UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

SOBRE LA NOCIÓN DE ORTOGONALIDAD EN ESPACIOS DE BANACH Y ALGUNAS APLICACIONES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
JONATHAN GIOVANNI GIL JUÁREZ

DIRECTOR
DRA. CARMEN MARTÍNEZ ADAME ISAIS
FACULTAD DE CIENCIAS

CIUDAD DE MÉXICO, MARZO 2021.

Agradecimientos

En medio de la pandemia terminé de escribir este trabajo, por eso agradezco a mi familia por estar aquí conmigo y evitar que los estragos del confinamiento me rebasaran.

Nunca tuve el mejor promedio ni fui el mejor en ninguna clase, tener que trabajar los fines de semana o la enfermedad que me atacó en un par de ocasiones, de verdad me limitaron desde la licenciatura. Sin embargo siempre me topé con gente que me miró dos veces y que se dieron cuenta de que sí me he esforzado y que me he superado:

Agradezco a Carmen por dirigir este trabajo y el de licenciatura, por todo su tiempo y amabilidad. Agradezco también todas las oportunidades académicas que me brindó, sobre todo por haberme confiado por primera vez un grupo como su ayudante.

Agradezco a los sinodales por las valiosas observaciones que hicieron sobre mi trabajo.

Hago un agradecimiento muy especial a Judith Campos, por la paciencia y el apoyo que me brindó durante las clases en linea. Trabajando juntos fue cuando más crecí como docente y la docencia es lo que me motiva a seguir estudiando.

Al profe Cesar Guevara porque es una excelente persona. Creo que no leerá esto, pero me gustaría algún dia poder hacer algo por él y que de alguna manera se de cuenta que es porque lo aprecio y no por corresponder a toda la ayuda que me ha brindado.

A la gente que hace de ciencias un lugar agradable para mí, amigos conocidos, alumnos y profesores, algunos otros y otros más que ya no están.

Índice general

Introducción

Los espacios con producto interior y dentro de ellos los espacios de Hilbert son, quizá, la mejor generalización de los espacios euclidianos. Más allá de conservar aspectos geométricos estos espacios son una herramienta de gran relevancia en el análisis funcional y en algunas formulaciones matemáticas de la física.

Un concepto central en los espacios con producto interior es la ortogonalidad y es bien sabido que dicha noción no se tiene, en general, para los espacios de Banach, puesto que no toda norma es inducida por un producto de este tipo.

A lo largo de décadas se han introducido nociones de ortogonalidad en espacios de Banach. Dado X un espacio de Banach y $x, y \in X$, se dice que x es ortogonal a y

1. en el sentido de Birkhoff [3], si para todo escalar λ se tiene que $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$;

2. en el sentido de Roberts [21], si para todo escalar λ se tiene que $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|$;

3. en el sentido isoscéles de James [10], si $\|x + y\| = \|x - y\|$;

4. en el sentido pitagórico de James [10], si $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$;

5. en el sentido de Singer [25], si

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|.$$

Este trabajo se enfoca dos nociones: la de Birkhoff-James y la noción de Saidi desarrollada recientemente en [23]

En el primer capítulo se presentan resultados preliminares para el desarrollo de la parte central de este trabajo. Se incluyen algunos resultados básicos en análisis funcional. Más precisamente, la construcción de topologías débiles y algunos resultados centrales en la teoría de operadores acotados. También se presentan algunos resultados sobre álgebras de Banach y los C^*-módulos de Hilbert, que generalizan a los espacios de Hilbert.

En el capítulo dos se presenta la idea de ortogonalidad de Birkhoff-James y se hace una caracterización de ésta en algunos espacios de gran relevancia dentro del análisis funcional. Primero se caracteriza dicha noción en el espacio de operadores entre espacios de Hilbert de dimensión finita, para después generalizar el resultado a operadores entre espacios de Hilbert arbitrarios. Por último se caracteriza esta ortogonalidad en C^*-módulos de Hilbert.

En el capítulo tres se presenta la noción de ortogonalidad de Saidi y que ésta implica la ortogonalidad en el sentido de Birkhoff-James. Se incluyen importantes equivalencias de esta noción y se dan algunas aplicaciones. Una de las mas importantes es la siguiente.

Sean H y K espacios de Hilbert. Sea $T \in B(H, K)$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.

1. T es compacto.
2. Existe una sucesión $(T_n)_n \in B(H, K)$ de operadores de rango finito tales que
$$\|T - T_n\| \longrightarrow 0.$$

Esta equivalencia no necesariamente se da cuando H y K son espacios de Banach, sin embargo, si Y tiene una base de Schauder cuyos elementos son ortogonales en el sentido de Saidi, entonces el resultado es válido.

Finalmente, en el capítulo cuatro se caracterizan las dos nociones trabajadas en los capítulos anteriores para espacios de Banach concretos, a saber, el espacio de sucesiones

$$\ell^p_L(\mathbb{C}) = \{(x_n)_{n\in L} \subseteq \mathbb{C} : \|(x_n)_{n\in L}\|_p < \infty\},$$

el cual es de Banach con la norma dada por

$$\|(x_n)_{n\in L}\|_p = \left(\sum_{n\in L} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

y donde $L \subseteq \mathbb{N}$. Estos resultados muestran que estas nociones coinciden con la ortogonalidad dada en términos del producto interior cuando $p = 2$ y en este caso el espacio sí es de Hilbert.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan algunos resultados fundamentales en el estudio de los espacios de Banach y de los operadores entre ellos. Estos serán la base de los resultados centrales de este trabajo.

1.1. Topologías débiles.

Teorema 1.1. *Sean X un conjunto y $S \subseteq \wp(X)$. Sea*

$$B_S = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} S_i : S_i \in S, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{\varnothing, X\}.$$

Sea τ_S la familia de subconjuntos U de X tales que para todo $x \in U$, existe $B \in B_S$ tal que $x \in B \subseteq U$. Entonces τ_S es una topología para X y es la mínima que contiene a S. Además B_S es una base para τ_S.

Demostración. Claramente $\varnothing$ y X son elementos de τ_S.

Sean $U, V \in \tau_S$. Si $U \cap V = \varnothing$, entonces $U \cap V \in \tau_S$. Si $U \cap V \neq \varnothing$ sea $x \in U \cap V$, entonces existen $B_1, B_2 \in B_S$ tales que $x \in B_1 \subseteq U$ y $x \in B_2 \subseteq V$. Como B_S es cerrado bajo intersecciones finitas se sigue que $x \in B_1 \cap B_2 \subseteq U \cap V$ y por tanto $U \cap V \in \tau_S$.

Sea $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de elementos de τ_S y sea $x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Como $x \in U_{\alpha_0}$ para algún $\alpha_0 \in A$, entonces existe $B \in B_S$ tal que $x \in B \subseteq U_{\alpha_0}$, por tanto $x \in B \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ y esto implica que $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau_S$.

Si τ es una topología que contiene a S, evidentemente esta topología contiene a cualquier intersección finita de elementos de S, es decir, B_S debe de estar contenida en τ, y como consecuencia $\tau_S \subseteq \tau$.

Finalmente, como cualquier elemento de τ_S es unión de elementos de B_S, se sigue que esta familia es una base para dicha topología.

$\square$

Observación 1.2. *Sean X un espacio topológic y $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de espacios topológicos. Sea*

$$F = \{f_\alpha : X \longrightarrow Y_\alpha\}_{\alpha\in A}$$

una familia de funciones continuas. Entonces existe una mínima topología respecto a la cual son continuos los elementos de F.

Considérese

$$S = \{f_\alpha^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in A \text{ y } U_\alpha \text{es abierto en } Y_\alpha\} \subseteq X,$$

en vista del teorema anterior, τ_S es la mínima topología que contiene a S y ésta es la mínima respecto a la cual son continuos los elementos de F. Por tanto, esta es la topología buscada.

Definición 1.3. *Sean X un espacio topológico y $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de espacios topológicos. Sea*

$$F = \{f_\alpha : X \longrightarrow Y_\alpha\}_{\alpha\in A}$$

una familia de funciones continuas. A la mínima topología que hace continuos a los elementos de F se le llama topología débil respecto a F y se denota como

$$\sigma(X, F).$$

En ocasiones la topología débil también se denota por w.

Teorema 1.4. *Sean X un espacio topológico y $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de espacios Hausdorff. Sea*

$$F = \{f_\alpha : X \longrightarrow Y_\alpha\}_{\alpha\in A}$$

una familia de funciones continuas que separa puntos, es decir, para cualesquiera $x, y \in X$ existe $f_\alpha \in F$ con la propiedad de que $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$. Entonces $(X, \sigma(X, F))$ es de Hausdorff.

Demostración. Sean $x, y \in X$, entonces existe $f_\alpha \in F$ con la propiedad de que $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$. Como Y_α es Hausdorff se sigue que existen abiertos ajenos U y V tales que $f_\alpha(x) \in U$ y $f_\alpha(y) \in V$. Como consecuencia se tiene que $x \in f_\alpha^{-1}(U)$ y $y \in f_\alpha^{-1}(V)$, además de que $f_\alpha^{-1}(U)$ y $f_\alpha^{-1}(V)$ son abiertos ajenos en $\sigma(X, F)$. Por tanto $(X, \sigma(X, F))$ es de Hausdorff. $\square$

Teorema 1.5. *Sean X un espacio topológico y $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de espacios topológicos. Sea*

$$F = \{f_\alpha : X \longrightarrow Y_\alpha\}_{\alpha\in A}$$

una familia de funciones continuas. Una red $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \subseteq X$ converge a $x \in X$ respecto a la topología $\sigma(X, F)$ si y solo si $(f_\alpha(x_\gamma))_{\gamma\in\Gamma}$ converge a $f(x)$ para todo $\alpha \in A$.

Demostración. Supóngase que $(f_\alpha(x_\gamma))_{\gamma\in\Gamma}$ converge a $f(x)$ para todo $\alpha \in A$.

Sea $U = \cap_{i=1}^n \{f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})\}$ una vecindad básica de x en la topología $\sigma(X, F)$. Como $(f_{\alpha_i}(x_\gamma))_{\gamma\in\Gamma}$ converge a $f_{\alpha_i}(x) \in U_{\alpha_i}$, entonces existe $\gamma_i \in \Gamma$ tal que si $\delta \in \Gamma$ es tal que $\gamma_i \leq \delta$ entonces $f_{\alpha_i}(x_\delta) \in U_{\alpha_i}$, esto cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Como $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\} \subseteq \Gamma$ y Γ es un conjunto dirigido, entonces existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que $\gamma_i \leq \gamma_0$ para todo i. Supóngase que $\gamma_0 \leq \delta$, entonces $\gamma_i \leq \delta$ para todo i y por tanto se sigue que $f_{\alpha_i}(x_\delta) \in U_{a_i}$ para todo i. Como consecuencia $x_\delta \in U = \cap_{i=1}^n \{f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})\}$ y por tanto $x_\gamma \longrightarrow x$ respecto a la topología $\sigma(X, F)$.

El recíproco se sigue de la continuidad de los elementos de F.

□

1.1.1. Topología débil.

Dado un espacio de Banach X sobre un campo F, se denotará como X^* al espacio dual de X, es decir, al espacio de funciones lineales y continuas definidas en X y que toman valores en F.

Definición 1.6. *Sea X un espacio normado y considérese X^*. La topología $\sigma(X, X^*)$ se llama topología débil en X.*

Observación 1.7. *La familia X^* separa puntos y como consecuencia la topología débil es de Hausdorff.*

También, por el Teorema 1.1 se sigue que una red $(z_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \subseteq X$ converge a $z \in X$ con respecto a la topología débil si y solo si $x^*(z_n)$ converge a $x^*(z)$ para todo $x^* \in X^*$.

Observación 1.8. *Sean $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. En vista del Teorema 1.1, si*

$$\{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n\} \subseteq X^*,$$

se tiene que

$$V(x_0, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \varepsilon) := \bigcap_{i=1}^{n} (x_i^*)^{-1}(a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon) =$$

$$\{x \in X : |x_i^*(x - x_0)| < \varepsilon,\ \ 1 < i < n\},$$

donde $a_i = x_i(x_0)$*, es un abierto básico en la topología débil.*

Teorema 1.9. *Sea* X *un espacio de Banach. Sea* $C \subseteq X$ *convexo. Entonces la cerradura de* C *respecto a la topología débil coincide con la cerradura de* C *respecto a la topología definida por la norma.*

Demostración. $\overline{C}^{\|\|}$ y $\overline{C}^{w}$ representan la cerradura respecto a la topología inducida por la norma y la cerradura respecto a la topología débil, respectivamente.

Supóngase que $x_0 \notin \overline{C}^{\|\|}$. Como $\{x_0\}$ es compacto y $\overline{C}^{\|\|}$ cerrado, por el teorema de Hahn-Banach se sigue que existe un funcional lineal x^* tal que

$$\text{Re } x^*(x_0) < \alpha < \text{Re } x^*(c),$$

para todo $c \in \overline{C}^{\|\|}$. Entonces

$$V = \{x \in X : (x^*)^{-1} \left(Re^{-1} \left(-\infty, \alpha\right)\right)\}$$

es un abierto en la topología débil que contiene a x_0 y que no intersecta a C, entonces x_0 no está en $\overline{C}^{w}$. Esto prueba que $\overline{C}^{w} \subseteq \overline{C}^{\|\|}$.

Recíprocamente, $X \setminus \overline{C}^{w}$ es abierto en la topología débil y como consecuencia es abierto con respecto a la topología inducida por la norma, entonces $\overline{C}^{w}$ es cerrado respecto a ésta última. Como la cerradura es el cerrado más pequeño que contiene al conjunto se sigue que $\overline{C}^{\|\|} \subseteq \overline{C}^{w}$. □

Corolario 1.10. *Sea* X *un espacio de Banach. Entonces un conjunto convexo* $C \subseteq X$ *es cerrado con respecto a la topología débil si y solo si es cerrado con respecto a la topología inducida por la norma.*

1.1.2. Topología débil*.

Definición 1.11. *Sea* X *un espacio normado y* X^{**} *su espacio bidual. La aplicación*

$$J : X \longrightarrow X^{**}$$

dada por

$$J(x) = J_x = \phi,$$

donde $\phi \in X^{**}$ *es tal que* $\phi(y^*) = y^*(x)$ *para todo* $y^* \in X^*$*, es llamada la inyección canónica de* X *en* X^{**}*.*

Observación 1.12. *Nótese que J es lineal y acotada. También*

$$\|J(x)\| = \sup_{\|y^*\|=1} \{J(x)(y^*)\} =$$

$$\sup_{\|y^*\|=1} \{y^*(x)\} = \|x\|.$$

Esta última igualdad se sigue del teorema de Hahn-Banach, pues este garantiza la existencia de un funcional $z^* \in X^*$ tal que $\|z^*\| = 1$ y $z^*(x) = \|x\|$.

Definición 1.13. *Sea X un espacio normado. Considérese la familia de funcionales*

$$J(X) = \{J_x : x \in X\}.$$

A la topología $\sigma(X^*, J(X))$ en X^* se le llama topología débil. En ocasiones a la topología débil* también se le denota por w^*.*

Observación 1.14. *La familia $J(X)$ separa puntos y como consecuencia la topología débil* es de Hausdorff.*

También, por el Teorema 1.1 se sigue que una red $(z^*_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \subseteq X^*$ converge a $z^* \in X^*$ respecto a la topología débil si y solo si $J_x(z_\gamma)$ converge a $J_x(z^*)$ para todo $x \in X$. Esto equivale a que la red $(z^*_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \subseteq X^*$ converge a $z^* \in X^*$ respecto a la topología débil* si y solo si $z^*_\gamma(x)$ converge a $z^*(x)$ para todo $x \in X$.*

Observación 1.15. *En vista del Teorema 1.1, dados $x^*_0 \in X^*$, $\varepsilon > 0$ y*

$$x_1, x_x, \ldots, x_n \in X,$$

el conjunto

$$V(x^*_0 x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) =$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} J^{-1}_{x_i}((a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon)) = \{x^* \in X^* : |(x^* - x^*_0)(x_i)| < \varepsilon\}$$

es una vecindad de x^*_0 en la topología débil, donde $a_i = x^*_0(x_i)$ para todo i.*

Teorema 1.16 (Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.** *Sea X un espacio de normado sobre un campo F ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Entonces $B_{X^*} = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1\}$ es compacto respecto a la topología débil*.*

Demostración. Considérese el producto topológico

$$Y = \prod_{x \in X} [-\|x\|, \|x\|] \subseteq \mathbb{R}^X.$$

Nótese que si $z^* \in B_{X^*}$ entonces

$$|z^*(x)| \leq \|x\|$$

para todo $x \in X$. Esto permite definir la función

$$\Phi : B_{X^*} \longrightarrow Y$$

dada por

$$\Phi(z^*) = y$$

donde y satisface que $P_x(y) = z^*(x)$ y donde P_x es la proyección sobre el factor indexado por x. Por la definición de esta función se sigue que

$$(P_x \circ \Phi)(z^*) = z^*(x) = J_x(z^*),$$

para todo $x \in X$, lo cual muestra que Φ es continua. También es claro que Φ es inyectiva.

Sea

$$V = V(x_0^*, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} J_{x_i}^{-1}((a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon))$$

un abierto básico en la topología débil*. Entonces

$$\Phi\left(\bigcap_{i=1}^{n} J_{x_i}^{-1}((a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon))\right) = \Phi\left(\bigcap_{i=1}^{n} P_{x_i}^{-1}((a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon)) \cap Y\right)$$

es un abierto básico en Y, por lo que Φ es una función abierta en su imagen.

En resumen, se tiene que

$$\Phi : B_{X^*} \longrightarrow \Phi(B_1(0))$$

es un homeomorfismo.

Sea

$$K =$$

$$\{z \in Y : P_{x+y}(z) - P_x(z) - P_y(z) = 0,\ P_{\lambda x}(z) = \lambda P_x(z), \forall x, y \in X,\ \forall \lambda \in F\},$$

este conjunto es cerrado puesto que las proyecciones son continuas. Nótese que

$$\Phi(B_{X^*}) = K \subseteq Y.$$

Por el teorema de Tychonoff, Y es compacto y como consecuencia $\Phi(B_{X^*})$ es compacto y por tanto B_{X^*} es compacto con respecto a la topología débil*. $\square$

1.2. Operadores acotados.

1.2.1. Operadores en espacios de Banach,

Sean X y Y espacios normados y

$$T : X \longrightarrow Y$$

una función lineal. A T se le llama operador acotado si existe $M > 0$ tal que

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|$$

para todo $x \in X$. El conjunto de operadores acotados definidos en X y que toman valores en Y se denotará como $B(X, Y)$ y se sabe que éste es un espacio de Banach con la norma dada por

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \operatorname{ínf}\{M : \|T(x)\| \leq M\|x\| : \forall x \in X\}.$$

Teorema 1.17. *Sean X y Y espacios normados y $T \in B(X, Y)$. Entonces existe un operador acotado*

$$T^* : Y^* \longrightarrow X^*$$

tal que

$$T^*(y^*)x = y^*(Tx)$$

para todo $y^* \in Y^*$ y para todo $x \in X$. Este operador es llamado el adjunto de T.

Demostración. Defínase $T^*(y^*) = y^* \circ T$ para todo $y^* \in Y^*$. Es sencillo ver que T^* es lineal.

Nótese que

$$y^* \circ T : X \longrightarrow \mathbb{C}$$

es composición de operadores acotados por lo que es un funcional acotado, es decir, $y^* \circ T \in X^*$.

Sea $y^* \in Y^*$, entonces

$$\|T^*(y^*)\| = \|y^* \circ T\| \leq \|y^*\|\|T\|,$$

por tanto T^* es acotado. $\square$

Observación 1.18. *La definición del operador adjunto implica que es único.*

De la demostración del teorema anterior se sigue que

$$\|T^*(y^*)\| = \|y^* \circ T\| \leq \|y^*\|\|T\|,$$

y esto implica que $\|T^*\| \leq \|T\|$*.*

Además

$$\begin{gathered}\|T^*\| = \\ \sup\{\|Ty^*\| : \|y^*\| \leq 1\} = \\ \sup\{\sup\{|T^*y^*(x)| : \|x\| \leq 1\} : \|y^*\| \leq 1\} = \\ \sup\{\sup\{|y^*(Tx)| : \|y^*\| \leq 1\} : \|x\| \leq 1\} = \\ \|T\|.\end{gathered}$$

Es sencillo demostrar las siguientes propiedades del operador adjunto. También puede consultarse la demostración en [13].

Teorema 1.19. *Sean* X *y* Y *espacios normados. Sean* $S, T \in B(X, Y)$ *y* $\alpha \in F$*. Entonces se cumple lo siguiente.*

1. $(S + T)^* = S^* + T^*$.
2. $(\alpha T)^* = \alpha T^*$.

Teorema 1.20. *Sean* X*,* Y *y* Z *espacios normados. Sean* $T \in B(X, Y)$ *y* $S \in B(Y, Z)$*. Entonces se cumple que*

$$(ST)^* = T^* S^*.$$

Teorema 1.21. *Sean* X *y* Y *espacios normados. Sea* $T \in B(X, Y)$ *tal que* T^{-1} *existe y es acotado. Entonces* $(T^*)^{-1}$ *existe y*

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

1.2.2. Operadores en espacios de Hilbert.

Teorema 1.22 (Teorema de representación de Riesz.)**.** *Sea* H *un espacio de Hilbert y* $f \in H^*$*. Entonces existe* $h_0 \in H$ *tal que*

$$f(h) = \langle h, h_0 \rangle$$

para todo $h \in H$*. Además,* $\|h_0\| = \|f\|$*.*

Demostración. Sea $M = \ker(f)$. Puesto que f es continua se sigue que M es cerrado. Si $f = 0$ el resultado es evidente. Por esta razón es posible suponer que $M \neq H$, por lo que $M^{\perp} \neq 0$. Entonces existe un vector x_0 tal que $f(x_0) = 1$. Ahora, sea $h \in H$ y sea $\alpha = f(h)$, entonces

$$f(h - \alpha x_0) = f(h) - \alpha = 0$$

y esto muestra que $h - \alpha x_0 \in M$. Como consecuencia se tiene que

$$0 = \langle h - \alpha x_0, x_0 \rangle = \langle h, x_0 \rangle - f(h)\|x_0\|^2.$$

Tomando $h_0 = \dfrac{x_0}{\|x_0\|^2}$ se sigue que

$$f(h) = \langle h, h_0 \rangle .$$

Ahora, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$|f(h)| = |\langle h, h_0 \rangle| \leq \|h\|\|h_0\|$$

y como consecuencia

$$\|f\| \leq \|h_0\|.$$

También

$$f\left(\frac{h_0}{\|h_0\|}\right) = \|h_0\|,$$

por lo que $\|f\| = \|h_0\|$. $\square$

Definición 1.23. *Sean H y K espacios de Hilbert sobre un mismo campo $\mathbb{F}$. Una función*

$$U : H \times K \longrightarrow \mathbb{F}$$

es una forma sesquilineal si satisface que

1. $U(\alpha h_1 + \beta h_2, k) = \alpha U(h_1, k) + \beta U(h_2, k)$ *y que*
2. $U(h, \alpha k_1 + \beta k_2) = \overline{\alpha} U(h, k_1) + \overline{\beta} U(h, k_2)$,

para todos $h_1, h_2, h \in H$, $k_1, k_2, k \in K$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

Se dice que U es acotada si

$$|U(h, k)| \leq M\|h\|\|k\|$$

para alguna constante M.

