



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**Espacios Vectoriales en la Teoría
de Gráficas**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA

Pablo César Palomino Martínez

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Gilberto Calvillo Vives



Ciudad Universitaria, Cd. Mx. 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Prefacio



UANDO iba en el tercer semestre de la licenciatura, tomé el curso *Gráficas y Juegos* con la maestra Laura Pastrana, en la Facultad de Ciencias. Era tal el amor con el que Laura daba su clase que me lo transmitió inmediatamente, y supe desde ese momento que quería dedicarme a la Teoría de Gráficas. Es una rama de las Matemáticas tan elegante y bella, pero al mismo tiempo intrigante. Después de varias experiencias, me di cuenta que me sentía más atraído por las Matemáticas Aplicadas y deseaba estudiar algo que *aplicado* que al mismo tiempo involucrara a las gráficas.

Conocí al Dr. Gilberto Calvillo a finales de junio del 2017, mientras él impartía una conferencia en la Escuela de Verano de Cuernavaca que suele organizarse anualmente. La plática se titulaba *Los Teoremas del Problema de Asignación Óptima* y recuerdo perfectamente que él hablaba de cómo ciertos problemas del Álgebra Lineal pueden ser modelados y resueltos en la Teoría de Gráficas. Quedé maravillado: ¿cómo era posible que esas dos ramas de las Matemáticas (aparentemente sin relación alguna) tuvieran tanto en común? Fue como si un horizonte infinito se extendiera ante mis ojos y yo quería ser parte de eso.

Decidí, en diciembre de ese mismo año pedirle al Dr. Calvillo que fuera mi director de tesis y, para mi fortuna, aceptó. En enero de 2018, él me recomendó (que a su vez ya había sido sugerido por el Dr. Jesús López Estrada) el tema que he plasmado en este trabajo.

Mi tesis fue fruto de un esfuerzo de, más o menos, un año y medio: de junio a diciembre de 2018 me dediqué a leer varios libros y comprender los conceptos y los teoremas; y en 2019 seguí leyendo y escribiendo mi trabajo, mientras lo complementaba trabajando como ayudante de profesor en la Facultad de Ciencias y siendo becario del Instituto de Matemáticas.

Realmente esta tesis fue terminada a finales de enero de 2020 para después ser leída y corregida por mis sinodales. Pero nadie se imaginaría que a mediados de marzo de ese mismo año la pandemia de la enfermedad COVID-19 azotaría al mundo entero, interrumpiendo de golpe las actividades que requerían la presencia humana y encerrándonos de forma obligada a una larga cuarentena.

Probablemente desde los eventos de la Segunda Guerra Mundial de los años 40 del siglo XX, la humanidad entera no se había visto envuelta en un evento tan traumático y de tal magnitud

como el de esta pandemia mundial. Inevitablemente, este acontecimiento ha cambiado el mundo para siempre. Desde una gran crisis económica, provocando que millones de personas perdieran sus negocios y sus empleos, hasta el lamentable fallecimiento de numerosas vidas humanas que, quizás, en otras circunstancias estarían hoy con nosotros.

Por otro lado, ha supuesto una revolución tecnológica como nunca se había visto. Paradójicamente, a pesar de estar separados por el confinamiento, estamos más conectados que antes: las videollamadas, las videoconferencias, las clases virtuales, hacer transacciones bancarias, pedir comida, comprar la despensa, solicitar un taxi, etc., y todo desde la comodidad del hogar y a través de un celular. Lo anterior nos ha permitido afrontar esta problemática de formas que hace tan sólo diez años no hubiéramos podido. Es en este contexto en el que escribo estas palabras y en el que esta tesis queda registrada. Los exámenes profesionales por el momento son en línea y así será el mío en el 2021.

No me cabe duda de que estamos viviendo en una de las mejores épocas de la humanidad: desde tecnología, educación y comodidades hasta la inclusión de minorías que, en otros tiempos, fueron calladas. Tenemos a nuestro alcance hoy lo que los reyes, conquistadores y emperadores más opulentos del pasado ni se hubieran imaginado. Que esta sea de las mejores épocas nos significa que sea perfecta. Todavía nos quedan retos que superar como el cambio climático, la difusión de noticias falsas, el mal uso de los datos, el arribo de personas de dudosa capacidad a los puestos más altos de poder, la ignorancia y, en general, los problemas existenciales del ser humano moderno.

Sin embargo, en cada momento tenemos la responsabilidad de elegir hacia dónde queremos dirigirnos. La decisión está en nuestras manos en cada momento y en cada pequeño detalle de la vida diaria: somos capaces de actuar a favor de nuestro progreso como seres humanos y de nuestra sociedad, o podemos quedarnos cruzados de brazos y no hacer nada al respecto. Como dijo el filósofo italiano Giovanni Pico Della Mirandola en su *Discurso sobre la Dignidad Humana*:

“El Óptimo Artífice [...] tomó entonces al hombre así concebido, obra de la naturaleza indefinida y, poniéndolo en el centro del mundo, le habló de esta manera: No te di, Adán, ni un puesto determinado ni un aspecto propio ni función alguna que te fuera peculiar, con el fin de que aquel puesto, aquel aspecto, aquella función por la que te decidieras, los obtengas y conserves según tu deseo y designio. La naturaleza limitada de los otros se halla determinada por las leyes que yo he dictado. La tuya, tú mismo la determinarás sin estar limitado por barrera ninguna, por tu propia voluntad, en cuyas manos te he confiado. Te puse en el centro del mundo con el fin de que pudieras observar desde allí todo lo que existe en el mundo. No te hice ni celestial ni terrenal, ni mortal ni inmortal, con el fin de que –casi libre y soberano artífice de ti mismo– te plasmaras y te esculpieras en la forma que te hubieras elegido. Podrás degenerar hacia las cosas inferiores que son los brutos; podrás –de acuerdo con la decisión de tu voluntad– regenerarte hacia las cosas superiores que son divinas”.

En esta tesis se hablará de una parte de la Teoría Algebraica de Gráficas, que es la rama de las matemáticas que se ocupa de aplicar los métodos algebraicos en problemas que conciernen a las gráficas. Estos métodos pueden incluir, por ejemplo, el uso de la teoría de grupos para estudiar invariantes en gráficas. Pero también, como ya mencionamos al principio, el Álgebra Lineal juega un papel importante en el estudio de la Teoría de Gráficas y en este trabajo nos enfocamos en estudiar esa relación.

El texto base de esta tesis es el libro escrito por J. A. Bondy y U. S. R. Murty titulado *Graph Theory* [3]. Además de considerarlo modernos, nos pareció conveniente su notación y su terminología. El lector podrá hallar en [6] y [15] un desarrollo mucho más detallado de estos temas, aunque son

textos un poco antiguos.

En primer lugar, ofrecemos una introducción histórica para situar al lector en contexto. No pretendemos ser exhaustivos, sino más bien dar un panorama general de cómo el Álgebra Lineal y la Teoría de Gráficas han ido creciendo y coincidiendo a lo largo del tiempo.

El capítulo 1 está dedicado a establecer los conceptos principales y las definiciones de las que haremos uso en este trabajo. Se divide en dos secciones, una dedicada al Álgebra Lineal y la otra dedicada a la Teoría de Gráficas. La mayoría de los teoremas en este capítulo se enuncian sin demostración y damos las referencias en las que el lector puede encontrar más información al respecto.

En el capítulo 2 estudiamos las propiedades de los conjuntos de corte y las gráficas pares. Este es el más largo y más “pesado” de los demás capítulos porque es, prácticamente, el soporte teórico del resto. Casi todos los teoremas del capítulo 3, por ejemplo, son una consecuencia directa de los que se enunciaron en el capítulo 2 y, por lo tanto, facilitan mucho las demostraciones.

El capítulo 3 es mi favorito y es el más “profundo” porque retomamos las ideas del capítulo anterior y las consideramos desde el punto de vista algebraico. Es aquí donde aparecen de forma natural los espacios vectoriales de una gráfica y de una digráfica. Tendemos el puente entre el mundo del Álgebra Lineal y el de la Teoría de Gráficas.

Finalmente, la tesis se concluye con el capítulo 4, en el cual presentamos algunas de las consecuencias que han tenido las ideas del capítulo anterior. Las aplicaciones de este capítulo son tan bastas que fácilmente podría hacerse una tesis de cada uno. Así que hablamos de ellas de manera breve y sin ahondar tanto los aspectos técnicos.

Hemos incluido varias imágenes para explicar algunos conceptos y nuestros ejemplos terminan con el símbolo “◆” para separarlos del resto del texto. De igual modo, las demostraciones de los teoremas se terminan con “**QED**”, que abrevia la frase latina *Quod Erat Demonstrandum* y significa “que era lo que queríamos demostrar”.

Diciembre, 2020.

Agradecimientos



RACIAS, Señor, porque sé que existes, porque en el mundo y en la vida estás presente Tú. Te doy gracias por cuanto soy. Cuanto puedo y cuanto recibo es un regalo tuyo. Gracias porque desde mi nacimiento Tus ojos no se han apartado de mí. Hoy estoy aquí gracias a Ti. Gracias, Señor, por concederme la oportunidad de estudiar Matemáticas y a través de ella admirar Tu creación. Gracias, Poder Superior, por acompañarme en los años de mi carrera universitaria y por permitirme terminar esta tesis para gloria Tuya. Aunque muchas veces atravesé el valle de sombras, nunca soltaste mi mano. Has sido testigo de mis

risas y lágrimas, de mi felicidad y mi tristeza y del esfuerzo que me tomó concluir mi carrera y este trabajo. Las muchas palabras jamás serán suficientes, Señor, para comunicarte lo eternamente que estoy agradecido contigo.

A Dios le pedí fuerzas para grandes logros: me hizo débil para aprender y humilde a obedecer. Pedí salud para hacer cosas grandes: me dio enfermedad para poder hacer cosas buenas. Pedí riqueza para poder ser feliz: me dio debilidad para sentir necesidad de Dios. Pedí todo para poder disfrutar de la vida: me concedió vida para poder disfrutar de todo. Pedí lujos y fama: me concedió amigos y amor. A pesar de mí mismo, las peticiones que no hice me fueron concedidas. ¡Dios mío! Entre los hombres soy el más afortunado. ¡Gracias Dios mío!

A mi mamá, Margarita. Gracias por darme la vida y soportar el peso que implicó mantener a dos niños tú sola y siendo muy joven. Gracias, madre, porque por ti soy quien soy. Por desvelarte por mi hermano y por mí. Por esos desayunos, esas comidas, esas cenas, esos juguetes. Esas medicinas que nos dabas cuando enfermábamos. Esos consejos que nos dabas cuando más lo necesitábamos. Por esas sonrisas y esos regaños que nos han forjado. Por los valores que nos diste. Por cada minuto de tu vida que nos otorgaste, aunque eso implicara a veces privarte de ciertas cosas. Por siempre, agradecido contigo. Hoy tienes la dicha de decir que tus dos hijos están graduados. Te amo.

A mi hermano Abraham. Te admiro por tu valor y el ánimo constante que tienes por superar las adversidades, enfrentar la vida y, sin conformarte, buscar estar mejor cada día. Gracias porque hoy tú, nuestra mamá y yo estamos juntos, y juntos hemos salido adelante. A mi abuelita, Mercedes y a

mi abuelito Alfonso. A mis primos hermanos Janeth, Susy e Iker. A mi tía Susana, mi tío Poncho y mi tía Sandra. Crecí con ustedes y son parte de mí. Cada uno ha impactado en mi vida y me han dejado innumerables enseñanzas. Los amo.

A mis mascotas: Chiquis, Benita, Pulga, Pipa y Lira. Porque me enseñaron el amor y el respeto hacia la vida de los animales.

A mi tía Elena y a mi tía Maricela. Porque cambiaron mi vida para siempre. Y por eso siempre estaré en agradecido con ustedes. Gracias por el infinito apoyo que nos brindaron cuando más lo necesitábamos, por confiar en nosotros y por siempre tenernos en cuenta. Las amo.

Recuerdo mucho que un día, cuando yo era niño, mi mamá me comentó que a veces Dios nos manda ángeles para ayudarnos en diversas situaciones. Me quedé con esa enseñanza y la sigo llevando en mi corazón. A través de los años he sido bendecido por la presencia de personas muy especiales para mí. Estos son mis ángeles, a los que quiero agradecer:

A Angélica Reyes. Desde que te conocí, no fui el mismo. Gracias por enseñarme a ver las situaciones de la vida de forma diferente. Gracias por compartir tu vida conmigo. Por tu amor, por tu comprensión y por tu paciencia. Gracias a tu familia: a tu papá y a tu mamá y a hermano, porque siempre me han recibido bien, porque cada que platico y convivo con ellos me llevo una enseñanza. Agradezco porque son un ejemplo y son una familia fuertemente unida, que afrontan las adversidades juntos, sin amargarse, sin desanimarse, más bien ayudando aún más a los demás. Te admiro por el bello ser humano que eres. Admiro tu fuerza, tu disciplina y tu constancia. Admiro que eres de las personas más capaces que he conocido y sé que llegarás lejos y tendrás éxito donde quiere que estés y te propongas estar. De todos los años que he estado en la Universidad, eres lo mejor que me ha sucedido. Siempre estaré agradecido contigo. Soy bendecido y afortunado por conocerte. Te quiero mucho.

Al Dr. Gilberto Calvillo. Las palabras nunca me alcanzarán para expresarle mi gratitud. No se imagina lo mucho que me ha ayudado y lo mucho que he aprendido con usted. Conocerlo cambió mi vida para siempre. Usted ha sido como mi guía estos años. Admiro grandemente el ser humano que es. Su amor, su amabilidad y la forma que tiene usted de compartir lo que tiene sin esperar nada a cambio. Que usted busca el ayudar sólo por ayudar. Estoy eternamente agradecido con usted. Sé que algún día a mí me tocará ayudar a alguien, así como usted lo ha hecho conmigo. Y cuando ese día llegue, estaré listo y responderé con gratitud, acordándome y llevando en mi mente el cómo usted lo hizo conmigo. Usted es mi ejemplo. Gracias Dr. Calvillo, por todo. Gracias, gracias, gracias.

A Miguel Giles y su familia. Gracias, don Miguel, por el incalculable apoyo que me dio. Gracias a eso, pude terminar mi carrera a tiempo. Gracias por cada enseñanza y cada plática que tuve con usted. Gracias por orientarme y compartir su tiempo. Gracias por haberme ayudado cuando más lo necesitaba. Gracias por el apoyo y cariño que siempre recibí de su familia, de su esposa y de sus hijos.

A Alejandra Camacho y a Esperanza Abarca. Gracias Pera, por la inmensa ayuda que me brindó. Por haberme apoyado durante mi carrera. Por sus consejos, por su tiempo, por las comidas que me dio. Gracias por cada detalle que tuvo conmigo. Gracias por recibirme en su casa de la mejor manera. Todo eso lo llevo en mi corazón por siempre. Gracias, Ale, por enseñarme que *a pesar de que conozcamos algo muy malo dentro de nosotros, eso no define lo que en realidad somos*. Gracias por cada momento de tu tiempo y por cada enseñanza y el cariño que me brindaste. También le agradezco a toda tu familia: a tu papá y a tu hermano, a tus primos y primas, tus tíos y tías y a tu abuelita, porque cada uno dejó algo en mi corazón, y cada uno siempre me apoyó a su manera. Estoy por siempre agradecido con ustedes.

A Arturo Calvillo. Gracias por tu amistad y por tu compañía y por el gran ser humano que eres. Por esas charlas que hemos tenido juntos. Te admiro mucho y agradezco grandemente el apoyo que me has brindado desde que nos conocimos.

A Felipe Spínola. Gracias por las enseñanzas que me dio y por sus consejos que me acompañan. Gracias por las comidas que compartimos y por escucharme. Con usted y con Arturo, nunca me sentí sólo en Coyoacán. Siempre conté con usted. Le agradezco infinitamente por todo.

A Gaby Campero. Desde mi primer día de clases en la Universidad no he dejado de aprender de ti. Gracias por mostrarme lo bello de las Matemáticas, de la Teoría de Conjuntos y la Lógica. Gracias por inculcar en mí la preocupación por el rigor matemático. Gracias por darme el honor de ser ayudante tuyo por un año completo. Y gracias por ser un ejemplo de vida y de ser humano, que no decae ante las adversidades.

A Leonel Rito. Eres de mis más grandes amigos. Siempre he podido contar contigo, no importa lo que sea. Te admiro como matemático y como ser humano. Gracias por escucharme, por hacerme compañía. Por esas veces que estudiábamos juntos en la sala de maestros o en el Instituto de Matemáticas de Cuernavaca. Por permitirme conocer a tu familia y por cada consejo que me diste. Sobre todo, por el privilegio de ser tu ayudante por un año. Esto fue un acontecimiento que me cambió la vida, por las experiencias que tuve, por la gente que conocí gracias a ti.

A Ulises Cendejas, a Jenny Zúñiga y a Liz Fernández. Siempre que lo necesité, ahí estaban conmigo. Siempre tuve su apoyo. Cuando no tenía dinero, cuando no tenía dónde pasar la noche, ahí estaban ustedes. Nunca me sentí sólo en la Universidad, porque sabía que podía contar con ustedes. Gracias por cada experiencia, por cada reunión que hicimos, por cada charla, por hacer que se me salieran las lágrimas de la risa que me provocaban, por pasar un semestre completo haciendo ejercicio. Por invitarme cada uno a sus actividades. Gracias por todo.

A mis amigos del cubículo de Gaby, Ana Lissette, Róger López, Mariana Garduño, Tonatiuh Velázquez, Manuel Zúñiga y Yanh Vissuet. Siempre me gustó ir con ustedes a echar relajo. Era relajante. Gracias por esas reuniones, por esos cumpleaños. Porque fuimos compañeros de trabajo, también fueron mis ayudantes y mis compañeros de clase. Por cada examen que presentamos juntos y, posteriormente, cada examen que calificamos juntos. Gracias porque hoy los considero mis amigos.

A mis alumnos de Álgebra y Cálculo, Nahum Vega, Marcos Baltasar, Fer Garnica, Diana Sandoval, Gabriel Chino, Jonathan Flores, Clarissa Barreto, Vania Villegas, Amacalli Pelcastre, Itzanami Karina, Aranza Ortiz, Leobardo Enríquez, Mónica Ávila, Brenda Guízar, Daniel Cruz y Yair Franco. Gracias por permitirme darles clase y por tenerme paciencia. Gracias porque ustedes hacían divertidas las clases y yo disfrutaba enseñarles. Gracias porque todos ustedes los considero mis amigos y les deseo éxito en sus carreras y bienestar en sus vidas.

Al Dr. Jorge Rivera Noriega, por escucharme y orientarme cuando no estaba seguro de estudiar Matemáticas. Porque podía ir a su cubículo y usted siempre tenía tiempo para mí. Gracias por cada experiencia que me compartió. Gracias Dr. Jorge.

A Guadalupe Santiago, porque fuiste tú quien me sembró el amor por las Matemáticas. Gracias por esos entrenamientos que me diste. Gracias Lupito, por ser mi profesor y mi amigo.

A mi profesor de la primaria, el maestro Christian. Por las enseñanzas que me dio cuando era niño.

A mis profesores de la secundaria del Colegio Latinoamericano de Tabasco. en especial al maestro Rosario, al maestro Miguel Ángel y a la maestra Ernestina. Los recuerdo con mucho cariño.

A mis profesores de la secundaria Lic. Manuel Sánchez Mármol. En especial al profesor Juan Arturo, al profesor Wilbert y al profesor Collado. Recuerdo con mucho cariño a todo el personal de esta escuela. Aquí fue mi “despertar intelectual” y me agradaba ir de vez en cuando a la biblioteca a leer.

A mis profesores de la preparatoria COBATAB no 6. Todos en especial fueron grandes profesores

para mí. Al profesor Reynolds, al profesor Poot y al director Heredia los recuerdo con cariño.

A mis profesores de la preparatoria del Centro Universitario Americano del Estado de Morelos. En especial al profesor Alcalá, al profesor Ernesto, a la maestra Graciela, al profesor Raúl Tapia, a la maestra Liliana, al profesor Lot, a la maestra Bertha, a la maestra Rebeca y a la maestra Jessica, a Chivis, a Isita, a la señora Edith. Gracias por todo su apoyo y por la paciencia de enseñarme.

A mis profesores de la Facultad de Ciencias. Héctor Méndez, Óscar Palmas, Silvestre Cárdenas, María del Rocío y Loiret Alejandría. Gracias por haberme enseñado de la manera que lo hicieron porque son mi ejemplo para dar clases.

A la profesora Laura Pastrana. Por enseñarme por vez primera el hermoso mundo de las gráficas. Siempre me dio su apoyo. Y cada vez que necesitaba ayuda u orientación, yo sabía que podía recurrir a usted. Tengo el honor de haber sido su alumno. Gracias por todo.

A mis profesores del Instituto de Matemáticas de Ciudad Universitaria y de Cuernavaca, Dr. Erick Treviño, Dr. Carlos Villegas, Dr. Aubin Arroyo, Dr. Carlos Cabrera, Dr. José Luis Cisneros, Dr. Carlos Prieto, Dra. Laura Ortiz y el Dr. Ernesto Rosales por su apoyo siempre incondicional hacia mí.

A mis ayudantes, Mario Nolasco, Felipe Hernández, Germán Benítez, Jorge Alonso, Rodrigo Domínguez, Jesús Palma y Ricardo Guerrero, por su amistad y transmitirme su conocimiento.

A mis amigos del Instituto de Matemáticas de Ciudad Universitaria y de Cuernavaca, Lucinda Serna, Erich Ulises, Jessica Morales, Karla Isayuvi, Daniela Hernández y Melissa Ponce.

A mis sinodales. Dr. Jesús López, Dr. Pablo Barrera, Dr. David Romero, mi más grande aprecio y reconocimiento para ustedes. Muchas gracias por aceptar ser parte de mi jurado y leer este trabajo y tomarse el tiempo de encontrar detalles para corregirlo. Gracias por su paciencia, por su amabilidad y por siempre apoyarme cuando lo necesitaba. Muchísimas gracias.

Al pastor Vitelio Toledo, por el apoyo que nos brindó cuando más lo necesitábamos. Siempre contamos con usted y siempre nos ofreció su ayuda. Gracias Vite, por absolutamente todo.

A Padmabandhu, por enseñarme el camino de la meditación y el budismo. Gracias por enseñarme a vivir con serenidad, en el aquí y el ahora y, poco a poco, sin apegos. Gracias por todo Padma.

A mi madrina Fran y a mi padrino Rey, por acompañarme en el proceso de conocerme a mí mismo.

A la psicóloga Martha Chávez, por salvarme la vida. Por sacarme del hoyo en el que me estaba hundiendo. Gracias por hacerme rendirme y despojarme de mi soberbia, de mi ira y de mi ego. Por abrir los ojos y nacer a una nueva vida. Gracias por enseñarme el camino de la aceptación y amarme tal y como soy. Por enseñarme a ver a mi prójimo con amor, como ser humano. Por enseñarme a perdonar y a soltar. Por tirar el peso del pasado y avanzar. Por enseñarme a que la vida es hermosa tal y como es. A dejar de renegar del pasado y de las circunstancias. A ver hacia adelante, aceptando este mundo tal cual es y no como yo creo que debería ser, así como hizo Cristo en la Tierra. Gracias por enseñarme a vivir un día a la vez y darme cuenta que merezco ser feliz y merezco estar bien. Gracias Martha, por ser mi luz y mi guía. Te apreció con todo mi corazón.

A la Universidad Nacional Autónoma de México. Es un orgullo ser parte de ti. Desde que estaba en la secundaria, cuando tenía 14 o 15 años, siempre quise pertenecer a la Universidad. Y hoy estoy aquí, a punto de titularme y terminando mi segundo semestre de la maestría en tus Institutos. Gracias, Universidad, por todo lo que me has dado, porque he viajado, he andado y he conocido mucha gente gracias a ti. Estaré eternamente agradecido contigo y, cada que tenga la oportunidad, trataré de devolverte lo mucho que me diste, sirviendo a los demás con los conocimientos que me otorgaste.

Por mi raza hablará el espíritu.

Diciembre, 2020.

«Si la vida es, por esencia, un proceso de crecimiento y un proceso de integración y no puede ser amada con medios de control o de fuerza, entonces el amor a la vida es el núcleo de todo tipo de amor. El amor es el amor a la vida en un ser humano, en un animal, en una planta. Lejos de ser algo abstracto, el amor a la vida es el núcleo, un núcleo muy concreto y real, de todo tipo de amor. Quien crea que ama a los seres humanos sin amar la vida, puede desear apegarse a otra persona, pero no amarla de verdad.

»Cuando alguien dice de otra persona que “ama realmente la vida” la mayoría de la gente entiende lo que se quiere decir con ello. Nos imaginamos entonces a una persona que ama todo lo que crece y está vivo, que se siente atraída por el crecimiento infantil, por la maduración, por una idea que va tomando forma, por una organización que no deja de crecer. Para semejante persona, incluso lo que no está vivo, como una piedra o el agua, se convierte en algo vivo. Y lo que está vivo lo atrae, no porque sea algo grande y poderoso sino por estar vivo».

ERICH FROMM

Índice general

Introducción	1
1. Conceptos Preliminares	5
1.1. Álgebra Lineal	5
1.1.1. ¿Qué es un espacio vectorial?	5
1.1.2. Combinaciones lineales e independencia lineal	7
1.1.3. Transformaciones lineales	8
1.1.4. Ortogonalidad	8
1.1.5. Matrices	9
1.2. Teoría de Gráficas	11
1.2.1. Gráficas	11
1.2.2. Tipos de gráficas	13
1.2.3. Conexidad	14
1.2.4. Operaciones en gráficas	16
1.2.5. Bosques y árboles	17
1.2.6. Matriz de incidencia de una gráfica	18
1.2.7. Digráficas	20
1.2.8. Algunas digráficas, conexidad y matriz de incidencia	21
2. Conjuntos de corte y ciclos	23
2.1. Conjuntos de corte de G	23
2.1.1. Conjuntos de corte minimales	30
2.1.2. Conjuntos de corte fundamentales	35
2.2. Gráficas pares de G	38
2.2.1. Los ciclos de G	39
2.2.2. Ciclos fundamentales	42
2.3. Relación entre los conjuntos de corte y las gráficas pares	44
2.4. Cortes y ciclos en digráficas	45
2.4.1. Conjuntos de corte de D	45

2.4.2. Los ciclos de D	46
3. Espacios vectoriales	49
3.1. Espacios en gráficas	49
3.1.1. Espacio de aristas $\mathcal{E}(G)$	49
3.1.2. Espacio de conjunto de cortes $\mathcal{B}(G)$	51
3.1.3. Espacio de ciclos $\mathcal{C}(G)$	53
3.2. Vectores de incidencia	54
3.3. La matriz de incidencia de G	57
3.3.1. Rango y nulidad de \mathbf{M}_G	58
3.3.2. Matrices reducidas	59
3.3.3. Relaciones de independencia lineal en \mathbf{M}_G	61
3.4. Espacios en digráficas	61
3.4.1. Espacio de tensiones $\mathcal{B}(D)$	62
3.4.2. Espacio de circulaciones $\mathcal{C}(D)$	67
3.4.3. Relación entre $\mathcal{B}(D)$ y $\mathcal{C}(D)$	71
3.4.4. Rango, nulidad y relaciones de independencia lineal en \mathbf{M}_D	71
3.4.5. Matrices reducidas	73
3.5. Cortes y ciclos fundamentales en digráficas	73
3.5.1. Tensiones fundamentales	73
3.5.2. Circulaciones fundamentales	74
4. Algunas aplicaciones	77
4.1. Otras matrices asociadas a gráficas y digráficas	77
4.1.1. Matriz de cortes	77
4.1.2. Matriz de ciclos	80
4.1.3. Relaciones entre las matrices \mathbf{M} , \mathbf{B} y \mathbf{C}	82
4.2. ¿Cuántos árboles generadores tiene una gráfica?	82
4.3. Redes eléctricas	85
4.4. Gráficas planas	88
4.5. Optimización Combinatoria	90
4.5.1. Flujo en redes	90
4.5.2. Matroides	91
Bibliografía	93
Índice Alfabético	94

Introducción



EN los años 1670, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) escribió a Christiaan Huygens (1629 - 1695): “*Necesitamos un análisis propiamente geométrico o lineal, que exprese directamente la situación (el situs), como el álgebra expresa la magnitud*”. Leibniz no estaba conforme con el enfoque geométrico de Euclides ni con el de la recién creada *Geometría Analítica* de René Descartes (1596 - 1650). Su sueño era crear una especie de lenguaje universal en el que todos los teoremas pudieran ser demostrados mediante manipulaciones de algunos símbolos. Su *Análisis Situs* pretendía seguir esta dirección, aunque no cosechó muchos frutos en su época. No obstante, esta idea de la *Geometría de la Posición* estaría en constante búsqueda por parte de los matemáticos que sucedieron a Leibniz.

Se sabe que la *Teoría de Gráficas* tuvo su origen en 1736 de la mano de Leonhard Euler (1707 - 1783) al resolver el famoso problema de los Puentes Königsberg (hoy Kaliningrado, Rusia). De hecho, Euler consideraba que sus nuevos métodos eran parte del ansiado Análisis Situs de Leibniz, dando inicio a lo que posteriormente se conocería como *Topología*.

Respecto al *Álgebra Lineal*, sus orígenes pueden rastrearse hasta las culturas babilónica y egipcia. En el mundo oriental, los matemáticos chinos lograron desarrollar métodos de resolución de sistemas de ecuaciones.

Hallamos en Leibniz y en el matemático japonés Seki Kowa (1642 - 1708) las primeras menciones de los *determinantes*. Aunque no sería hasta 1850 cuando James Joseph Sylvester (1814 - 1897) acuña por primera vez el término *matriz* para designar los arreglos rectangulares de números asociados a los sistemas de ecuaciones. En esta época, Arthur Cayley (1821 - 1895) desarrolla el álgebra de matri-



Fig. 1. Gottfried Leibniz

ces definiendo sus operaciones básicas así como la inversa de una matriz y su construcción. El francés Camille Jordan (1838 - 1922) también hace importantes contribuciones al respecto.



Fig. 2. Leonhard Euler

Años después, Henri Poincaré retomaría estas ideas sistematizándolas en su fundamental artículo (junto con cinco suplementos) titulado *Analysis Situs* y dando nacimiento a la *Topología Algebraica*. Encontramos en este artículo la primera mención de la *matriz de incidencia* de una gráfica.

A su vez, el matemático estadounidense Oswald Veblen (1880 - 1960) retomó el trabajo de Poincaré y publicó en 1922 un libro llamado también *Analysis Situs*. Fue el primer libro de texto de Topología en inglés. Entre sus muy diversas contribuciones, se encuentran por primera vez sistematizados los conceptos de Teoría de Gráficas junto con el Álgebra Lineal. Aquí se hace mención, por ejemplo, del *rango* y la *nulidad* de una gráfica como las dimensiones, respectivamente, del espacio de renglones y el espacio nulo de la matriz de incidencia de la gráfica. Veblen también aportó al estudio de las gráficas planas, de los ciclos y en el *Problema de los Cuatro Colores*.

