



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EXPLORANDO LA DINÁMICA DE ENERGÍA
OSCURA CON MEDICIONES COSMOLÓGICAS

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

Físico

PRESENTA:

Claudio Salomon Nahmad Arcaraz

DIRECTOR:

Axel Ricardo de La Macorra Pettersson Moriel



Ciudad Universitaria, CDMX, 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis abuelitos, los árboles que sostienen mi vida. Sara, Amparo, Pepito y Salomón. A mis padres Claudia y David, la brújula.

*A quienes están y a quienes ya se han ido.
Gracias por impulsarme a través de este laborioso e iluminador camino.*

Reconocimientos

Tomó mucho tiempo llegar aquí. Muchas horas de trabajo, lectura, detenimiento y meditación. Estrés y desorientación, inspiración, duda y esa hermosa y brevísima sensación de haber entendido algo. Todo eso y un sinfín de adjetivos que ahora florecen ante mí condensados en este librito, ¡quién diría que tanto cabe en algo tan pequeño! Dar una lista de los procesos que me ayudaron a completar este sencillo pero laborioso trabajo sería excesivo y egoísta, por eso mejor me detengo brevemente a invocar los nombres de las personas que me acompañaron. Gracias por su eterno y desinteresado apoyo, por la aceptación, la ausencia de prisa, pero la presencia constante.

Axel por la guía, las innumerables oportunidades, las tardes de pizarrón y correcciones, las mesas de discusión, talleres, referencias, ponencias, la oportunidad de aprender y enseñar lo poco que sé, por permitirme conocer este lado del universo, gracias. Al grupo de cosmología del Instituto de Física, por las nutritivas charlas, referencias y orientación alrededor de todo eso que no logro comprender, sobre todo Mariana Jaber, Andrea Muñoz, Erick Almaraz y demás personas que más que colegas han sido compañeras entrañables de viaje. A Celia Escamilla por motivar la realización de este trabajo desde un comienzo, por las muestras de apoyo tanto en el aspecto académico como en el personal, porque aunque la burocracia se niegue a aceptarlo, eres la co-tutora de este trabajo, gracias. A mis compañeros del 213-C, ¿cómo condensar tantas experiencias juntos sin la ayuda de ese numerito, 213? Sin su presencia constante, las oportunidades en el seminario estudiantil, los momentos de desmane, baile, basket y el... *café?* de la tarde, probablemente no habría habido terreno fértil -ni en la dimensión académica ni en la emocional- para la realización de este trabajo. Abraham, Alex, Gaby, Humberto, Luis, Luis Enrique, Miguel, Omar, Rodrigo, sigan rifandose.

A quienes han estado desde un inicio, ¡ya llovió! Kevin, Maureen, Jimena, Diego, Uriel, Abel, Juan, Rodrigo, Andresito, Cindy, Peterson, Ale ¡Ha estado sabroso el trayecto! están en mi cora ♡. Por tu amistad y eterno acompañamiento, gracias Pau, como diría el buen Gerald: *El camino es el destino, hermano*. A mis hermanitos Coquito y Teo, ¡qué dicha compartir una semillita más con ustedes! A mis papás y abuelitos. No tengo palabras para expresar mi gratitud. Gracias por arar la tierrita constantemente. Y a toda la gente querida que por una u otra razón no haya mencionado en esta lista, ¡gracias! y espero que mis acciones hablen más fuerte que mis palabras.

Bueno y si ya se hartaron de estas mielosas palabras, hay bastantes páginas por delante, vamos a lo que nos truje...

Parte de este trabajo fue llevado a cabo gracias al apoyo de la DGAPA a través de una beca de titulación dentro del programa PAPIIT durante el periodo 2020-1 (agosto-diciembre 2019).

Resumen

En esta tesis se presenta una propuesta de parametrización de la ecuación de estado de energía oscura w_{DE} (ecuación 3.18), la cuál llamamos $w(z)_N$ a lo largo de este trabajo, donde la N determina distintas variantes de la misma ecuación (una expansión en serie de potencias).

Se presenta una discusión generalizada del estatus actual de la cosmología moderna, así como los conceptos básicos para desarrollar el estudio del modelo estándar de la cosmología, Materia Oscura Fría con Constante Cosmológica (LCDM, Lambda Cold Dark Matter, de sus siglas en inglés). En su sección final, se describirá las observaciones empleadas a lo largo del trabajo. Además se discutirá los modelos estándares de la energía oscura parametrizada así como la nueva propuesta $w(z)_N$. Emplearemos el estudio de la inferencia estadística con la finalidad de demostrar la evidencia Bayesiana apta de la propuesta a tratar.

En particular se trabajan los casos $N=1$, $N=2$ y $N=3$ de la nueva propuesta $w(z)_N$. De esta parametrización se desprenden las siguientes observaciones: $w(z)_N$ es reducible al modelo Λ -CDM; la variante $N=1$ es equivalente a la conocida parametrización CPL (Chevallier-Polarski-Linder), sólo que escrita en otras variables; los casos $N=2$ y $N=3$ dan un mayor control sobre la dinámica de la ecuación de estado gracias a sus tres y cuatro parámetros libres, como se estudia a detalle en la sección §3.4.

Se prueba el modelo a través de un método de inferencia Bayesiana con cadenas de Markov, se utilizan datos de luminosidad de supernovas (SN), la señal de BAO y el espectro angular de potencias de temperatura del fondo de radiación cósmica (CMB); además, se probó el modelo estándar Λ -CDM y otras dos parametrizaciones importantes: CPL y Barboza-Alcaniz (BA) por completitud y para hacer las comparaciones necesarias. La combinación de datos y pruebas se aborda con detalle en el Capítulo 5.

De estas pruebas se obtuvo una variedad de resultados, de los cuales, los obtenidos con datos a tiempos tardíos (con el conjunto de datos D_1 : BAO+SN) son de nuestro mayor interés, dado que, al ser dominante la energía oscura a tiempos recientes, estos datos pueden contener mayor información sobre una posible

dinámica en w_{DE} . Por otro lado, los resultados obtenidos con el conjunto de datos D_2 : CMB+BAO+SN son complementarios, nos ayudan a ver cómo mejora nuestra propuesta al usar información en la superficie de última dispersión y si es posible robustecer sus aportaciones.

Los resultados se presentan y discuten a detalle, cualitativa y cuantitativamente en el Capítulo 5. La cantidad de información que se extrajo de los resultados es bastante amplia. De aquella discusión se desprenden las siguientes observaciones,

- I Como dinámica, la parametrización $w(z)_N$ en su variante N=1 es el mejor modelo entre los tres modelos bi-paramétricos (N=1, CPL y BA) probados con D_1 , el estimador χ^2 indica una mayor probabilidad de obtener los datos dada nuestra propuesta en su variante N=1, ligeramente por encima de CPL y BA. Esto se manifiesta inclusive desde una perspectiva estadística: hay concordancia entre los valores de χ^2 y los criterios estadísticos Akaike (AIC) y Bayesiano (BIC).
- II Desde un enfoque exclusivamente estadístico, el conjunto de datos D_1 favorece al modelo estándar Λ -CDM por encima de las otras cinco parametrizaciones, según los criterios AIC y BIC.
- III Usando el conjunto de datos D_1 se observa que la parametrización $w(z)_N$ no es restringible a partir de su variante N=3, presenta degeneración en toda la función de distribución de probabilidad.
- IV Al usar el conjunto de datos D_2 , desde una perspectiva estadística se observa una preferencia evidente por Λ -CDM. Si comparamos las tres variantes de nuestra propuesta $w(z)_N$, una variante con N pequeña es preferida por encima de N=2 y N=3.
- V La parametrización $w(z)_N$ es restringible inclusive en su variante N=3 al usar el conjunto de datos D_2 , puesto que se eliminan la mayoría de degeneraciones presentes al usar únicamente datos de BAO y Supernovas.
- VI La tensión entre Λ -CDM y otras propuestas, cuantificada con la distancia-sigma es $\sigma_{\text{distance}} < 0.3\sigma$ al usar D_1 (para todos los casos N=1,2,3) y $\sigma_{\text{distance}} < 0.8\sigma$ para todos los casos al usar D_2 .
- VII El parámetro b_0 que representa el valor de $w(z)$ al día de hoy está muy bien restringido por ambos conjunto de datos, su valor es siempre compatible, ya sea entre modelos paramétricos o con respecto a Λ -CDM.
- VIII Los parámetros intermedios b_x son restringidos por ambos conjuntos de datos, no existen degeneraciones, *i.e.* los datos son sensibles a estos parámetros.

IX El parámetro b_N tiene una degeneración en cualquier caso $N \geq 2$, es decir, la ecuación de estado en $z \rightarrow \infty$ no está bien restringida por los datos en los casos $N=2$ y $N=3$.

En concreto, si se opta por el modelo que describa mejor una posible dinámica de energía oscura, entre las tres parametrizaciones equivalentes ($N=1$, CPL y BA) la propuesta $w(z)_N$ se posiciona como el modelo con mayor evidencia a su favor.

Es necesario asumir una perspectiva estadística (criterios AIC y BIC) para comparar modelos entre sí, inclusive cuando su número de grados de libertad sea distinto. En este caso $w(z)_N$ no se ve favorecida sobre Λ -CDM, un resultado esperado dado el número alto de parámetros. De nuevo, al hacer la comparación entre modelos equivalentes, los dos criterios estadísticos favorecen a $w(z)_{N=1}$ sobre CPL y BA.

Se observa que $w(z)_N$ es compatible en todas sus variantes ($N=1,2,3$) con Λ -CDM pues presentan una tensión menor a 0.3σ (al usar D_1) y menor a 0.8σ (al usar D_2). Además, logra reproducir la evolución del factor de Hubble, la evolución de densidades y el espectro angular de temperaturas del CMB con desviaciones porcentuales menores al 2% en caso de usar D_1 y menores al 1.5% al usar el conjunto de datos D_2 .

Índice general

Índice de figuras	xv
Índice de tablas	xxiii
1. Introducción	1
1.1. Estructura de la tesis	3
2. Modelo Estándar de Cosmología	5
2.1. Métrica FLRW	6
2.2. Dinámica: ecuaciones de campo de Einstein	7
2.2.1. Geometría ($G_{\mu\nu}$)	7
2.2.2. Energía ($T_{\mu\nu}$)	8
2.3. Ecuaciones de Friedmann	10
2.4. Densidad Crítica y Parámetro de Densidad	11
2.5. El contenido cósmico	12
2.6. Distancia en Cosmología	17
2.6.1. Distancia Comóvil (χ)	18
2.6.2. Distancia Lumínica (d_L)	19
2.6.3. Distancia Angular (d_A)	19
2.7. Observaciones Cosmológicas	20
2.7.1. Radiación Cósmica de Fondo (CMB)	21
2.7.2. Oscilaciones Acústicas de Bariones (BAO)	25
2.7.3. Supernovas (SN)	31
2.8. El modelo Λ -CDM	33
3. Energía Oscura y propuesta $w(z)_N$.	37
3.1. Expansión acelerada del universo	37
3.2. Motivación	37
3.3. Parametrizando la Ecuación de Estado	40
3.3.1. Λ -CDM	42
3.3.2. Chevallier-Polarski-Linder (CPL)	42
3.3.3. Barboza-Alcaniz (BA)	42
3.4. Parametrización $w(z)_N$	43

ÍNDICE GENERAL

3.4.1.	Recuperando Λ -CDM con $w(z)_{N=1}$	44
3.4.2.	Analogía CPL - $w(z)_{N=1}$	44
3.4.3.	Fenomenología	45
3.4.3.1.	Parámetros extremo (b_0, b_N)	45
3.4.3.2.	Parámetros intermedios (b_x)	46
3.4.3.3.	El plano $b_0 - b_n$	47
3.4.3.4.	Caso $w(z)_{N=1}$	49
3.4.3.5.	Caso $w(z)_{N=2}$	50
3.4.3.6.	Caso $w(z)_{N=3}$	51
4.	Estadística Cosmológica para Energía Oscura	55
4.1.	Motivación: Inferencia Bayesiana	56
4.2.	Estimación de parámetros cosmológicos con muestreo Monte Carlo	58
4.2.1.	El código CLASS	59
4.2.2.	El código MONTE PYTHON	60
4.3.	Encuestas Astrofísicas/Cosmológicas	61
4.3.1.	Supernovas Tipo Ia (SN)	61
4.3.2.	Oscilaciones Acústicas de Bariones (BAO)	61
4.3.3.	Radiación Cósmica de Fondo (CMB)	62
4.4.	Metodología	62
4.4.1.	Conjuntos de datos (D)	62
4.4.2.	Espacio de parámetros (Θ)	63
4.4.3.	Estimador χ^2 y criterios AIC, BIC	64
4.4.4.	Otros parámetros	65
5.	Resultados	67
5.1.	Modelos (I)	67
5.2.	Priors.	67
5.3.	Escenarios a tiempos tardíos (D_1 : BAO+SN).	69
5.3.1.	Caso $w(z)_{N=1}$	70
5.3.2.	Caso $w(z)_{N=2}$	71
5.3.3.	Caso $w(z)_{N=3}$	73
5.3.4.	Caso Λ -CDM	73
5.3.5.	Caso CPL	73
5.3.6.	Caso BA	74
5.3.7.	Discusión, resultados generales.	74
5.4.	Escenarios a tiempos tempranos (D_2 : CMB+BAO+SN).	77
5.4.1.	Caso $w(z)_{N=1}$	78
5.4.2.	Caso $w(z)_{N=2}$	80
5.4.3.	Caso $w(z)_{N=3}$	81
5.4.4.	Caso Λ -CDM	81
5.4.5.	Discusión, resultados generales.	81
5.5.	Constricciones a los modelos	88

6. Conclusiones y Perspectivas	97
6.1. Conclusiones	97
6.2. Perspectivas	99
A. Métrica FLRW	101
A.1. Geometría del espacio-tiempo cosmológico	101
A.2. El parámetro de Hubble	105
A.3. Elección de coordenadas y corrimiento al rojo (z)	108
B. La distancia lumínica	113
B.1. Definición	113
B.2. Una clasificación adimensional: La Magnitud	114
C. Inferencia Estadística	117
C.1. Probabilidad	117
C.2. Teorema de Bayes	118
D. Gráficas	121
E. Detalles Técnicos	143
E.1. Sobre Cadenas de Markov	143
E.1.1. Criterio de Convergencia	144
E.1.2. Mezcla de cadenas	145
E.2. Reproducibilidad de mis resultados	147
Bibliografía	151

Índice de figuras

2.1.	Descomposición del tensor energía-momento en: el escalar T_{00} ; los vectores T_{i0} , T_{0j} ; y el tensor T_{ij} . Inspirada en: http://en.wikipedia.org/wiki/Perfect_fluid y (Baumann, 2010, p. 19)	9
2.2.	Dos representaciones (en $a(t)$ y en z) de la evolución del parámetro de densidad en un Universo compuesto por radiación, materia y constante cosmológica. En ambas gráficas el día de hoy se encuentra hacia el centro de la página (<i>i.e.</i> $a = 1$ y $z = 0$). Notemos cómo la constante cosmológica (Λ) domina sólo hasta épocas muy recientes.	12
2.3.	Contenido energético del Universo al día de hoy según las observaciones de la misión Planck 2013. <i>i.e.</i> $\Omega_\Lambda = 0.683$, $\Omega_{cdm} = 0.268$ y $\Omega_b = 0.049$. Los valores reportados por la misión Planck más reciente (2018) son $\Omega_\Lambda = 0.6889$ y $\Omega_m = 0.3111$ para el nivel de confianza de 68 %. Fuente de la imagen: http://sci.esa.int/science-e-media/img/65/Planck_Cosmic%20recipe%20pie%20chart_orig.jpg	13
2.4.	La historia térmica del Universo muestra, a grandes rasgos, dos importantes épocas de equivalencia: radiación=materia y materia=energía oscura. En el eje 'x' las escalas de tiempo y temperatura y en el eje 'y' el porcentaje de densidad energética por fluido por tiempo. Tomado de (Baumann, 2010).	14
2.5.	El modelo estándar de las partículas elementales nos permite estudiar los diferentes fluidos que constituyen el universo, conociendo sus propiedades físicas podemos reconstruir ciertas épocas en la historia del mismo. Fuente: https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_Model	16
2.6.	Representación del cono de luz pasado y su intersección con la superficie de última dispersión en $z \approx 1100$	21
2.7.	El valor de ℓ define un número de modos de oscilación sobre la esfera. Cuando $m = 0$ estas oscilaciones se encuentran a lo largo del ángulo azimutal ϕ . Se muestran los casos Y_{10} , Y_{20} y Y_{30}	22
2.8.	Cuando $m = \ell$ entonces todas las oscilaciones se encuentran a lo largo del ángulo polar θ . El caso trivial Y_{00} es una esfera sin oscilaciones. Aquí se muestran los casos Y_{11} , Y_{22} , Y_{33} y Y_{44}	23

ÍNDICE DE FIGURAS

- 2.9. Una forma de ver la correspondencia entre ℓ y θ_λ es observando que ℓ subdivide a la esfera en un número entero de longitudes de onda λ . Aquí se muestran los casos Y_{55} , Y_{99} , Y_{1212} y Y_{1616} . El ángulo θ_λ se puede definir como la distancia que subtiende una sólo oscilación de la onda. 24
- 2.10. El mapa de temperaturas del CMB es el promedio de las contribuciones de todas las anisotropías medidas sobre distintos valores del multipolo ℓ 25
- 2.11. Espectro angular de temperaturas del CMB, la línea verde representa el cálculo teórico basado en el modelo Λ -CDM, mientras que los puntos son las mediciones (binned) hechas por Planck 2015. Notemos el primer pico acústico alrededor de 1° y los subsecuentes armónicos (se distinguen cinco o seis) a escalas angulares más pequeñas. Notemos también que hacia escalas angulares grandes (ℓ 's pequeñas), las barras de error crecen notablemente y a su vez la línea verde muestra una dispersión, esto tiene que ver con la varianza cósmica. 26
- 2.12. Evolución de una perturbación esférica de densidad. Comenzando del lado superior izquierdo, la perturbación inicial se encuentra en el origen, la mayor parte del contenido energético en forma de materia o radiación estaba dentro de la perturbación original. Notemos cómo la radiación (photon) y la materia bariónica (gas) están acopladas. Esta perturbación se propaga externamente a la velocidad del sonido c_s , arrastrando tanto fotones como bariones (superior derecha). Durante la recombinación los fotones empiezan a fugarse del plasma, reduciendo la interacción $e^- \leftrightarrow \gamma$ (centro izquierda). Y para cuando la recombinación ha finalizado y el universo es neutro, los fotones se desacoplan del plasma, dejando una sobredensidad bariónica alrededor de los 150 Mpc, mientras estos (γ) se diluyen (centro derecha). A lo largo de todo este tiempo la sobredensidad del origen sólo estuvo compuesta por materia oscura, ya que esta es inmune a la presión de los fotones. Cuando sucede el desacople quedan entonces dos sobredensidades: una de materia oscura en el origen y otra de bariones en un radio acústico de 150 Mpc. A medida que pasa el tiempo la materia oscura empieza a atraer materia bariónica hacia la perturbación central y visceversa (inferior izquierda). Para finalmente obtener un perfil como en la esquina inferior derecha: una sobredensidad central y un pequeño pico a 150 Mpc. Imagen tomada de (Bassett and Hložek, 2009). 29
- 2.13. Función de correlación de dos puntos ξ vs separación comovil en una distribución de galaxias LRG's. Se observa cómo la función de correlación decae hacia el cero, sin embargo, alrededor de una distancia comovil de 100 Mpc se detecta un pico en la función. Este es el pico acústico de bariones (Baryon Acoustic Peak): confirmación de la existencia de la onda característica que salió congelada del CMB y sobre la cuál se forman y aglomeran las galaxias. Las líneas verde (superior), roja y azul representan la función de correlación calculada teóricamente para valores de $\omega_m = \Omega_m h^2 = 0.12$, $\omega_m = 0.13$ y $\omega_m = 0.14$ con $\omega_b = \Omega_b h^2 = 0.024$. Mientras que la línea violeta (inferior) representa un modelo CDM sin bariones $\omega_m = 0.105$, por ello el pico no está presente. Imagen tomada de (Eisenstein et al., 2005). 30

2.14. En un análisis de la distribución espacial de galaxias como el hecho en análisis de BAO es posible medir los modos radial ($r_{ }$) y tangencial (r_{\perp}) del tamaño de BAO. El primero permite conocer la distancia angular diametral d_A y el segundo, conociendo la diferencia de redshifts dz , permite conocer el parámetro de Hubble $H(z)$. En el caso de BAO estas cantidades (d_A y $H(z)$) se pueden conocer de manera independiente, reforzando el poder de restricción con respecto de otro tipo de datos cosmológicos. Imagen inspirada en una similar de (Bassett and Hložek, 2009).	31
2.15. Curvas de luminosidad de distintos tipos de supernova.	33
2.16. Correcciones de color y stretch sobre curvas de luminosidad de SN tipo Ia.	33
2.17. Variación en el espectro angular de temperaturas al cambiar el valor de ω_b y de ω_c , respectivamente. Notemos que en el primer caso se modifica la amplitud del primer pico acústico, mientras que en el segundo se da además un fenómeno de corrimiento, nótese también que el aumento de materia oscura amortigua los picos acústicos. Tomado de (Hu, 2008).	35
2.18. Variación en el espectro angular de temperaturas al cambiar los valores de Ω_T , Ω_{Λ} y w_{DE} , respectivamente. La variación de Ω_T es directamente proporcional a un cambio en la curvatura, por ello se observa un desplazamiento del espectro completo hacia escalas angulares más pequeñas a medida que $\Omega_T \rightarrow 0$. A su vez, el efecto más notable al cambiar la proporción de energía oscura es el “levantamiento” en el <i>frente</i> del espectro de temperaturas (para ℓ 's pequeñas). Por otro lado, la ecuación de estado aumenta la amplitud del espectro entre $2 < \ell < 200$ cuando $w \rightarrow 0$ (<i>i.e.</i> cuando la energía oscura se comporta como materia), pero dicho efecto se vuelve despreciable a medida que $w \rightarrow -1$. Tomado de (Hu, 2008).	35
3.1. Modulo de la distancia vs redshift para la colección completa de supernovas Ia de (Riess et al., 1998). Suponiendo candelas estandarizables y haciendo las correcciones necesarias, las observaciones apuntan fuertemente a un universo con densidad de constante cosmológica positiva.	38
3.2. Evolución de la ecuación de estado $w(z)_{N=1}$ con b_0 fijo y para distintos valores de b_1 . Del lado izquierdo se muestra la ecuación de estado a lo largo del intervalo $a \in [1, 0]$, que corresponde al intervalo $z \in [0, \infty)$. Del lado derecho se muestra un “acercamiento” de la misma ecuación, pero ahora a lo largo del intervalo $z \in [0, 5]$	45
3.3. Plano $w_0 - w_1$ del modelo BA. Las zonas color azul y amarillo representan modelos completamente quintaesencia o fantasma, respectivamente. Las zonas color rojo y verde hacen referencia a los casos I y II, respectivamente y las zonas en color blanco son aquellos modelos que oscilan entre campo quintaesencia y campo fantasma a lo largo del tiempo. Nótese cómo el punto de contacto entre campos tipo quintaesencia y tipo fantasma ($w_0 = -1, w_1 = 0$) es el punto donde se recupera Λ -CDM. Adaptado de (Barboza and Alcaniz, 2008).	48
3.4. Evolución de $w(z)_{N=1}$ al dejar fijo el parámetro b_0 y cambiar el valor de b_1	49

ÍNDICE DE FIGURAS

3.5.	Plano $b_0 - b_1$ del modelo $w(z)_{N=1}$, a diferencia del modelo BA, sólo puntos sobre la diagonal son completamente quintaesencia $b_0 = b_1 \in (-1, 1)$ o completamente fantasma $b_0 = b_1 \in (-1, -\infty)$. Las zonas en color blanco son modelos que oscilan entre campo quintaesencia y campo fantasma a lo largo de z . Al igual que en el caso anterior, la zona de contacto entre quintaesencia y fantasma, el punto $b_0 = b_1 = -1$ es donde se recupera al modelo Λ -CDM.	49
3.6.	Evolución de $w(z)_{N=2}$ al dejar fijos los extremos: b_0 y b_2 y variando el parámetro intermedio b_1	50
3.7.	Evolución de $w(z)_{N=2}$ al dejar fijo tanto el parámetro b_0 como b_1 , variando el parámetro b_2	50
3.8.	Plano $b_0 - b_1$ del modelo $w(z)_{N=2}$ con $b_2 = -1$. Las líneas punteadas marcan el punto donde se recupera Λ -CDM: $(b_0 = b_2 = -1, b_1 = -2)$	51
3.9.	Evolución de $w(z)_{N=3}$ fijando: b_0, b_1 y b_2 y variando el extremo b_3	51
3.10.	Evolución de $w(z)_{N=3}$ fijando: b_0, b_1 y b_3 y variando el parámetro b_2	52
3.11.	Evolución de $w(z)_{N=3}$ fijando: b_0, b_2 y b_3 y variando el parámetro b_1	52
5.1.	Gráfica de la ecuación de estado de a) dos variantes de la parametrización $w(z)_N$, b) las parametrizaciones CPL y BA y c) el modelo estándar Λ -CDM. Las graficas corresponden a los valores del mejor ajuste (best fit) derivado de un análisis MonteCarlo de dichos modelos usando datos de BAO y Supernovas.	70
5.2.	Comparación de resultados entre modelos $w(z)_{N=1}$, $w(z)_{N=2}$, CPL, BA y Λ -CDM usando datos de BAO+SN (D_1).	75
5.3.	Gráfica de la ecuación de estado de las tres variantes de la parametrización $w(z)_N$ ($N=1,2,3$) y el modelo Λ -CDM. Las graficas corresponden a los valores del mejor ajuste (best fit) derivado de un análisis MonteCarlo de dichos modelos usando datos de CMB, BAO y Supernovas.	78
5.4.	Comparación de resultados entre modelos $w(z)_{N=1}$, $w(z)_{N=2}$, $w(z)_{N=3}$ y Λ -CDM usando datos de CMB+BAO+SN (D_2). Se muestra el parámetro b_0 más no los parámetros intermedios b_x ni b_N pues la nomenclatura se intersecta para distintos casos (<i>e.g.</i> $b_N = b_2$ para $N=2$ pero b_2 es parámetro intermedio en $N=3$). Para consultar resultados individuales ($N=1,2,3$) pasar al apéndice de gráficas.	83
5.5.	El plano $b_0 - b_1$ para el modelo $N=1$. Las líneas punteadas representan los valores necesarios para recuperar el modelo estándar. En ambos casos Λ -CDM está contenido dentro del intervalo de confianza 1σ . No muestra una tendencia clara hacia un modelo tipo quintaesencia o tipo fantasma, sino uno que oscila entre ambas formas de campo escalar.	84
5.6.	El plano $b_0 - b_n$ para el modelo $N=2$. Las líneas punteadas representan los valores necesarios para recuperar el modelo estándar. En ambos casos (BAO+SN) y (CMB+BAO+SN), Λ -CDM se encuentra dentro del intervalo de confianza del 68%. Del lado izquierdo notamos una tendencia hacia un modelo tipo quintaesencia, mientras que el resultado del lado derecho no es concluyente ya que el parámetro b_2 tiene una degeneración.	84

5.7. El plano $b_0 - b_n$ para el modelo $N=3$. Las líneas punteadas representan los valores necesarios para recuperar el modelo estándar. En ambos casos (BAO+SN) y (CMB+BAO+SN), Λ -CDM se encuentra dentro del intervalo de confianza del 68 %.	85
5.8. Comparación de resultados entre conjunto de datos D_1 (contornos verdes) y D_2 (contornos azules) para la parametrización $w(z)_{N=1}$.	86
5.9. Comparación de resultados entre conjunto de datos D_1 (contornos azules) y D_2 (contornos amarillos) para la parametrización $w(z)_{N=2}$.	86
5.10. Comparación de resultados entre conjunto de datos D_1 (contornos grises) y D_2 (contornos verdes) para la parametrización $w(z)_{N=3}$.	87
5.11. Evolución de las densidades de radiación, materia y energía oscura dentro de los modelos $w(z)_{N=1}$, $w(z)_{N=2}$ y Λ -CDM. Según los best-fits obtenidos al correr con el conjunto de datos D_1 : BAO+SN.	89
5.12. Evolución de las densidades de radiación, materia y energía oscura dentro de los modelos $w(z)_{N=1}$, $w(z)_{N=2}$ y Λ -CDM. Acercamiento a z 's cercanas.	90
5.13. Evolución de las densidades de radiación, materia y energía oscura dentro de las parametrizaciones dos-dimensionales $w(z)_{N=1}$, CPL y BA. Según los best-fits obtenidos al correr con el conjunto de datos D_1 : BAO+SN.	90
5.14. Evolución de las densidades de radiación, materia y energía oscura dentro de las parametrizaciones dos-dimensionales $w(z)_{N=1}$, CPL y BA. Acercamiento a z 's cercanas.	91
5.15. Evolución de las densidades de radiación, materia y energía oscura dentro de los modelos $w(z)_{N=1}$, $w(z)_{N=2}$, $w(z)_{N=3}$ y Λ -CDM. Según los best-fits obtenidos al correr con el conjunto de datos D_2 : CMB+BAO+SN.	91
5.16. Evolución de las densidades de radiación, materia y energía oscura dentro de los modelos $w(z)_{N=1}$, $w(z)_{N=2}$, $w(z)_{N=3}$ y Λ -CDM. Acercamiento a z 's cercanas.	92
5.17. Evolución del parámetro de Hubble conforme $(H(z)/(1+z))$. Se comparan en esta gráfica los casos $N=1$ y $N=2$ de $w(z)_N$ según los best-fits obtenidos al correr con datos de BAO+SN. En el recuadro inferior se muestra la diferencia porcentual con respecto al modelo estándar Λ -CDM.	93
5.18. Evolución del parámetro de Hubble conforme $(H(z)/(1+z))$. Se comparan en esta gráfica las parametrizaciones dos-dimensionales $w(z)_{N=1}$, CPL y BA según los best-fits obtenidos al correr con datos de BAO+SN. En el recuadro inferior se muestra la diferencia porcentual con respecto al modelo estándar Λ -CDM.	94
5.19. Evolución del parámetro de Hubble conforme $(H(z)/(1+z))$. Se comparan en esta gráfica los casos $N=1$, $N=2$ y $N=3$ de $w(z)_N$ además del modelo estándar, según los best-fits obtenidos al correr con datos de BAO+SN. En el recuadro inferior se muestra la diferencia porcentual con respecto al modelo estándar Λ -CDM.	95

ÍNDICE DE FIGURAS

5.20.	Espectro de potencias de temperatura calculado según los best-fits de los modelos $w(z)_{N=1}$, $w(z)_{N=2}$, $w(z)_{N=3}$ y Λ -CDM al correr con el conjunto de datos D_2 : CMB+BAO+SN. Se muestra también el espectro de potencias de temperatura medido por el experimento Planck 2015, con sus respectivas barras de error. Se muestran tres gráficas: los D_ℓ^{TT} calculados y medidos en la primera fila, la diferencia porcentual con respecto a Λ -CDM con enfoque a la magnitud de las barras de error en la segunda fila y finalmente la diferencia porcentual pero resaltando las desviaciones en el espectro con respecto al modelo estándar.	96
A.1.	Un 3-espacio con curvatura positiva constante es la 3-esfera, a este universo se le llama cerrado y tiene la peculiaridad de contener líneas de mundo cerradas. Se muestra aquí una 2-esfera S^2 como referencia.	105
A.2.	Un 3-espacio con curvatura negativa constante puede ser el hiperboloide H^3 , a este universo se le llama abierto pues se extiende indefinidamente. Se muestra aquí un hiperboloide 2-dimensional H^2 como referencia.	106
A.3.	El 3-espacio con curvatura cero más sencillo es el espacio Euclideo 3-dimensional \mathbb{R}^3 , a este universo se le llama plano .	107
A.4.	La distancia <i>comovil</i> $d(P_1, P_2)/a(t)$ entre puntos permanece constante a medida que el universo se expande, sin embargo, la distancia <i>física</i> sí toma en cuenta los efectos de la expansión, pues es proporcional al factor de escala.	108
B.1.	Una fuente emite una luminosidad absoluta L_s , mientras que un observador centrado en $\chi = 0$ y $z = 0$ mide una luminosidad relativa L_0 . La distancia lumínica está determinada por el cociente de ambas.	114
B.2.	La equivalencia entre las dos representaciones debe ser clara: en (a) el campo tiene magnitud constante e igual en todas direcciones. El flujo a través de esferas de radio r disminuye conforme r crece, <i>i.e.</i> el “número” de vectores que atraviesan áreas iguales es cada vez menor. Por el otro lado, en (b) podemos ver cómo la luminosidad (representada por la intensidad del color) va decayendo conforme nos encontremos en cáscaras más alejados de la fuente. El flujo decae con la distancia	115
B.3.	Flujo de una fuente puntual a través de cáscaras esféricas concéntricas, se observa una disminución del flujo por unidad de área en capas consecutivas.	116
D.1.	Distribución posterior de probabilidad, modelo Λ -CDM probado con datos de BAO y SN.	122
D.2.	Distribución Posterior de probabilidad del modelo Λ -CDM, probado con datos de BAO y SN. El espacio de parámetros (incluido el parámetros derivado H_0) es de dimensión 4: $\Theta = (\omega_b, \omega_{cdm}, \Omega_{DE}, H_0)$	123
D.3.	Distribución posterior de probabilidad, modelo $w(z)_{N=1}$ probado con datos de BAO y SN.	124

D.4.	Distribución Posterior de probabilidad del modelo $w(z)_{N=1}$, probado con datos de BAO y SN. El espacio de parámetros (incluido el parámetros derivado H_0) es de dimensión 6: $\Theta = (\omega_b, \omega_{cdm}, b_0, b_1, \Omega_{DE}, H_0)$	125
D.5.	Distribución posterior de probabilidad, modelo $w(z)_{N=2}$ probado con datos de BAO y SN.	126
D.6.	Distribución Posterior de probabilidad del modelo $w(z)_{N=2}$, probado con datos de BAO y SN. El espacio de parámetros (incluido el parámetros derivado H_0) es de dimensión 6: $\Theta = (\omega_b, \omega_{cdm}, b_0, b_1, b_2, \Omega_{DE}, H_0)$	127
D.7.	Distribución posterior de probabilidad, modelo $w(z)_{N=3}$ probado con datos de BAO y SN.	128
D.8.	Distribución Posterior de probabilidad del modelo $w(z)_{N=3}$, probado con datos de BAO y SN. El espacio de parámetros (incluido el parámetros derivado H_0) es de dimensión 6: $\Theta = (\omega_b, \omega_{cdm}, b_0, b_1, b_2, b_3, \Omega_{DE}, H_0)$	129
D.9.	Distribución posterior de probabilidad, modelo CPL probado con datos de BAO y SN.	130
D.10.	Distribución Posterior de probabilidad de la parametrización CPL, probada con datos de BAO y SN. El espacio de parámetros (incluido el parámetros derivado H_0) es de dimensión 6: $\Theta = (\omega_b, \omega_{cdm}, w_0, w_1, \Omega_{DE}, H_0)$	131
D.11.	Distribución posterior de probabilidad, modelo BA probado con datos de BAO y SN.	132
D.12.	Distribución Posterior de probabilidad de la parametrización BA, probada con datos de BAO y SN. El espacio de parámetros (incluido el parámetros derivado H_0) es de dimensión 6: $\Theta = (\omega_b, \omega_{cdm}, w_0, w_1, \Omega_{DE}, H_0)$	133
D.13.	Distribución posterior de probabilidad, modelo Λ -CDM probado con datos de CMB, BAO y SN.	134
D.14.	Distribución Posterior de probabilidad del modelo Λ -CDM, probado con datos de CMB, BAO y SN. El espacio de parámetros (incluidos los parámetros derivados) es de dimensión 9: $\Theta = (\omega_b, \omega_{cdm}, A_s, n_s, \tau_{reio}, \Omega_{DE}, z_{reio}, H_0, \sigma_8)$.	135
D.15.	Distribución posterior de probabilidad, modelo $w(z)_{N=1}$ probado con datos de CMB, BAO y SN.	136
D.16.	Distribución Posterior de probabilidad del modelo $w(z)_{N=1}$, probado con datos de CMB, BAO y SN. El espacio de parámetros (incluidos los parámetros derivados) es de dimensión 11: $\Theta = (\omega_b, \omega_{cdm}, A_s, n_s, \tau_{reio}, b_0, b_1, \Omega_{DE}, z_{reio}, H_0, \sigma_8)$	137
D.17.	Distribución posterior de probabilidad, modelo $w(z)_{N=2}$ probado con datos de CMB, BAO y SN.	138
D.18.	Distribución Posterior de probabilidad del modelo $w(z)_{N=2}$, probado con datos de CMB, BAO y SN. El espacio de parámetros (incluidos los parámetros derivados) es de dimensión 13: $\Theta = (\omega_b, \omega_{cdm}, \Omega_{DE}, \Omega_m, b_0, b_1, b_2, A_s, n_s, \tau_{reio}, z_{reio}, H_0, \sigma_8)$	139
D.19.	Distribución posterior de probabilidad, modelo $w(z)_{N=3}$ probado con datos de CMB, BAO y SN.	140
D.20.	Distribución Posterior de probabilidad del modelo $w(z)_{N=3}$, probado con datos de CMB, BAO y SN. El espacio de parámetros (incluidos los parámetros derivados) es de dimensión 14: $\Theta = (\omega_b, \omega_{cdm}, \Omega_{DE}, \Omega_m, b_0, b_1, b_2, b_3, A_s, n_s, \tau_{reio}, z_{reio}, H_0, \sigma_8)$	141

ÍNDICE DE FIGURAS

- E.1. Ejemplos de corridas donde las gráficas muestran una aparente falta de convergencia y una aparente convergencia. Aunque a posteriori se sabe (por un análisis de los parámetros estadísticos de convergencia y aceptación) que la primera (a) no logró converger mientras que la segunda (b) alcanzó un excelente criterio de convergencia, sustentarse exclusivamente en un análisis visual de las gráficas puede llevar a errores de interpretación. 144
- E.2. Una cadena con *mala mezcla*, obsérvese por ejemplo el parámetro H_0 cómo comienza con una exploración aparentemente densa para después transicionar a una exploración desordenada y dispersa de su intervalo de exploración. Se observa un comportamiento similar en los demás parámetros. 148
- E.3. Una cadena con *buena mezcla*, obsérvese cómo después de una evidente fase de burn-in, las cadenas abarcan llenan densamente el intervalo de exploración de cada parámetro. 149

Índice de tablas

4.1.	Datos finales de $D_M(z)$ y $H(z)$ de BAO usados en este trabajo, reportados en (Alam et al., 2016).	61
5.1.	Mejores ajustes (best fit) y cotas de confianza del 68 % (1σ) para la parametrización en sus tres versiones $w(z)_{N=1,2,3}$, derivados de un análisis MonteCarlo usando la señal de BAO (Alam et al., 2016) y mediciones de distancia con Supernovas Ia (Betoule et al., 2014). Se muestran los parámetros explorados y posteriormente un parámetro derivado (H_0). Se reporta el estimador χ^2 y dos criterios de información: Akaike y Bayesiano. Valores de χ^2 redondeados a la 3a cifra significativa. En el caso $w(z)_{N=3}$ no se alcanzó convergencia en las cadenas, por ello no se reporta el estimador ni los criterios de información.	71
5.2.	Mejores ajustes (best fit) y cotas de confianza del 68 % (1σ) para el modelo Λ -CDM y las parametrizaciones CPL y Barboza-Alcaniz, derivados de un análisis MonteCarlo usando la señal de BAO (Alam et al., 2016) y mediciones de distancia con Supernovas Ia (Betoule et al., 2014). Se muestran los parámetros explorados y posteriormente un parámetro derivado (H_0). Se reporta el estimador χ^2 y dos criterios de información: Akaike y Bayesiano. Valores de χ^2 redondeados a la 3a cifra significativa.	72
5.3.	Distancia sigma entre el modelo <i>base</i> Λ -CDM y los demás modelos probados con el conjunto de datos D_1 . Redondeado a la cuarta cifra significativa. . . .	76
5.4.	Δ BIC para todos los modelos probados con D_1 . La preferencia por el modelo Λ -CDM sobre los demás es muy fuerte bajo este criterio.	76
5.5.	Δ BIC para los modelos con dos parámetros libres (N=1, CPL y BA). Bajo este criterio, los modelos candidato CPL y BA son casi tan buenos como N=1.	77
5.6.	Mejores ajustes (best fit) y cotas de confianza del 68 % (1σ) para la parametrización en sus tres versiones $w(z)_{N=1,2,3}$, derivados de un análisis MonteCarlo usando el espectro de temperaturas del CMB + datos de polarización en los multipolos bajos (Ade et al., 2016b); la señal de BAO (Alam et al., 2016) y mediciones de distancia con Supernovas Ia (Betoule et al., 2014). Se muestran los parámetros explorados y posteriormente cuatro parámetros derivados. Se reporta el estimador χ^2 y dos criterios de información: Akaike y Bayesiano. Valores de χ^2 redondeados a la 3a cifra significativa.	79

5.7.	Mejores ajustes (best fit) y cotas de confianza del 68% (1σ) para el modelos estándar Λ -CDM derivados de un análisis MonteCarlo usando el espectro de temperaturas del CMB + datos de polarización en los multipolos bajos (Ade et al., 2016b); la señal de BAO (Alam et al., 2016) y mediciones de distancia con Supernovas Ia (Betoule et al., 2014). Se muestran los parámetros explorados y posteriormente cuatro parámetros derivados. Se reporta el estimador χ^2 y dos criterios de información: Akaike y Bayesiano. Valores de χ^2 redondeados a la 3a cifra significativa.	80
5.8.	Distancia sigma entre el modelo <i>base</i> Λ -CDM y los demás modelos probados con el conjunto de datos $D_2 = \text{CMB} + \text{BAO} + \text{SN}$. Redondeado a la cuarta cifra significativa.	87
5.9.	ΔBIC para todos los modelos probados con D_2 . La preferencia por el modelo Λ -CDM sobre los demás es muy fuerte bajo este criterio.	88
5.10.	ΔBIC para variantes del modelo $w(z)_N$. Hay una evidencia muy fuerte a favor del modelo $N=1$, descartando a sus contrapartes $N=2,3$	88
E.1.	Criterio de convergencia $\hat{R}-1$ (promediado sobre todos los parámetros) y tasa de aceptación (Acc. rate) (promediada sobre todas las cadenas de una misma corrida) de todos los modelos probados en este trabajo. Los valores de $R-1$, redondeados en la sexta cifra significativa. Se observa que en todos los casos excepto $N=3$ con D_1 se cumple $\hat{R}-1 < 0.01$ y $0.15 < \text{acc rate} < 0.35$, excepto $N=1$ con D_2 , que tiene una mezcla ligeramente menor a la esperada.	147
E.2.	Parámetros de las corridas exitosas MCMC implementadas con MONTEPYTHON 3.1, todas las corridas se ejecutaron con openmpi v. 3.3.1 y a menos que lo especifique, la mayoría de cadenas se obtuvieron usando un jumping factor dinámico a través de la opción <i>-superupdate</i> de MP.	150

Capítulo 1

Introducción

Al día de hoy se sabe que existen al menos cuatro interacciones fundamentales, a las cuales pueden reducirse la gran parte de los fenómenos físicos observables y de las cuales, la electromagnética, la nuclear fuerte y la nuclear débil son descritas por el Modelo Estándar de la Física de Partículas (ME) a través de teorías cuánticas de campos.

Sin embargo, hasta ahora ha sido imposible dar una explicación de la interacción gravitacional a través del marco teórico del Modelo Estándar. El razonamiento más exitoso, tanto teórico como experimentalmente es la Teoría de la Relatividad General (RG) postulada a principios del siglo XX, la cual no sólo replica la gravedad Newtoniana en el límite *local* de velocidades, sino que logra describir con precisión casos de gran curvatura espacio-temporal o movimientos a velocidad cercana a la velocidad de la luz.

Tanto el Modelo Estándar como la Relatividad General han sido probados exhaustivamente desde su formulación en 1967 y 1917, respectivamente. Los últimos descubrimientos en materia de altas energías y gravitación: la confirmación de existencia del bosón de Higgs en el LHC (Gran Colisionador de Hadrones) en 2012 (Aad et al., 2012) (Chatrchyan et al., 2012) y la detección de ondas gravitacionales en los interferómetros LIGO y Virgo en 2016 (Abbott et al., 2016) son de gran relevancia, pero sobre todo, son prueba de que el Modelo Estándar y la Relatividad General son, hasta ahora, la piedra angular de la Física Moderna y las teorías con mayor capacidad predictiva de los últimos años.

A inicios del siglo XX en 1919, Arthur Eddington hace la primera confirmación de la Teoría RG al confirmar la predicción de que los rayos de luz se *curvan* al pasar cerca de fuentes de gravitación, se observó la desviación de los rayos de luz del Sol durante un eclipse total. Esta confirmación validó el trabajo que se estaba haciendo (o estaba por hacerse) en el campo de la cosmología física: la extensión de la relatividad general a escalas cosmológicas. El primer modelo cosmológico fue propuesto por Einstein y hacía uso de una constante cosmológica Λ para mantener en un equilibrio estático al Universo, esta idea de un Universo estático estaba basada más bien en prejuicios filosóficos, más nunca había sido

1. INTRODUCCIÓN

formalmente confirmada o refutada.

En la década de los 20's, E. Hubble descubre que el Universo está creciendo lo cuál resulta en una constante cosmológica innecesaria. Desde ese entonces y hasta la década de los 80's, el modelo cosmológico fue el conformado por las propuestas de Friedmann, Lemaitre, Robertson y Walker, que en pocas palabras podría explicarse como: un universo que a gran escala es homogéneo e isotrópico, es decir, es independiente del observador (una extensión del principio Copernicano) y es igual en todas direcciones y que surge de una singularidad: el big bang o Gran Explosión.

En 1933, F. Zwicky estimó la masa total del cúmulo basándose en los movimientos de las galaxias cercanas a su borde. Cuando comparó esta masa estimada con la estimación del número de galaxias y con el brillo total del cúmulo, encontró que había unas 400 veces más masa de la esperada. La gravedad de las galaxias visibles en el cúmulo era muy poca para tal velocidad orbital, por lo que se necesita mucha más. Esto se conoce como el "problema de la masa desaparecida". Basándose en estas conclusiones, Zwicky dedujo que tendría que haber alguna forma de "materia no visible" (que no interactúa a través de la fuerza electromagnética), pero que sí interactúa gravitacionalmente con la materia, que proporcionaría suficiente masa y gravedad constituyendo todo el cúmulo. En este trabajo no hablaremos de esa forma exótica de materia, pero sí debe ser incluida en nuestro modelo cosmológico.

En la década de los 60's, se realiza la primera observación del fondo cósmico de microondas, revelando que el Universo es completamente homogéneo al menos hasta hasta sus 300 mil años de edad. Sin embargo, plantea un nuevo problema: el big bang no es capaz de explicar esa fuerte homogeneidad; es necesario buscar una nueva propuesta y es durante la década de los 80's cuando se propone el mecanismo de inflación: un mecanismo físico que resolvería el problema de homogeneidad y a su vez dejando las semillas de densidad y temperatura que eventualmente darían lugar a las galaxias y estructuras que vemos hoy en nuestro Universo.

En 1998, dos grupos independientes de científicos ([Riess et al., 1998](#)), ([Perlmutter et al., 1999](#)) descubrieron otro fenómeno importantísimo: el Universo está creciendo **aceleradamente**. Al observar supernovas distantes (que son explosiones estelares muy brillantes) y analizar sus distancias, descubrieron que un Universo únicamente compuesto por materia ordinaria, materia oscura y radiación es incapaz de describir las distancias que habían medido; era necesario que el Universo estuviera creciendo aceleradamente para describir correctamente esas observaciones. La forma más sencilla de arreglar ese problema fue introduciendo la constante cosmológica de Einstein. El modelo Λ -CDM que significa Constante Cosmológica (Λ) + Materia Oscura Fría (CDM, en inglés) logró resolver (temporalmente) el problema de la expansión acelerada. Además, a lo largo de estas dos décadas, muchas de las predicciones hechas por Λ -CDM han sido confirmadas:

por ejemplo el espectro de temperaturas del fondo de microondas y la formación de estructura a gran escala.

Sin embargo, el modelo Λ -CDM sufre de serios problemas. La naturaleza de la materia oscura y la energía oscura en forma de constante cosmológica son desconocidas. Esto último se sintetiza en lo que (Weinberg, 2008) llama el antiguo y el nuevo problema de la constante cosmológica. El primero podemos llamarlo un problema de incompatibilidad: si la constante cosmológica está asociada a la energía del vacío (pensemos que el vacío, las zonas carentes de materia ordinaria, oscura y radiación tiene un estado mínimo de energía), al comparar esta energía (¡que ya fue medida en experimentos!) con la predicción cuántica, resulta que hay una diferencia abrumadora: 120 órdenes de magnitud separan el valor calculado del valor observado. Sólo nos pasamos por un número con ciento veinte ceros... Es decir, la predicción teórica y la observación experimental sobre la energía de la constante cosmológica son incompatibles en un altísimo grado. El segundo problema es el llamado problema de la coincidencia: por qué la cantidad de energía oscura que medimos al día de hoy es del mismo orden que la cantidad de materia ordinaria y materia oscura?

Aunque el modelo Λ -CDM se basa firmemente en muchos aspectos, la incógnita de la expansión acelerada sigue presente. Los intentos por develar la naturaleza de la aceleración cósmica requieren pensar más allá de éste modelo, situarse en un lugar donde se pueda cuestionar el paradigma de la constante cosmológica. Este trabajo muestra de manera sencilla el paso más inmediato después de pensar a la energía oscura como una constante: un modelo paramétrico de $w(z)$. En esta tesis propondré una forma *dinámica* de la ecuación de estado de energía oscura que a diferencia de la constante cosmológica, varía con el tiempo y está modelada por una serie de parámetros. Trataremos de descubrir si esta forma de la ecuación de estado es más conveniente que otras propuestas paramétricas y sobre todo, si es comparable o logra superar de alguna manera al modelo estándar cosmológico.

1.1. Estructura de la tesis

En el Capítulo 2 se presenta como marco teórico, un resumen y derivaciones importantes que llevan al modelo estándar cosmológico. Partiendo de la métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (deducida a detalle en el apéndice A), hasta llegar a la solución de las ecuaciones de Einstein. De ahí se muestran los resultados de suponer un Universo estadísticamente homogéneo e isotrópico: el contenido energético (o *alacena cósmica*, término que tomo prestado de (Dodelson, 2003)). Se incluye un breviario sobre medición de distancias, fundamental para entender las observaciones cosmológicas. Un breviario sobre la historia térmica del Universo, en clave divulgativa, se presenta antes de introducir las observaciones cosmológicas/astrofísicas para finalmente cerrar con la presentación en forma

1. INTRODUCCIÓN

del modelo Λ -CDM. Todo esto dentro del Capítulo 2.

En el Capítulo 3 se da una evidencia histórica de la expansión acelerada del Universo y se motiva la propuesta más sencilla para estudiar este problema: los modelos paramétricos de la ecuación de estado $w(z)$. Antes de presentar nuestra propuesta se introducen otras dos parametrizaciones populares en la literatura: CPL y BA. Finalmente, se presenta la propuesta $w(z)_N$ y se exploran sus posibilidades: recuperar Λ -CDM y CPL para luego definir sus parámetros y estudiar su dinámica.

El Capítulo 4 trata brevemente una introducción al método de inferencia Bayesiana que será usado para analizar estadísticamente los modelos. Se presentan los códigos utilizados en este trabajo, posteriormente se muestran a detalle las encuestas astrofísicas/cosmológicas que serán utilizadas y finalmente se presenta una metodología de trabajo, en donde se definen los conjuntos de datos, la nomenclatura y elementos de los distintos espacios de parámetros y los estimadores estadísticos que se usarán para el análisis de los resultados.

En el Capítulo 5 se presentan los resultados, divididos por conjunto de datos: resultados obtenidos con D_1 y resultados obtenidos con D_2 . Primero se analizan de forma individual para finalmente hacer un análisis de los resultados generales y una discusión de los mismos. Finalmente, en la última sección se presentan resultados adicionales: reconstrucción del factor de Hubble, evolución de densidades y reconstrucción del espectro de potencias de temperatura (CMB), con un enfoque comparativo entre todos los posibles modelos y conjuntos de datos. En el Capítulo 6 se resumen los resultados y conclusiones del trabajo y una breve perspectiva del trabajo a futuro.

En las secciones del Apéndice de este trabajo se presenta un apéndice sobre métrica FLRW, uno sobre distancia lumínica, uno breve sobre inferencia estadística, uno que contiene todas las gráficas obtenidas en las corridas MonteCarlo, sustento principal del Capítulo 5 y uno final sobre consideraciones técnicas para corridas MonteCarlo.

Capítulo 2

Modelo Estándar de Cosmología

A primera vista y en una noche oscura y despejada, al observar la distribución de estrellas y galaxias (llamémosle materia luminosa) en el cielo, con el plano galáctico de la Vía Láctea atravesando el cielo y las numerosas “formaciones” de estrellas que hemos llamado constelaciones; si comparásemos un pedazo de cielo *poblado* con otro aparentemente *vacío*, parecería ser que hay zonas con mayor densidad de materia que otras. Lo cuál no es del todo incorrecto.

A nivel *local* -sistema solar, escala estelar y galáctica- la distribución promedio de materia es heterogénea, es decir, los espacios con materia -cúmulos estelares, galaxias, nebulosas, hasta cúmulos galácticos- son estadísticamente distintos a las zonas “vacías” del espacio. Sin embargo, esta característica no es extrapolable a escalas mayores a los 100 megapársec (Wu et al., 1999) o alrededor de 330 millones de años-luz. Es decir, a medida que se observa el Universo a escalas lo suficientemente grandes, la distribución promedio de materia se vuelve homogénea.

Bajo este razonamiento, sería natural decir que la porción de Universo que se observa desde la Tierra es representativa del Universo en su totalidad. Esta suposición confirmaría el principio copernicano pero a escala cosmológica: no parece que ocupemos una posición privilegiada dentro del Universo. Eventualmente, esta observación nos lleva a hacer dos suposiciones,

A La distribución de materia observable en el Universo es igual (*en promedio*) en todas direcciones, es decir, es isotrópica.

B Como no tenemos una posición especial o privilegiada dentro del Universo, las leyes de la naturaleza, la física y la distribución de materia que se observe será independiente del lugar donde se observe. Se habla entonces de homogeneidad.

A esta suposición, deducida primero como una fuerte e intuitiva conjetura filosófica y posteriormente demostrada correcta a través de varias observaciones cosmológicas (Penzias and Wilson, 1965), se le ha llamado **Principio Cosmológico** y es el fundamento teórico y experimental del Modelo Estándar de Cosmología física.

2. MODELO ESTÁNDAR DE COSMOLOGÍA

En este Capítulo se explora la derivación del modelo estándar de la cosmología, marco teórico bajo el cual se trabajará el resto de la presente tesis. El texto que sigue está basado en notas directas sobre los textos de (Dodelson, 2003), (Baumann, 2010), (Carroll, 1997), (Amendola and Tsujikawa, 2010) y marginalmente de (Weinberg, 2008) o (Hartle, 2003).

2.1. Métrica FLRW

Para estudiar este modelo físico y sus implicaciones es necesario asumir un marco teórico de trabajo, se usará la Teoría General de la Relatividad.

La métrica de un espacio-tiempo en expansión, con una distribución energética homogénea e isotrópica (como nuestro universo a gran escala) y con curvatura espacial constante es la métrica de Friedmann-Lemâitre-Robertson-Walker y está dada por el siguiente elemento de línea en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) ,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (2.1)$$

Donde $a(t)$ es una función arbitraria del tiempo, cuando obedece las ecuaciones de Einstein se llama **factor de escala** y cuantifica el tamaño del universo (normalizado al día de hoy, *i.e.* $a(t_{\text{hoy}}) \equiv a_0 = 1$) y k es un parámetro de curvatura y caracteriza la curvatura espacial de la 3-métrica. Si $k = 0$ el espacio es *plano*; con $k = +1$ se llama universo *cerrado*, tiene curvatura espacial positiva: las líneas paralelas convergen; finalmente, con $k = -1$ tendremos un universo *abierto* con curvatura espacial negativa: las líneas paralelas divergen. Un desarrollo más riguroso de la métrica FLRW se hizo en el apéndice A.