Teorema 1.24. *Sean H, K espacios de Hilbert y*

$$U : H \times K \longrightarrow \mathbb{F}$$

una forma sesquilineal acotada con cota M. Entonces existen únicos operadores $A \in B(H,K)$ y $B \in B(K,H)$, tales que

$$U(h,k) = \langle Ah, k\rangle = \langle h, Bk\rangle$$

para toda $h \in H$ y $k \in K$. Además

$$\|A\|, \|B\| \leq M.$$

Demostración. Sea $h \in H$ y defínase

$$f_h : K \longrightarrow \mathcal{F}$$

como

$$f_h(k) = \overline{U(h,k)}.$$

Nótese que f_h es lineal y acotada y por el teorema de representación de Riesz debe de existir un único vector $k_h \in K$ tal que

$$f_h(k) = \langle k, k_h\rangle .$$

Esto es posible para cada $h \in H$, de este modo defínase $Ah = k_h$ el cual es lineal por la unicidad de k_h y claramente acotado. También se tiene que

$$\langle Ah, k\rangle = \langle k, Ah\rangle = U(h,k).$$

La existencia de B se demuestra de manera análoga. □

Definición 1.25. *Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert y*

$$T : H_1 \longrightarrow H_2$$

un operador acotado. Entonces al operador dado por el teorema anterior

$$T^* : H_2 \longrightarrow H_1$$

tal que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

para todo $x \in H_1$ y $y \in H_2$, se le llama adjunto de Hilbert de T.

Teorema 1.26. *Sean H y K espacios de Hilbert complejos, α un escalar y $S, T \in B(H, K)$. Entonces las siguientes propiedades se satisfacen:*

1. $(S + T)^* = S^* + T^*$.
2. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$
3. $(T^*)^* = T$
4. $(TS)^* = S^* T^*$.

La demostración puede verse en [13].

1.2.3. Operadores compactos.

Definición 1.27. *Sean X y Y espacios de Banach y $T \in B(X, Y)$. Se dice que T es compacto si para todo $M \subseteq X$ acotado se tiene que $\overline{T(M)}$ es compacto.*

Teorema 1.28. *Sean X y Y espacios de Banach y $T \in B(X, Y)$. T es un operador compacto si y solo si para cada sucesión acotada $(x_n)_n \subseteq X$, la sucesión $(Tx_n)_n$ tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada en X y $T \in B(X, Y)$ un operador compacto, entonces $\overline{(Tx_n)_n}$ es compacto en Y. Como $(Tx_n)_n \subseteq \overline{(Tx_n)_n}$, entonces $(Tx_n)_n$ tiene una subsucesión convergente.

Para el recíproco supóngase que para toda sucesión acotada $(x_n)_n \subseteq X$, la sucesión $(Tx_n)_n$ tiene una subsucesión convergente. Sea $B \subseteq X$ acotado. Sea $(y_n)_n \subseteq T(B)$ una sucesión, entonces existe una sucesión $(x_n)_n \subseteq B$ tal que $Tx_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es claro que $(x_n)_n$ es acotada, por lo que $(Tx_n)_n$ tiene una subsucesión convergente, es decir, $(y_n)_n$ tiene una subsucesión convergente, y como esta sucesión es arbitraria se sigue que $\overline{T(B)}$ es compacto. $\square$

Definición 1.29. *Sean X y Y espacios de Banach. Sea*

$$T : X \longrightarrow Y$$

un operador acotado. Se dice que T es de rango finito si su imagen es un espacio vectorial de dimensión finita.

Lema 1.30. *Sean X y Y espacios de Banach. Si*

$$T : X \longrightarrow Y$$

es acotado de rango finito, entonces es compacto.

Demostración. Sea $B \subseteq X$ acotado, entonces como T es acotado se sigue que $T(B)$ es acotado. Nóte que si $T(B)$ es acotado entonces $\overline{T(B)}$ es acotado. Si el rango de T, $T(X)$, es dimensionalmente finito, entonces como todas las normas en un espacio de dimensión finita son equivalentes, se sigue que los conjuntos cerrados y acotados en $T(X)$ son compactos. Finalmente como $\overline{T(B)}$ es acotado y cerrado en $T(X)$, entonces es compacto. $\square$

Teorema 1.31. *Sean H y K espacios de Hilbert. Sea $T \in B(X, Y)$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *T es compacto.*
2. *Existe una sucesión $(T_n)_n \in B(H, K)$ de operadores de rango finito tales que*
$$\|T - T_n\| \longrightarrow 0.$$

Demostración. Primero supóngase que T es compacto, entonces $\overline{T(B_1(0))}$ es compacto en K y por lo tanto es separable. Entonces se sigue que $L = \overline{T(H)}$ es separable. Como L es un espacio de Hilbert separable existe un conjunto ortonormal numerable.

Sea $M = \{e_1, e_2, ...\}$ un conjunto ortonormal en L, tómese el conjunto de proyecciones
$$P_n : K \longrightarrow \langle \{e_1, e_2, ..., e_n\} \rangle ,$$
para todo n. Defínase $T_n = P_n T$ y nótese que cada T_n es de rango finito.

Por otro lado, si $k = Th \in L$, entonces
$$\|P_n k - k\| \longrightarrow 0,$$
y esto implica que
$$\|T_n h - Th\| \longrightarrow 0.$$
Puesto que $\overline{T(B_1(0))}$ es compacto, dado $\varepsilon > 0$, existen $h_1, h_2, ..., h_n \in B_1(0)$ tal que
$$\overline{T(B_1(0))} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\frac{\varepsilon}{3}}(Th_i).$$
Así, si $\|h\| \leq 1$, existe h_j tal que $\|Th - Th_j\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Ahora, para cada entero n se sigue que
$$\|Th - T_n h\| \leq$$
$$\|Th - Th_j\| + \|Th_j - T_n h_j\| + \|P_n(Th_j - Th)\| \leq$$
$$\|Th - Th_j\| + \|Th_j - T_n h_j\| + \|Th_j - Th\| =$$

$$\begin{aligned} &2\|Th - Th_j\| + \|Th_j - T_nh_j\| \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \|Th_j - T_nh_j\|, \end{aligned}$$

como $\|T_nh - Th\| \longrightarrow 0$, podemos elegir n_0 tal que si $n > n_0$ entonces

$$\|Th_j - T_nh_j\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $1 \leq j \leq n$. Así,

$$\|Th - T_nh\| < \varepsilon.$$

Entonces T_n converge uniformemente a T en $B_1(0)$ por lo que

$$\|T - T_n\| \longrightarrow 0.$$

$\square$

1.3. Álgebras de Banach y C*-Módulos de Hilbert

En esta sección se darán algunas definiciones y se presentarán algunos conceptos básicos respecto a las álgebras C^* y a los C* módulos de Hilbert los cuales serán de gran utilidad para algunos de los resultados centrales de este trabajo.

1.3.1. Álgebras C*.

Definición 1.32. *Un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ es una álgebra compleja normada y unitaria tal que es un espacio de Banach con la métrica inducida por la norma y además satisface que*

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|,$$

para todos $x, y \in \mathcal{A}$.

Definición 1.33. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach. Una involución es una función*

$$* : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

que satisface lo siguiente:

1. $(a^*)^* = a$ *para todo* $a \in \mathcal{A}$

2. $(\alpha a + \beta b)^* = \overline{\alpha} a^* + \overline{\beta} b^*$, *para todos* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *y para todos* $a, b \in \mathcal{A}$

3. $(ab)^* = b^* a^*$ *para todos* $a, b \in \mathcal{A}$.

Definición 1.34. *Un álgebra* C^* *es un álgebra de Banach* $\mathcal{A}$ *con una involución* $*$ *que satisface*

$$\|a^* a\| = \|a\|^2.$$

Definición 1.35. *Sean* $\mathcal{A}$ *un álgebra de Banach y* $x \in \mathcal{A}$. *Se define el espectro de* x *como el conjunto*

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - x \text{ no es invertible}\},$$

donde 1 *denota al neutro multiplicativo de* $\mathcal{A}$.

También se define el radio espectral de x *como el número*

$$\rho(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Teorema 1.36. *Sean* $\mathcal{A}$ *un álgebra de Banach y* $x \in \mathcal{A}$. *Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.*

1. $\sigma(x)$ *es compacto y no vacío.*

2. *El radio espectral satisface que*

$$\rho(x) = \lim_{n \to \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

La demostración puede verse en [22] (Teorema 10.13).

Definición 1.37. *Sea* $\mathcal{A}$ *un álgebra de Banach. Un funcional lineal* ϕ *definido en* $\mathcal{A}$ *se dice multiplicativo si:*

1. $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ *y,*

2. $\phi(1) = 1$.

Al conjunto de funcionales multiplicativos sobre un álgebra $\mathcal{A}$ se le denotará como $M_{\mathcal{A}}$ y si no hay lugar para confusión, simplemente se denotará por M.

Teorema 1.38. *Sea* $\mathcal{A}$ *un álgebra de Banach. Un funcional lineal* $\phi \in M$ *tiene norma 1.*

Demostración. Nótese que si $a \in \mathcal{A}$, entonces

$$\phi(a - \phi(a)1) = 0.$$

Así cada elemento de $\mathcal{A}$ puede escribirse como $\lambda + a$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ y para algún $a \in \ker(\phi)$.

Entonces,

$$\|\phi\| = \sup_{b \neq 0} \frac{|\phi(b)|}{\|b\|} = \sup_{a \in \ker(\phi),\, \lambda \neq 0} \frac{|\phi(\lambda + a)|}{\|\lambda + a\|} =$$

$$\sup_{a \in \ker(\phi),\, \lambda \neq 0} \frac{|\lambda|}{\|\lambda + a\|} = \sup_{a \in \ker(\phi),\, \lambda \neq 0} \frac{1}{\|1 + a\|} = 1.$$

Para esta última igualdad, nótese que si $\|1 + a\| \leq 1$ se tendría que a es invertible y como

$$\phi(aa^{-1}) = \phi(a)\phi(a^{-1}) = 1,$$

a no estaría en $\ker \phi$. Entonces $\|a + \lambda\| \geq 1$ para todo $a \in \ker \phi$, pero para $a = 0$ se sigue que $\dfrac{1}{\|1 + a\|} = 1$. □

Teorema 1.39. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach. Entonces M es compacto respecto a la topología débil*.*

Demostración. El teorema anterior muestra que $M \subseteq B_1(0) \subseteq \mathcal{A}^*$.

Sea $(\phi_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ una red de elementos en M que converge respecto a la topología débil* a $\phi \in \mathcal{A}^*$.

Como $\phi_\gamma \longrightarrow \phi$ respecto a la topología débil*, entonces

$$\phi_\gamma(1) \longrightarrow \phi(1),$$

por tanto $\phi(1) = 1$, puesto que $\phi_\gamma(1) = 1$.

Sean $a, b \in \mathcal{A}$, entonces $\phi_\gamma(a)\phi_\gamma(b) = \phi_\gamma(ab)$, por lo que

$$\phi_\gamma(ab) = \phi(a)_\gamma \phi(b)_\gamma \longrightarrow \phi(ab)$$

y

$$\phi_\gamma(ab) = \phi(a)_\gamma \phi(b)_\gamma \longrightarrow \phi(a)\phi(b),$$

como consecuencia $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$. Por tanto $\phi \in M$ y por el teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki se tiene que M es compacto. □

Definición 1.40. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*. Un elemento $a \in \mathcal{A}$ se llama autoadjunto si $a^* = a$.*

Teorema 1.41. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*. Si $a \in \mathcal{A}$ es autoadjunto, entonces $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.*

La demostración puede consultarse en [22]

Definición 1.42. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*. Un elemento $a \in \mathcal{A}$ es positivo si es autoadjunto y $a = b^*b$ para algún $b \in \mathcal{A}$.*

Definición 1.43. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*. Un funcional lineal f definido en en $\mathcal{A}$ es positivo si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{A}$ positivo.*

Definición 1.44. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*. Un estado es un funcional lineal acotado ϕ definido en $\mathcal{A}$ tal que $\phi(xx^*) \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{A}$ y $\phi(1) = 1$.*

Lema 1.45. *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y $a \in \mathcal{A}$. Entonces existen $x, y \in \mathcal{A}$ autoadjuntos tales que $a = x + iy$.*

Demostración. Sean $x = \frac{1}{2}(a+a^*)$ y $y = \frac{1}{2i}(a-a^*)$, los cuales son autoadjuntos y cumplen que $a = x + iy$. □

Lema 1.46. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y $x \in \mathcal{A}$ autoadjunto. Entonces*

$$x = a^*a - b^*b$$

para algunos $a, b \in \mathcal{A}$.

Demostración. Sean

$$a = \frac{x+1}{2}$$

y

$$b = \frac{x-1}{2}.$$

Es sencillo ver que

$$x = aa^* - bb^*.$$

□

Corolario 1.47. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y $a \in \mathcal{A}$ autoadjunto. Si ϕ es un estado en $\mathcal{A}$ entonces $\phi(a) \in \mathbb{R}$.*

Teorema 1.48. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y ϕ un estado en $\mathcal{A}$. Entonces*

$$\phi(a^*) = \overline{\phi(a)}.$$

Demostración. Sea $a \in \mathcal{A}$, entonces por el Lema 1.45 existen $x, y \in \mathcal{A}$ autoadjuntos tales que $a = x + iy$. Entonces

$$\phi(a^*) = \phi(x^* - iy^*) = \phi(x) - i\phi(y),$$

como $\phi(x)$ y $\phi(y)$ están en $\mathbb{R}$, entonces

$$\phi(x) - i\phi(y) = \overline{\phi(x) + i\phi(y)} = \overline{\phi(a)}.$$

$\square$

Teorema 1.49 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz generalizada)**.** *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y ϕ un estado en $\mathcal{A}$. Entonces*

$$|\phi(b^*a)|^2 \leq \phi(a^*a)\phi(b^*b).$$

La demostración de este resultado se puede hacer de manera análoga a la demostración de Cauchy-Schwarz puesto que $\langle a, b\rangle = \phi(b^*a)$ es un semi producto interior.

Teorema 1.50. *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y ϕ un estado en $\mathcal{A}$. Entonces $\|\phi\| = 1$.*

Demostración. Sea $x \in \mathcal{A}$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz generalizada se tiene que

$$|\phi(x)|^2 \leq \phi(xx^*)$$

pero

$$\phi(xx^*) \leq \|\phi\|\|xx^*\| = \|\phi\|\|x\|^2.$$

Finalmente

$$|\phi(x)| \leq (\|\phi\|)^{\frac{1}{2}}\|x\|$$

y esto implica que

$$\|\phi\| \leq (\|\phi\|)^{\frac{1}{2}}$$

por lo que $\|\phi\| \in [0, 1]$, pero $\phi(1) = 1$ y esto implica que $\|\phi\| = 1$. $\square$

Teorema 1.51. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y sea E el conjunto de estados definidos en $\mathcal{A}$. Entonces E es compacto con respecto a la topología débil*.*

Demostración. Notamos que si $\phi \in E$ entonces $\|\phi\| = 1$ y por tanto E es acotado. Sea $(\phi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \subseteq E$ una red que converge a $\phi \in \mathcal{A}^*$ respecto a la topología débil*. Sea $x \in \mathcal{A}$. Nótese que $\phi_\gamma(xx^*) \geq 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$ y como

$$\phi_\gamma(xx^*) \longrightarrow \phi(xx^*),$$

se sigue que $\phi(xx^*) \geq 0$.

También nótese que $\phi_\gamma(1) = 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$ y como

$$\phi_\gamma(1) \longrightarrow \phi(1),$$

se sigue que $\phi(1) = 1$.

Como $\phi(xx^*) \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{A}$ y $\phi(1) = 1$ se sigue que $\phi \in E$ y por tanto E es cerrado con respecto a la topología débil*. Como E es acotado se tiene que E es compacto en la topología débil*.

$\square$

Definición 1.52. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra conmutativa normada y sea Δ el conjunto de todos los homomorfismos complejos de $\mathcal{A}$. La función*

$$\widehat{\ }: \mathcal{A} \longrightarrow C(\Delta)$$

dada para $x \in \mathcal{A}$ por

$$\widehat{x}(h) = h(x)$$

para todo $h \in \Delta$, es llamada la transformación de Gelfand.

A Δ se le puede dotar de la topología débil respecto a la familia

$$\{\widehat{x} : x \in \mathcal{A}\}.$$

A esta topología se le llama topología de Gelfand. El conjunto Δ dotado de la topología de Gelfand es compacto y Hausdorff, este resultado está demostrado en [22] (Teorema 11.9) .

A Δ dotado de la topología de Gelfand se le llama ideal máximal de $\mathcal{A}$.

Para $x \in \mathcal{A}$ el rango de la función $\widehat{x}$ es $\sigma(x)$ y como consecuencia se tiene que

$$\rho(x) = \|\widehat{x}\|_\infty$$

donde

$$\|\widehat{x}\|_\infty = \text{máx}\{|\widehat{x}(y)| : y \in \Delta\}.$$

Este resultado es el Teorema 11.9 en [22].

Teorema 1.53 (Gelfand-Naimark.)**.** *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra C^* conmutativa y Δ el ideal maximal. Entonces la transformación de Gelfand es un isomorfismo isométrico de $\mathcal{A}$ en $C(\Delta)$. Además se satisface que*

$$h(x^*) = \overline{h(x)}$$

para $x \in \mathcal{A}$ y $h \in \Delta$.

Demostración. Primero supóngase que $u \in \mathcal{A}$ es autoadjunto. Sea $h \in \Delta$ y sea $z = u + it1$ para $t \in \mathbb{R}$ y escríbase $h(u) = \alpha + i\beta$ donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces se sigue que

$$h(z) = \alpha + i(\beta + t)$$

y que

$$zz^* = u^2 + t^2 1,$$

por lo que

$$\alpha^2 + (\beta + t)^2 = |h(z)|^2 \leq$$

$$\|z\|^2 = \|zz^*\| \leq \|u\| + t^2$$

puesto que h es multiplicativa y por tanto tiene norma uno. Como consecuencia

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \leq \|u\|^2.$$

Esto se cumple para todo t real, y por tanto $\beta = 0$.

Sea $x \in \mathcal{A}$, entonces por el Lema 1.43 $x = u + iv$ donde $u, v \in \mathcal{A}$ son autoadjuntos. Entonces

$$h(x^*) = h(u) - ih(v) = \overline{h(x)},$$

esta igualdad se debe a que h toma valores reales en elementos autoadjuntos.

La imagen de $\mathcal{A}$ bajo la transformación de Gelfand es cerrada bajo conjugación, y entonces por el Teorema de Stone-Weierstrass ([22] Teorema 5.7), se tiene que $\overline{\widehat{\mathcal{A}}} = C(\Delta)$, es decir, $\widehat{\mathcal{A}}$ es denso en $C(\Delta)$.

Si $x \in \mathcal{A}$ entonces $y = xx^*$ es autoadjunto. Así

$$\|y^2\| = \|xx^*xx^*\| = \|xx^*\|\|xx^*\| = \|x\|^4$$

y por otro lado

$$\|y\|^2 = \|xx^*\|^2 = \|x\|^4.$$

Por tanto

$$\|y^2\| = \|y\|^2$$

e inductivamente se sigue que

$$\|y^{2^n}\| = \|y\|^{2^n}.$$

Luego, por el Teorema 1.36, se sigue que

$$\rho(y) = \|y\|$$

y por el comentario hecho antes del teorema se tiene que

$$\|\widehat{y}\|_\infty = \rho(y) = \|y\|.$$

Puesto que

$$\widehat{y} = \widehat{xx^*} = \widehat{x}\overline{\widehat{x}}$$

se sigue que

$$\|\widehat{x}\|_\infty^2 = \|\widehat{y}\|_\infty = \|y\| = \|x\|^2$$

y por tanto

$$x \longrightarrow \widehat{x}$$

es una isometría. Por esta razón $\widehat{\mathcal{A}}$ es cerrado y como es denso en $C(\Delta)$ entonces deben ser iguales. $\square$

Teorema 1.54. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* que contiene un elemento x tal que los polinomios en x y x^* son densos en $\mathcal{A}$, entonces la fórmula*

$$\widehat{(\Psi f)} = f \circ \widehat{x}$$

define un isomorfismo isométrico

$$\Psi : C(\sigma(x)) \longrightarrow \mathcal{A}$$

que satisface

$$\Psi \widehat{f} = (\Psi f)^*.$$

Teorema 1.55. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*. Si $b \in \mathcal{A}$, entonces existe un funcional positivo tal que $F(1) = 1$ y $f(bb^*) = \|b\|^*$.*

Demostración. Sea $a_0 = bb^*$, como $a_0 \geq 0$ entonces $\sigma(a_0) \subseteq [0, \infty)$. Considérese $\mathcal{A}_0$ el álgebra generada por 1 y a_0, y sea Δ_0 como en la Definición 1.52 sobre el álgebra $\mathcal{A}_0$. Entonces se sigue que $\widehat{\mathcal{A}_0} = C(\Delta_0)$, por lo que $\widehat{a_0}$ es una función real no negativa definida en Δ_0 y dicha función tiene un máximo en algún $h \in \delta_0$. Así

$$\widehat{a_0}(h) = \|\widehat{a_0}\|_\infty = \|a_0\| = \|b\|^2.$$

Defínase el funcional f en A_0 como

$$f(a) = \widehat{a}(h),$$

entonces se sigue que $f(1) = 1$ y que $f(bb^*) = \|b\|^2$. Nótese que f es acotado de norma 1 puesto que

$$|f(x)| = |\widehat{x}(h)| \leq \|\widehat{x}\| = \|x\|$$

para todo $x \in \mathcal{A}_0$. Por el Teorema de Hahn-Banach f tiene una extensión continua F definida en $\mathcal{A}$ y es tal que que $\|F\| = \|f\| = 1$.

Resta ver que F es positivo, es decir, $F(yy^*) \geq 0$ para todo $y \in \mathcal{A}$. Sea $y \in \mathcal{A}$ y sea A_1 el álgebra generada por 1 y $x_0 = yy^*$ y sea Δ_1 como en la Definición 1.52 sobre $\mathcal{A}$. Nótese que F define un funcional lineal ϕ sobre $C(\Delta_1)$ por la ecuación

$$\phi(\widehat{x}) = F(x),$$

para todo $x \in \mathcal{A}_1$. Se sigue que

$$\phi(1) = F(1) = f(1) = 1$$

y que

$$|\phi(\widehat{x})| \leq \|\widehat{x}\|_\infty = \|x\|.$$

Por tanto $\|\phi\| = 1$. Para asegurar que $\phi(\widehat{x}) \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{A}_1$ tal que $\widehat{x} \geq 0$, se usará el Teorema 5.26 de [22] que asegura que si L es un funcional definido en $C(X)$, donde X es un espacio normado y $C(X)$ tiene la norma del supremo, entonces si $f \in C(X)$ y $0 \leq f(x)$, se tiene que $0 \leq L(f)$. En particular como $yy^* \geq 0$ se sigue que

$$\phi(\widehat{yy^*}) = F(yy^*) \geq 0.$$

$\square$

Teorema 1.56. *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y $u \in \mathcal{A}$ distinto de cero. Entonces existe un espacio de Hilbert H_u y un homomorfismo*

$$T_u : \mathcal{A} \longrightarrow B(H_u)$$

que satisface lo siguiente:

1. $T_u(1) = I$
2. $T_u(x^*) = (T_u(x))^*$
3. $\|T_u(x)\| \leq \|x\|$
4. $\|T_u(u)\| = \|u\|$.

