



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Posgrado en Ciencias Físicas

Formación de estructuras cosmológicas con fluidos no comóviles

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS FÍSICAS

PRESENTA:
FERNANDO ALEJANDRO PIZAÑA PÉREZ

COMITÉ TUTORIAL
DR. JUAN CARLOS HIDALGO CUÉLLAR
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS, UNAM
DR. JUAN CARLOS DEGOLLADO DAZA
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS, UNAM
DR. ROBERTO ALLAN SUSSMAN LIVOVSKI
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, DICIEMBRE 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Director de tesis

Dr. Juan Carlos Hidalgo Cuéllar

Miembros del jurado

Dr. Juan Carlos Hidalgo Cuéllar

Dr. Darío Nuñez Zúñiga

Dr. Mario Alberto Rodríguez Meza

Dra. Celia del Carmen Escamilla Rivera

Dr. José Alberto Vázquez González

Agradecimientos

En primer lugar me gustaría agradecer a mi asesor, quien me estuvo apoyando a lo largo de la maestría no solo con material para la realización de esta tesis sino con consejos y sugerencias para mi desarrollo como un investigador científico.

Agradezco a mis padres y mi hermana, sin su educación y compañía jamás podría haber llegado a donde estoy y me han formado como persona a lo largo de mi vida.

A mis amigos, que aguantan todas mis tonterías y están siempre para mí tanto en mis mejores como mis peores momentos.

Finalmente, agradezco a mi perrita Sif, quien me ha ayudado a mantener la cordura durante el encierro de la pandemia con su incondicional cariño.

Resumen

En esta tesis se examina la formación de estructura utilizando un perfil de densidad correspondiente a un *void*. Se da un breve repaso de las bases necesarias para dicho estudio: la relatividad general y la cosmología estándar. Se describen también tres formas distintas para el estudio de formación de estructuras. Primero, la teoría de perturbaciones lineales, luego el colapso esférico y el método que se utiliza en este trabajo: modelos cosmológicos inhomogéneos.

Se realizó un estudio detallado del formalismo $1 + 3$ de las ecuaciones de Einstein en el cuál se hace una foliación del espacio-tiempo con una familia de observadores dada (un campo de 4-velocidad u^a) que a su vez define hipersuperficies 3D espaciales ortogonales a los observadores.

Se tomó una métrica inhógena y se obtuvieron las ecuaciones del formalismo $1 + 3$ para un fluido general e irrotacional, se consideraron las transformaciones de velocidad entre componentes de múltiples fluidos y se adaptan específicamente para dos fluidos de polvo: materia oscura y bariones. La 4-velocidad fundamental, es decir, el marco comovil se toma como el de la materia oscura.

Se resolvió el sistema de ecuaciones $1 + 3$ ((3.16)-(3.26)) asociado a la métrica inhomogénea definiendo condiciones iniciales a $z = 100$ para un fondo Λ CDM plano y se consideraron el caso en el que la velocidad relativa entre bariones y CDM es cero (caso Lemaître-Tolman-Bondi o LTB en donde ambas componentes se comportan como una sola) y el caso con velocidad relativa distinta de cero. Para el caso LTB se definieron perfiles inhomogéneos gaussianos de densidad de bariones y CDM y un perfil de curvatura y a partir de las constricciones se obtuvieron todas las variables iniciales necesarias. En el caso con velocidad relativa distinta de cero, se agregó un perfil de densidad gaussiano de velocidad relativa, se cambió el perfil inhomogéneo de bariones por un perfil homogéneo y se consideraron 3 distintas velocidades máximas del perfil inicial de velocidades; fuera de eso, las condiciones de fondo e iniciales fueron las mismas que en el caso LTB.

Para el caso LTB se obtiene la evolución de los contrastes de densidad de cada componente y la expansión. Además, se obtuvo la evolución de la función de crecimiento numérica comparada con la prescripción perturbativa en un modelo Λ CDM y las diferencias porcentuales que se tienen entre las funciones de crecimiento para un rango de $z \in [0, 20]$. Para el caso de la velocidad relativa, se obtienen los perfiles finales de δ para ambas componentes de materia para el caso de tres perfiles de velocidad relativa distintos (correspondientes a velocidades máximas de $V_{max} = 71.1821km/s, 142.3608km/s, 355.9097km/s$). De igual forma, se obtuvieron las comparaciones de las funciones de crecimiento y sus diferencias porcentuales en el mismo rango de z .

Del análisis de los ritmos de crecimiento se concluye lo siguiente:

1. Debido a regímenes no lineales que alcanza el contraste de densidad, la función de crecimiento difiere (en pequeña medida) respecto a la prescripción perturbativa.
2. Al introducir una velocidad relativa entre las componentes de materia, se separa el comportamiento entre las componentes y se presenta un comportamiento que difiere de forma significativa con respecto a la prescripción perturbativa.
3. Considerando distintas velocidades relativas máximas, se observa que la diferencia entre el comportamiento numérico y la prescripción perturbativa aumenta conforme la velocidad relativa máxima aumenta.

Índice

1	Introducción	7
1.1	Relatividad general	7
1.1.1	Variedad diferencial, espacio tangente y derivada covariante.	7
1.1.2	Curvatura y Ecuaciones de Einstein.	11
1.2	Principio Cosmológico y cosmología estandar	14
1.3	Formación de estructura	17
1.3.1	Perturbaciones cosmológicas a primer orden	17
1.3.2	Función de crecimiento lineal	19
1.3.3	Colapso Esférico	22
1.4	Modelos cosmológicos inhomogéneos	24
1.4.1	Soluciones Petrov D y universos silenciosos	24
1.4.2	Soluciones de LTB y Szekeres	26
2	El formalismo 1 + 3	29
2.1	Ecuaciones de Einstein en el formalismo 1+3	29
2.1.1	Coordenadas comóviles, tensor de proyección y cantidades cinemáticas	29
2.1.2	Identidades de Ricci, Materia y ecuaciones de Einstein	32
2.2	Sistema de ecuaciones para la evolución de fluidos no comóviles	35
3	Resolución del sistema y resultados	41
3.1	Ecuaciones para bariones y CDM	42
3.2	Caso LTB: CDM y Bariones Comoviles.	43
3.3	CDM y Bariones con velocidad relativa entre ellos.	47
4	Discusión y conclusiones	55
4.1	Recapitulación	55
4.2	Discusión de Resultados	56
4.3	Perspectivas a futuro	57
A	Apéndice	59
A.1	Condiciones para evitar <i>shell crossings</i>	59
A.2	Relaciones de Gauss-Codazzi	59
A.3	El método de líneas	60
A.4	Código para la resolución de las ecuaciones	61

Convenciones

Las siguientes convenciones se utilizaran a lo largo de este trabajo

- La métrica tiene signatura $(-, +, +, +)$ (a menos que se especifique lo contrario).
- Se utiliza la notación de índices abstractos de [1] y [2] en donde tensores con índices latinos a, b, c , etc., T^{ab} , se refieren al objeto geométrico; tensores con índices griegos α, β, μ, ν , etc. $T^{\alpha\beta}$ se refieren a las componentes una vez fijo un sistema de coordenadas e índices latinos i, j, k , etc. T^{ij} se refiere a las componentes espaciales del tensor.
- Las derivadas parciales con respecto a alguna coordenada x^μ son abreviadas de $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ a ∂_{x^μ} .
- Se utiliza la convención de suma de Einstein en donde $T^a_b S_a = \sum_a T^a_b S_a$, así como en componentes $T^\mu_\nu S_\mu = \sum_\mu T^\mu_\nu S_\mu$.
- La simetrización de un tensor $T_{a_1 \dots a_l}$ se denota por $T_{(a_1 \dots a_l)} = \frac{1}{l!} \sum_\pi T_{a_{\pi(1)} \dots a_{\pi(l)}}$, en donde la suma es tomada sobre todas las permutaciones, π de $1, \dots, l$.
- La antisimetrización de un tensor $T_{a_1 \dots a_l}$ se denota por $T_{[a_1 \dots a_l]} = \frac{1}{l!} \sum_\pi \delta_\pi T_{a_{\pi(1)} \dots a_{\pi(l)}}$, en donde la suma es tomada sobre todas las permutaciones, π de $1, \dots, l$ y $\delta_\pi = \pm 1$ dependiendo de si la permutación es par (+) o impar (-).

Introducción

1.1 Relatividad general

Durante aproximadamente 300 años, el entendimiento humano del movimiento de los objetos y de los cuerpos celestes estuvo dictado por completo por la Mecánica y la Gravitación de Sir Isaac Newton. Debido a inconsistencias en las ecuaciones del electromagnetismo al estudiarlas en distintos sistemas de referencia moviéndose respecto uno del otro, Einstein desarrolló la teoría de la Relatividad Especial y con esto cambió conceptos físicos que se solían dar por hechos; tales como la simultaneidad de eventos, el espacio y tiempo separados y absolutos, la necesidad de ponerle un límite a la velocidad de la luz, entre otros. Debido a la ruptura con el esquema newtoniano, se requería reformular la teoría de gravitación para adecuarla al marco teórico relativista. Después de 10 años de trabajo, Einstein logró reformular una teoría de gravitación nueva, con el límite newtoniano apropiado: la Relatividad General. Con ello, se pudieron explicar ciertos fenómenos (como la precesión del perihelio de Mercurio o la desviación de la luz al pasar cerca a un objeto masivo) y la atracción gravitacional en sí como producto de la curvatura del espacio-tiempo causada por la presencia de una densidad de energía. Al estudiar la teoría con mayor profundidad, se encontró la existencia teórica de agujeros negros y se empezó a utilizar para el estudio del Universo (cosmología). Hasta nuestros días es la teoría dominante de la gravitación (aunque para muchos usos prácticos la teoría newtoniana es muy útil). Por su importancia como base para el estudio cosmológico, esta sección se dedica a dar un breve resumen de la teoría.

La discusión proporcionada en esta sección es basada principalmente en [2]. Lecturas complementarias pueden encontrarse, por ejemplo, en [3] y [1].

1.1.1 Variedad diferencial, espacio tangente y derivada covariante.

Con el cambio de nociones de espacio y tiempo a espacio-tiempo y la necesidad de explicar fenómenos físicos incompatibles entre las teorías, ocurrió necesariamente un cambio en el aparato matemático necesario para el desarrollo de la relatividad general. El espacio-tiempo se describe utilizando una variedad diferencial 4 dimensional lorentziana. Una variedad diferencial se define de la siguiente manera

Def.: Sea \mathcal{M} un conjunto. \mathcal{M} es una *variedad diferencial* (C^∞) si existe una familia de conjuntos $\{O_\alpha\}$ tales que:

1. $\forall p \in \mathcal{M}, p \in O_\alpha$ para al menos un α .
2. $\forall \alpha$, existe $U_\alpha \in \mathbb{R}^n$ tal que $\psi_\alpha : O_\alpha \rightarrow U_\alpha$ es un conjunto abierto en \mathbb{R}^n .
3. Si $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$ entonces $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha[O_\alpha \cap O_\beta] \rightarrow \psi_\beta[O_\alpha \cap O_\beta]$ es infinita- y continuamente diferenciable (C^∞).

A los pares (O_α, ψ_α) se les denomina "cartas" mientras que al conjunto de cartas compatibles (que cumplen la tercera condición de la definición anterior) que cubren \mathcal{M} se le denomina "Atlas".

Como se mencionó anteriormente, el espacio-tiempo es representado por una variedad diferencial *lorentziana* y para darle la característica de *lorentziana* es necesario suministrarle una métrica. Por tanto, se necesita más estructura que la de variedad diferencial, comenzando por el de espacio tangente.

Def.: Sea \mathcal{M} una variedad diferencial. El espacio tangente $T_p\mathcal{M}$ en $p \in \mathcal{M}$ es el espacio vectorial en donde $\forall f, g : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tales que $f, g \in C^\infty, v_p \in T_p\mathcal{M}$ si cumple lo siguiente:

1. $v_p(af + bg) = av_p(f) + bv_p(g)$.
2. $v_p(fg) = f(p)v_p(g) + g(p)v_p(f)$.

Es importante hacer las siguientes observaciones^[1]:

1. Si \mathcal{M} es de dimensión n entonces $\dim(T_p\mathcal{M}) = n$.
2. Al ser un espacio vectorial, la base de $T_p\mathcal{M}$ está dada por el conjunto $\{\partial_\mu\}$, con $\mu \in \{1, \dots, n\}$, esta base es dependiente de la carta que se utilice. Por tanto, $v_p = v^\mu \partial_\mu|_p$.
3. El cambio de base entre estos vectores, cambio de una carta ψ_α a otra $\psi_{\alpha'}$ o cambio de coordenadas, proporciona una ley de cambio de las componentes v^μ : $v^{\nu'} = v^\mu \partial_\mu x^{\nu'}$.
4. v es un campo vectorial si $\forall p \in \mathcal{M}, v(p) = v_p \in T_p\mathcal{M}, v \in TM = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M}$ y a TM se le conoce como el "haz tangente".

De álgebra lineal, se sabe que es posible asignarle aun espacio vectorial V su espacio dual V^* tomando la colección de funcionales lineales $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, de la misma forma se puede definir el espacio vectorial dual de TM, TM^* (llamada *haz cotangente* y formado por la unión de los duales $T_p\mathcal{M}^*$), tomando los funcionales lineales $f : TM \rightarrow \mathbb{R}$ y formando un espacio vectorial. Es conveniente asociarle una base que cumpla $dx^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu$. Al conjunto de dx^μ que cumple esa propiedad se le denomina "base dual" y define un isomorfismo entre TM y TM^* que depende de la base y por tanto no es natural y para eso se le necesita otorgar una métrica a la variedad. Utilizando las definiciones anteriores es posible definir el concepto de *tensor*.

¹Esta discusión matemática no pretende ser a profundidad, muchos resultados se saltan y no se derivan, por lo que se recomienda la lectura del capítulo 2 de [2] o algún libro dedicado al tema como *Introduction to Smooth Manifolds* de John M. Lee si es de interés para el lector.

Def.: Sean \mathcal{M} una variedad diferencial, TM su haz tangente y TM^* su haz cotangente. Un tensor T tipo (k,l) es una función multilinear

$$T : \underbrace{TM^* \times \cdots \times TM^*}_{k \text{ veces}} \times \underbrace{TM \times \cdots \times TM}_{l \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Al conjunto de tensores (k,l) se le nombra $\mathcal{T}(k,l)$.

Para esta definición se tienen las siguientes observaciones:

1. En términos de las bases de TM y TM^* se tiene $T = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \partial_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_l}$, en donde $\partial_{\mu} \otimes dx^{\nu}$ es el "producto tensorial".
2. El cambio de componentes debido al cambio de base se da por $T^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_l} = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \partial_{\mu_1} x^{\mu'_1} \dots \partial_{\nu'_l} x^{\nu_l}$.

Con esto, es posible definir el tensor métrico, que le da la estructura lorentziana a la variedad

Def.: Sea \mathcal{M} una variedad diferencial con sus haces tangente y cotangente TM y TM^* . El tensor métrico o la métrica g es un tensor tipo $(0,2)$ ($g \in \mathcal{T}(0,2)$) que cumple las siguientes propiedades:

1. Es simétrico: $\forall v_1, v_2 \in TM, g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1)$.
2. Es no degenerado: Sea $v_1 \in TM$ entonces $g(v, v_1) = 0 \iff v_1 = 0 \forall v \in TM$.

El tensor métrico cumple las siguientes propiedades:

1. Existe un tensor $(2,0)$ simétrico y no degenerado, g^{cd} tal que $\delta_a^b = g_{ac}g^{cd}$ llamado *tensor métrico inverso* o simplemente *métrica inversa*.
2. Su expresión en un sistema coordenado dado es $g = g_{\mu\nu} dx^{\mu} \otimes dx^{\nu} = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$.
3. Siempre existe una base ortonormal $\{\partial x^{\mu}\}$ en donde $g(\partial x^{\mu}, \partial x^{\nu}) = \pm 1$ si $\mu = \nu$ y $g(\partial x^{\mu}, \partial x^{\nu}) = 0$ si $\mu \neq \nu$. Si se cumple la signatura de la métrica, es decir, que los signos de esta en la base ortonormal son $(+, \dots, +)$, se le llama *variedad riemanniana* y si la signatura es de la forma $(-, +, \dots, +)$ entonces se tiene una *variedad lorentziana*. Las variedades lorentzianas (particularmente, de dimensión 4) son las que se utilizan en relatividad general.
4. El tensor métrico lorentziano facilita una categorización de tres tipos de vectores: si $g(v, v) > 0$, se tiene un vector espacial, si $g(v, v) = 0$ se tiene un vector nulo y si $g(v, v) < 0$ se tiene un vector temporal.

A partir de este momento, se consideraran únicamente variedades lorentzianas de dimensión cuatro.

Se mencionó anteriormente que la gravitación es el efecto observado debido a la curvatura del espacio-tiempo; lo que da la necesidad de una definición matemática de curvatura en una variedad lorentziana. Se comienza definiendo las nociones de operador derivada y operador derivada covariante.

Def.: Sea \mathcal{M} una variedad diferencial y su conjunto de tensores $\mathcal{T}(k,l)$. Un operador derivada ∇ es aquella función $\nabla : \mathcal{T}(k,l) \rightarrow \mathcal{T}(k,l+1)$ que cumple las siguientes propiedades $\forall T, S \in \mathcal{T}(k,l)$, $A \in \mathcal{T}(k',l')$, $t \in TM$, $f \in C^\infty$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1. Es Lineal: $\nabla_c \left(\alpha T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} + \beta S^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \right) = \alpha \nabla_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} + \beta \nabla_c S^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$.
2. Regla de Leibniz: $\nabla_c \left(T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} A^{d_1 \dots d_{k'}}_{e_1 \dots e_{l'}} \right) = \left[\nabla_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \right] A^{d_1 \dots d_{k'}}_{e_1 \dots e_{l'}} + T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \left[\nabla_c A^{d_1 \dots d_{k'}}_{e_1 \dots e_{l'}} \right]$.
3. Conmuta con la contracción: $\nabla_c \left(T^{a_1 \dots d \dots a_k}_{b_1 \dots d \dots b_l} \right) = \nabla_c T^{a_1 \dots d \dots a_k}_{b_1 \dots d \dots b_l}$.
4. Consistencia con vectores tangentes como derivadas direccionales: $t(f) = t^a \nabla_a f$.
5. Sin torsión: $\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f$.

Observaciones importantes para el operador derivada:

1. La quinta propiedad no es estrictamente necesaria, existen teorías de gravitación con torsión. En relatividad general (y por tanto en este trabajo) se utiliza dicha propiedad.
2. ∂_a es el operador derivada ordinario de tal forma que si $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ tiene componentes $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$ en un sistema de coordenados dado, entonces $\partial_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ nos da como resultado $\partial_\alpha T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$ en tal sistema coordenado. El operador derivada ordinario depende del sistema de coordenadas y no es natural a la variedad.
3. Se puede definir un operador derivada especial único: la *derivada covariante*. Se define pidiendo la propiedad de compatibilidad con la métrica, es decir, $\nabla_a g_{bc} = 0$. Este operador derivada es esencial en relatividad general y es el que permite definir la noción de curvatura. A partir de este momento ∇_a únicamente denotará la derivada covariante.

De las definiciones anteriores, se observa que existen distintos tipos de operadores derivada por lo que es conveniente tener una relación entre ellos. En el caso específico de relacionar la derivada covariante con la derivada ordinaria, se obtiene para covectores, vectores y tensores (k,l)

$$\nabla_a \omega_b = \partial_a \omega_b - \Gamma^c_{ab} \omega_c, \quad (1.1)$$

$$\nabla_a v^b = \partial_a v^b + \Gamma^b_{ac} v^c, \quad (1.2)$$

$$\nabla_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = \partial_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} + \sum_i \Gamma^i_{cd} T^{a_1 \dots d \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} - \sum_j \Gamma^d_{b_j c} T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots d \dots b_l}, \quad (1.3)$$

en donde Γ^c_{ab} son conocidos como *símbolos de Christoffel*. Haciendo uso de $\nabla_a g_{bc} = 0$ se obtiene una expresión de los símbolos de Christoffel en términos de derivadas ordinarias de la métrica

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} (\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}). \quad (1.4)$$

1.1.2 Curvatura y Ecuaciones de Einstein.

Se considera una curva con vector tangente t^a , un vector v^a (y un tensor $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$) se transporta paralelamente si cumple la siguiente ecuación

$$t^a \nabla_a v^b = 0 \quad (\text{y } t^a \nabla_a T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = 0). \quad (1.5)$$

En términos de (1.2) y de las coordenadas ∂_μ con un parámetro t , la ecuación de transporte paralelo de un vector es dada por

$$t^a \partial_a v^b + t^a \Gamma^b_{ac} v^c = 0 \implies \frac{dv^\nu}{dt} + t^\mu \Gamma^\nu_{\mu\lambda} v^\lambda = 0. \quad (1.6)$$

Esta ecuación define un vector transportado paralelo en cualquier punto sobre la curva dado un v^a inicial sobre la curva, permitiendo conectar distintos espacios tangentes TM_p y TM_q . Del transporte paralelo, se deriva una noción de curva extremal; la *geodésica*. Una geodésica es aquella que transporta paralelamente su propio vector tangente

$$t^a \nabla_a t^b = 0. \quad (1.7)$$

Algunas observaciones sobre geodésicas

- Pueden ser parametrizadas de tal forma que $t^a \nabla_a t^b = \alpha t^b$, y bajo una reparametrización se obtiene (1.7).
- El signo de la norma del vector tangente, $g_{ab} t^a t^b = t^a t_a$, define si una curva es espacial, temporal o nula.
- Las geodésicas espaciales son curvas de longitud extrema medida por la métrica: $l = \int \sqrt{g_{ab} t^a t^b} dt$.
- Las geodésicas temporales son curvas de *tiempo propio* τ extremo: $\tau = \int \sqrt{-g_{ab} t^a t^b} dt$.
- Definen la estructura causal del espacio-tiempo, a través de ellas se detectan singularidades, así como definen la expansión, vorticidad y *shear* del espacio-tiempo.²

El resultado obtenido del transporte paralelo de un vector de un punto a otro es dependiente de la curva que se utilice para realizarlo. Gracias a esta propiedad del transporte paralelo, se puede definir una curvatura intrínseca de una variedad. Para eso, se toma el conmutador de derivadas covariantes $\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a$ y se le aplica a un covector ω_a , a un vector v^a y a un tensor $(k,l) T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \omega_c = R_{abc}{}^d \omega_d, \quad (1.8)$$

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) v^c = -R_{abd}{}^c v^d, \quad (1.9)$$

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) T^{c_1 \dots c_k}_{d_1 \dots d_l} = - \sum_i R_{abe}{}^{c_i} T^{c_1 \dots e \dots c_k}_{d_1 \dots d_l} + \sum_j R_{abd_j}{}^e T^{c_1 \dots c_k}_{d_1 \dots e \dots d_l}, \quad (1.10)$$

en donde $R_{abc}{}^d = -2\partial_{[a} \Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^e_{c[a} \Gamma^d_{b]e}$ es el *tensor de curvatura de Riemann*. Si se toma una curva cerrada y se realiza un transporte paralelo alrededor de esa curva empezando y terminando en el mismo punto, el vector no regresa a su valor inicial, el tensor de Riemann está directamente relacionado con esta falla.

²Para una discusión detallada al respecto, consultar los capítulos 8 y 9 de [2].

El tensor de Riemann cumple las siguientes propiedades

1. $R_{abc}{}^d = -R_{bac}{}^d$.
2. $R_{[abc]}{}^d = 0$.
3. $R_{abcd} = -R_{abdc}$.
4. $R_{abcd} = R_{cbad}$.
5. Las identidades de Bianchi: $\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^e = 0$.

Es conveniente obtener la traza del tensor de Riemann sobre el segundo y cuarto (o el primer y tercer) índices para obtener el *tensor de Ricci* y, así mismo, tomar la traza del tensor de Ricci para obtener el *escalar de Ricci o de curvatura*

$$R_{ac} = R_{abc}{}^b \text{ y } R = R_a{}^a. \quad (1.11)$$

El tensor de Riemann da una medida de la aceleración de geodésicas respecto a ellas mismas con la ecuación de *desviación geodésica*

$$a^a = -R_{cbd}{}^a X^b t^c t^d, \quad (1.12)$$

en donde $a^a = t^c \nabla_c v^a$ y $v^a = t^b \nabla_b X^a$ interpretadas como aceleración y velocidad relativas de geodésicas infinitesimalmente cercanas.

Se define (para variedades con dimensión $n \geq 3$) el *tensor de Weyl* o *tensor conforme* C_{abcd} como la parte sin traza del tensor de Riemann

$$C_{abcd} = R_{abcd} - \frac{2}{n-2} (g_{a[c} R_{d]b} - g_{b[c} R_{d]a}) + \frac{2}{(n-1)(n-2)} R g_{a[c} g_{d]b}. \quad (1.13)$$

El tensor de Weyl cumple las mismas simetrías que el tensor de Riemann además de no poseer trazas.

Una propiedad muy importante para relatividad genera derivada de las identidades de Bianchi es

$$\nabla^a G_{ab} = \nabla^a \left(R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \right) = 0, \quad (1.14)$$

en donde G_{ab} es el *tensor de Einstein* que aparece en las ecuaciones de Einstein que describen la gravitación. Obtener dichas ecuaciones, es viable por distintos métodos siendo la formulación lagrangiana el más directo. Para eso se toma una acción y se extremiza obteniendo las ecuaciones. La densidad lagrangiana de Relatividad General es

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \alpha_M \mathcal{L}_M = \sqrt{-g} R + \alpha_M \mathcal{L}_M, \quad (1.15)$$

en donde $\alpha_M \mathcal{L}_M$ denota a la componente de materia de la densidad lagrangiana y \mathcal{L}_G la densidad lagrangiana en el vacío. La acción resultante es

$$S = \int \mathcal{L} e = \int \mathcal{L}_G e + \int \alpha_M \mathcal{L}_M e = \int \sqrt{-g} R e + \int \alpha_M \mathcal{L}_M e, \quad (1.16)$$

en donde e es el elemento de volumen para una variedad lorentziana de 4 dimensiones. A la parte del vacío de la acción se le conoce como la *acción de Hilbert*. Al tomar la variación de la acción y

se extremiza ($\delta S = 0$) con respecto a la métrica inversa g^{ab} se obtienen las *Ecuaciones de Campo de Einstein*

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (1.17)$$

en donde $T_{ab} = -\frac{\alpha_M}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{ab}}$ es el *tensor de energía momento*, con S_m la acción asociada a \mathcal{L}_M y α_M una constante cuya elección apropiada da el contenido específico de materia ($\alpha_M = 4$ da las ecuaciones de Einstein-Maxwell y $\alpha_M = 16\pi$ las ecuaciones acopladas de Einstein-Klein-Gordon).

