



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE SECUENCIAS
ALEATORIAS Y MELÓDICAS POR GÉNERO
MUSICAL**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO**

P R E S E N T A:

HERNÁNDEZ FUENTES ALEJANDRO

**DIRECTOR DE TESIS:
DR. MARCELO DEL CASTILLO MUSSOT**



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A
Gloria, José,
Iván, Tania y
Peluche.*

Agradecimientos

*¿A quién crees que le escriba?
Para mí eso resulta siempre más
importante que saber qué se
escribe...*

jaques derrida

Te agradezco a ti, a ti quien lee esta frase; a ti mamá, a ti papá, a ustedes que me dieron la vida, su amor, su tiempo, sus atención y lo necesario para poder disfrutar y vivir esta hermosa e intrincada vida. Gracias, los amo. Tienen y les doy mi amor. Te amo papá. Te amo mamá. Te amo $\frac{m}{p}$ a $\frac{p}{m}$ á.

A ti Iván, a ti Tania, mis queridos hermanos. Ustedes son mis admirables. Sigán luchando por sus sueños, sigan aprendiendo lo que les gusta, sigan siendo admirables. Los amo. Siempre estaré ahí cuando me necesiten.

A ti, mi familia, abuelita, prima, primo, tía, tío, sobrina, sobrino. A ti que desde siempre he conocido, con quien siempre he convivido, de quien siempre he aprendido, gracias. Los amo. Quisiera poner los nombres de todos y cada uno de ustedes, pero, por suerte, tengo una amada familia extensa (quizás así $\forall x, x \in familia \rightarrow gracias(x)$). Sigamos propiciando la hermosa convivencia y el amor.

A ti, tú quien tiene mi amistad, gracias por tu cariño, por el intercambio de ideas, por las vivencias, por el desahogo, por ampliarme la visión del mundo. Los quiero amigos.

A usted Dr. Marcelo, a quien un día encontré por casualidad y que me ha apoyado durante tanto tiempo para la realización de este trabajo. Gracias por sus consejos, por la visión que tiene de la ciencia y de la política, gracias por seguir confiando en mí.

A usted, Juez de mi trabajo, gracias por el tiempo que dedica a la lectura y las correcciones.

Agradezco a ustedes Dr. Lev Guzman, Dr. Candelario Hernandez a Marcelo Escribano, Paola, Nohemí cuyas charlas me han hecho mejorar este trabajo.

Te agradezco a ti, lector. Pues me siento optimista y creo que algún día tú te encontrarás y leerás esta Tesis para aprender y quizás citar el trabajo (ojalá sea una cita positiva).

Agradezco a quienes no leerán este trabajo. A quienes ya partieron pero su existencia marcó mi vida: A mis abuelitos, a mis tíos y tías, a mi familiares. Aunque no me lean, aunque no me escuchen, gracias.

Por último agradezco a los y lo que no entiende de agradecimiento. A Peluche y a Chiripa que han formado parte de mi familia, de la manada. Al universo, a lo indecible, a las causas y azares que me han cercado para estar hoy aquí, que me

Alejandro Hernández Fuentes

traieron a este momento y que me permiten escribirte y agradecerte. Gracias.
!Muchas gracias a todos!

Resumen

Un n -grama en música se define como una secuencia ordenada de n notas de cualquier secuencia melódica m . $P_m(n)$ se calcula como el promedio de la probabilidad de ocurrencia sin coincidencias de todos los n -gramos en m . Luego, se compara con la probabilidad de ocurrencia de secuencias aleatorias $R_m(n)$ construidas con la misma longitud y símbolos, dispuestos equiprobablemente, que m . Para toda longitud n , se obtuvo que $P_m(n) - R_m(n) \geq 0$, aumentando esta diferencia con respecto a n y a la cantidad de notas en los símbolos, lo que demuestra que las notas en secuencias melódicas musicales son elegidas y organizadas de manera muy repetitiva en contraste con la música aleatoria. Por ejemplo, para $n \leq 5$ y para todos los géneros encontramos que $3.2 < -\log(P_m(n)) < 8.6$, mientras que $6.5 < -\log(R_m(n)) < 14.3$. La mediana de $P_m(n)$ de los géneros barroco y clásico son más grandes que para el género romántico, excepto para $n = 1$ en el caso del clásico. $P_m(n)$ vs n se ajusta muy bien a exponenciales estiradas para todas las canciones. Este método simple puede aplicarse a cualquier género musical y generalizarse a secuencias polifónicas.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	V
Índice de figuras	IX
Índice de tablas	XI
1. Introducción	1
2. Metodología	3
2.1. Probabilidades de ocurrencia de $n - gramos$ en melodías	3
2.2. Base de datos	5
3. Resultados y comparación entre canciones reales y aleatorias equivalentes	7
3.1. Distribución beta generalizada discreta (DBGD)	7
3.2. Promedio de canciones aleatorias equivalentes como referencia útil . .	8
3.3. Resultados y comparaciones de $P_m(n)$ y $R_m(n)$	9
3.4. Análisis adicional por género	9
4. Comparaciones con otros trabajos	17
5. Ajustes de P_m y R_m como funciones de n	19
6. Conclusiones	25
A. Detalles sobre el trabajo de Lap y Kao	27

Índice de figuras

2.1.	“America, God save the Queen” fakesheet. Longitud $l = 42$ y con conjunto de símbolos $s_{AGSQ} = \{E4, F4, G4, A4, B\flat4, C5, D5\}$	3
2.2.	“America, God save the Queen” fakesheet. Primer <i>bi-gramo</i> en gris. Este $n-gramo$ no tiene repeticiones, entonces $p_{AGSQ}(2, 1) = 0$	4
2.3.	Segundo <i>bi-gramo</i> en gris. Este $n-gramo$ tiene dos repeticiones, así $p_{AGSQ}(2, 2) = (42 - 2)^{-1}(2)$	4
2.4.	Tercer <i>bi-gramo</i> en gris. Este $n-gramo$ no tiene repeticiones, entonces $p_{AGSQ}(2, 3) = 0$	4
2.5.	Fragmento de fakesheet: <i>a)</i> Ejemplos de símbolos de repetición correspondientes a repeticiones largas se muestran en rojo. <i>b)</i> Ejemplos de silencios en la melodía se muestran en azul.	5
3.1.	Valores y Medianas de R^2 de los ajustes DBGD.	7
3.2.	Valores de los promedios de la Tabla 3.3. $M_e(P_{\{R\}}) < M_e(P_{\{B\}}), M_e(P_{\{C\}})$ para $n \geq 2$	8
3.3.	Probabilidad de ocurrencia $P_m(n)$ vs número de símbolos por géneros y “canciones aleatorias equivalentes” para $n = 1$ hasta 4. El recuadro muestra valores mínimos y máximos.	9
3.4.	Igual que la Fig. 3.3, pero en función de la duración de las canciones. El recuadro muestra medianas por género y “canciones aleatorias equivalentes”.	11
3.5.	Igual que la Fig. 3.3, pero aplicando negativo de la función logaritmo.	11
3.6.	Igual que la Fig. 3.4, pero aplicando negativo de la función logaritmo.	15
5.1.	Parametros de ajustes de $P(n)$ para una canción barroca.	19
5.2.	Parametros de ajustes de $P(n)$ para una canción clásica.	20
5.3.	Parametros de ajustes de $P(n)$ para una canción romántica.	21
5.4.	Valores de parámetros de ajustes contra $n-gramo$ para todas las canciones, incluidas la “canciones aleatorias equivalentes”.	21

Índice de cuadros

3.1.	Valores de longitud de canciones, número de símbolos, máximo n con valores distintos de cero, P_m y R_m . En cada par ordenado, la “canción aleatoria equivalente” tiene la misma longitud y número de símbolos. Los resultados de $P_m(n)$ y $R_m(n)$ se presentan en milésimas ($P_m(n) \times 10^3$).	12
3.2.	Continuaciónn Tabla 3.1. $P_m(n)$ y $R_m(n)$ resultados presentados en milésimas ($P_m(n) \times 10^3$).	13
3.3.	Medianas y valores extremos de P y R de secuencias melódicas por género. Comparando generos barroco, clásico y romántico. Resultados presentados en milésimas ($P \times 10^3$)	14
5.1.	Parámetros de cuatro ajustes para $P_m(n)$ y uno para $R_m(n)$ y los coeficientes de correlación correspondientes.	22
5.2.	Medianas y rangos intercuartiles de parámetros y coeficientes de correlación para $P_{\{\}}$ y $R_{\{\}}$	23

