



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

GENERACIÓN DE CONSTANTE COSMOLÓGICA A PARTIR DE NO METRICIDAD

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA

JOHAS DAVID MORALES BARROSO

TUTOR PRINCIPAL

DR. YURI BONDER GRIMBERG  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTOR

DR. MARCELO SALGADO RODRÍGUEZ  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTOR

DR. LUIS FERNANDO URRUTIA RÍOS  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

CIUDAD DE MÉXICO, MARZO 2021



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



## **Agradecimientos**

Quiero agradecer a mi mamá sin la cual nada de esto sería posible, a Yuri por apoyarme todo este tiempo, al mi comité y al jurado que han formaron parte de este proceso y finalmente quiero agradecer al CONACYT por la beca que me otorgó durante mis estudios y al proyecto PAPIIT IG 100120 por la beca que conté durante mi proceso de titulación.

## Resumen

En esta tesis intentamos general una constante cosmológica de manera dinámica, para ello nos valemos de un formalismo matemático más general que el que se utiliza en Relatividad General, a las teorías basadas en este formalismo se les onoce como teorías MAG por sus siglas en inglés.

Comenzamos recapitulando algunos resultados matemáticos que involucran a las cantidades presentes en teorías MAG, que son, la curvatura, la no metricidad y la torsión, presentamos. Mencionamos los trabajos que nutren este trabajo como punto de partida, siendo esta una no conservación del tensor de energía-momento presente de manera natural en teorías MAG.

Posteriormente nos restringimos a la acción de Einstein-Hilbert y estudiamos lo que se conoce como la simetría proyectiva, una característica que presenta dicha acción en el contexto de las teorías MAG, mencionamos algunas formas de romper esta simetría, siendo una de ellas el tomar la torsión idénticamente cero.

A continuación nos restringimos a la teoría que tiene torsión idénticamente cero y aplicamos homogeneidad e isotropía a los objetos matemáticos de la teoría. Nos aseguramos de tener el comportamiento de constante cosmológica, con lo cual obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas y tras un conteo de ecuaciones determinamos cuantas ecuaciones de estado son necesarias para cerrar el sistema. Ante la

Damos las ecuaciones de estado necesarias basándonos en escenarios motivados principalmente por restricciones en la geometría y utilizamos datos observacionales para dar condiciones iniciales, con lo cual podemos resolver el sistema de manera perturbativa. Analizamos lo que sucede al resolver perturbativamente encontrado que si bien podemos incorporar valores para la constante cosmológica hoy, resulta que podemos concluir que los requerimientos físicos ideales que buscamos son complicados de conseguir, para ello mostramos un argumento en esta dirección.

Si bien en el escenario estudiado se encuentran complicaciones, debemos tener presentes las simplificaciones adotadas a lo largo del trabajo pues este trabajo pretende ser un sondeo sobre si las ideas presentadas pueden generar la constante cosmológica deseada.

# Capítulo 1

## Introducción

En esta introducción brevemente recopilamos Relatividad General, el formalismo matemático, sus éxitos experimentales, algunos de los fallos fenomenológicos de la teoría e introducimos parte de la notación matemática utilizada en el resto del trabajo. Mencionamos que una de las posibilidades para sortearlos es tener un formalismo matemático más general que el que se tiene en Relatividad General. Finalmente presentamos la motivación principal de este trabajo que son ciertos estudios que partiendo de una no conservación logran dar cuenta del valor de la constante cosmológica. Lo que se pretende es, partiendo de un formalismo matemático más general que presenta estas no conservaciones y, viendo que este punto de partida ha sido fructífero, llegar a dar cuenta de la constante cosmológica.

### 1.1. Relatividad General

La Relatividad General junto con la Mecánica Cuántica son los pilares de la Física moderna. El poderoso formalismo matemático de la Relatividad General, junto con su interpretación geométrica y sus sólidas predicciones hacen que se le pueda considerar una teoría física exitosa. A continuación recopilamos las principales características matemáticas de la teoría, para la interpretación física de la teoría y el principio de equivalencia ver [1, 2, 3].

#### 1.1.1. Formulación matemática de Relatividad General

Relatividad General es una teoría del espacio-tiempo, lo describe como una variedad diferencial Riemanniana 4-dimensional. La manera de determinar la métrica en Relatividad General es a través de las ecuaciones de Einstein, que son

$$\tilde{G}_{ab} = 8\pi T_{ab},$$

donde el lado derecho es el tensor de energía-momento del contenido de materia de la teoría y el lado izquierdo es el tensor de Einstein que se define como

$$\tilde{G}_{ab} = \tilde{R}_{ab} - \frac{1}{2}\tilde{R}g_{ab},$$

utilizando el tensor de Ricci,  $\tilde{R}_{ab}$  y el escalar de Ricci,

$$\tilde{R} = \tilde{R}_{ab}g^{ab}.$$

De esta forma, tenemos un conjunto de diez ecuaciones diferenciales no lineales y acopladas para la métrica.

Las ecuaciones de Einstein pueden obtenerse de un principio variacional, tomando como acción

$$S[g_{ab}, \varphi] = S_{EH}[g_{ab}] + S_M[g_{ab}, \varphi],$$

donde el primer término del lado derecho es la acción de Einstein-Hilbert,

$$S_{EH} = \int \tilde{R} \sqrt{-g} d^4x,$$

y  $S_M$  es la acción del contenido de materia, de la cual obtenemos el tensor de energía-momento como sigue,

$$T_{ab} = -\frac{1}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}}.$$

### 1.1.2. Éxitos y fracasos de Relatividad General

Dentro de los éxitos de Relatividad General tenemos algunos experimentos históricos, como son el *light bending* en presencia de objetos masivos, con el eclipse de 1919 [4]. El problema de la órbita de mercurio, con la precesión de su perihelio, que encuentra descripción en Relatividad General y la detección de las ondas gravitacionales en 2015 [5]. Así como experimentos de igual importancia como *gravity probe B* [6].

Sin embargo, a pesar de su amplio éxito, sabemos que no puede ser considerada una teoría fundamental de la gravitación. Entre los fallos de la Relatividad General podemos encontrar que, a pesar del éxito cosmológico, es incapaz de describir correctamente los datos cosmológicos actuales, en particular la aceleración tardía del universo, sin apelar a materia y energía oscura, así como algún mecanismo de inflación. Por otro lado tenemos la imposibilidad de explicar las curvas de rotación galácticas sin algún agente externo, como lo sería materia oscura. La incapacidad de formular una teoría que incorpore a la Mecánica Cuántica y la predicción genérica de singularidades, son síntomas de que un cambio de paradigma es necesario.

Como resultado, numerosas alternativas que modifican Relatividad General han sido propuestas para tratar de dar solución a los problemas que no tienen explicación dentro de Relatividad General [7]. Entre las posibilidades y con la motivación de mantener una base geométrica en la gravitación, tenemos la idea de generalizar la conexión afín y relajar la condición de torsión cero y compatibilidad con la métrica. Como resultado trabajamos con lo que se conoce como una geometría no Riemanniana donde la curvatura, la torsión y la no metricidad son características intrínsecas del espacio.

Dejando a la métrica y a la conexión sin constricciones tenemos el escenario más general de una geometría no Riemanniana para soportar una teoría gravitacional. Este formalismo se le conoce en la literatura como MAG, por sus siglas en inglés, *Metric-Affine Gravity*. Restringiendo la mencionada geometría no Riemanniana de ciertas formas obtenemos diferentes tipos de teorías, por ejemplo, imponiendo que la torsión y la no metricidad sean cero, llegamos a las teorías métricas de las cuales Relatividad General es un caso particular. Con lo cual tenemos un formalismo geométrico más rico en el cual buscar soluciones a los problemas que atañen a Relatividad General.

## 1.2. No conservación y la constante cosmológica

La constante cosmológica  $\Lambda$  ha estado presente durante gran parte de la historia de la Relatividad General [8]. Actualmente se utiliza dentro del modelo  $\Lambda - CMD$ , para explicar las

observaciones cosmológicas [9], en particular la expansión acelerada y tardía del universo. Sin embargo, no hay una explicación fundamental completamente convincente para el valor de la constante cosmológica, esto es lo que se conoce como el problema de la constante cosmológica [8]. Es por esto que resulta interesante cuando un trabajo obtiene el orden de magnitud correcto para la constante cosmológica. Recientemente han existido trabajos que consiguen dar cuenta del orden de magnitud de la constante cosmológica [10, 11, 12] partiendo de una no conservación del tensor de energía-momento, por lo tanto, a continuación queremos revisar el panorama de las leyes de conservación en el contexto de Relatividad General, así como en teorías tipo MAG [7, 13]. Para una rápida introducción a los objetos matemáticos aquí presentados revisar el apéndice C.

En Relatividad General, la identidad de Bianchi (2.25) nos lleva a que el tensor de Einstein es covariantemente conservado,

$$\tilde{\nabla}_a \tilde{G}^a_b = 0, \quad (1.1)$$

lo cual, al considerar la ecuación de Einstein,

$$\tilde{G}_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (1.2)$$

lleva a la conservación del tensor de energía momento  $T_{ab}$ ,

$$\tilde{\nabla}_a T^a_b = j_b = 0, \quad (1.3)$$

notar que hemos definido  $j_b$  con  $\tilde{\nabla}$ . La ecuación (1.3) expresa las leyes de conservación en Relatividad General.

Podemos deducir (1.3) partiendo de un principio variacional, si pedimos que la acción de materia

$$S_M = S_M[g_{ab}, \varphi] \quad (1.4)$$

sea invariante bajo difeomorfismos. Notar que hemos demandado que la acción de materia dependa solamente de la métrica  $g_{ab}$  y de los campos de materia, representados colectivamente por  $\varphi$ . Calculando la variación general de (1.4),

$$\delta S_M = \int \left[ \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}} \delta g^{ab} + \frac{\delta S_M}{\delta \varphi} \delta \varphi \right] d^n x, \quad (1.5)$$

demandando que la ecuación de movimiento del campo se satisfaga,

$$\frac{\delta S_M}{\delta \varphi} = 0, \quad (1.6)$$

y utilizando

$$\delta g^{ab} = -2\tilde{\nabla}^{(a} \chi^{b)} \quad (1.7)$$

obtenemos,

$$\delta S_M = - \int 8\pi T_{ab} \delta g^{ab} \sqrt{-g} d^n x, \quad (1.8)$$

donde,

$$T_{ab} = - \frac{1}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}}. \quad (1.9)$$

Notar que hemos hecho el calculo en n dimensiones, si bien Relatividad General está formulada en 4 dimensiones muchos de los cálculos son análogos independientemente de la dimensionalidad del espacio-tiempo, cuando este sea el caso haremos los cálculos en una dimensionalidad arbitraria, sin embargo, la parte de cosmología se encuentra en 4 dimensiones.

Finalmente consideramos la variación debida a los difeomorfismos y demandamos que  $S_M$  sea invariante,

$$0 = \int T_{ab} \tilde{\nabla}^a \chi^b d^n x, \quad (1.10)$$

donde  $\chi^b$  es el campo generador de los difeomorfismos. Integrando por partes y despreciando el término de borde llegamos a

$$0 = \int \tilde{\nabla}^a T_{ab} \chi^b d^n x, \quad (1.11)$$

y dada la naturaleza de  $\chi^b$ , que es completamente arbitrario llegamos a (1.3). De esta forma, por otro camino hemos llegado a la conservación del tensor de energía-momento a partir de demandar que venga de una acción invariante bajo difeomorfismos.

Como hemos mencionado, el punto de partida de algunos trabajos es

$$j_a \neq 0. \quad (1.12)$$

Existen al menos dos formas de conseguir algo así, una de ellas es restringir las simetrías, con ello obtendríamos que  $\chi^b$  no es completamente arbitrario y al final obtenemos una restricción sobre  $j_b$ . Por ejemplo, en gravedad unimodular [14, 15, 16] los difeomorfismos están restringidos a ser aquellos que preservan el elemento de volumen [15, 16], sucede que

$$\chi^b = \epsilon^{bcde} \tilde{\nabla}_c \omega_{de}, \quad (1.13)$$

con  $\omega_{ab}$  arbitrario. Introduciendo (1.13) en (1.11) e integrando por partes obtenemos

$$0 = \int \tilde{\nabla}_c j_b \epsilon^{bcde} \omega_{de} d^n x, \quad (1.14)$$

lo cual implica al ser  $\omega_{ab}$  arbitrario,

$$0 = \tilde{\nabla}_c j_b \epsilon^{bcde}, \quad (1.15)$$

y esto a su vez

$$\partial_{[a} j_b] = 0, \quad (1.16)$$

lo cual nos dice que la no conservación del tensor de energía-momento debe comportarse como una 1-forma cerrada. Una desventaja de este tipo de argumentos es que solo pone restricciones sobre el tipo de no conservación que podemos tener en ese tipo de teorías, si bien  $j_b = 0$  está permitido cualquier  $j_b$  en principio es igual de aceptable y en espacios-tiempos simplemente conexos tendríamos para cualquier función escalar  $Q$ , por el lema de Poincaré, [17]

$$j_a = \partial_a Q. \quad (1.17)$$

Este tipo de no conservación es la que ha sido propuesta para generar una constante cosmológica del orden de magnitud correcto [14]. Es por esto que una no conservación del tensor de energía-momento es atractiva para intentar dar una explicación al orden de magnitud de la constante cosmológica. Con respecto a este tipo de propuestas, consideramos existen puntos de discusión en ellas como el hecho de que para generar la no conservación se utiliza una ecuación geodésica modificada como punto de partida, motivadas por ideas provenientes de gravedad cuántica. Sin embargo, como hemos mencionado existe otra opción para generar una no conservación con posibles ventajas sobre este tipo de inconvenientes, obteniendo la no conservación del tensor de energía momento y ecuación de autoparalela.

Otra opción es permitir que la teoría tenga otras dependencias además de la métrica y los campos de materia. En el contexto de MAG la dependencia extra se encuentra en la conexión.

En secciones posteriores se hará el cálculo explícito, pero por ahora dejaremos esquemáticamente qué es lo que sucede a la hora de permitir a la teoría y en particular  $S_M$  tener más dependencias,

$$S_M = S_M[g_{ab}, \varphi, A], \quad (1.18)$$

denotadas colectivamente en  $A$ . Debe quedar claro que  $A$  no son más campos de materia y que la parte gravitacional de la acción  $S_G$  también depende de  $A$  pues es la teoría la que tiene dependencias extra.

Siguiendo el procedimiento análogo a (1.5) y pidiendo que se satisfaga la ecuación de movimiento de los campos de materia,

$$\delta S_M = \int \left[ \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}} \delta g^{ab} + \frac{\delta S_M}{\delta A} \delta A \right] d^n x, \quad (1.19)$$

siguiendo la definición (1.9) e integrando por partes,

$$0 = \int \sqrt{-g} \left[ \tilde{\nabla}^a T_{ab} \chi^b + \frac{1}{16\pi} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta A} \delta_\chi A \right] d^n x, \quad (1.20)$$

donde,  $\delta_\chi A$  es la variación adecuada para las variables extra que se tenga en consideración. Como puede verse de (1.20) al introducir  $\delta_\chi A$  y “factorizar”  $\chi^b$  obtendremos una relación entre  $j_b$  y la variación de la acción de materia con respecto a dichas variables adicionales.

Este otro enfoque tiene dos ventajas que son, primero, la ley de conservación correspondiente será una expresión concreta a diferencia de lo que sucede con (1.16), que solo es una restricción sobre  $j_b$ , y sumado a esto, no se han reducido las simetrías de la teoría.

Más aun, en algunas de estas teorías la ecuación de movimiento para la métrica se lee esquemáticamente como,

$$\tilde{G}_{ab} + \Delta_{ab} + \Delta g_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (1.21)$$

donde

$$\Delta_{ab} = -2\tilde{\nabla}_{[a} C^c{}_{c]b} + 2C^d{}_{[a|b]} C^c{}_{c]d} \quad (1.22)$$

$$\Delta = g^{ef} \tilde{\nabla}_{[e} C^c{}_{c]f} - g^{ef} C^d{}_{[e|f]} C^c{}_{c]d}, \quad (1.23)$$

donde  $C^c{}_{ab}$  es la parte no Riemanniana de la conexión, la definición precisa se da en las siguientes secciones y en el apéndice B. como podemos ver el último término del lado izquierdo de (1.21) y dado por (1.23) ya se comporta como un término tipo constante cosmológica.

Entonces queremos aprovechar el hecho de que en estas teorías con variables extras generan una no conservación que han mostrado ser útil para atacar el problema de la constante cosmológica y el tipo de ecuación de movimiento (1.21) que se genera en algunas de ellas para ver si podemos de esta forma obtener una constante cosmológica del orden de magnitud correcto para ello presentamos el aparato matemático necesario en el siguiente capítulo.



## Capítulo 2

# Preliminares Matemáticos: Geometría no Riemanniana

En esta sección desarrollamos las nociones matemáticas necesarias para trabajar con geometrías no Riemannianas, prestando atención en los puntos de especial importancia para los cálculos y construcción de teorías tipo MAG. Posteriormente nos centramos en el tipo de teorías que queremos estudiar, aquellas que no involucran a la torsión.

### 2.1. Introducción a la geometría no Riemanniana

Las teorías gravitacionales basadas en una geometría no Riemanniana general se les conoce en la literatura como MAG [18] por sus siglas en inglés *Metric-Affine Gravity*. Una geometría no Riemanniana es aquella que además de tener curvatura  $R_{abc}{}^d$  (vectores transportados a lo largo de una curva cerrada no vuelven al vector de inicio), contiene también torsión  $T_{ab}^c$  (paralelogramos infinitesimales no cierran) y no metricidad  $Q_{abc}$  (productos y ángulos entre vectores no se preservan al transportarlos paralelamente a lo largo de la variedad). Queremos hacer notar que estos objetos pueden existir independientemente de los otros y, enumerando algunos subcasos, tenemos, por ejemplo, que un espacio de dimensión  $n$  puede ser métrico y plano, es decir, sin curvatura, pero tener torsión distinta de cero, en este tipo de espacios se desarrollan las teorías de gravedad teleparalela [19]. Puede tener torsión que sea idénticamente cero y ser plano, pero contener no metricidad, en estos espacios tienen lugar las teorías de gravedad teleparalela simétrica [20]. Un espacio con curvatura y torsión distintas de cero se conoce como una variedad de Riemann-Cartan, usualmente denotado  $\mathcal{U}_n$  [21, 22] y por último el espacio en el que se desarrolla Relatividad General que es métrico y tiene torsión cero, usualmente denotado en la literatura como  $\mathcal{V}_n$  [18, 21, 22].

La torsión, la curvatura y la no metricidad pueden calcularse a partir de dos objetos, la métrica  $g_{ab}$  y la conexión  $\Gamma_{ab}^c$ . La métrica define distancias y ángulos, mientras que la conexión define el transporte paralelo, a través del operador derivada asociado. En la siguiente sección usamos estos dos objetos para desarrollar una geometría no Riemanniana.

#### 2.1.1. Conexión y tensor métrico

En esta sección mostramos como se relacionan la no metricidad, la torsión y la curvatura con la métrica y la conexión. Las demostraciones se presentan en el apéndice B.

Una geometría no Riemanniana consiste en una variedad diferencial equipada con una métrica y una conexión, tales que son independientes entre ellas  $(\mathcal{M}, g_{ab}, \Gamma_{ab}^c)$ . Con lo anterior, el operador derivada asociado a dicha conexión, denotado por  $\nabla_a$  ver apéndice A, actúa en un tensor de rango  $(k, \ell)$  de la siguiente forma <sup>1</sup>

$$\nabla_a T_{c_1 \dots c_\ell}^{b_1 \dots b_k} = \partial_a T_{c_1 \dots c_\ell}^{b_1 \dots b_k} + \Gamma_{ad}^{b_1} T_{c_1 \dots c_\ell}^{d \dots b_k} + \dots + \Gamma_{ad}^{b_k} T_{c_1 \dots c_\ell}^{b_1 \dots d} - \Gamma_{ac_1}^d T_{d \dots c_\ell}^{b_1 \dots b_k} - \dots - \Gamma_{ac_\ell}^d T_{c_1 \dots d}^{b_1 \dots b_k}. \quad (2.1)$$

Utilizando (2.1), la no metricidad se define como

$$Q_{abc} = -\nabla_a g_{bc}, \quad (2.2)$$

la torsión queda dada por<sup>2</sup>,

$$T_{ab}^c = 2\Gamma_{[ab]}^c, \quad (2.3)$$

y finalmente, la curvatura es,

$$R_{abc}{}^d \omega_d = (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a + T_{ab}^d \nabla_d) \omega_c. \quad (2.4)$$

Escribiendo explícitamente las ecuaciones (2.2), (2.3) y (2.4) en términos de la métrica y la conexión, obtenemos

$$Q_{abc} = -\partial_a g_{bc} + \Gamma_{ab}^e g_{ec} + \Gamma_{ac}^e g_{be}, \quad (2.5)$$

$$T_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c - \Gamma_{ba}^c, \quad (2.6)$$

$$R_{abc}{}^d = -2\partial_{[a} \Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a|c]}^e \Gamma_{b]e}^d. \quad (2.7)$$

La conexión puede partirse en dos partes, una puramente Riemanniana, es decir, la conexión de Levi-Civita  $\tilde{\nabla}_a$ , y un pedazo no Riemanniano

$$\Gamma_{ab}^c = \tilde{\Gamma}_{ab}^c + C_{ab}^c, \quad (2.8)$$

donde,

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^c = \frac{1}{2} g^{cd} (\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}), \quad (2.9)$$

y

$$C_{cab} = \frac{1}{2} (Q_{abc} + Q_{bac} - Q_{cab}) + \frac{1}{2} (T_{cab} + T_{acb} + T_{bca}), \quad (2.10)$$

al tensor  $C_{ab}^c$  en (2.8) y (2.10) se le suele llamar el tensor de distorsión [23]. La notación utilizada para la conexión de Levi-Civita la extendemos a otros objetos geométricos, por ejemplo,  $\tilde{\nabla}_a$  es el operador derivada de Levi-Civita y  $\tilde{R}_{abc}{}^d$  es el tensor de Riemann construido con la conexión de Levi-Civita, es decir, los usuales de Relatividad General, evidentemente tenemos que,

$$\tilde{\nabla}_a g_{bc} = 0. \quad (2.11)$$

Utilizando (2.8) podemos también reescribir (2.1) en términos del operador derivada de Levi-Civita,

$$\nabla_a T_{c_1 \dots c_\ell}^{b_1 \dots b_k} = \tilde{\nabla}_a T_{c_1 \dots c_\ell}^{b_1 \dots b_k} + C_{ad}^{b_1} T_{c_1 \dots c_\ell}^{d \dots b_k} + \dots + C_{ad}^{b_k} T_{c_1 \dots c_\ell}^{b_1 \dots d} - C_{ac_1}^d T_{d \dots c_\ell}^{b_1 \dots b_k} - \dots - C_{ac_\ell}^d T_{c_1 \dots d}^{b_1 \dots b_k}. \quad (2.12)$$

<sup>1</sup>Ver apéndice C para la definición de las derivadas parciales  $\partial_a$ .

<sup>2</sup>Ver apéndice C para la definición de los corchetes.

Con la separación de (2.8) podemos volver a escribir (2.2), (2.3) y (2.4) como sigue<sup>3</sup>

$$Q_{abc} = 2C_{(c|a|b)}, \quad (2.13)$$

$$T_{ab}^c = 2C_{[ab]}^c, \quad (2.14)$$

$$R_{abc}{}^d = \tilde{R}_{abc}{}^d - 2\tilde{\nabla}_{[a}C_{b]c}^d + 2C_{[a|c]}^e C_{b]e}^d. \quad (2.15)$$

Cabe señalar que a lo largo de este desarrollo partimos de separar a la conexión en dos pedazos, y luego vemos que eso nos lleva a una relación entre dos operadores derivada. El razonamiento inverso, más presentado en los libros de texto [24], que comienza presentando los operadores derivada y posteriormente llegar a la separación de la conexión es equivalente, para mas detalle sobre operadores derivada ver el apéndice C.

Este sería el desarrollo más general posible para una teoría MAG, presentar curvatura, torsión y no metricidad. En las secciones siguientes estudiamos con mayor detalle los objetos geométricos y las identidades que los relacionan entre sí.

### 2.1.2. El tensor de no metricidad

En un espacio afín general tenemos que la conexión no es compatible con la métrica, el fallo de la conexión en preservar la métrica se codifica en el tensor de no metricidad,

$$Q_{abc} = -\nabla_a g_{bc}. \quad (2.16)$$

El signo negativo es convencional y en la literatura puede encontrarse sin él. Dado que el tensor métrico es simétrico, el tensor de no metricidad es simétrico en su segundo y tercer índices.

Habiendo definido el tensor de no metricidad, existen dos covectores independientes que pueden formarse a partir de él. El primero se obtiene contrayendo el segundo y tercer índice con un tensor métrico y se conoce como el vector de Weyl

$$Q_a = Q_{abc}g^{bc}. \quad (2.17)$$

El segundo se obtiene contrayendo el primer y segundo índices y no tiene ningún nombre particular dentro de la literatura,

$$\hat{Q}_c = Q_{abc}g^{ab}. \quad (2.18)$$

Un caso particular de no metricidad es la conocida como no metricidad de Weyl, en la cual, se tiene que la no metricidad queda dada por,

$$Q_{abc} = \frac{1}{n}Q_a g_{bc}. \quad (2.19)$$

### 2.1.3. El tensor de torsión

Como ya se mencionó, el tensor de torsión queda definido como

$$T_{ab}^c = 2\Gamma_{[ab]}^c, \quad (2.20)$$

el 2 en la definición es convencional y puede encontrarse en la literatura a la torsión definida sin él. Por otro lado, queda claro que la torsión es antisimétrica en sus dos índices inferiores.

La torsión tiene una única traza y se construye sin necesidad de la métrica como sigue,

$$T_a = T_{ba}^b. \quad (2.21)$$

---

<sup>3</sup>Para la definición de los paréntesis y disposición de los índices ver el apéndice C.

Dependiendo de la dimensión del espacio tiempo, puede definirse con la torsión y la forma de volumen otro objeto, que en  $4 - dim$  es,

$$\hat{T}^a = \epsilon^{abcd} T_{bcd}. \quad (2.22)$$

#### 2.1.4. El tensor de Curvatura

En esta parte estudiamos las propiedades del tensor de curvatura, simetrías de índices e identidades. El desarrollo se hace general con torsión y no metricidad presentes. Todas las demostraciones pueden encontrarse en el apéndice B.

##### Simetrías e identidades

Comenzamos recordando las simetrías e identidades que hay con el tensor de curvatura usual de Relatividad General construido con la conexión de Levi-Civita:

$$\tilde{R}_{abc}{}^d = -\tilde{R}_{bac}{}^d, \quad (2.23)$$

$$\tilde{R}_{[abc]}{}^d = 0, \quad (2.24)$$

$$\tilde{\nabla}_{[a} \tilde{R}_{bc]d}{}^e = 0, \quad (2.25)$$

$$\tilde{R}_{abcd} = -\tilde{R}_{abdc}. \quad (2.26)$$

El tensor de Riemann construido con una conexión general no tiene todas las simetrías de índices que contiene el construido con la conexión de Levi-Civita. Las identidades en el caso de una geometría no Riemanniana general son,

$$R_{abc}{}^d = -R_{bac}{}^d, \quad (2.27)$$

$$R_{[abc]}{}^d = -\nabla_{[a} T_{bc]}^d + T_{[ab}^e T_{c]e}^d, \quad (2.28)$$

$$\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e = T_{[ab}^f R_{c]fd}{}^e, \quad (2.29)$$

$$R_{abcd} = -R_{abdc} - 2\nabla_{[a} Q_{b]cd} - T_{ab}^e Q_{ecd}. \quad (2.30)$$

De la definición (2.4) queda claro que en cualquier caso se tiene la antisimetría en los dos primeros índices (2.27). De (2.28) y (2.29) notar que el lado derecho se anula completamente cuanto la torsión se anula.