En los años 1930, Hassler Whitney (1907 - 1989) se interesó también en el Problema de Los Cuatro Colores y en hallar una caracterización combinatoria de las gráficas planas. Para esto, Whitney utilizó conceptos algebraicos como los mencionados en el libro de Veblen. Logró darse cuenta de varias similitudes entre los espacios vectoriales y las subgráficas de una gráfica dada y generalizó estas relaciones en unas nuevas estructuras que llamó *matroides*.

Después de la Segunda Guerra Mundial, se produjo un desarrollo en la Programación Lineal gracias a George B. Dantzig y su *Método Simplex*. Este acontecimiento provocó el surgimiento de la Optimización Combinatoria (que ya venía gestándose paralelamente a la Teoría de Gráficas) como disciplina en los años 50, donde los matroides encontraron sus aplicaciones más importantes.

La historia de la Teoría de Gráficas está documentada (con todo detalle) en el libro de Biggs, Lloyd y Wilson [2].

Es curioso que tanto Sylvester, Jordan y Cayley estudiaron los *árboles* de las gráficas, siendo este último el más prolífico. Debe mencionarse aquí que fue el propio Sylvester el primero en usar el término *gráfica* para designar a los *sistemas de puntos y líneas* (así eran llamadas las gráficas en esos tiempos).

Quizás no es tan conocido que la Teoría de Gráficas terminó por consolidarse con las contribuciones del físico alemán Gustav Robert Kirchhoff (1824 - 1887), nacido en Königsberg. Kirchhoff estableció dos leyes fundamentales en el análisis de las *redes eléctricas* que dan lugar a ciertos sistemas de ecuaciones. Para resolverlos, el físico hizo uso de la gráfica asociada a la red eléctrica y, con ayuda de los árboles generadores, construyó sistemas de ecuaciones linealmente independientes más fáciles de solucionar. Este fue de los primeros momentos en que el Álgebra Lineal y la Teoría de Gráficas se relacionaron.

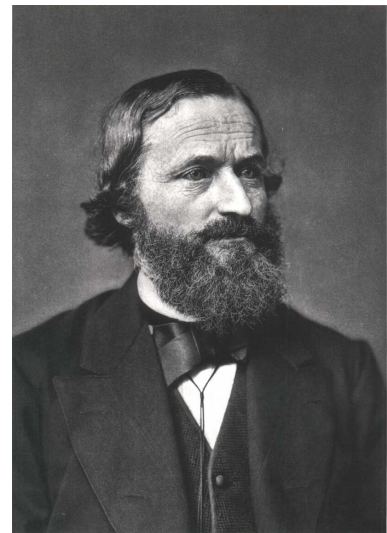
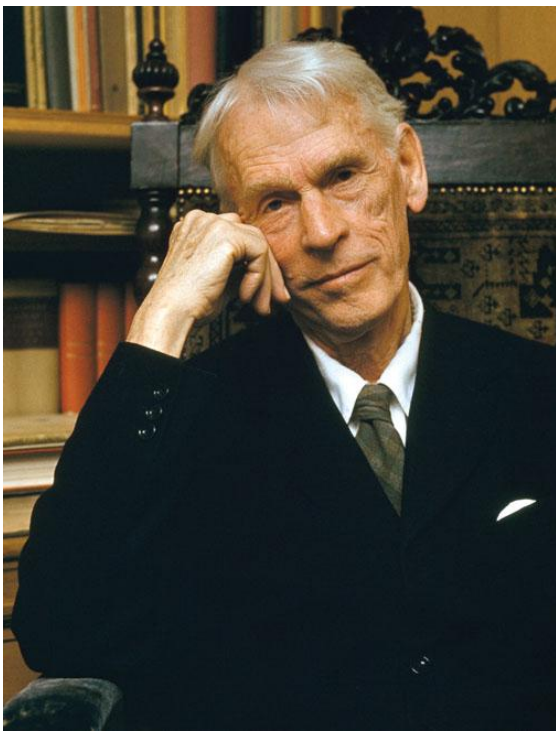
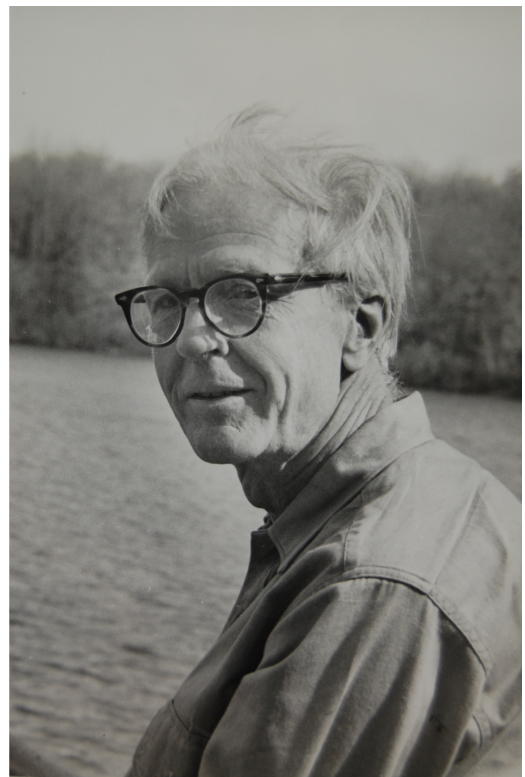


Fig. 3. Gustav Kirchhoff



(a) Oswald Veblen



(b) Hassler Whitney

Conceptos Preliminares



Es imposible estudiar una teoría matemática sin antes establecer sus definiciones básicas y su notación respectiva. En este capítulo desglosaremos brevemente las ideas y la terminología de las dos ramas de las Matemáticas involucradas en esta tesis. Muchos de los resultados mencionados aquí los dejaremos sin demostración ya que no es nuestro objetivo principal.

1.1. Álgebra Lineal

A continuación abordaremos los conceptos y las notaciones de las que haremos uso a lo largo de este trabajo. Si el lector está interesado en profundizar en estos temas, y desea conocer las demostraciones de los teoremas mencionados, se le invita a revisar [9, 12, 19, 16].

1.1.1. ¿Qué es un espacio vectorial?

Un *campo* \mathbb{F} es un conjunto, en el cual están definidas dos operaciones $+$ y \bullet , llamadas *suma* y *multiplicación*, respectivamente, de tal manera que por cada par de elementos $x, y \in \mathbb{F}$, existen únicos $x + y$ y $x \bullet y$ en \mathbb{F} . Además, para todo $a, b, c \in \mathbb{F}$, deben cumplirse las siguientes condiciones:

1. *Conmutatividad de la suma y multiplicación:* $a + b = b + a$ y $a \bullet b = b \bullet a$
2. *Asociatividad de la suma y multiplicación:* $(a + b) + c = a + (b + c)$ y $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$.
3. *Existencia del neutro aditivo y del neutro multiplicativo:*
Existen $0, 1 \in \mathbb{F}$, tales que: $0 + a = a$ y $1 \bullet a = a$.
4. *Existencia del inverso aditivo y del inverso multiplicativo:*
Para cualesquiera a en \mathbb{F} y $b \neq 0$ en \mathbb{F} , existen c y d en \mathbb{F} tales que: $a + c = 0$ y $b \bullet d = 1$.

5. *Distributividad de la multiplicación sobre la suma:* $a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$

El campo más sencillo con el que trabajaremos en esta tesis es el campo de Galois $GF(2)$ (también denotado por \mathbb{Z}_2 ó \mathbb{F}_2). Este campo es el conjunto $\{0, 1\}$ con las operaciones dadas por las siguientes tablas (puede notarse que aquí la suma coincide con el álgebra módulo 2 en los números enteros):

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} \bullet & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Otros campos más utilizados son los números reales \mathbb{R} y los complejos \mathbb{C} con la suma y multiplicación usuales.

Un *espacio vectorial* V sobre un campo \mathbb{F} consiste de un conjunto V con dos operaciones definidas en él, llamadas *suma* $+$ y *multiplicación escalar* \cdot , tales que, para cualesquiera $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ y todo $k \in \mathbb{F}$, existen únicos $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$ y $k \cdot \mathbf{x} \in V$. Además, estas operaciones deben cumplir lo siguiente:

1. Para cualesquiera $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.
2. Para cualesquiera $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$, $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$.
3. Existe un elemento $\mathbf{0} \in V$ tal que, para todo $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$.
4. Para todo $\mathbf{x} \in V$, existe $-\mathbf{x} \in V$ tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.
5. Para todo \mathbf{x} , $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.
6. Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{F}$, y todo $\mathbf{x} \in V$, $(ab) \cdot \mathbf{x} = a(b \cdot \mathbf{x})$.
7. Para todo $a \in \mathbb{F}$, y cualesquiera \mathbf{x}, \mathbf{y} , $a \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a \cdot \mathbf{x} + a \cdot \mathbf{y}$.
8. Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{F}$, y todo \mathbf{x} , $(a + b) \cdot \mathbf{x} = a \cdot \mathbf{x} + b \cdot \mathbf{x}$.

A los elementos de \mathbb{F} y V les llamamos *escalares* y *vectores*, respectivamente. Un subconjunto W de un espacio vectorial V sobre \mathbb{F} es un *subespacio vectorial* si W es un espacio vectorial sobre \mathbb{F} con las mismas operaciones definidas en V . De hecho, se sabe que W es un subespacio si y sólo si $\mathbf{0} \in W$, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$, para cualesquiera $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$; y $k\mathbf{x} \in W$, para todo $k \in \mathbb{F}$ y $\mathbf{x} \in W$.

Una n -ada ordenada es un vector del espacio \mathbb{F}^n y la escribimos en *forma de columna*. Así, dados $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$, escribimos

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n.$$

Dependiendo de la situación, estas n -adas se escribirán en *forma de renglón*: $[a_1 \ \cdots \ a_n]$. Si agregamos el superíndice “T” al *vector renglón*, entonces obtenemos un *vector columna*, es decir:

$$[a_1 \ \cdots \ a_n]^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Resulta que \mathbb{F}^n es uno de los espacios vectoriales más conocidos, cuya suma y producto escalar se hacen *entrada a entrada* con la suma y producto del campo \mathbb{F} . En efecto, sean $\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}^T$ en \mathbb{F}^n y $k \in \mathbb{F}$. Entonces

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

y

$$k \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1 \\ \vdots \\ ka_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n.$$

De lo anterior, se desprende que \mathbb{R}^n y \mathbb{C}^n también son espacios vectoriales. Si $\mathbb{F} = GF(2)$, entonces denotamos por \oplus a la suma en $GF(2)^n$. Ésta, desde luego, se hace entrada a entrada siguiendo las operaciones que exhibimos en tablas líneas arriba. Por ejemplo, tomemos $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ en $GF(2)^4$. Entonces

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1.1.2. Combinaciones lineales e independencia lineal

Dados un espacio vectorial V y $S \subseteq V$, decimos que $\mathbf{v} \in V$ es una *combinación lineal de vectores de S* si existe una cantidad finita de vectores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in S$ y escalares $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{F}$ tales que $\mathbf{v} = k_1\mathbf{u}_1 + \cdots + k_n\mathbf{u}_n$. Usualmente llamamos *coeficientes* a los escalares de la combinación lineal.

El conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de vectores en S es llamado el *espacio generado de S* y lo escribimos $span(S)$ y es un subespacio de V . Si $span(S) = V$, se dice que S genera a V .

Si hacemos una combinación lineal $k_1\mathbf{u}_1 + \cdots + k_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$, con $k_1 = \dots = k_n = 0$, entonces ésta es llamada *combinación lineal trivial del $\mathbf{0}$* . Un conjunto de vectores S se dice que es *linealmente dependiente* si existe una combinación lineal del $\mathbf{0}$ no trivial con vectores de S . En caso contrario, esto es, cuando la única combinación lineal del $\mathbf{0}$ es la trivial, se dice que S es un conjunto *linealmente independiente*.

Se sabe que si $S \subseteq T$ y T es linealmente independiente, entonces S es también linealmente independiente. Si S es linealmente dependiente, necesariamente T también lo es. De igual modo, se conoce que, si $\mathbf{u} \notin S$, entonces $S \cup \{\mathbf{u}\}$ es linealmente dependiente si y sólo si $\mathbf{u} \in span(S)$.

Una *base* β de V es un subconjunto linealmente independiente de V tal que $span(\beta) = V$. Las bases de los espacio vectoriales son de suma importancia. Por ejemplo, todo vector de V puede expresarse de manera única como combinación lineal de vectores de β y cualesquiera de sus bases tienen la misma cardinalidad. Este número es la *dimensión* del espacio vectorial y se le denota como $dim(V)$. En particular, todos los espacios que trataremos en esta tesis son de *dimensión finita*.

Una base de \mathbb{F}^n es aquella conformada por los vectores canónicos \mathbf{e}_i (cuya i -ésima entrada es 1 y 0 en las demás). Por lo que $dim(\mathbb{F}^n) = n$.

Si W es un subespacio de V , entonces $\dim(W) \leq \dim(V)$. La cantidad de elementos en un conjunto linealmente independiente no puede exceder la dimensión del espacio. Tampoco el número de vectores en un conjunto generador es menor que dicha dimensión. En otras palabras, si S es linealmente independiente en V y $\text{span}(S) = V$, entonces $|S| \leq \dim(V) \leq |T|$.

Dados A y B subespacios de V , la suma de A y B es el subespacio

$$A + B := \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V \mid \mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B\}.$$

Decimos que V es suma directa de A y B si y sólo si $A \cap B = \{\mathbf{0}\}$ y $A + B = V$. Si ocurre lo anterior, escribimos $V = A \oplus B$ y se cumple que $\dim(V) = \dim(A) + \dim(B)$. Además, si β_1 y β_2 son bases de A y B , respectivamente, entonces $\beta_1 \cup \beta_2$ es una base de V . Observe que esta última definición (junto con sus propiedades) se pueden extender a cualquier cantidad de subespacios vectoriales.

1.1.3. Transformaciones lineales

Las transformaciones lineales entre espacios vectoriales son una clase especial de funciones que preservan la estructura de los espacios. En [9] hay un estudio extenso sobre ellas. Formalmente, si V y W son espacios vectoriales (ambos sobre \mathbb{F}), una función $T : V \rightarrow W$ es una *transformación lineal* si para cualesquiera $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ y todo $c \in \mathbb{F}$, se cumple que $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$ y $T(c\mathbf{x}) = c \cdot T(\mathbf{x})$.

Hay dos subespacios vectoriales asociados a una transformación T : el *Kernel* (o *núcleo*) de T , que es el conjunto $\text{Ker}(T) := \{\mathbf{x} \in V \mid T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$; y la *imagen* de T , que es $\text{Im}(T) := \{T(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in V\}$. El *rango* de T es la dimensión de su imagen y la *nulidad* de T es la dimensión de su kernel, es decir,

$$\begin{aligned} \text{rank}(T) &:= \dim(\text{Im}(T)), \\ \text{null}(T) &:= \dim(\text{Ker}(T)). \end{aligned}$$

El *teorema de la dimensión* (o *teorema de rango-nulidad*) establece que, si V tiene dimensión finita, entonces $\dim(V) = \text{rank}(T) + \text{null}(T)$.

Decimos que dos espacios V y W son *isomorfos* si y sólo si existe una transformación lineal biyectiva $T : V \rightarrow W$. A tal transformación se le llama *isomorfismo*. Importantes teoremas se deducen de esta definición: si dos espacios son isomorfos, entonces tienen la misma dimensión; aún más, si V es un espacio vectorial sobre \mathbb{F} y $\dim(V) = n$, entonces V es isomorfo a \mathbb{F}^n .

1.1.4. Ortogonalidad

Un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) es un *espacio con producto interior* si está dotado de un *producto interior* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (también llamado *producto escalar* o *producto interno*) que satisface, para todo $k \in \mathbb{F}$ y para cualesquiera $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, lo siguiente:

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ y $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
2. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.
3. $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.
4. $\overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.

Al tener un producto interior definido en V , obtenemos una noción de *ortogonalidad* entre vectores. De hecho, se dice que dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ son ortogonales si y sólo si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Si S es un subconjunto no vacío de V , entonces el *complemento ortogonal de S* es el subespacio S^\perp de vectores ortogonales a todo vector de S , o sea,

$$S^\perp := \{\mathbf{x} \in V \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0, \text{ para todo } \mathbf{y} \in S\}.$$

Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, el producto interior usual en \mathbb{R}^n es

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Para espacios vectoriales sobre campos finitos, como $GF(2)$, también podemos considerar el mismo producto interior usual. No obstante, como se verá más adelante, este producto escalar (en espacios sobre campos finitos) falla en el primer punto de la definición de producto interno: hay vectores \mathbf{u} tales que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ pero $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Entonces hay vectores *ortogonales a sí mismos*. Sólo se cumple que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ y, si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, necesariamente $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$. Los productos escalares que verifican esto último (en vez del punto 1 de la definición) se llaman *productos interiores degenerados*.

1.1.5. Matrices

Una *matriz \mathbf{A} de $n \times m$ sobre un campo \mathbb{F}* es un arreglo rectangular de m renglones y n columnas. El conjunto de estas matrices se escribe como $\mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{F})$. Los vectores columna de n entradas, en particular, se pueden considerar como matrices de tamaño $1 \times n$. La matriz cuyas entradas son todas 0 se escribe \mathbf{O} y frecuentemente escribimos $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ para denotar, de manera abreviada, a la matriz \mathbf{A} y sus entradas, es decir,

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Definimos la j -ésima *columna de \mathbf{A}* como el vector de tamaño $n \times 1$

$$\mathbf{c}_j := \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

Entonces escribimos $\mathbf{A} = [\mathbf{c}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{c}_m]$. Análogamente, el i -ésimo *renglón de \mathbf{A}* es el vector de tamaño $1 \times n$, $\mathbf{r}_i := [a_{i1} \mid \cdots \mid a_{im}]$. Y escribimos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ - \\ \vdots \\ - \\ \mathbf{r}_n \end{bmatrix}.$$

Démonos cuenta que $\mathbf{c}_j \in \mathbb{F}^n$ y $\mathbf{r}_i \in \mathbb{F}^m$.

La suma de dos matrices del mismo tamaño, $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ y $\mathbf{B} = [b_{ij}]$, es la matriz $\mathbf{A} + \mathbf{B} := [a_{ij} + b_{ij}]$. También definimos el producto de un vector renglón y un vector columna como sigue:

Supongamos que $\mathbf{a} := [a_1 \ \cdots \ a_m]$ y $\mathbf{b} := \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$. Entonces

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = [a_1 \ \cdots \ a_m] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} := [a_1b_1 + \cdots + a_mb_m].$$

De esta manera, dadas $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{F})$ y $\mathbf{B} \in \mathbb{M}_{m \times q}(\mathbb{F})$, el *producto de \mathbf{A} y \mathbf{B}* es la matriz $\mathbf{AB} \in \mathbb{M}_{n \times q}(\mathbb{F})$ de la forma

$$\mathbf{AB} := [\mathbf{r}_{1\mathbf{A}}\mathbf{c}_{1\mathbf{B}} \mid \cdots \mid \mathbf{r}_{m\mathbf{A}}\mathbf{c}_{m\mathbf{B}}],$$

donde $\mathbf{r}_{i\mathbf{A}}$ es el i -ésimo renglón de \mathbf{A} y $\mathbf{c}_{i\mathbf{B}}$ es la i -ésima columna de \mathbf{B} .

El producto de una matriz de tamaño $n \times m$ por un vector de tamaño $m \times 1$ nos arroja otro vector de tamaño $n \times 1$. Dicho de otro modo, dado

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^m,$$

el producto \mathbf{Ax} está dado por

$$\mathbf{Ax} = [\mathbf{c}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{c}_m] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = x_1\mathbf{c}_1 + \cdots + x_m\mathbf{c}_m \in \mathbb{F}^n.$$

El espacio generado por las columnas de \mathbf{A} lo denotamos como $\mathbf{C}(\mathbf{A})$; y al espacio generado por los renglones lo escribimos como $\mathbf{R}(\mathbf{A})$. Al igual que las transformaciones lineales, las matrices también tienen un *Kernel* (o *espacio nulo*) y es el conjunto

$$\mathit{Ker}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^m \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\}.$$

Estos espacios vectoriales nos permiten definir el rango y la nulidad de una matriz. En efecto, el *rango* de \mathbf{A} es $\mathit{rank}(\mathbf{A}) := \dim(\mathbf{C}(\mathbf{A}))$ y la *nulidad* de \mathbf{A} es $\mathit{null}(\mathbf{A}) := \dim(\mathit{Ker}(\mathbf{A}))$.

Puede probarse que $\mathit{rank}(\mathbf{A}) = \dim(\mathbf{R}(\mathbf{A}))$. Entonces, dados los conocimientos de espacios vectoriales y sus dimensiones, suele decirse que el rango de una matriz es *el máximo número de sus columnas linealmente independientes* o *el máximo número de sus renglones linealmente independientes*. Otra propiedad importante es que $(\mathbf{R}(\mathbf{A}))^\perp = \mathit{Ker}(\mathbf{A})$ y $(\mathit{Ker}(\mathbf{A}))^\perp = \mathbf{R}(\mathbf{A})$.

Si las columnas y renglones de una matriz \mathbf{B} están contenidas en las columnas y renglones de \mathbf{A} , entonces decimos que \mathbf{B} es *submatriz* de \mathbf{A} .

Una matriz \mathbf{A} puede *partirse* en varias submatrices. Por ejemplo, \mathbf{A} puede escribirse de la forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{bmatrix}.$$

En tal caso, se dice que \mathbf{A} tiene una *partición por bloques*. Si \mathbf{A} es de la forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{A}_n \end{bmatrix}$$

(donde, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ \mathbf{A}_i es submatriz de \mathbf{A}), decimos que \mathbf{A} es una *matriz diagonal por bloques*. Entonces podemos probar que $\mathbf{C}(\mathbf{A}) = \mathbf{C}(\mathbf{A}_1) \oplus \cdots \oplus \mathbf{C}(\mathbf{A}_n)$ y también que $\mathbf{R}(\mathbf{A}) = \mathbf{R}(\mathbf{A}_1) \oplus \cdots \oplus \mathbf{R}(\mathbf{A}_n)$. Así, $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}_1) + \cdots + \text{rank}(\mathbf{A}_n)$.

Se dice que una matriz \mathbf{A} es *cuadrada* si tiene el mismo número de renglones que de columnas. Estas matrices poseen una gran relevancia en las aplicaciones del Álgebra Lineal. La *diagonal* de una matriz cuadrada son sus entradas de la forma a_{ii} , con $i \in \{1, \dots, n\}$; y se dice que \mathbf{A} es una *matriz diagonal* si $a_{ij} = 0$ con $i \neq j$. En particular, la *matriz identidad* \mathbf{I}_n es aquella que en su diagonal tiene entradas iguales a 1 y, en el resto, entradas iguales a 0.

El *determinante* es número que se asocia a las matrices cuadradas y otorga información relevante sobre dicha matriz. Dada $\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{F})$, su determinante se calcula recursivamente mediante la *fórmula de Laplace*:

$$\det(\mathbf{A}) := \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(\widetilde{\mathbf{A}}_{1j}),$$

donde $\widetilde{\mathbf{A}}_{1j}$ es la submatriz obtenida de \mathbf{A} eliminando el renglón 1 y la columna j .

El estudio de las matrices es un campo bastante amplio. Si se quiere profundizar más al respecto, recordamos al lector que puede consultar [9, 12, 19, 16].

1.2. Teoría de Gráficas

Para ser capaces de dar una definición satisfactoria de *gráfica* (o *grafo*) conviene primero recordar las siguientes definiciones. Dado un conjunto A , el conjunto de todos sus subconjuntos se le conoce como *conjunto potencia de A* y se denota por $\mathcal{P}(A)$. Supongamos ahora que A tiene n elementos y tomemos $k \leq n$. Entonces $\binom{A}{k}$ es la familia de subconjuntos de A cuya cardinalidad es k , esto es:

$$\binom{A}{k} = \left\{ S \in \mathcal{P}(A) \mid k = |S| \right\}$$

Gracias a la Combinatoria sabemos que $\left| \binom{A}{k} \right| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Usualmente llamamos *pares no ordenados* a los elementos de $\binom{A}{2}$ y de $\binom{A}{1}$.

1.2.1. Gráficas

Con lo comentado en los párrafos anteriores, decimos que una *gráfica* G es un par ordenado $(V(G), E(G))$ que consiste de un conjunto $V(G)$ de *vértices* y un conjunto $E(G)$ de *aristas* (ajeno con $V(G)$); junto con una *función de incidencia* $\psi_G: E(G) \rightarrow \binom{V(G)}{1} \cup \binom{V(G)}{2}$ que asocia a cada arista de G un par no ordenado de vértices de G (no necesariamente distintos). Véase el ejemplo 1.1.

Si e es una arista y u y v son vértices de G de tal manera que $\psi_G(e) = \{u, v\}$, entonces a u y v les llamamos *extremos* de e . También es común decir que e *une* a los vértices u y v , y que u es *adyacente* a v (y viceversa). De igual modo, cuando varias aristas comparten un extremo, decimos que tales aristas son *adyacentes*.

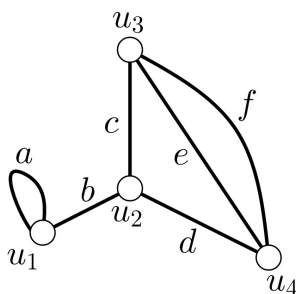
Ejemplo 1.1

Sea $G = (V(G), E(G))$, con $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ y $E(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ y ψ_G definida como sigue:

$$\begin{aligned} \psi_G(a) &= \{u_1\}, & \psi_G(b) &= \{u_1, u_2\}, & \psi_G(c) &= \{u_2, u_3\}, \\ \psi_G(d) &= \{u_2, u_4\}, & \psi_G(e) &= \{u_3, u_4\}, & \psi_G(f) &= \{u_3, u_4\}. \end{aligned}$$

◆

Es usual representar a las gráficas mediante *diagramas* que nos ayudan a visualizar mucho mejor sus características. Estos diagramas consisten de *puntos* y *líneas* que simbolizan los vértices y las aristas, respectivamente. Un diagrama de este estilo muestra las relaciones de incidencia de forma sencilla. En la figura 1.1 se muestra el diagrama de la gráfica del ejemplo 1.1.

**Fig. 1.1**

Es común referirse al diagrama como la gráfica en sí. Por tanto, los puntos del diagrama serán llamados también *vértices* y sus líneas *aristas*. La función de incidencia queda ya implícita, pues en el diagrama están claras las adyacencias entre vértices y aristas.

Para simplificar el discurso (y cuando no haya riesgo de ambigüedad), suele omitirse la letra “ G ” de los símbolos que usamos para denotar los conjuntos de vértices y aristas; así, escribimos “ V ” en vez de “ $V(G)$ ” y “ E ” en lugar de “ $E(G)$ ”. También la función de incidencia queda sobreentendida.

Sea G una gráfica y tomemos $e \in E$. Si sus extremos son iguales, se dice que e es un *lazo*. Si hay alguna otra arista, digamos f , con los mismos extremos que e , entonces decimos que e y f son *aristas paralelas*.

Ejemplo 1.2

En la gráfica de la figura 1.1, la arista a es un lazo, pues u_1 es su único extremo. Mientras que las aristas e y f son paralelas, ya que u_3 y u_4 son sus extremos.

◆

El *grado de un vértice* es la cantidad total de aristas adyacentes en un vértice dado (los lazos se cuentan doble). A tal número se le denota por $d(v)$, y $d_G(v)$ para enfatizar a qué gráfica pertenece el vértice v . Por ejemplo, basándonos en la figura 1.1, $d(u_1) = 3$ y $d(u_4) = 3$. Una de las propiedades más importantes de los grados es que *la suma total de todos los grados de los vértices de una gráfica es, necesariamente, igual al doble del número de aristas en dicha gráfica*. En la sección 1.2.6 se dará una justificación de este hecho.

Decimos que G es una *gráfica simple* si no tiene lazos ni aristas paralelas. En tal caso, suele considerarse que $E(G) \subseteq V(G) \times V(G)$ (y la función de incidencia es la *función inclusión de $E(G)$*).

1.2.2. Tipos de gráficas

Una gráfica es *finita* si sus conjuntos de vértices y aristas son finitos. Todas las gráficas que se estudian en este trabajo son finitas. Si estos conjuntos son vacíos, entonces la gráfica (\emptyset, \emptyset) es *nula*.

Tomemos n vértices (con $n \geq 1$), digamos u_1, \dots, u_n . La *gráfica vacía* es la gráfica

$$\emptyset := (\{u_1, \dots, u_n\}, \emptyset),$$

es decir, \emptyset es una gráfica que no tiene aristas. Si se quiere enfatizar el número de vértices de la gráfica vacía, entonces escribimos \emptyset_n . Si la gráfica consiste de un sólo vértice, decimos que es *trivial*. Cabe aclarar lo siguiente: cuando hablemos del *conjunto vacío*, lo haremos utilizando el símbolo “ \emptyset ”; por otro lado, el símbolo “ \emptyset ” representa a la gráfica vacía. El conjunto vacío y la gráfica vacía *no* deben ser confundidos.

Decimos que H es *subgráfica* de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$ y ψ_H es la *restricción* de ψ_G a $E(H)$. Si lo anterior sucede, escribimos $H \subseteq G$. Una subgráfica de G es *generadora* si su conjunto de vértices es exactamente el mismo que G , es decir, $H \subseteq G$ es *generadora* si y sólo si $V(H) = V(G)$.

Sea $X \subseteq V(G)$. La *subgráfica inducida por X* , $G[X]$, es aquella cuyo conjunto de vértices es X y sus aristas son aristas de G que tienen sus extremos en X . Similarmente, si $S \subseteq E(G)$, $G[S]$ denota la *subgráfica inducida por S* , cuyo conjunto de aristas es S y su conjunto de vértices queda determinado por los extremos de las aristas en S . Para evitar confusiones, también decimos que $G[S]$ es una *subgráfica inducida por aristas*. En particular, $G[S]$ es una *subgráfica generadora inducida por aristas* si S es su conjunto de aristas y conserva todos los vértices originales, es decir, su conjunto de vértices es $V(G)$.

Una *gráfica completa* es una gráfica simple en la que cualesquiera dos vértices son adyacentes. Si tal gráfica consta de n vértices, se le escribe como K_n . En el inciso (a) de la figura 1.2 mostramos la gráfica completa de 5 vértices.

Una *gráfica bipartita* es una gráfica simple en la que su conjunto de vértices puede partirse en dos conjuntos, digamos X y Y , de tal forma que cualquier arista tenga uno de sus extremos en X y el otro en Y (y, por tanto, que no haya aristas que unan dos vértices de X , ni tampoco de Y). Suele denotarse como $G[X, Y]$.

Sea $G[X, Y]$ gráfica bipartita y supongamos que en X y Y hay n y m vértices, respectivamente. Si sucediera que todos los vértices de X son adyacentes a todos los de Y , entonces decimos que $G[X, Y]$ es una *gráfica bipartita completa* y se escribe $K_{n,m}$. En el inciso (b) de la figura 1.2 está la gráfica $K_{3,2}$.