Algunas observaciones sobre las ecuaciones:

- En unidades SI, las ecuaciones tienen como constante $8\pi G/c^4$, con G la constante de gravitación universal que aparece en la gravedad newtoniana y c la velocidad de la luz.
- Las ecuaciones de campo en el vacío son puramente geométricas.
- De las identidades de Bianchi (1.14) aplicada a las ecuaciones se cumple $\nabla_a T^{ab} = 0$, esto juega el papel de la *conservación de energía-momento*.
- Para obtener estas ecuaciones se ignoran los términos de borde al realizar la variación y extremización de la acción. Si no se ignoraran, aparecerían otros términos en las ecuaciones, algo fuera del propósito de este trabajo.
- Las soluciones a las ecuaciones son dadas por la métrica, esta dicta la geometría de la variedad y por tanto del espacio-tiempo.
- Las ecuaciones en sí, permiten un gran número de soluciones. Para que estas soluciones sean físicamente admisibles, es necesario introducir ciertos criterios para que respeten anomalías causales (como curvas temporales cerradas); por ejemplo, el espacio-tiempo debe ser globalmente hiperbólico. Esto, permite además poder realizarle a la teoría una formulación de valores iniciales.
- El espacio-tiempo puede tener singularidades, ya sean métricas (que se pueden eliminar con cambios de coordenadas) o físicas que no pueden ser eliminadas sin importar las coordenadas que se utilicen. Aparecen en soluciones como la solución de Schwarzschild o la métrica FLRW. Intuitivamente, las singularidades físicas se pueden entender como "regiones" en el espacio-tiempo en donde la geometría y por tanto la teoría no funciona y se pueden detectar con geodésicas incompletas. Los teoremas de Hawking y Penrose tratan el tema (tratados a detalle en [4] y [2]).
- Las ecuaciones pueden incorporar un término de constante cosmológica que cumpla las identidades de Bianchi de la forma

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab}. \quad (1.18)$$

Inicialmente propuesto por Einstein para estudiar un universo estático, abandonada por él mismo llamándole "el mayor error de su vida" y tomada nuevamente como un término de energía oscura para el estudio de la cosmología.

Existen, además, ciertas condiciones que la materia debe cumplir para ser físicamente admisible. Para un fluido barotrópico, $p = p(\rho)$, la velocidad del sonido es $c_s^2 = \frac{dp}{d\rho}$ y debe ser menor que la de la luz para asegurar causalidad. La condición está dada por

$$0 \leq \frac{dp}{d\rho} \leq 1. \quad (1.19)$$

El límite superior no puede violarse dentro de la teoría de la relatividad mientras que el límite inferior aplica para situaciones estables (como la materia barotrópica ordinaria), de otra forma, un modelo cosmológico sería inestable ante perturbaciones pequeñas de la densidad de fondo (inestabilidad laplaciana) [5]. Se tienen condiciones sobre la densidad de masa inercial, la condición de energía débil, que establece que la densidad de masa inercial es positiva

$$\rho + p > 0, \quad (1.20)$$

y sobre la densidad de masa gravitacional, la condición de energía fuerte que establece que la densidad de masa gravitacional debe ser positiva³

Ya con las ecuaciones que describen a la gravedad, es posible pasar al estudio de diferentes sistemas incluyendo al universo en sí: son la herramienta fundamental para la cosmología.

1.2 Principio Cosmológico y cosmología estandar

La cosmología estandar se basa en esencia en el *principio cosmológico*. Derivado del principio copernicano que establece que la tierra no se encuentra en un lugar privilegiado en el universo, el principio cosmológico establece que a grandes escalas el universo es *homogéneo* e *isotrópico*. Steven Weinberg menciona en [6] que las observaciones astronómicas hacen la homogeneidad del universo notable en escalas mayores a 300 millones de años luz ($\sim 90Mpc$). En [7] Kelvin K.S. Wu et al. mencionan que las fluctuaciones de la densidad rms (de *root mean square*) en una escala de $\sim 100h^{-1}Mpc$ son de alrededor de 10% y la distribución de masa en escalas mayores a $300h^{-1}Mpc$ satisfacen homogeneidad e isotropía. En [8] al estudiar el SDSS-RD1 concluyen que la distribución de galaxias en un universo Λ CDM es homogénea en escalas mayores a $60 - 70h^{-1}Mpc$. Adicionalmente, en [9] Ntelis et al. obtienen la escala de homogeneidad a partir de la escala de BAO de $\sim 125Mpc$. En [10] (pp. 96 y 97), Ntelis realiza un estudio extensivo sobre la escala de homogeneidad del universo y obtiene que la escala de homogeneidad para la materia en un rango de $z = 0.538 - 0.592$ es de $61.9 \pm 0.8h^{-1}Mpc$ mientras que el para galaxias, obtiene que es de $114.2 \pm 5.8h^{-1}Mpc$. En ese mismo trabajo, Ntelis menciona (p.147) que la escala de homogeneidad es comparable con aquella escala de BAO; dicha escala de homogeneidad es sensible a los valores de H_0 , Ω_m , Ω_Λ y de la ecuación de estado ω . Es necesario tener entonces en consideración las tensiones en las mediciones de H_0 entre las diferentes observaciones y sus posibles soluciones discutidas a detalle en [11, 12, 13, 14]. Para fines de la discusión relevante, es seguro establecer entonces que la escala de homogeneidad es a escalas mayores a alrededor de $\sim 125Mpc$. Este tipo de evidencias proviene, por ejemplo, de la distribución de galaxias y su distribución de sus magnitudes aparentes y *redshifts*. Mientras Tanto, Weinberg menciona que la escala de isotropía

³Para una discusión detallada sobre las condiciones de energía, se puede consultar el capítulo 9.2 de [2]. Es debido notar que la condición de energía fuerte es una condición puramente geométrica, sin embargo, utilizando las ecuaciones de Einstein se le puede asociar a la materia.

es mucho más precisa, siendo de una parte en 10^{-5} , medida de la Radiación Cómica de Fondo (CMB por sus siglas en inglés). En [15] estudian la distribución de fuentes de radio del *survey* 4C y esta es evidencia adicional de dicha isotropía.

Teniendo estas consideraciones, es justificable trabajar utilizando el principio cosmológico como una primera aproximación para el estudio del universo. Matemáticamente, la homogeneidad se traduce a la siguiente definición

Def.: Un espacio-tiempo \mathcal{M} es (espacialmente) homogéneo, si existe una familia uniparamétrica de hipersuperficies espaciales Σ_t que tales que para cada t y para cada puntos $p, q \in \Sigma_t$, existe una isometría de la métrica g_{ab} que lleva p a q .

Intuitivamente, esto quiere decir que a cada tiempo cada punto del espacio se ve como cualquier otro punto del espacio. Por otro lado, Isotropía se define como

Def.: Un espacio-tiempo \mathcal{M} es (espacialmente) isotrópico en cada punto, si existe una congruencia de curvas temporales (es decir, observadores) con tangentes u^a que cumplen que para cada punto p y para cada dos vectores tangentes s_1^a, s_2^a (ortogonales a u^a) en p , existe una isometría de g_{ab} que deja a p y a u^a fijos pero rota s_1^a en s_2^a .

En el caso de un espacio-tiempo homogéneo e isotrópico, las superficies de homogeneidad Σ_t deben ser ortogonales a los observadores isotrópicos u^a . Considerando todo lo anterior en coordenadas esféricas, se puede escribir la forma más usual de la métrica FLRW (métrica de Friedman, Lemaître, Robertson y Walker)

$$ds^2 = -dt^2 + a(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right), \quad (1.21)$$

en donde k puede ser 1 para un universo esférico (cerrado), 0 para un universo plano y -1 para un universo hiperbólico (abierto); $a(t)$ es el factor de escala. Usualmente, y para casos relevantes en este trabajo, como fuente se utiliza un tensor de energía-momento de fluido perfecto

$$T_{ab} = (\rho + p)u_a u_b + pg_{ab}, \quad (1.22)$$

y al aplicar la conservación de energía-momento, se obtiene la ecuación de continuidad

$$\frac{d\rho}{dt} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (1.23)$$

en donde $H = \dot{a}/a$ es el parámetro de Hubble. Utilizando un fluido perfecto barotrópico, es decir, un fluido con ecuación de estado $p = w\rho$ se obtiene la solución de la ecuación de continuidad dada por

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+w)}. \quad (1.24)$$

Se tienen distintos casos especiales

- Materia Oscura Fría (CDM por sus siglas en inglés) o bariones: en donde $w = 0$ y por tanto $\rho = \rho_0 a^{-3}$.
- Radiación: en donde $w = 1/3$ y por tanto $\rho = \rho_0 a^{-4}$.
- Energía Oscura (o constante cosmológica): en donde $w < -\frac{1}{3}$ ($w_{\Lambda=-1}$ y $\rho = cte.$).

Antes de pasar a las ecuaciones de Einstein, se puede definir con la métrica el corrimiento al rojo (o *redshift*) cosmológico. Considerando un rayo de luz en la dirección radial, cumple $ds^2 = 0$, que sale de $r = r_1$ a $t = t_1$ y como la distancia radial entre un rayo de luz acercándose al origen decrece mientras que t aumenta, llega a $r = 0$ a $t = t_0$ entonces se obtiene

$$dt = \pm a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \implies \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{r_1}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (1.25)$$

A partir de esto se toma la diferencial de esa relación y se consideran las frecuencias de emisión $\nu_1 = 1/\delta t_1$ y de observación $\nu_0 = 1/\delta t_0$ se obtiene

$$\frac{\delta t_1}{a(t_1)} = \frac{\delta t_0}{a(t_0)} \implies \frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} = 1 + z, \quad (1.26)$$

en donde z es el *redshift*.

Al sustituir la métrica FLRW en las ecuaciones de Einstein se obtienen las ecuaciones fundamentales para la dinámica del universo (con el término de constante cosmológica agregado)

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.27)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.28)$$

La ecuación (1.27) es conocida como la ecuación de Friedmann y (1.28) se conoce como la ecuación de aceleración o de Raychaudhuri. Con la ecuación de continuidad se tienen 3 ecuaciones en donde dos no son independientes, si además se le agrega la ecuación de estado se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales cerrado. Los parámetros de densidad son utilizados ya que permiten ser medidos a diferencia de la densidad, se definen a partir de la densidad crítica $\rho_c = 3H^2/(8\pi G)$ como

$$\Omega_i(t) = \frac{\rho_i(t)}{\rho_c(t)}, \quad \text{para } t = t_0 \quad \Omega_{i0} = \frac{\rho_{i0}}{\rho_{c0}}, \quad (1.29)$$

en donde i se refiere al tipo de materia, ya sea CDM, bariones, radiación o constante cosmológica [16]. Adicionalmente, se puede definir un parámetro de densidad para la curvatura como $\Omega_k = -k/(\rho_c a^2)$ y de la ecuación (1.27) se obtiene

$$1 = \sum_i \Omega_i + \Omega_k. \quad (1.30)$$

Se pueden resolver las ecuaciones para distintos modelos simples

1. Modelos de polvo ($\Omega_r = 0 = \Omega_\Lambda$)

- **Einstein-de Sitter**, $k = 0$: la solución es $a(t) = (\frac{3}{2}H_0 t)^{2/3}$.
- $k = 1$: con $x = \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{m0}-1} \sin^2 \psi/2$ se obtienen las soluciones $a(t) = \frac{\Omega_{m0}}{2(\Omega_{m0}-1)}(1 - \cos \psi)$ y $t = \frac{\Omega_{m0}}{2H_0(\Omega_{m0}-1)^{3/2}}(\psi - \sin \psi)$, con $\psi \in [0, \pi]$, las cuales describen una cicloide.
- $k = -1$: con $x = \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{m0}-1} \sinh^2 \psi/2$ se obtienen $a(t) = \frac{\Omega_{m0}}{2(\Omega_{m0}-1)}(\cosh \psi - 1)$ y $t = \frac{\Omega_{m0}}{2H_0(\Omega_{m0}-1)^{3/2}}(\sinh \psi - \psi)$, con $\psi \in [0, \pi]$.

2. Modelos de radiación ($\Omega_m = 0 = \Omega_\Lambda$)

- $k = 0$: la solución es $a(t) = (2H_0t)^{1/2}$.
- $k = 1$ y $k = -1$: la solución es dada por $a(t) = (2H_0\Omega_{r0}^{1/2}t)^{1/2} \left(1 + \frac{1-\Omega_{r0}}{2\Omega_{r0}^{1/2}} H_0t \right)$.

3. Modelos con constante cosmológica Λ ($\Omega_\Lambda \neq 0$ y $k = 0$)

- Para $\Omega_r = 0$ y $\Omega_{\Lambda 0} > 0$: la solución está dada por $H_0t = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_\Lambda}} \sinh^{-1} \left(\sqrt{a^3\Omega_{\Lambda 0}(1 - \Omega_{\Lambda 0})} \right)$.
- Para $\Omega_r = 0$ y $\Omega_{\Lambda 0} < 0$: la solución está dada por $H_0t = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_\Lambda}} \sin^{-1} \left(\sqrt{a^3\Omega_{\Lambda 0}(1 - \Omega_{\Lambda 0})} \right)$.
- **de Sitter**, $\Omega_{\Lambda 0} = 1$, $\Omega_r = 0$ y $\Omega_m = 0$: la ecuación (1.27) se convierte en $\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\Lambda}{3}$ y por tanto, la solución está dada por $a(t) = e^{\sqrt{\Lambda/3}(t-t_0)}$.

1.3 Formación de estructura

1.3.1 Perturbaciones cosmológicas a primer orden

El modelo FLRW permite una buena descripción del universo a grandes escalas en donde la homogeneidad e isotropía son una hipótesis válida. Se mencionó en la sección anterior que existen ciertos límites para que esto sea válido pero a escalas más pequeñas ya no es una hipótesis adecuada por lo que se necesita recurrir a otros métodos adicionales. El método estándar dentro de la cosmología es el método perturbativo a primer orden en donde, a grandes rasgos se toma un espacio-tiempo FLRW (por simplicidad se suele tomar plano) de "fondo" y se construye una pequeña desviación que representa las inhomogeneidades y anisotropías que se observan en el universo. Son especialmente útiles para describir la formación de estructuras hasta una escala no lineal en donde la prescripción perturbativa falla (es decir, donde el contraste de densidad alcanza amplitudes del orden de o mayores a 1, como se discute más adelante).

En términos más formales, se tiene una variedad física \mathcal{M} y una variedad ficticia de fondo $\overline{\mathcal{M}}$. Existe una correspondencia uno a uno, arbitraria de la variedad de fondo a la variedad física llamada norma (o *gauge*), esta norma lleva las coordenadas de $\overline{\mathcal{M}}$ a \mathcal{M} al ser introducidas. Si se dejan las coordenadas en la variedad de fondo $\overline{\mathcal{M}}$ fijas y se cambia dicho mapeo, se introduce un cambio de coordenadas en \mathcal{M} y se cambia el evento en esta variedad que este asociado a un evento dado en $\overline{\mathcal{M}}$; a esto se le conoce como *transformación de norma*. Dado que la elección de norma es arbitraria, se debe escoger con cuidado ya que las cantidades no necesariamente son invariantes ante las transformaciones de norma; es conveniente tomar una norma adecuada para el problema a estudiar.

Se define la perturbación de una cantidad Q como la diferencia entre esta cantidad evaluada en la variedad de fondo y en la variedad física

$$\delta Q = Q - \overline{Q}. \quad (1.31)$$

Aterrizado a la cosmología, se comienza con la métrica FLRW parametrizada en tiempo conforme

$$ds^2 = a^2(-d\tau^2 + v_{ij}dx^i dx^j), \quad (1.32)$$

en donde v_{ij} ⁴ es la métrica de la hipersuperficie estática conforme a las hipersuperficies homogéneas de curvatura constante K . Las perturbaciones (a primer orden) de la métrica son entonces dadas por $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ y pueden ser separadas en ($\check{\nabla}_i$ representa la derivada covariante respecto a v_{ij} ; para un fondo espacialmente plano se reduce a derivada parcial ∂_i):

- **Parte escalar:** construidas a partir de cantidades escalares o sus derivadas, las perturbaciones escalares de la métrica son

$$\delta g_{00} = -2a^2\phi, \quad \delta g_{0i} = a^2\check{\nabla}_i B \quad \text{y} \quad \delta g_{ij} = -2a^2(\psi v_{ij} - \check{\nabla}_i \check{\nabla}_j E). \quad (1.33)$$

- **Parte vectorial:** construidas por 3-vectores rotacionales o transversos con parte escalar nula y, además, tensores simétricos construidos a partir de perturbaciones vectoriales deben tener traza nula. Las perturbaciones vectoriales de la métrica son

$$\delta g_{0i} = a^2 S_i \quad \text{y} \quad \delta g_{ij} = 2a^2(\check{\nabla}_{(j} F_{i)}). \quad (1.34)$$

- **Parte tensorial:** construidas por tensores simétricos, sin traza ni divergencia. Las perturbaciones tensoriales de la métrica son

$$\delta g_{ij} = a^2 h_{ij}, \quad \text{con} \quad h_{[ij]} = 0 = v^{ij} h_{ij} = v^{jk} \check{\nabla}_k h_{ij} = 0. \quad (1.35)$$

Los escalares ϕ y ψ representan una generalización del potencial newtoniano y la perturbación de la curvatura de las superficies de $\tau = cte$. La métrica perturbada a primer orden general es

$$ds^2 = a^2 \left(-(1 + 2\phi)d\tau^2 + 2(\check{\nabla}_i B - S_i)d\tau dx^i + \left[(1 - 2\psi)v_{ij} + 2\check{\nabla}_i \check{\nabla}_j E + 2\check{\nabla}_j F_i + h_{ij} \right] dx^i dx^j \right). \quad (1.36)$$

Para las perturbaciones de materia, se considera el tensor de energía-momento

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} + \pi_{\mu\nu}, \quad (1.37)$$

con $u^\mu = \bar{u}^\mu + \delta u^\mu$, la 4-velocidad con perturbación a primer orden. Considerando $\bar{u}^\mu = \frac{1}{a}\delta_0^\mu$ se obtiene la 4-velocidad perturbada

$$u^\mu = \frac{1}{a}(-1 - \phi, \check{\nabla}^i v + v^i) \quad \text{y} \quad u_\mu = a(-1 - \phi, \check{\nabla}_i v + v_i + \check{\nabla}_i B - S_i). \quad (1.38)$$

Como resultado, las componentes mixtas del tensor de energía-momento ($T^\mu{}_\nu$) perturbado a primer orden son⁵

$$T^0{}_0 = -(\rho + \delta\rho), \quad T^0{}_j = (\rho + p)(\check{\nabla}_i v + v_i + \check{\nabla}_i B - S_i) \quad \text{y} \quad T^i{}_j = (p + \delta p)v_j^i + \pi_j^i, \quad (1.39)$$

en donde $\frac{1}{a^2}\pi_{ij} = \check{\nabla}_i \check{\nabla}_j \Pi - \frac{1}{3}\nabla^2 \Pi v_{ij} + \check{\nabla}_{(i} \Pi_{j)} + \Pi_{ij}$ es el tensor de esfuerzos anisotrópicos descompuesto en su escalar potencial Π , su potencial vectorial transverso Π_i y su modo tensorial sin traza Π_{ij} .

Las distintas perturbaciones mencionadas anteriormente son las cantidades que definen las diferentes normas, de las cuales, se presentan algunos ejemplos importantes

⁴en [1] llaman a esta cantidad γ_{ij} , fue cambiada para utilizar la notación de [17].

⁵Por el resto de la sección, igual que en [1], se dejan de utilizar las líneas sobre variables de fondo.

- **Norma newtoniana:** definida por $E = 0 = B$, es la norma más cercana a las ecuaciones newtonianas para escalas pequeñas. Se puede extender a la *norma de Poisson* al agregar la condición $S_i = 0$. En esta norma, la métrica es diagonal.
- **Norma comovil ortogonal:** definida por $B = 0 = v$, en donde la 4-velocidad es comovil y normal a las hipersuperficies de τ constante.
- **Norma síncrona:** definida por $\phi = 0 = B$, por lo que la métrica no tiene perturbaciones en sus componentes temporales.

Una vez definidas las perturbaciones métricas y de materia, es posible obtener las ecuaciones de Einstein perturbadas $\delta G^\mu{}_\nu = 8\pi G\delta T^\mu{}_\nu$ y la ecuación de conservación $\delta\nabla^\nu T^\mu{}_\nu = 0$

$$(\nabla^2 + 3K)\psi - 3\mathcal{H}(\psi' + \mathcal{H}\phi) + \mathcal{H}\nabla^2\sigma = 4\pi Ga^2\delta\rho, \quad (1.40)$$

$$\psi' + \mathcal{H}\phi + K\phi' = -4\pi Ga^2(\rho + p)(v + B), \quad (1.41)$$

$$\psi'' + 2\mathcal{H}\psi' - K\psi + \mathcal{H}\phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\phi = 4\pi Ga^2(\delta p + \frac{2}{3}\nabla^2\Pi), \quad (1.42)$$

$$\sigma' + 2\mathcal{H}\sigma - \phi + \psi = 8\pi Ga^2\Pi, \quad (1.43)$$

$$\delta\rho' + 3\mathcal{H}(\delta\rho + \delta p) = (\rho + p)[3\psi' - \nabla^2(v + E')], \quad (1.44)$$

$$[(\rho + p)(v + B)]' + \delta p + \frac{2}{3}(\nabla^2 + 3K)\Pi = -(\rho + p)[\phi + 4\mathcal{H}(v + B)]. \quad (1.45)$$

en donde $\sigma = E' - B$ es el potencial de *shear* para superficies de τ constante, $\mathcal{H} = \frac{a'}{a}$, las variables primadas representan derivadas con respecto a τ , K es la curvatura espacial intrínseca asociada al escalar de ricci 3 dimensional 3R por

$${}^3R = \frac{6K}{a^2} + \frac{12K}{a^2}\psi + \frac{4}{a^2}\nabla^2\psi \implies \delta{}^3R = \frac{12K}{a^2}\psi + \frac{4}{a^2}\nabla^2\psi, \quad (1.46)$$

las ecuaciones (1.40) y (1.41) son ecuaciones de constricción de energía y momento respectivamente (ecuaciones (00) y (0i)), las ecuaciones (1.42) y (1.43) son las ecuaciones de evolución (ecuaciones (ij)) y las ecuaciones (1.44) y (1.45) representan las ecuaciones de conservación para perturbaciones de energía y momento.

1.3.2 Función de crecimiento lineal

En la descripción del crecimiento lineal de estructuras, se considera la métrica en la norma síncrona dada por

$$ds^2 = a^2(\tau)[-d\tau^2 + \gamma_{ij}(x^k, \tau)dx^i dx^j], \quad (1.47)$$

en donde $\gamma_{ij}(x^k, \tau)$ corresponde a la métrica para hipersuperficies espaciales de dimensión 3 y corresponde a los términos $\left[(1 - 2\psi)v_{ij} + 2\check{\nabla}_i\check{\nabla}_j E + 2\check{\nabla}_j F_i + h_{ij}\right]$ de (1.36)⁶. Se toma un fluido irrotacional con 4-velocidad $u_\mu = -a\delta_\mu^0$ (por lo que, además de ser linealmente independientes, las perturbaciones vectoriales S_i , F_i y tensoriales h_{ij} se anulan) y se considera el tensor de deformación

$$\vartheta^\mu{}_\nu = a\nabla_\nu u^\mu - \mathcal{H}\delta^\mu{}_\nu, \quad (1.48)$$

⁶Los contenidos de esta sección son tomados de [17] por lo que se recomienda tener cuidado con el cambio de notación entre esta sección y la anterior al consultar las fuentes.

cuya traza $\vartheta = \vartheta^\nu{}_\nu$ representa la parte inhomogénea de la expansión volumétrica mientras que su parte sin traza representa al tensor de *shear* σ_ν^μ . El tensor de deformación es puramente espacial y coincide con la curvatura extrínseca $\vartheta_j^i = -K_j^i = \frac{1}{2}\gamma^{ik}\gamma'_{kj}$, por lo que la ecuación de continuidad toma la forma

$$\rho' = -\rho(\vartheta + 3\mathcal{H}) \implies \delta' + (1 + \delta)\vartheta = 0, \quad (1.49)$$

en donde se define el contraste de densidad δ por $\rho(x^k, \tau) = \bar{\rho}(\tau) + \delta\rho(x^k, \tau) = \bar{\rho}(\tau)(1 + \delta(x^k, \tau))$.