Capítulo 1

Introducción

El estudio de la música basado en modelos estadísticos ha avanzado significativamente en los últimos años con dos áreas principales de investigación: recuperación de información musical (Music Information Retrieval *MIR*) y musicología computacional. Algunos problemas abordados en *MIR* son la extracción de la melodía principal, la segmentación de la melodía, el reconocimiento de acordes para la armonía y la caracterización del timbre con parámetros de menor dimensión. [8]

En su revisión, Mor *et al* definen la musicología computacional como “un área multidisciplinaria que incluye la contribución de los métodos de la música y de la informática” [7]. Esta área aborda problemas como *MIR*, la representación, la composición, el análisis, el reconocimiento, la percepción, la expectativa y el aprendizaje incidental. En la revisión, observaron que el 92 % de los artículos revisados se publicaron después del año 2000. Además, identificaron los seis métodos computacionales más utilizados: el modelo oculto de Markov (hidden Markov Model, HMM), el método de $n - \text{gramos}$, la máquina de estado finito (finite-state machine, FSM), el transductor de estado finito (finite-state transducer, FST), el aprendizaje de gramática artificial (artificial grammar learning, AGL) y la gramática formal. De los artículos revisados, el 37 % utilizó HMM y el 23 % utilizó el método de $n - \text{gramos}$.

Nosotros nos enfocaremos en $n - \text{gramos}$. Este método ya ha sido utilizado para recuperación de la información en textos y posteriormente en música. Downie, en su tesis [4], utilizó $n - \text{gramos}$ para definir “palabras musicales” en intervalos melódicos monofónicos y examinó la validez de sus palabras comparando sus propiedades con propiedades de “palabras reales” y construyendo una base de datos para realizar consultas simuladas. El trabajo de Doraisamy [3] retoma el trabajo realizado por Downie [4] aplicado a la recuperación de la meloía polifónica.

Un trabajo a tomar en cuenta es el publicado por Lap & Kao [5], quienes implementaron un análisis estadístico sobre la duración de notas y $n - \text{gramos}$ definidos sobre intervalos de semitonos melódicos medidos en números positivos y negativos de 1003 piezas de música popular asiática en formato de interfaz digital de instrumentos musicales (Musical Instrument Digital Interface *MIDI*), donde la información se extrajo manualmente. Dado que un intervalo melódico es el número de semitonos entre dos notas consecutivas, propusieron como alfabeto el número de intervalos melódicos que pueden ocurrir dentro de una pieza, que consiste en intervalos de un piano con 128 notas, *i. e.*, 255 intervalos. Para este alfabeto, la cantidad de $n - \text{gramos}$ de longitud n que podemos construir es 255^n . Es decir, $\#\{n - \text{grams}_{th}\} = 255^n$ (donde “#” indica la cardinalidad del conjunto) que crece exponencialmente en función de

n . Por cada n , compararon estos valores con sus resultados. Para más detalles, se realizó un recuento más detallado de sus resultados en el Apéndice A.

Entre los demás resultados a destacar en el trabajo de Lap & Kao[5] encontramos la obtención de una ley de Zipf en la melodía. Esta ley se ha utilizado para representar ajustes a fenómenos con una relación rango-orden. Sin embargo, trabajos como el de Martinez-Mekler, *et.al.*, [6] han mostrado que la distribución beta generalizada discreta (discrete generalized beta distribution DGBD) presenta mejores ajustes a estos fenómenos, entre los que destacamos la línea melodódica principal en la música.

En el presente trabajo capturamos la información de las principales melodías a través de fakebooks [1]. Realizamos ajustes de la distribución beta generalizada discreta no solo para la línea melódica principal, que corresponde a $n - \text{gramos}$ de longitud 1, sino ampliamos los ajustes a $n - \text{gramos}$ de tamaño mayor. Además, analizamos los $n - \text{gramos}$ a través del promedio P_m . Como referencia para comparar, decidimos construir suficientes “secuencias aleatorias equivalentes”, llamadas m_r , correspondientes a cada secuencia melódica m con el mismo alfabeto ordenado al azar (cada elemento con la misma probabilidad de ocurrencia) y con la misma longitud que m . De esta manera construimos “canciones aleatorias equivalentes”.

Capítulo 2

Metodología

2.1. Probabilidades de ocurrencia de $n - gramos$ en melodías

Para cada melodía m , un $n - gramo$ de longitud n se define como una secuencia ordenada de n semitonos consecutivos de una secuencia melódica. Para cada longitud n , calculamos $P_m(n)$ como el promedio de las probabilidades de ocurrencia sin contar autocoincidencias de todos los $n - gramos$ en m . Consideramos $n - gram(j)$ como la n -tupla ordenada que comienza en el término j -ésimo de m . Definimos la probabilidad de ocurrencia de cada $n - gram(i)$, llamada $p_m(n, i)$, como la cantidad de $n - gram(j)$ de longitud n en m que coinciden con $n - gram(i)$ excluyendo la autocoincidencia. Antes de presentar la definición matemática formal, damos un ejemplo de cómo calcular $P_m(n)$ en la canción “America, God save the Queen (AGSQ)” (Fig. 2.1).

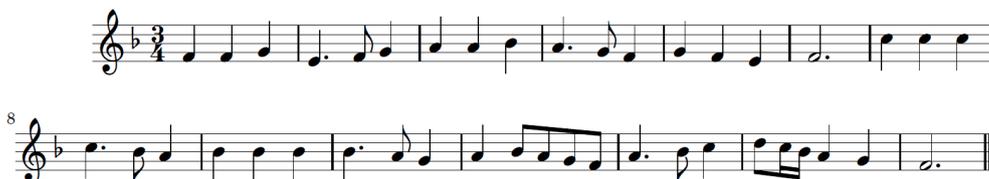


Figura 2.1: “America, God save the Queen” fakesheet. Longitud $l = 42$ y con conjunto de símbolos $s_{AGSQ} = \{E4, F4, G4, A4, Bb4, C5, D5\}$.

Notamos que la melodía es una secuencia $m := AGSQ$ de longitud $l = 42$ (tiene 42 notas) y consta de un conjunto de 7 símbolos, que son:

$$s_{AGSQ} = \{E4, F4, G4, A4, Bb4, C5, D5\}.$$

Este es el alfabeto de nuestra secuencia melódica. Para calcular $P_{AGSQ}(n)$, que es el promedio de la probabilidad de ocurrencia sin autocoincidencias de $n - gramos$ de longitud n , necesitamos, primero, calcular la probabilidad de ocurrencia de cada $n - gram$. Observamos que el primer $2 - gramo$ (o $bi - gramo$) melódico es el par formado por las dos primeras notas consecutivas: $(F4, F4)$ (Fig. 2.2). Está claro que este $bi - gramo$ no tiene repeticiones en la secuencia melódica, por lo que la probabilidad de ocurrencia de este $bi - gramo$ es $p_{AGSQ}(2, 1) = 0$.

Luego, los siguientes $bi - gramos$ se encuentran aplicando una ventana deslizante. De esta manera, al deslizar una ventana, obtenemos $(F4, G4)$ como la segunda y

Finalmente, definimos $P_m(n)$ como el promedio de $p_m(n, i)$ para $i = 1, \dots, l - n + 1$:

$$P_m(n) = (l - n + 1)^{-1} \sum_{i=1}^{l-n+1} p_m(n, i). \quad (2.1)$$

Una situación a destacar es que todo este procedimiento no requiere un amplio conocimiento de la teoría musical.

Para cada melodía m , su alfabeto es el conjunto de símbolos que aparecen en m . Construimos suficientes “secuencias aleatorias equivalentes” definidas como secuencias m_i . para $i = 1, \dots, r$, con la misma longitud y alfabeto que m pero con símbolos dispuestos aleatoriamente de forma equiprobable (“canción aleatoria”). Calculamos $P_{m_i}(n)$ (Eq. 2.1) para cada m_i y definimos $R_m(n)$ correspondiente a m como el promedio de $P_{m_i}(n)$:

$$R_m(n) = \sum_{i=1}^r \frac{P_{m_i}(n)}{r}. \quad (2.2)$$

Se obtiene una buena precisión para $R_m(n)$ con $r = 100$.

2.2. Base de datos

Se utilizó una base de datos de 30 piezas melódicas monofónicas correspondientes a 3 géneros musicales: 10 barrocos, 10 clásicos y 10 canciones románticas recopiladas del fakebook de Hal Leonard Corp[2]. Para las secuencias m tomamos los tonos más altos de la melodía del fakesheet. La longitud de la secuencia melódica de las canciones está entre $l = 90$ y $l = 180$. Para este estudio, decidimos omitir las repeticiones marcadas (símbolos de repetición) en el fakesheet y consideramos cualquier silencio como un símbolo adicional de la secuencia (Fig. 2.5).