Finalmente hacer notar que (2.30) solo se anula cuando estamos en el caso Riemanniano pues es una identidad puramente Riemanniana, ya que se obtiene de actuar sobre la métrica,

$$(\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b - \tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_a) g_{cd} = 0, \quad (2.31)$$

y con eso terminamos con las identidades análogas a las de Relatividad General.

##### Contracciones

En el caso estándar de Relatividad General el tensor de curvatura tiene una sola contracción posible, el tensor de Ricci. En el caso métrico-afín de MAG, esto no es así por lo que queremos analizar las posibles contracciones del tensor de curvatura.

Sin utilizar la métrica tenemos tres posibles contracciones que son  $R_{abc}{}^a$ ,  $R_{abc}{}^b$  y  $R_{abc}{}^c$ . Las dos primeras son iguales salvo un signo y definen el tensor de Ricci,

$$-R_{abc}{}^a = R_{abc}{}^b = R_{ac}. \quad (2.32)$$

El tensor de Ricci escrito en términos de la conexión  $\Gamma_{ab}^c$  es,

$$R_{ab} = -2\partial_{[a}\Gamma_{c]b}^c + 2\Gamma_{[a|b|}^d\Gamma_{c]d}^c. \quad (2.33)$$

A la contracción del tensor de Ricci con una métrica inversa se le conoce como el escalar de Ricci o escalar de curvatura,

$$R = g^{ab}R_{ab}. \quad (2.34)$$

La tercer contracción no tiene análogo Riemanniano, pues en ese caso es exactamente cero, sin embargo, fuera del caso Riemanniano se le conoce como la curvatura homotética,

$$\hat{R}_{ab} = R_{abc}{}^c. \quad (2.35)$$

La curvatura homotética en términos de la conexión  $\Gamma_{ab}^c$  queda como sigue,

$$\hat{R}_{ab} = -\partial_a\Gamma_{bc}^c + \partial_b\Gamma_{ac}^c. \quad (2.36)$$

Contrayendo (2.28) en  $b$  y  $d$ , obtenemos una identidad para la parte antisimétrica del tensor de Ricci,

$$R_{[ac]} = \frac{1}{2}\hat{R}_{ac} - \nabla_{[a}T_{c]} + \frac{1}{2}\nabla_b T_{ac}^b + \frac{1}{2}(T_{ab}^e T_{ce}^b + T_{ae}^b T_{bc}^e - T_{ac}^e T_e). \quad (2.37)$$

Utilizando (2.8), podemos reescribir (2.36) para además darnos cuenta de que solo está presente cuando hay no metricidad, y en específico no metricidad de Weyl,

$$\hat{R}_{ab} = \frac{1}{2}(\partial_b Q_a - \partial_a Q_b) = \partial_{[b}Q_{a]}. \quad (2.38)$$

Podemos ver la similitud entre la curvatura homotética y el tensor de Maxwell,  $F_{ab} = \partial_{[a}A_{b]}$ , además en (2.38) tenemos un tensor antisimétrico en sus índices, por lo que la contracción con la métrica es idénticamente cero.

Con métrica tenemos otra posible contracción que es

$$\bar{R}_a{}^d = R_{abc}{}^d g^{bc} = -2g^{bc}\partial_{[a}\Gamma_{b]c}^d + 2g^{bc}\Gamma_{[a|c]}^e\Gamma_{b]e}^d, \quad (2.39)$$

sin embargo, la traza de este tensor no es independiente sino que esta relacionada con  $R$ , ya que

$$\bar{R}_a{}^a = R_{abc}{}^a g^{bc} = -R_{bac}{}^a g^{bc} = -R_{bc}g^{bc} = -R. \quad (2.40)$$

Finalmente, podemos hacer contracciones en (2.29), contrayendo en  $d$  y  $e$

$$\nabla_{[a}\hat{R}_{bc]} = T_{[ab}^f\hat{R}_{c]f}, \quad (2.41)$$

y en  $a$  y  $e$ ,

$$\nabla_a R_{bcd}{}^a + 2\nabla_{[b}R_{c]d} = -T_{bc}^f R_{fd} + 2T_{a[b}^f R_{c]fd}{}^a. \quad (2.42)$$

### Tensor de Einstein

Con los elementos anteriores podemos construir el tensor de Einstein que se define por

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}, \quad (2.43)$$

y por otro lado tenemos el usual de Relatividad General,

$$\tilde{G}_{ab} = \tilde{R}_{ab} - \frac{1}{2}\tilde{R}g_{ab}. \quad (2.44)$$

Utilizando la separación de la conexión (2.8) podemos reescribir (2.43),

$$G_{ab} = \tilde{G}_{ab} - 2\tilde{\nabla}_{[a}C_{c]b} + 2C^d_{[a|b|}C^c_{c]d} + g_{ab}g^{ef}\tilde{\nabla}_{[e}C^c_{c]f} - g_{ab}g^{ef}C^d_{[e|f|}C^c_{c]d}. \quad (2.45)$$

En la ecuación (2.45) podemos ver el primer punto de la motivación del trabajo. Por un lado podemos ver el tensor de Einstein usual construido con la conexión que es compatible con la métrica y luego se ve que los últimos dos términos son proporcionales a la métrica, comportándose como algún tipo de constante cosmológica.

Parte del trabajo es analizar qué hacer con los otros dos términos presentes ya que es fácil comprobar que no podemos demandar que por algún mecanismo sean cero, porque los términos que ya son proporcionales a la métrica son la traza de estos dos términos, así como el escalar de Ricci es la traza del tensor de Ricci.

## Capítulo 3

# Construcción de teorías MAG

En esta sección formularemos de manera general lo que sería una teoría MAG, después de esto enumeramos algunas ventajas conceptuales que tienen este tipo de teorías. Definimos lo que se conoce como el hipermomentum [18, 25, 23] y su descomposición en spin, shear y dilaton, así como su interpretación física. Posteriormente nos restringimos a una acción gravitacional de Einstein-Hilbert y revisamos algo que está bien estudiado en la literatura y que se conoce como simetría proyectiva [26]. Ya con la acción de Einstein-Hilbert le demandamos a la conexión que sea simétrica, esto rompe la señalada simetría proyectiva y simplifica los cálculos posteriores. Ya en ese contexto obtenemos las ecuaciones de movimiento correspondientes y las leyes de conservación que son la motivación principal de este trabajo.

### 3.1. Teorías MAG

Las teorías MAG están sustentadas en un principio variacional, dado por una acción del tipo,

$$S[g_{ab}, \Gamma^c_{ab}, \varphi] = S_G[g_{ab}, \Gamma^c_{ab}] + S_M[g_{ab}, \Gamma^c_{ab}, \varphi], \quad (3.1)$$

donde debe quedar claro que  $g_{ab}$  y  $\Gamma^c_{ab}$  son variables independientes, y que  $\Gamma^c_{ab}$  en general tiene torsión y no metricidad. Los campos de materia quedan denotados colectivamente por  $\varphi$ . Notar que hemos demandado que la acción pueda separarse en una parte gravitacional, que no depende de los campos de materia, y en una parte de materia, que puede depender de las variables geométricas y de los campos de materia. De la variación de la acción de materia, se siguen las definiciones del tensor de energía-momento (1.9),

$$T_{ab} = -\frac{1}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}}, \quad (3.2)$$

y en este caso, a diferencia del caso métrico estándar, tenemos otro objeto,

$$\Sigma_c^{ab} = -\frac{1}{16\pi} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta \Gamma^c_{ab}}, \quad (3.3)$$

que se le suele conocer en la literatura como hipermomentum.

Este es un buen momento para contrastar el formalismo métrico-afín con el formalismo puramente métrico. Por un lado estamos incrementando el número de variables geométricas, pues pasamos de solo  $g_{ab}$  a  $g_{ab}$  y  $\Gamma^c_{ab}$ , pero por otro lado, estamos reduciendo el número de suposiciones, ya que no estamos tomando a la conexión métrica. Sacrificamos el tener menos variables

a cambio de reducir el número de suposiciones respecto a los objetos geométricos. Otro aspecto interesante es que el formalismo métrico-afín suele reducirse al formalismo métrico bajo ciertas circunstancias [27], que incluyen pedir que  $\Sigma_c^{ab}$  sea cero. Además, el formalismo métrico afín tiene algunas otras ventajas, por ejemplo, al ser  $g_{ab}$  y  $\Gamma_{ab}^c$  independientes, sus variaciones son independientes, con lo cual, en los bordes tenemos que

$$\delta g_{ab}|_{borde} = 0, \quad (3.4)$$

$$\delta \Gamma_{ab}^c|_{borde} = 0, \quad (3.5)$$

esto simplifica lo que sucede en los bordes al tomar variaciones de la acción, lo cual puede considerarse una ventaja respecto al formalismo métrico [28].

### 3.1.1. Descomposición del hipermomentum

El hipermomentum suele descomponerse en tres pedazos [18, 25]. Los tres pedazos en los que suele descomponerse un tensor  $(0, 2)$ , que son, la parte antisimétrica, la parte simétrica sin traza y la traza. Pero dicha descomposición es en un índice inferior y uno superior

$$\Sigma_{cab} = \Sigma_{[c|a|b]} + \hat{\Sigma}_{(c|a|b)} + \frac{1}{n} g_{cb} \Sigma_a, \quad (3.6)$$

donde,

$$\begin{aligned} \Sigma_a &= \Sigma_{cab} g^{cb}, \\ \hat{\Sigma}_{(c|a|b)} &= \Sigma_{(c|a|b)} - \frac{1}{n} g_{cb} \Sigma_a. \end{aligned}$$

La parte antisimétrica toma el nombre de densidad de espín o espín, mientras que la parte simétrica sin traza se conoce como el *shear* y a la traza se le conoce como el dilatón. La razón de que se le llame a la parte antisimétrica espín es que es fácil ver que si ponemos espinores de Dirac como materia, estos contribuyen a la parte antisimétrica del hipermomentum [26]. En cuanto al shear y al dilatón su interpretación física no queda del todo clara [29], pues es sabido que el Modelo Estándar no contribuye ni al shear ni al dilatón, por lo que se ha comentado que no tienen relevancia física [26]. Desde este punto de vista y centrados en el desarrollo de este trabajo, estaríamos viendo si una posible interpretación física del shear y/o dilatón es la de generar constante cosmológica.

Dentro de la comunidad de MAG el dilatón es el que se considera de menor relevancia física pues sucede que gracias a la simetría proyectiva de la acción de Einstein-Hilbert, la ecuación de movimiento de la conexión nos dice que el dilatón es exactamente cero, como veremos a continuación.

### 3.1.2. Acción de Einstein-Hilbert y simetría proyectiva

En el formalismo puramente métrico podemos obtener las ecuaciones de Einstein, es decir, Relatividad General a partir de un formalismo variacional. La acción de la cual se obtienen las ecuaciones de Einstein se conoce como acción de Einstein-Hilbert.

La acción de Einstein-Hilbert es la que sigue,

$$S_{EH} = \int R \sqrt{-g} d^n x, \quad (3.7)$$

como ya mencionamos el escalar de Ricci está determinado de manera única en el contexto general de MAG, por lo que no existe ambigüedad a la hora de considerar la acción de Einstein-Hilbert.

### Simetría Projectiva

En el contexto de MAG, es decir,  $g_{ab}$  y  $\Gamma_{ab}^c$  independientes, sucede que la acción de Einstein-Hilbert<sup>1</sup> tiene una peculiaridad que no tiene en Relatividad General y es que bajo lo que se conoce como una simetría proyectiva [30, 26, 23], es decir,

$$g_{ab} \longrightarrow g_{ab}, \quad (3.8)$$

$$\Gamma_{ab}^c \longrightarrow \Gamma_{ab}^c + \delta_b^c U_a, \quad (3.9)$$

con  $U_a$  una 1-forma arbitraria.

Este es un buen momento para mencionar que la descomposición de  $\Sigma_c^{ab}$  la ecuación (3.6) y la forma que toma la transformación de la simetría proyectiva (3.9) depende de las convenciones adoptadas, en particular de las convenciones adaptadas para  $\Gamma_{ab}^c$ , por lo que en la literatura pueden encontrarse las mismas expresiones pero con un orden en los índices diferentes [31, 32] lo cual puede causar confusión.

Al introducir esto en (2.33), obtenemos que  $R_{ab}$  queda como,

$$R_{ab} \longrightarrow R_{ab} - \partial_a U_b + \partial_b U_a, \quad (3.10)$$

como podemos ver los nuevo términos resultantes son antisimétricos, por lo que si consideramos la parte simétrica del tensor de Ricci, o el escalar de Ricci, estos quedan invariantes antes la transformación proyectiva por lo que

$$R \longrightarrow R, \quad (3.11)$$

$$S_{EH} \longrightarrow S_{EH}. \quad (3.12)$$

Es importante mencionar que la simetría proyectiva, en principio, está presente cuando la conexión  $\Gamma_{ab}^c$  es general, y no se le demanda nada, es decir, cuando la conexión tiene tanto torsión como no metricidad. Por otro lado no queda clara la interpretación física de la simetría proyectiva, habiendo estudios sobre como romperla [26] y también trabajos que proponen extender la simetría proyectiva de diversas formas [23, 31] siendo una de ellas pedir que la parte de materia de la acción también sea invariante bajo esta simetría.

Existen varias formas de romper la simetría proyectiva [26], es decir, varias formas de restringir la conexión de tal manera que el escalar de Ricci construido con dicha conexión deja de ser invariante al aplicarle (3.9). Por ejemplo, si se le demanda a la torsión que sea cero *a priori*, la simetría se romperá. El caso de torsión cero es el caso de mayor interés en este trabajo por lo que es importante tener presente que la simetría en ese caso no está presente ya que, el hecho de romper la simetría proyectiva tiene repercusión en las ecuaciones de movimiento, como veremos en la siguiente sección.

### 3.1.3. Ecuaciones de movimiento

En esta sección obtenemos las ecuaciones de movimiento para el caso en el que la conexión  $\Gamma_{ab}^c$  es general. Comenzamos con la ecuación que se obtiene de la variación respecto a la métrica.

$$\delta S_{EH} = \int \left( R_{(ab)} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right) \delta g^{ab} \sqrt{-g} d^4x,$$

pues

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ab} \delta g^{ab} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{ab} \delta g_{ab},$$

<sup>1</sup>En realidad sucede con cualquier teoría  $f(R)$ , pues la simetría depende únicamente del escalar de Ricci, con lo cual el resultado de  $R$  se generaliza trivialmente a cualquier  $f(R)$ .

y

$$\frac{\delta}{\delta g^{ef}} R_{abc}{}^d = 0,$$

pues  $\Gamma_{ab}^c$  y  $g_{ab}$  son variables independientes. Con lo cual, tenemos que usando (1.9),

$$\delta S = \int [G_{(ab)} - 8\pi T_{ab}] \delta g^{ab} \sqrt{-g} d^4x, \quad (3.13)$$

pidiendo que la acción sea estacionaria, obtenemos una ecuación tipo Einstein,

$$G_{(ab)} = 8\pi T_{ab}. \quad (3.14)$$

Como ya se mencionó, el formalismo simplifica lo que sucede en los bordes. En el caso de la acción de Einstein-Hilbert, debido a que la variación del tensor de Ricci  $R_{ab}$  respecto a la métrica es cero, no se necesitan términos de borde como el término de Gibbons-Hawkin [31] para obtener las ecuaciones de Einstein en la presencia de fronteras. La termodinámica de agujeros negros al depender en gran medida de lo que sucede con los términos de borde se ve modificada en estas teorías [28, 33].

Por otro lado variando respecto a  $\Gamma_{ab}^c$ ,

$$\delta S_{EH} = \int \sqrt{-g} g^{ab} \delta R_{ab} d^4x, \quad (3.15)$$

usando que,

$$\delta R_{abc}{}^d = -\nabla_a \delta \Gamma_{bc}^d + \nabla_b \delta \Gamma_{ac}^d + T_{ba}^e \delta \Gamma_{ec}^d, \quad (3.16)$$

con lo cual,

$$\delta R_{ab} = -\nabla_a \delta \Gamma_{cb}^c + \nabla_c \delta \Gamma_{ab}^c + T_{da}^c \delta \Gamma_{cb}^d, \quad (3.17)$$

se sigue entonces,

$$\begin{aligned} \delta S_G &= \int \sqrt{-g} g^{ab} (-\nabla_a \delta \Gamma_{cb}^c + \nabla_c \delta \Gamma_{ab}^c + T_{da}^c \delta \Gamma_{cb}^d) d^4x \\ &= \int [-\nabla_a (\sqrt{-g} g^{ab} \delta \Gamma_{cb}^c) + \nabla_a (\sqrt{-g} g^{ab}) \delta \Gamma_{cb}^c \\ &\quad + \nabla_c (\sqrt{-g} g^{ab} \delta \Gamma_{ab}^c) - \nabla_c (\sqrt{-g} g^{ab} \delta) \Gamma_{ab}^c + \sqrt{-g} g^{ab} T_{ca}^d \delta \Gamma_{db}^c] d^4x \\ &= \int [(\nabla_d (\sqrt{-g} g^{db}) \delta_c^a - \nabla_c (\sqrt{-g} g^{ab}) + \sqrt{-g} g^{db} T_{cd}^a) \delta \Gamma_{ab}^c \\ &\quad + \nabla_c (\sqrt{-g} g^{ab} \delta \Gamma_{ab}^c) - \nabla_d (\sqrt{-g} g^{db} \delta_c^a \delta \Gamma_{ab}^c)] d^4x \\ &= \int \{ \nabla_d (\sqrt{-g} g^{db}) \delta_c^a - \nabla_c (\sqrt{-g} g^{ab}) + \sqrt{-g} [g^{db} T_{cd}^a + T_c g^{ab} - T^b \delta_c^a] \} \delta \Gamma_{ab}^c d^4x, \end{aligned} \quad (3.18)$$

en la segunda línea hemos usado la regla de Leibnitz y en la última hemos integrado por partes.

Con lo cual la variación respecto a  $\Gamma_{ab}^c$  de la acción completa es

$$\delta S = \int \{ \nabla_d (\sqrt{-g} g^{db}) \delta_c^a - \nabla_c (\sqrt{-g} g^{ab}) + \sqrt{-g} [g^{db} T_{cd}^a + T_c g^{ab} - T^b \delta_c^a] - 16\pi \sqrt{-g} \Sigma_c^{ab} \} \delta \Gamma_{ab}^c d^4x,$$

y finalmente, la ecuación de movimiento de  $\Gamma_{ab}^c$ , es,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_d (\sqrt{-g} g^{db}) \delta_c^a - \frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_c (\sqrt{-g} g^{ab}) + [g^{db} T_{cd}^a + T_c g^{ab} - T^b \delta_c^a] = 16\pi \Sigma_c^{ab}. \quad (3.20)$$

Hay varias cosas que notar de (3.20)

- Los primeros dos términos están relacionados con la no metricidad, como se muestra en el apéndice B, mientras que los últimos tres términos solo tienen que ver con la torsión. Concluimos que  $\Sigma_c^{ab}$  es fuente de torsión y no metricidad.
- Al contraer en  $c$  y  $b$ , el lado izquierdo es exactamente cero, esto es consecuencia de la simetría proyectiva [31], lo cual implica que *on-shell*,  $\Sigma_c^{ab}$  no tiene traza en  $c$  y  $b$ , es decir, la parte de dilatón de  $\Sigma_c^{ab}$  es cero.
- En este punto no puede verse pues se necesita un estudio más detallado [26], pero el sistema solo tendrá solución única, esto es, obtener a la torsión y a la no metricidad en términos de  $\Sigma_c^{ab}$ , cuando previamente se haya roto la simetría proyectiva, de lo contrario, la conexión quedara determinada salvo por un término del estilo  $\delta_b^c U_a$  [30, 27].

Notar que los dos términos que tienen que ver con la no metricidad se quedan sin traza al contraer en  $c$  y  $b$  y los tres términos relacionados a la torsión por separado se quedan sin traza al hacer la misma contracción, entonces, si por algún otro mecanismo pudieramos hacer *a posteriori* la torsión igual a cero, el resultado seguiría quedandose sin traza, como puede verse,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_d (\sqrt{-g} g^{db}) \delta_c^a - \frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_c (\sqrt{-g} g^{ab}) = 16\pi \Sigma_c^{ab},$$

y la traza  $\Sigma_a$  es igual a cero por la ecuación de movimiento. Como ya se mencionó esto es consecuencia de la simetría proyectiva.

Si por otro lado, al hacer la variación en (3.19) se demanda que, por definición, la torsión sea cero, esto se traduce en que en la variación solo entra la parte simétrica obteniendo,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_d (\sqrt{-g} g^{d(b)} \delta_c^a) - \frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_c (\sqrt{-g} g^{ab}) = 16\pi \Sigma_c^{(ab)},$$

que como podemos ver, no tiene la peculiaridad de no quedarse sin traza. Como conclusión de este caso particular podemos ver que no es lo mismo variar y luego deshacerse de la torsión que variar sin torsión *a priori*, esto es porque al variar sin torsión lo que estamos haciendo es eliminar la simetría proyectiva. Como ya se mencionó existen varias formas de romper la simetría proyectiva, y cada una tiene sus peculiaridades, aquí nos centramos solamente en el caso que nos interesa, que es el de torsión cero.

De igual forma debemos recordar que no hay consenso sobre el significado físico del *shear* y el dilatón de  $\Sigma_c^{ab}$ , no así del espín que parece estar un poco más claro, ya que los fermiones contribuyen a la parte antisimétrica de  $\Sigma_c^{ab}$  [26], sin embargo, en el modelo estándar no hay ningún término que contribuya al shear y tampoco al dilatón. Sumado a que la simetría proyectiva implica que el dilatón es cero hay trabajos que proponen que la simetría proyectiva debe ser extendida para que suceda algo similar con el shear, esto es, extender la simetría para que la correspondiente ecuación de movimiento implique que tanto el shear como el dilatón sean cero [26].

En la siguiente sección dejaremos el tratamiento general de MAG y nos centraremos en el caso donde solo hay no metricidad, como consecuencia no tenemos la simetría proyectiva y  $\Sigma_c^{ab}$  solo tiene las partes de shear y dilatón, como se mostrará a continuación.

### 3.2. Geometrías con no metricidad

A partir de esta sección todo lo presentado es para el caso sin torsión. Por lo que la deducción de las leyes de conservación es para el caso sin torsión, y algunas de las identidades que se utilizan solo son válidas en el caso sin torsión.

Comenzamos con las identidades geométricas para el caso en el que la torsión es cero,

$$T^c{}_{ab} = 0,$$

con lo cual, tanto  $C^c{}_{ab}$  como  $\Gamma^c{}_{ab}$  quedan simétricos en sus índices inferiores y entonces (2.10) se reduce a

$$C_{cab} = \frac{1}{2}(Q_{abc} + Q_{bac} - Q_{cab}). \quad (3.21)$$

Notar también que al eliminar la torsión, la curvatura en (2.4) queda en una forma mas parecida a la de Relatividad General, esto es, la curvatura es la antisimetrización de operadores derivada actuando sobre una 1-forma sin el término que involucra a la torsión. Sin embargo (2.7) y (2.15) se siguen, teniendo en cuenta que  $\Gamma^c{}_{ab}$  y  $C^c{}_{ab}$  son simétricas en los índices inferiores, es decir,

$$R_{abc}{}^d \omega_d = (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \omega_c \quad (3.22)$$

$$R_{abc}{}^d = -2\partial_{[a}\Gamma^d{}_{b]c} + 2\Gamma^e{}_{[a|c|}\Gamma^d{}_{b]e} \quad (3.22)$$

$$R_{abc}{}^d = \tilde{R}_{abc}{}^d - 2\tilde{\nabla}_{[a}C^d{}_{b]c} + 2C^e{}_{[a|c|}C^d{}_{b]e} \quad (3.23)$$

Las identidades cuando solo hay no metricidad son,

$$R_{abc}{}^d = -R_{bac}{}^d, \quad (3.24)$$

$$R_{[abc]}{}^d = 0, \quad (3.25)$$

$$\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^e = 0, \quad (3.26)$$

$$R_{abcd} = -R_{abdc} - 2\nabla_{[a}Q_{b]cd}. \quad (3.27)$$

La expresión del tensor de Ricci en términos de  $\Gamma^c{}_{ab}$  queda sin alteraciones,

$$R_{ab} = -2\partial_{[a}\Gamma^c{}_{c]b} + 2\Gamma^d{}_{[a|b|}\Gamma^c{}_{c]d}.$$

Como ya habíamos mencionado la curvatura homotética es un objeto relacionado únicamente con la no metricidad de Weyl

$$\hat{R}_{ab} = \partial_{[b}Q_{a]}, \quad (3.28)$$

luego, la curvatura homotética cuando no hay torsión es proporcional a la parte antisimétrica del Ricci,

$$R_{[ac]} = \frac{1}{2}\hat{R}_{ac}. \quad (3.29)$$

Finalmente, las expresiones que se obtienen de contraer índices en (2.29) son, por un lado

$$\nabla_{[a}\hat{R}_{bc]} = 0, \quad (3.30)$$

la cual implica que

$$\nabla_{[a}R_{bc]} = 0, \quad (3.31)$$

y por otro lado,

$$\nabla_a R_{bcd}{}^a + 2\nabla_{[b}R_{c]d} = 0 \quad (3.32)$$

### 3.2.1. Ecuaciones de Movimiento

En esta sección presentamos las ecuaciones de movimiento para el caso en el que no hay torsión, el detalle de cómo se conecta entre las ecuaciones del capítulo pasado con las presentadas ahora se encuentra en el apéndice B. Trabajamos de aquí en adelante con  $C^c_{ab}$  en lugar de  $Q_{abc}$  o  $\Gamma^c_{ab}$ , recordar que como hemos hecho la torsión igual a cero,  $C^c_{ab}$  es simétrico. Finalmente analizamos que cosas implica la ecuación de movimiento sobre  $\Sigma_c^{ab}$ .

La ecuación que se obtiene de la variación de la métrica no presenta ninguna complicación y es una ecuación tipo Einstein,

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (3.33)$$

con  $G_{ab}$  dado por (2.45) y  $T_{ab}$  dado por (1.9), y una ecuación para la conexión, que queda como,

$$g^{de}C^a_{de}\delta^b_c + C^d_{dc}g^{ab} - 2C^a_{ce}g^{b)e} = 16\pi\Sigma_c^{ab}, \quad (3.34)$$

donde  $C^c_{ab}$  queda dado por (3.21), y es simétrica. Como  $\Gamma^c_{ab}$  es simétrica, tenemos que por definición  $\Sigma_c^{ab}$  es simétrico, como además puede verse de (3.34). Los detalles de cómo se llega a esta ecuación a partir de la presentada en el capítulo anterior se encuentran en el apéndice B.

