)}} - 2, & \text{si } n \equiv 1 \text{ mód } 2. \end{cases}$$

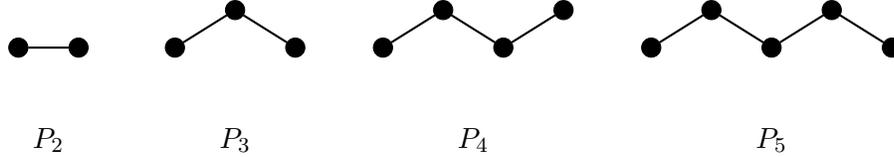


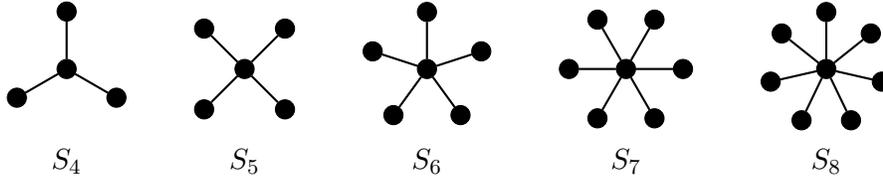
Figura 2.4: Los caminos  $P_2, P_3, P_4$  y  $P_5$

### 2.1.6. Gráficas bipartitas completas

**Definición 2.1.10** (Gráfica bipartita completa). Definimos la gráfica bipartita completa  $K_{n_1, n_2}$  como la gráfica con vértices  $\{v_1, \dots, v_{n_1+n_2}\}$  y aristas  $\{\{v_i, v_j\} \mid 1 \leq i \leq n_1, n_1+1 \leq j \leq n_1+n_2\}$ . En el caso en el que  $n_2 = 1$  diremos que la gráfica es una estrella y la denotaremos  $S_{n_1+1}$ .

Para calcular la energía de la gráfica bipartita completa con tamaños  $n_1, n_2$  y partes  $\{v_1, \dots, v_{n_1}\}, \{v_{n_1+1}, \dots, v_{n_1+n_2}\}$  notamos que el rango de su matriz de adyacencia es 2. Adicionalmente tenemos que el espectro es simétrico y  $A^2$  es una matriz diagonal por bloques con espectro  $\{[n_1 n_2]^2, 0^{n-2}\}$ . Concluimos que el espectro de  $A$  es  $\{\pm[\sqrt{n_1 n_2}]^1, [0]^{n_1+n_2-2}\}$ . Por lo que la energía está dada por,

$$\mathcal{E}(K_{n_1, n_2}) = 2\sqrt{n_1 n_2}. \quad (2.1.7)$$

Figura 2.5: Las estrellas  $S_4$ ,  $S_5$ ,  $S_6$ ,  $S_7$  y  $S_8$ .

### 2.1.7. La gráfica de la amistad

**Definición 2.1.11** (La gráfica de la amistad). Definimos la gráfica de la amistad  $F_n$  (o gráfica del molino) como la gráfica con vértices  $v_1, \dots, v_{2n+1}$  y aristas  $\{\{v_1, v_j\} \mid j > 1\} \cup \{v_{2i}, v_{2i+1}\} \mid i \geq 1\}$

**Proposición 2.1.12.** *El espectro de la gráfica de la amistad es  $\{[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+8n}]^1, [-1]^n, [1]^{n-1}, [\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+8n}]^1\}$ .*

*Demostración.* Comparemos los momentos de la gráfica en cuestión con los momentos de la digráfica dirigida con aristas múltiples  $H_n$  representada por la siguiente matriz,

$$\begin{pmatrix} 0 & n & n \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1.8)$$

$$M_k(F_n, 1) = M_k(H_n, 1).$$

$$M_k(F_n, 2) = \frac{n}{n}(M_k(H_n, 2) - \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)) + \frac{n}{2}(1 + (-1)^n) = M_k(H_n, 1) + (n-1)(1 + (-1)^n).$$

Por lo tanto tenemos  $M_k(F_n) = M_k(H_n) + (n-1)(1 + (-1)^n)$ .

Podemos encontrar  $M_k(H_n)$  diagonalizando la matriz, obteniendo,

$$M_k(H_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+8n}\right)^k + (-1)^k + \frac{1}{2}\sqrt{1+8n}^k. \quad (2.1.9)$$

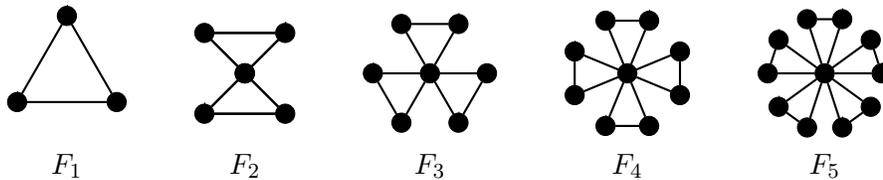
Por lo tanto tenemos,

$$M_k(F_n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+8n}\right)^k + n(-1)^k + (n-1)1^k + \frac{1}{2}\sqrt{1+8n}^k. \quad (2.1.10)$$

□

Concluimos que la energía de la gráfica está dada por,

$$\mathcal{E}(F_n) = 2n - 1 + \sqrt{1+8n}. \quad (2.1.11)$$

Figura 2.6: Gráficas de amistad  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $F_4$  y  $F_5$ .

### 2.1.8. La gráfica del diente de león

**Definición 2.1.13** (Gráfica del diente de león). Definimos la gráfica del diente de león  $D_n$  como la gráfica con vértices  $v_1, v_2, \dots, v_{3n+1}$  y aristas  $\{\{v_1, v_j\} \mid 2 \leq j \leq n+1\} \cup \{\{v_i, v_{n+1+2i-1}\} \mid 2 \leq i \leq n+1\} \cup \{\{v_i, v_{n+1+2i}\} \mid 2 \leq i \leq n+1\}$ .

Para calcular el espectro de la gráfica de diente de león usaremos el siguiente resultado.

**Lema 2.1.14.** Sea  $B \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ , entonces para todo  $\lambda \neq 0$  se tiene que  $\lambda$  es eigenvalor de multiplicidad  $m$  de  $B^*B$  si y solo si  $\lambda$  es eigenvalor de multiplicidad  $m$  de  $BB^*$ .

*Demostración.* Notemos que  $Tr((B^*B)^n) = Tr((BB^*)^n)$  para todo  $n \geq 0$ . Concluimos que los eigenvalores no cero deben ser los mismos.  $\square$

**Proposición 2.1.15.** El espectro de  $D_n$  es  $\{\pm[\sqrt{2}]^{n-1}, \pm[\sqrt{n+2}]^1, [0]^{n+1}\}$ .

*Demostración.* Notemos que la gráfica es bipartita, por lo tanto bajo un reordenamiento de vértices podemos escribir la matriz de adyacencia de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ B^* & 0_{2n+1} \end{pmatrix}.$$

Tendremos entonces,

$$A^2 = \begin{pmatrix} BB^* & 0_{n,2n+1} \\ 0_{2n+1,n} & B^*B \end{pmatrix}.$$

Podemos calcular el espectro de  $A^2$ . Notemos que  $BB^*$  es igual a  $3I + C$  donde  $C$  es la matriz de adyacencia de  $K_n$ , de donde su espectro es  $\{[2]^{n-1}, [n+2]^1\}$ . Concluimos que el espectro de  $B^*B$  es  $\{[2]^{n-1}, [n+2]^1, [0]^{n+1}\}$ . Por lo tanto el espectro de  $A^2$  es  $\{[2]^{2(n-1)}, [n+2]^2, [0]^{n+1}\}$ . Puesto que  $A$  es una gráfica bipartita deducimos que su espectro es  $\{\pm[\sqrt{2}]^{n-1}, \pm[\sqrt{n+2}]^1, [0]^{n+1}\}$   $\square$

Por lo tanto la energía de  $D_n$  está dada por,

$$\mathcal{E}(D_n) = 2(n-1)\sqrt{2} + 2\sqrt{n+2}. \quad (2.1.12)$$

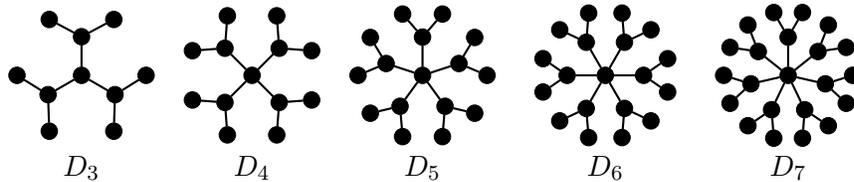


Figura 2.7: Gráficas de diente de león  $D_3, D_4, D_5, D_6$  y  $D_7$ .

## 2.2. Interpretación Química

La energía de la gráfica es la suma de las energías de los  $\pi$  electrones de una molécula. Esta suma es importante para estimar el calor generado durante la formación de hidrocarburos conjugados. Inicialmente la energía de gráficas era de interés porque el cálculo de la energía total de los  $\pi$ -electrones bajo el modelo orbital molecular de Hückel (HMO) era un problema serio. Hoy en día la investigación ha cambiado, ahora se intenta estudiar la energía de gráficas en términos de sus propiedades combinatorias.

En la década de los treinta Hückel sugirió un método para aproximar las soluciones de la ecuación de Schrödinger para una clase de moléculas conocido como HMO. Recuerde que la ecuación de Schrödinger es una ecuación parcial diferencial de la forma

$$\hat{H}\Xi = \mathcal{E}\Xi.$$

Donde  $\Xi$  es la función de onda del sistema,  $\hat{H}$  el operador hamiltoniano y  $\mathcal{E}$  la energía del sistema. Cuando se aplica esta ecuación a una molécula se puede predecir el comportamiento de los electrones de la molécula y calcular su energía.

El modelo HMO esencialmente consiste en reemplazar  $\hat{H}$  por un operador de dimensión finita  $H$  definido de la siguiente forma:

$$H_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{si } i = j, \\ \beta & \text{si los átomos } i \text{ y } j \text{ están enlazados,} \\ 0 & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

Es decir  $H = \alpha I + \beta A(G)$  donde  $G$  es la gráfica de los enlaces.

Resulta que la energía de cada uno de los  $n$   $\pi$ -electrones de la molécula bajo esta simplificación está dada por las constantes  $\alpha, \beta$  y uno de los eigenvalores de  $A(G)$ ,

$$\mathcal{E}_i = \alpha + \beta\lambda_i. \quad (2.2.1)$$

Si sumamos las energías de los  $\pi$ -electrones individuales obtenemos una cantidad conocida como la energía total de los  $\pi$  electrones,

$$\mathcal{E}_\pi = \sum_{i=1}^n g_i \mathcal{E}_i, \quad (2.2.2)$$

donde los  $g_i$  reciben el nombre de números de ocupación y bajo condiciones normales toman los valores

$$g_i = \begin{cases} 2 & \text{si } \lambda_i > 0, \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Utilizando esta última ecuación y  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 0$  obtenemos,

$$\mathcal{E}_\pi = \alpha \sum_{i=1}^n g_i + \beta \sum_{i=1}^n |\lambda_i| = \alpha n + \beta \sum_{i=1}^n |\lambda_i|. \quad (2.2.3)$$

Por lo que la cantidad de interés es  $\sum_{i=1}^n |\lambda_i|$ , es decir la energía de una gráfica.

## 2.3. La energía como descriptor molecular

Puesto que la energía de la gráfica de una molécula está íntimamente relacionada con la energía total de los  $\pi$ -electrones de la molécula, no debe sorprendernos que la energía de la gráfica esté correlacionada con otras propiedades químicas de la molécula.

A este tipo de cantidades, que sirven como predictores para propiedades químicas se les conoce como descriptores de estructura de una molécula, o en inglés "molecular structure-descriptor".

Ejemplos clásicos de descriptores moleculares son el índice de conectividad de Randić y el índice de Wiener, definidos a continuación. Cabe mencionar que ambos índices son definidos de forma combinatoria.

**Definición 2.3.1.** El índice de Wiener  $W(G)$  de una gráfica conexa se define como  $\sum_{i \neq j} d(i, j)$ . Es decir la suma de las distancias entre todas las parejas de vértices.

Como ejemplo de su relación con las propiedades químicas tomemos el punto de ebullición. Wiener encontró en [35] que la cantidad  $\frac{98}{n^2}W(G) + 5.5P(G) - 30.5$  puede aproximar el punto de ebullición de los alcanos, donde  $P(G)$  es el número de parejas de vértices a distancia 3.

Para ilustrar el uso de esta fórmula consideremos los casos del octano y el tetrametilbutano.

En el primero tenemos  $W(G) = 84$ ,  $P(G) = 5$ . Por lo que la cantidad estimada es 125.6

En el segundo tenemos  $W(G) = 58$ ,  $P(G) = 9$ . Por lo que el punto de ebullición estimado es 107.8

Por lo tanto la diferencia estimada entre los dos puntos de ebullición es 17.8. Utilizando los puntos de ebullición reales se obtiene una diferencia de 19.4. En su trabajo Wiener realiza estas comparaciones para varias parafinas, verificando que la fórmula que propone ofrece una buena aproximación.

**Definición 2.3.2.** El índice de conectividad o índice de Randić  $R(G)$  de una gráfica conexa se define como  $\sum_{\{i,j\} \in E} (d_i d_j)^{-1/2}$ . Es decir es la suma de la raíz de el producto de los grados, sumando sobre todas las aristas de la gráfica.

En [32] el autor realiza un análisis estadístico utilizando diversas moléculas y concluye que este índice también describe muy bien el punto de ebullición de ciertos alcanos.

Si nos restringimos a los árboles de un tamaño fijo, se obtiene que tanto el índice de Wiener como el índice de Randić y la energía, se maximizan cuando tomamos el camino, y se minimizan cuando tomamos la estrella.

En [22] los autores presentan un análisis estadístico calculando correlaciones entre los índices de Wiener, de Randić y la energía y varias propiedades físico-químicas de alcanos en dos bases de datos populares. Entre estas propiedades se incluye el punto de ebullición. Concluyen que en promedio el mejor descriptor es el índice de Randić y ponen a la energía en segundo lugar. Sin embargo encuentran que la energía es el mejor descriptor para la tensión de superficie.

Property	ss	Ref	deg	$E$	$W$	$\chi$
BP	40	35	1	0.9752	0.8912	0.9902
			2	0.9928	0.9612	0.9967
			3	0.9929	0.9764	0.9977
			4	0.9929	0.9842	0.9978
	74	36	2	0.9863	0.9578	0.9946
			3		0.9859	
HV	69	36	1	0.9801	0.9644	0.9963
			2		0.9786	
CT	74	36	2	0.9777	0.9649	0.9827
CP	74	36	2	0.9211	0.9235	0.9474
			3	0.9258	0.9523	0.9541
ST	68	36	1	0.9230	0.8098	0.9041

Figura 2.8: Tabla de correlaciones tomada de [22]

## 2.4. Normas de Ky Fan, norma nuclear y norma $p$ de Schatten

Dada una matriz  $T$  definimos los valores singulares de  $T$  como las raíces cuadradas de los eigenvalores de la matriz  $T^*T$ . Cuando la matriz  $T$  es real simétrica es claro que los valores singulares de  $T$  coinciden con los valores absolutos de los eigenvalores de  $T$ .

**Definición 2.4.1** ( $k$ -ésima norma de Ky Fan). Dada una matriz compleja  $T$  de tamaño  $n$  definimos la  $k$ -ésima norma de Ky-fan de  $T$  como la suma de sus  $k$  valores singulares más grandes. Es decir si  $\lambda'_1 \geq \dots \geq \lambda'_n$  son los valores singulares de  $T$ , entonces definimos la norma de Ky Fan como la suma  $\sum_{i=1}^k \lambda'_i$

**Definición 2.4.2** (Norma Nuclear). Dada una matriz compleja  $T$  de tamaño  $n$  definimos la norma nuclear de  $T$  como la  $n$ -ésima norma de Ky Fan.

Podemos observar que la energía de una gráfica  $G$  coincide con la norma nuclear de su matriz de adyacencia. Sin embargo nosotros estamos interesados en estudiar la conexión entre la estructura de la gráfica y su energía. Por lo que resultados generales sobre la norma nuclear no serán de mucho interés.

Cabe mencionar que existe otra forma de generalizar la norma nuclear. Esta norma se conoce como la norma de Schatten,

**Definición 2.4.3** (Norma  $p$  de Schatten). Sea  $p \geq 1$  y  $T$  un operador acotado sobre un espacio de Hilbert  $H$ . Definimos la norma  $p$  de Schatten mediante  $Tr(|T|^p)^{1/p}$ .

Es claro que la norma nuclear es la norma de Schatten cuando  $p = 1$ .

## 2.5. La fórmula integral de Coulson

En esta sección presentamos uno de los principales resultados en la teoría de energía de gráficas. El resultado proporciona una definición alternativa para la energía de una gráfica:

**Teorema 2.5.1.** *Sea  $G$  una gráfica con polinomio característico  $\phi(G, z)$ , entonces se cumple la identidad,*

$$\mathcal{E}(G) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ n - \frac{iz\phi'(G, ix)}{\phi(G, iz)} \right] dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ n - x \frac{d}{dx} \ln \phi(G, ix) \right] dx.$$

*Demostración.* Denotamos por  $\sum_{+} \lambda_i$  la suma de los eigenvalores positivos y por  $\sum_{-} \lambda_i$  la suma de los negativos. Tenemos  $\mathcal{E}(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i| = \sum_{+} \lambda_i - \sum_{-} \lambda_i = 2 \sum_{+} \lambda_i$ . Donde esta última desigualdad se debe a que la traza de la matriz de adyacencia es 0.

Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  las raíces del polinomio  $\phi(G, z)$ , entonces  $\phi'(G, z) = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (z - \lambda_j) / (z - \lambda_i)$ .

Se sigue directamente que

$$\frac{\phi'(G, z)}{\phi(G, z)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{z - \lambda_i}. \quad (2.5.1)$$

Usando esta igualdad podemos obtener

$$\frac{z\phi'(G, z)}{\phi(G, z)} = \sum_{i=1}^n \frac{z}{z - \lambda_i} = \sum_{i=1}^n \frac{z - \lambda_i + \lambda_i}{z - \lambda_i} = \sum_{i=1}^n \left( 1 + \frac{\lambda_i}{z - \lambda_i} \right) = n + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{z - \lambda_i}. \quad (2.5.2)$$

O de forma equivalente:

$$\frac{z\phi'(G, z)}{\phi(G, z)} - n = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{z - \lambda_i}. \quad (2.5.3)$$

Sea  $\Gamma$  un contorno simple orientado positivamente en el plano complejo y sea  $z_0$  un número complejo. Entonces se tiene

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \begin{cases} 1 & \text{si } z_0 \in \text{int}(\Gamma), \\ 0 & \text{de lo contrario.} \end{cases} \quad (2.5.4)$$

Ahora sea  $\Gamma$  un contorno simple orientado positivamente en el plano complejo como el de la figura 2.5 tal que los eigenvalores de  $G$  contenidos en  $\Gamma$  sean exactamente los positivos (Si 0 es un eigenvalor podemos trasladar el contorno minúsculamente a la derecha). Usando el resultado anterior junto con 2.5.3 se tiene,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left[ \frac{z\phi'(G, z)}{\phi(G, z)} - n \right] dz = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left[ \frac{1}{z - \lambda_i} \right] dz = \sum_{+} \lambda_i. \quad (2.5.5)$$

Sea  $R$  el radio del contorno, demostraremos que conforme  $R$  tiende a infinito la integral de la parte curva del contorno tiende a cero,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{z - \lambda_i} = \frac{(\sum_{i=1}^n \lambda_i) \prod_{i \neq j} (z - \lambda_j)}{\prod_{i=1}^n (z - \lambda_i)}. \quad (2.5.6)$$

Lo que tenemos es la razón entre dos polinomios en  $z$ . El polinomio en el numerador es la suma de  $n$  polinomios de grado  $n - 1$ . Notemos que el coeficiente de grado  $n - 1$  del  $i$ -ésimo de ellos es  $\lambda_i$ . Por lo tanto estos coeficientes se cancelan y el polinomio del numerador tiene a lo más grado  $n - 2$ .

Usando esto no es difícil ver que para  $R$  suficientemente grande existirá un real  $c > 0$  tal que si  $z$  está en la parte curva entonces  $|\frac{z\phi'(G,z)}{\phi(G,z)} - n| < c\frac{1}{R^2}$  (La norma de  $z$  es prácticamente igual a  $R$  puesto que en el peor caso el contorno es trasladado minúsculamente a la derecha). Además la longitud de la curva es  $\pi \cdot r$ . Por lo tanto para  $r$  grande tenemos,

$$|\oint_{\Gamma_2} [\frac{z\phi'(G,z)}{\phi(G,z)} - n] dz| \leq \oint_{\Gamma_2} |[\frac{z\phi'(G,z)}{\phi(G,z)} - n]| dz \leq \int_{\Gamma_2} \frac{c}{R^2} \leq \frac{|\Gamma_2|c}{R^2} = \frac{c\pi}{R}. \quad (2.5.7)$$

Ahora regresemos a la integral de contorno, sea  $\Gamma_1$  la parte vertical del contorno y sea  $\Gamma_2$  la parte curva, tenemos,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} [\frac{z\phi'(G,z)}{\phi(G,z)} - n] dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} [\frac{z\phi'(G,z)}{\phi(G,z)} - n] dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} [\frac{z\phi'(G,z)}{\phi(G,z)} - n] dz. \quad (2.5.8)$$

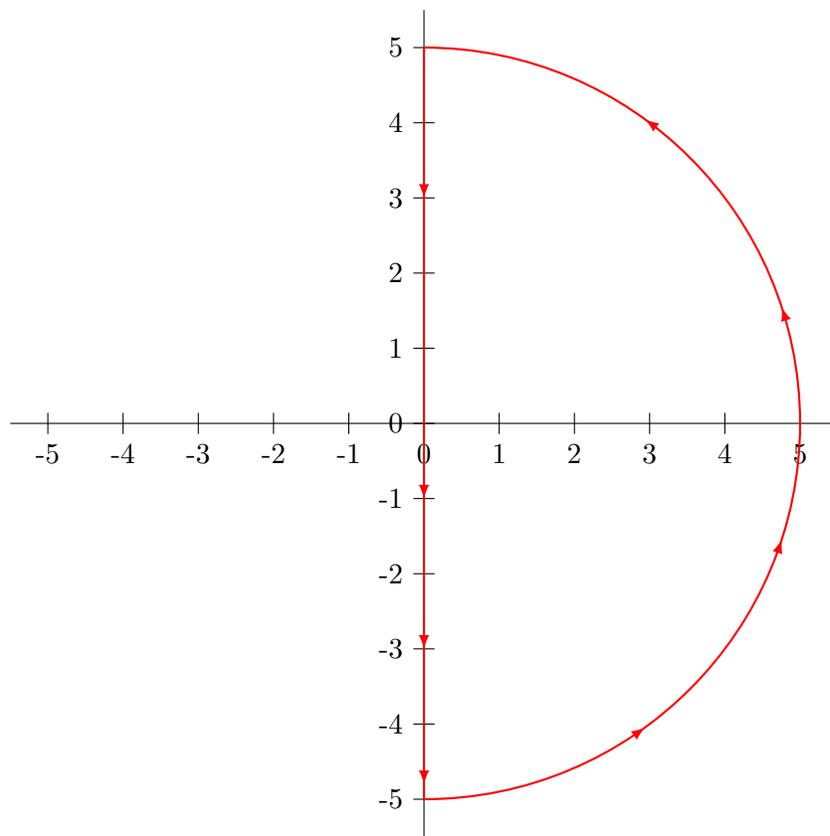
Puesto que la integral de la parte curva se va a cero tenemos,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} [\frac{z\phi'(G,z)}{\phi(G,z)} - n] dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} [\frac{iy\phi'(iy)}{\phi(iy)} - n] d(iy). \quad (2.5.9)$$

Recordemos que se cumple

$$\frac{1}{2} \mathcal{E}(G) = \sum_{+} \lambda_i = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{z - \lambda_k} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} [\frac{z\phi'(G,z)}{\phi(G,z)} - n] dz. \quad (2.5.10)$$

por lo que hemos terminado. □

Figura 2.9: Curva  $\Gamma$  utilizada en la prueba



## Capítulo 3

# Cotas Para la Energía

Este capítulo está dedicado a mostrar cómo se puede acotar la energía usando cantidades combinatorias de la gráfica y cómo se pueden usar estas cotas para estudiar las gráficas hiperenergéticas e hipoenergéticas. La primera sección trabaja cotas superiores y empieza con el resultado clásico de McClelland, después introduciremos la mejora obtenida con la desigualdad de Koolen y Moulton, junto con variaciones de la misma. En la última subsección veremos cómo utilizar los primeros 4 momentos para dar una cota nueva. Este resultado se publicó en [5].

La sección de cotas inferiores comienza con dos desigualdades elementales obtenidas a partir de la convexidad de la función  $x^2$ , más adelante se incluye una cota de McClelland y otra cota obtenida a partir de la desigualdad de Hölder. Tanto en las cotas superiores como las inferiores veremos que unas de las cantidades combinatorias que más aparecen son los números de caminos cerrados de diferentes longitudes. Esto no debe sorprender al lector ya que estas cantidades son los momentos de la matriz de adyacencia.

Las últimas dos secciones estudian las gráficas hiperenergéticas e hipoenergéticas. Se obtienen varios resultados para ellas a partir de las cotas de las secciones previas.

### 3.1. Cotas Superiores

#### 3.1.1. Desigualdad de McClelland

La primera desigualdad que se suele estudiar es la de McClelland la cual dice:

**Teorema 3.1.1.** *Para cualquier gráfica  $G$  con  $n$  vértices y  $m$  aristas se tiene  $\mathcal{E}(G) \leq \sqrt{2nm}$ .*

*Demostración.* Notemos que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = M_2(G) = 2m$ . Utilizando Cauchy-Schwarz con los vectores  $(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|)$  y  $(1, 1, \dots, 1)$  obtenemos la cota. □

Otra forma de obtener el resultado es maximizando la función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f((a_1, a_2, \dots, a_n)) = \sum_{i=1}^n |a_i|$  sobre la curva dada por la restricción  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 2m$ .

Como la función restricción y la función objetivo son funciones pares en cada variable podemos restringir al caso en que las coordenadas son positivas.

Este problema es equivalente al de minimizar  $\sum_{i=1}^n a_i^2$  dado  $\sum_{i=1}^n a_i$ , el cual se obtiene únicamente cuando todos los  $a_i$  son iguales (simplemente por la convexidad de la función  $x^2$ ).

### 3.1.2. Desigualdad de Koolen-Moulton

**Teorema 3.1.2.** *Para toda gráfica se cumple  $\mathcal{E}(G) \leq \frac{2m}{n} + \sqrt{(n-1)[2m - (\frac{2m}{n})^2]}$ .*

*Demostración.* Nuevamente presentamos una demostración con Cauchy Schwarz. Notemos que  $\sum_{i=2}^n \lambda_i^2 = 2m - \lambda_1^2$ , utilizando Cauchy Schwarz con los vectores  $(\sqrt{|\lambda_1|}, \dots, \sqrt{|\lambda_n|})$  y  $(1, 1, \dots, 1)$  se obtiene la desigualdad  $\sum_{i=2}^n |\lambda_i| \leq \sqrt{2m - \lambda_1^2}$ .

Sumando  $\lambda_1^2$  de ambos lados obtenemos,

$$\mathcal{E}(G) \leq \lambda_1^2 + \sqrt{(n-1)[2m - \lambda_1^2]}.$$

Es decir hemos acotado la energía con una función en términos de  $\lambda_1$ . Esta función es decreciente en el rango  $\sqrt{2m/n}, \sqrt{2m}$  (más adelante veremos que  $\lambda_1$  está en este rango).

De esta manera conseguimos un resultado más general. Para cualquier  $\alpha \in [\sqrt{2m/n}, \sqrt{2m}]$  tal que  $\lambda_1 \geq \alpha$  se tiene,

$$\mathcal{E}(G) \leq \alpha + \sqrt{(n-1)[2m - \alpha^2]}.$$

La desigualdad de Koolen-Moulton es el caso particular en que  $\alpha = \frac{2m}{n}$ . En la siguiente subsección presentamos valores de  $\alpha$  conocidos (entre los cuales está  $\alpha = \frac{2m}{n}$ ). □

Notemos que lo que se hizo fue simplemente maximizar la función  $\sum_{i=1}^n |\lambda_i|$  en un conjunto.

En este caso el conjunto dado por  $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2m$  y  $\lambda_1 \geq \alpha$ . En el caso bipartito tenemos que  $|\lambda_1| = |\lambda_n|$ , usando un razonamiento similar se obtiene el siguiente resultado más fuerte.

**Teorema 3.1.3.** *Sea  $G$  bipartita y  $\alpha \geq \frac{2m}{n}$  tal que  $\alpha \leq \lambda_1$ . Entonces  $\mathcal{E}(G) \leq 2\alpha + \sqrt{(n-2)[2m - 2\alpha^2]}$ .*

Notemos que ahora simplemente estamos restringiendo el conjunto aún más, dado que ahora  $|\lambda_1| = |\lambda_n| \geq \alpha$ .