The image shows a musical score in treble clef with a key signature of three sharps (F#, C#, G#) and a common time signature (C). The score is divided into five staves, with measure numbers 6, 12, 17, and 24 indicated. Various musical symbols are highlighted: red symbols (a double bar line with dots, a double bar line with a vertical line, and a double bar line with a vertical line and a red 'S' symbol) represent repetition symbols, and blue symbols (vertical lines and a blue 'S' symbol) represent silences. Chord symbols (A, C, G, D/A, E7, D, A) are placed above the notes. A red 'D.S. al Coda' instruction is at the end of the fifth staff. A red 'S' symbol is also present above the first staff.

Figura 2.5: Fragmento de fakesheet: a) Ejemplos de símbolos de repetición correspondientes a repeticiones largas se muestran en rojo. b) Ejemplos de silencios en la melodía se muestran en azul.

2.2. BASE DE DATOS

Capítulo 3

Resultados y comparación entre canciones reales y aleatorias equivalentes

3.1. Distribución beta generalizada discreta (DBGD)

Martinez-Mekler, *et al*[6], hallaron un comportamiento universal en el sentido que los elementos de un sistema se distribuyen según su rango con respecto a una propiedad dada, válido para todo el rango de valores. Para mostrarlo, propusieron la forma funcional de dos parámetros dada por la versión discreta de una distribución beta generalizada:

$$f(r) = A \frac{(N + 1 - r)^b}{r^a} \quad (3.1)$$

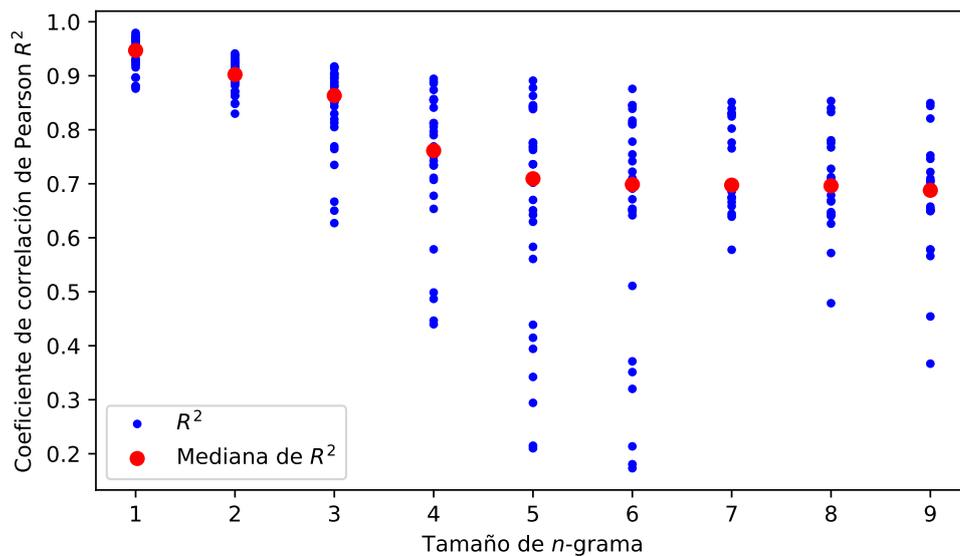


Figura 3.1: Valores y Medianas de R^2 de los ajustes DBGD.

Donde r es el rango, N su valor máximo, A la constante de normalización y (a, b) dos exponentes de ajuste. Ellos obtuvieron que los ajustes en piezas musicales, para

3.2. PROMEDIO DE CANCIONES ALEATORIAS EQUIVALENTES COMO REFERENCIA ÚTIL

$n - gramas$ de tamaño $n = 1$, los valores R^2 de los ajustes DBGD se encuentran por encima de 0.98[6].

Realizamos una replica de estos ajustes para las melodías con nuestra base de datos, las cuales no cuentan con repeticiones largas, con la finalidad de comprobar si estos resultados se seguían manteniendo aún prescindiendo de estas repeticiones. Además, lo aplicamos para $n - gramas$ de tamaños $n > 1$. Obtuvimos que para $n = 1$ los valores R^2 de los ajustes tienen una mediana igual a 0.947, para $n = 2$, una mediana de 0.9 y que los valores R^2 disminuyen cuando el tamaño de $n - gramas$ aumenta (Fig. 3.1).

Otro resultado que llama la atención es que si tomamos como secuencia melódica una permutación de la melodía original, la distribución beta generalizada discreta tendrá el mismo ajuste para ambas secuencias (la original y la permutación) con el mismo valor R^2 . Por lo que, con este ajuste, no importa la estructura interna de la melodía.

3.2. Promedio de canciones aleatorias equivalentes como referencia útil

Para secuencias con símbolos equiprobables, donde el conjunto de símbolos tiene elementos s_m , la probabilidad de ocurrencia de $n - gram(i)$ es, en teoría, $p_m(n, i) = (\frac{1}{s})^n$. Esto afecta directamente el valor de $R_m(n)$ (Eq. 2.1) porque si tenemos una repetición de baja probabilidad, hay menos repeticiones y, por lo tanto, el promedio es menor. Calculando en las secuencias aleatorias, obtuvimos para $n \geq 4$ que todos $R_m(n)$ son menores a una milésima, siendo igual a 0 para $n \geq 7$ en cada secuencia melódica (Tab. 3.1 & 3.2, Fig. 3.2). En las Tablas 3.1 & 3.2, las primeras diez canciones son barrocas, las siguientes diez son clásicas y las últimas diez son románticas. Observamos que la mediana $M_e(P_{\{R\}})$ es menor que $M_e(P_{\{B\}})$ y $M_e(P_{\{C\}})$, excepto en $n = 1$, donde el subíndice indica el género: $\{B\}$ (barroco), $\{C\}$ (clásico) y $\{R\}$ (romántico).

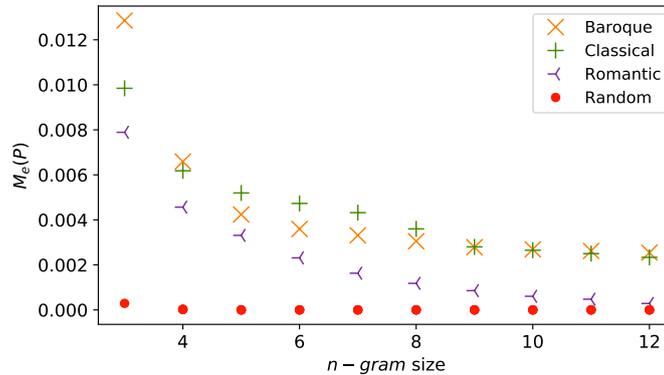


Figura 3.2: Valores de los promedios de la Tabla 3.3. $M_e(P_{\{R\}}) < M_e(P_{\{B\}}), M_e(P_{\{C\}})$ para $n \geq 2$.

Otro resultado a notar es que si aumentamos el número de elementos del conjunto de símbolos s_m , entonces $R_m(n)$ disminuye para n fijo (Fig. 3.3). Sorprendentemente,

vemos que el valor de $R_m(n)$ no depende de la longitud de las secuencias melódicas (Fig. 3.4).

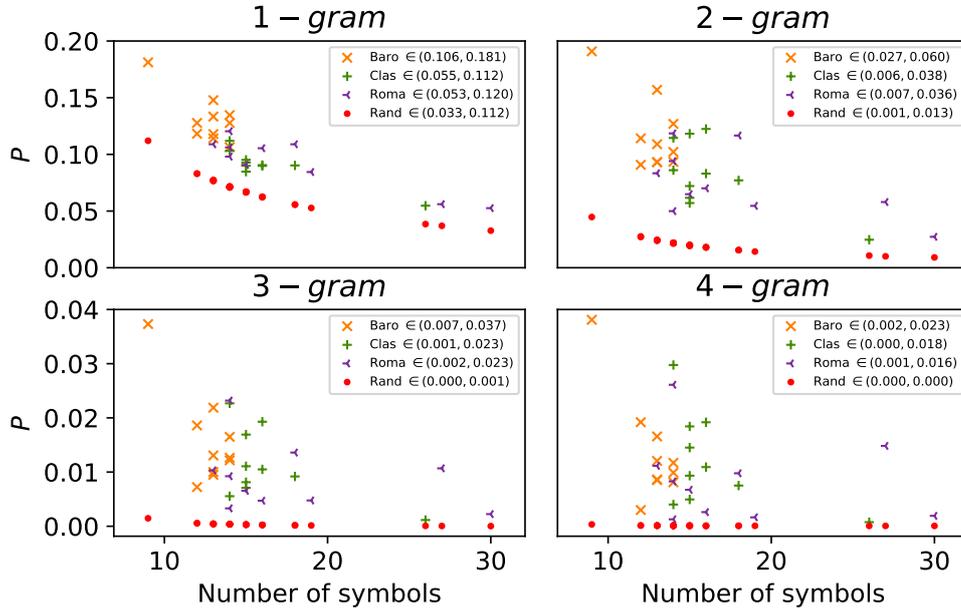


Figura 3.3: Probabilidad de ocurrencia $P_m(n)$ vs número de símbolos por géneros y “canciones aleatorias equivalentes” para $n = 1$ hasta 4. El recuadro muestra valores mínimos y máximos.