El lado izquierdo de (3.34) no implica que  $\Sigma_c^{ab}$  tiene traza cero. Esto es porque se ha roto la simetría proyectiva al haber hecho la torsión igual a cero [30], por lo que tenemos la parte del dilatón. Por otro lado, es fácil ver que no se tiene la parte de espín, pues, es imposible para un tensor (0,3) que es simétrico es dos de sus índices y ser antisimétrico en uno de esos índices y el restante.

$$\Sigma_{abc} = \Sigma_{acb} = -\Sigma_{bca} = -\Sigma_{bac} = \Sigma_{cab} = \Sigma_{cba} = -\Sigma_{abc}, \quad (3.35)$$

por lo tanto, al haber demandado que la conexión sea simétrica, nos hemos quedado sin la parte de espín. Como conclusión tenemos que nuestro  $\Sigma_c^{ab}$  presenta solo shear y dilatón.

Llamamos además a las trazas de  $C^c_{ab}$  como

$$C^b_{ba} = \lambda_a, \quad (3.36)$$

$$C^a_{bc}g^{bc} = \tau^a, \quad (3.37)$$

dado que en este caso  $C^c_{ab}$  es simétrico en sus índices inferiores, por lo que no hay más trazas. Reescribiendo (3.34) con estas definiciones tenemos

$$\tau^a\delta^b_c + \lambda_c g^{ab} - 2C^a_{ce}g^{b)e} = 16\pi\Sigma_c^{ab}, \quad (3.38)$$

por simplicidad en los cálculos más adelante definimos,

$$P_c^{ab} = \tau^a\delta^b_c + \lambda_c g^{ab} - 2C^a_{ce}g^{b)e}. \quad (3.39)$$

Este es un buen momento para apuntar como a partir de esta teoría es que podemos obtener Relatividad General. Como se introdujo  $C^c_{ab}$  es la diferencia entre la conexión general  $\Gamma^c_{ab}$  y la conexión de Levi-Civita  $\tilde{\Gamma}^c_{ab}$ , es claro que cuando,

$$C^c_{ab} = 0,$$

volvemos a la situación de Relatividad General pues, utilizando las ecuaciones de movimiento queda patente que,

$$G_{ab} = \tilde{G}_{ab}, \quad (3.40)$$

$$\Sigma_c^{ab} = 0. \quad (3.41)$$

Como se ha mencionado, ya hemos roto la simetría proyectiva, con lo cual podemos afirmar que el converso de (3.41) se sigue, es decir, cuando,

$$\Sigma_c^{ab} = 0, \quad (3.42)$$

usando la ecuación de movimiento (3.34) podemos concluir que

$$C_{ab}^c = 0, \quad (3.43)$$

con lo cual, se tiene de nuevo (3.40). Como nota final, repetimos que esto último es posible debido a que la simetría proyectiva ha sido rota, en las teorías donde no se ha roto dicha simetría hacer afirmaciones de este tipo es imposible, pues la conexión no queda completamente determinada por la ecuación de movimiento.

Debido a que la conexión queda bien determinada por la ecuación de movimiento (3.34) y a que la ecuación es algebraica, y lineal, podemos resolver el sistema incluso en forma tensorial, esto es incluso posible en teorías con acciones más generales [34]. Siendo concientes de lo anterior podemos trabajar tanto con  $C_{ab}^c$  como con  $\Sigma_c^{ab}$ . Debemos tener presente que en este subcaso, torsión cero, siempre es posible ir de las variables de  $C_{ab}^c$  a las de  $\Sigma_c^{ab}$ , como haremos en homogeneidad e isotropía.

### 3.2.2. Leyes de conservación

En esta sección desarrollamos formalmente lo esbozado en la Introducción, para eso mostramos que la acción de Einstein-Hilbert es invariante bajo difeomorfismos, y luego demandando lo mismo para la parte de materia obtenemos las leyes de conservación.

Lo primero que queremos mostrar son las variaciones de la métrica y la conexión, para el caso de la invarianza bajo difeomorfismos,

$$\delta_\chi g^{ab} = -2\tilde{\nabla}^{(a}\chi^{b)}, \quad (3.44)$$

como podemos ver esto no es mas que la derivada de lie de la métrica, donde  $\chi^a$  es el campo que genera el difeomorfismo. Sin embargo, con la conexión sucede una cosa peculiar,

$$\delta_\chi \Gamma_{ab}^c = \partial_b \partial_a \chi^c + \chi^d \partial_d \Gamma_{ab}^c + \partial_a \chi^e \Gamma_{be}^c + \partial_b \chi^e \Gamma_{ae}^c - \Gamma_{ba}^e \partial_e \chi^c, \quad (3.45)$$

como podemos ver del lado derecho de (3.45) prácticamente tenemos la derivada de Lie de un tensor (1, 2) salvo por el primer término. Si uno se encuentra siguiendo el desarrollo presentado en [24] puede terminar con unas leyes de conservación que no son correctas. La forma de verificar que (3.45) es la forma correcta de tomar las variaciones debido a la simetría subyacente es que primero verificar que la acción de Einstein-Hilbert es invariante utilizando (3.44) y (3.45). Más aún el desarrollo seguido en [24] toma como variable a  $C_{ab}^c$ , en lugar de  $\Gamma_{ab}^c$  esto puede llevar a confusiones y a potenciales errores y por ello hemos presentado el formalismo de esta manera, que además es la más cercana a la literatura [31, 18, 23, 34, 35].

Comenzamos con una identidad que se sigue para cualquier conexión sin torsión,

$$\chi^d R_{bda}{}^c + \nabla_b \nabla_a \chi^c = \partial_b \partial_a \chi^c + \chi^d \partial_d \Gamma_{ab}^c + \partial_a \chi^e \Gamma_{be}^c + \partial_b \chi^e \Gamma_{ae}^c - \Gamma_{ba}^e \partial_e \chi^c, \quad (3.46)$$

notar que aunque pueda no parecerlo, se sigue que el lado izquierdo de (3.46) es simétrico en  $a$  y  $b$ . Para demostrar (3.46) solo hay que expandir el tensor de Riemann según (2.7), y la doble derivada del lado izquierdo; también utilizamos el hecho de que  $\Gamma_{ab}^c$  es simétrica, los términos

señalados con el mismo número se cancelan entre sí,

$$\chi^d R_{bda}{}^c = \overbrace{-\partial_b \Gamma_{da}^c}^I + \chi^d \partial_d \Gamma_{ba}^c + \overbrace{\Gamma_{ab}^e \Gamma_{de}^c}^{III} \chi^d - \overbrace{\Gamma_{ad}^e \Gamma_{be}^c}^{II} \chi^d, \quad (3.47)$$

$$\nabla_b \nabla_a \chi^c = \underbrace{\partial_b \partial_a \chi^c}_I + \underbrace{\partial_b \Gamma_{ae}^c \chi^e}_I + \Gamma_{ae}^c \partial_b \chi^e + \Gamma_{be}^c \partial_a \chi^e + \underbrace{\Gamma_{be}^c \Gamma_{ad}^e \chi^d}_{II} - \Gamma_{ba}^e \partial_e \chi^c - \underbrace{\Gamma_{ba}^e \Gamma_{ed}^c \chi^d}_{III}, \quad (3.48)$$

sumando obtenemos (3.46). Más aún podemos usar (2.8) en el lado izquierdo de (3.46), obteniendo

$$\delta_\chi \Gamma_{ab}^c = \tilde{R}_{bda}{}^c \chi^d + \tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_a \chi^c + \chi^d \tilde{\nabla}_d C_{ab}^c + \tilde{\nabla}_a \chi^e C_{be}^c + \tilde{\nabla}_b \chi^e C_{ae}^c - C_{ab}^e \tilde{\nabla}_e \chi^c, \quad (3.49)$$

notar que los últimos 4 términos de (3.49) corresponden a lo que sería la derivada de Lie de  $C_{ab}^c$ , con lo cual, si uno sigue el desarrollo seguido en [24] puede llegar a conclusiones equivocadas, pues faltaría la contribución de los dos primeros términos. Veamos entonces que la acción de Einstein-Hilbert es invariante. La variación arbitraria de la acción de Einstein-Hilbert es,

$$\delta S_{EH} = \int G_{ab} \delta g^{ab} \sqrt{-g} d^4 x + \int P_c{}^{ab} \delta \Gamma_{ab}^c \sqrt{-g} d^4 x. \quad (3.50)$$

Nos centramos en el primer término, que es la variación con respecto a la métrica,

$$\begin{aligned} \int G_{ab} \delta_\chi g^{ab} \sqrt{-g} d^4 x &= -2 \int G_{(ab)} \tilde{\nabla}^a \chi^b \sqrt{-g} d^4 x \\ &= 2 \int \tilde{\nabla}^a G_{(ab)} \chi^b \sqrt{-g} d^4 x, \end{aligned} \quad (3.51)$$

donde hemos integrado por partes y despreciado los términos de borde. Ahora nos centramos en  $\tilde{\nabla}^a G_{(ab)}$ . De lo visto en la ecuación (2.38), sabemos que el Ricci y por lo tanto el Einstein tendrán una parte antisimétrica. Usando (2.45)

$$G_{ab} = \tilde{G}_{ab} - 2\tilde{\nabla}_{[a} C_{c]b}^c + 2C_{[a|b|}^d C_{c]d}^c + g_{ab} g^{ef} \tilde{\nabla}_{[e} C_{c]f}^c - g_{ab} g^{ef} C_{[e|f|}^d C_{c]d}^c, \quad (3.52)$$

podemos ver que solo necesitamos simetrizar en el segundo término del lado derecho, pues al expandir y usar (3.36) y (3.37), obtenemos,

$$G_{ab} = \tilde{G}_{ab} - \left( \tilde{\nabla}_a \lambda_b - \tilde{\nabla}_d C_{ab}^d \right) + C_{ab}^g \lambda_g - C_{hb}^g C_{ag}^h + g_{ab} \tilde{\nabla}_c \left( \frac{\lambda^c - \tau^c}{2} \right) - \frac{g_{ab}}{2} [\tau^g \lambda_g - g^{cd} C_{hd}^g C_{cg}^h], \quad (3.53)$$

queda claro que al ser  $C_{ab}^c$  simétrico, únicamente en el segundo término del lado derecho se necesita simetrizar, por lo que

$$G_{(ab)} = \tilde{G}_{ab} - \frac{1}{2} (\tilde{\nabla}_a \lambda_b + \tilde{\nabla}_b \lambda_a) + \tilde{\nabla}_d C_{ab}^d + C_{ab}^g \lambda_g - C_{hb}^g C_{ag}^h \quad (3.54)$$

$$+ g_{ab} \tilde{\nabla}_c \left( \frac{\lambda^c - \tau^c}{2} \right) - \frac{g_{ab}}{2} [\tau^g \lambda_g - g^{cd} C_{hd}^g C_{cg}^h], \quad (3.55)$$

entonces tomando  $2\tilde{\nabla}^a G_{(ab)}$  y sabiendo que,  $\tilde{\nabla}^a \tilde{G}_{ab}$  tenemos,

$$\begin{aligned} 2\tilde{\nabla}^a G_{(ab)} &= -\tilde{\nabla}^a (\tilde{\nabla}_a \lambda_b + \tilde{\nabla}_b \lambda_a) + 2\tilde{\nabla}^a \tilde{\nabla}_d C_{ab}^d + 2\tilde{\nabla}^a (C_{ab}^g \lambda_g) - 2\tilde{\nabla}^a (C_{hb}^g C_{ag}^h) \\ &\quad + \tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_c (\lambda^c - \tau^c) - \tilde{\nabla}_b [\tau^g \lambda_g - g^{cd} C_{hd}^g C_{cg}^h], \end{aligned} \quad (3.56)$$

los términos es (3.56) pueden clasificarse por el número de derivadas  $\tilde{\nabla}$ , los términos con dos derivadas son,

$$\int \chi^b \left[ -\tilde{\nabla}^a (\tilde{\nabla}_a \lambda_b) - \tilde{\nabla}^a (\tilde{\nabla}_b \lambda_a) + 2\tilde{\nabla}^a \tilde{\nabla}_d C^d_{ab} + \tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_c (\lambda^c - \tau^c) \right] \sqrt{-g} d^4x, \quad (3.57)$$

y los términos con una sola derivada son,

$$\begin{aligned} & \int \chi^b \left[ +2\tilde{\nabla}^a (C^g_{ab} \lambda_g) - 2\tilde{\nabla}^a (C^g_{hb} C^h_{ag}) - \tilde{\nabla}_b [\tau^g \lambda_g - g^{cd} C^g_{hd} C^h_{cg}] \right] \sqrt{-g} d^4x \\ & = \int \chi^b \left[ +2\tilde{\nabla}^a (C^g_{ab} \lambda_g) - 2\tilde{\nabla}^a (C^g_{hb} C^h_{ag}) - \tilde{\nabla}_b [\tau^g \lambda_g] - 2g^{cd} C^g_{hd} \tilde{\nabla}_b C^h_{cg} \right] \sqrt{-g} d^4x \end{aligned} \quad (3.58)$$

Estos dos tipos de términos tendrán su contraparte en la variación de la conexión para cancelarse, los términos con dos derivadas se cancelaran con los términos que vienen de

$$\int \left[ P_c^{ab} \left( \tilde{R}_{bda}{}^c \chi^d + \tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_a \chi^c \right) \right] \sqrt{-g} d^4x, \quad (3.59)$$

y los de una sola derivada se cancelaran con los términos de

$$\int \left[ P_c^{ab} \left( \chi^d \tilde{\nabla}_d C^c_{ab} + \tilde{\nabla}_a \chi^e C^c_{be} + \tilde{\nabla}_b \chi^e C^c_{ae} - C^e_{ab} \tilde{\nabla}_e \chi^c \right) \right] \sqrt{-g} d^4x. \quad (3.60)$$

Para mostrar todo esto, veamos lo que sucede con la parte de la variación de la conexión,

$$\int P_c^{ab} \delta \chi \Gamma^c_{ab} \sqrt{-g} d^4x, \quad (3.61)$$

comenzamos con el segundo término de (3.59),

$$\begin{aligned} & \int \left[ \tau^b \delta_c^a + \lambda_c g^{ab} - 2C^b_{ec} g^{ea} \right] \tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_a \chi^c \sqrt{-g} d^4x \\ & = \int \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \left[ \tau^b \delta_c^a + \lambda_c g^{ab} - 2C^b_{ec} g^{ea} \right] \chi^c \sqrt{-g} d^4x \\ & = \int \left[ \tilde{\nabla}_c \tilde{\nabla}_b \tau^b + \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}^a \lambda_c - 2\tilde{\nabla}^e \tilde{\nabla}_d C^b_{ec} \right] \chi^c \sqrt{-g} d^4x. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Notar que hemos quitado la simetrización en  $P_c^{ab}$ , esto es correcto pues sabemos que (3.46) es simétrica.

Ahora, el término con el Riemann en (3.59),

$$\int \left[ \tau^b \delta_c^a + \lambda_c g^{ab} - 2C^b_{ec} g^{ea} \right] \tilde{R}_{bda}{}^c \chi^d \sqrt{-g} d^4x, \quad (3.63)$$

calculado cada uno de los tres términos obtenemos,

$$\begin{aligned} \tau^b \delta_c^a \tilde{R}_{bda}{}^c \chi^d &= \tau^b \chi^d \tilde{R}_{bdc}{}^c \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.64)$$

luego,

$$\begin{aligned} \lambda_c g^{ab} \tilde{R}_{bda}{}^c \chi^d &= g^{ab} \chi^d (\tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_d - \tilde{\nabla}_d \tilde{\nabla}_b) \lambda_a \\ &= \chi^d \tilde{\nabla}^a \tilde{\nabla}_d \lambda_a - \chi^d \tilde{\nabla}_d \tilde{\nabla}^a \lambda_a \\ &= \chi^b (\tilde{\nabla}^a \tilde{\nabla}_b \lambda_a - \tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}^a \lambda^c), \end{aligned}$$

finalmente,

$$\begin{aligned} -2C_{ec}^b g^{ea} \tilde{R}_{bda}{}^c \chi^d &= -2C^{bac} \tilde{R}_{bd(ac)} \chi^d \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.65)$$

con lo cual tenemos,

$$\int \chi^b \left[ \tilde{\nabla}^a \tilde{\nabla}_b \lambda_a - \tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_c \lambda^c \right] \sqrt{-g} d^4 x. \quad (3.66)$$

Sumando (3.62) y (3.66) obtenemos,

$$\int \chi^b \left[ \tilde{\nabla}^a \tilde{\nabla}_b \lambda_a + \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}^a \lambda_b + \tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_c (\tau^c - \lambda^c) - 2\tilde{\nabla}^e \tilde{\nabla}_d C_{eb}^d \right] d^4 x, \quad (3.67)$$

como podemos ver, sucede que (3.67) y (3.57) son iguales salvo un signo global, por lo que al sumarse, se cancelan entre sí.

Veamos qué sucede con (3.60). Comenzamos integrando por partes,

$$\begin{aligned} &\int \chi^b \left[ P_c{}^{ab} \left( \chi^d \tilde{\nabla}_d C_{ab}^c + \tilde{\nabla}_a \chi^e C_{be}^c + \tilde{\nabla}_b \chi^e C_{ae}^c - C_{ab}^e \tilde{\nabla}_e \chi^c \right) \right] \sqrt{-g} d^4 x \\ &= \int \left[ \chi^b P_c{}^{ad} \tilde{\nabla}_b C_{ad}^c + P_c{}^{ab} \left( 2\tilde{\nabla}_{(a} \chi^e C_{b)e}^c - \tilde{\nabla}_e \chi^c C_{ab}^e \right) \right] \sqrt{-g} d^4 x \\ &= \int \left[ \chi^b P_c{}^{ad} \tilde{\nabla}_b C_{ad}^c - 2\chi^e \tilde{\nabla}_a \left( P_c{}^{(ab)} C_{be}^c \right) + \chi^c \tilde{\nabla}_e \left( C_{ab}^e P_c{}^{ab} \right) \right] \sqrt{-g} d^4 x \\ &= \int \chi^b \left[ P_c{}^{ad} \tilde{\nabla}_b C_{ad}^c - 2\tilde{\nabla}_a \left( P_c{}^{(ae)} C_{be}^c \right) + \tilde{\nabla}_e \left( P_b{}^{ad} C_{ad}^e \right) \right] \sqrt{-g} d^4 x. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Necesitamos calcular todas las contracciones que aparecen en (3.68). Comenzando con el primer término, notar que usamos la simetría en  $C_{ab}^c$  para quitar la simetrización en  $P_c{}^{ab}$ ,

$$\begin{aligned} P_c{}^{ad} \tilde{\nabla}_b C_{ad}^c &= [\tau^d \delta_c^a + \lambda_c g^{ad} - 2C_{ec}^d g^{ea}] C_{ad}^c \\ &= \tau^d \tilde{\nabla}_b \lambda_d + \lambda_c \tilde{\nabla}_b \tau^c - 2C_{ec}^d g^{ea} \tilde{\nabla}_b C_{ad}^c \\ &= \tilde{\nabla}_b (\tau^a \lambda_a) - 2C_{ec}^d g^{ea} \tilde{\nabla}_b C_{ad}^c. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Continuando con el segundo término de (3.68),

$$\begin{aligned} P_c{}^{(ae)} C_{be}^c &= \left[ \tau^a \delta_c^e + \lambda_c g^{ae} - 2C_{cd}^a g^{ed} \right] C_{be}^c \\ &= \left[ \frac{1}{2} (\tau^a \delta_c^e + \tau^e \delta_c^a) + \lambda_c g^{ea} - C_{cd}^a g^{ed} - C_{cd}^e g^{ad} \right] C_{be}^c \\ &= \frac{1}{2} (\tau^a \lambda_b + \tau^e C_{be}^a) + \lambda_c C_{be}^c g^{ea} - C_{cd}^a g^{ed} C_{be}^c - C_{cd}^e g^{ad} C_{be}^c, \end{aligned} \quad (3.70)$$

tomando la derivada y multiplicando por  $-2$ ,

$$-2\tilde{\nabla}_a \left( P_c{}^{(ae)} C_{be}^c \right) = -\tilde{\nabla}_a (\tau^a \lambda_b) - \tilde{\nabla}_a (\tau^e C_{be}^a) - 2\tilde{\nabla}^e (\lambda_c C_{be}^c) + 2\tilde{\nabla}^d (C_{dc}^e C_{be}^c) + 2\tilde{\nabla}_a (C_{cd}^a g^{ed} C_{be}^c), \quad (3.71)$$

por último el tercer término,

$$\begin{aligned} P_b{}^{ea} C_{ea}^c &= [\tau^e \delta_b^a + \lambda_b g^{ea} - 2C_{bd}^e g^{ad}] C_{ea}^c \\ &= \tau^e C_{eb}^c + \lambda_b \tau^c - 2g^{ad} C_{bd}^e C_{ea}^c, \end{aligned} \quad (3.72)$$

tomando la derivada,

$$\tilde{\nabla}_c (P_b{}^{ea} C^c{}_{ea}) = \tilde{\nabla}_c (\tau^e C^c{}_{eb}) + \tilde{\nabla}_c (\lambda_b \tau^c) - 2\tilde{\nabla}_c (g^{ad} C^e{}_{bd} C^c{}_{ea}). \quad (3.73)$$

Sumando (3.69), (3.71) y (3.73),

$$\begin{aligned} & \int [\tilde{\nabla}_b (\tau^a \lambda_a) - 2C^d{}_{ec} g^{ea} \tilde{\nabla}_b C^c{}_{ad} \overbrace{-\tilde{\nabla}_a (\tau^a \lambda_b)}^I \overbrace{-\tilde{\nabla}_a (\tau^e C^a{}_{be})}^{II} \\ & - 2\tilde{\nabla}^e (\lambda_c C^c{}_{be}) + 2\tilde{\nabla}^d (C^e{}_{dc} C^c{}_{be}) + 2\tilde{\nabla}_a (C^a{}_{cd} g^{ed} C^c{}_{be}) \\ & + \underbrace{\tilde{\nabla}_c (\tau^e C^c{}_{eb})}_{II} + \underbrace{\tilde{\nabla}_c (\lambda_b \tau^c)}_I - \underbrace{2\tilde{\nabla}_c (g^{ad} C^e{}_{bd} C^c{}_{ea})}_{III}] \chi^b \sqrt{-g} d^4 x, \end{aligned} \quad (3.74)$$

con lo que finalmente obtenemos,

$$\int \chi^b \left[ \tilde{\nabla}_b (\tau^a \lambda_a) - 2C^d{}_{ec} g^{ea} \tilde{\nabla}_b C^c{}_{ad} - 2\tilde{\nabla}^e (\lambda_c C^c{}_{be}) + 2\tilde{\nabla}^d (C^e{}_{dc} C^c{}_{be}) \right] \sqrt{-g} d^4 x, \quad (3.75)$$

y como se puede ver, (3.58) y (3.75) son iguales, salvo un signo global. Con todo lo anterior podemos ver que se cancelan todos los términos y que la variación de la acción termina siendo una divergencia total, que son los términos de borde que han sido despreciados a lo largo del cálculo, con lo cual la acción de Einstein-Hilbert es cuasi-invariante bajo difeomorfismos.

Ahora queremos demandar que la parte de materia de la acción también sea invariante bajo difeomorfismos, y eso nos llevará a las leyes de conservación correspondientes.

$$\begin{aligned} \delta S_M &= \int \left[ \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}} \delta g^{ab} + \frac{\delta S_M}{\delta \Gamma^c{}_{ab}} \delta \Gamma^c{}_{ab} \right] d^4 x \\ &= \int [-8\pi T_{ab} g^{ab} - 16\pi \Sigma_c{}^{ab} \delta \Gamma^c{}_{ab}] \sqrt{-g} d^4 x, \end{aligned}$$

donde ya hemos usado que se satisface la ecuación de movimiento de los campos de materia.

Introduciendo,

$$\begin{aligned} \delta_\chi g^{ab} &= -2\tilde{\nabla}^{(a} \chi^{b)} \\ \delta_\chi \Gamma^c{}_{ab} &= \tilde{R}_{bda}{}^c \chi^d + \tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_a \chi^c + \chi^d \tilde{\nabla}_d C^c{}_{ab} + \tilde{\nabla}_a \chi^e C^c{}_{eb} + \tilde{\nabla}_b \chi^e C^c{}_{ae} - C^e{}_{ba} \tilde{\nabla}_e \chi^c, \end{aligned}$$

y demandando que  $\delta_\chi S_M = 0$  obtenemos,

$$\begin{aligned} 0 &= \int \left[ T_{ab} \tilde{\nabla}^a \chi^b - \Sigma_c{}^{ab} \left( \tilde{R}_{bda}{}^c \chi^d + \tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_a \chi^c + \chi^d \tilde{\nabla}_d C^c{}_{ab} + \tilde{\nabla}_a \chi^e C^c{}_{eb} + \tilde{\nabla}_b \chi^e C^c{}_{ae} - C^e{}_{ba} \tilde{\nabla}_e \chi^c \right) \right] \\ 0 &= \int \left[ \tilde{\nabla}^a T_{ab} \chi^b + \Sigma_c{}^{ab} \left( \tilde{R}_{bda}{}^c \chi^d + \tilde{\nabla}_b \tilde{\nabla}_a \chi^c + \chi^d \tilde{\nabla}_d C^c{}_{ab} + \tilde{\nabla}_a \chi^e C^c{}_{eb} + \tilde{\nabla}_b \chi^e C^c{}_{ae} - C^e{}_{ba} \tilde{\nabla}_e \chi^c \right) \right] \\ &= \int \left[ \chi^b \left( \tilde{\nabla}^a T_{ab} + \Sigma_c{}^{ad} \tilde{R}_{dba}{}^c + \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_d \Sigma_b{}^{ad} + \tilde{\nabla}_b C^c{}_{ad} \Sigma_c{}^{ad} \right) - 2\chi^e \tilde{\nabla}_a (\Sigma_c{}^{ab} C^c{}_{eb}) + \chi^c \tilde{\nabla}_e (C^e{}_{ab} \Sigma_c{}^{ab}) \right] \sqrt{-g} d^4 x \\ &= \int \left[ \tilde{\nabla}^a T_{ab} + \Sigma_c{}^{ad} \tilde{R}_{dba}{}^c + \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_d \Sigma_b{}^{ad} + \tilde{\nabla}_b C^c{}_{ad} \Sigma_c{}^{ad} - 2\tilde{\nabla}_a (\Sigma_c{}^{ad} C^c{}_{bd}) + \tilde{\nabla}_e (C^e{}_{da} \Sigma_b{}^{da}) \right] \chi^b \sqrt{-g} d^4 x \end{aligned}$$

donde hemos integrado por partes y despreciando todos los términos de borde, y usado que tanto  $C^c{}_{ab}$  y  $\Sigma_c{}^{ab}$  son simétricos en  $a$  y  $b$ , con lo cual las leyes de conservación son,

$$\tilde{\nabla}^a T_{ab} = \Sigma_c{}^{ad} \tilde{R}_{bda}{}^c - \tilde{\nabla}_c \tilde{\nabla}_a \Sigma_b{}^{ac} - \Sigma_c{}^{ad} \tilde{\nabla}_b C^c{}_{ad} + 2\tilde{\nabla}_a (C^c{}_{bd} \Sigma_c{}^{ad}) - \tilde{\nabla}_e (C^e{}_{da} \Sigma_b{}^{da}). \quad (3.76)$$

Como podemos ver, hemos obtenido la expresión prometida de la no conservación del tensor de energía-momento. En lo consiguiente, partimos de que tenemos una teoría que presenta una no conservación para tratar de generar constante cosmológica inspirados por trabajos que lo han conseguido partiendo de otras no conservaciones.