Demostración. Sea $u \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$, entonces por el teorema anterior existe un funcional positivo F definido en $\mathcal{A}$ que satisface $F(1) = 1$ y $F(uu^*) = \|u\|^2$. Consíderese

$$Y = \{y \in \mathcal{A} : F(xy) = 0, \, \forall x \in \mathcal{A}\}$$

el cual es cerrado pues F es continua, además de ser un ideal izquierdo. Denótese por $x^{'}$ al conjunto $x + Y$, para cada $x \in \mathcal{A}$. Defínase

$$(a^{'}, b^{'}) = F(b^* a),$$

el cual satisface las condiciones de producto interior en $\dfrac{\mathcal{A}}{Y}$ y está bien definido.

Sea H_u la compleción de $\dfrac{\mathcal{A}}{Y}$ con la norma $\|a\| = F(aa^*)^{\frac{1}{2}}$. Defínase el operador $T(x)$ sobre $\dfrac{\mathcal{A}}{Y}$ como

$$T(x)a^{'} = (xa)^{'}.$$

Si $a - b \in Y$, entonces $x(a - b) \in Y$, entonces $(x(a - b))^{'} = 0^{'}$, por lo que $T(x)a^{'} = T(x)b^{'}$. Por tanto el operador $T(x)$ está bien definido y por definición se sigue que

$$T(1)(a^{'}) = a^{'},$$

es decir, $T(1) = I$. Es claro que la función

$$T_u : \mathcal{A} \longrightarrow \frac{\mathcal{A}}{Y} \subseteq B(H_u)$$

definida por

$$T_u x = T(x),$$

es lineal y que

$$T(x_1)T(x_2) = T(x_1 x_2)$$

para todos $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$.

Ahora se demostrará que

$$\|T(x)\| \leq \|x\|$$

para todo $x \in \mathcal{A}$. Nótese que

$$\|T(x)(a^{'})\|^2 = ((xa)^{'}, (xa)^{'}) = F(a^* x^* xa).$$

Para a fijo, defínase $G(x) = F(a^*xa)$, el cual es un funcional positivo y por tanto

$$G(x^*x) \leq G(1)\|x\|^2.$$

Entonces se sigue que

$$\|T(x)(a^{'})\|^2 = G(x^*x) \leq F(a^*a)\|x\|^2 = \|a^{'}\|^2\|x\|^2$$

y esto implica que

$$\|T(x)\| \leq \|x\|.$$

Ahora,

$$(T(x^*)a^{'}, b^{'}) =$$
$$((x^*a)^{'}, b^{'}) = F(b^*x^*a) = F((xb)^*a) = (a^{'}, (xb)^{'}) = (a^{'}, T(x)b^{'}) =$$
$$((T(x))^*a^{'}, b^{'}),$$

por lo que $T(x^*) = (T(x))^*$.

Finalmente, nótese que

$$\|u\|^2 = F(u^*u) = \|T(u)1^{'}\| \leq \|T(u)\|^2$$

puesto que $\|1^{'}\|^2 = F(1^*1) = F(e) = 1$, pero también

$$\|T(u)\| \leq \|u\|.$$

Por tanto

$$\|T(u)\| = \|u\|.$$

□

Teorema 1.57. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*, entonces existe un *-isomorfismo isométi-co de $\mathcal{A}$ en $B(H)$, para algún espacio de Hilbert H.*

Demostración. Considérese

$$G = \prod_{u \in \mathcal{A}} H_u$$

y sean

$$\{\pi_u : G \longrightarrow H_u\}_{u \in \mathcal{A}}$$

las proyecciones definidas en el producto, donde H_u es el espacios construido en el teorema anterior para cada $u \in \mathcal{A}$. Sea

$$H = \left\{ h \in G : \sum_u \|\pi_u(h)\|^2 < \infty \right\}.$$

Nótese que si $h \in H$ entonces la convergencia de la serie $\sum_u \|\pi_u(h)\|^2 < \infty$ implica que $\pi_u(h) \neq 0$ a lo mas para una cantidad numerable de elementos $u \in \mathcal{A}$.

Defínase
$$\langle h, g \rangle = \sum_u \langle \pi_u(h), \pi_u(g) \rangle,$$
es fácil verificar que es un producto interior en H y que H es completo respecto a la norma inducida por este producto.

Sea $x \in \mathcal{A}$. A x se le asociará el operador
$$T(x) : H \longrightarrow H$$
que satisface $\pi_u(T(x)h) = T_u(x)(\pi_u(h))$, donde T_u es como en el teorema anterior. Nótese que
$$\|T(x)\| = \sup_u \{\|T_u\|\}$$
pues si $h \in H$ tiene norma uno y es tal que $\pi_u(h) = 0$ para todo $u \in \mathcal{A} \setminus \{u_0\}$ y $\pi_{u_0}(h) = h_0 \in H_{u_0}$, donde h_0 tiene norma menor o igual a 1, entonces
$$\|T(x)(h)\| = \|T_{u_0}(x)(h_0)\| \leq \|T_{u_0}\| \leq \sup_u \{\|T_u\|\}$$
y por tanto
$$\|T(x)\| \leq \sup_u \{\|T_u\|\}.$$

Por el teorema anterior se tiene que
$$\|T_u(x)\| \leq \|x\| = \|T_x(x)\|$$
y por tanto
$$\|T(x)\| = \sup_u \{\|T_u\|\} = \|x\|.$$

$\square$

1.3.2. C*-Módulos de Hilbert

Definición 1.58. *Un $\mathcal{A}$ pre-módulo de Hilbert es un espacio vectorial complejo E que es un módulo izquierdo sobre un álgebra C* $\mathcal{A}$ junto con una función*
$$\langle\ ,\ \rangle : E \times E \longrightarrow \mathcal{A}$$
que satisface:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$

2. Si $\langle x, x \rangle = 0$, entonces $x = 0$

3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$

4. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y \rangle$

5. $\langle x, ay \rangle = a \langle x, y \rangle$

para todos $x, y, z \in E$ *y* $a \in \mathcal{A}$.

Ejemplo 1.59. *Si* E *es un espacio con producto interior complejo entonces es un* $\mathbb{C}$ *pre-módulo de Hilbert.*

Ejemplo 1.60. *Sea* $\mathcal{A}$ *un álgebra* C^* *y sea* I *un ideal izquierdo de* $\mathcal{A}$. *Defínase*

$$\langle a, b \rangle = a^* b$$

para todos $a, b \in I$. *Esta función hace a* I *un* $\mathcal{A}$ *pre-módulo de Hilbert y en particular* $\mathcal{A}$ *lo es.*

Ejemplo 1.61. *Sea* $\{E_i\}_{i=1}^n$ *una familia de* $\mathcal{A}$ *pre-módulos de Hilbert. Sea*

$$E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$$

la suma directa como módulos. Entonces E *es un* $\mathcal{A}$ *pre-módulo de Hilbert con la acción dada por*

$$a(x_1, x_2, ..., x_n) = (ax_1, ax_2, ..., ax_n)$$

y con la función dada por

$$\langle (x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i, y_i \rangle.$$

Teorema 1.62. *Sean* E *un* $\mathcal{A}$ *pre-módulo de Hilbert y* $x, y \in E$. *Entonces*

$$\langle y, x \rangle \langle x, y \rangle \leq \| \langle x, x \rangle \| \langle y, y \rangle .$$

Demostración. Sean $x, y \in E$, si $\langle x, y\rangle = 0$ es claro el resultado. Supóngase, sin perdida de generalidad, que $\| \langle x, x\rangle \| = 1$. Sea $a \in \mathcal{A}$, entonces como $\langle ax, ax\rangle = a \langle ax, x\rangle = a(\langle x, ax\rangle)^* = a(a \langle x, x\rangle)^* = a \langle x, x\rangle^* a^*$ se sigue que

$$0 \leq \langle ax - y, ax - y\rangle = \langle ax, ax\rangle + \langle ax, -y\rangle + \langle -y, ax\rangle + \langle -y, -y\rangle =$$

$$a^* \langle x, x\rangle a - \langle y, x\rangle a - a^* \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leq$$
$$a^* a - \langle y, x\rangle a - a^* \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle .$$

Esta última linea se debe al hecho que en un álgebra C^* $\mathcal{A}$, si $c \in \mathcal{A}$ es positivo, entonces $a^* c a \leq \|c\| a a^*$ (la demostración puede consultarse en [19]). Tomando $a = \langle x, y\rangle$ se sigue que

$$a^* a \leq \langle y, y\rangle$$

y de esta desigualdad se deduce el caso general. □

Teorema 1.63. *Sea E un $\mathcal{A}$ pre-módulo de Hilbert y $x, y \in E$. Entonces*

$$\| \langle x, y\rangle \| \leq \|x\| \|y\|.$$

Demostración. Por el Teorema 1.62 y por la definición de la norma es inmediato. □

Nótese que en un $\mathcal{A}$ pre-módulo de Hilbert E tiene sentido la siguiente ecuación

$$\|x\| = \| \langle x, x\rangle \|^{\frac{1}{2}}.$$

Del Teorema 1.63 se deduce la desigualdad del triángulo y esto de manera similar a la demostración para espacios de Hilbert.

Definición 1.64. *A un $\mathcal{A}$ pre-módulo de Hilbert E se le llama C^* módulo de Hilbert si es completo con respecto a la norma definida en el comentario anterior.*

Observación 1.65. *Nótese que la compleción de Banach de un $\mathcal{A}$ pre-módulo de Hilbert E es un C^* módulo de Hilbert.*

Nótese que 1.58 es un ejemplo de un C^* módulo de Hilbert y en 1.59 si los espacios E_i son C^* módulos de Hilbert entonces E también lo es.

Proposición 1.66. *Sea $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ una familia numerable de $\mathcal{A}$ pre-módulos de Hilbert. Considérese el conjunto*

$$E = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in E_n \ y \ \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x_n, x_n\rangle \right\| < \infty \right\}$$

el cual es un C^* módulo de Hilbert con las operaciones dadas por

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$a(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

y con la función definida por

$$\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_n, y_n \rangle$$

para todos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ y $a \in \mathcal{A}$.

A E se le llama suma directa de la familia $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ y se suele denotar de manera análoga al caso finito

$$E = \bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n$$

Demostración. Primero nótese que el producto

$$\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_n, y_n \rangle$$

para $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ está bien definido pues si $J \subseteq \mathbb{N}$ es finito se sigue que

$$\left\| \sum_{n\in J} \langle x_i, y_i \rangle \right\| \leq \left\| \sum_{n\in J} \langle x_i, x_i \rangle \right\| \left\| \sum_{n\in J} \langle y_i, y_i \rangle \right\|.$$

La desigualdad anterior se sigue aplicando el Teorema 1.62 al espacio $E = \bigoplus_{n\in J} E_n$, el cual es una suma finita. Puesto que

$$\left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_i, x_i \rangle \right\|$$

y

$$\left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle y_i, y_i \rangle \right\|$$

convergen, entonces se sigue que

$$\left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_i, y_i \rangle \right\|$$

converge.

Sea $(u_k)_k \in E$ una sucesión de Cauchy y para todo k sea $u_k = (x_{n,k})_n$ donde $x_{n,k} \in E_n$ para todo n. Nótese que

$$\|x_{n,k} - x_{n,l}\|^2 =$$

$$\| \langle x_{n,k} - x_{n,l}, x_{n,k} - x_{n,l} \rangle \| \leq$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \langle x_{i,k} - x_{i,l}, x_{i,k} - x_{i,l} \rangle \right\| =$$

$$\|u_k - u_l\|^2,$$

pues en $\sum_{i=1}^{\infty} \langle x_{i,k} - x_{i,l}, x_{i,k} - x_{i,l} \rangle$ los sumandos son positivos. Por tanto $(x_{n,k})_k$ es de Cauchy en E_n y por tanto convergente a $v_n \in E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $v = (v_n)_n$ y entonces se sigue que $v \in E$ y $u_k \longrightarrow v$.

Sea $\varepsilon > 0$, entonces si $n \in \mathbb{N}$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \sum_{i=K}^{\infty} \langle x_{i,n}, x_{i,n} \rangle \right\| < \varepsilon.$$

Entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\left\| \sum_{i=K}^{K+k} (\langle x_{i,m}, x_{i,m} \rangle + \langle x_{i,n} - x_{i,m}, x_{i,m} \rangle + \langle x_{i,m}, x_{i,n} - x_{i,m} \rangle + \langle x_{i,n}, x_{i,n} \rangle) \right\| =$$

$$\left\| \sum_{i=K}^{K+k} \langle x_{i,n} - x_{i,m}, x_{i,n} - x_{i,m} \rangle \right\| \leq \left\| \sum_{i=K}^{\infty} \langle x_{i,n} - x_{i,m}, x_{i,n} - x_{i,m} \rangle \right\| < \varepsilon.$$

Entonces se sigue por la desigualdad del triángulo inversa que

$$\left\| \sum_{i=K}^{\infty} \langle x_{i,m}, x_{i,m} \rangle \right\| \leq$$

$$\varepsilon + \left\| \sum_{i=K}^{\infty} \langle x_{i,m}, x_{i,m} \rangle \right\| +$$

$$\left\| \sum_{i=K}^{K+k} \langle x_{i,m}, x_{i,m} \rangle + \langle x_{i,n} - x_{i,m}, x_{i,m} \rangle \right\| + \left\| \sum_{i=K}^{K+k} \langle x_{i,m}, x_{i,n} - x_{i,m} \rangle \right\| \leq$$

$$2\varepsilon +$$

$$\left\|\sum_{i=K}^{K+k} \langle x_{i,m}, x_{i,m}\rangle + \langle x_{i,n} - x_{i,m}, x_{i,m}\rangle\right\| + \left\|\sum_{i=K}^{K+k} \langle x_{i,m}, x_{i,n} - x_{i,m}\rangle\right\|$$

$$2\varepsilon + 2\left\|\sum_{i=K}^{K+k} \langle x_{i,n} - x_{i,m}, x_{i-n} - x_{i,m}\rangle\right\|^{\frac{1}{2}} \left\|\sum_{i=K}^{K+k} \langle x_{i,m}, x_{i,m}\rangle\right\|^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$2\varepsilon + 2\varepsilon^{\frac{1}{2}} \left\|\sum_{i=K}^{K+k} \langle x_{i,m}, x_{i,m}\rangle\right\|^{\frac{1}{2}},$$

y esto pasa si y solo si $\left\|\sum_{i=K}^{K+k} \langle x_{i,m}, x_{i,m}\rangle\right\|^{\frac{1}{2}} \leq (1+\sqrt{3})^2\varepsilon < 8\varepsilon$. Tomando límite $m \to \infty$ se sigue que

$$\left\|\sum_{i=K}^{K+k} \langle v_i, v_i\rangle\right\| \leq 8\varepsilon$$

y esto implica que $v \in E$, pues k es arbitrario. $\square$

Capítulo 2

Una caracterización de la ortogonalidad de Birkhoff-James para operadores

Sea H un espacio de Hilbert real o complejo. Nótese que si $x, y \in H$ son tales que $\langle x, y\rangle = 0$ entonces se tiene que

$$\|x + \lambda y\|^2 = \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \|x\|^2 + |\lambda|^2 \|y\|^2 \geq \|x\|^2$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Por otro lado si $\langle x, y\rangle \neq 0$, tomando $\lambda = -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ se sigue que

$$\|x + \lambda y\|^2 =$$
$$\left\langle x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y, x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y \right\rangle = \|x\|^2 - 2\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle^2}\|y\|^2 =$$
$$\|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} < \|x\|^2.$$

De lo anterior se puede concluir que en un espacio de Hilbert real o complejo dos elementos son ortogonales si y solo si

$$\|x\| \leq \|x + \lambda y\|,$$

para todo escalar λ. Esto motiva la siguiente definición que permite introducir una noción de ortogonalidad en espacios de Banach.

Definición 2.1. *Sea X un espacio de Banach real o complejo y $x, y \in X$. Se dice que x y y son Birkhoff-James ortogonales si*

$$\|x\| \leq \|x + \lambda y\|$$

para todo escalar λ.

Observación 2.2. *La ortogonalidad de Birkhoff-James depende fuertemente de la norma. En* $\mathbb{R}^2$ *con la norma euclidiana se tiene que*

$$\|(1,1)+\lambda(1,0)\| = \sqrt{(1+\lambda)^2+1}$$

y

$$\|(1,1)\| = \sqrt{2}$$

por lo que $(1,1)$ *y* $(1,0)$ *no son Birkhoff-James ortogonales. Ahora considérese la norma del máximo, entonces*

$$\|(1,1)+\lambda(1,0)\| = \text{máx}\{|1+\lambda|, |1|\} \geq 1 = \|(1,1)\|$$

y en este caso $(1,1)$ *y* $(1,0)$ *son Birkhoff-James ortogonales.*

2.1. Teorema de Bhatia-Semri.

Los siguientes resultados del análisis convexo serán de gran utilidad para demostrar el Teorema de Bhatia-Semri.

Definición 2.3. *Sean* X *un espacio de Banach complejo y*

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

una función convexa. Se define el subdiferencial de f *en el punto* $a \in X$ *como el conjunto*

$$\partial f(a) = \{x^* \in X^* : f(b) - f(a) \geq \operatorname{Re} x^*(b-a), \forall b \in X\}.$$

Observación 2.4. *Sean* X *un espacio de Banach y*

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

una función convexa. Entonces, f *tiene un mínimo en* $x \in X$ *si y solo si* $0 \in \partial f(x)$.

Teorema 2.5. *Sean* X *un espacio de Banach,* $a \in X$ *y*

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

una función convexa y continua. Entonces $\partial f(a)$ *es no vacío.*

La demostración puede verse en [20]

Teorema 2.6. *Sean X un espacio de Banach, $a \in X$ y*

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

una función convexa. Entonces $\partial f(a)$ es convexo.

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in [0, 1]$ tales que $\alpha + \beta = 1$ y sean $y \in X$ y $x^*, z^* \in \partial f(a)$. Entonces

$$\operatorname{Re}(\alpha x^* + \beta z^*)(y - a) = \operatorname{Re}\, \alpha x^*(y - a) + \operatorname{Re}\, \beta z^*(y - a) =$$
$$\alpha \operatorname{Re}\, x^*(y - a) + \beta \operatorname{Re}\, z^*(y - a) \leq$$
$$\alpha(f(y) - f(a)) + \beta(f(y) - f(a)) = f(y) - f(a),$$

por lo que $\alpha x^* + \beta z^* \in \partial f(a)$. □

Teorema 2.7. *Sean X un espacio de Banach complejo, $a \in X$ y*

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

una función convexa. Entonces $\partial f(a)$ es cerrado con respecto a la topología débil*.

Demostración. Sea $x_0^* \in X^* \setminus \partial f(a)$, entonces existe $y \in X$ tal que

$$\operatorname{Re}\, x_0^*(a - y) > f(a) - f(y).$$

Sean $\alpha = f(a) - f(y)$ y

$$V = \{x^* \in X^* : \operatorname{Re}\, J_{a-y}(x^*) > \alpha\} =$$
$$J_{a-y}^{-1}(\operatorname{Re}^{-1}((\alpha, \infty))),$$

donde

$$J : X \longrightarrow X^{**}$$

es la inyección canónica. V es un abierto en la topología débil* que contiene a x_0^* y que no intersecta a $\partial f(a)$. Por tanto $X^* \setminus \partial f(a)$ es abierto en la topología débil* y de esto se sigue la conclusión del teorema.

□

Lema 2.8. *Sean X un espacio de Banach complejo, $x_0 \in X$ y*

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

una función convexa y continua. Entonces f es localmente Lipschitz en x_0, es decir, existen $M > 0$ y $\delta > 0$, tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\|$$

si $x, y \in B_\delta(x_0) = \{z \in X : \|z - x_0\| < \delta\}$.

Demostración. Como f es continua, existen $M_1 > 0$ y $\delta > 0$ tales que si $x, y \in B_{2\delta}(x_0)$, entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq M_1.$$

Sean $x, y \in B_\delta(x_0)$ distintos y sea $\alpha = \|x - y\|$. Considérese

$$z = y + \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)(y - x)$$

y nótese que $z \in B_\delta(x_0)$ pues

$$\|z - x_0\| =$$

$$\left\|y + \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)(y - x) - x_0\right\| \leq$$

$$\|y - x_0\| + \left\|\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)(y - x)\right\| < 2\delta.$$

Nótese que $y = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\delta}\right) z + \left(\frac{\delta}{\alpha+\delta}\right) x$ es una combinación convexa y por tanto se tiene que

$$f(y) \leq$$

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha + \delta}\right) f(z) + \left(\frac{\delta}{\alpha + \delta}\right) f(x) =$$

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha + \delta}\right) f(z) + \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha + \delta}\right) f(x).$$

Como consecuencia

$$f(y) - f(x) \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha + \delta}\right)(f(z) - f(x)) \leq$$

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha + \delta}\right) 2M_1 \leq$$

$$\left(\frac{2M_1}{\delta}\right) \|x - y\|.$$

Como $x, y \in X$ son arbitrarios también se tiene que

$$f(x) - f(y) \leq \left(\frac{2M_1}{\delta}\right) \|x - y\|.$$

Finalmente se tiene que

$$|f(x) - f(y)| \leq \left(\frac{2M_1}{\delta}\right) \|x - y\|,$$

así que $M = \frac{2M_1}{\delta}$ es la constante buscada.

$\square$

Teorema 2.9. *Sean X un espacio de Banach, $a \in X$ y*

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

una función convexa y continua. Entonces $\partial f(a)$ es compacto respecto a la topologá debil.*

Demostración. Por el lema anterior existen $\delta > 0$ y $M > 0$ tal que si $x, y \in B_\delta(a)$ entonces

$$|f(y) - f(a)| \leq M\|y - a\|.$$

Sean $z^* \in \partial f(a)$ y $x \in X$ tal que $\|x\| \leq 1$. Nótese que $a + \delta x \in B_\delta(a)$, entonces

$$\begin{gathered}
|\operatorname{Re} z^*(x)| = \\
|\operatorname{Re} z^*(a + \delta x - a)| \leq \\
|f(a + \delta x) - f(a)| \leq \\
M\|a + \delta x - a\| = \\
M\delta,
\end{gathered}$$

por lo que

$$\|\operatorname{Re} z^*\| = \|z^*\| \leq M\delta.$$

Como z^* es arbitrario se sigue que $\partial f(a) \subseteq B_{M\delta}(0)$ y dado que $\partial f(a)$ es cerrado con respecto a la topología débil*, por el teorema de Banch-Alaoglu, se tiene que $\partial f(a)$ es compacto con respecto a la misma topología. $\square$

Definición 2.10. *Sean X un espacio de Banach complejo y $A \subseteq X$ no vacío. La función*

$$\sigma_A : X^* \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

definida por

$$\sigma_A^*(x^*) = \sup\{\operatorname{Re} x^*(a), a \in A\},$$

es llamada función soporte de A.