Para estudiar la propagación de la luz se acostumbra usar la forma comovil de la métrica (A.21), expresada en coordenadas comoviles χ (A.18),

$$d\chi \equiv \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (2.2)$$

y en tiempo conforme τ (A.20),

$$d\tau = \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.3)$$

Esta forma de la métrica nos permite asociar el *alargamiento* de la longitud de onda de la luz -producto de la expansión del Universo- con el factor de escala $a(t)$. El **corrimiento al rojo** (z) se define como el cambio fraccional entre la longitud de onda de emisión y la de detección, en términos del factor de escala nos queda:

$$z + 1 = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}, \quad (2.4)$$

donde $t_0 = t_{\text{obs}}$ y $t_1 = t_{\text{emit}}$.

Por último, es útil definir el **parámetro de Hubble**

$$H(a) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (2.5)$$

que describe la tasa de expansión del Universo. El valor del parámetro de Hubble al día de hoy está dado por $H(a_0) \equiv H_0 = 67.31 \pm 0.96$ según los datos de Planck 2015 (Ade et al., 2016b). Cualquier cantidad expresada en este texto con subíndice 0 es, a partir de este enunciado, una cantidad expresada al día de hoy.

2.2. Dinámica: ecuaciones de campo de Einstein

Ya que se ha definido la geometría del espacio-tiempo FLRW, ahora nos compete estudiar la dinámica de aquellos objetos que lo componen. La ecuación de campo de Einstein relaciona la parte *geométrica* $G_{\mu\nu}$ con la parte *energética* $T_{\mu\nu}$ del universo,

$$\boxed{G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}}, \quad (2.6)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, que se define:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

donde que $R_{\mu\nu}$ y R son el tensor y escalar de Ricci, respectivamente.

El objetivo de esta sección es, en primer lugar, resolver la parte geométrica de la métrica (en §2.2.1), luego, definir la forma de las contribuciones energéticas $T_{\mu\nu}$ (en §2.2.2) para finalmente conectar ambas y estudiar la dinámica resultante.

2.2.1. Geometría ($G_{\mu\nu}$)

Para calcular el tensor de Riemann necesitamos calcular los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_{\alpha} g_{\beta\lambda} + \partial_{\beta} g_{\alpha\lambda} - \partial_{\lambda} g_{\alpha\beta}), \quad (2.8)$$

de la métrica FLRW (2.1).

Haciendo las cuentas notaremos que cualquier símbolo con dos o más índices temporales (*i.e.* $\alpha, \beta, \mu = 0$) es igual a cero, *e.g.* $\Gamma_{0\beta}^0, \Gamma_{00}^{\mu}, \Gamma_{00}^0$. Los símbolos no-nulos que quedan son:

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i, \quad \Gamma_{ij}^0 = \dot{a} a \gamma_{ij}. \quad (2.9)$$

2. MODELO ESTÁNDAR DE COSMOLOGÍA

La condición de no-torsión impone las simetrías $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu}$. El tensor de Ricci es la contracción del tensor de Riemann y está dado por

$$R_{\mu\nu} \equiv \partial_{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} + \Gamma_{\lambda\rho}^{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\rho}^{\lambda}. \quad (2.10)$$

Calculamos las componentes del Ricci con los símbolos (2.9) y nos quedan:¹

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{0i} = 0, \quad R_{ij} = -\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2}\right]g_{ij}. \quad (2.11)$$

Y como el escalar de Ricci es la contracción del tensor anterior $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, entonces

$$R = -6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right]. \quad (2.12)$$

Resta unicamente enchufar (2.11) y (2.12) en (2.7) para obtener las componentes del tensor de Einstein:

$$G_0^0 = 3\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right], \quad G_j^i = \left[2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right]\delta_j^i. \quad (2.13)$$

Con esto nos quedaremos. Antes de pasar a resolver las ecuaciones de campo hace falta definir las contribuciones de energía del Universo, pasemos a ello.

2.2.2. Energía ($T_{\mu\nu}$)

El tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$ nos dice todo lo que necesitamos saber sobre aspectos energéticos de un sistema: densidad energética, presión, momento y tensiones/esfuerzos en distintas direcciones. (Carroll, 1997, p. 28)

La energía total del universo es la suma de las varias componentes energéticas que lo componen. Estas están definidas por cantidades macroscópicas: densidad, presión, temperatura; es decir, son **fluidos**. En el marco de la física de partículas, la diferencia entre distintas partículas se manifiesta en los distintos grados de libertad subatómicos, en nuestro caso, es la relación entre las cantidades macroscópicas de cada componente energética lo que las hace diferentes.

Una particularización de un fluido es el **fluido perfecto**. En (Weinberg, 2008) y (Baumann, 2010) se definen como “un fluido isotrópico en un marco de referencia en reposo (o comovil).” En jerga termodinámica, “perfecto” es un sistema que está completamente caracterizado por su densidad y presión (barotrópico); que no conduce calor, carece de viscosidad y de esfuerzos perpendiculares o “de corte”.

¹La derivación de R_{00} es directa, para una derivación completa de R_{ij} consultar (Baumann, 2010, pp. 23-24)

Una definición termodinámica equivalente es la *sustancia ideal* o *sistema ideal*: aquella que cumpla con una y específica ecuación de estado (Carmona, 2010, p. 42). En relatividad general, todas las componentes energéticas que nos interesan pueden caracterizarse como fluidos perfectos (Carroll, 1997, p. 28)

De la ecuación (2.6) se puede ver que es equivalente definir la métrica $g_{\mu\nu}$ del lado izquierdo, que definir el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ del lado derecho. Si la métrica FLRW caracteriza un espacio homogéneo e isotrópico, el tensor $T_{\mu\nu}$ reflejará dichas simetrías y viceversa.

Considérese que las componentes energéticas de nuestro universo son fluidos barotrópicos, *i.e.* están completamente definidos por su presión P y densidad energética ρ . Primero descompóngase el tensor $T_{\mu\nu}$ con $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ como en la figura (Fig. 2.1).

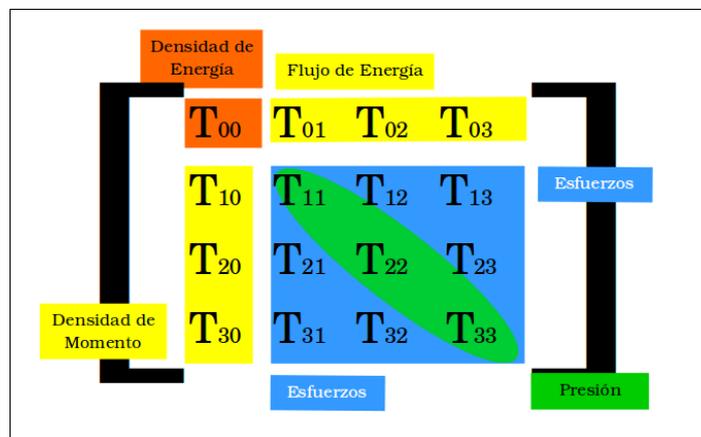


Figura 2.1: Descomposición del tensor energía-momento en: el escalar T_{00} ; los vectores T_{i0}, T_{0j} ; y el tensor T_{ij} . Inspirada en: http://en.wikipedia.org/wiki/Perfect_fluid y (Baumann, 2010, p. 19)

Para acotar las aportaciones al tensor de energía-momento invoquemos las simetrías del espacio-tiempo (homogeneidad e isotropía) y el hecho de encontrarnos en un marco de referencia comovil (Weinberg, 2008, p. 19), (Baumann, 2010, pp. 7-8):

- El escalar T_{00} tiene que ser exclusivamente función del tiempo.

$$T_{00} \equiv -\rho(t).$$

- Los vectores T_{i0} y T_{0j} deben ser iguales a cero, eso significa que no se observan cambios de densidad de momento ni flujo de energía en el marco de referencia comovil.

$$T_{i0} = T_{0j} \equiv 0.$$

2. MODELO ESTÁNDAR DE COSMOLOGÍA

- El tensor (espacial) T_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) tiene que ser proporcional a δ_{ij} , (Weinberg, 2008, p. 7) es decir, diagonal y por lo tanto, proporcional a la métrica $g_{\mu\nu}$ (*ibid*). Otra forma de verlo es que no existe flujo de esfuerzos en ninguna dirección. Entonces tiene sentido que tanto la métrica como el tensor de energía-momento sean diagonales.

$$T_{ij} \equiv P(t)g_{ij}.$$

- Por lo que únicamente las entradas completamente temporal T_{00} y completamente espaciales T_{ii} son distintas de cero, esto se traduce a una ausencia de esfuerzos netos en cualquier dirección. Las componentes espaciales son todas idénticas $T_{11} = T_{22} = T_{33}$.

Obtenemos entonces el tensor de energía-momento de un fluido perfecto visto por cualquier observador comovil:

$$T_{\nu}^{\mu} \equiv g^{\mu\lambda}T_{\lambda\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Donde $\rho \equiv \rho_e = \rho_m c^2$ es la densidad energética y P la presión.

2.3. Ecuaciones de Friedmann

Ahora que conocemos tanto la forma del tensor de Einstein como la forma del tensor energía momento sólo resta resolver las ecuaciones de Einstein. Para ello basta sustituir las componentes distintas de cero de $G_{\mu\nu}$ calculadas en (2.13) y el tensor $T_{\mu\nu}$ (2.14) en la ecuación (2.6). Estas soluciones son las **Ecuaciones de Friedmann**,

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (2.15)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = -8\pi GP. \quad (2.16)$$

Donde ρ es la suma de todas las componentes energéticas,

$$\rho \equiv \rho_{total} = \sum_x \rho_x. \quad (2.17)$$

Así, suponiendo por ejemplo un Universo compuesto por materia, radiación y constante cosmológica:

$$\rho_{tot} = \overbrace{\rho_b + \rho_{cdm}}^{\text{materia}} + \overbrace{\rho_{\gamma} + \rho_{\nu}}^{\text{radiación}} + \rho_{\Lambda}. \quad (2.18)$$

2.4. Densidad Crítica y Parámetro de Densidad

La densidad asociada a un Universo con curvatura cero se llama **densidad crítica**. Para conocer su valor al día de hoy basta con asumir un Universo plano, *i.e.* $k = 0$ en la 1ª ecuación de Friedmann (2.15):

$$\rho_{crit}^0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (2.19)$$

A partir de la densidad crítica se definen los parámetros de densidad (Ω_x) para cierto fluido arbitrario \mathbf{x} ,

$$\Omega_x^0 = \frac{\rho_x^0}{\rho_{crit}^0}. \quad (2.20)$$

Además, la proporción entre densidad energética total y densidad crítica sirve para acotar el parámetro de curvatura,

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{tot}}{\rho_{crit}} > 1 &\Rightarrow k > 0 \quad \longleftrightarrow \quad \text{cerrado} \\ \frac{\rho_{tot}}{\rho_{crit}} = 1 &\Rightarrow k = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \text{plano} \\ \frac{\rho_{tot}}{\rho_{crit}} < 1 &\Rightarrow k < 0 \quad \longleftrightarrow \quad \text{abierto} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Así, la 1ª ecuación de Friedmann para un Universo con curvatura arbitraria y compuesto por 4 componentes energéticas puede escribirse como,

$$H^2(a) = H_0^2 [\Omega_r^0 a^{-4} + \Omega_m^0 a^{-3} + \Omega_\Lambda^0 + \Omega_k^0 a^{-2}]. \quad (2.22)$$

Donde la cantidad de curvatura se define $\Omega_k \equiv -k/(aH)^2$.

Definimos el parámetro de Hubble normalizado (al día de hoy) como $E(a) = \frac{H(a)}{H_0}$,

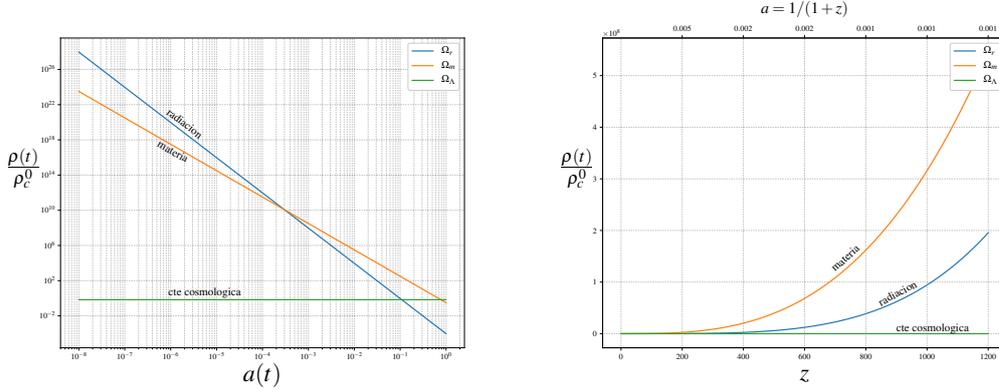
$$\begin{aligned} E^2(a) &\equiv \frac{H^2(a)}{H_0^2} = \Omega_r^0 a^{-4} + \Omega_m^0 a^{-3} + \Omega_k^0 a^{-2} + \Omega_\Lambda^0 \\ E^2(z) &= \Omega_r^0 (1+z)^4 + \Omega_m^0 (1+z)^3 + \Omega_k^0 (1+z)^2 + \Omega_\Lambda^0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Notemos también cómo se cumple que $\sum_i \Omega_i = 1$ para cualquier número de componentes energéticas al tomarse la 1ª ec. de Friedmann (2.15) y dividirla por la expresión general de la densidad crítica $\rho_{crit}(a)$:

$$\Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1. \quad (2.24)$$

De esta manera el parámetro Ω_i puede entenderse como un *porcentaje* del contenido energético total Ω_T , como lo muestra el gráfico circular de la (Fig. 2.3). La figura (Fig. 2.4) muestra una versión dos-dimensional del mismo gráfico, ahora a lo largo de la historia térmica del Universo.

2. MODELO ESTÁNDAR DE COSMOLOGÍA



(a) Evolución energética de un Universo de tres componentes.

(b) Acercamiento a z 's recientes: alrededor de $1000 < z < 1200$ se forma el CMB, la materia llevaba ya varios cientos de miles de años dominando sobre la radiación.

Figura 2.2: Dos representaciones (en $a(t)$ y en z) de la evolución del parámetro de densidad en un Universo compuesto por radiación, materia y constante cosmológica. En ambas gráficas el día de hoy se encuentra hacia el centro de la página (*i.e.* $a = 1$ y $z = 0$). Notemos cómo la constante cosmológica (Λ) domina sólo hasta épocas muy recientes.

2.5. El contenido cósmico

Las leyes de conservación de energía y momento en Minkowski pueden generalizarse a un espacio curvo y al tensor de energía-momento (Dodelson, 2003, p. 37) en la ecuación de conservación:

$$\nabla_{\mu} T_{\beta}^{\mu} = 0, \quad (2.25)$$

donde ∇_{μ} es la derivada covariante. Como la evolución de la densidad energética en FLRW está determinada por $\beta = 0$ (Baumann, 2010, p. 20) entonces,

$$\nabla_{\mu} T_0^{\mu} = \partial_{\mu} T_0^{\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^{\mu} T_0^{\nu} - \Gamma_{\mu 0}^{\nu} T_{\nu}^{\mu} = 0. \quad (2.26)$$

Posteriormente, como $T_{\nu}^{\mu} \neq 0$ cuando $\mu = \nu$, las únicas componentes de la ecuación (2.26) distintas de cero son:

- $\mu = \nu = 0$ $\partial_0 T_0^0 = \dot{\rho}(t)$
- $\mu = \{1, 2, 3\}, \nu = 0$ $\Gamma_{\mu 0}^{\mu} T_0^0 = 3 \frac{\dot{a}}{a} \rho(t)$
- $\mu = \nu = \{1, 2, 3\}$ $-\Gamma_{\nu 0}^{\nu} T_{\nu}^{\nu} = 3 \frac{\dot{a}}{a} P(t)$

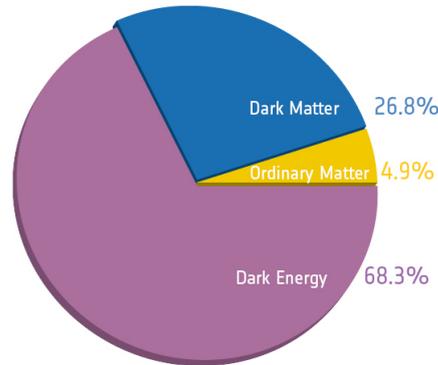


Figura 2.3: Contenido energético del Universo al día de hoy según las observaciones de la misión Planck 2013. *i.e.* $\Omega_\Lambda = 0.683$, $\Omega_{cdm} = 0.268$ y $\Omega_b = 0.049$. Los valores reportados por la misión Planck más reciente (2018) son $\Omega_\Lambda = 0.6889$ y $\Omega_m = 0.3111$ para el nivel de confianza de 68%. Fuente de la imagen: http://sci.esa.int/science-e-media/img/65/Planck_Cosmic%20recipe%20pie%20chart_orig.jpg

Llegando a la **ecuación de continuidad** de un fluido perfecto:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0, \quad (2.27)$$

que es válida para todos los fluidos cosmológicos que compongan un modelo del Universo.

Otra forma de ver a (2.27) es

$$d(\rho a^3) = -P d(a^3). \quad (2.28)$$

Es decir, el cambio de energía en un elemento de volumen comovil $d(\rho a^3)$ es igual a menos la presión por el cambio en el volumen $-P d(a^3)$. (Kolb and Turner, 1989, p. 48)

La ecuación de continuidad determina la evolución temporal de la densidad energética de cada fluido. Como se ha supuesto que las componentes energéticas son fluidos barotrópicos, entonces pueden ser descritas por una **ecuación de estado** totalmente determinada por las dos cantidades ρ y P .

$$w \equiv \frac{P}{\rho}. \quad (2.29)$$

2. MODELO ESTÁNDAR DE COSMOLOGÍA

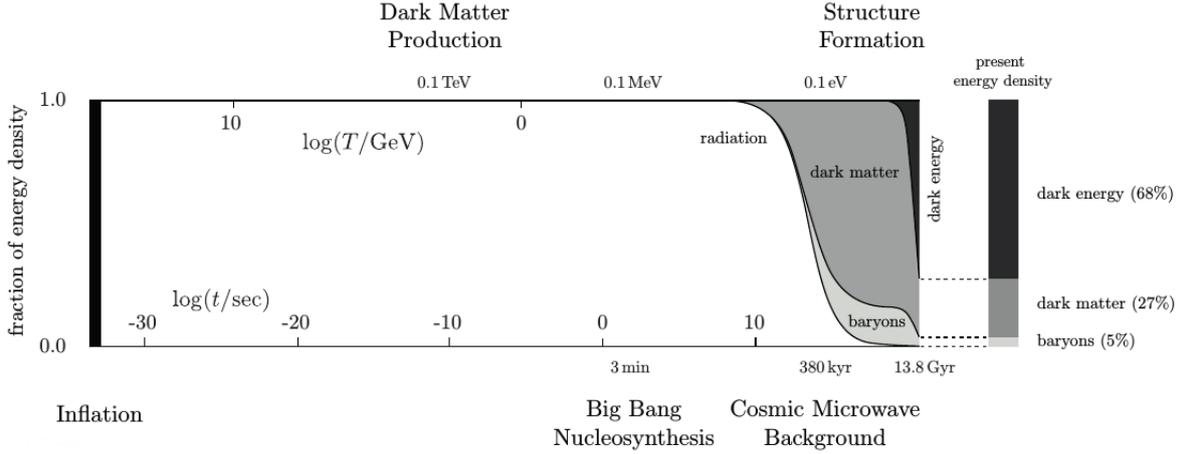


Figura 2.4: La historia térmica del Universo muestra, a grandes rasgos, dos importantes épocas de equivalencia: radiación=materia y materia=energía oscura. En el eje 'x' las escalas de tiempo y temperatura y en el eje 'y' el porcentaje de densidad energética por fluido por tiempo. Tomado de (Baumann, 2010).

La forma en que se relacionen las propiedades macroscópicas (ρ_x, P_x) de cada componente energética determinará una única ecuación de estado (w_x). Si se sustituye la ecuación de estado en la ecuación de continuidad,

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho(1+w) = 0, \quad (2.30)$$

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -3 \int_{a_0}^a \frac{(1+w)}{a} da = 3 \int_0^z \frac{(1+w)}{1+z} dz. \quad (2.31)$$

Cuya solución general es:

$$\rho(z) = \rho_0 \exp \left[3 \int_0^z \frac{(1+w)}{1+z} dz \right]. \quad (2.32)$$

Si w no depende de z , *i.e.* $w = \text{cte}$, toma la forma:

$$\rho(a) = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w)} = \rho_0 (1+z)^{3(1+w)}. \quad (2.33)$$

Ahora que sabemos que las contribuciones energéticas están caracterizada por su presión y densidad, podemos explorar los fluidos cosmológicos que existen.

- **Materia fría (m)**

Si suponemos que tanto la masa como la energía cinética o momento de una colección de partículas contribuyen a la cantidad de energía de un fluido arbitrario, en el caso de la materia, la contribución de la masa sobrepasa la

del momento. Es decir, la materia cumple la desigualdad $|P| \ll \rho$. También se dice que la materia es *fría* porque la velocidad térmica de las partículas es mucho menor a la velocidad de la luz $C \ll c$.

Sustituyendo esta condición en la ecuación $w = P/\rho$ obtenemos que la ecuación de estado de la materia es $w \approx 0$. Y si sustituimos $w = 0$ en la ecuación (2.33) tendremos,

$$\rho_m \propto a^{-3}. \quad (2.34)$$

Es decir, la densidad energética de la materia se diluye con la expansión del universo, puesto que $V \propto a^3$. Se presumen dos tipos de materia:

- **Materia bariónica (b)**. El modelo estándar de partículas elementales describe a la materia constituida por fermiones, partículas con espín semi-entero, en particular por las partículas-compuestas más ligeras y estables: el protón (p^+), el neutrón (n) y el electrón (e^-). En este contexto, llamaremos materia bariónica a todo aquello que conforma el sector visible de nuestro universo: galaxias, objetos astrofísicos, nubes de gas o polvo y en general todos los elementos químicos en forma de átomos libres o en configuraciones más complejas.

La razón por la cual se le llama materia *bariónica* y no por ejemplo, *fermiónica* es 1) porque el porcentaje de masa que aporta el electrón a la masa total de un átomo es mucho menor a la que aporta el núcleo conformado por los bariones p^+ y n ; 2) porque los neutrinos, aún siendo fermiones, obedecen a otro tipo de física y son objeto de estudios más complejos en el ámbito cosmológico, por lo cual no pueden ser simplemente considerados como materia.

- **Materia oscura fría (cdm)**. Además de materia bariónica, las observaciones sugieren que el universo contiene un alto porcentaje de *materia oscura*, no visible. Su única interacción es a través de la gravedad y exclusivamente con materia ordinaria. De hecho, alrededor del 85 % del contenido de materia es oscura (Ade et al., 2016b). Actualmente hay enormes esfuerzos por determinar la verdadera naturaleza de este tipo de materia.

- **Radiación (r)**. En el caso de la radiación no sólo nos referimos a los fotones, sino a cualquier colección de partículas en las que la energía cinética o momento domine sobre la masa. Cualquier fluido que cumpla con esta condición tendrá una relación presión-densidad $P = 1/3\rho$ (Dodelson, 2003, p. 38) (Baumann, 2010, p. 21).

Por lo que la ecuación de estado de la radiación será $w = 1/3$ y la evolución de la densidad (2.33) estará dada por:

$$\rho_r \propto a^{-4}. \quad (2.35)$$

2. MODELO ESTÁNDAR DE COSMOLOGÍA

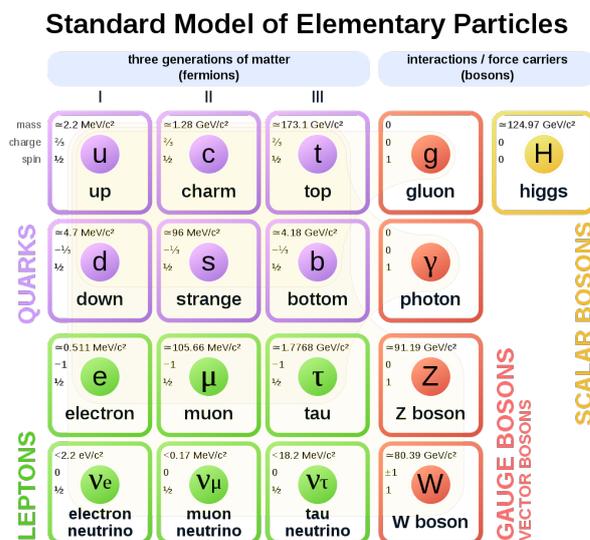


Figura 2.5: El modelo estándar de las partículas elementales nos permite estudiar los diferentes fluidos que constituyen el universo, conociendo sus propiedades físicas podemos reconstruir ciertas épocas en la historia del mismo. Fuente: https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_Model

Esto significa que la radiación no sólo se diluye con la expansión del universo sino que también pierde energía debido al corrimiento al rojo $E \propto a^{-1} \propto z$.

- **Fotón (γ)** Ya que carecen de masa y siempre son relativistas, los fotones son uno de los trazadores más importantes en cosmología ya que nos permiten conocer partes de la historia cósmica que no son accesibles a través del estudio de la luz de objetos astronómicos, por ejemplo el CMB (radiación cósmica de fondo).
- **Neutrinos (ν)** A diferencia del fotón, los neutrinos tienen masa distinta de cero, sin embargo, gran parte de la historia han viajado a velocidades relativistas, comportándose como radiación. No es hasta tiempos recientes que se ha descubierto que poseen masa (Kajita, 2016) lo cuál los hace candidatos a un tratamiento especial. Además de hacerse una distinción entre neutrinos producidos en el sistema solar (*e.g.* en el Sol o la atmósfera terrestre) (Dodelson, 2003, p. 46) y los llamados *neutrinos reliquia* provenientes de un fondo de radiación de neutrinos, más antiguo que el CMB.
- **Energía Oscura.** El descubrimiento de la expansión acelerada del universo en 1998¹ y su inexplicable naturaleza ponen a prueba el modelo cosmológico

¹Consultar Capítulo 3

que hasta la década de los 90's era la concordancia: un Universo compuesto únicamente por materia y radiación. Ahora nos enfrentamos con la evidencia de que existe una componente exótica en el contenido energético del Universo que comenzó a dominar hace relativamente poco: alrededor de 5 mil millones de años, aproximadamente 1/3 de la edad total del universo al día de hoy.

- **Constante Cosmológica (Λ).** Existe una gran cantidad de propuestas para estudiar este problema. La más sencilla y exitosa hasta el momento es la constante cosmológica que A. Einstein agregó a sus ecuaciones de campo con el fin de contrarrestar los efectos de la gravedad y describir un universo estático, idea desechada después del descubrimiento de Hubble en el '29. Considerada infame por su mismo autor; años después, a partir del descubrimiento de aceleración cósmica en 1998 se propuso retomar la idea de la constante cosmológica $\Lambda > 0$.

Fenomenológicamente, Λ ejerce una acción repulsiva sobre la materia: *alejándola* entre sí en vez de aglomerarla. Vista como una ecuación de estado, esta componente energética tiene *presión negativa* $P = -\rho$ y por tanto $w = -1$. Si sustituimos esta igualdad en la ecuación (2.28) notaremos que $\rho = \text{cte}$. De la misma manera, sustituyendo $w = -1$ en (2.33) se obtiene:

$$\rho_\Lambda = \text{cte}. \quad (2.36)$$

La densidad de constante cosmológica ρ_Λ no se diluye con la expansión del Universo. A medida que este se expande, debe existir algún mecanismo físico que dé razón del aumento de densidad energética para mantener ρ_Λ constante.

- **Otras propuestas.** Cualquier propuesta distinta a la cte. cosmológica se suele llamar por el nombre de Energía Oscura dinámica. Cualquier modelo bajo este nombre debe reproducir la expansión cósmica. Existen muchos modelos bajo este nombre, los más conocidos se agrupan bajo el nombre de Quintaesencia que es un tipo de campo escalar que genera expansión cósmica tardía. Otros modelos con enfoque fenomenológico como w -CDM o en particular parametrizaciones de la ecuación de estado $w(z)$ configurarán el centro de este trabajo. Trataremos con más detalle estas propuestas en el Capítulo 3.

2.6. Distancia en Cosmología

Para hacer la conexión entre la teoría cosmológica y las cantidades físicas, al igual que en cualquier laboratorio, se necesitan grupos de objetos sobre los cuales

2. MODELO ESTÁNDAR DE COSMOLOGÍA

hacer observaciones. Hace apenas 30 años, con el lanzamiento del satélite COBE [cita] y su subsecuente recopilación de datos, la cosmología entró en una era observacional, alimentada por una gran cantidad de datos y observaciones no sólo a escalas astronómicas sino también cosmológicas.

No obstante la cantidad de información que los instrumentos puedan darnos, la tarea científica es interpretarlos objetivamente, encontrar maneras de extraer información relevante. Sobre esta línea de pensamiento, una observación será útil para la teoría cosmológica cuando sea estadísticamente consistente, al igual que el metro o el kilogramo en la mecánica clásica o las constantes fundamentales en otras ramas de la física, la cosmología necesita de una *cantidad estándar*. Por ejemplo, una *regla estándar*: un objeto de tamaño conocido, estadísticamente homogéneo, a una distancia o un redshift z conocido; o análogamente un grupo de objetos a distintas distancias/redshifts, pero que se tenga conocimiento de cómo cambia de tamaño con el redshift (Bassett and Hložek, 2009).

La distancia comovil no es una observable cosmológica. Y aunque el corrimiento al rojo z es una buena medida para determinar alejamientos *aparentes* entre un grupo de galaxias observadas (Hubble, 1937, §II) aún no hemos definido en este trabajo formas de estimar propiedades físicas o estadísticas a partir de esas cantidades.

En el paradigma actual de la cosmología observacional, una de las observables más importantes y necesarias es la distancia. Sin embargo no es medible de manera directa (no existe algo así como un “metro” estándar cosmológico), además de que existen varias formas de calcularla.

Por brevedad se han omitido del texto principal algunos desarrollos que sirven como sustento y justificación de los siguientes apartados, se recomienda al lector consultar los apéndices A y B en caso de requerirlo.

2.6.1. Distancia Comóvil (χ)

En el marco de referencia comovil (τ, χ) se cumple que $\Delta\chi(a) = \Delta\tau(a)$, es decir,

$$\frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.37)$$

Integrando el lado izquierdo sobre $(r_1, 0)$ y el lado derecho sobre (t_1, t_0) se define la distancia comovil χ como (Amendola and Tsujikawa, 2010, p. 19) :

$$\chi = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.38)$$

y dado que $H = da(adt)^{-1}$ y $a/a_0 = (1 + z)^{-1}$, se puede reescribir como,

$$\chi(z) = \frac{1}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, \quad (2.39)$$

con $E(z) \equiv H(z)/H_0$ como en (2.23).

2.6.2. Distancia Lumínica (d_L)

La ley de la inversa del cuadrado establece que el flujo de energía (\mathcal{F}) de una fuente lumínica disminuye con el inverso del cuadrado de la distancia

$$\mathcal{F} = \frac{L}{4\pi r^2}, \quad (2.40)$$

donde L es la luminosidad -el total de energía radiada por segundo- y se mide en Watts. \mathcal{F} es el flujo -la cantidad de energía que fluye a través de una esfera de radio r - y se mide en Watts/m².

La distancia lumínica d_L se define como la relación entre el flujo \mathcal{F} y la luminosidad L , *i.e.* la distancia r desde la fuente de emisión (Amendola and Tsujikawa, 2010, p. 20). Desarrollando¹ encontraremos que d_L depende de un factor $(1+z)$. La distancia lumínica es función del corrimiento al rojo y la distancia comovil, como lo expresa la ecuación (B.7):

$$d_L = \chi(1+z), \quad (2.41)$$

donde χ es la distancia comovil como en (2.39), por lo tanto:

$$d_L(z) = \frac{(1+z)}{H_0(\Omega_k^0)^{1/2}} \sinh \left((\Omega_k^0)^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right). \quad (2.42)$$

Definida observacionalmente (como *módulo de la distancia*) es función de las magnitudes aparente (m) y absoluta (M) del objeto astronómico en cuestión (B.11):

$$m - M = 5 \log_{10}(d_L) + 25. \quad (2.43)$$

2.6.3. Distancia Angular (d_A)

La distancia diametral angular d_A se define como (Amendola and Tsujikawa, 2010),

$$d_A \equiv \frac{\Delta x}{\Delta \theta}, \quad (2.44)$$

¹Se ha hecho un desarrollo más extenso de este tema en el apéndice (B), se sugiere al lector consultarlo.

2. MODELO ESTÁNDAR DE COSMOLOGÍA

donde $\Delta\theta$ es el ángulo subtendido por un objeto de tamaño físico Δx , ortogonal a la línea de visión. Ya que el objeto en cuestión se encuentra en la superficie de una esfera de radio χ con el observador en el centro, el tamaño físico Δx a cierto tiempo t_1 está dado por

$$\Delta x = a(t_1)\chi\Delta\theta. \quad (2.45)$$

Por lo tanto, la distancia diametral angular está dada por

$$d_A = \frac{1}{1+z} \frac{1}{H_0(\Omega_k^0)^{1/2}} \sinh \left((\Omega_k^0)^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right). \quad (2.46)$$

Al comparar esta expresión con (2.42) notaremos que

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2}. \quad (2.47)$$

2.7. Observaciones Cosmológicas

Según los datos más recientes del telescopio Planck (2018), el universo tiene una edad de 13.830 ± 0.037 mil millones de años (Aghanim et al., 2018). En un primer encuentro puede ser difícil dimensionar este número. Sin embargo, conocer a detalle varios de los procesos físicos que han ocurrido a lo largo de este tiempo podría ayudarnos a tomar perspectiva. Convencionalmente se habla de historia *térmica* del universo, ya que en la mayor parte de su historia, la temperatura es el factor/parámetro que mejor caracteriza la evolución de los fenómenos físicos. A continuación y únicamente como breviarío enunciaremos los eventos clave en la historia térmica del universo,

- | | |
|---|---|
| I Inflación | IV Reionización |
| II Equivalencia radiación \leftrightarrow materia | V Equivalencia materia \leftrightarrow energía oscura |
| III Recombinación y desacople de fotones | VI Presente |

Existen modelos como el mecanismo de inflación que aún están en espera de su confirmación observacional a través de la medición de ondas gravitacionales fundamentales (Baumann, 2011), sin embargo, la mayor parte de la historia térmica de nuestro universo está contenida en un número específico de observaciones: la radiación cósmica de fondo, la escala primordial de oscilaciones acústicas de bariones (BAO), las curvas de luminosidad de las supernovas u otros trazadores luminosos, las líneas de absorción de Hidrógeno en el bosque de Lyman- α , las mediciones de lentes gravitacionales fuertes y débiles, mediciones del parámetro de

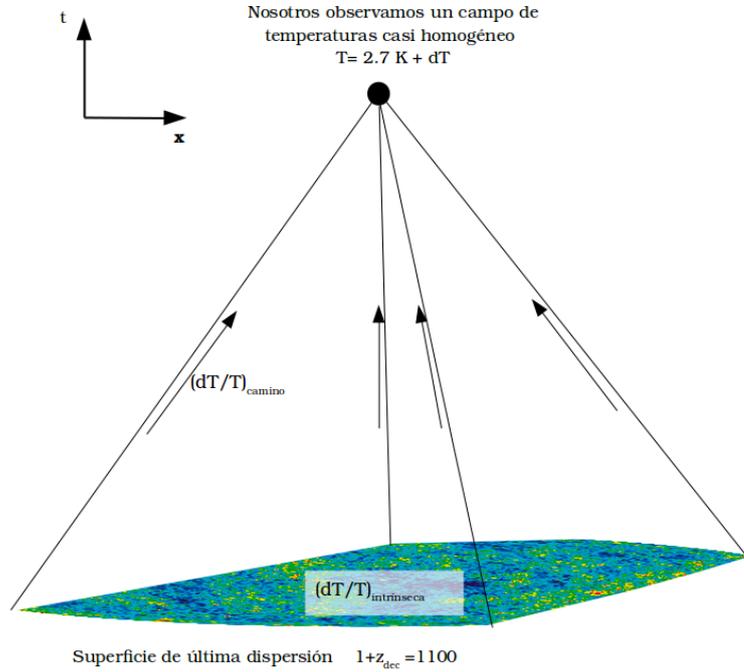


Figura 2.6: Representación del cono de luz pasado y su intersección con la superficie de última dispersión en $z \approx 1100$.

Hubble $H(z)$, medición de ondas gravitacionales, etc. Utilizaremos las primeras tres, ya que en conjunto son capaces de restringir de manera efectiva la dinámica de la energía oscura, objetivo central de este trabajo.

2.7.1. Radiación Cómica de Fondo (CMB)

Momentos antes de la recombinación, el plasma primigenio oscilaba debido a la contribución de la presión energética del fotón y la gravedad de la materia bariónica. El CMB se forma cuando el universo se enfría lo suficiente como para que los electrones y protones hasta ese momento libres se combinen para formar átomos de hidrógeno y ante el decaimiento en la proporción de electrones libres, el fotón se desacopla. Estos fotones viajan desde aquella *superficie de última dispersión* hasta nosotros. Cuando observamos al CMB estamos observando la intersección de nuestro cono de luz pasado con la hipersuperficie en $z = z_{dec}$ (Fig. 2.6). Se sabe que la superficie del CMB es completamente isotrópica, salvo anisotropías de temperatura del orden de $\delta T/T \sim 10^{-5}$ (Adam et al., 2016a).

Para caracterizar las contribuciones $(\frac{\delta T}{T})$ a distintas escalas hay que hacer una expansión multipolar sobre la esfera en $z = 1100$ y sobre los ángulos θ y ϕ

2. MODELO ESTÁNDAR DE COSMOLOGÍA

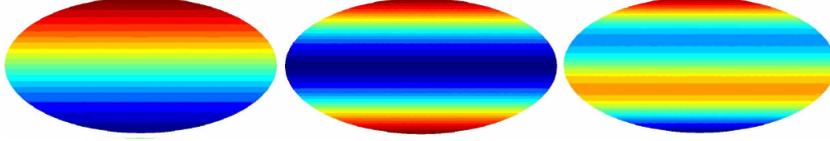


Figura 2.7: El valor de ℓ define un número de modos de oscilación sobre la esfera. Cuando $m = 0$ estas oscilaciones se encuentran a lo largo del ángulo azimutal ϕ . Se muestran los casos Y_{10} , Y_{20} y Y_{30} .

$$\frac{\delta T}{T_0}(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (2.48)$$

donde $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ son los armónicos esféricos, $a_{\ell m}$ los coeficientes multipolares y T_0 la temperatura promedio del CMB. Los parámetros ℓ y m se relacionan con el tamaño angular y la “orientación” de las anisotropías, respectivamente. Nótese que para cada valor del multipolo ℓ existen $2\ell + 1$ valores de m .

El multipolo ℓ divide a la esfera en un número entero de modos de oscilación. Si $m = 0$, entonces ℓ determina el número de oscilaciones a lo largo del ángulo azimutal ϕ (Fig. 2.7), es decir, en cuántos “paralelos” se divide la esfera. Por otro lado, m determina cuántos de estos modos pasan por los polos de la esfera, es decir, en cuántos “meridianos” se divide la esfera (Fig. 2.8). Estos *paralelos* y *meridianos* no son más que los modos de la oscilación, es decir, donde la amplitud de la onda es igual a cero. Nótese que debido a que el coeficiente m está asociado con la orientación de la oscilación, el espectro de temperaturas es estadísticamente independiente del valor del coeficiente m .

Existe una correspondencia burda entre multipolo ℓ y el ángulo que subtiende θ_λ una longitud de onda completa (una oscilación, λ) y se utiliza para determinar los ángulos de observación sobre la esfera celeste (Fig. 2.9):

$$\theta_\lambda = \frac{2\pi}{\ell}. \quad (2.49)$$

De manera que, para valores grandes de ℓ corresponden ángulos de observación pequeños, mientras que para valores pequeños de ℓ corresponden ángulos grandes. A su vez, a la resolución angular necesaria para que un detector observe hasta cierto valor de ℓ se le llama **ángulo de resolución** θ_{res} y está dado por el ángulo que subtiende “media” longitud de onda, es decir la separación entre un mínimo y un máximo vecinos:

$$\theta_{res} = \frac{\pi}{\ell}. \quad (2.50)$$

Así, para observar multipolos cada vez más grandes, el ángulo de resolución lógicamente tiene que ser cada vez más pequeño. La diferencia entre las dos ecuaciones

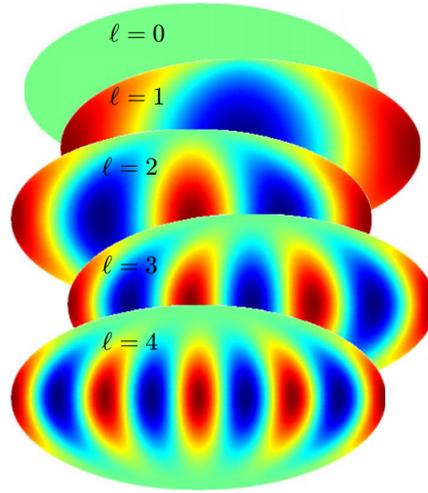


Figura 2.8: Cuando $m = \ell$ entonces todas las oscilaciones se encuentran a lo largo del ángulo polar θ . El caso trivial Y_{00} es una esfera sin oscilaciones. Aquí se muestran los casos Y_{11} , Y_{22} , Y_{33} y Y_{44} .

anteriores está en cómo se define la resolución del instrumento: para discernir cierta longitud de onda (cierto multipolo ℓ) es suficiente poder medir la distancia entre el máximo y el mínimo de la oscilación ($\lambda/2$), más no la oscilación completa. Por ejemplo, el telescopio COBE tenía un ángulo de resolución de $\theta_{res} = 7^\circ$, que le permitía medir hasta $\ell_{max} = 180^\circ/7^\circ = 26$; WMAP, un ángulo $\theta_{res} = 0.23^\circ$, entonces $\ell_{max} = 180^\circ/0.23^\circ = 783$; mientras que Planck, un ángulo $\theta_{res} < 5'$, entonces $\ell_{max} \approx 2500$.

Volviendo a la expresión de $\delta T/T_0(\theta, \phi)$, notaremos que los coeficientes $a_{\ell m}$ pueden caracterizar las desviaciones de temperatura con respecto a la media T_0 . Definidos sin la normalización por T_0 tienen dimensión de temperatura y generalmente se expresan en unidades de μK

$$a_{\ell m} = \int Y_{\ell m}^* \frac{\delta T}{T_0} d\Omega. \quad (2.51)$$

El espectro angular de potencias de temperatura (observado) \hat{C}_ℓ es una medida de la varianza $|a_{\ell m}|^2$ en la temperatura de las anisotropías (con respecto a la temperatura media T_0), muestra las anisotropías de temperatura como posiciones en el cielo, dependientes del valor de ℓ . Se define como el promedio

$$\hat{C}_\ell = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_{\ell m}|^2. \quad (2.52)$$

2. MODELO ESTÁNDAR DE COSMOLOGÍA

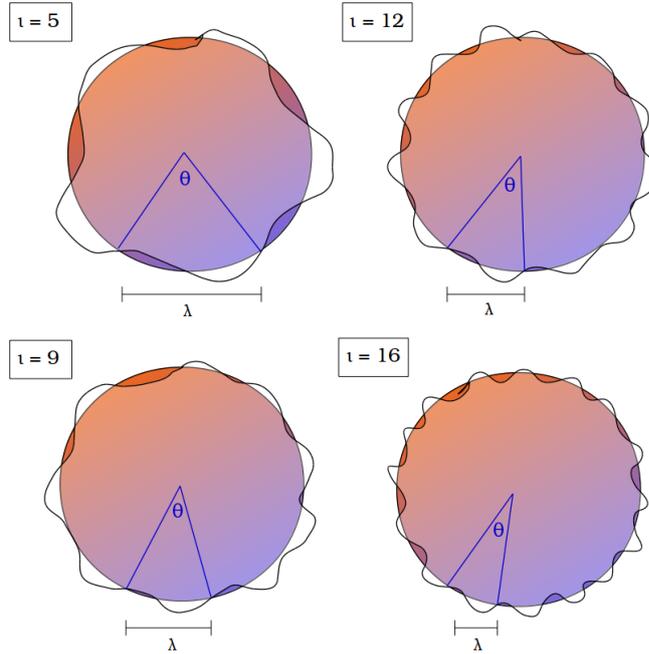


Figura 2.9: Una forma de ver la correspondencia entre ℓ y θ_λ es observando que ℓ subdivide a la esfera en un número entero de longitudes de onda λ . Aquí se muestran los casos Y_{55} , Y_{99} , Y_{1212} y Y_{1616} . El ángulo θ_λ se puede definir como la distancia que subtiende una sola oscilación de la onda.

Convencionalmente, para valores medidos de $a_{\ell m}$ se acostumbra graficar la función

$$D_\ell = \frac{\ell(\ell + 1)}{2\pi} \hat{C}_\ell, \quad (2.53)$$

contra los valores del momento multipolar ℓ . Esperamos entonces ver una gráfica como la (Fig. 2.11): sobre el eje x los multipolos ℓ medidos por el experimento, sobre el eje y la varianza definida como en (2.53), en unidades de $[\mu K^2]$.

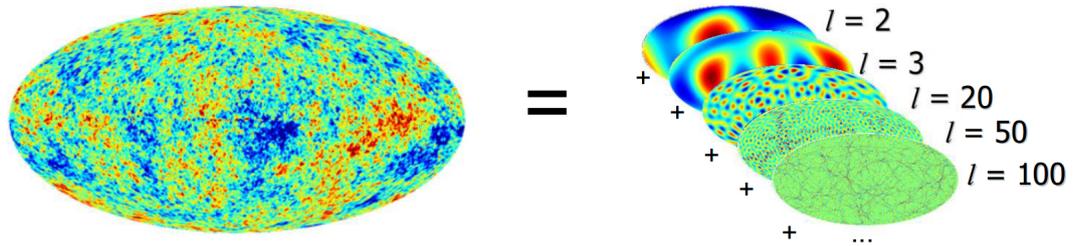


Figura 2.10: El mapa de temperaturas del CMB es el promedio de las contribuciones de todas las anisotropías medidas sobre distintos valores del multipolo ℓ .

2.7.2. Oscilaciones Acústicas de Bariones (BAO)

Antes de la época de recombinación y desacople de fotones, los bariones y fotones se encontraban en equilibrio térmico a través de dispersión de Compton. En este plasma primigenio las fuerzas en competición eran la presión de los fotones y la gravedad de los bariones, estableciendo oscilaciones en el fluido.

Pensemos en una única perturbación esférica dentro del fluido, debido a la alta tasa fotón/barión en la época previa al desacople, los fotones estarían ejerciendo una presión enorme sobre el plasma, propagando una onda esférica hacia afuera a la velocidad del sonido $c_s = c/\sqrt{3(1+R)}$ donde $R = 3\rho_b/4\rho_\gamma \equiv \Omega_b/(1+z)$ (Bassett and Hložek, 2009), la velocidad del sonido c_s en esta época era alrededor de $0.57c$, la onda se propagaba a una velocidad muy elevada y como una sobredensidad de fotones y bariones (Fig. 2.12).

La expansión del Universo produce una disminución en la temperatura del plasma, volviendo ineficiente la interacción a través de dispersión de Compton, durante esta época de recombinación, la fracción de electrones libres empieza a decaer al comenzar a producirse átomos de hidrógeno, lo cual lleva eventualmente a que la presión sobre los bariones se elimine al desacoplarse los fotones y propagarse libremente para formar el CMB. La única forma de interacción entre bariones y entre materia oscura es la interacción gravitacional, es en este momento cuando la onda esférica que viajaba a la velocidad c_s se *congela*, su tasa de crecimiento queda acoplada únicamente a la tasa de expansión del Universo. Se dice que en este momento el Universo se vuelve *transparente* y hay un cambio de fase de plasma a gas.

El radio característico de la onda congelada queda marcado en la distribución de bariones como una sobredensidad, a medida que el universo evoluciona a través del colapso gravitacional se van formando sobredensidades alrededor de esta escala característica (Fig. 2.12). Existe entonces una mayor probabilidad de que se forme estructura sobre el radio acústico bariónico y sobre la sobredensidad central que afuera o adentro de la misma. Este es el paradigma de las “semillas de estructura”:

2. MODELO ESTÁNDAR DE COSMOLOGÍA

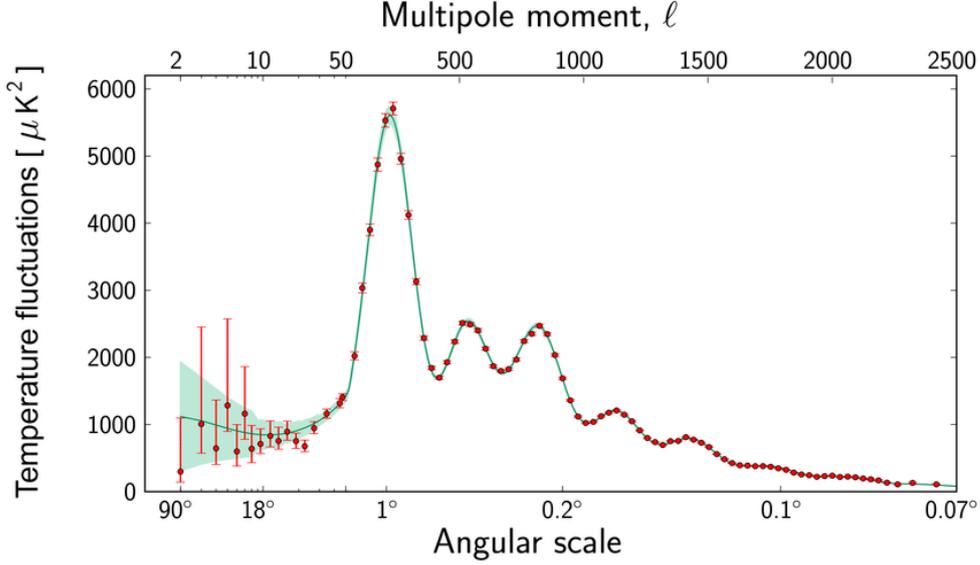


Figura 2.11: Espectro angular de temperaturas del CMB, la línea verde representa el cálculo teórico basado en el modelo Λ -CDM, mientras que los puntos son las mediciones (binned) hechas por Planck 2015. Notemos el primer pico acústico alrededor de 1° y los subsiguientes armónicos (se distinguen cinco o seis) a escalas angulares más pequeñas. Notemos también que hacia escalas angulares grandes (ℓ 's pequeñas), las barras de error crecen notablemente y a su vez la línea verde muestra una dispersión, esto tiene que ver con la varianza cósmica.

las perturbaciones escalares en el plasma eventualmente dan lugar a zonas con mayor probabilidad de formación de estructura.

Para detectar la escala característica es necesario asumir un enfoque estadístico. Puesto que su señal es muy débil (Eisenstein et al., 2005, p. 2), debe analizarse un gran volumen ($\sim 1 \text{ Gpc}^3$). Dada una distribución aleatoria de partículas, el primer descriptor importante es la densidad de número $\rho = N/V$, donde N es la cantidad de partículas (galaxias, cuasares) dentro de cierto volumen V .

Un segundo descriptor estadístico se vuelve necesario puesto que la densidad de número ρ es insuficiente para describir características de aglomeración; *i.e.* utilizando únicamente la densidad de número, sería indistinguible una distribución donde todas las partículas estén concentradas cerca de un punto de otra en donde se distribuyen homogéneamente sobre el volumen V (Amendola and Tsujikawa, 2010, p. 29). Este nuevo descriptor, la función de correlación de dos puntos $\xi(r_{ab}^{\vec{}})$, da una descripción de la distribución espacial de las partículas: si la cantidad de partículas dentro de un volumen infinitesimal dV está dada por ρdV , el número promedio de *pares* de galaxias dentro de los volúmenes infinitesimales dV_a y dV_b , separados por una distancia $r_{ab}^{\vec{}} > 0$ está dado por dN_{ab} :

$$dN_{ab} = \langle n_a n_b \rangle = \rho^2 dV_a dV_b [1 + \xi(r_{ab}^{\vec{}})]. \quad (2.54)$$

Suponiendo que el Universo es estadísticamente isotrópico, la función de correlación se vuelve una función de la distancia escalar r . De manera que $\xi(r)$ describe qué tan dependiente de la posición es la distribución de partículas dN_{ab} . Si la distribución es estadísticamente uniforme entonces dN_{ab} será espacialmente independiente y por lo tanto, el numero promedio de pares será igual al producto del promedio del número de partículas en ambos volúmenes, *i.e.* $\langle n_a n_b \rangle = \langle n_a \rangle \langle n_b \rangle = \rho^2 dV_a dV_b$ y $\xi = 0$. Si $\xi > 0$ significa que las partículas están correlacionadas, hay un patrón *preferido* bajo el cuál se aglomera la materia.

En resumen, considerando que nuestro Universo es la única realización disponible capaz de dar razón del efecto de aglomeración y formación de estructura a gran escala (o de vacíos), el proceso de medición consiste en:

1. Escoger el *tipo* de partículas, en este caso, galaxias.
2. De un mapa tridimensional de galaxias (*e.g.* espectroscópico) se escoge una rebanada temporal, es decir, todas las galaxias que se encuentren a un mismo corrimiento z de nosotros.
3. Se elige una galaxia dentro de un volumen dV_a y se escoge una distancia r_{ab} .
4. Se buscan y contabilizan todos los volúmenes dV_b en donde exista una galaxia, que estén a una distancia r_{ab} de dV_a .
5. Se repite el proceso para distintas distancias r_{ab} .
6. Se repite el proceso para todo volumen dV_a distinto.

Este proceso nos arrojará un histograma donde en el eje x tengamos distancia de separación r_{ab} y en el eje y la frecuencia, como en la figura 2.13.

Operacionalmente, el proceso consiste en medir el número promedio de partículas a una distancia r de cierta partícula, dividido por el numero esperado de partículas a la misma distancia **pero** dentro de una distribución uniforme, menos 1:

$$\xi(r) = \frac{dN(r)}{\rho dV} - 1. \quad (2.55)$$

Es decir, se simula una distribución uniforme de partículas dentro de un volumen $V_{sim} = V_{obs}$ y esta distribución se compara con un mapa real de galaxias dentro de un volumen V_{obs} .

En (Eisenstein et al., 2005) se presentó resultados relacionados con el llamado pico acústico bariónico (BAP) en la función de correlación de dos puntos $\xi(r_{ab})$ (Fig. 2.13), alrededor de los 100 Mpc h^{-1} . Esta detección confirma el crecimiento lineal de estructura por inestabilidad gravitacional entre $z \approx 1000$ y $z = 0$ (Bassett and Hložek, 2009), (Eisenstein et al., 2005).

2. MODELO ESTÁNDAR DE COSMOLOGÍA

El radio de BAO está determinado directamente por el tamaño del horizonte acústico r_d : la distancia que pudo recorrer la onda hasta $z_d \approx 1059$, al terminar el desacople de fotones,

$$r_d = \int_{z_d}^{\infty} \frac{c_s(z)}{H(z)} dz. \quad (2.56)$$

En la práctica, un análisis de la señal BAO es útil para trabajos donde se quiera explorar la historia de la expansión cósmica. Este análisis permite medir por separado el factor de Hubble $H(z)$ y la distancia angular $d_A(z)$ ¹. Observemos la (Fig. 2.14), haciendo mediciones de la distribución de galaxias sobre la línea de visión y sobre la tangente a esta, además, conociendo el tamaño del horizonte acústico r_d se pueden conocer por separado los modos radial y tangencial del radio de BAO (s_{\parallel} y s_{\perp} , respectivamente)

$$\begin{aligned} s_{\parallel} &= \frac{dz}{H(z)} \\ s_{\perp} &= d_A(z)\theta, \end{aligned} \quad (2.57)$$

s_{\parallel} es el tamaño radial, en donde dz es la diferencia de redshifts entre la parte delantera y trasera del promedio esférico. El tamaño transversal s_{\perp} se relaciona directamente con el tamaño angular θ . Si conocemos el tamaño de la esfera: en este caso, el radio r_d al día de hoy, recordemos que al finalizar el proceso de recombinación el horizonte acústico queda fijo a un tamaño y crece únicamente con la tasa de expansión del Universo, conociendo el radio $r_d(z_{dec})$ podemos calcular su tamaño al día de hoy y entonces determinar $H(z)$ y d_A de manera independiente.