De la ecuación (00) de Einstein (al relacionar la deformación y la curvatura 4-dimensional), se obtiene la constricción a la energía

$$\vartheta^2 - \vartheta^i{}_j \vartheta^j{}_i + 4\mathcal{H}\vartheta + R = 16\pi G a^2 \bar{\rho} \delta, \quad (1.50)$$

en donde R es la traza del tensor de Ricci 3-dimensional asociado a γ_{ij} . Utilizando la traza de las ecuaciones (ij) de Einstein y combinandola con la ecuación (1.50) se obtiene una ecuación de evolución para ϑ

$$\vartheta' + 2\mathcal{H}\vartheta + \frac{1}{4} \left[\vartheta^2 + 3\vartheta^i{}_j \vartheta^j{}_i + R \right] = 0. \quad (1.51)$$

Ahora, considerando perturbaciones únicamente a nivel lineal, se tiene que⁷

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} + \gamma_{ij}^{(1)} = (1 - 2\psi^{(1)})\delta_{ij} + \chi_{ij}^{(1)} \quad \text{y} \quad \delta = \delta^{(1)}, \quad (1.52)$$

en donde el superíndice ⁽¹⁾ denota que son perturbaciones a primer orden y $\chi_{ij} = (\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2) \chi$. En términos de las funciones $\chi^{(1)}$ y $\psi^{(1)}$ se define al tensor de deformación perturbado a primer orden

$$\vartheta^{(1)i}{}_j = -\psi'^{(1)} \delta^i{}_j + \frac{1}{2} \left(\chi^{(1)i}{}_j \right)' \implies \vartheta^{(1)} = -3\psi'^{(1)} \quad \text{y} \quad \sigma^{(1)i}{}_j = \frac{1}{2} \left(\chi^{(1)i}{}_j \right)'. \quad (1.53)$$

El escalar de Ricci 3-dimensional, en términos de estas funciones es

$$R^{(1)} = 4\nabla^2 \mathcal{R}_c \quad \text{con} \quad \mathcal{R}_c = \psi^{(1)} + \frac{1}{6} \nabla^2 \chi^{(1)} \quad (1.54)$$

en donde \mathcal{R}_c es la perturbación de curvatura comovil que representa a la parte conformalmente plana de la perturbación de la métrica sobre hipersuperficies comoviles.

La ecuación de continuidad a primer orden resulta en

$$\delta'^{(1)} + \vartheta^{(1)} = 0, \quad (1.55)$$

y la ecuación de Raychaudhuri a primer orden es

$$\vartheta'^{(1)} + \mathcal{H}\vartheta^{(1)} + \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \Omega_m \delta^{(1)} = 0. \quad (1.56)$$

Combinando estas ecuaciones, se obtiene la ecuación de evolución de $\delta^{(1)}$

$$\delta''^{(1)} + \mathcal{H}\delta'^{(1)} - \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \Omega_m \delta^{(1)} = 0. \quad (1.57)$$

⁷En este caso existe una inconsistencia de la notación y definiciones entre [17] y [1] en donde χ y E no son del todo iguales y resulta en una diferencia en la definición de los potenciales de Bardeen Ψ y Φ , y en el resto de la sección se seguirá utilizando las definiciones de [17]. La definición de los potenciales de Bardeen y por tanto de χ_{ij} la toman de [18].

Eliminando ϑ de la constricción de la energía expandida a primer orden

$$4\mathcal{H}\vartheta^{(1)} - 6\mathcal{H}^2\Omega_m\delta^{(1)} + R^{(1)} = 0, \quad (1.58)$$

y utilizando la ecuación (1.55) se obtiene

$$4\mathcal{H}\delta'^{(1)} + 6\mathcal{H}^2\Omega_m\delta^{(1)} - R^{(1)} = 0. \quad (1.59)$$

Finalmente, de la derivada de la ecuación (1.58) y eliminando $\vartheta^{(1)}$ y $\delta^{(1)}$ se obtiene

$$R'^{(1)} = 0 \quad (1.60)$$

y por lo tanto, $R^{(1)}$ es una constante determinada por las condiciones iniciales. La solución general de la ecuación (1.57) se suele escribir como una combinación lineal de los modos creciente ($D_+(\tau)$) y decreciente ($D_-(\tau)$)

$$\delta^{(1)}(x^k, \tau) = \delta_+^{(1)}(x^k)D_+(\tau) + \delta_-^{(1)}(x^k)D_-(\tau). \quad (1.61)$$

El modo decreciente representa la solución de la parte homogénea de la ecuación (1.59) mientras que el modo creciente corresponde a la solución particular de dicha ecuación. De interés para este trabajo, es el modo creciente $D_+(\tau)$, se descarta al modo decreciente y se toma $\delta^{(1)}(x^k, \tau) = C_1x^kD_+(\tau)$ en donde $C_1x^k = \delta^{(1)}(x^k, \tau_0)$ con $D_+(\tau_0) = 1$ y la ecuación (1.59) se escribe como

$$C_1x^k \left[\mathcal{H}D'_+ + \frac{3}{2}\Omega_m D_+ \right] - \frac{1}{4}R^{(1)} = 0. \quad (1.62)$$

En términos de $R^{(1)}$ y \mathcal{R}_c , ya que $R^{(1)}$ y lo que se encuentra dentro del paréntesis cuadrado de la ecuación anterior son constantes, se tiene para cierta condición inicial δ_{IN} relacionada con $R^{(1)}$

$$C_1 = \frac{2\nabla^2\mathcal{R}_c}{3\mathcal{H}^\epsilon_{IN}D_{+IN}} \left[1 + \frac{2f_1(\Omega_{mIN})}{3\Omega_{mIN}} \right]^{-1}, \quad (1.63)$$

para la cual

$$f_1 = \frac{D'_+}{\mathcal{H}D_+} = \frac{d \log D_+}{d \log a} = -\frac{3}{2}\Omega_m + \frac{a\Omega_m R^{(1)}}{4\delta^{(1)}H_0^2\Omega_{m0}}. \quad (1.64)$$

Para la evolución del fondo, se tiene la ecuación de Friedmann en términos de $\Omega_m = \frac{8\pi G a^2 \bar{\rho}}{3\mathcal{H}^2}$

$$\Omega_m(\tau) = \Omega_{m0} [\Omega_{m0} + a(\tau)^3(1 - \Omega_m)]^{-1}, \quad (1.65)$$

la cual se puede invertir de tal forma que $f_1 = f_1(\Omega_m)$. En un universo dominado por materia, $\Omega_m = 1$, se tiene $D_+ \propto a \propto \tau^2$ y por tanto $f_1 = 1$; en general se tiene

$$\left[f_1(\Omega_m) + \frac{3}{2}\Omega_m \right] \mathcal{H}^2 D_+ = cte. \implies \frac{D_+}{D_{+IN}} = \left[\frac{5}{2f_1(\Omega_m) + 3\Omega_m} \right] \frac{\mathcal{H}_{IN}^2}{\mathcal{H}^2}. \quad (1.66)$$

En un modelo Λ CDM considerando $\Omega_m \simeq 1$, una ley de potencias $f_1 = (\Omega_m)^q$ y $1 - \Omega_m \ll 1$, de la primer derivada temporal de (1.66) se obtiene la función lineal de crecimiento de estructuras

$$f_1(\Omega_m) \simeq \Omega_m^{6/11}. \quad (1.67)$$

Esta función servirá más adelante como punto de comparación del crecimiento de estructuras obtenidas en este trabajo al evolucionar ciertos perfiles de inhomogeneidades.

1.3.3 Colapso Esférico

La teoría de perturbaciones lineales es útil cuando se necesitan estudiar pequeñas desviaciones con respecto a la homogeneidad e isotropía del modelo cosmológico estándar además del estudio de formación de estructuras cuando se tiene un contraste de densidad $\delta \ll 1$. Sin embargo, se necesita un formalismo no-lineal conforme el contraste de densidad se acerca y sobrepasa el valor de 1. Un primer acercamiento a un modelo no-lineal es el modelo de colapso esférico que se desarrollará en esta sección.

Como el nombre lo indica en el colapso esférico se asume una sobredensidad esféricamente simétrica por lo que la dependencia del contraste de densidad en el espacio es únicamente radial, $\rho(r, t) = \bar{\rho}(t)(1 + \delta(r))$. La región de la sobredensidad tiene un radio H mucho menor al radio de Hubble, la aproximación newtoniana es válida por lo que el potencial newtoniano cumple es (se utiliza la coordenada radial propia $r = a(t)|x^k|$ en donde x^k son las coordenadas de Friedmann comoviles) y su ecuación diferencial (para un cascarón delgado localizado a una distancia r)

$$\phi(r, t) = \bar{\phi}(r, t) + \delta\phi(r, t) = -\frac{1}{2} \frac{\ddot{a}}{a} r^2 + \delta\phi(r, t) \implies \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\nabla\phi = -\frac{GM}{r^3} \vec{r} - \frac{G\delta M}{r^3} \vec{r}, \quad (1.68)$$

en donde $\bar{M} = \frac{4\pi}{3} \bar{\rho} r^3 = \text{cte.}$, $\delta M = 4\pi \int_0^r q^2 \delta dq = \text{cte.}$ y \vec{r} denota el vector posición completo. Al ser un análisis newtoniano, es posible expresar la ecuación diferencial en términos de una constante análoga a la energía

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{r} = E, \quad (1.69)$$

en donde $M = \frac{4\pi}{3} \bar{\rho} r^3 (1 + \delta_p)$, $\delta_p = \frac{3}{r^3} \int_0^r q^2 \delta dq$, $E > 0$ define una cáscara esférica que se expande indefinidamente y $E < 0$ define una cáscara que eventualmente colapsará (el subíndice p denota que la cantidad está promediada). Siguiendo el análogo newtoniano, el primer sumando define la energía cinética K mientras que el segundo define la energía potencial U , entonces a un tiempo $t = t_i$ (en donde las velocidades peculiares son irrelevantes ya que la sobredensidad se expande con el fondo) estas cantidades son

$$K_i = \frac{1}{2} H_i^2 r_i^2 \text{ y } |U| = K_i \Omega_i (1 + \delta_{pi}) \implies E = K_i \Omega_i [\Omega_i^{-1} - (1 + \delta_{pi})], \quad (1.70)$$

con $\frac{dr_i}{dt} = \frac{\dot{a}}{a} r_i = H_i r_i$ por lo que para $E < 0$, se tiene que $\delta_{pi} > \Omega_i^{-1} - 1$. La solución de (1.69) es

$$r = A(1 - \cos \theta), \quad t + T = B(\theta - \sin \theta); \quad \text{con } A^3 = GMB^2. \quad (1.71)$$

Nótese que esta solución corresponde a soluciones de polvo de la métrica FLRW con $k = 1$ y en donde T es una constante de integración determinada por las condiciones iniciales. Cuando $\theta = \pi$ entonces $r = r_m$, obteniendo

$$A = \frac{r_i}{2} \frac{(1 + \delta_{pi})}{[\delta_{pi} - (\Omega_i^{-1} - 1)]} \text{ y } B = \frac{1 + \delta_{pi}}{2H_i \Omega_i^{1/2} [\delta_{pi} - (\Omega_i^{-1} - 1)]^{3/2}}. \quad (1.72)$$

Para un fondo plano ($\Omega_i = 1$, corresponde a un modelo Einstein-de Sitter), se tiene que $A = \frac{r_i (1 + \delta_{pi})}{2 \delta_{pi}}$ y $B = \frac{1 + \delta_{pi}}{2H_i \delta_{pi}^{3/2}}$. Para $t = t_i$ y para δ_{pi} pequeño se tiene que $\cos \theta_i \simeq 1 - 2\delta_{pi}$ y $\theta_i^2 = 4\delta_{pi}$, por lo tanto $H_i(t_i + T) = \frac{2}{3}(1 + \delta_{pi})$ pero como $H_i t_i = \frac{2}{3}$ (al tener un fondo plano) se tiene $H_i T = \frac{2}{3} \delta_{pi}$ y por tanto $T/t_i \ll 1$ por lo que se puede tomar $T = 0$.

Ahora, de la densidad promedio ρ_p de un cascarón para un fondo en donde $a \propto t^{2/3}$ y $\bar{\rho} = 1/(6\pi Gt^2)$, se puede obtener una expresión para δ_p en términos de (1.71)

$$\rho_p(t) = \frac{3M}{4\pi r^3} = \frac{3M}{4\pi A^3(1 - \cos \theta)^3} \implies \delta_p(t) = \frac{\rho_p}{\bar{\rho}} - 1 = \frac{9}{2} \frac{(\theta - \sin \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^3} - 1. \quad (1.73)$$

Para tiempos pequeños se realiza una expansion en serie de Taylor de δ_p y se retienen hasta términos de θ^2 obteniendo

$$\delta_p = \frac{3}{20} \left(\frac{6t}{B} \right)^{2/3} \quad \text{y} \quad t = \frac{B\theta^3}{6}. \quad (1.74)$$

Sustituyendo $H_i = \frac{2}{3t_i}$ en B se obtiene

$$\delta_p = \frac{3}{5} \delta_{pi} \left(\frac{t}{t_i} \right)^{2/3} \propto a. \quad (1.75)$$

Utilizando la relación con el corrimiento al rojo $(t/t_i)^{2/3} = (1 + z_i)/(t + z)$ y la definición $\delta_{p0} = \frac{3}{5} \frac{a_0}{a_i} \delta_{pi} = \frac{3}{5} \delta_{pi} (1 + z_i)$ se obtiene

$$1 + z = \frac{5}{3} \left(\frac{4}{3} \right)^{2/3} \frac{\delta_{p0}}{(\theta - \sin \theta)^{2/3}}. \quad (1.76)$$

Sustituyendo en (1.75) se obtiene una expresión para la evolución lineal

$$\delta_{pL} = \frac{\rho_{pL}}{\bar{\rho}} - 1 = \frac{3}{5} \frac{\delta_{pi}(1 + z_i)}{1 + z} = \frac{3}{5} \left(\frac{3}{4} \right)^{2/3} (\theta - \sin \theta)^{2/3}. \quad (1.77)$$

En [19], únicamente aparece una discusión sobre el colapso esférico para sobredensidades. Para infradensidades (*voids*) [20] tiene el tratamiento correspondiente. Constituye en tomar las soluciones para $E > 0$ de la ecuación (1.69) dadas por

$$r = A(\cosh \theta - 1), \quad t + T = B(\sinh \theta - \theta); \quad \text{con} \quad A^3 = GMB^2. \quad (1.78)$$

que corresponden al caso de un modelo FLRW de polvo con $k = -1$ y se les aplica un proceso completamente análogo al descrito para $E < 0$ obteniendo así el contraste de densidad promedio para *voids* en términos de θ

$$\delta_V(t) = \frac{9}{2} \frac{(\sinh \theta - \theta)^2}{(\cosh \theta - 1)^3} - 1 \quad (1.79)$$

y para obtener la aproximación en el régimen lineal, se realiza una expansión en serie de Taylor (de la misma forma que para el caso anterior) y se obtiene una relación entre θ y z dada por

$$1 + z = \frac{5}{3} \left(\frac{4}{3} \right)^{2/3} \frac{\delta_{p0}}{(\sinh \theta - \theta)^{2/3}}. \quad (1.80)$$

Por tanto se obtiene una expresión del contraste de densidad para la región lineal dada por

$$\delta_{VL} = \frac{\rho_{VL}}{\bar{\rho}} - 1 = -\frac{3}{5} \frac{\delta_{Vi}(1 + z_i)}{1 + z} = -\frac{3}{5} \left(\frac{3}{4} \right)^{2/3} (\sinh \theta - \theta)^{2/3}. \quad (1.81)$$

Estas expresiones en el régimen lineal dadas por las ecuaciones (1.77) y (1.81) son únicamente válidas para valores de θ pequeños.

Una limitación importante a considerar sobre el colapso esférico es que, descrito como lo hacen en [19] y [20], es únicamente válido para universos con un fondo modelado por la solución de Einstein-de Sitter. Aunque existen extensiones al modelo de Λ CDM (en [21], por ejemplo) su tratamiento requiere de trabajo numérico además de que la solución en la frontera de la inhomogeneidad no es continua, lo que dificulta contrastar los resultados numéricos con la evolución no lineal. Por lo tanto no es de mucha utilidad para el desarrollo del trabajo en cuestión.

1.4 Modelos cosmológicos inhomogéneos

Hasta este momento se han discutido métodos lineales y un acercamiento no lineal para describir la formación de estructura. El procedimiento lineal es la teoría de perturbaciones a primer orden mientras que el primer acercamiento a una descripción no lineal corresponde al colapso esférico. El tratamiento estándar de un universo FLRW y teoría de perturbaciones a primer e incluso a segundo orden es insuficiente para diversos problemas. Como mencionan en [22] Bolejko et. al., utilizar perturbaciones difiere con la realidad ya que ϕ/c^2 es una medida del "contraste de curvatura" el cual, junto con el contraste de densidad $\delta\rho/\rho$ deben ser pequeños y al presente están fuera del radio de convergencia de la serie de aproximaciones. Mencionan también que suelen aparecer dificultades al utilizar el método, por ejemplo: modelos irrotacionales y silenciosos suelen ser linealmente inestables, modelos Robertson-Walker cerrados son linealmente inestables, perturbaciones de segundo orden pueden volverse más fuertes a las de primero en modelos inflacionarios de slow-roll, entre otros. Como una alternativa se propone trabajar con modelos cosmológicos inhomogéneos, que tienen como ventaja, ser soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein y por tanto, representan una evolución completamente no lineal.

Los datos observacionales permiten trabajar con modelos inhomogéneos, entre los cuales, se tienen principalmente dos soluciones útiles: la solución Lemaître-Tolman-Bondi (LTB) y las soluciones de Szekeres. Son de utilidad para describir diversos problemas como:

- Formación de una galaxia con agujero negro central [23].
- Formación y evolución de cúmulos galácticos y voids [24, 25].
- Resolución del problema de horizontes sin la necesidad de modelos inflacionarios [26, 27, 28].

En el caso particular de este trabajo la evolución no lineal de estructuras es de interés. Se realizará en esta sección una breve descripción de soluciones inhomogéneas, en [29] y [22] realizan descripciones exhaustivas de modelos inhomogéneos y sus aplicaciones.

1.4.1 Soluciones Petrov D y universos silenciosos

La clasificación de Petrov se basa en ordenar los espacio-tiempos en distintas categorías (I, D, II, N, III, O) dependiendo de los valores propios de una matriz obtenida a partir del tensor de Weyl o de direcciones nulas independientes. Un tratamiento detallado de la clasificación de Petrov se puede encontrar en [30].

El tensor de Weyl se puede descomponer en términos de 5 coeficientes $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$ y Ψ_4 de la siguiente forma

$$C_{abcd} = \Psi_0 U_{ab} U_{cd} + \Psi_1 (U_{ab} W_{cd} + W_{ab} U_{cd}) + \Psi_2 (V_{ab} U_{cd} + U_{ab} V_{cd} + W_{ab} W_{cd}) + \quad (1.82)$$

$$+ \Psi_3 (V_{ab} W_{cd} + W_{ab} V_{cd}) + \Psi_4 V_{ab} V_{cd}. \quad (1.83)$$

en donde $U_{ab} = -l_a \bar{m}_b + l_b \bar{m}_a$, $V_{ab} = k_a m_b - k_b m_a$ y $W_{ab} = m_a \bar{m}_b - m_b \bar{m}_a - k_a l_b + k_b l_a$ es la base de bivectores (una 2-forma, es decir, un tensor $(0, 2)$ antisimétrico) auto-duales construidos a partir de la tétrada nula compleja (m_a y \bar{m}_a son complejos conjugados mientras que l_a y k_a son vectores nulos reales). Los términos Ψ tienen distintas interpretaciones físicas: Ψ_4 representa una onda transversal en la dirección k_a , Ψ_3 representa un término de onda longitudinal, Ψ_2 representa un término de "Coulomb" (estos son espacio-tiempos análogos a la descripción newtoniana) y los términos Ψ_0 y Ψ_1 representan componentes de onda transversal y longitudinal en la dirección l_a .

Se define el tensor complejo Q_{ab} a partir de las partes eléctrica y magnética (definidas en el siguiente capítulo de este trabajo, dadas por una 4-velocidad u_a) por

$$-Q_{ab} = E_{ab} + iH_{ab}. \quad (1.84)$$

Este tensor cumple las relaciones $Q_a^a = 0$, $Q_{ab} = Q_{ba}$ y $Q_{ab} u^b = 0$ por lo que se puede ver como una matriz 3×3 . La ecuación de valores propios para el tensor de Weyl es dada en términos de bivectores propios o vectores propios por

$$\frac{1}{2} C_{abcd} X^{cd} = \lambda X_{ab} \implies Q_{ab} X^b = \lambda X_a. \quad (1.85)$$

Dependiendo de los valores propios obtenidos en la ecuación anterior y sus multiplicidades se define el tipo de Petrov que la solución tiene. En el caso de un espacio-tiempo tipo D, se tienen dos valores propios distintos, uno teniendo multiplicidad 2 y se tiene la condición matricial

$$(\mathbf{Q} + \frac{1}{2} \lambda \mathbf{I})(\mathbf{Q} - \lambda \mathbf{I}) = 0, \quad (1.86)$$

en donde los valores propios, al tener multiplicidades 1 y 2 y estos ser $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2} \lambda_1 = \frac{1}{2} \lambda$, tienen un patrón $(-2, 1, 1)$. Los espacio-tiempos Petrov D cumplen que $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$ y $\Psi_2 = -\lambda_1/2$. A partir de los valores propios, se pueden definir dos invariantes I y J

$$I = \frac{1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \text{ y } J = \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \quad (1.87)$$

Para todos los tipos de Petrov excepto el tipo I, estos invariantes cumplen $I^3 = 27J^2$. Para espacio-tiempos Petrov D, en términos de Ψ_2 , están dados por

$$I = 3\Psi_2^2 \text{ y } J = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \Psi_2 \\ 0 & \Psi_2 & 0 \\ \Psi_2 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (1.88)$$

Los espacio-tiempos Petrov D tienen dos direcciones nulas principales dobles k_a y l_a .

Además de ser Petrov D, la métrica utilizada en el desarrollo de este trabajo cumple con ser un "universo silencioso". Este fue otro intento (menos exitoso) de clasificar cierto tipo de espacio-tiempos. En este tipo de soluciones la información no se propaga por ondas de sonido o gravitacionales, por lo tanto la evolución a lo largo de líneas de mundo es puramente local y descrita por ecuaciones diferenciales ordinarias. Estas soluciones tienen como fuente un fluido de polvo irrotacional cuyas parte magnética del tensor de Weyl es $H_{ab} = 0$. Entre este tipo de soluciones se encuentran las de LTBLemaître-Tolman-Bondi (LTB) y Szekeres.

1.4.2 Soluciones de LTB y Szekeres

Los modelos cosmológicos inhomogéneos son aquellas soluciones a las ecuaciones de Einstein que contienen por lo menos una subclase no vacía y no estática de una solución FLRW como límite. Resulta obvio pedir esto ya que los modelos FLRW representan una primera aproximación realista a la descripción del universo.⁸ Las soluciones inhomogéneas más utilizadas son las de LTB y Szekeres que pueden describir la evolución del universo después de la época de recombinación porque tienen como fuente al polvo (fluido perfecto con presión 0) y en las épocas anteriores los efectos de la presión juegan un papel relevante. Estos modelos no son adecuados para incluir energía oscura a menos que sea con constante cosmológica y sirven como reemplazo para teoría de perturbaciones lineales, tienen como ventaja el ser soluciones exactas, entonces pueden ser extrapoladas arbitrariamente al futuro sin necesidad de constreñirlas en ciertos regímenes.

Solución de Szekeres: Está dada por el elemento de línea

$$ds^2 = dt^2 - e^{2\alpha(t,x,y,r)} dr^2 - e^{2\beta(t,x,y,r)} (dx^2 + dy^2). \quad (1.89)$$

Ciertas propiedades que cumplen estos modelos son tener una fuente de fluido perfecto (en particular, polvo) cuyas líneas de flujo son geodésicas irrotacionales, las hipersuperficies ortogonales a estas líneas son conformemente planas, el tensor de Ricci de esas hipersuperficies tiene dos valores propios iguales y el tensor de *shear* tiene dos valores propios iguales. Además, la presión depende solo del tiempo al utilizar coordenadas comoviles. El modelo es útil para épocas en las que la gravedad juega un papel dominante y los procesos hidrodinámicos a grandes escalas han terminado.

El elemento de línea está escrito en coordenadas comoviles ($u^\alpha = \delta_0^\alpha$) y dependiendo del valor de $\partial_r \beta$ se tienen dos tipos de familias de esta solución: $\partial_r \beta = 0$ y $\partial_r \beta \neq 0$. La segunda familia es la interesante para aplicaciones cosmológicas. Aquí las funciones de la métrica cumplen

$$e^\beta = \Phi(t, r) e^{\nu(r,x,y)}, \quad (1.90)$$

$$e^\alpha = h(r) \Phi(t, r) \partial_r \beta = h(r) (\partial_r \Phi + \Phi \partial_r \nu), \quad (1.91)$$

$$e^{-\nu} = A(r)(x^2 + y^2) + 2B_1(r)x + 2B_2(r)y + C(r), \quad (1.92)$$

en donde Φ cumple la ecuación⁹

$$(\partial_t \Phi)^2 = -k(r) + \frac{2M(r)}{\Phi} + \frac{1}{3} \Lambda \Phi^2, \quad (1.93)$$

h, k, M, A, B_1, B_2 y C son funciones arbitrarias que cumplen la ecuación para otra función arbitraria $g(r)$

$$g(r) = 4(AC - B_1^2 - B_2^2) = \frac{1}{h^2} + k \quad (1.94)$$

y la función de "tiempo de bang"¹⁰ (*bang time function*) $t_B(r)$ se obtiene de la ecuación (1.93)

$$\int_0^\Phi \frac{d\Phi'}{\sqrt{-k + 2M/\Phi' + \frac{1}{3}\Lambda\Phi'^2}} = t - t_B(r). \quad (1.95)$$

⁸Únicamente en esta sección se utiliza una signatura $(+, -, -, -)$ en la métrica siguiendo [29] y [22].

⁹Esta ecuación es la equivalente a la ecuación de Friedmann.

¹⁰Las variables primadas en esta ecuación no representan derivadas.

La densidad de energía está dada por

$$\frac{8\pi G}{c^4} \rho = \frac{(2Me^{3\nu})_{,r}}{e^{2\beta}(e^\beta)_{,r}}. \quad (1.96)$$

En general, los modelos de Szekeres no tienen simetría alguna pero obtienen un grupo de simetrías de tres dimensiones con órbitas dos dimensionales cuando A , B_1 , B_2 y C son todas constantes. El signo de $g(r)$ define la geometría de las superficies de t y r constantes pero si las funciones anteriores no son constantes, un mismo espacio con $t = cte.$ puede tener una mezcla de geometrías. Además el signo de k influye el signo de g y por tanto determina la evolución cuando no hay constante cosmológica. El modelo cuasi-esférico ($g > 0$), imaginado como un modelo de esferas no concéntricas^[11], es el único que se ha estudiado con detalle y se ha usado en el estudio del universo temprano, formación de estructura y observaciones de supernovas y CMB.