Ahora, sea $B \subseteq X^*$ no vacío. A la función

$$\sigma_B : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

dada por

$$\sigma_B(x) = \sup\{\mathrm{Re}\ \ y^*(x) : y^* \in B\},$$

se le llama función soporte de B.

Teorema 2.11. *Sean X y Y espacios de Banach complejos, y*

$$T : X \longrightarrow Y$$

un operador acotado. Entonces, si $B \subseteq Y^*$ es no vacío se tiene que

$$\sigma_{T^*(B)}(x) = \sigma_B(T(x)),$$

para todo $x \in X$, donde

$$T^* : Y^* \longrightarrow X^*$$

es el operador adjunto de T.

Demostración. Sea $y^* \in B$, entonces se tiene que

$$T^*y^*(x) = y^*(Tx)$$

para todo $x \in X$, y como consecuencia

$$\mathrm{Re}\ \ T^*y^*(x) = \mathrm{Re}\ \ y^*(Tx)$$

para todo $x \in X$.

De la última igualdad, al tomar supremo sobre B, se sigue que si $x \in X$ entonces

$$\sup\{\mathrm{Re}\ \ T^*y^*(x) : y^* \in B\} = \sup\{\mathrm{Re}\ \ y^*(Tx) : y^* \in B\},$$

así

$$\sup\{\mathrm{Re}\ \ T^*y^*(x) : Ty^* \in T(B)\} = \sup\{\mathrm{Re}\ \ y^*(Tx) : y^* \in B\}$$

y esto equivale a que

$$\sigma_{T^*(B)}(x) = \sigma_B(T(x)).$$

□

Lema 2.12. *Sean X un espacio de Banach complejo y*

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

una función convexa. Sean a, $x \in X$ y considérese la función dada por

$$g(t) = \frac{f(a+tx) - f(a)}{t}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces $g(t)$ es creciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$.

Demostración. Sean s y t números reales tales que $0 < s \leq t$. Como $s \in (0, t)$, existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que $s = \lambda t$. Ahora, nótese que

$$a + sx = a + \lambda tx = a(1-\lambda) + \lambda(a + tx)$$

y puesto que f es convexa

$$f(a + \lambda s) = f(a(1-\lambda) + \lambda(a + tx)) \leq$$

$$(1-\lambda)f(a) + \lambda f(a + tx).$$

Entonces

$$f(a + \lambda s) - f(a) \leq (1-\lambda)f(a) - f(a) + \lambda f(a + tx) =$$

$$\lambda f(a + tx) - \lambda f(a))$$

y esto implica que

$$\frac{f(a+\lambda s) - f(a)}{t} \leq \lambda \frac{f(a+tx) - f(a)}{t}$$

para todo $t > 0$. Esto último es equivalente a que

$$\frac{f(a+\lambda s) - f(a)}{\lambda t} \leq \frac{f(a+tx) - f(a)}{t}$$

para todo $t > 0$ y por tanto $g(s) \leq g(t)$.

El otro caso es análogo.

$\square$

Observación 2.13. *Dado el lema anterior y puesto que f es continua se sigue que existe*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(a+tx) - f(a)}{t}$$

y éste es igual a

$$\inf\left\{\frac{f(a+tx)-f(a)}{t} : t>0\right\}.$$

Se denotará por $f^{'}(a,x)$ *al límite*

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(a+tx)-f(a)}{t}.$$

Teorema 2.14. *Sean* X *un espacio de Banach y*

$$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$$

una función continua y convexa. Sea $a\in X$*, entonces*

$$\partial f(a)=\{x^*\in X^* : \text{Re }\ x^*(z)\leq f_+^{'}(a,z), \forall z\in X\}.$$

Demostración. Sea $x^*\in X^*$ tal que Re $x^*(z)\leq f_+^{'}(a,z)$ para todo $z\in X$, entonces se sigue que

$$\text{Re }\ x^*(z)\leq \frac{f(a+tz)-f(a)}{t}$$

para todo $t>0$ y $z\in X$.

Tomando $y=a+tz$, si z varía en todo X, nótese que y varía en todo X. Usando esto en la desigualdad anterior se obtiene que

$$\text{Re }\ x^*\left(\left(\frac{1}{t}\right)(y-a)\right)\leq \frac{f(y)-f(a)}{t}$$

por lo que

$$\text{Re }\ x^*\left(y-a\right)\leq f(y)-f(a)$$

y esto implica que que $x^*\in\partial f(a)$.

Ahora supóngase que $x^*\in\partial f(a)$, entonces

$$\text{Re }\ x^*\left(y-a\right)\leq f(y)-f(a)$$

para todo $y\in X$. Sea $z=\frac{y-a}{t}$, con $t>0$, entonces si y varía en X, z varia en X. Sustituyendo en la desigualdad anterior se tiene que

$$\text{Re }\ x^*(z)\leq \frac{f(a+tz)-f(a)}{t},$$

por lo que

$$\text{Re }\ x^*(z)\leq f_+^{'}(a,z).$$

□

Teorema 2.15. *Sean X un espacio de Banach y*

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

una función continua y convexa. Sea $a \in X$, entonces

$$f_+^{'}(a, x) = \text{máx}\{\text{Re } z^*(x) : z^* \in \partial f(a)\}.$$

Demostración. Por el teorema anterior es claro que

$$f_+^{'}(a, x) \geq \sup\{\text{Re } z^*(x) : x^* \in \partial f(a)\} =$$

$$\text{máx}\{\text{Re } z^*(x) : z^* \in \partial f(a)\}.$$

Este máximo se alcanza puesto que el subdiferencial es compacto en la topología débil* y como las funciones

$$\text{Re} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$$

y

$$E_x : X^* \longrightarrow \mathbb{C},$$

dadas por

$$\text{Re}\,(x + iy) = x$$

para todo $x + iy \in \mathbb{C}$ y

$$E_x(z^*) = z^*(x),$$

para todo $z^* \in X^*$, son continuas con respecto a la topología débil*, pues esta topología es la mínima respecto a la cual son continuos los elementos de X^*. Entonces

$$\{\text{Re } z^*(x) : z^* \in \partial f(a)\}$$

es compacto.

Ahora se demostrará que para todo $x \in X$, existe $\phi_x \in \partial f(a)$ tal que $\text{Re}\,\phi_x(x) \leq f_+^{'}(a, x)$. Consideramos el espacio afín $W_x = a + \mathbb{R}x$ y la función afín

$$h_x : W_x \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$h_x(a + tx) = f(a) + tf_+^{'}(a, x).$$

Es sencillo ver que $h_x \leq f$ en W_x. Por el teorema de Hahn-Banach, existe una función afín

$$\overline{h}_x : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

que extiende a h_x donde $z^* \in X^*$ es una extensión de

$$g(tx) = tf_+^{'}(a, x)$$

y es tal que

$$\overline{h_x} = f(a) + z^*$$

puesto que $\overline{h_x(a)} = h_x(a) = f(a)$ y en consecuencia $z^*(a) = 0$.

Así

$$\overline{h}(y) = f(a) + z^*(y) = f(a) + z^*(y - a)$$

por lo que

$$z^*(x) = \overline{h}_x(a + x) - f(a) = h_x(a + x) - f(a) = f_+^{'}(a, x)$$

y de aquí se sigue que

$$\text{Re } z^*(x) = f_+^{'}(a, x).$$

□

Teorema 2.16. *Sean X y Y espacios de Banach. Sea*

$$S : X \longrightarrow Y$$

un operador acotado y sea

$$L : X \longrightarrow Y$$

la función afín dada por

$$L(x) = S(x) + y_0,$$

donde $y_0 \in Y$ y para todo $x \in X$. Sea

$$g : Y \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

una función convexa y continua. Entonces para todo $a \in X$ se cumple que

$$\partial(g \circ L)(a) = S^* \partial(L(a)).$$

Demostración. Por el teorema anterior se tiene que

$$\sigma_{\partial(g \circ L)(a)} = (g \circ L)_+^{'}(a, x).$$

Por otro lado

$$\frac{(g \circ L)(a + tx) - (g \circ L)(a)}{t} =$$

$$\frac{g(L(a+tx)) - g(L(a))}{t} =$$
$$\frac{g(S(a+tx)+y_0) - g(L(a))}{t} =$$
$$\frac{g(S(a)+y_0+tS(x))) - g(L(a))}{t} =$$
$$\frac{g(L(a)+tS(x)) - g(L(a))}{t}.$$

Tomando ínfimos en $(0,\infty)$ se sigue que

$$(g\circ L)'_+(a,x) = g'_+(L(a),S(x)),$$

esto es

$$\sigma_{\partial(g\circ L)(a)}(x) = \sigma_{\partial g(L(a))}(S(x)).$$

Finalmente, por el teorema 1.6 se sigue que

$$\partial(g\circ L)(a) = S^*\partial(L(a)).$$

□

Teorema 2.17. *Sea X un espacio de Banach y sea*

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

la función dada por

$$f(x) = \|x\|.$$

Entonces

$$\partial f(a) = \{x^* \in X^* : \mathrm{Re}\ x^*(a) = \|a\|, \|x^*\| \leq 1\}.$$

Demostración. Sea $a \in X$ y $x^* \in \partial f(a)$. Entonces se sigue que

$$\|z\| - \|a\| \geq \mathrm{Re}\, x^*(z-a)$$

para todo $z \in X$, en particular para $z = 2a$ y $z = 0$ se tiene que

$$\|a\| \geq \mathrm{Re}\ \ x^*(a)$$

y

$$-\|a\| \geq -\mathrm{Re}\ \ x^*(a),$$

respectivamente, y estas desigualdades implican que Re $x^*(a) = \|a\|$. Además si $\|y\| = 1$, entonces Re $x^*(y) \leq 1$ por lo que

$$\|x^*\| = \|\operatorname{Re} x^*\| \leq 1.$$

Ahora, supóngase que $x^* \in X^*$ es tal que $x^*(a) = \|a\|$ y $\|x^*\| \leq 1$. Entonces

$$\operatorname{Re}\ x^*(z-a) = \operatorname{Re}\ x^*(z) - \operatorname{Re}\ x^*(a) \leq \|z\| - \|a\|$$

pues

$$\operatorname{Re}\ x^*(z) \leq |x^*(z)| \leq \|x^*\|\|z\| \leq \|z\|.$$

□

Observación 2.18. *Nótese que el espacio de matrices con entradas complejas y de tamaño n, $M(n)$, es un espacio de Hilbert con el producto interior dado por*

$$\langle A, B\rangle = tr(A^*B),$$

para $A, B \in M(n)$ y donde tr *denota el operador traza en $M(n)$. Por el teorema anterior se sigue que*

$$\partial\|A\| = \{G \in M(n) : \operatorname{Re}\ \operatorname{tr}(G^*A) = \|A\|, \|G\| \leq 1\}.$$

Sea A una matriz de tamaño n con entradas complejas. Considérese el conjunto

$$R(A) = \{(v, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n : p.a.\ u \in \mathbb{C}^n, \|u\| = \|v\| = 1, Av = \|A\|u, w \in \partial\|u\|\}.$$

Este conjunto será de gran utilidad en los siguientes resultados que caracterizan al subdiferencial de la norma en $M(n)$.

Teorema 2.19. *Sea*

$$g : M(n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

la función definida por $g(A) = \|A\|$. Entonces

$$g'_+(A, X) = \max_{(v,w)\in R(A)} Re\ \langle w, Xv\rangle\,.$$

Demostración. Sea $(v, w) \in R(A)$, entonces

$$\|(A + tX)v\| \leq \|A + tX\|.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que

$$\|(A+tX)v\| = \|(A+tX)v\|\|w\| \geq |\langle w,(A+tX)v\rangle| \geq$$

$$\mathrm{Re}\ \langle w,(A+tX)v\rangle =$$

$$\|A\|\,\mathrm{Re}\,\langle w,u\rangle + t\,\mathrm{Re}\,\langle w,Xv\rangle\,.$$

De estas últimas desigualdades se puede concluir que

$$\|A+tX\| \geq \|A\|\,\mathrm{Re}\ \langle w,u\rangle + t\,\mathrm{Re}\,\langle w,Xv\rangle\,.$$

Nótese que como $w \in \partial\|u\|$, por el teorema anterior se sigue que $Re\ \langle w,u\rangle = \|u\| = 1$, en consecuencia

$$\|A+tX\| \geq \|A\| + t\,\mathrm{Re}\,\langle w,Xv\rangle\,.$$

Pot tanto, para $t>0$ se tiene que

$$\frac{\|A+tX\|-\|A\|}{t} \geq \mathrm{Re}\,\langle w,Xv\rangle$$

y se puede concluir que

$$\frac{\|A+tX\|-\|A\|}{t} \geq \max_{(v,w)\in R(A)} \mathrm{Re}\,\langle w,Xv\rangle\,.$$

Al tomar ínfimos sobre $t>0$, se tiene que

$$g_+^{'}(A,X) \geq \max_{(v,w)\in R(A)} \mathrm{Re}\,\langle w,Xv\rangle\,.$$

Para obtener la otra desigualdad los argumentos son similares. Sea $(v(t),w(t)) \in R(A+tX)$, entonces se tiene que

$$\|A\|\|v(t)\| \geq \|Av(t)\| = \|Av(t)\|\|w(t)\|.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\|Av(t)\|\|w(t)\| \geq |\langle w(t),Av(t)\rangle| \geq \mathrm{Re}\,\langle w(t),Av(t)\rangle =$$

$$\mathrm{Re}\,\langle w(t),Av(t)+tXv(t)-tXv(t)\rangle =$$

$$\mathrm{Re}\,\langle w(t),Av(t)+tXv(t)\rangle - \mathrm{Re}\,\langle w(t),tXv(t)\rangle =$$

$$\|A+tX\|\,\langle w(t),u(t)\rangle - t\,\langle w(t),Xv(t)\rangle = \|A+tX\| - t\,\langle w(t),Xv(t)\rangle$$

y de esta desigualdad, para $t > 0$ se sigue que

$$\frac{\|A + tX\| - \|A\|}{t} \leq \operatorname{Re}\langle w(t), Xv(t)\rangle .$$

Sea (t_n) una sucesión de números reales positivos tales que $t_n \longrightarrow 0$. Como la bola unitaria cerrada en $\mathbb{C}^n$ es un conjunto compacto, existe una subsucesión (t_{n_k}) de (t_n), y vectores de norma uno u, v y w, tales que,

$$u(t_{n_k}) \longrightarrow u$$

$$v(t_{n_k}) \longrightarrow v$$

$$w(t_{n_k}) \longrightarrow w,$$

si $k \longrightarrow \infty$. Como consecuencia $(v, w) \in R(A)$. Entonces por la desigualdad anterior se sigue que

$$g'_+(A, X) =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|A + tX\| - \|A\|}{t} \leq Re\,\langle w.Xv\rangle \leq$$

$$\max_{(v,w)\in R(A)} Re\ \ \langle w, Xv\rangle .$$

Esto completa la demostración. $\square$

Teorema 2.20. *Sea* $A \in M(n)$. *Entonces*

$$\partial\|A\| = \operatorname{conv}\{wv^* : (v, w) \in R(A)\}.$$

Demostración. Sea $G \in \operatorname{conv}\{wv^* : (v, w) \in R(A)\}$. Entonces

$$G = \sum_{n=1}^{n} \lambda_i w_i v_i^*$$

donde $\lambda_i \in (0, 1)$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ y $(v_i, w_i) \in R(A)$, esto para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Así

$$\operatorname{Re}\ \operatorname{tr}(G^* A) =$$

$$\operatorname{Re}\ \operatorname{tr}\left(\sum_{n=1}^{n} \lambda_i v_i w_i^* A\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \operatorname{Re}\ \operatorname{tr}(v_i w_i^* A) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \operatorname{Re} \langle w_i, Av_i \rangle =$$

$$\|A\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \operatorname{Re} \langle w_i, u_i \rangle = \|A\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \|A\|,$$

pues, como $w_i \in \partial\|u\|$, se sigue que

$$\operatorname{Re} \langle u_i, w_i \rangle = \|u\| = 1$$

para todo $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. También

$$\|G\| = \max_{\|X\|=1} \{\operatorname{Re} \operatorname{tr}(G^* A)\} = \max_{\|X\|=1} \left\{ \|X\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \operatorname{Re} \left(\langle w_i, u_i \rangle\right) \right\} \leq 1$$

y por la observación 2.17 se sigue que $G \in \partial\|A\|$.

Ahora sea $G \in \partial\|A\|$ y supóngase que G no está en

$$\operatorname{conv}\{wv^* : (v, w) \in R(A)\}.$$

Entonces por el teorema de Hahn-Banach existe $X \in M(n)$ tal que

$$\operatorname{Re} \operatorname{tr}(x^* wv^*) < \operatorname{Re} \operatorname{tr}(X^* G)$$

para todo $(v, w) \in R(A)$. Entonces

$$\max_{(v,w)\in R(A)} \{\operatorname{Re} \langle w, Xv \rangle\} < \max_{(v,w)\in R(A)} \{\operatorname{Re} \operatorname{tr}(X^* G)\}.$$

En la desigualdad anterior ambos máximos coinciden con la derivada por la derecha de la función norma en el punto A y en la dirección de X, lo cual es una contradicción. Por tanto

$$\partial\|A\| \subseteq \operatorname{conv}\{wv^* : (v, w) \in R(A)\}.$$

□

Observación 2.21. *Con la notación del teorema anterior y por el capítulo 1.4 de [9] se obtiene la demostración de los siguientes resultados.*

Corolario 2.22. *Se tiene que*

$$\partial\|A\| = \operatorname{conv}\{uv^* : \|u\| = \|v\| = 1,\ Av = \|A\|u\}.$$

Corolario 2.23. *Sea $A \neq 0$ semidefinida positiva definida. Se tiene que*

$$\partial\|A\| = \operatorname{conv}\{uu^* : \|u\| = 1,\ Au = \|A\|u\}.$$

El siguiente teorema será de gran utilidad en la demostración del teorema de Bhatia-Semri.

Teorema 2.24 (Toeplitz-Haussdorf)**.** *Sea H un espacio de Hilbert y*

$$T : D(H) \subseteq H \longrightarrow H$$

un operador lineal. Entonces el conjunto

$$\{\langle x, Tx\rangle : \|x\| = 1, x \in D(A)\}$$

es convexo.

La demostración puede verse en [18].

Teorema 2.25 (Teorema de Bhatia-Semri (caso real))**.** *Sean $A, B \in M(n)$. Entonces,*

$$\|A + tB\| \geq \|A\|$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, si y solo si existe un vector unitario x tal que

$$\|Ax\| = \|A\|$$

y

$$\operatorname{Re}\langle Ax, Bx\rangle = 0.$$

Demostración. Primero supóngase que existe un vector unitario x tal que

$$\|Ax\| = \|A\|$$

y

$$\text{Re } \langle Ax, Bx\rangle = 0.$$

Entonces, si $t \in \mathbb{R}$ se sigue que

$$\|A + tB\|^2 \geq$$

$$\|(A + tB)x\|^2 = \langle (A + tB)x, (A + tB)x\rangle =$$

$$\|Ax\|^2 + 2t \operatorname{Re}\langle Ax, Bx\rangle + t^2\|Bx\|^2 =$$

$$\|Ax\|^2 + t^2\|Bx\|^2 \geq \|Ax\|^2 =$$

$$\|A\|^2.$$

Por tanto para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\|A + tB\| \geq \|A\|$$

Recíprocamente, supóngase que para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\|A + tB\| \geq \|A\|.$$

El objetivo será, suponiendo que A es semidefinida positiva, encontrar un vector y de norma 1 tal que $Ay = \lambda y$ y $\mathrm{Re}\,\langle Ay, By\rangle = 0$.

Si existe tal y como en el párrafo anterior, para el caso general es posible escribir a la matriz A en su descomposición de valores singulares (la existencia de tal desomposición está demostrada en [14]), $A = USV^*$, donde S es triangular superior y donde elementos de la diagonal son reales mayores o iguales a cero, además U y V son matrices unitarias. Entonces, si

$$\|A + tB\| \geq \|A\|$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, se sigue, por las propiedades del adjunto, que

$$\|S + tU^*BV\| \geq \|S\|$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Así, como S es semidefinida positiva existe un vector unitario y tal que

$$Sy = \|S\|y$$

y

$$\mathrm{Re}\,\langle Sy, U^*BVy\rangle = 0.$$

Por tanto se tiene para $x = Vy$ (el cual es de norma 1 al ser V una isometría) que

$$Ax = \|A\|x$$

y que

$$\mathrm{Re}\,\langle Ax, Bx\rangle = 0.$$

Por esta razón es posible suponer que A es semidefinida positiva.

Sea

$$S : \mathbb{R} \longrightarrow M(n)$$

dada por

$$S(t) = tB$$

y sea

$$L : \mathbb{R} \longrightarrow M(n)$$

dada por $L(t) = A + S(t)$. Sea

$$g : M(n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$g(T) = \|T\|.$$

Entonces, $\|A + tB\| \geq \|A\|$ para todo $t \in \mathbb{R}$ es equivalente a que

$$(g \circ L)(t) \geq (g \circ L)(0),$$

lo que equivale a que $0 \in \partial(g \circ L)(0)$ y por el teorema 1.13 esto equivale a que $0 \in S^*(\partial\|A\|)$.

Nótese que

$$\langle S(t), X\rangle = t\,\langle B, X\rangle = t\,\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}(B^*X)$$

por lo que

$$S^*(X) = \mathrm{Re}\ \mathrm{tr}(B^*X).$$

Así, por el Corolario 2.21 se sigue que

$$S^*\partial\|A\| =$$

$$\mathrm{conv}\{\mathrm{Re}\,\langle B^*, uu^*\rangle : \|u\| = 1,\ Au = \|A\|u\} =$$

$$\mathrm{conv}\{\mathrm{Re}\,\langle u, Bu\rangle : \|u\| = 1,\ Au = \|A\|u\}.$$

Ahora, sea M el eigenespacio correspondiente al eigenvalor $\|A\|$ de A, sea P_M la proyección ortogonal de $\mathbb{C}^n$ en M y sea i_M la inclusión de M en $\mathbb{C}^n$. Considérese el operador

$$T_B : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

dado por $T_B(x) = Bx$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$. Defínase $T = P_M T_B i_M$, entonces por el teorema de Toeplitz-Hausdorff el conjunto

$$\{\langle u, Tu\rangle : \|u\| = 1, u \in \mathrm{Dom}(T)\} =$$

$$\{\langle u, Tu\rangle : \|u\| = 1, Au = \|A\|u\}$$

es convexo. Por tanto

$$\{\mathrm{Re}\,\langle u, Bu\rangle : \|u\| = 1,\ Au = \|A\|u\}$$

es convexo y como

$$0 \in \operatorname{conv}\{\operatorname{Re}\langle u, Bu\rangle : \|u\| = 1,\ Au = \|A\|u\}$$

debe existir u tal que

$$\operatorname{Re}\langle u, Bu\rangle = 0$$

y

$$Au = \|A\|u.$$

Esto completa la demostración.