## Capítulo 4

# Cosmología con no metricidad

Comenzamos revisando brevemente lo que sucede en cosmología en Relatividad General, centrándonos sobre todo en el caso de FRW plano. Luego aplicamos la condición de homogeneidad e isotropía a las ecuaciones obtenidas en el capítulo anterior, analizamos que componentes de  $C^c_{ab}$  y  $\Sigma_c^{ab}$  son compatibles con homogeneidad e isotropía. Posteriormente aplicamos una condición extra para que  $G_{ab}$  dado por (2.45) tenga un comportamiento extra al de  $\tilde{G}_{ab}$  igual a de una constante cosmológica, es decir, que los cuatro términos extra en (2.45) sean proporcionales a la métrica, con esta condición extra en mente hacemos un conteo de ecuaciones y analizamos que tipo de ecuaciones de estado son necesarias para poder cerrar el sistema de ecuaciones resultante. Utilizando lo recordado de cosmología en Relatividad General resolvemos perturbativamente dicho sistema y tratamos de ajustar los valores observados de la constante cosmológica  $\Lambda_{hoy}$  y el valor del Hubble  $H_{hoy}$ . Con el sistema ya resuelto analizamos la evolución que tiene  $\Lambda(t)$  y  $H(t)$  hasta donde el esquema perturbativo lo permita. Finalmente, comentar que en la literatura pueden encontrarse estudios que incluyen a la torsión, ya sea únicamente torsión o en caso más generales donde también se incluye a la no metricidad, así como el correspondiente fluido perfecto en presencia de torsión y no metricidad [36, 37, 38], también casos en el que se estudia solo torsión [39], en este en particular hay problemas con el principio cosmológico [40]. Todo esto queda fuera del alcance de este trabajo, en particular el trabajo con fluidos, pues por simplicidad trabajaremos con las componentes de  $\Sigma_c^{ab}$ .

Por otro lado, antes de comenzar con el desarrollo en homogeneidad e isotropía, es importante mencionar que utilizar una teoría MAG para explicar la expansión tardía del universo, o concretamente la constante cosmológica, es contrario a gran parte de la literatura [18, 41], pues donde tradicionalmente se esperan desviaciones de la geometría Riemanniana es cerca de singularidades, por ejemplo, cerca del big bang. Sin embargo, como se ha mencionado, la interpretación física del shear y del dilatón del hipermomentum no genera consenso, es por esto que hay trabajos recientes en busca de interpretación para el shear y el dilatón que tienen que ver con la expansión tardía del universo [29], pero son trabajos recientes y no son la tendencia en el estudio de estas teorías.

### 4.1. Cosmología en Relatividad General

En esta sección revisamos algunas de las suposiciones y resultados que existen en Relatividad General para el contexto cosmológico. Uno de los puntos de partida para el estudio del universo con Relatividad General es el suponer que el espacio es homogéneo e isotrópico, por eso revisamos brevemente la implementación matemática de que un espacio-tiempo sea homogéneo e isotrópico.

Matemáticamente, decimos que un espacio-tiempo es espacialmente homogéneo si existe una familia uniparamétrica de hipersuperficies  $\Xi_t$  que folian el espacio-tiempo tal que para todo  $t$  y  $p, q$  puntos en  $\Xi_t$  existe una isometría de la métrica  $g_{ab}$  que toma  $p$  y lo lleva a  $q$ , es decir, no hay puntos espaciales privilegiados.

Por otro lado decimos que un espacio-tiempo es espacialmente isotrópico si existe una congruencia de curvas tipo tiempo con tangentes  $u^a$  llenando el espacio, tales que para cualquier punto  $p$  y dos vectores espaciales  $s_1^a$  y  $s_2^a \in V_p$  existe una isometría de  $g_{ab}$  que deja  $p$  y  $u^a$  fijos pero rota  $s_1^a$  en  $s_2^a$ , con lo cual es imposible construir un vector espacial privilegiado.

Las condiciones de homogeneidad e isotropía restringen la forma funcional del tensor métrico cuando lo escribimos en coordenadas adaptadas a las simetrías y se le llama métrica de Friedmann–Robertson–Walker (FRW) a la métrica cuando hemos hecho patentes dichas restricciones al tensor métrico. Se puede mostrar que en cuatro dimensiones nos quedamos con tres posibilidades para la métrica de FRW, una de las cuales tiene secciones espaciales planas.

Dadas las simetrías podemos adaptar coordenadas de la siguiente forma, en cada hipersuperficie ponemos coordenadas, en el caso de las secciones espaciales planas podemos utilizar coordenadas cartesianas, luego, podemos llevarnos estas coordenadas a otras hipersuperficies utilizando a los observadores isotrópicos, es decir, a cada observador isotrópico le asignamos coordenadas espaciales fijas.

La métrica de FRW plano escrita en coordenadas adaptadas a las simetrías del, es

$$g_{ab} = -(dt)_a(dt)_b + a(t)^2 [(dx)_a(dx)_b + (dy)_a(dy)_b + (dz)_a(dz)_b], \quad (4.1)$$

donde  $a(t)$  es el factor de escala. La conexión de Levi-Civita asociada a esta métrica tiene solo 2 componentes independientes,

$$\tilde{\Gamma}^t_{**} = a(t)\dot{a}(t), \quad (4.2)$$

$$\tilde{\Gamma}^*_{*t} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (4.3)$$

con  $*$  refiriéndose a cualquiera de las direcciones espaciales,  $x, y$  o  $z$ , pues al estar adaptadas a las simetrías por homogeneidad son indistinguibles. El tensor de Einstein  $\tilde{G}_{ab}$  tiene dos componentes independientes,  $\tilde{G}_{tt}$  y  $\tilde{G}_{**}$ , que en términos de  $a(t)$  se leen

$$\tilde{G}_{tt} = 3\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)}, \quad (4.4)$$

$$\tilde{G}_{**} = -2\ddot{a}(t)a(t) - \dot{a}^2(t). \quad (4.5)$$

Si consideramos un tensor de energía-momento de fluido perfecto

$$T_{ab} = \rho(t)u_a u_b + P(t)(g_{ab} + u_a u_b), \quad (4.6)$$

las ecuaciones de Friedmann quedan como

$$3\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} = 8\pi\rho(t), \quad (4.7)$$

$$-2\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} = 8\pi P(t). \quad (4.8)$$

Las ecuaciones de Friedmann (4.7) y (4.8) forman un sistema de dos ecuaciones diferenciales, con tres incógnitas  $\rho(t)$ ,  $P(t)$  y  $a(t)$ , por lo que hay que dar una ecuación de estado. Un grupo de ecuaciones de estado parametrizadas por  $\omega$  es,

$$P(t) = \omega\rho(t), \quad (4.9)$$

donde como casos particulares tenemos polvo  $\omega = 0$  y radiación  $\omega = 1/3$ . El caso de una constante cosmológica también puede alcanzarse pidiendo que  $\rho(t)$  sea constante en el tiempo, y  $\omega = -1$ .

El sistema (4.7) y (4.8) suplementado con la ecuación de estado (4.9) tiene solución para toda  $\omega$ . La solución para  $\omega \neq -1$  es

$$a(t) = C_1 (3t(1 + \omega) - C_2)^{\frac{2}{3(\omega+1)}}, \quad (4.10)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes de integración. Estas constantes de integración las fijaremos siendo  $C_2 = 0$ , pues como podemos ver, existe una singularidad, la cual queremos poner en  $t = 0$ ,  $C_1$  se fija para que  $a(t_{\text{hoy}}) = 1$ , de donde podemos escribir,

$$a(t) = Ct^{\frac{2}{3(\omega+1)}}, \quad (4.11)$$

donde en  $C$  hemos absorbido el resto de constantes y tiene las unidades correctas para que se satisfaga que  $a(t_{\text{hoy}}) = 1$ .

Finalmente, el parámetro de Hubble se define como,

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (4.12)$$

que para el grupo de soluciones (4.11), queda como,

$$H(t) = \frac{2}{3(\omega + 1)} \frac{1}{t}. \quad (4.13)$$

Para apuntes sobre las unidades y las cantidades físicas utilizadas revisar el apéndice C.

## 4.2. Implementación de homogeneidad e isotropía

Para imponer la condición de homogeneidad e isotropía, pedimos que la derivada de Lie de  $C_{ab}^c$  y  $\Sigma_c^{ab}$  y en general de cualquier campo tensorial de cualquier orden  $(\ell, k)$ , a lo largo de los vectores de Killing del espacio-tiempo  $\psi$ , sean cero.

$$\mathcal{L}_\psi C_{ab}^c = 0 = \mathcal{L}_\psi \Sigma_c^{ab} \quad (4.14)$$

Los vectores de Killing para el caso de FRW plano son de translación y rotación.

Como resultado tenemos que hay tres componentes de cada uno que son compatibles con la isotropía, y por homogeneidad son funciones solamente del tiempo,

$$\begin{aligned} C_{tt}^t &= b(t), \\ C_{**}^t &= c(t), \\ C_{*t}^* &= d(t), \end{aligned}$$

y algo análogo para  $\Sigma_c^{ab}$

$$\begin{aligned} \Sigma_t^{tt} &= M(t), \\ \Sigma_t^{**} &= P(t), \\ \Sigma_*^{*t} &= L(t). \end{aligned}$$

Nosotros trabajaremos en las variables de  $C_{ab}^c$  y no en las variables de  $\Sigma_c^{ab}$  pues es equivalente, por la ecuación de la conexión (3.38). En homogeneidad e isotropía, (3.38) tiene tres

componentes independientes, al igual que lo que sucede con  $\Sigma_c^{ab}$  y  $C_{ab}^c$ , con lo cual el sistema tiene solución única. Entonces en este contexto cosmológico podemos cambiar entre las variables de  $\Sigma_c^{ab}$  y  $C_{ab}^c$ . Resolver el sistema siempre es posible cuando ya se ha roto la simetría proyectiva, como se ha mencionado en el capítulo anterior, así que esto solo es un caso particular. Las variables de  $\Sigma_c^{ab}$  en términos de las variables de  $C_{ab}^c$ , nos da las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned} 16\pi M(t) &= 3 \left[ \frac{c(t)}{a(t)^2} - d(t) \right], \\ 16\pi P(t) &= \frac{b(t) + d(t)}{a(t)^2}, \\ 16\pi L(t) &= -\frac{b(t)}{2} + \frac{c(t)}{2a(t)^2} + d(t). \end{aligned}$$

Mientras que las variables de  $C_{ab}^c$  en términos de las variables de  $\Sigma_c^{ab}$  nos da las ecuaciones,

$$\begin{aligned} \frac{c(t)}{a(t)^2} &= 16\pi \left[ \frac{M(t)}{4} + \frac{a(t)^2 P(t)}{4} + \frac{L(t)}{2} \right], \\ b(t) &= 16\pi \left[ \frac{3}{4} a(t)^2 P(t) + \frac{M(t)}{12} - \frac{L(t)}{2} \right], \\ d(t) &= 16\pi \left[ -\frac{M(t)}{12} + \frac{a(t)^2 P(t)}{4} + \frac{L(t)}{2} \right]. \end{aligned}$$

Como hemos hecho ver, el sistema puede resolverse y entonces es equivalente trabajar en cualesquiera de las variables. Nosotros por comodidad trabajaremos con las variables de  $C_{ab}^c$ . Notar que  $a$  aparece en las soluciones del sistema, eso es porque la ecuación de movimiento (3.38) depende de  $g_{ab}$ , sin embargo, para determinar a la métrica, y por lo tanto  $a$ , necesitamos la otra ecuación de movimiento de la cual hablaremos más adelante.

Como ya hemos dicho, por homogeneidad las funciones involucradas solo pueden depender del tiempo,  $t$ , por lo que a partir de ahora quitamos la dependencia explícita en  $t$  a la hora de escribir las componentes.

Continuando con el proceso de aplicar homogeneidad e isotropía a los objetos geométricos necesarios, tenemos que los vectores y covectores en estas coordenadas adaptadas, solo pueden tener componente al lo largo de  $t$ , esto es lo que sucede con  $\tau^a$  y  $\lambda_a$ .

$$\begin{aligned} \tau^a &= \left( -b + \frac{3c}{a^2} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a, \\ \lambda_a &= (b + 3d) (dt)_a, \end{aligned}$$

esto puede entenderse ya que, si no fuera así, podrían utilizarse para definir alguna dirección espacial privilegiada, lo cual es imposible por homogeneidad e isotropía, aunque el tratamiento formal es análogo al hecho con las derivadas de Lie de  $C_{ab}^c$  y  $\Sigma_c^{ab}$ .

Por otro lado, tenemos que para un tensor (0,2) simétrico como el Einstein en la ecuación de movimiento  $G_{(ab)}$ , o para la métrica (4.1), en homogeneidad e isotropía solo puede tener 2 componentes independientes, que corresponden a las componentes  $tt$  y  $**$ , de igual forma puede entenderse que, si no fuese así, podrían utilizarse para definir alguna dirección espacial privilegiada. Entonces, tendremos que la ecuación tipo Einstein son dos ecuaciones en homogeneidad e isotropía, así como sucede en el caso de la cosmología estándar. Escribiendo el tensor de Einstein,

$$G_{(ab)} = \tilde{G}_{ab} - \left( \tilde{\nabla}_a \lambda_b - \tilde{\nabla}_d C_{ab}^d \right) + C_{ab}^g \lambda_g - C_{hb}^g C_{ag}^h + g_{ab} \tilde{\nabla}_c \left( \frac{\lambda^c - \tau^c}{2} \right) - \frac{g_{ab}}{2} [\tau^g \lambda_g - g^{cd} C_{hd}^g C_{cg}^h],$$

en términos de las componentes de  $C^c_{ab}$ , obtenemos las dos ecuaciones,

$$G_{tt} = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3}{2}\frac{\dot{c}}{a^2} - \frac{3}{2}\dot{d} + \frac{3}{2}\frac{bc}{a^2} + \frac{3}{2}bd + \frac{3}{2}\frac{cd}{a^2} - \frac{3}{2}d^2 + 3b\frac{\dot{a}}{a} + \frac{3}{2}c\frac{\dot{a}}{a} - \frac{3}{2}d\frac{\dot{a}}{a}, \quad (4.15)$$

$$\frac{1}{a^2}G_{**} = -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\dot{c}}{2a^2} - \frac{3}{2}\dot{d} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{3}{2}bd - \frac{cd}{2a^2} - \frac{3}{2}d^2 + b\frac{\dot{a}}{a} - \frac{c\dot{a}}{2a^3} - \frac{7}{2}d\frac{\dot{a}}{a}, \quad (4.16)$$

y usando la ecuación de Einstein, tendríamos,

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3}{2}\frac{\dot{c}}{a^2} - \frac{3}{2}\dot{d} + \frac{3}{2}\frac{bc}{a^2} + \frac{3}{2}bd + \frac{3}{2}\frac{cd}{a^2} - \frac{3}{2}d^2 + 3b\frac{\dot{a}}{a} + \frac{3}{2}c\frac{\dot{a}}{a} - \frac{3}{2}d\frac{\dot{a}}{a} = 8\pi T_{ab}, \quad (4.17)$$

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\dot{c}}{2a^2} - \frac{3}{2}\dot{d} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{3}{2}bd - \frac{cd}{2a^2} - \frac{3}{2}d^2 + b\frac{\dot{a}}{a} - \frac{c\dot{a}}{2a^3} - \frac{7}{2}d\frac{\dot{a}}{a} = 8\pi\frac{1}{a^2}T_{**}, \quad (4.18)$$

### 4.2.1. Constante Cosmológica a partir de no metricidad

En la sección anterior hemos implementado homogeneidad e isotropía en las ecuaciones resultantes, es decir, en  $G_{(ab)}$ , y lo hemos escrito en las variables de  $C^c_{ab}$ . Estas ecuaciones ya con homogeneidad e isotropía, suelen estudiarse, sobre todo la ecuación de la aceleración (4.18) para ver si el contenido extra obtenido al utilizar una teoría tipo MAG puede generar aceleración [29]. Nosotros, más allá de generar aceleración, queremos generar constante cosmológica, por lo tanto necesitamos demandarle a los términos extra que se comporten como tal.

Trabajando con campos podríamos elegir aquellas acciones de materia que nos lleven a que los términos extras son proporcionales a la métrica. Sin embargo, al entrar en el contexto cosmológico se necesita algún tipo de teoría efectiva, como sucede en la cosmología estándar donde se trabaja con fluidos. La forma más sencilla de imponer esta nueva condición con el desarrollo ya llevado a cabo es ir al tensor de Einstein y notar que tiene la forma

$$G_{(ab)} = \tilde{G}_{ab} + \alpha_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}\hat{\alpha}, \quad (4.19)$$

donde

$$\alpha_{ab} = -\left(\tilde{\nabla}_a\lambda_b - \tilde{\nabla}_d C^d_{ab}\right) + C^g_{ab}\lambda_g - C^g_{hb}C^h_{ag}, \quad (4.20)$$

$$\hat{\alpha} = \alpha_{ab}g^{ab}, \quad (4.21)$$

con lo cual, lo único que hay que demandar para tener constante cosmológica es que

$$\alpha_{ab} = \alpha g_{ab}, \quad (4.22)$$

con  $\alpha$  alguna función a determinar. Tomando las dos componentes independientes que hay en (4.22) obtenemos,

$$\alpha_{tt} = -\alpha, \quad (4.23)$$

$$\alpha_{**} = a^2\alpha. \quad (4.24)$$

Despejando  $\alpha$  de cada una de las ecuaciones e igualando llegamos la condición que necesitamos,

$$-\alpha_{tt} = \frac{\alpha_{**}}{a^2}, \quad (4.25)$$

y entonces tenemos,

$$\alpha_{ab} = -\alpha_{tt}g_{ab}. \quad (4.26)$$

Habiendo determinado que forma tiene  $\alpha_{ab}$  podemos determinar  $\hat{\alpha}$ ,

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= -\alpha_{tt} + \frac{3}{a^2}\alpha_{**} \\ &= -4\alpha_{tt},\end{aligned}$$

con lo cual el tensor de Einstein, queda como,

$$\begin{aligned}G_{(ab)} &= \tilde{G}_{ab} - \alpha_{tt}g_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}(-4\alpha_{tt}) \\ &= \tilde{G}_{ab} + \alpha_{tt}g_{ab},\end{aligned}$$

de donde podemos leer que

$$\Lambda = \alpha_{tt}. \quad (4.27)$$

Finalmente escribimos las condiciones anteriores en términos de las componentes de  $C_{ab}^c$ , la condición (4.25) queda como,

$$\frac{bc}{a^2} + 3bd + \frac{cd}{a^2} - 3d^2 + 4b\frac{\dot{a}}{a} + \frac{c\dot{a}}{a^3} - 5d\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{a^2} - 3\dot{d} = 0. \quad (4.28)$$

Para terminar solo necesitamos  $\Lambda$ , que queda como,

$$\Lambda = 3 \left( bd - d^2 + \frac{\dot{a}}{a} [b - 2d] - \dot{d} \right), \quad (4.29)$$

entonces las 3 ecuaciones que tenemos son,

$$\begin{aligned}3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\dot{d} + 3d^2 - 3bd + 6d\frac{\dot{a}}{a} - 3b\frac{\dot{a}}{a} &= 8\pi T_{tt}, \\ -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - 3\dot{d} - 3d^2 + 3bd - 6d\frac{\dot{a}}{a} + 3b\frac{\dot{a}}{a} &= 8\pi T_{**}, \\ \frac{bc}{a^2} + 3bd + \frac{cd}{a^2} - 3d^2 + 4b\frac{\dot{a}}{a} + \frac{c\dot{a}}{a^3} - 5d\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{a^2} - 3\dot{d} &= 0,\end{aligned}$$

donde para escribir las primeras dos ecuaciones ya hemos utilizado la tercera. Introduciendo el  $T_{ab}$  que queremos considerar por simplicidad, fluido perfecto, obtenemos,

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\dot{d} + 3d^2 - 3bd + 6d\frac{\dot{a}}{a} - 3b\frac{\dot{a}}{a} = 8\pi\rho, \quad (4.30)$$

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - 3\dot{d} - 3d^2 + 3bd - 6d\frac{\dot{a}}{a} + 3b\frac{\dot{a}}{a} = 8\pi P, \quad (4.31)$$

$$\frac{bc}{a^2} + 3bd + \frac{cd}{a^2} - 3d^2 + 4b\frac{\dot{a}}{a} + \frac{c\dot{a}}{a^3} - 5d\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{a^2} - 3\dot{d} = 0, \quad (4.32)$$

Estas son las tres ecuaciones que comprendería nuestro modelo cosmológico. Por otro lado, haciendo el conteo de ecuaciones, tenemos en principio seis incógnitas,  $(a, \rho, P, b, c, d)$  y tenemos tres ecuaciones, por lo cual necesitamos suplementar el sistema con ecuaciones de estado. Si utilizamos ecuaciones de estado del tipo  $P = \omega\rho$ , tendremos, cinco incógnitas, con tres ecuaciones y lo que sería necesario a continuación sería dar ecuaciones de estado para  $b, c$  y  $d$ . Lo más intuitivo es pensar que deberían utilizarse ecuaciones de estado del estilo

$$M \propto \rho,$$

$$L \propto \rho,$$

$$P \propto \rho,$$

pues  $\Sigma_c^{ab}$  está directamente relacionada con el contenido de materia en el modelo. Como ya mencionamos es equivalente trabajar en las variables de  $\Sigma_c^{ab}$  a las de  $C_{ab}^c$ , por lo que lo más sencillo sería utilizar ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} b &\propto \rho, \\ c &\propto \rho, \\ d &\propto \rho. \end{aligned}$$

En cualquier caso, esto es imposible pues, dado que al utilizar este tipo de ecuaciones nos quedamos con tres ecuaciones, y dos incógnitas ( $a, \rho$ ), el sistema se sobredetermina y en general el sistema es inconsistente, con lo cual, no utilizaremos este tipo de ecuaciones de estado. La imposibilidad de utilizar estas ecuaciones de estado se debe al hecho de que queremos generar constante cosmológica y no solo aceleración; si solo quisiéramos generar aceleración nos quedaríamos con (4.30) y (4.31) dos ecuaciones y ( $a, \rho$ ) dos incógnitas, con lo cual sería admisible para cerrar el sistema. El tipo de ecuaciones de estado que son admisibles para nuestro modelo son aquellas en las que las variables de  $\Sigma_c^{ab}$  y  $C_{ab}^c$  se relacionan entre sí, por ejemplo

$$\begin{aligned} b &= \omega_{bc}c, \\ d &= \omega_{dc}c, \end{aligned}$$

siendo  $\omega_{bc}$  y  $\omega_{dc}$  constantes de proporcionalidad. En este escenario tenemos tres ecuaciones (4.30), (4.31), (4.32) y tres incógnitas ( $a, b, \rho$ ), con lo cual el sistema es susceptible a tener solución única. Desde el punto de vista físico, una de las cosas importantes a considerar es que en  $\Lambda$  (4.29) hay un término que es explícitamente negativo, esto no representa un problema pues aún hay que resolver (4.32), además de considerar la contribución de otros términos en  $\Lambda$  y la susceptibilidad a las condiciones iniciales que pueda haber.

Con lo dicho anteriormente ya tenemos el escenario matemático para atacar el sistema y los modelos correspondientes tenemos un sistema de 3 ecuaciones diferenciales acopladas y no lineales, suplementado con tres ecuaciones de estado para tres incógnitas,

$$\begin{aligned} 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\dot{d} + 3d^2 - 3bd + 6d\frac{\dot{a}}{a} - 3b\frac{\dot{a}}{a} &= 8\pi\rho, \\ -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - 3\dot{d} - 3d^2 + 3bd - 6d\frac{\dot{a}}{a} + 3b\frac{\dot{a}}{a} &= 8\pi P, \\ \frac{bc}{a^2} + 3bd + \frac{cd}{a^2} - 3d^2 + 4b\frac{\dot{a}}{a} + \frac{c\dot{a}}{a^3} - 5d\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{a^2} - 3\dot{d} &= 0. \end{aligned}$$

Con el sistema bien planteado, idealmente lo que buscamos encontrar es algún modelo, es decir, alguna ecuación de estado que nos lleve a una constante cosmológica que crezca a lo largo de la historia cosmológica y se sature a día de hoy, y, por otro lado, que la componente representativa del hipermomento, que aquí denotamos por  $\sigma$ , se diluya conforme avanza la historia cosmológica. En la Figura 4.1 mostramos el comportamiento ideal que buscamos encontrar en algún modelo, que es una constante cosmológica que se sature a lo largo de la historia cosmológica, llegando al valor que observamos el día de hoy, y por otro lado, queremos que las componentes de  $C_{ab}^c$  o equivalentemente las de  $\Sigma_c^{ab}$ , se diluyan a lo largo de la historia cosmológica, esto es lo que se esperaría pues el universo está expandiéndose, de lo contrario tendríamos que materia que no tiene  $\Sigma_c^{ab}$  lo adquiere por algún mecanismo.

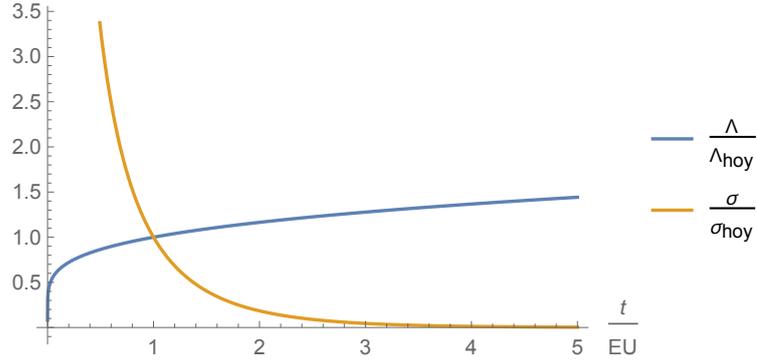


Figura 4.1: Comportamiento ideal.

En la Figura 4.1 hemos abreviado la edad del universo como  $EU$  y al considerar el cociente hemos tomado la edad del universo como la escala representativa. Como se puede ver, buscamos que la constante cosmológica tienda al valor que observamos hoy, en la figura, tenemos al cociente  $\Lambda/\Lambda_{hoy}$  saturándose a la unidad, mientras que por otro lado queremos que las otras variables, en este caso  $\sigma$ , se diluya tendiendo a cero.