Solución LTB: Es un caso especial del modelo de Lemaître que describe a un fluido inhomogéneo esféricamente simétrico con presión anisotrópica y se presenta en términos del elemento de línea

$$ds^2 = e^{A(t,r)} dt^2 - e^{B(t,r)} dr^2 - R^2(t,r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (1.97)$$

El modelo LTB se toma cuando la fuente es polvo (con o sin constante cosmológica), entonces $\partial_r P = 0$ lo que implica que $\partial_r A = 0$ y se puede escalar g_{00} de tal forma que el elemento de línea se transforma en

$$ds^2 = dt^2 - \frac{(\partial_r R)^2}{1 + 2E(r)} dr^2 - R^2(t,r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1.98)$$

en donde $R(t,r)$ cumple la ecuación^[12]

$$(\partial_t R)^2 = 2E + \frac{2M}{R} + \frac{1}{3}\Lambda R^2. \quad (1.99)$$

Para este modelo, la densidad de masa está dada por

$$\frac{8\pi G}{c^4} \rho = \frac{2\partial_r M}{R^2 \partial_r R}. \quad (1.100)$$

Al considerar $\Lambda = 0$ se puede resolver la ecuación (1.99) de manera explícita y para $E < 0$ (evolución elíptica), $E = 0$ (evolución parabólica) y $E > 0$ (evolución hiperbólica). Como todas las funciones son covariantes ante cambios arbitrarios de la coordenada radial $\tilde{r} = g(r)$ entonces $E(r)$, $M(r)$ o $t_B(r)$ (el tiempo de *bang*) pueden ser elegidas a conveniencia. El límite de FLRW se recupera cuando se toma $t_B = cte.$ y $\frac{|E|^{3/2}}{M} = cte$ ^[13]. En ciertas aplicaciones (como en la formación de una galaxia con un agujero negro central) es conveniente utilizar M como la coordenada radial, $\tilde{r} = M(r)$ [23].

El modelo tiene como condiciones de origen en $r = r_c$ si $R(t, r_c) = 0$ para cada tiempo. Al ser un modelo inhomogéneo podría ocurrir que un cascarón de radio constante r chocara con su vecino, a este fenómeno se le llama *shell crossing* y son lugares geométricos extremales de R , es decir,

¹¹Una visualización y discusión de esta representación se encuentra en [31]

¹²Se obtiene de las ecuaciones de Einstein para un tensor de energía-momento de polvo. Es una primer integral.

¹³Para tener una expresión en las coordenadas usuales se toma $M = M_0 r^3$, $E = -\frac{1}{2}kr^2$ y $R(t,r) = ra(t)$; así, la ecuación para $R(t,r)$ se convierte en la ecuación de Friedmann.

lugares donde $\partial_r R = 0$ pero no son máximos o mínimos regulares. Estos cruces crean singularidades de densidad divergente y cambios de signo; las condiciones para evitar este fenómeno se encuentran en el apéndice.

Aplicaciones de este modelo son formación de agujeros negros, cúmulos y supercúmulos galácticos, *voids* cósmicos, interpretaciones de observaciones de supernova, CMB, entre otros.

El formalismo 1 + 3

En relatividad general, existen dos formulaciones que parten al espacio-tiempo en hipersuperficies 3-dimensionales espaciales y tiempo: el formalismo 3+1 y el formalismo 1+3. Aún siendo formalismos similares, tienen diferencias sutiles que cambian el manejo e interpretación de las ecuaciones. El formalismo 3+1 consiste en foliar al espacio-tiempo al introducir una familia de hipersuperficies espaciales 3-dimensionales a través de los conjuntos de nivel de un campo escalar. La identificación entre dos de las hipersuperficies puede ser arbitraria. En el formalismo 1+3 se *enhebra* al espacio-tiempo usando una familia de curvas integrales temporales que otorgan una relación temporal global entre puntos [32].

En cosmología, se suele utilizar el movimiento preferencial de los contenidos del universo: la 4-velocidad preferencial (los observadores comóviles) que genera la congruencia de geodésicas que enhebra al espacio-tiempo en el formalismo 1+3. En este capítulo se presenta el desarrollo del formalismo 1+3 y del sistema de ecuaciones necesario para resolver el problema. Detalles específicos del formalismo 1+3 pueden ser consultados en [1] y para una formulación matemática formal en [32].

2.1 Ecuaciones de Einstein en el formalismo 1+3

2.1.1 Coordenadas comóviles, tensor de proyección y cantidades cinemáticas

Las coordenadas comóviles $x^\mu = (t, y^i)$ se definen localmente escogiendo una superficie S que intersecta a cada línea de mundo fundamental una sola vez y se etiqueta cada punto de intersección por y^i con $i = 1, 2, 3$. Luego, se mantiene esta etiqueta de las coordenadas a tiempos posteriores y anteriores y se define una coordenada t con una función creciente a lo largo de cada línea de flujo.

El movimiento preferencial a lo largo de las líneas de flujo que generan a las coordenadas comóviles implican la existencia de una 4-velocidad preferencial definida por las coordenadas locales $x^\mu = x^\mu(\tau)$, con τ el tiempo propio a lo largo de las líneas de mundo, por

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad u^\mu u_\mu = -1. \quad (2.1)$$

Es útil normalizar las coordenadas comóviles tal que

$$u^\mu = \delta_0^\mu \iff \frac{ds}{d\tau} = 1 \text{ y } \frac{dy^i}{d\tau} = 0. \quad (2.2)$$

en donde s es el tiempo propio normalizado.

Ya que se tiene definida una 4-velocidad asociada a los observadores comóviles se define un tensor de proyección de tensores en el espacio-tiempo a las hipersuperficies espaciales ortogonales a u^a ; este tensor de proyección además actúa como métrica espacial de estas hipersuperficies

$$h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b. \quad (2.3)$$

Trivialmente, de la definición, se observa que el tensor cumple las relaciones $h_b^a h_c^b = h_c^a$, $h_a^a = 3$ y $h_b^a u^b = 0$. Para cualesquiera V_a y tensores S_{ab} , se puede obtener su parte proyectada simétrica sin traza (PSTF, por *Projected Symmetric Tracefree part*) con

$$V_{\langle a} = h_a^b V_b, \quad S_{\langle ab} = \left[h_{(a}^c h_{b)}^d - \frac{1}{3} h_{ab} h^{cd} \right] S_{cd}. \quad (2.4)$$

Con ayuda de la 4-velocidad y del tensor de proyección, podemos definir la derivada temporal a lo largo de las líneas de flujo y la derivada proyectada a las hipersuperficies ortogonales. La derivada temporal para un tensor (k, l) arbitrario $S^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ está dada por

$$\dot{S}^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = u^c \nabla_c S^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}, \quad (2.5)$$

con la que se obtiene el vector aceleración

$$\dot{u}^a = u^b \nabla_b u^a \implies \dot{u}^a u_a = 0. \quad (2.6)$$

La derivada proyectada (que es la derivada covariante de las hipersuperficies ortogonales a u^a) se define por

$$\bar{\nabla}_c S^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = h_c^f h_{d_1}^{a_1} \dots h_{d_k}^{a_k} h_{b_1}^{e_1} \dots h_{b_l}^{e_l} \nabla_f S^{d_1 \dots d_k}_{e_1 \dots e_l}. \quad (2.7)$$

Con esta definición se obtiene que la derivada covariante de u_a es

$$\nabla_b u_a = \bar{\nabla}_b u_b - \dot{u}_a u_b. \quad (2.8)$$

Para una superficie S en donde $t = cte.$ se define el vector de posición relativa para las coordenadas comóviles $x^\mu(t, y^i)$ como

$$\beta^\mu = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \right)_{t=cte.} \delta y^i, \quad (2.9)$$

el cuál, en general, no es ortogonal a las líneas de flujo por lo que lo que se proyecta para tener un vector de posición relativo ortogonal a u^a

$$\beta^{\langle a} = e^a \delta l, \quad e^a u_a = 0 \quad \text{y} \quad \beta^{\langle a} \beta_{\langle a} = \delta l^2, \quad (2.10)$$

en donde e^a es un vector unitario ortogonal a u^a y δl la distancia relativa. A partir de este vector, se define un vector velocidad relativa dado por

$$v^a = v^{\langle a} = h_b^a u^d \nabla_d (h_c^b \beta^c) = \dot{\beta}^{\langle a}. \quad (2.11)$$

Este vector cumple que su derivada de Lie a lo largo de u^a se anula, $\mathcal{L}_u v^a = 0$ y por tanto la velocidad relativa entre partículas es dada por una transformación lineal a partir de la posición relativa, $v^a = V^a_b \beta^{\langle b}$, en donde $V_{ab} = \bar{\nabla}_b u_a$.

Teniendo estas consideraciones, se continúa definiendo las cantidades cinemáticas al partir el tensor V_{ab} en sus partes simétrica y alternante irreducibles:

$$V_{ab} = \overline{\nabla}_b u_a = V_{(ab)} + V_{[ab]} = \Theta_{ab} + \omega_{ab} = \sigma_{ab} + \frac{1}{3}\Theta h_{ab} + \omega_{ab}, \quad (2.12)$$

en donde $\Theta_{ab} = \overline{\nabla}_{(b} u_{a)}$ es el tensor de expansión, $\omega_{ab} = \overline{\nabla}_{[b} u_{a]}$ el tensor de vorticidad, $\sigma_{ab} = \Theta_{\langle ab)}$ el tensor de *shear* y $\Theta = \Theta^c_c$ el escalar de expansión. Un resultado importante de estas cantidades es la relación de Hubble generalizada

$$\frac{\dot{\delta}l}{\delta l} = \Theta_{ab} e^a e^b = \frac{1}{3}\Theta + \sigma_{ab} e^a e^b, \quad (2.13)$$

que muestra que la razón de cambio entre la distancia de galaxias vecinas es proporcional a la distancia entre ellas y con razón de cambio proporcional a esta distancia. En general, estas cantidades cinemáticas no tienen por que ser cero por lo que todos los puntos menos dos cambian con el flujo. Sin embargo, el volúmen cambiará proporcionalmente a Θ por lo que es conveniente definir una escala de longitud dada por

$$H = \frac{\dot{l}}{l} = \frac{1}{3}\Theta, \quad (2.14)$$

por lo que el cambio del volúmen a lo largo del flujo será caracterizado por $V \propto l^3$, donde l corresponde al factor de escala en la métrica FLRW y el parámetro de Hubble corresponde a H , mientras que H_0 es el valor presente de la constante de Hubble. De todas las consideraciones anteriores (en particular las ecuaciones (2.11) y (2.12)) llegamos a que la derivada covariante de la 4-velocidad está completamente determinada por las cantidades cinemáticas

$$\nabla_b u_a = \omega_{ab} + \sigma_{ab} + \frac{1}{3}\Theta h_{ab} - \dot{u}_a u_b. \quad (2.15)$$

Dichas cantidades son, en principio, medibles directamente de la observación de galaxias cercanas a partir de la ecuación (2.13) y la ecuación siguiente

$$\dot{e}_{\langle a)} = \omega_{ab} e^b + \sigma_{ab} e^b - \sigma_{cd} e^c e^d e_a, \quad (2.16)$$

ecuación que describe la razón de cambio direccional. Por ejemplo, considerando puramente expansión ($\dot{\delta}l/\delta l = \Theta/3$ y $\dot{e}_{\langle a)} = 0$), si se considera una esfera de galaxias de radio δl a un tiempo t , entonces a un tiempo $t + \delta t$, la distancia entre ellas habrá incrementado en un factor de $d l = \Theta \delta l \delta t / 3$ y dichas galaxias forman una esfera más grande. En el caso de *shear* puro ($\dot{\delta}l/\delta l = \sigma_{ab} e^a e^b$ y $\dot{e}_{\langle a)} = \sigma_{ab} e^b - \sigma_{cd} e^c e^d e_a$), como el tensor de *shear* es simétrico y sin traza, se puede escoger un marco tal que $\sigma_{ab} = \text{diag}(0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. En este caso, si existe expansión en una dirección, en las otras dos direcciones hay contracción por lo que una esfera de galaxias a un tiempo t se transforma en un elipsoide expandido en una dirección y contraído en 2 con un cambio de $d l = \sigma_j \sigma_j \delta l \delta t$ para la j -ésima dirección en un tiempo $t + \delta t$ y se obtiene distorsión sin cambio de volúmen. Finalmente, en el caso de pura vorticidad ($\dot{\delta}l/\delta l = 0$ y $\dot{e}_{\langle a)} = \omega_{ab} e^b$) existe rotación pura de galaxias a lo largo de un eje conservando distancias sin distorsión ni expansión. En un flujo general, se espera tener una combinación de los tres efectos. Las cantidades

cinemáticas asociadas a la derivada covariante de u_a , pueden ser utilizadas para caracterizar distintos modelos cosmológicos, por ejemplo, el universo estático de Einstein tiene todas las cantidades cinemáticas igual a cero y un FLRW tiene únicamente $\Theta \neq 0$. **Otro ejemplo puede ser (<https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.12.1544>) y cita a la fuente donde obtuviste esta información sobre las observables.**

Finalmente, teniendo en cuenta las siguientes secciones, se define para un vector v^a $\text{curl } v_a = \eta_{abc} \bar{\nabla}^b v^c$ y para un tensor $T_b{}^d$ $\text{curl } T_{ab} = \eta_{cd(a} \bar{\nabla}^c T_{b)}{}^d$, en donde $\eta_{abc} = \eta_{abcd} u^d$.

2.1.2 Identidades de Ricci, Materia y ecuaciones de Einstein

Recordando la definición del tensor de Riemann aplicado a la 4-velocidad preferencial

$$(\nabla_c \nabla_d - \nabla_d \nabla_c) u_a = R_{abcd} u^b, \quad (2.17)$$

se pueden definir identidades cinemáticas (si se incluye materia, ciertas de estas identidades se vuelven dinámicas). Contrayendo la ecuación anterior con u^c se obtiene

$$(\nabla_d \dot{u}_a) - \nabla_d \dot{u}_a + (\nabla_d u^c)(\nabla_c u_a) = R_{abcd} u^b u^c. \quad (2.18)$$

Sustituyendo la ecuación (2.15) en los términos de $\nabla_b u_a$ se obtiene la ecuación de propagación de vorticidad

$$\dot{\omega}^{(e)} = -\frac{2}{3} \Theta \omega^e + \sigma^{ed} \omega_d - \frac{1}{2} \text{curl } \dot{u}^e, \quad (2.19)$$

en donde $\omega_e = \frac{1}{2} \eta_{ebc} \omega^{bc}$ y la ecuación de propagación de la expansión (de la contracción de a_c de 2.15), también conocida como la ecuación de Raychaudhuri,

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3} \Theta^2 + 2(\sigma^2 - \omega^2) - \bar{\nabla}_a \dot{u}^a + \dot{u}^a \dot{u}_a = -R_{bc} u^b u^c, \quad (2.20)$$

en donde $\sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma^{ab} \sigma_{ab}$ y $\omega^2 = \frac{1}{2} \omega^{ab} \omega_{ab}$. De las identidades de Ricci se pueden obtener también ecuaciones de constricción para la vorticidad y el *shear*

$$\bar{\nabla}_a \omega^a = \omega^a \dot{u}_a, \quad (2.21)$$

$$\bar{\nabla}^b \sigma_{ab} - \text{curl } \omega_a - \frac{2}{3} \bar{\nabla}_a \Theta + 2\eta_{abc} \omega^b \dot{u}^c = R_{(a} b u^b). \quad (2.22)$$

Dos cantidades necesarias en el formalismo 1+3 provienen de la descomposición del tensor de Weyl en su parte eléctrica E_{ab} y magnética H_{ab} definidas por $E_{ab} = C_{acbd} u^b u^d$ y $H_{ab} = \frac{1}{2} \eta_{acd} C^cd{}_{be} u^e$. Utilizando estas dos cantidades obtenemos la ecuación de propagación del *shear*

$$E_{ab} - \frac{1}{2} R_{(ab)} = -\dot{\sigma}_{(ab)} - \frac{2}{3} \Theta \sigma_{ab} + \bar{\nabla}_{(a} \dot{u}_{b)} + \dot{u}_{(a} \dot{u}_{b)} - \omega_{(a} \omega_{b)} - \sigma_{c(a} \sigma_{b)}{}^c, \quad (2.23)$$

y la ecuación

$$H_{ab} = \text{curl } \sigma_{ab} + \bar{\nabla}_{(a} \omega_{b)} + 2\dot{u}_{(a} \omega_{b)}. \quad (2.24)$$

Ambas ecuaciones representan la PSTF de la ecuación (2.18) y de la PSTF de su contracción con η^{cde} .

Todas estas ecuaciones son puramente cinemáticas, válidas independientemente de la dinámica utilizadas. Su contenido dinámico se obtiene una vez que se implementan las ecuaciones de Einstein. Para incluir materia, se considera el tensor energía-momento para un fluido en general medido por un observador que se mueve con 4-velocidad u^a

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + 2q_{(a} u_{b)} + p h_{ab} + \pi_{ab}, \quad (2.25)$$

en donde $\rho = T_{ab} u^a u^b$ es la densidad de energía, $p = \frac{1}{3} T_{ab} h^{ab}$ es la presión, $q_a = -T_{(a} u_{b)} u^b$ es la densidad de momento o el flujo de energía relativo a u^a y $\pi_{ab} = T_{(ab)}$ es el tensor de esfuerzos anisotrópicos. Se aplica la conservación de la energía-momento $\nabla_b T^{ab} = 0$ para obtener ecuaciones 3+1 de conservación, la componente paralela a u^a resulta ser la conservación de la energía

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\Theta + \pi^{ab} \sigma_{ab} + \bar{\nabla}_a q^a + 2\dot{u}_a q^a = 0, \quad (2.26)$$

mientras que las componentes proyectadas ortogonalmente a u^a resultan ser la conservación del momento

$$\dot{q}_{(a)} + \frac{4}{3}\Theta q_a + (\rho + p)\dot{u}_a + \bar{\nabla}_a p + \bar{\nabla}^b \pi_{ab} + \dot{u}^b \pi_{ab} + (\sigma_{ab} + \eta_{abc} \omega^c) q^b = 0. \quad (2.27)$$

Respectivamente, estas ecuaciones representan la razón de cambio en la energía a lo largo de las líneas de flujo y la aceleración causada por distintas formas de presión. La ecuación de conservación del momento implica que la densidad de masa inercial es $\rho + p$ por lo que energía interna contribuye a la masa inercial efectiva ya sea cambiando ρ o p . Se debe tener en cuenta que la conservación de la energía-momento no lleva a una definición de la energía-momento total de una región extendida, resultado de la imposibilidad de definir una energía gravitacional en espacio-tiempos curvos. Para implementar la dinámica a las ecuaciones, se realiza una descomposición 1+3 a las ecuaciones de Einstein (incluyendo constante cosmológica) dadas por

$$R_{ab} u^a u^b = 4\pi G(\rho + 3p) - \Lambda, \quad (2.28)$$

$$R_{ab} u^a h^b_c = -8\pi G q_c, \quad (2.29)$$

$$R_{ab} h^a_c h^b_d = [4\pi G(\rho - p) + \Lambda] h_{cd} + 8\pi G \pi_{cd}. \quad (2.30)$$

En consecuencia, la ecuación de Raychaudhuri toma la siguiente forma

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 + 2(\sigma^2 - \omega^2) - \nabla_a \dot{u}^a + 4\pi G(\rho + 3p) - \Lambda = 0 \quad (2.31)$$

Tomando la proyección espacial de la ecuación (2.18) se obtiene

$$\bar{\nabla}^b \sigma_{ab} - \text{curl } \omega_a - \frac{2}{3}\bar{\nabla}_a \Theta - (\omega_{ab} + \sigma_{ab})\dot{u}^b = R_{(a} u_{b)} u^b,$$

y sustituyendo (2.29) en esta ecuación se obtienen las ecuaciones (0i)

$$0 = 8\pi G q_{(a)} - \frac{2}{3}\bar{\nabla}_a \Theta + \bar{\nabla}^b \sigma_{ab} - \text{curl } \omega_{(a)} + 2\eta_{abc} \omega^b \dot{u}^c. \quad (2.32)$$

Finalmente, para las ecuaciones (ij) se considera la relación de Gauss-Codazzi (dada en el apéndice) y se considera el caso sin vorticidad¹⁴. Con la ecuación (2.18) y la ecuación de Raychaudhuri, se obtiene (conocido ${}^3R_{ab}$) una ecuación de propagación del *shear*

$${}^3R_{ab} = \bar{\nabla}\langle a\dot{u}_b \rangle - l^{-3}(l^3\dot{\sigma})_{\langle ab \rangle} + \dot{u}_{\langle a}\dot{u}_b \rangle + 8\pi G\pi_{ab} + \frac{2}{3}(\sigma^2 - \frac{1}{3}\Theta + \Lambda + 8\pi G\rho)h_{ab}, \quad (2.33)$$

donde ${}^3R_{ab}$ es el tensor de Ricci de las hipersuperficies 3-dimensionales ortogonales a u^a . Al contraer la ecuación anterior se obtiene una ecuación de Friedmann generalizada o la *constricción hamiltoniana*

$${}^3R = -2(\sigma^2 - \frac{1}{3}\Theta^2 + \Lambda + 8\pi G\rho). \quad (2.34)$$

Como ya fue mencionado anteriormente, se pueden introducir variables extra para la resolución de las ecuaciones. Se suelen utilizar la parte eléctrica y magnética del tensor de Weyl, E_{ab} y H_{ab} , para caracterizar la naturaleza de la curvatura del espacio-tiempo. En el caso sin vorticidad, E_{ab} es una alternativa para ${}^3R_{\langle ab \rangle}$. Existe una forma de las identidades de Bianchi para el tensor de Weyl muy parecida a las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla_d C^{abcd} = \nabla^{[b} R^{c|a]} - \frac{1}{6}g^{c[a]}\nabla^{b]} R = J^{abc}, \quad (2.35)$$

en donde J^{abc} es el análogo a la densidad de corriente en las ecuaciones de Maxwell. A partir de aquí es posible obtener ecuaciones de constricción y evolución para E_{ab} y H_{ab} (se utiliza $8\pi G = 1$)

$$\bar{\nabla}^b E_{ab} = \eta_{abc}\sigma^b{}_d H^{dc} - 3H_{ab}\omega^b + \frac{1}{3}\bar{\nabla}_a \rho - \frac{1}{2}\bar{\nabla}^b \pi_{ba} - \frac{1}{3}\Theta q_a + \frac{1}{3}\sigma_{ab}q^b + \frac{3}{2}\eta_{abc}\omega^b q^c, \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\langle ab \rangle} = & \text{curl } H_{ab} + 2\dot{u}^c \eta_{cd\langle a} H_{b \rangle}{}^d - \Theta E_{ab} + 3\sigma_{c\langle a} E_{b \rangle}{}^c - \omega_{c\langle a} E_{b \rangle}{}^c - \frac{1}{2}\bar{\nabla}_{\langle a} q_{b \rangle} - \dot{u}_{\langle a} q_{b \rangle} - \\ & \frac{1}{2}\dot{\pi}_{\langle ab \rangle} - \frac{1}{6}\Theta \pi_{ab} - \frac{1}{2}\sigma^c{}_{\langle a} \pi_{b \rangle}{}^c - \frac{1}{2}\omega^c{}_{\langle a} \pi_{b \rangle}{}^c - \frac{1}{2}(\rho + p)\sigma_{ab}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\bar{\nabla}^b H_{ab} = \eta_{abc}\sigma^b{}_d E^{dc} + 3E_{ab}\omega^b + (\rho + p)\omega_a - \frac{1}{2}\eta_{abc}\sigma^b{}_d \pi^{dc} - \frac{1}{2}\pi_{ab}\omega^b - \frac{1}{2}\text{curl } q_a, \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_{\langle ab \rangle} = & -\text{curl } E_{ab} - 2\dot{u}^c \eta_{cd\langle a} E_{b \rangle}{}^d - \Theta H_{ab} + 3\sigma_{c\langle a} H_{b \rangle}{}^c - \\ & \omega_{c\langle a} H_{b \rangle}{}^c + \frac{1}{2}\text{curl } \pi_{ab} + \frac{1}{2}\sigma^c{}_{\langle a} \eta_{b \rangle}{}^c q^d - \frac{3}{2}\omega_{\langle a} q_{b \rangle}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Estas ecuaciones describen como la propagación del campo gravitacional es gobernada por la distribución de materia. El sistema completo del formalismo 1+3 consiste en ecuaciones covariantes, relativas a una 4-velocidad escogida, tiene a $(\dot{u}^a, \omega_a, \Theta, \sigma_{ab}, \rho, p, \pi_{ab}, E_{ab}, H_{ab})$ como variables, que en total son constituidos por 32 componentes independientes. Se dividen las ecuaciones en ecuaciones de evolución (aquellas que tengan derivada temporal, dada por la ecuación (2.5)) y ecuaciones de constricción que involucran derivadas espaciales ortogonales a u^a . Se tienen ecuaciones de evolución para 23 de las variables mientras que 9 cantidades, \dot{u}^a, p y π_{ab} (se puede sustituir la ecuación de E_{ab} por una para π_{ab} gracias a la ecuación (2.37)) necesitan ecuaciones de estado para la materia.

¹⁴Para considerar vorticidad se tienen que utilizar tétradas o introducir variables extra como la parte eléctrica y magnética del tensor de Weyl ya que no es posible definir un conjunto de hipersuperficies ortogonales al flujo.