$\square$

Teorema 2.26 (Teorema de Bhatia-Semri (caso general))**.** *Sean $A, B \in M(n)$. Entonces,*

$$\|A + \lambda B\| \geq \|A\|$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ si y solo si existe un vector unitario x tal que

$$\|Ax\| = \|A\|$$

y

$$\operatorname{Re}\ \langle Ax, Bx\rangle = 0.$$

Demostración. Si existe un vector unitario x tal que

$$\|Ax\| = \|A\|$$

y

$$\operatorname{Re}\langle Ax, Bx\rangle = 0,$$

entonces haciendo un cálculo similar al del caso real se tiene que A y B son Birkhoff-James ortogonales.

Ahora supongamos que A, B son Birkhoff-James ortogonales, esto equivale a que

$$\|A + \lambda B\| \geq \|A\|$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y esto se puede escribir como

$$\|A + re^{i\theta}B\| \geq \|A\|$$

para todos $r > 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$. Ahora se fijará el valor de θ y sea $B_\theta = e^{i\theta}B$, entonces se sigue que

$$\|A + rB_\theta\| \geq \|A\|$$

para todo $r \in \mathbb{R}$.

También, como en el caso real, se puede suponer que A es semidefinida positiva. En este caso existe un vector unitario y_0 tal que

$$Ay_0 = \|A\|y_0$$

y

$$\text{Re } e^{i\theta} \langle Ay_0, By_0 \rangle = 0... \ (*)$$

Considérese M el eigenespacio correspondiente al eigenvalor $\|A\|$ y la transformación lineal

$$T : M \longrightarrow M$$

definida por

$$T = P_M B^* A i_M$$

donde P_M es la proyección ortogonal de $\mathbb{C}^n$ en M y i_m es el adjunto de P_M. Entonces por el teorema de Toeplitz-Hausdorff el conjunto

$$\{\langle y, Ty \rangle : \|y\| = 1, y \in M\} =$$

$$\{\langle y, B^* Ay \rangle : \|y\| = 1 Ay = \|A\|y\}$$

es compacto y convexo. Si

$$0 \notin \{\langle y, B^* Ay \rangle : Ay = \|A\|y\}$$

por el teorema de Hahn-Banach debe existir un funcional lineal que separa a estos conjuntos, es decir, existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tal que para todo $y \in M$ se tiene que

$$\text{Re } \overline{\lambda_0} \ \langle y, B^* Ay \rangle > \overline{\text{Re}} \, \overline{\lambda_0} 0 = 0$$

lo que contradice $(*)$.

Finalmente debe pasar que

$$0 \in \{\langle y, B^* Ay \rangle : \|y\| = 1 Ay = \|A\|y\}$$

y por tanto existe y unitario tal que $\langle By, Ay \rangle = 0$ y $Ay = \|A\|y$. Esto implica que $\langle By, Ay \rangle = 0$ y $\|A\| = \|Ay\|$. □

2.2. Ortogonalidad de Birkhoff James para operadores en espacios de dimensión infinita.

El objetivo de esta sección es generalizar el teorema de Bhatia-Semri para operadores en espacios de Hilbert de dimensión infinita.

Teorema 2.27. *Sean H un espacio de Hilbert y $A, B \in B(H)$. Entonces*

$$\|A + \lambda B\| \geq \|A\|$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ si y solo si existe una sucesión de vectores unitarios $(x_n)_n \subseteq H$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} \|Ax_n\| = \|A\|$$

y $\lim_{n\to\infty} \langle Ax_n, Bx_n \rangle = 0$.

La demostración puede verse en [2] (Teorema 1.1 y Observación 3.1).

Teorema 2.28. *Sean H y K espacios de Hilbert, y $A, B \in B(H, K)$. Entonces*

$$\|A + \lambda B\| \geq \|A\|$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ si y solo si existe una sucesión de vectores unitarios $(x_n)_n \subseteq H$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} \|Ax_n\| = \|A\|$$

y $\lim_{n\to\infty} \langle Ax_n, Bx_n \rangle = 0$.

Demostración. Supóngase que existe una sucesión de vectores unitarios $(x_n)_n \subseteq H$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} \|Ax_n\| = \|A\|$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \langle Ax_n, Bx_n \rangle = 0.$$

Entonces, si $\lambda \in \mathbb{C}$ se sigue que

$$\|A + tB\|^2 \geq \|(A + tB)x_n\|^2 =$$

$$\langle (A + tB)x_n, (A + tB)x_n \rangle =$$

$$\|Ax_n\|^2 + 2tRe\,\langle Ax_n, Bx_n \rangle + t^2\|Bx_n\|^2 \geq$$

$$\|Ax_n\|^2 + 2t\,\mathrm{Re}\,\langle Ax_n, Bx_n \rangle$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, al tomar límite se sigue que $\|A + \lambda B\| \geq \|A\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Recíprocamente supóngase que $\|A + \lambda B\| \geq \|A\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $T \in B(H, K)$, es posible definir un operador $\overline{T} \in B(H \oplus K)$ como

$$\overline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ T & 0 \end{bmatrix}$$

y es tal que $\|\overline{T}\| = \|T\|$. Como consecuencia $\|\overline{A}+\lambda\overline{B}\| \geq \|\overline{A}\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Por el Teorema 2.26, existe una sucesión $(h_n \oplus k_n)_n$ de vectores unitarios en $H \oplus K$ tales que

$$\|\overline{A}(h_n \oplus k_n)\| \longrightarrow \|\overline{A}\|$$

y

$$\left\langle \overline{A}(h_n \oplus k_n), \overline{B}(h_n \oplus k_n) \right\rangle \longrightarrow 0,$$

si $n \longrightarrow \infty$, de esto se sigue que

$$\|Ah_n\| \longrightarrow \|A\|$$

si $n \longrightarrow \infty$. Como $\|A\| > 0$ es posible suponer que $Ah_n \neq 0$ para todo n. De lo anterior se sigue que

$$\|A\| = \lim_{n\to\infty} \|Ah_n\| \leq \|A\| \liminf_{n\to\infty} \|h_n\|,$$

por lo que $\liminf_{n\to\infty} \|h_n\| \geq 1$. Puesto que $\|h_n\| \leq 1$ se sigue que $\limsup_{n\to\infty} \|h_n\| \leq 1$, por tanto $\lim_{n\to\infty} \|h_n\|$.

Sea $x_n = \frac{h_n}{\|h_n\|}$ para todo n. Entonces se sigue que

$$\|Ax_n\| \longrightarrow \|A\|$$

y

$$\langle Ax_n, Bx_n \rangle \longrightarrow 0,$$

si $n \longrightarrow \infty$. $\square$

Corolario 2.29. *Sean H y K espacios de Hilbert de dimensión finita, y $A, B \in B(H,K)$. Entonces A y B son Birkhoff-James ortogonales si y solo si existe un vector unitario x tal que*

$$\|Ax\| = \|A\|$$

y

$$\langle Ax, Bx \rangle = 0.$$

Demostración. Del teorema anterior se sigue que existe una sucesión de vectores unitarios $(x_n)_n \subseteq H$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} \|Ax_n\| = \|A\|$$

y $\lim_{n\to\infty} \langle Ax_n, Bx_n \rangle = 0$. Como la sucesión $(x_n)_n$ es acotada, tiene una subsucesión que converge a algún $x \in H$ y éste es el vector buscado.

$\square$

Corolario 2.30. *Sean H y K espacios de Hilbert de dimensión finita, y $A, B \in B(H,K)$. Entonces A y B son Birkhoff-James ortogonales si y solo si existe un estado ϕ sobre $B(H)$ tal que*

$$\phi(A^*A) = \|A\|^2$$

y

$$\phi(A^*B) = 0.$$

Demostración. Primero supóngase que existe un estado ϕ como en el enunciado del teorema, entonces como $\phi(X^*) = \overline{\phi(X)}$ y es un funcional positivo, se sigue que

$$\|A + \lambda B\|^2 = \phi((A + \lambda B)^*(A + \lambda B)) =$$

$$\phi(A^*A + \overline{\lambda}B^*A + \lambda A^*B + |\lambda|^2 B^*B) =$$

$$\phi(A^*A) + \phi(|\lambda|^2 B^*B) \geq \|A\|^2.$$

Por tanto

$$\|A + \lambda B\| \geq \|A\|$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Recíprocamente, supóngase que $\|A + \lambda B\| \geq \|A\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces debe existir una sucesión $(h_n)_n$ de vectores unitarios tales que

$$\|Ah_n\| \longrightarrow \|A\|$$

y

$$\langle Ah_n, Bh_n \rangle \longrightarrow 0$$

si $n \longrightarrow \infty$. Para cada $n \in \ltimes$, defínase el funcional lineal como

$$\phi_n(T) = \langle h_n, Th_n \rangle .$$

Sea $T \in B(H)$, entonces $\phi_n(T^*T) = \langle h_n, T^*Th_n \rangle = \langle Th_n, Th_n \rangle \geq 0$, también $\phi_n(I) = \langle h_n, Ih_n \rangle = \|h_n\|^2 = 1$, por lo que ϕ_n es un estado sobre $B(H)$ para toda n. Nótese que

$$\phi_n(A^*A) = \langle Ah_n, Ah_n \rangle \longrightarrow \|A\|^2$$

y

$$\phi_n(A^*B) = \langle Ah_n, Bh_n \rangle \longrightarrow 0$$

si $n \longrightarrow \infty$. Como el conjunto de estados en un álgebra C^* es compacto con respecto la topología débil*, entonces existe una subsucesión (ϕ_{n_k}) que converge a un estado ϕ con respecto a la topología débil*. Entonces

$$\phi(A^*A) = \lim_{k\to\infty} \phi_k(A^*A) = \|A\|^2$$

y

$$\phi(A^*B) = \lim_{k\to\infty} \phi_k(A^*B) = 0.$$

$\square$

Los siguientes corolarios son inmediatos a partir del Corolario 2.27 y son una reformulación de éste teniendo en cuenta que si

$$\{H_j\}_{i=1}^{n}$$

es una familia finita de espacios de Hilbert entonces

$$H = \bigoplus_{i=1}^{n} H_i,$$

la suma directa de dicha familia, es un espacio de Hilbert con el producto interior dado por

$$\langle (h_1, h_2, \dots, h_n), (k_1, k_2, \dots, k_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle h_i, k_i\rangle$$

para todos $(h_1, h_2, \dots, h_n), (k_1, k_2, \dots, k_n) \in H$.

Corolario 2.31. *Sean H y K_j espacios de Hilbert de dimensión finita, donde $j \in \{1, 2, \dots, d\}$, y sea $A_j \in B(H, K_j)$ para todo j. Considérese el operador $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_d \end{pmatrix} : H \longrightarrow K_1 \oplus K_2 \oplus ... \oplus K_d$ que mapea a cada $x \in H$ en $\begin{pmatrix} A_1(x) \\ A_2(x) \\ \vdots \\ A_d(x) \end{pmatrix}$. Entonces*

$$\left\| \begin{pmatrix} A_1 + \lambda B_1 \\ A_2 + \lambda B_2 \\ \vdots \\ A_d + \lambda B_d \end{pmatrix} \right\| \geq \left\| \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_d \end{pmatrix} \right\|$$

si y solo si existe un vector unitario $x \in H$ tal que

$$\sum_{j=1}^{d} \|A_j x\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^{d} A_j^* A_j \right\|$$

y

$$\sum_{j=1}^{d} \langle A_j x, B_j x \rangle = 0.$$

Corolario 2.32. *Sean H_j y K espacios de Hilbert de dimensión finita, donde $j \in \{1, 2, \ldots, d\}$, y sea $A_j \in B(H_j, K)$ para todo j. Defínase*

$$(A_1, A_2, \ldots, A_d) : H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_d \longrightarrow K$$

como el operador que mapea a $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$ en $A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_dx_d$. Entonces

$$\|(A_1 + \lambda B_1, A_2 + \lambda B_2, ..., A_d + \lambda B_d)\| \geq \|(A_1, A_2), \ldots, A_d\|$$

si y solo si existe un vector unitario $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$ en $H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_d$ tal que

$$\|(A_1, A_2, \ldots, A_d)\|^2 = \sum_{j=1}^{d} \|A_j x_j\|^2 + \sum_{i,j=1,\, i \neq j}^{d} \langle A_i x_i, A_j x_j \rangle$$

y

$$\sum_{i,j=1}^{d} \langle A_i x_i, b_j x_j \rangle = 0$$

Corolario 2.33. *Sean H_j y K_j espacios de Hilbert de dimensión finita, donde $j \in \{1, 2, \ldots, d\}$, y sea $A_j \in B(H_j, K_j)$ para todo j. Considérese el operador*

$$(A_1, A_2, \ldots, A_d) : H_1 \oplus H_2 \oplus, \ldots, \oplus H_d \longrightarrow H_1 \oplus H_2 \oplus, \ldots, \oplus H_d$$

dado por

$$(A_1, A_2, \ldots, A_d) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1x_1 \\ A_2x_2 \\ \vdots \\ A_dx_d \end{pmatrix}$$

para $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in H_1 \oplus H_2 \oplus, \dots, \oplus H_d$. *Entonces*

$$\|(A_1 + \lambda B_2, A_2 + \lambda B_2, \dots, A_d + \lambda B_d)\| \geq \|(A_1, A_2, \dots, A_d)\|$$

si y solo si existe un vector unitario $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in H_1 \oplus H_2 \oplus, \dots, \oplus H_d$ *tal que*

$$\max_{1 \leq k \leq d} \|A_k x_k\|^2 = \sum_{j=1}^{d} \|A_j x_j\|^2$$

y

$$\sum_{j=1}^{d} \langle A_j x_j, B_j x_j \rangle = 0.$$

2.3. Ortogonalidad de Birkhoff-James en C* módulos de Hilbert.

Teorema 2.34. *Sean* $\mathcal{A}$ *una álgebra* C^* *y* $a, b \in \mathcal{A}$. *Entonces*

$$\|a + \lambda b\| \geq \|a\|$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ *si y solo si existe un estado* ϕ *sobre* $\mathcal{A}$ *tal que* $\phi(a^*a) = \|a\|^2$ *y* $\phi(a^*b) = 0$.

Demostración. Si existe un estado ϕ como en el enunciado del teorema, entonces como ϕ es positivo y $\phi(x^*) = \overline{\phi(x)}$ para todo $x \in \mathcal{A}$, se sigue que

$$\|a + \lambda b\|^2 = \phi((a + \lambda b)^*(a + \lambda b)) =$$

$$\phi(a^*a + \overline{\lambda} b^*a + \lambda a^*b + |\lambda|^2 b^*b) =$$
$$\phi(a^*a) + \phi(|\lambda|^2 b^*b) \geq \|a\|^2.$$

Por tanto

$$\|a + \lambda b\| \geq \|a\|$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Para el recíproco consideramos la representación de $\mathcal{A}$,

$$\pi : \mathcal{A} \longrightarrow B(H)$$

(cuya existencia está garantizada por el Teorema 1.57). Entonces existen operadores $A, B \in B(H)$ tales que $A = \pi(a)$ y $B = \pi(b)$, y se sigue que

$$\|a + \lambda b\| \geq \|a\|$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Como consecuencia existe un estado ψ en $B(H)$ tal que

$$\psi(A^*A) = \|A\|^* \text{ y } \psi(A^*B) = 0.$$

Defínase $\phi(a) = \psi(\pi(a))$, el cual claramente es un estado. Las ecuaciones anteriores implican que

$$\phi(a^*a) = \|a\|^* \text{ y } \psi(a^*b) = 0.$$

□

Dada un álgebra unitaria $\mathcal{A}$, $\mathbb{C}1$ denotará al conjunto

$$\{\lambda 1 : \lambda \in \mathbb{C}\},$$

donde 1 es la unidad en el álgebra.

Definición 2.35. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y ϕ un estado en $\mathcal{A}$. Dado $a \in \mathcal{A}$, se define la varianza de a respecto a ϕ como*

$$var_\phi(a) = \phi(a^*a) - |\phi(a)|^2.$$

Definición 2.36. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C^*. Sea $a \in \mathcal{A}$, se define la distancia de a a $\mathbb{C}1$ como*

$$d(a, \mathbb{C}1) = \text{mín}\{\|a - \lambda 1\| : \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Corolario 2.37. *Sean $\mathcal{A}$ un álgebra C^* y $a \in \mathcal{A}$. Entonces*

$$d(a, \mathbb{C}1) = \text{máx}\{var_\phi(a) : \phi \in S(\mathcal{A})\},$$

donde $S(\mathcal{A})$ es el conjunto de estados definidos sobre $\mathcal{A}$.

Demostración. Sea $\phi \in S(\mathcal{A})$, como $\|\phi\| = 1$ entonces

$$\phi(a^*a) \leq \|a\|^2$$

y como consecuencia

$$var_\phi(a) = \phi(a^*a) - |\phi(a)|^2 \leq \|a\|^2.$$

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces por lo anterior se sigue que $var_\phi(a - \lambda 1) \leq \|a - \lambda 1\|^2$. Por otro lado nótese que

$$var_\phi(a - \lambda 1) =$$

$$\phi((a^* - \overline{\lambda}1)(a - \lambda 1)) - |\phi(a - \lambda 1)|^2 = \phi((a^* - \overline{\lambda}1)(a - \lambda 1)) - \overline{\phi(a - \lambda 1)}\phi(a - \lambda 1) =$$

$$\phi((a^* - \overline{\lambda}1)(a - \lambda 1)) - \phi(a^* - \overline{\lambda}1)\phi(a - \lambda 1) = \phi(a^*a - a^*\lambda 1 - \overline{\lambda}1a + \overline{\lambda}1\lambda 1) - (\phi(a)\phi(a^*) -$$

$$\phi(a^*)\lambda\phi(1) - \overline{\lambda}\phi(1)\phi(a) + \overline{\lambda}\phi(1)\lambda\phi(1))$$

$$= \phi(a^*a - \lambda a^* - \overline{\lambda}a + \overline{\lambda}1\lambda 1) - (\phi(a)\phi(a^*) -$$

$$\phi(a^*)\lambda\phi(1) - \overline{\lambda}\phi(1)\phi(a) + \overline{\lambda}\phi(1)\lambda\phi(1)) = \phi(aa^*) - \phi(a^*)\phi(a)$$

$$= var_\phi(a),$$

puesto que $\phi(1) = 1$ y $\phi(a^*) = \overline{\phi(a)}$. De esto se sigue que

$$var_\phi(a) \leq \|a - \lambda 1\|^2$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y por tanto

$$\text{máx}\{var_\phi(a) : \phi \in S(\mathcal{A})\} \leq d(a, \mathbb{C}1)^2.$$

Para el recíproco sea $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tal que $d(a, \mathbb{C}1) = \|a - \lambda_0 1\|$ y denótese a $a - \lambda 1$ como a_0, entonces

$$\|a_0 + \lambda 1\| = \|a - \lambda_o 1 + \lambda 1\| \geq \text{mín}\{\|a - \lambda 1\| : \lambda \in \mathbb{C}\} = \|a_0\|$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces debe existir un estado ψ sobre $\mathcal{A}$ tal que $\psi(a_0^* a_0) = \|a_0\|^2$ y $\psi(a_0^* 1) = \psi(a_0^*) = 0$. Así,

$$d(a, \mathbb{C}1)^2 = \|a_0\|^2 = \psi(a_0^* a_0) = \psi(a^*a) - \overline{\lambda_0}\phi(a) - \lambda\phi(a^*) + |\lambda_0|^2,$$

y como $\phi(a_0) = 0$ es posible concluir que $\phi(a) = \lambda_0$. Por tanto

$$d(a, \mathbb{C}1)^2 = \psi(a^*a) - \overline{\lambda_0}\phi(a) - \lambda\phi(a^*) + |\lambda_0|^2 =$$

$$\psi(a^*a) - |\lambda_0|^2 = var_\psi(a) \leq \text{máx}\{var_\phi(a) : \phi \in S(\mathcal{A})\}.$$

$\square$

Lema 2.38. *Sea E un C^* módulo de Hilbert sobre un álgebra C^* $\mathcal{A}$. Entonces E se puede encajar isométricamente en $B(H,K)$, donde H y K son espacios de Hilbert. Además H es tal que existe una representación inyectiva*

$$\pi : \mathcal{A} \longrightarrow B(H),$$

y si

$$L : E \longrightarrow B(H,K)$$

es el encaje isometrico, entonces

$$\langle L(e_1)h_1, L(e_2)h_2\rangle = \langle h(1, \pi(\langle e_1, e_2\rangle)h_2\rangle .$$

Demostración. Sea $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow B(H)$ una representación inyectiva. Considérese el producto tensorial de módulos $E \otimes H$ sobre $\mathbb{C}$ y defínase el mapeo

$$\langle\ ,\ \rangle :\longrightarrow \mathbb{C}$$

dado por

$$\langle e_1 \otimes h_1, e_2 \otimes h_2\rangle$$

para vectores básicos. Este se puede extender linealmente a $E \otimes H$. Esta función define un semiproducto interior en $E \otimes H$. Sea $N = \{x \in E \otimes H : \langle x, x\rangle = 0\}$ y defínase el producto interior en $\dfrac{E \otimes H}{N}$ como

$$\langle x + N, y + N\rangle = \langle x, y\rangle$$

para todos $x, y \in E \otimes H$.

Sea K la completación de $\dfrac{E \otimes H}{N}$. Para cada $e \in E$ defínase la función

$$L_e : H \longrightarrow K$$

como $L_e(h) = e \otimes h + N$, y nótese que es lineal. También se tiene que

$$\|L_e(h)\|^2 =$$

$$\langle h, \pi(\langle e, e\rangle\, h\rangle \leq \|h\|\|\pi(\langle e, e\rangle)h\| = \|h\|^2\|\pi(\langle e, e\rangle\, \| =$$

$$\|h\|^2\|e\|^2,$$

por lo que h_e es acotada.

Sea $L : E \longrightarrow B(H,K)$ dada por $L(e) = L_e$ la cual es una isometría lineal. $\square$

Teorema 2.39. *Sea E un C^* módulo de Hilbert sobre un álgebra C^* $\mathcal{A}$. Sean $e_1, e_2 \in E$. Entonces*
$$\|e_1 + \lambda e_2\| \geq \|e_1\|$$
para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ si y solo si existe un estado ϕ definido en $\mathcal{A}$ tal que
$$\phi(\langle e_1, e_1\rangle) = \|e_1\|^2$$
y
$$\phi(\langle e_1, e_2\rangle) = 0$$

Demostración. Sean $e_1, e_2 \in E$.

Primero supóngase que existe un estado ϕ definido en $\mathcal{A}$ tal que
$$\phi(\langle e_1, e_1\rangle) = \|e_1\|^2$$
y
$$\phi(\langle e_1, e_2\rangle) = 0.$$
Entonces para $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene que
$$\|e_1 + \lambda e_2\|^2 =$$
$$\| \langle e_1 + \lambda e_2, e_1 + \lambda e_2\rangle \| \geq$$
$$\left|\phi(\langle e_1, e_1\rangle) + \overline{\lambda}\phi(\langle e_2, e_1\rangle) + \lambda\phi(\langle e_2, e_1\rangle) + |\lambda|^2\phi(\langle e_2, e_2\rangle)\right| \geq$$
$$\|e_1\|^2,$$
puesto que $\|\phi\| = 1$.