Un análisis de BAO (como el hecho por (Alam et al., 2016), usado en este trabajo, consultar §4.3) sintetiza la información de millones de galaxias en dos cantidades: Primero, se obtiene la escala de BAO a distintas superficies temporales (distintas z 's) y de aquí conoceremos a) el parámetro de Hubble $H(z)$ y b) la distancia angular diametral (a través de $D_M = (1+z)d_A$) a esas z 's .

¹También suele reportarse la distancia angular diametral comovil $D_M(z) = (1+z)d_A(z)$.

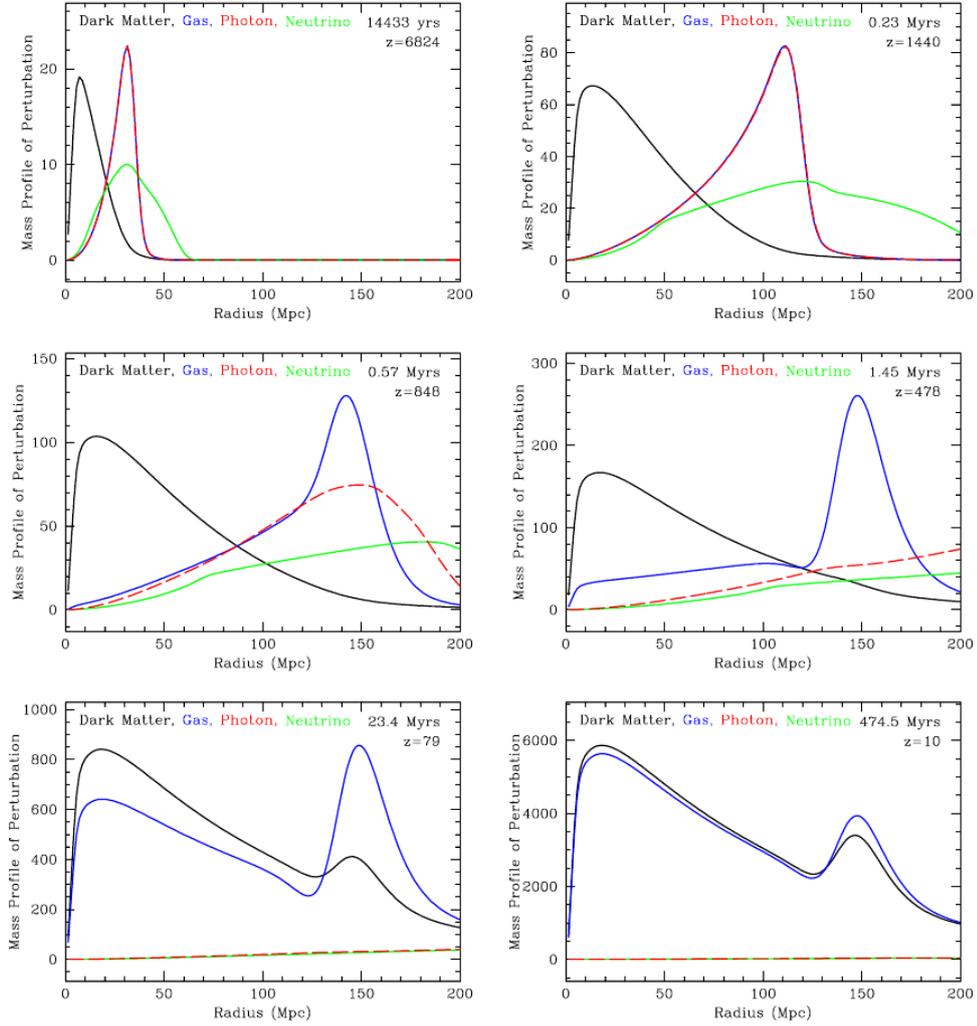


Figura 2.12: Evolución de una perturbación esférica de densidad. Comenzando del lado superior izquierdo, la perturbación inicial se encuentra en el origen, la mayor parte del contenido energético en forma de materia o radiación estaba dentro de la perturbación original. Notemos cómo la radiación (photon) y la materia bariónica (gas) están acopladas. Esta perturbación se propaga externamente a la velocidad del sonido c_s , arrastrando tanto fotones como bariones (superior derecha). Durante la recombinación los fotones empiezan a fugarse del plasma, reduciendo la interacción $e^- \leftrightarrow \gamma$ (centro izquierda). Y para cuando la recombinación ha finalizado y el universo es neutro, los fotones se desacoplan del plasma, dejando una sobredensidad bariónica alrededor de los 150 Mpc, mientras estos (γ) se diluyen (centro derecha). A lo largo de todo este tiempo la sobredensidad del origen sólo estuvo compuesta por materia oscura, ya que esta es inmune a la presión de los fotones. Cuando sucede el desacople quedan entonces dos sobredensidades: una de materia oscura en el origen y otra de bariones en un radio acústico de 150 Mpc. A medida que pasa el tiempo la materia oscura empieza a atraer materia bariónica hacia la perturbación central y viceversa (inferior izquierda). Para finalmente obtener un perfil como en la esquina inferior derecha: una sobredensidad central y un pequeño pico a 150 Mpc. Imagen tomada de (Bassett and Hlôzek, 2009).

2. MODELO ESTÁNDAR DE COSMOLOGÍA

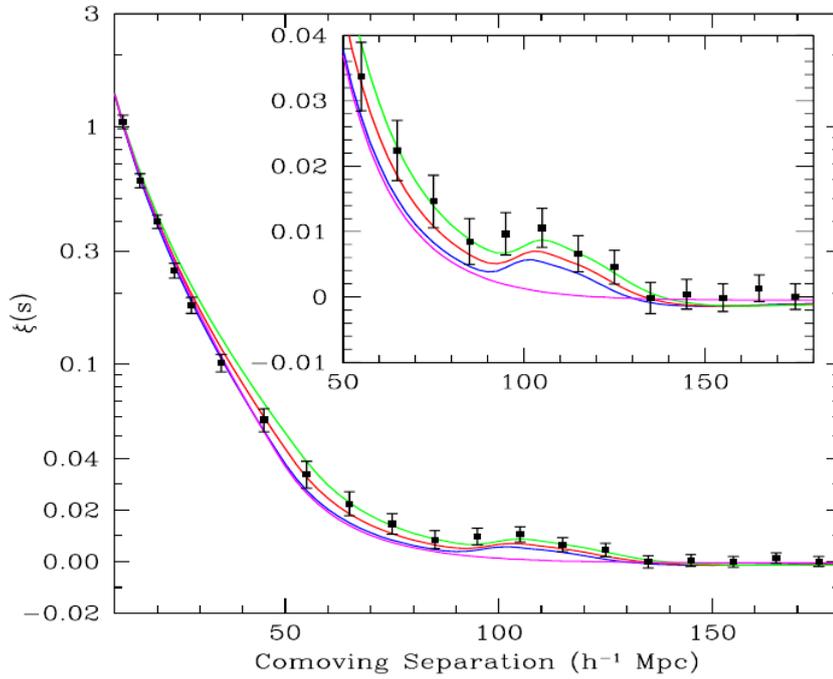


Figura 2.13: Función de correlación de dos puntos ξ vs separación comovil en una distribución de galaxias LRG's. Se observa cómo la función de correlación decae hacia el cero, sin embargo, alrededor de una distancia comovil de 100 Mpc se detecta un pico en la función. Este es el pico acústico de bariones (Baryon Acoustic Peak): confirmación de la existencia de la onda característica que salió congelada del CMB y sobre la cuál se forman y aglomeran las galaxias. Las líneas verde (superior), roja y azul representan la función de correlación calculada teóricamente para valores de $\omega_m = \Omega_m h^2 = 0.12$, $\omega_m = 0.13$ y $\omega_m = 0.14$ con $\omega_b = \Omega_b h^2 = 0.024$. Mientras que la línea violeta (inferior) representa un modelo CDM sin bariones $\omega_m = 0.105$, por ello el pico no está presente. Imagen tomada de (Eisenstein et al., 2005).

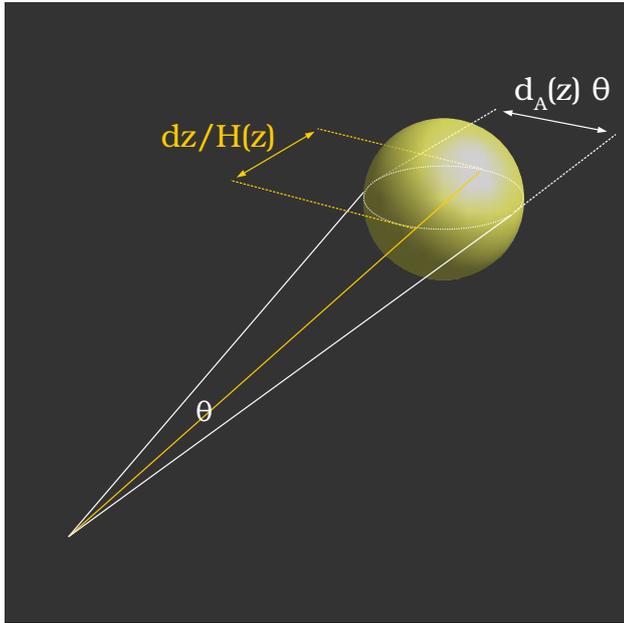


Figura 2.14: En un análisis de la distribución espacial de galaxias como el hecho en análisis de BAO es posible medir los modos radial (r_{\parallel}) y tangencial (r_{\perp}) del tamaño de BAO. El primero permite conocer la distancia angular diámetro d_A y el segundo, conociendo la diferencia de redshifts dz , permite conocer el parámetro de Hubble $H(z)$. En el caso de BAO estas cantidades (d_A y $H(z)$) se pueden conocer de manera independiente, reforzando el poder de restricción con respecto de otro tipo de datos cosmológicos. Imagen inspirada en una similar de (Bassett and Hložek, 2009).

2.7.3. Supernovas (SN)

El término *Nova* fue acuñado por Tycho Brahe en el siglo XVI para describir la “aparición repentina” de una estrella en el cielo (SN 1572). El término *Supernova* (abreviado SN) se adoptó alrededor de la década de los 30’s del siglo XX a partir de la publicación de (Baade and Zwicky, 1934). En ella se define a una supernova como un evento que genera radiación visible, con una duración promedio de veinte días, en los cuáles esta llega a tener una magnitud absoluta de $M = -14$ en el máximo de luminosidad¹; que a la vez corresponde a una luminosidad visible L_v de 10^8 veces la luminosidad del Sol.

Las supernovas son eventos astrofísicos que ocurren a ciertas clases de estrellas previo a su muerte o transición a otro tipo de estrella. En particular, una supernova del tipo Ia es un evento en el cuál un sistema binario de estrellas transita de un estado evolutivo a otro a través de una explosión masiva, de corta duración y de gran intensidad. Se piensa que estas supernovas surgen de estrellas enanas

¹Mediciones más actualizadas apuntan a una luminosidad absoluta de $M = -19$

2. MODELO ESTÁNDAR DE COSMOLOGÍA

blancas que gracias a la acreción de material de su estrella compañera superan el límite de Chandrasekhar y transitan a una fase inestable en la cuál se suscita una explosión termonuclear (Weinberg et al., 2013, p. 34). Otros tipos de supernova como el tipo II o el Ib/Ic sufren otro tipo de eventos relacionados con el colapso de su núcleo.

Los modelos que tratan de explicar estas gigantes explosiones estelares no son objeto de este trabajo, sin embargo puede ser de alivio mencionar que independientemente del modelo que describa su compleja evolución, las supernovas se clasifican taxonomicamente: a través de la observación de su luz, es decir por la presencia o ausencia de ciertas líneas de emisión en su espectro (*ibid*). La presencia de líneas de hidrógeno corresponde a las supernovas de **tipo II**, aquellas clasificadas como **tipo I** carecen de las mismas. En particular, las supernovas tipo Ia se definen como aquellas que tienen una fuerte línea de SiII alrededor de los 615 nm (Carroll and Ostlie, 2014, p. 584).

No es fortuito que Baade y Zwicky definan su duración y magnitud con tanta precisión, de hecho, las supernovas son una de las mejores herramientas para estudiar la aceleración cósmica debido a su homogeneidad estadística. Se le llama **Candela Estándar** (standard candle) a cualquier objeto astronómico cuya magnitud absoluta (M) sea bien conocida.

Las supernovas Ia no son candelas estándar, sino *estandarizables*: a pesar de sus diferencias, parece que todos los eventos de SN Ia tienen ciertas invariantes en su apariencia. La curva de luminosidad de una supernova es el gráfico obtenido al medir la luminosidad L_{obs} de la supernova a lo largo del tiempo (se acostumbra graficar L_{obs}/L_{\odot} o M vs t en días), cada tipo de supernova tiene una curva diferente, observar (Fig. 2.15); para una supernova Ia se observa un incremento rápido en la luminosidad hasta llegar a un pico para posteriormente disminuir lentamente.

Sin embargo, recordemos que el tipo de supernova no se define por la morfología de su curva de luminosidad sino por su espectro electromagnético. Por ende es muy probable que cada evento de SN Ia tenga una curva ligeramente distinta, las particularidades de cada sistema dan como resultado: 1) que la supernova sea menos luminosa o más luminosa que la magnitud promedio (vista en las observaciones fotométricas como mayor o menor emisión en ciertas bandas (B, V e I) causando diferencias de color o 2) que su duración sea distinta a la promedio, causando un efecto de estiramiento o “stretch” (Fig. 2.16). Es posible hacer correcciones sobre el eje temporal (o de stretch) y sobre el eje de luminosidad en cada banda de observación (o de color) para *estandarizar* los eventos de SN Ia.

La observación de supernovas es de vital importancia para la cosmología, ya que, a partir de las curvas de luminosidad es posible determinar distancias lumínicas (consultar apéndice B.)

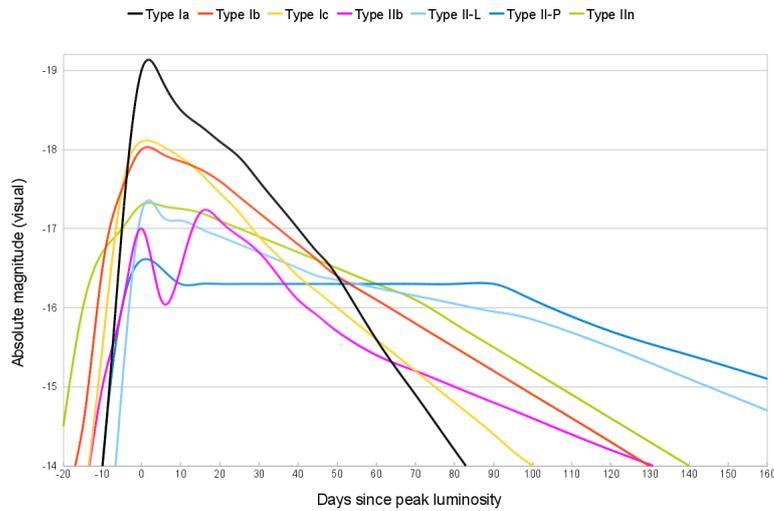


Figura 2.15: Curvas de luminosidad de distintos tipos de supernova.

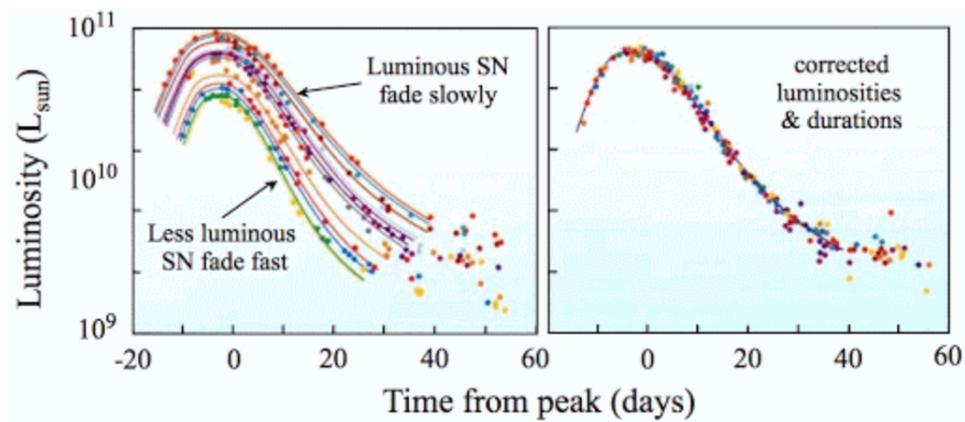


Figura 2.16: Correcciones de color y stretch sobre curvas de luminosidad de SN tipo Ia.

2.8. El modelo Λ -CDM

A lo largo de este Capítulo se hizo un desarrollo que partió del principio cosmológico y tomó como fundamento teórico la teoría general de la relatividad, se derivaron resultados importantes como la métrica FLRW, las ecuaciones de Friedmann y cierta forma del tensor de energía-momento como soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein. Para cerrar este Capítulo, procedemos a presentar una síntesis del modelo estándar de la cosmología: el modelo Λ - Cold Dark Matter ó Λ -CDM. Fundamentalmente, el modelo se basa en la premisa del universo homogéneo e isotrópico a gran escala.

Se puede decir con amplia certeza que es uno de los modelos abiertos de la física contemporánea puesto que el trabajo a su alrededor se centra en explicar las

2. MODELO ESTÁNDAR DE COSMOLOGÍA

dos incógnitas de materia y energía oscura. Como hemos visto, además de las componentes *conocidas* del universo, tenemos la presencia de formas exóticas de materia y energía, las cuales surgen de la necesidad de dar razón de fenómenos del universo como la formación de estructura a gran escala, las curvas de rotación de galaxias y el efecto de lentes gravitacionales, que se atribuyen a efectos de la materia oscura; mientras que la expansión acelerada del universo es atribuida a la energía oscura.

En términos más concretos, el modelo Λ -CDM es una parametrización del modelo de la gran explosión, ya que toda la física que se usa para describir la historia térmica del Universo está sintetizada en seis parámetros (Lesgourgues, 2013, p. 41),

$$\theta = \{\omega_b, \omega_{cdm}, \Omega_\Lambda, \tau_{reio}, A_s, n_s\}, \quad (2.58)$$

- El parámetro físico de densidad de bariones ($\omega_b \equiv \Omega_b h^2$)
- El parámetro físico de densidad de materia oscura ($\omega_{cdm} \equiv \Omega_{cdm} h^2$)
- El parámetro de densidad de cte cosmológica o energía oscura ($\Omega_\Lambda / \Omega_{DE}$)
- La profundidad óptica en la época de reionización ($z \approx 10$) (τ_{reio})
- La amplitud de la perturbación de curvatura en $k=0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ (A_s)
- El índice espectral escalar (n_s)

A partir de estas cantidades se pueden obtener los parámetros derivados,

- El parámetro de densidad de materia ($\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{cdm}$)
- El parámetro de Hubble al día de hoy (H_0), derivado del parámetro h que se relaciona con los parámetros físicos de densidad.

El efecto de los parámetros libres se puede apreciar con mucha claridad en el espectro angular de temperaturas (Figs. 2.17 y 2.18). Nótese los cambios que sufre al modificar el valor de los parámetros ω_b , ω_c , Ω_Λ , la curvatura Ω_k y el valor de la ecuación de estado de energía oscura w_{DE} .

Los parámetros A_s y n_s tienen que ver directamente con el espectro de potencias primordial, dado por inflación (Baumann, 2010, p. 122):

$$\mathcal{P}_s(k) = A_s \left(\frac{k}{k^*} \right)^{n_s - 1}, \quad (2.59)$$

donde k^* es una escala de referencia (por convención se usa $k^* = 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$). A_s es la amplitud de las perturbaciones escalares primordiales, mientras que n_s es el índice espectral: si el espectro $\mathcal{P}_s(k)$ es independiente de k (*i.e.* es invariante de escala) entonces $n_s = 1$.

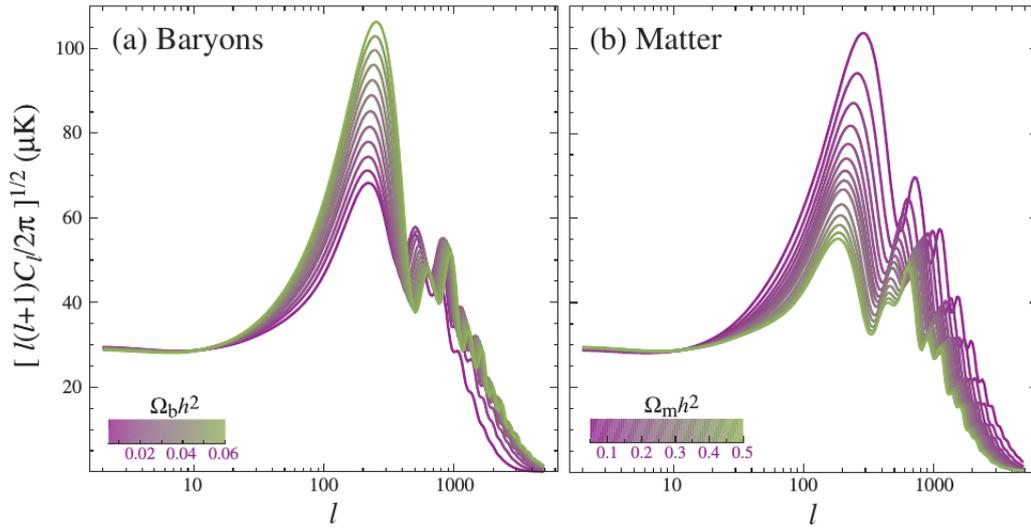


Figura 2.17: Variación en el espectro angular de temperaturas al cambiar el valor de ω_b y de ω_c , respectivamente. Notemos que en el primer caso se modifica la amplitud del primer pico acústico, mientras que en el segundo se da además un fenómeno de corrimiento, nótese también que el aumento de materia oscura amortigua los picos acústicos. Tomado de (Hu, 2008).

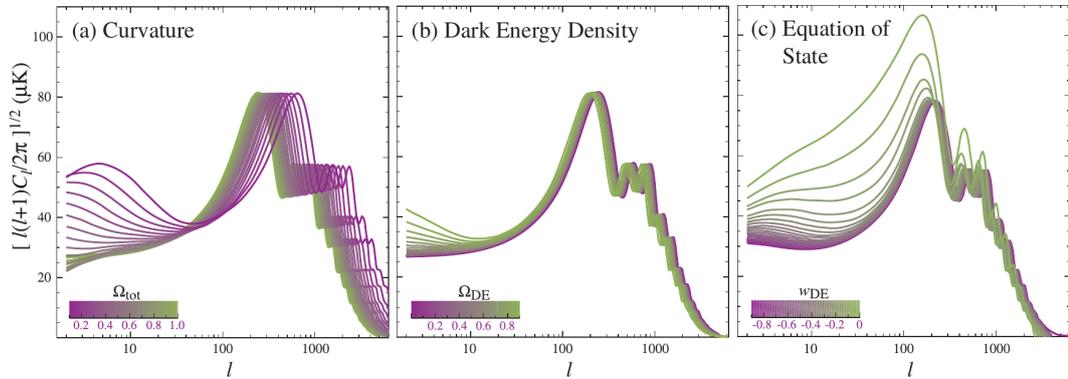


Figura 2.18: Variación en el espectro angular de temperaturas al cambiar los valores de Ω_T , Ω_Λ y w_{DE} , respectivamente. La variación de Ω_T es directamente proporcional a un cambio en la curvatura, por ello se observa un desplazamiento del espectro completo hacia escalas angulares más pequeñas a medida que $\Omega_T \rightarrow 0$. A su vez, el efecto más notable al cambiar la proporción de energía oscura es el “levantamiento” en el *frente* del espectro de temperaturas (para l 's pequeñas). Por otro lado, la ecuación de estado aumenta la amplitud del espectro entre $2 < l < 200$ cuando $w \rightarrow 0$ (*i.e.* cuando la energía oscura se comporta como materia), pero dicho efecto se vuelve despreciable a medida que $w \rightarrow -1$. Tomado de (Hu, 2008).

Capítulo 3

Energía Oscura y propuesta $w(z)_N$.

3.1. Expansión acelerada del universo

En 1998, tras casi diez años de observaciones de supernovas Ia, el equipo de The Supernova Cosmology Project -([Riess et al., 1998](#)), ([Perlmutter et al., 1999](#))- hizo observaciones relevantes: la distancia (lumínica) a supernovas en z 's grandes ($0.18 < z < 0.83$) no concordaba con las predicciones teóricas: por el contrario, se encontraban a más de 10 % de la distancia estimada.

Bajo ciertos escenarios, por ejemplo cosmologías planas ($\Omega_k = 0$; $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$) la cota sobre el parámetro físico de materia era de $\Omega_m^{flat} = 0.28_{-0.08}^{+0.09}$, apuntando fuertemente a una densidad positiva de constante cosmológica ($\Omega_\Lambda > 0$). Un Universo con curvatura positiva (abierto) y con $\Lambda = 0$ fue inconsistente los datos ([Perlmutter et al., 1999](#)). Por lo que el modelo favorecido por varios métodos de ajuste fue el de un universo con una componente energética adicional, con presión negativa ($\rho_\Lambda = -p_\Lambda$), una constante cosmológica (Λ) distinta de cero y positiva; y con parámetro de desaceleración negativo ($q_0 < 0$), *i.e.* provocando que el Universo se expanda de manera acelerada.

La propuesta de la constante cosmológica ($\Omega_\Lambda > 0$) fundó el actual paradigma de la cosmología: el modelo Λ -CDM. La constante cosmológica fue inicialmente asociada a la energía del vacío. Sin embargo, esta consideración sufre de una falla considerable: la discrepancia de más de cien ordenes de magnitud entre los valores teórico y experimental de la constante cosmológica (ρ_Λ), conocido como el *antiguo* Problema de la Constante Cosmológica ([Weinberg, 2000](#)).

Resolver el problema de la aceleración cósmica es uno de los retos más grandes de la física contemporánea.

3.2. Motivación

¿Cuál es el mecanismo físico que está provocando la aceleración cósmica?

3. ENERGÍA OSCURA Y PROPUESTA $W(Z)_N$.

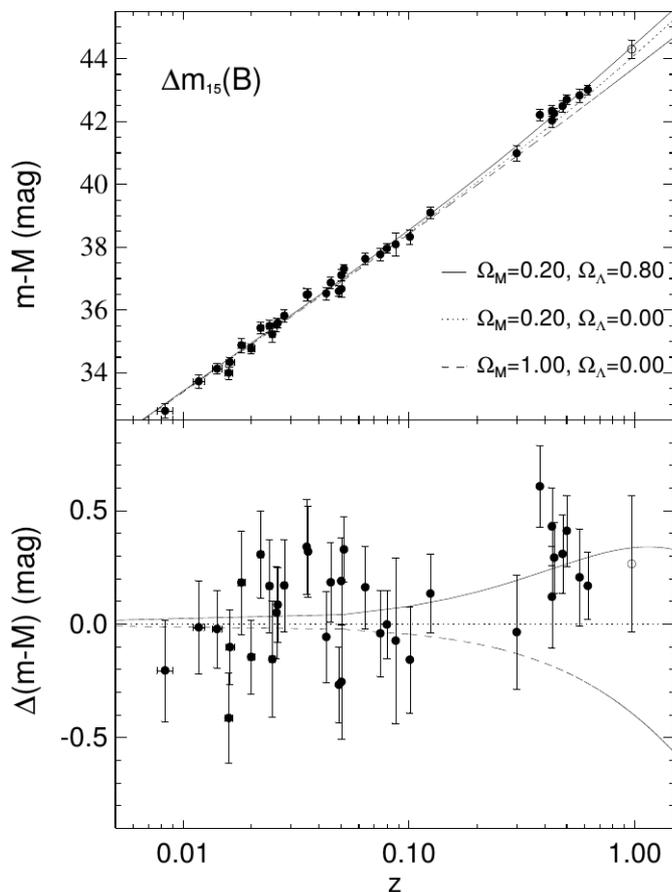


Figura 3.1: Modulo de la distancia vs redshift para la colección completa de supernovas Ia de (Riess et al., 1998). Suponiendo candelas estandarizables y haciendo las correcciones necesarias, las observaciones apuntan fuertemente a un universo con densidad de constante cosmológica positiva.

Aún con el problema teórico de raíz que envuelve al modelo Λ -CDM, este ha probado ser aquel que mejor aproxima la variedad de observaciones cosmológicas, ganándose el apelativo de modelo estándar. Sin embargo, persiste la incógnita de la aceleración cósmica. Existen actualmente dos preguntas importantes sobre esta, (Weinberg et al., 2013, p. 15):

1. ¿Surge acaso la aceleración cósmica por un rompimiento de la relatividad general a escalas cosmológicas o es producto de una nueva componente energética que ejerce gravedad repulsiva, dentro del marco de la relatividad general?
2. Si esta aceleración es causada por una nueva componente energética, ¿será su densidad energética (ρ_Λ) constante o cambiará con el tiempo/en el espacio?

Esta pregunta abre el camino para proponer y probar distintos modelos. En (Amendola and Tsujikawa, 2010) se distinguen dos formas distintas de aproximarse al problema, las cuales consisten, respectivamente, en considerar a Λ :

- I Una modificación del lado energético $T_{\mu\nu}$ de las ecs. de Einstein (2.6), ó
- II Una modificación al lado gravitacional $G_{\mu\nu}$

Nos centraremos en la primera, que, como hemos visto, consiste en agregar una componente energética exótica, con presión negativa a $T_{\mu\nu}$. La forma más recurrente de tratar la energía oscura es a través de **campos escalares**. A diferencia de la constante cosmológica, la ecuación de estado del campo escalar w_ϕ varía con el tiempo.

Para que el universo muestre aceleración es necesario que se cumpla $w_\phi < -1/3$ ¹. Para valores de $w_\phi < -1$ se le llamará a este tipo de campos escalares *phantom* o fantasmas. No hablaremos en este trabajo de campos escalares ni quintaesencia ni phantom, pero es importante tener en cuenta que el traspasar la *phantom dividing line* ($w = -1$) hacia las partes más negativas implicaría un campo escalar que tiene ciertos problemas (Amendola and Tsujikawa, 2010, p. 173).

En resumen, un campo escalar tipo quintaesencia, se asocia a valores de la ecuación de estado $w_\phi \geq -1$, mientras que campos tipo fantasma tendrán una ecuación de estado menor a -1 . Para más información acerca de campos tipo quintaesencia se recomienda consultar (Amendola and Tsujikawa, 2010, Chapt. 7.1, 7.2), para ver una definición formal y consecuencias de un campo fantasma, consultar (Amendola and Tsujikawa, 2010, Chapt. 8.1.1). Lo más fundamental que debemos rescatar de este tipo de mecanismos es que,

1. Son consistentes con el fenómeno de aceleración cósmica.
2. Son propuestas motivadas físicamente para resolver el problema de la constante cosmológica.
3. **Tiene una parametrización de la ecuación de estado que varía en el tiempo.**

El acercamiento que haremos a este problema será proponer una ecuación de estado dependiente del tiempo $w_\Lambda = w_\Lambda(z) \equiv w_{DE}$.

¹Esto se puede derivar de manera sencilla al obtener el valor de w en la época de equivalencia materia-energía oscura ($\rho_m = \rho_{DE}$)

3.3. Parametrizando la Ecuación de Estado

Supóngase un fluido de energía oscura con ecuación de estado $w_{DE} = P_{DE}/\rho_{DE}$ y que satisfaga la ecuación de continuidad (2.27), la forma general de la ecuación de evolución de densidad es, como ya hemos visto,

$$\rho_{DE}(z) = \rho_{DE}^0 f(z), \quad (3.1)$$

$$\text{con} \quad f(z) = \exp \left[3 \int_0^z \frac{(1 + w_{DE})}{1 + z} dz \right]. \quad (3.2)$$

Supóngase que la ecuación de estado es de la forma $w_{DE} = w(z)$, nos interesa conocer su dinámica, es decir, cómo se da la dependencia de w con z . Sin embargo nos enfrentamos con al menos dos problemas,

- La ecuación de estado $w(z)$ *no* es una observable cosmológica (Amendola and Tsujikawa, 2010, p. 25)
- El proceso de reconstrucción de $w(z)$ a partir de observaciones no es trivial.

Esto último lo ejemplificamos a continuación, supongamos que queremos reconstruir $w(z)$ a partir de observaciones:

Tomemos la ecuación de Friedmann normalizada $E^2(z) \equiv H^2(z)/H_0^2$, en su forma general:

$$E^2(z) = \Omega_r^0(1+z)^4 + \Omega_m^0(1+z)^3 + \Omega_k^0(1+z)^2 + \Omega_{DE}^0 \exp \left\{ 3 \int_0^z \frac{(1 + w_{DE})}{1 + z} dz \right\}, \quad (3.3)$$

derivando con respecto de z

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[\ln \left(E^2(z) - \Omega_r^0(1+z)^4 - \Omega_m^0(1+z)^3 - \Omega_k^0(1+z)^2 \right) \right] &= \\ &= \frac{d}{dz} \left[3 \int_0^z \frac{(1 + w_{DE})}{1 + z} dz \right], \end{aligned}$$

obtenemos la ecuación de estado en función de $E(z)$ y de $\partial_z E(z)$ (Escamilla-Rivera and Capozziello, 2019),

$$w_{DE}(z) = \frac{(1+z)E^2(z)' - 3E^2(z) - \Omega_r^0(1+z)^4 + \Omega_k^0(1+z)^2}{3 \left[E^2(z) - \Omega_r^0(1+z)^4 - \Omega_m^0(1+z)^3 - \Omega_k^0(1+z)^2 \right]}. \quad (3.4)$$

Ahora, para conocer la evolución de w_{DE} se puede conectar esta expresión con alguna cantidad observable, tomemos por ejemplo la distancia lumínica (B.7),

$$d_L(z) = \frac{(1+z)}{H_0(\Omega_k^0)^{1/2}} \sinh \left((\Omega_k^0)^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right), \quad (3.5)$$

como necesitamos a E en función de d_L , debemos aplicar la función inversa:

$$x = \sinh y \iff y = \pm \ell n(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad (3.6)$$

por lo tanto,

$$E^2(z) = \frac{(1+z)^2 [(1+z)^2 + \Omega_k^0 H_0^2 d_L(z)^2]}{[(1+z)H_0 d_L(z)' - H_0 d_L(z)]^2}. \quad (3.7)$$

Por lo que, a partir de las observaciones de *e.g.* d_L , podríamos obtener una expresión como (3.7) y a esta sustituirla en (3.4). Se tendría un método como el siguiente:

$$d_L(z_{obs}) \rightarrow d_L'(z_{obs}) \rightarrow E^2(z_{obs}) \rightarrow w(z_{obs}). \quad (3.8)$$

El problema central de este método de reconstrucción *hipotético* es que en las observaciones reales, $d_L(z)$ no es una función continua, por el contrario sólo se conoce su valor en valores discretos de z , por lo cual no es posible derivarla directamente, obtener $d_L(z)'$ y finalmente conocer la dinámica de w_{DE} (Escamilla-Rivera, 2016).

Dado el acceso a métodos computacionales, resulta más práctico parametrizar la ecuación de estado $w_{DE} = w(z, p_1, p_2, \dots, p_n)$ y confrontarla de manera estadística con observaciones.

Podemos definir una parametrización de energía oscura como,

$$w_{DE} = \sum_{n=0} p_n x_n(z), \quad (3.9)$$

donde p_n son los parámetros libres de la ecuación y las componentes $x_n(z)$ representan la expansión con respecto de z .

Enuncio a continuación los modelos y parametrizaciones más comunes en la literatura y que usaremos en este trabajo. Para ello, consideremos una cosmología plana ($\Omega_k = 0$) y con los fluidos convencionales ($\Omega_r^0 \sim 0$, $\Omega_m^0 > 0$ y $\Omega_\Lambda^0 = 1 - \Omega_m^0$).

3.3.1. Λ -CDM

El modelo base o de referencia, con $\rho_\Lambda = -p_\Lambda$ y con ecuación de estado constante.

$$w_\Lambda = -1 \quad (3.10)$$

$$E^2(z) = \Omega_m(1+z)^3 + (1 - \Omega_m) \quad (3.11)$$

3.3.2. Chevallier-Polarski-Linder (CPL)

La parametrización propuesta por (Chevallier and Polarski, 2001) y (Linder, 2003) tiene dos parámetros libres (w_0, w_1); el parámetro w_0 representa el valor de la ecuación de estado al día de hoy, *i.e.* $w_0 = w(z \rightarrow 0)$, mientras que $w_1 = \partial_z w(z)|_{z=0}$ representa la dependencia de $w(z)$ con el tiempo. La parametrización CPL es reducible al modelo Λ -CDM cuando $w_1 = 0$ y $w_0 = -1$. Nótese que esta función se indetermina en $z = -1$.

$$w(z) = w_0 + \left(\frac{z}{1+z} \right) w_1 \quad (3.12)$$

$$E^2(z) = \Omega_m(1+z)^3 + (1 - \Omega_m)(1+z)^{3(1+w_0+w_1)} \exp \left\{ -\frac{3w_1 z}{1+z} \right\} \quad (3.13)$$

$$w(z \rightarrow \infty) = w_0 + w_1 \quad (3.14)$$

3.3.3. Barboza-Alcaniz (BA)

Propuesta por (Barboza and Alcaniz, 2008), tiene dos parámetros libres (w_0 y w_1), cuyo significado físico es análogo al de los parámetros de CPL. Barboza-Alcaniz también es reducible al modelo Λ -CDM cuando $w_1 = 0$ y $w_0 = -1$. De acuerdo con los autores, la motivación es presentar una parametrización “que no sea una función divergente del corrimiento al rojo”, es decir, que no esté indeterminada hacia el futuro, en $z = -1$. Complementariamente, se pretende que el modelo pueda ser obtenido a partir de métodos de dinámica de campos escalares (Barboza and Alcaniz, 2008, p. 2). Esta propuesta, a diferencia de CPL, no se indetermina en ningún valor de z . Es de segundo grado en z .

$$w(z) = w_0 + w_1 \frac{z(1+z)}{(1+z^2)} \quad (3.15)$$

$$E^2(z) = \Omega_m(1+z)^3 + (1 - \Omega_m)(1+z)^{3(1+w_0)}(1+z^2)^{3w_1/2} \quad (3.16)$$

$$w(z \rightarrow \infty) = w_0 + w_1 \quad (3.17)$$

3.4. Parametrización $w(z)_N$

Se presenta a continuación nuestra propuesta, una nueva parametrización de la ecuación de estado de Energía Oscura a la cuál hemos llamado $w(z)_N$ o “doble u de ene”. Esta propuesta tiene la ventaja de recuperar la conocida parametrización CPL bajo cierta elección de sus parámetros, además es capaz de recuperar el modelo Λ -CDM en todos sus casos. En su **forma general**:

$$w(z) = \frac{\sum_{n=0}^N b_n z^n}{(1+z)^N} \quad (3.18)$$

La característica principal de nuestra propuesta es su flexibilidad y la capacidad de replicar dinámicas complejas, esto gracias a su forma en serie de potencias y a la posibilidad de aumentar el número de parámetros con la elección del número N . A su vez la capacidad de replicar modelos sencillos como una constante cosmológica igual a -1 o incluso distinta de -1 (modelo w -CDM). El carácter introductorio de este trabajo y el trabajo implicado en los análisis numéricos nos sugieren que en este trabajo se traten los casos¹:

$$N = \{1, 2, 3\},$$

los cuales arrojan las siguientes formas de la ecuación:

- Caso 1: $N = 1$

$$w(z) = \frac{b_0 + b_1 z}{1 + z}, \quad (3.19)$$

- Caso 2: $N = 2$

$$w(z) = \frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2}{(1 + z)^2}, \quad (3.20)$$

- Caso 3: $N = 3$

$$w(z) = \frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3}{(1 + z)^3}, \quad (3.21)$$

Además, aunque todos los parámetros están acoplados a z , bajo cierta elección de sus valores, nuestra propuesta recupera el modelo Λ -CDM en todos sus casos ($N=1,2,3$), como mostraremos a continuación.

¹Se ha tomado la decisión de no trabajar casos con $N \geq 4$ puesto que el número de parámetros podría aumentar considerablemente el tiempo de cómputo, además de que una muestra de los casos 0, 1, 2 y 3 puede ser suficiente para comprender el funcionamiento de la parametrización.

3.4.1. Recuperando Λ -CDM con $w(z)_N$

Existe una solución trivial de $w(z)_N = -1 \forall z$ para cada caso ($N=1,2,3$). En esta solución los parámetros extremo¹ satisfacen $b_0 = b_N = -1$ y los parámetros intermedios $b_x = -N$, *i.e.*

$$w(z)_{N=1} = -1 \forall z \Leftrightarrow b_0 = b_1 = -1, \quad (3.22)$$

$$w(z)_{N=2} = -1 \forall z \Leftrightarrow b_0 = b_2 = -1, \quad b_1 = -2, \quad (3.23)$$

$$w(z)_{N=3} = -1 \forall z \Leftrightarrow b_0 = b_3 = -1, \quad b_1 = b_2 = -3, \quad (3.24)$$

3.4.2. Analogía CPL - $w(z)_{N=1}$

Consideremos las parametrizaciones que tienen únicamente dos parámetros libres y son del mismo orden en z : CPL y $w(z)_{N=1}$. Al comparar las ecuaciones (3.12) con (3.19) notaremos,

- Caso general

$$\boxed{\begin{aligned} b_0 &= w_0(1+z) \\ b_1 &= w_1 \end{aligned}} \quad (3.25)$$

- Caso límite

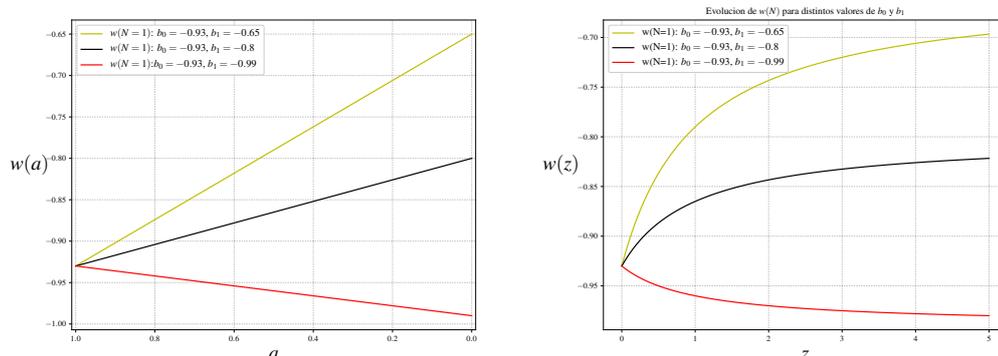
$$\begin{aligned} w(z \rightarrow 0)_{CPL} &= w_0 \\ w(z \rightarrow 0)_{N=1} &= b_0 \\ w(z \rightarrow \infty)_{CPL} &= w_0 + w_1 \\ w(z \rightarrow \infty)_{N=1} &= b_1 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Nótese que en el caso límite $b_0 = w_0$ y $b_1 \approx w_0 + w_1$. Si se evalúa la ecuación (3.19) en estas equivalencias se recupera la parametrización CPL (3.12):

$$\begin{aligned} w(z)_{N=1} &= \frac{b_0 + b_1 z}{1+z} = \frac{w_0(1+z) + w_1 z}{1+z} \\ &= w_0 + w_1 \frac{z}{1+z} = w(z)_{CPL}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Esto significa que, no obstante los parámetros w_i no son directamente permutables con los b_i , ambas parametrizaciones son equivalentes, sólo que están escritas en otras variables.

¹Consultar §3.4.3 para la definición de parámetros extremo e intermedios



- (a) En esta representación se puede observar que la ecuación de estado $w(z)_{N=1}$ evoluciona linealmente de b_1 en tiempos lejanos a b_0 al asintóticamente a b_1 hacia el pasado día de hoy.
- (b) En esta representación se aprecia que la ecuación de estado $w(z)_{N=1}$ evoluciona asintóticamente a b_1 en tiempos lejanos a b_0 al asintóticamente a b_1 hacia el pasado día de hoy.

Figura 3.2: Evolución de la ecuación de estado $w(z)_{N=1}$ con b_0 fijo y para distintos valores de b_1 . Del lado izquierdo se muestra la ecuación de estado a lo largo del intervalo $a \in [1, 0]$, que corresponde al intervalo $z \in [0, \infty)$. Del lado derecho se muestra un “acercamiento” de la misma ecuación, pero ahora a lo largo del intervalo $z \in [0, 5]$

3.4.3. Fenomenología

Analicemos cómo cambia la ecuación de estado a medida que aumentamos la potencia (N) de la parametrización. Para ello es conveniente definir dos clases de parámetros, los cuales se presentan a continuación.

3.4.3.1. Parámetros extremo (b_0, b_N)

Al evaluar las variantes $N=1,2$ y 3 de la parametrización (3.19, 3.20 y 3.21) en los límites A: $\{z \rightarrow 0\}$ y B: $\{z \rightarrow \infty\}$ notaremos que,

- A medida que $z \rightarrow \infty$, el parámetro que domina es b_N para cada caso N .

$$\text{es decir: } w(z \rightarrow \infty)_{N=1,2,3} = b_N \quad (3.28)$$

- A medida que $z \rightarrow 0$, el parámetro dominante es b_0 para toda N .

$$\text{es decir: } w(z \rightarrow 0)_{N=1,2,3} = b_0 \quad (3.29)$$

De manera que tenemos $w(z)_{N=1} = b_1$, $w(z)_{N=2} = b_2$ y $w(z)_{N=3} = b_3$ cuando $z \rightarrow \infty$ y por otro lado $w(z)_{N=1,2,3} = b_0$ cuando $z \rightarrow 0$. En este sentido, la

3. ENERGÍA OSCURA Y PROPUESTA $W(Z)_N$.

parametrización tiene al menos dos parámetros (b_0 y b_N) con interpretación física clara -para cada caso N-. El primero, b_0 , representa el valor de la ecuación de estado al día de hoy, mientras que b_N es el valor de la ecuación de estado a un tiempo $z \gg 1$. Llamaremos a b_0 y b_N los **parámetros extremo**, ya que se encuentran en los “extremos” del intervalo $z \in [0, \infty)$.

El comportamiento de b_0 y b_N se puede observar en la figura (Fig. 3.2), donde se grafica el caso más sencillo (N=1), en el cual, los únicos dos parámetros libres representan los dos extremos de la ecuación de estado (b_0 y b_1).

3.4.3.2. Parámetros intermedios (b_x)

La influencia de los demás parámetros sobre la dinámica de $w(z)_N$ se observa al graficar los tres casos de la parametrización y al variar cada parámetro por separado. Llamaremos a cualquier parámetro que no sea un extremo un **parámetro intermedio**, denotándolo por el subíndice x , *i.e.* (b_x), donde $x \neq 0$ y $x \neq N$.

Así, por ejemplo, el caso N=1 no tiene parámetros intermedios, el caso N=2 tiene un p. intermedio (b_1) y N=3 tiene dos (b_1 y b_2). Como se mostrará en seguida, cada parámetro intermedio controla una oscilación en la dinámica de $w(z)$, modificando la amplitud de dicha oscilación. Así por ejemplo, en el caso N=2, existe la posibilidad de tener una única oscilación, controlada por el parámetro b_1 , la amplitud de la oscilación dependerá de que tan positivo o negativo sea b_1 , por ende si b_1 tiene un valor cercano al cero, la amplitud de la oscilación será casi cero. En el caso N=3 existe la posibilidad de tener dos oscilaciones entre $z = 0$ y $z \rightarrow \infty$, controladas por b_1 y b_2 .

De este análisis destacan las siguientes observaciones:

- I El valor de b_N determina el valor de la ecuación de estado en $z \rightarrow \infty$. Las gráficas (Fig. 3.4, 3.7 y 3.9) ejemplifican lo anterior.
- II Si, por el contrario, se dejan fijos los extremos (b_0 y b_N) y se varían los parámetros intermedios, se observa un comportamiento como el de las gráficas (Fig. 3.6, 3.10 y 3.11): se generan oscilaciones en la ecuación de estado alrededor de ciertos valores de z .
- III El subíndice (x) de cada parámetro intermedio determina qué tan cerca de $z = 0$ se encuentra la oscilación. Parámetros con subíndice más pequeño generan oscilaciones más cerca de $z = 0$. Por ejemplo, en el caso N=3 la variación de b_1 (Fig. 3.11) muestra una oscilación mucho más cerca de $z = 0$ que la generada al variar b_2 (Fig. 3.10).

Como se ha visto, una parametrización más compleja da mayores posibilidades de variar la dinámica de la ecuación de estado . Si la dinámica de la energía oscura

fuera compleja, por ejemplo varios cambios abruptos en la pendiente de $w(z)$, un caso como $N=3$ podría ser más útil para dar razón de esta fenomenología que un caso como $N=1$. Si por el contrario la dinámica fuera sencilla, por ejemplo un cambio constante, sin variaciones pronunciadas, desde un valor inicial $w(z=0)$ a uno final, entonces un caso como $N=1$ sería mucho más compatible con dicha fenomenología.

3.4.3.3. El plano $b_0 - b_n$

Para asegurarnos de que las parametrizaciones sean consistentes con la teoría y la fenomenología de energía oscura se deben fijar cotas a los parámetros. Las condiciones siguientes definen ciertas regiones en el plano de parámetros $p_0 - p_n$.

- I Para que ρ_{DE} sea subdominante en $z \gg 1$ se debe cumplir la condición $w(z) < -1/3$, en particular $w(z \gg 1) < -1/3$.
- II Para que la energía oscura genere aceleración cósmica al día de hoy se debe cumplir $q(z) = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = \frac{1}{2}[1 + 3w(z)\Omega_{DE}] < 0$ en $z = 0$.
- III Si $w(z)$ se comporta como un campo escalar de quintaesencia, la ecuación de estado debe estar confinada en la región $w(z) \geq -1$ (Amendola and Tsujikawa, 2010, p.165).
- IV Si se comporta como un campo escalar fantasma, la ecuación de estado debe cumplir $w(z) < -1$ (*ibid*).

El caso **I** fija las cotas: $w_0 + w_1 < -1/3$ para las parametrizaciones CPL y BA, y $b_N < -1/3$ para todos los casos de $w(z)_N$. El caso **II** fija la cota $2q_0 = [1 + 3b_0(1 - \Omega_m^0)] < 0$, *i.e.* $b_0 < \frac{-1}{3(1-\Omega_m^0)}$. Analicemos los casos **III** y **IV**.

La condición $w(z)_{N=1} \geq -1$ (campo quintaesencia) se cumple cuando $b_0 = b_1 \geq -1$, análogamente, $w(z)_{N=1} < -1$ (campo fantasma) si $b_0 = b_1 < -1$. Para casos de orden mayor ($N=2,3$) debemos resolver la ecuación $\partial_z w(z)_N = 0$ para z y evaluar el resultado en $w(z)_N$. Estos máximos o mínimos globales hay que acotarlos según los casos **III** y **IV**.

Se pueden ver las regiones que satisfacen cada condición en las gráficas siguientes. Como modelo de referencia (ya que ejemplifica todas las condiciones en una sola gráfica) tomemos la parametrización BA (Fig. 3.3); el plano $b_0 - b_1$ de $w(z)_{N=1}$ en la figura (Fig. 3.5) y para $w(z)_{N=2}$ en la gráfica (Figs. 3.8).

Para casos de orden mayor a 1 ($N=2,3$), el espacio de parámetros deja de ser bi-dimensional. Por lo que hacer cortes al espacio de parámetros nos permite ver cómo se comporta *e.g.* el caso $N=2$. En las siguientes gráficas se muestran dos cortes: los planos $b_0 - b_1$ y $b_0 - b_2$. La gráfica (Fig. 3.8) muestra la solución donde

3. ENERGÍA OSCURA Y PROPUESTA $W(Z)_N$.

se recupera Λ -CDM: el punto de contacto ($b_0 = b_2 = -1, b_1 = -2$) entre los modelos tipo quintaesencia y tipo fantasma.

Comparar nuestros resultados con estas gráficas (Capítulo 5) nos ayudará a saber qué tipo de modelo representa la parametrización: campo escalar quintaesencia, campo fantasma, si oscila entre estos, o si recupera Λ -CDM.

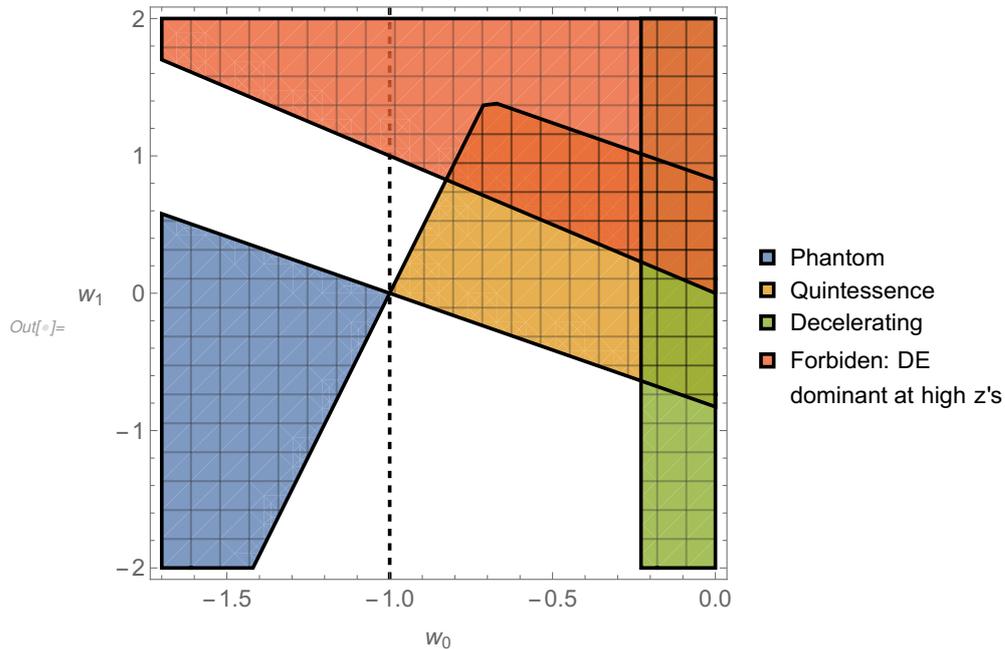


Figura 3.3: Plano $w_0 - w_1$ del modelo BA. Las zonas color azul y amarillo representan modelos completamente quintaesencia o fantasma, respectivamente. Las zonas color rojo y verde hacen referencia a los casos I y II, respectivamente y las zonas en color blanco son aquellos modelos que oscilan entre campo quintaesencia y campo fantasma a lo largo del tiempo. Nótese cómo el punto de contacto entre campos tipo quintaesencia y tipo fantasma ($w_0 = -1, w_1 = 0$) es el punto donde se recupera Λ -CDM. Adaptado de (Barboza and Alcaniz, 2008).

3.4.3.4. Caso $w(z)_{N=1}$

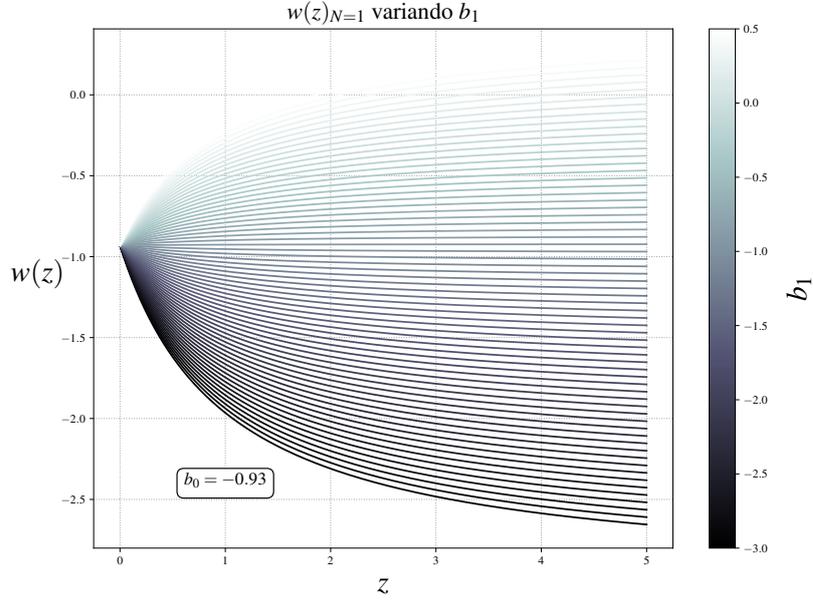


Figura 3.4: Evolución de $w(z)_{N=1}$ al dejar fijo el parámetro b_0 y cambiar el valor de b_1 .