### 3.1.3. Cotas para el radio espectral

**Definición 3.1.4.** Sea  $A$  una matriz, definimos el radio espectral de  $A$  como el mayor valor absoluto de alguno de sus eigenvalores.

En el caso de una gráfica tenemos que ese eigenvalor es positivo. Por lo que si  $G$  es una gráfica con eigenvalores  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_n$  entonces el radio espectral de  $G$  es  $\lambda_1$

A continuación enlistamos algunas cotas conocidas para  $\lambda_1$ .

**Lema 3.1.5.** *Sea  $G$  una gráfica, entonces  $\lambda_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2k]{M_{2k}(G)}$ .*

*Demostración.* Tanto  $\lambda_1 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2k]{M_{2k}(G)}$  como  $\lambda_1 \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2k]{M_{2k}(G)}$  se pueden demostrar fácilmente por contradicción.  $\square$

**Corolario 3.1.6.** *En una gráfica  $G$  con grado máximo  $\Delta$  se tiene  $\lambda_1 \geq \sqrt{\Delta}$*

**Lema 3.1.7.** *Sea  $G$  una gráfica, entonces  $\lambda_1 \geq \frac{2m}{n}$ .*

*Demostración.* Sea  $x = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ . Por el principio de Rayleigh tenemos  $\frac{xAx^*}{xx^*} \leq \lambda_n$ . Notemos que  $xAx^*$  es la suma de las entradas de  $A$ , es decir  $2m$ , mientras que  $xx^* = n$   $\square$

Por último presentamos una cota extraída de [37], en donde se puede encontrar su demostración.

**Lema 3.1.8.** *Para gráficas conexas se tiene  $\lambda_1 \geq \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{d_i^2}{n}}$ .*

**Observación 3.1.9.** *Sea  $G$  una gráfica conexa, entonces*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{d_i^2}{n}} \geq \frac{2m}{n}.$$

*Demostración.* Basta demostrar  $\sqrt{\sum_{i=1}^n d_i^2 n} \geq 2m$ , para ello utilizamos Cauchy-Schwarz con los vectores  $(d_1, \dots, d_n)$  y  $(1, \dots, 1)$ .  $\square$

**Observación 3.1.10.** *Existen gráficas conexas tal que  $\sqrt{\Delta} < \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{d_i^2}{n}}$  y existen gráficas conexas*

*tal que  $\sqrt{\Delta} > \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{d_i^2}{n}}$ .*

*Demostración.* Para la primera parte basta tomar una gráfica regular con  $d \geq 2$ . Ahora nos concentramos en la segunda parte. Para cualesquiera enteros positivos  $n, d$  con  $n \geq d + 2$  y  $d \geq 5$  consideramos la gráfica  $X_{n,d}$  con vértices  $\{v_1, \dots, v_n\}$  y aristas  $\{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 1 \leq i <$

$n\} \cup \{\{v_1, v_i\} \mid 2 \leq i \leq d+1\}$ . Tenemos  $\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{d_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{d^2(1)+3^2(d-1)+2^2(n-d-1)+1(1)}{n}}$  por lo que para

cualquier valor fijo de  $d$  tenemos  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i^2 n} = 2$ . Por lo tanto para cualquier  $d \geq 5$  existe  $M_d$

tal que  $X_{M_d,d}$  cumple  $\sqrt{\Delta} > \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{d_i^2}{n}}$ .  $\square$

Teniendo en cuenta estas relaciones entre las cotas, en el resto del texto se utilizará la siguiente cota para el radio espectral.

**Lema 3.1.11.** *Para gráficas conexas se tiene  $\lambda_1 \geq \max(\sqrt{\Delta}, \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{d_i^2}{n}})$ .*

### 3.1.4. Desigualdad con la nulidad

**Teorema 3.1.12.** *Sea  $G$  una gráfica con nulidad  $t$ , entonces,*

$$\mathcal{E}(G) \leq \sqrt{(n-t)2m}.$$

*Demostración.* La demostración es análoga a la de McClelland utilizando los  $n-t$  eigenvalores no-cero.  $\square$

Se puede decir más, para todo  $\alpha \geq \sqrt{\frac{2m}{n-t}}$  tal que  $\alpha \leq \lambda_1$  tenemos:

**Teorema 3.1.13.** *Sea  $G$  una gráfica con nulidad  $t$  y sea  $\alpha \geq \sqrt{\frac{2m}{n-t}}$  tal que  $\alpha \geq \lambda_1$ , entonces,*

$$\mathcal{E}(G) \leq \alpha + \sqrt{(n-t-1)(2m-\alpha^2)}.$$

**Teorema 3.1.14.** *La demostración es análoga a la de Koolen-Moulton utilizando los  $n-t$  eigenvalores no-cero.*

Si elegimos gráficas aleatorias grandes con el modelo Erdős-Rényi, el porcentaje de gráficas con kernel no-trivial tiende a cero, por lo que esta cota no ofrece una mejora. Sin embargo para otras familias de gráficas como los árboles lo opuesto ocurre. Para una demostración del resultado de gráficas generales referimos al lector a Costello y Vu [14] y para un análisis sobre el rango de árboles aleatorios recomendamos Bhamidi et al. [7]

### 3.1.5. Desigualdad con los primeros 4 momentos

En esta sección presentamos una desigualdad para la energía de una gráfica en términos de sus primeros 4 momentos y el grado máximo. Esta desigualdad es original y fue presentada en [5]. Se puede utilizar esta desigualdad para dar una demostración alterna del resultado en el artículo de Van Dam et al [34].

Dadas dos funciones  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  decimos que  $f$  maximiza a  $g$  en un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}$  si  $f(x) \geq g(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 3.1.15.** *Sea  $G$  una gráfica y  $f(x)$  una función que maximiza a la función valor absoluto en  $[-\Delta, \Delta]$ , entonces  $\mathcal{E}(G) \leq \sum_{i=1}^n f(\lambda_i)$ .*

*Demostración.* Basta hacer la substitución  $\mathcal{E}(G) = \sum_{i=1}^n |x|$  y notar que el espectro de  $G$  está contenido en  $[-\Delta, \Delta]$ .  $\square$

**Corolario 3.1.16.** *Sea  $G$  una gráfica y  $P(x) = a_k x^k + \dots + a_0$  un polinomio que maximiza a la función valor absoluto en  $[-\Delta, \Delta]$ , entonces  $\mathcal{E}(G) \leq \sum_{i=1}^k a_i M_i(G)$*

*Demostración.* Se sigue del teorema anterior y el resultado  $\sum_{i=1}^n P(\lambda_i) = \sum_{i=1}^k a_i M_i(G)$   $\square$

Restringiremos nuestra atención a polinomios de grado 4. Como estamos interesados en polinomios que funcionen de forma general nos resultará conveniente no utilizar las potencias  $x$  y  $x^3$ , puesto que son funciones impares y nos interesa acotar superiormente una función par (la función valor absoluto). Por lo tanto nuestro polinomio será de la forma,

$$P(X) = ax^4 + bx^2 + c \quad (3.1.1)$$

Además introducimos la notación  $A = M_4(G)/\Delta^3 = \frac{2Z-2m+8Q}{\Delta^3}$ ,  $B = 2m/\Delta$ ,  $C = \Delta n$ .

Substituyendo estos valores en 3.1.15 obtenemos

$$\mathcal{E}(G) \leq aM_4(G) + bM_2(G) + cM_0(G) = 2aZ + 8aQ + 2(b-a)m + cn. \quad (3.1.2)$$

En el caso en el que  $G$  es  $d$ -regular podemos escribirlo como,

$$a8Q + (c + 2ad^2 + (b-a)d)n. \quad (3.1.3)$$

Teniendo esto en mente deseamos encontrar buenos valores de  $a, b, c$  sujetos a los valores de  $Q, n$  y  $m$ . Sin embargo esto no es tan fácil puesto que el polinomio correspondiente debe maximizar a la función valor absoluto.

Para ello buscamos una familia de funciones que aproximan a la función valor absoluto bastante bien.

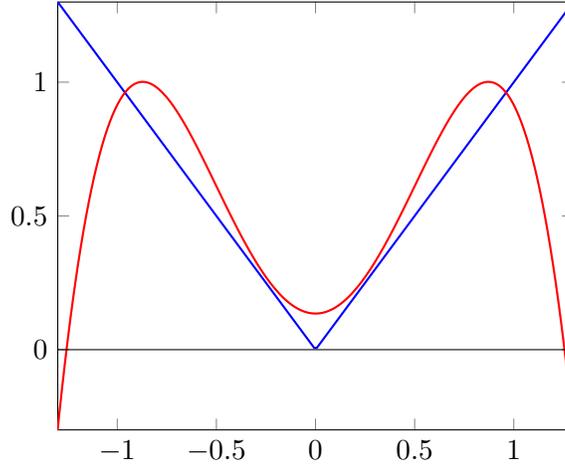
**Lema 3.1.17.** *Dado  $r \in (0, 1)$  existe un polinomio  $P_r(x) = ax^4 + bx^2 + c$  tal que  $P_r$  maximiza a  $|x|$  en  $[-1, 1]$ ,  $P_r(r) = r$  y  $P_r(1) = 1$ .*

*Demostración.* para que se cumpla la condición pedida  $P_r$  debe ser tangente a  $|x|$  en  $x = r$  por lo que las siguientes 3 ecuaciones se deben satisfacer:

$$\begin{aligned} P_r(r) &= ar^4 + br^2 + c = r, \\ P_r(1) &= a + b + c = 1, \\ P'_r(r) &= 4ar^3 + 2br = 1. \end{aligned}$$

La solución a este sistema de ecuaciones es única y se obtiene:

$$a = -\frac{1}{2r(r+1)^2}, \quad b = \frac{3r^2 + 2r + 1}{2r(r+1)^2}, \quad c = \frac{r^2(2r+1)}{2r(r+1)^2}. \quad (3.1.4)$$

Figura 3.1: El polinomio  $P_r$  con  $r = 0.2$ 

Para ver que  $P_r$  maximiza a  $|x|$  basta ver que  $P_r$  maximiza a  $x$  en  $[0, 1]$ , lo cual es equivalente a que  $Q = P_r - x$  sea no-negativa en el intervalo  $[0, 1]$ , para ello analizamos sus derivadas:

$$\begin{aligned} Q'(x) &= 4ax^3 + 2bx, \\ Q''(x) &= 12ax^2 + 2b. \end{aligned}$$

Notemos que  $Q''(x)$  es decreciente por lo que  $Q$  es convexa en  $[0, r_0]$  y cóncava en  $[r_0, 1]$ , donde  $r_0 = \sqrt{\frac{3r^2+2r+1}{6}}$  es la única solución a  $Q''(x) = 0$ . Puesto que  $r \in (0, 1)$  tenemos  $r < r_0 < 1$ . Puesto que en el intervalo  $[0, r_0]$  es convexa alcanza su mínimo en el punto donde  $Q'(x) = 0$ , es decir en  $x = r$ , en este punto  $Q(r) = 0$ . En el intervalo  $[r_0, 1]$  la función es cóncava y por lo tanto alcanza su mínimo en alguno de  $r_0$  y 1. Notemos que  $Q(r_0) > Q(r) = 0$  y  $Q(1) = 1$  por lo que  $P_r$  sí maximiza a  $|x|$  en  $[-1, 1]$ , con igualdad solo en  $\pm\{r, 1\}$ . □

**Corolario 3.1.18.** *El polinomio  $P_{r,\Delta} = \Delta P_r(x/R)$  maximiza a la función  $|x|$  en  $[-\Delta, \Delta]$  con igualdades en  $\pm\Delta$  y  $\pm\Delta r$ .*

Si utilizamos el polinomio  $P_{r,\Delta}$  en 3.1.2 obtenemos,

$$\mathcal{E}(G) \leq \frac{-1}{2r(r+1)^2} \frac{2Z - 2m + 8q}{\Delta^3} + \frac{3r^2 + 2r + 1}{2r(r+1)^2} \frac{2m}{\Delta} + n\Delta \frac{r^2(2r+1)}{2r(r+1)^2}. \quad (3.1.5)$$

Si consideramos la expresión como una función en términos de  $r$  se obtiene que se minimiza cuando  $r = \frac{\sqrt{B-A}}{\sqrt{C-A}}$ . Por lo que es conveniente reemplazar el resultado anterior por el siguiente,

**Teorema 3.1.19.** *Sea  $G$  una gráfica, entonces se tiene,*

$$\mathcal{E}(G) \leq -\frac{B^2 + B\sqrt{-A+B}\sqrt{-B+C} - C(A + \sqrt{-A+B}\sqrt{-B+C})}{A - 2B + C}. \quad (3.1.6)$$

Con igualdad si y solo si el espectro de  $G$  está contenido en  $\{\pm\frac{\sqrt{B-A}}{\sqrt{C-B}}, \pm\Delta\}$ .

**Corolario 3.1.20.** *Sea  $G$  una gráfica  $d$ -regular y libre de cuadrados, entonces se tiene,*

$$\mathcal{E}(G) \leq n \left( \frac{d + (d^2 - d)\sqrt{d-1}}{d^2 - d + 1} \right)$$

*Con igualdad si y solo si el espectro de  $G$  está contenido en  $\{\pm\sqrt{d}, \pm d\}$*

El siguiente teorema caracteriza las gráficas en que se da igualdad,

**Teorema 3.1.21.** *Sea  $G$  una gráfica conexa  $d$ -regular con  $d > 0$ . Si el espectro de  $G$  está contenido en  $\{\pm\sqrt{d}, \pm d\}$  entonces  $G$  es fuertemente regular con  $\lambda = \mu$ , la gráfica de incidencia de un  $2 - (v, d, \lambda)$  diseño o  $K_2$ .*

*Demostración.* Primero analizamos el caso cuando  $-d$  es un eigenvalor. En este caso  $G$  debe ser bipartita y por lo tanto tiene espectro simétrico. Si  $G$  tiene solo dos eigenvalores entonces debe ser bipartita y completa y por lo tanto  $G = K_2$ . Si  $G$  tiene exactamente 4 eigenvalores entonces por Cvetković et al. [15],  $G$  debe ser la gráfica de incidencia de un  $2 - (v, d, \lambda)$  diseño.

Cuando  $-d$  no es un eigenvalor tenemos que  $G$  debe tener exactamente 3 o exactamente 2 eigenvalores. Las únicas gráficas conexas con exactamente 3 eigenvalores son las fuertemente conexas. Adicionalmente requerimos  $\lambda = \mu$  para que un eigenvalor sea el negativo de otro. Las únicas gráficas con exactamente dos eigenvalores son las conexas, pero para que  $-1$  esté en el conjunto  $\{\pm d, \pm\sqrt{d}\}$  se necesita  $d = 1$ . □

A partir de este resultado es posible seguir los procedimientos de [34] para entender la energía máxima por vértice que puede tener una gráfica  $d$ -regular,

**Teorema 3.1.22.** *Sea  $d$  un entero positivo y sea  $X$  el conjunto de gráficas  $d$ -regulares finitas, entonces se tiene la siguiente identidad,*

$$\sup_{G \in X} \mathcal{E}(G)/|G| = \frac{d + (d^2 - d)\sqrt{d-1}}{d^2 - d + 1}$$

*Donde el supremo se alcanza si y solo si existe una gráfica  $d$ -regular del tipo descrito anteriormente.*

*Demostración.* Utilizando la desigualdad 3.1.20 tenemos  $\sup_{G \in X} \mathcal{E}(G)/|G| \leq \frac{d + (d^2 - d)\sqrt{d-1}}{d^2 - d + 1}$ . Por lo tanto solo debemos demostrar que existen gráficas con energía por vértice tan cerca a esta cantidad como sea posible.

Si existe una gráfica  $d$ -regular con espectro contenido en  $\{\pm d, \pm\sqrt{d}\}$  entonces se alcanza la igualdad. Para los otros casos presentamos una familia de gráficas apropiadas.

**Definición 3.1.23.**  $q$ -semiplano elíptico  $d$ -reducido

Definimos un  $q$ -semiplano elíptico  $d$ -reducido como el diseño que se obtiene al tomar un  $q$ -semiplano elíptico y eliminar  $q - d$  clases de puntos y  $d$  clases de líneas.

Un  $q$ -semiplano elíptico  $d$ -reducido contiene los eigenvalores  $\pm\sqrt{d}$  con multiplicidad al menos  $q^2 - q - 2 - 2l(q - 1)$  por lo que al tomar valores suficientemente grandes de  $q$  obtenemos gráficas con energía por vértice tan cerca como queramos a la cota. □

Para un análisis más profundo con cotas más justas referimos al lector a [34].

## 3.2. Cotas Inferiores

### 3.2.1. Una primera cota

En Caporossi et al [9] se reporta una primera cota elemental, la cual es simplemente,

$$\mathcal{E}(G) \geq 2\lambda_1. \quad (3.2.1)$$

*Demostración.* Puesto que la traza de la matriz es 0 tenemos que la suma en valor absoluto de los eigenvalores positivos es igual a la suma en valor absoluto de los eigenvalores negativos. La primera de estas cantidades es claramente al menos  $\lambda_1$ .  $\square$

### 3.2.2. Cota con convexidad

Recordemos que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2m$ .

Utilizando la convexidad de la función  $x^2$  y utilizando que la suma de los eigenvalores positivos es igual al inverso aditivo de la suma de los eigenvalores negativos podemos obtener un resultado análogo al de McClelland,

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \geq 2\sqrt{m}. \quad (3.2.2)$$

Donde la igualdad se obtiene únicamente si  $\lambda_1 = \sqrt{m}$ ,  $\lambda_n = -\sqrt{m}$  y los demás eigenvalores son 0. Si utilizamos la desigualdad  $\lambda_1 \leq \Delta$  obtenemos,

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \geq \Delta \lfloor \frac{2m}{\Delta^2} \rfloor + \sqrt{2m - \Delta^2 \lfloor \frac{2m}{\Delta^2} \rfloor}. \quad (3.2.3)$$

Con igualdad si y solo si hay  $\lfloor \frac{2m}{\Delta^2} \rfloor$  eigenvalores con valor absoluto  $\Delta$ , uno con valor absoluto  $\sqrt{2m - \Delta^2 \lfloor \frac{2m}{\Delta^2} \rfloor}$  y los restantes son ceros.

Además, utilizando que la traza es 0 podemos separar los eigenvalores positivos y negativos para obtener la siguiente mejor cota,

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \geq 2(\Delta \lfloor \frac{m}{\Delta^2} \rfloor + \sqrt{m - \Delta^2 \lfloor \frac{m}{\Delta^2} \rfloor}). \quad (3.2.4)$$

Con igualdad si y solo si hay  $\lfloor \frac{m}{\Delta^2} \rfloor$  eigenvalores iguales a  $\Delta$ , uno igual a  $\sqrt{m - \Delta^2 \lfloor \frac{m}{\Delta^2} \rfloor}$ ,  $\lfloor \frac{m}{\Delta^2} \rfloor$  eigenvalores iguales a  $-\Delta$ , uno igual a  $-\sqrt{m - \Delta^2 \lfloor \frac{m}{\Delta^2} \rfloor}$  y los demás son ceros.

En el caso en el que  $G$  es regular se tiene  $2m = nd$  por lo que la expresión (3.2.4) se convierte en,

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \geq d \lfloor \frac{n}{d} \rfloor + \sqrt{nd - d^2 \lfloor \frac{n}{d} \rfloor}. \quad (3.2.5)$$

A continuación presentamos una desigualdad que utiliza la desigualdad de Hölder,

**Teorema 3.2.1.** *Sea  $G$  una gráfica con al menos una arista, entonces,*

$$\mathcal{E}(G) \geq \frac{(2m)^2}{\sqrt{2m(\sum_{i=1}^n \lambda_i^4)}}. \quad (3.2.6)$$

*Demostración.* Utilizamos la desigualdad de Hölder con  $p = 3, q = 3/2, r = 1$  y las "variables aleatorias"  $|A|^{4/3}$  y  $|A|^{2/3}$ .

$$\text{Se obtiene } \text{Tr}(|A|^2) \leq \text{Tr}(|A|)^2 \text{Tr}(|A|)^{4/3}. \quad \square$$

Alternativamente podemos hacer una demostración con la versión finita de Hölder y los vectores  $u = (|\lambda_1|^{4/3}, \dots, |\lambda_n|^{4/3}), v = (|\lambda_1|^{2/3}, \dots, |\lambda_n|^{2/3})$ .

Utilizando la desigualdad se obtiene,

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n (|\lambda_i|^{4/3})^3 \right)^{1/3} \left( \sum_{i=1}^n (|\lambda_i|^{2/3})^3 \right)^{2/3}.$$

**Corolario 3.2.2.** *Sea  $G$  una gráfica  $d$ -regular, entonces,*

$$\mathcal{E}(G) \geq \frac{(dn)^2}{\sqrt{dn(\sum_{i=1}^n \lambda_i^4)}}.$$

**Corolario 3.2.3.** *Sea  $G$  una gráfica  $d$ -regular libre de cuadrados, entonces,*

$$\mathcal{E}(G) \geq \frac{(dn)^2}{\sqrt{dn(nd + 4nd(d-1))}}.$$

En el siguiente capítulo presentaremos más cotas inferiores obtenidas a partir de la energía de todos los vértices de una gráfica.

### 3.2.3. Cota inferior de McClelland

En McClelland [26] se presenta la siguiente cota inferior,

**Teorema 3.2.4.** *Sea  $G$  una gráfica, entonces,*

$$\mathcal{E}(G) \geq \sqrt{2m + n(n-1)|\det(A)|^{2/n}}. \quad (3.2.7)$$

*Demostración.* Empezamos con la simple identidad,

$$\left( \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \right)^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + \sum_{i \neq j} |\lambda_i| |\lambda_j|. \quad (3.2.8)$$

El primer sumando es el segundo momento de la gráfica, y por lo tanto es igual a  $2m$ . Ahora concentramos nuestra atención en el segundo sumando, Utilizando AM-GM con los  $2n(n-1)$  sumandos obtenemos,

$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} |\lambda_i| |\lambda_j| \geq \prod_{i \neq j} |\lambda_i \lambda_j|^{1/(n(n-1))} = |\det(A)|^{2/n} \quad (3.2.9)$$

Utilizando esto en la primera igualdad se obtiene,

$$\left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i|\right)^2 \geq 2m + |\det(A)|^{2/n}. \quad (3.2.10)$$

□

### 3.3. Gráficas Hiperenergéticas

Comenzamos con la definición de una gráfica hiperenergética,

**Definición 3.3.1.** Decimos que una gráfica de orden  $n$  es hiperenergética si  $\mathcal{E}(G) > 2n - 2$ , es decir si su energía es mayor a la de  $K_n$ .

En [21] se conjeturó que la gráfica completa  $K_n$  es la gráfica completa de orden  $n$  con mayor energía. Se demostró que esta conjetura es falsa en Cevtković y Gutman [10].

Podemos utilizar la desigualdad 3.2.3 para encontrar gráficas hiperenergéticas,

**Teorema 3.3.2.** Sea  $G$  una gráfica  $d$ -regular libre de cuadrados con  $d \geq 20$ , entonces  $\mathcal{E}(G)$  es hiperenergética.

*Demostración.* Por 3.2.3 tenemos,

$$\mathcal{E}(G) \geq \frac{(dn)^2}{\sqrt{dn(nd + 4nd(d-1))}} \geq \frac{(dn)^2}{\sqrt{dn(5nd^2)}} = n\sqrt{d/5}.$$

□

El siguiente teorema establece una cantidad máxima de aristas para que una gráfica sea hiperenergética.

**Teorema 3.3.3.** Sea  $G$  una gráfica con al menos  $2n - 4$  aristas, entonces  $G$  no es hiperenergética.

*Demostración.* Notemos que por la desigualdad de McClelland tenemos

$$\mathcal{E}(G) \leq \sqrt{2nm} \leq \sqrt{2n(2n-4)} = \sqrt{4n^2 - 8n} < 2n - 2. \quad (3.3.1)$$

□

### 3.4. Gráficas Hipoenergéticas

Esta sección corresponde a las gráficas hipoenergéticas. Como el nombre lo sugiere, estas son gráficas con energía pequeña. Al igual que en la sección anterior daremos criterios suficientes para que una gráfica sea hipoenergética, también daremos condiciones necesarias para que eso ocurra. Para un análisis a profundidad sobre gráficas hipoenergéticas, referimos al lector a [11].

**Definición 3.4.1.** Decimos que una gráfica de orden  $n$  es hipoenergética si  $\mathcal{E}(G) < n$ . Si una gráfica no es hipoenergética diremos que es no-hipoenergética.

El siguiente resultado implica que la mayoría de las gráficas son no-hipoenergéticas para órdenes grandes,

**Teorema 3.4.2.** *Sea  $G$  una gráfica con nulidad 0, entonces  $G$  es no-hipoenergética.*

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad  $G$  es conexa, utilizamos la desigualdad 3.2.4 . Como el determinante es entero se tiene,

$$\mathcal{E}(G) \geq \sqrt{2m + n(n-1)|\det(A)|^{2/n}} \geq \sqrt{2(n-1) + n(n-1)} = \sqrt{(n+2)(n-1)} \geq \sqrt{n^2}. \quad (3.4.1)$$

□

De igual forma se tiene que que las gráficas regulares son no-hipoenergéticas. En el siguiente capítulo fortaleceremos este resultado.

**Teorema 3.4.3.** *Sea  $G$  una gráfica  $d$ -regular con  $d > 0$ , entonces  $G$  es no-hipoenergética*

*Demostración.* Puesto que todo eigenvalor está en  $[-d, d]$  tenemos,

$$dn = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i|d = d\mathcal{E}(G)$$

□

**Teorema 3.4.4.** *Sea  $k$  un entero positivo, existe una gráfica hipoenergética con grado mínimo  $k$ .*

*Demostración.* La energía de  $K_{n_1, n_2}$  es  $2\sqrt{n_1 n_2}$ , por lo que si  $n_1 + n_2 > 2\sqrt{n_1 n_2}$  entonces  $K_{n_1, n_2}$  es hipoenergética. Si  $n_1 = k$  es fijo esto ocurrirá para valores grandes de  $n_2$ .

□



# Capítulo 4

## Energía de Vértices

### 4.1. Introducción

En este capítulo, primero introduciremos una forma natural de descomponer la energía de una gráfica en varios sumandos, en la cual cada sumando corresponde a cada uno de los vértices de la gráfica. A estas cantidades les llamaremos las *energías de los vértices*. La definición de Energía de vértice fue introducida por Arizmendi y Juárez-Romero en [3], motivados por ideas de probabilidad no conmutativa.

Posteriormente demostraremos varios teoremas elementales sobre el comportamiento de la energía de vértices. Muchos de estos resultados son los análogos de resultados para la energía total y sirven para refinar los mismos, lo que permite, por ejemplo, mejorar cotas ya conocidas. Los resultados de las secciones 4.3 a 4.7, son nuevos y publicados en trabajo conjunto con Arizmendi y Juárez-Romero en [4]. El resultado sobre la integral de Coulson aparece en [2]

La observación principal que sirve para definir la energía de un vértice es la siguiente forma alternativa que permite calcular la energía de una gráfica.

**Observación 4.1.1.** Sea  $G$  una gráfica con matriz de adyacencia  $A$ . La energía de una gráfica está dada por  $\mathcal{E}(G) = \text{Tr}(|A|)$  (recordamos al lector que  $|A|$  es la matriz definida en 1.2.13).

*Demostración.* Los eigenvalores de  $|A|$  son los valores absolutos de los eigenvalores de  $A$ , i.e.  $|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|$ . Por lo tanto la traza de  $|A|$ , es la suma  $|\lambda_1| + \dots + |\lambda_n|$ .  $\square$

Dado que la traza de una matriz es la suma de los entradas de la diagonal, la idea es entender cada una de estas entradas.

**Definición 4.1.2.** Sea  $G$  una gráfica con matriz de adyacencia  $A$  y  $v_i$  un vértice de  $G$ . Definimos la energía de  $v_i$  como  $|A|_{ii}$  y denotamos esta cantidad por  $\mathcal{E}_G(v_i)$ .

Según los autores de [4] la energía de un vértice debe ser interpretada como la contribución del vértice hacia la energía total de la gráfica.

No es complicado demostrar que la energía de un vértice depende solo de la componente conexa y no cambia cuando se modifican otras componentes conexas de la gráfica o se agregan nuevas componentes conexas. Concretamente,

**Observación 4.1.3.** Sea  $G$  una gráfica con matriz de adyacencia  $A$  y  $C$  una componente conexa de  $G$ . Sea  $v$  un vértice de  $C$ . Entonces  $\mathcal{E}_C(v) = \mathcal{E}_G(v)$ .

Adicionalmente, puesto que al sumar las energías de todos los vértices de una gráfica se obtiene la traza de  $|A|$  tenemos el siguiente resultado,

**Observación 4.1.4.**  $\sum_{i=1}^n \mathcal{E}_G(v_i) = \mathcal{E}(G)$ .

A continuación daremos una forma alternativa de calcular la energía de un vértice en términos de los eigenvalores y eigenvectores de la matriz.