Para el recíproco supóngase que
$$\|e_1 + \lambda e_2\| \geq \|e_1\|$$
para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Sea L el isomorfismo isométrico dado por el lema anterior. Entonces se sigue que
$$\|L(e_1) + \lambda L(e_2)\| \geq \|L(e_1)\|$$
para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Así, por el Teorema 2.24, existe una sucesión de vectores unitarios $(x_n)_n$ en H tales que
$$\lim_{n\to\infty} L_{e_1}(x_n) = \|L_{e_1}\|$$
y
$$\langle L_{e_1}(x_n), L_{e_2}(x_n)\rangle \longrightarrow 0.$$

Defínase para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\phi_n(a) = \langle x_n, \pi(a)x_n \rangle$$

para todo $a \in \mathcal{A}$. Entonces se tiene que $(\phi_n)_n$ es una sucesión de estados y puesto que el conjunto de estados es compacto con respecto a la topología débil* de $\mathcal{A}^*$, se sigue que tiene una subred $(\phi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ convergente con respecto a la topología débil* a un estado ϕ definido en $\mathcal{A}$. Así, se tiene que

$$\phi(\langle e_1, e_1 \rangle) = \lim_\gamma \phi_\alpha(\langle e_1, e_1 \rangle) = \|e_1\|^2$$

y

$$\phi(\langle e_1, e_2 \rangle) = \lim_\gamma \phi_\alpha(\langle e_1, e_2 \rangle) = 0.$$

$\square$

Capítulo 3

Ortogonalidad de Saidi

En este capítulo L denotará al conjunto $\{1, 2, 3, ..., N\}$ donde N es untero positivo o a $\mathbb{N}$. También se denotará como F al campo de los números reales o complejos.

Es sencillo ver que si H es un espacio de Hilbert, $x, y \in H$ son ortogonales si y solo si

$$\|ax + by\| = \||a|x + |b|y\|$$

para cualesquiera escalares a y b. Con base en esto se tiene la siguiente definición:

Definición 3.1. *Sea X un espacio de Banach. Una sucesión $(x_n)_{n\in L}$ en X es Saidi ortogonal si*

$$\left\|\sum_{n\in L} a_n x_n\right\| = \left\|\sum_{n\in L} |a_n| x_n\right\|,$$

siempre que $(a_n)_{n\in L} \subseteq F$ y

$$\sum_{n\in L} |a_n| x_n \in X.$$

En tal caso, si $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in L$, decimos que $(x_n)_{n\in L}$ es Saidi ortonormal.

Se escribirá $x \perp y$ si x y y son Saidi ortogonales.

Observación 3.2. *Si $(x_n)_{n\in L} \subseteq X$ es Saidi ortogonal, entonces para todo $J \subseteq L$, $(x_n)_{n\in J}$ es Saidi ortogonal, pues si $(a_n)_{n\in J} \subseteq F$ y*

$$\sum_{n\in J} |a_n| x_n \in X,$$

entonces tomando $a_n = 0$ para todo $n \in L \setminus J$, se sigue que

$$\left\| \sum_{n \in J} a_n x_n \right\| = \left\| \sum_{n \in L} a_n x_n \right\| = \left\| \sum_{n \in L} |a_n| x_n \right\| = \left\| \sum_{n \in J} |a_n| x_n \right\|.$$

En este capítulo el término ortogonal hará referencia al concepto de ortogonalidad de Saidi.

Definición 3.3. *Sea X un espacio de Banach y sean $A, B \subseteq X$. Se dice que A es ortogonal a B, denotado $A \perp B$, si $x \perp y$ para todos $x \in A$ y $y \in B$.*

En los siguientes resultados, dado un espacio de Banach X y $S \subseteq X$, $\langle S \rangle$ denotará el subespacio vectorial de X generado por S y $\overline{\langle S \rangle}$ se refiere a la cerradura respecto a la norma de éste conjunto.

Teorema 3.4. *Sea X un espacio de Banach. Dada una sucesión $(x_n)_{n \in L}$ en X, las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *La sucesión $(x_n)_{n \in L}$ es ortogonal en X.*
2. *Si I y J son subconjuntos ajenos no vacíos de L, entonces*
$$\overline{\left\langle (x_n)_{n \in I} \right\rangle} \perp \overline{\left\langle (x_n)_{n \in J} \right\rangle}.$$
3. *Para cada $i \in L$,*
$$x_i \perp \overline{\left\langle (x_n)_{n \in L \setminus \{i\}} \right\rangle}.$$

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Sean I y J subconjuntos ajenos y no vacíos de L y sean $x \in \left\langle (x_n)_{n \in I} \right\rangle$ y $y \in \left\langle (x_n)_{n \in I} \right\rangle$, entonces existen $\{i_1, i_2, ..., i_n\} \subseteq I$ y $\{j_1, j_2, ..., j_m\} \subseteq J$, finitos, tales que $x = a_1 x_{i_1} + a_2 x_{i_2} + ... + a_n x_{i_n}$ y $y = b_1 x_{j_1} + b_2 x_{j_2} + ... + b_n x_{j_m}$, donde $a_i, b_j \in F$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y $j \in \{1, 2, ..., m\}$. Entonces, si $a, b \in F$

$$\|ax + by\| =$$

$$\|aa_1 x_{i_1} + aa_2 x_{i_2} + ... + aa_n x_{i_n} + bb_1 x_{j_1} + bb_2 x_{j_2} + ... + bb_n x_{j_m}\| =$$

$$\||aa_1| x_{i_1} + |aa_2| x_{i_2} + ... + |aa_n| x_{i_n} + |bb_1| x_{j_1} + |bb_2| x_{j_2} + ... + |bb_n| x_{j_m}\|.$$

Esta última igualdad se debe a que la sucesión $(x_n)_{n \in L}$ es ortogonal en X.

Por otro lado,

$$\||a|x + |b|y\| =$$

$$\||a|a_1x_{i_1}+|a|a_2x_{i_2}+...+|a|a_nx_{i_n}+|b|b_1x_{j_1}+|b|b_2x_{j_2}+...+|b|b_nx_{j_m}\|=$$

$$\|||a|a_1|x_{i_1}+||a|a_2|x_{i_2}+...+||a|a_n|x_{i_n}+||b|b_1|x_{j_1}+||b|b_2|x_{j_2}+...+||b|b_n|x_{j_m}\|.$$

Esta última igualdad se debe a que la sucesión $(x_n)_{n\in L}$ es ortogonal en X, y esto es igual a

$$\||aa_1|x_{i_1}+|aa_2|x_{i_2}+...+|aa_n|x_{i_n}+|bb_1|x_{j_1}+|bb_2|x_{j_2}+...+|bb_n|x_{j_m}\|.$$

Por tanto se tiene que

$$\||a|x+|b|y\|=\|ax+by\|.$$

Así se tiene que $x\perp y$.

Ahora si

$$x\in\overline{\left\langle(x_n)_{n\in I}\right\rangle}\setminus\left\langle(x_n)_{n\in I}\right\rangle$$

y

$$y\in\overline{\left\langle(x_n)_{n\in J}\right\rangle}\setminus\left\langle(x_n)_{n\in J}\right\rangle,$$

existen sucesiones $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\left\langle(x_n)_{n\in I}\right\rangle$ y $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\left\langle(x_n)_{n\in J}\right\rangle$ tales que,

$$z_k\longrightarrow x$$

y

$$y_k\longrightarrow y$$

cuando $k\longrightarrow\infty$. Entonces si $a,b\in F$,

$$\|ax+by\|=$$

$$\lim_{k\to\infty}\|az_k+by_k\|=\lim_{k\to\infty}\||a|z_k+|b|y_k\|=$$

$$\||a|x+|b|y\|$$

dada la continuidad de la norma y puesto que $x_k\perp y_k$ para todo $k\in\mathbb{N}$. En este caso $x\perp y$.

2. $\Rightarrow$ 3. Es inmediato, pues para todo $i\in L$, $\overline{\langle x_i\rangle}=\{\lambda x_i:\lambda\in\mathbb{R}\}$.

Para de mostrar que 3. $\Rightarrow$ 1. supongamos que $\sum_{n\in L}a_nx_n\in X$.

Sea $\{n_1,n_2,...,n_m\}\subseteq L$ el conjunto de los primeros m elementos de L respecto al orden usual en $\mathbb{N}$, entonces

$$\left\|\sum_{i=l}^{m}a_{n_i}x_{n_i}\right\|=$$

$$\left\| a_{n_1} x_{n_1} + \sum_{i=2}^{m} a_{n_i} x_{n_i} \right\| = \left\| |a_{n_1}| x_{n_l} + \sum_{i=2}^{m} a_{n_i} x_{n_i} \right\|,$$

pues $x_1 \perp \overline{\left\langle (x_n)_{n \in L \setminus \{1\}} \right\rangle}$. Ahora, se tiene que

$$\left\| a_{n_2} x_{n_2} + |a_{n_1}| x_1 + \sum_{i=3}^{m} a_{n_i} x_{n_i} \right\| =$$

$$\left\| |a_{n_2}| x_{n_2} + |a_{n_1}| x_{n_1} + \sum_{i=3}^{m} a_{n_i} x_{n_i} \right\|,$$

pues $x_{n_2} \perp \overline{\left\langle (x_n)_{n \in L \setminus \{2\}} \right\rangle}$.

Siguiendo este proceso tenemos que

$$\left\| \sum_{i=l}^{m} a_{n_i} x_{n_i} \right\| = \left\| \sum_{i=l}^{m} |a_{n_i}| x_{n_i} \right\|$$

y puesto que $\sum_{n \in L} |a_n| x_n$ converge, $\sum_{n \in L} a_n x_n$ converge. Si L es finito, terminamos el proceso anterior, en caso contrario tomamos el límite cuando m tiende a infinito. En cualquier caso se tiene que

$$\left\| \sum_{n \in L} a_n x_n \right\| = \left\| \sum_{n \in L} |a_n| x_n \right\|$$

por lo que $(x_n)_{n \in L}$ es ortogonal en X. □

Definición 3.5. *Una función f definida en $\mathbb{C}$ y que toma valores en $\mathbb{R}$ se llama radial si $f(z) = f(|z|)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.*

Lema 3.6. *Sea f una función convexa definida sobre $\mathbb{C}$ y que toma valores reales. Si f es radial entonces, dados $z, w \in \mathbb{C}$, $|z| \leq |w|$ implica que $f(z) \leq f(w)$.*

Demostración. Supóngase que f es radial. Como f es convexa se tiene que

$$f(0) = f\left(\frac{1}{2}(-z) + \frac{1}{2}(z)\right) \leq \frac{1}{2} f(z) + \frac{1}{2} f(-z)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, pero como $f(z) = f(|z|)$ se sigue que $f(0) \leq f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por tanto, f restringida al rayo $[0, \infty)$ es convexa y tiene un mínimo en 0. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tal que $|z_1| \leq |z_2|$, entonces existe $t \in [0,1]$ tal que $|z_1| = 0(1-t) + |z_2|t$. Por tanto

$$f(|z_1|) = f(0(1-t) + |z_2|t) \leq tf(|z_2|) \leq f(|z_2|),$$

y entonces se sigue que

$$f(z_1) = f(|z_1|) \leq f(|z_2|) = f(z_2).$$

□

Teorema 3.7. *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n\in L}$ una sucesión en X. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *La sucesión $(x_n)_{n\in L}$ es Saidi ortogonal.*
2. *Si $(b_n)_{n\in L}$ y $(c_n)_{n\in L}$ son sucesiones de escalares que satisfacen que $|b_n| \leq |c_n|$ para todo $n \in L$, y si $\sum_{n\in L} c_n x_n$ converge entonces $\sum_{n\in L} b_n x_n$ converge y además*

$$\left\| \sum_{n\in L} b_n x_n \right\| \leq \left\| \sum_{n\in L} c_n x_n \right\|.$$

3. *Si $(b_n)_{n\in L}$ y $(c_n)_{n\in L}$ son sucesiones de escalares que satisfacen que $|b_n| = |c_n|$ para todo $n \in L$, $\sum_{n\in L} c_n x_n$ converge si y solo si $\sum_{n\in L} b_n x_n$ converge y además*

$$\left\| \sum_{n\in L} c_n x_n \right\| = \left\| \sum_{n\in L} b_n x_n \right\|.$$

Demostración. 1. ⇒ 2. Supóngase que $(x_n)_{n\in L}$ es ortogonal y sean $(b_n)_{n\in L}$ y $(c_n)_{n\in L}$ sucesiones de escalares que satisfacen que $|b_n| \leq |c_n|$ para todo $n \in L$ y tal que $\sum_{n\in L} c_n x_n$ converge. Para cada $i \in L$ y cada $y_i \in \overline{\langle x_n : n \neq i \rangle}$ la función

$$g(\lambda) = \|\lambda x_i + y_i\|$$

es convexa puesto que si $t \in \mathbb{R}$ se sigue que

$$g(t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2) =$$

$$\|(t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2)x_i + y_i\| =$$

$$\|(t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2)x_i + (t + (1-t))y_i\| =$$
$$\|(t\lambda_1 x_i + ty_i) + ((1-t)\lambda_2 x_i + (1-t)y_i)\| \leq$$
$$t\|\lambda_1 x_i + y_i\| + (1-t)\|\lambda_2 x_i + y_i)\| =$$
$$tg(\lambda_1) + (1-t)g(\lambda_2)$$

para cualesquiera λ_1, λ_2 escalares. Dado que $x_i \perp y_i$ entonces dicha función también es radial. Por el lema anterior, si $|b_i| \leq |c_i|$ entonces

$$g(b_i) = \|b_i x_i + y_i\| \leq \|c_i x_i + y_i\| \leq g(c_i).$$

Sean $\{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$ los primeros m elementos de L, entonces de esta última desigualdad se sigue que

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} b_{n_i} x_{n_i}\right\| =$$
$$\left\|b_{n_1} x_{n_1} + \sum_{i=2}^{m} b_{n_i} x_{n_i}\right\| \leq$$
$$\left\|c_{n_1} x_{n_1} + \sum_{i=2}^{m} b_{n_i} x_{n_i}\right\| = \left\|b_{n_2} x_{n_2} + \left(c_{n_1} x_{n_1} + \sum_{i=3}^{m} b_{n_i} x_{n_i}\right)\right\| \leq$$
$$\left\|c_{n_1} x_{n_1} + c_{n_2} x_{n_2} + \sum_{i=3}^{m} b_{n_i} x_{n_i}\right\| \leq \ldots \leq \left\|\sum_{i=1}^{m-1} c_{n_i} x_{n_i} + b_{n_m} x_{n_m}\right\| \leq$$
$$\left\|\sum_{i=1}^{m} c_{n_i} x_{n_i}\right\|,$$

puesto que m es arbitrario se sigue la afirmación.

La implicación 2. $\Rightarrow$ 3. es inmediata.

Para demostrar que 3. $\Rightarrow$ 1. sea $(a_n)_{n\in L}$ una sucesión de escalares tal que $\sum_{n\in L} a_n x_n$ converge. Defínanse $b_n = a_n$ y $c_n = |a_n|$, esto para todo $n \in L$. Es evidente que estas sucesiones satisfacen las hipótesis, por lo que

$$\left\|\sum_{n\in L} a_n x_n\right\| = \left\|\sum_{n\in L} |a_n| x_n\right\|.$$

□

Observación 3.8. *En vista del teorema 3.6 la ortogonalidad de Saidi implica la ortogonalidad de Birkhoff-James.*

En [12] es introducida la siguiente noción de ortogonalidad en un espacio de Banach.

Definición 3.9. *Una sucesión $(x_n)_{n\in L}$ en un espacio de Banach X se llama semiortonormal si $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in L$ y*

$$\sup_{n\in L} |\lambda_n| \leq \left\| \sum_{n\in L} \lambda_n x_n \right\|$$

siempre que $\sum_{n\in L} \lambda_n x_n \in X$.

La noción de ortogonalidad introducida en este capítulo implica el concepto de semiortonormalidad, así que los resultados probados en [12] también son válidos para dicha noción.

Lema 3.10. *Sea X un espacio de Banach. Sea $(x_n)_{n\in L}$ una sucesión en X, entonces si $(x_n)_{n\in L}$ es Saidi ortonormal, $(x_n)_{n\in L}$ es semiortonormal.*

Demostración. Sea $(\lambda_n)_{n\in L}$ una sucesión de escalares tal que $\sum_{n\in L} \lambda_n x_n \in X$. Sea $i \in L$, defínase $\mu_n = 0$ si $n \neq i$ y $\mu_i = \lambda_i$, entonces $|\mu_n| \leq |\lambda_n|$ y por el Teorema 3.6

$$|\lambda_i| \|\lambda_i x_i\| = \left\| \sum_{n\in L} \mu_n x_n \right\| \leq \left\| \sum_{n\in L} \lambda_n x_n \right\|.$$

Como esto es válido para todo $i \in L$, se tiene que

$$\sup_{n\in L} |\lambda_n| \leq \left\| \sum_{n\in L} \lambda_n x_n \right\|,$$

lo que completa la prueba. □

Observación 3.11. *Nótese que si $(x_n)_{n\in L} \subseteq X$ es semiortonormal entonces $\{x_n : n \in L\}$ es linealmente independiente.*

Sea $(x_n)_{n\in L} \subseteq X$ un conjunto semiortonormal, entonces defínase $\langle x_i^*, x_j \rangle = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker, para todo $j \in L$. De este modo, para cada $i \in L$ se obtiene un funcional lineal acotado $x_i^* \in \overline{\langle \{x_n : n \in L\} \rangle}^*$. Por el teorema de Hahn-Banach podemos extender cada elemento x_i^* a todo X, es decir, la sucesión $(x_n^*)_{n\in L}$ está contenida en X^*.

Definición 3.12. *A $(x_n^*)_{n\in L}$ se le llama sucesión de coeficientes funcionales asociada a $(x_n)_{n\in L}$.*

Nótese que si $\sum_{n\in L}\lambda_n x_n \in X$ y x_j^* es un elemento de la sucesión de coeficientes funcionales asociados a $(x_n)_{n\in L}$, entonces

$$\left\langle x_j^*, \sum_{n\in L}\lambda_n x_n \right\rangle = \lambda_j.$$

Observación 3.13. *Nótese que la sucesión de coeficientes funcionales asociada a $(x_n)_{n\in L}$ no es única.*

Definición 3.14. *Sean X un espacio de Banach y $(x_n^*)_{n\in L}$ una sucesión semiortonormal en X, y sea $(x_n^*)_{n\in L}$ una sucesión de coeficientes funcionales asociada a dicha sucesión. Decimos que $(x_n^*)_{n\in L}$ es ortonormal en el sentido de coeficientes funcionales si para cada sucesión acotada de escalares $(\lambda_n)_{n\in L}$ y $x\in X$, $\sum_{n\in L}\lambda_n \langle x_n^*, x\rangle x_n$ converge y*

$$\left\|\sum_{n\in L}\lambda_n \langle x_n^*, x\rangle x_n\right\| \leq \|x\|\sup_{n\in L}\|\lambda_n\|.$$

Decimos que $(x_n^*)_{n\in L}$ es ortogonal si la sucesión $\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)_{n\in L}$ es ortonormal.

Lema 3.15. *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n\in L}$ una sucesión en X. Entonces si $(x_n)_{n\in L}$ es ortonormal en el sentido de una sucesión de coeficientes funcionales, $(x_n)_{n\in L}$ es ortonormal.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in L}$ ortonormal respecto a la sucesión de coeficientes funcionales $(x_n^*)_{n\in L}$. Sean $(a_n)_{n\in L}$ y $(b_n)_{n\in L}$ sucesiones de escalares tales que $\sum_{n\in L} a_n x_n \in X$ y $|a_n| \leq |b_n|$ para todo $n\in L$. Entonces para todo $n\in L$ existe λ_n tal que $b_n\lambda_n = a_n$ y $|\lambda_n|\leq 1$.

Sea $x = (a_n)_{n\in L}$, entonces $\langle x_i^*, x\rangle = b_i$. Así, como $(x_n)_{n\in L}$ ortonormal respecto a la sucesión de coeficientes funcionales $(x_n^*)_{n\in L}$, se tiene que

$$\left\|\sum_{n\in L} a_n x_n\right\| =$$

$$\left\|\sum_{n\in L}\lambda_n b_n x_n\right\| = \left\|\sum_{n\in L}\lambda_n \langle x_n^*, x\rangle x_n\right\|$$

$$\leq \|x\|\sup_{n\in L}|\lambda_n| \leq \|x\| = \left\|\sum_{n\in L} b_n x_n\right\|.$$

Por el Teorema 3.6 se sigue que $(x_n)_{n\in L}$ ortonormal. ∎

Teorema 3.16. *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n\in L} \subseteq X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *$(x_n)_{n\in L}$ es Saidi ortonormal.*

2. *$(x_n)_{n\in L}$ es semiortonormal y la sucesión de coeficientes funcionales $(x_n^*)_{n\in L}$ es ortonormal en $\overline{\langle\{x_n : n \in L\}\rangle}^*$.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Si $(x_n)_{n\in L}$ es ortonormal, por el Lema 3.14, $(x_n)_{n\in L}$ es semiortonormal. Ahora, sean $x^* = \sum_{n\in L} a_n x_n^*$ y $y^* = \sum_{n\in L} b_n x_n^*$, dos elementos en $\overline{\langle\{x_n : n \in L\}\rangle}^*$ que satisfacen que $|a_n| \leq |b_n|$ para todo $n \in L$. Para cada $n \in L$ existe un escalar λ_n tal que $a_n = \lambda_n b_n$ y $|\lambda_n| \leq 1$. Sea $x \in \overline{\langle\{x_n : n \in L\}\rangle}^*$, entonces

$$x = \sum_{n\in L} \gamma_n x_n$$

donde $\gamma_n \in \mathbb{C}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $|\lambda_n| \leq 1$ se tiene que

$$\sum_{n\in L} \gamma_n \lambda_n x_n \in X$$

y

$$\left\|\sum_{n\in L} \gamma_n \lambda_n x_n\right\| \leq \left\|\sum_{n\in L} \gamma_n x_n\right\|.$$

Puesto que $\sum_{n\in L} \lambda_n b_n x_n^*$ es continuo se tiene que

$$|x^*(x)| = \left|\sum_{n\in L} \lambda_n b_n x_n^* \left(\sum_{k\in L} \gamma_k x\right)\right| =$$

$$\left|\sum_{k\in L} \lambda_k b_k \gamma_k x_k^*(x_k)\right| = \left|\sum_{n\in L} b_n x_n^* \left(\sum_{k\in L} \lambda_n \gamma_k x_k\right)\right| =$$

$$\left|y^* \left(\sum_{k\in L} \lambda_n \gamma_k x_k\right)\right| \leq$$

$$\|y^*\| \left\|\left(\sum_{k\in L} \lambda_n \gamma_k x_k\right)\right\| \leq$$

$$\|y^*\| \left\| \left(\sum_{k \in L} \gamma_k x_k \right) \right\| = \|y^*\| \|x\|$$

y esto implica que $\|x^*\| \leq \|y^*\|$. Por tanto $(x_n^*)_{n \in L}$ es ortonormal en

$$\overline{\langle \{x_n : n \in L\} \rangle}^*.$$

2. $\Rightarrow$ 1. Sea $(x_n)_{n \in L}$ una sucesión semiortonormal y supóngase que la sucesión de coeficientes funcionales $(x_n^*)_{n \in L}$ es ortonormal en

$$\overline{\langle \{x_n : n \in L\} \rangle}^*.$$

Sean $x^* = \sum_{n \in L} a_n x_n^*$ y $y^* = \sum_{n \in L} b_n x_n^*$, dos elementos en $\overline{\langle \{x_n : n \in L\} \rangle}^*$ que satisfacen que $|a_n| \leq |b_n|$ para todo $n \in L$. En la prueba de 1. $\Rightarrow$ 2. intercambiando y^*, x^* y x_n^* por y, x y x_n, respectivamente, se sigue que $\|x\| \leq \|y\|$ y esto completa la prueba. $\square$

3.1. Caracterización geométrica de la ortogonalidad de Saidi.

En este capítulo, dado el espacio de Banach X, B_X denotará la bola unitaria cerrada en dicho espacio, y B_J denotará la bola unitaria cerrada en el espacio $\overline{\langle \{x_n : n \in J\} \rangle}$, donde $J \subseteq L$.