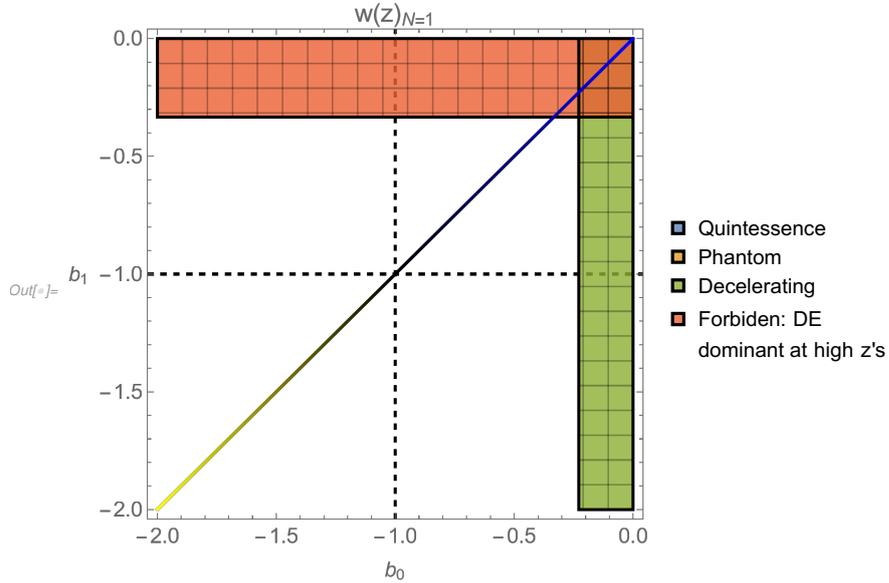


Figura 3.5: Plano $b_0 - b_1$ del modelo $w(z)_{N=1}$, a diferencia del modelo BA, sólo puntos sobre la diagonal son completamente quintaesencia $b_0 = b_1 \in (-1, 1)$ o completamente fantasma $b_0 = b_1 \in (-1, -\infty)$. Las zonas en color blanco son modelos que oscilan entre campo quintaesencia y campo fantasma a lo largo de z . Al igual que en el caso anterior, la zona de contacto entre quintaesencia y fantasma, el punto $b_0 = b_1 = -1$ es donde se recupera al modelo Λ -CDM.

3. ENERGÍA OSCURA Y PROPUESTA $W(Z)_N$.

3.4.3.5. Caso $w(z)_{N=2}$

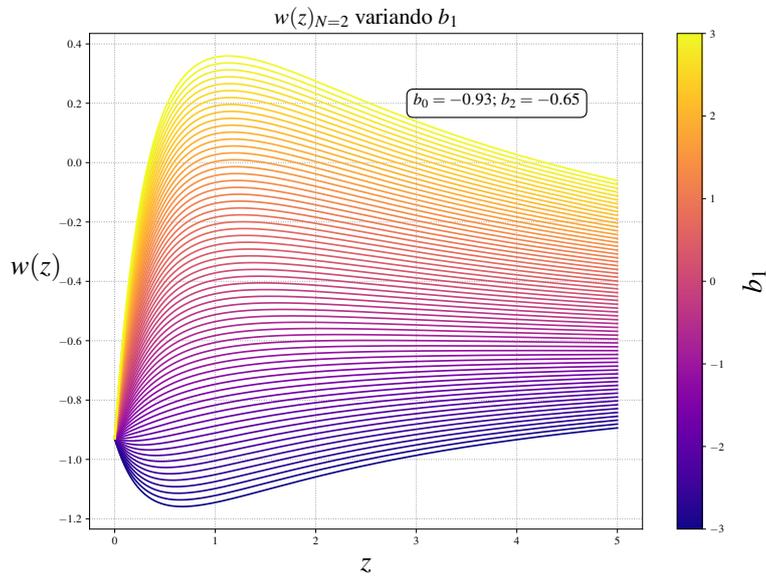


Figura 3.6: Evolución de $w(z)_{N=2}$ al dejar fijos los extremos: b_0 y b_2 y variando el parámetro intermedio b_1 .

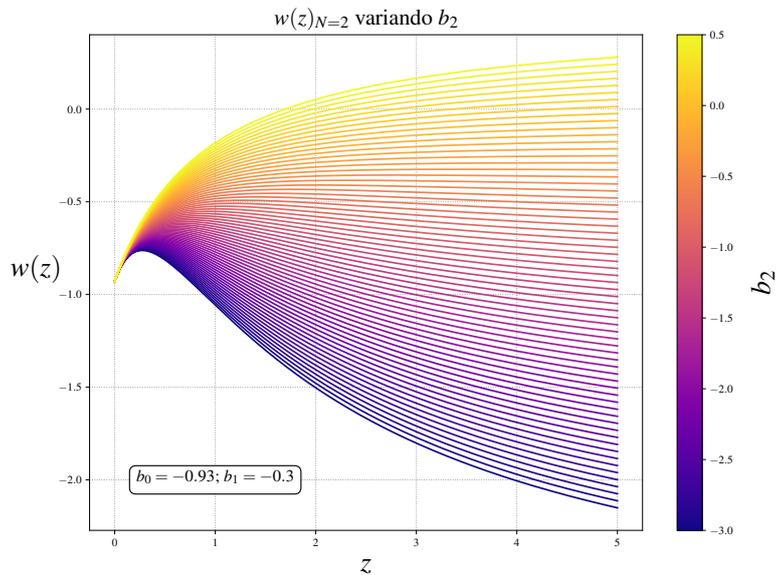


Figura 3.7: Evolución de $w(z)_{N=2}$ al dejar fijo tanto el parámetro b_0 como b_1 , variando el parámetro b_2 .

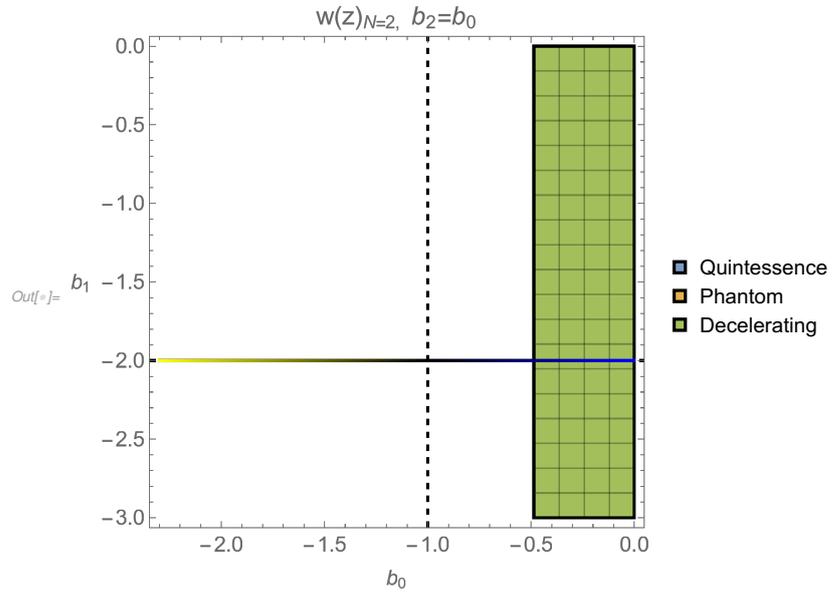


Figura 3.8: Plano $b_0 - b_1$ del modelo $w(z)_{N=2}$ con $b_2 = -1$. Las líneas punteadas marcan el punto donde se recupera Λ -CDM: $(b_0 = b_2 = -1, b_1 = -2)$.

3.4.3.6. Caso $w(z)_{N=3}$

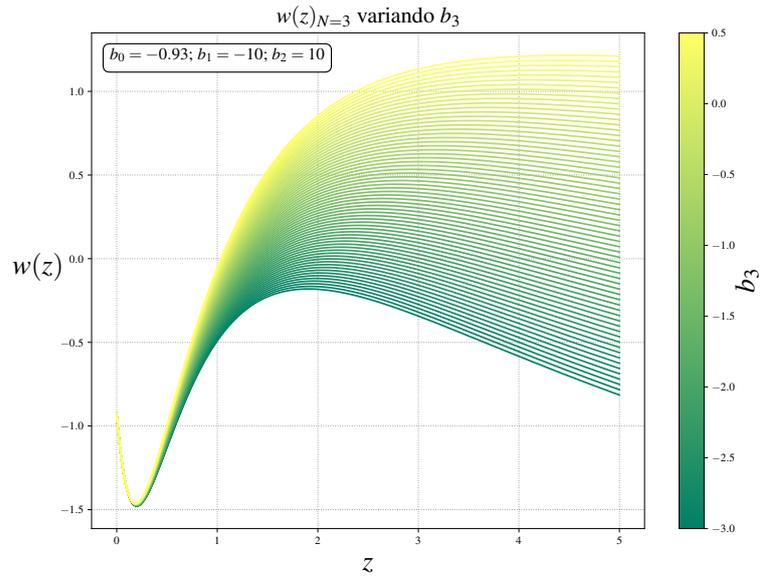


Figura 3.9: Evolución de $w(z)_{N=3}$ fijando: b_0, b_1 y b_2 y variando el extremo b_3 .

3. ENERGÍA OSCURA Y PROPUESTA $W(Z)_N$.

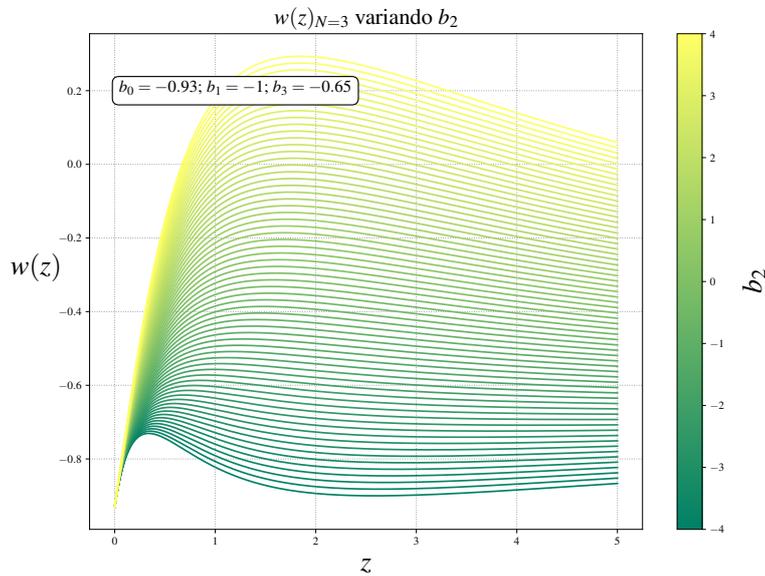


Figura 3.10: Evolución de $w(z)_{N=3}$ fijando: b_0 , b_1 y b_3 y variando el parámetro b_2 .

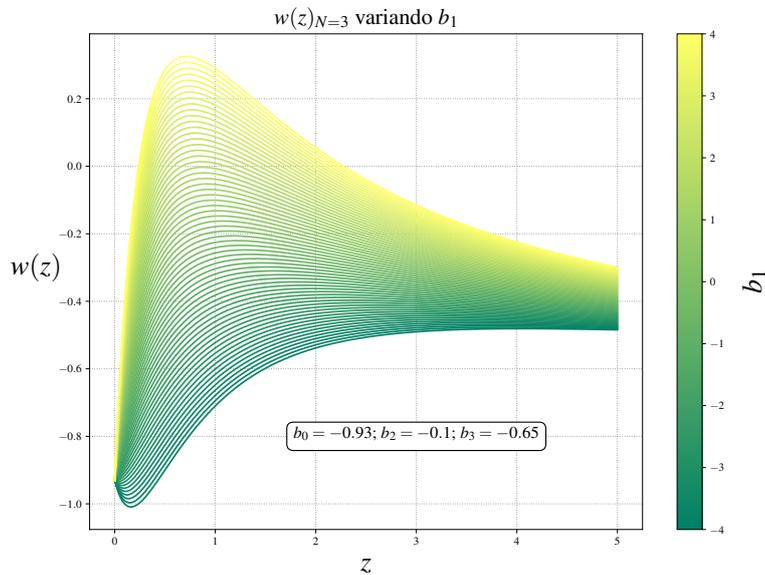


Figura 3.11: Evolución de $w(z)_{N=3}$ fijando: b_0 , b_2 y b_3 y variando el parámetro b_1 .

Con lo visto hasta ahora, se puede hablar de un interés central en el presente trabajo: conocer cuál de estos casos ($N=1,2,3$) representaría mejor una posible dinámica de la energía oscura y qué tanto mejoran o no con respecto a otras parametrizaciones (CPL, BA) y sobre todo, con respecto al modelo estándar Λ -CDM. Para ello es necesario llevar a cabo un análisis estadístico que implica: el

modelo (la parametrización), un conjunto de datos cosmológicos y un método estadístico para explorar el espacio de parámetros y estimar sus mejores valores. Pasemos a ello.

Capítulo 4

Estadística Cosmológica para Energía Oscura

En sus inicios, la cosmología física era una disciplina exclusivamente teórica con modelos casi exclusivamente cualitativos. A partir del descubrimiento de la radiación cósmica de fondo en la década de los 60's del s. XX se han invertido enormes esfuerzos humanos en mejorar la calidad y cantidad de las observaciones, con el fin de constatar o desmentir los modelos que hasta hace poco carecían de observaciones adecuadas para analizarse desde un punto de vista cuantitativo.

Al día de hoy, dos décadas después del descubrimiento de la aceleración cósmica, y con observaciones que han permitido desarrollar modelos cada vez más precisos, se podría afirmar que nos encontramos en una era de la cosmología caracterizada por la precisión y la abundancia de datos y observaciones.

No obstante, para extraer información de esta gran cantidad de datos es necesario conocer y familiarizarse con los métodos de análisis y manejo de datos, específicos de cada observación. La naturaleza diversa de las observaciones astrofísicas y su subsecuente análisis resulta inevitablemente en una heterogeneidad en las posibles líneas de trabajo. Nos enfrentamos entonces a un mundo de métodos y herramientas de trabajo que a primera vista podría ser sobrecogedor. Una de las motivaciones de este trabajo ha sido investigar, familiarizarse, trabajar y reportar las bases teóricas y técnicas de trabajos de esta índole; dentro del rubro cosmológico se hace el uso del término “Estadística Cosmológica”, “Cosmo-Estadística” o “Astro-Estadística” a todo este gran conjunto de conocimientos.

En particular, dentro de este capítulo nos dedicaremos a la parte observacional y analítica correspondiente, estudiaremos la propuesta de parametrización $w(z)_N$ utilizando encuestas astrofísicas/cosmológicas como las que se introdujeron teóricamente en la §2.7, todo esto mediante un marco de trabajo particular: la Inferencia Bayesiana.

4.1. Motivación: Inferencia Bayesiana

La pregunta típica al trabajar con parametrizaciones o modelos que intenten recrear cierta fenomenología es:

“Cuál es la probabilidad de que un ajuste específico de los parámetros $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ sea correcto?”

En disciplinas experimentales, un modelo/parametrización M puede confrontarse con un fenómeno físico una cantidad arbitraria de veces, siempre y cuando el experimento pueda reproducirse fielmente; así, por ejemplo, asumiendo que un modelo M está completamente representado en el espacio de parámetros $\theta_M = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, el cual está asociado directamente a ciertas cantidades físicas representadas por el conjunto $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$, basta con conocer la relación entre los parámetros $f_j \mapsto p_i$ pues al hacer una repetición del experimento se puede ir determinando los mejores valores del conjunto θ_M ; sobre todo, entre mayor sea el número de pruebas/repeticiones del experimento, mayor será la certidumbre sobre el valor de dichos parámetros.

Este tipo de estadística se llama **estadística frecuentista** y puede expresarse como:

$$P(x) = \frac{n}{N}. \quad (4.1)$$

Desde el punto de vista frecuentista, la probabilidad está definida por frecuencias de ocurrencia (Verde, 2010), donde n es el número de veces que se registra cierto evento x y N el número total de realizaciones/experimentos/pruebas. Si se tiene acceso a un número arbitrario de realizaciones, entonces la probabilidad es la cantidad asociada al hacer que el límite de experimentos/pruebas independientes tienda a infinito.

Lamentablemente, esta herramienta no está disponible para hacer análisis estadísticos en cosmología. La cuestión central aquí es que como físicos observacionales no tenemos acceso a un número arbitrario de *experimentos*, por el contrario, tenemos sólo *un* Universo, una única *realización* que se manifiesta en los fenómenos físicos observables o potencialmente observables por nosotros.

Por ejemplo, existe sólo un espectro angular de temperaturas, un espectro de potencias de materia, una única distribución de materia en el Universo; y ya que los mecanismos físicos que dan origen a estas observables son altamente aleatorios (por ejemplo la distribución espacial de anisotropías de temperatura/densidad), no se puede decir que el Universo que observamos sea el *único*, sino que es sólo una de tantas posibles realizaciones de los mismos procesos físicos fundamentales.

Sabiendo que tenemos a nuestro alcance una sólo realización del Universo, preguntarnos si cierto valor de los parámetros es *correcto* no parece ser una pregunta válida. La pregunta correcta sería (Press, 1992):

“*Dadas ciertas observaciones/datos, cuál es la distribución de probabilidad de los parámetros θ ?*”

Es decir, ahora nos preguntamos ¿cuál es la probabilidad de que los parámetros tomen cierto valor, *dados* los datos disponibles? Esta cuestión se asocia a la cantidad $P(\theta|D)$ que se lee literalmente “la probabilidad de los parámetros (θ) dados los datos (D)”. Visto de otra manera, nos estamos preguntando ¿cuál es la distribución de probabilidad de cierta hipótesis H (codificada en los parámetros θ), dado que se observó un evento E (codificado en los datos D)?

$$\begin{aligned} \text{Hipótesis} &\mapsto \text{Parámetros de un modelo}(\theta) \\ \text{Evento} &\mapsto \text{Datos}(D) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Entonces,

$$P(\theta|D) = ? \tag{4.3}$$

es la cantidad que nos interesa.

Este “nuevo” enfoque se materializa en la llamada **estadística bayesiana**, en la cual la probabilidad no es esa cantidad asociada al hacer que el límite de los experimentos tienda a infinito, ahora la probabilidad se interpreta como el *grado de credibilidad* en una hipótesis. La estadística bayesiana hace uso del Teorema Fundamental de las probabilidades condicionales, o Teorema de Bayes:

$$\boxed{pr(\theta|D) = \frac{pr(\theta)pr(D|\theta)}{pr(D)}}. \tag{4.4}$$

Se ha hecho un desarrollo breve en el apéndice (C). Así como este tema resulta nuevo para mí, incito al lector a que pase al brevísimo apéndice antes de continuar. Sobre todo, a consultar las referencias (Hobson, 2009), (Verde, 2010) o el capítulo 13 de (Amendola and Tsujikawa, 2010), en las que se expone a profundidad la relación entre la cosmología cuantitativa (de precisión) y los métodos estadísticos.

Las componentes del teorema tómense de su descripción en el apéndice (C):

- Prior: $pr(\theta)$. La distribución de probabilidad *inicial* de los parámetros θ . Esta es asignada por nosotros y representa nuestro grado de ignorancia o conocimiento previo sobre los valores de θ .
- Likelihood: $pr(D|\theta)$. La probabilidad de que los datos D tomen cierto valor dada una hipótesis.

- Posterior: $pr(\theta|D)$. La distribución de probabilidad *final* o *inferida* después de usar los datos. Esta es la **cantidad que más nos interesa** al momento de hacer inferencia bayesiana.
- Evidencia: $pr(D)$. Qué tan bueno es el *modelo* subyacente para predecir los datos. Aquí se supone que se han obtenido los datos (Verde, 2010, p. 4), entonces $pr(D) = 1$.

La inferencia Bayesiana estuvo relegada durante casi un siglo debido a la imposibilidad de realizar las integrales requeridas, sin embargo, el poder computacional que poseemos en la actualidad nos permite explotar sus posibilidades.

4.2. Estimación de parámetros cosmológicos con muestreo Monte Carlo

Supongamos que ya tenemos una forma de calcular el posterior $pr(\theta|D)$: *i.e.* una elección razonable de prior, algún método numérico para calcular el likelihood \mathcal{L} y el teorema de Bayes. En términos realistas, el espacio de parámetros pocas veces es 1-dimensional, es decir, el valor de todos los parámetros cosmológicos es casi siempre desconocido para nosotros. De manera que para conocer el valor esperado de algún parámetro cosmológico $\langle f(\theta) \rangle$, el posterior debe evaluarse en la “totalidad” del espacio de parámetros n -dimensional. (Hobson, 2009, p. 58)

En principio, la integral $\langle f(\theta) \rangle = \int f(\theta)P(\theta|D)d\theta$ puede calcularse numericamente con la precisión de la máquina. Si existen n parámetros cosmológicos entonces el posterior P es una función escalar-valuada n -dimensional

El método más simple consistiría en “dividir” el espacio de parámetros en una malla periódica. Si buscamos las regiones donde el likelihood sea significativamente mayor que cero, esta malla debe cubrir un volumen grande del espacio de parámetros, de tal manera que el resultado sea representativo. Si la malla tiene una anchura w_i (en cada dirección) y una resolución Δ_i (en cada dimensión), entonces el número de puntos sobre la malla $\propto (w_i/\Delta_i)^n$. (*ibidem*) Notemos cómo el número de puntos sobre los que se debe calcular la integral crece exponencialmente con el número de parámetros.

Si tomamos en cuenta que los recursos computacionales (X) representan un conjunto finito ($|X| < \aleph_0$), es decir, que en la práctica sólo podemos explorar un número limitado de puntos θ . Y que, además, los posibles puntos explorables dado el mallado que puede hacerse sobre el espacio de parámetros son infinitamente numerables; entonces no tenemos los recursos suficientes para explorar un espacio de parámetros (definido por w_i y Δ_i) en su totalidad. Consecuentemente,

el problema deja de ser una cuestión de análisis numérico y se convierte en una cuestión de *inferencia*. (Hobson, 2009, p. 20)

La integración numérica se vuelve imposible en dimensiones grandes. Se propone entonces comprimir el posterior en una colección manejable de números, usando métodos de *sampling* o muestreo. Según (Hobson, 2009), los métodos de muestreo directo (*direct sampling*) sólo funcionan en espacios de parámetros de bajas dimensiones, puesto que en altas dimensiones suele darse que la probabilidad se encuentre en una pequeña fracción del espacio de parámetros. Para este tipo de problemas se utilizan **métodos de muestreo locales** (*local sampling methods*). Por ejemplo, un Markov Chain-Monte Carlo,

Implementar una caminata aleatoria a través del espacio de parámetros de manera que sólo se exploren las regiones con probabilidad medianamente alta es una posible solución.

El método de muestreo Markov chain consiste en construir una regla de selección sobre los puntos en el espacio de parámetros de manera que después de cierto tiempo, la probabilidad sobre cierto punto θ_i sea proporcional a $P(\theta|D)$. Si la regla para moverse de θ_i a θ_{i+1} depende sólo de θ_i y no de las posiciones anteriores se dice que la secuencia de puntos es una *cadena de Markov*. (Hobson, 2009, p. 62)

La única condición en la elección del método de caminata es que todos los puntos del espacio de parámetros sean accesibles mediante un número finito de pasos.¹

Existe una ventaja evidente de los métodos MCMC sobre otros métodos de cálculo de parámetros cosmológicos, *e.g.* diagonalización de matrices de covarianza: a través de métodos de muestreo local como una cadena de Markov, bajo una selección cuidadosa del jumping factor, el número de pasos y el tamaño de la fase de quemado, puede asegurarse la exploración total de las regiones con probabilidades altas, asegurando a su vez el no sólo explorar los mínimos locales sino también los globales dentro del espacio de parámetros.

4.2.1. El código CLASS

CLASS (Cosmic Linear Anisotropy Solving System) es un código solucionador de Boltzmann escrito en C con estructura modular (Blas et al., 2011). Un resumen de sus funciones se encuentra sintetizado en (Lesgourgues, 2011), pero se puede plantear brevemente como sigue: A partir de cierto modelo cosmológico, el código resuelve las ecuaciones de Friedmann para el fondo cósmico, posteriormente resuelve la evolución termodinámica (*e.g.* para definir las épocas de recombinación

¹Para consultar detalles técnicos sobre la elección de parámetros en la caminata aleatoria MCMC de este trabajo, consultar el apéndice E.

4. ESTADÍSTICA COSMOLÓGICA PARA ENERGÍA OSCURA

y reionización). A continuación, resuelve las ecuaciones de Boltzmann, es decir, la evolución de las perturbaciones cosmológicas a primer orden y la función de transferencia para perturbaciones de materia, para finalmente computar cantidades observables como espectro angular de temperaturas TT , polarización EE o espectro de potencias de materia $P(k)$.

El modelo cosmológico *base* incluido en CLASS es Λ -CDM, pero el código acepta un amplio rango de posibles modificaciones al modelo estándar (a través de la elección de parámetros). Este tipo de modificaciones pueden conseguirse sin esfuerzos con sólo editar o crear un archivo formato `.ini` y correr el código. El caso general que ejemplifica todas las posibilidades puede consultarse en el archivo `explanatory.ini`.

A pesar de la gran flexibilidad del código, modificaciones menos estándar deben hacerse a mano. En nuestro caso, la ecuación de estado $w(z)_N$ en sus tres versiones ($N=1,2,3$) y la parametrización Barboza-Alcaniz debieron adaptarse apropiadamente a la estructura del código, mientras que la parametrización CPL se encontraba ya codificada en CLASS v2.7, que es la versión del código empleada en este trabajo.

4.2.2. El código MONTE PYTHON

MONTE PYTHON (MP) es un código de cadenas de Markov (MCMC) escrito en Python (Brinckmann and Lesgourgues, 2018) y diseñado para explorar y extraer los mejores valores de cierto espacio de parámetros θ . Su función consiste en ejecutar CLASS un número de veces, dependiendo del uso que se le dé al código, en el caso de la estimación de parámetros se ejecuta entre 10^4 y 10^7 veces (dependiendo de la complejidad del modelo (Lesgourgues, 2011, p. 1)) y, en términos generales, encontrar la distribución total de probabilidad, el posterior $P(\theta|D)$ y el valor esperado de los parámetros cosmológicos, así como sus barras de error o intervalos de confianza. En este trabajo se utilizaron las versiones 2.0 y 3.1 de MONTE PYTHON, con una implementación de jumping factor dinámico que eficientiza los recursos computacionales (Brinckmann and Lesgourgues, 2018) ahorrando horas de cómputo y asegurando una mejor exploración del espacio de parámetros¹.

¹Como nota al pie sobre el trabajo computacional de esta tesis, debe considerarse que de un total del orden de ~ 150 corridas ejecutadas entre 2018 y 2019 (cada una con sus respectivas cadenas en paralelo y número de pasos), se obtuvieron las 10 corridas **exitosas** que se presentan en este trabajo de tesis. El trabajo se comenzó con MONTE PYTHON 2.0 en donde la opción `superupdate` no estaba disponible, así que el jumping factor no podía ser actualizado; en su lugar, debió observarse con detenimiento, corrida por corrida, los resultados de criterio de convergencia y tasa de aceptación de tal forma que el trabajo consistió en su primer fase en eficientar las corridas, cambiando el jumping factor, el número de cadenas por corrida y el

4.3. Encuestas Astrofísicas/Cosmológicas

4.3.1. Supernovas Tipo Ia (SN)

Como ya se sabe, el estudio de supernovas Ia fue decisivo para el descubrimiento y posterior estudio de la aceleración cósmica. Aún en la actualidad sigue siendo útil el uso de los datos de supernovas para estudiar modelos que traten de explicar la expansión del universo. En este trabajo se usan los datos de supernovas del experimento SDSSII-SNLS3 / Joint Light-curve Analysis (JLA) (Betoule et al., 2014), que consisten en un total de 740 supernovas a lo largo de $0.01 < z < 1.299$. La tabla de datos completa puede consultarse en E.

4.3.2. Oscilaciones Acústicas de Bariones (BAO)

Se utilizará la señal de BAO comprendida en los datos del experimento BOSS, en su versión SDSS-III, DR12 (Alam et al., 2016), que consiste en la medición de alrededor de 1.2 millones de galaxias sobre un área de ~ 9300 grados². Como se vio en §2.7.2 los análisis de BAO condensan la información de millones de galaxias en una escala característica definida por dos cantidades: $H(z)$ y $d_A(z)$ (o $D_M(z)$, equivalentemente). En este caso, las mediciones se condensan en tres puntos, mostrados en la Tabla 4.1.

Medición	redshift	valor
D_M/r_d [Mpc]	$z = 0.38$	1512.39
D_M/r_d [Mpc]	$z = 0.51$	1975.22
D_M/r_d [Mpc]	$z = 0.61$	2306.68
$H \cdot r_d$ [km s ⁻¹ Mpc ⁻¹]	$z = 0.38$	81.2087
$H \cdot r_d$ [km s ⁻¹ Mpc ⁻¹]	$z = 0.51$	90.9029
$H \cdot r_d$ [km s ⁻¹ Mpc ⁻¹]	$z = 0.61$	98.9647

Tabla 4.1: Datos finales de $D_M(z)$ y $H(z)$ de BAO usados en este trabajo, reportados en (Alam et al., 2016).

El objetivo central de usar mediciones de BAO es restringir los parámetros asociados a energía oscura a z 's cercanas y aprovechar su cualidad de tener más poder de constricción que el que se tiene al sólo usar datos de $H(z)$.

número de pasos. El resultado final fue el 90% de cadenas convergidas, con tasas de aceptación dentro del rango definido por la literatura y con criterios de convergencia más que aceptables. Toda esta información puede consultarse en el apéndice E

4.3.3. Radiación Cómica de Fondo (CMB)

Recordaremos que en la sección §2.7 se vio que la radiación cósmica de fondo es una de las observables más precisas de la actualidad.

El experimento Planck cuenta a la fecha con tres lanzamientos de datos, cuya nomenclatura es PR1-2013, PR2-2015 y el más reciente PR3-2018 (consultar <http://pla.esac.esa.int/pla/#cosmology>). Al tiempo de las pruebas computacionales del presente trabajo (segunda mitad del 2018), los datos en su versión PR3-2018 aún no eran liberados en su totalidad, así que se optó por trabajar con la versión PR2-2015 que llamaremos aquí “Planck2015” (o simplemente “CMB”) y son introducidos en (Adam et al., 2016a) y están acompañados por otros veintiséis papers, de los cuáles nos apoyaremos principalmente en los números XIII, XIV y XI (respectivamente (Ade et al., 2016b), (Ade et al., 2016c) y (Aghanim et al., 2016)); y marginalmente en IX y II (respectivamente (Adam et al., 2016b) y (Ade et al., 2016a)).

De estos resultados se utilizaron los datos (likelihoods) que en (Aghanim et al., 2016, Tabla 1) aparecen con las nomenclaturas: `PlanckTT` y `lowTEB`. Que corresponden, respectivamente, a datos de temperatura (C_ℓ^{TT}) para multipolos grandes ($\text{high-}\ell = 30 \leq \ell \leq 2508$); y datos de temperatura + polarización (TEB) para multipolos pequeños ($\text{low-}\ell = 2 \leq \ell \leq 29$).¹

Estos datos se encuentran codificados en una paquetería que sólo es accesible a través del código escrito en lenguaje de programación C. Por esta razón no se presentan tablas explícitas, pero es posible consultar los detalles técnicos y su nomenclatura en E.

4.4. Metodología

4.4.1. Conjuntos de datos (D)

De los datos presentados se tomaron dos combinaciones fundamentales:

- Conjunto de datos 1: D_1 : BAO + SN.

$$\chi_{\text{Total 1}}^2 = \chi_{\text{BAO}}^2 + \chi_{\text{SN}}^2. \quad (4.5)$$

Los parámetros asociados a este conjunto de datos son,

$$\theta_1 = \{\omega_b, \omega_{cdm}, \Omega_\Lambda\}. \quad (4.6)$$

¹Una forma alternativa en la que se presentan estos datos es con la nomenclatura `PlanckTT+lowP`. Cabe notar que ambas combinaciones incluyen los mismos datos: temperatura en todo el espectro de ℓ : $2 \leq \ell \leq 2508$ + datos de polarización sólo en multipolos pequeños $2 \leq \ell \leq 29$.

- Conjunto de datos **2**: D_2 : CMB + BAO + SN

$$\chi_{\text{Total } 2}^2 = \chi_{\text{CMB}}^2 + \chi_{\text{BAO}}^2 + \chi_{\text{SN}}^2. \quad (4.7)$$

Los parámetros asociados a este conjunto de datos son,

$$\theta_2 = \{\omega_b, \omega_{\text{cdm}}, \Omega_\Lambda, A_s, n_s, \tau_{\text{reio}}\}. \quad (4.8)$$

Ya que los datos del conjunto D_1 están asociados intrínsecamente a z 's pequeñas, esperamos que el uso de estos datos arroje resultados diferentes o complementarios a los obtenidos al utilizar observaciones del fondo de microondas (D_2).

A su vez, algunos conjuntos de datos tienen asociados ciertos parámetros conocidos como *nuisance* o “*incómodos*”. Se les llama así pues no son parámetros relacionados con el modelo cosmológico ni pertenecen al espacio de parámetros θ , pero deben ser incluidos ya que sí se relacionan con el modelo teórico o de medición que subyace a los datos. Estos parámetros varían en su origen: pueden estar asociados a la teoría que apoya las mediciones o pueden ser parámetros de calibración del instrumento de medición (telescopio, interferómetro, espectroscopio, etc, etc). En este caso son los datos de supernovas (SN) y radiación cósmica de fondo (CMB) aquellos que tienen asociados parámetros nuisance. Los datos de SN necesitan de 4 parámetros (α, β, M y ΔM), éstos sirven para estandarizar el módulo de la distancia $\mu = m - M$ (Betoule et al., 2014, p. 6). Por otro lado, los datos de CMB high- ℓ hacen uso de 16 parámetros nuisance que, por brevedad, no se enunciarán aquí pero pueden ser consultados en el apéndice técnico. A estos 4+16 parámetros nuisance se les asignó un valor fijo basado en las recomendaciones hechas en (Betoule et al., 2014, Tabla 15) y (Ade et al., 2016b, Tabla 4). Para examinar los detalles, consultar en E.

4.4.2. Espacio de parámetros (Θ)

Recordemos que nuestra parametrización $w(z)_N$ tiene asociados dos, tres y cuatro parámetros libres en sus versiones $N=1$, $N=2$ y $N=3$, respectivamente. Además, tenemos dos parametrizaciones (CPL y BA) que se probarán con fines comparativos y que tienen, ambas, dos parámetros libres (w_0 y w_1). El espacio de parámetros de los modelos lo representamos con la letra θ_p ¹:

$$\theta_p = \{p_n\} = \begin{cases} \{w_0, w_1\} & \text{CPL, BA} \\ \{b_0, b_1\} & \text{N=1} \\ \{b_0, b_1, b_2\} & \text{N=2} \\ \{b_0, b_1, b_2, b_3\} & \text{N=3} \end{cases}$$

¹El subíndice p fue una elección personal asociada a la palabra *parametrizaciones*, no tiene ningún significado fuera de este trabajo.

4. ESTADÍSTICA COSMOLÓGICA PARA ENERGÍA OSCURA

Además de estos parámetros libres, para cada combinación de datos (D_1 y D_2) se asume un espacio de parámetros en particular, como se vio anteriormente en las ecuaciones (4.6) y (4.8).

Con fines de claridad y sólo para presentar el espacio de parámetros de los modelos de forma compacta, a todos los parámetros libres de las parametrizaciones $w(z)_N$, CPL y BA les asignaremos la nomenclatura p_n . De manera que se distinguen dos espacios de parámetros fundamentales que expresaremos con la letra *theta* mayúscula (Θ_1 y Θ_2),

- $\Theta_1 = \theta_p + \theta_1 = \{p_n, \omega_b, \omega_{cdm}, \Omega_\Lambda\}$
- $\Theta_2 = \theta_p + \theta_2 = \{p_n, \omega_b, \omega_{cdm}, \Omega_\Lambda, A_s, n_s, \tau_{reio}\}$

La razón de hacer esta separación entre espacios de parámetros es que el conjunto de datos D_1 no tiene el poder de restricción para acotar parámetros del fondo, como lo son A_s , n_s o τ_{reio} . Para evitar un gasto irracional de recursos computacionales (puesto que BAO y SN no tienen información sobre el fondo de microondas) es evidente que estos parámetros (θ_2) únicamente deben incluirse en las pruebas con el conjunto de datos D_2 .

4.4.3. Estimador χ^2 y criterios AIC, BIC

Para extraer información de las cadenas ejecutadas con MONTEPYTHON (MP) es necesario usar algún estimador estadístico que nos indique los valores más probables de los parámetros en Θ de acuerdo a los datos.

En este caso usaremos el estimador chi-cuadrada (χ^2) que es otra forma de probar que tan bueno es el ajuste y consiste en minimizar la cantidad χ^2 , que se relaciona con la función de likelihood \mathcal{L} de la siguiente manera:

$$\ln \mathcal{L} = -\chi^2/2 \quad (4.9)$$

Donde buscamos los valores de los parámetros Θ para los cuales \mathcal{L} sea un máximo o, análogamente $\chi^2 = -2\ln \mathcal{L}$ sea un mínimo. Tras correr MP un número apropiado de veces tal que se satisfagan criterios de convergencia y acceptance-rate¹, las *cadena*s obtenidas pueden ser analizadas para obtener los contornos de confianza y los mejores valores de los parámetros. El cálculo de (χ^2) lo hace MONTEPYTHON de manera automática al analizar dichas cadenas.

Como se pretende hacer una comparación entre el modelo estándar Λ -CDM y la propuesta de parametrización $w(z)_N$, así como entre ésta última y las otras dos parametrizaciones CPL y BA, es necesario, además, hacer un análisis de

¹Información más detallada sobre estos aspectos técnicos puede consultarse en [E](#)

los resultados desde un enfoque estadístico. En caso de que algun modelo en particular mejore los resultados se observará una minimización en los criterios de información Akaike (AIC) y/o Bayesiano (BIC) (Hobson, 2009), definidos como,

$$\begin{aligned} \text{AIC} &= -2\ln\mathcal{L} + 2m, \\ \text{BIC} &= -2\ln\mathcal{L} + m \ln n. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Estos toman en cuenta los grados de libertad $\nu = n - m$ del modelo, donde n es el número de datos y m el número de parámetros libres (Verde, 2007, p. 10). Por claridad, expresamos estas cantidades en las siguientes tablas.

Observable	Likelihood	n
CMB	PlanckTT	2479
	lowTEB	28
BAO	BOSS DR12	3
SN-Ia	JLA	740

Dataset	n_{Total}
BAO + SN	743
CMB + BAO + SN	3250

BAO + SN		
Modelo	m	ν
$w(z)_{N=1}$	5	738
$w(z)_{N=2}$	6	737
$w(z)_{N=3}$	7	736
Λ -CDM	3	740
CPL	5	738
BA	5	738

CMB + BAO + SN		
Modelo	m	ν
$w(z)_{N=1}$	8	3242
$w(z)_{N=2}$	9	3241
$w(z)_{N=3}$	10	3240
Λ -CDM	6	3244

Para conocer la tensión entre los modelos se utiliza la distancia sigma (σ_{distance}) (Escamilla-Rivera, 2016), definida como:

$$\sigma_{\text{distance}} = \sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1} \left(1 - \exp\{-(\chi_{\text{base}}^2 - \chi_{\text{modelo}}^2)/2\} \right). \quad (4.11)$$

4.4.4. Otros parámetros

A partir de los seis parámetros que conforman el modelo estándar pueden derivarse otras cantidades relevantes. Se obtendrán los valores de H_0 , σ_8 y z_{reio} . En el caso de H_0 y σ_8 , el primero se obtiene del parámetro h que se relaciona a los parámetros de densidad Ω_m y Ω_{cdm} a través del parámetro físico de densidad $\omega_x \equiv \Omega_x h^2$; σ_8 se calcula desde el espectro de potencias $P(k)$ y τ_{reio} (o z_{reio}) se calculan a partir de la distribución total de probabilidad puesto que no es un parámetro derivado sino que depende de la física al final de la era oscura.

5.1. Modelos (I)

Se probaron varios modelos con el fin de encontrar un punto de comparación a) entre el modelo estándar Λ -CDM y las propuestas paramétricas. b) entre las parametrizaciones.

- I₁: parametrización $w(z)_{N=1}$
- I₂: parametrización $w(z)_{N=2}$
- I₃: parametrización $w(z)_{N=3}$
- I₄: modelo Λ -CDM
- I₅: parametrización CPL
- I₆: parametrización BA

Así, por ejemplo y para no dar lugar a confusiones, si se prueba el modelo I₁ con el conjunto de datos D_1 (es decir, $w(z)_{N=1}$ con BAO+SN), el espacio de parámetros será de dimensión 5, $\Theta_1 = \{b_0, b_1, \omega_b, \omega_{cdm}, \Omega_\Lambda\}$; el mismo modelo probado con los datos D_2 tiene un espacio de parámetros de dimensión 8, $\Theta_2 = \{b_0, b_1, \omega_b, \omega_{cdm}, \Omega_\Lambda, A_s, n_s, \tau_{reio}\}$; el espacio de parámetros del modelo Λ -CDM probado con los datos D_1 tendrá dimensión 3 y así sucesivamente.

5.2. Priors.

Ya que el posterior está parcialmente condicionado a la elección de priors ([Amenola and Tsujikawa, 2010](#)), es importante reportar la elección de los priors. Consideramos priors gaussianos para todos los parámetros libres en Θ_1 y Θ_2 , en el caso de los cinco parámetros estándar ($\omega_b, \omega_{cdm}, A_s, n_s, \tau_{reio}$) se eligieron como media los valores reportados en ([Ade et al., 2016b](#), Tabla 4, Columna 1: “TT+lowP”):

- ω_b : media = 2.222×10^{-2} , $1\sigma = 0.00023$
- ω_{cdm} : media = 0.1197, $1\sigma = 0.0022$
- $10^9 A_s$: media = 2.198, $1\sigma = 0.080$

5. RESULTADOS

- n_s : media = 0.9655, $1\sigma = 0.0062$
- τ_{reio} : media = 0.078, $1\sigma = 0.019$

Para los parámetros asociados a la ecuación de estado (b_0, \dots, b_N) ó (w_0, w_1) se consideraron también priors con distribución de probabilidad gaussiana, sin embargo, la elección de cotas superior e inferior fue más relajada para dar libertad de exploración al código. Únicamente se tomaron en cuenta las cotas impuestas por las condiciones físicas, en éste caso, que la ecuación de estado fuera subdominante para z 's grandes ($w(z \gg 1) < -1/3$).

- b_0 : media = -0.957 , $1\sigma = 0.5$
- b_N : media = -0.336 , $1\sigma = 0.5$
- b_x : media = -0.1 , $1\sigma = 0.5$

Finalmente, recordemos que se ha considerado un universo plano, *i.e.* $\sum_i \Omega_i = 1$.

A continuación se presentan los resultados obtenidos al realizar un análisis de cadenas de Markov (o Markov-Chain Monte-Carlo / MCMC) sobre la ecuación de estado $w(z)_N$ en sus tres variantes y el modelo Λ -CDM (modelos I_1, I_2, I_3, I_4), con ambos conjunto de datos D_1 y D_2 ; además de las parametrizaciones CPL y BA (modelos I_5, I_6) únicamente con el conjunto de datos D_1 . Dando un total de diez combinaciones de modelos probados con datos.

Debido a la gran cantidad de información obtenida al hacer estas diez pruebas, es necesario detenernos un momento y evaluar el camino que se tomará para este análisis.

Aquí es relevante recordar las preguntas que nos hicimos a lo largo de este trabajo:

1. ¿Cómo podemos estudiar una posible dinámica de la energía oscura?
2. ¿Los datos serán capaces de restringir nuestra propuesta?
3. ¿Dadas tres parametrizaciones bi-dimensionales (*e.g.* CPL, BA y $w(z)_{N=1}$), ¿cuál es favorecida por los datos y por qué?
4. Dentro de nuestra propuesta $w(z)_N$, ¿cuál de sus variantes ($N=1,2$ ó 3) es favorecida por los datos?
5. ¿Qué pasa con esta parametrización si usamos un conjunto de datos distinto?, ¿cambia la variante preferida al usar sólo datos a z 's cercanas? ¿qué pasa si se usan datos de z 's grandes?
6. ¿Qué se observa al comparar con el modelo Λ -CDM?

7. ¿Qué tan distintos entre sí son los modelos que se probaron?, ¿Qué se observa al analizar los resultados utilizando el criterio χ^2 y los criterios estadísticos AIC o BIC?

Puesto que el objetivo central de esta tesis es estudiar una posible dinámica de energía oscura, es evidente que debemos fijarnos en los resultados obtenidos al utilizar el conjunto de datos D_1 : BAO+SN, ya que comprenden datos a z 's cercanas, donde domina energía oscura. Los resultados obtenidos con el conjunto de datos D_2 : CMB+BAO+SN complementarán el análisis ya que con ellos veremos qué tan robusta es la parametrización que hemos presentado, pues nos darán información acerca de los parámetros físicos ($\omega_b, \omega_c, H_0, \Omega_{DE}, A_s, n_s, \tau_{reio}, \sigma_8$). Es importante recordar que centralmente debemos enfocarnos en los resultados de b_0, b_1, b_2, b_3 y w_0, w_1 , que se refieren a la dinámica de la ecuación de estado.

5.3. Escenarios a tiempos tardíos (D_1 : BAO+SN).

Usando D_1 (que comprende tiempos “tardíos”: $0.01 \leq z \leq 1.299$) reportamos los resultados en las Tablas (5.1 y 5.2). Asumiendo un enfoque estadístico, los criterios Akaike y Bayesiano indican que estos datos favorecen al modelo Λ -CDM. Sobre esa misma línea, comparando los tres modelos de dos parámetros ($N=1$, CPL y BA), tanto el estimador χ^2 como los criterios estadísticos muestran evidencia a favor de nuestra propuesta $w(z)_{N=1}$. El mejor ajuste (best fit) apunta a una ecuación de estado dinámica con valor al día de hoy (b_0) muy cercano al -1 que decae (como energía oscura) a un valor más positivo hacia el pasado $b_1 = -0.27$. En la Figura 5.1 se puede observar la ecuación de estado de todos los modelos probados con este conjunto de datos (y cuyas cadenas convergieron, por ello se excluye a $w(z)_{N=3}$).

Aunque nuestra propuesta en su variante $N=1$ no es favorecida estadísticamente sobre el modelo estándar, puesto que un interés central en este trabajo es conocer la dinámica de la energía oscura, es importante observar los valores de χ^2 . En particular la comparación entre modelos similares es válida y muestra que hay una mayor probabilidad de obtener los datos D_1 al asumir nuestra propuesta $N=1$ que al asumir CPL o BA. La dinámica presentada por el mejor ajuste de $N=1$ muestra que la energía oscura cruza la phantom-dividing line hacia una zona donde el comportamiento es tipo campo Quintaesencia, a diferencia de los resultados obtenidos con CPL y BA en donde la dinámica muestra un comportamiento tipo fantasma hacia z 's grandes.

A su vez, la propuesta $w(z)_{N=2}$ resulta no ser favorecida por esta elección de datos, sugiriendo una probable preferencia por parametrizaciones con menos parámetros libres.

5. RESULTADOS

Los contornos de confianza de 1σ y 2σ (68% y 95%) para cada modelo probado con el conjunto de datos D_1 se presentan en la primera sección del apéndice de gráficas (D).

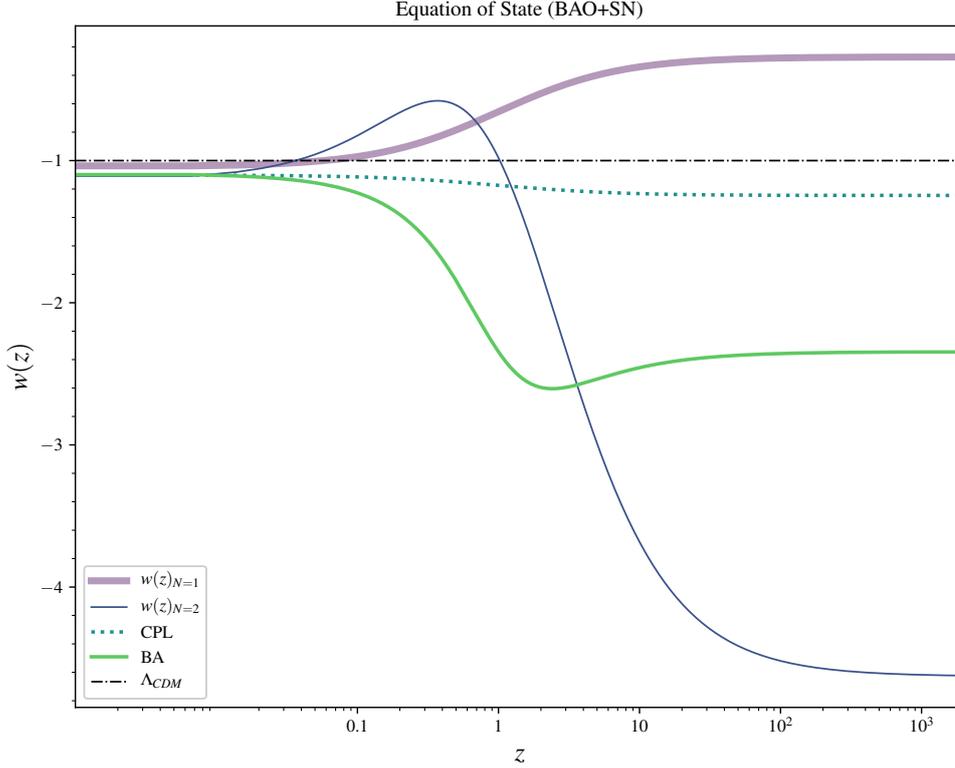


Figura 5.1: Gráfica de la ecuación de estado de a) dos variantes de la parametrización $w(z)_N$, b) las parametrizaciones CPL y BA y c) el modelo estándar Λ -CDM. Las graficas corresponden a los valores del mejor ajuste (best fit) derivado de un análisis MonteCarlo de dichos modelos usando datos de BAO y Supernovas.

5.3.1. Caso $w(z)_{N=1}$

Las distribuciones resultantes de $w(z)_{N=1}$ se muestran en las Figuras D.3 y D.4. Nos referimos a estas gráficas para el siguiente análisis.

Observemos los parámetros de la ecuación de estado (b_0, b_1); el parámetro b_0 se encuentra bien restringido, tiene una distribución de probabilidad centrada alrededor del -1.08; el parámetro b_1 se encuentra menormente restringido, nótese la dispersión hacia valores muy negativos y el fenómeno de gaussiana “cortada”

5.3 Escenarios a tiempos tardíos (D_1 : BAO+SN).

BAO+SN						
Param	$w(z)_{N=1}$		$w(z)_{N=2}$		$w(z)_{N=3}$	
	Best fit	mean $\pm 68\%$	Best fit	mean $\pm 68\%$	Best fit	mean $\pm 68\%$
$100\Omega_b h^2$	2.589	$1.426^{+0.2}_{-0.93}$	3.946	$1.675^{+0.31}_{-1.2}$	2.12	$2.119^{+0.26}_{-0.3}$
$\Omega_c h^2$	0.1063	$0.1638^{+0.05}_{-0.024}$	0.06009	$0.1528^{+0.058}_{-0.031}$	0.1258	$0.127^{+0.015}_{-0.015}$
b_0	-1.042	$-1.055^{+0.24}_{-0.22}$	-1.136	$-1.209^{+0.28}_{-0.28}$	-2.24×10^9	$-1.6 \times 10^9 \pm ?$
b_1	-0.2704	$-2.418^{+2.3}_{-0.61}$	1.845	$-1.404^{+3.5}_{-2.5}$	-1.15×10^9	$-7.99 \times 10^8 \pm ?$
b_2	-	-	-4.629	$-4.69^{+1.9}_{-3.9}$	2.69×10^9	$3.77 \times 10^8 \pm ?$
b_3	-	-	-	-	-7.91×10^8	$-1.08 \times 10^9 \pm ?$
Ω_{DE}	0.7194	$0.6196^{+0.05}_{-0.085}$	0.79	$0.6403^{+0.063}_{-0.097}$	0.8774	$0.8763^{+0.012}_{-0.01}$
H_0	68.65	$68.42^{+0.83}_{-0.84}$	68.85	$68.71^{+0.91}_{-0.91}$	109.5	109.5^{+1}_{-1}
χ^2	685.844		685.503		sin convergencia	
AIC	695.844		697.503		-	
BIC	718.897		725.168		-	

Tabla 5.1: Mejores ajustes (best fit) y cotas de confianza del 68 % (1σ) para la parametrización en sus tres versiones $w(z)_{N=1,2,3}$, derivados de un análisis MonteCarlo usando la señal de BAO (Alam et al., 2016) y mediciones de distancia con Supernovas Ia (Betoule et al., 2014). Se muestran los parámetros explorados y posteriormente un parámetro derivado (H_0). Se reporta el estimador χ^2 y dos criterios de información: Akaike y Bayesiano. Valores de χ^2 redondeados a la 3a cifra significativa. En el caso $w(z)_{N=3}$ no se alcanzó convergencia en las cadenas, por ello no se reporta el estimador ni los criterios de información.

cerca del cero (esto se explica con más detalle en la discusión de resultados generales para D_1 , abajo). Por otro lado, notaremos que el corte en el espacio $\{\omega_b, \omega_c, \Omega_{DE}\}$ muestra: una tendencia en el valor de ω_b por tomar valores hacia el cero y un fenómeno de “doble máximo” en los parámetros ω_c y Ω_{DE} , es decir, además del máximo global representado por el pico en la función de probabilidad, tenemos un máximo local en ambos casos. Este fenómeno se discute más abajo en la discusión de resultados generales para D_1 . Finalmente, encontramos que el valor de la cte. de Hubble al día de hoy H_0 es compatible con las mediciones de Planck, con un valor alrededor de los 68 km/s/Mpc.

5.3.2. Caso $w(z)_{N=2}$

Las distribuciones resultantes de $w(z)_{N=2}$ se muestran en las Figuras D.5 y D.6. Nos referimos a estas gráficas para el siguiente análisis.