En el capítulo 5 se presentan ajustes de $R_m(n)$ y $P_m(n)$ como funciones de n .

3.3. Resultados y comparaciones de $P_m(n)$ y $R_m(n)$

De los $n - grams$ con probabilidad distinta de cero, elegimos el $n - gram$ más largo llamado $n_{max} - gram$. Como primer paso para comparar $P_m(n)$ contra $R_m(n)$ comparamos los n_{max} de todas las canciones. En la Tab. 3.1 podemos observar que para secuencias melódicas $\overline{n_{max}} = 19.9$ y para secuencias aleatorias $\overline{n_{max}} = 4.7$. Esto sugiere que $P_m(n)$ debe ser mayor que $R_m(n)$.

De hecho, si $(n + 1) - gram(k)$ tiene una coincidencia, entonces $n - gram(k)$ y $n - gram(k + 1)$ también tienen una coincidencia, entonces $P_m(n) \geq P_m(n + 1)$ (Fig. 3.2). Y al comparar $P_m(n)$ contra $R_m(n)$ obtuvimos que siempre $P_m(n) > R_m(n)$, y son iguales solo cuando $P_m(n) = R_m(n) = 0$ (Tab. 3.1 & 3.2, Figs. 3.2 & 3.3).

La media de $P_m(n)$, $\overline{P_m}$, es mayor que 0.003 para $n - gram$ s de longitud $n \leq 8$, mientras que para $n \geq 3$ $\overline{R_m}$, es menor que 0.001 (Tab. 3.2, Fig. 3.2).

3.4. Análisis adicional por género

Cuando las canciones están separadas por géneros, existen pequeñas diferencias entre sus $P_m(n)$, aunque no son muy significativas. $M_e(P_{\{B\}})$ es más grande que $M_e(P_{\{R\}})$ para todo n . Sin embargo, los valores máximos de $P_{\{R\}}$ son mayores que la mediana $M_e(P_{\{B\}})$. Mientras tanto, $M_e(P_{\{R\}})$ es menor que $M_e(P_{\{C\}})$, excepto

3.4. ANÁLISIS ADICIONAL POR GÉNERO

cuando $n = 1$ (Tab. 3.3). Entre $M_e(P_{\{B\}})$ y $M_e(P_{\{B\}})$ no existe una tendencia a destacar. Por otro lado, todos los $P_m(n)$ de cada género son mayores que $M_e(R_m)$ para $n \geq 2$. Además, para todos los géneros $P_m(n) \geq R_m(n)$ (Fig. 3.4) para cada m . Por ejemplo, para $n \leq 5$ y para todos los géneros encontramos que $P_m(n) < 0.181$, mientras que $R_m(n) < 0.112$. Aplicando la función logaritmo como se muestra en las Figs. 3.5 & 3.6 obtenemos $3.2 < -\log(P_m(n)) < 8.6$, mientras que $6.5 < -\log(R_m(n)) < 14.3$.

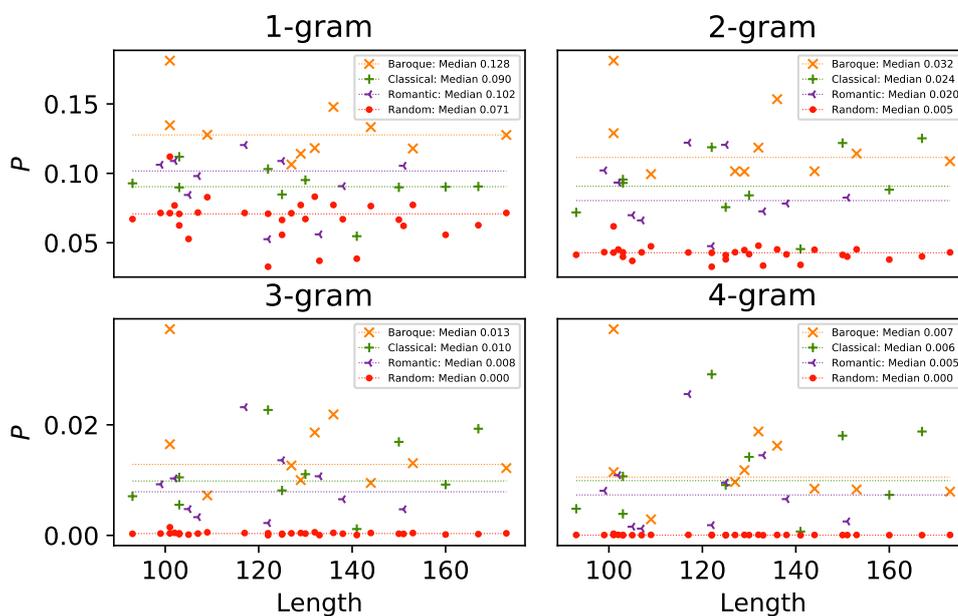


Figura 3.4: Igual que la Fig. 3.3, pero en función de la duración de las canciones. El recuadro muestra medianas por género y “canciones aleatorias equivalentes”.

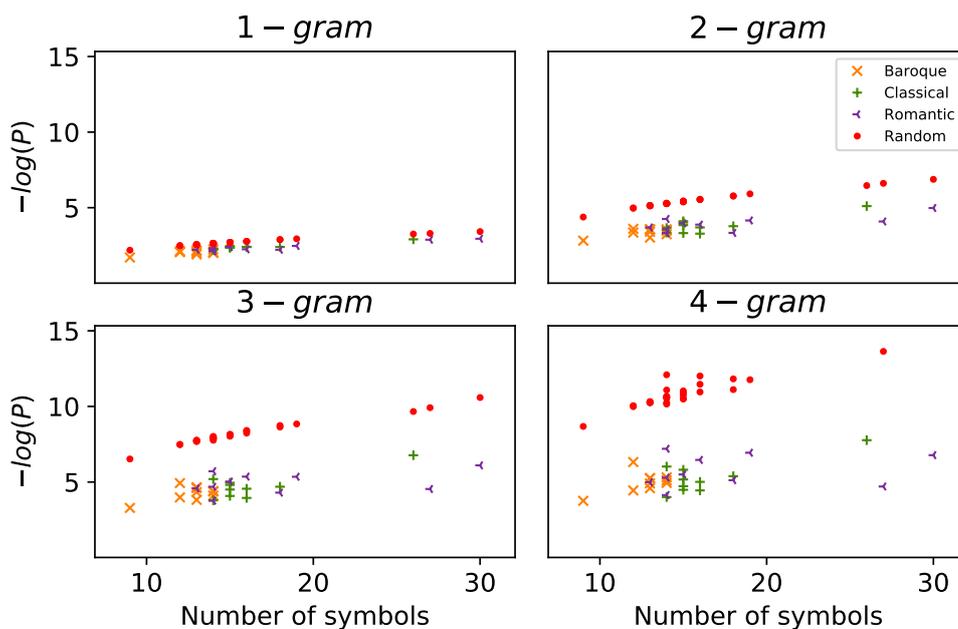


Figura 3.5: Igual que la Fig. 3.3, pero aplicando negativo de la función logaritmo.