Lema 3.17. *Sean X un espacio de Banach y $(x_n)_{n \in L} \subseteq X$ una sucesión tal que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in L$. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones.*

1. *$(x_n)_{n \in L}$ es semiortonormal.*
2. *Para cada sucesión de escalares $(a_n)_{n \in L}$ tal que $\sum_{n \in L} a_n x_n \in B$ se cumple que $\sup_{n \in L} |a_n| \leq 1$*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Puesto que $(x_n)_{n \in L}$ es semiortonormal se cumple que

$$\sup_{n \in L} |a_n| \leq \left\| \sum_{n \in L} a_n x_n \right\|,$$

pero por hipótesis $\sum_{n \in L} a_n x_n \in B_X$, por lo cual $\sup_{n \in L} |a_n| \leq 1$.

2. $\Rightarrow$ 1. Sea $x = \sum_{n \in L} a_n x_n \in X$.

Note que la afirmación 2 implica que $(x_n)_{n\in L}$ es linealmente independiente, pues suponga existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ no todos cero y $\{x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_m}\} \subseteq (x_n)_{n\in L}$ tales que

$$\lambda_1 x_{n_1} + \lambda_2 x_{n_2} + ... + \lambda_m x_{n_m} = 0.$$

Supóngase que $\lambda_{i_0} \neq 0$ entonces

$$\frac{2\lambda_1}{\lambda_{i_0}} x_{n_1} + \frac{2\lambda_2}{\lambda_{i_0}} x_{n_2} + ... + \frac{2\lambda_m}{\lambda_{i_0}} x_{n_m} = 0 \in B_X$$

y esto implica que

$$2 \leq \max_{j\in\{1,2,...,m\}} \left\{ \left| \frac{2\lambda_j}{\lambda_{i_0}} \right| \right\} \leq 1,$$

lo cual es una contradicción.

Si $x = 0$ es inmediato del hecho que $(x_n)_{n\in L}$ es linealmente independiente.

Si x no es cero, entonces $x = \sum_{n\in L} \frac{a_n}{\|x\|} x_n \in B$ y como consecuencia $\sup_{n\in L} \frac{a_n}{\|x\|} x_n \leq 1$, lo que equivale a que $\sup_{n\in L} |a_n| \leq \|x\|$ y esto implica que $(x_n)_{n\in L}$ es semiortonormal.

$\square$

Lema 3.18. *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n\in L} \subseteq X$ una sucesión ortogonal. Entonces para cada $J \subseteq L$ propio y no vacío, la proyección*

$$P_I : \overline{\langle\{x_n : n \in L\}\rangle} \longrightarrow \overline{\langle\{x_n : n \in J\}\rangle},$$

dada por

$$P_J\left(\sum_{n\in L} a_n x_n\right) = \sum_{n\in J} a_n x_n,$$

tiene norma 1.

Demostración. Supóngase que $\sum_{n\in L} a_n x_n \in X$ y defínase $c_n = a_n$ para todo $n \in L$ y, $b_n = a_n$ para todo $n \in J$ y $b_n = 0$ para todo $n \in L \setminus J$. Entonces $|b_n| \leq |c_n|$ y por el Teorema 3.6

$$\left\| P_J\left(\sum_{n\in L} a_n x_n\right)\right\| =$$

$$\left\|\sum_{n\in J} a_n x_n\right\| = \left\|\sum_{n\in L} b_n x_n\right\| \leq$$

$$\left\| \sum_{n\in L} c_n x_n \right\| = \left\| \sum_{n\in L} a_n x_n \right\| .$$

Entonces $\|P_J\| \leq 1$. Ahora si $x \in \overline{\langle \{x_n : n \in J\} \rangle}$ y no es cero, $P_J(\frac{x}{\|x\|}) = \frac{x}{\|x\|}$, por tanto $\|P_J\| = 1$.

□

Teorema 3.19. *Sea X un espacio de Banach y $(x_n)_{n\in L} \subseteq X$ una sucesión Saidi ortonormal que satisface que $\overline{\langle \{x_n : n \in L\} \rangle} \neq X$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.*

1. *Para cada sucesión $(x_n^*)_{n\in L} \subseteq X^*$ de coeficientes funcionales, $(x_n)_{n\in L}$ es ortonormal respecto a $(x_n^*)_{n\in L}$ si y solo si la proyección*

$$P : X \longrightarrow \overline{\langle \{x_n : n \in L\} \rangle}$$

definida por

$$P(x) = \sum_{n\in L} x_n^*(x) x_n$$

está bien definida y tiene norma 1.

2. *Existe una sucesión $(x_n^*)_{n\in L} \subseteq X^*$ de coeficientes funcionales tal que $(x_n)_{n\in L}$ es ortonormal respecto a dicha sucesión si y solo si existe una proyección*

$$P : X \longrightarrow \overline{\langle \{x_n : n \in L\} \rangle}$$

de norma 1.

Demostración. 1. Sea $P(x) = \sum_{n\in L} x_n^*(x) x_n$, se sigue de la definición de ortonormalidad respecto a coeficientes funcionales y tomando la sucesión de escalares acotada $(\lambda_n)_{n\in L}$ definida por $\lambda_n = 1$ para todo $n \in L$, que

$$P(x) = \sum_{n\in L} x_n^*(x) x_n \leq \|x\|$$

para todo $x \in X$, por lo que P está bien definida y tiene norma 1. Para el recíproco supóngase que P está bien definida y tiene norma uno. Consideramos la sucesión acotada de escalares $(\lambda_n)_{n\in L}$ y la desigualdad

$$\left\| \sum_{n\in L} \lambda_n x_n^*(x) x_n \right\|$$

$$\leq (\sup\{|\lambda_n| : n \in L\}) \left\| \sum_{n \in L} x_n^*(x) x_n \right\| =$$

$$(\sup\{|\lambda_n| : n \in L\}) \, \|P(x)\|$$

$$\leq (\sup\{|\lambda_n| : n \in L\}) \, \|P\| \|x\|,$$

la cual muestra que la sucesión $(x_n)_{n \in L}$ es ortonormal respecto a $(x_n^*)_{n \in L}$.

2. Si existe una sucesión $(x_n^*)_{n \in L} \subseteq X^*$ de coeficientes funcionales tal que $(x_n)_{n \in L}$ es ortonormal respecto a dicha sucesión, por el punto anterior queda demostrado. Para el converso supóngase que existe

$$P : X \longrightarrow \overline{\langle \{x_n : n \in L\} \rangle}$$

de norma 1. Cada $x \in X$ se escribe de manera única como $x = u_x + v_x$, donde $u \in \overline{\langle \{x_n : n \in L\} \rangle}$ y $v \in \ker P$. Como la sucesión $(x_n)_{n \in L}$ es semiortonormal, entonces existe una sucesión $(x_n^*)_{n \in L} \in \overline{\langle \{x_n : n \in L\} \rangle}^*$ que satisface que $x_n^*(x_k) = \delta_{nk}$. Ahora, para cada $n \in L$ se puede extender el funcional x_n^* a todo X usando la siguiente relación

$$x_n(x) = x_n(u_x).$$

Ahora, sea $(\lambda_n)_{n \in L}$ una sucesión de escalares acotada y $x \in X$. Podemos escribir

$$P(x) = u_x = \sum_{n \in L} a_n x_n$$

donde

$$x_n(x) = x_n(u_x) = a_n$$

para todo $n \in L$, y se sigue que

$$|\lambda_n x_n^*(x)| \leq (\sup_{k \in L} |\lambda_n|) |a_n|$$

para todo $n \in L$, por el Teorema 3.6 se tiene que $\sum_{n \in L} \lambda_n x_n^*(x) x_n$ converge puesto que $\sum_{n \in L} a_n x_n$ converge y además

$$\left\| \sum_{n \in L} \lambda_n x_n^*(x) x_n \right\| \leq$$

$$\left\| \sum_{n \in L} \left(\sup_{k \in L} |\lambda_n| \right) a_n x_n \right\| \leq \left(\sup_{k \in L} |\lambda_n| \right) \left\| \sum_{n \in L} a_n x_n \right\| =$$

$$\|P(x)\| \left(\sup_{k \in L} |\lambda_n| \right) \leq \|x\| \left(\sup_{k \in L} |\lambda_n| \right).$$

Lo cual completa la demostración. $\square$

3.2. Caracterización de operadores compactos.

Para operadores en espacios de Hilbert se tiene el siguiente resultado demostrado en el capítulo de preliminares, que caracteriza a los operadores compactos.

Teorema 3.20. *Sean H y K espacios de Hilbert. $T \in B(H, K)$ es compacto si y solo si existe $(T_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq B(H, K)$ una sucesión operadores de rango finito tal que* $\lim_{k\to\infty} \|T_k - T\| = 0$.

Para los espacios de Banach no siempre se tiene este resultado. En espacios de Banach, en general, solo es verdadero que si un operador es el límite de operadores de rango finito dicho operador es compacto. El siguiente teorema da condiciones para que el recíproco de sea verdadero.

Teorema 3.21. *Sean Y un espacio de Banach tal que tiene una base de Schauder ortonormal y X un espacio normado. Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la base de Schauder ortonormal de Y. Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea*

$$P_k : Y \longrightarrow \overline{\langle\{e_n : 1 \le n \le k\}\rangle}$$

la proyección dada por

$$P_k\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{k} a_n e_n.$$

Entonces un operador $T \in B(X, Y)$ es compacto si y solo si $(P_k \circ T)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a T en $B(X, Y)$.

Demostración. Sabemos que el límite de operadores de rango finito es un operador compacto. Así, basta probar que si $T \in B(X, Y)$ es compacto entonces $T_k = P_k \circ T$ converge a T en $B(X, Y)$. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in Y$, nótese que como $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es ortonormal se sigue del Teorema 3.6 tomando $b_n = a_n$ para todo $1 \le n \le k$ y $b_n = 0$ para todo $n > k$, y $c_n = a_n$, que

$$P_k\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right) = \left\|\sum_{n=1}^{k} a_n e_n\right\| \le \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right\|,$$

por lo que P_k es acotada y de norma 1. Nótese que como $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder $\lim_{k\to\infty} P_k(y) = y$ para todo $y \in Y$. Defínase $K = \overline{T(B_X)}$, el cual es compacto puesto que T es compacto en Y. Es necesario demostrar que

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in B_X}\|T_k(x)-T(x)\|=0.$$

Suponga que no pasa, es decir, que existen $\varepsilon>0$ y, subsucesiones $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}\subseteq B_X$ y $(T_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$, tales que

$$\|T_{k_j}(x_{k_j})-T(x_{k_j})\|>\varepsilon$$

para todo j, además, como K es compacto, es posible suponer que $(T(x_{k_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ converge a $y\in Y$. Entonces para todo j, como $\|P_j\|=1$, se tiene que

$$\|T_{k_j}(x_{k_j})-T(x_{k_j})\|\leq$$

$$\|P_{k_j}(T(x_{k_j}))-P_{k_j}(y)\|+\|T(x_{k_j})-P_{k_j}(y)\|=$$
$$\|P_{k_j}(T(x_{k_j})-y)\|+\|T(x_{k_j})-P_{k_j}(y)\|\leq$$
$$\|T(x_{k_j})-y\|+\|T(x_{k_j})-P_{k_j}(y)\|\longrightarrow 0,$$

pues $T(x_{k_j})\longrightarrow y$ y $P_{k_j}(y)\longrightarrow y$ cuando $j\longrightarrow\infty$, y esto es una contradicción.

□

Corolario 3.22. *Sean Y un espacio de Banach con base de Schauder $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormal y X es un espacio normado, entonces $T\in B(X,Y)$ es compacto si y solo si T es límite en de una sucesión de operadores de rango finito en $B(X,Y)$.*

Demostración. Por el teorema anterior se tiene que los operadores T_k tienen rango finito y convergen a T. □

Corolario 3.23. *Sea X un espacio de Banach con base de Schauder $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormal. Entonces el operador*

$$T:X\longrightarrow X$$

dado por

$$T(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n e_n^*(x)e_n,$$

donde e_n^* son los coeficientes funcionales en $\overline{\langle\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle}$, es compacto si y solo si $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=0$.

Demostración. Sean T_k los operadores como en el Teorema 3.20, entonces para todo $x \in X$ y por el Teorema 3.6

$$\|T_k(x) - T(x)\| =$$

$$\left\| \sum_{n=k+1}^{\infty} \lambda_n e_n^*(x) e_n \right\| \leq$$

$$\left(\sup_{n \geq k+1} |\lambda_n| \right) \left\| \sum_{n=k+1}^{\infty} e_n^*(x) e_n \right\| \leq \left(\sup_{n \geq k+1} |\lambda_n| \right) \|x\|$$

y esto implica que

$$\|T_k - T\| \leq \sup_{n \geq k+1} |\lambda_n|.$$

Nótese que $T(e_n) = \lambda_n$ para todo n y $T_n(e_k) = 0$ para $n > k$, por lo que

$$\|T_k - T\| = \sup_{n \geq k+1} |\lambda_n|.$$

Esta última igualdad implica que T_k converge a T en $B(X, Y)$ si y solo si $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0$. $\square$

Capítulo 4

Ejemplos de la ortogonalidad en $\ell^p_L(\mathbb{C})$

En este capítulo se presentan algunos resultados de ortogonalidad, tanto de Birkhoff-James como de Saidi, que caracterizan este concepto en el espacio de sucesiones

$$\ell^p_L(F) = \{(x_n)_{n\in L} \subseteq F : \|(x_n)_{n\in L}\|_p < \infty\}$$

donde

$$\|(x_n)_{n\in L}\|_p = \left(\sum_{n\in L} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

y F es el campo de los números reales o complejos.

Si $L = \{1, 2, 3, ..., N\}$, se escribirá $\ell^p_N(F)$ en lugar de $\ell^p_L(F)$ y si $L = \mathbb{N}$ simplemente se escribirá $\ell^p(F)$.

4.1. Caracterización de la ortogonalidad de Birkhoff-James en $\ell^p(\mathbb{C})$.

La caracterización presentada en este capítulo fue desarrollada por Saidi en [24].

Teorema 4.1. *Sean $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{C})$ sobre el campo de los números reales, donde $p \in (1, \infty)$. Entonces x y y son Birkhoff-James ortogonales si y solo si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^{p-2}\overline{x_k}y_k = 0.$$

Demostración. Nótese que para todo $\lambda > 0$,

$$\|x + \lambda y\|^p \geq \|x\|^p$$

si y solo si

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n + \lambda y_n| \geq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|,$$

lo cual sucede si y solo si

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|x_n + \lambda y_n| - |x_n|) \geq 0.$$

También nótese que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|x_n + \lambda y_n| - |x_n|) \geq 0$$

si y solo si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n + \lambda y_n| - |x_n|}{\lambda} \geq 0$$

y esto equivale a que

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n + \lambda y_n| - |x_n|}{\lambda} \geq 0,$$

nótese que como $f(\lambda) = |x_n + \lambda y_n|^p$ es convexa, existe $\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{|x_n + \lambda y_n| - |x_n|}{\lambda}$.

Dada la convergencia de las serie se sigue que para todo $\lambda > 0$,

$$\|x + \lambda y\|^p \geq \|x\|^p$$

si y solo si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{|x_n + \lambda y_n| - |x_n|}{\lambda} \geq 0.$$

Por otro lado, considérese la función real

$$f(\lambda) = |x_n + \lambda y_n|^p = \left((x_n + \lambda y_n)(\overline{x_n} + \lambda \overline{y_n})\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Al calcular su derivada por la derecha se sigue que

$$f'_+(\lambda) = \frac{p}{2} \left((x_n + \lambda y_n)(\overline{x_n} + \lambda \overline{y_n})\right)^{\frac{p}{2}-1} \left(y_n(\overline{x_n} + \lambda \overline{y_n}) + \overline{x_n}(x_n + \lambda y_n)\right).$$

De la última igualdad se sigue que

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{|x_n + \lambda y_n|^p - |x_n|^p}{\lambda} =$$

$$f_+'(0) = \frac{p}{2}(|x_n|^2)^{\frac{p}{2}-1}(x_n\overline{y_n} + y_n\overline{x_n}) =$$

$$\frac{p}{2}|x_n|^{p-2} 2\operatorname{Re}(\overline{x_n}y_n) = p|x_n|^{p-2}\operatorname{Re}(\overline{x_n}y_n).$$

Esto nos permite concluir que para $\lambda > 0$,

$$\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$$

si y solo si

$$\sum_{n=0}^{\infty} p|x_n|^{p-2}\operatorname{Re}(\overline{x_n}y_n) \geq 0.$$

Haciendo un procedimiento similar para $\lambda < 0$ se obtiene

$$\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$$

si y solo si

$$\sum_{n=0}^{\infty} p|x_n|^{p-2}\operatorname{Re}(\overline{x_n}y_n) \leq 0.$$

Por tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} p|x_n|^{p-2}\operatorname{Re}(\overline{x_n}y_n) = 0.$$

Ahora considérese la sucesión $z_n = ix_n$, se sigue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} p|x_n|^{p-2}\operatorname{Re}(\overline{ix_n}y_n) = 0.$$

Pero

$$\operatorname{Re}(\overline{ix_n}y_n) = \operatorname{Im}(\overline{x_n}y_n)$$

por lo que

$$\sum_{n=0}^{\infty} p|x_n|^{p-2}\operatorname{Im}(\overline{ix_n}y_n) = 0.$$

Finalmente debe pasar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^{p-2}(\overline{x_n}y_n) = 0.$$

□

4.2. Caracterización de la ortogonalidad de Saidi en $\ell^p_L(\mathbb{C})$.

Definición 4.2. *Sea $x = (x_n)_{n\in L} \in \ell^p_L(F)$, donde $p > 2$. Definimos el soporte de x como el conjunto $\{n \in L : x_n \neq 0\}$ y se denotará por* $\operatorname{supp}(x)$.

Para dos sucesiones de números complejos $a = (a_n)_{n\in L}$ y $b = (b_n)_{n\in L}$, considérense los conjuntos siguientes:

$$J = \operatorname{supp}(a) \cap \operatorname{supp}(b) = \{n \in L : a_n b_n \neq 0\}$$

$$A = \left\{ \left| \frac{b_n}{a_n} \right| : n \in J \right\}$$

y para cada $r > 0$

$$J_r = \left\{ n \in J : \left| \frac{b_n}{a_n} \right| = r \right\}$$

$$J_r^+ = \left\{ n \in J : \left| \frac{b_n}{a_n} \right| > r \right\}$$

$$J_r^- = \left\{ n \in J : \left| \frac{b_n}{a_n} \right| < r \right\}.$$

Nótese que para cada $r > 0$,

$$J = J_r^- \cup J_r \cup J_r^+,$$

$$A = \left\{ \left| \frac{b_n}{a_n} \right| : n \in J_r^- \right\} \cup \{r\} \cup \left\{ \left| \frac{b_n}{a_n} \right| : n \in J_r^+ \right\}$$

y J es la unión ajena

$$J = \bigcup_{r\in A} J_r.$$

Para el siguiente lema considérese la función $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(r,\theta) = \sum_{n\in J} |b_n + re^{i\theta} a_n|^p,$$

la cual está bien definida si $a, b \in \ell^p_L(\mathbb{C})$.

Teorema 4.3. *Dos elementos $a = (a_n)_{n\in L}$ y $b = (b_n)_{n\in L}$ en $\ell^p_L(\mathbb{C})$ son ortogonales si y solo si para cada $r > 0$ que satisface que, r y $\frac{1}{r}$ no están en A, f no depende de θ.*

Demostración. Nótese que, por definición, $a \perp b$ en $\ell_L^p(\mathbb{C})$ si y solo si $a \perp b$ en $\ell_J^p(\mathbb{C})$. Así, $a \perp b$ en $\ell_L^p(\mathbb{C})$ si y solo si, para $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\|\lambda b + \mu a\|_p = \||\lambda| b + |\mu| a\|_p \,,$$

si y solo si

$$\|\lambda b + \mu a\|_p^p = \||\lambda| b + |\mu| a\|_p^p \,,$$

y esto es equivalente a que

$$\sum_{n \in J} |\lambda b_n + \mu a_n|^p = \sum_{n \in J} ||\lambda| b_n + |\mu| a_n|^p.$$

Como λ es distinto de cero, al dividir por $|\lambda|$ esto es equivalente a que

$$\sum_{n \in J} \left| b_n + \frac{\mu}{\lambda} a_n \right|^p = \sum_{n \in J} \left| b_n + \frac{|\mu|}{\lambda} a_n \right|^p = \sum_{n \in J} \left| b_n + \left| \frac{\mu}{\lambda} \right| a_n \right|^p.$$

Esta última desigualdad es válida por el Teorema 3.6 y puesto que $\left| \frac{|\mu|}{\lambda} \right| = |\frac{\mu}{\lambda}|$.

En otras palabras $\frac{\mu}{\lambda} = re^{i\theta}$ para $r > 0$, es equivalente a que

$$\sum_{n \in J} \left| b_n + re^{i\theta} a_n \right|^p = \sum_{n \in J} |b_n + r a_n|^p$$

para todo $r > 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$.

Nótese que como

$$\sum_{n \in J} |b_n + r a_n|^p$$

no depende de θ, entonces ningún sumando depende de θ, pues de lo contrario si $|b_k + r a_k|$ estuviera en función de θ para algún $k \in J$, esto implicaría que $|b_k + r a_k| = 0$ para algún $k \in J$ y por tanto se tendría que $b_k + r a_k = 0$. Ésta igualdad implicaría que $r \in A$ o $\frac{1}{r} \in A$. $\square$

Considérese la siguiente notación que será de gran utilidad en las demostraciones de los siguientes teoremas.