### 4.3. Desarrollo perturbativo

Las ecuaciones (4.30), (4.31) y (4.32) son ecuaciones diferenciales acopladas y no lineales, por lo que en general no tenemos un método para resolverlas analíticamente. Una forma de proceder es buscar ecuaciones de estado para  $b$ ,  $c$  y  $d$ , que consigan simplificar y en el mejor de los casos incluso desacoplar el sistema, sin embargo, tras varios intentos en los cuales aplicar dichas ecuaciones de estado lleva a sobresimplificar el problema, concluimos que no es una forma fructífera de atacar el problema. Por otro lado, la teoría de perturbaciones es bastante útil a la hora de extraer información o predicciones en algún régimen de validez. En vista de la incapacidad para resolver el sistema de forma exacta recurriremos a un esquema perturbativo en el cual la solución a orden cero sea la que conocemos de Relatividad General. También existe la posibilidad de un desarrollo numérico, no hemos tomado el desarrollo numérico como objetivo principal de este trabajo pues esperamos que se complique bastante debido a las escalas involucradas, de cualquier forma, del esquema perturbativo podemos extraer bastante información respecto a lo que pueden ofrecer estos modelos.

En concordancia con la Figura 4.1, perturbativamente buscaríamos encontrar un modelo que haga lo presentado en la Figura 4.2, y básicamente es, que alrededor del día de hoy, los valores obtenidos para el cociente de la constante cosmológica  $\Lambda/\Lambda_{hoy}$  estén alrededor de la unidad, mientras que  $\sigma$  cruza y decrece, esto se sigue pues ambas curvas pasan por el punto  $(1, 1)$  al ser cantidades ponderadas por su valor al día de hoy. Debemos tener claro que, dado que tomamos una expansión perturbativa existe una ventana temporal de validez. Al tratarse de un esquema perturbativo, esperaríamos que en la región de validez temporal el cociente de la constante cosmológica sea básicamente una recta con pendiente cero o ligeramente positiva. Mientras que el comportamiento para el cociente de  $\sigma$  sea el de una recta con pendiente negativa. De esta forma es más fácil ver si un modelo es prometedor en cuanto a nuestros requerimientos físicos. Notar también que el punto al rededor del cual queremos realizar la expansión perturbativa es el de  $t_{hoy} = 1EU$ .

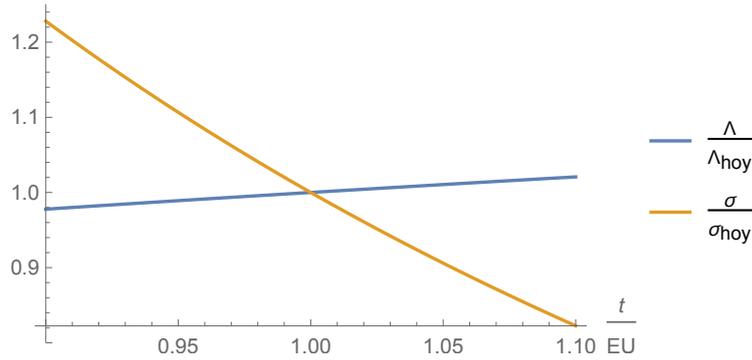


Figura 4.2: Comportamiento ideal.

Para llevar a cabo la expansión perturbativa utilizamos un parámetro de control  $\epsilon$  sobre el cual hacer la expansión perturbativa, de esta forma, escribimos las incógnitas en términos de una parte a orden cero y una parte a orden uno como sigue,

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \epsilon a_1, \\ \rho &= \rho_0 + \epsilon \rho_1, \\ P &= P_0 + \epsilon P_1 \\ b &= b_0 + \epsilon b_1, \\ c &= c_0 + \epsilon c_1, \\ d &= d_0 + \epsilon d_1, \end{aligned}$$

donde para poder empatar con lo conocido de Relatividad General necesitamos que,

$$\begin{aligned} b_0 &= 0, \\ c_0 &= 0, \\ d_0 &= 0, \end{aligned}$$

de esta forma, las ecuaciones a orden cero en  $\epsilon$  son,

$$\begin{aligned} 3 \frac{\dot{a}_0^2}{a_0^2} &= 8\pi \rho_0, \\ -2 \frac{\ddot{a}_0}{a_0} - \frac{\dot{a}_0^2}{a_0^2} &= 8\pi P_0, \end{aligned}$$

que es el sistema que ya sabemos resolver de Relatividad General, cuando se le suplementa con la ecuación de estado correspondiente.

Mientras que las ecuaciones a orden uno en  $\epsilon$  son,

$$6\frac{\dot{a}_1\dot{a}_0}{a_0^2} - 6\frac{a_1\dot{a}_0^2}{a_0^3} - 3\left(-\dot{d}_1 + \frac{\dot{a}_0}{a_0}[b_1 - 2d_1]\right) = 8\pi\rho_1, \quad (4.33)$$

$$2\left(\frac{a_1\dot{a}_0^2}{a_0^3} - \frac{\dot{a}_1\dot{a}_0}{a_0^2} + \frac{a_1\ddot{a}_0}{a_0^2} - \frac{\ddot{a}_1}{a_0}\right) + 3\left(-\dot{d}_1 + \frac{\dot{a}_0}{a_0}[b_1 - 2d_1]\right) = 8\pi P_1, \quad (4.34)$$

$$\dot{c}_1 + c_1\frac{\dot{a}_0}{a_0} + a_0\dot{a}_0(4b_1 - 5d_1) - 3a_0^2\dot{d}_1 = 0, \quad (4.35)$$

con lo cual, la constante cosmológica del modelo solo está presente a orden uno en  $\epsilon$  y toma la siguiente forma,

$$\Lambda = 3\left(-\dot{d}_1 + \frac{\dot{a}_0}{a_0}[b_1 - 2d_1]\right). \quad (4.36)$$

Para resolver el sistema a orden uno necesitamos primero obtener  $a_0$ , tomaremos el resultado de Relatividad General,

$$a_0 = Ct^{\frac{2}{3(\omega+1)}}, \quad (4.37)$$

con  $\omega$  sin determinar por ahora.

De esta forma podemos usar este (4.37) para introducirla en (4.35) y con la ecuación de estado correspondiente entre  $b$ ,  $c$  y  $d$  podemos resolver finalmente (4.35) para alguna de las componentes de  $C^c_{ab}$  a orden uno en  $\epsilon$ , y gracias a las ecuaciones de estado se resuelve para las tres componentes.

Ya con la solución para las componentes de  $C^c_{ab}$  podemos obtener explícitamente  $\Lambda$  dado por (4.36) y con esto resolver (4.33) y (4.34) para  $a_1$  y  $\rho_1$ , con lo cual, el sistema quedaría resuelto en el esquema perturbativo. Como en cualquier esquema perturbativo el formalismo es válido hasta que la perturbación, en este caso  $a_1$ , es mucho menor que  $a_0$ .

Finalmente, necesitamos condiciones iniciales para  $a_1$  y para alguna de las componentes de  $C^c_{ab}$ . Escogemos las condiciones como sigue, utilizando (4.36) escogemos la condición inicial de la componente libre de  $C^c_{ab}$  para ajustar el valor de la constante cosmológica hoy. Por otro lado, para  $a_1$  no escogemos condiciones iniales como tal sino que le demandamos condiciones en los extremos, esto es, pedimos que  $a_1(t_{hoy}) = 0$ , esto es para que la condición de  $a(t_{hoy}) = 1$  se satisfaga desde el orden cero, también demandamos que  $a_1(t = 0) = 0$ , con lo cual tenemos big bang en  $t = 0$  todo orden.

## 4.4. Ecuaciones de Estado

En esta sección analizamos tres ecuaciones de estado y resolvemos para las perturbaciones correspondientes. Consideramos tres escenarios que se corresponden con tres elecciones diferentes de  $\omega$ , es decir, la ecuación de estado  $P = \omega\rho$ . Consideraremos, polvo  $\omega = 0$ , radiación  $\omega = 1/3$  y finalmente utilizamos  $\omega$  para ajustar el valor de  $H_{hoy}$ . Físicamente, en los dos primeros escenarios tendríamos un universo lleno de polvo y radiación, sin embargo, es polvo y radiación que al mismo tiempo genera  $\Sigma_c^{ab}$ . Sabemos que el universo en el que vivimos ha estado dominado por materia y en otra época por radiación, por lo que en estos escenarios no pretendemos recrear la historia de nuestro universo, queremos analizar el comportamiento extra que se obtiene al tener  $\Sigma_c^{ab}$ , y si esto genera constante cosmológica. En el último escenario, donde ajustamos el valor de  $H$ , estaríamos considernado una ecuación de estado efectiva, pues como ya mencionamos el universo ha estado dominado tanto por radiación como por materia y hoy en día, según la cosmología estándar por la constante cosmológica, con lo cual, utilizamos  $\omega$  para tener una ecuación de estado que tome en cuenta de manera efectiva todo este comportamiento.

Finalmente, introducimos algunas de las convenciones que se utilizarán a lo largo de este capítulo. Así como se definió  $H$  en (4.12), definimos su contraparte a orden cero,

$$H_0 = \frac{\dot{a}_0}{a_0}, \quad (4.38)$$

no confundir con la notación para el valor del parámetro de Hubble hoy,  $H_{hoy}$ . Recordemos que la solución que tenemos para  $a_0$  que utilizaremos es

$$a_0 = Ct^\gamma, \quad (4.39)$$

con

$$\gamma = \frac{2}{3(1+\omega)}, \quad (4.40)$$

siendo  $\omega$  la constante de proporcionalidad entre  $\rho$  y  $P$ ,

$$P = \omega\rho. \quad (4.41)$$

Con lo cual,

$$H_0 = \gamma \frac{1}{t}. \quad (4.42)$$

Como podemos ver podemos escoger  $\gamma$  para que  $H_0$  tome el valor que observamos de  $H_{hoy}$ , como mencionabamos.

#### 4.4.1. Ecuaciones de estado anulando componentes

Una de las opciones más sencillas al considerar ecuaciones de estado para  $b$ ,  $c$  y  $d$  es hacerlas igual a cero por pares. En principio, estas son tres ecuaciones de estado, sin embargo, al introducirlas en la ecuación (4.28), podemos ver que se trivializan, es decir, (4.28) implica que la componente no ajustada a cero en un principio, es cero. Con lo cual, se pierde cualquier ambigüedad y solo tenemos una ecuación de estado, que es,

$$\begin{aligned} b &= 0, \\ c &= 0. \end{aligned}$$

Introduciendo las ecuaciones de estado en (4.33), (4.34) y (4.35) y, simplificando esta última obtenemos,

$$6 \frac{\dot{a}_1 \dot{a}_0}{a_0^2} - 6 \frac{a_1 \dot{a}_0^2}{a_0^3} + 3 \left( \dot{d}_1 + 2 \frac{\dot{a}_0}{a_0} d_1 \right) = 8\pi\rho_1, \quad (4.43)$$

$$2 \left( \frac{a_1 \dot{a}_0^2}{a_0^3} - \frac{\dot{a}_1 \dot{a}_0}{a_0^2} + \frac{a_1 \ddot{a}_0}{a_0^2} - \frac{\ddot{a}_1}{a_0} \right) - 3 \left( \dot{d}_1 + 2 \frac{\dot{a}_0}{a_0} d_1 \right) = 8\pi P_1, \quad (4.44)$$

$$\dot{d}_1 + \frac{5}{3} H_0 d_1 = 0. \quad (4.45)$$

Usando (4.42) podemos resolver (4.45) para  $d_1$ , la solución es

$$d_1 = d_1^0 t^{-\frac{5\gamma}{3}}, \quad (4.46)$$

siendo  $d_1^0$  una constante de integración, nos referiremos a ella tanto como constante de integración como condición inicial. Notar que en la forma explícita de  $d_1$  intervienen directamente dos cosas,

la más clara de ellas es el valor de  $\gamma$ , que como puede verse aparece en el exponente. La otra de ellas es la ecuación de estado, la ecuación de estado determina el factor de  $5/3$  que aparece tanto en (4.45) así como en el exponente.

Como se mencionó anteriormente, la constante de integración  $d_1^0$  la escogeremos de tal forma que se ajuste el valor de la constante cosmológica observada hoy,  $\Lambda_{hoy}$ , esto podemos hacerlo pues tenemos una expresión para  $\Lambda$ , (4.36), a la cual, después de utilizar la ecuación de estado queda como

$$\Lambda = -3 \left( \dot{d}_1 + 2H_0 d_1 \right), \quad (4.47)$$

que utilizando (4.46) y (4.42) puede reescribirse como

$$\Lambda = -\gamma \frac{d_1}{t}. \quad (4.48)$$

Hay varias cosas para notar en (4.48), una de ellas es la evidente dependencia en  $\gamma$  además de la que tenemos vía  $d_1$ . Por otro lado, podemos ver que, si  $d_1$  se diluye al avanzar la historia cosmológica, que es algo que físicamente esperaríamos, entonces,  $\Lambda$  se diluye más rápido, que es lo contrario a lo que esperamos físicamente.

### Polvo

Para el caso de polvo, por definición, tenemos que

$$\omega = 0, \quad (4.49)$$

$$\gamma = \frac{2}{3}, \quad (4.50)$$

$$(4.51)$$

como hemos dicho esto repercute en el comportamiento de  $d_a$ , obteniendo

$$d_1 = d_1^0 t^{-\frac{10}{9}}, \quad (4.52)$$

físicamente tenemos el comportamiento deseado,  $d_1$  se diluye conforme avanza la historia cosmológica. Por otro lado,

$$\Lambda = -\frac{2}{3} d_1^0 t^{-\frac{19}{9}}. \quad (4.53)$$

Podemos notar que  $\Lambda$ , en concordancia con (4.48) se diluye más rápido que  $d_1$ .

Como ya se ha mencionado en los preliminares a esta sección, usaremos la constante de integración,  $d_1^0$  para ajustar el valor de  $\Lambda_{hoy}$ , con esto determinamos que se debe cumplir que,

$$d_1^0 = -\frac{3}{2} \Lambda_{hoy}. \quad (4.54)$$

Reintroduciendo, finalmente obtenemos,

$$d_1 = -\frac{3}{2} \Lambda_{hoy} t^{-\frac{10}{9}}, \quad (4.55)$$

$$\Lambda = \Lambda_{hoy} t^{-\frac{19}{9}}. \quad (4.56)$$

Con el primer paso llevado a cabo y habiendo determinado las constantes de integración adecuadas, podemos proceder a resolver lo que resta del sistema y obtener  $a_1$ . Resolviendo para  $a_1$  obtenemos la siguiente solución general,

$$a_1 = -\frac{81}{16} \Lambda_{hoy} t^{\frac{5}{9}} + C_1 t^{\frac{2}{3}} + C_2 t^{-\frac{1}{3}}, \quad (4.57)$$

como podemos ver, la solución para  $a_0$  y la sencillez de las ecuaciones de estado han heredado el comportamiento de potencia a todas las soluciones en el esquema perturbativo.

Imponiendo las condiciones discutidas, obtenemos la forma funcional siguiente

$$a_1 = \Lambda_{\text{hoy}} \frac{81}{16} \left[ -t^{\frac{5}{9}} + t^{\frac{2}{3}} \right]. \quad (4.58)$$

Podemos graficar los objetos en cuestión para el modelo que son,  $\Lambda/\Lambda_{\text{hoy}}$ ,  $d_1/d_{1\text{hoy}}$  y  $a_1$ .

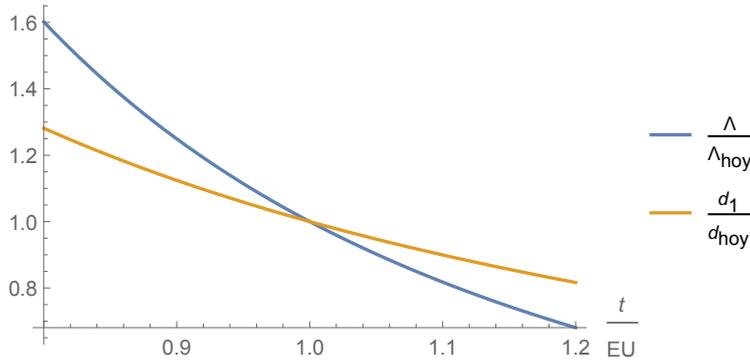


Figura 4.3: Modelo resultante con polvo.

Como podemos ver en la Figura 4.3 y como hemos adelantado, lo que sucede es que, si bien tenemos el espacio de parámetros suficiente para ajustar el valor de  $\Lambda_{\text{hoy}}$ , las expresiones nos indican que tenemos una constante cosmológica que se diluye al avanzar el tiempo cosmológico, y se diluye a un ritmo más rápido al que se diluye  $d_1$ . Con lo cual tenemos un modelo que ajusta los parámetros, en este caso  $\Lambda_{\text{hoy}}$ , pero por otro lado no reproduce lo que esperaríamos idealmente de un modelo que genere constante cosmológica.

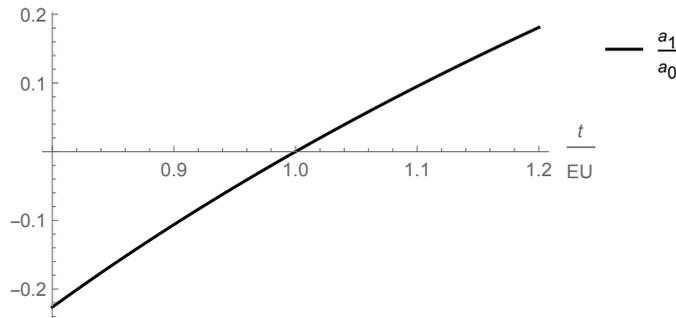


Figura 4.4: Validez de la expansión perturbativa.

Por otro lado, respecto al periodo de tiempo en el cual es válida la expansión perturbativa, tenemos que, graficando el cociente  $a_1/a_0$ , esto es debido a que, las componentes de  $C_{ab}^c$  solo tienen componente a orden uno, con lo cual no hay con que compararlas a orden cero. Por otro lado tanto  $P_1$  como  $\rho_1$  se obtienen a partir de las otras cantidades, como son,  $a_0$  y  $a_1$ , así como las componentes de  $C_{ab}^c$  con lo cual basta con fijarse en lo que sucede con  $a_1$  y en concreto en lo

que sucede con el cociente ya mencionado. Podemos ver en la Figura ?? que el comportamiento es prácticamente lineal alrededor de  $t_{hoy}$ , con lo cual, si consideramos un factor de  $10^{-3}$  para confiar en la expansión perturbativa, podemos asegurar que la expansión es válida hasta un  $\delta t$  de  $10^{-3}EU$ , que son 130000 años.

Independientemente del  $\delta t$  en el cual la expansión es válida, la forma en que se cruzan las curvas en la Figura 4.3 nos indica que al menos este modelo no reproduce el comportamiento físico que buscamos. A continuación consideramos un  $a_0$  de radiación, para ver si de esta forma conseguimos un comportamiento más cercano al buscado.

### Radiación

Dado que el modelo anterior no reproduce el comportamiento físico que buscamos y, dado que como hemos dicho el valor de  $\Gamma_{ab}^c$  es crucial, pues repercute en la forma funcional de  $d_1$  y, por lo tanto de  $\Lambda$  es natural comenzar por modificar el valor de  $\gamma$ . Después del polvo, lo más familiar sería probar con radiación y es lo que haremos a continuación.

Sabemos que la ecuación de estado que describe a un gas de radiación es,

$$\omega = \frac{1}{3}, \quad (4.59)$$

$$\gamma = \frac{1}{2}, \quad (4.60)$$

con lo cual, sustituyendo en (4.46) y en (4.48) obtenemos las funciones,

$$d_1 = d_1^0 t^{-\frac{5}{6}}, \quad (4.61)$$

$$\Lambda = -\frac{1}{2} d_1^0 t^{-\frac{11}{6}}. \quad (4.62)$$

Determinamos  $d_a^0$  de la forma ya discutida, esto es, de tal forma que reproduzcamos el valor de la constante cosmológica a día de hoy y reintroduciendo conseguimos,

$$d_1 = -2\Lambda_{hoy} t^{-\frac{5}{6}}, \quad (4.63)$$

$$\Lambda = \Lambda_{hoy} t^{-\frac{11}{6}}. \quad (4.64)$$

De nuevo queda explícito que la constante cosmológica se diluye más rápido que  $d_1$ . De igual forma ya con las expresiones de  $\Lambda$  y  $d_1$  podemos proceder a resolver para  $a_1$ . La solución para  $a_1$ , ya con las condiciones discutidas en los extremos es,

$$a_1 = \frac{24}{7} \Lambda_{hoy} \left( -t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{2}{3}} \right). \quad (4.65)$$

Podemos graficar las cantidades para que quede patente el comportamiento de las cantidades en juego. Comenzando con los cocientes de  $\Lambda$  y  $d_1$ , que podemos ver en la Figura 4.5, el comportamiento es cualitativamente igual a lo presentado en la Figura 4.3. Básicamente tenemos que, de nueva cuenta, la expresión de  $\Lambda$  es incapaz de mantenerse saturada y se diluye incluso más rápido que  $d_1$ . Como se mencionó esto es resultado de lo que se expresa en la ecuación (4.48).

Por otro lado, podemos de nuevo considerar el cociente  $a_1/a_0$  para tener en cuenta el rango de validez de la expansión perturbativa. Graficando dicho cociente para este caso, como se muestra en la Figura 4.6, sucede que también tenemos una situación análoga al modelo anterior que se presenta en la Figura 4.4. Obtenemos rango de validez similar al caso de polvo. Una vez más, independientemente del rango de validez obtenemos una constante cosmológica que no consigue reproducir lo que nosotros consideramos físicamente aceptable para un modelo de esta naturaleza.

Finalmente utilizaremos la libertad que estamos manejando para la ecuación de estado de  $\omega$  para ajustar a la solución a orden cero  $a_0$  el valor de  $H_{hoy}$ .

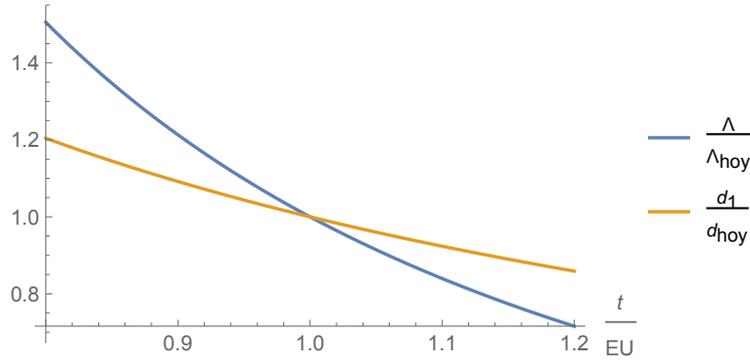


Figura 4.5: Modelo resultante para radiación.

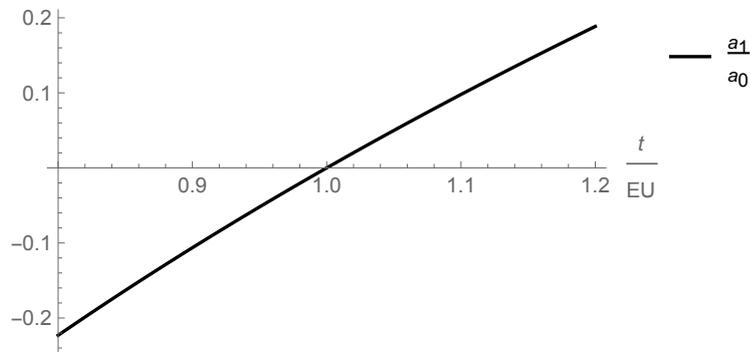


Figura 4.6: Validez de la expansión perturbativa.

### Ajustando el valor de H

Si bien en los modelos anteriores no logramos reproducir el comportamiento deseado para las cantidades físicas, si contamos con un espacio de parámetros suficiente para ajustar el valor de  $\Lambda_{hoy}$ . Por otro lado, en cada modelo estamos escogiendo el valor de  $\gamma$  o equivalentemente  $\omega$ , podemos entonces escoger el valor de  $\gamma$  de tal forma que  $H_0(t_{hoy}) = H_{hoy}$ , y de esta forma tenemos un espacio de parámetros para ajustar ambas cantidades,  $\Lambda_{hoy}$  y  $H_{hoy}$ . Esto, sumado a que el valor de  $\gamma$  es crucial para las dependencias funcionales de las cantidades involucradas, hace interesante explorar esta posibilidad, para ver si en este escenario obtenemos un comportamiento mas cercano al que buscamos.

Tenemos entonces que,

$$\gamma = H_0, \quad (4.66)$$

$$\omega = \frac{2}{3} \frac{1}{H_{hoy}} - 1. \quad (4.67)$$

$$(4.68)$$

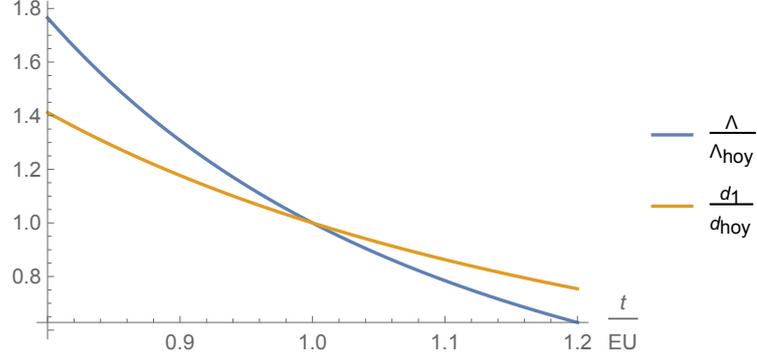


Figura 4.7: Modelo que ajusta  $H_{hoy}$ .

Como en los modelos anteriores, obtenemos las expresiones para  $d$  y  $\Lambda$ , que son,

$$d_1 = d_1^0 t^{-\frac{5H_{hoy}}{3}}, \quad (4.69)$$

$$\Lambda = -d_1^0 H_{hoy} t^{-1 - \frac{5H_{hoy}}{3}}, \quad (4.70)$$

y tomando de igual forma  $d_1^0$  para ajustar el valor de  $\Lambda_{hoy}$ , las expresiones quedan como,

$$d_1 = -\frac{\Lambda_{hoy}}{H_{hoy}} t^{-\frac{5H_{hoy}}{3}}, \quad (4.71)$$

$$\Lambda = \Lambda_{hoy} t^{-1 - \frac{5H_{hoy}}{3}}. \quad (4.72)$$

De nuevo podemos ver que el comportamiento de  $\Lambda$  no es el que buscamos, pues no permanecerá saturada. Es importante siempre recalcar que, está claro que no podemos confiar en la forma funcional explícita de las cantidades en juego pues estamos en un esquema perturbativo, sin embargo, al tratar con cocientes y con curvas que cruzan por el punto  $(1, 1)$ , la forma en que cruzan las curvas es independiente de la vecindad temporal en la que sea válido el marco de trabajo y, al tratarse de una ley de potencias podemos concluir que el modelo no es lo suficientemente prometedor como para analizarlo con mucho mayor detalle.

Podemos, como con los modelos anteriores, graficar los cocientes para que quede de manifiesto el hecho de que  $\Lambda$  para este modelo no satisface nuestros requerimientos, como se muestra en la Figura 4.7.

El siguiente paso en el marco perturbativo que hemos estado manejando es resolver para  $a_1$ . La expresión final para  $a_1$  es más complicada que en los modelos anteriores, por eso no la presentamos explícitamente en este caso, sin embargo, se sigue tratando de una ley de potencias. La razón de que sea más complicada es el conjunto de coeficientes que acompaña a dichas potencias, que ahora dependen tanto de  $\Lambda_{hoy}$  como de  $H_{hoy}$ .