3.4. ANÁLISIS ADICIONAL POR GÉNERO

ID melody (m)	Melody	Length sequence	Number of symbols	n_{max} P_m, R_m	$n = 1$ P_m, R_m	$n = 2$ P_m, R_m
1	Air on the g string	153	13	10, 6	118, 77	33, 6
2	Amarilli, mia bella	109	12	5, 5	128, 83	27, 7
3	Bois epais	129	13	32, 5	114, 77	28, 6
4	I attempt from loves sickness to fly	173	14	48, 5	128, 71	31, 5
5	Minuet in G major from Anna Magdalena Notebook Bach	127	14	26, 5	106, 71	28, 5
6	Per la gloria d'adorarvi	132	12	32, 5	118, 83	35, 7
7	Rondeau	136	13	37, 5	148, 77	49, 6
8	Sebben, crudele	144	13	25, 5	133, 76	28, 6
9	Spring, First movement theme	101	9	26, 5	181, 112	60, 13
10	Trumpet voluntary	101	14	10, 5	135, 71	39, 5
11	Caro mio ben	150	15	19, 5	90, 67	36, 4
12	Dance of the spirits	103	16	28, 4	90, 62	25, 4
13	Fur Elise	122	14	40, 5	103, 71	35, 5
14	Minuet from string quartet	125	15	22, 5	85, 66	18, 4
15	Nel cor più non mi sento	103	14	6, 4	112, 71	26, 5
16	O isis und osiris	141	26	6, 3	55, 38	6, 2
17	Rondo	167	16	45, 5	91, 63	38, 4
18	Sonatina, Op. 36, No. 1, first movement	93	15	6, 5	93, 67	16, 4
19	Surprise symphony	130	15	26, 4	95, 67	21, 5
20	Turkish Rondo from sonata K 331 third movement	160	18	23, 5	90, 56	23, 3
21	Ballade No 1 in G minor, Op. 23	133	27	26, 4	56, 37	17, 1
22	Bridal chorus	107	14	6, 4	98, 72	14, 5
23	Danse macabre	138	15	14, 5	91, 67	19, 5
24	Etude in E major, Op. 10, No. 3	102	13	21, 5	109, 77	25, 6
25	Humoresque	99	14	12, 4	106, 71	28, 5
26	Hungarian dance No. 5	122	30	6, 3	53, 33	7, 1
27	Morgen	151	16	6, 6	105, 62	21, 4
28	Serenade	125	18	13, 5	109, 56	36, 3
29	Swan lake	117	14	16, 4	120, 71	36, 5
30	Vesti, la giubba	105	19	5, 4	84, 53	16, 3
mean		126	15	19.9, 4.7	105, 68	27, 5

Cuadro 3.1: Valores de longitud de canciones, número de símbolos, máximo n con valores distintos de cero, P_m y R_m . En cada par ordenado, la “canción aleatoria equivalente” tiene la misma longitud y número de símbolos. Los resultados de $P_m(n)$ y $R_m(n)$ se presentan en milésimas ($P_m(n) \times 10^3$).

CAPÍTULO 3. RESULTADOS Y COMPARACIÓN ENTRE CANCIONES REALES Y ALEATORIAS EQUIVALENTES

m	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$
	P_m, R_m	P_m, R_m	P_m, R_m	P_m, R_m	P_m, R_m	P_m, R_m
1	13, 0	5, 0	3, 0	1, 0	1, 0	0, 0
2	7, 1	2, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0
3	10, 0	7, 0	7, 0	7, 0	7, 0	7, 0
4	12, 0	5, 0	3, 0	3, 0	3, 0	3, 0
5	13, 0	6, 0	4, 0	3, 0	3, 0	3, 0
6	19, 1	12, 0	9, 0	8, 0	7, 0	7, 0
7	22, 0	10, 0	6, 0	5, 0	5, 0	4, 0
8	9, 0	5, 0	5, 0	4, 0	4, 0	3, 0
9	37, 1	23, 0	19, 0	16, 0	14, 0	12, 0
10	16, 0	7, 0	3, 0	2, 0	2, 0	1, 0
11	17, 0	11, 0	8, 0	7, 0	6, 0	6, 0
12	10, 0	7, 0	6, 0	5, 0	5, 0	5, 0
13	23, 0	18, 0	15, 0	13, 0	12, 0	11, 0
14	8, 0	6, 0	5, 0	4, 0	4, 0	3, 0
15	6, 0	2, 0	1, 0	0, 0	0, 0	0, 0
16	1, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0
17	19, 0	12, 0	9, 0	7, 0	6, 0	4, 0
18	7, 0	3, 0	1, 0	1, 0	0, 0	0, 0
19	11, 0	9, 0	7, 0	6, 0	5, 0	4, 0
20	9, 0	5, 0	3, 0	3, 0	2, 0	2, 0
21	11, 0	9, 0	8, 0	6, 0	4, 0	3, 0
22	3, 0	1, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0
23	7, 0	4, 0	3, 0	2, 0	1, 0	1, 0
24	10, 0	7, 0	6, 0	5, 0	4, 0	3, 0
25	9, 0	5, 0	4, 0	3, 0	3, 0	2, 0
26	2, 0	1, 0	1, 0	0, 0	0, 0	0, 0
27	5, 0	2, 0	1, 0	0, 0	0, 0	0, 0
28	14, 0	6, 0	4, 0	3, 0	2, 0	1, 0
29	23, 0	16, 0	13, 0	10, 0	9, 0	8, 0
30	5, 0	1, 0	0, 0	0, 0	0, 0	0, 0
mean	12, 0	7, 0	5, 0	4, 0	4, 0	3, 0

Cuadro 3.2: Continuaciónn Tabla 3.1. $P_m(n)$ y $R_m(n)$ resultados presentados en milésimas ($P_m(n) \times 10^3$).

3.4. ANÁLISIS ADICIONAL POR GÉNERO

$n - gram$	Baroque		Classic	
	P <i>min, median, max</i>	R <i>min, median, max</i>	P <i>min, median, max</i>	R <i>min, median, max</i>
1	106, 127, 181	71, 77, 112	54, 90, 111	38, 66, 70
2	27, 32, 59	5, 5, 12	6, 23, 37	1, 4, 5
3	7, 12, 37	0, 0, 1	1, 9, 22	0, 0, 0
4	1, 6, 23	0, 0, 0	0, 6, 18	0, 0, 0
5	0, 4, 19	0, 0, 0	0, 5, 15	0, 0, 0
6	0, 3, 15	0, 0, 0	0, 4, 12	0, 0, 0
7	0, 3, 13	0, 0, 0	0, 4, 11	0, 0, 0
8	0, 3, 11	0, 0, 0	0, 3, 11	0, 0, 0
9	0, 2, 9	0, 0, 0	0, 2, 10	0, 0, 0
10	0, 2, 7	0, 0, 0	0, 2, 9	0, 0, 0
11	0, 2, 7	0, 0, 0	0, 2, 8	0, 0, 0
12	0, 2, 6	0, 0, 0	0, 2, 8	0, 0, 0
	Romantic			
1	52, 101, 120	32, 64, 76		
2	6, 19, 36	1, 4, 5		
3	2, 7, 23	0, 0, 0		
4	0, 4, 15	0, 0, 0		
5	0, 3, 12	0, 0, 0		
6	0, 2, 9	0, 0, 0		
7	0, 1, 8	0, 0, 0		
8	0, 1, 7	0, 0, 0		
9	0, 0, 6	0, 0, 0		
10	0, 0, 5	0, 0, 0		
11	0, 0, 4	0, 0, 0		
12	0, 0, 3	0, 0, 0		

Cuadro 3.3: Medianas y valores extremos de P y R de secuencias melódicas por género. Comparando generos barroco, clásico y romántico. Resultados presentados en milésimas ($P \times 10^3$)

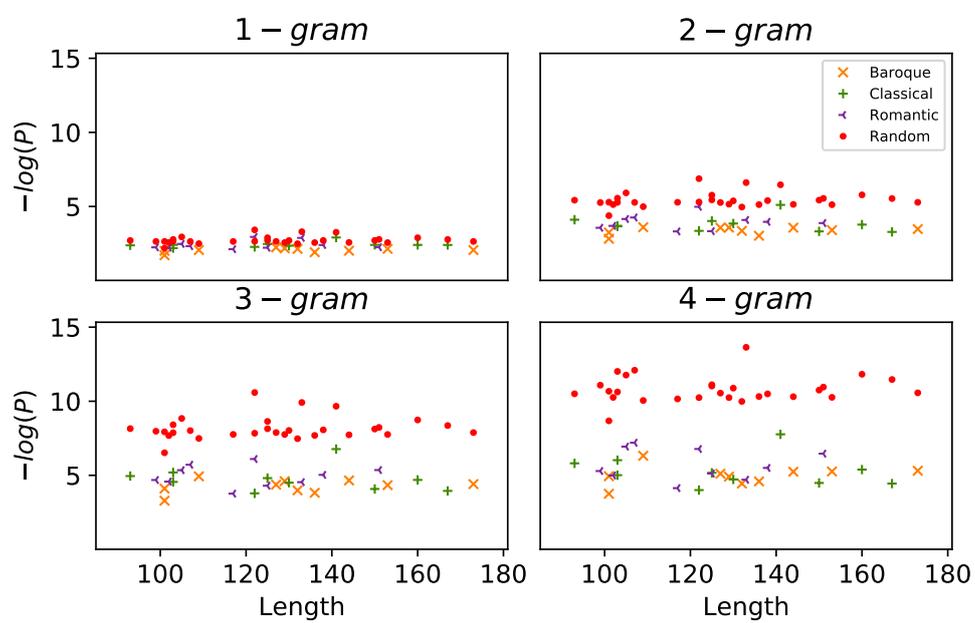


Figura 3.6: Igual que la Fig. 3.4, pero aplicando negativo de la función logaritmo.