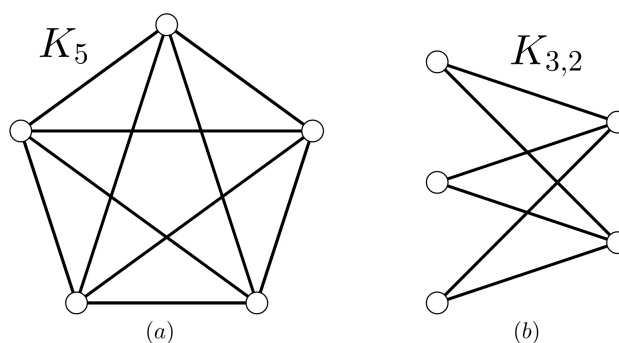


Fig. 1.2

Una *gráfica conexa* es aquella en la que dada cualquier partición (X, Y) de su conjunto de vértices, siempre hay al menos una arista con un extremo en X y otro en Y . Si sucediera lo contrario, es decir, que exista una partición de sus vértices en los que no hay aristas entre tales conjuntos, entonces decimos que la gráfica no es conexa (o *inconexa*).

La definición clásica de *ciclo* nos dice que es una gráfica conexa en la que todos sus vértices tienen grado 2. La notación que suele utilizarse es C_n , donde n es el número de vértices del ciclo; y es fácil notar que también debe tener n aristas. A este número n se le conoce como la *longitud* del ciclo. Así, bajo esta definición, un ciclo de longitud 1 es, necesariamente, un lazo; y uno de longitud 2 consta de un par de aristas paralelas. Véase la figura 1.3.

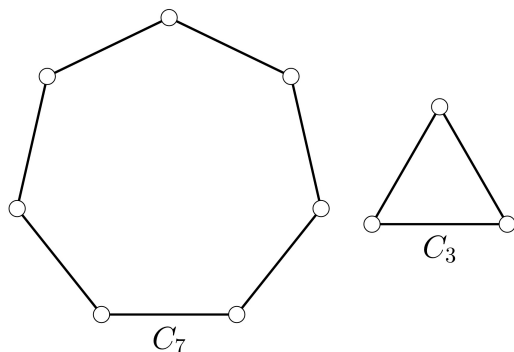


Fig. 1.3

Los ciclos y su longitud son bastante útiles para caracterizar ciertas gráficas. Hechos tales como: que *un ciclo es bipartito si y sólo si es de longitud par*; y que *una gráfica es bipartita si y sólo si no contiene ciclos de longitud impar*, son ampliamente usados en la Teoría de Gráficas.

De hecho, el siguiente teorema nos será de mucha ayuda, pues ofrece condiciones necesarias para la existencia de ciclos.

Teorema 1.1

Si G es una gráfica en la que todos sus vértices tienen grado al menos dos, entonces G contiene un ciclo.

Teorema 1.2

Si G es una gráfica con n vértices y m aristas, de tal manera que $m \geq n$ (o sea, que hay más aristas que vértices), entonces G contiene un ciclo.

1.2.3. Conexidad

Un *camino* en una gráfica G es una sucesión $W := u_0 e_1 u_1 \dots u_{l-1} e_l u_l$ de vértices y aristas de tal forma que u_{i-1} y u_i son extremos de e_i , con $i \in \{1, \dots, l\}$. Los vértices y aristas que aparecen en W no son necesariamente distintos. La *longitud* W es la cantidad de aristas empleadas en el camino W (también se cuentan las aristas repetidas).

Ejemplo 1.3

Consideremos la gráfica G con vértices $\{u_1, \dots, u_5\}$ y aristas $\{e_1, \dots, e_7\}$, como se muestra en la figura 1.4. Entonces $W_1 = u_3 e_5 u_4 e_5 u_3 e_3 u_2$, $W_2 = u_3 e_4 u_3 e_5 u_4 e_6 u_5$ y $W_3 = u_5 e_7 u_4 e_6 u_5 e_7 u_4 e_5 u_3 e_2 u_1$

son caminos en G .

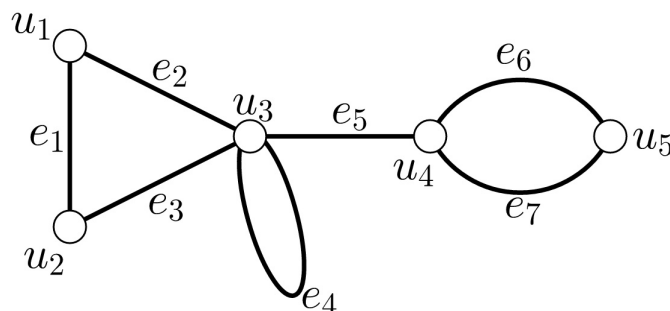


Fig. 1.4

Si $x = u_0$ y $y = u_i$, entonces decimos que W es un xy - camino y que x y y son los *extremos* de W , los demás son *vértices internos*; suele emplearse la notación xWy . También se dice que W *conecta* a los vértices x y y . Cuando las gráficas sean simples, los caminos se describen en términos de sus vértices, es decir, se omiten las aristas.

Ejemplo 1.4

El camino W_1 del ejemplo 1.3 es un u_3u_2 - camino y su longitud es igual a 3 porque utiliza las aristas e_5 (dos veces) y e_3 .

El camino W_2 es un u_3u_5 - camino de longitud 3 y W_3 es un u_5u_1 - camino de longitud 5.

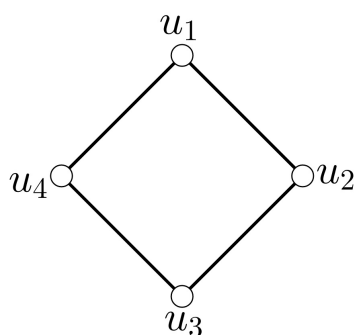


Fig. 1.5

Los caminos se clasifican dependiendo de las características de sus vértices y aristas. En efecto, decimos que un camino es *cerrado* si sus extremos coinciden; si no, es *abierto*. Un *paseo* es un camino en el que todas sus aristas son distintas (pero puede repetir vértices); y una *trayectoria* es un camino en el que todos sus vértices son diferentes (y, por tanto, sus aristas también).

Un xy - paseo es un paseo cuyos extremos son los vértices x y y . Una xy - trayectoria se define análogamente. Además, cuando un paseo es cerrado (es decir, sus extremos son iguales) lo llamamos *circuito*. La gráfica inducida por los vértices de un circuito, en el que todos sus vértices internos son distintos, es un ciclo.

De manera inversa, a cada ciclo podemos asignarle un circuito, aunque no de manera única. Para convencerse de esto, consideremos el ciclo C_4 de la figura 1.5. Es claro que tanto $\Gamma_1 = u_1u_2u_3u_4$ como $\Gamma_2 = u_4u_3u_2u_1$ son dos circuitos que describen el mismo ciclo C_4 .

No obstante, será común que, cuando hablemos de ciclos, lo hagamos considerando alguno de sus circuitos asociados y referirnos a dicho circuito como el ciclo en sí.

Ejemplo 1.5

Considerando ahora la gráfica 1.6, es sencillo notar que un camino cerrado es $W_1 = u_1u_2u_6u_2u_1$.

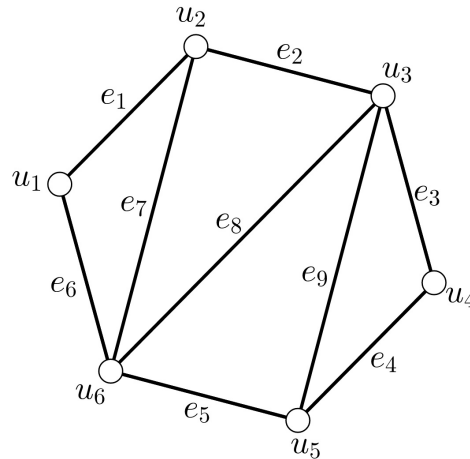


Fig. 1.6

Un paseo y una trayectoria serían $W_2 = u_5e_4u_4e_3u_3e_9u_5e_5u_6e_7u_2$ y $W_3 = u_1u_2u_3u_4$, respectivamente. Mientras que un circuito es $W_4 = u_2u_6u_3u_5u_4u_3u_2$ y $W_5 = u_3u_4u_5$ es un ciclo.



Se sabe bien que *todo* uv – camino cerrado contiene un ciclo. Más aún, *que todo* uv – camino contiene una uv – trayectoria. Estos nuevos conceptos nos permiten dar una nueva definición de conexidad, totalmente equivalente a la que dimos al principio. Efectivamente, una gráfica G es *conexa* si y sólo si, para cualquier par de vértices u y v , existe una uv – trayectoria. Ambas versiones de la definición de conexidad serán usadas indistintamente a lo largo de este trabajo.

1.2.4. Operaciones en gráficas

Hay varias *operaciones* que se pueden realizar entre gráficas. A continuación, se detallan aquellas que más se usaremos en este trabajo.

Dadas dos gráficas G y H , su *unión* $G \cup H$ es la gráfica cuyos conjuntos de vértices y aristas son, respectivamente, $V(G) \cup V(H)$ y $E(G) \cup E(H)$. Su *intersección* $G \cap H$ tiene como vértices y aristas $V(G) \cap V(H)$ y $E(G) \cap E(H)$, respectivamente. La *diferencia simétrica* de G y H está determinada por la diferencia simétrica de sus aristas, o sea, es la gráfica $G \Delta H$ con $V(G) \cup V(H)$ como conjunto de vértices y $E(G) \Delta E(H)$. Véase la figura 1.7.

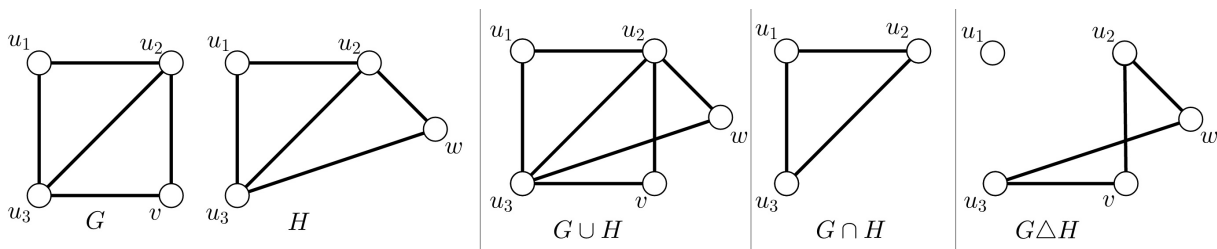


Fig. 1.7

Diremos que G y H son *ajenas* si no tienen vértices en común, es decir, $V(G) \cap V(H) = \emptyset$. También decimos que son *ajenas por aristas* si $E(G) \cap E(H) = \emptyset$. De esta manera, si G y H son ajenas (o

ajenas por aristas), decimos que $G \cup H$ es una *unión ajena* (o *ajena por aristas*).

Si una gráfica es inconexa, entonces puede expresarse como una unión ajena de gráficas conexas, las cuales llamamos *componentes conexas*. A la cantidad total de componentes conexas de una gráfica G se le denota por $c(G)$. Si G es conexa, entonces $c(G) = 1$.

Si $e \in E(G)$, entonces $G \setminus e$ es la gráfica que resulta de remover la arista e de G (conservando los vértices). Si $S \subseteq E(G)$, $G \setminus S$ se define de manera análoga. Si e es una arista con extremos en $V(G)$, que no pertenece a $E(G)$, la gráfica $G + e$ es aquella que añade e a la gráfica G . Similarmente, se define $G + S$, donde S es un conjunto de aristas que no están en $E(G)$ y sus extremos son vértices de G .

1.2.5. Bosques y árboles

Un *bosque* es una gráfica sin ciclos (*acíclica*). Si un bosque es conexo, se le dice *árbol*. Luego, un árbol es una gráfica conexa sin ciclos. Se desprende de aquí que las componentes conexas de los bosques son, precisamente, árboles. Un árbol que consta de un sólo vértice es un *árbol trivial*. En caso contrario, es *no trivial*. Desde luego, un *bosque trivial* se compone de árboles triviales.

Los árboles son la columna vertebral de las gráficas. Su importancia es enorme debido a sus aplicaciones. Varios resultados provienen de este concepto. De hecho, jugarán un papel clave en esta tesis. En lo que sigue mencionaremos algunas de sus propiedades. En [7] pueden hallarse las demostraciones de los teoremas que enunciaremos en esta subsección.

Proposición 1.1

Dos vértices cualesquiera en un árbol están conectados por una única trayectoria.

En virtud de la contrapositiva del teorema 1.1, todo bosque tiene un vértice de grado a lo más igual a uno. Aún más:

Proposición 1.2

Todo árbol no trivial tiene al menos dos vértices de grado uno. En general, todo bosque no trivial también tendrá al menos dos vértices de grado uno.

En un bosque son *hojas* los vértices que tienen grado uno. Así, la proposición 1.2 nos garantiza que cualquier árbol no trivial tendrá al menos dos hojas. La contrapositiva del teorema 1.2 asegura que en un bosque hay más vértices que aristas. El teorema que sigue es crucial en el desarrollo de este trabajo: nos da la cantidad exacta de aristas de un árbol.

Teorema 1.3

Si T es cualquier árbol, entonces $|E(T)| = |V(T)| - 1$.

Suponiendo que G es una gráfica conexa, las subgráficas generadoras de G , que al mismo tiempo son árboles, reciben el nombre de *árboles generadores*. De hecho, *cualquier gráfica G es conexa si y sólo si G contiene un árbol generador*. Por supuesto, si G es inconexa, sus subgráficas generadoras acíclicas son *bosques generadores*. Los *bosques generadores maximales* de G son aquellos que no están

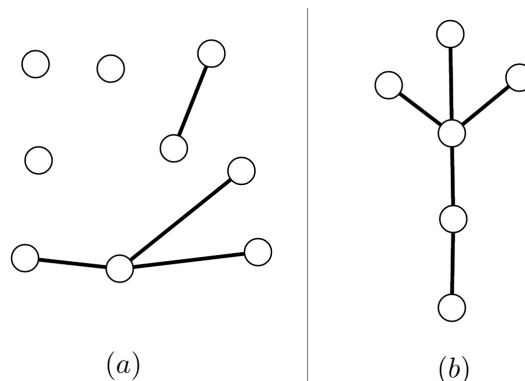


Fig. 1.8

contenidos en ningún otro bosque generador y, por lo tanto, sus componentes conexas son árboles generadores de cada componente conexa de G (si G es conexa, sus bosques generadores maximales son simplemente sus árboles generadores).

Del teorema 1.3, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.4

Si G tiene n vértices, sus bosques generadores maximales constan necesariamente de $n - c(G)$ aristas. En particular, si G es conexa, sus árboles generadores poseen $n - 1$ aristas.

1.2.6. Matriz de incidencia de una gráfica

Sea G una gráfica cualquiera con n vértices y m aristas. La *matriz de incidencia de G* es la matriz $\mathbf{M}_G := [m_{ve}] \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$, donde

$$m_{ve} = \begin{cases} 0, & \text{si el vértice } v \text{ no es adyacente a la arista } e \\ 1, & \text{si } v \text{ es adyacente a } e \\ 2, & \text{si } e \text{ es un lazo en } v \end{cases}$$

En la figura 1.9 mostramos una gráfica y su matriz de incidencia.

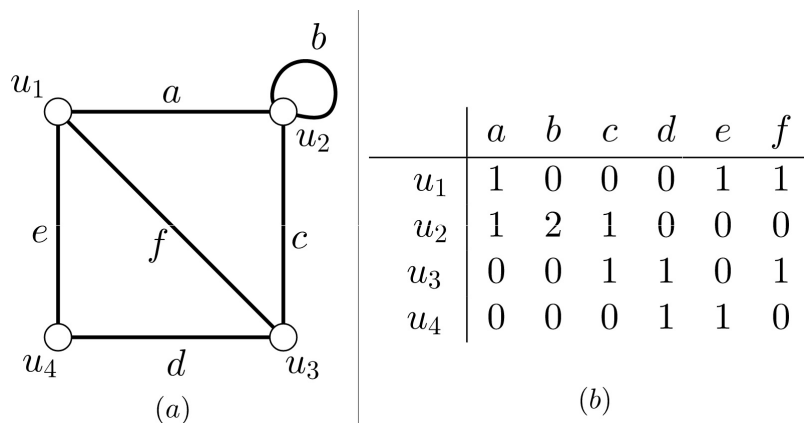


Fig. 1.9

Supongamos que G es inconexa y digamos que sus componentes conexas son F_1, \dots, F_k . Dado que los vértices entre diferentes componentes no son adyacentes, se tiene que la matriz de incidencia de G es una matriz diagonal por bloques, donde cada bloque corresponde a la matriz de incidencia de cada componente (siempre y cuando los vértices y las aristas estén etiquetados de manera ordenada) (véase el ejemplo 1.6):

$$\mathbf{M}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{F_1} & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{M}_{F_k} \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 1.6

Considere la gráfica G de la siguiente figura.

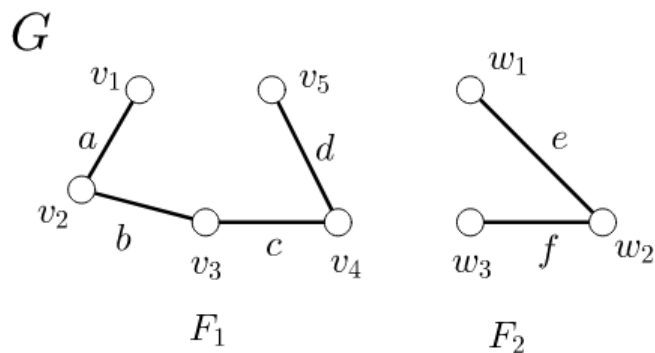


Fig. 1.10

Entonces su matriz de incidencia es:

$$\mathbf{M}_G = \begin{array}{c|cccc|cc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline v_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline & - & - & - & - & - & - \\ w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ w_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ w_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{F_1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{M}_{F_2} \end{bmatrix}.$$



\mathbf{M}_G es una matriz que tiene tantos renglones como vértices hay en G , y tantas columnas como aristas. Cada una de sus entradas indica qué “tipo” de adyacencia hay entre el vértice (renglón) y la arista (columna) correspondientes.

De lo anterior, es sencillo observar que si tomamos cualquiera de sus renglones, la suma de todas sus entradas es igual al grado del vértice asociado. En otras palabras: que $\sum_{e \in E(G)} m_{ve} = d(v)$, con v un vértice fijo.

De igual modo, considerando una columna cualquiera, la suma de todos sus renglones es 2, pues la arista correspondiente es adyacente, a lo más, en dos vértices (recordemos que si la arista es un lazo, es adyacente a un único vértice cuyo grado sería 2). Luego, $\sum_{v \in V(G)} m_{ve} = 2$, con e una arista fija.

La demostración del siguiente teorema (que se mencionó antes) es un primer vistazo de la utilidad y del potencial que la matriz de incidencia posee para representar y estudiar (desde otros puntos de vista) propiedades de las gráficas. En los capítulos siguientes desarrollaremos estas ideas.

Teorema 1.5

En cualquier gráfica G , se cumple que

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Demostración: Es un hecho conocido que la suma total de todas las entradas de una matriz puede obtenerse de dos formas: sumando las entradas columna por columna, o bien sumando las entradas renglón por renglón. Esto, respecto a la matriz de incidencia, se traduce en la siguiente igualdad:

$$\sum_{v \in V(G)} \left(\sum_{e \in E(G)} m_{ve} \right) = \sum_{e \in E(G)} \left(\sum_{v \in V(G)} m_{ve} \right).$$

Considerando lo dicho en párrafos anteriores:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = \sum_{e \in E(G)} 2.$$

Así, concluimos que la suma de los grados de todos los vértices de G es igual al doble de sus aristas, o sea, $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$.

Q.E.D.

1.2.7. Digráficas

Una *digráfica* D (también llamada *gráfica dirigida*) es un par ordenado $(V(D), A(D))$, donde $V(D)$ es el conjunto de *vértices* de D , y $A(D)$ (ajeno con $V(D)$) su conjunto de *arcos*; junto con una *función de incidencia* $\psi_D: A(D) \rightarrow V(D) \times V(D)$ que asigna a cada arco de la digráfica un par ordenado de vértices (no necesariamente diferentes).

Tomando un arco a cualquiera, y suponiendo que $\psi_D(a) = (u, v)$, diremos que u y v son extremos del arco a y que éste *une* a u con v o, mejor dicho, que u *domina* a v . También decimos que u es la *cola* de a y v su *cabeza*, y escribimos $t(a) = u$ y $h(a) = v$, respectivamente.

Igual que en las gráficas, solemos representar las digráficas con diagramas y pensar que éstos son las digráficas en sí. La diferencia aquí es que los arcos se dibujan como flechas entre sus vértices extremos, para indicar la “dominancia” entre ellos. Entonces, las flechas “salen” de las colas de los arcos y “entran” en la cabeza (la punta de la flecha) de los mismos (ver figura 1.7).

Por otro lado, también se suele no escribir la letra “ D ” de los símbolos que representan los conjuntos de vértices y arcos, y omitir la función de incidencia (quedando sobreentendida con el diagrama empleado).

El *ingrado* de v , $d_D^-(v)$, es la cantidad de arcos cuya cabeza es v . Similarmente, a la cantidad de arcos cuya cola es v es el *exgrado* de v , denotado como $d_D^+(v)$. El *grado* de v es sencillamente la suma de su exgrado y su ingrado, es decir, $d_D(v) := d_D^+(v) + d_D^-(v)$. Un *pozo* es un vértice de exgrado igual a cero y una *fuentes* uno de ingrado igual a cero.

Ejemplo 1.7

Consideremos la digráfica $D = (V(D), A(D))$, con $V(D) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ y $E(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, y ψ_D definida como sigue:

$$\begin{aligned} \psi_D(a) &= (u_2, u_1) & \psi_D(b) &= (u_1, u_2) & \psi_D(c) &= (u_2, u_3) & \psi_D(d) &= (u_3, u_4) \\ \psi_D(e) &= (u_1, u_4) & \psi_D(f) &= (u_1, u_5) & \psi_D(g) &= (u_5, u_5) \end{aligned}$$

El diagrama que representa a D se muestra en la figura 1.11. En particular, el ingrado de u_1 es igual a 1 y su exgrado es 3. Obsérvese que $d^-(u_2) = 1$ y que u_4 es un pozo pues $d^+(u_4) = 0$. Nótese además que la cola del arco d es u_3 y su cabeza es u_4 . De igual modo, $t(f) = u_1$ y $h(f) = u_5$.

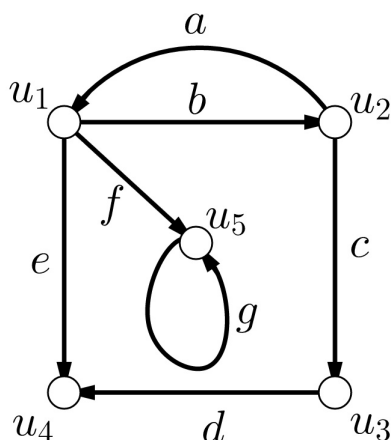


Fig. 1.11. Diagrama de una digráfica

1.2.8. Algunas digráficas, conexidad y matriz de incidencia

A partir de una digráfica D cualquiera, podemos obtener la *gráfica subyacente de D* , denotada como $G(D)$. Tal gráfica se obtiene de reemplazar los arcos de D por aristas con los mismos extremos. En la figura 1.12 se muestra la gráfica subyacente de la digráfica del ejemplo 1.7. Y si invertimos las orientaciones de sus arcos, obtendremos una nueva digráfica llamada *converso*.

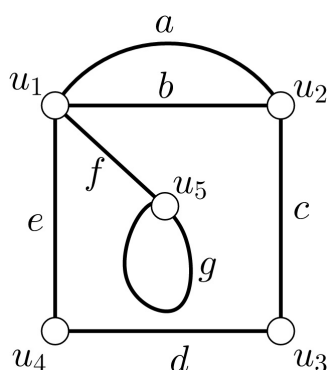


Fig. 1.12

De una gráfica G es posible construir una digráfica “orientando” sus aristas, es decir, reemplazando cada arista por uno de los dos posibles arcos entre sus extremos. Tal digráfica se le conoce como *orientación de G* , y la escribimos \vec{G} . Debe notarse que una gráfica puede tener varias orientaciones.

Muchos de los conceptos en digráficas son similares a los de las gráficas no dirigidas. Por ejemplo, la definición de *subdigráfica* de una digráfica es análogo al de *subgráfica*. Los ciclos, bosques y árboles de una digráfica son los mismos de su gráfica subyacente (pero conservando las orientaciones de los arcos). Véase la figura 1.13.

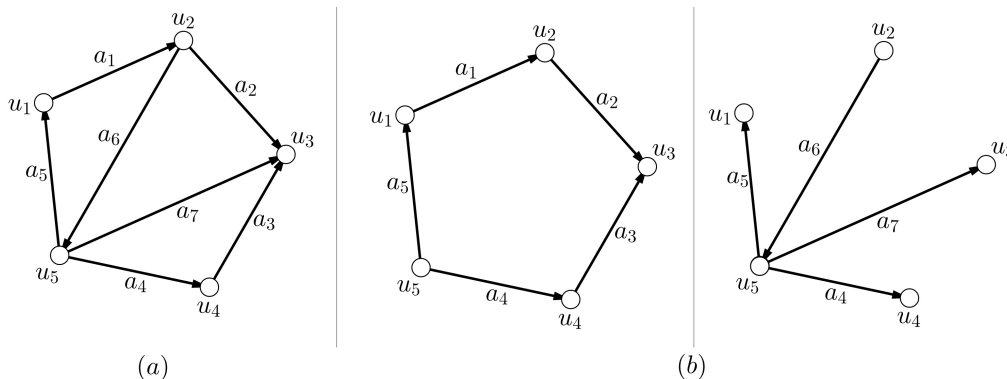


Fig. 1.13. Ciclos y árboles en digráficas

Un *camino* en una digráfica se define de manera análoga a las gráficas: es una sucesión $W := u_0 a_1 u_1 \dots u_{l-1} a_l u_l$ de vértices y arcos de tal forma que u_{i-1} y u_i son extremos de a_i , con $i \in \{1, \dots, l\}$. Sin embargo, hay que destacar que u_{i-1} no necesariamente domina a u_i ; si fuera el caso, se dice que el camino es *dirigido*. La misma terminología para los caminos en gráficas se usa aquí y las trayectorias, paseos y circuitos también de definen parecido. Retomando la digráfica de la figura 1.11, $W_1 = u_1 e u_4 d u_3 c u_2$ y $W_2 = u_1 b u_2 c u_3 d u_4$ son caminos, y $W_3 = u_1 b u_2 a u_1 f u_5 g u_5$ es un camino dirigido.

Una digráfica D es *conexa* si su gráfica subyacente es conexa, y es *fuertemente conexa* si, para cualquier par de vértices x y y , de D , existen un xy -camino y un yx -camino.

Las gráficas dirigidas también tienen sus propias matrices de incidencia. Suponiendo que D es una digráfica cualquiera con n vértices y m arcos, su *matriz de incidencia* es la matriz $\mathbf{M}_D := [m_{va}] \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$, donde

$$m_{va} = \begin{cases} 1, & \text{si el vértice } v \text{ es cola de } a \text{ y } a \text{ no es un lazo} \\ -1, & \text{si } v \text{ cabeza de } a \text{ y } a \text{ no es un lazo} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como es de esperarse, las matrices de incidencia de digráficas inconexas son también matrices diagonales por bloques, siempre y cuando los vértices y arcos estén etiquetados de manera ordenada.

Ejemplo 1.8

En la figura 1.14 observamos la matriz de incidencia de una orientación de la gráfica de la figura 1.9.

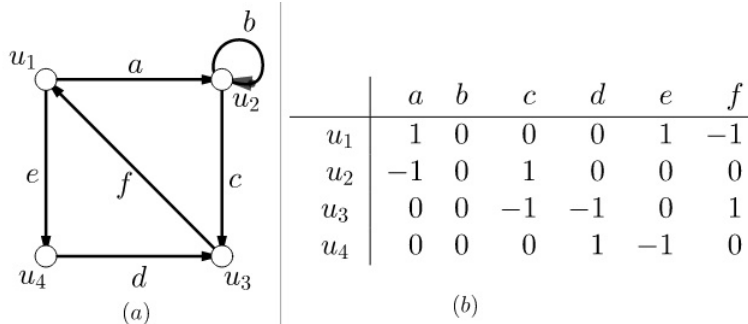


Fig. 1.14



Conjuntos de corte y ciclos



EL CONCEPTO central de este capítulo es el de *subgráfica generadora*. Además, abordaremos tres clases especiales de subgráficas: los *conjuntos de corte*, las *subgráficas pares* y los *árboles generadores*. Recuérdese que, si G es una gráfica, una subgráfica de G , digamos H , es *generadora* si y sólo si $V(H) = V(G)$. Igualmente, vimos en el capítulo anterior que $G[S]$ es una *subgráfica inducida por aristas* si y sólo si $E(G[S]) = S \subseteq E(G)$ y su conjunto de vértices queda determinado por los extremos de las aristas en S ; y $G[S]$ es una *subgráfica generadora inducida por aristas* si y sólo si $V(G[S]) = V(G)$ y $E(G[S]) = S \subseteq E(G)$. A lo largo de este trabajo, el símbolo “ $G[S]$ ” denotará a una subgráfica generadora inducida por el conjunto aristas S .

2.1. Conjuntos de corte de G

Supongamos que G es una gráfica cualquiera. Tomando X y Y dos subconjuntos de vértices de G , denotaremos por $E[X, Y]$ al subconjunto de aristas de G que tienen un extremo en X y otro en Y . Si $X = Y$, sólo escribiremos $E[X]$. Si sucediera que Y es el complemento de X respecto a V , es decir, que $Y = V \setminus X$, entonces al conjunto $E[X, V \setminus X]$ se le llamará *conjunto de corte de G asociado a X* y será escrito como $\partial(X)$. Si H es una subgráfica de G y $X \subseteq V(H)$, entonces $\partial_H(X) := E[X, V(H) \setminus X]$ denota al *conjunto de corte asociado a X relativo a H* . Los conjuntos de cortes relativos serán de utilidad cuando se hable de gráficas inconexas (ver ejemplo 2.2).

Por comodidad, en lo sucesivo escribiremos \bar{X} en lugar de $V \setminus X$. Así, $\partial(X) = E[X, \bar{X}]$. Es sencillo observar que $\partial(X) = \partial(\bar{X})$ pues, por definición, $E[X, \bar{X}] = E[\bar{X}, X]$. En particular, $\partial(V) = \partial(\emptyset) = \emptyset$ (y, por lo tanto, \emptyset es un conjunto de corte). También puede deducirse que, para cada $v \in V$, $\partial(\{v\})$ es el conjunto de todas las aristas que inciden en v , excluyendo sus lazos. A veces escribimos $\partial(v)$ en lugar de $\partial(\{v\})$.

$G[\partial(X)]$ denotará a la subgráfica generadora de G inducida por el conjunto de aristas $\partial(X)$. Tal subgráfica también es llamada *conjunto de corte*. Aunque lo anterior es un abuso de notación, algunos

autores utilizan el mismo símbolo " $\partial(X)$ " para referirse a ambos conceptos: el conjunto de corte y la subgráfica generadora inducida por el conjunto de corte. Para evitar confusiones, en este trabajo preferimos no emplear este abuso de notación.

Ejemplo 2.1

Consideremos la gráfica del inciso (a) de la figura 2.1. En (b) representamos el conjunto de aristas $E[A, B] = \{b, c, f, g\}$, con $A = \{u_1, u_2, u_3\}$ y $B = \{u_3, u_4\}$. En (c) tomamos $X = \{u_1, u_5\}$, y verificamos que $\partial(X) = \{a, f, g, d\}$.