Independientemente de la complicación de la forma explícita de  $a_1$  podemos considerar el cociente entre  $a_1$  y  $a_0$  para evaluar el rango de validez de la expansión perturbativa en este modelo, como se puede ver en la Figura 4.8 sucede lo que esperaríamos de un esquema perturbativo, es decir, el rango de validez no es del orden de la edad del universo, ni se rompe el esquema con alguna pendiente muy pronunciada en el cociente. Finalizamos esta sección con algunos comentarios al respecto de los tres modelos.

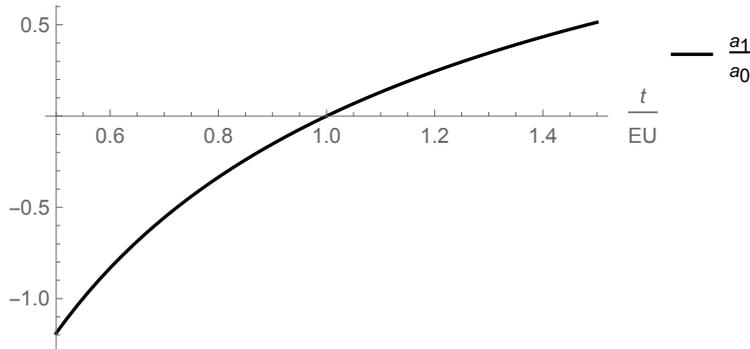


Figura 4.8: Validez de la expansión perturbativa.

En cualquiera de los tres casos podemos ver un comportamiento similar, esto es resultado de lo que se mencionó sobre (4.48). Debido al esquema perturbativo que estamos manejando, podemos conocer la forma que toma  $\Lambda$  antes de incluso resolver para  $a_1$ . De esta forma podemos ver que (4.48) nos está avisando que parece ser incompatible pedir que  $d_1$  se diluya y que  $\Lambda$  se sature, por supuesto que dado el hecho de que estamos trabajando en un esquema perturbativo, no podemos confiar en la forma funcional exacta ni de  $d_1$  ni de  $\Lambda$ , pero lo que si podemos ver, es que dicha forma funcional nos asegura que en cualquier vecindad de  $t_{hoy}$ , en la cual nos gustraría que el cociente  $\Lambda/\Lambda_{hoy}$  tendiera a la unidad, este se diluye o llenando un poco al pasado, el cociente tiende a la unidad por arriba.

En cuanto al rango de validez de la expansión perturbativa, en los tres casos tenemos un rango de validez del mismo orden de magnitud, que si bien es una fracción de la historia cosmológica. Al margen de esto, por la forma en como hemos planteado el problema, poniendo énfasis en la forma en como se cruzan las curvas de los cocientes de  $\Lambda$  y  $d$  podemos inferir si el modelo es prometedor con respecto a lo que nosotros consideramos aceptable para estos modelos.

Es importante mencionar que dado que estos modelos están poco motivados, pues son resultado de hacer igual a cero tanto  $c$  como  $d$  por definición, puede ser el caso que (4.48) solo sea resultado de una anomalía al hacer de forma artificial estas componentes iguales a cero. Por eso a continuación estudiaremos modelos mejor motivados resultado de restringir la geometría, en concreto la no metricidad.

#### 4.4.2. No metricidad sin trazas

Las primeras ecuaciones de estado que hemos presentado son lo más sencillo que se puede intentar para obtener algún modelo. Sin embargo, no tienen mayor motivación que simplificar el problema y ganar intuición respecto a lo que los modelos podrían ofrecer. Modelos mejor motivados se encuentran al considerar constricciones sobre la geometría, pues restringiendola también podemos reducir el número de componentes independientes de  $Q_{abc}$  o equivalentemente de  $C^c_{ab}$ . Por ejemplo, la no metricidad tiene dos trazas, como se mencionó en los preliminares matemáticos. Si demandamos que esas dos trazas sean iguales a cero, la no metricidad  $Q_{abc}$  y  $C^c_{ab}$  se quedan solo con una componente independiente, la cual podemos determinar utilizando (4.32), y posteriormente resolver el sistema perturbativo. Lo primero que podemos notar es que, pedir que las dos trazas de  $Q_{abc}$  sean cero es equivalente a pedir que las trazas de  $C^c_{ab}$  sean cero,

pues,

$$Q_a = 2\lambda_a, \quad (4.73)$$

$$\hat{Q}_c = \tau_c + \lambda_c, \quad (4.74)$$

con lo cual es fácil leer que las ecuaciones de estado en componentes son

$$c = -a^2 d, \quad (4.75)$$

$$b = -3d. \quad (4.76)$$

Es importante notar que ahora las ecuaciones de estado dependen de  $a$ , que es susceptible a la expansión perturbativa, con lo cual, para evitar complicaciones, primero usaremos las ecuaciones de estado (4.75) y (4.76) en (4.30), (4.31) y (4.32) para después realizar la expansión perturbativa. Introduciendo las ecuaciones de estado, obtenemos,

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\left[\dot{d} + 4d^2 + 5\frac{\dot{a}}{a}d\right] = 8\pi\rho, \quad (4.77)$$

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - 3\left[\dot{d} + 4d^2 + 5\frac{\dot{a}}{a}d\right] = 8\pi P, \quad (4.78)$$

$$\dot{d} + \frac{5}{2}d^2 + 5\frac{\dot{a}}{a}d = 0. \quad (4.79)$$

Donde la constante cosmológica queda dada por,

$$\Lambda = -3\left[\dot{d} + 4d^2 + 5\frac{\dot{a}}{a}d\right], \quad (4.80)$$

es importante notar que si utilizamos (4.79) para reescribir  $\Lambda$ , obtenemos,

$$\Lambda = -\frac{9}{2}d^2, \quad (4.81)$$

obtenemos una constante cosmológica explícitamente negativa.

Si quisieramos resolver el sistema perturbativamente, las ecuaciones a orden uno en  $\epsilon$  son,

$$6\frac{\dot{a}_1\dot{a}_0}{a_0^2} - 6\frac{a_1\dot{a}_0^2}{a_0^3} + 3\left(\dot{d}_1 + 5\frac{\dot{a}_0}{a_0}d_1\right) = 8\pi\rho_1, \quad (4.82)$$

$$2\left(\frac{a_1\dot{a}_0^2}{a_0^3} - \frac{\dot{a}_1\dot{a}_0}{a_0^2} + \frac{a_1\ddot{a}_0}{a_0^2} - \frac{\ddot{a}_1}{a_0}\right) - 3\left(\dot{d}_1 + 5\frac{\dot{a}_0}{a_0}d_1\right) = 8\pi P_1, \quad (4.83)$$

$$\dot{d}_1 + 5H_0d_1 = 0. \quad (4.84)$$

Podemos ver que a orden  $\epsilon$  el modelo no genera constante cosmológica. Este modelo, al primer orden perturbativo no genera constante cosmológica y genera constante cosmológica negativa no perturbativamente.

#### 4.4.3. No metricidad de Weyl

En cuatro dimensiones la expresión para la no metricidad de Weyl queda como,

$$Q_{abc} = \frac{1}{4}Q_a g_{bc},$$

al tener homogeneidad e isotropía, podemos escribir la no metricidad como sigue,

$$Q_{abc} = Au_agbc, \quad (4.85)$$

siendo  $u_a$  la velocidad de los observadores comóviles. Si demandamos que la no metricidad se comporte como una no metricidad de Weyl también conseguimos que las componentes  $Q_{abc}$  como de  $C^c_{ab}$ .

Al demandar que se satisfaga (4.85) obtenemos las siguientes identidades,

$$b = -\frac{A}{2}, \quad (4.86)$$

$$c = -a^2 \frac{A}{2}, \quad (4.87)$$

$$d = -\frac{A}{2}, \quad (4.88)$$

donde ahora podemos ver explícitamente que hay una sola componente independiente. Por simplicidad trabajaremos ahora solo con  $A$ . Introduciendo en (4.30), (4.31) y (4.32), obtenemos,

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{3}{2}\left[\dot{A} + \frac{\dot{a}}{a}A\right] = 8\pi\rho, \quad (4.89)$$

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3}{2}\left[\dot{A} + \frac{\dot{a}}{a}A\right] = 8\pi P, \quad (4.90)$$

$$\dot{A} - \frac{\dot{a}}{a}A + \frac{A^2}{2} = 0. \quad (4.91)$$

Ahora las ecuaciones a orden  $\epsilon$  quedan como

$$6\frac{\dot{a}_1\dot{a}_0}{a_0^2} - 6\frac{a_1\dot{a}_0^2}{a_0^3} - \frac{3}{2}\left(\dot{A}_1 + H_0A_1\right) = 8\pi\rho_1, \quad (4.92)$$

$$2\left(\frac{a_1\dot{a}_0^2}{a_0^3} - \frac{\dot{a}_1\dot{a}_0}{a_0^2} + \frac{a_1\ddot{a}_0}{a_0^2} - \frac{\ddot{a}_1}{a_0}\right) + \frac{3}{2}\left(\dot{A}_1 + H_0A_1\right) = 8\pi P_1, \quad (4.93)$$

$$\dot{A}_1 - H_0A_1 = 0. \quad (4.94)$$

Podemos resolver para  $A_1$  utilizando (4.94), obteniendo

$$A_1 = A_1^0 t^\gamma. \quad (4.95)$$

Notar que  $a_0$  y  $A_1$  tienen la misma dependencia funcional en  $t$ . Con lo cual para  $\omega$  o  $\gamma$  de polvo o radiación, tendremos que  $A_1$  no se diluye como físicamente nos gustaría. Calculando  $\Lambda$  con  $A_1$ , se obtiene

$$\Lambda = 3\gamma\frac{A_1}{t}, \quad (4.96)$$

donde podemos ver que de igual forma  $\Lambda$  crece más lento que  $A_1$  o decrece más rápido  $\Lambda$  que  $A_1$ . A pesar de que sabemos que  $A_1$  no será capaz de reproducir nuestra idea preconcebida sobre su comportamiento, quizás dicha idea es la que nos impide conseguir el comportamiento adecuado para  $\Lambda$  por ello es bueno indagar en estos modelos, donde a diferencia de los primeros modelos estudiados, la correspondiente variable de  $C^c_{ab}$  crece. Dicho lo anterior, pasamos a considerar de nueva cuenta los tres modelos que tomamos en el primer conjunto de modelos.

### Polvo

Para el caso de polvo, de nueva cuenta tenemos,

$$\omega = 0, \quad (4.97)$$

$$\gamma = \frac{2}{3}. \quad (4.98)$$

Consideraremos las mismas condiciones iniciales que con los primeros modelos, pues no estamos interesados en hacer una exploración con respecto a los valores iniciales. Con las condiciones ya impuestas para  $A_1$  y  $\Lambda$  tenemos,

$$A_1 = \frac{1}{2}\Lambda_{\text{hoy}}t^{\frac{2}{3}}, \quad (4.99)$$

$$\Lambda = \Lambda_{\text{hoy}}t^{-\frac{1}{3}}. \quad (4.100)$$

Como podemos ver, tenemos el comportamiento común en el que  $\Lambda$  se diluye, sin embargo, debido a (4.96) y a que en (4.95) tenemos un comportamiento radicalmente distinto al de los primeros modelos, en el que ahora  $A_1$  no se diluye, lo cual se ve reflejado en que el cociente de  $\Lambda$  tienea ahora, una pendiente menos negativa alrededor de  $t_{\text{hoy}}$ , como se puede ver en la Figura 4.9.

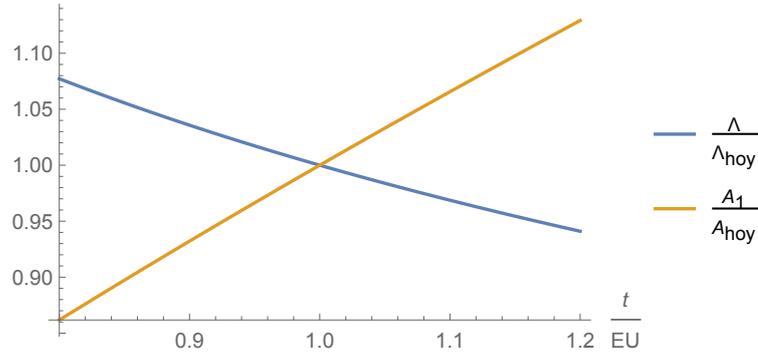


Figura 4.9: Cantidades físicas en juego.

Resolviendo para  $a_1$  obtenemos la siguiente solución general

$$a_1 = \frac{9}{80}\Lambda_{\text{hoy}}t^{\frac{7}{3}} + C_1t^{\frac{2}{3}} + C_2t^{-\frac{1}{3}}, \quad (4.101)$$

de igual forma nos quedamos con las mismas condiciones iniciales que en los primeros tres modelos, para mantener un estándar. Imponiendo las condiciones en los extremos, finalmente tenemos

$$a_1 = \frac{9}{80}\Lambda_{\text{hoy}} \left[ -t^{\frac{2}{3}} + t^{\frac{7}{3}} \right], \quad (4.102)$$

que de nuevo es una ley de potencias.

Para terminar con el modelo, consideramos el cociente  $a_1/a_0$ , para observar el rango de validez de la expansión tenemos. Lo primero a notar es que el cociente se desarrolla en un rango de un orden de magnitud menor que los primero tres modelos, con lo cual tenemos una pendiente menor alrededor de  $t_{\text{hoy}}$  y un rango de validez un orden de magnitud mayor.

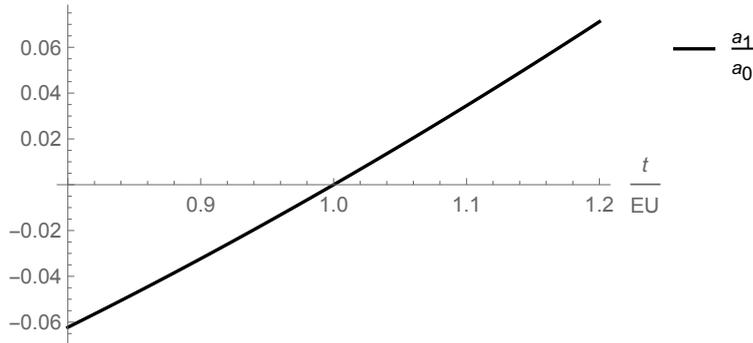


Figura 4.10: Cociente de validez de la expansión.

Desde este punto de vista y también, considerando que  $\Lambda$  se diluye más lento podemos ver que este modelo parece ser más fructífero, salvo por el hecho de que hemos renunciado a la interpretación que teníamos para las variables de  $C_{ab}^c$ . Ahora, consideraremos el caso de radiación.

#### Radiación

Recordando los valores para el caso de radiación, tenemos,

$$\omega = \frac{1}{3}, \quad (4.103)$$

$$\gamma = \frac{1}{2}, \quad (4.104)$$

lo que utilizando (4.96) y (4.95) nos lleva a las siguientes expresiones

$$A_1 = \frac{2}{3}\Lambda_{ hoy} t^{\frac{1}{2}}, \quad (4.105)$$

$$\Lambda = \Lambda_{ hoy} t^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.106)$$

en este modelo es bastante claro que  $\Lambda$  y  $A_1$  tienen una dependencia en  $t$  que cambia por una potencia en  $t$ . Desde ahora podemos asegurar que en la vecindad de  $t_{ hoy}$  las gráficas serán dos rectas con pendientes  $\pm 1/2$ , como se muestra en la Figura 4.11.

Este modelo hace las dos cosas que no buscamos, que son, una constante cosmológica que no se mantiene saturada alrededor de  $t_{ hoy}$ , así como un  $A_1$  que no se diluye.

Resolviendo para  $a_1$  obtenemos la siguiente solución con las dos constantes de integración,

$$\frac{8}{45}\Lambda_{ hoy} t^2 + C_1 t^{\frac{1}{2}} + C_2 t^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.107)$$

de nuevo aplicándole las condiciones en los extremos obtenemos,

$$a_1 = \frac{8}{45}\Lambda_{ hoy} \left[ t^2 - t^{\frac{1}{2}} \right], \quad (4.108)$$

que graficando resulta en la Figura 4.12.

De nueva cuenta podemos ver que el cociente se desarrolla en un orden de magnitud similar al modelo de polvo de no metricidad de Weyl y en un orden de magnitud menor al de los primeros tres modelos.

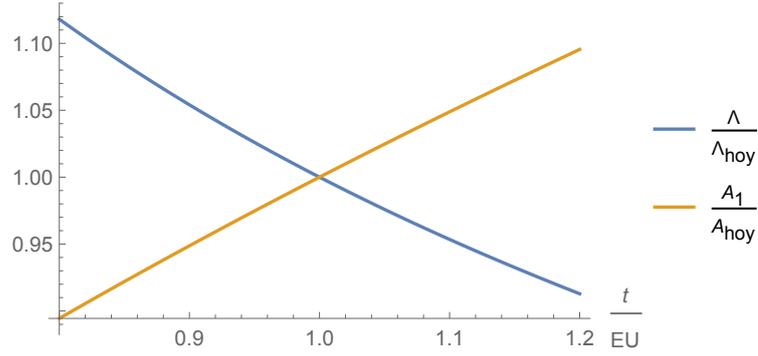


Figura 4.11: Cantidades físicas en juego.

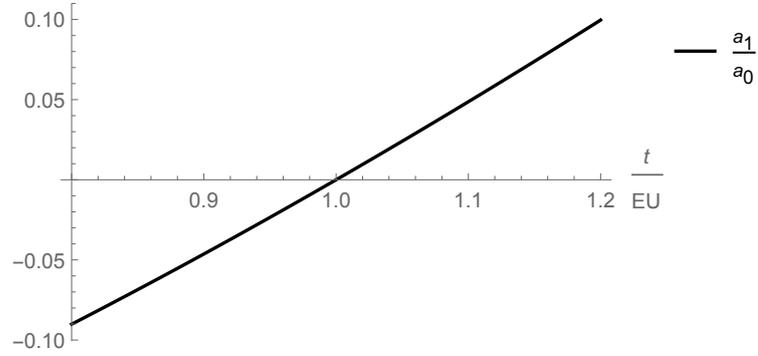


Figura 4.12: Cociente de validez de la expansión.

### Ajustando el valor de H

Finalmente, estudiamos el modelo en el cual utilizamos  $\gamma$  para que  $H_0 = H_{hoy}$ ,

$$\gamma = H_{hoy}, \quad (4.109)$$

$$\omega = \frac{2}{3H_{hoy}} - 1, \quad (4.110)$$

que nos lleva a las expresiones,

$$A_1 = \frac{\Lambda_{hoy}}{3H_{hoy}} t^{H_{hoy}}, \quad (4.111)$$

$$\Lambda = \Lambda_{hoy} t^{H_{hoy}-1}. \quad (4.112)$$

De nuevo, queda patente que la diferencia funcional entre  $\Lambda$  y  $A_1$  es una potencia de  $t$ . Sin embargo, en este caso y dado el valor de  $H_{hoy}$ , en el caso de  $\Lambda$  la potencia es cercana a cero, como puede constatarse en la Figura 4.13, tenemos un cociente de  $\Lambda$ , que en el margen graficado, es casi la recta horizontal buscada, sin embargo, sigue siendo una recta con pendiente negativa. El hecho de que sea una pendiente negativa choca con la intuición de que se ha generado una

constante cosmológica y parece ser entonces el remanente de algún otro objeto que se ha diluido en la historia cosmológica, y, por otro lado  $A_1$  tenemos que prácticamente crece de forma lineal. Con lo cual nuestra idea intuitiva de que  $A_1$  debe diluirse no se sigue y necesitamos una interpretación física para este fenómeno.

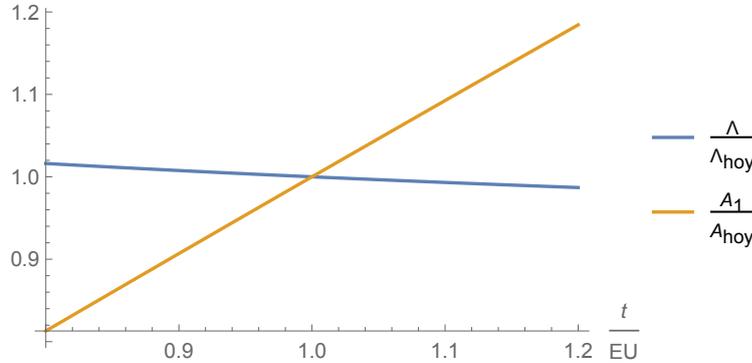


Figura 4.13: Cantidades físicas en juego.

Resumiendo lo que sucede con estos modelos de no metricidad de Weyl es que tenemos una  $A_1$  que crece, en medida que se tome  $\gamma$  y que también dependiendo de esto, obtenemos una constante cosmológica que se acerca al comportamiento que buscamos pero siempre con una pendiente contraria a lo que nos gustaría, es decir, lo hace con una pendiente negativa.

La expresión de  $a_1$  igual que el de su contraparte de los primeros modelos es bastante complicada por los coeficientes que acompañan a la ley de potencias. Sin embargo, graficamos el cociente como de costumbre en la Figura 4.14 y vemos que el comportamiento cerca de  $t_{hoy}$  es bastante similar entre todos los modelos de no metricidad de Weyl.

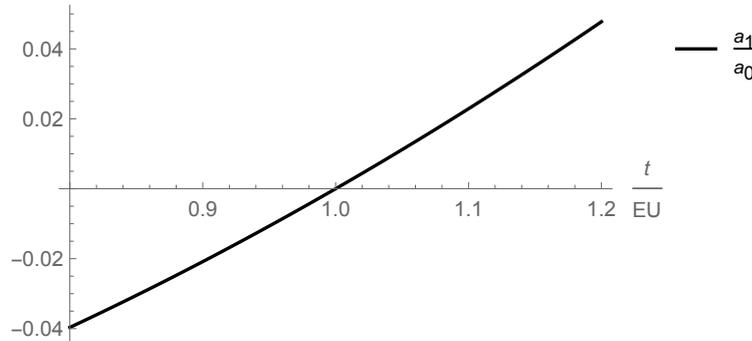


Figura 4.14: Cociente de validez de la expansión.

Como hemos recalado en los dos conjuntos de modelos de este capítulo, las soluciones perturbativas de  $\Lambda$  y la correspondiente componente de  $\Sigma_c^{ab}$  o  $C_{ab}^c$ , digamos  $d$ , satisfacen

$$\frac{\Lambda}{d} \propto \frac{1}{t}, \tag{4.113}$$

lo cual nos dice que  $\Lambda$  crece más lento que  $d$ , o que decrece más rápido que  $d$ . Desde el punto de vista físico como ya mencionamos, lo que buscamos es un modelo donde  $\Lambda$  se sature y  $d$  se diluya al avanzar en la historia cosmológica. Más allá del rango de validez de nuestra expansión perturbativa, las expresiones funcionales que obtenemos nos indican que lo que buscaríamos por intuición física no se consigue, al menos perturbativamente. El siguiente paso sería ver bajo qué condiciones se tiene un comportamiento como el que se expresa en (4.113), analizar si es un comportamiento general o mas bien, es una coincidencia que nos hemos encontrado en los modelos anteriores.

#### 4.4.4. Argumento perturbativo

Como se mostró en los modelos estudiados, hay incompatibilidad en los comportamientos físicos que buscamos en las cantidades en juego, una  $\Lambda$  que se satura y la correspondiente componente de  $C^c_{ab}$  se diluya. Esto es resultado de que en los dos conjuntos de modelos que hemos estudiado sucede lo mencionado en (4.113), que es,

$$\frac{\Lambda}{d} \propto \frac{1}{t}.$$

En esta sección analizamos qué tan generico es este comportamiento o si es un accidente de las ecuaciones de estado que hemos escogido. Lo primero que podemos notar es que el comportamiento de (4.113) puede preverse desde las expresiones de  $\Lambda$  después de hacer la expansión perturbativa y antes de resolver las ecuaciones. Recordando cómo quedan estas expresiones, tenemos

$$\Lambda = - \left( \dot{d}_1 + 2H_0 d_1 \right), \quad (4.114)$$

$$\Lambda = \frac{3}{2} \left( \dot{A}_1 + H_0 A_1 \right). \quad (4.115)$$

Lo primero que podemos notar es que en ambos casos, se tiene la derivada de la componente de  $C^c_{ab}$ , ya sea  $A_1$  o  $d_1$ , y su producto con  $H_0$ .

Vemos que hay dos cosas que determinan el comportamiento de  $\Lambda$ , una es la forma de  $H_0$  que es lo que se muestra en (4.42), con lo cual tenemos el tipo de dependencia problemática  $d_1/t$ . Por otro lado, tenemos, la derivada  $\dot{A}_1$  y  $\dot{d}_1$ , que en el caso de que  $A_1$  y  $d_1$  sean potencias volveremos al comportamiento no deseado. Por un lado, tenemos que el comportamiento de potencias es crucial, y, por otro lado, (4.114) y (4.115) son el resultado de haber escogido ciertas ecuaciones de estado y haber realizado la expansión perturbativa. Recordar que cuando las ecuaciones de estado involucran al factor de escala  $a$ , la forma de hacer la expansión perturbativa cambia pues  $a$  está sujeta a dicha expansión. Se reduce el problema a ver que ecuaciones de estado nos llevan a la forma de (4.114) o (4.115) y también nos dan una forma funcional de potencias.

Para comenzar a indagar en la cuestión consideramos las ecuaciones de estado del tipo

$$b = \beta a^B A, \quad (4.116)$$

$$c = \zeta a^\kappa A, \quad (4.117)$$

$$d = \delta a^D A, \quad (4.118)$$

notar que todos los modelos anteriores quedan englobados para ciertos valores de los parámetros libres  $\beta$ ,  $B$ ,  $\zeta$ ,  $\kappa$ ,  $\delta$ ,  $D$ .

Introduciendo esto en la expresión para  $\Lambda$ ,

$$\Lambda = 3(bd - d^2 - \dot{d}) + 3\frac{\dot{a}}{a}(b - 2d),$$

tenemos,

$$\Lambda = 3A \left[ \beta \delta a^{B+D} A - \delta^2 a^{2D} A - \delta D \dot{a} a^{D-1} + \delta a^D \frac{\dot{A}}{A} \right] + 3 \frac{\dot{a}}{a} A (\beta a^B - 2\delta a^D). \quad (4.119)$$

Haciendo la expansión perturbativa correspondiente,

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \epsilon a_1, \\ A &= \epsilon A_1, \end{aligned} \quad (4.120)$$

con lo cual, a orden  $\epsilon$  obtenemos

$$\Lambda = 3A_1 \left[ -\delta(D+2)\dot{a}_0 a_0^{D-1} + \delta a_0^D \frac{\dot{A}_1}{A_1} + \beta \dot{a}_0 a_0^{B-1} \right], \quad (4.121)$$

y donde las componentes a orden  $\epsilon$  se comportan como,

$$b_1 = \beta a_0^B A_1, \quad (4.122)$$

$$c_1 = \zeta a_0^\zeta A_1, \quad (4.123)$$

$$d_1 = \delta a_0^D A_1. \quad (4.124)$$

Ahora, utilizando que

$$a_0 = t^\alpha, \quad (4.125)$$

obtenemos,

$$b_1 = \beta t^{\alpha B} A_1, \quad (4.126)$$

$$c_1 = \zeta t^{\alpha \zeta} A_1, \quad (4.127)$$

$$d_1 = \delta t^{\alpha D} A_1, \quad (4.128)$$

y por otro lado,

$$\Lambda = 3 \left[ -\alpha(D+2) \frac{d_1}{t} + \alpha \frac{b_1}{t} + \delta t^{\alpha D} \dot{A}_1 \right]. \quad (4.129)$$

Como podemos ver de (4.129), los primeros dos términos del lado derecho tienen el comportamiento problemático. El último término es el diferente, pues involucra a la derivada de  $A_1$  y se puede constatar que (4.129) es una generalización de (4.114) y (4.115), pues en esos casos teníamos  $D = 0$ . Como ya es patente, el problema de la dilución está bastante presente, pues salvo algunos caso particulares donde se ajusten las constantes de forma específica, existirá dicha dilución. Lo único que nos impide realizar una afirmación general es el hecho de que  $\dot{A}_1$  juego un papel dentro de todo esto.