Defínase

$$C_p(0) = 1$$

y si $k \geq 1$ defínase

$$C_p(k) = \frac{1}{k!} \prod_{t=0}^{k-1} \left(\frac{p}{2} - t \right) = \frac{1}{2^k k!} \prod_{t=0}^{k-1} (p - 2t)$$

$$B_r^+(k,l) = C_p(k)C_p(l) \sum_{n\in J_r^+} |b_n|^p \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^k \left(\frac{\overline{a_n}}{\overline{b_n}}\right)^l$$

$$B_r^-(k,l) = C_p(k)C_p(l) \sum_{n\in J_r^-} |a_n|^p \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^k \left(\frac{\overline{b_n}}{\overline{a_n}}\right)^l.$$

Teorema 4.4. *Dos elementos $a = (a_n)_{n\in L}$ y $b = (b_n)_{n\in L}$ en $\ell_L^p(\mathbb{C})$ son ortogonales si y solo si para cada entero $m \geq 1$ se tiene que*

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_r^+(k+m,k) r^{2k+m} + \sum_{k=0}^{\infty} B_r^-(k,k+m) r^{p-(2k+m)} = 0$$

para todo $r > 0$.

Demostración. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, considerando la rama principal del logaritmo de $(\alpha+\beta)^{\frac{p}{2}} = e^{\frac{p}{2}\ln(\alpha+\beta)}$, se tiene por el teorema del binomio que

$$(\alpha+\beta)^{\frac{p}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_p(k)\alpha^{\frac{p}{2}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k.$$

Si $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$, dicha serie es absolutamente convergente.

Puesto que $\left|\frac{re^{i\theta}a_n}{b_n}\right| < 1$ si $j \in J_r^+$, se sigue que

$$\sum_{n\in J_r^+} |b_n + re^{i\theta}a_n|^p = \sum_{n\in J_r^+} (b_n + re^{i\theta}a_n)^{\frac{p}{2}} (\overline{b_n} + re^{-i\theta}\overline{a_n})^{\frac{p}{2}} =$$

$$\sum_{n\in J_r^+} \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_p(k) b_n^{\frac{p}{2}} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^k r^k e^{ik\theta}\right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} C_p(l) \overline{b_n}^{\frac{p}{2}} \left(\frac{\overline{a_n}}{\overline{b_n}}\right)^l r^l e^{-il\theta}\right) =$$

$$\sum_{n\in J_r^+} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} C_p(k)C_p(l)|b_n|^p \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^k \left(\frac{\overline{a_n}}{\overline{b_n}}\right)^l r^{k+l}\right) e^{i(k-l)\theta}\right).$$

Puesto que la serie es absolutamente convergente es posible intercambiar el orden de la suma, de este modo se sigue que

$$\sum_{n\in J_r^+} |b_n + re^{i\theta}a_n|^p =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\left(C_p(k)C_p(l)\sum_{n\in J_r^+}|b_n|^p\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^k\left(\frac{\overline{a_n}}{\overline{b_n}}\right)^l\right)r^{k+l}\right)e^{i(k-l)\theta}=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty}B_r^+(k,l)r^{k+l}\right)e^{i(k-l)\theta}.$$

Tomando $l=k-m$ e intercambiando el orden en la suma, es posible separarla del siguiente modo:

$$\sum_{n\in J_r^+}|b_n+re^{i\theta}a_n|^p=$$

$$\sum_{-\infty}^{m=-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}B_r^+(k,k-m)r^{2k-m}\right)e^{i(m)\theta}+\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=m}^{\infty}B_r^+(k,k-m)r^{2k-m}\right)e^{i(m)\theta}.$$

Ahora, escribiendo $-m$ en vez de m en el primer sumando y reemplazando k por $k+m$ en el segundo sumando se sigue que

$$\sum_{n\in J_r^+}|b_n+re^{i\theta}a_n|^p=$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}B_r^+(k,k+m)r^{2k+m}\right)e^{i(-m)\theta}+\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}B_r^+(k+m,k)r^{2k+m}\right)e^{i(m)\theta}.$$

Similarmente, puesto que $\left|\dfrac{b_n}{re^{i\theta}a_n}\right|<1$ si $j\in J_r^-$, se sigue que

$$\sum_{n\in J_r^-}|b_n+re^{i\theta}a_n|^p=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\left(C_p(k)C_p(l)\sum_{n\in J_r^-}|a_n|^p\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^k\left(\frac{\overline{b_n}}{\overline{a_n}}\right)^l\right)r^{p-(k+l)}\right)e^{-i(k-l)\theta}=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty}B_r^-(k,l)r^{k+l}\right)e^{-i(k-l)\theta}$$

Tomando $l=k+m$ e intercambiando el orden, es posible separar la suma del siguiente modo:

$$\sum_{n\in J_r^-}|b_n+re^{i\theta}a_n|^p=$$

$$\sum_{-\infty}^{m=-1}\left(\sum_{k=-m}^{\infty} B_r^-(k,k+m)r^{p-(2k-m)}\right)e^{-i(m)\theta}+$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=m}^{\infty} B_r^-(k,k+m)r^{p-(2k+m)}\right)e^{i(m)\theta}.$$

Ahora, sumando sobre m en vez de $-m$ y sobre $m+k$ en vez de k se obtiene que:

$$\sum_{n\in J_r^-}|b_n+re^{i\theta}a_n|^p=$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} B_r^-(k+m,k)r^{p-(2k-m)}\right)e^{-i(m)\theta}+$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=m}^{\infty} B_r^-(k,k+m)r^{p-(2k+m)}\right)e^{i(m)\theta}.$$

Sabemos que si f no depende de θ entonces

$$f(r,\theta)=\sum_{n\in J_r}|b_n+re^{i\theta}a_n|^p=\sum_{n\in J_r^+}|b_n+re^{i\theta}a_n|^p+\sum_{n\in J_r^-}|b_n+re^{i\theta}a_n|^p,$$

y por el trabajo en los párrafos anteriores se sigue que

$$f(r,\theta)=$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} B_r^+(k,k+m)r^{2k+m}\right)e^{i(-m)\theta}+\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} B_r^+(k+m,k)r^{2k+m}\right)e^{i(m)\theta}+$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} B_r^-(k+m,k)r^{p-(2k-m)}\right)e^{-i(m)\theta}+$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} B_r^-(k,k+m)r^{p-(2k+m)}\right)e^{i(m)\theta}=$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} B_r^+(k,k+m)r^{2k+m}+\sum_{k=0}^{\infty} B_r^-(k+m,k)r^{p-(2k-m)}\right)e^{-im\theta}+$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} B_r^+(k+m,k)r^{2k+m}+\sum_{k=0}^{\infty} B_r^-(k,k+m)r^{p-(2k+m)}\right)e^{im\theta}=$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} E_m(r)e^{-im\theta} + \sum_{m=0}^{\infty} D_m(r)e^{im\theta}.$$

Nótese que $E_m(r) = \overline{D_m(r)}$ y que, dado $r > 0$, $f(r, \theta)$ no depende de θ si y solo si

$$\sum_{m=1}^{\infty} E_m(r)e^{-im\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} D_m(r)e^{im\theta},$$

puesto que cuando m no es cero el sumando correspondiente depende de θ. Nótese que el conjunto de funciones de θ, $\{e^{im\theta} : m \in \mathbb{Z}\}$, es linealmente independiente, por tanto, por el lema anterior, $f(r, \theta)$ no depende de θ si y solo si para todo $r > 0$ tal que $r, \frac{1}{r}$ no están en A, $D_m(r) = 0$ para todo $m > 0$.

Nótese que por definición de J^+, si $n \in J^+$, $\frac{|a_n|}{|b_n|} < 1$ y por tanto

$$|B_r^+(k+m, k)r^{2k+m}| \le C_p(k+m)C_p(k) \left(\sum_{j \in J_r^+} |b_j|^p \right).$$

De manera similar, si $n \in J^+$, $\frac{|b_n|}{|a_n|} < 1$ y por tanto

$$|B_r^-(k, k+m)r^{p-(2k+m)}| \le C_p(k)C_p(k+m) \left(\sum_{j \in J_r^-} |a_j|^p \right) r^p.$$

Por definición, la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} C_p(k)C_p(k+m)$ se sigue de la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} C_p(k)$. Nótese que por la desigualdad de Bernoulli,

$$\frac{|C_p(k+1)|}{|C_p(k)|} = 1 - \frac{1+\frac{p}{2}}{k+1} \le 1 - \frac{\frac{3}{2}}{k+1} \le \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{1}{(k+1)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{(k)^{\frac{3}{2}}}}.$$

Puesto que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ converge se sigue que $\sum_{k=1}^{\infty} C_p(k)C_p(k+m)$ es convergente y por tanto

$$D_m(r) = \sum_{k=0}^{\infty} B_r^+(k+m, k)r^{2k+m} + \sum_{k=0}^{\infty} B_r^-(k, k+m)r^{p-(2k+m)}$$

converge absolutamente para cada $r > 0$ que cumple que $r, \frac{1}{r}$ no están en A, por tanto esta serie converge en compactos sobre $(0, \infty)$ y esto implica la continuidad de $D_m(r)$. Puesto que $\{r > 0 : r \notin A\}$ es denso en $(0, \infty)$ se sigue que $D_m(r) = 0$ para todo $r > 0$.

$\square$

Teorema 4.5. *Sea $p \in [1, \infty)$ un número que no es par. Entonces dos elementos $a = (a_n)_{n\in L}$ y $b = (b_n)_{n\in L}$ en $\ell^p_L(\mathbb{C})$ son ortogonales si y solo si para cada $r > 0$*

$$\sum_{J_r} |b_n|^p \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^m = 0$$

para todo entero $m \geq 1$.

Equivalentemente $a = (a_n)_{n\in L}$ y $b = (b_n)_{n\in L}$ en $\ell^p_L(\mathbb{C})$ son ortogonales si y solo si para cada $r > 0$

$$\sum_{J_r} |a_n|^p \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^m = 0$$

para todo entero $m \geq 1$.

Demostración. Nótese que si $r \notin A$, entonces $J_r = \varnothing$, por lo que $\sum_{\varnothing} = 0$.

Por otro lado, como p no es par, entonces para cada $m \leq 1$ el conjunto de funciones

$$\{g_k(r) = r^{2k+m} : k \geq 0\} \cup \{h_k(r) = r^{p-(2k+m)} : k \geq 0\},$$

definidas en $(0, \infty)$, es linealmente independiente. Del Teorema 4.4 de esta sección se sigue que para todos $k \geq 0$ y para todo $m \geq 1$

$$B^+_r(k+m, k) = B^-_r(k, k+m)$$

para todo $r > 0$.

Sea $r_1 > 0$ fijo, entonces, si $r \in (0, r_1)$ se cumple que

$$B^+_r(k+m, k) - B^+_{r_1}(k+m, k) = 0.$$

Nótese que como p no es par, $C_p(k+m)C_p(k) \neq 0$ y se sigue que si

$$B^+_r(k+m, k) - B^+_{r_1}(k+m, k) =$$

$$C_p(k+m)C_p(k) \sum_{J^+_r} |b_n|^p \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{k+m} \left(\overline{\frac{a_n}{b_n}}\right)^k -$$

$$C_p(k+m)C_p(k) \sum_{J^+_{r_1}} |b_n|^p \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{k+m} \left(\overline{\frac{a_n}{b_n}}\right)^k = 0,$$

entonces

$$\sum_{J_r^+} |b_n|^p \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{k+m} \left(\frac{\overline{a_n}}{\overline{b_n}}\right)^k - \sum_{J_{r_1}^+} |b_n|^p \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{k+m} \left(\frac{\overline{a_n}}{\overline{b_n}}\right)^k =$$

$$\sum_{J_r \setminus J_{r_1}^+} |b_n|^p \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{k+m} \left(\frac{\overline{a_n}}{\overline{b_n}}\right)^k = 0.$$

Puesto que la serie $\sum_{J_r \setminus J_{r_1}^+} |b_n|^p \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{k+m} \left(\frac{\overline{a_n}}{\overline{b_n}}\right)^k$ es absolutamente convergente, tomando límite cuando r tiende a r_1, se tiene que

$$\sum_{J_{r_1}^+} |b_n|^p \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{k+m} \left(\frac{\overline{a_n}}{\overline{b_n}}\right)^k = \sum_{J_{r_1}^+} |b_n|^p \left|\frac{a_n}{b_n}\right|^{2k} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^m = 0,$$

pero como $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = r_1$ para todo $n \in J_{r_1}$ se sigue que

$$\sum_{J_{r_1}^+} |b_n|^p \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^m = 0,$$

multiplicando por $r_1^{p-2m} = \left(\frac{|a_n|^p}{|b_n|^p}\right) \left(\frac{\overline{b_n}}{\overline{a_n}}\right)^m \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^m$ y conjugando resulta que

$$\sum_{J_{r_1}^+} |a_n|^p \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^m = 0$$

Recíprocamente, si se cumplen las identidades

$$\sum_{J_{r_1}^+} |b_n|^p \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^m = 0,$$

$$\sum_{J_{r_1}^+} |a_n|^p \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^m = 0$$

y al multiplicar por $C_p(k+m)C_p(k)r_1^{2k}$ y por $C_p(k+m)C_p(k)r_1^{-2k}$, respectivamente, y notando que que $r_1 = \frac{|a_j|}{|b_j|}$, se sigue que para todo $r_1 > 0$

$$B_{r_1}^+(k+m.k) = B_{r_1}^+(k, k+m) = 0,$$

para todo $k > 0$ y $m \geq 1$. En consecuencia, por el Teorema 4.4, se tiene que $a = (a_n)_{n\in L}$ y $b = (b_n)_{n\in L}$ son ortogonales en $\ell_L^p(\mathbb{C})$. $\square$

Teorema 4.6. *Supóngase que p es un entero par positivo. Dos elementos $a = (a_n)_{n\in L}$ y $b = (b_n)_{n\in L}$ en $\ell_L^p(\mathbb{C})$ son ortogonales si y solo si*

$$\sum_{n\in J} |b_n|^p \left|\frac{a_n}{b_n}\right|^{2k} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^m = 0$$

para cualesquiera enteros, m y k, que satisfacen $1 \leq m \leq \frac{p}{2}$ $0 \leq k \leq \frac{p}{2} - m$.

Equivalentemente, dos elementos $a = (a_n)_{n\in L}$ y $b = (b_n)_{n\in L}$ en $\ell_L^p(\mathbb{C})$ son ortogonales si y solo si

$$\sum_{n\in J} |a_n|^p \left|\frac{b_n}{a_n}\right|^{2k} \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^m = 0$$

para cualesquiera enteros, m y k, que satisfacen $1 \leq m \leq \frac{p}{2}$ $0 \leq k \leq \frac{p}{2} - m$.

Demostración. Sea $p = 2t$ donde $t \geq 1$. Utilizando la expresión binomial se sigue que

$$f(r,\theta) = \sum_{n\in J} (b_n + re^{i\theta}a_n)^t(\overline{b_n} + re^{-i\theta}\overline{a_n})^t =$$

$$\sum_{n\in J} \left(\sum_{k=0}^{t} C_t^k b_n^{t-k} a_n^k r^k e^{ik\theta}\right) \left(\sum_{l=0}^{t} C_t^l \overline{b_n}^{t-l} \overline{a_n}^l r^l e^{-il\theta}\right) =$$

$$\sum_{k=0}^{t}\sum_{l=0}^{t} C_t^k C_t^l \left(\sum_{n\in J} a_n^k \overline{a_n}^l b_n^{t-k} \overline{b_n}^{t-l}\right) r^{k+l} e^{i(k-l)\theta}.$$

Tomando $l = k - m$ e intercambiando el orden se la suma se obtiene que:

$$f(r,\theta) = \sum_{m=-t}^{-1}\sum_{k=0}^{t+m} C_t^k C_t^{k-m} \left(\sum_{n\in J} a_n^k \overline{a_n}^{k-m} b_n^{t-k} \overline{b_n}^{t-k+m}\right) r^{2k-m} e^{im\theta} +$$

$$\sum_{m=0}^{t}\sum_{k=m}^{t} C_t^k C_t^{k-m} \left(\sum_{n\in J} a_n^k \overline{a_n}^{k-m} b_n^{t-k} \overline{b_n}^{t-k+m}\right) r^{2k-m} e^{im\theta}$$

Intercambiando m por $-m$ en la primer doble suma y reemplazando k por $k+m$ en la segunda se sigue que

$$f(r,\theta) = \sum_{m=1}^{t}\sum_{k=0}^{t-m} C_t^k C_t^{k+m} \left(\sum_{n\in J} a_n^k \overline{a_n}^{k+m} b_n^{t-k} \overline{b_n}^{t-k+m}\right) r^{2k+m} e^{-im\theta} +$$

$$\sum_{m=0}^{t}\sum_{k=0}^{t-m} C_t^k C_t^{k+m}\left(\sum_{n\in J} a_n^{k+m}\overline{a_n}^k b_n^{t-k-m}\overline{b_n}^{t-k}\right) r^{2k+m}e^{im\theta}.$$

Nótese que $f(r,\theta)$ no depende de θ cuando en la expresión anterior la suma definida por $m\neq 0$ son cero, es decir, cuando

$$\sum_{m=1}^{t}\sum_{k=0}^{t-m} C_t^k C_t^{k+m}\left(\sum_{n\in J} a_n^{k}\overline{a_n}^{k+m} b_n^{t-k}\overline{b_n}^{t-k+m}\right) r^{2k+m}e^{-im\theta}+$$

$$\sum_{m=1}^{t}\sum_{k=0}^{t-m} C_t^k C_t^{k+m}\left(\sum_{n\in J} a_n^{k+m}\overline{a_n}^k b_n^{t-k-m}\overline{b_n}^{t-k}\right) r^{2k+m}e^{im\theta}=0.$$

Dada la independencia lineal del conjunto

$$\{e^{in\theta} : n\in\mathbb{Z}\}$$

$f(r,\theta)$ no depende de θ si y solo si

$$\sum_{k=0}^{t-m} C_t^k C_t^{k+m}\left(\sum_{n\in J} a_n^{k}\overline{a_n}^{k+m} b_n^{t-k}\overline{b_n}^{t-k+m}\right) r^{2k+m}=0$$

y

$$\sum_{k=0}^{t-m} C_t^k C_t^{k+m}\left(\sum_{n\in J} a_n^{k+m}\overline{a_n}^k b_n^{t-k-m}\overline{b_n}^{t-k}\right) r^{2k+m}=0$$

para todo $1\leq m\leq t$ y donde $r>0$.

Puesto que una suma es el conjugado de la otra se puede concluir que $f(r,\theta)$ no depende de θ si y solo si

$$\sum_{k=0}^{t-m} C_t^k C_t^{k+m}\left(\sum_{n\in J} a_n^{k+m}\overline{a_n}^k b_n^{t-k-m}\overline{b_n}^{t-k}\right) r^{2k+m}=0$$

para todo $1\leq m\leq t$ y donde $r>0$.

Nótese que el conjunto de funciones

$$\{g_m(r)=r^{2k+m} : 0\leq k\leq t-m\}$$

definidas en $(0,\infty)$ es linealmente independiente y como consecuencia $f(r,\theta)$ no depende de θ si y solo si

$$\sum_{n\in J} a_n^{k+m}\overline{a_n}^k b_n^{t-k-m}\overline{b_n}^{t-k} = \sum_{n\in J}|a_n|^p\left|\frac{b_n}{a_n}\right|^{2k}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^m=0$$

para todo $1\leq m\leq t$ y para todo $0\leq k\leq t-m$. El resto de la prueba se hace de manera análoga intercambiando a por b. $\square$

Corolario 4.7. *Dos elementos* $a = (a_n)_{n\in L}$ *y* $b = (b_n)_{n\in L}$ *en* $\ell^2_L(\mathbb{C})$ *son ortogonales si y solo si*

$$\sum_{n\in L} a_n\overline{b_n} = 0.$$

Bibliografía

[1] Bhattacharyya, T., Grover, P. Characterization of Birkhoff-James Orthogonality, J. Math. Appl. 407, 350-358, 2013.

[2] Bhatia, R., Semri, P., Orthogonality of Matrices and Some Distance Problems, Linear Algebra Appl. 287 77-86, 1999.

[3] Birkhoff, G., Orthogonality in Linear Metric Spaces, Duke Math. J. 1, 169-172, 1935.

[4] Blackadar, B., *Operator Algebras, Theory of C* Algebras and von Neumann Algebras.*, Springer Verlag Berlin Heidelberg 2006.

[5] Blecher, David P., A New Approach to Hilbert C* Modules, Math. Ann. 307, 253-290, 1997.

[6] Cheng, Raymond. Mashreghi, J. Ross, W. Birkhoff-James Orthogonality and the Zeros of an Analytic Function, Comput. Methods Funct. Theory, 17. 499-523, 2017.

[7] Conway, J. B., *A Course in Functional Analysis*, Springer Verlag New York 1985.

[8] Douglas R.,*Banach Algebra Techniquesin Operator Theory* Springer Verlag New York, 1998.

[9] Grover, P., *Some Problems in Differencial and Subdifferencial Calculus of Matrices*, Doctoral Thesis, Indian Statistical Institute, 2014.

[10] James, R., Orthogonality in Normed Linear Spaces, Duke Math. J., 12, 291-302, 1945.

[11] Kenneth, D., *C*-alghebfras for Example*, Fields Institute Monographs, American Mathematical Society, 1991.

[12] Khalil, R., Ortogonality in Banch Spaces, Math. J. Toyoma Univ. 13 185-205, 1990.

[13] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis Whit Applications*, Johon Wiley and Sons. Inc. 1978.

[14] Lloyd N., Bau D., *Numerical Linear Algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia 1997.

[15] Manuilov V.M, Troistky E. V. *Hilbert C*-Modules* American Mathemathical Society 2001.

[16] Moslehian, M., *What is C*-Module?* Proceedings of the First Workshop on C*-Algebras, 29-38, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, 2003

[17] Murphy G., *C*-Algebras and Operator Theory*, Academy Press, Inc., 1990

[18] Narcowich F. J., Ward J. D., Topelitz-Haussdorf Systems, Linear Algebra and Its Applications Vol. 62 183-193, 1984.

[19] Pedersen, G. K., *C*-Algebras and Their Automorphism Groups*, London Math. Soc. Monographs 14, Academic Press, 1979.

[20] Phelps, R., *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*, Springer-Verlag, 1980.

[21] Roberts, B., On The Geometry of Abstract Spaces, Tohoku Math. J., 39, 42-59, 1934.

[22] Rudin W., *Functional Analysis* McRaw Hill, Inc. 1973.

[23] Saidi, F. B., An Extension Of The Notion Of Ortogonality To Banach Spaces, J. Math. Appl. 267, 29-47 2002

[24] Saidi, F. B., Characterizations Of Ortogonality In Certain Banach Spaces, Bull. Austral. Math. Soc. 65, 93-104 2002.

[25] Singer., Unghiuri Abstract sii Functii Trigonometrice in spatii Banch, Bull Stiint Acad. R. P. R. Sect Stiint. Mat., 9, 29-42, 1957.

[26] Willard, S., *General Topology.*, Addison-Wesley Publishing Company 1970.