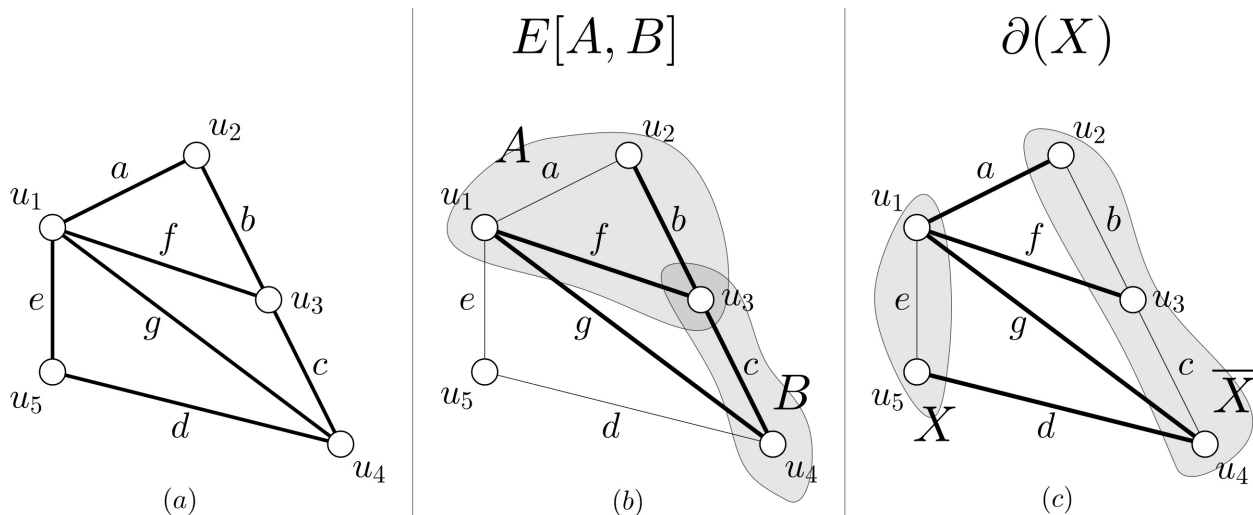


Fig. 2.1

Ejemplo 2.2

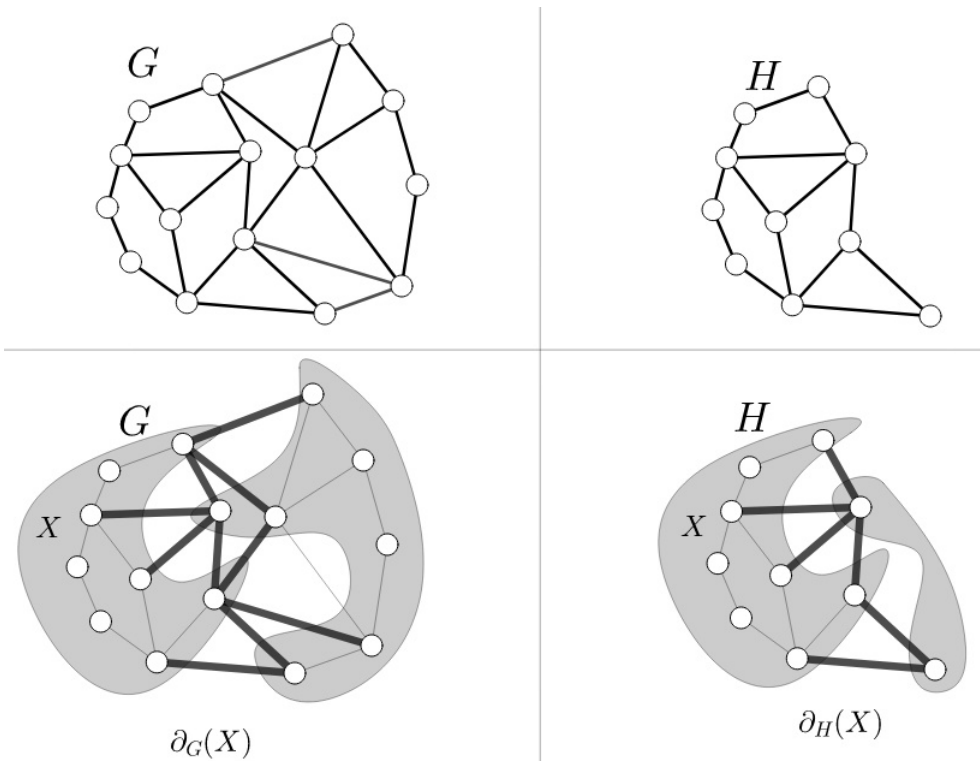


Fig. 2.2

En la figura 2.2, H es una subgráfica de G y representamos el conjunto de corte $\partial(X)$ y el corte relativo a $\partial_H(X)$. Nótese que, a pesar de tener en común el conjunto X , en general, $\partial(X) \neq \partial_H(X)$ \blacklozenge

Observe que la definición de conjunto de corte ayuda reformular la concepto de *gráfica conexa* que dimos en el capítulo anterior (y que utilizaremos en los teoremas siguientes): *una gráfica G es conexa si y sólo si $\partial(X) \neq \emptyset$, para todo $X \subsetneq V(G)$* . De hecho, suponiendo que G es conexa, podemos darnos cuenta que, eliminando de G las aristas que pertenecen a $\partial(X)$, la subgráfica $G \setminus \partial(X)$ será inconexa (justificando así el nombre que se le dio a $\partial(X)$).

Ejemplo 2.3

Si tomamos en cuenta la gráfica del ejemplo 2.1 y hacemos $X = \{u_1, u_4\}$, vemos que $G \setminus \partial(X)$ tiene tres componentes conexas.

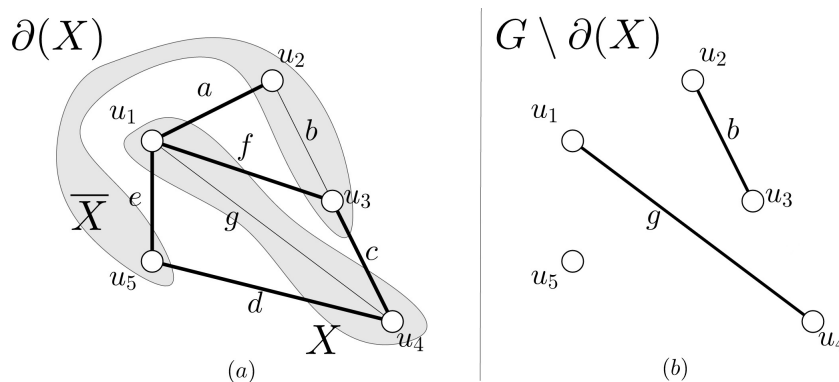


Fig. 2.3

Ejemplo 2.4

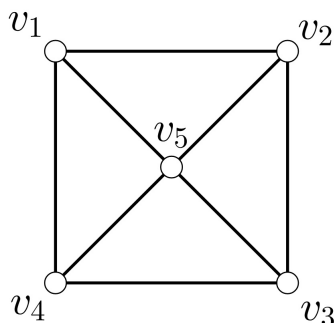
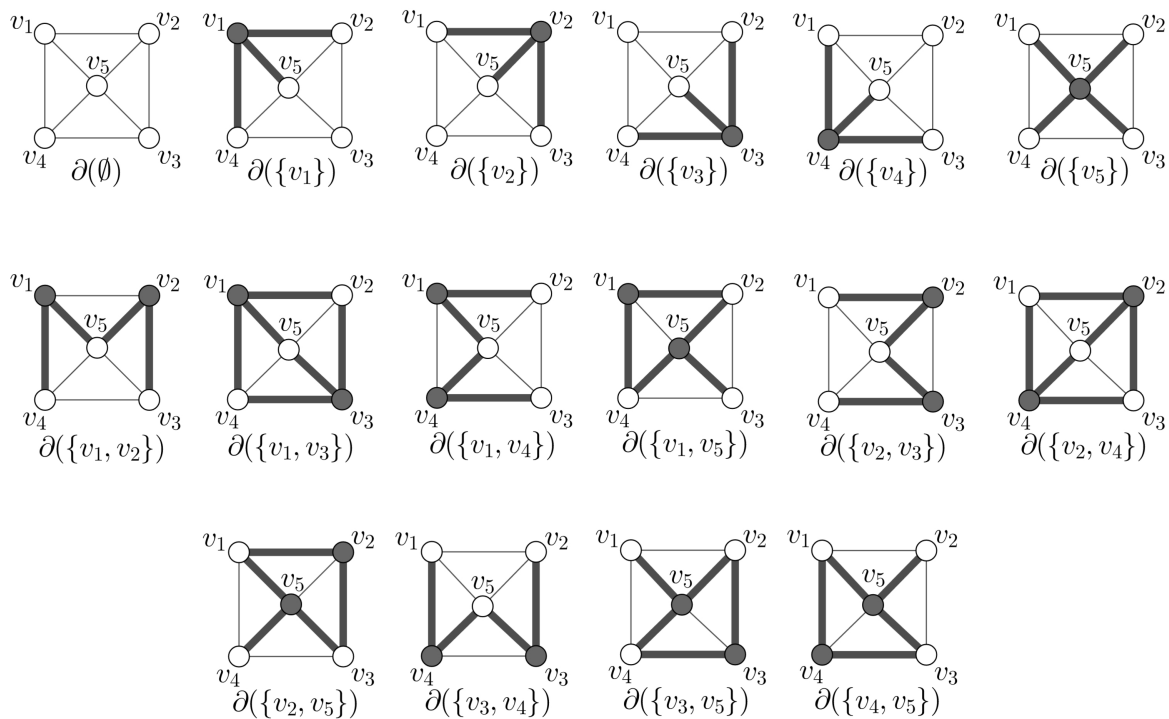


Fig. 2.4

Consideremos la gráfica *rueda* W_4 de la figura 2.4. A continuación se muestra sus conjuntos de corte. Hemos resaltado los vértices respecto a los cuales se construye el corte en cuestión y las aristas de éste también se han remarcado.

Fig. 2.5. Cortes de W_4

Analizaremos ahora las propiedades que tienen los conjuntos de corte:

Teorema 2.1

Sean G una gráfica y X y Y subconjuntos de $V(G)$. Entonces

$$\partial(X) \Delta \partial(Y) = \partial(X \Delta Y).$$

Demostración: Recordemos que

$$\begin{aligned} X \Delta Y &= (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) \\ &= (X \cup Y) \cap (\overline{X \cap Y}) \\ &= (X \cup Y) \cap (\overline{X} \cup \overline{Y}). \end{aligned}$$

De esta última igualdad, tenemos que

$$X \Delta Y = (\overline{X} \cap Y) \cup (X \cap \overline{Y}). \quad (2.1)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \overline{X \Delta Y} &= \overline{(X \cup Y) \cap (\overline{X} \cup \overline{Y})} \\ &= \overline{X \cup Y} \cup (X \cap Y). \end{aligned}$$

Así, llegamos a que

$$\overline{X \Delta Y} = (X \cap Y) \cup (\overline{X} \cap \overline{Y}). \quad (2.2)$$

Como $V(G) = (X\Delta Y) \cup (\overline{X\Delta Y})$, de las igualdades 2.1 y 2.2 se sigue que

$$V(G) = (X \cap Y) \cup (\overline{X} \cap \overline{Y}) \cup (\overline{X} \cap Y) \cup (X \cap \overline{Y}). \quad (2.3)$$

El lado derecho de la igualdad 2.3 sugiere que los cuatro conjuntos involucrados forman una partición de $V(G)$ (pues son ajenos dos a dos). Tomando en cuenta las definiciones de $\partial(X)$, $\partial(Y)$ y $\partial(X\Delta Y)$, en la figura 2.6 se representa el comportamiento de estos conjuntos de corte con respecto a la partición del conjunto de vértices de G . En esta imagen, una línea remarcada simboliza un conjunto de aristas cuyos extremos están en algún subconjunto de vértices de la partición anterior.

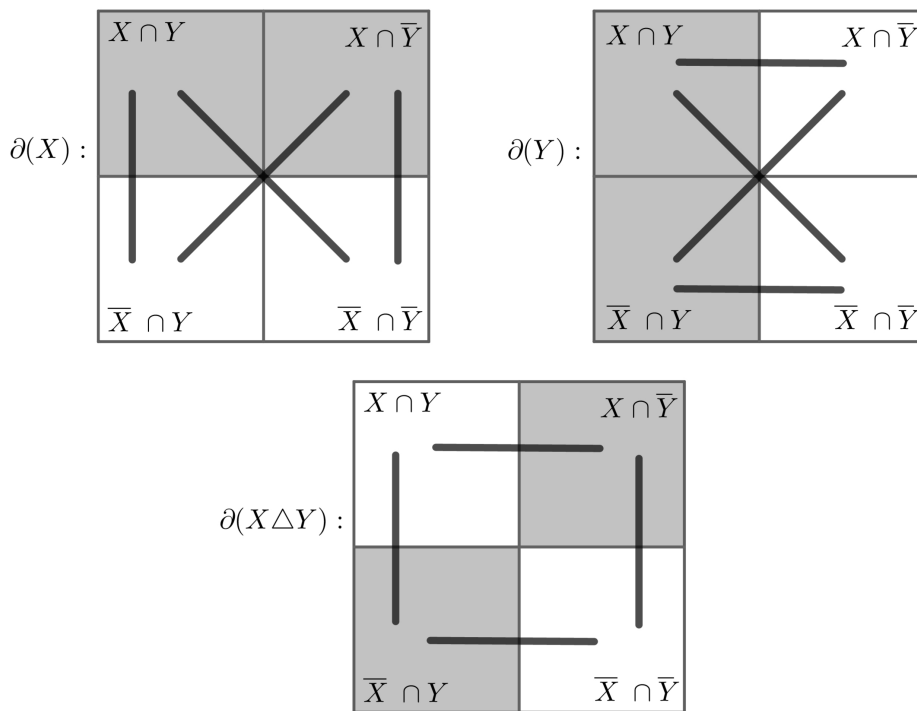


Fig. 2.6. Diferencia simétrica de dos conjuntos de corte

Si, por simplicidad, hacemos

$$\begin{aligned} J &= (E[X \cap Y, \overline{X} \cap Y]) \cup (E[X \cap \overline{Y}, \overline{X} \cap \overline{Y}]), \\ K &= (E[X \cap Y, X \cap \overline{Y}]) \cup (E[\overline{X} \cap Y, \overline{X} \cap \overline{Y}]), \\ D &= (E[X \cap Y, \overline{X} \cap \overline{Y}]) \cup (E[X \cap \overline{Y}, \overline{X} \cap Y]), \end{aligned}$$

entonces es fácil darse cuenta (gracias a la figura 2.6) que $\partial(X) = J \cup D$, $\partial(Y) = K \cup D$ y $\partial(X\Delta Y) = J \cup K$.

Luego, observemos que

$$\begin{aligned}
\partial(X)\Delta\partial(Y) &= (J \cup D)\Delta(K \cup D) \\
&= (J \cup D)\Delta(K \cup D) \\
&= ((J \cup D) \setminus (K \cup D)) \cup ((K \cup D) \setminus (J \cup D)) \\
&= (J \setminus K) \cup (K \setminus J) \\
&= J \cup K \\
&= \partial(X\Delta Y).
\end{aligned}$$

Las dos últimas igualdades sean porque los conjuntos de aristas que tomamos son ajenos mutuamente. En consecuencia, $\partial(X)\Delta\partial(Y) = \partial(X\Delta Y)$.

Q.E.D.

Por el Principio de Inducción, podemos generalizar el teorema anterior:

Corolario 2.1

Sean G una gráfica y X_1, \dots, X_k subconjuntos de $V(G)$. Entonces

$$\Delta_{j=1}^k \partial(X_j) = \partial\left(\Delta_{j=1}^k X_j\right).$$

Los resultados previos pueden expresarse en términos de subgráficas generadoras inducidas por los conjuntos de corte. En efecto, en el capítulo 1 vimos que la *diferencia simétrica* de dos gráficas G y H es la gráfica $G\Delta H$, en la cual $V(G\Delta H) = V(G) \cup V(H)$ y $E(G\Delta H) = E(G)\Delta E(H)$.

En particular, si S_1 y S_2 son subconjuntos de $E(G)$, tomemos las subgráficas generadoras inducidas $G[S_1]$ y $G[S_2]$. Entonces, por definición, el conjunto de aristas de la subgráfica generadora $G[S_1]\Delta G[S_2]$ es $S_1\Delta S_2$. Al mismo tiempo, éste es también el conjunto de aristas de la subgráfica generadora inducida $G[S_1\Delta S_2]$. Como ambas subgráficas tienen el mismo conjunto de vértices (pues son generadoras), obtenemos que

$$G[S_1]\Delta G[S_2] = G[S_1\Delta S_2].$$

Claramente, la igualdad anterior puede extenderse a una cantidad finita arbitraria de subconjuntos de aristas de G . Luego, gracias al corolario 2.1 podemos afirmar que

$$G\left[\Delta_{j=1}^k \partial(X_j)\right] = G\left[\partial\left(\Delta_{j=1}^k X_j\right)\right].$$

Por lo que argumentamos líneas arriba, sabemos que $G\left[\Delta_{j=1}^k \partial(X_j)\right] = \Delta_{j=1}^k G\left[\partial(X_j)\right]$. Obtenemos de esta forma el siguiente corolario:

Corolario 2.2

Sean G una gráfica y X_1, \dots, X_k subconjuntos de $V(G)$. Entonces

$$\Delta_{j=1}^k G\left[\partial(X_j)\right] = G\left[\partial\left(\Delta_{j=1}^k X_j\right)\right].$$

Veamos ahora otro resultado y su generalización, similares al teorema 2.1 y al corolario 2.1.

Proposición 2.1

Sean H_1 y H_2 subgráficas de G . Si $X \subseteq V(G)$, entonces

$$\partial_{H_1 \Delta H_2}(X) = \partial_{H_1}(X) \Delta \partial_{H_2}(X).$$

Demostración: Lo haremos por *doble contención*. Para la primer contención, tomamos a en $\partial_{H_1 \Delta H_2}(X)$. Entonces la arista a es adyacente a dos vértices: u y v ; asumiremos (sin pérdida de generalidad) que el primero está en X y el otro en \bar{X} . Entonces $a \in E(H_1 \Delta H_2) = E(H_1) \Delta E(H_2)$. Si a está en $E(H_1)$ (y no a $E(H_2)$), necesariamente a pertenece a $\partial_{H_1}(X)$ por cómo son los vértices de a . No sucede que $a \in \partial_{H_2}(X)$ porque $a \notin E(H_2)$.

Análogamente, si a es elemento de $E(H_2)$ (y no de $E(H_1)$), entonces $a \in \partial_{H_2}(X)$ y no pertenece a $\partial_{H_1}(X)$. Por tanto, $a \in \partial_{H_1}(X) \Delta \partial_{H_2}(X)$. De esta manera, hallamos que

$$\partial_{H_1 \Delta H_2}(X) \subseteq \partial_{H_1}(X) \Delta \partial_{H_2}(X).$$

Ahora suponemos que la arista a pertenece al conjunto $\partial_{H_1}(X) \Delta \partial_{H_2}(X)$. Por la definición de la *diferencia simétrica* existen dos casos.

- Caso 1: Supongamos que a pertenece a $\partial_{H_1}(X)$ (y, por tanto, no es elemento de $\partial_{H_2}(X)$). Entonces $a \in E(H_1)$. No es posible que $a \in E(H_2)$, pues, inmediatamente, a estaría en $\partial_{H_2}(X)$ (ya que $u \in X$ y $v \in \bar{X}$), y, por lo tanto, es una contradicción. Por consiguiente,

$$a \in E(H_1) \Delta E(H_2) = E(H_1 \Delta H_2).$$

Dado que un extremo de la arista está en X y el otro en el complemento de X , deducimos que $a \in \partial_{H_1 \Delta H_2}(X)$.

- Caso 2: Supongamos que a pertenece a $\partial_{H_2}(X)$ (y, por tanto, no es elemento de $\partial_{H_1}(X)$). Procediendo de forma análoga al caso anterior obtenemos, también, que $a \in \partial_{H_1 \Delta H_2}(X)$.

De ambos casos, afirmamos que $\partial_{H_1}(X) \Delta \partial_{H_2}(X) \subseteq \partial_{H_1 \Delta H_2}(X)$ y concluimos, pues, que

$$\partial_{H_1 \Delta H_2}(X) = \partial_{H_1}(X) \Delta \partial_{H_2}(X).$$

Q.E.D.

Corolario 2.3

Sean H_1, \dots, H_k subgráficas de G . Entonces

$$\partial_{H_1 \Delta \dots \Delta H_k}(X) = \partial_{H_1}(X) \Delta \dots \Delta \partial_{H_k}(X).$$

Por último, antes de continuar a la siguiente subsección, comentaremos un poco sobre los conjuntos de corte en una gráfica G inconexa. Supongamos que F_1, \dots, F_c son sus componentes conexas y que $c := c(G)$. Entonces $G = \bigcup_{i=1}^c F_i$. Nótese que esta es una unión ajena de gráficas, por lo que también podemos expresarla así:

$$G = \bigtriangleup_{j=1}^c F_j.$$

Tomemos $X \subseteq V(G)$. Luego,

$$\begin{aligned}\partial_G(X) &= \partial_{F_1 \Delta \dots \Delta F_c}(X) \\ &= \partial_{F_1}(X) \Delta \dots \Delta \partial_{F_1}(X) \text{ (por el corolario 2.3)} \\ &= \bigcup_{j=1}^c \partial_{F_j}(X) \text{ (por que la unión es ajena).}\end{aligned}$$

Por otro lado, haciendo $X_i := X \cap V(F_i)$, con $i \in \{1, \dots, c\}$, es claro que $\bigcup_{j=1}^c X_j = X$ y deducimos que

$$\begin{aligned}\partial_{F_i}(X) &= \partial_{F_i}\left(\bigcup_{j=1}^c X_j\right) \\ &= \partial_{F_i}\left(\bigtriangleup_{j=1}^c X_j\right) \text{ (la unión es ajena)} \\ &= \bigtriangleup_{j=1}^c \partial_{F_i}(X_j) \text{ (por el corolario 2.1).}\end{aligned}$$

Si $i \neq j$, $\partial_{F_i}(X_j) = \emptyset$ porque $\partial_{F_i}(X_j) \subseteq E(F_i)$ y $X_j \subseteq V(F_j)$, pero no hay aristas que conecten vértices de diferentes componente conexas. Por lo tanto, $\partial_{F_i}(X) = \partial_{F_i}(X_i)$ y $\partial_G(X) = \bigcup_{j=1}^c \partial_{F_j}(X_j)$.

La figura siguiente representa la situación anterior:

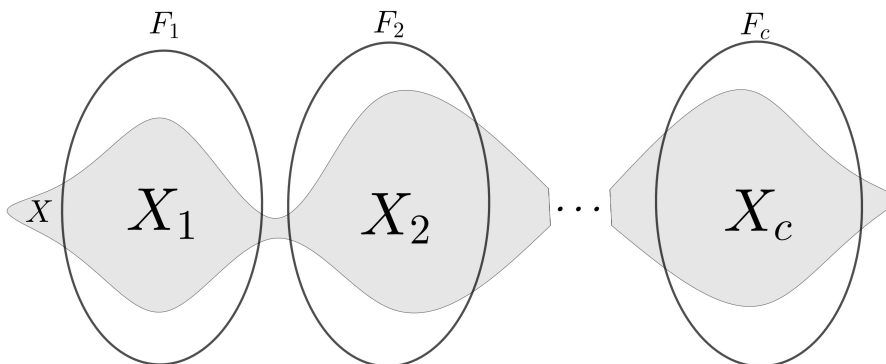


Fig. 2.7

2.1.1. Conjuntos de corte minimales

Llamamos *conjunto de corte minimal de G* (en [3], los autores le llaman *bond*) a un conjunto de corte no vacío con la propiedad de que ninguno de sus subconjuntos propios, no vacíos, es otro conjunto de corte. Esto implica que, B es un corte minimal de G y S es un conjunto de corte tal que $S \subseteq B$, necesariamente $B = S$.

En general, un conjunto de corte *divide* a G en, al menos, dos componentes conexas. No obstante, el teorema siguiente nos asegura que los cortes minimales son aquellos que dividen a una gráfica conexa en, *exactamente*, dos componentes. Recuerdese que $G[X]$ es la gráfica inducida por el conjunto de vértices X .

Teorema 2.2

Sean G una gráfica conexa y X un subconjunto de vértices de G , de tal manera que $\partial(X) \neq \emptyset$. Entonces $\partial(X)$ es un conjunto de corte minimal si y sólo si $G[X]$ y $G[\bar{X}]$ son conexas.

Demostración: Asumimos que G es conexa y que $X \subseteq V(G)$. Probaremos la necesidad por contrapositiva. Supóngase primero que $G[X]$ no es conexa. Entonces existe una partición de X en dos conjuntos, no vacíos, entre los cuales no hay aristas; en otros términos, existe $Y \neq \emptyset$ tal que $Y \subsetneq X$ y $X \setminus Y \subsetneq X$, cumpliendo $E[Y, X \setminus Y] = E[X \cap Y, X \cap \bar{Y}] = \emptyset$. Además, dado que $Y \subsetneq X$, se cumple también que $\bar{X} \cap Y = \emptyset$.

Retomando las ideas de la prueba del teorema 2.1 (compárense las figuras 2.6 y 2.8) y dada la información del párrafo anterior, deducimos que

$$\partial(Y) = E[X \cap Y, \bar{X} \cap \bar{Y}] \text{ y } \partial(X) = (E[X \cap \bar{Y}, \bar{X} \cap \bar{Y}]) \cup (E[X \cap Y, \bar{X} \cap \bar{Y}]).$$

Así, es claro que $\partial(Y) \subseteq \partial(X)$. Se mencionó previamente que en una gráfica conexa ningún conjunto de corte puede ser vacío. Luego, la conexidad de G garantiza que $\partial(Y) \neq \emptyset$.

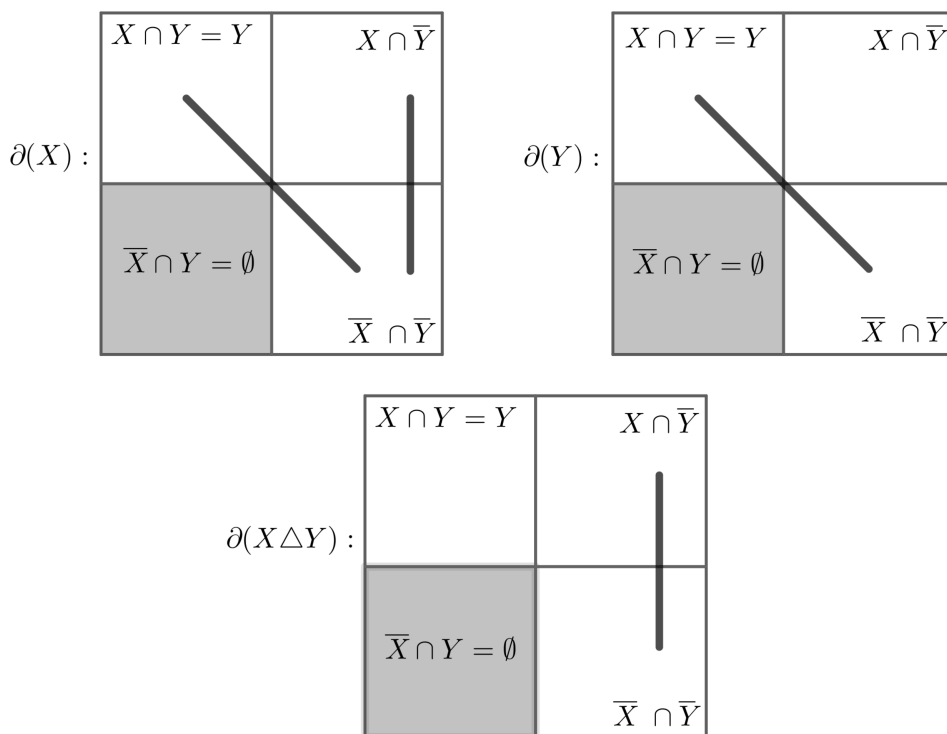


Fig. 2.8

Además, por el teorema 2.1, $\partial(X \Delta Y) = \partial(X) \Delta \partial(Y)$. Entonces, como se muestra en la figura 2.8, $\partial(X \Delta Y) = E[X \cap \bar{Y}, \bar{X} \cap \bar{Y}]$. Una vez más, la conexidad de G asegura que $\partial(X \Delta Y) \neq \emptyset$. Así, en efecto, $E[X \cap \bar{Y}, \bar{X} \cap \bar{Y}] \neq \emptyset$. Esta última afirmación implica que $\partial(Y) \subsetneq \partial(X)$. Por consiguiente, $\partial(X)$ no es un conjunto de corte minimal pues contiene propiamente a otro conjunto de corte no vacío. Si, en segundo lugar, suponemos que $G[\bar{X}]$ no es conexa, mediante razonamientos similares podremos concluir también que $\partial(X)$ no es un conjunto de corte minimal.

La suficiencia se prueba por contradicción. Supóngase, pues, que $G[X]$ y $G[\bar{X}]$ son conexas y que $\partial(X)$ no es un conjunto de corte minimal. Entonces existe $Y \subseteq V(G)$ tal que $\partial(Y) \subsetneq \partial(X)$ y

$\partial(Y) \neq \emptyset$. Nótese que este último hecho implica que (ver la figura 2.6)

$$\partial(Y) = (E[X \cap Y, \bar{X} \cap \bar{Y}]) \cup (E[X \cap \bar{Y}, \bar{X} \cap Y]),$$

de donde

$$E[X \cap Y, X \cap \bar{Y}] = \emptyset = E[\bar{X} \cap Y, \bar{X} \cap \bar{Y}].$$

Recordemos que, para llegar a una contradicción, necesitamos argumentar que $G[X]$ es inconexa ó $G[\bar{X}]$ es inconexa, encontrando alguna partición de sus conjuntos de vértices, de tal manera que no haya aristas entre los conjuntos de la partición.

Lo haremos analizando las cuatro intersecciones que aparecen en la última igualdad. Éstos formarán las particiones que buscamos, pero debemos confirmar que los conjuntos son no vacíos. Hasta aquí nada nos garantiza que alguna de ellos sea distinto del conjunto vacío. Pero tenemos dos casos: que la intersección de X con Y sea vacía o que no lo sea.

- Caso 1. Asumimos que $X \cap Y = \emptyset$. Veamos que $(\bar{X} \cap Y, \bar{X} \cap \bar{Y})$ es una partición del conjunto de vértices \bar{X} .

Como $X \cap Y = \emptyset$, entonces $Y \subseteq \bar{X}$ y, en consecuencia, $\bar{X} \cap Y = Y$. Dado que $\partial(Y) \neq \emptyset$, entonces Y es no vacío (porque al menos hay una arista con un extremo en Y). Como $\bar{X} \cap Y = Y$, deducimos que $\bar{X} \cap Y \neq \emptyset$.