Si por ahora suponemos un comportamiento tipo potencia para  $A_1$

$$A_1 \propto t^\eta, \quad (4.130)$$

en consecuencia, podemos escribir,

$$\Lambda = 3 \left[ \frac{d_1}{t} (-(D+2)\alpha + \eta) + \frac{b_1}{t} \right], \quad (4.131)$$

y además las componentes se comportan como,

$$b_1 = \beta t^{\alpha B + \eta}, \quad (4.132)$$

$$c_1 = \zeta t^{\alpha \zeta + \eta}, \quad (4.133)$$

$$d_1 = \delta t^{\alpha D + \eta}. \quad (4.134)$$

Recordando que físicamente queremos que dichas componentes se diluyan con el pasar del tiempo, debe suceder que,

$$\alpha\beta + \rho < 0, \quad (4.135)$$

$$\alpha\kappa + \rho < 0, \quad (4.136)$$

$$\alpha D + \rho < 0. \quad (4.137)$$

En este caso queda bastante claro que  $\Lambda$  de igual forma se diluye y que de hecho se diluye más rápido por una potencia de  $t$ , que es lo que encontramos en los modelos ya estudiados. Este argumento se generaliza de forma directa para cualquier ley de potencias, polinomio o combinación de estas, siendo entonces un argumento bastante general.

Como se he venido diciendo, el comportamiento de  $A_1$  es crucial en la parte final del argumento. Dicho comportamiento queda determinado por (4.28) después de introducir las ecuaciones de estado (4.116), (4.117), (4.118) y hacer la expansión perturbativa. A pesar de todo, no hemos podido asegurar que el comportamiento (4.130) o en su defecto que un comportamiento polinómico o de combinación lineal de leyes de potencias sea algo general, sin embargo, parece ser genérico, es decir, hay que escoger una combinación muy específica y poco motivada para los coeficientes en juego. Incluso si consiguiéramos que el comportamiento de  $A_1$  fuera diferente a una ley de potencias, siempre tenemos el comportamiento problemático en  $\Lambda$  en los dos primeros términos de (4.129), lo cual hace más complicado obtener el comportamiento deseado para  $\Lambda$  pues  $A_1$  debe contrarrestar la dilución. Con lo anterior hemos argumentado que, al menos perturbativamente, los requerimientos físicos para  $\Lambda$  y las componentes parecen ser incompatibles.

Por otro lado, podemos ver que nuestros requerimientos físicos parecen ser contradictorios desde el inicio, si observamos lo que sucede con el tensor de Einstein,

$$G_{ab} = \tilde{G}_{ab} - 2\tilde{\nabla}_{[a} C^c{}_{c]b} + 2C^d{}_{[a|b|} C^c{}_{c]d} + g_{ab} g^{ef} \tilde{\nabla}_{[e} C^c{}_{c]f} - g_{ab} g^{ef} C^d{}_{[e|f|} C^c{}_{c]d},$$

cuando  $C^c{}_{ab} = 0$ , recuperamos Relatividad General, es decir,

$$G_{ab} = \tilde{G}_{ab}, \quad (4.138)$$

en donde claramente no obtenemos una constante cosmológica.

El requerimiento de que las componentes de  $C^c{}_{ab}$  se diluyan es en esencia pedir que

$$C^c{}_{ab} \longrightarrow 0, \quad (4.139)$$

con lo cual la primera impresión es que resulta incompatible una constante cosmológica que no se diluya y una conexión que si lo haga. Sin embargo, debemos tener en cuenta que en el tensor de Einstein no solo aparecen términos cuadráticos en la conexión, también aparecen derivadas, con lo cual en principio la derivada podría generar el efecto deseado. Con esto presente podemos ver que el problema es el comportamiento de potencias, pues así al tomar derivadas obtenemos el comportamiento ya discutido, que es la dilución más rápida de la constante cosmológica. Es por esto que la dependencia funcional de potencias es el que impide que obtengamos el comportamiento que buscamos.

# Capítulo 5

## Conclusiones

A lo largo del trabajo hemos estudiado un grupo de teorías que se conocen como teorías MAG y que caracterizan por tener como variables a la métrica  $g_{ab}$  y la conexión  $\Gamma^c_{ab}$ , es decir, tiene variables extra, respecto al formalismo métrico. Dentro de ese conjunto de teorías escogemos una muy concreta que consiste en tomar la acción de Einstein-Hilbert y restringir la conexión a ser simétrica, en el camino se menciona una peculiaridad que tiene la acción de Einstein-Hilbert y que se conoce como simetría proyectiva.

Analizamos las leyes de conservación y las ecuaciones de movimiento, donde encontramos la motivación de este trabajo que son, por un lado, el hecho de que hay una no conservación del tensor de energía momento, situación que ha sido útil para generar constante cosmológica y por otro el hecho de que la ecuación de movimiento para la métrica tiene un comportamiento extra tipo constante cosmológica.

Para utilizar esta teoría para generar constante cosmológica hemos primeramente implementado homogeneidad e isotropía a las ecuaciones de movimiento y a los objetos matemáticos de relevancia, obteniendo un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales y acopladas y, al mismo tiempo, nos aseguramos de que el comportamiento sea efectivamente de constante cosmológica obteniendo una expresión para la constante cosmológica en términos de las componentes de la conexión, pues elegimos por simplicidad, trabajar con las componentes de la conexión.

Con todo lo anterior, solo queda escoger un conjunto de ecuaciones de estado para las componentes de la conexión. Primeramente intentamos usar dichas ecuaciones de estado para simplificar el sistema de ecuaciones resultante, esa forma de abordar el sistema de ecuaciones resulta ser infructífera, pues simplifica demasiado el sistema, volviendolo trivial en la gran mayoría de los casos.

Ante la imposibilidad resolver el sistema de forma general y de utilizar las ecuaciones de estado para simplificar el sistema, optamos por un esquema perturbativo para tratar de extraer información física de los modelos en cuestión, con lo cual, solo necesitamos escoger las ecuaciones de estado correspondientes y utilizar el esquema perturbativo. Dentro de esta línea, primero intentamos haciendo cero componentes igual a cero por definición y luego investigamos los modelos que están un poco mejor motivados. En el primer grupo de modelos encontramos que solo tenemos un modelo que no se trivializa, y en el otro investigamos restringir la geometría a una metricidad sin trazas o a una no metricidad de Weyl.

Procedemos a resolver el sistema perturbativo, como resultado, podemos ver que contamos con el espacio de parámetros suficiente para ajustar el valor de  $\Lambda_{hoy}$  y  $H_{hoy}$ , cosa que aprovechamos. También vemos que el esquema perturbativo no se rompe abruptamente y que podemos confiar en él en una fracción de la historia cosmológica. Para un esquema perturbativo estos dos

hechos pueden considerarse positivas, sin embargo, como se ha visto, los modelos perturbativos nos dicen que los requerimientos físicos para la constante cosmológica y las componentes de la conexión son genéricamente incompatibles. Incluso teniendo en cuenta que estamos en un esquema perturbativo quedará patente que la constante cosmológica que se obtenga del modelo en cualquier vecindad no permanece saturada, cuando las componentes de la conexión se diluyen. Para que la constante cosmológica se sature es necesario que dichas componentes crezcan, al menos, linealmente, lo cual complica la interpretación física del shear y del dilatón al menos en este contexto.

En resumen hemos obtenido un panorama en el que parece ser complicado que consigamos el comportamiento físico planteado desde el inicio, por otro lado obtenemos un comportamiento adecuado para la constante cosmológica a costa de una conexión que no se diluye. Si bien esto parece ser contundente, nos deja otras ventanas por explorar, ya que se han hecho diversas simplificaciones para analizar que puede obtenerse a partir de estas ideas. Comenzando por el hecho de que hemos hecho la torsión igual a cero, incluir una torsión sin traza permite agregar más grados de libertad y al mismo tiempo evitar el problema que significa la simetría proyectiva. Como hemos visto, el restringir la geometría ha sido la fuente de las ecuaciones de estado para los modelos, al incluir la torsión las formas para restringir la geometría se incrementan. También, el introducir torsión permite tener más partes de la descomposición en el hipermomentum, encontrándonos ahora con la presencia del espín en el hipermomentum.

Como extensión a este trabajo podemos considerar relajar la homogeneidad e isotropía, como mencionamos el considerar homogeneidad e isotropía reduce el número de componentes que pueden tener  $C^c_{ab}$  o  $\Sigma_c^{ab}$ , esto repercute en la forma final que toma  $\Lambda$  dando lugar a mayores posibilidades de generar el comportamiento deseado. Estudiar lo que sucede con contenidos de materia más motivados, por ejemplo los diversos tipos de fluidos con hipermomentum que existen en la literatura, o en general considerar contenidos de materia específicos puede dar pistas para encontrar algún modelo que funcione, pues en el trabajo el contenido de materia y su presencia en el hipermomentum se ha dejado abierta con la única restricción de que se comporte como constante cosmológica. Estas modificaciones y consideraciones pueden ser útiles al momento de llevar más allá estas ideas en busca de modelos que presenten el comportamiento físico deseado.

# Capítulo 6

## Apéndice A

En este apéndice hacemos la conexión entre la forma de presentar el formalismo propio de MAG y lo presentado en algunos libros de texto. Comenzamos definiendo un operador derivada, como se relaciona con la conexión y como es que estos equivalentemente definen el transporte paralelo de vectores y en general de tensores. Aprovechamos para introducir convenciones y detalles.

Un operador derivada  $\nabla_a$  en una variedad  $\mathcal{M}$  es un mapeo entre campos tensoriales tensoriales del tipo  $(k, l)$ , denotado por  $\mathcal{T}(k, l)$ , a un campo tensorial  $(k, l + 1)$ , denotado por  $\mathcal{T}(k, l + 1)$ , que satisface cinco condiciones.

1. Linealidad: Para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y  $A, B \in \mathcal{T}(k, l)$ ,

$$\nabla_c (\alpha A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_\ell} + \beta B^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_\ell}) = \alpha \nabla_c A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_\ell} + \beta \nabla_c B^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_\ell}.$$

2. Regla de Leibnitz, para todo  $A \in \mathcal{T}(k, \ell)$ ,  $B \in \mathcal{T}(k', \ell')$ ,

$$\nabla_e [A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_\ell} B^{c_1 \dots c_{\ell'}}_{d_1 \dots d_{\ell'}}] = [\nabla_e A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_\ell}] B^{c_1 \dots c_{\ell'}}_{d_1 \dots d_{\ell'}} + A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_\ell} [\nabla_e B^{c_1 \dots c_{\ell'}}_{d_1 \dots d_{\ell'}}].$$

3. Conmuta con contracciones, para todo  $A \in \mathcal{T}(k, \ell)$

$$\nabla_d (A^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_\ell}) = \nabla_d A^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_\ell}.$$

4. Consistencia con la noción de que los vectores tangentes son derivadas direccionales de campos escalares en la variedad, para toda  $f$  función en  $\mathcal{M}$  y  $t^a$  campo vectorial,

$$t(f) = t^a \nabla_a f.$$

### Conexión

Si ahora consideramos la diferencia entre dos operadores derivada, en general, actúa como tensor, dicha afirmación la podemos escribir como

$$(\nabla_a - \tilde{\nabla}_a) \omega_b = -C^c_{ab} \omega_c \quad \forall \omega_c. \quad (6.1)$$

Aquí el signo negativo se toma por convención. Dada la estructura de variedad diferencial siempre tenemos un operador derivada que son las parciales asociadas a alguna carta de la variedad,  $\partial_a$ ,

con lo cual dar una conexión  $\Gamma^c_{ab}$  en  $\mathcal{M}$  es equivalente a dar un operador derivada gracias a (6.1),

$$(\nabla_a - \partial_a) \omega_b = -\Gamma^c_{ab} \omega_c. \quad (6.2)$$

Si tenemos la estructura de la variedad y la estructura métrica encima  $g_{ab}$  podemos obtener la torsión y la no metricidad como sigue; actuando de forma antisimétrica sobre una función  $f$  existe  $T^c_{ab}$ , tal que,

$$\nabla_a \nabla_b f - \nabla_b \nabla_a f = -T^c_{ab} \nabla_c f, \quad (6.3)$$

donde  $T^c_{ab}$  es el tensor de torsión. Con la estructura métrica podemos obtener el tensor de no metricidad,

$$Q_{abc} = -\nabla_a g_{bc}. \quad (6.4)$$

Con la estructura métrica en la variedad  $a_{ab}$ , tenemos un operador derivada destacado que es que satisface dos cosas,

$$\tilde{\nabla}_a g_{bc} = 0, \quad (6.5)$$

y satisface que es libre de torsión, este es el operador derivada de Levi-Civita y es el que se utiliza en Relatividad General, y la conexión asociada son los símbolos de Christoffel.

Con lo anterior queda claro que un operador derivada, o equivalentemente una conexión definen el transporte paralelo de vectores mediante,

$$u^a \nabla_a v^b = 0, \quad (6.6)$$

donde el vector  $v^b$  se transporta paralelamente a lo largo de la curva cuyo vector tangente es  $u^a$ . De este modo la ecuación de autoparalela es,

$$v^a \nabla_a v^b = 0. \quad (6.7)$$

Por otro lado las geodésicas al estar relacionadas con la estructura métrica queda definidas por la ecuación

$$v^a \tilde{\nabla}_a v^b = 0. \quad (6.8)$$

Notar que podemos ver a la ecuación de autoparalela como una ecuación geodésica modificada

$$v^a \tilde{\nabla}_a v^b = -C^b_{ac} v^a v^c, \quad (6.9)$$

notar que solo entra la parte simétrica de la conexión en el lado derecho de la ecuación.

# Capítulo 7

## Apéndice B

En este apéndice hacemos todas las demostraciones del capítulo 2.

### Descomposición de la conexión

Queremos demostrar que,

$$C_{cab} = \frac{1}{2}(Q_{abc} + Q_{bac} - Q_{cab}) + \frac{1}{2}(T_{cab} + T_{acb} + T_{bca}), \quad (7.1)$$

partimos de la definición de la no metricidad,

$$\nabla_a g_{bc} = -Q_{abc}, \quad (7.2)$$

expandiendo (7.2),

$$\partial_a g_{bc} - \Gamma^e_{ab} g_{ec} - \Gamma^e_{ac} g_{eb} = -Q_{abc}, \quad (7.3)$$

entonces, bajando los índices, y luego permutándolos

$$\partial_a g_{bc} - \Gamma_{cab} - \Gamma_{bac} = -Q_{abc}, \quad (7.4)$$

$$\partial_b g_{ca} - \Gamma_{cba} - \Gamma_{abc} = -Q_{bac}, \quad (7.5)$$

$$\partial_c g_{ab} - \Gamma_{acb} - \Gamma_{bca} = -Q_{acb}, \quad (7.6)$$

sumando (7.4) y (7.5) y restándoles (7.6),

$$\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ca} - \partial_c g_{ab} - \Gamma_{cab} - \Gamma_{bac} - \Gamma_{cba} - \Gamma_{abc} + \Gamma_{acb} + \Gamma_{bca} = -Q_{abc} - Q_{bac} + Q_{cab}, \quad (7.7)$$

luego,

$$\Gamma_{cab} + \underbrace{\Gamma_{bac}}_I + \Gamma_{cba} + \underbrace{\Gamma_{abc}}_{II} - \underbrace{\Gamma_{acb}}_{II} - \underbrace{\Gamma_{bca}}_I = \partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ca} - \partial_c g_{ab} + Q_{abc} + Q_{bac} - Q_{cab}, \quad (7.8)$$

sumando los señalados igual y usando que

$$\Gamma_{cba} = \Gamma_{cab} + T_{cba}, \quad (7.9)$$

tenemos,

$$2\Gamma_{cab} + T_{cba} + T_{bac} + T_{abc} = \partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ca} - \partial_c g_{ab} + Q_{abc} + Q_{bac} - Q_{cab}, \quad (7.10)$$

despejando  $\Gamma_{cab}$ ,

$$\Gamma_{cab} = \frac{1}{2} (\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ca} - \partial_c g_{ab}) + \frac{1}{2} (Q_{abc} + Q_{bca} - Q_{cab}) + \frac{1}{2} (T_{cab} + T_{bca} + T_{acb}), \quad (7.11)$$

con lo cual, los primero tres términos nos dan la conexión de Levi-Civita y el resto nos da  $C_{cab}$ .  
Con lo cual se confirma,

$$\Gamma_{ab}^c = \tilde{\Gamma}_{ab}^c + C_{ab}^c, \quad (7.12)$$

donde,

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^c = \frac{1}{2} g^{cd} (\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}), \quad (7.13)$$

y

$$C_{cab} = \frac{1}{2} (Q_{abc} + Q_{bac} - Q_{cab}) + \frac{1}{2} (T_{cab} + T_{acb} + T_{bca}). \quad (7.14)$$

Ahora las representaciones de  $Q_{abc}$ ,  $T_{ab}^c$  y  $R_{abc}^d$  en términos de  $C_{ab}^c$  y sus contrapartes de Relatividad General.

Comenzamos con  $Q_{abc}$ ,

$$\begin{aligned} Q_{abc} &= -\tilde{\nabla}_a g_{bc} + C_{ab}^e g_{ec} + C_{ac}^e b_{be} \\ &= C_{cab} + C_{bac} \\ &= 2C_{(c|a|b)}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Luego la torsión,

$$\begin{aligned} T_{ab}^c &= 2\Gamma_{[ab]}^c \\ &= 2\tilde{\Gamma}_{[ab]}^c + 2C_{[ab]}^c \\ &= 2C_{[ab]}^c. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Finalmente la expansión del tensor de Riemann. El Riemann en términos de la conexión  $\Gamma_{ab}^c$  es

$$R_{abc}^d = -2\partial_{[a}\Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a|c]}^e \Gamma_{b]e}^d,$$

y luego introduciendo (2.8),

$$R_{abc}^d = \underbrace{-2\partial_{[a}\tilde{\Gamma}_{b]c}^d}_{*} - 2\partial_{[a}C_{b]c}^d + \underbrace{2\tilde{\Gamma}_{[a|c]}^e \tilde{\Gamma}_{b]e}^d}_{*} + 2C_{[a|c]}^e \tilde{\Gamma}_{b]e}^d + 2\tilde{\Gamma}_{[a|c]}^e C_{b]e}^d + 2C_{[a|c]}^e C_{b]e}^d \quad (7.17)$$

$$= \tilde{R}_{abc}^d - 2\partial_{[a}C_{b]c}^d + 2C_{[a|c]}^e \tilde{\Gamma}_{b]e}^d + 2\tilde{\Gamma}_{[a|c]}^e C_{b]e}^d + 2C_{[a|c]}^e C_{b]e}^d, \quad (7.18)$$

donde los términos marcados con \* nos dan el Riemann métrico. Por otro lado,

$$\tilde{\nabla}_a C_{bc}^d = \partial_a C_{bc}^d + \tilde{\Gamma}_{ae}^d C_{bc}^e - \tilde{\Gamma}_{ab}^e C_{ec}^d - \tilde{\Gamma}_{ac}^e C_{be}^d,$$

tomando la parte antisimétrica en  $a$  y  $b$ , multiplicando por un signo negativo, y tomando en cuenta que la conexión de Levi-Civita es totalmente simétrica en  $a$  y  $b$ ,

$$\begin{aligned} -\tilde{\nabla}_{[a}C_{b]c}^d &= -\partial_{[a}C_{b]c}^d + \tilde{\Gamma}_{[b|e]}^d C_{a]c}^e + \tilde{\Gamma}_{[a|c]}^e C_{b]e}^d \\ &= -\partial_{[a}C_{b]c}^d + C_{[a|c]}^e \tilde{\Gamma}_{b]e}^d + \tilde{\Gamma}_{[a|c]}^e C_{b]e}^d, \end{aligned} \quad (7.19)$$

comparando, tenemos entonces que,

$$R_{abc}{}^d = \widetilde{R}_{abc}{}^d - 2\widetilde{\nabla}_{[a}C^d{}_{b]c} + 2C^e{}_{[a|c]}C^d{}_{b]e}, \quad (7.20)$$

que es lo que se muestra en el texto.

### Identidades

Comenzamos con la parte totalmente antisimétrica del Riemann

$$R_{[abc]}{}^d = -\nabla_{[a}T^d{}_{bc]} + T^e{}_{[ab}T^d{}_{c]e}. \quad (7.21)$$

Para comenzar, necesitamos calcular

$$\begin{aligned} \nabla_a \nabla_b \omega_c &= \partial_a \nabla_b \omega_c - \Gamma^e{}_{ab} \nabla_e \omega_c - \Gamma^e{}_{ac} \nabla_b \omega_e \\ &= \partial_a \partial_b \omega_c - \partial_a (\Gamma^e{}_{bc} \omega_e) - \Gamma^e{}_{ab} (\partial_e \omega_c - \Gamma^d{}_{ec} \omega_d) - \Gamma^e{}_{ac} (\partial_b \omega_e - \Gamma^d{}_{be} \omega_d) \\ &= \partial_a \partial_b \omega_c - \partial_a \Gamma^e{}_{bc} \omega_e - \Gamma^e{}_{bc} \partial_a \omega_e - \Gamma^e{}_{ab} \partial_e \omega_c + \Gamma^e{}_{ab} \Gamma^d{}_{ec} \omega_d - \Gamma^e{}_{ac} \partial_b \omega_e + \Gamma^e{}_{ac} \Gamma^d{}_{be} \omega_d, \end{aligned}$$

ahora hay que antisimetrizar en  $a$   $b$  y  $c$ , utilizando que las parciales conmutan, el primer término es igual a cero cuando se antisimetriza,

$$\nabla_{[a} \nabla_b \omega_{c]} = -\partial_{[a} \Gamma^e{}_{bc]} \omega_e - \underbrace{\Gamma^e{}_{[bc} \partial_a] \omega_e}_* - \Gamma^e{}_{[ab} \partial_{|e|} \omega_{c]} + \Gamma^e{}_{[ab} \Gamma^d{}_{|e|c]} \omega_d - \underbrace{\Gamma^e{}_{[ac} \partial_b] \omega_e}_* + \Gamma^e{}_{[ac} \Gamma^d{}_{b]e} \omega_d,$$

los términos señalados difieren por una permutación impar, por lo que hay un cambio de signo y se cancelan. Después utilizando que

$$\Gamma^d{}_{be} = \Gamma^d{}_{eb} + T^d{}_{be}, \quad (7.22)$$

lo cual implica que

$$\Gamma^e{}_{[ac} \Gamma^d{}_{b]e} = \Gamma^e{}_{[ac} T^d{}_{b]e} + \Gamma^e{}_{[ac} \Gamma^d{}_{|e|b]}.$$

Con lo cual,

$$\nabla_{[a} \nabla_b \omega_{c]} = -\partial_{[a} \Gamma^d{}_{bc]} \omega_d - \Gamma^e{}_{[ab} \partial_{|e|} \omega_{c]} + \underbrace{\Gamma^e{}_{[ab} \Gamma^d{}_{|e|c]} \omega_d}_I + \underbrace{\Gamma^e{}_{[ac} \Gamma^d{}_{|e|b]} \omega_d}_I + \Gamma^e{}_{[ac} T^d{}_{b]e} \omega_d,$$

los señalados igual difieren por una permutación par, por lo que se cancelan entre sí. Finalmente tenemos,

$$\nabla_{[a} \nabla_b \omega_{c]} = -\partial_{[a} \Gamma^d{}_{bc]} \omega_d - \Gamma^e{}_{[ab} \partial_{|e|} \omega_{c]} + \Gamma^e{}_{[ac} T^d{}_{b]e} \omega_d, \quad (7.23)$$

como podemos ver de (7.23), la conexión  $\Gamma^c{}_{ab}$  siempre aparece antisimetrizada en sus índices inferiores, con lo cual podemos cambiarla por  $T^c{}_{ab}$ , para hacerlo analizamos lo que sucede con el primero de los términos de (7.23).

$$\begin{aligned} -\partial_{[a} \Gamma^d{}_{bc]} &= \frac{1}{3!} [-\partial_a T^d{}_{bc} - \partial_b T^d{}_{ca} - \partial_c T^d{}_{ab}] \\ -\partial_{[a} T^d{}_{bc]} &= \frac{2}{3!} [-\partial_a T^d{}_{bc} - \partial_b T^d{}_{ca} - \partial_c T^d{}_{ab}] \\ &= \frac{1}{3} [-\partial_a T^d{}_{bc} - \partial_b T^d{}_{ca} - \partial_c T^d{}_{ab}] \end{aligned}$$

se cumple entonces que,

$$-\partial_{[a} \Gamma^d{}_{bc]} = -\frac{1}{2} \partial_{[a} T^d{}_{bc]}, \quad (7.24)$$

introduciendolo en (7.23)

$$\nabla_{[a}\nabla_b\omega_c] = \frac{1}{2} \left[ -\partial_{[a}\Gamma^d{}_{bc]}\omega_d - \Gamma^e{}_{[ab}\partial_{|e|}\omega_c] + \Gamma^e{}_{[ac}T^d{}_{|b]e}\omega_d \right]. \quad (7.25)$$

Ahora el otro término de la definición del Riemann,

$$T^d{}_{[ab}\nabla_{|d|}\omega_c] = T^d{}_{[ab}\partial_{|d|}\omega_c] - T^d{}_{[ab}\Gamma^e{}_{|d|c]}\omega_e. \quad (7.26)$$

Construyendo el Riemann antisimetrizado, obtenemos,

$$R_{[abc]}{}^d\omega_d = \left[ -\partial_{[a}T^d{}_{bc]} - T^e{}_{[ab}\Gamma^d{}_{c]e} \right] \omega_d, \quad (7.27)$$

como  $\omega_d$  es una 1-forma arbitraria, tenemos que,

$$R_{[abc]}{}^d = -\partial_{[a}T^d{}_{bc]} - T^e{}_{[ab}\Gamma^d{}_{c]e} \quad (7.28)$$

Por otro lado, consideramos,

$$-\nabla_{[a}T^d{}_{bc]} + T^e{}_{[ab}T^d{}_{c]e} = -\partial_{[a}T^d{}_{bc]} - \Gamma^d{}_{[a|e|}T^e{}_{bc]} + \Gamma^e{}_{[ab}T^d{}_{|e|c]} + \Gamma^e{}_{[ac}T^e{}_{b]e} + T^d{}_{[ab}T^d{}_{c]e},$$

lo único que hay que mostrar es que los últimos tres terminos suman cero,

$$\begin{aligned} \Gamma^e{}_{[ab}T^d{}_{|e|c]} + \Gamma^e{}_{[ac}T^e{}_{b]e} + T^d{}_{[ab}T^d{}_{c]e} &= -\Gamma^e{}_{[ab}T^d{}_{c]e} + \Gamma^e{}_{[ac}T^e{}_{b]e} + T^d{}_{[ab}T^d{}_{c]e} \\ &= -\Gamma^e{}_{[ba}T^d{}_{c]e} + \Gamma^e{}_{[ac}T^e{}_{b]e} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (7.29)$$

donde en la primera línea hemos usado la antisimetría de  $T^c{}_{ab}$ , en la segunda hemos usado (7.22) y por último, hay una permutacion par entre los términos que quedan al final, pero ya tienen los signos opuestos por lo que se cancelan.