Los parámetros de la ecuación de estado (b_0, b_1, b_2) muestra lo siguiente: la ecuación de estado al día de hoy (b_0) se encuentra bien restringida al igual que en el caso anterior; el parámetro intermedio b_1 tiene una dispersión considerable alrededor de su media, aún así, se encuentra bien acotado como lo muestra la gráfica D.6 además de que no presenta degeneraciones y de hecho muestra cierto grado

5. RESULTADOS

BAO+SN						
Param	Λ -CDM		CPL		BA	
	Best fit	mean $\pm 68\%$	Best fit	mean $\pm 68\%$	Best fit	mean $\pm 68\%$
$100\Omega_b h^2$	2.117	$2.12^{+0.26}_{-0.3}$	1.625	$1.196^{+0.12}_{-0.7}$	1.651	$1.118^{+0.1}_{-0.62}$
$\Omega_c h^2$	0.1258	$0.127^{+0.015}_{-0.015}$	0.1488	$0.1751^{+0.04}_{-0.019}$	0.1478	$0.1793^{+0.038}_{-0.018}$
w_0	-1	-1	-1.102	$-1.011^{+0.22}_{-0.22}$	-1.09	$-1.07^{+0.2}_{-0.2}$
w_1	0	0	-0.1441	$-2.133^{+2}_{-0.52}$	-0.1254	$-1.336^{+1.2}_{-0.3}$
Ω_{DE}	0.6857	$0.6827^{+0.031}_{-0.029}$	0.6483	$0.5989^{+0.041}_{-0.071}$	0.6507	$0.5922^{+0.038}_{-0.067}$
H_0	68.39	$68.39^{+0.64}_{-0.65}$	68.5	$68.29^{+0.81}_{-0.82}$	68.59	$68.35^{+0.8}_{-0.82}$
χ^2	686.041		686.001		686.022	
AIC	692.041		696.001		696.022	
BIC	705.873		719.055		719.075	

Tabla 5.2: Mejores ajustes (best fit) y cotas de confianza del 68 % (1σ) para el modelo Λ -CDM y las parametrizaciones CPL y Barboza-Alcaniz, derivados de un análisis MonteCarlo usando la señal de BAO (Alam et al., 2016) y mediciones de distancia con Supernovas Ia (Betoule et al., 2014). Se muestran los parámetros explorados y posteriormente un parámetro derivado (H_0). Se reporta el estimador χ^2 y dos criterios de información: Akaike y Bayesiano. Valores de χ^2 redondeados a la 3a cifra significativa.

de correlación con el parámetro de energía oscura (revisar la intersección b_2 vs Ω_{DE}). El parámetro b_2 que representa la ecuación de estado a tiempos tempranos (cuando $z \gg 1$) muestra una evidente degeneración: la función de probabilidad está dispersa a lo largo del intervalo de exploración, podemos confirmarlo observando la gráfica triangular D.6: en las intersecciones entre b_2 y H_0 , b_2 y Ω_{DE} , b_2 y b_0 y b_2 y b_1 : notaremos que cualquier valor que tome b_2 no afecta el valor de sus contrapartes. Lo que nos puede sugerir esta observación son dos cosas: a) que en particular la propuesta $w(z)_{N=2}$ está degenerada en su parámetro extremo b_2 o que b) los datos en D_1 en particular son incapaces de restringir el valor de $w(z)$ para z 's grandes. Tendría sentido ya que este conjunto de datos comprende z 's entre 0.01 y 1.2, las cuales no son lo suficientemente grandes como para que b_2 domine efectivamente sobre b_0 y b_1 dentro de la ecuación de estado. Sin embargo, nos faltaría conocer los resultados con D_2 para tener una perspectiva más clara.

En el caso del espacio $\{\omega_b, \omega_c, \Omega_{DE}\}$ notamos los mismos fenómenos que en el caso anterior: una tendencia de ω_b hacia valores cerca del cero y el fenómeno de doble máximo en ω_c y Ω_{DE} ; esta última observación podría tener al menos dos interpretaciones: a) los datos en D_1 no tienen un poder de restricción sobre los parámetros físicos ó b) la parametrización $w(z)_N$ es incapaz de reproducir con precisión la cantidad de materia y energía oscura, para tomar una postura es necesario conocer los resultados con D_2 . Finalmente, al igual que en el caso anterior, el valor de H_0 está bien restringido y es compatible con las mediciones de 68 km/s/Mpc.

5.3.3. Caso $w(z)_{N=3}$

Las distribuciones resultantes de $w(z)_{N=3}$ se muestran en las Figuras D.7 y D.8. Nos referimos a estas gráficas para el siguiente análisis.

El caso $N=3$ no es concluyente. Notemos cómo los parámetros (b_0, b_1, b_2, b_3) se encuentran dispersos a lo largo de varios ordenes de magnitud; en el caso de b_0 y b_3 es evidente la no-gaussianidad de la función de distribución de probabilidad. El hecho de que la función de distribución esté dispersa sobre un volumen tan amplio del espacio de parámetros nos indica evidentemente que las cadenas no alcanzaron la convergencia necesaria (*i.e.* la condición $R-1 < 0.01$ no fue satisfecha), por más que se utilizaron elecciones de longitud de cadenas (N), tamaño de paso (f), número de cadenas y elección de priors, consistentes con los casos $N=1$ y $N=2$ -en donde sí se obtuvo convergencia y distribuciones gaussianas-. La razón detrás de esta incapacidad de converger resulta ambigua para mí hasta este momento, pero el alto número de grados de libertad debería al menos decirnos que no es una cuestión relacionada con los datos ni con una falta de información, sino con algún problema inherente a la parametrización. Optamos por seguir en el análisis y pasar a los resultados con D_2 antes de emitir alguna hipótesis.

Mientras que ω_b, ω_c y Ω_{DE} sí están bien definidas y no presentan los fenómenos que vimos en los casos $N=1$ y $N=2$ (tendencia hacia el cero en ω_b y doble máximo en los otros dos), el análisis estadístico nos obliga a decir que este resultado no es válido: sólo ω_b y ω_c lograron convergencia, mientras que los demás parámetros, incluido H_0 presentan baja o nula convergencia, con valores de $R-1$ alrededor del 0.9 o 1. La observación relevante aquí es que parecería ser que nuestra propuesta $w(z)_N$, al menos usando D_1 , tiene un número de parámetros límite antes de volverse degenerada. Una discusión más detallada sobre el criterio de convergencia puede consultarse en el apéndice E.

5.3.4. Caso Λ -CDM

Las distribuciones resultantes de Λ -CDM se muestran en las Figuras D.1 y D.2. Nos referimos a estas gráficas para el siguiente análisis.

En este caso, la función de distribución de probabilidad se encuentra bien acotada dentro de un volumen pequeño en el espacio de parámetros. Nótese que todos los parámetros tienen una distribución gaussiana y el parámetro de Hubble al día de hoy también es compatible con la medición de 68 km/s/Mpc.

5.3.5. Caso CPL

Las distribuciones resultantes de la parametrización CPL se muestran en las Figuras D.9 y D.10. Nos referimos a estas gráficas para el siguiente análisis.

5. RESULTADOS

Aunque CPL es equivalente a $w(z)_{N=1}$, como se vió en el Capítulo 3, estas parametrizaciones están escritas en distintas variables, así que, aunque b_0 tiene el mismo significado físico que w_0 , los parámetros b_1 y w_1 representan distintas cosas: el valor de $w(z)$ para z 's grandes y la derivada de $w(z)$ con respecto de z , respectivamente. Es por ello que hacemos este análisis, además del ya presentado para el caso $N=1$.

La ecuación de estado al día de hoy (w_0) se encuentra bien restringida alrededor del -1.01, mientras que el valor de w_1 muestra un comportamiento similar al obtenido en $w(z)_N$: una dispersión hacia valores más negativos y un efecto de distribución “cortada” alrededor del cero. A su vez, únicamente ω_b muestra el comportamiento antes visto en $N=1$ y $N=2$: tendencia en la distribución de probabilidad de tomar valores hacia el cero; mientras que ω_c y Ω_{DE} no presentan el fenómeno de “doble máximo” antes visto.

5.3.6. Caso BA

Las distribuciones resultantes de la parametrización BA se muestran en las Figuras D.11 y D.12. Nos referimos a estas gráficas para el siguiente análisis.

Los resultados de la parametrización Barboza-Alcaniz son muy similares a los obtenidos con CPL, notaremos unicamente un cambio perceptible en la cota sobre la distribución de probabilidad de w_1 : mientras que con CPL el valor de w_1 se extiende desde el cero hasta ~ -7.8 , el mismo parámetro se encuentra mejor acotado con BA, extendiéndose desde el cero hasta ~ -4.0 . Se observa la misma tendencia de w_1 por tomar valores hacia el cero, lo mismo para ω_b .

5.3.7. Discusión, resultados generales.

Para discriminar posibles resultados generales, se muestra en la Figura 5.2 la superposición de todos los resultados obtenidos con el conjunto de datos D_1 .

Ecuación de estado al día de hoy (p_0). En todos los casos ($w(z)_{N=1,2}$, CPL y BA), los datos restringen bien la ecuación de estado al día de hoy (a través de b_0 o w_0).

Parámetro b_1 ($w(z)_{N=1}$) o parámetro w_1 (CPL, BA). Por un lado, b_1 representa la ecuación de estado en tiempos tempranos en $N=1$ y w_1 qué tan dependiente de z es la ecuación de estado $w(z)$ CPL y BA. A pesar de que las interpretaciones físicas son ligeramente distintas, los resultados nos muestran un comportamiento similar: estos parámetros tienden al cero pero no logran cruzar hacia valores positivos mostrando estas que llamamos “gaussianas cortadas”. Una posible explicación tiene que ver con que la ecuación de estado en z 's grandes no

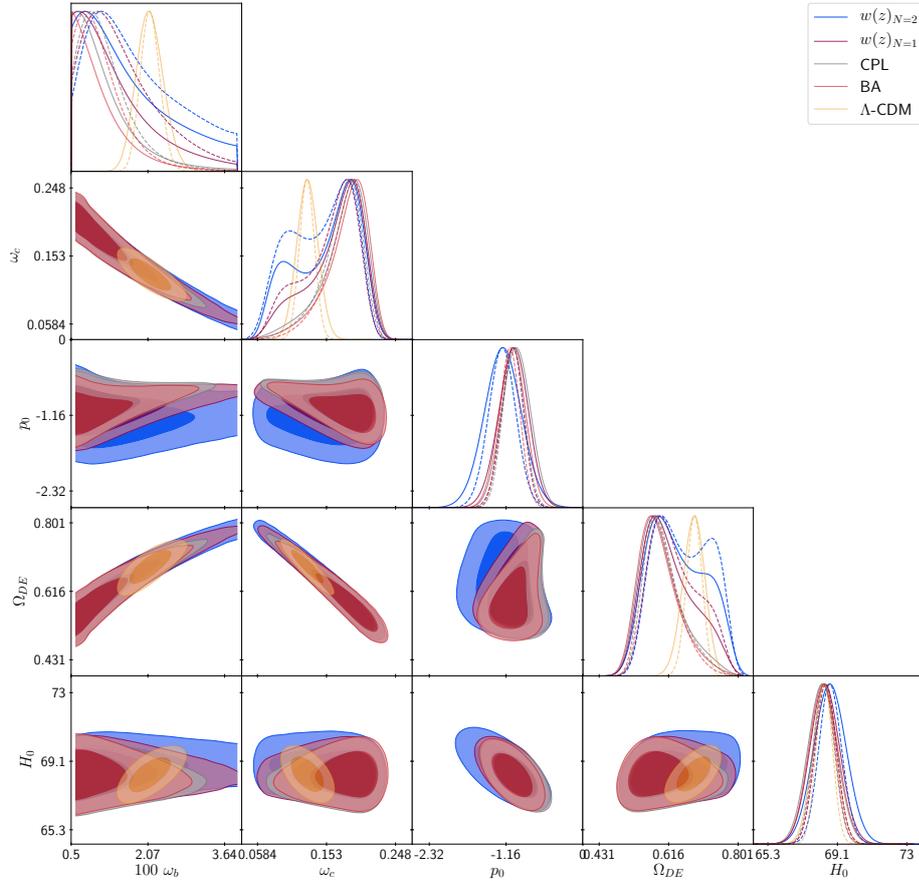


Figura 5.2: Comparación de resultados entre modelos $w(z)_{N=1}$, $w(z)_{N=2}$, CPL, BA y Λ -CDM usando datos de BAO+SN (D_1).

puede ser mayor a $-1/3$, como se vio en Capítulos anteriores. Esta restricción está codificada dentro de MontePython y se manifiesta en estas “gaussianas cortadas”. Independientemente de la elección de priors, el código *fuerza* a la ecuación de estado a no cruzar el 0. No obstante, el hecho de que los valores estén centrados alrededor del -1, es decir, que incluya al -1 dentro de la región de confianza del 68 % para $N=1$) nos dice que estas parametrizaciones son compatibles con Λ -CDM.

Parámetros físicos. El caso “ejemplar” es Λ -CDM (contornos amarillos): todos los parámetros físicos (ω) se encuentran bien restringidos y su función de distribución de probabilidad es gaussiana. El efecto de “doble máximo” observado en los casos $N=1$ y $N=2$ no es visible en las parametrizaciones CPL y BA. Esto nos podría indicar que **nuestra propuesta de parametrización es más débil a la hora de restringir estos parámetros de densidad**. El valor de H_0 es consistente a lo largo de todos los modelos probados, centrado alrededor

5. RESULTADOS

del 68.5. Se observa una evidente tensión entre las parametrizaciones y el modelo Λ -CDM en las cantidades físicas, mantengamos esto presente antes de analizar los resultados con D_2 .

Resultados Cuantitativos. Como lo muestran las Tablas 5.1 y 5.2, los criterios AIC y BIC indican que el modelo que mejor se ajusta a los datos es Λ -CDM, seguido por $w(z)_{N=1}$, CPL, BA y finalmente $w(z)_{N=2}$. En el caso de las parametrizaciones bidimensionales (CPL, BA y N=1) ya que el número de grados de libertad ν es igual en los tres casos, puede hacerse una comparación utilizando el estimador χ^2

BAO + SN	
Modelos	σ_{distance}
(Λ -CDM, N=1)	0.1180
(Λ -CDM, N=2)	0.2999
(Λ -CDM, CPL)	0.0247
(Λ -CDM, BA)	0.0121

Tabla 5.3: Distancia sigma entre el modelo *base* Λ -CDM y los demás modelos probados con el conjunto de datos D_1 . Redondeado a la cuarta cifra significativa.

BAO + SN	
Modelos	ΔBIC
(Λ -CDM)	0
(Λ -CDM, N=1)	26.246
(Λ -CDM, N=2)	39.127
(Λ -CDM, CPL)	26.403
(Λ -CDM, BA)	26.423

Tabla 5.4: ΔBIC para todos los modelos probados con D_1 . La preferencia por el modelo Λ -CDM sobre los demás es muy fuerte bajo este criterio.

- ¿Qué modelo es favorecido por el conjunto de datos D_1 ?

Los criterios AIC y BIC apuntan al modelo estándar Λ -CDM.

- ¿Cuál de las tres parametrizaciones $w(z)_{N=1}$, CPL ó BA, está favorecida por los datos?

BAO + SN	
Modelos	ΔBIC
(N=1)	0
(N=1, CPL)	0.157
(N=1, BA)	0.178

Tabla 5.5: ΔBIC para los modelos con dos parámetros libres (N=1, CPL y BA). Bajo este criterio, los modelos candidato CPL y BA son casi tan buenos como N=1.

Desde una perspectiva estadística, los criterios AIC y BIC apuntan a nuestra propuesta $w(z)_{N=1}$ sobre CPL y BA. Al comparar los valores de χ^2 notamos una ligera mayor probabilidad de obtener los datos D_1 dado el modelo $w(z)_{N=1}$, posteriormente y en orden CPL y BA.

- ¿Qué tan parecidos son los modelos?

Desde un enfoque de distancia-sigma (Tabla 5.3), la tensión entre el modelo estándar y los demás modelos es siempre menor a 0.3σ . Ambas observaciones nos confirman que los modelos concuerdan fuertemente con Λ -CDM, pues $\sigma_{\text{distance}} < 0.3\sigma$ se cumple en todos los casos. A su vez, las parametrizaciones con mismos grados de libertad (N=1, CPL y BA) tienen una diferencia porcentual $\Delta\chi^2$ menor al 0.03 %

- ¿Qué observaciones relevantes hay al asumir un enfoque bayesiano?

El criterio BIC castiga estrictamente a modelos con un número alto de parámetros libres, notamos que modelos con 2 o 3 parámetros libres más que Λ -CDM se ven seriamente castigados (Tabla 5.4) pues la preferencia por el modelo estándar es muy fuerte por sobre los demás. Al comparar parametrizaciones con los mismos grados de libertad (Tabla 5.5) notamos que no hay preferencia considerable sobre ningún modelo en particular, puesto que $\Delta\text{BIC} < 2$, se puede decir que los tres modelos son prácticamente iguales.

5.4. Escenarios a tiempos tempranos (D_2 : CMB+BAO+SN).

Con el conjunto de datos D_2 se tienen datos hasta la superficie de última dispersión, alrededor de $z \sim 1100$. Reporto los resultados en las Tablas (5.6 y 5.7). Desde un enfoque estadístico, los criterios AIC y BIC indican que este conjunto de datos favorece al modelo Λ -CDM, posteriormente N=1, N=2 y finalmente N=3 como el modelo con menos evidencia a su favor. Discriminando entre las tres variantes de nuestra propuesta $w(z)_N$, la probabilidad de obtener los datos

5. RESULTADOS

D_2 es mayor dada la variante $N=1$. La Figura 5.3 muestra los cuatro modelos probados.

Los contornos de confianza de 1σ y 2σ (68% y 95%) para cada modelo probado con el conjunto de datos D_1 se presentan en la segunda sección del apéndice de gráficas (D).

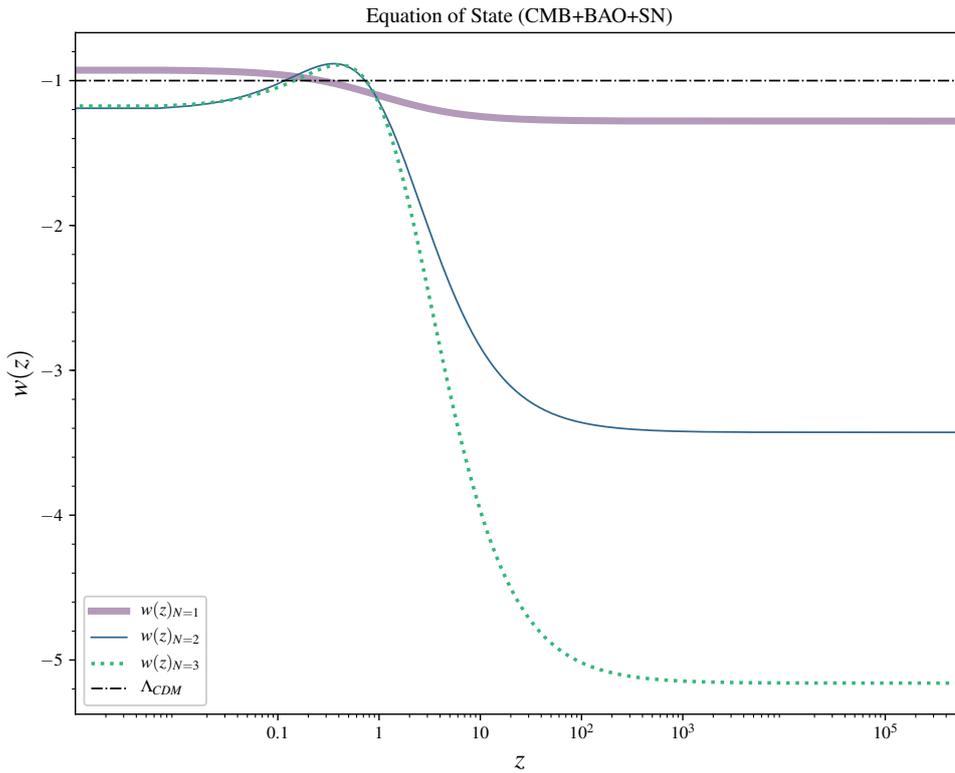


Figura 5.3: Gráfica de la ecuación de estado de las tres variantes de la parametrización $w(z)_N$ ($N=1,2,3$) y el modelo Λ -CDM. Las graficas corresponden a los valores del mejor ajuste (best fit) derivado de un análisis MonteCarlo de dichos modelos usando datos de CMB, BAO y Supernovas.

5.4.1. Caso $w(z)_{N=1}$

Las distribuciones resultantes de $w(z)_{N=1}$ se muestran en las Figuras D.15 y D.16. Nos referimos a estas gráficas para el siguiente análisis.

En primer lugar notaremos que ambos parámetros de la ecuación de estado (b_0 , b_1) se encuentran bien restringidos; notemos que tanto b_0 como b_1 incluyen al

5.4 Escenarios a tiempos tempranos (D_2 : CMB+BAO+SN).

CMB+BAO+SN						
Param	$w(z)_{N=1}$		$w(z)_{N=2}$		$w(z)_{N=3}$	
	Best fit	mean $\pm 68\%$	Best fit	mean $\pm 68\%$	Best fit	mean $\pm 68\%$
$100\Omega_b h^2$	2.238	$2.238^{+0.018}_{-0.018}$	2.246	$2.237^{+0.018}_{-0.019}$	2.239	$2.237^{+0.018}_{-0.019}$
$\Omega_c h^2$	0.1191	$0.1192^{+0.0019}_{-0.0019}$	0.1187	$0.1197^{+0.0019}_{-0.0019}$	0.1189	$0.1197^{+0.002}_{-0.002}$
$10^{+9}A_s$	2.264	$2.245^{+0.075}_{-0.079}$	2.227	$2.236^{+0.075}_{-0.08}$	2.243	$2.235^{+0.076}_{-0.079}$
n_s	0.9697	$0.9699^{+0.0048}_{-0.0049}$	0.9703	$0.9688^{+0.0047}_{-0.005}$	0.9696	$0.9688^{+0.005}_{-0.0051}$
τ_{reio}	0.09225	$0.08777^{+0.018}_{-0.018}$	0.08472	$0.08515^{+0.018}_{-0.018}$	0.08768	$0.08501^{+0.018}_{-0.018}$
b_0	-0.9266	$-0.9242^{+0.12}_{-0.13}$	-1.207	$-1.269^{+0.27}_{-0.26}$	-1.187	$-1.259^{+0.42}_{-0.38}$
b_1	-1.28	$-1.331^{+0.39}_{-0.29}$	0.05036	$0.6976^{+2.1}_{-1.9}$	-1.918	$-0.7239^{+3.7}_{-4.1}$
b_2	-	-	-3.429	$-4.632^{+2.6}_{-2.2}$	-1.017	$-3.624^{+7.1}_{-6.3}$
b_3	-	-	-	-	-5.16	$-4.793^{+1.9}_{-3.9}$
Ω_{DE}	0.6961	$0.6968^{+0.0083}_{-0.0079}$	0.7012	$0.7006^{+0.0088}_{-0.0083}$	0.7029	$0.7006^{+0.009}_{-0.0087}$
H_0	68.24	$68.35^{+0.77}_{-0.79}$	68.73	$68.91^{+0.86}_{-0.88}$	68.97	$68.91^{+0.94}_{-0.98}$
z_{reio}	11.19	$10.75^{+1.7}_{-1.5}$	10.49	$10.52^{+1.7}_{-1.5}$	10.78	$10.51^{+1.7}_{-1.5}$
σ_8	0.8471	$0.8453^{+0.019}_{-0.019}$	0.8422	$0.8535^{+0.019}_{-0.019}$	0.8501	$0.8534^{+0.02}_{-0.021}$
Ω_m	-	-	0.3002	$0.3007^{+0.0084}_{-0.0088}$	0.2985	$0.3007^{+0.0088}_{-0.0091}$
χ^2	11975.636		11974.718		11974.605	
AIC	11991.6		11992.7		11994.6	
BIC	12040.3		12047.5		12055.5	

Tabla 5.6: Mejores ajustes (best fit) y cotas de confianza del 68 % (1σ) para la parametrización en sus tres versiones $w(z)_{N=1,2,3}$, derivados de un análisis MonteCarlo usando el espectro de temperaturas del CMB + datos de polarización en los multipolos bajos (Ade et al., 2016b); la señal de BAO (Alam et al., 2016) y mediciones de distancia con Supernovas Ia (Betoule et al., 2014). Se muestran los parámetros explorados y posteriormente cuatro parámetros derivados. Se reporta el estimador χ^2 y dos criterios de información: Akaike y Bayesiano. Valores de χ^2 redondeados a la 3a cifra significativa.

valor de -1 dentro del intervalo de confianza 1σ , asegurando la compatibilidad con el modelo estándar. Se observa también la ausencia del fenómeno de “doble máximo” visto en las distribuciones de ω_c y Ω_{DE} con el conjunto de datos D_1 , así como ω_b que ya no presenta valores hacia el cero, sino que se encuentra bien acotada alrededor del 0.0224. Por otro lado, los parámetros del espectro primordial de potencias (A_s , n_s) y la época de reionización (τ_{reio} ó z_{reio}) no presentan distribuciones de probabilidad con fenómenos en particular que merezcan mencionarse. Finalmente, el valor de H_0 es compatible con las observaciones de 68 km/s/Mpc.

5. RESULTADOS

CMB+BAO+SN		
	Λ -CDM	
Param	Best fit	mean $\pm 68\%$
$100\Omega_b h^2$	2.248	$2.248^{+0.016}_{-0.016}$
$\Omega_c h^2$	0.1176	$0.1176^{+0.001}_{-0.001}$
$10^{+9} A_s$	2.27	$2.266^{+0.076}_{-0.078}$
n_s	0.9737	$0.9735^{+0.0033}_{-0.0033}$
τ_{reio}	0.09574	$0.09428^{+0.017}_{-0.017}$
Ω_{DE}	0.7009	$0.7007^{+0.0056}_{-0.0053}$
H_0	68.43	$68.42^{+0.41}_{-0.41}$
z_{reio}	11.43	$11.27^{+1.6}_{-1.4}$
σ_8	0.8369	$0.836^{+0.014}_{-0.014}$
Ω_m	0.3005	$0.3007^{+0.0053}_{-0.0056}$
χ^2	11976.244	
AIC	11988.2	
BIC	12024.8	

Tabla 5.7: Mejores ajustes (best fit) y cotas de confianza del 68% (1σ) para el modelo estándar Λ -CDM derivados de un análisis MonteCarlo usando el espectro de temperaturas del CMB + datos de polarización en los multipolos bajos (Ade et al., 2016b); la señal de BAO (Alam et al., 2016) y mediciones de distancia con Supernovas Ia (Betoule et al., 2014). Se muestran los parámetros explorados y posteriormente cuatro parámetros derivados. Se reporta el estimador χ^2 y dos criterios de información: Akaike y Bayesiano. Valores de χ^2 redondeados a la 3a cifra significativa.

5.4.2. Caso $w(z)_{N=2}$

Las distribuciones resultantes de $w(z)_{N=2}$ se muestran en las Figuras D.17 y D.18. Nos referimos a estas gráficas para el siguiente análisis.

Notamos resultados similares al caso $N=1$ para los parámetros físicos ($\omega_b, \omega_c, \omega_{DE}, A_s, n_s, \tau_{reio}$): distribuciones gaussianas de probabilidad, con dispersiones alrededor de la media del mismo orden que las obtenidas en $N=1$. Los parámetros de $w(z)$ muestran una buena restricción en b_0 , sin embargo, con \sim el doble de dispersión que la obtenida en $N=1$. El parámetro intermedio b_1 muestra una distribución de probabilidad aceptable, bien definida aunque con una dispersión considerable; mientras que la ecuación de estado para z 's grandes (b_2) muestra una evidente degeneración, ésta se hace más obvia al observar la figura D.18: las intersecciones entre b_2 y cualquier otro parámetro muestran que para un mismo valor de cierto parámetro arbitrario, b_2 puede encontrarse indistintamente entre 0 y -8.

5.4.3. Caso $w(z)_{N=3}$

Las distribuciones resultantes de $w(z)_{N=3}$ se muestran en las Figuras D.19 y D.20. Nos referimos a estas gráficas para el siguiente análisis.

Observamos lo mismo que en los dos casos anteriores: parámetros físicos bien acotados y con distribuciones de probabilidad gaussiana. En el caso de los parámetros de la ecuación de estado notaremos que la ecuación de estado al día de hoy (b_0) sigue bien restringida por los datos, con una dispersión ligeramente más grande que en el caso anterior, pero del mismo orden de magnitud. Los parámetros intermedios b_1 y b_2 aunque presentan una dispersión considerable, tienen un pico en la distribución de probabilidad bien definido, sin degeneraciones. Finalmente, el parámetro extremo b_N (b_3), al igual que en el caso $N=2$ se encuentra degenerado.

Puesto que la degeneración del parámetro b_N tanto en el caso $N=2$ como en $N=3$ es algo presente tanto en los resultados con D_1 como con D_2 , esto parecería sugerir que el problema podría no consistir en el uso de datos a z 's grandes, sino más bien en la forma de la parametrización. Discutiremos esto en la sección de resultados generales.

5.4.4. Caso Λ -CDM

Las distribuciones resultantes de Λ -CDM se muestran en las Figuras D.13 y D.14. Nos referimos a estas gráficas para el siguiente análisis.

Al igual que en los resultados obtenidos con D_1 , en este caso Λ -CDM se mantiene como el modelo de referencia. Notemos la distribución de probabilidades muy bien definida y acotada en un pequeño volumen del espacio de parámetros, más pequeño que el de los demás modelos.

5.4.5. Discusión, resultados generales.

Para discriminar posibles resultados generales, se muestra en la Figura 5.4 la superposición de todos los resultados obtenidos con el conjunto de datos D_2 .

Ecuación de estado al día de hoy (b_0). En todos los casos estudiados la ecuación de estado al día de hoy (b_0) está bien restringida por los datos. Notemos que el valor -1 se encuentra siempre dentro del intervalo de confianza 1σ (Fig. 5.4).

Ecuación de estado en $z \rightarrow \infty$ (b_N). En el caso más sencillo $N=1$ el parámetro b_1 se observa bien restringido. Se observó que a partir del caso $N=2$ el parámetro b_N se vuelve degenerado. En el caso $N=2$ el parámetro b_2 se tienen cotas

5. RESULTADOS

abiertas al menos desde 0 hasta ~ -8 . Finalmente, en el caso $N=3$ la degeneración de b_3 parece aumentar pues la distribución de probabilidad ni siquiera tiene un máximo bien definido.

Evidentemente el parámetro b_N está nulamente restringido por los datos, cosa que se observó desde la prueba de $N=2$ con el conjunto de datos D_1 y ahora se confirma también para $N=3$. Esta observación nos lleva a pensar que para variantes de $w(z)_N$ con más de dos grados de libertad extra ($N=2,3$), el parámetro b_N es imperceptible a los datos.

- Físicamente, el hecho de que b_N esté degenerado podría reflejarnos que estamos trabajando con datos que no restringen fuertemente $w(z)$ a z 's grandes o, por otro lado, que la energía oscura es despreciable con respecto a otros fluidos a z 's grandes. Hay razones para ir con cuidado en esta última hipótesis ya que existen propuestas como la energía oscura temprana (Early Dark Energy) (Amendola and Tsujikawa, 2010, pp. 149 - 153) que han resultado como posibles explicaciones en modelos paramétricos de energía oscura dinámica (Doran and Robbers, 2006).
- Fenomenológicamente, el parámetro b_N se vuelve innecesario para describir la dinámica a medida que N aumenta, sugiriendo la posibilidad de anular su acción dentro de $w(z)$ haciendo $b_N = 0$ para $N \geq 2$.

Parámetros intermedios (b_x). Los p. intermedios de $w(z)_{N=2}$ y $w(z)_{N=3}$ presentan cierto grado de constricción, a comparación de un parámetro **bien** restringido como b_0 notaremos que los b_x tienen un mayor grado de incertidumbre, aunque no lo suficiente como para hablar de una degeneración, como se vió en el análisis de b_N . Como observación general se puede decir que **el conjunto de datos D_2 sí es susceptible a los parámetros intermedios b_x .**

Una observación general sobre los parámetros b es que a medida que N crece, la distribución de probabilidad de cualquier parámetro distinto de b_0 se vuelve más *ancha*, sugiriendo un aumento en el grado de incertidumbre de los mismos. Esto tal vez no tenga que ver con la física sino con el hecho de que la ecuación de estado al día de hoy es un dato más o menos bien calculado, pero carecemos de información sobre la misma para z 's cada vez más grandes.

Parámetros físicos. La gráfica 5.4 nos muestra que el conjunto de parámetros físicos ($\omega_b, \omega_c, H_0, \Omega_D E, A_s, n_s, \tau_{reio}, \sigma_8$) está bien restringido en todos los casos. Se observa además el modelo Λ -CDM en los contornos color amarillo, mostrando que son del mismo orden que nuestro modelo y además compatibles, pues en todos los parámetros el límite de confianza 1σ se sobrepone para $N=1,2,3$ y Λ -CDM y con sólo ligeras desviaciones en el máximo de probabilidad.

5.4 Escenarios a tiempos tempranos (D_2 : CMB+BAO+SN).

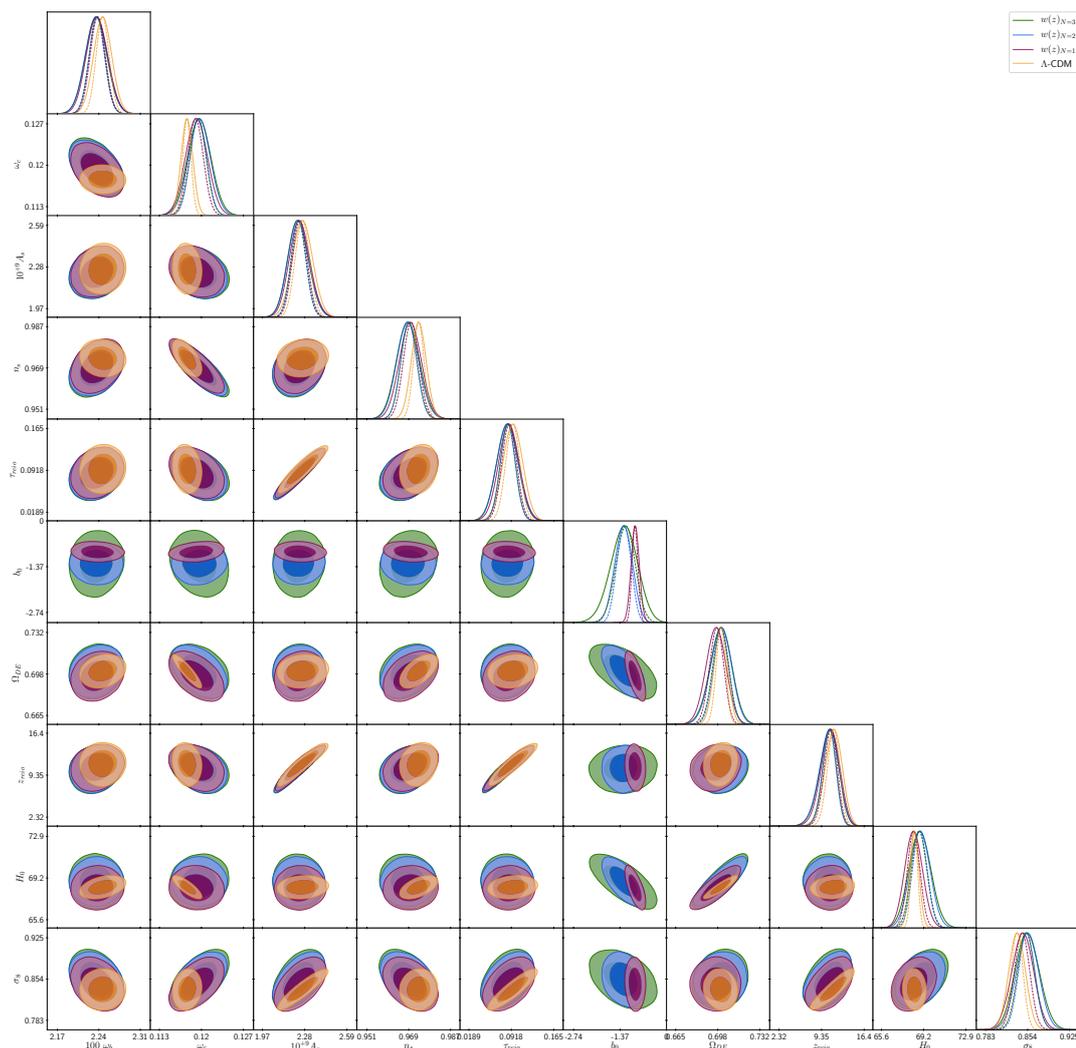


Figura 5.4: Comparación de resultados entre modelos $w(z)_{N=1}$, $w(z)_{N=2}$, $w(z)_{N=3}$ y Λ -CDM usando datos de CMB+BAO+SN (D_2). Se muestra el parámetro b_0 más no los parámetros intermedios b_x ni b_N pues la nomenclatura se interseca para distintos casos (*e.g.* $b_N = b_2$ para $N=2$ pero b_2 es parámetro intermedio en $N=3$). Para consultar resultados individuales ($N=1,2,3$) pasar al apéndice de gráficas.

La observación relevante aquí es que nuestra propuesta, probada con datos del CMB (D_2) tiene una buena restricción de cantidades físicas, del orden del modelo estándar. Contraponiendo esta observación a lo visto en el análisis con D_1 , es evidente que el uso de datos de CMB resuelve el fenómeno de dobles máximos en ω_c y Ω_{DE} y las tensiones entre Λ -CDM y $w(z)_N$ con los parámetros ω_b y Ω_{DE} . La razón detrás de esta “conciliación” debe estudiarse aún.

5. RESULTADOS

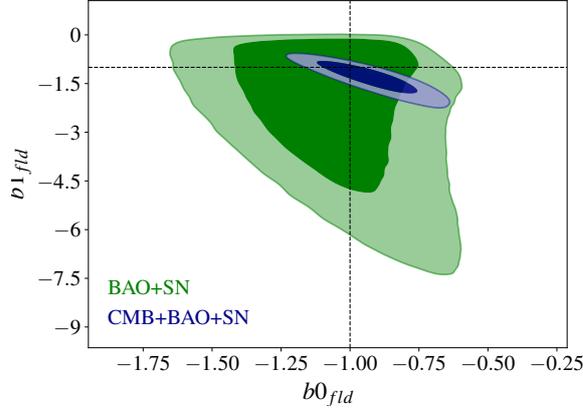


Figura 5.5: El plano $b_0 - b_1$ para el modelo $N=1$. Las líneas punteadas representan los valores necesarios para recuperar el modelo estándar. En ambos casos Λ -CDM está contenido dentro del intervalo de confianza 1σ . No muestra una tendencia clara hacia un modelo tipo quintaesencia o tipo fantasma, sino uno que oscila entre ambas formas de campo escalar.

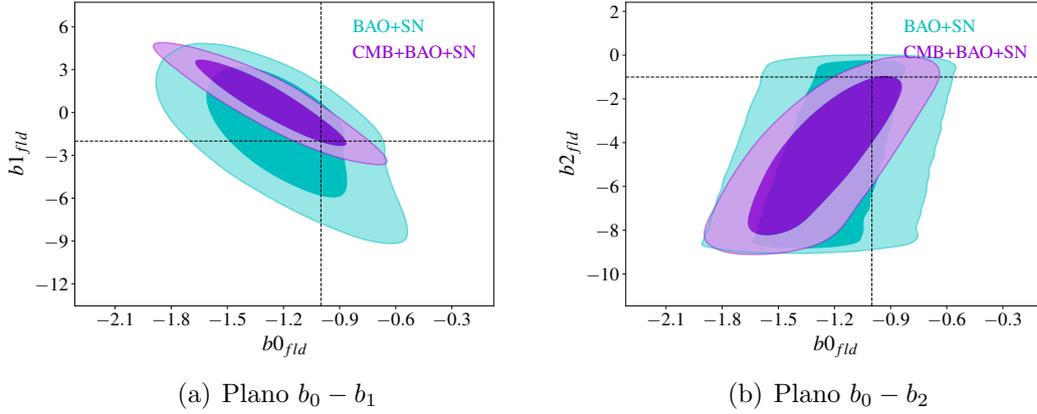


Figura 5.6: El plano $b_0 - b_n$ para el modelo $N=2$. Las líneas punteadas representan los valores necesarios para recuperar el modelo estándar. En ambos casos (BAO+SN) y (CMB+BAO+SN), Λ -CDM se encuentra dentro del intervalo de confianza del 68%. Del lado izquierdo notamos una tendencia hacia un modelo tipo quintaesencia, mientras que el resultado del lado derecho no es concluyente ya que el parámetro b_2 tiene una degeneración.

Revisitando el caso $N=3$. Como se vio con anterioridad, el caso $N=3$ se vió severamente desechado al usar el conjunto de datos D_1 . Un análisis apresurado nos llevaría a pensar que, en general, hacer la expansión de $w(z)_N$ hasta $N=3$ es innecesario y que, variantes de $w(z)_N$ con más de 3 parámetros libres son irresrestrictibles por los datos o que la parametrización está inherentemente degenerada

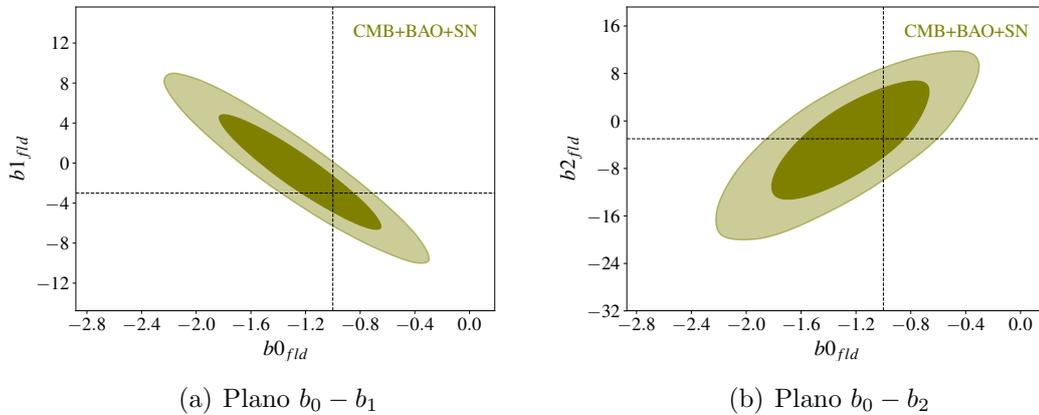


Figura 5.7: El plano $b_0 - b_n$ para el modelo $N=3$. Las líneas punteadas representan los valores necesarios para recuperar el modelo estándar. En ambos casos (BAO+SN) y (CMB+BAO+SN), Λ -CDM se encuentra dentro del intervalo de confianza del 68%.

para un número alto de parámetros. Sin embargo, la gráfica 5.10 nos muestra que al usar el conjunto de datos D_2 se resuelve la mayoría de las degeneraciones. Es evidente que usar datos de CMB restringe exitosamente una parametrización anteriormente degenerada (salvo la degeneración de b_N , ya analizada). Una posible interpretación es que ciertos datos (en este caso, CMB) sí son susceptibles a parametrizaciones “extensas” como $w(z)_{N=3}$ mientras que combinaciones de datos como D_1 sólo logran restringir hasta cierta potencia ($N=2$), degenerándose en casos con N mayor.

Como observación puntual podemos decir que la parametrización $w(z)_N$ tiene un bajo grado de degeneración, es decir, aún a potencias grandes ($N=3$) los parámetros siguen siendo bien restringidos por los datos, esto siempre a reserva de la elección del conjunto de datos.

A modo de evidencia, presentamos las siguientes gráficas donde comparamos la misma variante de la parametrización pero usando distinto conjunto de datos. Notaremos que el conjunto de datos D_2 restringe de mejor manera los parámetros físicos (en los tres casos), mientras que en ciertos casos mejoran la restricción de los parámetros b , por ejemplo en la gráfica 5.8 el valor de b_1 está visiblemente más restringido; en la gráfica 5.9 la restricción no mejora al usar CMB, pero se mantiene del mismo orden; el caso más llamativo e importante es el de $N=3$, como ya se ha visto, en la gráfica 5.10 podemos ver cómo al usar CMB la restricción de b_0, b_1, b_2 y b_3 aumenta excepcionalmente: un resultado antes degenerado y sin convergencia (contornos color gris) logra converger y restringirse al añadir esos datos (contornos color verde).

5. RESULTADOS

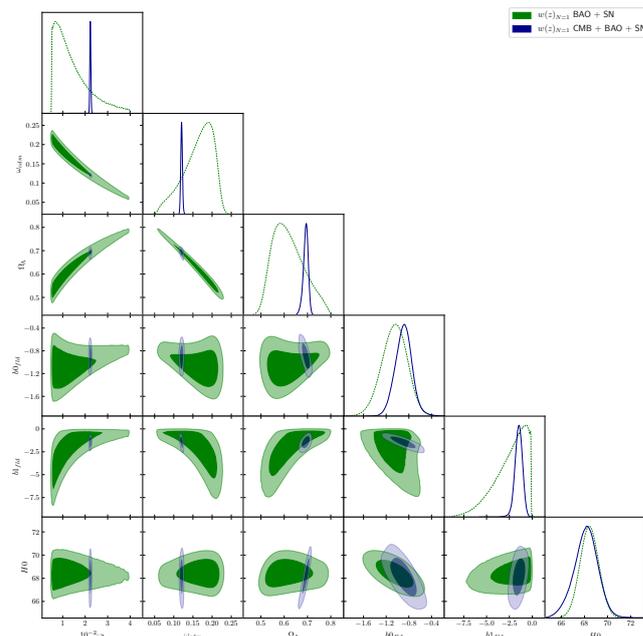


Figura 5.8: Comparación de resultados entre conjunto de datos D_1 (contornos verdes) y D_2 (contornos azules) para la parametrización $w(z)_{N=1}$.

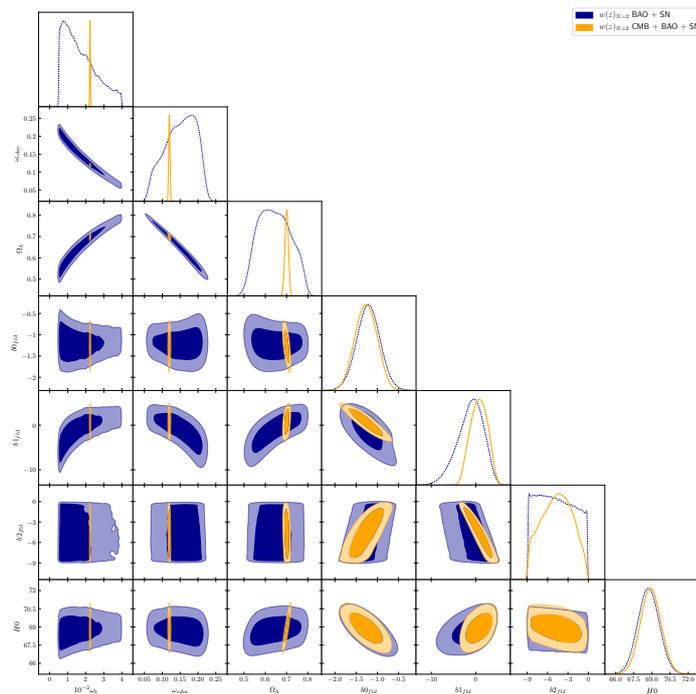


Figura 5.9: Comparación de resultados entre conjunto de datos D_1 (contornos azules) y D_2 (contornos amarillos) para la parametrización $w(z)_{N=2}$.

5.4 Escenarios a tiempos tempranos (D_2 : CMB+BAO+SN).

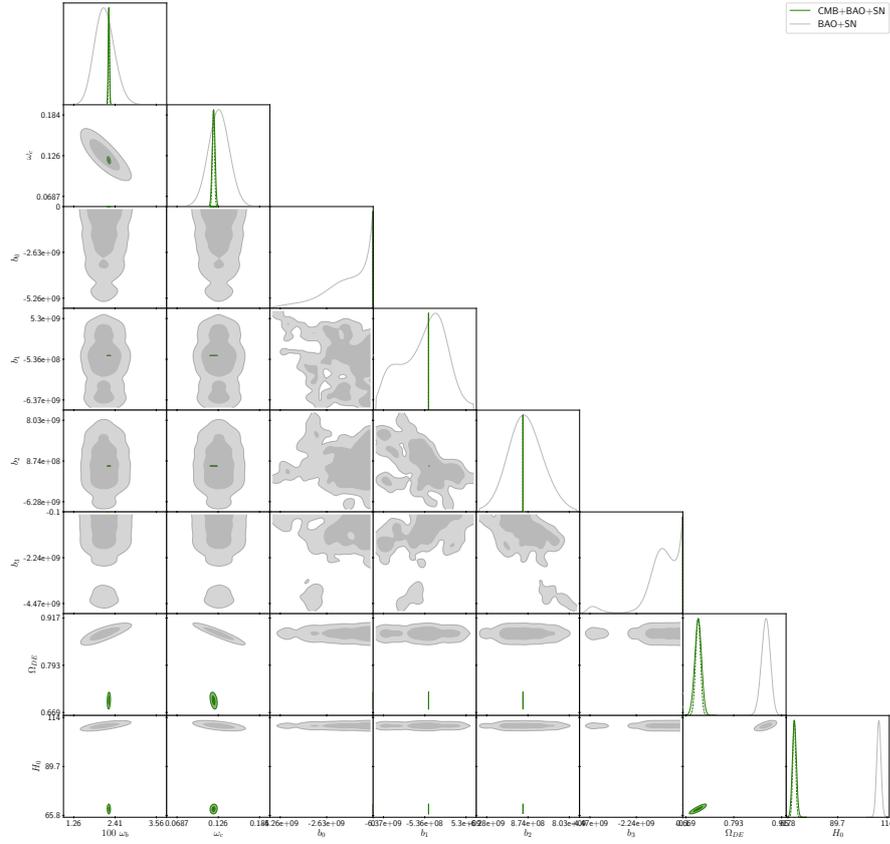


Figura 5.10: Comparación de resultados entre conjunto de datos D_1 (contornos grises) y D_2 (contornos verdes) para la parametrización $w(z)_{N=3}$.

Resultados Cuantitativos. Los resultados que se presentaron en las Tablas 5.6 y 5.7 muestran que tanto AIC como BIC apuntan a Λ -CDM como el modelo con mayor evidencia a su favor, seguido por $w(z)_{N=1}$, $w(z)_{N=2}$ y $w(z)_{N=3}$, en ese orden.

CMB + BAO + SN	
Modelos	σ_{distance}
(Λ -CDM, N=1)	0.3349
(Λ -CDM, N=2)	0.7286
(Λ -CDM, N=3)	0.7711

Tabla 5.8: Distancia sigma entre el modelo *base* Λ -CDM y los demás modelos probados con el conjunto de datos $D_2 = \text{CMB} + \text{BAO} + \text{SN}$. Redondeado a la cuarta cifra significativa.

- ¿Cuál es la variante de $w(z)_N$ favorecida por los datos de CMB+BAO+SN?

5. RESULTADOS

CMB + BAO + SN	
Modelos	ΔBIC
(Λ -CDM)	0
(Λ -CDM, N=1)	15.56
(Λ -CDM, N=2)	22.73
(Λ -CDM, N=3)	30.71

Tabla 5.9: ΔBIC para todos los modelos probados con D_2 . La preferencia por el modelo Λ -CDM sobre los demás es muy fuerte bajo este criterio.

CMB + BAO + SN	
Modelos	ΔBIC
(N=1)	0
(N=1, N=2)	7.17
(N=1, N=3)	15.14

Tabla 5.10: ΔBIC para variantes del modelo $w(z)_N$. Hay una evidencia muy fuerte a favor del modelo N=1, descartando a sus contrapartes N=2,3.

Asumiendo un enfoque bayesiano, tanto AIC como BIC apuntan a un modelo con menos parámetros libres. Desde esta perspectiva, $w(z)_{N=1}$ sería el modelo preferido por los datos.

- ¿Qué tan parecidos son los modelos?

Fijandonos en la distancia-sigma (Tabla 5.8), la tensión entre el modelo estándar y los demás modelos es menor a 0.78σ en todos los casos. Es evidente que la distancia sigma aumenta al agregar datos de CMB, pero no existe para ningún caso una tensión mayor o igual a 1σ . Por lo que la propuesta $w(z)_N$ probada con el conjunto de datos D_2 también es compatible con el modelo estándar con una tensión $< 1\sigma$.

5.5. Constricciones a los modelos

Podríamos hacernos una idea de cómo afectan los resultados a la evolución de cantidades cosmológicas, por ejemplo, al usar datos de BAO+CMB pudimos notar que las cantidades de bariones y materia oscura no estaban bien restringidas, esto generaría un cambio directo en la evolución de las cantidades cosmológicas, desplazando las épocas de equivalencia notablemente, como ejemplifico en la gráfica 5.11 y su acercamiento a z 's cercanas en la gráfica 5.12.

Notemos cómo los distintos modelos presentan distintas épocas de equivalencia entre materia y energía oscura, que van desde $z > 1$ para $N=2$ hasta $z \sim 0.3$ para Λ -CDM. Por otro lado, vimos que al introducir datos de CMB, la restricción aumentaba considerablemente, logrando definir bien las mismas cantidades. Este fenómeno se puede ver en la gráfica 5.15 y su acercamiento en 5.16. Nótese cómo la época de equivalencia se define con precisión.

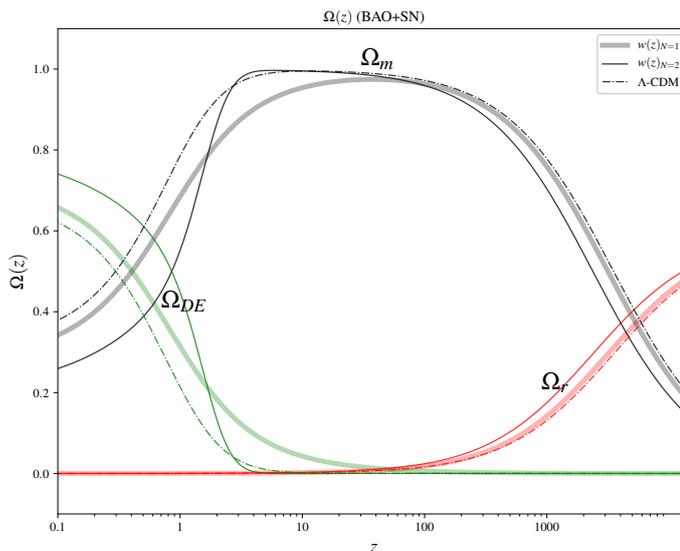


Figura 5.11: Evolución de las densidades de radiación, materia y energía oscura dentro de los modelos $w(z)_{N=1}$, $w(z)_{N=2}$ y Λ -CDM. Según los best-fits obtenidos al correr con el conjunto de datos D_1 : BAO+SN.

Otra observable importante es la evolución del parámetro de Hubble $H(z)$, en la gráfica 5.17 se observa la evolución conforme $H(z)/(1+z)$ desde una $z \sim 3.5$ hasta $z=0$, donde el factor $(1+z)^{-1}$ funge como “amplificador” del comportamiento a z 's entre 0 y 1. Por otro lado podemos ver la desviación porcentual de $H(z)$ con respecto de Λ -CDM en la parte inferior de la misma gráfica. Notemos cómo para el modelo $N=2$, existe una diferencia porcentual máxima del 15% entre éste y Λ ; luego, alrededor de $z=1$ notamos que $H_{N=2} = H_\Lambda$, coincidiendo con la época de equivalencia materia-energía oscura. El modelo $N=1$ tiene una desviación porcentual mucho menor, que debemos tomar en cuenta pues $N=1$ es la parametrización preferida por encima de CPL y BA, notemos que muestra una evolución $H_{N=1} > H_\Lambda$ para z 's mayores a ~ 0.3 , oscila una vez alrededor del valor de H_Λ y para z 's cercanas al cero toma un valor mayor al predicho por Λ -CDM, pero sólo **ligeramente** mayor, como vimos en las gráficas de distribución de probabilidad (consultar la última columna (H_0) de la Fig. 5.2).

5. RESULTADOS

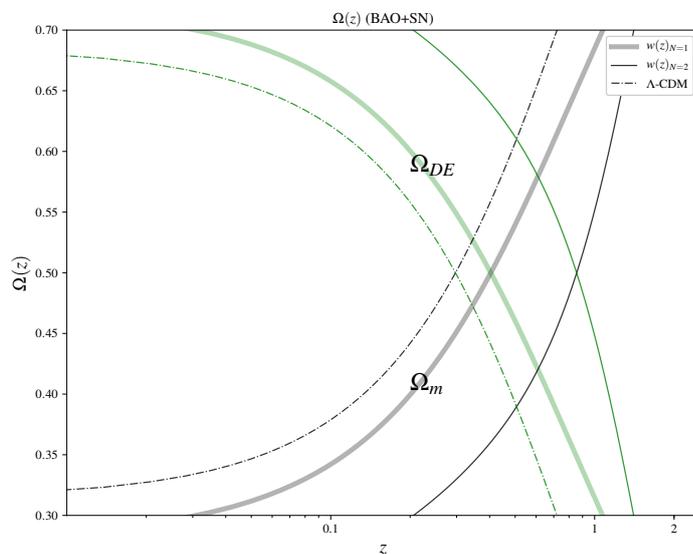


Figura 5.12: Evolución de las densidades de radiación, materia y energía oscura dentro de los modelos $w(z)_{N=1}$, $w(z)_{N=2}$ y Λ -CDM. Acercamiento a z 's cercanas.