Las ecuaciones de evolución son

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\Theta + \bar{\nabla}^a q_a = -2\dot{u}^a q_a - \sigma^{ab}\pi_{ab}, \quad (2.40)$$

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 + 4\pi G(\rho + 3p) - \bar{\nabla}^a \dot{u}_a = -\sigma_{ab}\sigma^{ab} + 2\omega_a\omega^a + \dot{u}_a\dot{u}^a, \quad (2.41)$$

$$\dot{q}_{\langle a} + \frac{4}{3}\Theta q_a + (\rho + p)\dot{u}_a + \bar{\nabla}_a p + \bar{\nabla}^b \pi_{ab} = -\sigma_{ab}q^b + \eta_{abc}\omega^b q^c - \dot{u}^b \pi_{ab}, \quad (2.42)$$

$$\dot{\omega}_{\langle a} + \frac{2}{3}\Theta\omega_a + \frac{1}{2}\text{curl } \dot{u}_a = \sigma_{ab}\omega^b, \quad (2.43)$$

$$\dot{\sigma}_{\langle ab} + \frac{2}{3}\Theta\sigma_{ab} + E_{ab} - 4\pi G\pi_{ab} - \bar{\nabla}_{\langle a}\dot{u}_{b\rangle} = -\sigma_{c\langle a}\sigma_{b\rangle}^c - \omega_{\langle a}\omega_{b\rangle} + \dot{u}_{\langle a}\dot{u}_{b\rangle}, \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_{ab} + \Theta E_{ab} - \text{curl } H_{ab} + 4\pi G[(\rho + p)\sigma_{ab} + \dot{\pi}_{\langle ab} + \frac{1}{4}\Theta\pi_{ab} + \bar{\nabla}_{\langle a}q_{b\rangle}] = \\ = -8\pi G\dot{u}_{\langle a}q_{b\rangle} + 2\dot{u}^c\eta_{cd\langle a}H_{b\rangle}^d + 3\sigma_{c\langle a}E_{b\rangle}^c - \omega^c\eta_{cd\langle a}E_{b\rangle}^d - 4\pi G(\sigma^c_{\langle a}\pi_{b\rangle}^c - \omega^c\eta_{cd\langle a}\pi_{b\rangle}^d), \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_{\langle ab} + \Theta H_{ab} + \text{curl } E_{ab} - 4\pi G\text{curl } \pi_{ab} = 3\sigma_{c\langle a}H_{b\rangle}^c - \omega^c\eta_{cd\langle a}H_{b\rangle}^d - \\ 2\dot{u}^c\eta_{cd\langle a}E_{b\rangle}^d + 4\pi G(\sigma^c_{\langle a}\eta_{b\rangle}^cd - 3\omega_{\langle a}q_{b\rangle}). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Y las ecuaciones de constricción son

$$\bar{\nabla}^a \omega_a = \dot{u}^a \omega_a, \quad (2.47)$$

$$\bar{\nabla}^b \sigma_{ab} - \text{curl } \omega_a - \frac{2}{3}\bar{\nabla}_a \Theta + 8\pi G q_a = -2\eta_{abc}\omega^b \dot{u}^c, \quad (2.48)$$

$$\text{curl } \sigma_{ab} + \bar{\nabla}_{\langle a}\omega_{b\rangle} - H_{ab} = -2\dot{u}_{\langle a}\omega_{b\rangle}, \quad (2.49)$$

$$\bar{\nabla}^b E_{ab} + \frac{4\pi G}{3}(\bar{\nabla}^b \pi_{ab} - 2\bar{\nabla}_a \rho + 2\Theta q_a) = \eta_{abc}\sigma^b_d H^{cd} - 3H_{ab}\omega^b + 4\pi G(\sigma_{ab} + 3\eta_{abc}\omega^c)q^b, \quad (2.50)$$

$$\bar{\nabla}^b H_{ab} + 4\pi G[\text{curl } q_a - 2(\rho + p)\omega_a] = 3E_{ab}\omega^b - \eta_{abc}\sigma^b_d E^{cd} - 4\pi G(\eta_{abc}\sigma^b_d \pi^{cd} + \pi_{ab}\omega^b), \quad (2.51)$$

$${}^3R_{\langle ab} = E_{ab} + 4\pi G\pi_{ab} - \frac{1}{3}\Theta(\sigma_{ab} + \omega_{ab}) + \sigma_{c\langle a}\sigma_{b\rangle}^c + \omega_{c\langle a}\omega_{b\rangle}^c - 2\sigma_{c[a}\omega_{b]}^c, \quad (2.52)$$

$${}^3R = 16\pi G\rho - \frac{2}{3}\Theta^2 + \sigma_{ab}\sigma^{ab} - \omega_a\omega^a, \quad (2.53)$$

en donde ρ, p, q_a, π_{ab} son cantidades totales (pueden incluir constante cosmológica Λ).

2.2 Sistema de ecuaciones para la evolución de fluidos no comóviles

En la sección anterior, se desarrollo el formalismo 1+3 y se obtuvieron las ecuaciones tensoriales que gobiernan la evolución de algún sistema dado. Para esto se utiliza un sistema de coordenadas y una métrica dados: una métrica inhomogénea esféricamente simétricas en coordenadas esféricas. Se desarrolla el sistema para poder incluir cualquier cantidad de fluidos, luego se implementara específicamente para dos fluidos sin vorticidad ni tensor magnético de Weyl (considerando uno como fluido perfecto y otro fluido en un marco no-comóvil respecto al anterior) y se reduce de un sistema de cantidades tensoriales a un sistema de cantidades escalares. Todos los cálculos realizados en esta sección se realizaron utilizando SageManifolds 9.1 [33].

Comenzando por la métrica, se tiene una elemento de línea de una métrica inhomogénea esféricamente simétrica en coordenadas esféricas (t, r, θ, φ)

$$ds^2 = -N(t, r)^2 dt^2 + B(t, r)^2 dr^2 + Y(t, r)^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2). \quad (2.54)$$

Los símbolos de Christoffel de la derivada covariante asociada con esta métrica que son distintos de cero son (se omite la dependencia en r y t de los elementos métricos)

$$\begin{aligned}\Gamma_{tt}^t &= \frac{\partial_t N}{N}, \Gamma_{tr}^t = \frac{\partial_r N}{N}, \Gamma_{rr}^t = \frac{B\partial_t B}{N^2}, \Gamma_{\theta\theta}^t = \frac{Y\partial_t Y}{N^2}, \Gamma_{\varphi\varphi}^t = \Gamma_{\theta\theta}^t \sin^2(\theta), \\ \Gamma_{tt}^r &= \frac{N\partial_r N}{B^2}, \Gamma_{tr}^r = \frac{\partial_t B}{B}, \Gamma_{rr}^r = \frac{\partial_r B}{B}, \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{Y\partial_r}{B^2}, \Gamma_{\varphi\varphi}^r = \Gamma_{\theta\theta}^r \sin^2(\theta), \\ \Gamma_{t\theta}^\theta &= \frac{\partial_t Y}{Y} = \Gamma_{t\varphi}^\varphi, \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{\partial_r}{Y} = \Gamma_{r\varphi}^\varphi, \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\cos(\theta)\sin(\theta), \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}.\end{aligned}\quad (2.55)$$

A partir de los símbolos de Christoffel es posible calcular el tensor de curvatura de Riemann y sus contracciones, el tensor y escalar de Ricci

$$\begin{aligned}R &= 2\left(\frac{B^3 N^3 + B^2 N Y^2 (\partial_t)^2 B - B^2 Y^2 \partial_t B \partial_t N + N^2 Y^2 \partial_r B \partial_r N - B N^2 Y^2 (\partial_r)^2 N}{B^3 N^3 Y^2} + \right. \\ &\quad \frac{B^3 N (\partial_t Y)^2 + 2 B^3 N Y (\partial_t)^2 Y - B N^3 (\partial_r Y)^2 - 2 B N^3 Y (\partial_r)^2 Y}{B^3 N^3 Y^2} + \\ &\quad \left. \frac{2(B^2 N Y \partial_t B - B^3 Y \partial_t N) \partial_t Y + 2(N^3 Y \partial_r B - B N^2 Y \partial_r) \partial_r Y}{B^3 N^3 Y^2}\right)\end{aligned}\quad (2.56)$$

obteniendo las componentes del tensor de Einstein

$$G_t^t = -\frac{B^3 N^2 + 2B^2 Y \partial_t B \partial_t Y + B^3 (\partial_t Y)^2 + 2N^2 Y \partial_r B \partial_r Y - B N^2 (\partial_r Y)^2 - 2B N^2 Y (\partial_r)^2 Y}{B^3 N^2 Y^2},\quad (2.57)$$

$$G_r^t = -\frac{2(B\partial_r N \partial_t Y - B N \partial_t \partial_r Y + N \partial_t B \partial_r Y)}{B N^3 Y},\quad (2.58)$$

$$G_t^r = -\frac{2(B\partial_r N \partial_t Y - B N \partial_t \partial_r Y + N \partial_t B \partial_r Y)}{B^3 N Y},\quad (2.59)$$

$$G_r^r = -\frac{B^2 N^3 - 2B^2 Y \partial_t N \partial_t Y + B^2 N (\partial_t Y)^2 + 2B^2 N Y (\partial_t)^2 Y - 2N^2 Y \partial_r N \partial_r Y - N^3 (\partial_r Y)^2}{B^2 N^3 Y^2},\quad (2.60)$$

$$\begin{aligned}G_\theta^\theta &= -\frac{B^2 N Y (\partial_t)^2 B - B^2 Y \partial_t B \partial_t N + N^2 Y \partial_r B \partial_r N - B N^2 Y (\partial_r)^2 N + B^3 N (\partial_t)^2 Y}{B^3 N^3 Y} - \\ &\quad \frac{-B N^3 (\partial_r)^2 Y + (B^2 N \partial_t B - B^3 \partial_t N) \partial_t Y + (N^3 \partial_r B - B N^2 \partial_r N) \partial_r Y}{B^3 N^3 Y},\end{aligned}\quad (2.61)$$

$$G_\varphi^\varphi = G_\theta^\theta.\quad (2.62)$$

Antes de regresar al tensor de Einstein (al dar las ecuaciones de Einstein), es necesario definir las componentes el tensor de energía-momento. Para eso, se toma la siguiente 4-velocidad fundamental

$$u^\mu = \left[\frac{1}{N(t,r)}, 0, 0, 0 \right] \text{ y } u_\mu = g_{\mu\nu} u^\nu = \left[-N(t,r), 0, 0, 0 \right].\quad (2.63)$$

A partir de esta definición, se definen las componentes del tensor de proyección h^μ_ν

$$h^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + u^\mu u_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\quad (2.64)$$

Las componentes de la velocidad relativa y el flujo de calor se definen a partir de funciones escalares $V(t, r)$ y $Q(t, r)$

$$v^\mu = \left[0, \frac{V(t, r)}{B(t, r)^2}, 0, 0\right], \quad v_\mu = \left[0, V(t, r), 0, 0\right], \quad (2.65)$$

$$q^\mu = \left[0, \frac{Q(t, r)}{B(t, r)^2}, 0, 0\right] \text{ y } q_\mu = \left[0, Q(t, r), 0, 0\right]. \quad (2.66)$$

Adicionalmente, se define el tensor base para tensores espaciales, simétricos y sin traza en espaciotiempos Petrov tipo D e^μ_ν [34]

$$e^\mu_\nu = h^\mu_\nu - 3n^\mu n_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.67)$$

en donde $n_\mu = \sqrt{g_{rr}}\delta^r_\mu = [0, B(t, r), 0, 0]$ es el vector espacial normal a las órbitas de $SO(3)$. Con esta definición, se pueden definir los tensores de *shear* y de esfuerzos anisotrópicos en términos de funciones escalares $\Sigma(t, r)$ y $\Pi(t, r)$ respectivamente

$$\sigma^\mu_\nu = \Sigma e^\mu_\nu \text{ y } \pi^\mu_\nu = \Pi e^\mu_\nu. \quad (2.68)$$

Finalmente, se define el tensor energía-momento T^μ_ν para un fluido general

$$T^\mu_\nu = \rho u^\mu u_\nu + q^\mu u_\nu + u^\mu q_\nu + p h^\mu_\nu + \Pi e^\mu_\nu = \begin{pmatrix} -\rho & \frac{Q}{N} & 0 & 0 \\ -\frac{NQ}{B^2} & -2\Pi + p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Pi + p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Pi + p \end{pmatrix}, \quad (2.69)$$

en donde $p = p(t, r)$ y $\rho = \rho(t, r)$. A partir de las ecuaciones (2.6) y (2.14) se obtiene la aceleración \dot{u}_μ

$$\dot{u}_\mu = \left[0, A(t, r), 0, 0\right], \quad \dot{u}^\mu = \left[0, \frac{A(t, r)}{B(t, r)^2}, 0, 0\right], \quad \text{con } A = \frac{\partial_r N}{N}, \quad (2.70)$$

y la expansión H

$$H = \frac{1}{3}\Theta = \frac{Y\partial_t B + 2B\partial_t Y}{3BNY}. \quad (2.71)$$

De igual forma, a partir de (2.15) se obtiene el tensor de "shear" σ^μ_ν

$$\sigma^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\frac{Y\partial_t B - B\partial_t Y}{3BNY} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{Y\partial_t B - B\partial_t Y}{3BNY} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{Y\partial_t B - B\partial_t Y}{3BNY} \end{pmatrix}, \quad \text{por (2.68) } \Sigma = -\frac{Y\partial_t B - B\partial_t Y}{3BNY}. \quad (2.72)$$

Con las componentes del tensor de energía momento definidas, es posible calcular las ecuaciones de Einstein (se calcularon usando $c = 1 = G$)

$$0 = -\frac{8\pi B^3 N^2 Y^2 \rho - B^3 N^2 - 2B^2 Y \partial_t B \partial_t Y - B^3 (\partial_t Y)^2}{B^3 N^2 Y^2} - \frac{-2N^2 Y \partial_r B \partial_r Y + BN^2 (\partial_r Y)^2 + 2BN^2 Y (\partial_r)^2 Y}{B^3 N^2 Y^2}, \quad (2.73)$$

$$0 = -\frac{16\pi B^2 N^3 \Pi Y^2 - 8\pi B^2 N^3 Y^2 p - B^2 N^3 + 2B^2 Y \partial_t N \partial_t Y}{B^2 N^3 Y^2} - \frac{-B^2 N (\partial_t Y)^2 - 2B^2 NY (\partial_t)^2 Y + 2N^2 Y \partial_r N \partial_r Y + N^3 (\partial_r Y)^2}{B^2 N^3 Y^2}, \quad (2.74)$$

$$0 = \frac{8\pi B^3 N^3 \Pi Y + 8\pi B^3 N^3 Y p + B^2 NY (\partial_t)^2 B - B^2 Y \partial_t B \partial_t N}{B^3 N^3 Y} + \frac{N^2 Y \partial_r B \partial_r N - BN^2 Y (\partial_r)^2 N + B^3 N (\partial_t)^2 Y - BN^3 (\partial_r)^2 Y}{B^3 N^3 Y} + \frac{(B^2 N \partial_t B - B^3 \partial_t N) \partial_t Y + (N^3 \partial_r B - BN^2 \partial_r N) \partial_r Y}{B^3 N^3 Y}, \quad (2.75)$$

$$0 = \frac{2(4\pi BN^2 QY + B \partial_r N \partial_t Y - BN \partial_t \partial_r Y + N \partial_t B \partial_r Y)}{B^3 NY}, \quad (2.76)$$

$$0 = -\frac{2(4\pi BN^2 QY + B \partial_r N \partial_t Y - BN \partial_t \partial_r Y + N \partial_t B \partial_r Y)}{BN^3 Y}. \quad (2.77)$$

Las ecuaciones de Einstein son presentadas de la forma $0 = G^\mu_\nu - 8\pi T^\mu_\nu$ con las ecuaciones (t, t) , (r, r) , $(\theta, \theta) = (\varphi, \varphi)$, (r, t) y (t, r) dadas anteriormente en ese mismo orden. A partir de $E^a_b = C^a_{cbd} u^b u^d$ se calculan las componentes del tensor eléctrico de Weyl E^μ_ν

$$E^r_r = -2E^\theta_\theta = -2E^\varphi_\varphi = -\frac{B^3 N^3 + B^2 NY^2 (\partial_t)^2 B - B^2 Y^2 \partial_t B \partial_t N + N^2 Y^2 \partial_r B \partial_r N}{3B^3 N^3 Y^2} - \frac{-BN^2 Y^2 (\partial_r)^2 N + B^3 N (\partial_t Y)^2 - B^3 NY (\partial_t)^2 Y - BN^3 (\partial_t Y)^2}{3B^3 N^3 Y^2} - \frac{BN^3 Y (\partial_r)^2 Y - (B^2 NY \partial_t B - B^3 Y \partial_t N) \partial_t Y - (N^3 Y \partial_r B - BN^2 Y \partial_r N) \partial_r Y}{3B^3 N^3 Y^2}, \quad (2.78)$$

por lo que $E^\mu_\nu = W e^\mu_\nu$. Al tratarse de un espacio-tiempo esféricamente simétrico, es posible definir una masa invariante para cada cascarón esférico de radio $Y(t, r)$: la masa de Misner-Sharp [35], dada por

$$M = \frac{Y}{2} (1 - g^{\mu\nu} \nabla_\mu Y \nabla_\nu Y) = \frac{Y}{2} \left(\frac{(\partial_t Y)^2}{N^2} - \frac{(\partial_r Y)^2}{B^2} + 1 \right). \quad (2.79)$$

Luego, se encuentra una expresión mucho más compacta y en terminos de la masa M del escalar W . Para eso, se realizan distintos procedimientos. Primero, de la ecuación (2.75), se despeja $(\partial_r)^2 N$ y se sustituye en W . Luego, de las ecuaciones (2.74) y (2.73) se despeja $(\partial_t)^2 Y$ y $(\partial_r)^2 Y$ respectivamente y se sustituyen en la expresión de W obtenida en el primer paso. Finalmente, de la ecuación (2.79) se despeja $(\partial_t Y)^2$ y se sustituye en W obteniendo

$$W = -4\pi \Pi - \frac{4}{3} \pi \rho + \frac{M}{Y^3}. \quad (2.80)$$

Teniendo estas ecuaciones, se usan las ecuaciones (2.40) - (2.53) (con $\omega = 0$ y $H_{\mu\nu} = 0$) obteniendo las ecuaciones de evolución

$$0 = 4\pi(3p + \rho) + 6\Sigma^2 + \frac{1}{3}\Theta^2 + \frac{\partial_t\Theta}{N} - \frac{\partial_r A}{B^2} - \frac{A}{B^2} + \frac{A\partial_r B}{B^3} - \frac{2A\partial_r Y}{B^2 Y}, \quad (2.81)$$

$$0 = 6\Pi\Sigma + (p + \rho)\Theta + \frac{2AQ}{B^2} + \frac{\partial_t\rho}{N} - \frac{Q\partial_r B}{B^3} + \frac{\partial_r Q}{B^2} + \frac{2Q\partial_r Y}{B^2 Y}, \quad (2.82)$$

$$0 = -2A\Pi - 2Q\Sigma + \frac{4}{3}Q\Theta + A(p + \rho) - \frac{6\Pi\partial_r Y}{Y} - \frac{\partial_t Q}{N} - 2\partial_r\Pi + \partial_r p, \quad (2.83)$$

$$0 = -4\pi\Pi - \Sigma^2 + \frac{2}{3}\Sigma\Theta + \frac{A^2}{3B^2} + \frac{\partial_t\Sigma}{N} + \frac{\partial_r A}{3B^2} - \frac{A\partial_r B}{B^3} - \frac{A\partial_r Y}{3B^2 Y} + W, \quad (2.84)$$

$$0 = \frac{4}{3}\pi\left(\Pi\Theta - \frac{2AQ}{B^2} + \frac{3\partial_t\Pi}{N} + \frac{Q\partial_r B}{B^3} - \frac{\partial_r Q}{B^2} + \frac{Q\partial_r Y}{B^2 Y}\right) + \frac{\partial_t W}{N} - 4\pi\Sigma(\Pi - p - \rho) + 3\Sigma W + \Theta W. \quad (2.85)$$

Para la ecuación (2.83) se tomó $\frac{\partial_t B}{N} = B(\frac{1}{3}\Theta - 2\Sigma)$ de (2.71) y (2.72) para eliminar un término con $\partial_t B$. De las ecuaciones (2.40) - (2.53) se utiliza únicamente la ecuación (2.53) ya que se tienen otras expresiones que sirven como constricciones.

$$0 = \Sigma^2 - \frac{1}{9}\Theta^2 - \frac{1}{6}({}^3R) + \frac{1}{3}\rho. \quad (2.86)$$

Para esta restricción, es necesario calcular el escalar de Ricci 3R de las hipersuperficies espaciales ortogonales a u^μ . Para esto se puede realizar, esencialmente, de dos formas: utilizando las relaciones de Gauss-Codazzi o calculando dicho escalar directamente con $h_{\mu\nu}$ como métrica y su derivada covariante asociada. Lo más sencillo en SageMath, y lo que se realiza en este trabajo, es la segunda opción. Se definió una subvariedad con métrica $h_{\mu\nu}$ y se calculó 3R con su derivada covariante (dada por (2.7))

$${}^3R = \frac{2}{Y^2} + \frac{4\partial_r B\partial_r Y}{B^3 Y} - \frac{2(\partial_r Y)^2}{B^2 Y^2} - \frac{4(\partial_r)^2 Y}{B^2 Y}. \quad (2.87)$$

Definiendo $\chi = \partial_r Y$ y $K = 1 - \frac{\chi^2}{B^2}$, se obtiene que el escalar de Ricci es

$${}^3R = 2\frac{\partial_r(KY)}{Y^2\chi} \implies \mathcal{K} = \frac{{}^3R}{6}. \quad (2.88)$$

en donde \mathcal{K} es la curvatura espacial. Para completar las ecuaciones de evolución, se requieren ecuaciones para las componentes de la métrica Y , B y para χ . La ecuación de B ya se había obtenido anteriormente para eliminar ciertos términos en (2.83). La ecuación para Y se obtiene, como B , de (2.71) y (2.72)

$$\frac{\partial_t Y}{N} = Y\left(\frac{1}{3}\Theta + \Sigma\right). \quad (2.89)$$

La ecuación de χ se obtiene de tomar la ecuación (t, r) de Einstein (la ecuación (2.77)) y expandirla

$$0 = -8\pi Q - \frac{2\partial_r N\partial_t Y}{N^2 Y} + \frac{2\partial_t\partial_r Y}{NY} - \frac{2\partial_t B\partial_r Y}{BNY}, \quad (2.90)$$

se utiliza la definición de A (de (2.70)), la definición de χ y se sustituyen $\frac{\partial_t Y}{N}$ y $\frac{\partial_t B}{N}$ de sus respectivas ecuaciones para obtener

$$-8\pi Q - 2A\left(\frac{1}{3}\Theta + \Sigma\right) + \frac{2\partial_t \chi}{NY} + 2\left(\frac{1}{3}\Theta - 2\Sigma\right)\frac{\chi}{Y} = 0, \quad (2.91)$$

y finalmente, se multiplica por Y , se divide entre 2 y se despeja $\frac{\partial_t \chi}{N}$,

$$\frac{\partial_t \chi}{N} = 4\pi QY + A\left(\frac{1}{3}\Theta + \Sigma\right)Y + \left(\frac{1}{3}\Theta - 2\Sigma\right)\chi. \quad (2.92)$$

En resumen, definiendo $\dot{f} = \frac{\partial_t f}{N}$ para cualquier cantidad $f(t, r)$, y usando (2.14), se obtiene el sistema de ecuaciones que aparece en [36]

$$\dot{Y} = Y(H + \Sigma), \quad (2.93)$$

$$\dot{B} = B(H - 2\Sigma), \quad (2.94)$$

$$\dot{\chi} = \frac{1}{2}\kappa QY + A(H + \Sigma)Y + (H - 2\Sigma)\chi, \quad (2.95)$$

$$\dot{H} = -H^2 - 2\Sigma^2 - \frac{1}{6}\kappa(\rho + 3p) + \frac{A^2}{B^2} + \frac{\partial_r A}{3B^2} - \frac{A\partial_r B}{B^3} + \frac{2A\chi}{3B^2 Y}, \quad (2.96)$$

$$\dot{\Sigma} = \Sigma^2 - 2H\Sigma + \frac{1}{2}\kappa\Pi - W - \frac{A^2}{B^2} - \frac{\partial_r A}{3B^2} + \frac{A\partial_r B}{B^3} + \frac{A\chi}{3B^2 Y}, \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} \dot{W} + \frac{1}{2}\kappa\dot{\Pi} = & -3(H + \Sigma)W - \frac{1}{2}\kappa(\rho + p)\Sigma - \frac{1}{2}\kappa(H - \Sigma)\Pi - \\ & - \kappa\frac{Q\partial_r B}{6B^3} + \kappa\frac{\partial_r Q}{6B^2} - \kappa\frac{Q\chi}{6B^2 Y} + \kappa\frac{AQ}{3B^2}, \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$\dot{\rho} = -3(\rho + p)H - 2\frac{AQ}{B^2} - 6\Pi\Sigma - 2\frac{Q\chi}{YB^2} - \frac{\partial_r Q}{B^2} + \frac{Q\partial_r B}{B^3}, \quad (2.99)$$

$$\dot{Q} = -3HQ - \partial_r p - A(\rho + p - 2\Pi) + 2\partial_r \Pi + \frac{6\Pi\chi}{Y}, \quad (2.100)$$

en donde se regresa de $G = 1 = c$ a unidades del SI y $\kappa = 8\pi G/c^4$. El sistema se complementa con las constricciones

$$H^2 = \frac{1}{3}\kappa\rho - \mathcal{K} + \Sigma^2, \quad (2.101)$$

$$W = -\frac{1}{6}\kappa\rho - \frac{1}{2}\kappa\Pi + \frac{M}{Y^3}, \quad (2.102)$$

$$\partial_r N = AN, \quad (2.103)$$

en donde a M se le sustituye la ecuación (2.93) resultando en

$$M = \frac{Y}{2}\left[Y^2(H + \Sigma)^2 - \frac{\chi^2}{B^2} + 1\right], \quad (2.104)$$

que corresponde a la masa de Misner-Sharp.