Por otra parte, no podría suceder que $\bar{X} \cap \bar{Y} = \emptyset$, pues tendríamos que $\bar{X} \subseteq Y$, es decir, $\bar{X} = Y$ y, por tanto, $\partial(Y) = \partial(\bar{X}) = \partial(X)$, lo cual es una contradicción. Así, necesariamente, $\bar{X} \cap \bar{Y} \neq \emptyset$.

En resumen, sabemos que $\bar{X} \cap Y \neq \emptyset$, $\bar{X} \cap \bar{Y} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $(\bar{X} \cap Y, \bar{X} \cap \bar{Y})$ es una partición de \bar{X} .

No obstante, ya vimos que $E[\bar{X} \cap Y, \bar{X} \cap \bar{Y}] = \emptyset$, es decir, no hay aristas entre los miembros de la partición de \bar{X} . Esto implicaría que $G[\bar{X}]$ no es conexa, y contradice nuestras hipótesis.

- Caso 2. Suponemos que $X \cap Y \neq \emptyset$.

Si se cumpliera que $X \cap \bar{Y} \neq \emptyset$, $G[X]$ no sería conexa pues $(X \cap Y, X \cap \bar{Y})$ es una partición de X y $E[X \cap Y, X \cap \bar{Y}] = \emptyset$, lo cual, de nuevo, es una contradicción.

Entonces debe cumplirse que $X \cap \bar{Y} = \emptyset$, o sea, que $\bar{Y} \subseteq \bar{X}$. La consecuencia de esta última afirmación es que tanto $\bar{X} \cap Y$ como $\bar{X} \cap \bar{Y}$ son conjuntos distintos del vacío.

En efecto, si $\bar{X} \cap Y = \emptyset$ sabemos que $\bar{X} \subseteq \bar{Y}$. Dado que $\bar{Y} \subseteq \bar{X}$, entonces $Y = X$ y $\partial(Y) = \partial(X)$, lo cual es imposible. Por otro lado, si se diera que $\bar{X} \cap \bar{Y} = \emptyset$, tendríamos que $\bar{Y} \subseteq X$. Como $\bar{Y} \subseteq \bar{X}$, también $X \subseteq Y$. Por consiguiente, $\bar{Y} \subseteq Y$. Esto último implica que $Y = V$, pero es falso debido a que $\partial(Y) = \partial(V) = \emptyset$, y se vio desde antes que $\partial(Y) \neq \emptyset$.

En resumen, sabemos que $\bar{X} \cap Y \neq \emptyset$, $\bar{X} \cap \bar{Y} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $(\bar{X} \cap Y, \bar{X} \cap \bar{Y})$ es una partición de \bar{X} . Ya sabemos que $E[\bar{X} \cap Y, \bar{X} \cap \bar{Y}] = \emptyset$, es decir, no hay aristas entre los miembros de la partición de \bar{X} . Esto implicaría que $G[\bar{X}]$ no es conexa, y contradice, de nuevo, nuestras hipótesis.

Podemos asegurar que los casos anteriores no son posibles. Las dificultades surgieron a partir de suponer que $\partial(X)$ no es un conjunto de corte minimal. Concluimos, entonces, que $\partial(X)$ es un conjunto de corte minimal si y sólo si $G[X]$ y $G[\bar{X}]$ son conexas.

Q.E.D.

Es sencillo darse cuenta que el teorema 2.2 implica el siguiente corolario.

Corolario 2.4

Si G es una gráfica conexa y $X \subseteq V(G)$, entonces $\partial(X)$ es un conjunto de corte minimal si y sólo si $G \setminus \partial(X)$ tiene exactamente dos componentes conexas.

Ejemplo 2.5

En la figura que se muestra a continuación están todos los conjuntos de corte minimales de la gráfica W_4 . Observe que si retiráramos de W_4 las aristas de cualquiera de estos conjuntos de corte, nos quedarían dos componentes conexas, como lo asegura el teorema anterior.

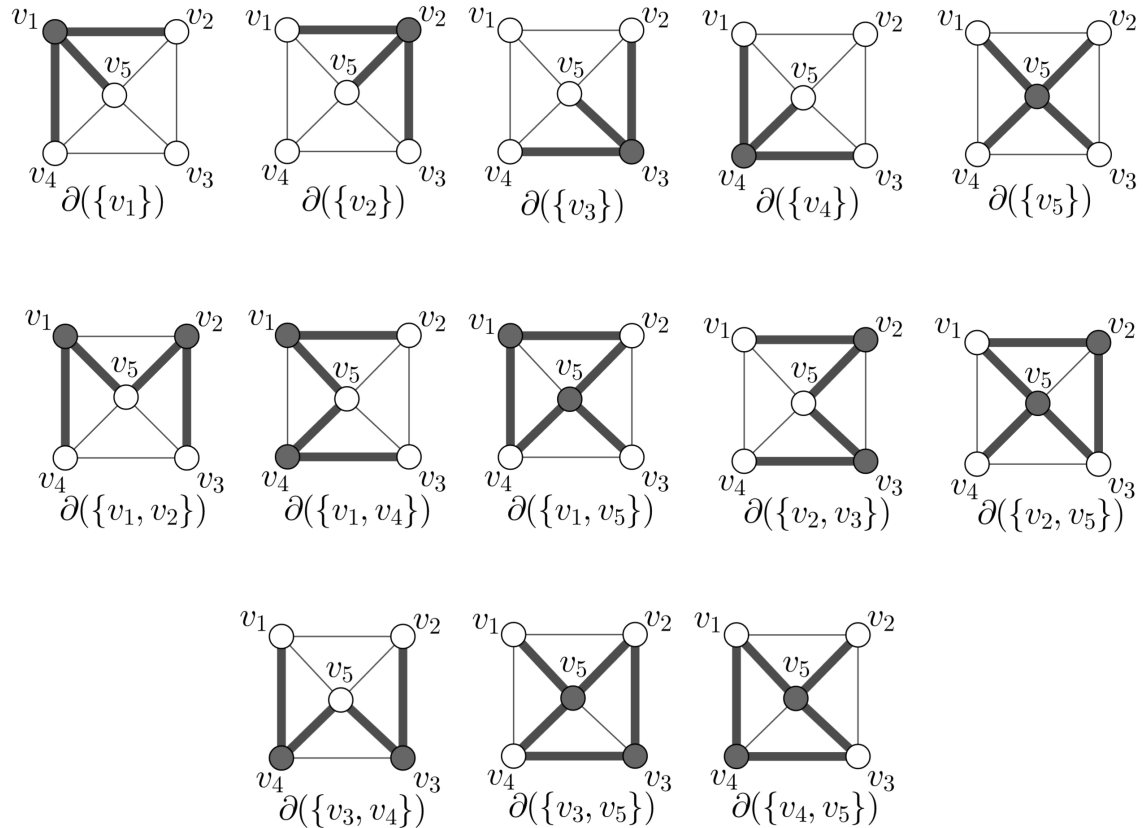


Fig. 2.9. Conjuntos de corte minimales de W_4



Consideremos ahora una gráfica G con c componentes conexas, digamos F_1, \dots, F_c . Supongamos que $X \subseteq V(G)$ es de tal manera que $\partial(X)$ es un conjunto de corte minimal de G . Si $X_i = X \cap V(F_i)$, con $i \in \{1, \dots, c\}$, anteriormente vimos que:

$$\partial_G(X) = \partial_{F_1}(X_1) \cup \dots \cup \partial_{F_c}(X_c).$$

Pero $\partial_{F_i}(X_i) = \partial(X_i)$ (porque no hay aristas entre diferentes componentes conexas), y la única diferencia es que $\partial(X_i)$ es un corte respecto a todo G (y no sólo relativo a F_i). Por tanto, $\partial(X_i) \subseteq \partial(X)$, para todo $i \in \{1, \dots, c\}$.

Como $\partial(X)$ es minimal, entonces $\partial(X) = \partial(X_j)$ (para aquellos $j \in \{1, \dots, c\}$ tales que $\partial(X_j) \neq \emptyset$). Ésto sólo es posible (debido a la definición de X_j) si y sólo si, existe un único $k \in \{1, \dots, c\}$, $X = X_k$.

Luego, $\partial(X) = \partial(X_k)$, es decir, $\partial(X) = \partial_{F_k}(X_k)$. Concluimos estableciendo una proposición:

Proposición 2.2

Los conjuntos de corte minimales de una gráfica inconexa son los conjuntos de corte minimales de sus componentes conexas.

La proposición previa nos ayudará a generalizar el corolario 2.4:

Teorema 2.3

Sea G una gráfica. Si $X \subseteq V(G)$, entonces $\partial(X)$ es un corte minimal si y sólo si

$$c(G \setminus \partial(X)) = c(G) + 1.$$

Demostración: Si G es conexa, el teorema es válido por el corolario 2.4.

Supongamos que G es inconexa con F_1, \dots, F_c sus componentes conexas y $c := c(G)$. En primer lugar, supóngase que $\partial(X)$ es un conjunto de corte minimal de G . Por la proposición 2.2, $\partial(X)$ es un corte minimal de alguna componente conexa F_j , es decir, $\partial(X) = \partial_{F_j}(X)$ y $X \subseteq V(F_j)$. Entonces, de nuevo por el corolario 2.4, $F_k \setminus \partial(X) = H_1 \cup H_2$, donde H_1 y H_2 son sus componentes conexas. Por tanto,

$$G \setminus \partial(X) = F_1 \cup \dots \cup F_{k-1} \cup H_1 \cup H_2 \cup F_{k+1} \cup \dots \cup F_c.$$

De donde $c(G \setminus \partial(X)) = c(G) + 1$.

En segundo lugar, supóngase ahora que $c(G \setminus \partial(X)) = c(G) + 1$. Si G ya tenía c componentes y ahora $G \setminus \partial(X)$ tiene una más, es imposible $\partial(X)$ tenga aristas de diferentes componentes conexas, porque a cada una la dividiría en al menos dos partes y ya no habría $c + 1$ componentes.

Por lo tanto, existe una componente F_k tal que $\partial(X) \subseteq E(F_k)$. Como $G \setminus \partial(X)$ tiene $c + 1$ componentes conexas, necesariamente $F_k \setminus \partial(X)$ tiene dos componentes conexas. Ésto implica que $\partial(X)$ es un corte minimal de F_k . Por consiguiente, $\partial(X)$ es también un corte minimal de G , por la proposición 2.2.

En conclusión, $\partial(X)$ es un corte minimal de G si y sólo si $c(G \setminus \partial(X)) = c(G) + 1$.

Q.E.D.

Si B es un corte minimal contenido en un corte $\partial(X)$, de una gráfica G conexa, ya sabemos (por el teorema anterior) que $G \setminus B = H_1 \cup H_2$, donde H_1 y H_2 son sus componentes conexas. Es sencillo verificar que $B = \partial(Y)$, haciendo $Y := V(F_1)$.

Por otro lado, como vimos en la demostración del teorema 2.3, si G es inconexa y F_1, \dots, F_c son sus componentes conexas, entonces B es el corte minimal de alguna F_k . Digamos que $F_k \setminus B = H_1 \cup H_2$, donde H_1 y H_2 son sus componentes conexas. Por lo que $G \setminus B = F_1 \cup \dots \cup F_{k-1} \cup H_1 \cup H_2 \cup F_{k+1} \cup \dots \cup F_c$. Entonces, haciendo $Y := V(H_1)$, es claro que $B = \partial(Y)$.

Estos pequeños detalles se usan en la demostración del siguiente teorema que muestra la relación existente entre los conjuntos de corte minimales y aquellos que no lo son.

Teorema 2.4

Sea G una gráfica. Una subconjunto de $E(G)$ es un conjunto de corte de G si y sólo si es es unión ajena de conjuntos de corte minimales de G .

Demostración: Para demostrar la necesidad, supongamos que $S \subseteq E(G)$ es un conjunto de corte. Si S ya es minimal, terminamos. Si no, S contiene a un conjunto de corte minimal, digamos B_1 . Entonces, claramente, $S = B_1 \cup (S \setminus B_1)$. De nuevo, si $S \setminus B_1$ es un conjunto de corte minimal, terminamos.

Si no es así, tomamos un minimal $B_2 \subseteq (S \setminus B_1)$ y observamos que $S = B_1 \cup B_2 \cup (S \setminus (B_1 \cup B_2))$. Nos preguntamos si $S \setminus (B_1 \cup B_2)$ es minimal o no, y repetimos el mismo procedimiento anterior hasta terminar en un q -ésimo paso de tal forma que $B_q = S \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_{q-1})$ sea un conjunto de corte minimal. Así, $S = B_1 \cup \dots \cup B_q$, y esta unión es ajena por construcción.

Para la suficiencia, asumimos ahora que $S = B_1 \cup \dots \cup B_q$ es unión ajena de conjuntos de corte minimales. Como cada B_i es un corte, ya argumentamos, antes de enunciar este teorema, que existe $Y_i \subseteq V(G)$ tal que $B_i = \partial(Y_i)$. Luego, $S = \partial(Y_1) \cup \dots \cup \partial(Y_q)$. Sin embargo, la unión es ajena por hipótesis y, así, se tiene que $S = \partial(Y_1) \Delta \dots \Delta \partial(Y_q)$. Utilizando el teorema 2.1, deducimos que $S = \partial(Y_1 \Delta \dots \Delta Y_q)$. Por lo tanto, S es un conjunto de corte.

Concluimos que $S \subseteq E(G)$ es un conjunto de corte si y sólo si es unión ajena de conjuntos de corte minimales.

Q.E.D.

Sean G una gráfica cualquiera y $X \subseteq V(G)$. El teorema anterior nos asegura la existencia de conjuntos de corte minimales (ajenos dos a dos) $B_1, \dots, B_q \subseteq E(G)$ tales que

$$\partial(X) = B_1 \cup \dots \cup B_q.$$

Entonces deducimos que las subgráficas generadoras correspondientes cumplen:

$$\begin{aligned} G[\partial(X)] &= G[B_1 \cup \dots \cup B_q] \\ &= G[B_1 \Delta \dots \Delta B_q] \text{ (la unión es ajena)} \\ &= G[B_1] \Delta \dots \Delta G[B_q] \text{ (por el corolario 2.2)}. \end{aligned}$$

Luego, $G[\partial(X)]$ es una diferencia simétrica de subgráficas generadoras inducidas por cortes minimales. Nótese que no es una *unión ajena de gráficas* pues, al ser generadoras, todas tienen el mismo conjunto de vértices, pero sí es una *unión ajena por aristas* (recuerde que el teorema 2.4 se refiere a una *unión ajena* en el sentido conjuntista). Resumimos las ideas que acabamos de desarrollar en este corolario:

Corolario 2.5

Sea G una gráfica. Una subgráfica generadora de G inducida por un conjunto de corte puede expresarse como una diferencia simétrica de subgráficas generadoras de G inducidas por conjuntos de corte minimales.

2.1.2. Conjuntos de corte fundamentales

Los árboles generadores de una gráfica están relacionados de forma particular con los conjuntos de corte. Sea T un árbol generador de G . Es común referirse a las aristas de T como *ramas*. Asimismo, llamamos *coárbol* al complemento de T respecto a G , es decir, a la subgráfica generadora de G cuyas aristas están determinadas por el conjunto $E(G) \setminus E(T)$. Lo denotamos como \bar{T} .

Proposición 2.3

Sean T y B un árbol generador y un conjunto de corte, respectivamente, ambos una gráfica G conexa, tales que $B \neq \emptyset$. Entonces siempre sucede que $\partial(X) \cap E(T) \neq \emptyset$.

Demostración: Supongamos que $B \cap E(T) = \emptyset$. Entonces $B \subseteq E(\overline{T})$ y, por tanto, $E(T) = E(G) \setminus E(T) \subseteq E(G) \setminus B$. Así, T es una subgráfica de $G \setminus B$. Sin embargo, $G \setminus B$ es inconexa y T es un árbol generador conexo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $B \cap E(T) \neq \emptyset$

Q.E.D.

La proposición anterior implica que \emptyset es el único conjunto de corte de G tal que $\emptyset \subseteq \overline{T}$, es decir, que el corte vacío es el único conjunto de corte que está contenido en las aristas del coárbol \overline{T} .

Sea b una rama cualquiera de T . Se sabe que $T \setminus b$ es inconexa y consta de dos componentes conexas: si no lo fuera, entonces en $T \setminus b$ habría una trayectoria W que conecta los extremos de b . Entonces, en T , la trayectoria W junto con la arista b formaría un ciclo, lo cual es imposible; y consta de dos componentes porque sólo se retira una arista (que es adyacente a dos vértices).

Como $T \setminus b$ es inconexa, debe existir $X \subseteq V(T) = V(G)$ tal que $\partial_T(X) = \{b\}$. Entonces todas las aristas del corte $\partial_G(X)$ son elementos de $E(\overline{T}) \cup \{b\}$. Entonces $G \setminus \partial_G(X) = T \setminus b$. Lo anterior implica que la gráfica $G \setminus \partial_G(X)$ está constituida por dos componentes conexas, es decir, $\partial_G(X)$ es un corte minimal de G .

Además, el corte $\partial_G(X)$ es único con la propiedad de estar contenido en $E(\overline{T}) \cup \{b\}$. En efecto, digamos que hay otro corte minimal B tal que $B \subseteq E(\overline{T}) \cup \{b\}$. Luego,

$$\begin{aligned} (\partial_G(X) \Delta B) \cap E(T) &= (\partial_G(X) \cap E(T)) \Delta (B \cap E(T)) \\ &= \{b\} \Delta \{b\} \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Entonces $\partial_G(X) \Delta B \subseteq E(\overline{T})$. Como el único conjunto de corte contenido en el coárbol es el vacío, entonces $\partial_G(X) \Delta B = \emptyset$, es decir, $\partial_G(X) = B$. Por tanto, $\partial_G(X)$ es el único corte con la propiedad de estar contenido en las aristas de $\overline{T} + b$.

El corte $\partial_G(X)$ que construimos en los párrafos anteriores es llamado *conjunto de corte fundamental de G con respecto a T y a b* , y lo denotaremos como \mathcal{B}_b (quedando el árbol generador implícito). Es preciso mencionar que árboles generadores distintos darán lugar a cortes fundamentales distintos. Si G tiene n vértices, entonces sabemos (por el capítulo previo) que T tiene $n - 1$ ramas. Así, necesariamente, $E(G)$ debe contener $n - 1$ cortes fundamentales respecto a T .

Ejemplo 2.6

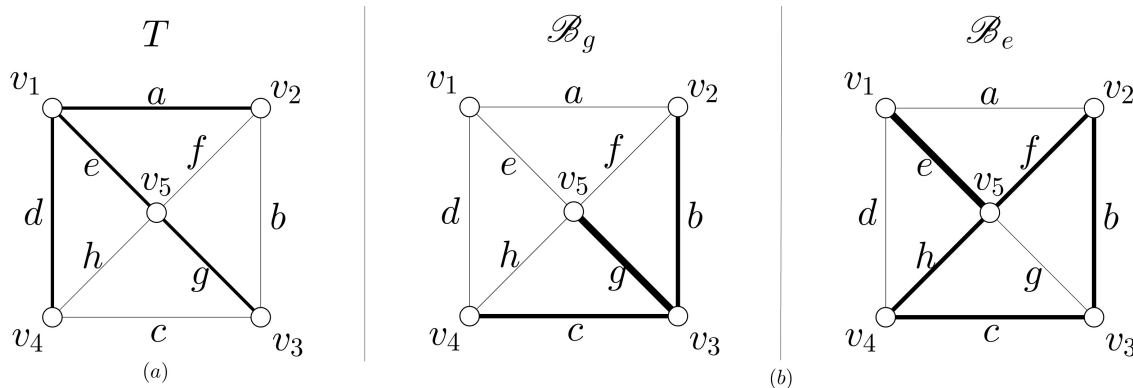


Fig. 2.10

Recuérdese la gráfica rueda W_4 de la figura 2.4. En la imagen 2.10, en el inciso (a), tomamos un árbol generador T cuyas aristas son $\{a, d, e, g\}$. En el inciso (b) mostramos dos cortes

fundamentales, uno respecto a la rama g y el otro respecto a e .



Lema 2.1

Sea T un árbol generador de G y $S \subseteq G$. Consideremos

$$B = \bigtriangleup_{b \in E(S)} \mathcal{B}_b.$$

Entonces B es un conjunto de corte. Además, $B \cap E(T) = E(S)$ y B es el único conjunto de corte de G con esta propiedad.

Demostración: Que B sea un conjunto de corte se da por el teorema 2.1. Por otro lado,

$$\begin{aligned} B \cap E(T) &= \left(\bigtriangleup_{b \in S} \mathcal{B}_b \right) \cap E(T) \\ &= \bigtriangleup_{b \in S} (\mathcal{B}_b \cap E(T)) \\ &= \bigtriangleup_{b \in S} \{b\} \\ &= S. \end{aligned}$$

Además, si hubiese otro corte B' tal que $B' \cap E(T) = S$, entonces $(B \triangle B') \cap E(T) = \emptyset$. Así, $B \triangle B' \subseteq E(\bar{T})$, implicando que $B \triangle B' = \emptyset$. Luego, $B = B'$, y B es único.

Q.E.D.

El lema anterior da pie al siguiente teorema, que caracteriza a los conjuntos de corte en términos de los cortes fundamentales.

Teorema 2.5

Si T es un árbol generador de G , entonces todo conjunto de corte de G puede expresarse de manera única como una diferencia simétrica de conjuntos de corte fundamentales con respecto a T .

Demostración: Sea $\partial(X)$ un conjunto de corte cualquiera de G . Hacemos $S = \partial(X) \cap E(T)$. Por el teorema anterior, necesariamente, $\partial(X) = \bigtriangleup_{b \in S} \mathcal{B}_b$ y es el único con tales propiedades.

Q.E.D.

En el caso que G sea una gráfica inconexa, se toma un bosque generador maximal y la construcción de sus cortes fundamentales es análoga. Como los cortes fundamentales son, en particular, cortes minimales, entonces los cortes fundamentales de G serán los cortes fundamentales de cada componente conexa; y los teoremas que hemos probado siguen siendo válidos para gráficas inconexas (con sus respectivas modificaciones). Si G tiene n aristas y c componentes conexas, entonces sabemos que sus bosques generadores maximales tienen $n - c$ aristas; luego, G tiene $n - c$ conjuntos de corte fundamentales.

El teorema previo garantiza la *unicidad* de la representación de los conjuntos de corte (lo que no aseguraba el teorema 2.4). Además, el teorema que acabamos de probar nos permite caracterizar de manera única a las subgráficas generadoras inducidas por conjuntos de corte (análogo al 2.5). Esta unicidad de la que hablamos será importante en el capítulo 3.

Corolario 2.6

Sea G una gráfica. Una subgráfica generadora de G inducida por un conjunto de corte puede expresarse de manera única como una diferencia simétrica de subgráficas generadoras de G inducidas por conjuntos de corte fundamentales.

2.2. Gráficas pares de G

Decimos que una gráfica es *par* si y sólo si todos sus vértices tienen grado par. En particular, los ciclos son gráficas pares pues todos sus vértices tienen grado 2; así como la gráfica vacía \emptyset , cuyos vértices tienen grado 0. Note que, si H es una subgráfica par de G , la subgráfica generadora inducida $G[E(H)]$ es también par, pues sólo se están añadiendo vértices aislados. Entonces, en esta sección, basta con enfocarnos en estudiar las subgráficas pares de G . Primero probaremos algunos resultados que relacionan a los conjuntos de corte con las gráficas pares.

Lema 2.2

Sean G una gráfica y $X \subseteq V(G)$. Entonces

$$|\partial(X)| = \sum_{v \in X} d(v) - 2|E[X]|.$$

Demostración: Para esta prueba haremos uso de la matriz de incidencia \mathbf{M}_G . Basándonos en las ideas que expusimos en el capítulo anterior, sabemos que se cumple:

$$\sum_{v \in X} \sum_{e \in E(G)} m_{ve} = \sum_{e \in E(G)} \sum_{v \in X} m_{ve}. \quad (2.4)$$

Se sabe también que $\sum_{e \in E(G)} m_{ve} = d(v)$, con $v \in X$. Así, en particular,

$$\sum_{v \in X} \sum_{e \in E(G)} m_{ve} = \sum_{v \in X} d(v). \quad (2.5)$$

Por otro lado, es sencillo darse cuenta que el conjunto de aristas se puede partir de la siguiente manera: $E(G) = \partial(X) \cup E[X] \cup E[\bar{X}]$. De aquí, dada una arista $e \in E(G)$, y de la definición de \mathbf{M}_G , se tiene

$$\sum_{v \in X} m_{ve} = \begin{cases} 1, & \text{si } e \in \partial(X) \\ 2, & \text{si } e \in E[X] \\ 0, & \text{si } e \in E[\bar{X}] \end{cases}$$

Luego, deducimos que:

$$\sum_{e \in E(G)} \sum_{v \in X} m_{ve} = \sum_{e \in \partial(X)} \left(\sum_{v \in X} m_{ve} \right) + \sum_{e \in E[X]} \left(\sum_{v \in X} m_{ve} \right) + \sum_{e \in E[\bar{X}]} \left(\sum_{v \in X} m_{ve} \right).$$

Por tanto,

$$\sum_{e \in E(G)} \sum_{v \in X} m_{ve} = |\partial(X)| + 2|E[X]|. \quad (2.6)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.5 y 2.6 en 2.4, y realizando las operaciones adecuadas, llegamos a la igualdad deseada: $|\partial(X)| = \sum_{v \in X} d(v) - 2|E[X]|$.

Q.E.D.

Proposición 2.4

G es par si y sólo si $|\partial(X)|$ es par, para cualquier $X \subseteq V(G)$.

Demostración: Supongamos que G es par y sea X un subconjunto de vértices de G . De la paridad de G se deduce que $\sum_{v \in X} d(v)$ es par. Luego entonces $\sum_{v \in X} d(v) - 2|E[X]|$ es par y, por el lema 2.2, $|\partial(X)|$ también es par.

En segundo lugar, asumimos que $|\partial(X)|$ es par, con X cualquier subconjunto de vértices de G . En particular, dado $v \in V(G)$, $|\partial(\{v\})|$ es par. En la sección pasada mencionamos que en $\partial(\{v\})$ se encuentran todas las aristas que inciden en v , excepto sus posibles lazos. Si $\partial(\{v\}) = \emptyset$ y v no tiene lazos, entonces su grado es cero. Si v tiene lazos, recordemos que estos se cuentan doble para el grado, de forma que éste sería par de todos modos. Si, ahora, $\partial(\{v\}) \neq \emptyset$, como $|\partial(\{v\})|$ es par, inciden en v un cantidad par de aristas y, si tuviera lazos, éstos se cuentan doble, de tal manera que $d(v)$ es un número par. Por lo tanto, todos los vértices de G tienen grado par, i.e., G es par.

Luego, G es par si y sólo si, para todo $X \subseteq V(G)$, $|\partial(X)|$ es par.

Q.E.D.

Para la demostración del siguiente teorema es necesario recordar que $|A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$.

Teorema 2.6

Dada G una gráfica, la diferencia simétrica de dos subgráficas pares de G es también una subgráfica par de G .

Demostración: Sean C_1, C_2 dos subgráficas pares cualesquiera de G . Tomamos un subconjunto X de vértices de G . Por la proposición 2.1, es cierto que

$$\partial_{C_1 \Delta C_2}(X) = \partial_{C_1}(X) \Delta \partial_{C_2}(X).$$

Además, en virtud de la proposición 2.4, $|\partial_{C_1}(X)|$ y $|\partial_{C_2}(X)|$ son números pares. Entonces

$$|\partial_{C_1}(X) \Delta \partial_{C_2}(X)| = |\partial_{C_1}(X)| + |\partial_{C_2}(X)| - 2|\partial_{C_1}(X) \cap \partial_{C_2}(X)|$$

es también un número par, es decir, $\partial_{C_1 \Delta C_2}(X)$ tiene cardinalidad par. De nuevo por la proposición 2.4, concluimos que $C_1 \Delta C_2$ es una subgráfica par.

Q.E.D.

Utilizando el Principio de Inducción, es claro que el teorema anterior puede generalizarse a cualquier cantidad arbitraria de subgráficas pares.

2.2.1. Los ciclos de G

Por simplicidad, a partir de aquí, cuando digamos *ciclos ajenos* nos referiremos a ciclos *ajenos por aristas*. También introducimos un nuevo concepto: una *descomposición de una gráfica G* es una familia \mathcal{F} de subgráficas ajenas por aristas tales que:

$$\bigcup_{F \in \mathcal{F}} E(F) = E(G).$$

En [3, 15, 6, 2] se mencionan que a principios del siglo XX, Oswald Veblen (1880 - 1960) caracterizó las gráficas pares como aquellas que pueden ser descompuestas en ciclos ajenos. A continuación presentamos dicho resultado y su justificación.

Teorema 2.7 (Teorema de Veblen)

Una gráfica G es par si y sólo si G se descompone en ciclos ajenos.

Demostración: Probemos la *necesidad* por inducción fuerte, sobre el número m de aristas de G .

Paso base: $m = 0$. Entonces G no tiene aristas, i.e., es una gráfica vacía (que es par) y se descompone en una familia vacía de ciclos.

Hipótesis de inducción: Supongamos que, para cualquier gráfica par H con q aristas y $q < m$, H admite una descomposición en ciclos ajenos.

Paso inductivo: Sea G una gráfica par con m aristas. Tomamos F la subgráfica de G inducida por sus vértices de grado positivo (en otras palabras, ignoramos, de momento, los posibles vértices aislados de G). Dado un vértice $v \in V(F)$, por la paridad de G , sabemos que $d_F(v) \geq 2$; y, por el teorema 1.1, necesariamente F contiene un ciclo, digamos C . Es claro también que C está contenido en G .

Consideramos a $H = G \setminus E(C)$. Verifiquemos que esta gráfica, en efecto, es par. Tomamos v un vértice cualquiera de H . Como $V(H) = V(G)$, entonces $v \in V(G)$. Si es un vértice aislado, entonces su grado es par. Si no es aislado, entonces hay dos posibilidades: que v sea parte del ciclo C o no. Si $v \in V(C)$, significa que hay dos aristas de C que inciden en él. Entonces, en H , se remueven tales aristas, disminuyendo en dos el grado de v (conservando así la paridad). Si $v \notin V(C)$, su grado permanece invariante en H . En cualquier caso, debido a que G es par, el grado de v es un número par.

Podemos resumir las ideas anteriores en la siguiente ecuación:

$$d_H(v) = \begin{cases} 0, & \text{si } d_G(v) = 0 \\ d_G(v) - 2, & \text{si } v \in V(C) \\ d_G(v), & \text{si } v \notin V(C) \end{cases}.$$

Por lo tanto, H es una gráfica par con menos aristas que G . Gracias a la hipótesis de inducción sabemos que H se descompone en una familia Γ de ciclos ajenos, es decir:

$$E(H) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} E(\gamma).$$

Dada la igualdad anterior, y como $H = G \setminus E(C)$, entonces C es un ciclo ajeno respecto a los ciclos que pertenecen a Γ . Por lo tanto,

$$E(G) = E(H) \cup E(C) = \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} E(\gamma) \right) \cup E(C).$$

Por consiguiente, G se descompone en la familia de ciclos ajenos $\Gamma \cup \{C\}$. Por inducción, concluimos que cualquier gráfica par puede ser descompuesta en ciclos ajenos.