**Lema 4.1.5.** *Sea  $G$  una gráfica, entonces existen reales positivos  $p_{ij}$  tal que:*

$$\mathcal{E}_G(v_i) = \sum_{j=1}^n p_{ij} |\lambda_j|, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.1.1)$$

$$\sum_{i=1}^n p_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.1.2)$$

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.1.3)$$

*Demostración.* Podemos tomar  $p_{ij}$  como los valores  $u_{ij}^2$  donde  $u_{ij}$  son las entradas de una matriz ortonormal  $U$  que satisface,

$$A = U\Lambda U^T. \quad (4.1.4)$$

Donde  $\Lambda$  es una matriz diagonal. Se tiene,

$$|A| = U|\Lambda|U^T. \quad (4.1.5)$$

Como  $|A|$  es una matriz diagonal, se tienen las siguientes igualdades,

$$|A|_{ii} = \sum_{j,h=1}^n U_{ih} |\Lambda|_{hj} U_{ji}^t = \sum_{j=1}^n u_{ij} |\lambda_j| u_{ij} = \sum_{j=1}^n u_{ij}^2 |\lambda_j|. \quad (4.1.6)$$

Por lo tanto se satisface 4.1.1. Ahora, como  $U$  es ortonormal tenemos que la norma de las columnas es 1, por lo que se satisface 4.1.2, de forma análoga se comprueba 4.1.3 usando que  $U^T$  también es ortonormal. □

Consideremos los funcionales unitarios positivos  $\varphi_i$  con  $1 \leq i \leq n$  correspondientes a cada uno de los vértices,

$$\varphi_i(A) = A_{ii}. \quad (4.1.7)$$

Para cada uno de estos funcionales existe una única medida de probabilidad  $\mu$  con los mismos momentos de  $A$ . Es decir:

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \mu(dx) = \varphi_i(A^k), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.1.8)$$

Notemos que se tiene,

$$\varphi_i(A^k) = \sum_{j=1}^n p_{ij} \lambda_j^k, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.1.9)$$

Por lo tanto la medida correspondiente a  $A$  y el funcional  $\varphi_i$  es simplemente la siguiente suma de distribuciones atómicas,

$$\mu_A = \sum_{j=1}^n p_{ij} \delta_{\lambda_j}. \quad (4.1.10)$$

Creemos que los funcionales  $\varphi_i$  son una buena manera de descomponer la traza de la matriz. En particular descomponer el número de caminos cerrados de longitud  $k$  según el vértice inicial es una descomposición muy natural. Por este motivo creemos que descomponer la energía de la gráfica utilizando los mismos funcionales es natural.

## 4.2. Ejemplos y contraejemplos

En esta sección calculamos la energía de los vértices de algunas familias de gráficas. Posteriormente daremos contraejemplos de algunas conjeturas razonables.

### 4.2.1. Sobre las gráficas transitivas

Sea  $G$  una gráfica y  $u, v$  dos vértices de  $G$  tales que existe un automorfismo  $f : G \rightarrow G$  que cumple  $f(u) = v$ , entonces la energía de  $u$  es igual a la de  $v$ .

Recordemos que una gráfica  $G$  es transitiva si para cualesquiera dos vértices  $u, v \in G$  existe un automorfismo  $f$  de  $G$  tal que  $f(u) = v$ . Algunos ejemplos de gráficas transitivas son los hipercubos, los ciclos y las gráficas completas. Las energías de los vértices de esas gráficas se pueden calcular de una forma muy simple pues  $\mathcal{E}_G(v) = \frac{\mathcal{E}(G)}{n}$ .

A continuación algunos ejemplos:

**Ejemplo 4.2.1.** La energía de los vértices de  $K_n$  está dada por,

$$\mathcal{E}_{K_n}(v_i) = \frac{2(n-1)}{n}, \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

**Ejemplo 4.2.2.** La energía de los vértices del hipercubo de dimensión  $n$  está dada por

$$\mathcal{E}_{H_n}(v_i) = \frac{2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}{n}, \quad \text{para } i = 1, \dots, 2^n.$$

**Ejemplo 4.2.3.** La energía de los vértices de los ciclos esta dada por:

$$\mathcal{E}_{C_n}(v_i) = \begin{cases} \frac{4 \cos(\frac{\pi}{n})}{n \sin(\frac{\pi}{n})}, & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ \frac{4}{n \sin(\frac{\pi}{n})}, & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ \frac{2}{n \sin(\frac{\pi}{2n})}, & \text{si } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

Nótese que conforme  $n$  tiende a infinito, en todos los casos se satisface:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{C_n}(v) = \frac{4}{\pi}. \quad (4.2.1)$$

### 4.2.2. Algunas gráficas con muchas simetrías

Además de las gráficas transitivas existen otras familias de gráficas altamente simétricas. Por ejemplo las gráficas transitivas por aristas. Decimos que una gráfica es transitiva por aristas si para cada  $\{v_i, v_j\}$  y  $\{v_k, v_l\} \in E$  existe un automorfismo  $f$  de  $G$  tal que  $\{f(v_i), f(v_j)\} = \{v_k, v_l\}$ . Las gráficas transitivas por aristas sin vértices aislados tienen a lo más dos diferentes energías de vértices. Para ver esto basta tomar una arista  $\{v_i, v_j\}$ , para cualquier vértice  $v_k$  podemos tomar una arista  $\{v_k, v_l\}$ . Entonces tomando un automorfismo tal que  $\{f(v_i), f(v_j)\} = \{v_k, v_l\}$  tenemos que  $f(v_i) = v_k$  o  $f(v_i) = v_l$ , por lo que  $\mathcal{E}_G(v_i) = \mathcal{E}_G(v_k)$  o  $\mathcal{E}_G(v_i) = \mathcal{E}_G(v_l)$ .

### 4.2.3. Gráficas bipartitas completas

Recordemos que la energía de  $K_{n_1, n_2}$  es  $2\sqrt{n_1 n_2}$ , la energía total de vértices de las dos partes es  $\sqrt{n_1 n_2}$ . Utilizando que dados dos vértices en la misma parte existe un automorfismo que envía uno al otro tenemos,

$$\mathcal{E}_{K_{n_1, n_2}}(v_i) = \begin{cases} \frac{\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_1}}, & \text{para } i = 1, \dots, n_1, \\ \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_2}}, & \text{para } i = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2. \end{cases} \quad (4.2.2)$$

En particular, en el caso de la estrella se tiene:

$$\mathcal{E}_{S_n}(v_i) \begin{cases} \sqrt{n-1}, & \text{para } i = 1, \\ \frac{1}{\sqrt{n-1}}, & \text{para } i = 2, \dots, n. \end{cases} \quad (4.2.3)$$

**Corolario 4.2.4.** *Para todo  $c > 0$  y  $d \in \mathbb{Z}^+$  existe una gráfica  $G$  con un vértice  $v_i$  de grado  $d$  tal que  $\mathcal{E}_G(v_i) < c$ .*

*Demostración.* La gráfica  $K_{d, D}$  con  $D$  tal que  $\sqrt{\frac{d}{D}} < c$  es un ejemplo.  $\square$

### 4.2.4. La gráfica de la amistad

Recordemos que la gráfica de la amistad  $F_n$  es la gráfica con  $2n+1$  vértices  $\{v_1, v_2, \dots, v_{2n+1}\}$  en la que  $v_1$  está conectado a todos los vértices y las otras aristas son  $\{v_{2i}, v_{2i+1}\}$  para todo  $1 \leq i \leq n$ .

Es claro que la energía de  $v_i$  es igual a la de  $v_j$  para todo  $i, j > 1$  puesto que existen automorfismos entre estos vértices. El espectro de la gráfica de la amistad es  $\{[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+8n}]^1, [-1]^n, [1]^{n-1}, [\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+8n}]^1\}$ . Solo hay 4 eigenvalores distintos, los pesos  $p_{1,i}$  se pueden calcular con un sistema lineal  $4 \times 4$  en términos de los momentos:

$$\begin{aligned} p_{11}\lambda_1^0 + p_{12}\lambda_2^0 + p_{13}\lambda_3^0 + p_{14}\lambda_4^0 &= 1, \\ p_{11}\lambda_1^1 + p_{12}\lambda_2^1 + p_{13}\lambda_3^1 + p_{14}\lambda_4^1 &= 0, \\ p_{11}\lambda_1^2 + p_{12}\lambda_2^2 + p_{13}\lambda_3^2 + p_{14}\lambda_4^2 &= 2n, \\ p_{11}\lambda_1^3 + p_{12}\lambda_2^3 + p_{13}\lambda_3^3 + p_{14}\lambda_4^3 &= 2n. \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones nos permite calcular los pesos correspondientes a  $v_1$ , por lo que  $\mathcal{E}_{F_n}(v_1)$  se calcula mediante la suma  $p_{11}|\lambda_1| + p_{12}|\lambda_2| + p_{13}|\lambda_3| + p_{14}|\lambda_4|$

Por último, la energía de los  $v_i$  con  $i \geq 2$  está dada por

$$\mathcal{E}_{F_n}(v_i) = \frac{\mathcal{E}(F_n) - \mathcal{E}_{F_n}(v_1)}{2n}. \quad (4.2.4)$$

Haciendo todos los cálculos se obtiene el siguiente resultado:

$$\mathcal{E}_{F_n}(v_i) = \begin{cases} \frac{4n}{\sqrt{8n+1}}, & \text{si } i = 1, \\ \frac{1+4n+(2n-1)\sqrt{8n+1}}{2n\sqrt{8n+1}}, & \text{si } i \neq 1. \end{cases} \quad (4.2.5)$$

#### 4.2.5. La gráfica del diente de león

Recordemos que la gráfica de diente de león  $D_n$  consiste de  $3n + 1$  vértices tal que  $v_1$  está conectado a cada vértice en el conjunto  $\{v_2, \dots, v_{n+1}\}$  y para  $2 \leq i \leq n + 1$  tenemos que  $v_i$  está conectado adicionalmente a  $v_{i+n}$  y  $v_{i+2n}$ .

Es claro que hay tres tipos diferentes de vértices:  $v_1$ , los vecinos de  $v_1$ , los otros  $2n$  vértices externos.

El espectro de la gráfica es  $\{-\sqrt{2}^{n-1}, [-\sqrt{n+2}]^1, [0]^{n+2}\}$ . Por lo tanto se tiene

$$\mathcal{E}(D_n) = 2(n-1)\sqrt{2} + 2\sqrt{n+2}. \quad (4.2.6)$$

Puesto que esta gráfica solo tiene 5 eigenvalores podemos seguir el mismo procedimiento que con la gráfica de la amistad. Los valores de  $p_{1i}$  se obtienen a partir del siguiente sistema.

$$\begin{aligned} p_{11}\lambda_1^0 + p_{12}\lambda_2^0 + p_{13}\lambda_3^0 + p_{14}\lambda_4^0 + \lambda_5^0 &= 1, \\ p_{11}\lambda_1^1 + p_{12}\lambda_2^1 + p_{13}\lambda_3^1 + p_{14}\lambda_4^1 + \lambda_5^1 &= 0, \\ p_{11}\lambda_1^2 + p_{12}\lambda_2^2 + p_{13}\lambda_3^2 + p_{14}\lambda_4^2 + \lambda_5^2 &= n, \\ p_{11}\lambda_1^3 + p_{12}\lambda_2^3 + p_{13}\lambda_3^3 + p_{14}\lambda_4^3 + \lambda_5^3 &= 0, \\ p_{11}\lambda_1^4 + p_{12}\lambda_2^4 + p_{13}\lambda_3^4 + p_{14}\lambda_4^4 + \lambda_5^4 &= n^2 + n. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$p_{11} = 0, p_{12} = 0, p_{13} = \frac{n}{2n+4}, p_{14} = \frac{n}{2n+4}, p_{15} = \frac{2}{n+2}. \quad (4.2.7)$$

Haciendo las simplificaciones necesarias obtenemos  $\mathcal{E}_{D_n}(v_1) = \frac{n}{\sqrt{n+2}}$ . Este mismo método se puede realizar para los vértices de los otros tipos (solo se necesita calcular los momentos de esos vértices y reemplazarlos). Haciendo esto se obtiene:

$$\mathcal{E}_{D_n}(v_i) = \begin{cases} \frac{n}{\sqrt{n+2}}, & \text{para } i = 1, \\ \frac{\sqrt{2}(n-1)}{2n} + \frac{\sqrt{n+2}}{n}, & \text{para } i = 2, \dots, n+1, \\ \frac{\sqrt{2}(n-1)}{2n} + \frac{1}{n\sqrt{n+2}}, & \text{para } i = n+2, \dots, 3n+1. \end{cases} \quad (4.2.8)$$

### 4.2.6. El camino

Las energías de los vértices del camino se pueden calcular utilizando el lema 4.1.5. Los eigenvalores están dados por:

$$\lambda_j = 2 \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right), \quad 1 \leq j \leq n \quad (4.2.9)$$

Los eigenvectores están dados por:

$$u_{ij} = \frac{\sqrt{2} \sin(ij\pi/(n+1))}{\sqrt{n+1}}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (4.2.10)$$

Por lo tanto se sigue de 4.1.6 que la energía del vértice  $v_j$  es dada por:

$$\mathcal{E}_{P_n}(v_i) = \frac{4}{n+1} \sum_{j=1}^n \left| \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) \right| \sin\left(\frac{ij\pi}{n+1}\right)^2. \quad (4.2.11)$$

Note que la energía es exactamente igual a la  $n+1$ -ésima aproximación a la integral  $\int_0^1 4|\cos(\pi x)| \sin(i\pi x)^2 dx$ . Por lo que cuando  $n$  se va a infinito se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{P_n}(i) = \frac{4}{\pi} + \frac{4(-1)^i}{\pi(4i^2 - 1)}. \quad (4.2.12)$$

Como consecuencia de esto tenemos que si  $i \gg 1$  entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{P_n}(i) \sim \frac{4}{\pi}. \quad (4.2.13)$$

Este es el mismo límite que se encuentra para el ciclo. Daremos un resultado que explica este fenómeno en la sección 4.8

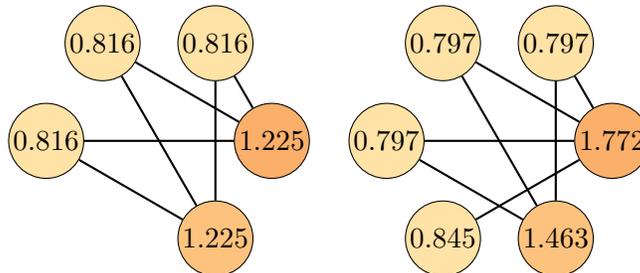
### 4.2.7. Contraejemplos

**Ejemplo 4.2.5.** ¿Dados dos vértices con el mismo grado en una gráfica tienen la misma energía?

No, en el camino la mayoría de los vértices tienen grado 2 y tienen muchas energías distintas.

**Ejemplo 4.2.6.** Sea  $G$  una gráfica y  $H$  una gráfica inducida de  $G$ . Entonces se cumple que  $\mathcal{E}(H) \leq \mathcal{E}(G)$ . Sea  $v$  un vértice de  $H$ . ¿Podemos saber que  $\mathcal{E}_H(v) \leq \mathcal{E}_G(v)$ ?

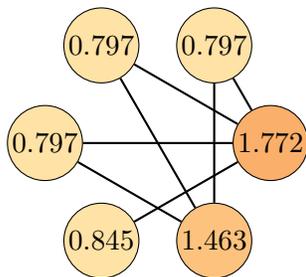
A continuación presentamos un contraejemplo.



Como podemos ver algunos vértices tienen más energía en la gráfica del lado izquierdo (los de energía 0.816).

Otra pregunta razonable es si  $d(v_i) < d(v_j)$  implica  $\mathcal{E}_G(v_i) < \mathcal{E}_G(v_j)$ . Este no es el caso, como se puede ver observando la siguiente gráfica.

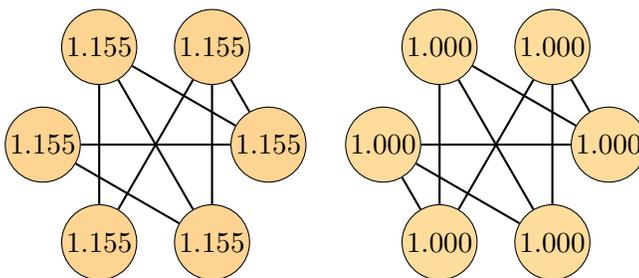
**Ejemplo 4.2.7.** Considere la siguiente gráfica, obtenida agregando un vértice de grado 1 a  $K_{2,3}$ .



Notemos que el vértice con grado 1 tiene energía 0.845 mientras que los vértices con grado 2 tienen energía 0.797.

A continuación presentamos una gráfica en la que todos los vértices tienen la misma energía, pero no los mismo grados.

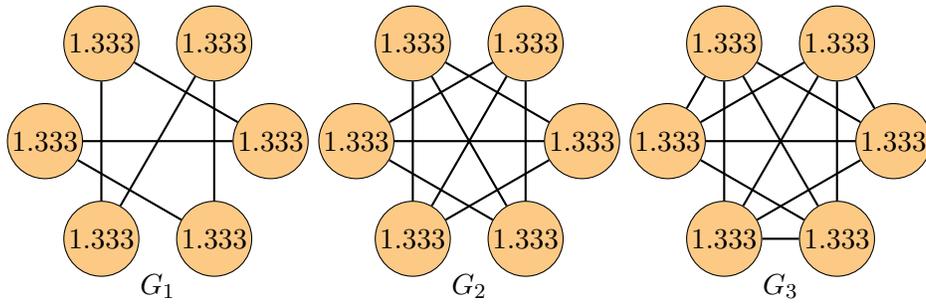
**Ejemplo 4.2.8.**



La gráfica del lado derecho es simplemente  $K_{3,3}$ , mientras que la gráfica de la izquierda es  $K_{3,3}$  con una arista menos. La gráfica de la izquierda es una gráfica en la que todos los vértices tienen la misma energía pero no el mismo grado. Además este es un ejemplo de cómo quitar una arista puede aumentar la energía de todos los vértices.

Otra pregunta es si la secuencia de energías de los vértices de una gráfica puede determinar el tipo de isomorfismo de la gráfica. A continuación damos un contraejemplo.

**Ejemplo 4.2.9.** Las siguientes tres gráfica  $G_1, G_2, G_3$  (de izquierda a derecha) son 2, 3 y 4- regulares respectivamente. Además tienen las mismas energías. Otra característica interesante de esta familia es que  $G_1 \subseteq G_2 \subseteq G_3$ .



Los espectros de estas gráficas son distintos (pues en las gráficas regulares  $\Delta = d$ ). Por lo tanto existen gráficas equienergéticas que no son isospectrales.

### 4.3. Cotas superiores para energía de vértices

Puesto que estas cotas son esencialmente análogas de las cotas para energía de gráficas utilizaremos casi el mismo orden.

La primera desigualdad que obtenemos es un análogo de la desigualdad de McClelland.

**Teorema 4.3.1.** *Sea  $G$  una gráfica y  $v_i$  un vértice, entonces  $\mathcal{E}_G(v_i) \leq \sqrt{d_i}$ , con igualdad si y solo si  $G$  una estrella y  $v_i$  su centro.*

*Demostración.* Consideremos los siguientes vectores,

$$\begin{aligned} a &= (\sqrt{p_{i1}}, \dots, \sqrt{p_{in}}), \\ b &= (\sqrt{p_{i1}}|\lambda_1|, \dots, \sqrt{p_{in}}|\lambda_n|), \end{aligned}$$

utilizando Cauchy-Schwarz obtenemos,

$$\mathcal{E}_G(v_i) = \sum_{i=1}^n p_i |\lambda_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i \sum_{i=1}^n p_i (\lambda_i)^2} = \sqrt{1 \cdot d_i}. \quad (4.3.1)$$

Donde se tiene  $\sum_{i=1}^n d_i^2 p_i = d_i$  puesto que esta cantidad es el segundo momento de la variable aleatoria con funcional  $\varphi_i$

Para que se de la igualdad necesitamos que un vector sea múltiplo del otro. Supongamos que  $\lambda_i$  y  $\lambda_j$  tienen masa positiva en el espectro de la matriz con respecto a  $\varphi_i$ , entonces  $|\lambda_i| = |\lambda_j|$  (de lo contrario el vector  $a$  no es un múltiplo del vector  $b$ ). Por lo tanto el espectro con respecto a  $\varphi_i$  se concentra en  $\{-\lambda, \lambda\}$  para algún  $\lambda$ . Concluimos que los pesos deben ser  $\frac{1}{2}$  para que el primer momento sea cero y concluimos  $\lambda = \sqrt{d_i}$  para que el segundo momento sea  $d_i$ . Por lo tanto los momentos deben coincidir con los momentos del vértice central de una estrella. Esto implica que  $v_i$  es un centro de una estrella, pues de lo contrario el cuarto momento sería más grande (alguno de los vecinos de  $v_i$  tendría una arista adicional). □

Alternativamente podemos utilizar Cauchy-Schwarz para operadores directamente con la matriz  $|A|$  y la matriz  $I$  para obtener  $\varphi_i(|A|) \leq \sqrt{\varphi_i(A^2)\varphi_i(I)} = \sqrt{d_i}$ .

A continuación incluimos el análogo de la desigualdad de Koolen y Moulton para energía de vértices.

**Proposición 4.3.2.** *Sea  $G$  una gráfica conexa con  $n \geq 2$  vértices, entonces,*

$$\mathcal{E}_G(v_i) \leq p_{i1}|\lambda_1| + \sqrt{(d_i - p_{i1}|\lambda_1|^2)(1 - p_{i1})}. \quad (4.3.2)$$

*Demostración.* Consideremos los siguientes vectores de longitud  $n - 1$ .

$$\begin{aligned} a &= (\sqrt{p_{i2}}, \dots, \sqrt{p_{in}}), \\ b &= (\sqrt{p_{i2}}|\lambda_2|, \dots, \sqrt{p_{in}}|\lambda_n|), \end{aligned}$$

utilizando Cauchy-Schwarz obteniendo,

$$(\mathcal{E}_G(v_i) - p_{i1}|\lambda_1|)^2 \leq (d_i - p_{i1}|\lambda_1|^2)(1 - p_{i1}). \quad (4.3.3)$$

Al tomar raíces y despejar se obtiene,

$$\mathcal{E}_G(v_i) \leq p_{i1}|\lambda_1| + \sqrt{(d_i - p_{i1}|\lambda_1|^2)(1 - p_{i1})}. \quad (4.3.4)$$

□

**Proposición 4.3.3.** *Sea  $G$  una gráfica conexa con  $n \geq 2$  vértices y eigenvalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  tal que  $|\lambda_j| \geq |\lambda_{j+1}|$  y  $p_{ij} \geq p_{i,j+1}$  si  $|\lambda_j| = |\lambda_{j+1}|$ , entonces  $p_{i1} \geq \frac{1}{\lambda_1^{2r} + \lambda_1^{2r-2}}$  donde  $r$  es la eccentricidad de  $G$  en  $v_i$ .*

*Demostración.* Sea  $C_k$  el conjunto de caminos cerrados de longitud  $k$  en  $G$  y sea  $C_k(v_i)$  el conjunto de caminos cerrados que empiezan en  $v_i$  de longitud  $k + 2r - 2$  o  $k + 2r$ , donde  $r$  es la eccentricidad en  $v_i$ . Damos una función inyectiva de  $C_k(v_i)$  a  $C_k$ . Probando así  $|C_k| \leq |C_k(v_i)|$ .

La función  $f : C_k \rightarrow C_k(v_i)$  es la siguiente: Sea  $W$  un camino cerrado en  $G$  y  $w$  su primer vértice. Sea  $P$  un camino de longitud  $r$  o  $r - 1$  de  $v_i$  a  $w$ , tal que la longitud de  $P$  tenga la misma paridad que la distancia de  $v_i$  a  $w$ . Definimos  $f(W)$  como la concatenación de  $P$ ,  $W$  y  $\overline{P}$  (donde  $\overline{P}$  es la trayectoria  $P$  en orden contrario). Es claro que  $f(W)$  es un  $v_i - v_i$  camino de longitud  $k + 2r$  o  $k + 2r - 2$ .

La inyectividad se debe a que podemos recuperar  $W$  de  $f(W)$ , para ello basta encontrar  $w$ :  $w$  es el  $(r + 1)$ -ésimo vértice en el camino si  $f(W)$  tiene longitud  $k + 2r$  y el  $r$ -ésimo vértice si  $f(W)$  tiene longitud  $k + 2r - 2$ .

Recuerde que el número de caminos cerrados de  $G$  de longitud  $k$  está dado por  $M_k(G) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^k$  y el número de  $v_i - v_i$  caminos de longitud  $k$  está dado por  $M_k(G, i) = \sum_{j=1}^n p_{ij} \lambda_j^k$ .

Por lo tanto la desigualdad  $|C_k| \leq |C_k(v_i)|$  se puede reescribir como

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^k \leq \sum_{j=1}^n p_{ij} \lambda_j^{k+2r} + \sum_{j=1}^n p_{ij} \lambda_j^{k+2r-2}.$$

lo cual implica

$$\frac{\sum_{j=1}^n p_{ij} (\lambda_j^{k+2r} + \lambda_j^{k+2r-2})}{\sum_{j=1}^n \lambda_j^k} \geq 1. \quad (4.3.5)$$

Finalmente, suponga que  $|\lambda_1|$  tiene multiplicidad  $l$  en  $|A(G)|$ . Es decir  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \dots = |\lambda_l|$ . Entonces, puesto que  $|\lambda_i| < |\lambda_1|$  para  $i > l$ , tomando el límite, cuando  $k$  tiende a infinito sobre los números pares se obtiene:

$$\begin{aligned} 1 &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n p_{ij}(\lambda_j^{k+2r} + \lambda_j^{k+2r-2})}{\sum_{j=1}^n \lambda_j^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^l p_{ij}(\lambda_j^{k+2r} + \lambda_j^{k+2r-2})}{\sum_{j=1}^l \lambda_j^k}, \\ &= \frac{(p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{il})(\lambda_1^{2r} + \lambda_1^{2r-2})}{l}, \end{aligned}$$

lo cual implica  $p_{i1} \geq \frac{1}{\lambda_1^{2r} + \lambda_1^{2r-2}}$ . □

Por otro lado  $\lambda_1 \leq \Delta$ , por lo que

$$p_{i1} \geq \frac{1}{\Delta^{2r} + \Delta^{2r-2}} \geq \frac{1}{2\Delta^{2r}}.$$

**Teorema 4.3.4.** *Sea  $G$  una gráfica conexa con  $n \geq 2$  vértices,  $r$  la excentricidad en el vértice  $v_i$  y  $\alpha = \max(\sqrt{\Delta}, \sum_{j=1}^n \frac{d_j^2}{n})$ , entonces,*

$$\mathcal{E}_G(v_j) \leq \frac{1}{2\Delta^{2r}}|\alpha| + \sqrt{\left(d_i - \frac{1}{2\Delta^{2r}}\alpha^2\right)\left(1 - \frac{1}{2\Delta^{2r}}\right)}. \quad (4.3.6)$$

con igualdad si y solo si  $G$  es  $K_2$ .

*Demostración.* Usando la proposición 4.3.3 tenemos,

$$\mathcal{E}_G(v_j) \leq p_{i1}|\lambda_1| + \sqrt{(d_i - p_{i1}|\lambda_1|^2)(1 - p_{i1})}. \quad (4.3.7)$$

Como  $f(x, p) = px + \sqrt{(d_i - px^2)(1 - p)}$  es decreciente en  $x$  en el intervalo  $0 \leq x \leq \sqrt{\frac{d_i}{p_{i1}}}$ , decreciente en  $p$  y además se tienen las cotas  $\alpha \leq |\lambda_1|$  y  $2\Delta^{2r} \leq p_{i1}$  tenemos,

$$\mathcal{E}_G(v_i) \leq f(|\lambda_1|, p_{i1}) \leq f(\alpha, p_{i1}) \leq f(\alpha, 2\Delta^{2r}) = \frac{1}{2\Delta^{2r}}|\alpha| + \sqrt{\left(d_i - \frac{1}{2\Delta^{2r}}\alpha^2\right)\left(1 - \frac{1}{2\Delta^{2r}}\right)}.$$

Si hay igualdad se tiene  $\Delta^{2r} = \Delta^{2r-2}$ , lo cual implica  $\Delta = 1$ . □

## 4.4. Cotas inferiores para energía de vértices

Comenzamos esta sección con una desigualdad sencilla que más adelante mejoraremos:

**Teorema 4.4.1.** *Sea  $G$  una gráfica conexa con al menos una arista y  $v_i$  un vértice arbitrario, entonces:*

$$\mathcal{E}_G(v_i) \geq \frac{d_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.4.1)$$

*Demostración.*

$$\mathcal{E}_G(v_i) = \sum_{j=1}^n p_{ij} |\lambda_j| \geq \left( \sum_{j=1}^n p_{ij} \lambda_j^2 \right) / |\lambda_1| \geq \left( \sum_{j=1}^n p_{ij} \lambda_j^2 \right) / \Delta = d_i / \Delta. \quad (4.4.2)$$

□

Se puede obtener una cota distinta utilizando la desigualdad de Hölder:

**Teorema 4.4.2.** *Sea  $G$  una gráfica conexa con al menos una arista, entonces para  $p, q$  positivos con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  y  $k \geq 2$  se tiene,*

$$\mathcal{E}_G(v_i) \geq \frac{(\varphi_i(|A|^k))^q}{(\varphi_i(|A|^{p(k-1)+1}))^{q/p}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.4.3)$$

*Demostración.* Utilizamos Hölder con  $p, q$  y las variables aleatorias no conmutativas  $|A|^{k-\frac{1}{q}}$  y  $|A|^{\frac{1}{q}}$  obteniendo,

$$\varphi_i(|A|^k) = \varphi_i(|A|^{k-\frac{1}{q}} |A|^{\frac{1}{q}}) \leq (\varphi_i(|A|^{k-\frac{1}{q}})^p)^{\frac{1}{p}} (\varphi_i(|A|^{\frac{1}{q}})^q)^{\frac{1}{q}} \quad (4.4.4)$$

Elevando a la  $q$  obtenemos,

$$\varphi_i(|A|^k)^q \leq \varphi_i(|A|^{kp-\frac{p}{q}})^{\frac{q}{p}} \varphi_i(|A|) \quad (4.4.5)$$

El resultado se obtiene despejando  $\varphi_i(|A|)$  y notando que  $kp - \frac{p}{q} = p(k-1) + 1$

□

**Corolario 4.4.3.** *Sea  $G$  una gráfica conexa con al menos una arista, entonces:*

$$\mathcal{E}_G(v_i) \geq \frac{d_i^{3/2}}{M_4(G, i)^{\frac{1}{2}}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.4.6)$$

*Demostración.* Tomamos  $k = 2, p = 3$  y  $q = \frac{3}{2}$  en la desigualdad 4.4.4.