Resolución del sistema y resultados

Para el estudio de multiples fluidos en donde uno o más están fuera del marco comóvil es necesario considerar la transformación que sufre el tensor energía-momento en el marco no comóvil. Considerando la 4-velocidad \tilde{u}^a de un observador moviéndose relativo al observador moviéndose con 4-velocidad u^a y teniendo velocidad relativa v^a respecto a \tilde{u}^a , la transformación entre velocidades es

$$\tilde{u}^a = \gamma(u^a + v^a), \quad \gamma = (1 - v^2)^{-1/2}, \quad (3.1)$$

en donde $u^a v_a = 0$ y $v^2 = g_{ab}v^a v^b$. Definiendo

- $\tilde{\rho} = T_{ab}\tilde{u}^a\tilde{u}^b$
- $\tilde{p} = \frac{1}{3}T_{ab}\tilde{h}^{ab}$
- $\tilde{q}_a = -\tilde{h}^c_a T_{cb}\tilde{u}^b$
- $\tilde{\pi}_{ab} = [\tilde{h}^c_a \tilde{h}^d_b - \frac{1}{3}\tilde{h}_{ab}\tilde{h}^{cd}]T_{cd}$

en donde $\tilde{h}_{ab} = h_{ab} + \gamma^2[v^2 u_a u_b + 2u_{(a} u_{b)} + v_a v_b]$ [37], se obtiene

$$\tilde{\rho} = \rho + \gamma^2[v^2(\rho + p) - 2q_a v^a + \pi_{ab}v^a v^b], \quad (3.2)$$

$$\tilde{p} = p + \frac{1}{3}\gamma^2[v^2(\rho + p) - 2q_a v^a + \pi_{ab}v^a v^b], \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}_a = & \gamma q_a - \gamma \pi_{ab}v^b - \gamma^3[(\rho + p) - 2q_b v^b + \pi_{bc}v^b v^c]v_a - \\ & \gamma^3[v^2(\rho + p) - (1 + v^2)q_b v^b + \pi_{bc}v^b v^c]u_a, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_{ab} = & \pi_{ab} + 2\gamma^2 v^c \pi_{c(a} [u_{b)} + v_{b)}] - 2v^2 \gamma^2 q_{(a} u_{b)} - 2\gamma^2 q_{(a} v_{b)} - \\ & \frac{1}{3}\gamma^2[v^2(\rho + p) + \pi_{cd}v^c v^d]h_{ab} + \\ & \frac{1}{3}\gamma^4[2v^4(\rho + p) - 4v^2 q_c v^c + (3 - v^2)\pi_{cd}v^c v^d]u_a u_b + \\ & \frac{2}{3}\gamma^4[2v^2(\rho + p) - (1 + 3v^2)q_c v^c + 2\pi_{cd}v^c v^d]u_{(a} v_{b)} + \\ & \frac{1}{2}\gamma^2[(3 - v^2)(\rho + p) - 4q_c v^c + 2\pi_{cd}v^c v^d]v_a v_b. \end{aligned} \quad (3.5)$$

En cosmología es usual utilizar múltiples fluidos como fuente en las ecuaciones.

$$T^{ab} = \sum_I T_I^{ab} = \sum_I \left[\rho_I^* u_I^a u_I^b + p_I^* h_I^{ab} + 2q_I^{*(a} u_I^{b)} + \pi_I^{*ab} \right], \quad (3.6)$$

en donde las cantidades con asterisco son las cantidades intrínsecas, medidas en el respectivo sistema de referencia propio I . Para cada fluido se utiliza una transformación idéntica a la transformación dada anteriormente. Es de utilidad contrar con las ecuaciones de conservación en el marco comóvil con u^a en términos de la velocidad relativa de cada fluido respecto a este marco, considerando que se tienen las ecuaciones de evolución y constricciones en ese sistema, por lo que las transformaciones para cada fluido es la inversa a la transformación dada anteriormente

$$u^a = \gamma_I(u_I^a + \hat{v}_I^a), \quad \hat{v}_I^a = -\gamma_I(v_I^a + v_I^2 u^a). \quad (3.7)$$

Y tomando $\rho_I = T_I^{ab} u_a u_b$, $p_I = \frac{1}{3} T_I^{ab} h_{ab}$, $q_I^a = -T_I^{ab} u_b - \rho_I u^a$ y $\pi_I^{ab} = T_I^{cd} h_c^a h_d^b - p_I h^{ab}$ se obtienen las ecuaciones para las cantidades dinámicas medidas en el marco u^a

$$\rho_I = \rho_I^* + [\gamma_I^2 v_I^2 (\rho_I^* + p_I^*) + 2\gamma_I q_I^{*a} v_{Ia} + \pi_I^{*ab} v_{Ia} v_{Ib}], \quad (3.8)$$

$$p_I = p_I^* + \frac{1}{3} [\gamma_I^2 v_I^2 (\rho_I^* + p_I^*) + 2\gamma_I q_I^{*a} v_{Ia} + \pi_I^{*ab} v_{Ia} v_{Ib}], \quad (3.9)$$

$$q_I^a = q_I^{*a} + (\rho_I^* + p_I^*) v_I^a + [(\gamma_I^2 - 1) q_I^{*a} + \gamma_I^2 v_I^2 (\rho_I^* + p_I^*) v_I^a + \gamma_I q_I^{*b} v_{Ib} v^a - \gamma_I q_I^{*b} v_{Ib} u^a + \pi_I^{*ab} v_{Ib} - \pi_I^{*ab} v_{Ib} v_{Ic} u^a], \quad (3.10)$$

$$\pi_I^{ab} = \pi_I^{*ab} + [\gamma_I^2 v_I^2 (\rho_I^* + p_I^*) v_I^{\langle a} v_I^{b \rangle} - 2u^{\langle a} \pi_I^{*b \rangle c} v_{Ic} + \pi_I^{*bc} v_{Ib} v_{Ic} u^a u^b - \frac{1}{3} \pi_I^{*cd} v_{Ic} v_{Id} h^{ab} - 2\gamma_I q_I^{*c} v_I^c u^{\langle a} v_I^{b \rangle} + 2\gamma_I v_I^{\langle a} q_I^{*b \rangle}]. \quad (3.11)$$

En el caso de fluidos perfectos barotrópicos (como materia bariónica, materia oscura (CDM), radiación) las transformaciones son

$$\rho_I = \gamma_I^2 (1 + \omega_I v_I^2) \rho_I^*, \quad p_I = [\omega_I + \frac{1}{3} \gamma_I^2 v_I^2 (1 + \omega_I)] \rho_I^*, \quad (3.12)$$

$$q_I^a = \gamma_I^2 (1 + \omega_I) \rho_I^* v_I^a, \quad \pi_I^{ab} = \gamma_I^2 (1 + \omega_I) \rho_I^* v_I^{\langle a} v_I^{b \rangle},$$

en donde ω_I está dado por la ecuación de estado $p_I^* = \omega_I \rho_I^*$.

3.1 Ecuaciones para bariones y CDM

El problema estudiado en esta tesis es el de un fluido de polvo de CDM en el marco comóvil y un fluido de polvo de bariones en un marco propio que se desplaza a velocidad v^μ respecto de la materia oscura y dadas las ecuaciones de transformación anteriores y la posibilidad de expresar estas cantidades en términos de funciones escalares, se tiene lo siguiente

$$\rho = \rho_{CDM} + \gamma^2 \rho_b^*, \quad p = p_b = \frac{1}{3} \gamma^2 \frac{V^2}{B^2} \rho_b^*, \quad (3.13)$$

$$Q = Q_b = \gamma^2 \rho_b^* V, \quad \Pi = \Pi_b = -p.$$

Debido a la relación entre Q y V (definidos en (2.66) y (2.65)), se pueden expresar p y Π en términos de Q

$$p = \frac{1}{3} \frac{Q^2}{\gamma^2 \rho_b^* B^2}. \quad (3.14)$$

Además de las ecuaciones anteriores, una consecuencia de utilizar fluidos de polvo se revela en la componente métricas N y su derivada radial por $A = 0$ y $N = 1$. Finalmente, para obtener

las ecuaciones finales a evolucionar se definen las siguientes variables adimensionales (utilizando las cantidades H_* y l_* , el parámetro de Hubble inicial y l_* el tamaño característico de la sobredensidad)

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= \frac{Y}{l_*}, \quad \xi = \frac{r}{l_*}, \quad \mathcal{S} = \frac{\Sigma}{H_*}, \quad \mathcal{W} = \frac{W}{H_*^2}, \\ \mathcal{H} &= \frac{H}{H_*}, \quad \mathcal{P} = \frac{\kappa p}{3H_*^2}, \quad \mu = \frac{\kappa \rho}{3H_*^2}, \quad \mathcal{Q} = \frac{\kappa Q}{3H_*^2}, \quad \mathcal{P} = \frac{\kappa \Pi}{3H_*^2}, \\ \mathcal{M} &= \frac{M}{H_*^2 l_*^3}, \quad \chi = \partial_\xi \mathcal{Y}, \quad \mathcal{K} = \frac{\mathcal{K}}{H_*^2}, \quad \lambda = \frac{\Lambda}{3H_*^2} \text{ y } \alpha = \frac{1}{H_* l_*}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Se define entonces una nueva derivada temporal adimensionalizada con H_* dada por $\dot{\Psi} = \dot{\Psi}/H_*$ para cualquier cantidad Ψ . Agregando la constante cosmológica Λ a las ecuaciones (2.93) - (2.100) y sus constricciones (2.101) - (2.104) se tienen las ecuaciones de evolución adimensionales dadas por

$$\dot{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y}(\mathcal{H} + \mathcal{S}), \quad (3.16)$$

$$\dot{B} = B(\mathcal{H} - 2\mathcal{S}), \quad (3.17)$$

$$\dot{\chi} = \frac{3}{2\alpha} \mathcal{Q} \mathcal{Y} + (\mathcal{H} - 2\mathcal{S}) \chi, \quad (3.18)$$

$$\dot{\mathcal{H}} = -\mathcal{H}^2 - 2\mathcal{S}^2 - \frac{1}{2}(\mu_{\text{CDM}} + \mu_b + 3\mathcal{P}) + \lambda, \quad (3.19)$$

$$\dot{\mathcal{S}} = \mathcal{S}^2 - 2\mathcal{H}\mathcal{S} + \frac{3}{2}\mathcal{P} - \mathcal{W}, \quad (3.20)$$

$$\dot{\mu}_{\text{CDM}} = -3(\mu_{\text{CDM}} + \mathcal{P})\mathcal{H}, \quad (3.21)$$

$$\dot{\mu}_b = -3(\mu_b + \mathcal{P})\mathcal{H} - 6\mathcal{P}\mathcal{S} - 2\alpha \frac{\mathcal{Q}\chi}{YB^2} - \frac{\alpha \partial_\xi \mathcal{Q}}{B^2} + \frac{\alpha \mathcal{Q} \partial_\xi B}{B^3}, \quad (3.22)$$

$$\dot{\mathcal{Q}} = -3\mathcal{H}\mathcal{Q} - \alpha \partial_\xi \mathcal{P} + 2\alpha \partial_\xi \mathcal{P} + \frac{6\alpha \mathcal{P}\chi}{\mathcal{Y}}, \quad (3.23)$$

y las constricciones adimensionales

$$\mathcal{H}^2 = \mu_{\text{CDM}} + \mu_b + \lambda - \mathcal{K} + \mathcal{S}^2, \quad (3.24)$$

$$\mathcal{W} = -\frac{1}{2}(\mu_{\text{CDM}} + \mu_b + \lambda) - \frac{3}{2}\mathcal{P} + \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{Y}^3}, \quad (3.25)$$

con la masa adimensional

$$\mathcal{M} = \frac{\mathcal{Y}}{2} \left[\mathcal{Y}^2 (\mathcal{H} + \mathcal{S})^2 + \alpha \left(1 - \frac{\chi^2}{B^2} \right) \right]. \quad (3.26)$$

Para la integración del sistema se escribió un código en python para resolverlo numéricamente utilizando el método de líneas descrito en el apéndice.

3.2 Caso LTB: CDM y Bariones Comoviles.

El primer caso a estudiar es una configuración esférica de un *void* compuesto por CDM y bariones de polvo con un fondo Λ CDM plano. Las condiciones iniciales (a un $z = 100$)¹⁵ se obtienen en

¹⁵Se escoge este z ya que numéricamente se requiere que las constricciones se estabilizen con el paso del tiempo.

parte a partir de las condiciones de fondo al día de hoy ($z = 0$) a través de la ecuación (1.27). Las condiciones de fondo para $z = 0$ [38] son

$$H_0 = 67.40 \frac{km}{sMpc}, \quad \Omega_{CDM0} = 0.2642, \quad \Omega_{b0} = 0.0493, \quad (3.27)$$

$$\Omega_{k0} = 0 \quad \text{y} \quad \Omega_{\Lambda 0} = 1 - \Omega_{CDM0} - \Omega_{b0}.$$

Las densidades fraccionales Ω se calculan utilizando las siguientes ecuaciones

$$\Omega_{\Lambda i} = \frac{\Omega_{\Lambda 0} H_0^2}{H_i^2}, \quad \Omega_{CDMi} = \frac{\Omega_{mi} \Omega_{CDM0}}{\Omega_{m0}} \quad \text{y} \quad \Omega_{bi} = \frac{\Omega_{mi} \Omega_{b0}}{\Omega_{m0}}, \quad (3.28)$$

en donde $\Omega_{mi} = 1 - \Omega_{\Lambda i}$ y $\Omega_{m0} = \Omega_{b0} + \Omega_{CDM0}$. Obteniendo los valores de fondo iniciales para $z = 100$

$$H_i = 38305.50 \frac{km}{sMpc}, \quad \Omega_{CDMi} = 0.8427, \quad \Omega_{bi} = 0.1573, \quad (3.29)$$

$$\text{y} \quad \Omega_{\Lambda i} = 2.1254 \times 10^{-6}.$$

El tamaño característico de la inhomogeneidad l_* se toma tal que $\alpha = 1$, esto resulta en un tamaño físico inicial de la inhomogeneidad de $Y \sim 0.6Mpc$. Para las condiciones iniciales del *void* se toman perfiles iniciales de densidad y curvatura gaussianos dados por

$$\mu_{CDMi} = \Omega_{CDMi} \left(1 - 0.01 e^{-\left(\frac{r}{0.03}\right)^2} \right), \quad (3.30)$$

$$\mu_{bi} = \Omega_{bi} \left(1 - 0.01 e^{-\left(\frac{r}{0.03}\right)^2} \right) \quad \text{y} \quad K_i = 0.05 r^2 e^{-\left(\frac{r}{0.03}\right)^2},$$

en donde se utiliza el perfil de K_i para calcular 3R a partir de la ecuación (2.88) y finalmente obtener un perfil de \mathcal{K} . La malla radial (ver apéndice para el método de líneas) se toma desde $\xi_0 = 0$ hasta $\xi_n = 0.2$ (que corresponde a un radio físico de $Y \sim 1.6Mpc$). Imágenes de los perfiles se ven en las figuras 3.1 a 3.3.

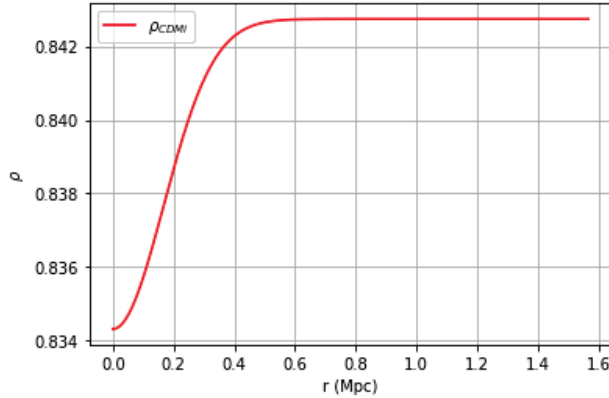


Figura 3.1: Perfil inicial de densidad de CDM.

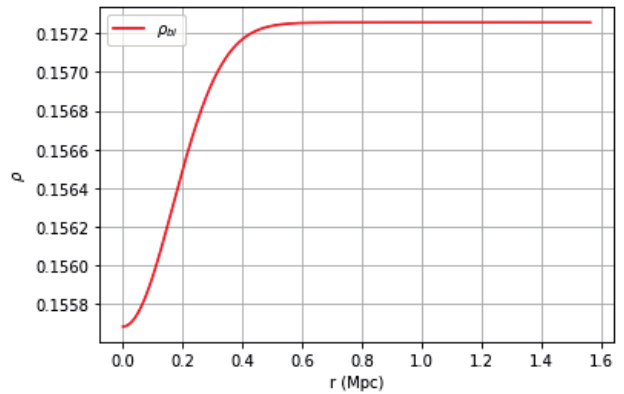


Figura 3.2: Perfil inicial de densidad de bariones.

A partir de los perfiles iniciales de densidad y curvatura se definieron las condiciones iniciales de cada uno de las variables del sistema¹⁶. Inicialmente se define $\mathcal{Y}_i = \xi$ por lo que $\chi_i = 1$ en

¹⁶En estas gráficas se utiliza r como radio en vez de Y ya que inicialmente $\mathcal{Y}_i = \xi$ y por tanto $Y = r$.

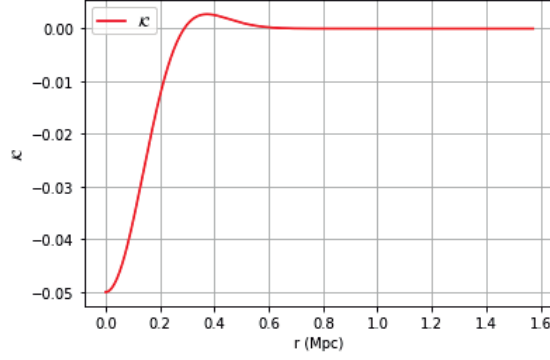


Figura 3.3: Perfil inicial de curvatura.

todos los puntos de la malla. El perfil inicial de expansión \mathcal{H}_i se obtiene a partir de la constricción hamiltoniana e inicialmente se considera $\mathcal{S}_i = 0$ y con esto se cubren todas las condiciones iniciales. Las condiciones de frontera vienen codificadas en el sistema de ecuaciones considerando al punto inicial de la malla $\xi_0 = 0$ como FLRW y el punto final de la malla $\xi_n = 0.2$ se deja libre para evitar oscilaciones que reboten y se disipen en el fondo. Al integrar se obtuvo la evolución¹⁷ de δ y velocidad de expansión $\mathcal{Y}(\mathcal{H}(\xi) - \mathcal{H}(0.2))$ mostradas en las figuras 3.4 y 3.5. La figura 3.5 muestra como evoluciona la expansión, se tiene una parte positiva que representa expansión y parte negativa que representa colapso correspondiendo a las partes del *void* (parte negativa) y de la sobredensidad (parte positiva) de la figura 3.4.

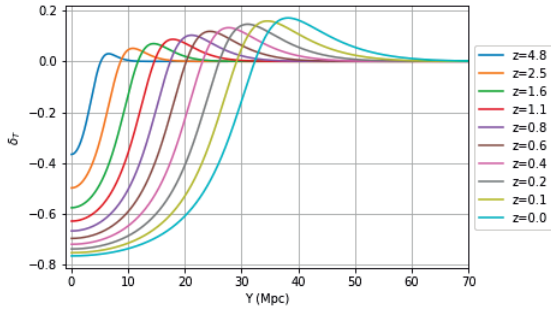


Figura 3.4: Evolución del contraste de densidad δ de CDM.

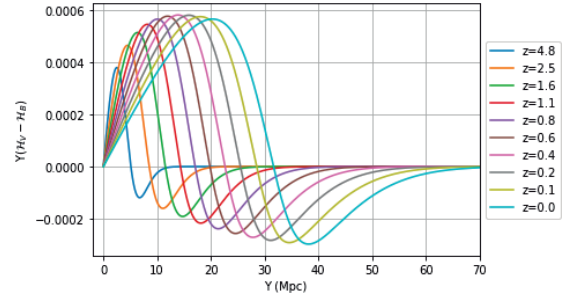


Figura 3.5: Evolución de $\mathcal{Y}(\mathcal{H}(\xi) - \mathcal{H}(0.2))$.

En estas últimas figuras se observa la evolución temporal de los contrastes de densidad y, aunque inicialmente sólo se tiene una inhomogeneidad de void (se observa en los perfiles iniciales), se forma una sobredensidad debido al perfil de curvatura extrínseca \mathcal{K} inicial. Se alcanza a observar que la evolución de la CDM y los bariones es idéntica, lo cuál era de esperarse al ser comoviles. Así mismo, se alcanza a observar el crecimiento de ambas inhomogeneidades desde $Y \sim 0.6 Mpc$ (para el *void* inicial) hasta alcanzar un valor total (*void* + sobredensidad) de $Y \sim 60 Mpc$. Finalmente, se observa claramente que las inhomogeneidades aumentan su amplitud considerablemente a lo largo de la evolución llegando a valores de $\delta \sim -0.8$ en el mínimo y $\delta \sim 0.2$ en el máximo (nótese también que el *void* se achata con el paso del tiempo). Las am-

¹⁷Se obtiene la evolución para todas las variables pero las relevantes son las mencionadas aquí.

plitudes observadas del contraste de densidad dan una pista de la necesidad de ir más allá de la descripción perturbativa ya que son cercanas a $|\delta| = 1$.

Para calcular la función de crecimiento (1.64), primero, se considera al *void* como la sección del perfil (negativa) de δ que va desde el origen ($Y = 0$) hasta el punto de cruce con el cero, es decir cuando $\delta = 0$ y la sobredensidad emergente desde dicho cruce a cero hasta el punto en donde se hace cero nuevamente. Con el *void* y la sobredensidad definidas, se toma el promedio radial de cada una de las configuraciones y se define a los promedios como $D_+ = \delta_p/\delta_0$ ya sea para CDM o bariones. Se utiliza a la función métrica B evaluada en el fondo como el factor de escala a ya que ese es su valor de convergencia al fondo FLRW plano. Se obtienen las figuras 3.6 y 3.7

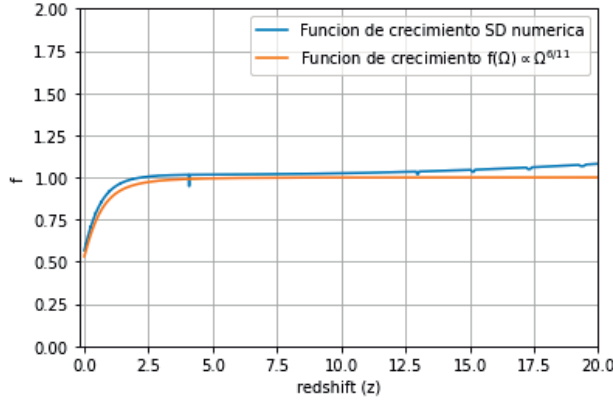


Figura 3.6: Función de crecimiento f para la sobredensidad emergente. Nótese la aparición de ciertos picos en la función numérica que tienen un origen numérico al realizar la derivada logarítmica como se explica en la discusión de resultados. Este fenómeno se observa y tiene el mismo origen en figuras posteriores.

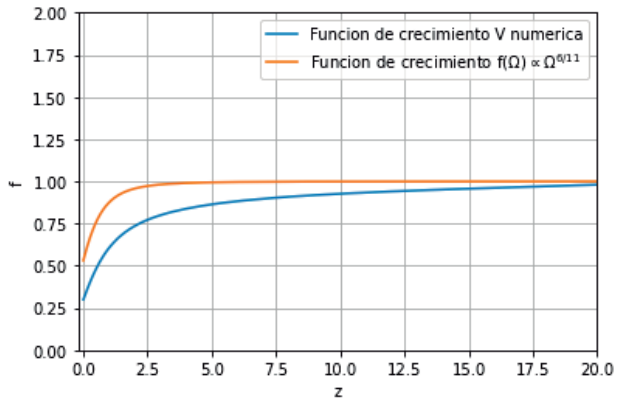


Figura 3.7: Función de crecimiento f para el *void*.

En ambas figuras se compara con la función f_1 dada por la ecuación (1.67). Se observa claramente en ambos casos (ya sea la sobredensidad o el *void*) la evolución de f_1 para bariones y CDM es idéntica. En el caso de la sobredensidad se observa además un mejor ajuste con (1.67), especialmente llegando a valores de z más bajos mientras que en el caso del *void*, en los z bajos se despega más. Mientras que en $z = 0$ el crecimiento numérico de la sobredensidad tiene un valor muy cercano al predicho por (1.67), de ~ 0.50 , el crecimiento numérico del *void* tiene un valor de ~ 0.25 .

En las figuras 3.8 y 3.9 se graficó la diferencia porcentual entre la f calculada numéricamente y la de (1.67) para ilustrar que tanto difieren. En el caso de la configuración de *void*, la menor diferencia porcentual ocurre en $z = 20$, comenzando muy cercana a cero y va subiendo lentamente hasta que alrededor de $z = 5$ comienza a subir más abruptamente, terminando en un valor mayor a 40%. En el caso de la sobredensidad emergente, la diferencia porcentual entre las funciones de crecimiento de perturbaciones lineales y numérica nunca llega a 10% y sus valores más bajos se encuentran aproximadamente entre $z = 12.5$ y $z = 2.5$.

Finalmente, la figura 3.10 se muestra la constrictión hamiltoniana dada en la ecuación (3.24) para distintos z comenzando por $z = 20$. Esto proporciona una medida de cómo los datos satisfacen dicha constrictión por cada paso de integración. Se observa en la gráfica que en general están prácticamente en cero, lo que significa que la constrictión hamiltoniana se cumple dentro de un rango suficientemente pequeño. La excepción siendo en la región $< 0.4Mpc$ en donde se

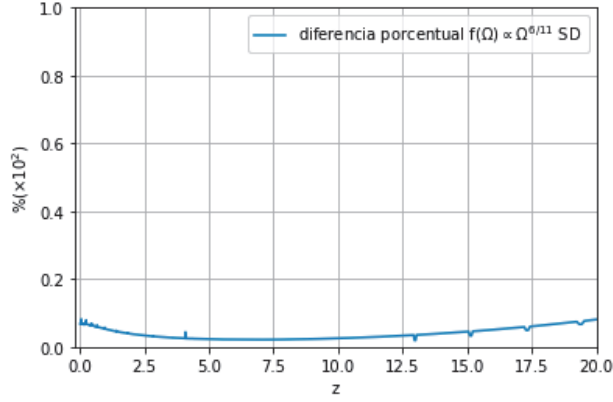


Figura 3.8: Diferencia porcentual entre f numérica y $f(\Omega)$ para la sobredensidad emergente.