Probaremos ahora la *suficiencia*. Supongamos que G admite una descomposición en ciclos, es decir, que existen $\gamma_1, \dots, \gamma_q$ ciclos ajenos contenidos en G tales que

$$\bigcup_{i=1}^q E(\gamma_i) = E(G).$$

Sea v un vértice cualquiera de G . Si v es aislado, o sea $d_G(v) = 0$, entonces tiene grado par. Si $d_G(v) \neq 0$, significa que hay al menos otro vértice u adyacente a v . Supongamos que a es la arista

cuyos extremos son u y v . Como $a \in \bigcup_{i=1}^q E(\gamma_i)$, existe un ciclo γ_j tal que $a \in E(\gamma_j)$, esto es, que v es un vértice del ciclo γ_j , lo cual implica que existe otro vértice w (éste puede ser el mismo v o, incluso, u) adyacente a v . En resumen, por cada ciclo al que pertenezca v otros dos vértices (no necesariamente distintos) son adyacentes a v , de donde $d_{\gamma_j}(v) = 2$.

Por otro lado, es fácil observar que el grado de cada vértice de G es la suma de los grados de ese mismo vértice respecto a cada subgráfica de la descomposición. Luego, suponiendo que v es vértice de p ciclos (digamos $\gamma_{j_1}, \dots, \gamma_{j_p}$) en la descomposición, el párrafo anterior nos permite afirmar que

$$d_G(v) = \sum_{i=1}^p d_{\gamma_{j_i}}(v) = \sum_{i=1}^p 2 = 2p.$$

Así, el grado de todo vértice de G es el doble del número de ciclos a los que pertenece y, en consecuencia, G es una gráfica par.

Por lo tanto, G es par si y sólo si G se descompone en ciclos ajenos.

Q.E.D.

En el Teorema de Veblen, la descomposición en ciclos ajenos puede interpretarse como una diferencia simétrica de ciclos ajenos por aristas. Aún más, podemos generalizarlo en el siguiente corolario:

Corolario 2.7

Dada una gráfica G , toda subgráfica generadora de G es par si y sólo si es una diferencia simétrica de subgráficas generadoras inducidas por ciclos ajenos de G .

Ejemplo 2.7

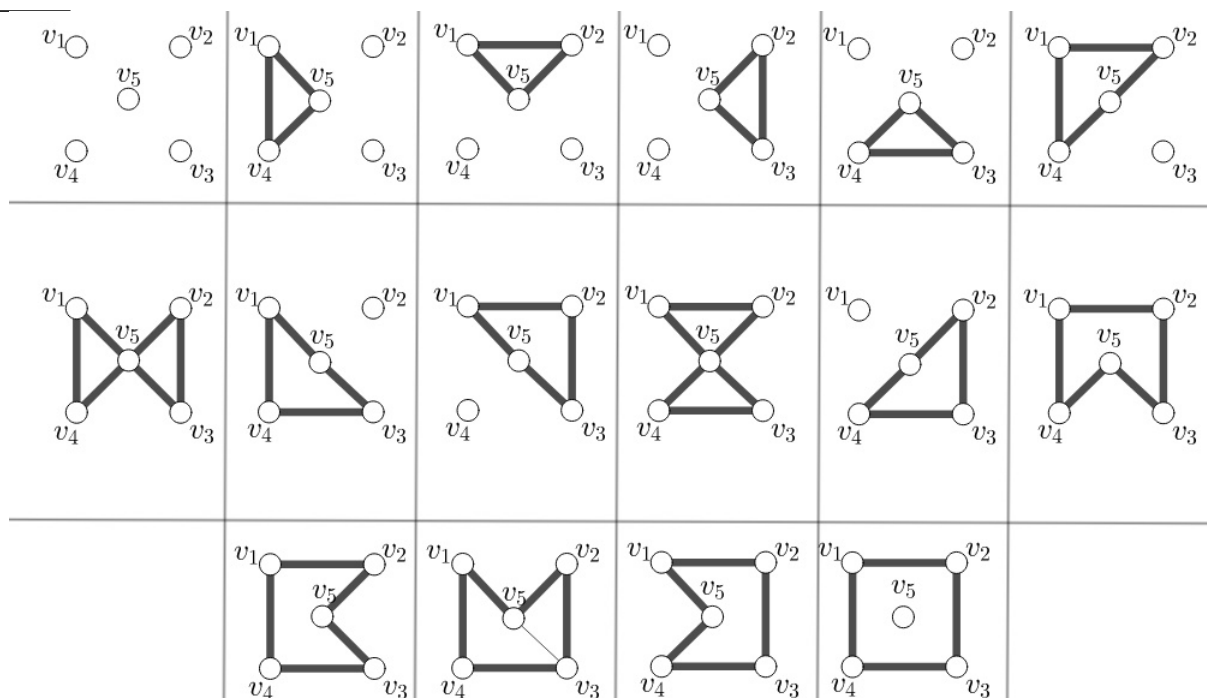


Fig. 2.11

En la figura 2.11 se encuentran todas las subgráficas pares de la gráfica W_4 y hemos resaltado sus respectivas aristas. El lector podrá darse cuenta cómo cada subgráfica par de W_4 o es un ciclo

o puede ser descompuesto en ciclos ajenos. ◆

2.2.2. Ciclos fundamentales

Los ciclos están especialmente relacionados con los complementos de árboles generadores, como veremos a continuación.

Proposición 2.5

Sean una subgráfica generadora par H de G , distinta de la subgráfica vacía \emptyset , y un árbol generador T . Entonces $H \cap \bar{T} \neq \emptyset$.

Demostración: Para llegar a una contradicción, supongamos que $H \cap \bar{T} = \emptyset$, entonces $E(H) \cap E(\bar{T}) = \emptyset$. Luego, $E(H) \subseteq E(T)$ y, de este modo, H es una subgráfica de T

Por el corolario del teorema de Veblen, H se descompone en subgráficas generadoras inducidas por los ciclos de G . Entonces T contiene estos ciclos. Sin embargo, esto es una contradicción pues T es un árbol. Por tanto, $C \cap \bar{T} \neq \emptyset$.

Q.E.D.

De este resultado se desprende que la única subgráfica par contenida en T es la subgráfica vacía \emptyset . Ahora tomemos una arista c cualquiera de \bar{T} y supongamos que x y y son sus extremos. De la proposición 1.1, sabemos que hay una única trayectoria P , contenida en T , que une a x y a y .

Por tanto, la gráfica $T + c$ contiene al ciclo formado por la trayectoria P y la arista c , llamado *ciclo fundamental de G con respecto a T y a c* . Téngase en cuenta que diferentes árboles generadores determinan ciclos fundamentales distintos. Cuando esté implícito el árbol con el que estemos trabajando, escribiremos como \mathcal{C}_c a la subgráfica generadora inducida por el ciclo fundamental con respecto a c (y, por comodidad, esta subgráfica también será llamada *ciclo fundamental*). Si G es inconexa, sus ciclos fundamentales, con respecto a algún bosque generador maximal, son los ciclos fundamentales de cada componente conexa.

Sabemos que hay $m - n + 1$ aristas en \bar{T} , entonces G debe contener $m - n + 1$ ciclos fundamentales con respecto a T . Por último, si G tiene c componentes conexas y, puesto que hay $m - n + c$ aristas en el complemento de cualquier bosque generador maximal, necesariamente G tiene $m - n + c$ ciclos fundamentales.

De forma análoga al comportamiento de los cortes fundamentales, la diferencia simétrica de dos ciclos fundamentales es una gráfica par (por el teorema 2.6). Además, por construcción, es claro que $E(\mathcal{C}_c) \cap E(\bar{T}) = \{c\}$ y que \mathcal{C}_c es una subgráfica de $T + c$. De hecho, el siguiente teorema hace uso de estas dos observaciones.

Lema 2.3

Sean S una subgráfica generadora de una gráfica G y \bar{T} un coárbol de G . Supongamos que S es una subgráfica de \bar{T} y consideremos

$$H = \Delta_{c \in E(S)} \mathcal{C}_c$$

Entonces H es una subgráfica par. Además, $H \cap \bar{T} = S$ y H es la única subgráfica par de G con esta propiedad.

Demostración: Que H sea par se da por el teorema 2.6. Por otro lado, nótese que

$$\begin{aligned} H \cap \bar{T} &= \left(\Delta_{c \in E(S)} \mathcal{C}_c \right) \cap \bar{T} \\ &= \Delta_{c \in E(S)} (\mathcal{C}_c \cap T) \\ &= G \left[\begin{array}{c} \Delta \\ c \end{array} \right] \\ &= S. \end{aligned}$$

Además, si hubiese otra subgráfica par H' tal que $H' \cap \bar{T} = S$, entonces $(H \Delta H') \cap \bar{T} = \emptyset$. Ésto, como se mencionó previamente, implica que $H \Delta H'$ está contenida T . Pero eso significa que $H \Delta H' = \emptyset$ y, por tanto, $H = H'$. Luego, H es única. **Q.E.D.**

Hallamos en el lema previo hay una garantía de *unicidad* en la representación de las subgráficas pares (y esto no lo aseguraba el Teorema de Veblen). Esta unicidad también será importante en el capítulo 3. Podemos generalizar lo anterior (en términos de subgráficas generadoras):

Teorema 2.8

Sean G una gráfica y T un árbol generador. Entonces toda subgráfica par de G puede expresarse de manera única como una diferencia simétrica de subgráficas generadoras inducidas por los ciclos fundamentales con respecto a T

Demostración: Sea H una subgráfica par cualquiera de G . Hacemos $S = H \cap \bar{T}$. Por el lema anterior, necesariamente, $H = \Delta_{c \in E(S)} \mathcal{C}_c$ y es el único con tales propiedades.

Q.E.D.

Ejemplo 2.8

Recuérdese el ejemplo 2.6 y el árbol generador T que habíamos escogido para W_4 (que vemos remarcado en el inciso (a) de la imagen 2.12). En el inciso (b) mostramos dos ciclos fundamentales, uno respecto a la arista h y el otro respecto a b .

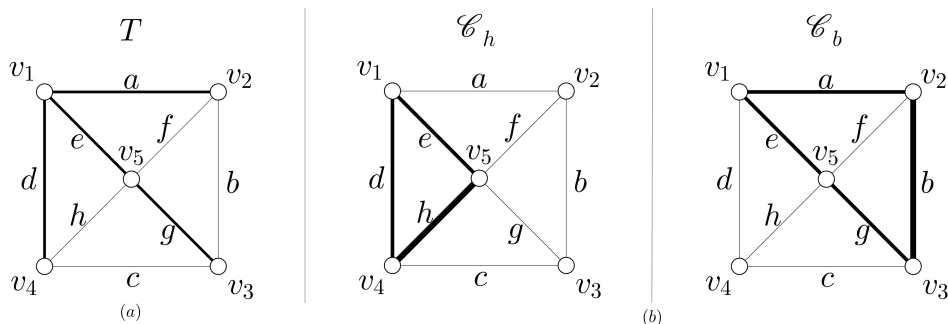


Fig. 2.12



2.3. Relación entre los conjuntos de corte y las gráficas pares

Sea G una gráfica y tomemos un ciclo C de G y un vértice $u \in V(G)$. Es sencillo convencerse de que $\partial(u) \cap E(C)$ sólo tiene dos posibilidades: ser vacío o tener dos aristas como únicos elementos. En efecto, si u no está en el ciclo C , no hay aristas en $\partial(u) \cap E(C)$; y si u es parte del ciclo C , forzosamente dos aristas de $\partial(u)$ están en C (si hubiera más, C ya no sería un ciclo). En ambos casos, tal intersección es de cardinalidad par. De hecho, generalizamos estas observaciones en el siguiente teorema.

Teorema 2.9

En cualquier gráfica, toda subgráfica par y todo conjunto de corte, tienen en común una cantidad par de aristas.

Demostración: Sean G una gráfica y $\partial(X)$ un conjunto de corte cualquiera, con $X \subseteq V(G)$. Si este corte es vacío, el teorema se cumple.

Supongamos que $\partial(X) \neq \emptyset$. Probemos el teorema primero para ciclos y luego para gráficas pares en general. Recordemos que $G \setminus \partial(X) = G[X] \cup G[\bar{X}]$.

Sea C un ciclo de G . Si este ciclo está completamente contenido en $G[X]$ ó $G[\bar{X}]$, también el teorema se cumple pues $E(C) \cap \partial(X) = \emptyset$.

La otra posibilidad es que $E(C) \cap \partial(X) \neq \emptyset$. Si ésto ocurre, significa que existe una arista con un extremo en X y otro en \bar{X} . De tal manera que, partiendo del extremo en X , el ciclo atraviesa la gráfica hasta regresar al vértice donde empezó. Entonces C cruza de X a \bar{X} las mismas veces que cruza de \bar{X} a X . Por tanto, en ambos casos, $|C \cap \partial(X)|$ es un número par.

Ahora, sea H una gráfica par. Gracias al teorema de Veblen, sabemos que existen C_1, \dots, C_k ciclos ajenos tales que $\bigcup_{j=1}^k C_j = H$. Entonces

$$\begin{aligned} |E(H) \cap \partial(X)| &= |(\bigcup_{j=1}^k E(C_j)) \cap \partial(X)| \\ &= |\bigcup_{j=1}^k (E(C_j) \cap \partial(X))|. \end{aligned}$$

Como los ciclos C_i son ajenos, también las intersecciones $E(C_j) \cap \partial(X)$. Luego,

$$|\bigcup_{j=1}^k (E(C_j) \cap \partial(X))| = \sum_{j=1}^k |E(C_j) \cap \partial(X)|.$$

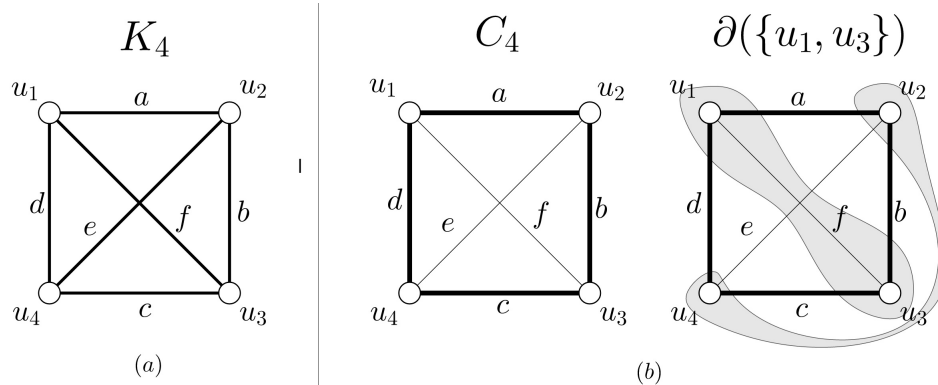
Ya argumentamos al principio de esta prueba que los sumandos $|E(C_j) \cap \partial(X)|$ son pares, por lo tanto, su suma es par. Dado que $\sum_{j=1}^k |E(C_j) \cap \partial(X)| = |E(H) \cap \partial(X)|$, entonces $|E(H) \cap \partial(X)|$ es par, es decir, hay una cantidad par de aristas en $E(H) \cap \partial(X)$.

Q.E.D.

¿Hay conjuntos de corte que son gráficas pares también? ¿O son conceptos mutuamente excluyentes? La respuesta es afirmativa: hay gráficas pares que, al mismo tiempo, son conjuntos de corte, como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.9

Consideremos a K_4 , la gráfica completa de cuatro vértices (inciso (a) de la figura 2.13). Es evidente que contiene al ciclo C_4 , cuyas aristas son $\{a, b, c, d\}$. Si observamos atentamente, uno puede darse cuenta que $\partial\{u_1, u_3\} = E(C_4)$.

**Fig. 2.13****2.4. Cortes y ciclos en digráficas**

La teoría de digráficas tiene una amplia literatura, como puede verificarse en [1]. Sin embargo, en esta tesis realmente lo que nos interesa son las gráficas subyacentes de las digráficas. Concretamente, nos enfocaremos en sus cortes y sus gráficas pares y, desde luego, en los elementos minimales de estas clases de subgráficas. Por estas razones, sólo introducimos los conceptos necesarios para tal propósito.

Las digráficas son de interés pues, como se verá en el próximo capítulo, permiten asociarles espacios vectoriales sobre los números reales (lo cual no sería posible si no tuvieran dirección los arcos).

2.4.1. Conjuntos de corte de D

Sean $X \subseteq V$ y $Y \subseteq V$. Al conjunto de arcos cuyas colas estén en X y cabezas en Y se le denota como $A[X, Y]$. Si $Y = \bar{X}$, $\partial^+(X) := A[X, \bar{X}]$ es el *excorte* de D asociado a X . Similarmente, el *incorte* asociado a X es el conjunto $\partial^-(X) := A[X, \bar{X}]$.

Finalmente el *conjunto de corte de D asociado a X* es la unión del excorte y el incorte respectivo, es decir, $\partial(X) := \partial^+(X) \cup \partial^-(X)$. Es sencillo observar que $\partial^+(X) = \partial^-(\bar{X})$. En la figura 2.14 mostramos un excorte y un incorte de la digráfica del inciso (a), con $X = \{u_2, u_3, u_5\}$.

Podemos utilizar esta nueva notación para reescribir la definición de conexidad fuerte que dimos en un principio. En efecto, D es *fuertemente conexa* si y sólo si, para todo $X \subseteq V(D)$, $\partial^+(X) \neq \emptyset$.

Asimismo, recordando la definición de la matriz de incidencia $\mathbf{M}_D = [m_{va}]$, podemos ahora establecer que:

$$m_{va} = \begin{cases} 1, & a \in \partial^+(v) \\ -1, & a \in \partial^-(v) \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.7)$$

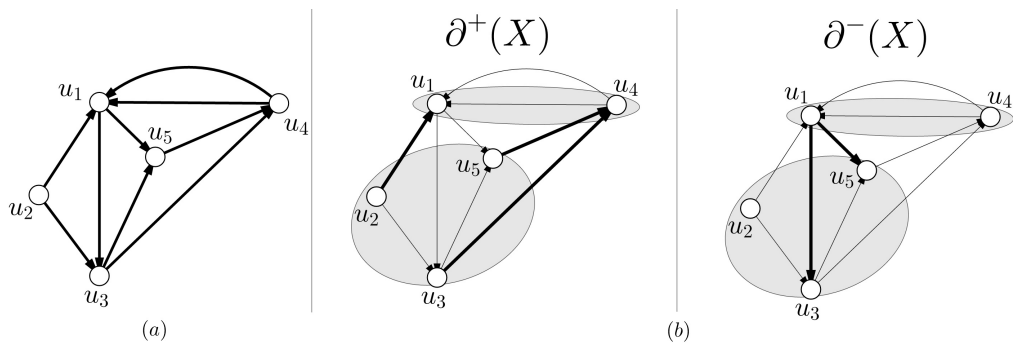


Fig. 2.14

Si $G := G(D)$ es la gráfica subyacente de D , observamos también que los elementos en $\partial_G(X)$ son los mismos que en $\partial_D(X)$ pero sin considerar direcciones. De aquí que un conjunto de aristas es un corte en G si y sólo si el correspondiente conjunto de arcos es un corte en D .

Lo anterior nos abre paso para definir cortes minimales en digráficas. Así, un conjunto de corte $\partial_D(X)$ es *minimal* en D si y sólo si $\partial_G(X)$ es un corte minimal en G . También diremos que un conjunto de corte es *dirigido* si $\partial(X) = \partial^+(X)$, o sea, $\partial^-(X) = \emptyset$.

Observemos que en cualquier corte dirigido, los cortes minimales que contiene también deben ser dirigidos. Apoyémonos de la figura 2.15. Si $\partial(X) = \partial^+(X)$, cualquier $\partial(Y) \subseteq \partial^+(X)$ es de la forma $\partial(Y) = A[X \cap Y, \bar{X} \cap \bar{Y}] \cup A[X \cap \bar{Y}, \bar{X} \cap Y]$.

Por otro lado, si B es un corte minimal contenido en $\partial(X)$, podemos tomar a Y como el conjunto de colas de los arcos de B (pensando en $B \subseteq A(D)$) y, por lo tanto, $\partial(Y) = B$. Lo anterior es posible porque los arcos de B tiene una sola dirección (al ser elementos de $\partial(X)$). Sin embargo, por cómo se construyó Y , en realidad $Y \subseteq X$ y, en consecuencia, $\bar{X} \cap Y = \emptyset$.

Entonces $\partial(Y) = A[X \cap Y, \bar{X} \cap \bar{Y}] = \partial^+(Y)$. Por lo que *todo corte minimal contenido en un corte dirigido debe ser, a su vez, dirigido*.

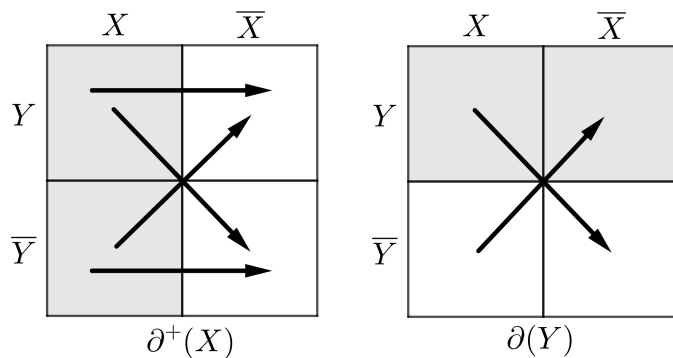


Fig. 2.15

2.4.2. Los ciclos de D

Sea C un ciclo de D , con vértices $V = \{u_1, \dots, u_n\}$ y arcos $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Dependiendo del diagrama con el que representemos al ciclo, es sencillo convencerse que puede ser *recorrido* (o *atravesado*) en dos sentidos: a favor de las manecillas del reloj (representado con el símbolo \odot) o en contra de las manecillas del reloj (cuyo símbolo asociado es \ominus). Dicho formalment, podemos asociar a

C dos posibles circuitos distintos: $\Gamma_{\circlearrowright} = u_1 a_1 u_2 \dots u_n a_n u_1$ y $\Gamma_{\circlearrowleft} = u_1 a_n u_n \dots u_2 a_1 u_1$, suponiendo que los vértices y arcos han sido etiquetados *en orden*.

No necesariamente u_{i-1} domina a u_i (en $\Gamma_{\circlearrowright}$), ni tampoco siempre se cumple que u_i domina a u_{i-1} (en $\Gamma_{\circlearrowleft}$). Los arcos a_i de $\Gamma_{\circlearrowright}$ para los cuales sí se da que $t(a_i) = u_{i-1}$ y $h(a_i) = u_i$ se llaman *arcos hacia adelante* (*Forward arcs*, en inglés); y aquellos tales que $t(a_i) = u_i$ y $h(a_i) = u_{i-1}$ son *arcos hacia atrás* (*Reverse arcs*, en inglés). Los arcos hacia adelante y atrás de $\Gamma_{\circlearrowright}$ son definidos análogamente.

Los conjuntos de arcos hacia adelante y hacia atrás de $\Gamma_{\circlearrowright}$ inducen dos subdigráficas del ciclo C , denotados, respectivamente, por C_{\circlearrowright}^+ y C_{\circlearrowright}^- . De manera similar, $\Gamma_{\circlearrowleft}$ induce C_{\circlearrowleft}^+ y C_{\circlearrowleft}^- . Puede verificarse que $C_{\circlearrowright}^+ = C_{\circlearrowleft}^-$ y $C_{\circlearrowright}^- = C_{\circlearrowleft}^+$.

Ejemplo 2.10

En la imagen 2.16 mostramos un ciclo de nueve vértices y, para representar el sentido escogido, dentro de él colocamos el símbolo \circlearrowright . Asimismo, resaltamos los arcos hacia adelante C_{\circlearrowright}^+ y los arcos hacia atrás C_{\circlearrowright}^- .

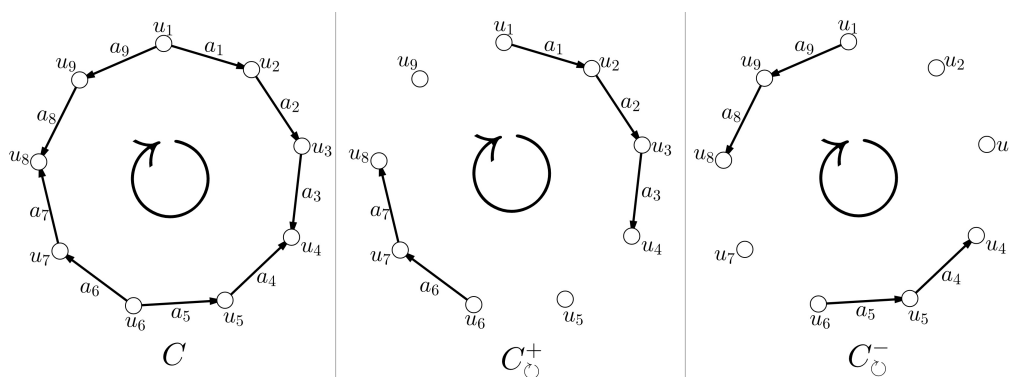


Fig. 2.16

Sea cual sea el sentido que escojamos, es evidente que $C = C^+ \cup C^-$. Aún más, si para algún sentido se tiene que $C = C^+$, entonces C es un *ciclo dirigido*. De hecho, se dice que una digráfica es *Digráfica! acíclica* si no contiene ciclos dirigidos. Por ejemplo, la digráfica de la figura 2.17 es acíclica pues, aunque ella misma sea un ciclo, no es un ciclo dirigido. Una de sus propiedades más importantes que *toda digráfica acíclica tiene, al menos, una fuente y un pozo*.

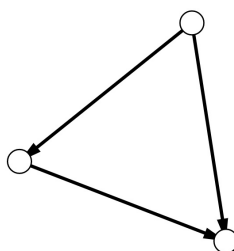


Fig. 2.17

Espacios vectoriales



EMOS llegado a la parte central de esta tesis. En el capítulo anterior definimos y describimos las propiedades de los conjuntos de corte y las subgráficas pares de una gráfica G . El lector observador podrá haberse dado cuenta que la operación *diferencia simétrica* Δ jugó un papel fundamental. En este capítulo estaremos dedicados a describir los diferentes espacios vectoriales asociados a las gráficas y digráficas. Posteriormente, estudiaremos sus relaciones con sus matrices de incidencia.

3.1. Espacios en gráficas

A menos que se mencione lo contrario, en esta sección supondremos que G es una gráfica conexa con n vértices y m aristas, de tal manera que $V(G) = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $A(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$.

3.1.1. Espacio de aristas $\mathcal{E}(G)$

Denotaremos por $\mathcal{E}(G)$ al conjunto de subgráficas generadoras de G . Es muy sencillo verificar que la operación Δ es cerrada en $\mathcal{E}(G)$. En efecto, dadas $F_1, F_2 \in \mathcal{E}(G)$, se tiene que $F_1 \Delta F_2 \in \mathcal{E}(G)$, pues $E(F_1) \Delta E(F_2) \subseteq E(G)$ y los vértices de G se mantienen invariantes. Nótese que la subgráfica \emptyset funciona como elemento neutro de Δ .

Podemos también definir un producto interior en $\mathcal{E}(G)$ bajo el campo $GF(2)$. Dados $\lambda \in GF(2)$ y H una subgráfica generadora de G , consideramos el producto escalar \cdot dado por:

$$\lambda \cdot H = \begin{cases} H, & \lambda = 1 \\ \emptyset, & \lambda = 0. \end{cases}$$

Debido a la naturaleza y propiedades de la diferencia simétrica Δ , es muy fácil darse cuenta que la terna $(\mathcal{E}(G), \Delta, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre el campo $GF(2)$. Es por esto que a $\mathcal{E}(G)$ se le

conoce como el *espacio de aristas de G* .

Las subgráficas generadoras inducidas $G[\{e_i\}]$ (es decir, tomamos cada arista de G como una subgráfica generadora) forman una base de $\mathcal{E}(G)$. En efecto, $\{G[\{e_i\}] \mid i = 1, \dots, m\}$ es un conjunto generador pues, para toda $H \in \mathcal{E}(G)$,

$$H = \Delta_{e \in E(H)} G[\{e\}].$$

Además, es linealmente independiente debido a que $\lambda_1 G[\{e_1\}] \Delta \dots \Delta \lambda_m G[\{e_m\}] = \emptyset$ si y sólo si, para toda $i = 1, \dots, m$, $\lambda_i = 0$, porque \emptyset no tiene aristas. Por lo tanto, $\{G[\{e_i\}] \mid i = 1, \dots, m\}$ es una base de $\mathcal{E}(G)$.

De lo anterior, concluimos que $\dim(\mathcal{E}(G)) = m$. Una consecuencia de conocer una base de $\mathcal{E}(G)$ y su dimensión es que podemos saber el número total de elementos en el espacio de aristas. Ya que nuestro campo $GF(2)$ es finito y consta de dos elementos (el 0 y el 1), tomar combinaciones lineales de la base es equivalente a tomar subconjuntos de ésta.

¿Cuántos subconjuntos de $\{G[\{e_1\}], \dots, G[\{e_m\}]\}$ hay? De la Combinatoria se sabe que existen 2^m subconjuntos de un conjunto de m elementos. Así, sencillamente, deducimos que $|\mathcal{E}(G)| = 2^m$.

Ejemplo 3.1

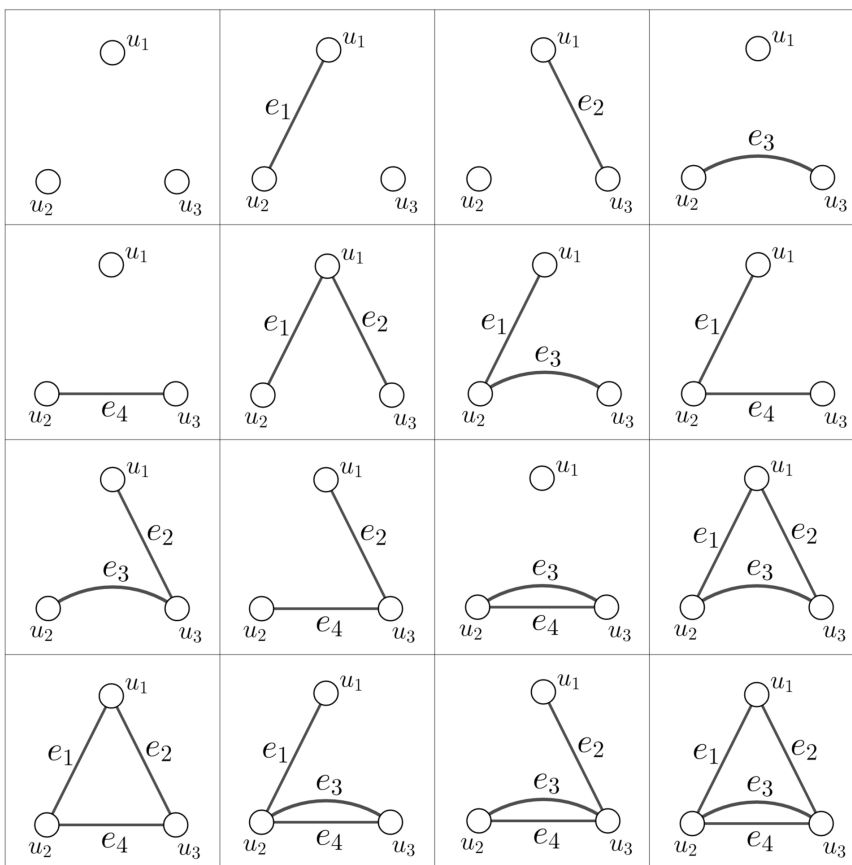


Fig. 3.1. Espacio de aristas

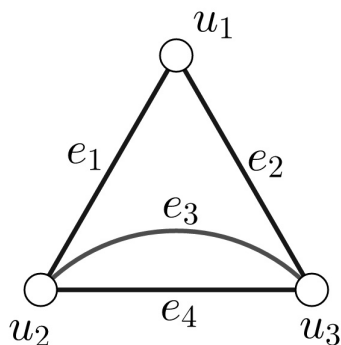


Fig. 3.2

Consideremos la gráfica de la figura 3.2, la cual consta de cuatro aristas. En la imagen 3.1 desglosamos su espacio de aristas. Nótese que hay $2^4 = 16$ subgráficas generadoras. ◆

3.1.2. Espacio de conjunto de cortes $\mathcal{B}(G)$

A la colección de las subgráficas generadoras inducidas por los conjuntos de corte de G se le denota por $\mathcal{B}(G)$. Así, $\mathcal{B}(G) \subseteq \mathcal{E}(G)$. De hecho, $\mathcal{B}(G)$ argumentaremos por qué éste resulta ser un subespacio vectorial de $\mathcal{E}(G)$.