□

Es bastante claro que se cumple  $M_4(G, i) \leq d_i^2 \Delta$  (puesto que hay  $d_i$  opciones para el segundo y cuarto vértice). Haciendo esta substitución se obtiene el resultado:

**Corolario 4.4.4.** *Sea  $G$  una gráfica conexa con al menos una arista, entonces:*

$$\mathcal{E}_G(v_i) \geq \sqrt{\frac{d_i}{\Delta}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.4.7)$$

En el caso en el que  $v_i$  no esté contenido en un cuadrado tenemos  $M_G(G, i) \leq d_i(d_i + \Delta - 1)$  (puesto que hay  $d_i^2$  caminos cerrados que repiten el vértice inicial y hay a lo mas  $d_i(\Delta - 1)$  caminos cerrados que no lo hacen).

**Corolario 4.4.5.** *Sea  $G$  una gráfica conexa con al menos una arista tal que  $v_i$  no esté contenido en un cuadrado, entonces:*

$$\mathcal{E}_G(v_i) \geq \sqrt{\frac{d_i^3}{d_i(d_i + \Delta - 1)}} = \sqrt{d_i} \sqrt{\frac{d_i}{d_i + \Delta - 1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.4.8)$$

El siguiente lema aparece publicado en [1], utiliza la descomposición ortogonal de la matriz, creemos que es importante pues permite usar toda la estructura de la gráfica y no solamente sus momentos.

**Lema 4.4.6.** *Sea  $G$  una gráfica con matriz de adyacencia  $A$  y sean  $v_i, v_j$  dos vértices adyacentes, entonces  $\mathcal{E}_G(v_i)\mathcal{E}_G(v_j) \geq 1$ .*

Al igual que cuando encontramos los  $p_{ij}$  tomemos  $U$  ortonormal y  $\Lambda$  la matriz diagonal con diagonal  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , de tal forma que  $A = U^T \Lambda U$ .

*Demostración.* Consideremos los vectores

$$\begin{aligned} a &= (u_{i1}\sqrt{|\lambda_1|}, \dots, u_{in}\sqrt{|\lambda_n|}), \\ b &= (u_{1j}\text{sign}(\lambda_1)\sqrt{|\lambda_1|}, \dots, u_{n,j}\text{sign}(\lambda_n)\sqrt{|\lambda_n|}). \end{aligned}$$

$$(a, b) = \left( \sum_{k=1}^n u_{i,k} u_{k,j} \lambda_k \right) = U \Lambda U^T = A_{ij} = 1.$$

Por otro lado tenemos  $\|a\| = \mathcal{E}_G(v_i)$  y  $\|b\| = \mathcal{E}_G(v_j)$  por lo que Cauchy Schwarz nos da el resultado buscado. □

## 4.5. Cotas para la energía total

Puesto que  $\sum_{i=1}^n \mathcal{E}_G(v_i) = \mathcal{E}(G)$ , tenemos que cualquier cota del tipo  $\mathcal{E}_G(v_i) \leq c_i$  nos da la cota  $\mathcal{E}(G) \leq \sum_{i=1}^n c_i$ . Análogamente cotas del tipo  $\mathcal{E}_G(v_i) \geq c_i$  nos dan la cota  $\mathcal{E}(G) \geq \sum_{i=1}^{n_1} c_i$ . A continuación presentamos argumentos diferentes para producir cotas utilizando la energía de vértices.

**Teorema 4.5.1.** *Sea  $G$  una gráfica bipartita conexa con partes de tamaños  $n_1$  y  $n_2$ , entonces,*

$$\frac{2(n_2 - 1 + \sqrt{m - n_2 + 1})}{\sqrt{\Delta}} \leq \mathcal{E}(G) \leq 2\sqrt{n_1 m}. \quad (4.5.1)$$

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad  $\{v_1, \dots, v_{n_1}\}$  son los vértices de la primera parte. Para el lado izquierdo notemos que  $\mathcal{E}(G)/2 = \sum_{i=1}^{n_1} \mathcal{E}_G(v_i) \geq \sum_{i=1}^{n_1} \sqrt{\frac{d_i}{\Delta} - \sqrt{d_i - 1}}$ .

Donde esta última se da puesto que la mitad de los ciclos de longitud par empiezan en  $v_i$  y por la unicidad de Riesz-Markov-Kakutani.

Para el lado derecho aplicamos Cauchy-Schwarz con los vectores  $(1, 1, \dots, 1)$  y  $(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_{n_1}})$  obteniendo,

$$\sum_{i=1}^{n_1} \sqrt{d_i} < \sqrt{|V_1| \sum_{i=1}^{n_1} d_i} = \sqrt{n_1 m}.$$

Recordemos que  $\sum_{i=1}^n \sqrt{d_i} \geq \sum_{i=1}^n \mathcal{E}_G(v_i) = \frac{\mathcal{E}(G)}{2}$ . □

El siguiente resultado proviene de un artículo por publicarse de Arizmendi y Arimzendi, en el que se demuestra  $2\mathcal{E}_G \geq 2R(G)$  donde  $R(G)$  es el índice de Randić definido a continuación,

**Definición 4.5.2** (Índice de Randić). Sea  $G$  una gráfica, el índice de Randić está dado por,

$$R(G) = \sum_{\{v_i, v_j\} \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{d_i d_j}}.$$

Definimos el peso de una arista de la siguiente forma,

**Definición 4.5.3** (Peso de arista). Sea  $G$  una gráfica, dada  $e = \{v_i, v_j\}$  definimos  $\mathcal{E}_G(e) = \frac{\mathcal{E}_G(v_i)}{d_i} + \frac{\mathcal{E}_G(v_j)}{d_j}$ .

Notemos que se cumple la siguiente desigualdad,

**Lema 4.5.4.**

$$\mathcal{E}_G(\{v_i, v_j\}) \geq \frac{2}{\sqrt{d_i d_j}}.$$

*Demostración.* Utilizando 4.4.6 tenemos,

$$\mathcal{E}_G(\{v_i, v_j\}) = \frac{\mathcal{E}_G(v_i)}{d_i} + \frac{\mathcal{E}_G(v_j)}{d_j} \geq 2\sqrt{\frac{\mathcal{E}_G(v_i)\mathcal{E}_G(v_j)}{d_i d_j}} \geq \frac{2}{\sqrt{d_i d_j}}.$$

Donde la primera desigualdad es la desigualdad media aritmética-media geométrica con dos cantidades y la segunda desigualdad es  $\mathcal{E}_G(v_i)\mathcal{E}_G(v_j) \geq 1$ .  $\square$

Teniendo esto resulta fácil demostrar el teorema,

**Teorema 4.5.5.** Sea  $G$  una gráfica, entonces,

$$\mathcal{E}(G) \geq 2R(G).$$

*Demostración.* Notemos que  $\mathcal{E}(G) = \sum_{i=1}^n \mathcal{E}_G(v_i) = \sum_{i=1}^n d_i \left( \frac{\mathcal{E}_G(v_i)}{d_i} \right) = \sum_{\{v_i, v_j\} \in E} \frac{\mathcal{E}_G(v_i)}{d_i} + \frac{\mathcal{E}_G(v_j)}{d_j}$ .

Utilizando esto la desigualdad queda reescrita como,

$$\sum_{\{v_i, v_j\} \in E} \frac{\mathcal{E}_G(v_i)}{d_i} + \frac{\mathcal{E}_G(v_j)}{d_j} \geq 2 \sum_{\{v_i, v_j\} \in E} \frac{1}{\sqrt{d_i d_j}}. \quad (4.5.2)$$

Lo cual es claro pues tenemos la desigualdad arista por arista  $\square$

## 4.6. Gráficas hiperenergéticas por vértice

En esta sección y la siguiente revisaremos los conceptos de gráficas hiperenergéticas e hiperenergéticas desde el contexto de la energía por vértice. Discutiremos posibles definiciones y sus relaciones con las definiciones clásicas.

Recordemos que una gráfica es hiperenergética si  $\mathcal{E}(G) > 2n - 2$ . En el caso de energía de vértice queremos que la definición sea independiente del tamaño de la gráfica pues queremos que la condición sea "local" para cada vértice. Por lo tanto se llega a la siguiente definición:

**Definición 4.6.1.** Sea  $G$  una gráfica.

- Decimos que un vértice  $v_i$  es hiperenergético si  $\mathcal{E}_G(v_i) \geq 2$ .
- Decimos que una gráfica  $G$  es completamente hiperenergética si  $\mathcal{E}_G(v_i) \geq 2$  para  $i = 1 \dots n$ .
- Decimos que una gráfica  $G$  es completamente no-hiperenergética si  $\mathcal{E}_G(v_i) < 2$  para  $i = 1 \dots n$ .

Como primera observación tenemos que si  $G$  es completamente hiperenergética entonces su grado mínimo es al menos 4.

**Lema 4.6.2.** Sea  $v_i$  un vértice de  $G$  de grado a lo más 4, entonces

$$\mathcal{E}_G(v_i) \leq 2. \quad (4.6.1)$$

con igualdad si y solo si  $G$  es una estrella de grado 4 y  $v_i$  es su centro.

*Demostración.* Utilizamos 4.3.1 con  $d = 4$ . □

**Corolario 4.6.3.** Una gráfica  $d$ -regular es completamente no-hiperenergética si  $d \leq 4$ .

El siguiente resultado nos permite encontrar gráficas completamente hiperenergéticas.

**Proposición 4.6.4.** Una gráfica libre de cuadrados es completamente hiperenergética si  $\delta \geq 2\sqrt{\Delta} + 2$

*Demostración.* Sea  $v_i$  un vértice arbitrario. Utilizando 4.4.5 tenemos,

$$\mathcal{E}_G(v_i) \geq \sqrt{d_i} \sqrt{\frac{d_i}{d_i + \Delta - 1}} \geq \sqrt{\delta} \sqrt{\frac{\delta}{\delta + \Delta - 1}}.$$

Puesto que el numerador y denominador son positivos tenemos,

$$\sqrt{\delta} \sqrt{\frac{\delta}{\delta + \Delta - 1}} \geq 2 \iff \delta^2 \geq 4(\delta + \Delta - 1) \iff (\delta - 2)^2 - 4\Delta \geq 0.$$

Pensamos en esta última expresión como un polinomio en  $\delta$  en el que  $\Delta$  es constante. Tenemos igualdad cuando  $\delta = 2 \pm 2\sqrt{\Delta}$  por lo que si  $\delta \geq 2 + 2\sqrt{\Delta}$  se satisface la desigualdad buscada. □

**Corolario 4.6.5.** Una gráfica  $d$ -regular libre de cuadrados es completamente hiperenergética si  $d \geq 8$ .

Por último damos un ejemplo sencillo de gráficas transitivas con energía por vértice arbitrariamente grande. Estas gráficas no son libres de cuadrados, sin embargo podemos controlar el cuarto momento de sus vértices muy bien. Recuerde que por 4.8.2 tenemos que  $\mathcal{E}_G(v_i) \geq \sqrt{\frac{d_i^3}{M_4}}$ . Por lo tanto si encontramos una familia de gráficas regulares en las que  $M_4 \leq cd^2$  tendremos

$$\mathcal{E}_G(v_i) \geq \sqrt{\frac{d^3}{cd^2}} = \sqrt{\frac{d}{c}}. \quad (4.6.2)$$

**Ejemplo 4.6.6.** Considere las gráficas circulares  $2k$ -regulares con  $4^k + 1$  vértices y distancias  $1, 4, \dots, 4^{k-1}$ . No es difícil demostrar que los únicos 4-ciclos son los de la forma  $(a, a + e_1 4^i, a + e_1 4^i + e_2 4^j, a + e_2 4^j, a)$ ,  $(a, a + e_1 4^i, a, a + e_2 4^j, a)$  or  $(a, a + e_1 4^i, a + e_1 4^i + e_2 4^j, a + e_1 4^i, a)$  con  $e_1, e_2 = \pm 1$ . Por lo tanto el número de ciclos en  $M_4$  está acotado por  $12k^2 = 3(2k)^2$ . Consecuentemente tenemos que la energía de la gráfica es al menos  $\sqrt{\frac{2k}{3}}$ .

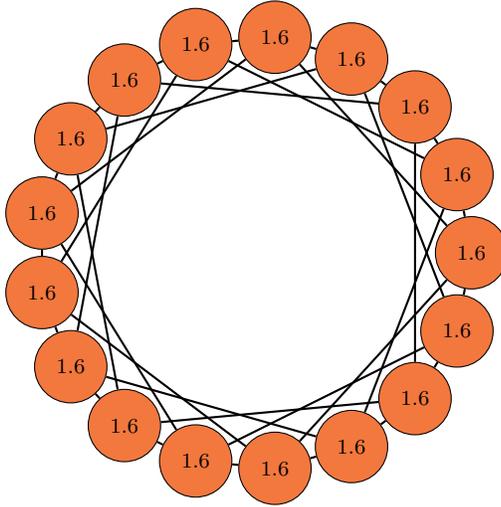


Figura 4.1: La gráfica cuando  $k$  es igual a 2.

## 4.7. Gráficas hipoenergéticas por vértice

Recordemos que una gráfica es hipoenergética si la energía de  $G$  es menor a  $n$ . Consideramos las siguientes definiciones,

**Definición 4.7.1.** Sea  $G$  una gráfica.

- Decimos que un vértice  $v$  es hipoenergético si  $\mathcal{E}_G(v) < 1$ .
- Decimos que una gráfica es completamente hipoenergética si  $\mathcal{E}_G(v) < 1$  para todo  $v$ .
- Decimos que una gráfica es completamente no-hipoenergética si  $\mathcal{E}_G(v) \geq 1$  para todo  $v$ .

Los vértices de grado 1 son hipoenergéticos salvo una excepción.

**Proposición 4.7.2.** Sea  $G$  una gráfica conexa distinta a  $K_2$  y  $v_i$  un vértice de grado 1. Entonces  $v_i$  es hipoenergético.

*Demostración.* Utilizamos 4.3.1 y notamos que no es un caso de igualdad. □

El siguiente teorema caracteriza las gráficas completamente hipoenergéticas.

**Teorema 4.7.3.** Las únicas gráficas completamente hipoenergéticas son gráficas sin aristas.

*Demostración.* Tomemos un vértice de grado máximo:  $v_i$ , por el teorema 4.4.1 tenemos  $\mathcal{E}_G(v_i) \geq d_i/\Delta = 1$ . Alternativamente tomemos dos vértices adyacentes  $v_i, v_j$  y notemos que por 4.4.6 se tiene  $\mathcal{E}_G(v_i)\mathcal{E}_G(v_j) \geq 1$ . Por lo que alguno de los vértices tiene energía al menos 1.  $\square$

Nos parece importante señalar que existen gráficas en las que se alcanza la igualdad en todos los vértices.

**Ejemplo 4.7.4.** La gráfica  $K_{n,n}$  cumple  $\mathcal{E}_{K_{n,n}}(v_i) = 1$  para todo  $1 \leq i \leq 2n$ .

El siguiente resultado nos ofrece una familia diversa de gráficas completamente no-hipoenergéticas.

**Teorema 4.7.5.** *Sea  $G$  una gráfica regular, entonces  $G$  es completamente no-hipoenergética.*

*Demostración.* Sea  $v_i$  un vértice, por 4.4.1 tenemos  $\mathcal{E}_G(v_i) \geq \frac{d}{d} = 1$ .  $\square$

## 4.8. Gráficas localmente finitas

En esta sección generalizaremos la energía de vértices a gráficas localmente finitas y presentamos teoremas de continuidad que conectan la energía de gráficas localmente finitas con la energía de gráficas finitas. Dada una gráfica localmente finita  $G$  podemos considerar su álgebra de adyacencia definida en la sección de prerequisites.

Si la gráfica tiene un grado máximo el operador es acotado, por lo que existe su valor absoluto  $|A| = \sqrt{AA^*}$ .

Podemos definir la energía de un vértice  $v$  de la siguiente forma,

**Definición 4.8.1** (Energía de gráfica localmente finita).

$$\mathcal{E}_G(v_i) = \varphi_{v_i}(|A|).$$

Utilizando las mismas desigualdades para espacios de probabilidad no conmutativos se obtienen desigualdades para el caso finito,

$$\varphi_i(|A|)^2 \leq \varphi_i(|A|^2), \quad (4.8.1)$$

$$\varphi_i(|A|) \geq \varphi_i(A^2)^{3/2} / \varphi_i(A^4)^{1/2}. \quad (4.8.2)$$

En particular tenemos,

**Teorema 4.8.2.** *Sea  $G$  una gráfica localmente finita con grado máximo  $\Delta$  y  $v_i$  un vértice, entonces,*

$$\frac{d_i^{3/2}}{M_4(G, i)^{1/2}} \leq \mathcal{E}_G(v_i) \leq \sqrt{d_i}.$$

Puesto que  $M_4(G, i) \leq d^2\Delta$  tenemos,

**Corolario 4.8.3.** *Sea  $G$  una gráfica localmente finita con grado máximo  $\Delta$  y  $v_i$  un vértice, entonces,*

$$\mathcal{E}_G(v_i) \geq \sqrt{d_i/\Delta}.$$

A continuación se presenta un teorema de continuidad para gráficas localmente finitas.

**Teorema 4.8.4.** *Sea  $G$  una gráfica localmente finita y  $v$  un vértice distinguido de ella. Sea  $G_n$  una secuencia de gráficas finitas y  $v_i^n$  una secuencia de vértices distinguidos en  $G_n$ .*

*Si para cada  $r$  entero positivo existe un  $N$  tal que para todo  $n \geq N$  la  $r$ -vecindad de  $v$  es isomorfa a la  $r$ -vecindad de  $v_n$ , entonces  $\mathcal{E}_G(v_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{G_n}(v_i^n)$ .*

*Demostración.* Puesto que la energía está definida a través del valor absoluto, por el teorema de Stone-Weierstrass tenemos que convergencia en momentos implica convergencia en energías. La convergencia en momentos es clara puesto que el  $k$ -ésimo momento solo depende de la  $k/2$ -ésima vecindad del vértice, es decir: si  $n > k/2$  entonces el  $k$ -ésimo momento de  $G_n$  coincide con el  $k$ -ésimo momento de  $G$ .  $\square$

A continuación incluimos las energías de algunas gráficas finitas con grado acotado

**Ejemplo 4.8.5** (La recta). Consideremos la gráfica  $G = (\mathbb{Z}, E)$  donde  $E = \{a, a + 1 | a \in \mathbb{Z}\}$ .

El  $k$ -ésimo momento de cualquier vértice es 0 si  $k$  es impar y  $\binom{k}{k/2}$  si  $k$  es par.

La distribución con estos momentos es la distribución arco seno con varianza 2, la cual tiene densidad,

$$d_{\mu_a} = \frac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}} dx. \quad (4.8.3)$$

Por lo tanto la energía está dada por la integral,

$$\int_{-2}^2 |x| \frac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{4}{\pi}. \quad (4.8.4)$$

**Ejemplo 4.8.6** (La semirecta). Definimos la semirecta como la gráfica inducida de la recta por el conjunto de los naturales.

Los momentos del primer vértice están en biyección con caminos de Dyck. Por lo que el momento  $2k$  está dado por el número de catalán  $C_k = \binom{2k}{k}/(k+1)$  y los momentos pares son 0. Tenemos entonces que la distribución correspondiente es la semicircular con varianza 1, la cual tiene función de densidad,

$$d_{\mu_s} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} dx. \quad (4.8.5)$$

Por lo que la energía está dada por la integral,

$$\int_{-2}^2 |x| \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} dx = \frac{8}{3\pi}. \quad (4.8.6)$$

Para calcular la distribución de los otros vértices resulta más fácil utilizar el lema de continuidad junto con 4.2.12. por lo que tenemos,

$$\mathcal{E}_G(v_i) = \frac{4}{\pi} + \frac{4(-1)^i}{\pi(4i^2 - 1)}. \quad (4.8.7)$$

El cual nos da  $\frac{6}{3\pi}$  cuando  $i$  es 1.

**Ejemplo 4.8.7.** El árbol  $d$ -regular

Un árbol  $d$ -regular es una gráfica sin ciclos en la que todo vértice tiene grado  $d$ . Puesto que esta propiedad define el número de caminos cerrados para cualquier vértice, la energía de un vértice en un árbol  $d$ -regular es siempre la misma.

El momento  $n$ -ésimo de un vértice en un árbol  $d$ -regular es 0 si  $n$  es impar y  $\binom{2k}{k}(d-1)^k$  si  $n = 2k$ . Estos son los momentos de la distribución Kesten Mc-Kay, la cual tiene función de densidad,

$$d_{\mu_d} = \frac{d\sqrt{4(d-1) - x^2}}{2\pi(d^2 - x^2)} dx. \quad (4.8.8)$$

Por lo que la energía es,

$$\frac{1}{\pi}(2d\sqrt{d-1} - d(d-2)\arctan\frac{2\sqrt{d-1}}{d-2}). \quad (4.8.9)$$

## 4.9. Integral de Coulson

En un artículo reciente [2], Octavio Arizmendi, Beatriz Olivera y Marcelino Ramírez encuentran una fórmula análoga a la de Coulson para la energía de un vértice, precisamente obtienen el siguiente resultado,

**Teorema 4.9.1** (Fórmula integral de Coulson para energía de vértices). *Sea  $G$  una gráfica y  $v_i$  un vértice, entonces tenemos la siguiente identidad para la energía de  $v_i$  en términos de el polinomio característico de  $G$  y el de la gráfica  $G - v_i$  (recordamos al lector que  $G - v_i$  es la subgráfica inducida por el conjunto de todos los vértices menos  $v_i$ ).*

$$\mathcal{E}_G(v_i) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} 1 - \frac{ix\varphi(G - v_i, x)}{\varphi(G, ix)}.$$

La demostración es similar a la demostración de la formula integral de Coulson para la energía total de una gráfica, sin embargo necesitamos encontrar las identidades apropiadas primero.

**Lema 4.9.2.** *Sea  $\Phi_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k(G, i)z^{-k-1}$ , entonces se cumple esta igualdad entre series de potencias:*

$$\Phi_i(z) = \sum_{j=1}^n \frac{p_{ij}}{z - \lambda_j}.$$

*Demostración.* Recordemos que se tiene,

$$m_k(i) = \sum_{j=1}^n p_{ij} \lambda_j^k. \quad (4.9.1)$$

Ahora notemos que,

$$\begin{aligned} \Phi_i(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} m_k(i) z^{-k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^n p_{ij} \lambda_j^k \right) z^{-k-1} = \\ &= \sum_{j=1}^n p_{ij} \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda_j}{z} \right)^k = \sum_{j=1}^n p_{ij} \frac{1}{z} \left( \frac{1}{1 - \frac{\lambda_j}{z}} \right) = \sum_{j=1}^n p_{ij} \left( \frac{1}{z - \lambda_j} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{p_{ij}}{z - \lambda_j}. \end{aligned} \quad (4.9.2)$$

□

**Lema 4.9.3.** *Sea  $A$  la matriz de adyacencia de  $G$  y sea  $\widetilde{A}_{ii}$  la matriz de tamaño  $n - 1$  obtenida al eliminar la  $i$ -ésima fila y la  $i$ -ésima columna a la matriz  $A$ , entonces:*

$$\Phi_i(z) = \frac{\det(zI - \widetilde{A}_{ii})}{\det(zI - A)} = \frac{\phi(G - v_i, z)}{\phi(G, z)}. \quad (4.9.3)$$

*Demostración.* Notemos que

$$\begin{aligned} \Phi_i(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} m_k(i) z^{-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (A^k)_{ii} z^{-k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z} \left( \left( \frac{A}{z} \right)^k \right)_{ii} = \\ &= \frac{1}{z} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{A}{z} \right)^k \right)_{ii} = \frac{1}{z} \left( \frac{1}{1 - \frac{A}{z}} \right)_{ii} = \frac{1}{zI - A_{ii}} \\ &= (B^{-1})_{ii}. \end{aligned}$$

Donde  $B = zI - A$ . Sabemos que podemos calcular  $B^{-1}$  mediante  $B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \text{adj}(B)$ . Por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned} (B^{-1})_{ii} &= \frac{1}{\det(B)} (-1)^{i+i} \det((\widetilde{B})_{ii}) \\ &= \frac{\det(zI - \widetilde{A}_{ii})}{\det(zI - A)} = \frac{\phi(G - v_i, z)}{\phi(G, z)}. \end{aligned}$$

□

Ahora podemos demostrar el resultado principal. Combinando los dos lemas anteriores se tiene,

$$\frac{\phi(G - v_i, z)}{\phi(G, z)} = \sum_{j=1}^n \frac{p_{ij}}{z - \lambda_j} \quad (4.9.4)$$

A continuación presentamos la demostración del teorema 4.9.1, la demostración es muy similar a la presentada para la energía de una gráfica.

*Demostración.* Fórmula integral de Coulson para energía de vértices

Notemos que por 4.9.4 se cumple:

$$1 - \frac{z\phi(G - v_i, z)}{\phi(G, z)} = 1 - z \sum_{j=1}^n \frac{p_{ij}}{z - \lambda_j} = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j p_{ij}}{z - \lambda_j}. \quad (4.9.5)$$

Si tomamos la integral de contorno de una curva orientada positivamente que envuelve los puntos relevantes de la expresión previa, digamos  $\Gamma_R$  obtenemos la nueva igualdad:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} 1 - \frac{z\phi(G - v_i, z)}{\phi(G, z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j p_{ij}}{z - \lambda_j} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \oint_{\Gamma_R} \frac{\lambda_j p_{ij}}{z - \lambda_j} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum - \oint_{\Gamma_R} \frac{\lambda_j p_{ij}}{z - \lambda_j} dz + \sum + \oint_{\Gamma_R} \frac{\lambda_j p_{ij}}{z - \lambda_j} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum - \oint_{\Gamma_R} 0 + \sum + \oint_{\Gamma_R} \frac{\lambda_j p_{ij}}{z - \lambda_j} dz = \sum_{+} \lambda_j p_{ij} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_G(v_i). \end{aligned}$$

Por último notamos que si  $\Gamma_R$  es un semicírculo con lado paralelo al eje  $y$  (véase la figura 2.5) tendremos que el límite de la expresión es  $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} 1 - \frac{ix\varphi(G-v_i, x)}{\varphi(G, ix)}$ .

Para ello separamos la integral en la parte vertical  $\Gamma_1$  y la parte curva  $\Gamma_2$ . Ahora queremos ver que la parte de la integral que corresponde a  $\Gamma_2$  tiende a 0 conforme el radio del semicírculo,  $R$  tiende a infinito.

Notemos que  $\phi(G, z)$  es un polinomio mónico de grado  $n$  al igual que  $z\phi(G - v, z)$  y ambos satisfacen que su segundo coeficiente es 0 pues la suma de las entradas en la diagonal de la matriz son 0. Por lo tanto el polinomio  $\phi(G, z) - z\phi(G - v, z)$  es de grado a lo más  $n - 2$ .