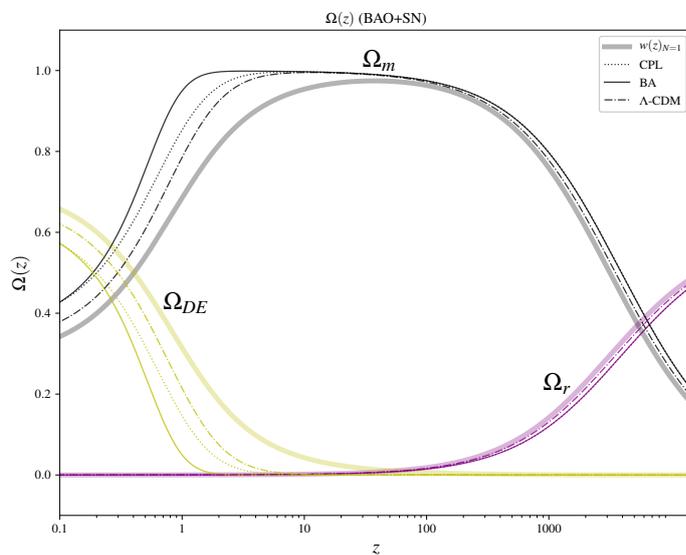


Figura 5.13: Evolución de las densidades de radiación, materia y energía oscura dentro de las parametrizaciones dos-dimensionales $w(z)_{N=1}$, CPL y BA. Según los best-fits obtenidos al correr con el conjunto de datos D_1 : BAO+SN.

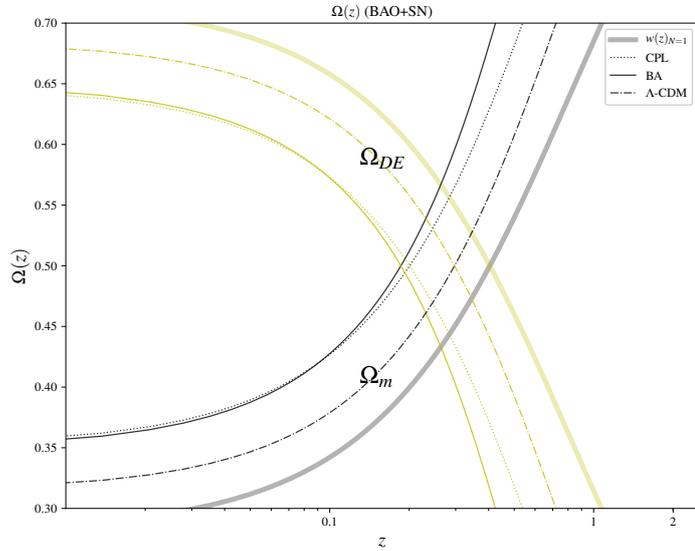


Figura 5.14: Evolución de las densidades de radiación, materia y energía oscura dentro de las parametrizaciones dos-dimensionales $w(z)_{N=1}$, CPL y BA. Acercamiento a z 's cercanas.

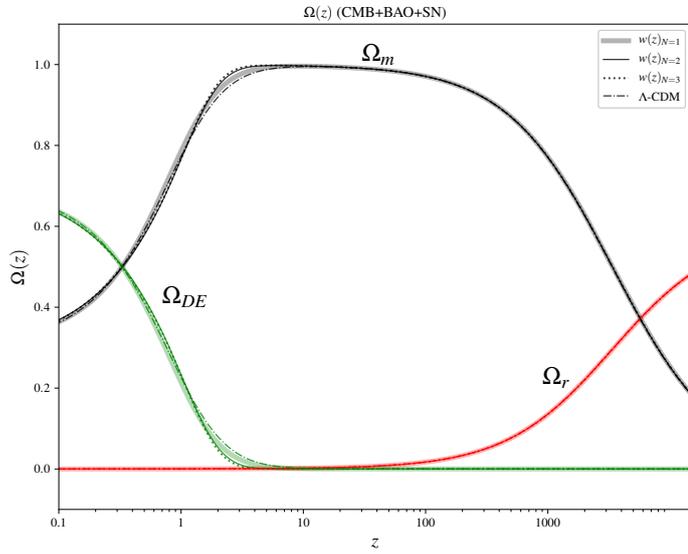


Figura 5.15: Evolución de las densidades de radiación, materia y energía oscura dentro de los modelos $w(z)_{N=1}$, $w(z)_{N=2}$, $w(z)_{N=3}$ y Λ -CDM. Según los best-fits obtenidos al correr con el conjunto de datos D_2 : CMB+BAO+SN.

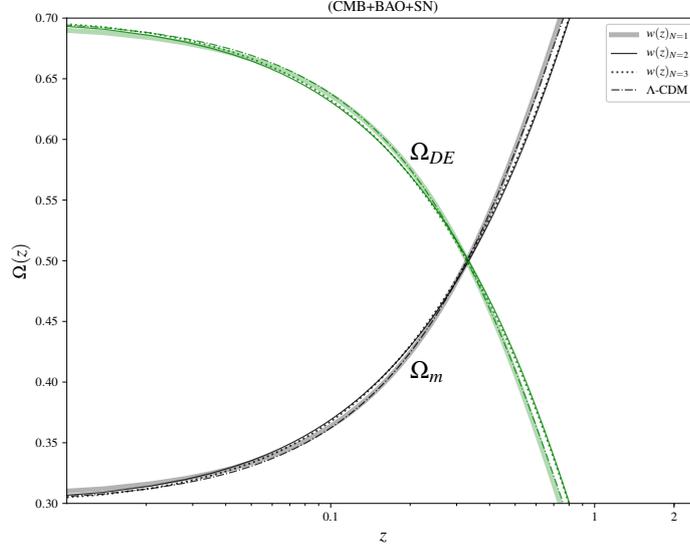


Figura 5.16: Evolución de las densidades de radiación, materia y energía oscura dentro de los modelos $w(z)_{N=1}$, $w(z)_{N=2}$, $w(z)_{N=3}$ y Λ -CDM. Acercamiento a z 's cercanas.

En la gráfica 5.18 observaremos las evoluciones de $H(z)$ de las tres parametrizaciones dos-dimensionales ($N=1$, CPL y BA), notemos cómo nuestra propuesta $w(z)_{N=1}$ tiene la menor variación porcentual con respecto de Λ -CDM ($< 2\%$ en su máximo), mientras que CPL y BA tienen una transición suave y una oscilación alrededor de $z \sim 0.6$, respectivamente. Recordemos que $N=1$ es el modelo favorecido por los datos, por encima de las parametrizaciones CPL y BA, según los dos criterios Bayesianos AIC y BIC.

Además, presentamos la gráfica 5.19 en donde se observa la evolución de $H(z)$ para los resultados obtenidos con el conjunto de datos D_2 .

Por último, graficamos el espectro de potencias de temperatura, calculado para los modelos $N=1,2,3$ obtenido con los bestfits usando el conjunto de datos D_2 en la gráfica 5.20. En la primera fila se graficaron las mediciones de Planck 2015 de los coeficientes multipolares D_ℓ^{TT} definidos como,

$$D_\ell^{TT} \equiv \frac{\ell(\ell+1)C_\ell^{TT}}{2\pi} \quad (5.1)$$

En la segunda fila se muestra la diferencia porcentual entre los modelos $N=1,2,3$ con respecto al modelo estándar, con las barras de error de los datos de Planck recalculadas. Finalmente, en la última fila se muestran las desviaciones en el espectro con respecto a Λ -CDM.

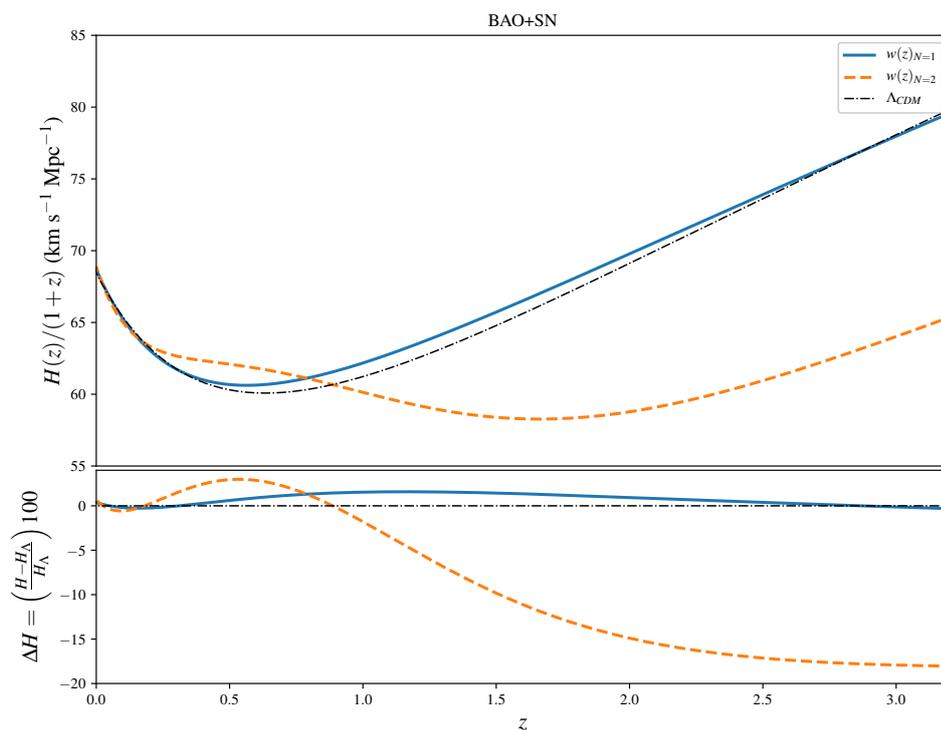


Figura 5.17: Evolución del parámetro de Hubble conforme $(H(z)/(1+z))$. Se comparan en esta gráfica los casos $N=1$ y $N=2$ de $w(z)_N$ según los best-fits obtenidos al correr con datos de BAO+SN. En el recuadro inferior se muestra la diferencia porcentual con respecto al modelo estándar Λ -CDM.

5. RESULTADOS

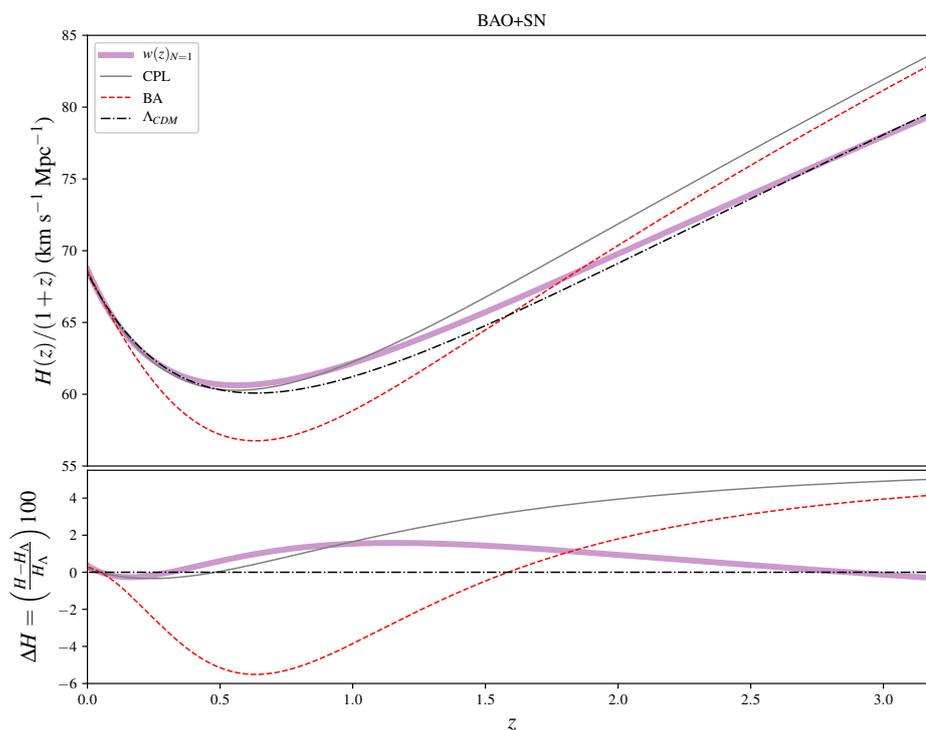


Figura 5.18: Evolución del parámetro de Hubble conforme $(H(z)/(1+z))$. Se comparan en esta gráfica las parametrizaciones dos-dimensionales $w(z)_{N=1}$, CPL y BA según los best-fits obtenidos al correr con datos de BAO+SN. En el recuadro inferior se muestra la diferencia porcentual con respecto al modelo estándar Λ -CDM.

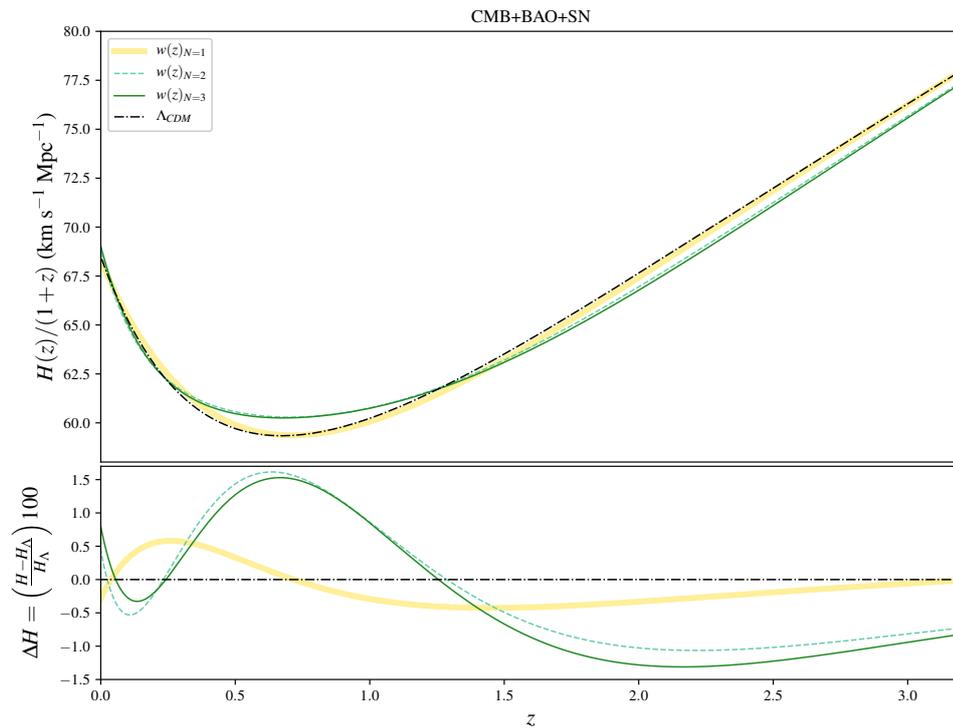


Figura 5.19: Evolución del parámetro de Hubble conforme $(H(z)/(1+z))$. Se comparan en esta gráfica los casos $N=1$ $N=2$ y $N=3$ de $w(z)_N$ además del modelo estándar, según los best-fits obtenidos al correr con datos de BAO+SN. En el recuadro inferior se muestra la diferencia porcentual con respecto al modelo estándar Λ -CDM.

5. RESULTADOS

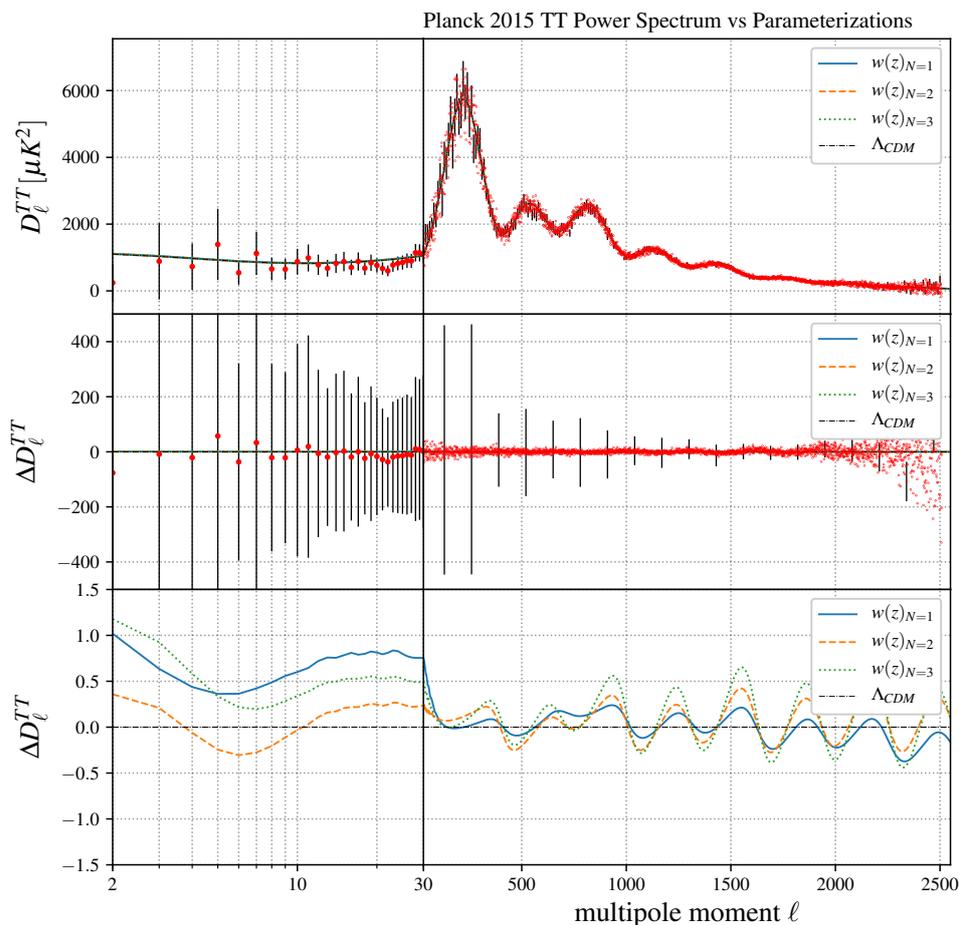


Figura 5.20: Espectro de potencias de temperatura calculado según los best-fits de los modelos $w(z)_{N=1}$, $w(z)_{N=2}$, $w(z)_{N=3}$ y Λ -CDM al correr con el conjunto de datos D_2 : CMB+BAO+SN. Se muestra también el espectro de potencias de temperatura medido por el experimento Planck 2015, con sus respectivas barras de error. Se muestran tres gráficas: los D_ℓ^{TT} calculados y medidos en la primera fila, la diferencia porcentual con respecto a Λ -CDM con enfoque a la magnitud de las barras de error en la segunda fila y finalmente la diferencia porcentual pero resaltando las desviaciones en el espectro con respecto al modelo estándar.

Conclusiones y Perspectivas

6.1. Conclusiones

Con el afán de explorar posibles alternativas al modelo Λ -CDM, preciso pero incompleto y con la persistente incógnita de la aceleración cósmica, se han abierto ramales de trabajo tanto teóricos como observacionales.¹

En años recientes se ha notado interés y una relativa facilidad en trabajar sobre modelos paramétricos de la ecuación de estado de Energía Oscura, modelos que se han vuelto populares gracias a la creciente recopilación y análisis de encuestas astrofísicas y cosmológicas, resultado directo de una reciente aceleración tecnológica en el campo observacional.

En el presente trabajo se propuso una forma paramétrica de la ecuación de estado, apodada $w(z)_N$, que gracias a su flexibilidad permite competir no sólo con el modelo estándar cosmológico sino con otras formas paramétricas reportadas en la literatura.

El objetivo de esta tesis fue comparar exhaustivamente dichos modelos alternativos, haciendo uso de varios conjuntos de datos con el fin de descubrir si existe alguna desviación visible del modelo estándar hacia otra posible explicación del fenómeno de aceleración cósmica. Se concluye lo siguiente,

- Considerando escenarios a tiempos cercanos (D_1), en donde la energía oscura podría ser una cantidad dominante, un análisis de todos los modelos probados coloca a Λ -CDM por encima de los demás, seguido de $N=1$, CPL, BA y $N=2$. Estadísticamente, nuestra propuesta no se ve favorecida lo suficiente como para colocarse por encima del modelo estándar.
- Al querer conocer cuál es la mejor parametrización de entre las tres propuestas equivalentes probadas ($w(z)_{N=1}$, CPL o BA), encontramos que $w(z)_{N=1}$

¹La variedad es tan extensa que sería excesivo y superficial presentarla aquí, recordamos al lector consultar ([Amendola and Tsujikawa, 2010](#)).

6. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

es preferida por los datos, según el estimador χ^2 así como al usar un enfoque Bayesiano, tanto AIC y BIC apuntan a $w(z)_{N=1}$ por encima de CPL y BA. La diferencia ΔBIC entre estos tres modelos indica que existe una evidencia prácticamente equivalente a favor de cualquiera de los modelos, sin embargo, desde un enfoque dinámico, el valor de χ^2 sugiere que la probabilidad de obtener los datos D_1 es mayor al suponer el modelo $N=1$.

- Al usar datos del CMB (en los cuales no se probaron las parametrizaciones CPL ni BA) como lo muestran los criterios AIC y BIC, hay una preferencia por el modelo más sencillo: Λ -CDM. No obstante, es necesario recordar que el objetivo de probar la propuesta con datos de CMB fue ver si el modelo era capaz de restringir los parámetros físicos, pues los resultados con D_1 mostraron una pobre restricción de dichos parámetros. Como era de esperarse, el conjunto de datos D_2 restringe los parámetros de forma correcta, aliviando la posibilidad de que las degeneraciones fueran intrínsecas al modelo.
- Una comparación entre las tres variantes de nuestra propuesta ($N=1,2,3$) usando datos de CMB muestra que $N=1$ es el modelo favorecido por los criterios bayesianos; *i.e.* con dos parámetros libres $w(z)_{N=1}$ se ajusta mejor a los datos que variantes de orden superior: menos parámetros es mejor.
- Notamos además que los parámetros libres de nuestra propuesta no sufren de degeneraciones graves, salvo el parámetro b_N dentro de las variantes $N=2$ y $N=3$. Lo cual indica que de todos los parámetros libres, sólo aquel que representa la ecuación de estado cuando $z \rightarrow \infty$ está mal restringido. Se puede decir entonces que las encuestas astrofísicas/cosmológicas utilizadas son sensibles a nuestra parametrización, algo difícil de lograr en general con propuestas con más de dos parámetros libres.
- La parametrización también es capaz de reproducir la evolución del factor de Hubble ($H(z)$), la evolución de las densidades energéticas y el espectro angular de potencias de temperaturas del CMB, con desviaciones porcentuales respecto a Λ -CDM menores al 2% en caso de usar D_1 y menores al 1.5% al usar el conjunto de datos D_2 .
- En todas sus variantes, nuestra propuesta es compatible con el modelo Λ -CDM pues las distribuciones de probabilidad al 1σ de confianza son del mismo orden que el modelo estándar, además, el estudio hecho con la distancia-sigma indica que no hay tensiones considerables entre nuestra propuesta y Λ -CDM.
- Aunque los datos de CMB ayudan a restringir cantidades importantes como ω_b , ω_c o A_s , n_s y τ_{reio} . La mejor forma de analizar una posible dinámica de energía oscura es usando datos del universo tardío (BAO+SN), en este

caso, nuestra propuesta se coloca por delante de parametrizaciones como CPL o BA, aventajada tanto por criterios bayesianos como desde un enfoque dinámico.

- Del enunciado anterior se puede concluir que, ya que $w(z)_{N=1}$ es equivalente a CPL -pero escrita en otras variables-, el presente trabajo muestra que las variables de nuestra propuesta son más eficientes que las de la parametrización CPL a la hora de describir una posible dinámica de energía oscura, inclusive desde un punto de vista estadístico.
- La dinámica de nuestra propuesta (con datos D_1 y comparada con las otras dos parametrizaciones CPL y BA) muestra un comportamiento tipo campo quintaesencia hacia valores grandes de redshift.

En concreto, si se opta por el modelo que describa mejor una posible dinámica de energía oscura, la propuesta $w(z)_N$ se posiciona como la mejor parametrización. Usando tanto D_1 como D_2 , es la variante $N=1$ aquella con más éxito.

Si se toma a consideración una perspectiva estadística (como en los criterios AIC y BIC), $w(z)_N$ no se ve favorecida sobre Λ -CDM, un resultado esperado dado el número alto de parámetros. Sin embargo, al comparar exclusivamente modelos paramétricos (CPL, BA y $N=1$) se observa que $w(z)_{N=1}$ es mejor modelo que CPL y BA, tanto dinámicamente como estadísticamente. A su vez, como dinámica, una variante más alta (N mayor) de $w(z)_N$ siempre será mejor, puesto que permite mayor movilidad y ajuste; pero estadísticamente, tanto D_1 como D_2 muestran preferencia por $w(z)_{N=1}$.

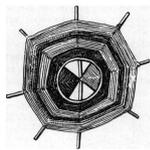
Cualquier propuesta que parta de la premisa de explorar la dinámica de energía oscura debe considerar el significado físico de los parámetros. Sobre la misma línea, si se adoptase descuidadamente un enfoque meramente estadístico, podría descuidarse la interpretación física de la propuesta, pues sólo se estaría buscando un modelo que obtuviera los mejores valores de los criterios estadísticos, sin tomar en cuenta el posible significado de sus parámetros. Se podría decir que el presente trabajo ha tocado ambos puntos, tratando de no dejar lugar a ambigüedades y reconociendo que la interpretación de este tipo de resultados no tiene una única arista desde la cuál hacer el análisis.

6.2. Perspectivas

Hemos presentado un análisis completo del fondo cosmológico obtenido al usar cierta parametrización de $w(z)_{DE}$, dicho trabajo nos arrojó una comparación estadística entre posibles modelos de energía oscura. Para completar el análisis se debería proceder a analizar las cantidades perturbadas (espectro angular de temperaturas, espectro de potencias de materia) y obtener las cantidades (densidad

6. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

de fluidos cosmológicos) utilizando teoría de perturbaciones cosmológicas. De aquí se podría obtener una simulación de la estructura a gran escala del universo (LSS) y comparar con datos reales de dicha observación. Confirmar o refutar que nuestro modelo es capaz de reproducir observaciones del universo tardío -las cuales ya no se rigen por una teoría lineal- sería, a grandes rasgos, uno de los posibles pasos en el futuro de este trabajo de investigación.



Apéndice A

Métrica FLRW

En este apéndice derivaremos la métrica del fondo cosmológico Friedmann-Lemâitre-Robertson-Walker, con los parámetros libres $a(t)$ (factor de escala) y k (parámetro de curvatura). Además, se deriva la expresión del corrimiento al rojo como función del factor de escala y el parámetro de Hubble, cantidades necesarias para abordar las secciones §2.2 - §2.5 de esta tesis.

A.1. Geometría del espacio-tiempo cosmológico

Se saben necesarias y suficientes cuatro cantidades para conocer la posición y el instante en que ocurre un evento: tres coordenadas espaciales y una temporal. Así, el desplazamiento infinitesimal en un espacio 4-dimensional (que también puede interpretarse como el intervalo espacio-temporal entre dos eventos) está dado por

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(cdt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \\ &= -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Las coordenadas

$$x^\mu : \begin{aligned} x^0 &= ct \\ x^1 &= x \\ x^2 &= y \\ x^3 &= z \end{aligned}$$

pueden expresarse como $x^\mu = (t, x^i) \equiv (t, \mathbf{x})$. Para asegurar independencia ante el observador y su elección de coordenadas es necesario introducir una *métrica* $g_{\mu\nu}$ que transforme coordenadas dependientes x^μ en un *elemento de línea* invariante (Baumann, 2010, p. 5),

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{A.2})$$

A. MÉTRICA FLRW

Así, el intervalo ds^2 entre dos eventos arbitrarios debe conservarse, independientemente de la elección de coordenadas x^μ . Son conocidas ya las transformaciones generales de coordenadas que dejan invariante a ds^2 :

- Traslaciones $x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = x^\mu + a^\mu$
- Transformaciones de Lorentz Λ que satisfagan:

$$g_{\rho\sigma} = \Lambda_{\rho}^{\mu'} \Lambda_{\sigma}^{\nu'} g_{\mu'\nu'}$$

Si nos fijamos en el tensor métrico, en un espacio plano y sin interacción gravitacional, la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ se define como

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (\text{A.3})$$

En relatividad general, por otro lado, la métrica asume los efectos de la gravedad y se vuelve dependiente del 4-vector x^μ ,

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) \quad (\text{A.4})$$

la forma en que se da esta dependencia está determinada por la distribución de materia y energía en cierta región o en la totalidad del universo; para una distribución arbitraria, por ejemplo, encontrar la métrica que genera esta distribución puede ser muy complicado.

Como se ha visto, el principio cosmológico establece que a escalas suficientemente grandes, las contribuciones “pequeñas” de curvatura se vuelven despreciables, podemos asumir entonces que el universo, a escalas donde sea válido el principio cosmológico, tiene curvatura constante. Suponiendo que a cada tiempo t , dicha curvatura es la misma, resulta conveniente *dividir* la dimensionalidad 4 del espacio-tiempo en $(3 + 1)$, es decir, una sucesión temporal de rebanadas espaciales de dimensión 3 y así hablar de curvatura estrictamente en el espacio tres-dimensional con coordenadas $x^i \equiv \{x^1, x^2, x^3\}$.

Tómese entonces una tres-variedad Σ que contenga la información espacial x^i ; y una dirección temporal continua \mathbb{R} que represente la dimensión x^0 ; de tal forma que la totalidad del espacio-tiempo está representado por la sucesión ordenada de “rebanadas” espaciales $\mathbb{R} \times \Sigma$. Por lo tanto, la geometría de cada rebanada espacial a cierto tiempo t es constante y está caracterizada por un desplazamiento infinitesimal $d\ell^2$.

¿Cuál curvatura? Ya que la curvatura es constante a lo largo de toda la variedad, se tienen tres posibilidades: que sea positiva, negativa o igual a cero.

I Curvatura cero:

El desplazamiento infinitesimal $d\ell^2$ sobre un espacio Euclideo tres-dimensional E^3 es

$$d\ell^2(E^3) = d\mathbf{x}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (\text{A.5})$$

Con $i, j = 1, 2, 3$

II Curvatura positiva:

Se sabe que la curvatura de la esfera es positiva punto a punto. Para describir la 3-esfera S^3 enclavada en un espacio Euclideo cuatro-dimensional E^4 necesitamos cuatro coordenadas espaciales $x^k = \{x, y, z, w\}$. La ecuación de S^3 es entonces,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + w^2 &= a^2 \\ \mathbf{x}^2 + w^2 &= a^2, \end{aligned}$$

donde a es el radio de S^3 y $w = x^4$ es la coordenada espacial extra. Para este caso el desplazamiento infinitesimal $d\ell^2$ sobre la 3-esfera es,

$$d\ell^2(S^3) = d\mathbf{x}^2 + w^2 \quad (\text{A.6})$$

III Curvatura negativa:

Análogamente, una 3-variedad con curvatura negativa punto a punto es el hiperboloide de una hoja H^3 , cuya ecuación es,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - w^2 &= a^2 \\ \mathbf{x}^2 - w^2 &= a^2, \end{aligned}$$

donde a es una constante real arbitraria. Por lo tanto

$$d\ell^2(H^3) = d\mathbf{x}^2 - w^2 \quad (\text{A.7})$$

Notemos que las coordenadas x^k tienen unidades de longitud. Si re-escalamos $x^k \rightarrow ax^k$ para generalizar los casos **II** y **III**, el elemento de línea $d\ell^2$ que generaliza S^3 y H^3 es,

$$d\ell^2 = a^2 [d\mathbf{x}^2 \pm w^2], \quad \text{con} \quad \mathbf{x}^2 \pm w^2 = 1 \quad (\text{A.8})$$

Podemos ver esta operación como si transfiriera la dimensión de longitud de x^k a a . Las coordenadas x^k quedan adimensionales, mientras a asume dicha dimensión.

A. MÉTRICA FLRW

Sin embargo, ahora que $x^4 = w$ se ha vuelto adimensional, las únicas cantidades que mantienen sentido físico son las coordenadas de la 3-variedad $\mathbf{x} = x^i$. Resulta necesario expresar la ecuación (A.8, lado izquierdo) únicamente en términos de \mathbf{x} ; para ello calculemos la derivada de (A.8, lado derecho):

$$\begin{aligned}
 d(\mathbf{x}^2 \pm w^2 = 1) &\rightarrow d(\mathbf{x}^2) \pm d(w^2) = 0 \\
 &2\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \pm 2w \cdot dw = 0 \\
 &w \cdot dw = \mp \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \\
 &\rightarrow dw^2 = \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{w^2} \\
 \therefore dw^2 &= \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 \mp \mathbf{x}^2}
 \end{aligned}$$

De tal manera que

$$d\ell^2 = a^2 \left[d\mathbf{x}^2 \pm \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 \mp \mathbf{x}^2} \right] \quad (\text{A.9})$$

que generaliza los casos II y III, está expresado en coordenadas conocidas. Finalmente, para generalizar el caso restante, basta con que (A.9) pueda reducirse a (A.5). Agregar una constante k es suficiente

$$d\ell^2 = a^2 \left[d\mathbf{x}^2 + k \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 - k\mathbf{x}^2} \right] \quad (\text{A.10})$$

$$\text{con } k = \begin{cases} 0 & \text{plano} \rightarrow \text{curvatura cero} \\ +1 & \text{cerrado} \rightarrow \text{curvatura positiva} \\ -1 & \text{abierto} \rightarrow \text{curvatura negativa} \end{cases}$$

La ecuación (A.10) describe de manera general la geometría de la 3-variedad Σ .

Ya que Σ está totalmente determinada por coordenadas espaciales x^i , cualquier función arbitraria del tiempo $f(t)$ dejará invariantes las simetrías de la variedad (invariancia bajo rotaciones e invariancia bajo traslaciones). Siguiendo este razonamiento, supóngase que el parámetro a no es una constante, sino una función arbitraria del tiempo $a(t)$.

Finalmente, para calcular la métrica del espacio-tiempo, súmese la expresión general $d\ell^2$ (A.10) a la entrada $_{00}$ del elemento de línea (A.2), es decir

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 ds^2 &= -dt^2 + d\ell^2 \\
 ds^2 &= -dt^2 + a^2(t) \left[d\mathbf{x}^2 + k \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 - k\mathbf{x}^2} \right]
 \end{aligned}
 } \quad (\text{A.11})$$

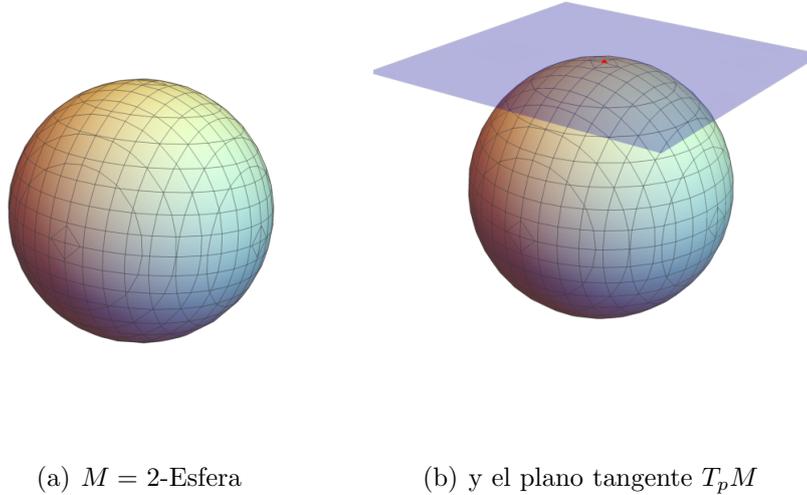


Figura A.1: Un 3-espacio con curvatura positiva constante es la 3-esfera, a este universo se le llama **cerrado** y tiene la peculiaridad de contener líneas de mundo cerradas. Se muestra aquí una 2-esfera S^2 como referencia.

El elemento de línea (A.11) con $k = 0$ se llama *métrica Robertson-Walker plana*, no porque el espacio-tiempo que describe sea plano, sino porque la geometría de las rebanadas espaciales es plana (Hartle, 2003, p. 367). De la misma manera, para $k = 1$ y $k = -1$ la métrica se llama *cerrada* y *abierta*, respectivamente¹. En los tres casos $a(t)$ es una función arbitraria de t ; cuando $a(t)$ obedece las ecuaciones de campo de Einstein, se habla de un *universo Friedmann-Robertson-Walker* (*ibid*) ó **Friedmann-Lemâitre-Robertson-Walker** (FLRW) el cuál contiene la información geométrica y energética de un universo con curvatura espacial constante, homogéneo e isotrópico. El parámetro $a(t)$ se llama **factor de escala** ya que actúa precisamente de esa manera sobre las coordenadas. Nótese en (A.10) que a debe cumplir $\dot{a}^2 > 0$ para que el desplazamiento $d\ell^2$ sea positivo en cualquier punto \mathbf{x} , las observaciones de Hubble restringen más esta condición, exigiendo que $\dot{a}(t) > 0$.

A.2. El parámetro de Hubble

Hasta antes de 1929 el paradigma cosmológico era el de un universo estático y poco cambiante. Independientemente de las modificaciones propuestas al modelo estático de Einstein, no existían pruebas concretas para saber si el Universo se estaba expandiendo, contrayendo o si, efectivamente, era estático. Entre 1919 y 1929, Edwin Hubble observa grupos de galaxias (en ese entonces llamadas Nebu-

¹También se acostumbra usar los nombres De Sitter y anti-De Sitter, respectivamente

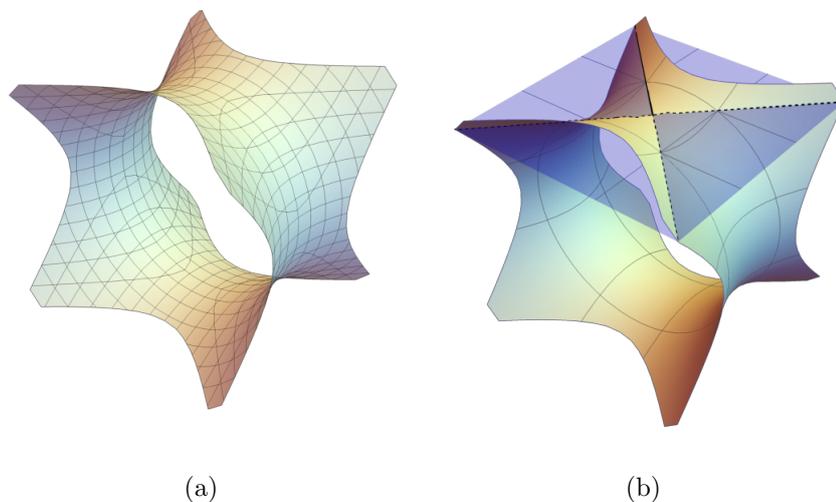


Figura A.2: Un 3-espacio con curvatura negativa constante puede ser el hiperboloide H^3 , a este universo se le llama **abierto** pues se extiende indefinidamente. Se muestra aquí un hiperboloide 2-dimensional H^2 como referencia.

losas de Espiral) y a través de la observación astronómica de una estrella variable cefeida¹ situada en la *nebulosa* de Andromeda, determina su magnitud aparente y absoluta y con ello la distancia entre Andrómeda y la Tierra. Repitiendo el proceso para un conjunto considerable de galaxias, descubre que la distancia entre la Tierra y las galaxias está aumentando.

En 1929, con base en estas observaciones, Hubble encuentra una correlación entre velocidad de recesión y distancia, de estas observaciones llega a conclusiones importantes:

- I Existen galaxias más allá del límite de la Vía Láctea, por lo que el Universo es al menos varias veces más grande que ella.
- II La distancia entre las galaxias y la Tierra está aumentando, desde nuestro punto de vista las galaxias se *alejan/receden*.²
- III A mayor distancia, mayor es su velocidad de recesión, esta es evidencia clara de que el Universo se está expandiendo.

¿Cómo cambian las coordenadas a medida que el universo se expande?

Las coordenadas $x^i \equiv \{x^1, x^2, x^3\}$ se llaman coordenadas *comoviles*; multiplicadas

¹La información que proporcionan estas estrellas sirve para determinar con mucha precisión su distancia con respecto a nosotros.

²Estrictamente, es incorrecto siquiera decir que las galaxias se alejan de nosotros pues la noción de su velocidad con respecto a nosotros (aún) no está bien definida. (Carroll, 1997, p. 64)

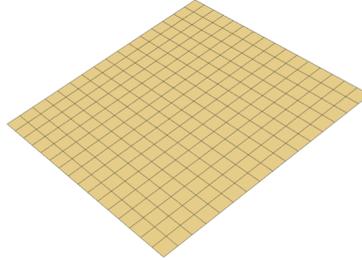


Figura A.3: El 3-espacio con curvatura cero más sencillo es el espacio Euclideo 3-dimensional \mathbb{R}^3 , a este universo se le llama **plano**.

por el factor de escala: $x_{fis}^i = a(t)x^i$ se llaman coordenadas *físicas*. Si se comparan dos rebanadas espaciales sucesivas Σ_t y $\Sigma_{t'}$, veremos que la *distancia comovil* $\chi(t)$ entre dos puntos se mantiene constante a medida que $a(t)$ crece, mientras que la *distancia física* (o distancia propia) $D_{fis}(t)$ entre dichos puntos crece junto con $a(t)$. La relación entre ambas está dada por

$$\chi(t) = \frac{D_{fis}(t)}{a(t)} \quad (\text{A.12})$$

Es muy importante mencionar que ninguna de estas distancias es una observable cosmológica, ya que no existe una manera “directa” de medirlas. Para esto recurriremos a métodos más específicos, en §2.6.

Para poner en práctica estos conceptos, podemos calcular la expresión de la velocidad física v_{fis}^i de una galaxia

$$\begin{aligned} v_{fis}^i &\equiv \frac{dx_{fis}^i}{dt} = a(t)\frac{dx^i}{dt} + \frac{da(t)}{dt}x^i = a\dot{x}^i + \dot{a}x^i \\ &= a\dot{x}^i + \frac{\dot{a}}{a}x_{fis}^i \\ &\equiv v_{pec}^i + Hx_{fis}^i \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

La velocidad física se descompone entonces en

1. la velocidad *peculiar* de la galaxia $v_{pec}^i = a(t)\dot{x}^i$ y
2. el *Flujo de Hubble* Hx_{fis}^i , donde hemos definido al **parámetro de Hubble** como

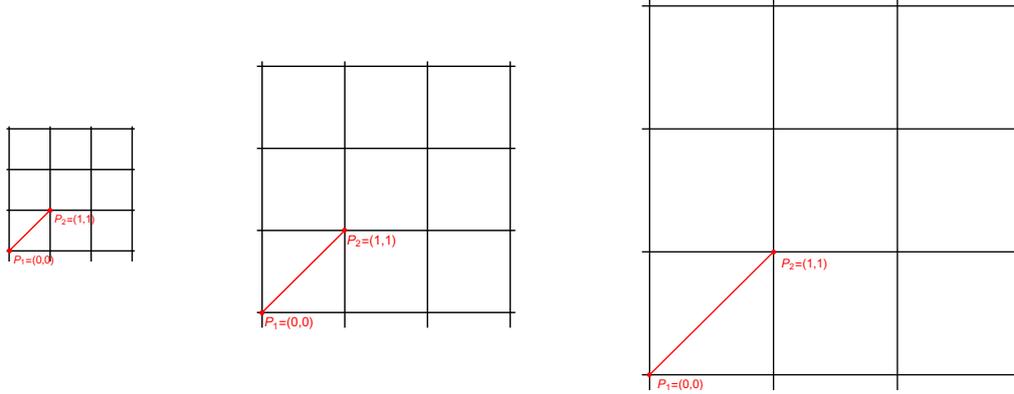


Figura A.4: La distancia *comovil* $d(P_1, P_2)/a(t)$ entre puntos permanece constante a medida que el universo se expande, sin embargo, la distancia *física* sí toma en cuenta los efectos de la expansión, pues es proporcional al factor de escala.

$$H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (\text{A.14})$$

El flujo de Hubble está determinado por el parámetro de Hubble. A nivel local, describe a qué velocidad nos alejamos con respecto de otros objetos (*e.g.* galaxias). Al final del día, es una medida de la velocidad de expansión del universo / del espacio entre objetos contenidos dentro de éste.

El flujo de Hubble también define observadores comoviles. En otras palabras, dos observadores son comoviles si y sólo si se mueven con el flujo de Hubble. Bajo este razonamiento, es *natural* ver que la velocidad que un observador comovil mide del otro es su velocidad peculiar, mas no su velocidad física. Sólo un observador que se mueve con el flujo de Hubble observa un universo isotrópico.

A.3. Elección de coordenadas y corrimiento al rojo (z)

Antes de estudiar la dinámica sobre la métrica FLRW, recordemos que para generalizar los $d\ell^2$ para los tres casos de curvatura recurrimos a un re-escalamiento $\mathbf{x} \rightarrow a\mathbf{x}$ y $w \rightarrow aw$ que transfería la dimensión de longitud de (\mathbf{x}, w) a a . Con una elección específica de coordenadas y haciendo uso de un re-escalamiento en particular se puede devolver de manera evidente la adimensionalidad al factor de escala, algo que nos interesa si queremos normalizar a a cierto valor al día de hoy (*e.g.* $a(t_{\text{hoy}} \equiv 1)$).

La forma de γ_{ij} en (A.11) depende de la elección de coordenadas¹. En esféricas (r, θ, ϕ),

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}^2 &= dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} &= r dr \\ d\Omega^2 &\equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \end{aligned}$$

y el elemento de línea toma la forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (\text{A.15})$$

Que corresponde a un **tensor métrico FLRW** en coordenadas esféricas:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t)/1 - kr^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Notemos que (A.15) es simétrico ante re-escalamientos, es decir $ds^2 = ds'^2$ cuando

$$r \rightarrow \frac{r}{\lambda} \quad ; \quad a \rightarrow \lambda a \quad ; \quad k \rightarrow \lambda^2 k \quad (\text{A.17})$$

Podemos escoger la constante de re-escalamiento λ a nuestro gusto, en este caso, para que a sea un parámetro adimensional, $a(t = t_0) \equiv a_0 \equiv 1$ y $a(t = t_{ini}) \equiv a_{ini} \equiv 0$.² Al final, λ carga con la dimensión de longitud como $[\lambda] = \frac{1}{\text{longitud}}$ y la transfiere a r y a k .

Es conveniente normalizar³ la coordenada radial en (A.15),

$$d\chi \equiv \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad \Rightarrow \quad \chi = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} \quad (\text{A.18})$$

para que el elemento de línea esté expresado en coordenadas comoviles χ

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [d\chi^2 + F_k^2(\chi) d\Omega^2] \quad (\text{A.19})$$

¹Sólo la *forma* de γ_{ij} , no olvidemos que la métrica es independiente de la elección de coordenadas o de si se hace uso de coordenadas o no

²Por convención, t_0 es t al día de hoy, a partir de este momento, todas las cantidades con subíndice o superíndice 0 son cantidades al día de hoy

³Notemos que $\chi = r$ cuando $k = 0$ y la métrica regresa a su forma estándar

A. MÉTRICA FLRW

donde

$$F_k(\chi) \equiv \begin{cases} \chi & k = 0 \\ \sin(\chi) & k = +1 \\ \sinh(\chi) & k = -1 \end{cases}$$

El tiempo que miden los observadores que se mueven con el flujo de Hubble es un “tiempo comovil”, se le llama *tiempo conforme* y se expresa con la letra τ

$$d\tau = \frac{dt}{a(t)} \quad \Rightarrow \quad \tau(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \quad (\text{A.20})$$

Introduciendo el tiempo conforme, la métrica queda como:

$$\boxed{ds^2 = a(\tau)^2 [-d\tau^2 + (d\chi^2 + F_k^2(\chi)d\Omega^2)]} \quad (\text{A.21})$$

Que es la métrica de Minkowski en coordenadas esféricas multiplicada por una función del tiempo conforme $a(\tau)$. Eso significa que la luz en un espacio-tiempo FLRW se propaga igual que en un espacio-tiempo plano, siempre y cuando se haga la transformación de tiempo cósmico a tiempo conforme $dt \rightarrow d\tau$.

Cabe recordar que en Minkowski, la luz se mueve sobre geodésicas nulas $ds^2 = 0$, *i.e.* sobre la identidad que forma el cono de luz; sobre esa trayectoria, un desplazamiento infinitesimal en la dirección espacial δx es igual al desplazamiento infinitesimal en la dirección temporal δt . De la misma manera, la luz en nuestra métrica FLRW como (A.21) cumple que un desplazamiento en la dirección del tiempo conforme es igual a un desplazamiento en la dirección de la distancia comovil,

$$\Delta\tau(a) = \Delta\chi(a) \quad (\text{A.22})$$

No obstante la existencia de un parámetro que caracteriza el tamaño del universo (a), es necesario conectarlo con alguna cantidad observable. Para nuestros fines, el objeto de estudio más accesible es la luz. Como es de esperarse, la misma expansión del universo tiene efectos sobre la naturaleza de la luz que nos llega de objetos astronómicos lejanos. Como ya se vió en la sección anterior, entre más lejano se encuentre el objeto observado, más rápido estará *alejándose* con respecto de nosotros. Esta información viene codificada en la luz que observamos aquí en la Tierra.

Sea que consideremos a la luz como una partícula cuántica o una onda electromagnética clásica, es preciso tomar en cuenta que los cambios que sufra la métrica tendrán un efecto sobre la naturaleza de aquella. Al igual que una onda mecánica sufre transformaciones al moverse la fuente de emisión (Efecto Doppler), una onda electromagnética se estirará (disminuirá su frecuencia) o, equivalentemente,

un fotón perderá energía a medida que el universo se expande. A este efecto se le llama *redshift* o **corrimiento al rojo**, ya que la frecuencia original de la luz se desplaza hacia la parte roja del espectro electromagnético a medida que la métrica se expande.

Ya que estamos estudiando luz, usemos el elemento de línea (A.21), supóngase que estamos observando una galaxia que se mantiene a una distancia comóvil χ constante. En cierto instante τ_1 la galaxia emite una señal de duración $\Delta\tau$. Como ambos (la galaxia y nosotros) somos observadores comoviles, el tiempo que tarda en llegar la luz a nosotros es igual a la distancia comovil d (por lo visto en (A.22)), de manera que la señal nos llega a un tiempo $\tau_0 = \tau_1 + d$. La duración de la señal en tiempo conforme es igual tanto en el lugar de emisión como en el detector o telescopio que usemos aquí para medirla, *i.e.* $\Delta\tau_{emision} = \Delta\tau_{deteccion}$. Sin embargo, en tiempo físico, los intervalos son diferentes. Esto es claro si usamos la expresión (A.20),

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t_1}{a(t_1)} \quad y \quad \Delta\tau = \frac{\Delta t_0}{a(t_0)} \quad (\text{A.23})$$

Entonces

$$\Delta t_1 = a(\tau_1)\Delta\tau \quad y \quad \Delta t_0 = a(\tau_0)\Delta\tau \quad (\text{A.24})$$

Tiene sentido pensar que Δt_1 es la longitud de onda de emisión λ_1 , mientras que Δt_0 es la longitud de onda de detección λ_0 y que esta última habrá sido *estirada* por la expansión del universo, de manera que

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{a(\tau_0)\Delta\tau}{a(\tau_1)\Delta\tau} = \frac{a(\tau_0)}{a(\tau_1)} \quad (\text{A.25})$$

Por convención, se define el **corrimiento al rojo** (z) como el cambio fraccional entre la longitud de onda de emisión λ_1 y la de detección λ_0 :

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} \quad (\text{A.26})$$

con

$$\lambda_0 > \lambda_1$$

Sustituyendo obtenemos

$$z = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - 1 = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1$$

$$\boxed{z + 1 = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}} \quad (\text{A.27})$$

A. MÉTRICA FLRW

Esta última expresión resignifica de manera final el concepto de factor de escala. Como ya se había visto en §A.2, las observaciones de Hubble exigen que $a(t)$ sea una función creciente para que $H = \dot{a}/a > 0$ y concuerde con las observaciones, pero al re-escalar $a \rightarrow \lambda a$, éste pierde dimensionalidad y se vuelve una medida abstracta del tiempo cósmico (pues $a(t_{\text{hoy}}) \equiv 1$ y $a(t_{\text{inicio}}) \equiv 0$). Al introducir el corrimiento al rojo z se hace la conexión entre esa *medida* del tiempo y las observaciones que hagamos de la luz.

Apéndice B

La distancia lumínica

B.1. Definición

La ley de la inversa del cuadrado establece que el flujo de energía (\mathcal{F}) de una fuente lumínica disminuye con el inverso del cuadrado de la distancia (consultar Fig. B.2):

$$\mathcal{F} = \frac{L}{4\pi r^2} \quad (\text{B.1})$$

Donde L es la luminosidad -el total de energía radiada por segundo- y se mide en Watts. \mathcal{F} es el flujo -la cantidad de energía que fluye a través de una esfera de radio r - y se mide en Watts/m². Se define entonces la distancia lumínica d_L como la distancia r desde la fuente de emisión (Amendola and Tsujikawa, 2010, p. 20). Por lo que,

$$d_L^2 \equiv \frac{L_s}{4\pi\mathcal{F}} \quad (\text{B.2})$$

L_s es la luminosidad absoluta de una fuente y \mathcal{F} es el flujo observado (aparente). Este es el flujo que atraviesa una esfera centrada en $z=0$ y con área $S = 4\pi(a_0d_c)^2$, por lo que se puede definir a \mathcal{F} como,

$$\mathcal{F} = \frac{L_0}{S} \quad (\text{B.3})$$

L_0 es la luminosidad medida/observada en las coordenadas $\chi = 0$ y a un corrimiento $z = 0$ (consultar Fig. B.1). De modo que, la distancia lumínica es proporcional al cociente entre la luminosidad absoluta y la medida por un observador en la tierra,

$$d_L^2 = (a_0d_c)^2 \frac{L_s}{L_0} \quad (\text{B.4})$$

Las luminosidades absoluta/de emisión (L_s) y relativa/de detección (L_0) se definen respectivamente como:

$$L_s = \frac{\Delta E_1}{\Delta t_1} \quad L_0 = \frac{\Delta E_0}{\Delta t_0} \quad (\text{B.5})$$

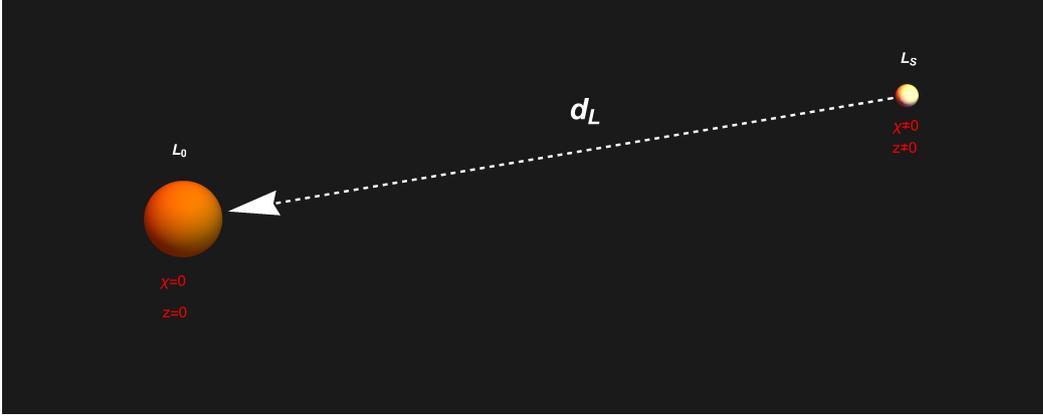


Figura B.1: Una fuente emite una luminosidad absoluta L_s , mientras que un observador centrado en $\chi = 0$ y $z = 0$ mide una luminosidad relativa L_0 . La distancia lumínica está determinada por el cociente de ambas.

Donde las deltas son intervalos de energía y de tiempo respectivamente. Recordando el desarrollo hecho en §A.3, en particular la ecuación A.25 comprobaremos que $\Delta E_1/\Delta E_0 = \lambda_0/\lambda_1 = 1 + z$. Ahora, ya que $c = \lambda/\Delta t = \text{cte}$, entonces $\lambda_1/\Delta t_1 = \lambda_0/\Delta t_0$ y por tanto $\Delta t_0/\Delta t_1 = \lambda_0/\lambda_1 = 1 + z$. Por lo que,

$$\frac{L_s}{L_0} = (1 + z)^2 \quad (\text{B.6})$$

La ecuación (B.6) nos permite conocer la luminosidad absoluta L_s de una fuente de luz; basta con conocer la luminosidad aparente L_0 y el corrimiento al rojo z .