Si recordamos el corolario 2.2, su principal consecuencia es que *la diferencia simétrica subgráficas generadoras inducidas por conjuntos de corte es también un conjunto de corte*, esto es, que $\mathcal{B}(G)$ es cerrado bajo la diferencia simétrica Δ :

Teorema 3.1

Si $F_1, F_2 \in \mathcal{B}(G)$, entonces $F_1 \Delta F_2 \in \mathcal{B}(G)$.

Dado que \emptyset es un corte y $\mathcal{B}(G)$ es trivialmente cerrado bajo el producto escalar, se sigue que $\mathcal{B}(G)$ es un subespacio de $\mathcal{E}(G)$ y recibe el nombre de *espacio de cortes de G* . En la figura 2.5 está desglosado el espacio de cortes de la gráfica W_4 .

Asimismo, el corolario 2.5 también puede formularse en términos propios del Álgebra Lineal:

Teorema 3.2

Los conjuntos de corte minimales generan al subespacio $\mathcal{B}(G)$.

Además de los cortes minimales, existe otro conjunto de cortes que genera a $\mathcal{B}(G)$ y que nos será de mucha ayuda más adelante. Observemos que cualquier $X \subseteq V(G)$ puede expresarse como diferencia simétrica de sus elementos, es decir, $X = \Delta_{u \in X} \{u\}$. Por tanto, debido al corolario 2.1, el conjunto de corte asociado a X puede expresarse así:

$$\partial(X) = \Delta_{u \in X} \partial(\{u\}).$$

Lo anterior da lugar al siguiente resultado:

Proposición 3.1

La colección de subgráficas generadoras inducidas por los cortes de la forma $\partial(u)$, con $u \in V(G)$, es un conjunto generador del subespacio $\mathcal{B}(G)$.

Ya hemos construido conjuntos generadores. ¿Qué conjunto de cortes resulta ser una base para el espacio $\mathcal{B}(G)$? Traigamos a la memoria los cortes fundamentales de G .

Dado T un árbol generador de G , el teorema 2.5 implica que las subgráficas generadoras inducidas por los cortes fundamentales de G determinan un conjunto generador. Aún más, afirmamos que son linealmente independientes. Tomemos una combinación lineal cualquiera de \emptyset , es decir, supongamos que

$$\Delta_{b \in E(T)} \lambda_b G[\mathcal{B}_b] = \emptyset,$$

con $\lambda_b \in GF(2)$. Tomando $S \subseteq T$ con $E(S) := \{b \in E(T) \mid \lambda_b \neq 0\}$, tenemos

$$\Delta_{b \in E(T)} \lambda_b G[\mathcal{B}_b] = \Delta_{b \in E(S)} \lambda_b G[\mathcal{B}_b] = \emptyset.$$

Por el lema 2.1, \emptyset es el único corte tal que $\emptyset \cap E(T) = E(S)$. Luego, $E(S) = \emptyset$ y, en consecuencia, $\lambda_b = 0$, para toda $b \in E(T)$. Por consiguiente, $\left\{ G[\mathcal{B}_b] \in \mathcal{B}(G) \mid b \in E(T) \right\}$ es un conjunto linealmente independiente. Ya que este mismo conjunto es generador, necesariamente es una base. Tal hecho lo dejamos plasmado como un teorema.

Teorema 3.3

La colección de las subgráficas generadoras inducidas por los conjuntos de corte fundamentales respecto a un árbol T es una base para $\mathcal{B}(G)$.

Sabemos que hay $n - 1$ cortes fundamentales asociados a algún árbol generador de G , así que el teorema anterior nos permite deducir que $\dim(\mathcal{B}(G)) = n - 1$.

¿Qué sucede si G no es conexa? Supongamos que $G = \bigcup_{j=1}^c F_j$ (esta unión es ajena), con F_1, \dots, F_c sus componentes conexas. Para cada $i \in \{1, \dots, c\}$, definimos \mathcal{F}_i como la subgráfica generadora de G inducida por las aristas de F_i , es decir,

$$\mathcal{F}_i := G \left[E(F_i) \right].$$

Entonces $G = \bigcup_{j=1}^c \mathcal{F}_j$ (esta unión sólo es ajena por aristas). Con base en los razonamientos que hicimos en el capítulo pasado, ya sabemos que toda subgráfica generadora inducida por un corte de \mathcal{F}_j es una subgráfica generadora inducida por un corte de G . Por lo que $\mathcal{B}(\mathcal{F}_j) \subseteq \mathcal{B}(G)$. Las subgráficas generadoras inducidas por cortes en $\mathcal{B}(\mathcal{F}_j)$ corresponden a las subgráficas generadoras inducidas por los cortes en $\mathcal{B}(F_j)$. Luego, $\dim(\mathcal{B}(\mathcal{F}_j)) = \dim(\mathcal{B}(F_j)) = |V(F_j)| - 1$.

Además, toda subgráfica generadora inducida por corte de G es una diferencia simétrica de subgráficas generadoras inducidas por cortes de cada subgráfica \mathcal{F}_j ; y también es sencillo ver que \emptyset es la única subgráfica generadora inducida por un conjunto de corte que tienen en común las subgráficas \mathcal{F}_i .

Las ideas anteriores nos permiten asegurar que $\mathcal{B}(G)$ es suma directa de los subespacios $\mathcal{B}(\mathcal{F}_j)$ (correspondientes a sus componentes conexas), es decir, $\mathcal{B}(G) = \mathcal{B}(\mathcal{F}_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{B}(\mathcal{F}_c)$.

Luego entonces,

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{B}(G)) &= \sum_{j=1}^c \dim(\mathcal{B}(\mathcal{F}_j)) \\ &= \sum_{j=1}^c (|V(\mathcal{F}_j)| - 1) \\ &= \sum_{j=1}^c |V(\mathcal{F}_j)| - \sum_{j=1}^c 1 \\ &= n - c. \end{aligned}$$

Concluimos, finalmente, con un teorema:

Teorema 3.4

En toda gráfica G , la dimensión de su espacio de cortes $\mathcal{B}(G)$ es $n - c(G)$. Aún más, la cantidad de conjuntos de corte en dicho espacio es $2^{n-c(G)}$.

3.1.3. Espacio de ciclos $\mathcal{C}(G)$

El conjunto $\mathcal{C}(G) \subseteq \mathcal{E}(G)$ es la colección de las subgráficas generadoras pares y es el segundo subespacio vectorial de $\mathcal{E}(G)$ a considerar.

El teorema 2.6 implica que $\mathcal{C}(G)$ es cerrado bajo diferencias simétricas. Como \emptyset es una subgráfica par y $\mathcal{C}(G)$ es trivialmente cerrado bajo el producto escalar, tenemos que $\mathcal{C}(G)$ es un subespacio de $\mathcal{E}(G)$ y recibe el nombre de *espacio de ciclos de G* . En la figura 2.11 está desglosado el espacio de ciclos de W_4 .

Teorema 3.5

La diferencia simétrica de dos subgráficas pares es, a su vez, una subgráfica par, es decir, si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(G)$, entonces $C_1 \Delta C_2 \in \mathcal{C}(G)$

Por otro lado, el corolario 2.7 proporciona un conjunto generador para el espacio de ciclos:

Teorema 3.6

La colección de ciclos de G genera al subespacio $\mathcal{C}(G)$.

Como el lector seguramente estará pensando, basándonos en el teorema 2.8, la colección de ciclos fundamentales es una base de $\mathcal{C}(G)$ y lo probamos en seguida.

Teorema 3.7

El conjunto de ciclos fundamentales respecto a un árbol generador T es una base para $\mathcal{C}(G)$.

Demostración: Sean T un árbol generador de G y $\{\mathcal{C}_c \in \mathcal{C}(G) | c \in E(\bar{T})\}$ el conjunto de sus respectivos ciclos fundamentales. El corolario 2.8 implica que los ciclos fundamentales respecto a T conforman un conjunto generador de $\mathcal{C}(G)$. Veamos ahora que dicho conjunto es linealmente independiente.

Supongamos que

$$\Delta_{c \in E(\bar{T})} \lambda_c \mathcal{C}_c = \emptyset,$$

con $\lambda_c \in GF(2)$. Tomando $S \subseteq \bar{T}$ con $E(S) := \{c \in E(\bar{T}) | \lambda_c \neq 0\}$, tenemos

$$\bigtriangleup_{c \in E(\bar{T})} \lambda_c \mathcal{C}_c = \bigtriangleup_{c \in E(S)} \lambda_c \mathcal{C}_c = \emptyset.$$

Por la proposición 2.3, \emptyset es la única subgráfica tal que $\emptyset \cap \bar{T} = S$. Luego, $S = \emptyset$ y, en consecuencia, $\lambda_c = 0$, para toda $c \in E(\bar{T})$. Por consiguiente, $\{\mathcal{C}_c \in \mathcal{C}(G) | c \in E(\bar{T})\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Al ser linealmente independiente y generador, el conjunto de ciclos fundamentales es una base de $\mathcal{C}(G)$

Q.E.D.

Sabemos que hay $m - n + 1$ ciclos fundamentales asociados a algún árbol generador de G , así que el teorema anterior nos permite deducir que $\dim(\mathcal{C}(G)) = m - n + 1$.

¿Qué sucede si G no es conexa? Suponiendo que $G = \bigcup_{j=1}^c F_j$, con F_1, \dots, F_c sus componentes conexas; los mismos razonamientos que hicimos antes nos permiten considerar al subespacio $\mathcal{C}(\mathcal{F}_j) \subseteq \mathcal{C}(G)$. Ya que \emptyset es la única subgráfica generadora par que tienen en común los subespacios $\mathcal{C}(\mathcal{F}_j)$ y que toda gráfica par es unión ajena de ciclos, entonces $\mathcal{C}(G)$ de los subespacios $\mathcal{C}(\mathcal{F}_j)$, es decir,

$$\mathcal{C}(G) = \mathcal{C}(\mathcal{F}_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{C}(\mathcal{F}_c).$$

Como los elementos de $\mathcal{C}(\mathcal{F}_j)$ corresponden a los de $\mathcal{C}(F_j)$, entonces

$$\dim(\mathcal{C}(\mathcal{F}_j)) = \dim(\mathcal{C}(F_j)) = |E(F_j)| - |V(F_j)| + 1.$$

Luego entonces,

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{C}(G)) &= \sum_{j=1}^c \dim(\mathcal{C}(\mathcal{F}_j)) \\ &= \sum_{j=1}^c (|E(F_j)| - |V(F_j)| + 1) \\ &= \sum_{j=1}^c |E(F_j)| - \sum_{j=1}^c |V(F_j)| + \sum_{j=1}^c 1 \\ &= m - n + c. \end{aligned}$$

Concluyendo así con el siguiente resultado.

Teorema 3.8

En toda gráfica G , la dimensión de su espacio de ciclos $\mathcal{C}(G)$ es $m - n + c(G)$. Aún más, la cantidad de gráficas pares en dicho espacio es $2^{m-n+c(G)}$.

3.2. Vectores de incidencia

En el capítulo 1 comentamos que si V es un espacio vectorial sobre un campo \mathbb{F} de dimensión n , entonces V es isomorfo al espacio \mathbb{F}^n . Ahora aplicaremos esta idea a los espacios que hemos definido en las secciones anteriores.

Sabemos que el espacio de aristas $\mathcal{E}(G)$ es de dimensión m sobre el campo $GF(2)$. Se sigue entonces que $\mathcal{E}(G)$ es isomorfo a $(GF(2))^m$.

Una forma inmediata de identificar a $\mathcal{E}(G)$ con $(GF(2))^m$ se describe a continuación. Tomando $H \in \mathcal{E}(G)$, la *función de incidencia de H* es la función característica de $E(H)$,

$$\chi_H := \chi_{E(H)} : E(G) \rightarrow GF(2),$$

dada por:

$$\chi_H(e) = \begin{cases} 1, & \text{si } e \in E(H) \\ 0, & \text{si } e \notin E(H). \end{cases}$$

Como el conjunto de aristas de G ya está ordenado, es decir, que $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$, las funciones de incidencia pueden escribirse como vectores. En efecto, dada $H \in \mathcal{E}(G)$, identificamos la función de incidencia de H , con el vector $\chi_H^T := (\chi_H(e_1), \dots, \chi_H(e_m)) \in (GF(2))^m$ y lo llamamos *vector de incidencia de H* .

Podemos definir ahora una función que hace corresponder cada subgráfica generadora con su respectivo vector de incidencia, a saber, la función $\Phi: \mathcal{E}(G) \rightarrow (GF(2))^m$ tal que, para cada $H \in \mathcal{E}(G)$, $\Phi(H) = \chi_H^T$. Entonces Φ es un isomorfismo entre $\mathcal{E}(G)$ y el espacio $(GF(2))^m$. En la imagen 3.3 mostramos (de forma simbólica) los vectores de incidencia de algunas subgráficas de la gráfica de la figura 3.2.

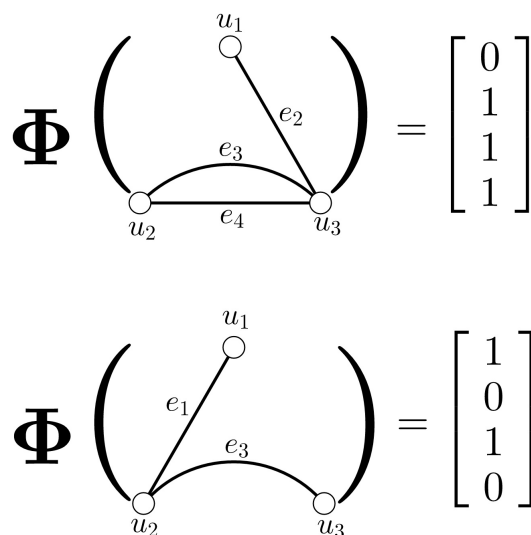


Fig. 3.3

Como el isomorfismo Φ preserva las operaciones entre los espacios vectoriales correspondientes, la diferencia simétrica Δ en $\mathcal{E}(G)$ es equivalente a la operación \oplus en $(GF(2))^m$ (que describimos en el capítulo 1), es decir,

$$\Phi(H_1 \Delta H_2) = \Phi(H_1) \oplus \Phi(H_2).$$

La conclusión más importante de esta discusión es que cada subgráfica de G “se codifica” en un vector binario. Todo vector de ceros y unos puede “traducirse” en una subgráfica generadora de G , cuyas aristas corresponderán a las entradas del vector que son iguales a 1. El siguiente teorema resume lo dicho hasta aquí.

Teorema 3.9

Sea G una gráfica cualquiera. Para cualesquiera $H_1, H_2 \in \mathcal{E}(G)$, se cumple que

$$\chi_{H_1 \Delta H_2} = \chi_{H_1} \oplus \chi_{H_2}.$$

Ejemplo 3.2

Ilustramos lo comentado líneas arriba considerando de nuevo la gráfica G de la figura 3.2. En esta ocasión, en la imagen 3.4 aplicamos la operación Δ a las dos subgráficas de la figura 3.3 y también sumamos sus respectivos vectores de incidencia. Puede notarse que la diferencia simétrica en $\mathcal{E}(G)$ es equivalente a la operación \oplus en $(GF(2))^m$.

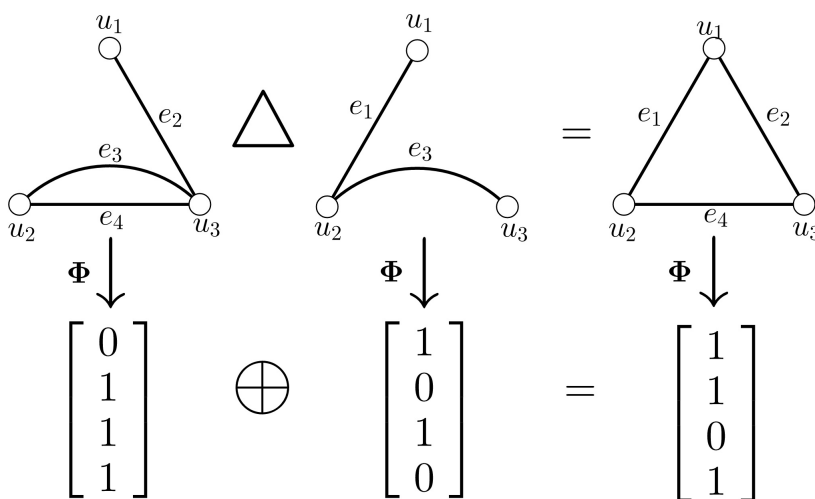


Fig. 3.4

Naturalmente, los conjuntos de corte y las subgráficas pares también se *traducen* en vectores binarios. Los espacios $\vec{\mathcal{E}}(G) := \Phi[\mathcal{E}(G)]$, $\vec{\mathcal{B}}(G) := \Phi[\mathcal{B}(G)]$ y $\vec{\mathcal{C}}(G) := \Phi[\mathcal{C}(G)]$ son conocidos también como *los espacios de aristas, de cortes y de ciclos en sí*, respectivamente (aunque, formalmente, es un abuso de la nomenclatura que utilizamos en esta tesis). Note que $\vec{\mathcal{B}}(G)$ es isomorfo a $(GF(2))^{n-c(G)}$ y a $\mathcal{B}(G)$; mientras que $\vec{\mathcal{C}}(G)$ es isomorfo a $(GF(2))^{m-n+c(G)}$ $\mathcal{C}(G)$.

Una ventaja que nos proporcionan los vectores de incidencia es la posibilidad de definir un producto interior en $\mathcal{E}(G)$, utilizando el ya existente en $(GF(2))^m$. Así, dadas H y F subgráficas generadoras cualesquiera de G , definimos el *producto interior de H y F* como:

$$\langle H, F \rangle := \langle \chi_H, \chi_F \rangle = \sum_{i=1}^m \chi_H(e_i) \cdot \chi_F(e_i) \pmod{2}.$$

Cabe recordar que este producto interno es *degenerado* pues, claramente, si una subgráfica $H \neq \emptyset$ tiene una cantidad par de aristas, entonces $\langle H, H \rangle = 0$.

Respecto a la paridad, ésta nos brinda una noción de *ortogonalidad*. Recordando el teorema 2.9, sabemos que todo elemento de $\mathcal{B}(G)$ y $\mathcal{C}(G)$ coinciden en un número par de aristas. Esto, a la luz de nuestro nuevo producto interno, puede reescribirse así:

Teorema 3.10

Todo conjunto de corte de G es ortogonal a cualquier subgráfica par de G .

Gracias a los conceptos de álgebra lineal desglosados en el primer capítulo, y con apoyo de este último teorema, concluimos que $\mathcal{B}(G)$ y $\mathcal{C}(G)$ son complementos ortogonales. Es decir:

$$\mathcal{B}(G) = (\mathcal{C}(G))^\perp \quad \text{y} \quad \mathcal{C}(G) = (\mathcal{B}(G))^\perp.$$

Sin embargo, a pesar de ser complementos ortogonales, no siempre sucede que $\mathcal{E}(G) = \mathcal{B}(G) \oplus \mathcal{C}(G)$, pues hay gráficas que tienen subgráficas no vacías que son, al mismo tiempo, conjuntos de corte y gráficas pares (subgráficas ortogonales consigo mismas); en otras palabras, existen gráficas tales que $\mathcal{B}(G) \cap \mathcal{C}(G) \neq \{\emptyset\}$. Vimos en el ejemplo 2.9 que K_4 es una gráfica con tales características.

3.3. La matriz de incidencia de G

Cuando se introdujo la matriz de incidencia en el capítulo 1, se hizo considerando sus entradas en el campo de los número reales \mathbb{R} .

No obstante, si tomamos $\mathbf{M} := \mathbf{M}_G$ en $M_{n \times m}(GF(2))$ surgen propiedades bastante interesantes que se relacionan con los espacios vectoriales que hemos estudiado a lo largo de este capítulo. En esta sección cada vez que mencionemos a la matriz de incidencia, lo haremos pensando que sus entradas están en $GF(2)$. Igualmente, recordemos que los vértices y las aristas de G ya están ordenados, es decir, que $V(G) = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$

Una primera observación tiene que ver con lo que sucede si una gráfica tiene lazos. Cuando $\mathbf{M} \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$, recordemos que se colocaba un “2” en la entrada del renglón y la columna que corresponden al vértice y al lazo respectivamente. Al cambiar de campo, ese “2” se vuelve un “0”. Entonces las columnas de \mathbf{M} que representan los lazos de G son columnas cuyas entradas son todas cero.

Ejemplo 3.3

En la figura 3.5 mostramos la matriz de incidencia (¡pero en $GF(2)$!) de la misma gráfica de la imagen 1.9.

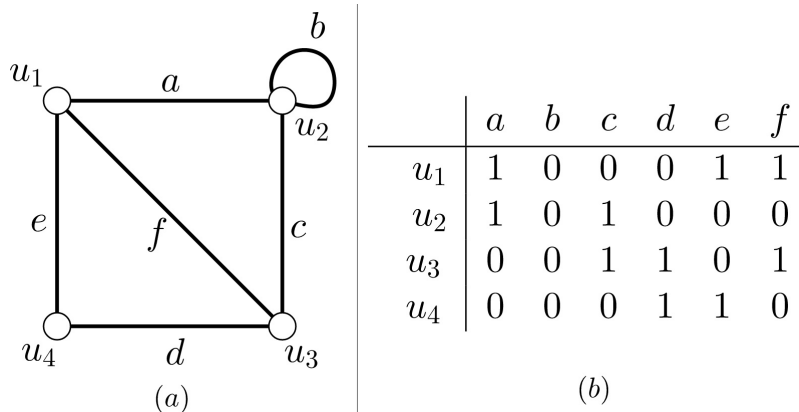


Fig. 3.5



Para simplificar nuestra notación, si B es un conjunto de corte de G , entonces denotamos por χ_B al vector de incidencia de $G[B]$, la subgráfica generadora inducida por B ; y diremos, simplemente, que χ_B es el *vector de incidencia del conjunto de corte B* . En otro términos:

$$\chi_B := \chi_{G[B]}.$$

Por otro lado, es fácil notar que cada renglón de \mathbf{M} es el vector de incidencia del conjunto de corte asociado al vértice correspondiente a dicho renglón. Es decir:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \chi_{\partial(u_1)}^t \\ - \\ \vdots \\ - \\ \chi_{\partial(u_n)}^t \end{bmatrix}.$$

En virtud de la proposición 3.1, junto con el teorema 3.9, deducimos que:

$$\mathbf{R}(\mathbf{M}) = \text{span}(\{\chi_{\partial(u_1)}, \dots, \chi_{\partial(u_n)}\}) = \vec{\mathcal{B}}(G).$$

Esta igualdad la establecemos en el siguiente teorema.

Teorema 3.11

El espacio generado por los renglones de \mathbf{M} es $\vec{\mathcal{B}}(G)$.

Ya sabemos que $\text{Ker}(\mathbf{M}) = (\mathbf{R}(\mathbf{M}))^\perp$. Pero $\mathbf{R}(\mathbf{M})^\perp = (\vec{\mathcal{B}}(G))^\perp$ y, además, $\vec{\mathcal{C}}(G) = (\vec{\mathcal{B}}(G))^\perp$. Entonces $\text{Ker}(\mathbf{M}) = \vec{\mathcal{C}}(G)$. Tenemos, pues, el corolario siguiente.

Corolario 3.1

El espacio nulo de \mathbf{M} es $\vec{\mathcal{C}}(G)$.

3.3.1. Rango y nulidad de \mathbf{M}_G

Con la información obtenida de estas últimas proposiciones ya podemos conocer el rango de \mathbf{M} y su nulidad. Gracias al capítulo 1, se sabe que el rango de la matriz de incidencia es la dimensión del espacio generado por los renglones (o columnas también), es decir, $\text{rank}(\mathbf{M}) = \dim(\mathbf{R}(\mathbf{M}))$. Pero el espacio generado por los renglones es el espacio de cortes, cuya dimensión es $n - c$ (por el teorema 3.4). Luego, haciendo $c := c(G)$,

$$\text{rank}(\mathbf{M}) = \dim(\mathbf{R}(\mathbf{M})) = \dim(\mathcal{B}(G)) = n - c.$$

Asimismo, con base en el teorema 3.8, podemos deducir que

$$\text{null}(\mathbf{M}) = \dim(\text{Ker}(\mathbf{M})) = \dim(\mathcal{C}(G)) = m - n + c.$$

Obtenemos así lo siguiente.

Teorema 3.12

En $GF(2)$ se cumple que el rango de \mathbf{M} es $n - c$ y su nulidad es $m - n + c$.

Definimos el *rango de G* como el número $\rho(G) := \text{rank}(\mathbf{M}) = n - c$ y la *nulidad de G* como $\mu(G) := \text{null}(\mathbf{M}) = m - n + c$.

3.3.2. Matrices reducidas

Otra característica relevante de \mathbf{M} es que la suma de todos sus renglones es igual al vector $\mathbf{0}$. En efecto, por el teorema 3.9, tenemos:

$$\bigoplus_{i=1}^n \chi_{\partial(u_i)} = \chi_{\partial(V(G))} = \chi_{\emptyset} = \mathbf{0}.$$

También uno podría darse cuenta de esto notando que como sólo hay dos “1” en cada columna (o ninguno si la arista asociada a la columna es un lazo) se obtiene otra vez la igualdad deseada ya que, en $GF(2)$, $1 + 1 = 0$.

Supongamos que G es conexa con n vértices. Como la combinación lineal anterior no es trivial, entonces podemos afirmar que, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, el renglón $\chi_{\partial(u_j)}$ es combinación lineal del resto de los renglones, es decir,

$$\bigoplus_{i \neq j} \chi_{\partial(u_i)} = \chi_{\partial(u_j)}.$$

Por lo tanto,

$$\text{span}\left(\{\chi_{\partial(u_1)}, \dots, \chi_{\partial(u_n)}\}\right) = \text{span}\left(\{\chi_{\partial(u_1)}, \dots, \chi_{\partial(u_n)}\} \setminus \{\chi_{\partial(u_j)}\}\right).$$

Luego,

$$\text{R}(\mathbf{M}) = \text{span}\left(\{\chi_{\partial(u_1)}, \dots, \chi_{\partial(u_n)}\} \setminus \{\chi_{\partial(u_j)}\}\right) = \vec{\mathcal{B}}(G).$$

Estas últimas igualdades quieren decir que no importa qué renglón quitemos de \mathbf{M} , la matriz que queda tendrá el mismo rango. La matriz que resulta de remover cualquier renglón de \mathbf{M} se le conoce como la *matriz de incidencia reducida de G* y la denotaremos como $\widehat{\mathbf{M}}$.

Si ahora $G = \bigcup_{i=1}^c F_i$ es inconexa y suponemos que cada componente conexa F_i tiene n_i vértices, o sea, $V(F_i) = \{u_{i1}, \dots, u_{in_i}\}$, con $i \in \{1, \dots, c\}$; entonces \mathbf{M} es de la forma:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \chi_{\partial_{F_1}(u_{11})} \\ - \\ \vdots \\ - \\ \chi_{\partial_{F_1}(u_{1n_1})} \\ - \\ \vdots \\ - \\ \chi_{\partial_{F_c}(u_{c1})} \\ - \\ \vdots \\ - \\ \chi_{\partial_{F_c}(u_{cn_c})} \end{bmatrix}.$$

Por los argumentos expuestos en los párrafos anteriores y dado que F_i es conexa, nótese que:

$$\bigoplus_{j=1}^{n_i} \chi_{\partial_{F_i}(u_{ij})} = \mathbf{0}.$$

Luego, también cumple que la suma de los renglones de \mathbf{M} es el vector $\mathbf{0}$ pues

$$\bigoplus_{i=1}^c \left(\bigoplus_{j=1}^{n_i} \chi_{\partial_{F_i}(u_{ij})} \right) = \bigoplus_{i=1}^c \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Por otro lado, también sabemos que, para cada componente conexa F_i , el k -ésimo renglón de \mathbf{M}_{F_i} es combinación lineal del resto de los renglones, o sea,

$$\bigoplus_{j \neq k} \chi_{\partial_{F_i}(u_{ij})} = \chi_{\partial_{F_i}(u_{ik})}.$$

Así, seleccionando un renglón cualquiera de \mathbf{M}_{F_i} , digamos, el que corresponde al k_i -ésimo vértice de F_i ; deducimos que $\text{span}\left(\{\chi_{\partial_{F_1}(u_{11})}, \dots, \chi_{\partial_{F_c}(u_{cn_c})}\}\right)$ es igual a

$$\text{span}\left(\{\chi_{\partial_{F_1}(u_{11})}, \dots, \chi_{\partial_{F_c}(u_{cn_c})}\} \setminus \{\chi_{\partial_{F_1}(u_{1k_1})}, \dots, \chi_{\partial_{F_c}(u_{ck_c})}\}\right).$$

Por tanto, éste conjunto es igual a $\mathbf{R}(\mathbf{M}) = \vec{\mathcal{B}}(G)$. Entonces no importa qué renglón removamos de cada \mathbf{M}_{F_i} , la matriz que queda (también llamada *matriz de incidencia reducida*) tiene el mismo rango que \mathbf{M}_G . Además, lo anterior implica que la matriz de incidencia reducida de G está compuesta por las matrices de incidencia reducidas de cada componente conexa, es decir,

$$\widehat{\mathbf{M}}_G = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{M}}_{F_1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \widehat{\mathbf{M}}_{F_k} \end{bmatrix}.$$

En la siguiente proposición resumimos toda la discusión de esta subsección.

Proposición 3.2

En $GF(2)$ se cumple que $\text{rank}(\widehat{\mathbf{M}}_G) = \text{rank}(\mathbf{M}_G) = n - c$.

Tomemos ahora un bosque T de n vértices. Como T consta de $n - c$ aristas, es claro que \mathbf{M}_T es una matriz de tamaño $n \times (n - c)$. Así, su matriz de incidencia reducida $\widehat{\mathbf{M}}_T$ es una matriz cuadrada de tamaño $(n - c) \times (n - c)$. Como $\text{rank}(\mathbf{M}_T) = n - c$, en virtud del teorema anterior, se cumple que $\text{rank}(\widehat{\mathbf{M}}) = n - c$.