Por lo tanto:

$$\oint_{\Gamma_2} 1 - \frac{z\phi(G - v_i, z)}{\phi(G, z)} dz = \oint_{\Gamma_2} \frac{\phi(G, z) - z\phi(G - v_i, z)}{\phi(G, z)} = \int_{\Gamma_2} \frac{ax^{n-2} + \dots}{x^{n-2} + \dots} \leq \frac{a|\Gamma_2|}{R^2} = \frac{a\pi}{R}. \quad (4.9.6)$$

Esta última expresión tiende a 0 conforme  $R$  tiende a infinito. Con lo que se verifica la fórmula deseada. □

# Apéndice A

## Resultados Numéricos

A continuación presentamos las desigualdades que se evalúan en las tablas de la sección A.3

### A.1. Cotas para la energía de gráficas

#### A.1.1. Cotas superiores

1. McLelland,

$$\mathcal{E}(G) \leq \sqrt{2nm}$$

2. Koolen y Moulton,

$$\mathcal{E}(G) \leq \frac{2m}{n} + \sqrt{(n-1)(2m - (\frac{2m}{n})^2)}$$

3. Zhou

$$\mathcal{E}(G) \leq \alpha + \sqrt{(n-1)(2m - \alpha)} \text{ con } \alpha = \max(\sqrt{\sum_{j=1}^n \frac{d_j^2}{n}}, \sqrt{\Delta})$$

4. Desigualdad 4 momentos

$$\mathcal{E}(G) \leq -\frac{B^2 + B\sqrt{-A+B}\sqrt{-B+C} - C(A + \sqrt{-A+B}\sqrt{-B+C})}{A - 2B + C}$$

#### A.1.2. Cotas inferiores

5. Cota con convexidad y eigenvalores acotados

$$\mathcal{E}(G) \geq 2(\Delta \lfloor \frac{m}{\Delta^2} \rfloor) + \sqrt{m - \Delta^2 \lfloor \frac{m}{\Delta} \rfloor}$$

6. Cota índice de Randić

$$\mathcal{E}(G) \geq 2R(G)$$

## A.2. Cotas Para la energía de vértices

### A.2.1. Cotas superiores

a. McClelland

$$\mathcal{E}(G) \leq \sqrt{d_i}$$

b. Koolen-Moulton

$$\mathcal{E}_G(v_i) \leq \frac{1}{2\Delta^{2n}}\alpha + \sqrt{\left(d_i - \frac{1}{2\Delta^{2n}}\alpha^2\right)\left(1 - \frac{1}{2\Delta^{2n}}\right)}, \text{ con } \alpha = \frac{2m}{n}$$

c. Zhou

$$\mathcal{E}_G(v_i) \leq \frac{1}{2\Delta^{2n}}\alpha + \sqrt{\left(d_i - \frac{1}{2\Delta^{2n}}\alpha^2\right)\left(1 - \frac{1}{2\Delta^{2n}}\right)}, \text{ con } \alpha = \max(\sqrt{\Delta}, \sqrt{\sum_{j=1}^n \frac{d_j^2}{n}})$$

### A.2.2. Cotas inferiores

d. Cota  $\lambda_i \leq \Delta$

$$\mathcal{E}_G(v_i) \geq \frac{d_i}{\Delta}$$

e. Hölder con cuarto momento

$$\mathcal{E}_G(v_i) \geq \sqrt{\frac{d_i^3}{M_4(G, i)}}$$

## A.3. Resultados

Para calcular muchas de las cotas se requiere conocer los eigenvalores y eigenvectores de la matriz de adyacencia. Para obtener estas aproximaciones se utilizó la librería `armadillo` para C++.

Para cada gráfica se incluyen dos tablas. La primera tabla corresponde a la energía total de la gráfica. Cada una de las columnas corresponde a una de las desigualdades de la sección A.1, utilizamos la misma numeración. La segunda tabla contiene información sobre la energía de vértices, las primeras filas contienen las evaluaciones de las desigualdades de la sección A.2.2 para cada vértice, utilizamos los mismos nombres para las desigualdades. La última fila corresponde a la suma sobre todos los vértices de cada una de estas cantidades. Los vértices se numeran del 1 al  $n$  en el sentido de las manecillas del reloj, donde el vértice 1 se distingue por tener un borde de mayor grosor.

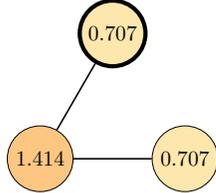
Gráfica 1 de orden 2



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
$V_1$ :	2.000	2.000	2.000	2.000	-	2.000
$V_2$ :	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000
$\Sigma$ :	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$ :	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$V_2$ :	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$\Sigma$ :	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000

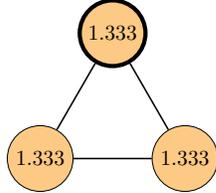
Gráfica 1 de orden 3



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
$V_1$ :	2.828	3.464	3.442	3.414	3.333	2.828
$V_2$ :	2.828	3.464	3.442	3.414	3.333	2.828
$\Sigma$ :	2.828	3.464	3.442	3.414	3.333	2.828

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$ :	0.707	1.000	1.000	0.999	0.500	0.707
$V_2$ :	0.707	1.000	1.000	0.999	0.500	0.707
$V_3$ :	1.414	1.414	1.414	1.414	1.000	1.414
$\Sigma$ :	2.828	3.414	3.413	3.413	2.000	2.828

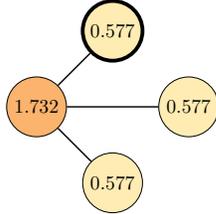
Gráfica 2 de orden 3



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
$V_1$ :	4.000	4.243	4.000	4.000	4.000	3.464
$V_2$ :	4.000	4.243	4.000	4.000	4.000	3.464
$\Sigma$ :	4.000	4.243	4.000	4.000	4.000	3.464

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$ :	1.333	1.414	1.413	1.413	1.000	1.155
$V_2$ :	1.333	1.414	1.413	1.413	1.000	1.155
$V_3$ :	1.333	1.414	1.413	1.413	1.000	1.155
$\Sigma$ :	4.000	4.243	4.240	4.240	3.000	3.464

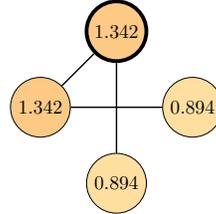
Gráfica 1 de orden 4



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
$V_1$ :	3.464	4.899	4.854	4.732	4.675	3.464
$V_2$ :	3.464	4.899	4.854	4.732	4.675	3.464
$\Sigma$ :	3.464	4.899	4.854	4.732	4.675	3.464

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$ :	0.577	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_2$ :	0.577	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_3$ :	0.577	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_4$ :	1.732	1.732	1.732	1.732	1.000	1.732
$\Sigma$ :	3.464	4.732	4.732	4.732	2.000	3.464

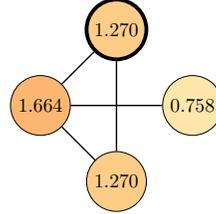
Gráfica 2 de orden 4



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
$V_1$ :	4.472	4.899	4.854	4.822	4.667	3.464
$V_2$ :	4.472	4.899	4.854	4.822	4.667	3.464
$\Sigma$ :	4.472	4.899	4.854	4.822	4.667	3.464

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$ :	1.342	1.414	1.414	1.414	1.000	1.265
$V_2$ :	0.894	1.000	1.000	1.000	0.500	0.707
$V_3$ :	0.894	1.000	1.000	1.000	0.500	0.707
$V_4$ :	1.342	1.414	1.414	1.414	1.000	1.265
$\Sigma$ :	4.472	4.828	4.828	4.828	3.000	3.944

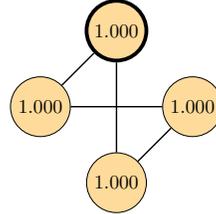
Gráfica 3 de orden 4



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
$V_1$ :	4.962	5.657	5.464	5.362	5.417	4.000
$V_2$ :	4.962	5.657	5.464	5.362	5.417	4.000
$\Sigma$ :	4.962	5.657	5.464	5.362	5.417	4.000

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$ :	1.270	1.414	1.414	1.414	0.667	1.069
$V_2$ :	0.758	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_3$ :	1.270	1.414	1.414	1.414	0.667	1.069
$V_4$ :	1.664	1.732	1.732	1.732	1.000	1.567
$\Sigma$ :	4.962	5.560	5.560	5.560	2.667	4.282

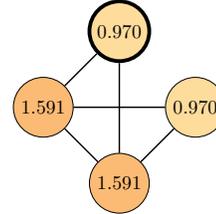
Gráfica 4 de orden 4



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
$V_1$ :	4.000	5.657	5.464	5.464	4.000	4.000
$V_2$ :	4.000	5.657	5.464	5.464	4.000	4.000
$\Sigma$ :	4.000	5.657	5.464	5.464	4.000	4.000

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$ :	1.000	1.414	1.414	1.414	1.000	1.000
$V_2$ :	1.000	1.414	1.414	1.414	1.000	1.000
$V_3$ :	1.000	1.414	1.414	1.414	1.000	1.000
$V_4$ :	1.000	1.414	1.414	1.414	1.000	1.000
$\Sigma$ :	4.000	5.657	5.656	5.656	4.000	4.000

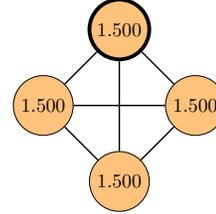
Gráfica 5 de orden 4



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
$V_1$ :	5.123	6.325	5.854	5.790	5.868	4.472
$V_2$ :	5.123	6.325	5.854	5.790	5.868	4.472
$\Sigma$ :	5.123	6.325	5.854	5.790	5.868	4.472

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$ :	0.970	1.414	1.414	1.414	0.667	0.894
$V_2$ :	0.970	1.414	1.414	1.414	0.667	0.894
$V_3$ :	1.591	1.732	1.732	1.732	1.000	1.342
$V_4$ :	1.591	1.732	1.732	1.732	1.000	1.342
$\Sigma$ :	5.123	6.293	6.292	6.292	3.333	4.472

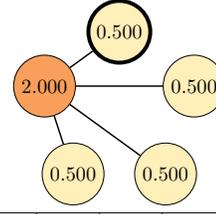
Gráfica 6 de orden 4



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
$V_1$ :	6.000	6.928	6.000	6.000	6.000	4.899
$V_2$ :	6.000	6.928	6.000	6.000	6.000	4.899
$\Sigma$ :	6.000	6.928	6.000	6.000	6.000	4.899

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$ :	1.500	1.732	1.732	1.732	1.000	1.134
$V_2$ :	1.500	1.732	1.732	1.732	1.000	1.134
$V_3$ :	1.500	1.732	1.732	1.732	1.000	1.134
$V_4$ :	1.500	1.732	1.732	1.732	1.000	1.134
$\Sigma$ :	6.000	6.928	6.928	6.928	4.000	4.536

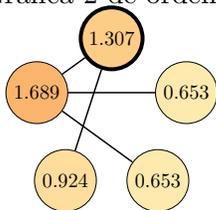
Gráfica 1 de orden 5



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
$V_1$ :	4.000	6.325	6.265	6.000	6.032	4.000
$V_2$ :	4.000	6.325	6.265	6.000	6.032	4.000
$\Sigma$ :	4.000	6.325	6.265	6.000	6.032	4.000

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$ :	0.500	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_2$ :	0.500	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_3$ :	0.500	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_4$ :	0.500	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_5$ :	2.000	2.000	2.000	2.000	1.000	2.000
$\Sigma$ :	4.000	6.000	6.000	6.000	2.000	4.000

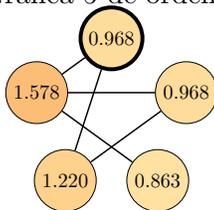
Gráfica 2 de orden 5



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	5.226	6.325	6.265	6.171	6.061	4.000

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.307	1.414	1.414	1.414	0.667	1.155
$V_2$	0.653	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_3$	0.653	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_4$	0.924	1.000	1.000	1.000	0.333	0.707
$V_5$	1.689	1.732	1.732	1.732	1.000	1.643
$\Sigma$	5.226	6.146	6.146	6.146	2.667	4.660

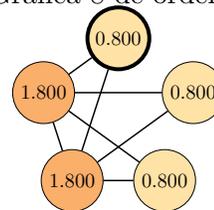
Gráfica 5 de orden 5



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	5.596	7.071	6.899	6.830	6.609	4.472

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	0.968	1.414	1.414	1.414	0.667	0.943
$V_2$	0.968	1.414	1.414	1.414	0.667	0.943
$V_3$	0.863	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_4$	1.220	1.414	1.414	1.414	0.667	1.000
$V_5$	1.578	1.732	1.732	1.732	1.000	1.441
$\Sigma$	5.596	6.975	6.975	6.975	3.333	4.904

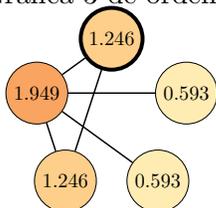
Gráfica 8 de orden 5



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	6.000	8.367	7.764	7.527	7.736	5.292

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	0.800	1.414	1.414	1.414	0.500	0.756
$V_2$	0.800	1.414	1.414	1.414	0.500	0.756
$V_3$	0.800	1.414	1.414	1.414	0.500	0.756
$V_4$	1.800	2.000	2.000	2.000	1.000	1.512
$V_5$	1.800	2.000	2.000	2.000	1.000	1.512
$\Sigma$	6.000	8.243	8.243	8.243	3.500	5.292

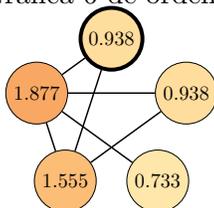
Gráfica 3 de orden 5



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	5.627	7.071	6.899	6.662	6.788	4.472

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.246	1.414	1.414	1.414	0.500	1.000
$V_2$	0.593	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_3$	0.593	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_4$	1.246	1.414	1.414	1.414	0.500	1.000
$V_5$	1.949	2.000	2.000	2.000	1.000	1.886
$\Sigma$	5.627	6.828	6.828	6.828	2.500	4.886

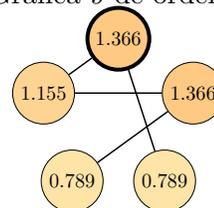
Gráfica 6 de orden 5



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	6.041	7.746	7.396	7.168	7.342	4.899

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	0.938	1.414	1.414	1.414	0.500	0.853
$V_2$	0.938	1.414	1.414	1.414	0.500	0.853
$V_3$	0.733	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_4$	1.555	1.732	1.732	1.732	0.750	1.299
$V_5$	1.877	2.000	2.000	2.000	1.000	1.706
$\Sigma$	6.041	7.560	7.560	7.560	3.000	5.210

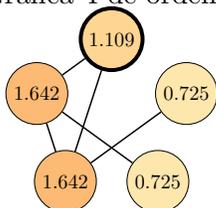
Gráfica 9 de orden 5



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	5.464	6.325	6.265	6.234	6.000	4.000

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.366	1.414	1.414	1.414	1.000	1.265
$V_2$	1.366	1.414	1.414	1.414	1.000	1.265
$V_3$	0.789	1.000	1.000	1.000	0.500	0.707
$V_4$	0.789	1.000	1.000	1.000	0.500	0.707
$V_5$	1.155	1.414	1.414	1.414	1.000	1.155
$\Sigma$	5.464	6.243	6.242	6.242	4.000	5.099

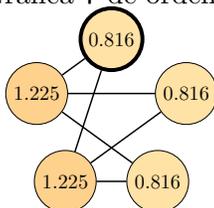
Gráfica 4 de orden 5



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	5.842	7.071	6.899	6.752	6.704	4.472

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.109	1.414	1.414	1.414	0.667	1.000
$V_2$	0.725	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_3$	0.725	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_4$	1.642	1.732	1.732	1.732	1.000	1.500
$V_5$	1.642	1.732	1.732	1.732	1.000	1.500
$\Sigma$	5.842	6.878	6.878	6.878	3.333	5.155

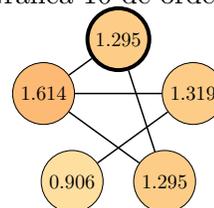
Gráfica 7 de orden 5



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	4.899	7.746	7.396	7.348	6.841	4.899

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	0.816	1.414	1.414	1.414	0.667	0.816
$V_2$	0.816	1.414	1.414	1.414	0.667	0.816
$V_3$	0.816	1.414	1.414	1.414	0.667	0.816
$V_4$	1.225	1.732	1.732	1.732	1.000	1.225
$V_5$	1.225	1.732	1.732	1.732	1.000	1.225
$\Sigma$	4.899	7.707	7.707	7.707	4.000	4.899

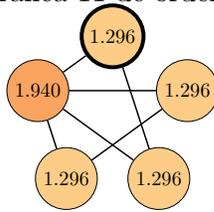
Gráfica 10 de orden 5



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	6.429	7.071	6.899	6.830	6.793	4.472

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.295	1.414	1.414	1.414	0.667	1.069
$V_2$	1.319	1.414	1.414	1.414	0.667	1.155
$V_3$	1.295	1.414	1.414	1.414	0.667	1.069
$V_4$	0.906	1.000	1.000	1.000	0.333	0.707
$V_5$	1.614	1.732	1.732	1.732	1.000	1.500
$\Sigma$	6.429	6.975	6.975	6.975	3.333	5.500

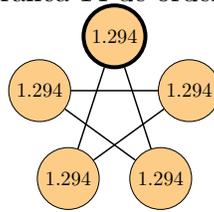
Gráfica 11 de orden 5



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	7.123	7.746	7.396	7.263	7.488	4.899	4.828

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.296	1.414	1.414	1.414	0.500	1.000
$V_2$	: 1.296	1.414	1.414	1.414	0.500	1.000
$V_3$	: 1.296	1.414	1.414	1.414	0.500	1.000
$V_4$	: 1.296	1.414	1.414	1.414	0.500	1.000
$V_5$	: 1.940	2.000	2.000	2.000	1.000	1.789
$\Sigma$	: 7.123	7.657	7.657	7.657	3.000	5.789

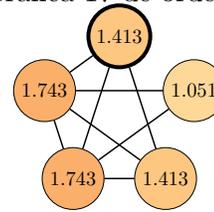
Gráfica 14 de orden 5



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	6.472	7.071	6.899	6.899	6.667	6.000	5.000

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.294	1.414	1.414	1.414	1.000	1.155
$V_2$	: 1.294	1.414	1.414	1.414	1.000	1.155
$V_3$	: 1.294	1.414	1.414	1.414	1.000	1.155
$V_4$	: 1.294	1.414	1.414	1.414	1.000	1.155
$V_5$	: 1.294	1.414	1.414	1.414	1.000	1.155
$\Sigma$	: 6.472	7.071	7.071	7.071	5.000	5.774

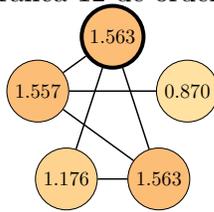
Gráfica 17 de orden 5



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	7.363	8.944	8.000	7.847	8.130	5.657	4.890

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.413	1.732	1.732	1.732	0.750	1.039
$V_2$	: 1.051	1.414	1.414	1.414	0.500	0.756
$V_3$	: 1.413	1.732	1.732	1.732	0.750	1.039
$V_4$	: 1.743	2.000	2.000	2.000	1.000	1.372
$V_5$	: 1.743	2.000	2.000	2.000	1.000	1.372
$\Sigma$	: 7.363	8.878	8.878	8.878	4.000	5.578

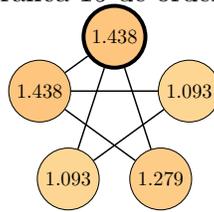
Gráfica 12 de orden 5



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	6.730	7.746	7.396	7.263	7.154	4.899	4.788

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.563	1.732	1.732	1.732	1.000	1.299
$V_2$	: 0.870	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_3$	: 1.563	1.732	1.732	1.732	1.000	1.299
$V_4$	: 1.176	1.414	1.414	1.414	0.667	0.894
$V_5$	: 1.557	1.732	1.732	1.732	1.000	1.342
$\Sigma$	: 6.730	7.610	7.610	7.610	4.000	5.411

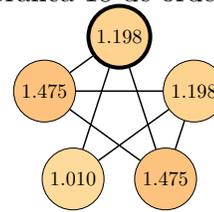
Gráfica 15 de orden 5



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	6.340	7.746	7.396	7.348	7.245	4.899	4.933

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.438	1.732	1.732	1.732	1.000	1.342
$V_2$	: 1.093	1.414	1.414	1.414	0.667	0.943
$V_3$	: 1.279	1.414	1.414	1.414	0.667	1.000
$V_4$	: 1.093	1.414	1.414	1.414	0.667	0.943
$V_5$	: 1.438	1.732	1.732	1.732	1.000	1.342
$\Sigma$	: 6.340	7.707	7.707	7.707	4.000	5.569

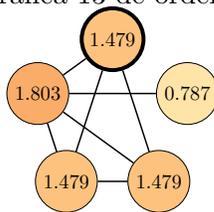
Gráfica 18 de orden 5



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	6.355	8.367	7.764	7.727	7.398	5.292	4.966

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.198	1.732	1.732	1.732	1.000	1.162
$V_2$	: 1.198	1.732	1.732	1.732	1.000	1.162
$V_3$	: 1.475	1.732	1.732	1.732	1.000	1.192
$V_4$	: 1.010	1.414	1.414	1.414	0.667	0.816
$V_5$	: 1.475	1.732	1.732	1.732	1.000	1.192
$\Sigma$	: 6.355	8.342	8.342	8.342	4.667	5.524

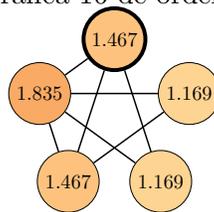
Gráfica 13 de orden 5



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	7.028	8.367	7.764	7.527	7.736	5.292	4.732

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.479	1.732	1.732	1.732	0.750	1.108
$V_2$	: 0.787	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_3$	: 1.479	1.732	1.732	1.732	0.750	1.108
$V_4$	: 1.479	1.732	1.732	1.732	0.750	1.108
$V_5$	: 1.803	2.000	2.000	2.000	1.000	1.512
$\Sigma$	: 7.028	8.196	8.196	8.196	3.500	5.335

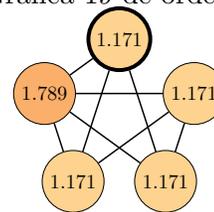
Gráfica 16 de orden 5



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	7.107	8.367	7.764	7.631	7.881	5.292	4.869

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.467	1.732	1.732	1.732	0.750	1.192
$V_2$	: 1.169	1.414	1.414	1.414	0.500	0.853
$V_3$	: 1.169	1.414	1.414	1.414	0.500	0.853
$V_4$	: 1.467	1.732	1.732	1.732	0.750	1.192
$V_5$	: 1.835	2.000	2.000	2.000	1.000	1.569
$\Sigma$	: 7.107	8.293	8.293	8.293	3.500	5.659

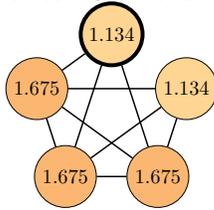
Gráfica 19 de orden 5



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	6.472	8.944	8.000	7.958	8.179	5.657	4.976

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.171	1.732	1.732	1.732	0.750	1.061
$V_2$	: 1.171	1.732	1.732	1.732	0.750	1.061
$V_3$	: 1.171	1.732	1.732	1.732	0.750	1.061
$V_4$	: 1.171	1.732	1.732	1.732	0.750	1.061
$V_5$	: 1.789	2.000	2.000	2.000	1.000	1.414
$\Sigma$	: 6.472	8.928	8.928	8.928	4.000	5.657

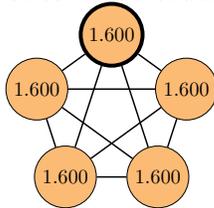
Gráfica 20 de orden 5



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	7.292	9.487	8.090	8.015	8.263	6.000

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.134	1.732	1.732	1.732	0.750	0.949
$V_2$	1.134	1.732	1.732	1.732	0.750	0.949
$V_3$	1.675	2.000	2.000	2.000	1.000	1.234
$V_4$	1.675	2.000	2.000	2.000	1.000	1.234
$V_5$	1.675	2.000	2.000	2.000	1.000	1.234
$\Sigma$	7.292	9.464	9.464	9.464	4.500	5.601

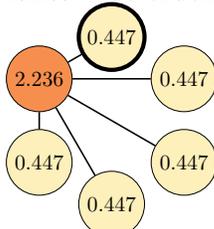
Gráfica 21 de orden 5



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	8.000	10.000	8.000	8.000	8.000	6.325

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.600	2.000	2.000	2.000	1.000	1.109
$V_2$	1.600	2.000	2.000	2.000	1.000	1.109
$V_3$	1.600	2.000	2.000	2.000	1.000	1.109
$V_4$	1.600	2.000	2.000	2.000	1.000	1.109
$V_5$	1.600	2.000	2.000	2.000	1.000	1.109
$\Sigma$	8.000	10.000	10.000	10.000	5.000	5.547

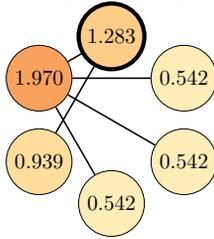
Gráfica 1 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	4.472	7.746	7.676	7.236	7.402	4.472

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	0.447	1.000	1.000	1.000	0.200	0.447
$V_2$	0.447	1.000	1.000	1.000	0.200	0.447
$V_3$	0.447	1.000	1.000	1.000	0.200	0.447
$V_4$	0.447	1.000	1.000	1.000	0.200	0.447
$V_5$	0.447	1.000	1.000	1.000	0.200	0.447
$V_6$	2.236	2.236	2.236	2.236	1.000	2.236
$\Sigma$	4.472	7.236	7.236	7.236	2.000	4.472

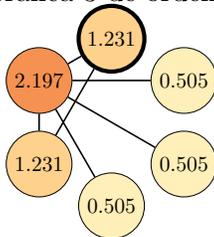
Gráfica 2 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	5.819	7.746	7.676	7.477	7.433	4.472

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.283	1.414	1.414	1.414	0.500	1.069
$V_2$	0.542	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_3$	0.542	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_4$	0.542	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_5$	0.939	1.000	1.000	1.000	0.250	0.707
$V_6$	1.970	2.000	2.000	2.000	1.000	1.940
$\Sigma$	5.819	7.414	7.414	7.414	2.500	5.216

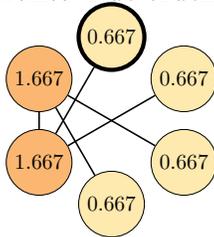
Gráfica 3 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	6.172	8.485	8.325	7.927	8.160	4.899

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.231	1.414	1.414	1.414	0.400	0.943
$V_2$	0.505	1.000	1.000	1.000	0.200	0.447
$V_3$	0.505	1.000	1.000	1.000	0.200	0.447
$V_4$	0.505	1.000	1.000	1.000	0.200	0.447
$V_5$	1.231	1.414	1.414	1.414	0.400	0.943
$V_6$	2.197	2.236	2.236	2.236	1.000	2.152
$\Sigma$	6.172	8.064	8.064	8.064	2.400	5.379

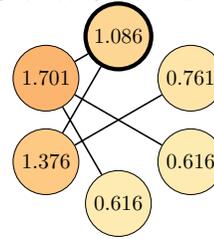
Gráfica 4 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	6.000	7.746	7.676	7.542	7.341	4.472

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	0.667	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_2$	0.667	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_3$	0.667	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_4$	0.667	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_5$	1.667	1.732	1.732	1.732	1.000	1.567
$V_6$	1.667	1.732	1.732	1.732	1.000	1.567
$\Sigma$	6.000	7.464	7.464	7.464	3.333	5.443

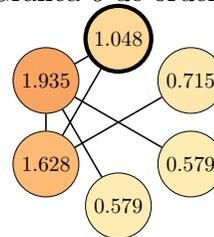
Gráfica 5 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	6.155	7.746	7.676	7.599	7.443	4.472

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.086	1.414	1.414	1.414	0.667	1.069
$V_2$	0.761	1.000	1.000	1.000	0.333	0.707
$V_3$	0.616	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_4$	0.616	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_5$	1.376	1.414	1.414	1.414	1.000	1.265
$V_6$	1.701	1.732	1.732	1.732	1.000	1.643
$\Sigma$	6.155	7.560	7.560	7.560	3.333	5.839

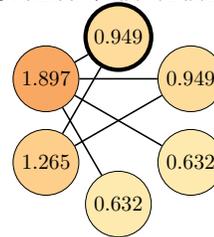
Gráfica 6 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	6.485	8.485	8.325	8.083	8.124	4.899

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.048	1.414	1.414	1.414	0.500	0.943
$V_2$	0.715	1.000	1.000	1.000	0.250	0.577
$V_3$	0.579	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_4$	0.579	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_5$	1.628	1.732	1.732	1.732	0.750	1.441
$V_6$	1.935	2.000	2.000	2.000	1.000	1.835
$\Sigma$	6.485	8.146	8.146	8.146	3.000	5.797

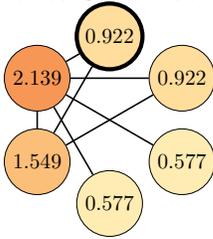
Gráfica 7 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	6.325	8.485	8.325	8.152	8.068	4.899

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	0.949	1.414	1.414	1.414	0.500	0.894
$V_2$	0.949	1.414	1.414	1.414	0.500	0.894
$V_3$	0.632	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_4$	0.632	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_5$	1.265	1.414	1.414	1.414	0.500	1.000
$V_6$	1.897	2.000	2.000	2.000	1.000	1.789
$\Sigma$	6.325	8.243	8.243	8.243	3.000	5.578