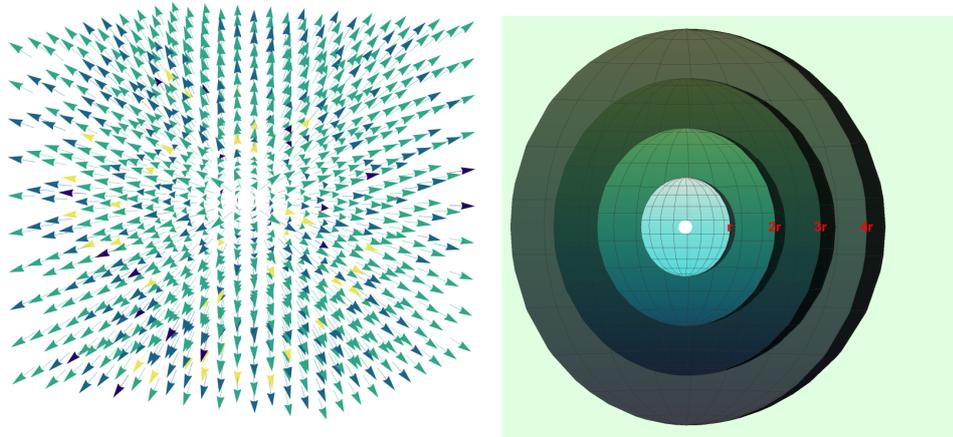
La distancia lumínica es entonces función del corrimiento al rojo y de la distancia comovil:

$$\boxed{d_L = d_c(1 + z)} \quad (\text{B.7})$$

B.2. Una clasificación adimensional: La Magnitud

Para simplificar la clasificación de los objetos astronómicos por su brillo/luminosidad los astrónomos crearon una cantidad adimensional: la magnitud (m). Tiene más sentido clasificar objetos usando un número adimensional que usando el valor del flujo observado de cada uno, sobre todo si los valores del flujo pueden variar varios ordenes de magnitud entre un objeto y otro.

La magnitud *aparente* (m) es una medida de la luminosidad de una estrella u objeto astronómico visto desde la Tierra. El primer registro histórico que se tiene



(a) Campo vectorial *ideal* de una fuente puntual de radiación: si no existe ningún mecanismo físico que reste energía a los fotones, la magnitud del campo es constante. (b) La fuente en $(0,0,0)$ radía uniformemente en todas direcciones. Este gráfico tiene una iluminación que decae como $1/r^2$.

Figura B.2: La equivalencia entre las dos representaciones debe ser clara: en (a) el campo tiene magnitud constante e igual en todas direcciones. El flujo a través de esferas de radio r disminuye conforme r crece, *i.e.* el “número” de vectores que atraviesan áreas iguales es cada vez menor. Por el otro lado, en (b) podemos ver cómo la luminosidad (representada por la intensidad del color) va decayendo conforme nos encontremos en cascarones más alejados de la fuente. **El flujo decae con la distancia**

de este tipo de clasificación corresponde al astrónomo Hiparco en el siglo I antes de nuestra era; su clasificación consistía de seis categorías, en la número 1 se encontraban las estrellas más brillantes, mientras que en la última (6) las menos brillantes.

Sean m_1 y m_2 las magnitudes aparentes de dos objetos astronómicos. Si los flujos medidos en la tierra son \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 , estos se relacionan con las magnitudes como,

$$m_1 - m_2 = -\frac{5}{2} \log_{10} \left(\frac{\mathcal{F}_1}{\mathcal{F}_2} \right) \quad (\text{B.8})$$

Usando la misma relación se puede definir la magnitud *absoluta* (M). Esta cantidad se relaciona directamente con la distancia lumínica:

$$m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{10 \text{pc}} \right) \quad (\text{B.9})$$

Def. La magnitud absoluta corresponde a la magnitud aparente que tendría un

B. LA DISTANCIA LUMÍNICA

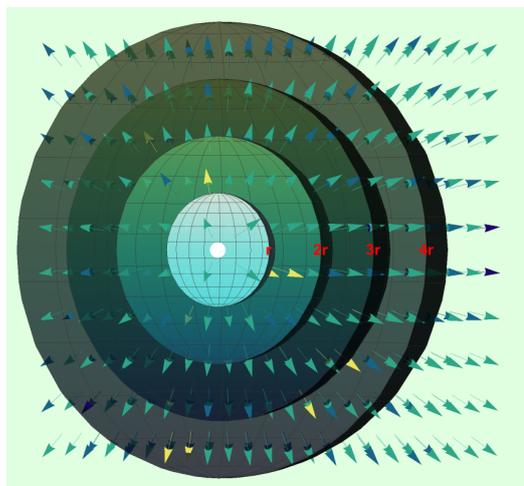


Figura B.3: Flujo de una fuente puntual a través de cáscaras esféricas concéntricas, se observa una disminución del flujo por unidad de área en capas consecutivas.

objeto arbitrario X si se encontrara a una distancia lumínica $d_L = 10 \text{ pc}^1$ del observador.

Expresando d_L en (B.9) en mega parsec ($1 \times 10^9 \text{ pc}$):

$$\begin{aligned}
 m - M &= 5 \log_{10} \left(\frac{10^6 d_L \text{ pc}}{10 \text{ pc}} \right) \\
 &= 5 (\log_{10}(10^5) + \log_{10}(d_L)) \\
 &= 5 (5 + \log_{10}(d_L))
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

$$\boxed{m - M = 5 \log_{10}(d_L) + 25} \tag{B.11}$$

A esta expresión los astrónomos le llaman el módulo de la distancia, relaciona la diferencia entre la magnitud observada y la absoluta, con una distancia: la distancia lumínica.

Magnitudes absolutas de algunos objetos astronómicos conocidos (Amendola and Tsujikawa, 2010, p. 88):

- Sol: $M(\odot) = -26.7$
- Luna: $M(\text{Luna}) = -12.6$
- Supernova Ia: $M(\text{SN Ia}) \approx -19$

¹El parsec (**pc**) se define como la distancia a la cual una unidad astronómica (UA = distancia media entre Tierra y Sol) subtende un ángulo de 1 arco-segundo, *i.e.* el paralaje de un arco-segundo (*parallax of one arc second*), de manera que $1 \text{ pc} \approx 3.26 \text{ años luz} \approx 3.08 \times 10^{16} \text{ m}$

Apéndice C

Inferencia Estadística

El contenido de este apéndice está inspirado en notas de las referencias ([Hobson, 2009](#)), que da un desarrollo robusto de métodos estadísticos en cosmología; y las guías prácticas en ([Verde, 2010](#)) y ([Verde, 2007](#)), que tienen un enfoque práctico del tema, con ejercicios y ejemplos concretos.

C.1. Probabilidad

Sea x una variable aleatoria. La probabilidad de que x tome cierto valor está dada por la cantidad $pr(x)$, que es una *densidad de probabilidad*. Notemos que la probabilidad (los valores posibles de x) puede ser discreta o continua. De manera que $pr(x)dx$ es la probabilidad de que la variable aleatoria x tome algún valor entre x y $x+dx$ ([Verde, 2010](#)). Cambiando de la variable x discreta a una continua θ y asumiendo un contexto I de todas las posibilidades, se tienen tres reglas del cálculo de probabilidad:

$$\left. \begin{array}{ll} pr(\theta) \geq 0 & \text{Positividad} \\ \int pr(\theta)d\theta = 1 & \text{Regla de la suma} \\ pr(\phi, \theta) = pr(\phi|\theta)pr(\theta) & \text{Regla del producto} \end{array} \right\} \quad (\text{C.1})$$

La tercera regla es la única que debemos interpretar con mayor atención, puede decirse en palabras que: “La probabilidad de que ϕ y θ sucedan (tomen cierto valor) es igual a la probabilidad de que θ suceda, multiplicada por la probabilidad de ϕ , *dado* que θ ya haya sucedido.”

C.2. Teorema de Bayes

Al trabajar en un marco de inferencia estadística, se deben considerar tres cosas: Una hipótesis¹ (los parámetros del modelo) θ , los datos \mathbf{D} y un contexto \mathbf{I} de todas las posibilidades que estemos considerando, *i.e.*, el conocimiento previo que podamos sumar a lo que queremos conocer. Es correcto suponer que $P(x_1, x_2) = P(x_2, x_1)$ ya que la probabilidad conjunta (la probabilidad de tener x_1 y x_2) es simétrica (Amendola and Tsujikawa, 2010, p. 358), por lo tanto para θ y D , también se cumple que $P(\theta, D) = P(D, \theta)$, podemos derivar la siguiente relación a partir de la regla del producto:

$$\begin{aligned} pr(\theta)pr(D|\theta) &= pr(\theta, D) &= pr(D)pr(\theta|D) \\ \text{Prior} \times \text{Likelihood} &= \text{Joint prob} &= \text{Evidence} \times \text{Posterior} & \quad (\text{C.2}) \\ \pi(\theta)\mathcal{L}(\theta) &= \dots\dots\dots &= E \mathcal{P}(\theta) \end{aligned}$$

Como ignoro si exista un consenso sobre la traducción de algunos de los siguientes términos, usaré sus nombres en inglés. Del lado izquierdo tenemos el **Prior** definido como $\pi(\theta) = pr(\theta)$, el Likelihood $\mathcal{L}(\theta) = pr(D|\theta)$; mientras que del lado derecho tenemos la **Evidencia** $E = pr(D)$ y el **Posterior** $\mathcal{P}(\theta) = pr(\theta|D)$.

- **Prior:** $pr(\theta|I)$. La distribución de probabilidad *inicial* de los parámetros θ . Esta es asignada por nosotros y representa nuestro grado de ignorancia o conocimiento previo sobre los valores de θ . (Hobson, 2009, p. 44)
- **Likelihood:** $pr(D|\theta)$. La probabilidad de que los datos D tomen cierto valor dada una hipótesis (o cierto valor de los parámetros θ que la describen). En términos prácticos, cuantifica la discordancia entre los datos y los valores teóricos predichos por los parámetros (*ibid*).
- **Posterior:** $pr(\theta|D)$. La distribución de probabilidad *final* o *inferida* después de usar los datos. Esta es la **cantidad que más nos interesa** al momento de hacer inferencia bayesiana.
- **Evidencia:** $pr(D)$. Qué tan bueno es el *modelo* subyacente para predecir los datos. Aquí se supone que se han obtenido los datos (Verde, 2010, p. 4), entonces $pr(D) = 1$.

Teorema de Bayes Por la regla de la suma sabemos que se cumple:

$$\boxed{\int \pi(\theta)d\theta = 1 \quad \text{Prior}} \quad (\text{C.3})$$

¹Utilizaremos indistintamente *hipótesis* o *parámetros del modelo*

Luego, ya que $\mathcal{P}(\theta)$ también es una distribución de probabilidad para θ , debe estar normalizada a 1, *i.e.* $\int \mathcal{P}d\theta = 1 = \int (\pi\mathcal{L}/E)d\theta$, entonces como la evidencia no es función de los parámetros puede escribirse como,

$$E = pr(D) = \int pr(D|\theta)pr(\theta)d\theta \quad (C.4)$$

es decir

$E = \int \pi(\theta)\mathcal{L}(\theta)d\theta$	Evidencia
--	-----------

(C.5)

Y finalmente, como $\pi\mathcal{L} = E\mathcal{P}$,

$pr(\theta D) = pr(\theta)\frac{pr(D \theta)}{pr(D)}$	Teorema de Bayes
---	------------------

(C.6)

y en su forma compacta,

$$\mathcal{P}(\theta) = \frac{\pi(\theta)\mathcal{L}(\theta)}{E} \quad (C.7)$$

El teorema de Bayes representa la influencia de las mediciones sobre la probabilidad de una hipótesis H dada en términos de θ . O visto de otra manera, muestra cómo el prior es transformado en el posterior $\pi(\theta) \rightarrow \mathcal{P}(\theta)$ a través de la proporción \mathcal{L}/E .

Apéndice D

Gráficas

Las gráficas se colocan a partir de la siguiente página para poder visualizar gráficas de mismos modelos en hojas opuestas.

D. GRÁFICAS

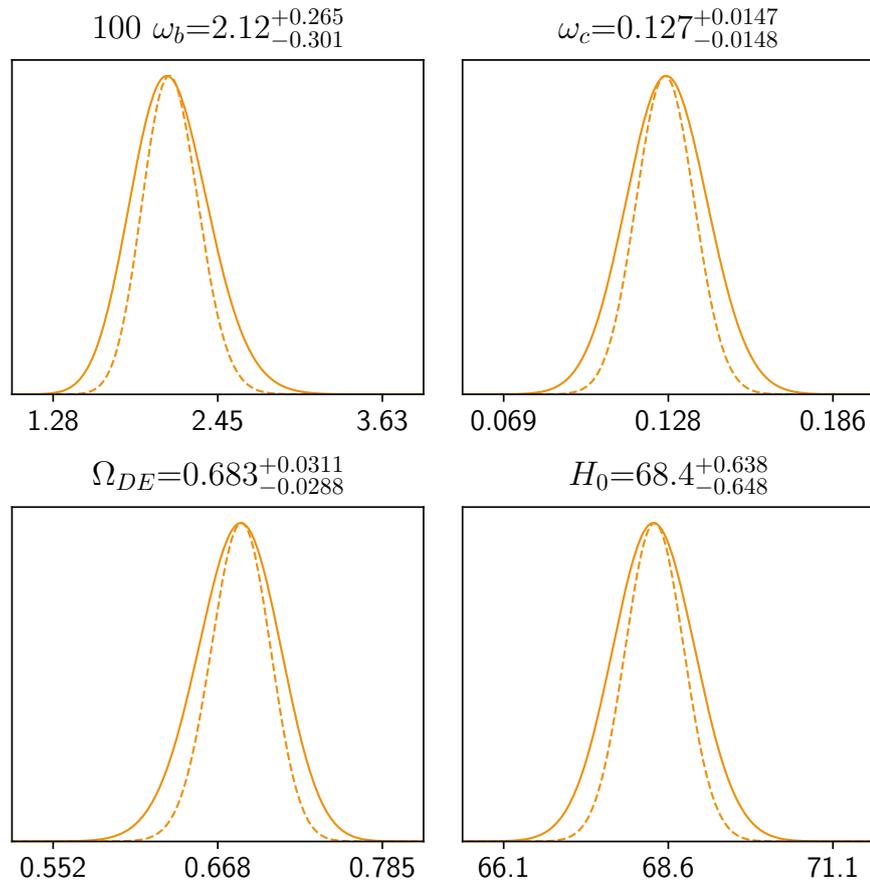


Figura D.1: Distribución posterior de probabilidad, modelo Λ -CDM probado con datos de BAO y SN.

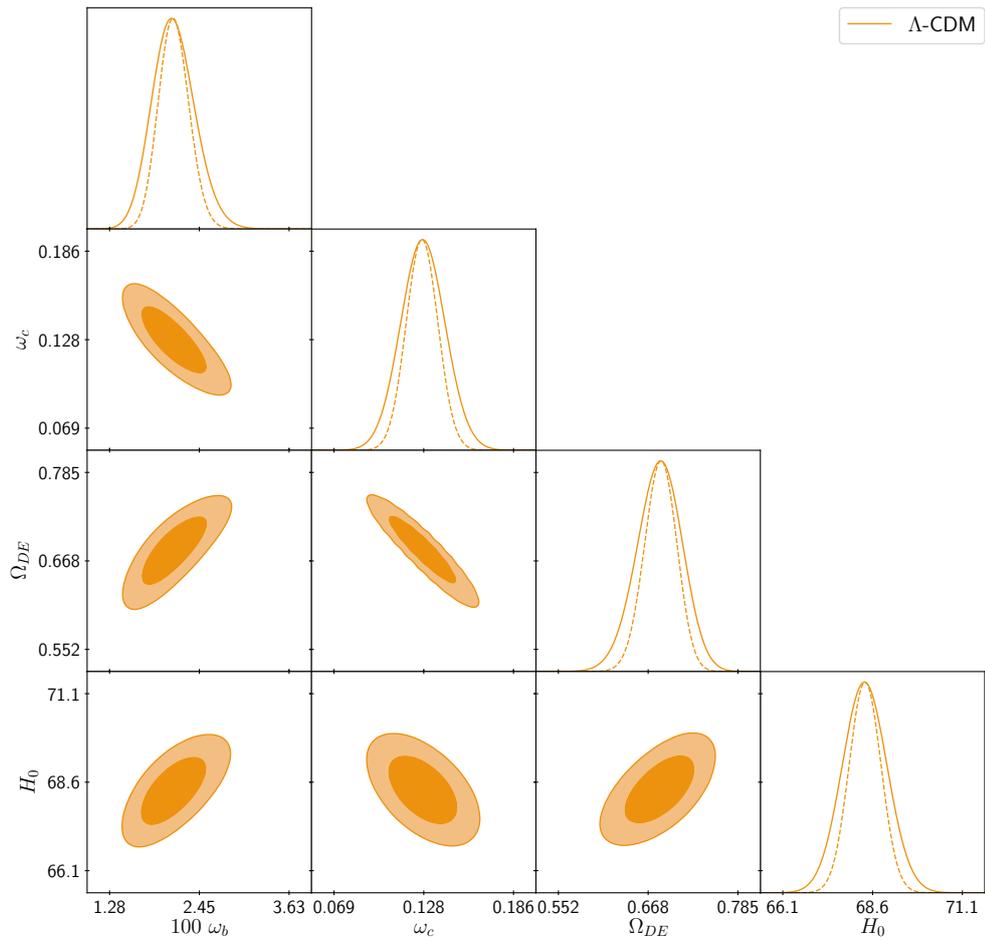


Figura D.2: Distribución Posterior de probabilidad del modelo Λ -CDM, probado con datos de BAO y SN. El espacio de parámetros (incluido el parámetros derivado H_0) es de dimensión 4: $\Theta = (\omega_b, \omega_{cdm}, \Omega_{DE}, H_0)$

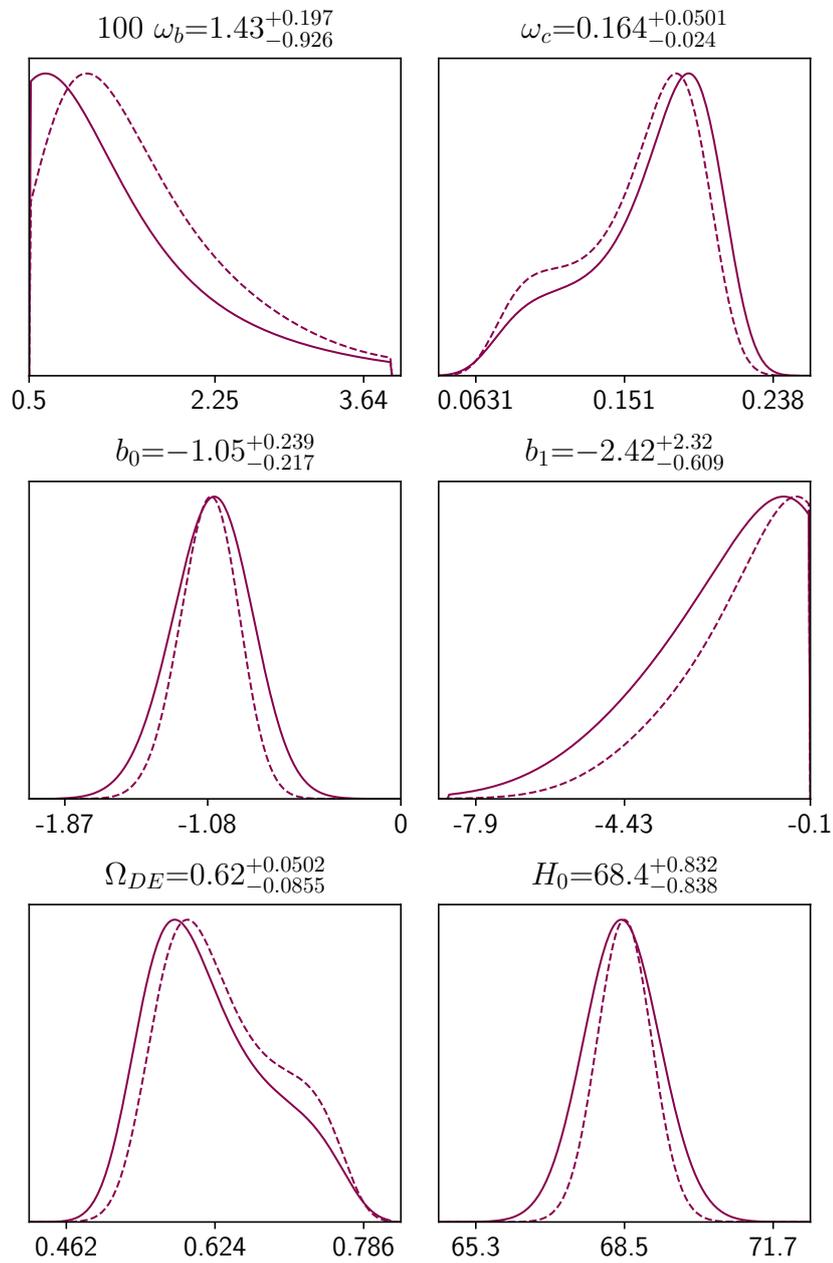


Figura D.3: Distribución posterior de probabilidad, modelo $w(z)_{N=1}$ probado con datos de BAO y SN.

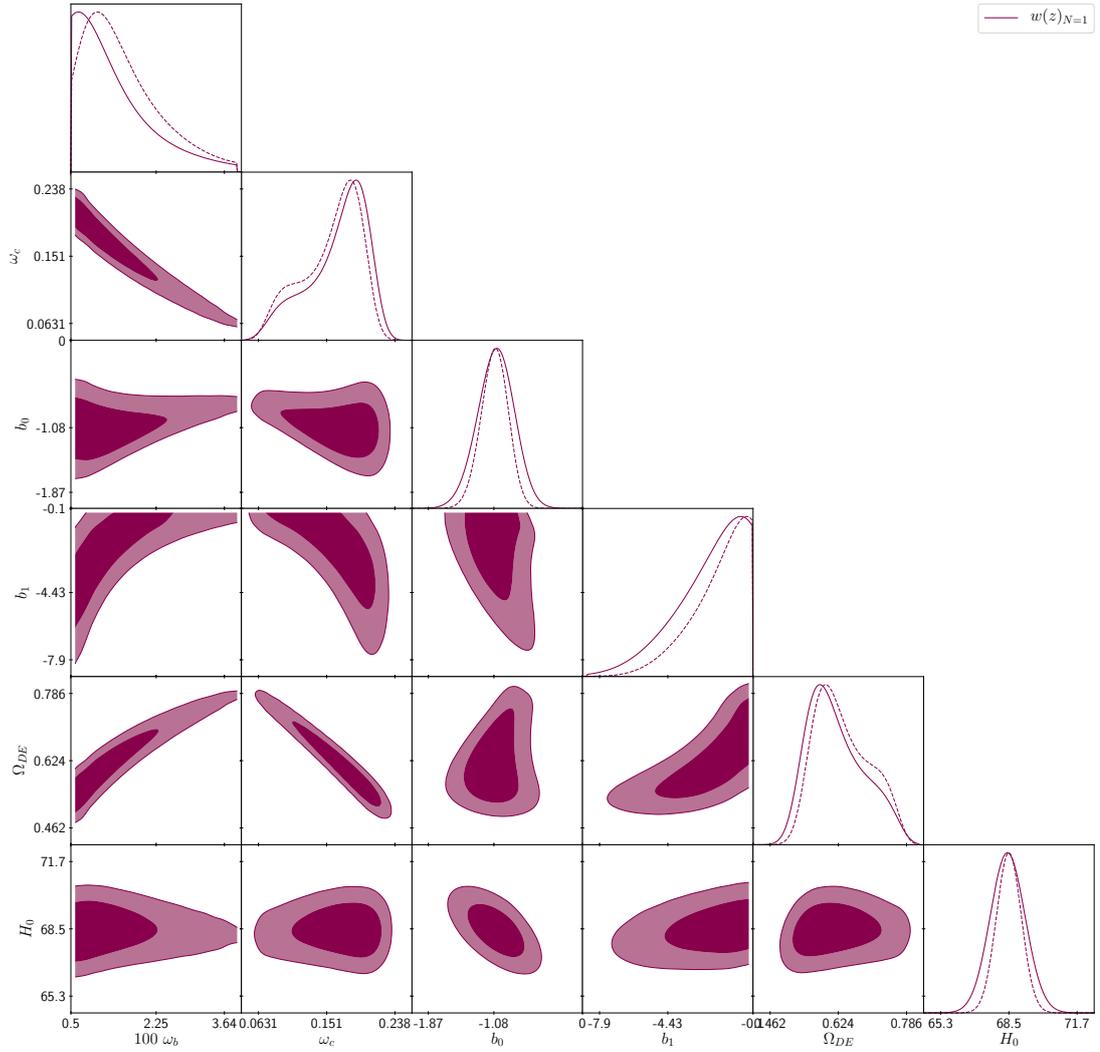


Figura D.4: Distribución Posterior de probabilidad del modelo $w(z)_{N=1}$, probado con datos de BAO y SN. El espacio de parámetros (incluido el parámetros derivado H_0) es de dimensión 6: $\Theta = (\omega_b, \omega_{cdm}, b_0, b_1, \Omega_{DE}, H_0)$

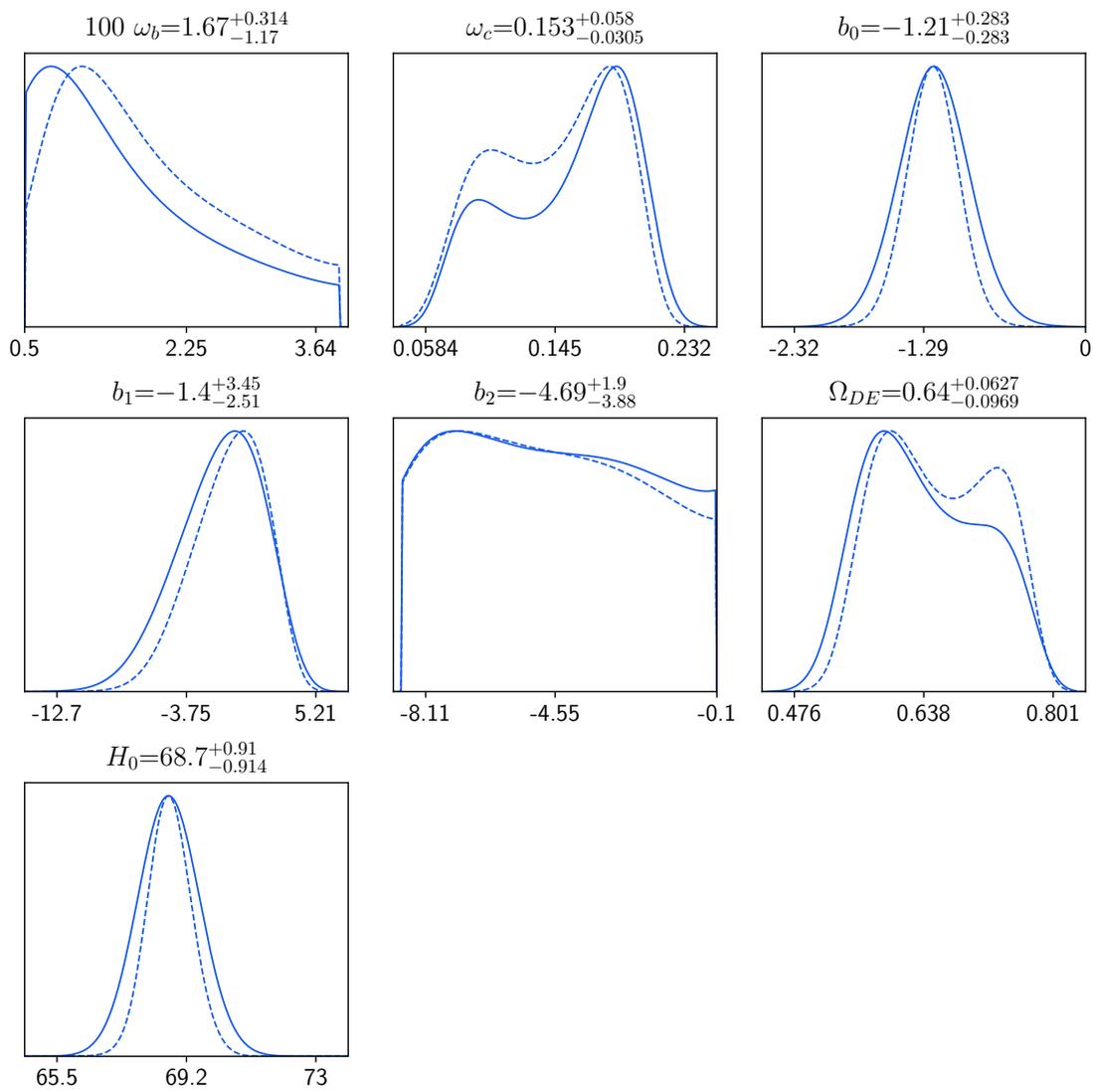


Figura D.5: Distribución posterior de probabilidad, modelo $w(z)_{N=2}$ probado con datos de BAO y SN.

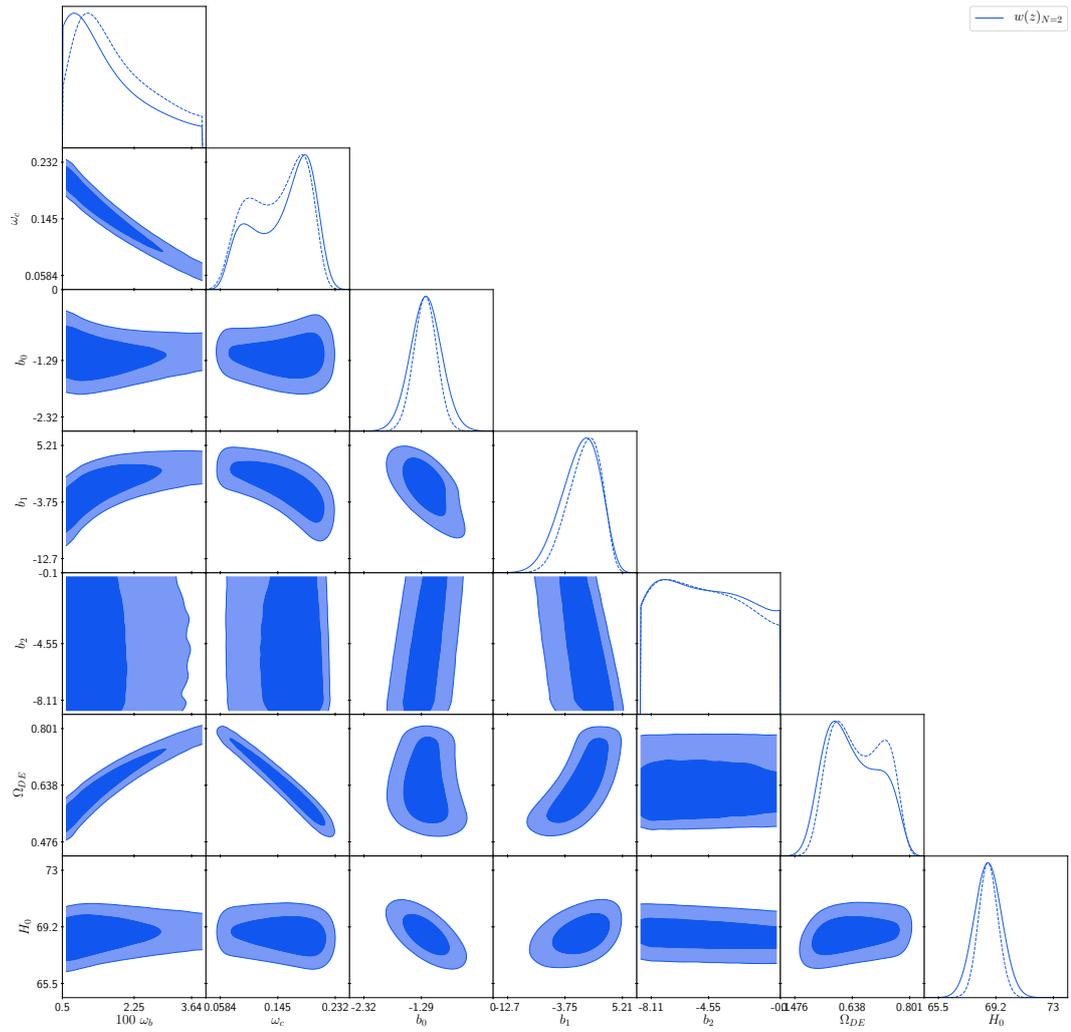


Figura D.6: Distribución Posterior de probabilidad del modelo $w(z)_{N=2}$, probado con datos de BAO y SN. El espacio de parámetros (incluido el parámetros derivado H_0) es de dimensión 6: $\Theta = (\omega_b, \omega_{cdm}, b_0, b_1, b_2, \Omega_{DE}, H_0)$

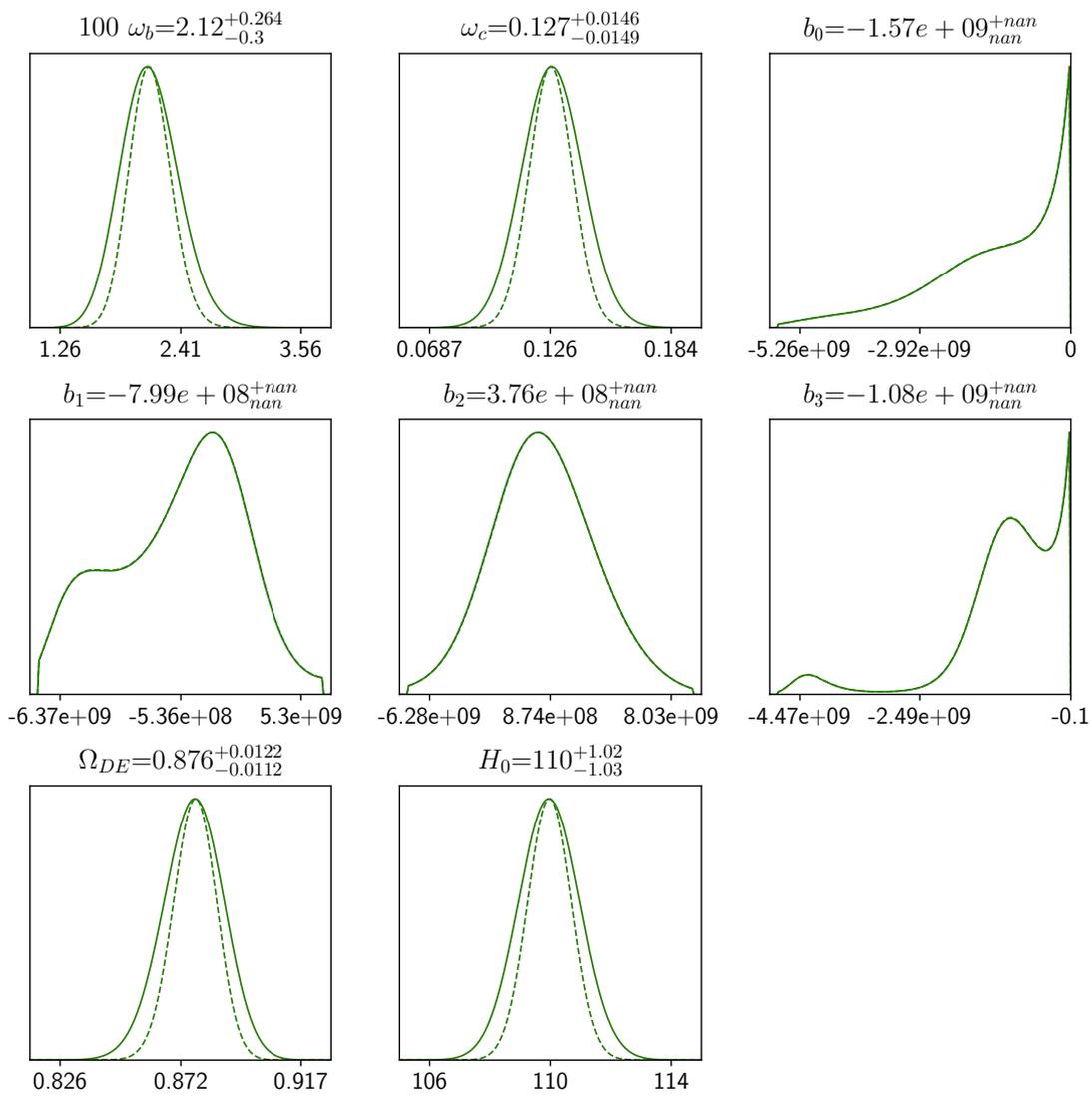


Figura D.7: Distribución posterior de probabilidad, modelo $w(z)_{N=3}$ probado con datos de BAO y SN.

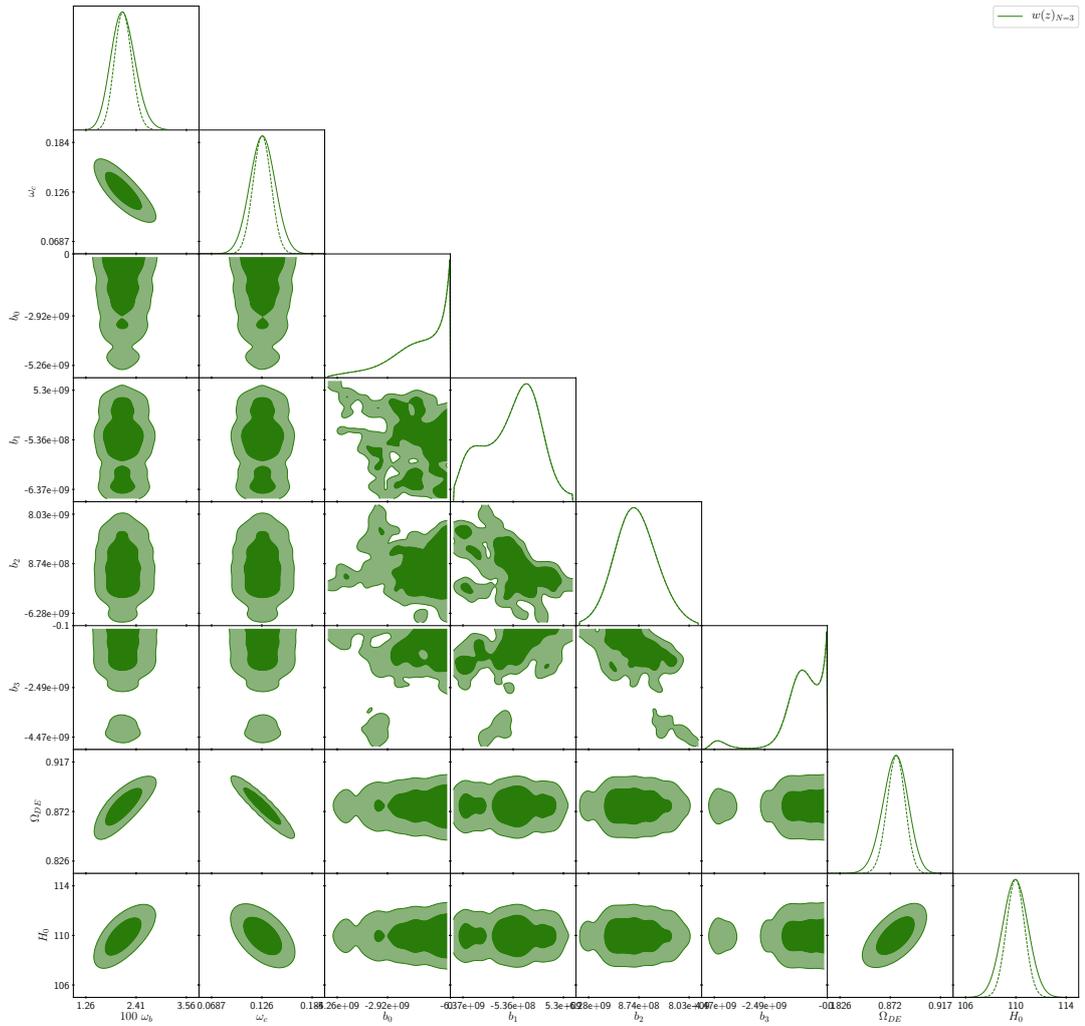


Figura D.8: Distribución Posterior de probabilidad del modelo $w(z)_{N=3}$, probado con datos de BAO y SN. El espacio de parámetros (incluido el parámetros derivado H_0) es de dimensión 6: $\Theta = (\omega_b, \omega_{cdm}, b_0, b_1, b_2, b_3, \Omega_{DE}, H_0)$

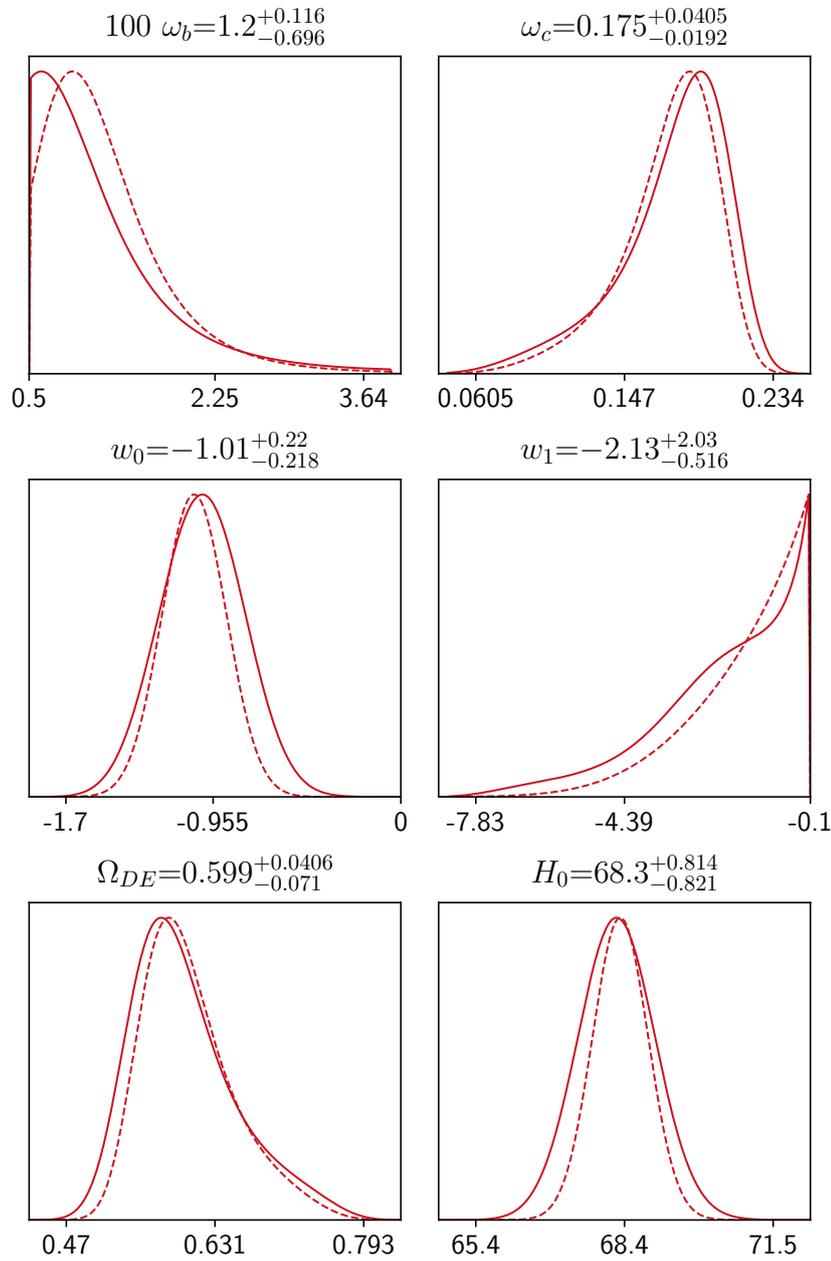


Figura D.9: Distribución posterior de probabilidad, modelo CPL probado con datos de BAO y SN.

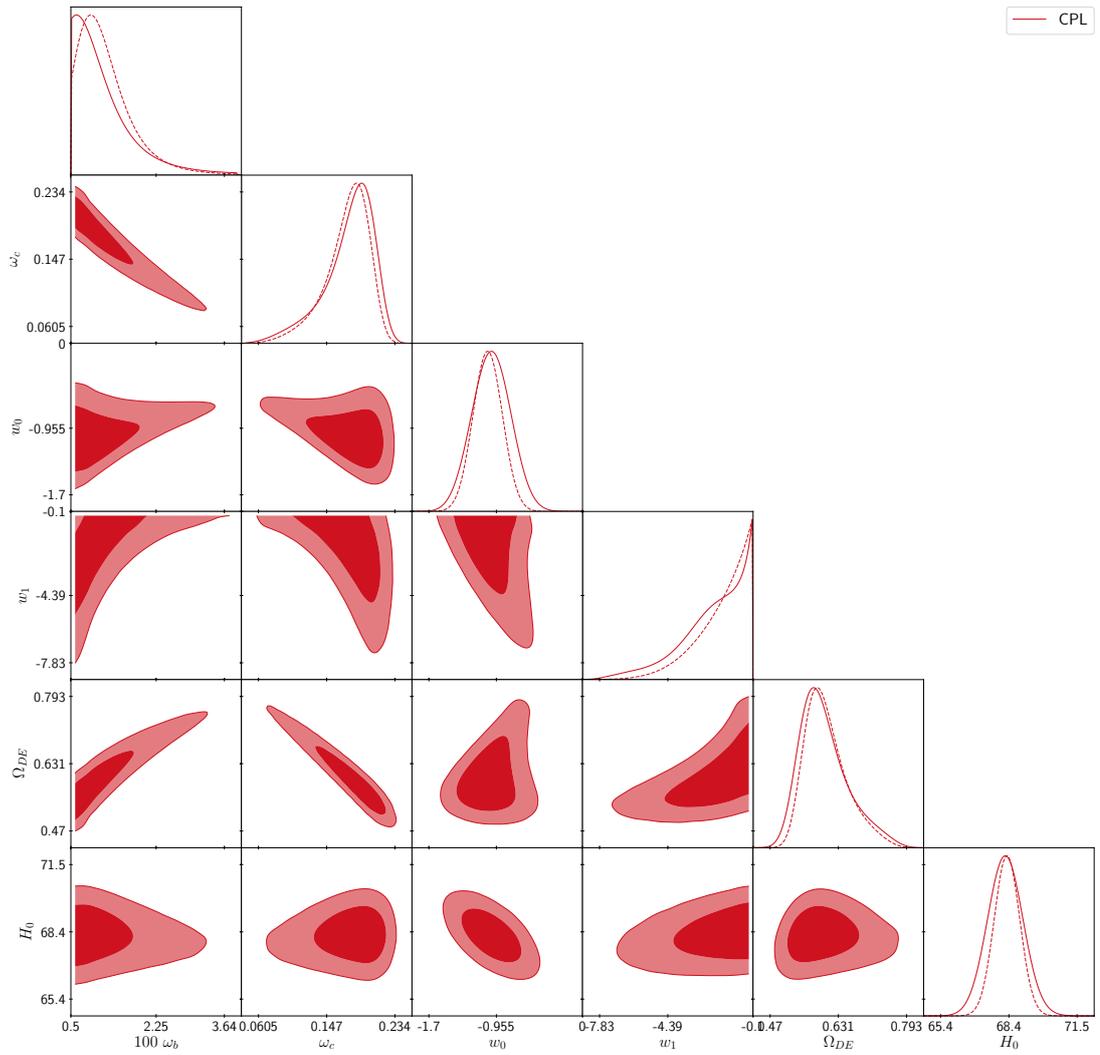


Figura D.10: Distribución Posterior de probabilidad de la parametrización CPL, probada con datos de BAO y SN. El espacio de parámetros (incluido el parámetros derivado H_0) es de dimensión 6: $\Theta = (\omega_b, \omega_{cdm}, w_0, w_1, \Omega_{DE}, H_0)$

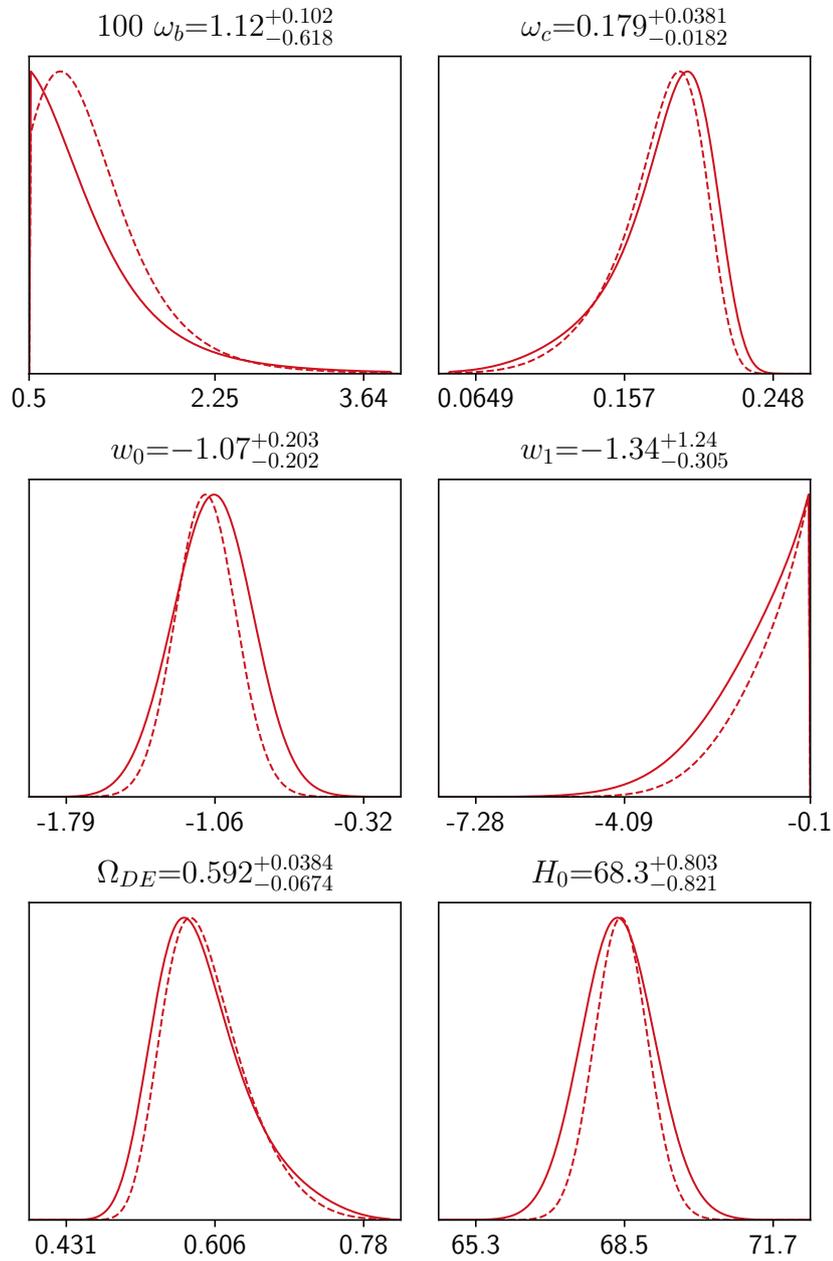


Figura D.11: Distribución posterior de probabilidad, modelo BA probado con datos de BAO y SN.

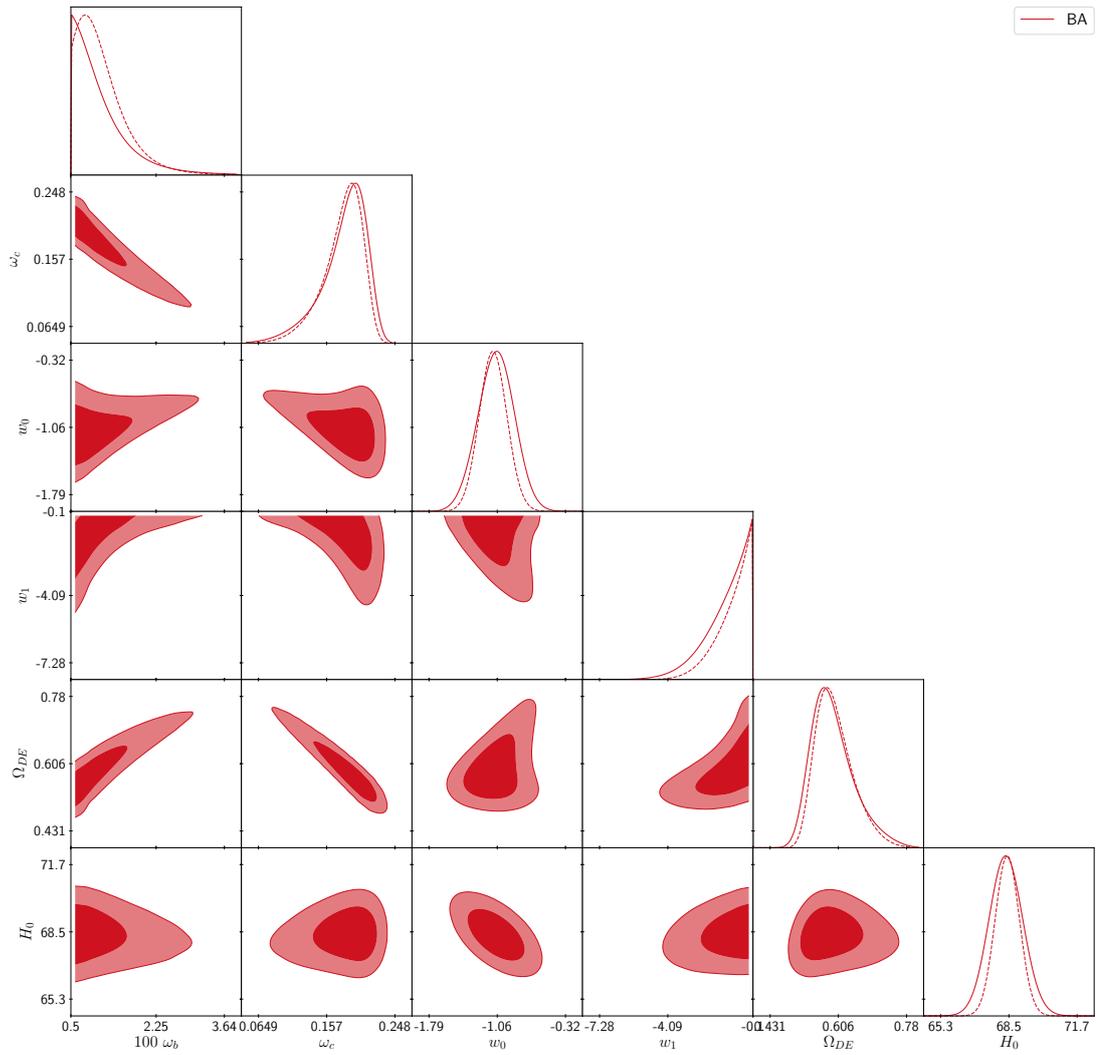


Figura D.12: Distribución Posterior de probabilidad de la parametrización BA, probada con datos de BAO y SN. El espacio de parámetros (incluido el parámetros derivado H_0) es de dimensión 6: $\Theta = (\omega_b, \omega_{cdm}, w_0, w_1, \Omega_{DE}, H_0)$

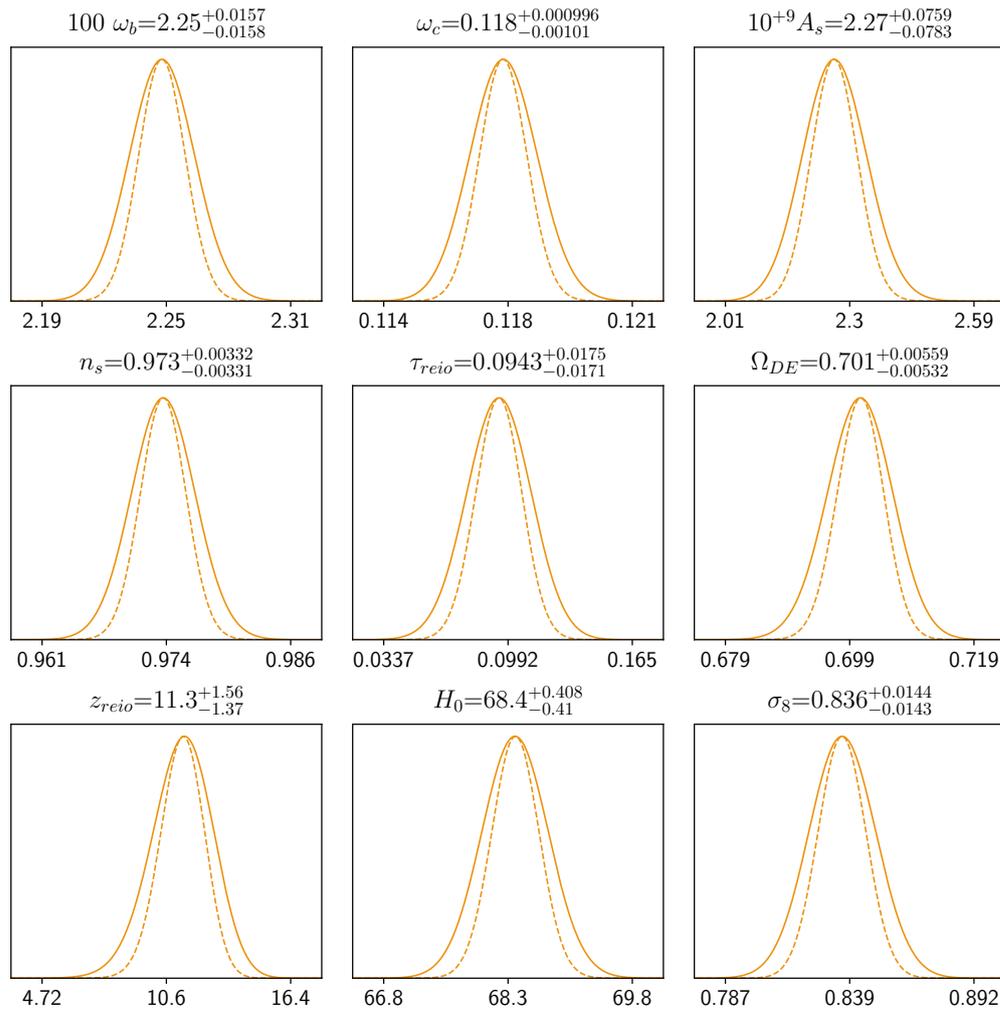


Figura D.13: Distribución posterior de probabilidad, modelo Λ -CDM probado con datos de CMB, BAO y SN.