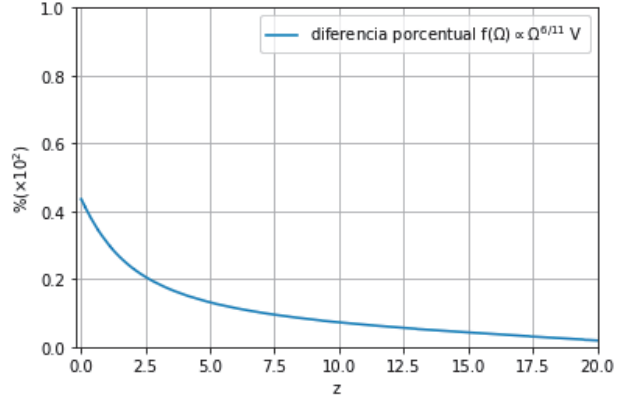


Figura 3.9: Diferencia porcentual entre f numérica y $f(\Omega)$ para el void.

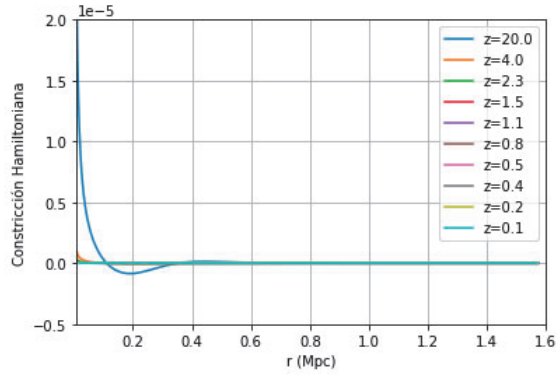


Figura 3.10: Constricción hamiltoniana para distintos z .

desvía del 0 con mayor magnitud pero no de forma significativa y sólo para tiempos tempranos (de $z = 20$).

3.3 CDM y Bariones con velocidad relativa entre ellos.

El segundo caso estudiado consiste en introducir un perfil de velocidad relativa entre ambas componentes de polvo y así tener una componente no comovil. Se utilizaron las mismas condiciones iniciales que en el caso LTB más el siguiente perfil de velocidad

$$V_i = V_c r^2 e^{-\left(\frac{r-0.01}{0.025}\right)^2}. \quad (3.31)$$

Además del perfil de velocidad, otro cambio de las condiciones iniciales es tomar un perfil de densidad de bariones homogéneo $\mu_{bi} = \gamma_i^2 \Omega_{bi}$ (la homogeneidad es en su sistema de referencia, en el sistema de referencia de la CDM el perfil de bariones no se ve del todo homogéneo debido a la γ_i^2 ; las desviaciones son del orden de 10^{-8}), esto para evidenciar claramente el hecho de que la velocidad relativa tiene un efecto sobre la evolución de la densidad de bariones inicialmente homogénea llevándola a ser inhomogénea. Se presentan 3 distintos casos: cuando $V_c = 0.5$, $V_c = 1$ y

$V_c = 2.5$ correspondientes a $V_{max} = 71.1821 km/s$, $V_{max} = 142.3608 km/s$ y $V_{max} = 355.9097 km/s$ respectivamente derivadas de consideraciones de velocidad relativa del orden de la velocidad peculiar observada en galaxias respecto de la expansión homogénea [39]; esto genera perfiles como el mostrado en la figura 3.11.

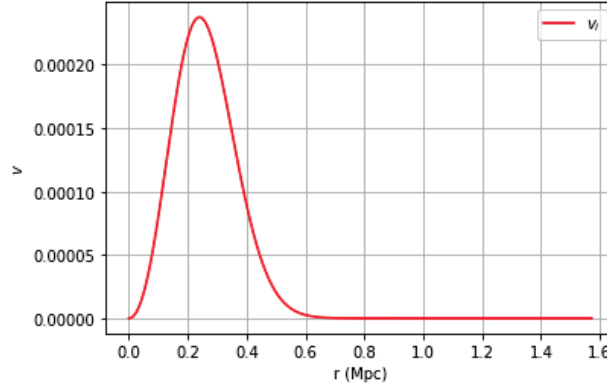


Figura 3.11: Perfil inicial de velocidad relativa con $V_c = 0.5$, correspondiente a $V_{max} = 71.1821 km/s$.

Los resultados para todas las cantidades se muestran en el sistema propio de CDM. La evolución temporal de cada contraste de densidad es similar a la obtenida en el caso LTB. Pero al comparar los perfiles finales se observan diferencias entre los bariones y CDM. Los perfiles finales dados en las figuras figuras 3.12 - 3.14 muestran como la velocidad relativa entre las componentes de materia ejerce una influencia significativa en la evolución.

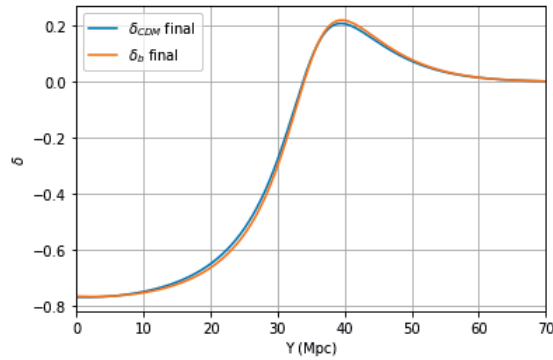


Figura 3.12: Perfiles finales de δ de bariones (amarillo) y CDM (azul) para $V_c = 0.5$.

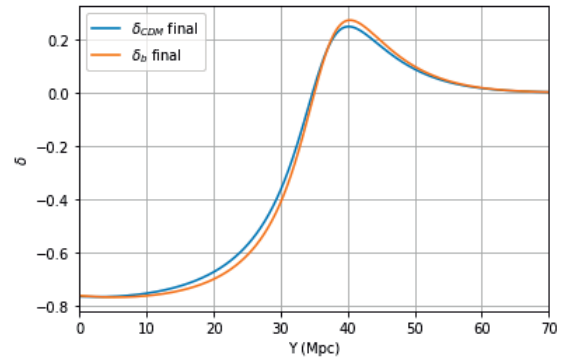


Figura 3.13: Perfiles finales de δ de bariones (amarillo) y CDM (azul) para $V_c = 1$.

En la figura 3.12 se muestra una evolución muy similar entre la materia oscura y los bariones (los perfiles están muy pegados entre ellos) debido a que la velocidad es muy baja. Conforme se considera una velocidad relativa más alta, se observa en la figura 3.13 que los perfiles ya se despegan notoriamente en la región entre $Y \sim 10 Mpc$ y $Y \sim 50 Mpc$ y finalmente para la velocidad más alta considerada en la figura 3.14 se despegan aún más notoriamente. Adicionalmente, conforme crece la velocidad relativa se observa un aplanamiento de la sección de *void* así como un ligero incremento en la amplitud y en la sección de la sobredensidad emergente se nota un aumento de la amplitud considerable (de $\delta \sim 0.2$) y un estrechamiento del pico.

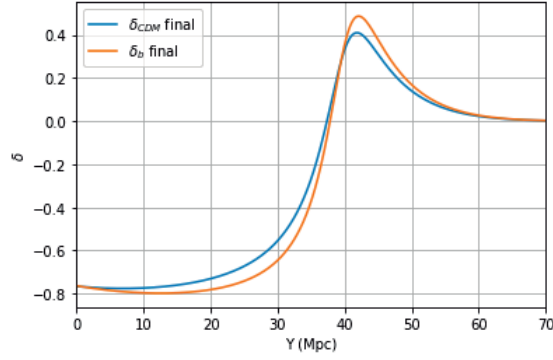


Figura 3.14: Perfiles finales de δ de bariones (amarillo) y CDM (azul) para $V_c = 2.5$.

Igualmente que en el caso LTB, se obtuvo la función de crecimiento para las configuraciones de *void* y sobredensidad con sus respectivas diferencias porcentuales para cada velocidad. Dichas gráficas se encuentran en las figuras [3.15](#) - [3.26](#).

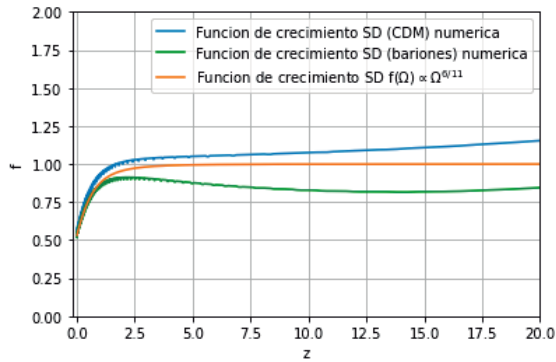


Figura 3.15: Función de crecimiento f para para la sobredensidad en el caso de $V_c = 0.5$.

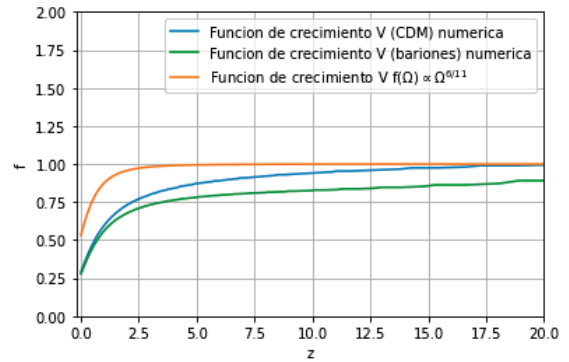


Figura 3.16: Función de crecimiento f para el *void* en el caso de $V_c = 0.5$.

De igual forma que en los perfiles de δ , la introducción de un perfil de velocidad relativa causa la separación del comportamiento entre los bariones y la materia oscura. En el caso de una velocidad relativa baja (en este caso con $V_c = 0.5$ o $V_{max} = 71.1821 km/s$), la separación en el comportamiento no es tan pronunciada (como era de esperarse) en comparación con velocidades más altas. En el caso de la sobredensidad (figura [3.15](#)) la función de crecimiento numérica de la materia oscura evoluciona por encima de [\(1.67\)](#) mientras que los bariones evolucionan por debajo ambas acercándose a la función lineal conforme z se acerca a cero.

En contraste, la función de crecimiento del *void* tanto de bariones como de CDM, evoluciona por debajo de la función dada por perturbaciones lineales y, contrario a la sobredensidad, en $z = 20$ empiezan más cerca y se van alejando cada vez más con $z = 0$ el punto más lejando. Los bariones evolucionan por debajo de la materia oscura a todo tiempo pero se acercan en *redshifts* bajos ($z < 2.5$). Lo descrito anteriormente se ve claramente en las figuras [3.17](#) y [3.18](#). En el caso de la sobredensidad, ni la materia oscura ni los bariones difieren de [\(1.67\)](#) en más de 20% y se nota un máximo (de 18.41%) en $z = 14.28$ para la f_1 de los bariones (información contenida en la tabla [3.1](#)).

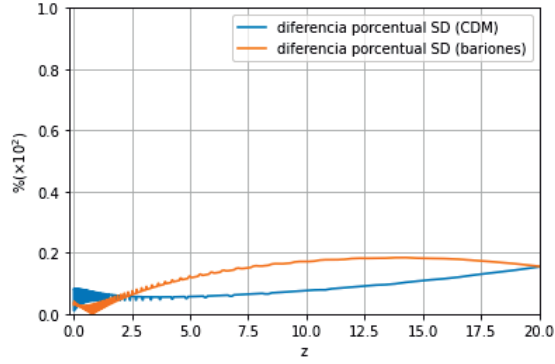


Figura 3.17: Diferencia porcentual entre f numérica y $f(\Omega)$ para la sobredensidad en el caso de $V_c = 0.5$.

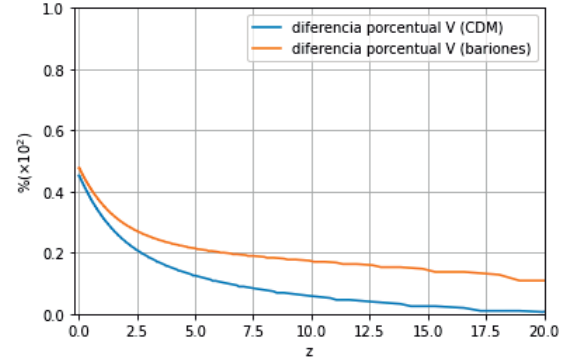


Figura 3.18: Diferencia porcentual entre f numérica y $f(\Omega)$ para el *void* en el caso de $V_c = 0.5$.

La diferencia porcentual entre funciones de crecimiento del *void* crecen, con la de bariones siendo siempre mayor a la de CDM y pegándose conforme z decae y superando (ambas) una diferencia porcentual de 40%.

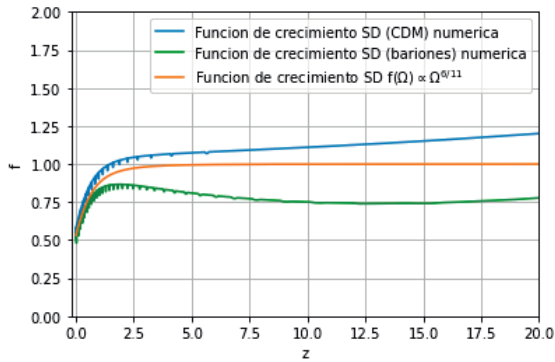


Figura 3.19: Función de crecimiento f para la sobredensidad en el caso de $V_c = 1$.

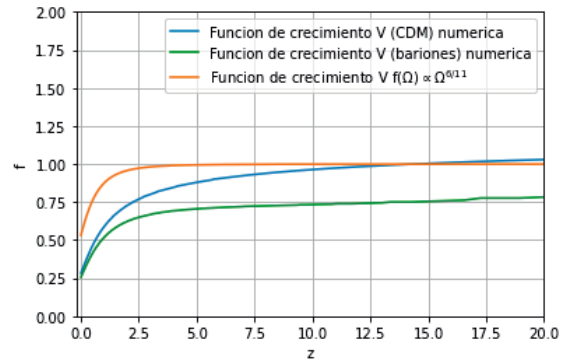


Figura 3.20: Función de crecimiento f para el *void* en el caso de $V_c = 1$.

Cuando se considera una velocidad relativa media ($V_c = 1$ o $V_{max} = 142.3608 km/s$), la separación en el comportamiento entre bariones y CDM es más pronunciada a comparación del caso de la velocidad baja. Para la sobredensidad (figura 3.19), la función de crecimiento numérica de la materia oscura también evoluciona por encima de (1.67), mientras que los bariones evolucionan por debajo ambas acercándose a la función lineal conforme z se acerca a cero. Sin embargo, a diferencia del caso anterior, existe una diferencia mayor observable entre estas funciones numéricas y la función analítica (1.67). En el caso del *void* la materia oscura evoluciona por encima de la función de crecimiento dada por perturbaciones lineales en $z > 15$.

La diferencia porcentual de este caso se grafica en las figuras 3.21 y 3.22. Ahora los bariones difieren de (1.67) en más de 20% entre $z = 5$ y $z = 20$, nuevamente se nota un máximo (de 26.12%) en $z = 12.62$. En el caso del *void* la diferencia porcentual de los bariones crece siempre por encima de un valor de 20% y siendo siempre mayor a la de CDM, pegándose conforme z decae y superando (ambas) una diferencia porcentual de 40% e incluso, llegando a $\sim 50\%$.

El último caso estudiado es con una velocidad alta ($V_c = 2.5$ o $V_{max} = 355.9097 km/s$) y es

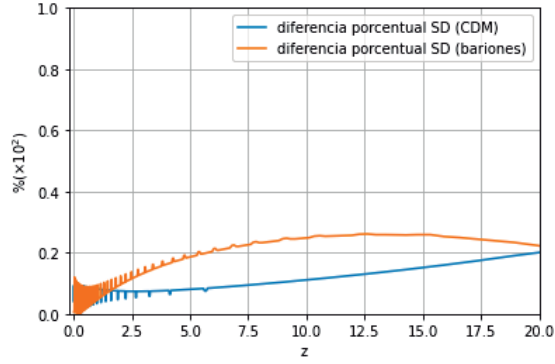


Figura 3.21: Diferencia porcentual entre f numérica y $f(\Omega)$ para la sobredensidad en el caso de $V_c = 1$.

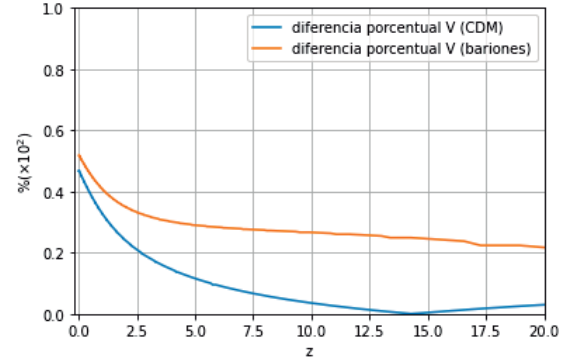


Figura 3.22: Diferencia porcentual entre f numérica y $f(\Omega)$ para el *void* en el caso de $V_c = 1$.

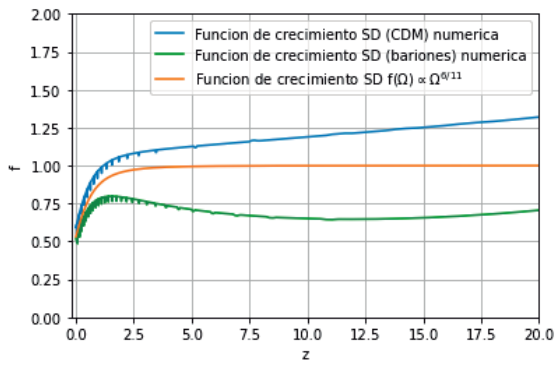


Figura 3.23: Función de crecimiento f para la sobredensidad en el caso de $V_c = 2.5$.

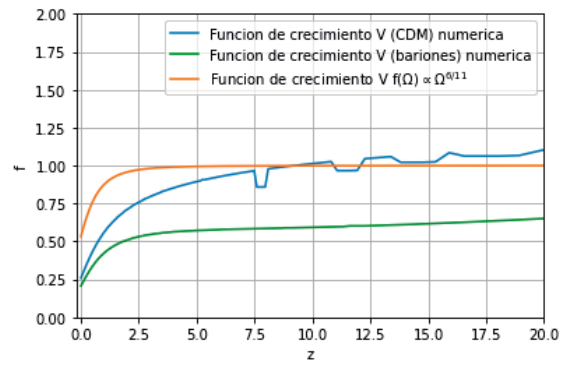


Figura 3.24: Función de crecimiento f para el *void* en el caso de $V_c = 1$.

donde se nota el cambio más pronunciado al caso de velocidad relativa 0. Se siguen las mismas características de evolución en la f_1 que la descrita en los casos anteriores pero con un efecto más pronunciado. En el caso del *void*, la materia oscura en $z \gtrsim 8$ tiene su evolución por encima de (1.67) mientras que para $z \lesssim 8$ evoluciona por debajo, como en los casos anteriores.

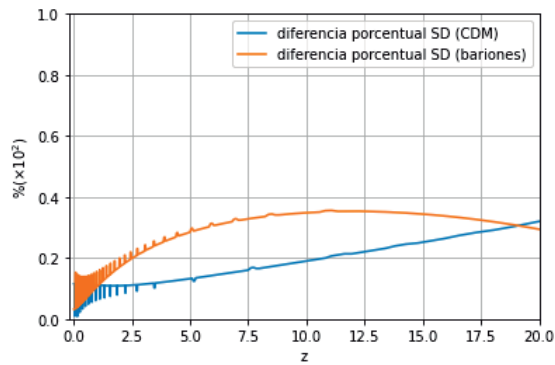


Figura 3.25: Diferencia porcentual entre f numérica y $f(\Omega)$ para la sobredensidad en el caso de $V_c = 2.5$.

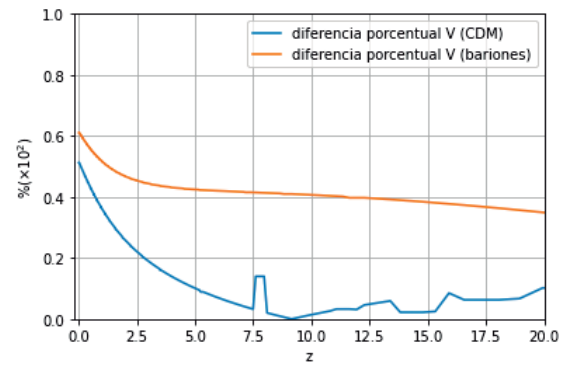


Figura 3.26: Diferencia porcentual entre f numérica y $f(\Omega)$ para el *void* en el caso de $V_c = 2.5$.

La diferencia porcentual en las figuras 3.25 y 3.26 ahora es notoriamente mayor en ambos casos, con la de bariones acercándose a una diferencia de 40%. En el caso del *void* la diferencia porcentual de los bariones sobrepasa el 40% en $z \sim 15$ e incluso, en $z = 0$ llega a sobrepasar una diferencia de 60%, la evolución entre bariones y CDM ya no se pega tanto en *redshifts* bajos, teniendo una separación de $\sim 5\%$ en $z = 0$.

V_c	V_{max} [km/s]	Dif. porcentual a $z = 10.11$ [%]	Dif. porcentual máx. [%]	z de máxima
0.5	71.1821	17.12	18.41	14.28
1	142.3608	24.89	26.12	12.62
2.5	355.9097	34.88	35.59	11.07

Tabla 3.1: Diferencias porcentuales y los z a los que se encuentran para cada caso de velocidad relativa considerado.

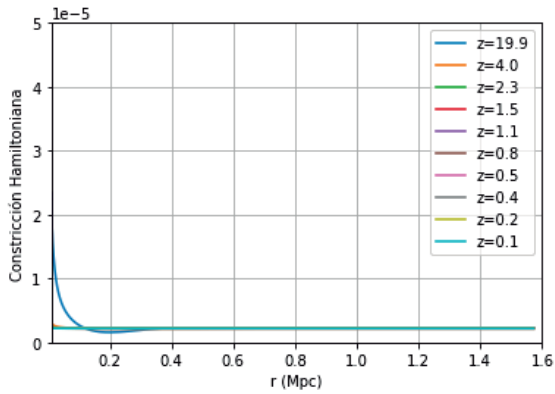


Figura 3.27: Constricción hamiltoniana para distintos z en el caso de $V_c = 0.5$.

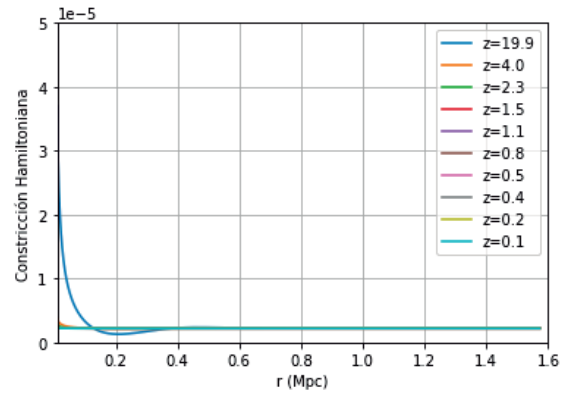


Figura 3.28: Constricción hamiltoniana para distintos z en el caso de $V_c = 1$.

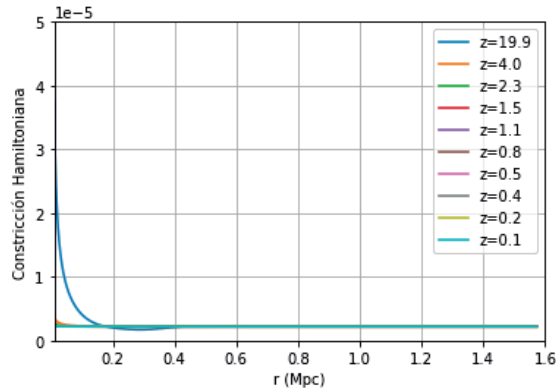


Figura 3.29: Constricción hamiltoniana para distintos z en el caso de $V_c = 2.5$.

De igual forma que para el caso LTB, se presenta en las figuras 3.27 - 3.29 la constricción hamiltoniana de la ecuación (3.24) para cada uno de los perfiles de velocidad relativa utilizados. Dichas

figuras presentan un comportamiento análogo a la figura 3.10 para el caso LTB. La constricción hamiltoniana se cumple a una precisión mayor a 1 parte en 10^5 ; en particular, esto sucede en los *redshifts* bajos en donde ocurren las oscilaciones en las gráficas de la función de crecimiento y de la misma forma, que en el caso LTB, no representan una desviación de la solución física.

Discusión y conclusiones

4.1 Recapitulación

A lo largo de este trabajo se ha examinado la formación de estructuras con un perfil de densidad correspondiente a un *void*. Se comenzó por dar un breve repaso de las bases necesarias para dicho estudio: la relatividad general y la cosmología estandar. Se describieron también dos formas distintas para el estudio de formación de estructuras. Primero, la teoría de perturbaciones lineales, trata pequeñas desviaciones de un fondo cosmológico homogéneo e isotrópico dado por una métrica FLRW dando ecuaciones lineales para la evolución de inhomogeneidades y anisotropías (en específico, para el contraste de densidad δ) y finalmente, escogiendo una norma adecuada, es posible estudiar el crecimiento de dicho contraste de densidad con la función lineal de crecimiento definida por la ecuación (1.64).

El segundo modelo de descripción de la formación de estructura descrito fue el del colapso esférico, en donde se describe la evolución de una inhomogeneidad (ya sea de sobre- o infraden-sidad) esféricamente simétrica. El colapso esférico representa un primer acercamiento a una descripción no lineal de la formación de estructuras, dada por los contrastes de densidad de las ecuaciones (1.73) y (1.79).

Se introdujo un tercer método para estudiar formación de estructura y el método a utilizar en este trabajo: modelos cosmológicos inhomogéneos. Se describen brevemente las soluciones de LTB y Szekeres.