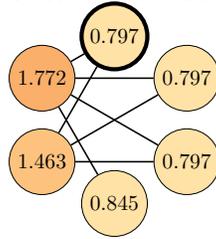
Gráfica 8 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	6.686	9.165	8.874	8.482	8.763	5.292	5.203

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 0.922	1.414	1.414	1.414	0.400	0.816
$V_2$	: 0.922	1.414	1.414	1.414	0.400	0.816
$V_3$	: 0.577	1.000	1.000	1.000	0.200	0.447
$V_4$	: 0.577	1.000	1.000	1.000	0.200	0.447
$V_5$	: 1.549	1.732	1.732	1.732	0.600	1.260
$V_6$	: 2.139	2.236	2.236	2.236	1.000	2.008
$\Sigma$	: 6.686	8.797	8.797	8.797	2.800	5.796

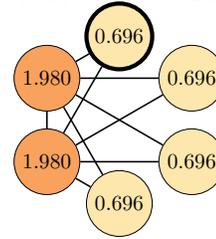
Gráfica 11 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	6.470	9.165	8.874	8.708	8.520	5.292	5.571

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 0.797	1.414	1.414	1.414	0.500	0.784
$V_2$	: 0.797	1.414	1.414	1.414	0.500	0.784
$V_3$	: 0.797	1.414	1.414	1.414	0.500	0.784
$V_4$	: 0.845	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_5$	: 1.463	1.732	1.732	1.732	0.750	1.225
$V_6$	: 1.772	2.000	2.000	2.000	1.000	1.600
$\Sigma$	: 6.470	8.975	8.975	8.975	3.500	5.678

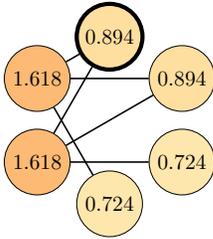
Gráfica 14 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	6.745	10.392	9.708	9.233	9.621	6.000	5.460

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 0.696	1.414	1.414	1.414	0.400	0.667
$V_2$	: 0.696	1.414	1.414	1.414	0.400	0.667
$V_3$	: 0.696	1.414	1.414	1.414	0.400	0.667
$V_4$	: 0.696	1.414	1.414	1.414	0.400	0.667
$V_5$	: 1.980	2.236	2.236	2.236	1.000	1.667
$V_6$	: 1.980	2.236	2.236	2.236	1.000	1.667
$\Sigma$	: 6.745	10.129	10.129	10.129	3.600	6.000

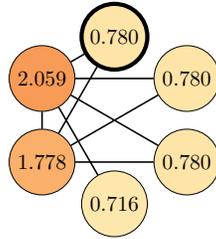
Gráfica 9 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	6.472	8.485	8.325	8.216	7.891	4.899	5.575

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 0.894	1.414	1.414	1.414	0.667	0.894
$V_2$	: 0.894	1.414	1.414	1.414	0.667	0.894
$V_3$	: 0.724	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_4$	: 0.724	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_5$	: 1.618	1.732	1.732	1.732	1.000	1.441
$V_6$	: 1.618	1.732	1.732	1.732	1.000	1.441
$\Sigma$	: 6.472	8.293	8.293	8.293	4.000	5.826

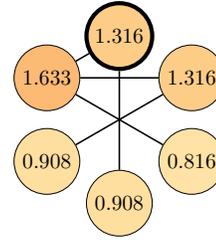
Gráfica 12 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	6.893	9.798	9.333	8.916	9.244	5.657	5.360

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 0.780	1.414	1.414	1.414	0.400	0.730
$V_2$	: 0.780	1.414	1.414	1.414	0.400	0.730
$V_3$	: 0.780	1.414	1.414	1.414	0.400	0.730
$V_4$	: 0.716	1.000	1.000	1.000	0.200	0.447
$V_5$	: 1.778	2.000	2.000	2.000	0.800	1.486
$V_6$	: 2.059	2.236	2.236	2.236	1.000	1.838
$\Sigma$	: 6.893	9.479	9.479	9.479	3.200	5.962

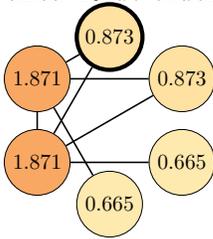
Gráfica 15 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	6.899	7.746	7.676	7.599	7.443	4.472	5.616

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.316	1.414	1.414	1.414	0.667	1.155
$V_2$	: 1.316	1.414	1.414	1.414	0.667	1.155
$V_3$	: 0.816	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_4$	: 0.908	1.000	1.000	1.000	0.333	0.707
$V_5$	: 0.908	1.000	1.000	1.000	0.333	0.707
$V_6$	: 1.633	1.732	1.732	1.732	1.000	1.567
$\Sigma$	: 6.899	7.560	7.560	7.560	3.333	5.868

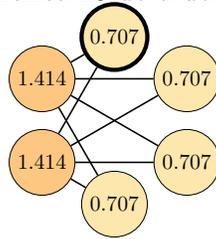
Gráfica 10 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	6.819	9.165	8.874	8.562	8.628	5.292	5.328

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 0.873	1.414	1.414	1.414	0.500	0.816
$V_2$	: 0.873	1.414	1.414	1.414	0.500	0.816
$V_3$	: 0.665	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_4$	: 0.665	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_5$	: 1.871	2.000	2.000	2.000	1.000	1.668
$V_6$	: 1.871	2.000	2.000	2.000	1.000	1.668
$\Sigma$	: 6.819	8.828	8.828	8.828	3.500	5.969

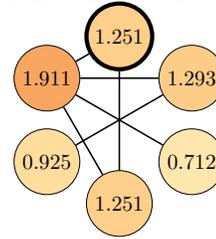
Gráfica 13 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	5.657	9.798	9.333	9.153	8.805	5.657	5.657

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 0.707	1.414	1.414	1.414	0.500	0.707
$V_2$	: 0.707	1.414	1.414	1.414	0.500	0.707
$V_3$	: 0.707	1.414	1.414	1.414	0.500	0.707
$V_4$	: 0.707	1.414	1.414	1.414	0.500	0.707
$V_5$	: 1.414	2.000	2.000	2.000	1.000	1.414
$V_6$	: 1.414	2.000	2.000	2.000	1.000	1.414
$\Sigma$	: 5.657	9.657	9.657	9.657	4.000	5.657

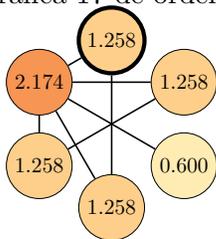
Gráfica 16 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	7.342	8.485	8.325	8.152	8.179	4.899	5.536

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.251	1.414	1.414	1.414	0.500	1.000
$V_2$	: 1.293	1.414	1.414	1.414	0.500	1.069
$V_3$	: 0.712	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_4$	: 1.251	1.414	1.414	1.414	0.500	1.000
$V_5$	: 0.925	1.000	1.000	1.000	0.250	0.707
$V_6$	: 1.911	2.000	2.000	2.000	1.000	1.835
$\Sigma$	: 7.342	8.243	8.243	8.243	3.000	6.111

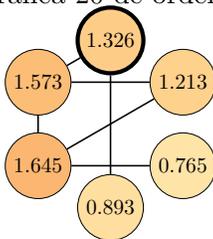
Gráfica 17 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	7.806	9.165	8.874	8.562	8.865	5.292	5.424

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.258	1.414	1.414	1.414	0.400	0.943
$V_2$	1.258	1.414	1.414	1.414	0.400	0.943
$V_3$	0.600	1.000	1.000	1.000	0.200	0.447
$V_4$	1.258	1.414	1.414	1.414	0.400	0.943
$V_5$	1.258	1.414	1.414	1.414	0.400	0.943
$V_6$	2.174	2.236	2.236	2.236	1.000	2.076
$\Sigma$	7.806	8.893	8.893	8.893	2.800	6.295

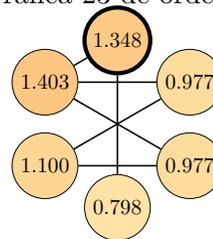
Gráfica 20 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	7.416	8.485	8.325	8.216	8.081	4.899	5.685

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.326	1.414	1.414	1.414	0.667	1.155
$V_2$	1.213	1.414	1.414	1.414	0.667	1.000
$V_3$	0.765	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_4$	0.893	1.000	1.000	1.000	0.333	0.707
$V_5$	1.645	1.732	1.732	1.732	1.000	1.500
$V_6$	1.573	1.732	1.732	1.732	1.000	1.441
$\Sigma$	7.416	8.293	8.293	8.293	4.000	6.380

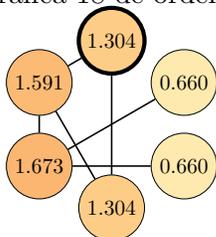
Gráfica 23 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	6.603	8.485	8.325	8.273	7.989	4.899	5.864

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.348	1.414	1.414	1.414	0.667	1.155
$V_2$	0.977	1.414	1.414	1.414	0.667	0.943
$V_3$	0.977	1.414	1.414	1.414	0.667	0.943
$V_4$	0.798	1.000	1.000	1.000	0.333	0.707
$V_5$	1.100	1.414	1.414	1.414	0.667	1.000
$V_6$	1.403	1.732	1.732	1.732	1.000	1.389
$\Sigma$	6.603	8.389	8.389	8.389	4.000	6.136

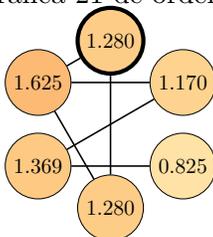
Gráfica 18 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	7.192	8.485	8.325	8.216	8.081	4.899	5.609

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.304	1.414	1.414	1.414	0.667	1.069
$V_2$	0.660	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_3$	0.660	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_4$	1.304	1.414	1.414	1.414	0.667	1.069
$V_5$	1.673	1.732	1.732	1.732	1.000	1.567
$V_6$	1.591	1.732	1.732	1.732	1.000	1.441
$\Sigma$	7.192	8.293	8.293	8.293	4.000	6.301

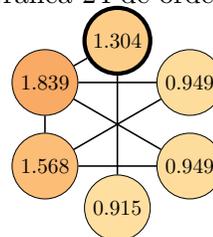
Gráfica 21 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	7.549	8.485	8.325	8.273	8.170	4.899	5.864

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.280	1.414	1.414	1.414	0.667	1.069
$V_2$	1.170	1.414	1.414	1.414	0.667	1.069
$V_3$	0.825	1.000	1.000	1.000	0.333	0.707
$V_4$	1.280	1.414	1.414	1.414	0.667	1.069
$V_5$	1.369	1.414	1.414	1.414	0.667	1.265
$V_6$	1.625	1.732	1.732	1.732	1.000	1.500
$\Sigma$	7.549	8.389	8.389	8.389	4.000	6.679

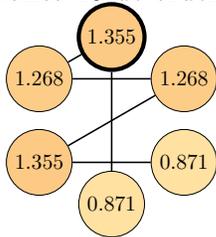
Gráfica 24 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	7.523	9.165	8.874	8.708	8.731	5.292	5.746

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.304	1.414	1.414	1.414	0.500	1.069
$V_2$	0.949	1.414	1.414	1.414	0.500	0.853
$V_3$	0.949	1.414	1.414	1.414	0.500	0.853
$V_4$	0.915	1.000	1.000	1.000	0.250	0.707
$V_5$	1.568	1.732	1.732	1.732	0.750	1.299
$V_6$	1.839	2.000	2.000	2.000	1.000	1.668
$\Sigma$	7.523	8.975	8.975	8.975	3.500	6.449

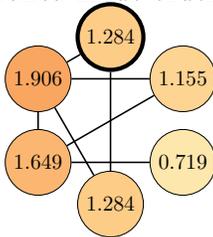
Gráfica 19 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	6.988	7.746	7.676	7.648	7.333	6.000	5.828

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.355	1.414	1.414	1.414	1.000	1.265
$V_2$	1.268	1.414	1.414	1.414	1.000	1.155
$V_3$	0.871	1.000	1.000	1.000	0.500	0.707
$V_4$	0.871	1.000	1.000	1.000	0.500	0.707
$V_5$	1.355	1.414	1.414	1.414	1.000	1.265
$V_6$	1.268	1.414	1.414	1.414	1.000	1.155
$\Sigma$	6.988	7.657	7.657	7.657	5.000	6.253

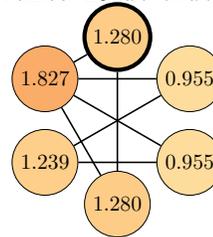
Gráfica 22 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	7.996	9.165	8.874	8.708	8.830	5.292	5.670

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.284	1.414	1.414	1.414	0.500	1.000
$V_2$	1.155	1.414	1.414	1.414	0.500	0.943
$V_3$	0.719	1.000	1.000	1.000	0.250	0.577
$V_4$	1.284	1.414	1.414	1.414	0.500	1.000
$V_5$	1.649	1.732	1.732	1.732	0.750	1.441
$V_6$	1.906	2.000	2.000	2.000	1.000	1.746
$\Sigma$	7.996	8.975	8.975	8.975	3.500	6.707

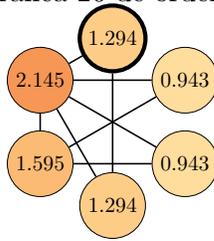
Gráfica 25 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	7.536	9.165	8.874	8.774	8.781	5.292	5.828

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.280	1.414	1.414	1.414	0.500	1.000
$V_2$	0.955	1.414	1.414	1.414	0.500	0.894
$V_3$	0.955	1.414	1.414	1.414	0.500	0.894
$V_4$	1.280	1.414	1.414	1.414	0.500	1.000
$V_5$	1.239	1.414	1.414	1.414	0.500	1.000
$V_6$	1.827	2.000	2.000	2.000	1.000	1.706
$\Sigma$	7.536	9.071	9.071	9.071	3.500	6.494

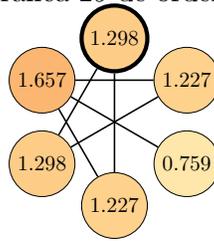
Gráfica 26 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	8.213	9.798	9.333	9.078	9.435	5.657
	5.679					

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.294	1.414	1.414	1.414	0.400	0.943
$V_2$	: 0.943	1.414	1.414	1.414	0.400	0.816
$V_3$	: 0.943	1.414	1.414	1.414	0.400	0.816
$V_4$	: 1.294	1.414	1.414	1.414	0.400	0.943
$V_5$	: 1.595	1.732	1.732	1.732	0.600	1.260
$V_6$	: 2.145	2.236	2.236	2.236	1.000	1.946
$\Sigma$	:	8.213	9.625	9.625	9.625	3.200
		6.725				

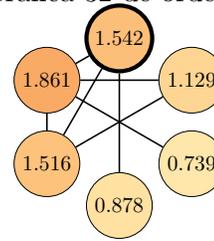
Gráfica 29 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	7.466	8.485	8.325	8.273	8.170	4.899
	5.788					

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.298	1.414	1.414	1.414	0.667	1.155
$V_2$	: 1.227	1.414	1.414	1.414	0.667	1.069
$V_3$	: 0.759	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_4$	: 1.227	1.414	1.414	1.414	0.667	1.069
$V_5$	: 1.298	1.414	1.414	1.414	0.667	1.155
$V_6$	: 1.657	1.732	1.732	1.732	1.000	1.567
$\Sigma$	:	7.466	8.389	8.389	8.389	4.000
		6.592				

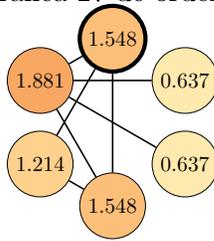
Gráfica 32 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	7.665	9.165	8.874	8.637	8.680	5.292
	5.500					

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.542	1.732	1.732	1.732	0.750	1.299
$V_2$	: 1.129	1.414	1.414	1.414	0.500	0.853
$V_3$	: 0.739	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_4$	: 0.878	1.000	1.000	1.000	0.250	0.577
$V_5$	: 1.516	1.732	1.732	1.732	0.750	1.260
$V_6$	: 1.861	2.000	2.000	2.000	1.000	1.668
$\Sigma$	:	7.665	8.878	8.878	8.878	3.500
		6.158				

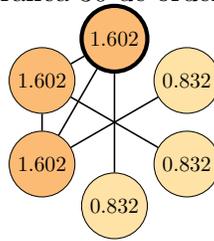
Gráfica 27 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	7.464	9.165	8.874	8.637	8.680	5.292
	5.454					

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.548	1.732	1.732	1.732	0.750	1.260
$V_2$	: 0.637	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_3$	: 0.637	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_4$	: 1.548	1.732	1.732	1.732	0.750	1.260
$V_5$	: 1.214	1.414	1.414	1.414	0.500	0.894
$V_6$	: 1.881	2.000	2.000	2.000	1.000	1.706
$\Sigma$	:	7.464	8.878	8.878	8.878	3.500
		6.121				

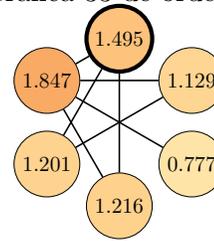
Gráfica 30 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	7.301	8.485	8.325	8.152	7.989	4.899
	5.464					

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.602	1.732	1.732	1.732	1.000	1.441
$V_2$	: 0.832	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_3$	: 0.832	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_4$	: 0.832	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_5$	: 1.602	1.732	1.732	1.732	1.000	1.441
$V_6$	: 1.602	1.732	1.732	1.732	1.000	1.441
$\Sigma$	:	7.301	8.196	8.196	8.196	4.000
		6.056				

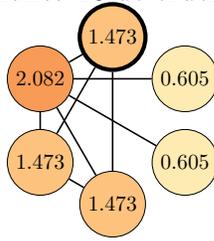
Gráfica 33 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	7.664	9.165	8.874	8.708	8.731	5.292
	5.625					

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.495	1.732	1.732	1.732	0.750	1.299
$V_2$	: 1.129	1.414	1.414	1.414	0.500	0.894
$V_3$	: 0.777	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_4$	: 1.216	1.414	1.414	1.414	0.500	0.943
$V_5$	: 1.201	1.414	1.414	1.414	0.500	0.943
$V_6$	: 1.847	2.000	2.000	2.000	1.000	1.706
$\Sigma$	:	7.664	8.975	8.975	8.975	3.500
		6.285				

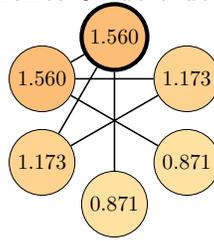
Gráfica 28 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	7.712	9.798	9.333	8.916	9.244	5.657
	5.338					

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.473	1.732	1.732	1.732	0.600	1.083
$V_2$	: 0.605	1.000	1.000	1.000	0.200	0.447
$V_3$	: 0.605	1.000	1.000	1.000	0.200	0.447
$V_4$	: 1.473	1.732	1.732	1.732	0.600	1.083
$V_5$	: 1.473	1.732	1.732	1.732	0.600	1.083
$V_6$	: 2.082	2.236	2.236	2.236	1.000	1.838
$\Sigma$	:	7.712	9.432	9.432	9.432	3.200
		5.983				

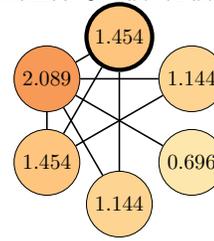
Gráfica 31 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	7.208	8.485	8.325	8.216	7.891	4.899
	5.609					

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.560	1.732	1.732	1.732	1.000	1.389
$V_2$	: 1.173	1.414	1.414	1.414	0.667	0.943
$V_3$	: 0.871	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_4$	: 0.871	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_5$	: 1.173	1.414	1.414	1.414	0.667	0.943
$V_6$	: 1.560	1.732	1.732	1.732	1.000	1.389
$\Sigma$	:	7.208	8.293	8.293	8.293	4.000
		5.818				

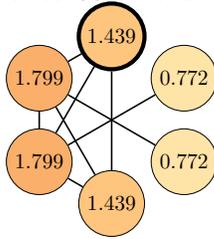
Gráfica 34 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	7.981	9.798	9.333	8.999	9.341	5.657
	5.492					

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.454	1.732	1.732	1.732	0.600	1.162
$V_2$	: 1.144	1.414	1.414	1.414	0.400	0.816
$V_3$	: 0.696	1.000	1.000	1.000	0.200	0.447
$V_4$	: 1.144	1.414	1.414	1.414	0.400	0.816
$V_5$	: 1.454	1.732	1.732	1.732	0.600	1.162
$V_6$	: 2.089	2.236	2.236	2.236	1.000	1.890
$\Sigma$	:	7.981	9.529	9.529	9.529	3.200
		6.294				

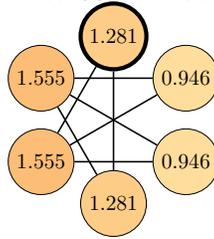
Gráfica 35 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	8.019	9.798	9.333	8.999	9.023	5.657
				4.000		6.138

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.439	1.732	1.732	1.732	0.750	1.083
$V_2$	0.772	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_3$	0.772	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_4$	1.439	1.732	1.732	1.732	0.750	1.083
$V_5$	1.799	2.000	2.000	2.000	1.000	1.486
$V_6$	1.799	2.000	2.000	2.000	1.000	1.486
$\Sigma$	8.019	9.464	9.464	9.464	4.000	6.138

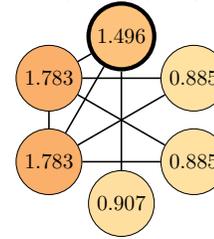
Gráfica 38 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	7.565	9.165	8.874	8.835	8.621	5.292
				4.667		6.704

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.281	1.414	1.414	1.414	0.667	1.069
$V_2$	0.946	1.414	1.414	1.414	0.667	0.894
$V_3$	0.946	1.414	1.414	1.414	0.667	0.894
$V_4$	1.281	1.414	1.414	1.414	0.667	1.069
$V_5$	1.555	1.732	1.732	1.732	1.000	1.389
$V_6$	1.555	1.732	1.732	1.732	1.000	1.389
$\Sigma$	7.565	9.121	9.121	9.121	4.667	6.704

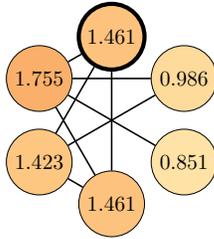
Gráfica 41 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	7.738	9.798	9.333	9.078	9.075	5.657
				4.000		6.252

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.496	1.732	1.732	1.732	0.750	1.192
$V_2$	0.885	1.414	1.414	1.414	0.500	0.756
$V_3$	0.885	1.414	1.414	1.414	0.500	0.756
$V_4$	0.907	1.000	1.000	1.000	0.250	0.577
$V_5$	1.783	2.000	2.000	2.000	1.000	1.486
$V_6$	1.783	2.000	2.000	2.000	1.000	1.486
$\Sigma$	7.738	9.560	9.560	9.560	4.000	6.252

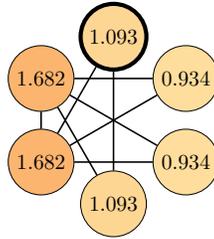
Gráfica 36 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	7.937	9.798	9.333	9.153	9.126	5.657
				4.000		6.310

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.461	1.732	1.732	1.732	0.750	1.162
$V_2$	0.986	1.414	1.414	1.414	0.500	0.784
$V_3$	0.851	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_4$	1.461	1.732	1.732	1.732	0.750	1.162
$V_5$	1.423	1.732	1.732	1.732	0.750	1.162
$V_6$	1.755	2.000	2.000	2.000	1.000	1.540
$\Sigma$	7.937	9.610	9.610	9.610	4.000	6.310

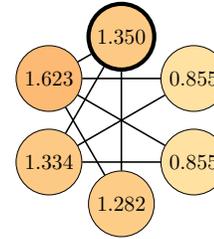
Gráfica 39 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	7.419	9.798	9.333	9.153	9.224	5.657
				4.000		6.560

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.093	1.414	1.414	1.414	0.500	0.894
$V_2$	0.934	1.414	1.414	1.414	0.500	0.816
$V_3$	0.934	1.414	1.414	1.414	0.500	0.816
$V_4$	1.093	1.414	1.414	1.414	0.500	0.894
$V_5$	1.682	2.000	2.000	2.000	1.000	1.569
$V_6$	1.682	2.000	2.000	2.000	1.000	1.569
$\Sigma$	7.419	9.657	9.657	9.657	4.000	6.560

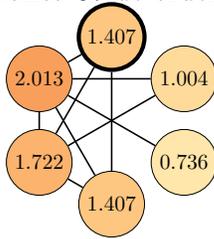
Gráfica 42 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	7.299	9.798	9.333	9.224	9.175	5.657
				4.000		6.435

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.350	1.732	1.732	1.732	0.750	1.192
$V_2$	0.855	1.414	1.414	1.414	0.500	0.784
$V_3$	0.855	1.414	1.414	1.414	0.500	0.784
$V_4$	1.282	1.414	1.414	1.414	0.500	0.943
$V_5$	1.334	1.732	1.732	1.732	0.750	1.192
$V_6$	1.623	2.000	2.000	2.000	1.000	1.540
$\Sigma$	7.299	9.707	9.707	9.707	4.000	6.435

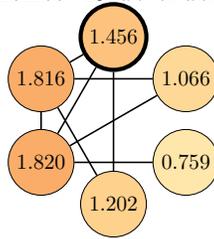
Gráfica 37 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	8.289	10.392	9.708	9.321	9.716	6.000
				3.600		6.273

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.407	1.732	1.732	1.732	0.600	1.019
$V_2$	1.004	1.414	1.414	1.414	0.400	0.730
$V_3$	0.736	1.000	1.000	1.000	0.200	0.447
$V_4$	1.407	1.732	1.732	1.732	0.600	1.019
$V_5$	1.722	2.000	2.000	2.000	0.800	1.352
$V_6$	2.013	2.236	2.236	2.236	1.000	1.705
$\Sigma$	8.289	10.114	10.114	10.114	3.600	6.273

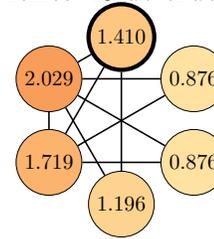
Gráfica 40 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	8.118	9.798	9.333	9.078	9.175	5.657
				4.000		6.440

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.456	1.732	1.732	1.732	0.750	1.162
$V_2$	1.066	1.414	1.414	1.414	0.500	0.816
$V_3$	0.759	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_4$	1.202	1.414	1.414	1.414	0.500	0.853
$V_5$	1.820	2.000	2.000	2.000	1.000	1.569
$V_6$	1.816	2.000	2.000	2.000	1.000	1.540
$\Sigma$	8.118	9.560	9.560	9.560	4.000	6.440

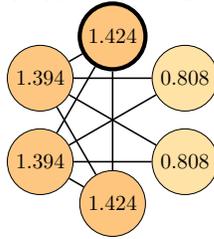
Gráfica 43 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	8.107	10.392	9.708	9.406	9.809	6.000
				3.600		6.521

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.410	1.732	1.732	1.732	0.600	1.083
$V_2$	0.876	1.414	1.414	1.414	0.400	0.730
$V_3$	0.876	1.414	1.414	1.414	0.400	0.730
$V_4$	1.196	1.414	1.414	1.414	0.400	0.816
$V_5$	1.719	2.000	2.000	2.000	0.800	1.414
$V_6$	2.029	2.236	2.236	2.236	1.000	1.746
$\Sigma$	8.107	10.211	10.211	10.211	3.600	6.521

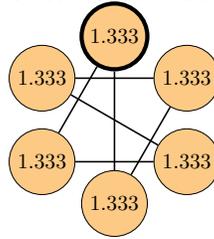
Gráfica 44 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	7.252	10.392	9.708	9.564	9.419	6.000	5.804

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e	
$V_1$	: 1.424	1.732	1.732	1.732	0.750	1.083	
$V_2$	: 0.808	1.414	1.414	1.414	0.500	0.707	
$V_3$	: 0.808	1.414	1.414	1.414	0.500	0.707	
$V_4$	: 1.424	1.732	1.732	1.732	0.750	1.083	
$V_5$	: 1.394	2.000	2.000	2.000	1.000	1.372	
$V_6$	: 1.394	2.000	2.000	2.000	1.000	1.372	
$\Sigma$	:	7.252	10.293	10.293	10.293	4.500	6.325

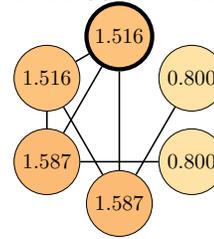
Gráfica 47 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	8.000	8.485	8.325	8.325	8.000	6.828	6.000

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e	
$V_1$	: 1.333	1.414	1.414	1.414	1.000	1.155	
$V_2$	: 1.333	1.414	1.414	1.414	1.000	1.155	
$V_3$	: 1.333	1.414	1.414	1.414	1.000	1.155	
$V_4$	: 1.333	1.414	1.414	1.414	1.000	1.155	
$V_5$	: 1.333	1.414	1.414	1.414	1.000	1.155	
$V_6$	: 1.333	1.414	1.414	1.414	1.000	1.155	
$\Sigma$	:	8.000	8.485	8.485	8.485	6.000	6.928