3.4. ANÁLISIS ADICIONAL POR GÉNERO

Capítulo 4

Comparaciones con otros trabajos

En cuanto a las bases de datos y la metodología, las principales diferencias entre trabajos anteriores y este trabajo son:

- a) La distribución beta generalizada discreta es un grandioso ajuste para $1 - \text{gramos}$ de piezas musicales[6]. Los buenos ajustes se mantienen aún quitando repeticiones largas. Sin embargo, para $n - \text{gramos}$ de tamaño mayor a 1 los ajustes no son efectivos. Además, esta distribución tiene los mismos ajustes para una melodía m y cualquier permutación aleatoria de ella en $1 - \text{gramos}$.
- b) Definimos $n - \text{gramos}$ a partir de tonos musicales medidos en semitonos de las secuencias melódicas. En otros trabajos[4, 3, 5] cada símbolo de un $n - \text{gramo}$ se definió como el entero positivo o negativo que mide la distancia relativa (intervalo) en semitono de dos notas consecutivas.
- c) En otras obras[4, 3, 5], el alfabeto consta de todos los intervalos que pueden construirse con un piano de 128 notas, es decir 25 intervalos. Aquí, se tomaron en cuenta solo los símbolos que aparecen en m . Se evitaron repeticiones largas al no incluir lo correspondiente a los símbolos de repetición en los fakebooks.
- d) Otros autores [4, 3, 5] analizaron la ocurrencia de todos los $n - \text{gramos}$ recopilados de una gran base de datos compuesta por la unión de todas las canciones. Mientras, $P_m(n)$ fue definida para cada canción, y en contraste con otros autores [3, 5] analizamos $P_m(n)$ y $R_m(n)$ por géneros.

Capítulo 5

Ajustes de P_m y R_m como funciones de n

Para todas las canciones, hicimos cuatro tipos de ajustes para determinar el comportamiento de $P_m(n)$ y $R_m(n)$ como funciones de n :

- I) Lineal: $y \propto \alpha x$,
- II) Exponencial: $y \propto \exp(\beta x) \rightarrow \log y \propto \beta x$.
- III) Ley de potencias: $y \propto x^{-\gamma} \rightarrow \log y \propto -\gamma \log(x)$.
- IV) Exponencial estirada: $y \propto \exp(-x^\delta) \rightarrow \log y \propto -x^\delta \rightarrow \log(-\log(y)) \propto \delta \log(x)$.

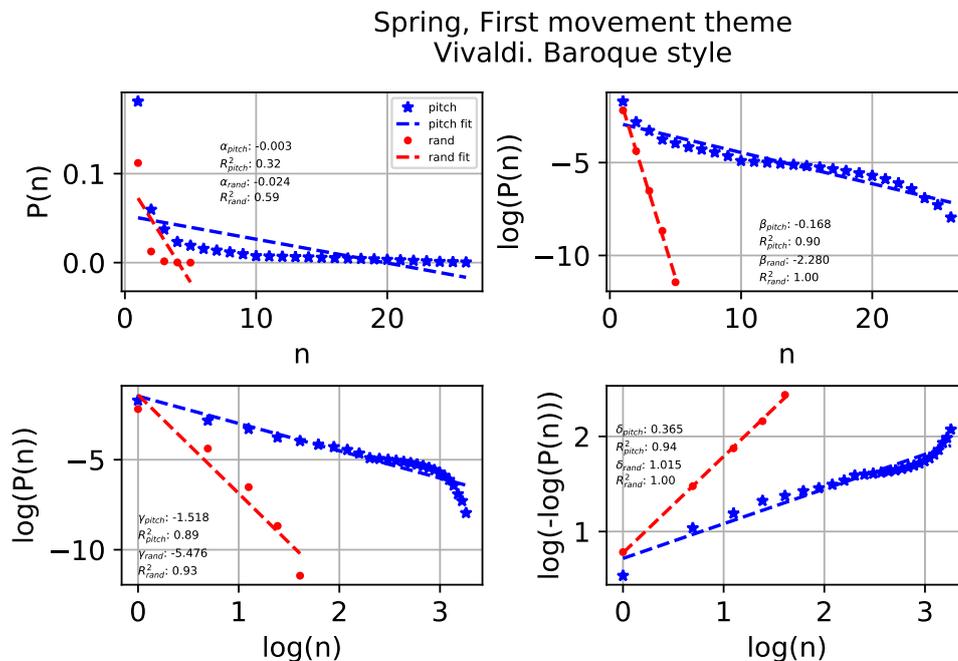


Figura 5.1: Parámetros de ajustes de $P(n)$ para una canción barroca.

Para todas las canciones, $R_m(n)$ en función de n se ajustó a una función exponencial produciendo un coeficiente de correlación estadística de Pearson $PC > 0.98$.

De manera análoga, $P_m(n)$ se ajustó a una ley de potencias y a una exponencial estirada, produciendo $\overline{PC} = 0.92$, $\overline{PC} = 0.93$ (Tab. 5.1). Esto indica que la probabilidad de encontrar n –gramos repetidos de longitud n decae exponencialmente en secuencias aleatorias, mientras que en las secuencias melódicas analizadas la probabilidad decae más lentamente conforme una la ley de potencia o exponencial estirada (Figs. 5.1, 5.2 & 5.3). Por género, no encontramos diferencias significativas en los ajustes correspondientes (Tab. 5.2).

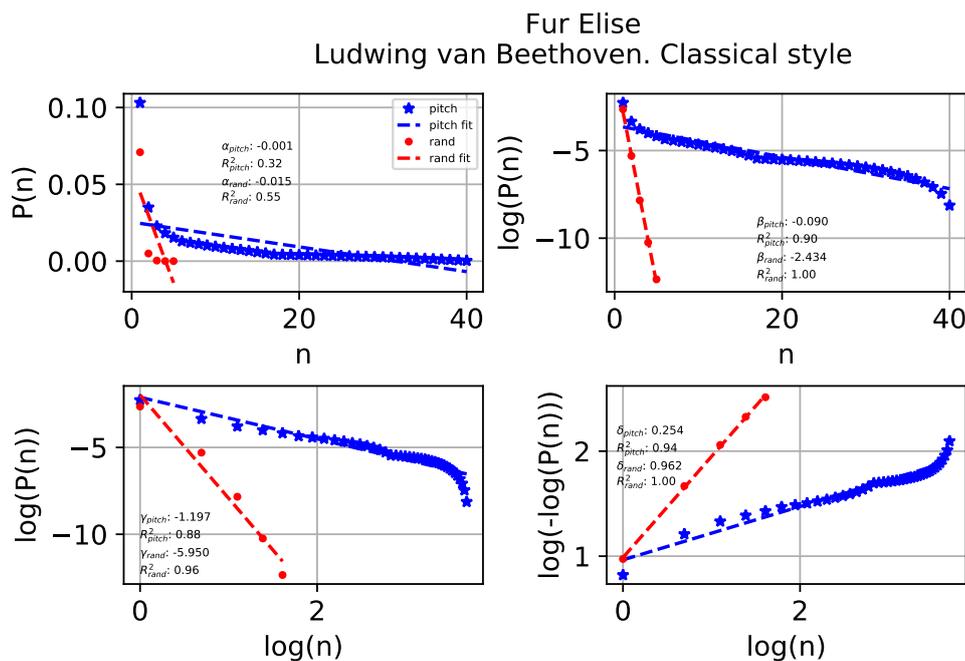


Figura 5.2: Parametros de ajustes de $P(n)$ para una canción clásica.