Para el desarrollo del estudio de inhomogeneidades con fluidos no comoviles, se realizó un estudio detallado del formalismo 1+3 de las ecuaciones de Einstein en el cuál se hace una foliación del espacio-tiempo con una familia de observadores dada (un campo de 4-velocidad u^a) que a su vez define hipersuperficies 3D espaciales ortogonales a los observadores. En este formalismo, las ecuaciones - (2.40) a (2.53) - se escriben en términos de las cantidades cinemáticas asociadas a la 4-velocidad, las variables de la fuente y las partes eléctrica y magnética del tensor de Weyl ($\dot{u}^a, \omega_a, \Theta, \sigma_{ab}, \rho, p, \pi_{ab}, E_{ab}, H_{ab}$).

El objetivo del presente estudio es comparar los ritmos de crecimiento de estructura dictados por los distintos métodos descritos anteriormente. En específico se estudiaron los casos de una sola componente de materia (tipo polvo) y el caso de dos componentes no-comoviles.

Después de este estudio, se tomó la métrica inhómogénea dada por (2.54) y se obtuvieron las ecuaciones del formalismo 1 + 3 para un fluido general e irrotacional dadas por las ecuaciones (2.93) - (2.104). Luego, se consideraron las transformaciones de velocidad entre componentes de múltiples fluidos y se adaptan específicamente para dos fluidos de polvo. Estas dos componentes de polvo representan la materia oscura y los bariones y se toma a la 4-velocidad fundamental, es

decir, el marco comovil como el de la materia oscura y se obtuvieron las ecuaciones necesarias para el estudio realizado. Estas ecuaciones se adimensionalizaron y se obtuvieron las ecuaciones (3.16) - (3.26) que se resolvieron numéricamente.

La resolución numérica se realizó al definir las condiciones a $z = 100$ para un fondo Λ CDM plano y se consideraron el caso en el que la velocidad relativa entre bariones y CDM es cero (caso LTB en donde ambas componentes se comportan como una sola) y el caso con velocidad relativa distinta de cero. Para el caso LTB se definieron perfiles inhomogéneos gaussianos de densidad de bariones y CDM y un perfil de curvatura y a partir de las constricciones se obtuvieron todas las variables iniciales necesarias. En el caso con velocidad relativa distinta de cero, se agregó un perfil de densidad gaussiano de velocidad relativa, se cambió el perfil inhomogéneo de bariones por un perfil homogéneo y se consideraron 3 distintas velocidades máximas del perfil inicial de velocidades; fuera de eso, las condiciones de fondo e iniciales fueron las mismas que en el caso LTB.

Para el caso LTB se obtienen las figuras 3.4 y 3.5 que muestran la evolución de los contrastes de densidad de cada componente y la expansión. Además, se obtuvieron las figuras 3.6 - 3.9 que muestran la función de crecimiento numérica comparada con la prescripción perturbativa en un modelo Λ CDM dada por la ecuación (1.67) y las diferencias porcentuales que se tienen entre las funciones de crecimiento para un rango de $z \in [0, 20]$. Para el caso de la velocidad relativa, se obtienen las figuras 3.12 - 3.14 que muestran los perfiles finales de δ para ambas componentes de materia y cómo la velocidad relativa afecta la evolución y por tanto el estado final. De igual forma, se obtuvieron las comparaciones de las funciones de crecimiento y sus diferencias porcentuales en el mismo rango de z dadas en las figuras 3.15 - 3.26. Finalmente, se describió para ambos casos (LTB y velocidad relativa) la función de crecimiento numérica (tanto de bariones como de CDM, que en el caso LTB evolucionan idéntico) y su diferencia porcentual con respecto a la dada por (1.67). Se describió además cómo la velocidad relativa provocó una desviación entre el comportamiento de bariones y CDM, así como el de ambas componentes con el de la ecuación (1.67) y el cumplimiento de la restricción hamiltoniana de las soluciones a varios tiempos en mayor a una parte en 10^5 lo que verifica la validez de los resultados numéricos y las interpretaciones físicas de ellos.

4.2 Discusión de Resultados

En el capítulo anterior se presentaron los resultados de la resolución numérica de las ecuaciones para polvo LTB y polvo no comovil en un fondo Λ CDM. Incluso en la situación LTB (figuras 3.6 - 3.9) se notan diferencias entre las prescripciones perturbativa y numérica de los ritmos de crecimiento, especialmente para la configuración de *void*. Si bien se ha probado en trabajos anteriores la equivalencia del comportamiento perturbativo con la evolución de inhomogeneidades en LTB (a orden lineal) [40], la diferencia observada es atribuible al régimen cuasilineal que alcanzan las inhomogeneidades a tiempos recientes (ver por ejemplo, los valores que alcanza el contraste de densidad en la figura 3.4). Esta interpretación se confirma por la amplitud del contraste en la sobredensidad, donde la diferencia con el ritmo de crecimiento perturbativo no es tan acentuada como en el caso del void (Figs. 3.6 y 3.7 respectivamente).

Con la introducción de velocidades relativas se observa nuevamente una diferencia en los ritmos de crecimiento respecto del caso perturbativo, pero el efecto recibe otra interpretación. La existencia de velocidades relativas genera, en el marco de referencia de la materia oscura, una

componente de bariones con presión y flujo de calor. La presencia de esta componente escapa de las consideraciones del caso perturbativo y sus efectos son más patentes conforme la velocidad relativa máxima aumenta (figuras 3.15 - 3.26). Los resultados de este caso se encuentran resumidos en la tabla 3.1, donde se consideran los tres parámetros de amplitud de la velocidad relativa que modifican la velocidad máxima y el ritmo de crecimiento de los bariones en la configuración de sobredensidad emergente. Estos presentan un máximo de diferencia porcentual con respecto a la prescripción perturbativa. El *redshift* al que esta diferencia ocurre disminuye conforme la velocidad máxima aumenta, lo cual también es de esperarse dado que mientras mayor sea la velocidad relativa entre las componentes, más tiempo se requiere para relajar el sistema y recuperar una configuración asintótica de velocidad relativa cero. Finalmente, a un *redshift* de $z = 10.11$ se encuentra una diferencia porcentual, cercana a la máxima en los tres casos, que igualmente aumenta conforme la velocidad relativa máxima aumenta.

Vale la pena mencionar que los ejemplos mostrados en esta tesis se derivan de consideraciones de velocidad relativa del orden de la velocidad peculiar observada en galaxias respecto de la expansión homogénea [39]. Si bien estos valores pueden ser exagerados, ilustran el punto de la posible desviación del ritmo de crecimiento debido a fluidos no-comoviles y el corrimiento al rojo al cual serían detectables. Además, considerando el cumplimiento adecuado de la constricción hamiltoniana en las figuras 3.10 y 3.27-3.29, cualquier pico repentino, desviación u oscilación que se encuentre con respecto a la tendencia en las funciones de crecimiento y sus diferencias porcentuales son debido a efectos numéricos.

En *surveys* de galaxias actuales y futuros se busca caracterizar el ritmo de crecimiento de materia a través de la observable de distorsiones del espacio de *redshift* (RSD por *Redshift Space Distortions*) [41]. La distancia radial comovil para objetos en el espacio es determinada por su *redshift* observado z_{obs} . Esta z_{obs} es afectada por el flujo de Hubble y las velocidades peculiares. Esto afecta el espectro de potencias $P_m(\mathbf{k})$ medido en el espacio de *redshift*, donde la velocidad peculiar provoca anisotropías; a esto es a lo que se le conoce como RSD. Estas anisotropías se pueden caracterizar por la escala en la que suceden: a grandes escalas los objetos tienden a caer en regiones de alta densidad "achatando" el campo de densidad por lo que la amplitud de aglomeración crece a lo largo de la línea de visión (efecto Kaiser [41]); a escalas pequeñas los objetos se virializan y tienen movimiento aleatorio, el campo de densidad se "estira" y la amplitud de aglomeración a lo largo de la línea de visión disminuye (efecto *Finger-of-God* [42]). Se espera que el efecto de RSD sea posible medirlo en *surveys* con SKA2 en un rango de precisión de 0.5% para un intervalo de *redshift* de $0.4 < z < 1.3$ [43] y a escalas de $10 - 200h^{-1} Mpc$ [44].

La diferencia porcentual máxima entre prescripciones numérica y perturbativa en el caso de el polvo de bariones podría presentarse en la época de reionización de hidrógeno (a $z \approx 10$). Después de la última dispersión hubo una época oscura en la que el hidrógeno del universo era neutro. Con la formación de estrellas (a $z = 10 - 20$), la radiación producida por estas reionizó el hidrógeno (H_{II}), el cuál se espera que haya emitido en la línea de $21cm$ [45].

4.3 Perspectivas a futuro

Para concluir se presentan ciertos estudios futuros posibles a realizar con fluidos no comoviles. Un primer trabajo siguiente consistiría en analizar el mismo fenómeno estudiado para perfiles de sobredensidad. Igualmente, se podrían buscar otro tipo de condiciones iniciales y considerar el uso de diferentes integradores.

Respecto a las consideraciones físicas, se puede complementar el código con el trazo de rayos de luz para caracterizar mejor el fenómeno. Además, se podría considerar posibles modificaciones en los criterios de virialización por el efecto estudiado. Posteriormente, se podría tomar una métrica más complicada, por ejemplo, la métrica de Szekeres y adaptar las ecuaciones y el código a dicha geometría.

Apéndice

A.1 Condiciones para evitar *shell crossings*

Se toma la forma de la métrica LTB con su función de densidad dados por¹⁸

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{(\partial_r R)^2}{1+f} dr^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad 8\pi\rho = \frac{\partial_r F}{R^2 \partial_r R}. \quad (\text{A.1})$$

Un extremal regular en R a lo largo de rebanadas de tiempo constante ocurre, sin causar *shell crossing* siempre y cuando ρ no diverja, cuando

$$\partial_r F = 0, \quad \partial_r t_B = 0 \quad \text{y} \quad \partial_r f = 0. \quad (\text{A.2})$$

Para el caso elíptico $f < 0$ las condiciones de no *shell crossing* son

$$\partial_r F \geq 0, \quad \partial_r t_B \leq 0 \quad \text{y} \quad \partial_r t_B \geq \frac{-\pi F}{(-f)^{3/2}} \left(\frac{F'}{F} - \frac{3f'}{2f} \right), \quad (\text{A.3})$$

para $\partial_r R > 0$ y las condiciones conversas se cumplen para $\partial_r R < 0$.

Para los casos hiperbólico ($f > 0$) y parabólico ($f = 0$) las condiciones son

$$\partial_r F \geq 0, \quad \partial_r t_B \leq 0 \quad \text{y} \quad \partial_r f \geq 0,$$

el converso de estas condiciones se cumple para $\partial_r R < 0$.

A.2 Relaciones de Gauss-Codazzi

Los tensores de curvatura de las hipersuperficies espaciales con métrica h_{ab} ortogonales a la 4-velocidad u^a se pueden calcular con la derivada covariante proyectada dada en la ecuación (2.7) de la misma manera que para la variedad completa con la derivada covariante. Entonces, para una 1-forma ω_a en la hipersuperficie ortogonal, el tensor de Riemann 3-dimensional se calcula de

$${}^{(3)}R_{abc}{}^d \omega_d = (\bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b - \bar{\nabla}_b \bar{\nabla}_a) \omega_c. \quad (\text{A.4})$$

En este trabajo se calcularon las componentes del tensor de Riemann definiendo una subvariedad en SageManifolds con métrica h_{ab} y aplicando la ecuación anterior. Una forma alternativa

¹⁸En consistencia con la notación de [46].

es a través de los tensores de curvatura de la variedad 4-dimensional completa: las relaciones de Gauss-Codazzi. La primer relación de Gauss-Codazzi se calcula a partir de la ecuación (A.4) y la definición de la curvatura extrínseca de las hipersuperficies espaciales a partir del vector u^a ortogonal a ellas

$$h^e{}_a h^f{}_b h^g{}_c h^d{}_h R_{efg}{}^h = -{}^{(3)}R_{abc}{}^d + K_{ca}K_b{}^d - K_{cb}K_a{}^d, \text{ con } K_{ab} = h_a{}^c \nabla_c u_b. \quad (\text{A.5})$$

La segunda relación de Gauss-Codazzi se obtiene a partir de considerar $R_{ab}u^a h_c{}^b$

$$R_{ab}u^a h_c{}^b = \bar{\nabla}_a K_c{}^a - \bar{\nabla}_c K, \text{ con } K = K_a{}^a. \quad (\text{A.6})$$

A.3 El método de líneas

El método de líneas o de diferencias finitas consiste en tomar una derivada y discretizarla a lo largo de una malla creada con la variable de derivación utilizando su expansión en serie de Taylor. Una explicación a detalle y su implementación en Python se puede encontrar en [47]. El método sirve para transformar un sistema de ecuaciones diferenciales parciales en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Para explicar el método se considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\dot{x}(r, t) = \partial_r z(t, r) + f_1(t, r), \quad \dot{z}(r, t) = \partial_r x(t, r) + f_2(t, r). \quad (\text{A.7})$$

Se toma la dimensión r y se divide formando una malla de n puntos al definir $r_j = r_0 + jh$ con $h = (r_f - r_0)/n$, $j = 0, \dots, n$, r_f define el punto final de la malla y r_0 el punto inicial. A partir de calcular la serie de Taylor de $\partial_r z(t, r)$ y $\partial_r x(t, r)$, evaluarlas en el j -ésimo punto y escribirlas en términos de el j -ésimo y $(j + 1)$ -ésimo puntos o el j -ésimo y $(j - 1)$ -ésimo puntos. Se calcula únicamente para $\partial_r x(t, r)$, es idéntico para $\partial_r z(t, r)$.

$$\partial_r x_j(t) = \frac{x_j(t) - x_{j-1}(t)}{h} + \mathcal{O}(h^2), \quad \partial_r x_j(t) = \frac{x_j(t) - x_{j-1}(t)}{h} + \mathcal{O}(h^2), \quad (\text{A.8})$$

en donde $x_j(t) = x(t, r_j)$ $x_{j\pm 1} = x(t, r_{j\pm 1})$.

Las condiciones de frontera dependerán del problema a estudiar, en este caso (el estudiado en este trabajo) se anularon las derivadas radiales en el origen ($\partial_r x_0(t) = 0$ y $\partial_r z_0(t) = 0$) se dejaron libres en r_n por lo que las ecuaciones a lo largo de la malla, se ven de la siguiente forma

- $j = 0$

$$\dot{x}_0(t) = f_1(t, r_0), \quad \dot{z}_0(t) = f_2(t, r_0). \quad (\text{A.9})$$

- $0 < j \leq n$

$$\dot{x}_j(t) = \frac{z_j(t) - z_{j-1}(t)}{h} + f_1(t, r_j), \quad \dot{z}_j(t) = \frac{x_j(t) - x_{j-1}(t)}{h} + f_2(t, r_j). \quad (\text{A.10})$$

Teniendo este sistema de ecuaciones y las condiciones iniciales adecuadas, es posible resolverlo como un sistema de ecuaciones ordinarias para cada punto de la malla.

A.4 Código para la resolución de las ecuaciones

Se incluye la implementación del método descrito en el apéndice anterior para el caso específico de las ecuaciones (3.16)-(3.26). El código completo se puede encontrar en <https://github.com/klest092/NonComovingSF>.

```
1 def SistEcs3(y, t):
2     Th = y[::8]
3     Y = y[1::8]
4     Ch = y[2::8]
5     B = y[3::8]
6     sig = y[4::8]
7     rho = y[5::8]
8     Q = y[6::8]
9     rhob = y[7::8]
10
11     dydt = np.empty_like(y)
12     dThdt = dydt[::8]
13     dYdt = dydt[1::8]
14     dChdt = dydt[2::8]
15     dBdt = dydt[3::8]
16     dsigdt = dydt[4::8]
17     drhodt = dydt[5::8]
18     dQdt = dydt[6::8]
19     drhobdt = dydt[7::8]
20
21     p = 1./3.*(Q/B)**2./rhob
22     PP = -p
23     W = np.zeros(n+1)
24
25     for i in range(0, n+1):
26         if i == 0:
27             W[i] = 0.
28         else:
29             W[i] = -(rho[i]+rhob[i]+OmLin)/2.+1./2.*((sig[i]+Th[i])**2.+a**2./Y[i]**2.*(1.-Ch[i]**2./B[i]**2.))-3./2.*PP[i]
30
31     dThdt[0] = -1./2.*(rho[0]+rhob[0]+OmLin-Th[0])**2.
32     dYdt[0] = 0.
33     dChdt[0] = Ch[0]*Th[0]
34     dBdt[0] = B[0]*Th[0]
35     dsigdt[0] = 0.
36     drhodt[0] = -3.*rho[0]*Th[0]
37     dQdt[0] = 0.
38     drhobdt[0] = -3.*rhob[0]*Th[0]
39
40     for i in range(1, n+1):
41         dThdt[i] = -1./2.*(rho[i]+rhob[i]+3.*p[i])+OmLin-2.*sig[i]**2.-Th[i]**2.
42         dYdt[i] = Y[i]*(Th[i]+sig[i])
43         dChdt[i] = -2.*Ch[i]*sig[i]+Ch[i]*Th[i]+(3./(2.*a))*Q[i]*Y[i]
44         dBdt[i] = B[i]*(Th[i]-2.*sig[i])
45         dsigdt[i] = sig[i]**2.-2.*sig[i]*Th[i]+3./2.*PP[i]-W[i]
46         drhodt[i] = -3.*rho[i]*Th[i]
47         dQdt[i] = -3.*Th[i]*Q[i]-3.*a*(p[i]-p[i-1])/h+6.*a*PP[i]*Ch[i]/Y[i]
48         drhobdt[i] = -3.*(rhob[i]+p[i])*Th[i]-6.*PP[i]*sig[i]-2.*a*Q[i]*Ch[i]/(Y[i]*B[
```

```
49     i]**2.)-(a/B[i]**2.)*(Q[i]-Q[i-1])/h+(a*Q[i]/B[i]**3.)*(B[i]-B[i-1])/h
50     drhobdt[i] = -3.*(rhob[i])*Th[i] #solo para LTB
    return dydt
```

Bibliografía

- [1] George FR Ellis, Roy Maartens, and Malcolm AH MacCallum. *Relativistic cosmology*. Cambridge University Press, 2012.
- [2] Robert M Wald. *General relativity*, chicago, usa: Univ, 1984.
- [3] Charles W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [4] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2 2011.
- [5] Israel Quiros, Tame Gonzalez, Ulises Nucamendi, Ricardo García-Salcedo, Francisco Antonio Horta-Rangel, and Joel Saavedra. On the phantom barrier crossing and the bounds on the speed of sound in non-minimal derivative coupling theories. *Class. Quant. Grav.*, 35(7):075005, 2018, 1707.03885.
- [6] Steven Weinberg. *Cosmology*. 9 2008.
- [7] Kelvin K.S. Wu, Ofer Lahav, and Martin J. Rees. The large-scale smoothness of the Universe. *Nature*, 397:225–230, 1999, astro-ph/9804062.
- [8] Jaswant Yadav, Somnath Bharadwaj, Biswajit Pandey, and T.R. Seshadri. Testing homogeneity on large scales in the Sloan Digital Sky Survey Data Release One. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 364:601–606, 2005, astro-ph/0504315.
- [9] Pierros Ntelis, Anne Ealet, Stephanie Escoffier, Jean-Christophe Hamilton, Adam James Hawken, Jean-Marc Le Goff, James Rich, and Andre Tilquin. The scale of cosmic homogeneity as a standard ruler. *JCAP*, 12:014, 2018, 1810.09362.
- [10] Pierros Ntelis. *Probing Cosmology with the homogeneity scale of the Universe through large scale structure surveys*. Theses, Astroparticule and Cosmology Group, Physics Department, Paris Diderot University, September 2017.
- [11] Eleonora Di Valentino et al. Cosmology Intertwined I: Perspectives for the Next Decade. 8 2020, 2008.11283.
- [12] Eleonora Di Valentino et al. Cosmology Intertwined II: The Hubble Constant Tension. 8 2020, 2008.11284.
- [13] Eleonora Di Valentino et al. Cosmology Intertwined III: $f\sigma_8$ and S_8 . 8 2020, 2008.11285.

- [14] Eleonora Di Valentino et al. Cosmology Intertwined IV: The Age of the Universe and its Curvature. 8 2020, 2008.11286.
- [15] R. G. Hughes, M. S. Longair, and J. R. Shakeshaft. Evidence on the Isotropy of Faint Radio Sources. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 135(2):131–137, 02 1967, <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/135/2/131/8078575/mnras135-0131.pdf>.
- [16] Joshua Frieman, Michael Turner, and Dragan Huterer. Dark Energy and the Accelerating Universe. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 46:385–432, 2008, 0803.0982.
- [17] Marco Bruni, Juan Carlos Hidalgo, Nikolai Meures, and David Wands. Non-Gaussian Initial Conditions in Λ CDM: Newtonian, Relativistic, and Primordial Contributions. *Astrophys. J.*, 785:2, 2014, 1307.1478.
- [18] Marco Bruni, Peter K.S. Dunsby, and George F.R. Ellis. Cosmological perturbations and the physical meaning of gauge invariant variables. *Astrophys. J.*, 395:34–53, 1992.
- [19] Thanu Padmanabhan. *Structure formation in the universe*. Cambridge university press, 1993.
- [20] Ravi K. Sheth and Rien van de Weygaert. A Hierarchy of voids: Much ado about nothing. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 350:517, 2004, astro-ph/0311260.
- [21] Vasiliy Demchenko, Yan-Chuan Cai, Catherine Heymans, and John A Peacock. Testing the spherical evolution of cosmic voids. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 463(1):512–519, 2016, 1605.05286.
- [22] Krzysztof Bolejko, Andrzej Krasinski, Charles Hellaby, and Marie-Noelle Celerier. *Structures in the Universe by Exact Methods*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2009.
- [23] Andrzej Krasinski and Charles Hellaby. Formation of a galaxy with a central black hole in the Lemaitre-Tolman model. *Phys. Rev. D*, 69:043502, 2004, gr-qc/0309119.
- [24] Andrzej Krasinski and Charles Hellaby. More examples of structure formation in the Lemaitre-Tolman model. *Phys. Rev. D*, 69:023502, 2004, gr-qc/0303016.
- [25] Krzysztof Bolejko, Andrzej Krasinski, and Charles Hellaby. Formation of voids in the universe within the Lemaitre-Tolman model. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 362:213–228, 2005, gr-qc/0411126.
- [26] Marie-Noelle Celerier and Jean Schneider. A Solution to the horizon problem: A Delayed big bang singularity. *Phys. Lett. A*, 249:37–45, 1998, astro-ph/9809134.
- [27] Marie-Noelle Celerier. Models of universe with a delayed big bang singularity. 3. Solving the horizon problem for an off center observer. *Astron. Astrophys.*, 362:840–844, 2000, gr-qc/0009031.
- [28] Marie-Noelle Celerier and Peter Szekeres. Time - like and null focusing singularities in spherical symmetry: A Solution to the cosmological horizon problem and a challenge to the cosmic censorship hypothesis. *Phys. Rev. D*, 65:123516, 2002, gr-qc/0203094.

- [29] Andrzej Krasinski. *Inhomogeneous cosmological models*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 3 2011.
- [30] Hans Stephani, D. Kramer, Malcolm A.H. MacCallum, Cornelius Hoenselaers, and Eduard Herlt. *Exact solutions of Einstein's field equations*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [31] Roberto A. Sussman and I. Delgado Gaspar. Multiple nonspherical structures from the extrema of Szekeres scalars. *Phys. Rev. D*, 92(8):083533, 2015, 1508.03127.
- [32] Xavier Roy. On the 1+3 Formalism in General Relativity. 2014, 1405.6319.
- [33] Sage manifolds: Differential geometry and tensor calculus with sagemath. *SageManifolds*.
- [34] Henk van Elst and George F R Ellis. The Covariant approach to LRS perfect fluid space-time geometries. *Class. Quant. Grav.*, 13:1099–1128, 1996, gr-qc/9510044.
- [35] Tomohiro Harada, Chul-Moon Yoo, and Kazunori Kohri. Threshold of primordial black hole formation. *Phys. Rev.*, D88(8):084051, 2013, 1309.4201. [Erratum: *Phys. Rev.*D89,no.2,029903(2014)].
- [36] Ismael Delgado Gaspar, Juan Carlos Hidalgo, and Roberto A. Sussman. Non-comoving baryons and cold dark matter in cosmic voids. *Eur. Phys. J. C*, 79(2):106, 2019, 1811.03634.
- [37] Roy Maartens, Tim Gebbie, and George F. R. Ellis. Covariant cosmic microwave background anisotropies. 2. Nonlinear dynamics. *Phys. Rev.*, D59:083506, 1999, astro-ph/9808163.
- [38] N. Aghanim et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 641:A6, 2020, 1807.06209.
- [39] R.G. Carlberg. Velocity bias in clusters. *Astrophys. J.*, 433:468, 1994, astro-ph/9404005.
- [40] Roberto A. Sussman, Juan Carlos Hidalgo, Peter K.S. Dunsby, and Gabriel German. Spherical dust fluctuations: The exact versus the perturbative approach. *Phys. Rev. D*, 91(6):063512, 2015, 1412.8404.
- [41] N. Kaiser. Clustering in real space and in redshift space. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 227:1–27, 1987.
- [42] A.J.S. Hamilton. Linear redshift distortions: A Review. In *Ringberg Workshop on Large Scale Structure*, 8 1997, astro-ph/9708102.
- [43] Filipe Batoni Abdalla et al. Cosmology from HI galaxy surveys with the SKA. *PoS, AASKA14:017*, 2015.
- [44] S.J. Hatton and S. Cole. Modeling the redshift-space distortion of galaxy clustering. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 296:10–20, 1998, astro-ph/9707186.
- [45] Aravind Natarajan and Naoki Yoshida. The Dark Ages of the Universe and hydrogen reionization. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2014(6), 06 2014, <https://academic.oup.com/ptep/article-pdf/2014/6/06B112/4448864/ptu067.pdf>. 06B112.

- [46] C. Hellaby and K. Lake. Shell crossings and the Tolman model. *Astrophys. J.*, 290:381, 1985.
- [47] Integration (`scipy.integrate`)¶. *Integration (scipy.integrate)-SciPy v1.5.2 Reference Guide*.