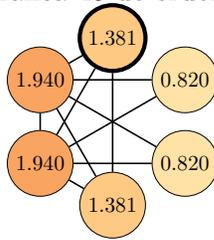
Gráfica 50 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	7.806	9.165	8.874	8.708	8.438	5.292	5.643

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e	
$V_1$	: 1.516	1.732	1.732	1.732	1.000	1.260	
$V_2$	: 0.800	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577	
$V_3$	: 0.800	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577	
$V_4$	: 1.587	1.732	1.732	1.732	1.000	1.342	
$V_5$	: 1.587	1.732	1.732	1.732	1.000	1.342	
$V_6$	: 1.516	1.732	1.732	1.732	1.000	1.260	
$\Sigma$	:	7.806	8.928	8.928	8.928	4.667	6.358

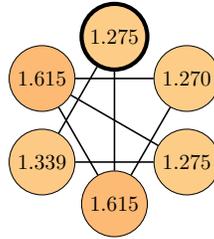
Gráfica 45 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	8.283	10.954	10.000	9.614	10.089	6.325	5.662

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e	
$V_1$	: 1.381	1.732	1.732	1.732	0.600	0.965	
$V_2$	: 0.820	1.414	1.414	1.414	0.400	0.667	
$V_3$	: 0.820	1.414	1.414	1.414	0.400	0.667	
$V_4$	: 1.381	1.732	1.732	1.732	0.600	0.965	
$V_5$	: 1.940	2.236	2.236	2.236	1.000	1.566	
$V_6$	: 1.940	2.236	2.236	2.236	1.000	1.566	
$\Sigma$	:	8.283	10.765	10.765	10.765	4.000	6.394

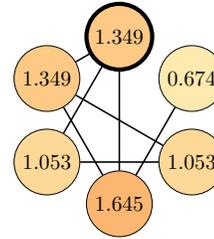
Gráfica 48 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	8.390	9.165	8.874	8.835	8.787	5.292	5.933

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e	
$V_1$	: 1.275	1.414	1.414	1.414	0.667	1.069	
$V_2$	: 1.270	1.414	1.414	1.414	0.667	1.000	
$V_3$	: 1.275	1.414	1.414	1.414	0.667	1.069	
$V_4$	: 1.615	1.732	1.732	1.732	1.000	1.441	
$V_5$	: 1.339	1.414	1.414	1.414	0.667	1.155	
$V_6$	: 1.615	1.732	1.732	1.732	1.000	1.441	
$\Sigma$	:	8.390	9.121	9.121	9.121	4.667	7.175

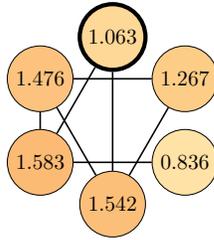
Gráfica 51 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	7.123	9.165	8.874	8.774	8.532	5.292	5.788

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e	
$V_1$	: 1.349	1.732	1.732	1.732	1.000	1.299	
$V_2$	: 0.674	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577	
$V_3$	: 1.053	1.414	1.414	1.414	0.667	0.943	
$V_4$	: 1.645	1.732	1.732	1.732	1.000	1.441	
$V_5$	: 1.053	1.414	1.414	1.414	0.667	0.943	
$V_6$	: 1.349	1.732	1.732	1.732	1.000	1.299	
$\Sigma$	:	7.123	9.025	9.025	9.025	4.667	6.502

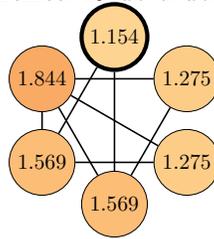
Gráfica 46 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	7.766	9.165	8.874	8.774	8.532	5.292	5.754

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e	
$V_1$	: 1.063	1.414	1.414	1.414	0.667	0.894	
$V_2$	: 1.267	1.414	1.414	1.414	0.667	1.000	
$V_3$	: 0.836	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577	
$V_4$	: 1.542	1.732	1.732	1.732	1.000	1.342	
$V_5$	: 1.583	1.732	1.732	1.732	1.000	1.389	
$V_6$	: 1.476	1.732	1.732	1.732	1.000	1.299	
$\Sigma$	:	7.766	9.025	9.025	9.025	4.667	6.501

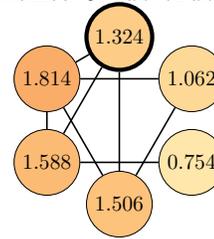
Gráfica 49 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	8.686	9.798	9.333	9.224	9.365	5.657	5.835

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e	
$V_1$	: 1.154	1.414	1.414	1.414	0.500	0.894	
$V_2$	: 1.275	1.414	1.414	1.414	0.500	0.943	
$V_3$	: 1.275	1.414	1.414	1.414	0.500	0.943	
$V_4$	: 1.569	1.732	1.732	1.732	0.750	1.299	
$V_5$	: 1.569	1.732	1.732	1.732	0.750	1.299	
$V_6$	: 1.844	2.000	2.000	2.000	1.000	1.633	
$\Sigma$	:	8.686	9.707	9.707	9.707	4.000	7.011

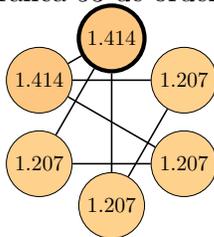
Gráfica 52 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	8.046	9.798	9.333	9.153	9.224	5.657	5.744

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e	
$V_1$	: 1.324	1.732	1.732	1.732	0.750	1.162	
$V_2$	: 1.062	1.414	1.414	1.414	0.500	0.853	
$V_3$	: 0.754	1.000	1.000	1.000	0.250	0.577	
$V_4$	: 1.506	1.732	1.732	1.732	0.750	1.192	
$V_5$	: 1.588	1.732	1.732	1.732	0.750	1.299	
$V_6$	: 1.814	2.000	2.000	2.000	1.000	1.540	
$\Sigma$	:	8.046	9.610	9.610	9.610	4.000	6.623

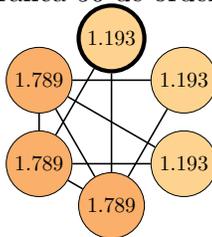
Gráfica 53 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	7.657	9.165	8.874	8.835	8.438	5.292

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.414	1.732	1.732	1.732	1.000	1.260
$V_2$	1.207	1.414	1.414	1.414	0.667	0.943
$V_3$	1.207	1.414	1.414	1.414	0.667	0.943
$V_4$	1.207	1.414	1.414	1.414	0.667	0.943
$V_5$	1.207	1.414	1.414	1.414	0.667	0.943
$V_6$	1.414	1.732	1.732	1.732	1.000	1.260
$\Sigma$	7.657	9.121	9.121	9.121	4.667	6.292

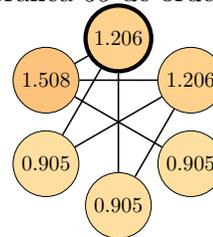
Gráfica 56 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	8.944	10.392	9.708	9.487	9.665	6.000

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.193	1.414	1.414	1.414	0.500	0.816
$V_2$	1.193	1.414	1.414	1.414	0.500	0.816
$V_3$	1.193	1.414	1.414	1.414	0.500	0.816
$V_4$	1.789	2.000	2.000	2.000	1.000	1.461
$V_5$	1.789	2.000	2.000	2.000	1.000	1.461
$V_6$	1.789	2.000	2.000	2.000	1.000	1.461
$\Sigma$	8.944	10.243	10.243	10.243	4.500	6.831

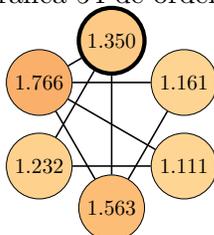
Gráfica 59 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	6.633	9.165	8.874	8.774	8.121	5.292

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.206	1.732	1.732	1.732	1.000	1.192
$V_2$	1.206	1.732	1.732	1.732	1.000	1.192
$V_3$	0.905	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_4$	0.905	1.414	1.414	1.414	0.667	0.816
$V_5$	0.905	1.414	1.414	1.414	0.667	0.816
$V_6$	1.508	1.732	1.732	1.732	1.000	1.260
$\Sigma$	6.633	9.025	9.025	9.025	4.667	5.855

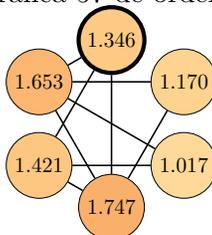
Gráfica 54 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	8.183	9.798	9.333	9.224	9.272	5.657

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.350	1.732	1.732	1.732	0.750	1.192
$V_2$	1.161	1.414	1.414	1.414	0.500	0.853
$V_3$	1.111	1.414	1.414	1.414	0.500	0.894
$V_4$	1.563	1.732	1.732	1.732	0.750	1.260
$V_5$	1.232	1.414	1.414	1.414	0.500	0.943
$V_6$	1.766	2.000	2.000	2.000	1.000	1.569
$\Sigma$	8.183	9.707	9.707	9.707	4.000	6.711

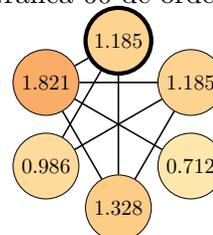
Gráfica 57 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	8.355	10.392	9.708	9.564	9.617	6.000

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.346	1.732	1.732	1.732	0.750	1.083
$V_2$	1.170	1.414	1.414	1.414	0.500	0.816
$V_3$	1.017	1.414	1.414	1.414	0.500	0.784
$V_4$	1.747	2.000	2.000	2.000	1.000	1.461
$V_5$	1.421	1.732	1.732	1.732	0.750	1.134
$V_6$	1.653	2.000	2.000	2.000	1.000	1.437
$\Sigma$	8.355	10.293	10.293	10.293	4.500	6.716

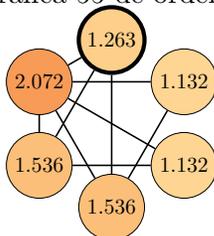
Gráfica 60 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	7.217	9.798	9.333	9.153	9.126	5.657

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.185	1.732	1.732	1.732	0.750	1.134
$V_2$	1.185	1.732	1.732	1.732	0.750	1.134
$V_3$	0.712	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_4$	1.328	1.732	1.732	1.732	0.750	1.162
$V_5$	0.986	1.414	1.414	1.414	0.500	0.816
$V_6$	1.821	2.000	2.000	2.000	1.000	1.569
$\Sigma$	7.217	9.610	9.610	9.610	4.000	6.315

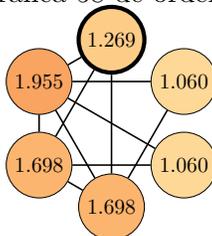
Gráfica 55 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	8.670	10.392	9.708	9.487	9.899	6.000

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.263	1.732	1.732	1.732	0.600	1.083
$V_2$	1.132	1.414	1.414	1.414	0.400	0.816
$V_3$	1.132	1.414	1.414	1.414	0.400	0.816
$V_4$	1.536	1.732	1.732	1.732	0.600	1.162
$V_5$	1.536	1.732	1.732	1.732	0.600	1.162
$V_6$	2.072	2.236	2.236	2.236	1.000	1.790
$\Sigma$	8.670	10.261	10.261	10.261	3.600	6.831

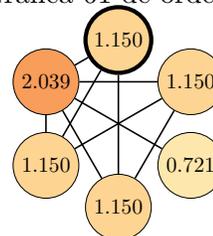
Gráfica 58 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	8.739	10.954	10.000	9.703	10.180	6.325

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.269	1.732	1.732	1.732	0.600	0.965
$V_2$	1.060	1.414	1.414	1.414	0.400	0.730
$V_3$	1.060	1.414	1.414	1.414	0.400	0.730
$V_4$	1.698	2.000	2.000	2.000	0.800	1.298
$V_5$	1.698	2.000	2.000	2.000	0.800	1.298
$V_6$	1.955	2.236	2.236	2.236	1.000	1.597
$\Sigma$	8.739	10.797	10.797	10.797	4.000	6.618

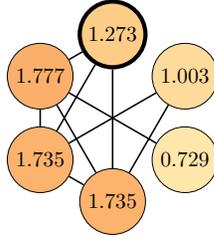
Gráfica 61 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	7.363	10.392	9.708	9.406	9.747	6.000

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.150	1.732	1.732	1.732	0.600	1.039
$V_2$	1.150	1.732	1.732	1.732	0.600	1.039
$V_3$	0.721	1.000	1.000	1.000	0.200	0.447
$V_4$	1.150	1.732	1.732	1.732	0.600	1.039
$V_5$	1.150	1.732	1.732	1.732	0.600	1.039
$V_6$	2.039	2.236	2.236	2.236	1.000	1.746
$\Sigma$	7.363	10.164	10.164	10.164	3.600	6.350

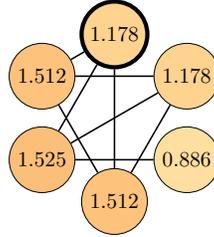
Gráfica 62 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	8.253	10.392	9.708	9.406	9.419	6.000

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.273	1.732	1.732	1.732	0.750	1.019
$V_2$	: 1.003	1.414	1.414	1.414	0.500	0.756
$V_3$	: 0.729	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_4$	: 1.735	2.000	2.000	2.000	1.000	1.352
$V_5$	: 1.735	2.000	2.000	2.000	1.000	1.352
$V_6$	: 1.777	2.000	2.000	2.000	1.000	1.414
$\Sigma$	: 8.253	10.146	10.146	10.146	4.500	6.394

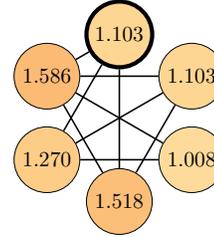
Gráfica 65 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	7.790	9.798	9.333	9.224	8.677	5.821

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.178	1.732	1.732	1.732	1.000	1.134
$V_2$	: 1.178	1.732	1.732	1.732	1.000	1.134
$V_3$	: 0.886	1.000	1.000	1.000	0.333	0.577
$V_4$	: 1.512	1.732	1.732	1.732	1.000	1.192
$V_5$	: 1.525	1.732	1.732	1.732	1.000	1.260
$V_6$	: 1.512	1.732	1.732	1.732	1.000	1.192
$\Sigma$	: 7.790	9.660	9.660	9.660	5.333	6.490

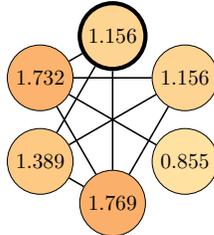
Gráfica 68 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	7.588	10.392	9.708	9.638	9.569	6.000

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.103	1.732	1.732	1.732	0.750	1.061
$V_2$	: 1.103	1.732	1.732	1.732	0.750	1.061
$V_3$	: 1.008	1.414	1.414	1.414	0.500	0.784
$V_4$	: 1.518	1.732	1.732	1.732	0.750	1.162
$V_5$	: 1.270	1.732	1.732	1.732	0.750	1.108
$V_6$	: 1.586	2.000	2.000	2.000	1.000	1.437
$\Sigma$	: 7.588	10.342	10.342	10.342	4.500	6.612

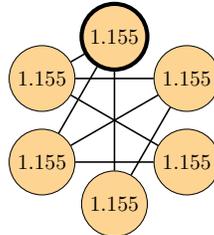
Gráfica 63 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	8.059	10.392	9.708	9.487	9.470	6.000

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.156	1.732	1.732	1.732	0.750	1.039
$V_2$	: 1.156	1.732	1.732	1.732	0.750	1.039
$V_3$	: 0.855	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_4$	: 1.769	2.000	2.000	2.000	1.000	1.393
$V_5$	: 1.389	1.732	1.732	1.732	0.750	1.061
$V_6$	: 1.732	2.000	2.000	2.000	1.000	1.437
$\Sigma$	: 8.059	10.196	10.196	10.196	4.500	6.469

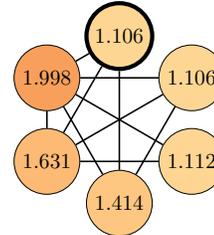
Gráfica 66 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	6.928	9.798	9.333	9.291	8.300	5.657

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.155	1.732	1.732	1.732	1.000	1.108
$V_2$	: 1.155	1.732	1.732	1.732	1.000	1.108
$V_3$	: 1.155	1.414	1.414	1.414	0.667	0.816
$V_4$	: 1.155	1.414	1.414	1.414	0.667	0.816
$V_5$	: 1.155	1.732	1.732	1.732	1.000	1.108
$V_6$	: 1.155	1.732	1.732	1.732	1.000	1.108
$\Sigma$	: 6.928	9.757	9.757	9.757	5.333	6.064

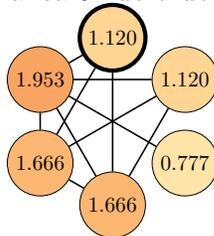
Gráfica 69 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	8.367	10.954	10.000	9.789	10.210	6.325

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.106	1.732	1.732	1.732	0.600	0.982
$V_2$	: 1.106	1.732	1.732	1.732	0.600	0.982
$V_3$	: 1.112	1.414	1.414	1.414	0.400	0.730
$V_4$	: 1.414	1.732	1.732	1.732	0.600	1.039
$V_5$	: 1.631	2.000	2.000	2.000	0.800	1.315
$V_6$	: 1.998	2.236	2.236	2.236	1.000	1.631
$\Sigma$	: 8.367	10.846	10.846	10.846	4.000	6.680

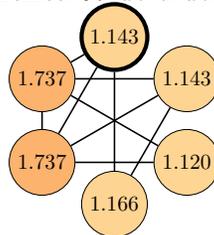
Gráfica 64 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	8.302	10.954	10.000	9.614	10.027	6.325

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.120	1.732	1.732	1.732	0.600	0.933
$V_2$	: 1.120	1.732	1.732	1.732	0.600	0.933
$V_3$	: 0.777	1.000	1.000	1.000	0.200	0.447
$V_4$	: 1.666	2.000	2.000	2.000	0.800	1.220
$V_5$	: 1.666	2.000	2.000	2.000	0.800	1.220
$V_6$	: 1.953	2.236	2.236	2.236	1.000	1.566
$\Sigma$	: 8.302	10.700	10.700	10.700	4.000	6.319

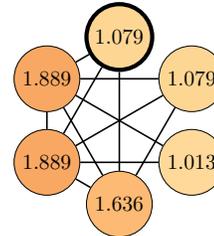
Gráfica 67 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	8.047	10.392	9.708	9.564	9.520	6.000

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.143	1.732	1.732	1.732	0.750	1.061
$V_2$	: 1.143	1.732	1.732	1.732	0.750	1.061
$V_3$	: 1.120	1.414	1.414	1.414	0.500	0.756
$V_4$	: 1.166	1.414	1.414	1.414	0.500	0.816
$V_5$	: 1.737	2.000	2.000	2.000	1.000	1.414
$V_6$	: 1.737	2.000	2.000	2.000	1.000	1.414
$\Sigma$	: 8.047	10.293	10.293	10.293	4.500	6.522

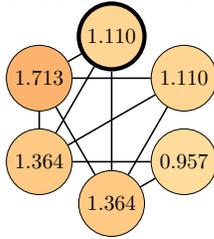
Gráfica 70 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	8.585	11.489	10.207	9.885	10.401	6.633

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.079	1.732	1.732	1.732	0.600	0.891
$V_2$	: 1.079	1.732	1.732	1.732	0.600	0.891
$V_3$	: 1.013	1.414	1.414	1.414	0.400	0.667
$V_4$	: 1.636	2.000	2.000	2.000	0.800	1.180
$V_5$	: 1.889	2.236	2.236	2.236	1.000	1.456
$V_6$	: 1.889	2.236	2.236	2.236	1.000	1.456
$\Sigma$	: 8.585	11.350	11.350	11.350	4.400	6.540

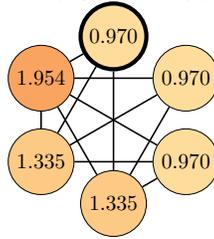
Gráfica 71 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	7.620	10.954	10.000	9.871	9.762	6.325 5.878

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.110	1.732	1.732	1.732	0.750	0.982
$V_2$	1.110	1.732	1.732	1.732	0.750	0.982
$V_3$	0.957	1.414	1.414	1.414	0.500	0.707
$V_4$	1.364	2.000	2.000	2.000	1.000	1.298
$V_5$	1.364	2.000	2.000	2.000	1.000	1.298
$V_6$	1.713	2.000	2.000	2.000	1.000	1.333
$\Sigma$	7.620	10.878	10.878	10.878	5.000	6.600

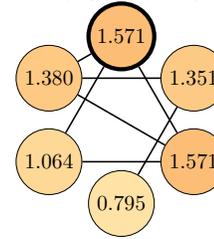
Gráfica 74 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	7.533	11.489	10.207	10.066	10.462	6.633 5.908

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	0.970	1.732	1.732	1.732	0.600	0.905
$V_2$	0.970	1.732	1.732	1.732	0.600	0.905
$V_3$	0.970	1.732	1.732	1.732	0.600	0.905
$V_4$	1.335	2.000	2.000	2.000	0.800	1.206
$V_5$	1.335	2.000	2.000	2.000	0.800	1.206
$V_6$	1.954	2.236	2.236	2.236	1.000	1.508
$\Sigma$	7.533	11.432	11.432	11.432	4.400	6.633

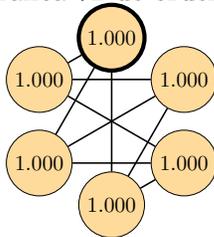
Gráfica 77 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	7.732	9.165	8.874	8.774	8.532	5.292 5.864

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.571	1.732	1.732	1.732	1.000	1.299
$V_2$	1.351	1.414	1.414	1.414	0.667	1.155
$V_3$	1.571	1.732	1.732	1.732	1.000	1.299
$V_4$	0.795	1.000	1.000	1.000	0.333	0.707
$V_5$	1.064	1.414	1.414	1.414	0.667	0.894
$V_6$	1.380	1.732	1.732	1.732	1.000	1.299
$\Sigma$	7.732	9.025	9.025	9.025	4.667	6.653

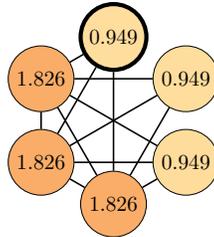
Gráfica 72 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	6.000	10.392	9.708	9.708	6.000	6.000

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.000	1.732	1.732	1.732	1.000	1.000
$V_2$	1.000	1.732	1.732	1.732	1.000	1.000
$V_3$	1.000	1.732	1.732	1.732	1.000	1.000
$V_4$	1.000	1.732	1.732	1.732	1.000	1.000
$V_5$	1.000	1.732	1.732	1.732	1.000	1.000
$V_6$	1.000	1.732	1.732	1.732	1.000	1.000
$\Sigma$	6.000	10.392	10.392	10.392	6.000	6.000

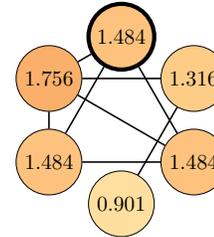
Gráfica 75 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	8.325	12.000	10.325	10.039	10.556	6.928 5.848

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	0.949	1.732	1.732	1.732	0.600	0.832
$V_2$	0.949	1.732	1.732	1.732	0.600	0.832
$V_3$	0.949	1.732	1.732	1.732	0.600	0.832
$V_4$	1.826	2.236	2.236	2.236	1.000	1.346
$V_5$	1.826	2.236	2.236	2.236	1.000	1.346
$V_6$	1.826	2.236	2.236	2.236	1.000	1.346
$\Sigma$	8.325	11.904	11.904	11.904	4.800	6.534

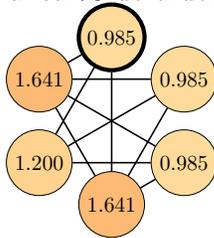
Gráfica 78 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	8.427	9.798	9.333	9.153	9.126	5.657 5.853

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.484	1.732	1.732	1.732	0.750	1.108
$V_2$	1.316	1.414	1.414	1.414	0.500	1.069
$V_3$	1.484	1.732	1.732	1.732	0.750	1.108
$V_4$	0.901	1.000	1.000	1.000	0.250	0.707
$V_5$	1.484	1.732	1.732	1.732	0.750	1.108
$V_6$	1.756	2.000	2.000	2.000	1.000	1.486
$\Sigma$	8.427	9.610	9.610	9.610	4.000	6.585

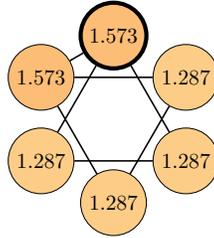
Gráfica 73 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	7.435	10.954	10.000	9.949	9.709	6.325 5.964

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	0.985	1.732	1.732	1.732	0.750	0.965
$V_2$	0.985	1.732	1.732	1.732	0.750	0.965
$V_3$	0.985	1.732	1.732	1.732	0.750	0.965
$V_4$	1.641	2.000	2.000	2.000	1.000	1.315
$V_5$	1.200	1.732	1.732	1.732	0.750	1.000
$V_6$	1.641	2.000	2.000	2.000	1.000	1.315
$\Sigma$	7.435	10.928	10.928	10.928	5.000	6.525

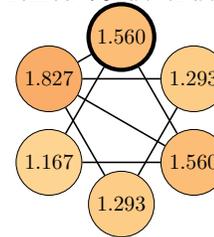
Gráfica 76 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	8.293	9.165	8.874	8.835	8.787	5.292 5.933

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.573	1.732	1.732	1.732	1.000	1.441
$V_2$	1.287	1.414	1.414	1.414	0.667	1.069
$V_3$	1.287	1.414	1.414	1.414	0.667	1.069
$V_4$	1.287	1.414	1.414	1.414	0.667	1.069
$V_5$	1.287	1.414	1.414	1.414	0.667	1.069
$V_6$	1.573	1.732	1.732	1.732	1.000	1.441
$\Sigma$	8.293	9.121	9.121	9.121	4.667	7.158

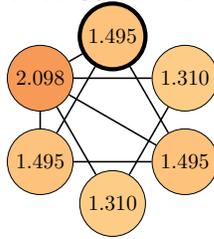
Gráfica 79 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	8.698	9.798	9.333	9.224	9.365	5.657 5.869

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.560	1.732	1.732	1.732	0.750	1.260
$V_2$	1.293	1.414	1.414	1.414	0.500	1.000
$V_3$	1.560	1.732	1.732	1.732	0.750	1.260
$V_4$	1.293	1.414	1.414	1.414	0.500	1.000
$V_5$	1.167	1.414	1.414	1.414	0.500	0.894
$V_6$	1.827	2.000	2.000	2.000	1.000	1.633
$\Sigma$	8.698	9.707	9.707	9.707	4.000	7.048

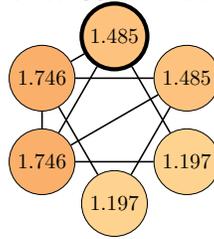
Gráfica 80 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	9.203	10.392	9.708	9.487	9.899	6.000	5.814

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.495	1.732	1.732	1.732	0.600	1.083
$V_2$	1.310	1.414	1.414	1.414	0.400	0.943
$V_3$	1.495	1.732	1.732	1.732	0.600	1.083
$V_4$	1.310	1.414	1.414	1.414	0.400	0.943
$V_5$	1.495	1.732	1.732	1.732	0.600	1.083
$V_6$	2.098	2.236	2.236	2.236	1.000	1.790
$\Sigma$	9.203	10.261	10.261	10.261	3.600	6.926

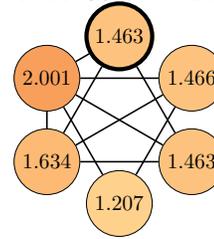
Gráfica 83 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	8.858	10.392	9.708	9.564	9.711	6.000	5.857

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.485	1.732	1.732	1.732	0.750	1.162
$V_2$	1.485	1.732	1.732	1.732	0.750	1.162
$V_3$	1.197	1.414	1.414	1.414	0.500	0.853
$V_4$	1.197	1.414	1.414	1.414	0.500	0.853
$V_5$	1.746	2.000	2.000	2.000	1.000	1.461
$V_6$	1.746	2.000	2.000	2.000	1.000	1.461
$\Sigma$	8.858	10.293	10.293	10.293	4.500	6.951

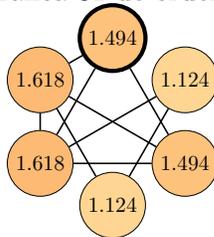
Gráfica 86 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	9.234	10.954	10.000	9.789	10.268	6.325	5.844

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.463	1.732	1.732	1.732	0.600	1.019
$V_2$	1.466	1.732	1.732	1.732	0.600	1.083
$V_3$	1.463	1.732	1.732	1.732	0.600	1.019
$V_4$	1.207	1.414	1.414	1.414	0.400	0.816
$V_5$	1.634	2.000	2.000	2.000	0.800	1.298
$V_6$	2.001	2.236	2.236	2.236	1.000	1.631
$\Sigma$	9.234	10.846	10.846	10.846	4.000	6.867

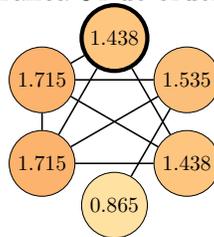
Gráfica 81 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	8.472	10.392	9.708	9.564	9.617	6.000	5.890