Para todas las secuencias de melodías m , β y γ de $R_m(n)$ son inferiores a los parámetros correspondientes de $P_m(n)$, y lo contrario es cierto para δ . Ahora, para cada canción y ajuste correlacionamos el valor máximo n_{max} con el parámetro correspondiente en la Fig. 5.4. Obteniendo que $PC_\alpha = 0.82$; $PC_\beta = 0.80$, $PC_\gamma = 0.81$ y $PC_\delta = -0.88$.

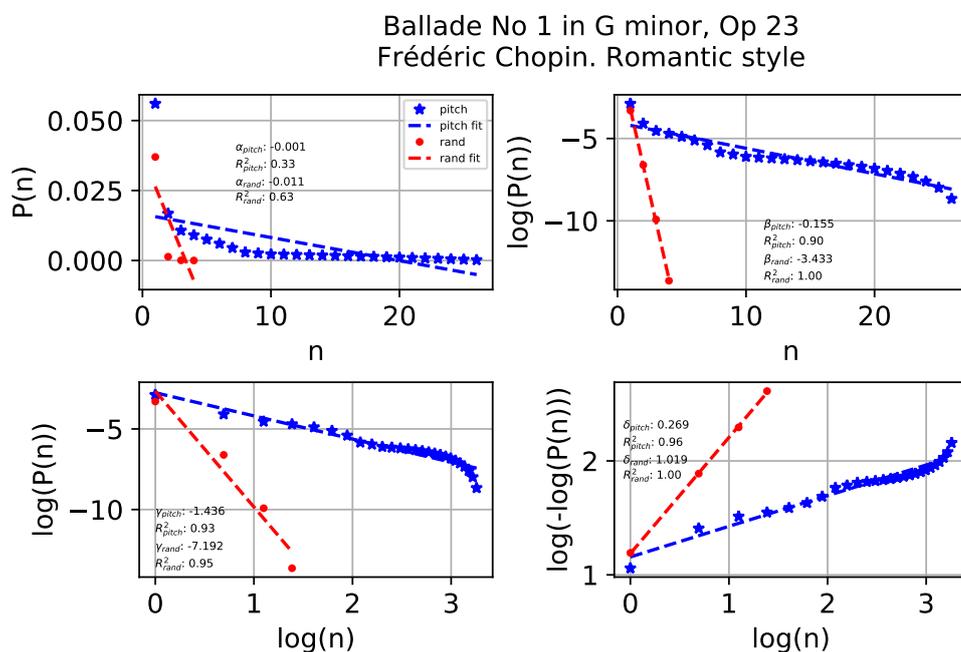


Figura 5.3: Parametros de ajustes de $P(n)$ para una canción romántica.

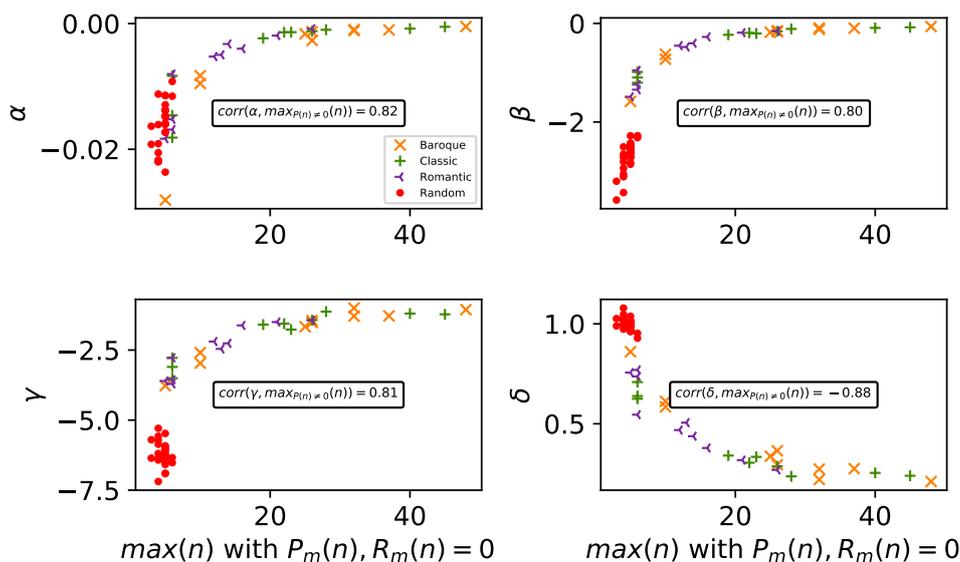


Figura 5.4: Valores de parámetros de ajustes contra $n - gram$ para todas las canciones, incluidas la “canciones aleatorias equivalentes”.

ID Song	P_m fits						R_m fits			
	α	PC	β	PC	γ	PC	δ	PC	β	PC
1	-0.008	0.47	-0.726	0.98	-2.969	0.96	0.612	1.00	-2.278	0.99
2	-0.028	0.67	-1.582	0.99	-3.773	0.91	0.860	0.99	-2.431	1.00
3	-0.001	0.21	-0.090	0.75	-1.001	0.78	0.221	0.78	-2.489	1.00
4	-0.000	0.13	-0.063	0.69	-1.057	0.77	0.211	0.75	-2.696	1.00
5	-0.001	0.22	-0.148	0.79	-1.447	0.91	0.295	0.88	-2.567	1.00
6	-0.001	0.25	-0.120	0.84	-1.289	0.81	0.274	0.87	-2.727	0.99
7	-0.001	0.19	-0.096	0.76	-1.282	0.88	0.275	0.85	-2.602	1.00
8	-0.002	0.21	-0.179	0.84	-1.667	0.94	0.338	0.90	-2.483	1.00
9	-0.003	0.32	-0.168	0.90	-1.518	0.89	0.365	0.94	-2.280	1.00
10	-0.010	0.48	-0.627	0.96	-2.592	0.97	0.585	0.99	-2.621	1.00
11	-0.002	0.40	-0.230	0.93	-1.593	0.92	0.341	0.96	-2.626	1.00
12	-0.001	0.23	-0.111	0.78	-1.128	0.85	0.237	0.85	-3.058	1.00
13	-0.001	0.32	-0.090	0.90	-1.197	0.88	0.254	0.94	-2.434	1.00
14	-0.001	0.25	-0.191	0.88	-1.557	0.93	0.305	0.93	-2.715	1.00
15	-0.018	0.60	-1.097	0.98	-3.102	0.98	0.709	1.00	-2.654	1.00
16	-0.008	0.51	-1.203	0.94	-3.505	1.00	0.639	0.98	-3.203	1.00
17	-0.001	0.22	-0.078	0.79	-1.225	0.87	0.240	0.89	-2.858	1.00
18	-0.015	0.57	-0.984	0.98	-2.780	0.98	0.625	0.99	-2.543	1.00
19	-0.001	0.25	-0.158	0.88	-1.432	0.87	0.287	0.90	-2.720	1.00
20	-0.001	0.24	-0.204	0.86	-1.768	0.96	0.334	0.93	-2.827	1.00
21	-0.001	0.33	-0.155	0.90	-1.436	0.93	0.269	0.96	-3.433	1.00
22	-0.015	0.54	-1.242	0.96	-3.560	0.99	0.737	0.99	-3.112	0.99
23	-0.003	0.32	-0.403	0.91	-2.260	0.98	0.438	0.97	-2.490	1.00
24	-0.002	0.26	-0.187	0.83	-1.501	0.93	0.318	0.91	-2.614	1.00
25	-0.005	0.39	-0.452	0.93	-2.196	0.97	0.468	0.97	-2.805	1.00
26	-0.008	0.53	-0.953	0.93	-2.778	0.99	0.545	0.97	-3.584	1.00
27	-0.017	0.58	-1.344	0.99	-3.707	0.95	0.769	1.00	-2.318	0.98
28	-0.005	0.41	-0.478	0.96	-2.459	0.98	0.505	0.99	-2.656	1.00
29	-0.004	0.42	-0.274	0.94	-1.620	0.91	0.379	0.96	-2.504	1.00
30	-0.018	0.65	-1.489	1.00	-3.605	0.94	0.756	1.00	-2.940	1.00
mean	-0.006	0.37	-0.50	0.89	-2.10	0.92	0.44	0.93	-2.71	1.00

Cuadro 5.1: Parámetros de cuatro ajustes para $P_m(n)$ y uno para $R_m(n)$ y los coeficientes de correlación correspondientes.