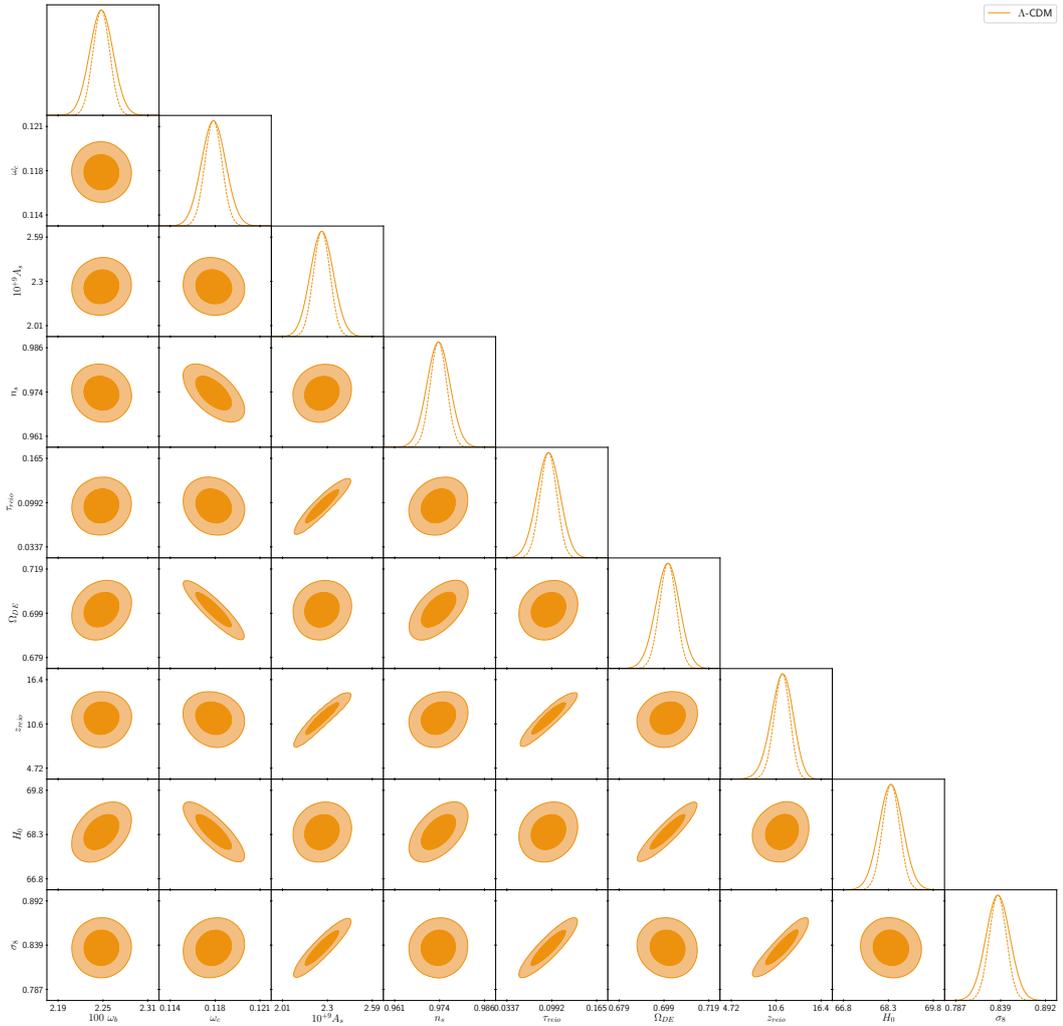


Figura D.14: Distribución Posterior de probabilidad del modelo Λ -CDM, probado con datos de CMB, BAO y SN. El espacio de parámetros (incluidos los parámetros derivados) es de dimensión 9: $\Theta = (\omega_b, \omega_{cdm}, A_s, n_s, \tau_{reio}, \Omega_{DE}, z_{reio}, H_0, \sigma_8)$

D. GRÁFICAS

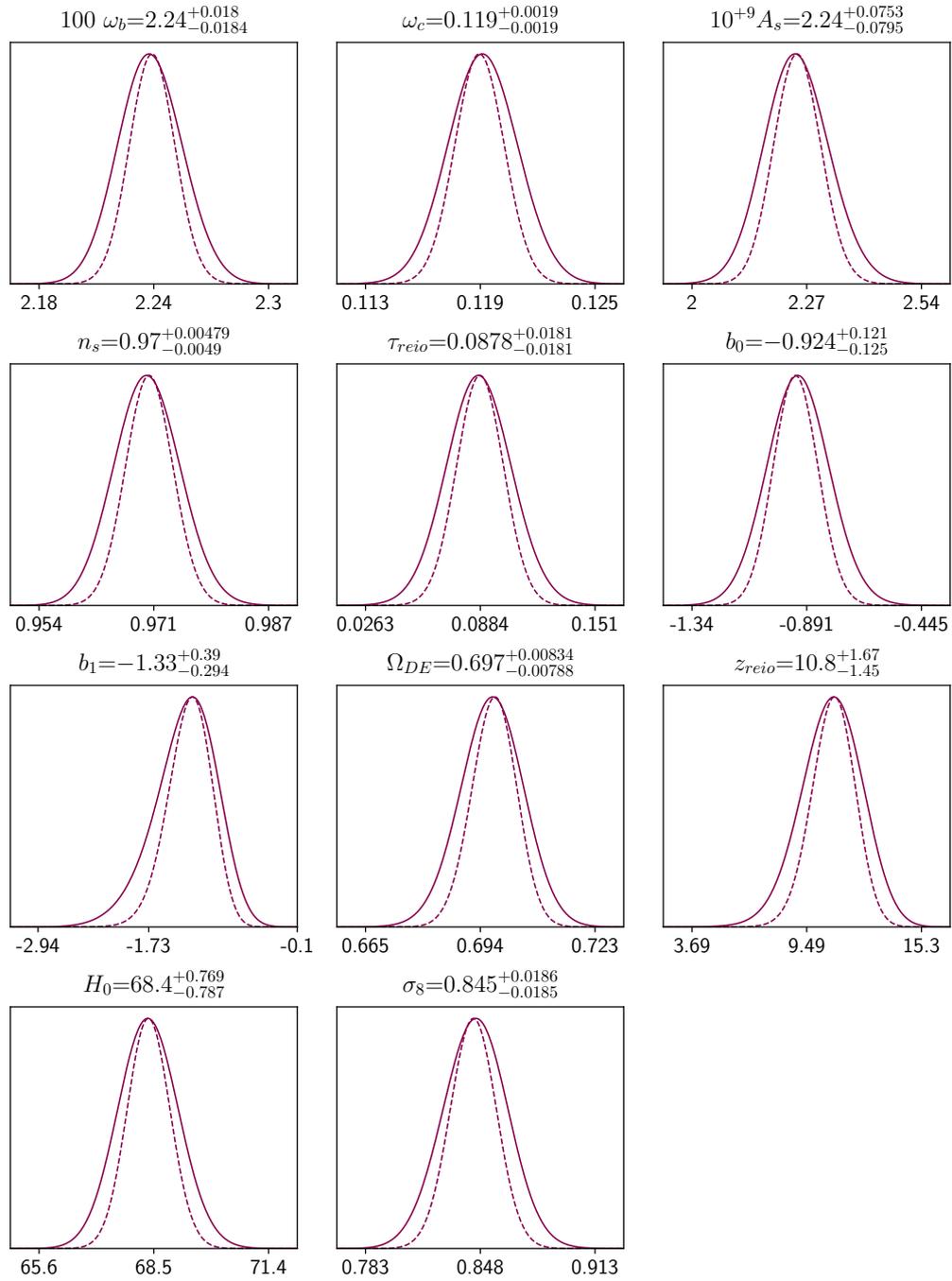


Figura D.15: Distribución posterior de probabilidad, modelo $w(z)_{N=1}$ probado con datos de CMB, BAO y SN.

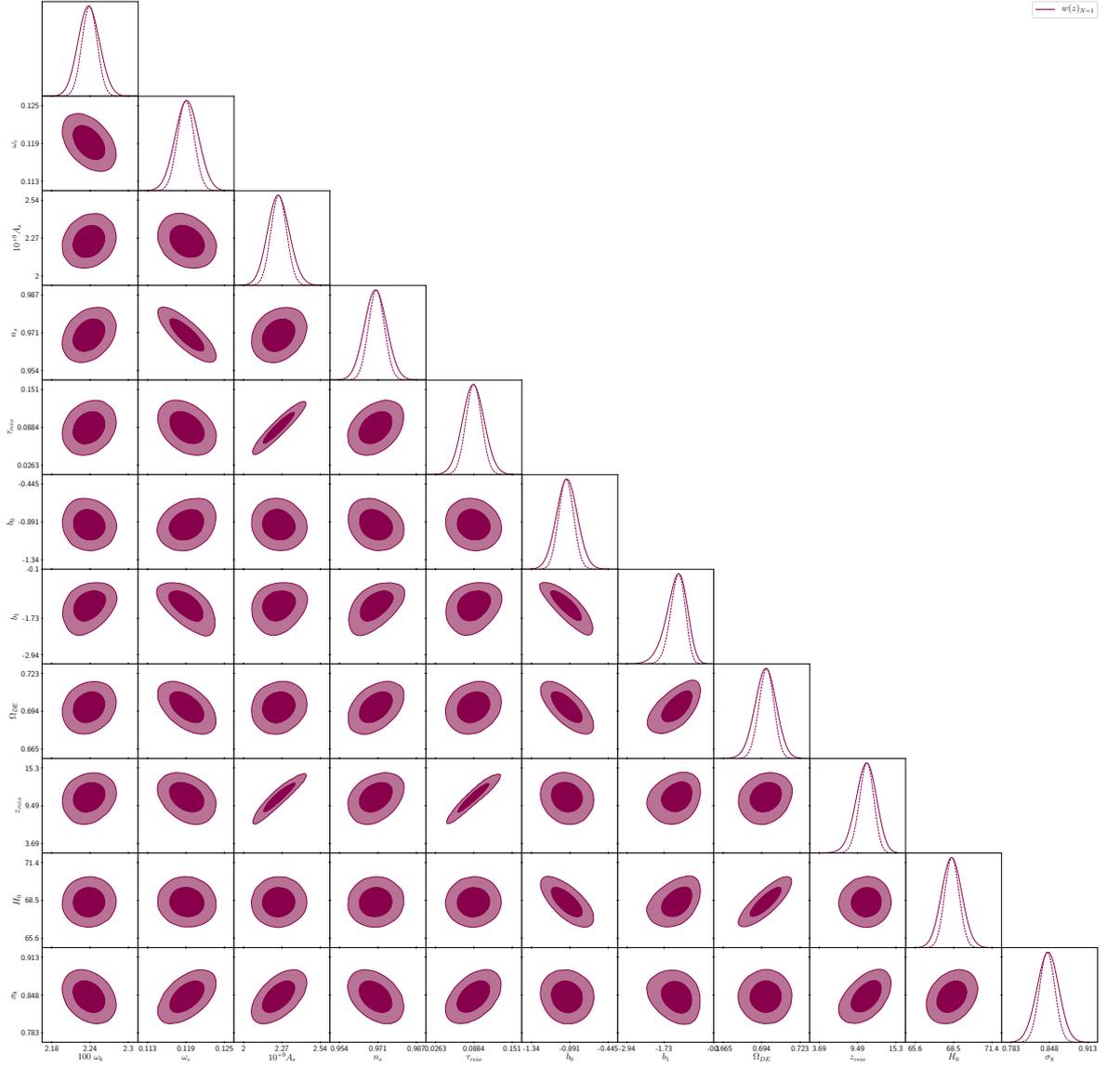


Figura D.16: Distribución Posterior de probabilidad del modelo $w(z)_{N=1}$, probado con datos de CMB, BAO y SN. El espacio de parámetros (incluidos los parámetros derivados) es de dimensión 11: $\Theta = (\omega_b, \omega_{cdm}, A_s, n_s, \tau_{reio}, b_0, b_1, \Omega_{DE}, z_{reio}, H_0, \sigma_8)$

D. GRÁFICAS

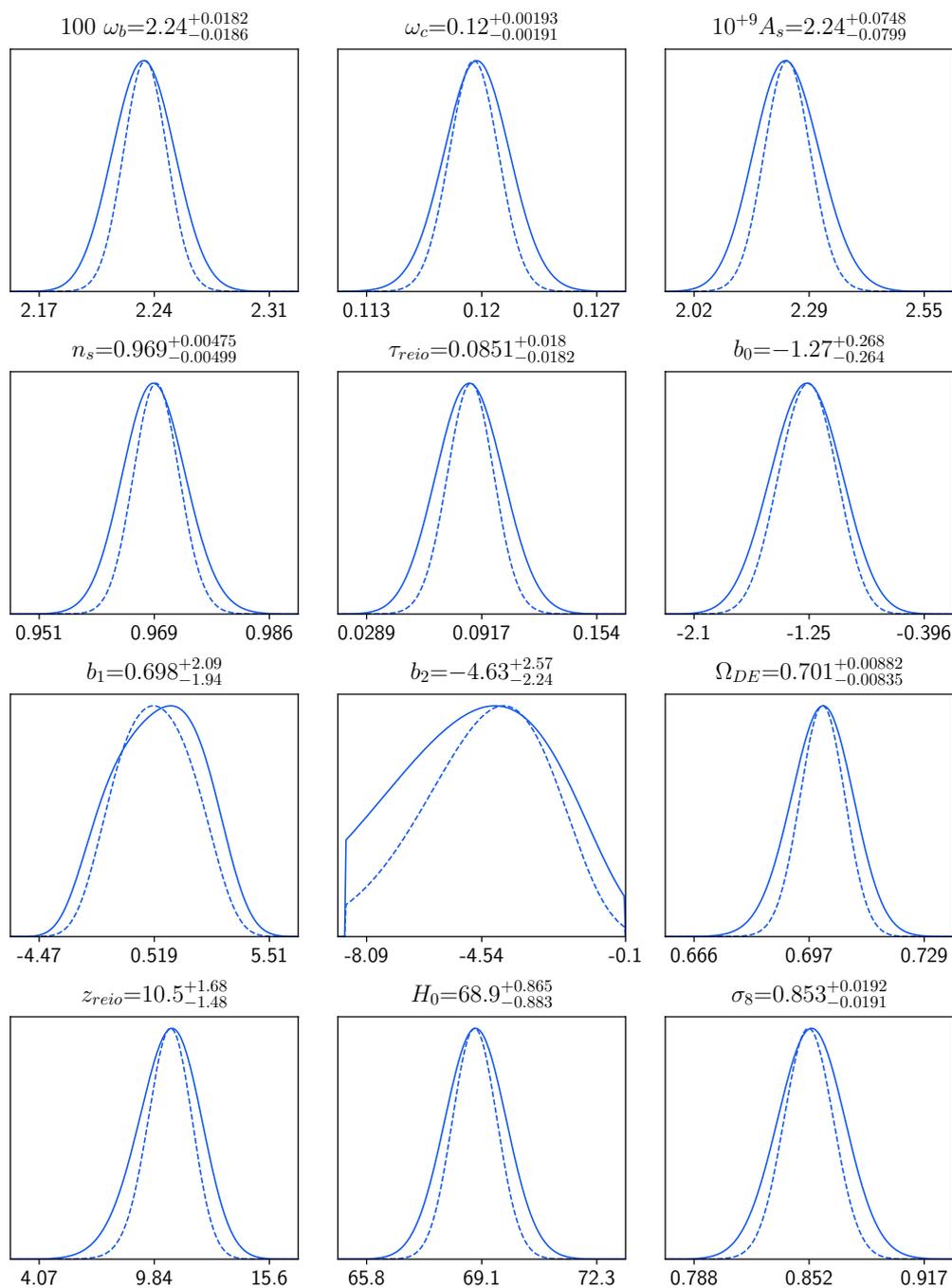


Figura D.17: Distribución posterior de probabilidad, modelo $w(z)_{N=2}$ probado con datos de CMB, BAO y SN.

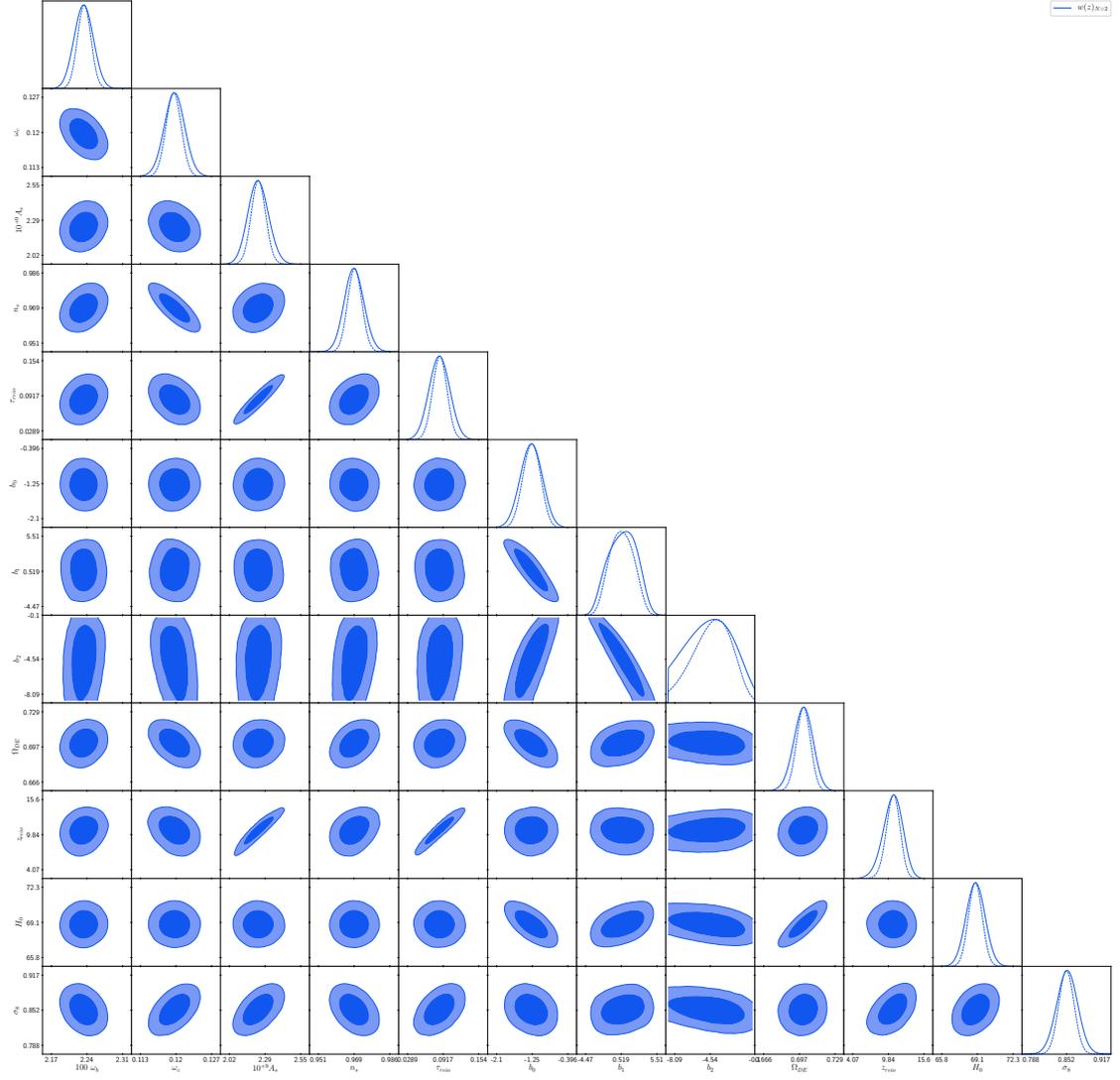


Figura D.18: Distribución Posterior de probabilidad del modelo $w(z)_{N=2}$, probado con datos de CMB, BAO y SN. El espacio de parámetros (incluidos los parámetros derivados) es de dimensión 13: $\Theta = (\omega_b, \omega_{cdm}, \Omega_{DE}, \Omega_m, b_0, b_1, b_2, A_s, n_s, \tau_{reio}, z_{reio}, H_0, \sigma_8)$

D. GRÁFICAS

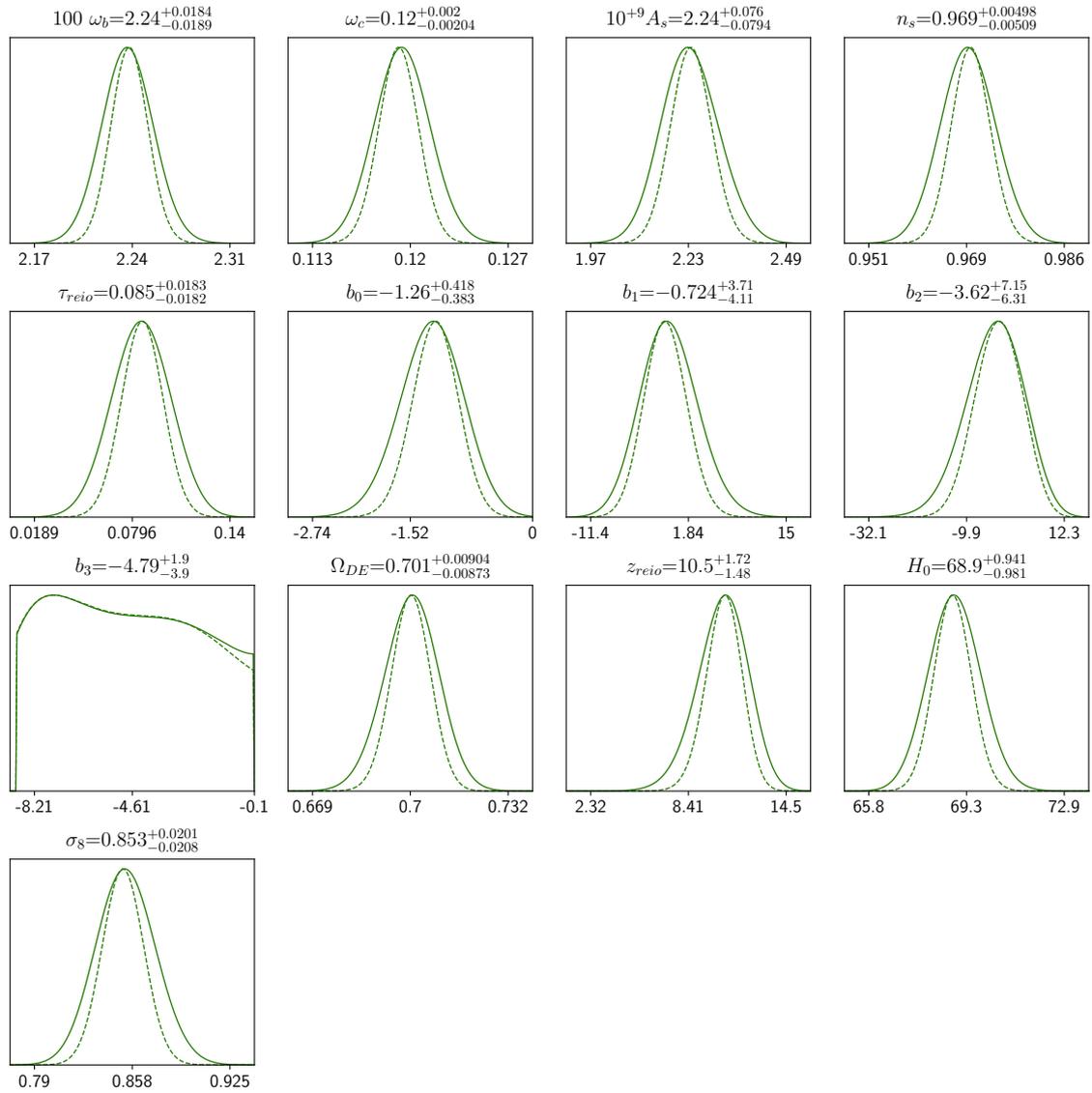


Figura D.19: Distribución posterior de probabilidad, modelo $w(z)_{N=3}$ probado con datos de CMB, BAO y SN.

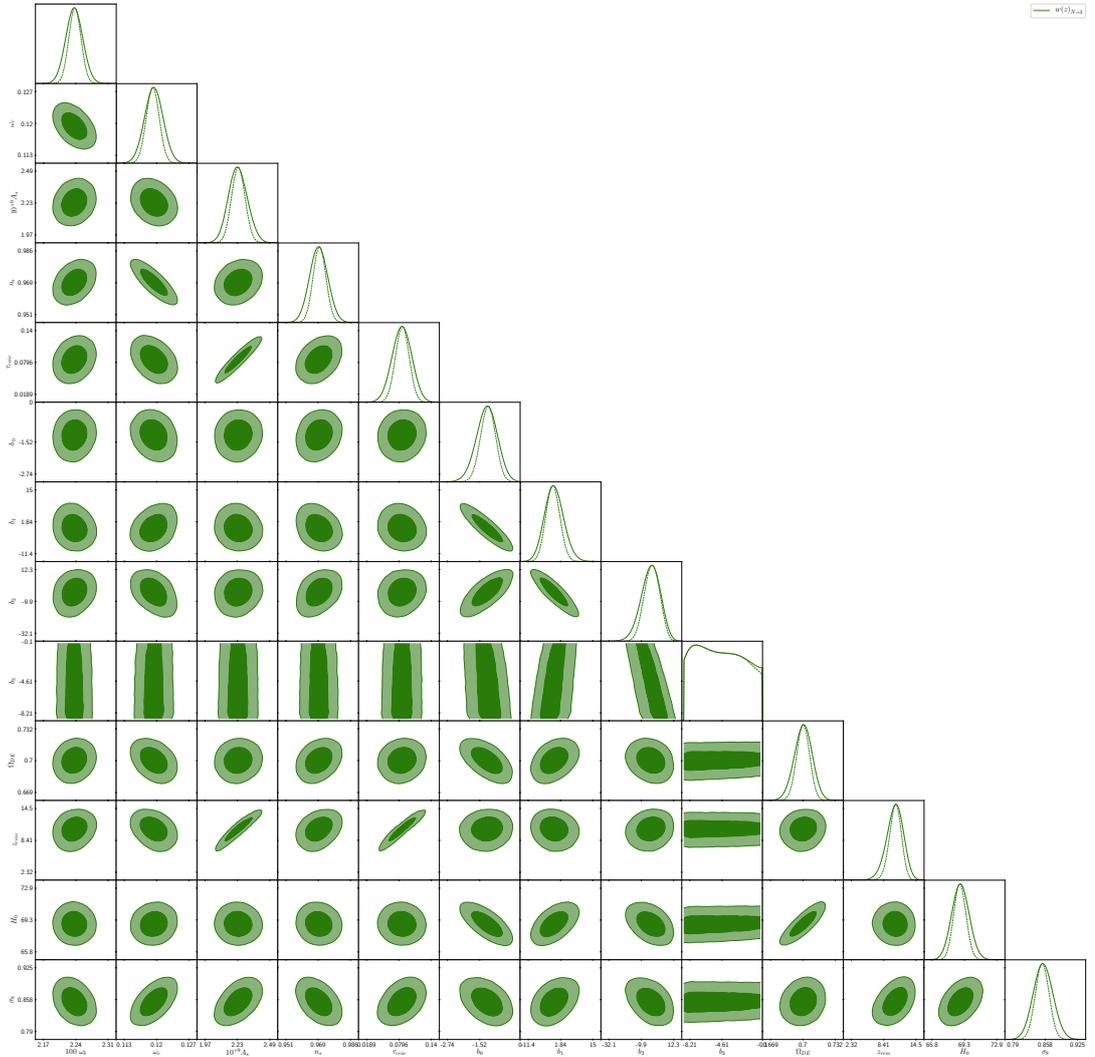


Figura D.20: Distribución Posterior de probabilidad del modelo $w(z)_{N=3}$, probado con datos de CMB, BAO y SN. El espacio de parámetros (incluidos los parámetros derivados) es de dimensión 14: $\Theta = (\omega_b, \omega_{cdm}, \Omega_{DE}, \Omega_m, b_0, b_1, b_2, b_3, A_s, n_s, \tau_{reio}, z_{reio}, H_0, \sigma_8)$

Apéndice E

Detalles Técnicos

E.1. Sobre Cadenas de Markov

El número de variables a escoger al momento de implementar un método MC, aunado a la dificultad de obtener corridas “limpias” (sin errores dentro del módulo cosmológico CLASS) podría dar la falsa impresión de que obtener una corrida sin errores o problemas técnicos es equivalente a obtener un “buen resultado”. Es decir, los muchos factores intrínsecos al método MC pueden hacernos creer erroneamente que obtener un resultado es equivalente a obtener un *buen* resultado. Esto es falso.

Además de lo anterior, pueden existir prejuicios “visuales” a la hora de interpretar los resultados, por ejemplo: durante las primeras corridas es probable que obtengamos gráficas de contornos como la (Fig. E.1 a)): dispersas, sin cohesión. A medida que “mejoramos” la elección de las variables¹, las gráficas pueden mejorar: verse menos dispersas, más ovaladas, bien definidos los contornos (Fig. E.1 b)). Sin embargo, este criterio empírico no es un parámetro correcto para decir que nuestros resultados son buenos. Es decir, el mero análisis visual no debería ser utilizado para discernir entre buenas y malas corridas o cadenas.

A este tipo de corridas podríamos llamarles “corridas a ciegas”, puesto que no siguen un criterio o parámetros para analizar si la corrida se efectuó de *buena* o *mala* manera.

Existen dos cuestiones principales al implementar un método de cadenas de Markov:

1. Un **criterio de convergencia**: ¿en qué momento *convergen* las cadenas?
2. Un **diagnóstico de mixing** o **mezcla**: ¿qué tan bien y qué tanto de la distribución de probabilidad/espacio de parámetros exploran las cadenas?

¹Por ejemplo, una elección específica de priors, puede generar gráficas de contorno aceptables, sin que esto represente que la corrida sea estadísticamente buena.

E. DETALLES TÉCNICOS

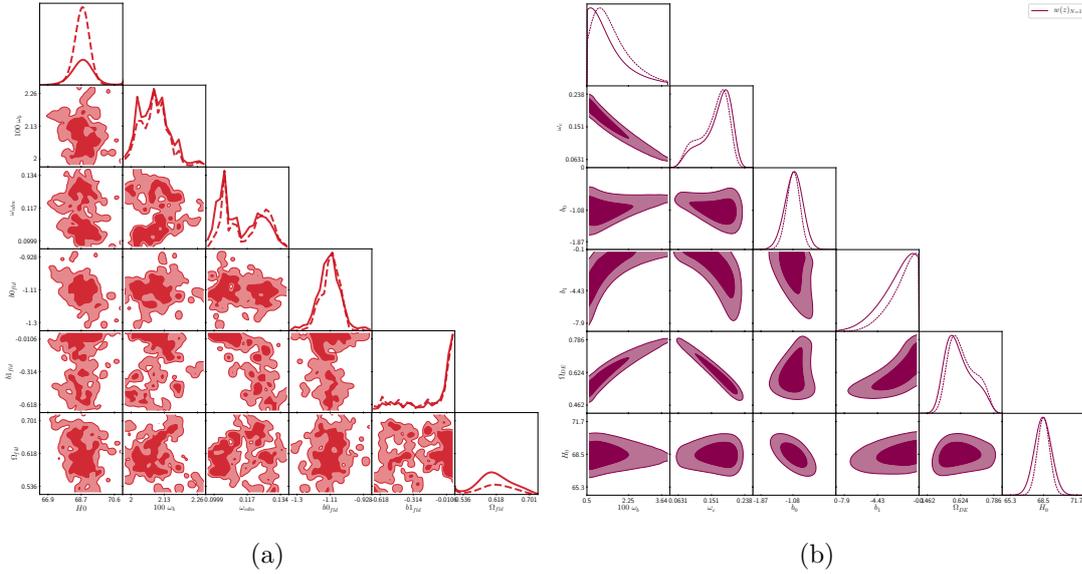


Figura E.1: Ejemplos de corridas donde las gráficas muestran una aparente falta de convergencia y una aparente convergencia. Aunque a posteriori se sabe (por un análisis de los parámetros estadísticos de convergencia y aceptación) que la primera (a) no logró converger mientras que la segunda (b) alcanzó un excelente criterio de convergencia, sustentarse exclusivamente en un análisis visual de las gráficas puede llevar a errores de interpretación.

E.1.1. Criterio de Convergencia

Una de las características que define a una cadena de Markov es que *no tiene memoria*, es decir, su comportamiento futuro no depende de cómo llegó a la posición del espacio de parámetros donde se encuentra, sino únicamente de esa posición actual (Verde, 2007). La cadena es entonces independiente del punto de inicio.

El criterio de convergencia se define a través de la fase *burn-in* o “periodo de quemado”; y viceversa, la fase de burn-in requiere del concepto de convergencia para definirse. Al iniciar una cadena de Markov, es bastante probable (a menos que se tenga conocimiento previo de los mejores valores de los parámetros) que la cadena inicie en un punto de baja probabilidad, poco representativo de la distribución que se trata de explorar. A medida que

Este periodo de quemado es la primera “sección” de una cadena de Markov, en donde las probabilidades son bajas. Burdamente se define un periodo de quemado eliminando un porcentaje de la cadena “a mano”, siempre de la parte inicial. Por ejemplo los primeros 100 pasos o el primer 10% de la cadena. En códigos más cuidadosos como MONTEPYTHON, se calcula el **criterio de convergencia** para definir el tamaño de la fase de quemado.

Sin entrar en detalles, el criterio de convergencia Gelman-Rubin (utilizado por MP) es aquel que exige que la cantidad $\hat{R} < 1.01$ para todos los parámetros. Esta cantidad \hat{R} está relacionada con la variancia entre cadenas de una misma corrida y con la variancia dentro de una misma cadena (Verde, 2007, p. 39). Por lo tanto, para considerar que **una cadena ha convergido** se necesita cumplir,

$$\hat{R} - 1 < 0.01 \tag{E.1}$$

para todos los parámetros de cierto modelo.

Dentro de MONTEPYTHON se define la fase de quemado como todos aquellos elementos de la cadena cuyo criterio de convergencia $\hat{R} - 1 > 10$ para todos los parámetros, al eliminar esta fase se elimina entre el 10% y 20% de la cadena (Brinckmann and Lesgourgues, 2018, p. 14) y se puede hablar de una cadena con *buena probabilidad*.

E.1.2. Mezcla de cadenas

Otra cuestión importante es el *mix* o *mezcla* de las cadenas, es decir, qué tanto de la distribución de probabilidad exploraron las cadenas. Para entender esto es importante recordar que una cadena tiene algunas variables que controlan su forma y rapidez de exploración. Dos variables importantes son el **tamaño de paso** y el **número de pasos**.

Supongamos que mandamos a correr una cadena con número de pasos = 10K, esto simplemente significa que terminando los 10K pasos, sin importar si la cadena haya convergido o no, ésta va a dejar de “caminar”. Ahora, la función del tamaño de paso es determinar directamente si la cadena se mueve *rápidamente* o no sobre la distribución de probabilidad. Por ejemplo un tamaño de paso grande permite que la cadena se mueva velozmente puesto que la cadena se mueve sobre un *grid* más grande; por el contrario, un tamaño de paso pequeño requeriría un tiempo de cómputo enorme para que la cadena explorase la mayor parte de la distribución de probabilidad. Un detalle importante aquí es que un tamaño de paso grande no es necesariamente bueno, puesto que si el *grid* es muy grande, la cadena puede *esquivar* posibles mínimos locales o globales.

Otro factor es la *autocorrelación* de los parámetros: dos o más parámetros altamente correlacionados llevarán a un “estancamiento” de la cadena, observandose

E. DETALLES TÉCNICOS

muy poco movimiento. (Verde, 2007) Este fenómeno resulta en una cadena que parte de su punto inicial y “gasta” todos sus pasos en un volumen muy pequeño del espacio de parámetros, dando la impresión de haber convergido.

Para considerar todos los posibles problemas, se necesita un diagnóstico de mezcla de cadenas. Generalmente se utiliza el diagnóstico llamado *acceptance rate* o **tasa de aceptación**. Una cadena se considera *bien mezclada* cuando ha caminado por el mayor volumen posible dentro del espacio de parámetros, *i.e.* ha cubierto la distribución de probabilidad. Una forma de observar el mezclado de una cadena es graficando el valor de los parámetros vs el número de paso, cadenas con mal mixing se observan como la (Fig. E.2): una mala exploración de la distribución con variaciones pequeñas sobre el intervalo de exploración. Por el contrario, cadenas con buen mixing se asemejan a la (Fig. E.3): se observa una exploración *densa* de la distribución de probabilidad, en todos los parámetros. Donde cada parámetro se mueve sobre todo el intervalo; cadenas como ésta última pasan varias veces por el mismo punto o por una vecindad alrededor de dicho punto, puesto que el tamaño de paso permite un recorrido lo suficientemente “veloz” sobre la distribución. La tasa de aceptación se define como,

$$\text{tasa de aceptación} = n_{\text{tot}} - n_{\text{repeat}} \quad (\text{E.2})$$

donde n_{tot} es el número total de pasos y n_{repeat} el número de pasos que la cadena pasó por el mismo punto. Se habla de una distribución bien mezclada cuando se cumple

$$0.15 < \text{tasa de aceptación} < 0.35 \quad (\text{E.3})$$

Cuando una cadena o una corrida (varias cadenas con las mismas variables de inicio) cumplen las dos condiciones (E.1) y (E.3), se dice que los resultados arrojados por el Monte Carlo son *buenos*, es decir, cumplen con criterios estadísticos que aseguran una buena corrida. Esto no significa que los resultados sean *buenos* para la teoría física o modelo que se esté probando, simplemente significa que son estadísticamente concluyentes.

Durante este trabajo se hicieron un número grande de corridas, muchas de ellas, la mayoría, fueron descartadas ya que no cumplían con estas dos condiciones. A lo largo del trabajo se fue refinando la elección de variables como número de pasos (N), tamaño de paso o jumping factor (f), elección de priors hasta obtener *buenas cadenas*. Todos los resultados mostrados a lo largo de esta tesis no sólo cumplieron sino que sobrepasaron las condiciones de convergencia y mezclado, asegurándonos resultados estadísticamente correctos. Mostramos a continuación la evidencia que sustenta esta afirmación.

Modelo	Dataset	$\hat{R} - 1$	Acc. rate
Λ -CDM	D_1	0.000013	0.32
$w(z)_{N=1}$		0.000088	0.26
$w(z)_{N=2}$		0.000074	0.26
$w(z)_{N=3}$		0.6144	0.34
CPL		0.000147	0.26
BA		0.000069	0.27
Λ -CDM	D_2	0.000039	0.15
$w(z)_{N=1}$		0.000219	0.10
$w(z)_{N=2}$		0.000193	0.24
$w(z)_{N=3}$		0.000358	0.24

Tabla E.1: Criterio de convergencia $\hat{R} - 1$ (promediado sobre todos los parámetros) y tasa de aceptación (Acc. rate) (promediada sobre todas las cadenas de una misma corrida) de todos los modelos probados en este trabajo. Los valores de R-1, redondeados en la sexta cifra significativa. Se observa que en todos los casos excepto $N=3$ con D_1 se cumple $\hat{R}-1 < 0.01$ y $0.15 < \text{acc rate} < 0.35$, excepto $N=1$ con D_2 , que tiene una mezcla ligeramente menor a la esperada.

E.2. Reproducibilidad de mis resultados

Debe considerarse que de un total del orden de ~ 150 corridas ejecutadas entre 2018 y 2019 (cada una con sus respectivas cadenas en paralelo y número de pasos), se obtuvieron las 10 corridas **exitosas** que se presentan en este trabajo de tesis. El trabajo se comenzó con MONTE PYTHON 2.0 en donde la opción `superupdate` no estaba disponible, así que el jumping factor no podía ser actualizado; en su lugar, debió observarse con detenimiento, corrida por corrida, los resultados de criterio de convergencia y tasa de aceptación de tal forma que el trabajo consistió en su primer fase en eficientar las corridas, cambiando el jumping factor, el número de cadenas por corrida y el número de pasos. El resultado final fue el 90 % de cadenas convergidas, con tasas de aceptación dentro del rango definido por la literatura y con criterios de convergencia más que aceptables.

Con el fin de que mis resultados finales sean reproducibles, enuncio a continuación (Tabla E.2) algunos de los detalles en mi elección de parámetros de la cadena.

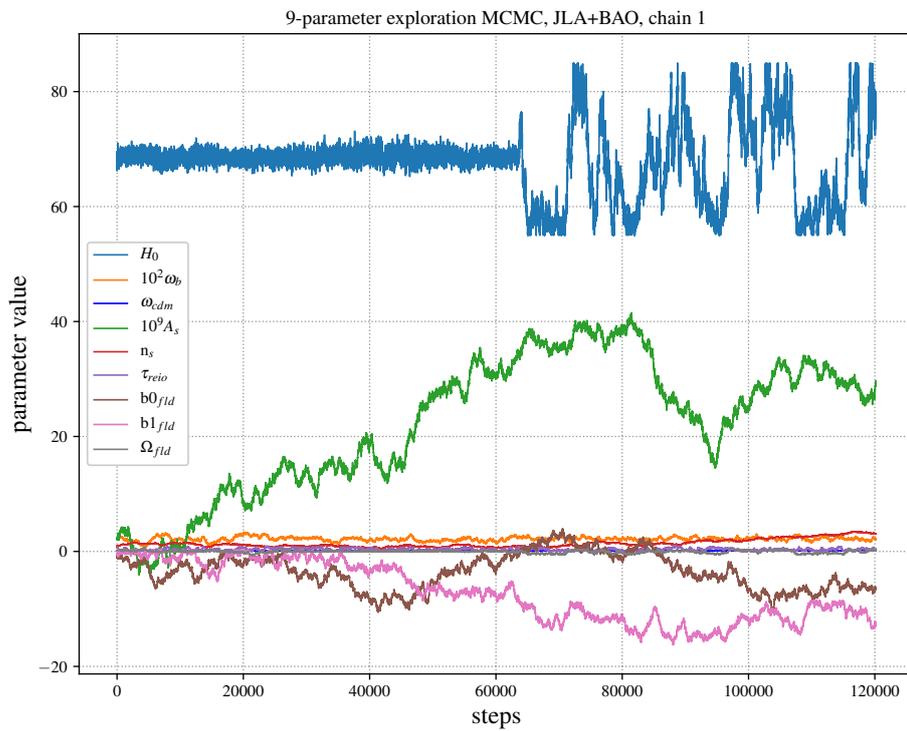


Figura E.2: Una cadena con *mala mezcla*, obsérvese por ejemplo el parámetro H_0 cómo comienza con una exploración aparentemente densa para después transicionar a una exploración desordenada y dispersa de su intervalo de exploración. Se observa un comportamiento similar en los demás parámetros.

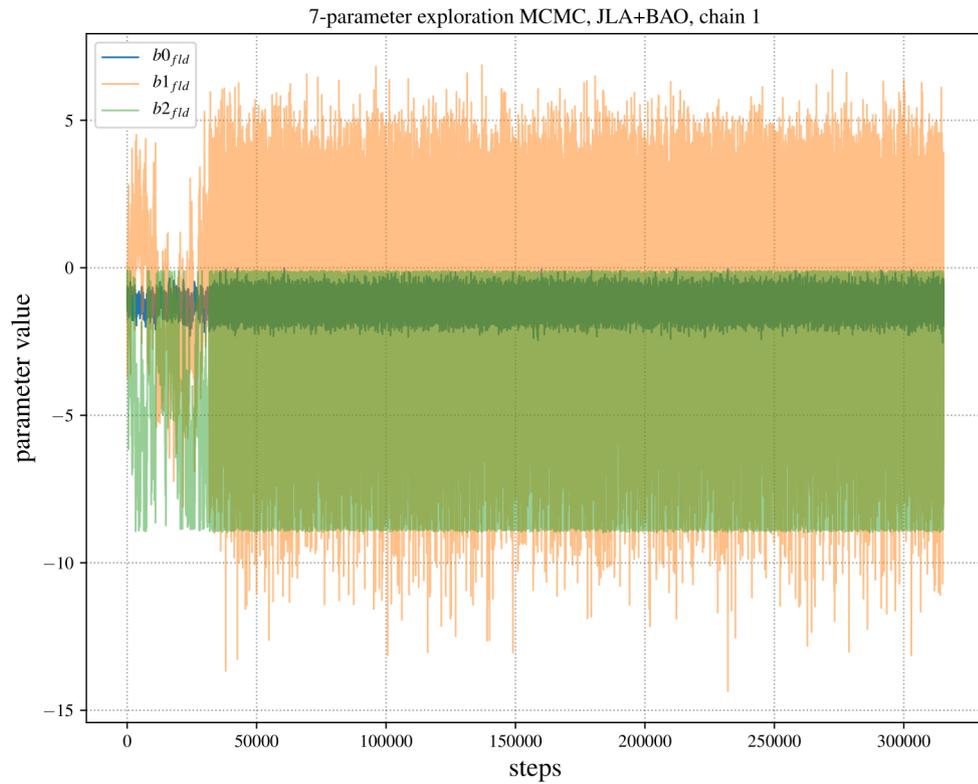


Figura E.3: Una cadena con *buena mezcla*, obsérvese cómo después de una evidente fase de burn-in, las cadenas abarcan llenan densamente el intervalo de exploración de cada parámetro.

E. DETALLES TÉCNICOS

Modelo	Dataset	Priors	No. Cadenas	No. pasos/cadena	jumping-factor
Λ -CDM	D_1	§5.2	8 en paralelo	800,000	<code>--superupdate 20</code>
$w(z)_{N=1}$			8 en paralelo	1,200,000	1.7
$w(z)_{N=2}$			8 en paralelo	1,200,000	<code>--superupdate 20</code>
$w(z)_{N=3}$			8 en paralelo	900,000	<code>--superupdate 20</code>
CPL			6 en paralelo	800,000	<code>--superupdate 20</code>
BA			8 en paralelo	800,000	<code>--superupdate 20</code>
Λ -CDM	D_2	§5.2	8 en paralelo	900,000	<code>--superupdate 20</code>
$w(z)_{N=1}$				950,000	
$w(z)_{N=2}$				200,000	
$w(z)_{N=3}$				250,000	

Tabla E.2: Parámetros de las corridas **exitosas** MCMC implementadas con MONTEPYTHON 3.1, todas las corridas se ejecutaron con openmpi v. 3.3.1 y a menos que lo especifique, la mayoría de cadenas se obtuvieron usando un jumping factor dinámico a través de la opción `--superupdate` de MP.

Bibliografía

- Aad, G. et al. (2012). Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Phys. Lett. B*, 716:1–29. [1](#)
- Abbott, B. et al. (2016). Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116(6):061102. [1](#)
- Adam, R. et al. (2016a). Planck 2015 results. I. Overview of products and scientific results. *Astron. Astrophys.*, 594:A1. [21](#), [62](#)
- Adam, R. et al. (2016b). Planck 2015 results. IX. Diffuse component separation: CMB maps. *Astron. Astrophys.*, 594:A9. [62](#)
- Ade, P. A. R. et al. (2016a). Planck 2015 results - II. Low Frequency Instrument data processings. *Astron. Astrophys.*, 594:A2. [62](#)
- Ade, P. A. R. et al. (2016b). Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 594:A13. [xxiii](#), [xxiv](#), [7](#), [15](#), [62](#), [63](#), [67](#), [79](#), [80](#)
- Ade, P. A. R. et al. (2016c). Planck 2015 results. XIV. Dark energy and modified gravity. *Astron. Astrophys.*, 594:A14. [62](#)
- Aghanim, N. et al. (2016). Planck 2015 results. XI. CMB power spectra, likelihoods, and robustness of parameters. *Astron. Astrophys.*, 594:A11. [62](#)
- Aghanim, N. et al. (2018). Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. [20](#)
- Alam, S. et al. (2016). The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: cosmological analysis of the DR12 galaxy sample. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 470(3):2617–2652. [xxiii](#), [xxiii](#), [xxiii](#), [xxiii](#), [xxiv](#), [28](#), [61](#), [71](#), [72](#), [79](#), [80](#)
- Amendola, L. and Tsujikawa, S. (2010). *Dark Energy: Theory and Observations*. Cambridge University Press, New York, first edition. [6](#), [18](#), [19](#), [26](#), [39](#), [40](#), [47](#), [57](#), [67](#), [82](#), [97](#), [113](#), [116](#), [118](#)

BIBLIOGRAFÍA

- Baade, W. and Zwicky, F. (1934). On super-novae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 20(5):254–259. [31](#)
- Barboza, Jr., E. M. and Alcaniz, J. S. (2008). A parametric model for dark energy. *Phys. Lett.*, B666:415–419. [xvii](#), [42](#), [48](#)
- Bassett, B. A. and Hložek, R. (2009). Baryon Acoustic Oscillations. [xvi](#), [xvii](#), [18](#), [25](#), [27](#), [29](#), [31](#)
- Baumann, D. (2010). Cosmology: Cosmology Part III Mathematical Tripos. [xv](#), [xv](#), [6](#), [8](#), [9](#), [12](#), [14](#), [15](#), [34](#), [101](#)
- Baumann, D. (2011). Inflation. In *Physics of the large and the small, TASI 09, proceedings of the Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics, Boulder, Colorado, USA, 1-26 June 2009*, pages 523–686. [20](#)
- Betoule, M. et al. (2014). Improved cosmological constraints from a joint analysis of the SDSS-II and SNLS supernova samples. *Astron. Astrophys.*, 568:A22. [xxiii](#), [xxiii](#), [xxiii](#), [xxiv](#), [61](#), [63](#), [71](#), [72](#), [79](#), [80](#)
- Blas, D., Lesgourgues, J., and Tram, T. (2011). The Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS). Part II: Approximation schemes. *jcap*, 2011(7):034. [59](#)
- Brinckmann, T. and Lesgourgues, J. (2018). MontePython 3: boosted MCMC sampler and other features. [60](#), [145](#)
- Carmona, G. (2010). *Termodinámica Clásica*. Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, second edition. [9](#)
- Carroll, B. W. and Ostlie, D. A. (2014). *An Introduction to Modern Astrophysics*. Pearson, U.S.A, second edition. [32](#)
- Carroll, S. M. (1997). Lecture notes on general relativity. [6](#), [8](#), [9](#), [106](#)
- Chatrchyan, S. et al. (2012). Observation of a New Boson at a Mass of 125 GeV with the CMS Experiment at the LHC. *Phys. Lett. B*, 716:30–61. [1](#)
- Chevallier, M. and Polarski, D. (2001). Accelerating universes with scaling dark matter. *Int. J. Mod. Phys.*, D10:213–224. [42](#)
- Dodson, S. (2003). *Modern Cosmology*. Academic Press, San Diego, first edition. [3](#), [6](#), [12](#), [15](#), [16](#)
- Doran, M. and Robbers, G. (2006). Early dark energy cosmologies. *JCAP*, 06:026. [82](#)

-
- Eisenstein, D. J. et al. (2005). Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies. *Astrophys. J.*, 633:560–574. [xvi](#), [26](#), [27](#), [30](#)
- Escamilla-Rivera, C. (2016). Status on bidimensional dark energy parameterizations using SNe Ia JLA and BAO datasets. *Galaxies*, 4(3):8. [41](#), [65](#)
- Escamilla-Rivera, C. and Capozziello, S. (2019). Unveiling cosmography from the dark energy equation of state. *Int. J. Mod. Phys. D*, 28(12):1950154. [40](#)
- Hartle, J. B. (2003). *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. Addison-Wesley, San Francisco, California, first edition. [6](#), [105](#)
- Hobson, M. P. (2009). *Bayesian Methods in Cosmology*. Cambridge University Press, New York, first edition. [57](#), [58](#), [59](#), [65](#), [117](#), [118](#)
- Hu, W. (2008). Lecture Notes on CMB Theory: From Nucleosynthesis to Recombination. [xvii](#), [xvii](#), [35](#)
- Hubble, E. (1937). *The Observational Approach to Cosmology*. Oxford University Press, Oxford, first edition. [18](#)
- Kajita, T. (2016). Nobel lecture: Discovery of atmospheric neutrino oscillations. *Rev. Mod. Phys.*, 88:030501. [16](#)
- Kolb, E. W. and Turner, M. S. (1989). *The Early Universe*. Addison-Wesley, San Francisco, first edition. [13](#)
- Lesgourgues, J. (2011). The Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS) I: Overview. *arXiv e-prints*, page arXiv:1104.2932. [59](#), [60](#)
- Lesgourgues, J. (2013). Cosmological Perturbations. In *Proceedings, Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: Searching for New Physics at Small and Large Scales (TASI 2012): Boulder, Colorado, June 4-29, 2012*, pages 29–97. [34](#)
- Linder, E. V. (2003). Exploring the expansion history of the universe. *Phys. Rev. Lett.*, 90:091301. [42](#)
- Penzias, A. A. and Wilson, R. W. (1965). A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. *APJ*, 142:419–421. [5](#)
- Perlmutter, S. et al. (1999). Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae. *Astrophys. J.*, 517:565–586. [2](#), [37](#)
- Press, W. H. (1992). *Numerical Recipes in C. The art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, New York, second edition. [57](#)
-

BIBLIOGRAFÍA

- Riess, A. G. et al. (1998). Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron. J.*, 116:1009–1038. [xvii](#), [2](#), [37](#), [38](#)
- Verde, L. (2007). A practical guide to Basic Statistical Techniques for Data Analysis in Cosmology. [65](#), [117](#), [144](#), [145](#), [146](#)
- Verde, L. (2010). *Statistical Methods in Cosmology*, volume 800, pages 147–177. [56](#), [57](#), [58](#), [117](#), [118](#)
- Weinberg, D. H., Mortonson, M. J., Eisenstein, D. J., Hirata, C., Riess, A. G., and Rozo, E. (2013). Observational probes of cosmic acceleration. 530(2):87–255. [32](#), [38](#)
- Weinberg, S. (2000). The Cosmological Constant Problems. [37](#)
- Weinberg, S. (2008). *Cosmology*. Oxford Univ. Press, New York, first edition. [3](#), [6](#), [8](#), [9](#), [10](#)
- Wu, K. K. S., Lahav, O., and Rees, M. J. (1999). The large-scale smoothness of the Universe. *Nature*, 397:225–230. [19(1998)]. [5](#)