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.494	1.732	1.732	1.732	0.750	1.039
$V_2$	1.124	1.414	1.414	1.414	0.500	0.894
$V_3$	1.494	1.732	1.732	1.732	0.750	1.039
$V_4$	1.124	1.414	1.414	1.414	0.500	0.894
$V_5$	1.618	2.000	2.000	2.000	1.000	1.414
$V_6$	1.618	2.000	2.000	2.000	1.000	1.414
$\Sigma$	8.472	10.293	10.293	10.293	4.500	6.784

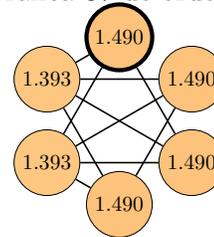
Gráfica 84 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	8.708	10.392	9.708	9.487	9.470	6.000	5.785

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.438	1.732	1.732	1.732	0.750	1.039
$V_2$	1.535	1.732	1.732	1.732	0.750	1.192
$V_3$	1.438	1.732	1.732	1.732	0.750	1.039
$V_4$	0.865	1.000	1.000	1.000	0.250	0.577
$V_5$	1.715	2.000	2.000	2.000	1.000	1.352
$V_6$	1.715	2.000	2.000	2.000	1.000	1.352
$\Sigma$	8.708	10.196	10.196	10.196	4.500	6.552

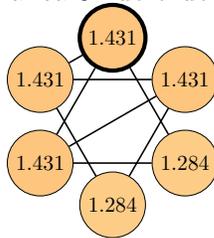
Gráfica 87 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	8.745	10.954	10.000	9.949	10.011	6.325	5.952

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.490	1.732	1.732	1.732	0.750	1.083
$V_2$	1.490	1.732	1.732	1.732	0.750	1.083
$V_3$	1.490	1.732	1.732	1.732	0.750	1.083
$V_4$	1.490	1.732	1.732	1.732	0.750	1.083
$V_5$	1.393	2.000	2.000	2.000	1.000	1.333
$V_6$	1.393	2.000	2.000	2.000	1.000	1.333
$\Sigma$	8.745	10.928	10.928	10.928	5.000	7.001

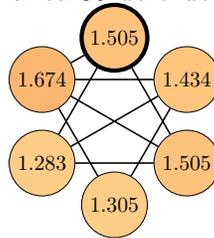
Gráfica 82 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	8.293	9.798	9.333	9.291	9.158	5.657	5.933

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.431	1.732	1.732	1.732	1.000	1.299
$V_2$	1.431	1.732	1.732	1.732	1.000	1.299
$V_3$	1.284	1.414	1.414	1.414	0.667	1.000
$V_4$	1.284	1.414	1.414	1.414	0.667	1.000
$V_5$	1.431	1.732	1.732	1.732	1.000	1.299
$V_6$	1.431	1.732	1.732	1.732	1.000	1.299
$\Sigma$	8.293	9.757	9.757	9.757	5.333	7.196

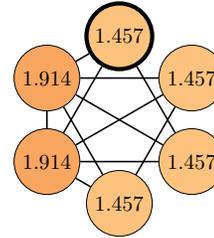
Gráfica 85 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	8.704	10.392	9.708	9.638	9.757	6.000	5.922

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.505	1.732	1.732	1.732	0.750	1.162
$V_2$	1.434	1.732	1.732	1.732	0.750	1.192
$V_3$	1.505	1.732	1.732	1.732	0.750	1.162
$V_4$	1.305	1.414	1.414	1.414	0.500	0.943
$V_5$	1.283	1.732	1.732	1.732	0.750	1.134
$V_6$	1.674	2.000	2.000	2.000	1.000	1.486
$\Sigma$	8.704	10.342	10.342	10.342	4.500	7.078

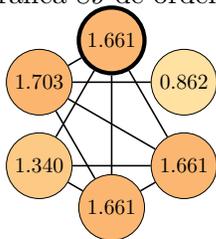
Gráfica 88 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	9.657	11.489	10.207	9.977	10.550	6.633	5.865

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.457	1.732	1.732	1.732	0.600	0.965
$V_2$	1.457	1.732	1.732	1.732	0.600	0.965
$V_3$	1.457	1.732	1.732	1.732	0.600	0.965
$V_4$	1.457	1.732	1.732	1.732	0.600	0.965
$V_5$	1.914	2.236	2.236	2.236	1.000	1.481
$V_6$	1.914	2.236	2.236	2.236	1.000	1.481
$\Sigma$	9.657	11.400	11.400	11.400	4.400	6.821

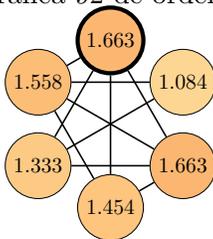
Gráfica 89 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	8.887	10.954	10.000	9.703	9.542	6.325	5.732

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.661	2.000	2.000	2.000	1.000	1.220
$V_2$	: 0.862	1.000	1.000	1.000	0.250	0.500
$V_3$	: 1.661	2.000	2.000	2.000	1.000	1.220
$V_4$	: 1.661	2.000	2.000	2.000	1.000	1.220
$V_5$	: 1.340	1.732	1.732	1.732	0.750	0.949
$V_6$	: 1.703	2.000	2.000	2.000	1.000	1.315
$\Sigma$	: 8.887	10.732	10.732	10.732	5.000	6.424

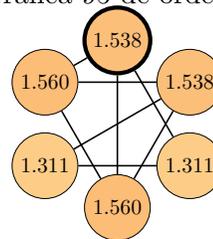
Gráfica 92 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	8.757	10.954	10.000	9.871	9.864	6.325	5.910

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.663	2.000	2.000	2.000	1.000	1.298
$V_2$	: 1.084	1.414	1.414	1.414	0.500	0.784
$V_3$	: 1.663	2.000	2.000	2.000	1.000	1.298
$V_4$	: 1.454	1.732	1.732	1.732	0.750	1.019
$V_5$	: 1.333	1.732	1.732	1.732	0.750	1.061
$V_6$	: 1.558	2.000	2.000	2.000	1.000	1.315
$\Sigma$	: 8.757	10.878	10.878	10.878	5.000	6.775

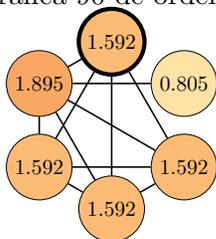
Gráfica 95 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	8.819	9.798	9.333	9.291	9.158	5.657	5.966

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.538	1.732	1.732	1.732	1.000	1.299
$V_2$	: 1.538	1.732	1.732	1.732	1.000	1.299
$V_3$	: 1.311	1.414	1.414	1.414	0.667	1.069
$V_4$	: 1.560	1.732	1.732	1.732	1.000	1.260
$V_5$	: 1.311	1.414	1.414	1.414	0.667	1.069
$V_6$	: 1.560	1.732	1.732	1.732	1.000	1.260
$\Sigma$	: 8.819	9.757	9.757	9.757	5.333	7.257

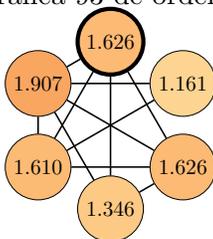
Gráfica 90 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	9.068	11.489	10.207	9.789	10.179	6.633	5.683

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.592	2.000	2.000	2.000	0.800	1.099
$V_2$	: 0.805	1.000	1.000	1.000	0.200	0.447
$V_3$	: 1.592	2.000	2.000	2.000	0.800	1.099
$V_4$	: 1.592	2.000	2.000	2.000	0.800	1.099
$V_5$	: 1.592	2.000	2.000	2.000	0.800	1.099
$V_6$	: 1.895	2.236	2.236	2.236	1.000	1.431
$\Sigma$	: 9.068	11.236	11.236	11.236	4.400	6.274

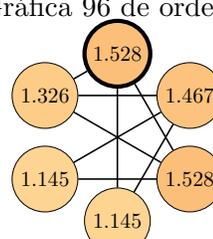
Gráfica 93 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	9.276	11.489	10.207	9.977	10.492	6.633	5.852

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.626	2.000	2.000	2.000	0.800	1.180
$V_2$	: 1.161	1.414	1.414	1.414	0.400	0.730
$V_3$	: 1.626	2.000	2.000	2.000	0.800	1.180
$V_4$	: 1.346	1.732	1.732	1.732	0.600	0.933
$V_5$	: 1.610	2.000	2.000	2.000	0.800	1.220
$V_6$	: 1.907	2.236	2.236	2.236	1.000	1.481
$\Sigma$	: 9.276	11.382	11.382	11.382	4.400	6.723

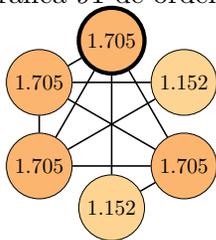
Gráfica 96 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	8.139	9.798	9.333	9.291	8.982	5.657	5.933

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.528	1.732	1.732	1.732	1.000	1.299
$V_2$	: 1.467	1.732	1.732	1.732	1.000	1.260
$V_3$	: 1.528	1.732	1.732	1.732	1.000	1.299
$V_4$	: 1.145	1.414	1.414	1.414	0.667	0.894
$V_5$	: 1.145	1.414	1.414	1.414	0.667	0.894
$V_6$	: 1.326	1.732	1.732	1.732	1.000	1.192
$\Sigma$	: 8.139	9.757	9.757	9.757	5.333	6.839

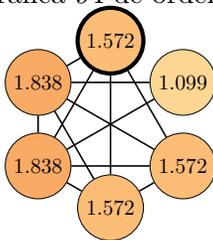
Gráfica 91 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	9.123	10.954	10.000	9.789	9.814	6.325	5.828

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.705	2.000	2.000	2.000	1.000	1.298
$V_2$	: 1.152	1.414	1.414	1.414	0.500	0.756
$V_3$	: 1.705	2.000	2.000	2.000	1.000	1.298
$V_4$	: 1.152	1.414	1.414	1.414	0.500	0.756
$V_5$	: 1.705	2.000	2.000	2.000	1.000	1.298
$V_6$	: 1.705	2.000	2.000	2.000	1.000	1.298
$\Sigma$	: 9.123	10.828	10.828	10.828	5.000	6.703

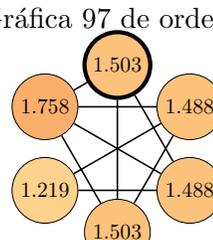
Gráfica 94 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	9.493	12.000	10.325	10.039	10.556	6.928	5.848

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.572	2.000	2.000	2.000	0.800	1.069
$V_2$	: 1.099	1.414	1.414	1.414	0.400	0.667
$V_3$	: 1.572	2.000	2.000	2.000	0.800	1.069
$V_4$	: 1.572	2.000	2.000	2.000	0.800	1.069
$V_5$	: 1.838	2.236	2.236	2.236	1.000	1.346
$V_6$	: 1.838	2.236	2.236	2.236	1.000	1.346
$\Sigma$	: 9.493	11.886	11.886	11.886	4.800	6.566

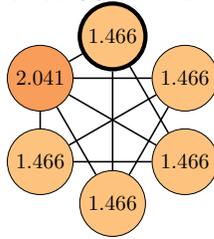
Gráfica 97 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	8.958	10.392	9.708	9.638	9.757	6.000	5.942

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	: 1.503	1.732	1.732	1.732	0.750	1.162
$V_2$	: 1.488	1.732	1.732	1.732	0.750	1.192
$V_3$	: 1.488	1.732	1.732	1.732	0.750	1.192
$V_4$	: 1.503	1.732	1.732	1.732	0.750	1.162
$V_5$	: 1.219	1.414	1.414	1.414	0.500	0.894
$V_6$	: 1.758	2.000	2.000	2.000	1.000	1.461
$\Sigma$	: 8.958	10.342	10.342	10.342	4.500	7.063

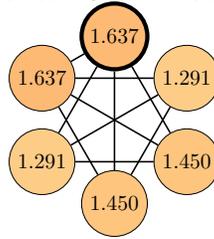
Gráfica 98 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	9.371	10.954	10.000	9.871	10.354	6.325	5.915

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.466	1.732	1.732	1.732	0.600	1.083
$V_2$	1.466	1.732	1.732	1.732	0.600	1.083
$V_3$	1.466	1.732	1.732	1.732	0.600	1.083
$V_4$	1.466	1.732	1.732	1.732	0.600	1.083
$V_5$	1.466	1.732	1.732	1.732	0.600	1.083
$V_6$	2.041	2.236	2.236	2.236	1.000	1.667
$\Sigma$	9.371	10.896	10.896	10.896	4.000	7.084

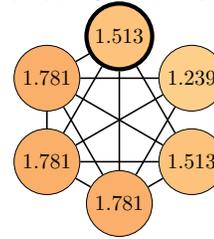
Gráfica 101 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	8.755	10.954	10.000	9.949	10.011	6.325	5.964

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.637	2.000	2.000	2.000	1.000	1.352
$V_2$	1.291	1.732	1.732	1.732	0.750	1.061
$V_3$	1.450	1.732	1.732	1.732	0.750	1.083
$V_4$	1.450	1.732	1.732	1.732	0.750	1.083
$V_5$	1.291	1.732	1.732	1.732	0.750	1.061
$V_6$	1.637	2.000	2.000	2.000	1.000	1.352
$\Sigma$	8.755	10.928	10.928	10.928	5.000	6.993

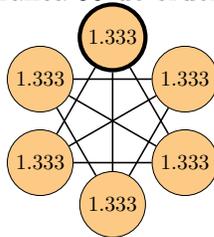
Gráfica 104 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	9.607	12.490	10.343	10.170	10.702	7.211	5.932

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.513	2.000	2.000	2.000	0.800	1.024
$V_2$	1.239	1.732	1.732	1.732	0.600	0.832
$V_3$	1.513	2.000	2.000	2.000	0.800	1.024
$V_4$	1.781	2.236	2.236	2.236	1.000	1.258
$V_5$	1.781	2.236	2.236	2.236	1.000	1.258
$V_6$	1.781	2.236	2.236	2.236	1.000	1.258
$\Sigma$	9.607	12.440	12.440	12.440	5.200	6.654

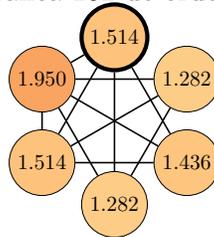
Gráfica 99 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	8.000	10.392	9.708	9.708	9.335	6.000	6.000

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.333	1.732	1.732	1.732	1.000	1.192
$V_2$	1.333	1.732	1.732	1.732	1.000	1.192
$V_3$	1.333	1.732	1.732	1.732	1.000	1.192
$V_4$	1.333	1.732	1.732	1.732	1.000	1.192
$V_5$	1.333	1.732	1.732	1.732	1.000	1.192
$V_6$	1.333	1.732	1.732	1.732	1.000	1.192
$\Sigma$	8.000	10.392	10.392	10.392	6.000	7.152

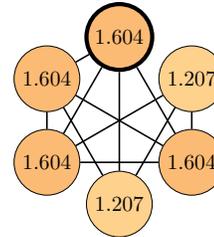
Gráfica 102 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	8.979	11.489	10.207	10.066	10.580	6.633	5.920

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.514	2.000	2.000	2.000	0.800	1.220
$V_2$	1.282	1.732	1.732	1.732	0.600	0.982
$V_3$	1.436	1.732	1.732	1.732	0.600	0.965
$V_4$	1.282	1.732	1.732	1.732	0.600	0.982
$V_5$	1.514	2.000	2.000	2.000	0.800	1.220
$V_6$	1.950	2.236	2.236	2.236	1.000	1.508
$\Sigma$	8.979	11.432	11.432	11.432	4.400	6.876

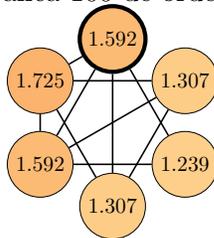
Gráfica 105 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	8.828	11.489	10.207	10.152	9.995	6.633	5.976

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.604	2.000	2.000	2.000	1.000	1.220
$V_2$	1.207	1.732	1.732	1.732	0.750	0.965
$V_3$	1.604	2.000	2.000	2.000	1.000	1.220
$V_4$	1.207	1.732	1.732	1.732	0.750	0.965
$V_5$	1.604	2.000	2.000	2.000	1.000	1.220
$V_6$	1.604	2.000	2.000	2.000	1.000	1.220
$\Sigma$	8.828	11.464	11.464	11.464	5.500	6.810

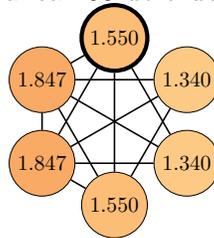
Gráfica 100 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	8.761	10.954	10.000	9.871	9.963	6.325	5.890

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.592	2.000	2.000	2.000	1.000	1.352
$V_2$	1.307	1.732	1.732	1.732	0.750	1.039
$V_3$	1.239	1.414	1.414	1.414	0.500	0.816
$V_4$	1.307	1.732	1.732	1.732	0.750	1.039
$V_5$	1.592	2.000	2.000	2.000	1.000	1.352
$V_6$	1.725	2.000	2.000	2.000	1.000	1.333
$\Sigma$	8.761	10.878	10.878	10.878	5.000	6.933

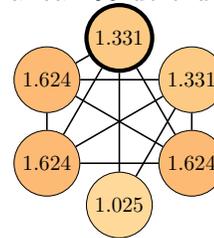
Gráfica 103 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	9.474	12.000	10.325	10.138	10.712	6.928	5.909

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.550	2.000	2.000	2.000	0.800	1.120
$V_2$	1.340	1.732	1.732	1.732	0.600	0.891
$V_3$	1.340	1.732	1.732	1.732	0.600	0.891
$V_4$	1.550	2.000	2.000	2.000	0.800	1.120
$V_5$	1.847	2.236	2.236	2.236	1.000	1.366
$V_6$	1.847	2.236	2.236	2.236	1.000	1.366
$\Sigma$	9.474	11.936	11.936	11.936	4.800	6.755

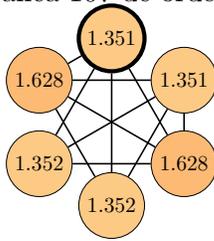
Gráfica 106 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6	
	8.559	11.489	10.207	10.066	9.822	6.633	5.914

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.331	2.000	2.000	2.000	1.000	1.206
$V_2$	1.331	2.000	2.000	2.000	1.000	1.206
$V_3$	1.624	2.000	2.000	2.000	1.000	1.180
$V_4$	1.025	1.414	1.414	1.414	0.500	0.707
$V_5$	1.624	2.000	2.000	2.000	1.000	1.180
$V_6$	1.624	2.000	2.000	2.000	1.000	1.180
$\Sigma$	8.559	11.414	11.414	11.414	5.500	6.658

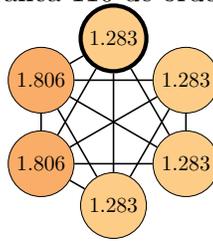
Gráfica 107 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	8.663	11.489	10.207	10.152	10.104	6.633

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.351	2.000	2.000	2.000	1.000	1.234
$V_2$	1.351	2.000	2.000	2.000	1.000	1.234
$V_3$	1.628	2.000	2.000	2.000	1.000	1.249
$V_4$	1.352	1.732	1.732	1.732	0.750	0.982
$V_5$	1.352	1.732	1.732	1.732	0.750	0.982
$V_6$	1.628	2.000	2.000	2.000	1.000	1.249
$\Sigma$	8.663	11.464	11.464	11.464	5.500	6.932

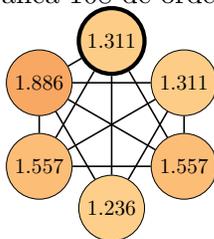
Gráfica 110 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	8.745	12.490	10.343	10.275	10.802	7.211

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.283	2.000	2.000	2.000	0.800	1.050
$V_2$	1.283	2.000	2.000	2.000	0.800	1.050
$V_3$	1.283	2.000	2.000	2.000	0.800	1.050
$V_4$	1.283	2.000	2.000	2.000	0.800	1.050
$V_5$	1.806	2.236	2.236	2.236	1.000	1.274
$V_6$	1.806	2.236	2.236	2.236	1.000	1.274
$\Sigma$	8.745	12.472	12.472	12.472	5.200	6.750

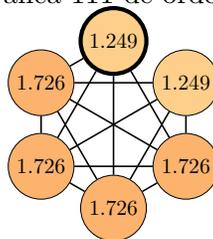
Gráfica 108 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	8.859	12.000	10.325	10.233	10.743	6.928

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.311	2.000	2.000	2.000	0.800	1.131
$V_2$	1.311	2.000	2.000	2.000	0.800	1.131
$V_3$	1.557	2.000	2.000	2.000	0.800	1.120
$V_4$	1.236	1.732	1.732	1.732	0.600	0.905
$V_5$	1.557	2.000	2.000	2.000	0.800	1.120
$V_6$	1.886	2.236	2.236	2.236	1.000	1.387
$\Sigma$	8.859	11.968	11.968	11.968	4.800	6.794

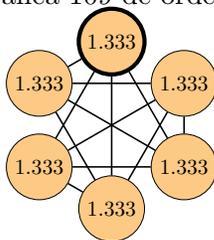
Gráfica 111 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	9.403	12.961	10.244	10.168	10.574	7.483

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.249	2.000	2.000	2.000	0.800	0.970
$V_2$	1.249	2.000	2.000	2.000	0.800	0.970
$V_3$	1.726	2.236	2.236	2.236	1.000	1.172
$V_4$	1.726	2.236	2.236	2.236	1.000	1.172
$V_5$	1.726	2.236	2.236	2.236	1.000	1.172
$V_6$	1.726	2.236	2.236	2.236	1.000	1.172
$\Sigma$	9.403	12.944	12.944	12.944	5.600	6.628

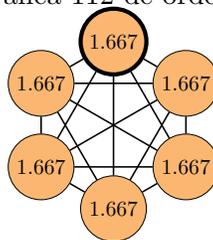
Gráfica 109 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	8.000	12.000	10.325	10.032	6.928	6.000

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.333	2.000	2.000	2.000	1.000	1.155
$V_2$	1.333	2.000	2.000	2.000	1.000	1.155
$V_3$	1.333	2.000	2.000	2.000	1.000	1.155
$V_4$	1.333	2.000	2.000	2.000	1.000	1.155
$V_5$	1.333	2.000	2.000	2.000	1.000	1.155
$V_6$	1.333	2.000	2.000	2.000	1.000	1.155
$\Sigma$	8.000	12.000	12.000	12.000	6.000	6.928

Gráfica 112 de orden 6



$\mathcal{E}(G)$	1	2	3	4	5	6
	10.000	13.416	10.000	10.000	10.000	7.746

	$\mathcal{E}_G(v_i)$	a	b	c	d	e
$V_1$	1.667	2.236	2.236	2.236	1.000	1.091
$V_2$	1.667	2.236	2.236	2.236	1.000	1.091
$V_3$	1.667	2.236	2.236	2.236	1.000	1.091
$V_4$	1.667	2.236	2.236	2.236	1.000	1.091
$V_5$	1.667	2.236	2.236	2.236	1.000	1.091
$V_6$	1.667	2.236	2.236	2.236	1.000	1.091
$\Sigma$	10.000	13.416	13.416	13.416	6.000	6.547

# Bibliografía

- [1] Arizmendi, G., & Arizmendi, O. (2020). Energy of a graph and Randic index. *Linear Algebra and its Applications*, 609, 332-338.
- [2] Arizmendi, O., Luna Olivera B.C., Ramírez Ibáñez, M. Coulson Integral Formula for the Vertex Energy of a Graph. *Linear Algebra and its Applications*, Volume 580, 1 November 2019, Pages 166-183
- [3] Arizmendi, O., and Juárez-Romero, O. (2018). On bounds for the energy of graphs and digraphs. *Contemporary Mathematics, Aportaciones Matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana. Contributions of Mexican Mathematicians Abroad in Pure and Applied Mathematics. American Mathematical Society.* 709, 1-19.
- [4] Arizmendi, O., Fernández-Hidalgo, J., Juárez-Romero, O (2018).Energy of a vertex. *Linear Algebra and its Applications*, Volume 557, Pages 464-495
- [5] Arizmendi, O., Fernández-Hidalgo, J. (2020). Graphs of Maximal Energy with Fixed Maximal Degree *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*, Volume 83, 531-539
- [6] Arizmendi, O., and Juárez-Romero, O. (2018). On bounds for the energy of graphs and digraphs. *Contemporary Mathematics, Aportaciones Matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana. Contributions of Mexican Mathematicians Abroad in Pure and Applied Mathematics. American Mathematical Society.* 709, 1-19.
- [7] Bhamidi, S., Evans, S. N., & Sen, A. (2012). Spectra of large random trees. *Journal of Theoretical Probability*, 25(3), 613-654.
- [8] Betten, A., Kohnert, A., Laue, R., & Wassermann, A. (2001). *Algebraic Combinatorics and Applications: Proceedings.*
- [9] Caporossi, G., Cvetković, D., Gutman, I., & Hansen, P. (1999). Variable neighborhood search for extremal graphs. 2. Finding graphs with extremal energy. *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*, 39(6), 984-996.
- [10] Cvetković, D., & Gutman, I. (1986). The computer system GRAPH: A useful tool in chemical graph theory. *Journal of computational chemistry*, 7(5), 640-644.
- [11] Cvetkovic, D. M., & Gutman, I. (2011). *Selected topics on applications of graph spectra.* Beograd: Matemacki institut SANU.

- [12] Cvetkovic, D. M., Rowlinson, P., & Simic, S. (2010). An introduction to the theory of graph spectra (pp. 230-231). Cambridge: Cambridge University Press.
- [13] Chen, X., & Xie, W. (2012). Energy of a Hypercube and its Complement. *International Journal of Algebra*, 6(16), 799-805.
- [14] Costello, K. P., & Vu, V. H. (2008). The rank of random graphs. *Random Structures & Algorithms*, 33(3), 269-285.
- [15] Cvetkovic, D., Doob M., H. Sachs(1979), *Spectra of Graphs*, V.E.B. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
- [16] Diestel, R. (2017). *Graph Theory*. Springer, Berlin.
- [17] Estrada, E.,& Benzi, M. (2017). What is the meaning of the graph energy after all?. *Discrete Applied Mathematics*, 230, 71-77.
- [18] Friedberg, S. H., Insel, A. J., & Spence, L. E. (1979). *Linear algebra*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- [19] Gutman, I., Gudiño, E., & Quiroz, D. (2009). Upper bound for the energy of graphs with fixed second and fourth spectral moments. *Kragujevac Journal of Mathematics*, 32, 27-35.
- [20] Godsil, C., Royle, G. (2001), *Algebraic Graph Theory*. Springer, New York.
- [21] Gutman, I.(1978), The energy of a graph,10. *Steiermarkisches Mathematisches Symposium* 103, 1–22.
- [22] Gutman, I., Vidovic, D., Cmiljanovic, N., Milosavljevic, S., & Radenkovic, S. (2003). Graph energy-A useful molecular structure-descriptor.
- [23] Hoffman, A. J. (2003). On eigenvalues and colorings of graphs. In *Selected Papers Of Alan J Hoffman: With Commentary* (pp. 407-419).
- [24] Koolen, J. H., & Moulton, V. (2001). Maximal energy graphs. *Advances in Applied Mathematics*, 26(1), 47-52.
- [25] Li, X., Shi, Y., and Gutman, I. (2012). *Graph Energy*. Springer Science and Business Media
- [26] B. McClelland, Properties of latent roots of a matrix: The estimation of pi-electron energies, *J. Chem. Phys.* 54 (1971) 640–643.
- [27] Mróz, A. (2016). Coxeter energy of graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 506, 279-307.
- [28] Nica, A., & Speicher, R. (2006). *Lectures on the combinatorics of free probability* (Vol. 13). Cambridge University Press.
- [29] Nikiforov, V. (2011). On the sum of  $k$  largest singular values of graphs and matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 435(10), 2394-2401.
- [30] Rada, J. (2012). Bounds for the energy of normal digraphs. *Linear and Multilinear Algebra*, 60(3), 323-332.

- [31] Rada, J., & Tineo, A. (2004). Upper and lower bounds for the energy of bipartite graphs. *Journal of mathematical analysis and applications*, 289(2), 446-455.
- [32] Randic, M. (1975). Characterization of molecular branching. *Journal of the American Chemical Society*, 97(23), 6609-6615.
- [33] Tao, T. (2012). *Topics in random matrix theory (Vol. 132)*. American Mathematical Soc..
- [34] Van Dam, E., Haemers, W., Koolen, J. (2014). Regular graphs with maximal energy per vertex. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 107, 123-131.
- [35] Wiener, H. (1947). Structural determination of paraffin boiling points. *Journal of the American chemical society*, 69(1), 17-20.
- [36] Zhou, B. (2004). Energy of a graph. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*, 51, 111-118.
- [37] Bo, Z. (2000). On the spectral radius of nonnegative matrices. *Australasian Journal of Combinatorics*, 22, 301-306.
- [38] Zhou, B., Gutman, I., de la Peña, J. A., Rada, J., & Mendoza, L. (2007). On spectral moments and energy of graphs. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*, 57, 183-191.
- [39] de la Peña, J. A., & Jiménez-González, J. A. (2018). Bounds related to Coxeter spectral measures of graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 545, 32-54.