Genre	β	\overline{PC}	γ	\overline{PC}	δ	\overline{PC}
	Median, IQR	Median, IQR	Median, IQR	Median, IQR	Median, IQR	Median, IQR
$P_{\{B\}}$	-0.21, 0.323	0.895, 0.144	-2.062, 1.318	0.908, 0.083	0.383, 0.178	0.95, 0.105
$R_{\{B\}}$	-2.658, 0.342	0.999, 0.002	-6.433, 0.738	0.949, 0.016	0.998, 0.02	1.0, 0.001
$P_{\{C\}}$	-0.363, 0.298	0.915, 0.078	-2.369, 0.974	0.958, 0.1	0.394, 0.166	0.951, 0.062
$R_{\{C\}}$	-2.894, 0.528	1.0, 0.002	-6.377, 0.747	0.961, 0.01	0.994, 0.016	1.0, 0.001
$P_{\{R\}}$	-0.428, 0.707	0.931, 0.069	-2.24, 1.258	0.95, 0.072	0.44, 0.274	0.966, 0.063
$R_{\{R\}}$	-2.801, 0.472	0.999, 0.002	-6.286, 0.534	0.962, 0.016	0.999, 0.047	1.0, 0.001

Cuadro 5.2: Medianas y rangos intercuartiles de parámetros y coeficientes de correlación para $P_{\{i\}}$ y $R_{\{i\}}$.

Capítulo 6

Conclusiones

De cada canción encontrada en un fakebook se extrajo su secuencia melódica m omitiendo símbolos de repetición. Realizamos ajustes de la distribución beta generalizada discreta para $n - \text{gramas}$ de secuencias melódicas, obteniendo que los ajustes son buenos para $n = 1$ y disminuyen su eficacia cuando n aumenta. Por otro lado, calculamos su probabilidad de ocurrencia $P_m(n)$ de los $n - \text{gramos}$ y la comparamos con las probabilidades de ocurrencia del promedio de las secuencias aleatorias equivalentes con la misma longitud, $R_m(n)$. De las probabilidades de los $n - \text{gramos}$ no nulas elegimos el $n - \text{gramo}$ más largo llamado $n_{max} - \text{gram}$. Para secuencias musicales reales $\overline{n_{max}} = 19.9$ y para secuencias musicales aleatorias $\overline{n_{max}} = 4.7$, lo que significa que $n - \text{gramos}$ muy largos exhiben más ocurrencias y mayor valor de $P_m(n)$ que en $R_m(n)$. Esto implica que $P_m(n)$ siempre es mayor o igual que $R_m(n)$ para todas las canciones analizadas. Para n fijo, si el número de símbolos diferentes s_m aumenta, entonces $R_m(n)$ disminuye. En contraste con este comportamiento de $R_m(n)$, para todas las canciones analizadas encontramos que la dependencia de $P_m(n)$ en s_m es débil, como se muestra en la (Fig. 3.2). Es decir, sorprendentemente, un “alfabeto” con mayor cantidad de notas “no produce mayor diversidad en palabras o frases musicales”. Dado que el orden de magnitud de las probabilidades $P_m(n)$ y $R_m(n)$ se encuentra entre 10^{-1} y 10^{-7} (Tab. 3.1), es útil re-escalarlos aplicando la función de logaritmo como se muestra en las Figs. 3.5 & 3.6. Siempre $-\log(P_m(n))$ y $-\log(R_m(n))$ son funciones crecientes de n , y para todos n la diferencia $\log(P_m(n)) - \log(R_m(n)) \geq 0$ aumenta al aumentar n . Por ejemplo, para $n \leq 5$ y todos los géneros encontramos $3.2 < -\log(P_m(n)) < 8.6$, mientras que $6.5 < -\log(R_m(n)) < 14.3$. Por otro lado, $M_e(P_{\{R\}})$ es menor que $M_e(P_{\{B\}})$ y $M_e(P_{\{R\}})$ es menor que $M_e(P_{\{C\}})$ excepto para $n = 1$, sin embargo, sus diferencias no son significativas.

Todas las $R_m(n)$ se ajustaron a funciones exponenciales con $CP > 0.98$. Análogamente, la ley de potencia y la exponencial estirada produjeron los mejores ajustes de $P_m(n)$.

En pocas palabras, hay una gran brecha entre $P_m(n)$ y $R_m(n)$ cuando se grafican como funciones del tamaño de $n - \text{gramos}$ (Fig. 3.2) y del número de símbolos (Fig. 3.3), lo que demuestra que las notas en secuencias melódicas musicales se eligen y arreglan de manera muy repetitiva, en contraste con la música aleatoria. Este método es muy simple y puede aplicarse a cualquier género musical y generalizarse a secuencias polifónicas.

Apéndice A

Detalles sobre el trabajo de Lap y Kao

Lap y Kao [5] encontraron las siguientes tendencias de 1003 piezas de música asiática. Primero, el número real de combinaciones de n -grams, el conjunto “ $\#\{n\text{-grams}_m(\text{dif})\}$ ” no aumenta exponencialmente en función de n como $\#\{n\text{-grams}_{th}\}$ lo hace. En segundo lugar, el recuento total de n -grams con auto-coincidencias “ $\#\{n\text{-grams}_m(\text{total})\}$ ” disminuye linealmente sobre n . Tercero, la proporción $\frac{\#\{n\text{-grams}_m(\text{total})\}}{\#\{n\text{-grams}_m(\text{dif})\}}$ se aproxima a 1 cuando n aumenta. Además, descubrieron que la ley de Zipf se cumplió para el conjunto de todos los n -grams de intervalos con $n \leq 7$ cuando se clasificaron según su frecuencia de ocurrencia [5]. Sin embargo, su definición y comparación de tienen $\#\{n\text{-grams}_{th}\}$ y $\#\{n\text{-grams}_m(\text{dif})\}$ tiene algunos inconvenientes. Primero, solo se usaron 117 intervalos de los 255 posibles en las 1003 piezas analizadas. En segundo lugar, todos los n -grams de longitud n que se pueden elegir de las melodías son limitados. Por ejemplo $\#\{n\text{-grams}_{th}\} = 255^3 = 16581375$

n -grams, pero solo $\#\{n\text{-grams}_m(\text{total})\} = 355651$ se obtuvieron para 3-grams de intervalos recogidos de las 1003 melodías. Entonces, la comparación entre $\#\{n\text{-grams}_{th}\}$ y $\#\{n\text{-grams}_m(\text{dif})\}$ es diferente para $n = 3$, es decir, incluso si todos los 3-grams recolectados fueran diferentes, el número resultante de 3-grams sería mucho menor que el valor exponencial teórico, por lo que el número de n -grams no podría comportarse exponencialmente en función de n . Mientras tanto, la relación $\frac{\#\{n\text{-grams}_m(\text{total})\}}{\#\{n\text{-grams}_m(\text{dif})\}}$ no tiene un límite superior porque $\#\{n\text{-grams}_m(\text{total})\} \geq \#\{n\text{-grams}_m(\text{dif})\}$ so $\frac{\#\{n\text{-grams}_m(\text{total})\}}{\#\{n\text{-grams}_m(\text{dif})\}} \geq 1$ y $\#\{n\text{-grams}_m(\text{total})\}$ crece proporcional al número de piezas recolectadas.

Bibliografía

- [1] Bruce Benward and Marilyn Saker. *Music in theory and practice (Volume I)*. McGraw-Hill, 8th edition, 2009.
- [2] Hal Leonard Publishing Corporation. *The real little classical fake book: Over 600 Classical Themes and Melodies in Their Original Keys*. Hall Leonard LLC, 1992.
- [3] Shyamala Doraisamy. *Polyphonic music retrieval: The n-gram approach*. PhD thesis, University of London, London, 2004.
- [4] J Stephen Downie. *Evaluating a simple approach to music information retrieval: Conceiving melodic n-grams as text*. PhD thesis, University of Western Ontario, Ontario, Canada, 1999.
- [5] Yip Chi Lap and Ben Kao. A study on musical features for melody databases. In *International Conference on Database and Expert Systems Applications. DEXA*, pages 724–733, Berlin, Heidelberg, June 1999.
- [6] Gustavo Martinez-Mekler, Roberto Alvarez Martínez, Manuel Beltrán del Río, Ricardo Mansilla, Pedro Miramontes, and Germinal Cocho. Universality of rank-ordering distributions in the arts and sciences. *PLoS One*, 4(3):e4791, 2009.
- [7] Bhavya Mor, Sunita Garhwal, and Ajay Kumar. A systematic literature review on computational musicology. *Arch. Computat. Methods Eng.*, 27(3):923–937, 2020.
- [8] Nicola Orio. Music retrieval: A tutorial and review. *Found. Trends Inf. Retr.*, 1(1):1–90, 2006.