Con lo cual,

$$\begin{aligned} -\nabla_{[a}T^d{}_{bc]} + T^e{}_{[ab}T^d{}_{c]e} &= -\partial_{[a}T^d{}_{bc]} - \Gamma^d{}_{[a|e|}T^e{}_{bc]} \\ &= -\partial_{[a}T^d{}_{bc]} - T^e{}_{[bc}\Gamma^d{}_{a]|e]} \\ &= -\partial_{[a}T^d{}_{bc]} - T^e{}_{[ab}\Gamma^d{}_{c]e}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Como podemos ver (7.30) y (7.28), son iguales, con lo cual se cumple lo que queríamos mostrar,

$$R_{[abc]}{}^d = -\nabla_{[a}T^d{}_{bc]} + T^e{}_{[ab}T^d{}_{c]e}.$$

La siguiente identidad es la identidad de Bianchi,

$$\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^e = T^f{}_{[ab}R_{c]fd}{}^e.$$

Por un lado consideramos,

$$(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a + T^e{}_{ab}\nabla_e)\nabla_c\omega_d = R_{abc}{}^e\nabla_e\omega_d + R_{abd}{}^e\nabla_c\omega_e, \quad (7.31)$$

y por otro consideramos

$$\nabla_a(\nabla_b\nabla_c\omega_d - \nabla_c\nabla_b\omega_d + T^e{}_{bc}\nabla_e\omega_d) = \nabla_a(R_{bcd}{}^e2\omega_e), \quad (7.32)$$

antisimetrizando en  $a b c$  (7.32) y (7.31) obtenemos,

$$\nabla_{[a}\nabla_b\nabla_c]\omega_d - \nabla_{[b}\nabla_a\nabla_c]\omega_d + T_{[ab}^e\nabla_{|e|}\nabla_c]\omega_d = R_{[abc]}^e\nabla_e\omega_d + R_{[ab|d]}^e\nabla_c]\omega_e \quad (7.33)$$

$$\nabla_{[a}\nabla_b\nabla_c]\omega_d - \nabla_{[a}\nabla_c\nabla_b]\omega_d + \nabla_{[a}\left(T_{bc}^e\nabla_e\omega_d\right) = \nabla_{[a}R_{bc]d}^e\omega_e + R_{[bc|d]}^e\nabla_a]\omega_e, \quad (7.34)$$

las ecuaciones pueden igualarse, pues los términos con tres derivadas son iguales salvo permutaciones pares, nos quedamos con

$$\begin{aligned} R_{[abc]}^e\nabla_e\omega_d - T_{[ab}^e\nabla_{|e|}\nabla_c]\omega_d &= \nabla_{[a}R_{bc]d}^e\omega_e - \nabla_{[a}\left(T_{bc}^e\nabla_e\omega_d\right) \\ &= \nabla_{[a}R_{bc]d}^e\omega_e - \nabla_{[a}T_{bc}^e\nabla_e\omega_d - T_{[bc}^e\nabla_a]\nabla_e\omega_d, \end{aligned}$$

ahora usamos la identidad anterior para introducir el valor de  $R_{[abc]}^d$ ,

$$\underbrace{-\nabla_{[a}T_{bc]}^e\nabla_e\omega_d}_{*} + T_{[ab}^f T_{c]f}^e\nabla_e\omega_d - T_{[ab}^e\nabla_{|e|}\nabla_c]\omega_d = \nabla_{[a}R_{bc]d}^e\omega_e - \underbrace{\nabla_{[a}T_{bc]}^e\nabla_e\omega_d}_{*} - T_{[bc}^e\nabla_a]\nabla_e\omega_d,$$

los señalados de igual forma se cancelan y nos quedamos con

$$+T_{[ab}^f T_{c]f}^e\nabla_e\omega_d - T_{[ab}^e\nabla_{|e|}\nabla_c]\omega_d = \nabla_{[a}R_{bc]d}^e\omega_e - T_{[bc}^e\nabla_a]\nabla_e\omega_d,$$

despejando  $\nabla_{[a}R_{bc]d}^e$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla_{[a}R_{bc]d}^e &= T_{[ab}^f\left(\nabla_{[c}\nabla_f]\omega_d - \nabla_{[f|}\nabla_c]\omega_d + T_{c]f}^e\nabla_e\omega_d\right) \\ &= T_{[ab}^f R_{c]fd}^e\omega_e, \end{aligned}$$

que es lo que se presenta en el texto principal.

Finalmente la parte simétrica en el tercer y cuarto índices,

$$2R_{ab(cd)} = -2\nabla_{[a}Q_{b]cd} - T_{ab}^e Q_{ecb}.$$

$$\begin{aligned} (\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a + T_{ab}^e\nabla_e)g_{cd} &= R_{abc}^e g_{ed} + R_{abd}^e g_{ce} \\ &= 2R_{ab(cd)}, \end{aligned}$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned} (\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a + T_{ab}^e\nabla_e)g_{cd} &= -\nabla_a Q_{bcd} - \nabla_b Q_{acd} - T_{ab}^e Q_{ecd} \\ &= -2\nabla_{[a}Q_{b]cd} - T_{ab}^e Q_{ecd}, \end{aligned}$$

lo cual completa la prueba.

### Contracciones

En esta parte hacemos las demostraciones de las contracciones del tensor de Riemann. El tensor de Riemann en términos de la conexión  $\Gamma_{ab}^c$ ,

$$R_{abc}^d = -\partial_a\Gamma_{bc}^d + \partial_b\Gamma_{ac}^d + \Gamma_{ac}^e\Gamma_{be}^d - \Gamma_{bc}^e\Gamma_{ae}^d,$$

calculando la curvatura homotética

$$\begin{aligned} \hat{R}_{ab} &= R_{abc}^c \\ &= -\partial_a\Gamma_{bc}^c + \partial_b\Gamma_{ac}^c \\ &= -\partial_a\tilde{\Gamma}_{bc}^c + \partial_b\tilde{\Gamma}_{ac}^c - \partial_a C_{bc}^c + \partial_b C_{ac}^c, \end{aligned}$$

luego, por un lado

$$\tilde{\Gamma}_{bc}^c = \partial_b \ln \sqrt{-g},$$

entonces los primeros dos términos se cancelan pues las parciales conmutan, y por otro lado,

$$\begin{aligned} g^{cb} C_{cab} &= \frac{1}{2} (Q_a + \hat{Q}_a - \hat{Q}_a) + \frac{1}{2} (T_a - T_a + T_{acb} g^{cb}) \\ &= \frac{1}{2} Q_a, \end{aligned}$$

con lo cual,

$$\begin{aligned} \hat{R}_{ab} &= \frac{1}{2} [-\partial_a Q_b + \partial_b Q_a] \\ &= \partial_{[b} Q_{a]}. \end{aligned}$$

Una de las contracciones se obtiene de contraer (2.28),  $b$  y  $d$ ,

$$R_{[abc]}^d = -\nabla_{[a} T_{bc]}^d + T_{[ab}^e T_{c]e}^d,$$

expandiendo y usando que la torsión y el Riemann son antisimétricos, tenemos,

$$R_{abc}^d + R_{bca}^d + R_{cab}^d = -\nabla_a T_{bc}^d - \nabla_b T_{ca}^d - \nabla_c T_{ab}^d + T_{ab}^e T_{ce}^d + T_{bc}^e T_{ae}^d + T_{ca}^e T_{be}^d,$$

contrayendo obtenemos,

$$2R_{[ac]} + \hat{R}_{ca} = 2\nabla_{[c} T_{a]} - \nabla_b T_{ca}^b + T_{ab}^e T_{ce}^b + T_{bc}^e T_{ae}^b + T_{ca}^e T_e,$$

por lo que despejando la parte antisimétrica del Ricci obtenemos,

$$R_{[ac]} = \frac{1}{2} \hat{R}_{ac} - \nabla_{[a} T_{c]} + \frac{1}{2} \nabla_b T_{ac}^b + \frac{1}{2} (T_{ab}^e T_{ce}^b + T_{ae}^b T_{bc}^e - T_{ac}^e T_e).$$

Por otro lado las contracciones de (2.29).

$$\nabla_{[a} R_{bc]d}^e = T_{[ab}^f R_{c]fd}^e$$

La primera se sigue de manera directa pues al contraer en  $d$  y  $e$ , obtenemos de ambos lados la definición de  $\hat{R}_{ab}$ ,

$$\nabla_{[a} \hat{R}_{bc]} = T_{[ab}^f \hat{R}_{c]f}.$$

Finalmente, para la contracción en  $a$  y  $e$  primero expandimos (2.29)

$$\nabla_a R_{bcd}^e + \nabla_b R_{cad}^e + \nabla_c R_{abd}^e = T_{ab}^f R_{cfd}^e + T_{bc}^f R_{afd}^e + T_{ca}^f R_{bfd}^e,$$

haciendo la contracción del lado izquierdo,

$$\begin{aligned} \nabla_a R_{bcd}^a + \nabla_b R_{cad}^a + \nabla_c R_{abd}^a &= \nabla_a R_{bcd}^a + \nabla_b R_{cad}^a + \nabla_b R_{cd} - \nabla_c R_{bd} \\ &= \nabla_a R_{bcd}^a + 2\nabla_{[b} R_{c]d}, \end{aligned}$$

y ahora del lado derecho,

$$T_{ab}^f R_{cfd}^a - T_{bc}^f R_{fd} + T_{ca}^f R_{bfd}^a = -T_{bc}^f R_{fd} + 2T_{a[b}^f R_{c]fd}^a,$$

con lo cual,

$$\nabla_a R_{bcd}{}^a + 2\nabla_{[b} R_{c]d} = -T_{bc}^f R_{fd} + 2T_{a[b}^f R_{c]fd}{}^a. \quad (7.35)$$

### Simetría proyectiva

Ahora mostraremos que el escalar de curvatura  $R$  es invariante ante las transformaciones

$$\begin{aligned} g_{ab} &\longrightarrow g_{ab} \\ \Gamma_{ab}^c &\longrightarrow \Gamma_{ab}^c + \delta_b^c U_a, \end{aligned}$$

con lo cual el escalar de curvatura bajo la transformación queda,

$$\begin{aligned} R_{ab} &\longrightarrow R_{ab} - \partial_a \delta_b^c U_c + \partial_c \delta_b^c U_a + \delta_b^d U_a \delta_d^c U_c - \delta_b^d U_c \delta_d^c U_a + \Gamma_{ab}^d \delta_d^c U_c + \Gamma_{cd}^c \delta_b^d U_a - \Gamma_{cb}^d \delta_d^c U_a - \Gamma_{ad}^c \delta_b^d U_c \\ &= R_{ab} - \partial_a U_b + \partial_b U_a + U_a U_b - U_b U_a + \Gamma_{ab}^c U_c + \Gamma_{cb}^c U_a - \Gamma_{db}^d U_a - \Gamma_{ab}^c U_c \\ &= R_{ab} - \partial_a U_b + \partial_b U_a \\ &= R_{ab} + 2\partial_{[b} U_{a]}, \end{aligned}$$

con lo cual

$$R \longrightarrow R.$$

Finalmente queremos ver que las ecuaciones de movimiento presentadas en los capítulos 2 y 3 son equivalentes,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_d (\sqrt{-g} g^{d(b} \delta_c^{a)}) - \frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_c (\sqrt{-g} g^{ab}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_d \sqrt{-g} g^{d(b} \delta_c^{a)} - \frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_c \sqrt{-g} g^{ab} - \nabla_c g^{ab} + \nabla_d g^{d(b} \delta_c^{a)} \\ &= -\frac{1}{2} Q_d g^{d(b} \delta_c^{a)} + \frac{1}{2} Q_c g^{ab} + \hat{Q}^{(b} \delta_c^{a)} - Q_c{}^{ab} \\ &= \frac{1}{2} Q_c g^{ab} - Q_c{}^{ab} + \left[ \hat{Q}^{(b} - \frac{1}{2} Q^{(b} \right] \delta_c^{a)}, \end{aligned}$$

que es lo que puede encontrarse en la literatura [23] Donde hemos utilizado que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \nabla_a \sqrt{-g} &= -\frac{1}{2} Q_a, \\ \nabla_c g^{ab} &= Q_c{}^{ab}, \\ \nabla_c g^{cb} &= \hat{Q}^b. \end{aligned}$$

Ahora, escribiendolo en términos de  $C_{ab}^c$  y sus trazas, se sigue que,

$$\begin{aligned} Q_a &= 2\lambda_a \\ \hat{Q}_a &= \lambda_a + \tau_a \\ Q_c{}^{ab} &= 2C_{ce}^{(a} g^{b)e}, \end{aligned}$$

con lo cual la ecuación para la conexión

$$\begin{aligned} &\lambda_c g^{ab} - 2C_{ce}^{(a} g^{b)e} + \left[ +\lambda^{(b} + \tau^{(b} - \lambda^{(b)} \right] \delta_c^{a)} \\ &= \lambda_c g^{ab} - 2C_{ce}^{(a} g^{b)e} + \tau^{(b} \delta_c^{a)}, \end{aligned}$$

que es lo que se presenta en el texto principal y que puede encontrarse también en la literatura [30, 31]



## Capítulo 8

# Apéndice C

En este apéndice revisamos algunas de las convenciones ya sea que se aborden o no en el texto principal, como por ejemplo,

$$T_{(a_1 \dots a_k)} = \frac{1}{\ell!} \sum_{\pi} T_{a_{\pi(1)} \dots a_{\pi(\ell)}}, \quad (8.1)$$

$$T_{[a_1 \dots a_k]} = \frac{1}{\ell!} \sum_{\pi} \text{sign}(\pi) T_{a_{\pi(1)} \dots a_{\pi(\ell)}}, \quad (8.2)$$

donde la suma es sobre las permutaciones de los índices y  $\text{sign}(\pi)$  es el signo de la permutación, siendo  $+1$  para permutaciones pares y  $-1$  para permutaciones impares.

Repetidamente usamos la convención de la tilde para designar a la contraparte Riemanniana del objeto geométrico en cuestión. Por ejemplo,  $\tilde{\nabla}_a$  representa al operador derivada asociado a la conexión de Levi-Civita o conexión métrica.

$$\tilde{\nabla}_a g_{bc} = 0, \quad (8.3)$$

siendo  $g_{ab}$  el tensor métrico.

El tensor métrico  $g_{ab}$  también se utiliza para subir y bajar índices, por ejemplo,

$$g_{ab} g^{bc} = \delta_a^c, \quad (8.4)$$

$$B_{ab}{}^{cd} g_{ce} g^{af} = B_{be}{}^f{}^d. \quad (8.5)$$

El trabajo se encuentra escrito en unidades geométricas, esto es, la velocidad de la luz  $c$  y la constante de gravitación universal  $G$  se ajustan para que tomen el valor de la unidad, esto es,

$$G = 1, \quad (8.6)$$

$$c = 1, \quad (8.7)$$

con lo cual todas las cantidades físicas pueden expresarse en términos una unidad de tiempo o longitud característica. En el contexto de cosmología decidimos utilizar como unidad de tiempo que es la edad del universo, que tomamos como 13000 años.

En el texto principal se utilizan dos cantidades físicas que son, la constante cosmológica el día de hoy y el parámetro de Hubble el día de hoy. En unidades geométricas y tomando como escala

de tiempo la edad del universo,  $EU$ , toman los siguientes valores,

$$\bar{\Lambda}_{hoy} = 1,782 \frac{1}{EU^2}, \quad (8.8)$$

$$\bar{H}_{hoy} = 0,928 \frac{1}{EU}. \quad (8.9)$$

A lo largo del texto se hace mención a dichas cantidades pero de forma adimensional,

$$\Lambda_{hoy} = 1,782, \quad (8.10)$$

$$H_{hoy} = 0,928, \quad (8.11)$$

cuando se hace esto es porque hay alguna constante de integración que absorbe las unidades o porque la dependencia en  $t$  ya tiene las unidades correctas. Esto se hace para simplificar la presentación en el texto principal, en el cual, evitamos hacer referencia a las unidades. Por ejemplo, para  $H_0$  tenemos que,

$$H_0 = \gamma \frac{1}{t}, \quad (8.12)$$

donde la dependencia en  $t$  ya tiene las unidades correctas, por lo que cuando consideramos los modelos en los que ajustamos el valor de  $H_{hoy}$  en  $H_0$ , tenemos que

$$\gamma = H_{hoy} = 0,928, \quad (8.13)$$

por lo que al evaluar en el tiempo a día de hoy, es decir,

$$t_{hoy} = 1EU, \quad (8.14)$$

tenemos

$$H_0(t_{hoy}) = 0,928 \frac{1}{EU}, \quad (8.15)$$

con lo cual hemos ajustado el valor para  $H_{hoy}$  en  $H_0$ .

Por otro lado,  $a_0$  es adimensional, recordando la forma funcional,

$$a_0 = Ct^\alpha, \quad (8.16)$$

tenemos que,  $C$  tiene unidades de  $EU^{-\alpha}$ . Sin embargo, en el texto presentamos

$$A_0 = t^\alpha, \quad (8.17)$$

por simplicidad de la presentación y de la discusión. Por la misma razón graficamos solo cantidades adimensionales.

# Bibliografía

- [1] R. Geroch, *General Relativity from A to B*. General Relativity from A to B, University of Chicago Press, 1981.
- [2] W. Rindler, *Essential Relativity: Special, General, and Cosmological*. Texts and monographs in physics, Springer, 1977.
- [3] E. Okon, “El principio de equivalencia en gravedad cuántica,” *Metatheoria – Revista de Filosofía e Historia de la Ciencia*, vol. 3, pp. 65–80, oct. 2020.
- [4] F. W. Dyson, A. S. Eddington, and C. Davidson, “Ix. a determination of the deflection of light by the sun’s gravitational field, from observations made at the total eclipse of may 29, 1919,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, vol. 220, no. 571-581, pp. 291–333, 1920.
- [5] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, M. R. Abernathy, *et al.*, “Observation of gravitational waves from a binary black hole merger,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, p. 061102, Feb 2016.
- [6] C. W. F. Everitt, D. B. Debra, B. W. Parkinson, J. P. Turneare, J. W. Conklin, M. I. Heifetz, G. M. Keiser, A. S. Silbergleit, T. Holmes, J. Kolodziejczak, M. Al-Meshari, J. C. Mester, B. Muhlfelder, V. G. Solomonik, K. Stahl, P. W. Worden, Jr., W. Bencze, S. Buchman, B. Clarke, A. Al-Jadaan, H. Al-Jibreen, J. Li, J. A. Lipa, J. M. Lockhart, B. Al-Suwaidan, M. Taber, and S. Wang, “Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity,” *Physical Review Letters*, vol. 106, p. 221101, June 2011.
- [7] Y. N. Obukhov and D. Puetzfeld, “Conservation laws in gravity: A unified framework,” *Phys. Rev. D*, vol. 90, p. 024004, Jul 2014.
- [8] S. Weinberg, “The cosmological constant problem,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 61, pp. 1–23, Jan 1989.
- [9] N. Aghanim *et al.*, “Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters,” *Astron. Astrophys.*, vol. 641, p. A6, 2020.
- [10] A. Perez, D. Sudarsky, and J. Bjorken, “A microscopic model for an emergent cosmological constant,” *International Journal of Modern Physics D*, 04 2018.
- [11] A. Perez and D. Sudarsky, “Dark energy from quantum gravity discreteness,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 122, p. 221302, Jun 2019.
- [12] E. Okon and D. Sudarsky, “The weight of collapse: dynamical reduction models in general relativistic contexts,” 2017.

- [13] Y. N. Obukhov and D. Puetzfeld, “Conservation laws in gravitational theories with general nonminimal coupling,” *Phys. Rev. D*, vol. 87, p. 081502, Apr 2013.
- [14] T. Josset, A. Perez, and D. Sudarsky, “Dark energy from violation of energy conservation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 118, p. 021102, Jan 2017.
- [15] J. Anderson and D. Finkelstein, “Cosmological constant and fundamental length,” *Am. J. Phys.*, vol. 39, pp. 901–904, 1971.
- [16] D. R. Finkelstein, A. A. Galiautdinov, and J. E. Baugh, “Unimodular relativity and cosmological constant,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 42, no. 1, pp. 340–346, 2001.
- [17] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*. 2003.
- [18] F. W. Hehl, J. McCrea, E. W. Mielke, and Y. Ne’eman, “Metric-affine gauge theory of gravity: field equations, noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance,” *Physics Reports*, vol. 258, no. 1, pp. 1 – 171, 1995.
- [19] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *Teleparallel Gravity: An Introduction*, vol. 173. Springer, 2013.
- [20] J. M. Nester and H.-J. Yo, “Symmetric teleparallel general relativity,” *Chin. J. Phys.*, vol. 37, p. 113, 1999.
- [21] F. W. Hehl and G. D. Kerlick, “Metric-affine variational principles in general relativity. i. riemannian space-time,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 9, no. 8, pp. 691–710, 1978.
- [22] F. W. Hehl, E. A. Lord, and L. L. Smalley, “Metric-affine variational principles in general relativity ii. relaxation of the riemannian constraint,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 13, no. 11, pp. 1037–1056, 1981.
- [23] D. Iosifidis, “Cosmological Hyperfluids, Torsion and Non-metricity,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 80, no. 11, p. 1042, 2020.
- [24] R. M. Wald, *General Relativity*. Chicago, USA: Chicago Univ. Pr., 1984.
- [25] F. W. Hehl, G. D. Kerlick, and P. von der Heyde, “On hypermomentum in general relativity i. the notion of hypermomentum,” *Zeitschrift für Naturforschung A*, vol. 31, no. 2, pp. 111 – 114, 01 Feb. 1976.
- [26] A. García-Parrado and E. Minguzzi, “Projective and amplified symmetries in metric-affine theories,” 6 2020.
- [27] A. Bernal, B. Janssen, A. Jiménez Cano, J. Orejuela, M. Sánchez, and P. Sánchez-Moreno, “On the (non-)uniqueness of the levi-civita solution in the einstein-hilbert-palatini formalism,” *Physics Letters B*, vol. 768, 06 2016.
- [28] G. J. OLMO, “Palatini approach to modified gravity: f(r) theories and beyond,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 20, no. 04, pp. 413–462, 2011.
- [29] D. Iosifidis, “Non-Riemannian Cosmology: The role of Shear Hypermomentum,” 10 2020.
- [30] N. Dadhich and J. M. Pons, “On the equivalence of the Einstein-Hilbert and the Einstein-Palatini formulations of general relativity for an arbitrary connection,” *Gen. Rel. Grav.*, vol. 44, pp. 2337–2352, 2012.

- [31] T. P. Sotiriou and S. Liberati, “Metric-affine  $f(r)$  theories of gravity,” *Annals of Physics*, vol. 322, no. 4, pp. 935 – 966, 2007.
- [32] D. Iosifidis, “Metric-Affine Gravity and Cosmology/Aspects of Torsion and non-Metricity in Gravity Theories,” other thesis, 2 2019.
- [33] R. M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Space-Time and Black Hole Thermodynamics*. Chicago Lectures in Physics, Chicago, IL: University of Chicago Press, 10 1995.
- [34] V. Vitagliano, “The role of nonmetricity in metric-affine theories of gravity,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 31, p. 045006, jan 2014.
- [35] V. Vitagliano, T. P. Sotiriou, and S. Liberati, “The dynamics of metric-affine gravity,” *Annals of Physics*, vol. 326, no. 5, pp. 1259 – 1273, 2011.
- [36] M. Tsamparlis, “Cosmological principle and torsion,” *Physics Letters A*, vol. 75, no. 1, pp. 27 – 28, 1979.
- [37] Y. N. Obukhov and R. Tresguerres, “Hyperfluid: A Model of classical matter with hypermomentum,” *Phys. Lett. A*, vol. 184, pp. 17–22, 1993.
- [38] Y. N. Obukhov, “On a model of an unconstrained hyperfluid,” *Physics Letters A*, vol. 210, no. 3, pp. 163 – 167, 1996.
- [39] Y. N. Obukhov and V. A. Korotky, “The weyssenhoff fluid in einstein-cartan theory,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 4, pp. 1633–1657, nov 1987.
- [40] C. G. Boehmer and P. Bronowski, “The Homogeneous and isotropic Weyssenhoff fluid,” *Ukr. J. Phys.*, vol. 55, no. 5, pp. 607–612, 2010.
- [41] F. Hehl, G. Kerlick, and P. Von Der Heyde, “On Hypermomentum in General Relativity. 3. Coupling Hypermomentum to Geometry,” *Z. Naturforsch. A*, vol. 31, pp. 823–827, 1976.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Relatividad General . . . . .	5
1.1.1. Formulación matemática de Relatividad General . . . . .	5
1.1.2. Éxitos y fracasos de Relatividad General . . . . .	6
1.2. No conservación y la constante cosmológica . . . . .	6
<b>2. Preliminares Matemáticos: Geometría no Riemanniana</b>	<b>11</b>
2.1. Introducción a la geometría no Riemanniana . . . . .	11
2.1.1. Conexión y tensor métrico . . . . .	11
2.1.2. El tensor de no metricidad . . . . .	13
2.1.3. El tensor de torsión . . . . .	13
2.1.4. El tensor de Curvatura . . . . .	14
<b>3. Construcción de teorías MAG</b>	<b>17</b>
3.1. Teorías MAG . . . . .	17
3.1.1. Descomposición del hipermomentum . . . . .	18
3.1.2. Acción de Einstein-Hilbert y simetría proyectiva . . . . .	18
3.1.3. Ecuaciones de movimiento . . . . .	19
3.2. Geometrías con no metricidad . . . . .	21
3.2.1. Ecuaciones de Movimiento . . . . .	23
3.2.2. Leyes de conservación . . . . .	24
<b>4. Cosmología con no metricidad</b>	<b>31</b>
4.1. Cosmología en Relatividad General . . . . .	31
4.2. Implementación de homogeneidad e isotropía . . . . .	33
4.2.1. Constante Cosmológica a partir de no metricidad . . . . .	35
4.3. Desarrollo perturbativo . . . . .	38
4.4. Ecuaciones de Estado . . . . .	40
4.4.1. Ecuaciones de estado anulando componentes . . . . .	41
4.4.2. No metricidad sin trazas . . . . .	47
4.4.3. No metricidad de Weyl . . . . .	48
4.4.4. Argumento perturbativo . . . . .	54
<b>5. Conclusiones</b>	<b>57</b>
<b>6. Apéndice A</b>	<b>59</b>
<b>7. Apéndice B</b>	<b>61</b>

76

*ÍNDICE GENERAL*

**8. Apéndice C**

**69**

**Bibliografía**

**71**