Por lo tanto, $\widehat{\mathbf{M}}_T$ es una matriz cuadrada no singular, es decir, $\det(\widehat{\mathbf{M}}_T) \neq 0$. Observemos que como nuestro campo es $GF(2)$, el determinante de cualquier matriz con entradas en $GF(2)$ es 1 ó 0. Entonces tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.3

En $GF(2)$, la matriz de incidencia reducida de todo bosque T es una matriz no singular, es decir, $\det(\widehat{\mathbf{M}}_T) = 1$.

3.3.3. Relaciones de independencia lineal en \mathbf{M}_G

Sea $H \in \mathcal{E}(G)$. No es muy difícil darse cuenta que \mathbf{M}_H es una submatriz de \mathbf{M}_G , pues conservan los mismos renglones (vértices) y las columnas de \mathbf{M}_H corresponden a $E(H) \subseteq E(G)$.

Recuérdese que $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$. Denotamos por \mathbf{c}_e a la columna de \mathbf{M} que corresponde a la arista e . Entonces:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{c}_{e_1} \mid \cdots \mid \mathbf{c}_{e_m}]$$

Analizaremos ahora el significado que tienen las columnas linealmente independientes de \mathbf{M} en la gráfica G . Notemos primero que si $S \subseteq E(G)$, entonces $\mathbf{M}_{G[S]}$ es la submatriz $[\mathbf{c}_a]_{a \in S}$ de \mathbf{M}_G .

Teorema 3.13

Si $S \subseteq E(G)$, entonces el conjunto de columnas $\{\mathbf{c}_a \mid a \in S\}$ es linealmente independiente si y sólo si $G[S]$ es acíclica.

Demostración: Para demostrar la *necesidad*, supongamos que $\{\mathbf{c}_a \mid a \in S\}$ es linealmente independiente y, para llegar a una contradicción, que hay un ciclo Γ en $G[S]$. Entonces

$$\mathbf{M}_{G[S]} \cdot \chi_\Gamma = \mathbf{0}.$$

No obstante, esto implica que $\sum_{a \in S} \chi_\Gamma(a) \cdot \mathbf{c}_a = \mathbf{0}$. Como $\{\mathbf{c}_a \mid a \in S\}$ es linealmente independiente, se tiene que $\chi_\Gamma(a) = 0$, para toda $a \in S$. Luego, $\Gamma = \emptyset$, una contradicción. En consecuencia, $G[S]$ es acíclica.

Ahora, para la *suficiencia*, asumamos que $G[S]$ es acíclica. Tomemos una combinación lineal cualquiera de $\{\mathbf{c}_a \mid a \in S\}$, digamos $\sum_{a \in S} \lambda_a \mathbf{c}_a = \mathbf{0}$, con $\lambda_a \in GF(2)$.

La igualdad anterior implica que $\mathbf{M}_{G[S]} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$, donde $\boldsymbol{\lambda}$ es el vector cuyas entradas son λ_a .

Entonces, $\boldsymbol{\lambda} \in \text{Ker}(\mathbf{M}_{G[S]}) = \vec{\mathcal{C}}(G[S]) = \{\mathbf{0}\}$, porque $G[S]$ es acíclica. Así, $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ y, en consecuencia, $\lambda_a = 0$, para toda $a \in S$. Por lo tanto, $\{\mathbf{c}_a \mid a \in S\}$ es linealmente independiente.

Q.E.D.

Tenemos dos consecuencias de suma importancia:

Corolario 3.2

Sea $S \subseteq E(G)$. Entonces $\{\mathbf{c}_e \mid e \in S\}$ es una base para el espacio de columnas $\mathcal{C}(\mathbf{M}_G)$ si y sólo si $G[S]$ es un bosque generador maximal. Por lo tanto, las bases de $\mathcal{C}(\mathbf{M}_G)$ están en correspondencia uno a uno con los bosques generadores maximales de G .

La proposición 3.3 está ligada a este corolario:

Corolario 3.3

Toda submatriz cuadrada, de tamaño $(n - c) \times (n - c)$, de la matriz de incidencia de G es no singular si y sólo si es la matriz de incidencia reducida de algún bosque generador maximal de G .

Finalmente, comentaremos que el teorema y los corolarios anteriores implican que $G[S]$ contiene un ciclo si y sólo si $\{\mathbf{c}_a \mid a \in S\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

3.4. Espacios en digráficas

A lo largo de esta sección supondremos que D es una digráfica conexa (a menos que se diga lo contrario) con $V(D) = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $A(D) = \{a_1, \dots, a_m\}$. Trabajaremos con funciones definidas

en los arcos de D , o sea, con funciones $q: A(D) \rightarrow \mathbb{R}$. Dado que vértices y arcos ya están ordenados, podemos representar estas funciones como vectores con m entradas. Dicho de otro modo, podemos considerar a q como el vector $\mathbf{q}^T := (q(a_1), \dots, q(a_m)) \in \mathbb{R}^m$. Escribiremos indistintamente q o \mathbf{q} para referirnos a las funciones q que van de $A(D)$ en \mathbb{R} . Por otro lado, diremos que el vector \mathbf{q} es *no negativo* si $q(a_i) \geq 0$, $i = 1, \dots, m$; y se escribe $\mathbf{q} \geq \mathbf{0}$.

Definimos el *soporte de q* como el conjunto de arcos cuyo valor bajo q es distinto de cero, o sea, $\text{supp}(q) := \{a \in A \mid q(a) \neq 0\}$. Cabe aclarar que será común considerar a la subdigráfica generadora inducida por el conjunto de arcos en el soporte, a la cual llamaremos también *soporte de q* y denotaremos de igual manera (abusando de la notación) como $\text{supp}(q)$.

En la sección anterior nos dimos cuenta que el espacio generado por los renglones de la matriz de incidencia de una gráfica coincide con su espacio de conjuntos de corte. ¿Qué interpretación podríamos darle al espacio generado por los renglones de la matriz de incidencia de una digráfica? ¿Sucede el mismo fenómeno que ocurre en las gráficas? ¿Su kernel tendrá alguna relación con los ciclos de la digráfica? Las siguientes subsecciones estarán dedicadas a responder tales preguntas.

3.4.1. Espacio de tensiones $\mathcal{B}(D)$

Consideremos la matriz de incidencia $\mathbf{M} := \mathbf{M}_D \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ y tomemos $\mathbf{g} \in \mathcal{R}(\mathbf{M})$. Suponiendo que los renglones de \mathbf{M} son los vectores $\mathbf{r}_{u_1}, \dots, \mathbf{r}_{u_n}$, entonces existen escalares p_{u_1}, \dots, p_{u_n} tales que $\mathbf{g} = p_{u_1}\mathbf{r}_{u_1} + \dots + p_{u_n}\mathbf{r}_{u_n}$. En otras palabras:

$$\mathbf{g}^T = \begin{bmatrix} p_{u_1} & \cdots & p_{u_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{u_1} \\ - \\ \vdots \\ - \\ \mathbf{r}_{u_n} \end{bmatrix} = \mathbf{p}^T \mathbf{M}.$$

Por otro lado, si \mathbf{c}_{a_i} es la columna de \mathbf{M} asociada al arco a_i , $i \in \{1, \dots, m\}$, entonces también sucede que

$$\mathbf{g}^T = \mathbf{p}^T \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{a_1} & \cdots & \mathbf{c}_{a_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T \mathbf{c}_{a_1} & \cdots & \mathbf{p}^T \mathbf{c}_{a_m} \end{bmatrix}.$$

De lo anterior, obtenemos que \mathbf{g}^T es el vector $(\mathbf{p}^T \mathbf{c}_{a_1}, \dots, \mathbf{p}^T \mathbf{c}_{a_m})$. Considerando $g: A(D) \rightarrow \mathbb{R}$ y $p: V(D) \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones asociadas a los vectores \mathbf{g} y \mathbf{p} , respectivamente; es posible verificar que, dada $a \in A$,

$$g(a) = \mathbf{p}^T \mathbf{c}_a = p(t(a)) - p(h(a)). \quad (3.1)$$

La última igualdad se debe a que en cada columna \mathbf{c}_a hay un 1 en el renglón que corresponde al vértice $t(a)$ y un -1 en $h(a)$.

Por razones que explicaremos después, a la función p (y al vector \mathbf{p}) se le conoce como *potencial*; y a la función g (y, por tanto, a \mathbf{g}) le llamamos *tensión*. La ecuación 3.1 significa, pues, que podemos describir una tensión g en términos de un potencial p , señalando primero cuál es el potencial de cada vértice de D y, así, deducir cuál es la tensión en cada arista.

Ejemplo 3.4

En la figura 3.6 mostramos en (b) dos posibles tensiones de la gráfica del inciso (a). Indicamos el potencial de cada vértice con un número dentro del mismo, y la tensión con un número encima de cada arco.

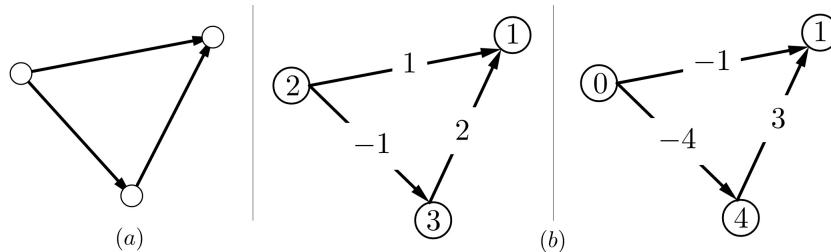


Fig. 3.6

En resumen, $\mathbf{R}(\mathbf{M})$ está conformado por todas las posibles tensiones en D . Luego, el conjunto de tensiones de una digráfica es un espacio vectorial llamado el *espacio de tensiones de D* , denotado por $\mathcal{B}(D)$, es decir, $\mathcal{B}(D) := \mathbf{R}(\mathbf{M})$.

Resulta sencillo asociar tensiones a los conjuntos de corte. En efecto, sea $\partial(X)$ un corte de D y defínase $g_{\partial(X)}: A(D) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g_{\partial(X)}(a) = \begin{cases} 1, & a \in \partial^+(X) \\ -1, & a \in \partial^-(X) \\ 0, & a \notin \partial(X). \end{cases}$$

Verifiquemos que $g \in \mathbf{R}(\mathbf{M})$. Consideramos el potencial p cuya regla de correspondencia es

$$p(v) = \begin{cases} 1, & v \in X \\ 0, & v \notin X. \end{cases}$$

Entonces

$$\mathbf{p}^T \mathbf{c}_a = p(t(a)) - p(h(a)) = p(v) = \begin{cases} 1, & t(a) \in X \text{ y } h(a) \notin X \\ -1, & h(a) \in X \text{ y } t(a) \notin X \\ 0, & \{t(a), h(a)\} \subseteq X. \end{cases}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^T \mathbf{c}_a &= \begin{cases} 1, & a \in \partial^+(X) \\ -1, & a \in \partial^-(X) \\ 0, & a \notin \partial(X) \end{cases} \\ &= g_{\partial(X)}(a). \end{aligned}$$

De donde se concluye satisfactoriamente que $\mathbf{g}_{\partial(X)}^T = \mathbf{p}^T \mathbf{M}$ y, así, $\mathbf{g}_{\partial(X)} \in \mathcal{B}(D)$.

Ejemplo 3.5

En la digráfica del inciso (a) de la imagen 3.7 se muestra el conjunto de corte asociado a $X = \{u_1, u_2\}$, mientras que en (b) se encuentra la tensión que corresponde a $\partial(X)$.

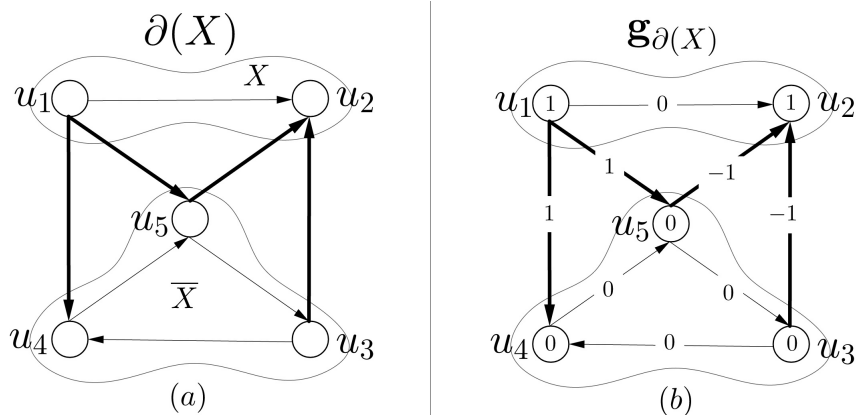


Fig. 3.7

Con base en los párrafos anteriores, nos damos cuenta que $\mathbf{e}_i^T \mathbf{M} = \mathbf{g}_{\partial(u_i)}^T$, donde \mathbf{e}_i^T es el i -ésimo vector canónico de \mathbb{R}^n . Por lo que, de hecho, el vector $\mathbf{g}_{\partial(u_i)}^T$ es el i -ésimo renglón de la matriz de incidencia, i.e.,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\partial(u_1)}^T \\ - \\ \vdots \\ - \\ \mathbf{g}_{\partial(u_n)}^T \end{bmatrix}.$$

Ahora exploraremos qué propiedades tiene las tensiones asociadas a los cortes minimales de D .

Lema 3.1

Supongamos que g es una tensión de D y que $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$. Entonces el soporte de g contiene un conjunto de corte minimal. Más aún, si $\mathbf{g} \geq \mathbf{0}$, hay un corte minimal dirigido contenido en $\text{supp}(g)$.

Demostración: Dado que $\mathbf{g} \in \mathcal{B}(D)$, hay un potencial \mathbf{p} tal que $\mathbf{g}^T = \mathbf{p}^T \mathbf{M}$. Como $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$, entonces $\text{supp}(g) \neq \emptyset$. Así, tomemos $\alpha \in \text{supp}(g)$ haciendo $u := t(\alpha)$ y $v := h(\alpha)$.

Sea $X := \{w \in V \mid p(w) = p(u)\}$. Afirmamos que $\partial(X) \subseteq \text{supp}(g)$. Si no sucediera, entonces existiría un arco β en el corte asociado a X que no es elemento del soporte de g . Esto implicaría que $g(\beta) = 0$. Si $x := t(\beta)$ y $y := h(\beta)$, entonces $p(x) - p(y) = 0$, es decir, $p(x) = p(y)$.

Claramente, se tendrían dos casos: $\beta \in \partial^+(X)$ ó $\beta \in \partial^-(X)$. Si se diera el primero, se tendría que $x \in X$ y $y \in \bar{X}$. Entonces $p(u) = p(x) = p(y)$ y, por definición, $y \in X$, una contradicción. El segundo caso es análogo. Por lo tanto, es imposible que $\partial(X) \not\subseteq \text{supp}(g)$.

Debido a que D es conexa, $\partial(X) \neq \emptyset$. Luego, debe existir un conjunto de corte minimal B contenido en $\partial(X)$. Puesto que $\partial(X) \subseteq \text{supp}(g)$, se cumple $B \subseteq \text{supp}(g)$.

Ahora, supongamos que $\mathbf{g} \geq \mathbf{0}$. Puesto que $\mathbf{g} \geq \mathbf{0}$, se desprende inmediatamente que

$$\text{supp}(g) = \{a \in A(D) \mid g(a) > 0\}.$$

Entonces, nótese que, para todo $a \in \text{supp}(g)$,

$$g(a) = p(t(a)) - p(h(a)) > 0,$$

es decir, $p(t(a)) > p(h(a))$. Esto implica que no existen ciclos dirigidos contenidos en el soporte de g . En efecto, asumamos que hay uno, digamos (v_1, \dots, v_l, v_1) . No obstante, dados los razonamientos de este párrafo, concluiríamos que $p(v_1) > p(v_1)$, algo imposible. Por tanto, no hay ciclos dirigidos en $\text{supp}(g)$.

Como $\text{supp}(g)$ es una digráfica acíclica, se mencionó en el capítulo anterior que, necesariamente, debe tener al menos una fuente w . Por lo que $\partial(w)$ es un corte dirigido en $\text{supp}(g)$. Por una observación del capítulo anterior, $\partial^+(w)$ contiene un corte minimal dirigido, digamos B^+ . Entonces $B^+ \subseteq \text{supp}(g)$.

Q.E.D.

Teorema 3.14

Toda tensión en D es una combinación lineal de las tensiones asociadas a los cortes minimales de D .

Demostración: Supongamos que B_1, \dots, B_q son los conjuntos de corte minimales de D . Sea $g \in \mathcal{B}(D)$. La prueba se hace por inducción fuerte sobre el número de arcos en $\text{supp}(g)$.

Paso base. Asumimos que $|\text{supp}(g)| = 0$. Si ésto sucede, sólo resta decir que $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ y se cumple el enunciado del teorema.

Hipótesis de inducción. Supóngase que, para toda $q \in \mathcal{B}(D)$, si $|\text{supp}(q)| < k$, entonces q es combinación lineal de las tensiones asociadas a los cortes minimales.

Paso inductivo. Digamos ahora que $|\text{supp}(g)| = k$. Por el lema anterior, debe existir un corte minimal $\partial(X)$ contenido en el soporte de g . Si tomamos a X de forma adecuada, debe haber un arco α^* en $\partial(X)$ tal que $g_{\partial(X)}(\alpha^*) = 1$.

Sea $q := g - g(\alpha^*)g_{\partial(X)}$. Ya que g y $g_{\partial(X)}$ son elementos de $\mathcal{B}(D)$, un espacio vectorial, entonces $q \in \mathcal{B}(D)$. Además, afirmamos que $\text{supp}(q) \subsetneq \text{supp}(g)$. Consideremos $\beta \in \text{supp}(q)$. Observemos que $g(\beta) = q(\beta) + g(\alpha^*)g_{\partial(X)}(\beta)$. Si $\beta \notin \text{supp}(g)$, se tendría que $g(\beta) = 0$ y $0 = q(\beta) + g(\alpha^*)g_{\partial(X)}(\beta)$.

Por otro lado, al no pertenecer β al soporte de g , tampoco pertenecería a $\partial(X)$ y $g_{\partial(X)}(\beta) = 0$. Luego, la igualdad anterior se reduce a que $q(\beta) = 0$, una contradicción porque $\beta \in \text{supp}(q)$. Así que, efectivamente, $\text{supp}(q) \subsetneq \text{supp}(g)$.

Es evidente que $\alpha^* \in \text{supp}(g)$ porque $\alpha^* \in \partial(X)$ y $\partial(X) \subseteq \text{supp}(g)$. Entonces $q(\alpha^*) = g(\alpha^*) - g(\alpha^*) \cdot g_{\partial(X)}(\alpha^*) = g(\alpha^*) - g(\alpha^*) \cdot 1 = 0$. Por tanto, $\alpha^* \notin \text{supp}(q)$ y, con ésto, se deduce que $\text{supp}(q) \subsetneq \text{supp}(g)$.

Los párrafos previos implican que $q \in \mathcal{B}(D)$ y $|\text{supp}(q)| < k$. De esta manera, por hipótesis de inducción, existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{q} = \mathbf{g} - g(\alpha^*)\mathbf{g}_{\partial(X)} = \sum_{i=1}^q \lambda_i \mathbf{g}_{B_i}.$$

De donde

$$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^q \lambda_i \mathbf{g}_{B_i} + g(\alpha^*)\mathbf{g}_{\partial(X)}.$$

Recuérdese que $\partial(X)$ es un corte minimal, lo cual significa que $B_j = \partial(X)$, para alguna $j \in \{1, \dots, q\}$. Entonces la igualdad anterior nos permite concluir que \mathbf{g} es una combinación lineal de las tensiones asociadas a los conjuntos de corte minimales.

Q.E.D.

Corolario 3.4

El conjunto de tensiones asociadas a los cortes minimales de D es un generador del espacio $\mathcal{B}(D)$.

¿Qué sucede si D es inconexa? Digamos que $D = \cup_{i=1}^c F_i$, con F_1, \dots, F_c las componentes conexas de D y $c := c(D)$ la cantidad total de sus componentes conexas. Sabemos que si ordenamos de manera adecuada los vértices y las aristas de D , su matriz de incidencia tiene la forma:

$$\mathbf{M}_D = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{F_1} & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{M}_{F_c} \end{bmatrix}.$$

En otras palabras, \mathbf{M}_D es una matriz diagonal por bloques. Aquí podemos considerar las subdigráficas generadoras \mathcal{F}_i (cuya construcción se hizo en secciones anteriores). Entonces puede verificarse que

$$\mathbf{M}_D = [\mathbf{M}_{\mathcal{F}_1} \mid \cdots \mid \mathbf{M}_{\mathcal{F}_c}].$$

De esta forma es claro que

$$\mathbf{R}(\mathbf{M}_D) = \mathbf{R}(\mathbf{M}_{\mathcal{F}_1}) \oplus \cdots \oplus \mathbf{R}(\mathbf{M}_{\mathcal{F}_c}).$$

Así,

$$\mathbf{R}(\mathbf{M}_D) = \mathcal{B}(\mathcal{F}_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}(\mathcal{F}_c).$$

Por otro lado, tomemos $\mathbf{g} \in \mathbf{R}(\mathbf{M}_D)$. Entonces existe $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathbf{g}^T = \mathbf{p}^T \mathbf{M}_D.$$

Dados los tamaños de las matrices, podemos partir a \mathbf{g} y \mathbf{p} como $\mathbf{g}^T = [\mathbf{g}_1^T \cdots \mathbf{g}_c^T]$ y $\mathbf{p}^T = [\mathbf{p}_1^T \cdots \mathbf{p}_c^T]$ de tal manera que:

$$\begin{aligned} [\mathbf{g}_1^T \cdots \mathbf{g}_c^T] &= [\mathbf{p}_1^T \cdots \mathbf{p}_c^T] \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{F_1} & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{M}_{F_c} \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{p}_1^T \mathbf{M}_{F_1} \cdots \mathbf{p}_c^T \mathbf{M}_{F_c}]. \end{aligned}$$

De donde $\mathbf{g}_i^T = \mathbf{p}_i^T \mathbf{M}_{F_i}$, i.e., cada \mathbf{g}_i es una tensión en $\mathcal{B}(F_i)$. Y así, deducimos que

$$g(a) = \begin{cases} g_1(a), & a \in A(F_1) \\ \vdots & \vdots \\ g_c(a), & a \in A(F_c) \end{cases}$$

y

$$p(a) = \begin{cases} p_1(v), & v \in V(F_1) \\ \vdots & \vdots \\ p_c(v), & v \in V(F_c) \end{cases}$$

Es sencillo probar que $g(a) = p(t(a)) - p(h(a))$, o sea, que g cumple la misma propiedad que las tensiones en digráficas conexas. Por tanto, definimos el espacio de tensiones de D como el espacio

generado por los renglones de \mathbf{M}_D , $\mathcal{B}(D) := \mathbf{R}(\mathbf{M}_D)$ (tal como en las digráficas conexas). Finalmente, por lo argumentado líneas arriba, concluimos que

$$\mathcal{B}(D) = \mathcal{B}(\mathcal{F}_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}(\mathcal{F}_c).$$

Los teoremas que enunciamos para digráficas conexas, involucrando al espacio de tensiones, también son válidos para aquellas que son inconexas (con sus respectivas modificaciones).

3.4.2. Espacio de circulaciones $\mathcal{C}(D)$

Ahora exploraremos el kernel de la matriz de incidencia de D y describiremos la naturaleza de sus elementos. Conviene antes establecer ciertas notaciones que facilitarán nuestro estudio.

Supongamos que $q: A(D) \rightarrow \mathbb{R}$. Si $S \subseteq A$, escribimos $Q(S) := \sum_{a \in S} q(a)$. En particular, si S es un conjunto de corte usaremos la siguiente notación: $Q^+(X) := Q(\partial^+(X))$ y $Q^-(X) := Q(\partial^-(X))$.

En resumen,

$$Q^+(X) = \sum_{a \in \partial^+(X)} q(a) \quad y \quad Q^-(X) = \sum_{a \in \partial^-(X)} q(a).$$

Analizando el producto $\mathbf{M}\mathbf{q}$ observamos que, tomando en cuenta la igualdad 2.7 y fijando un vértice v ,

$$\sum_{a \in A} m_{va} q(a) = \mathbf{g}_{\partial^-(v)}^T \cdot \mathbf{q} = \sum_{a \in \partial^+(v)} q(a) - \sum_{a \in \partial^-(v)} q(a) = Q^+(v) - Q^-(v).$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{M}\mathbf{q} = \begin{bmatrix} Q^+(u_1) - Q^-(u_1) \\ \vdots \\ Q^+(u_n) - Q^-(u_n) \end{bmatrix}.$$

Considerando $\mathbf{f} \in \text{Ker}(\mathbf{M})$, con $f: A(D) \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbf{f} = (f(a_1), \dots, f(a_m))$, por la igualdad anterior vemos que

$$\mathbf{M}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^+(u_1) - F^-(u_1) \\ \vdots \\ F^+(u_n) - F^-(u_n) \end{bmatrix}.$$

Por tanto, un elemento \mathbf{f} del kernel de \mathbf{M} tiene la propiedad de que, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $F^+(u_i) - F^-(u_i) = 0$.

Por otro lado, una *circulación en D* es una función $f: A(D) \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple la *condición de conservación* en cada vértice, es decir,

$$F^+(v) = F^-(v), \quad \text{para todo } v \in V(D). \quad (3.2)$$

La condición 3.2 establece que $F^+(v) - F^-(v) = 0$. Así, los elementos de $\text{Ker}(\mathbf{M})$ son circulaciones, y viceversa: las circulaciones anulan a la matriz de incidencia, esto es, que pertenecen al kernel de \mathbf{M} . De esta manera, el conjunto de circulaciones de D es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Lo denotamos como $\mathcal{C}(D)$ y lo llamamos el *espacio de circulaciones de D* ; o sea, $\mathcal{C}(D) := \text{Ker}(\mathbf{M}_D)$.

Ejemplo 3.6

En la imagen 3.8 están dos ejemplos de circulaciones de la digráfica del inciso (a).

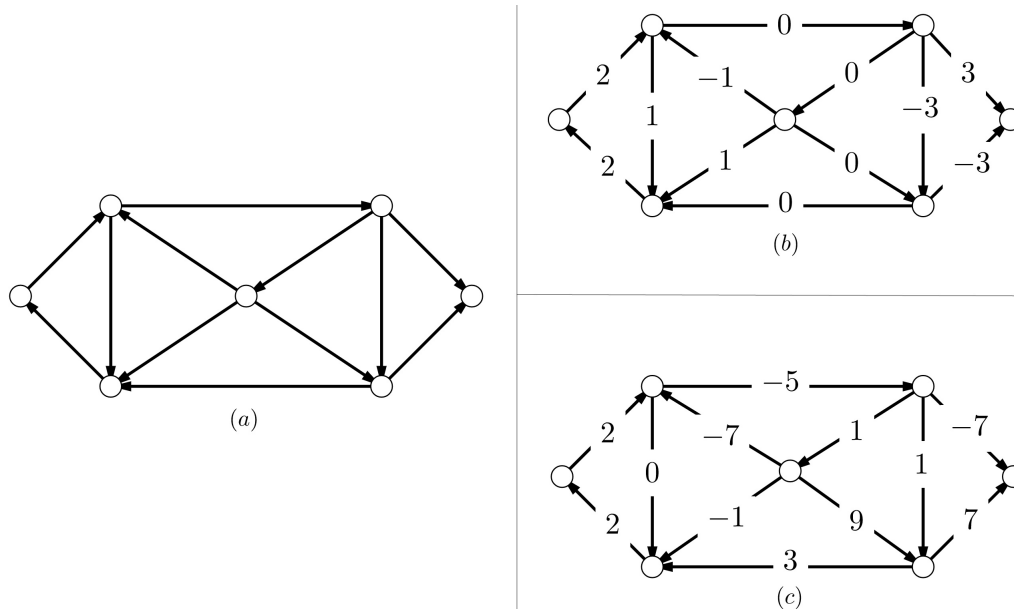


Fig. 3.8



Hay una manera de asociar circulaciones a los ciclos de la digráfica. Supongamos que C es un ciclo contenido en D . Recordemos que en el capítulo 1 mencionamos que C puede ser recorrido, esencialmente, en dos direcciones: en sentido horario o en sentido antihorario (dependiendo del diagrama que representa al ciclo y de cómo se etiquetan los vértices). También comentamos que, al elegir un sentido para recorrer el ciclo, aquél induce dos subdigráficas de C : la de los arcos hacia adelante C^+ y la de los arcos hacia atrás C^- .

Dicho lo anterior, escogemos un sentido para C y hacemos $f_C: A(D) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f_C(a) = \begin{cases} 1, & a \in A(C^+) \\ -1, & a \in A(C^-) \\ 0, & a \notin A(C). \end{cases}$$

Veamos por qué, de hecho, f_C es una circulación. Consideremos un vértice v de D . Ya que f_C se anula en arcos que no pertenecen a C , obtenemos que

$$\begin{aligned} F^+(v) - F^-(v) &= \sum_{a \in \partial^+(v)} f_C(a) - \sum_{a \in \partial^-(v)} f_C(a) \\ &= \sum_{a \in \partial^+(v) \cap A(C)} f_C(a) - \sum_{a \in \partial^-(v) \cap A(C)} f_C(a) \\ &= \sum_{a \in \partial(v) \cap A(C)} f_C(a). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Como sabemos que $|\partial(v) \cap A(C)| = 2$, asumiremos que $\partial(v) \cap A(C) = \{\alpha, \beta\}$. Entonces, escogiendo de antemano un sentido de recorrido para el ciclo C , tenemos cuatro casos (véase la figura 3.9).

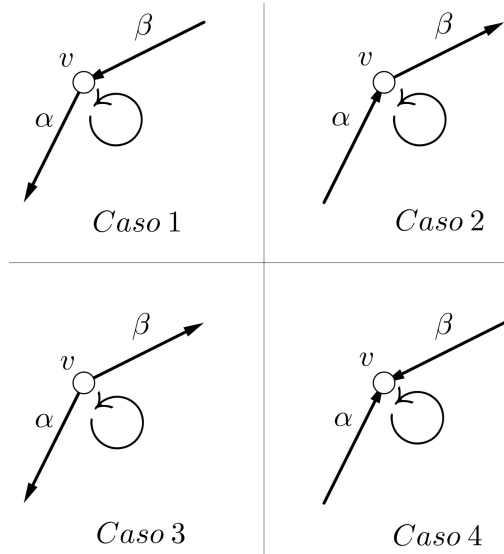


Fig. 3.9

- Caso 1. Que $\alpha \in \partial^+(X)$ y $\beta \in \partial^-(X)$. Aquí $f_C(\alpha) = f_C(\beta) = 1$.
- Caso 2. Que $\alpha \in \partial^-(X)$ y $\beta \in \partial^+(X)$. Tenemos que $f_C(\alpha) = f_C(\beta) = -1$.
- Caso 3. $\{\alpha, \beta\} = \partial^+(v) \cap A(C)$. Deducimos que $f_C(\alpha) = 1$ y $f_C(\beta) = -1$.
- Caso 4. $\{\alpha, \beta\} = \partial^-(v) \cap A(C)$. Puede verificarse que $f_C(\alpha) = -1$ y $f_C(\beta) = 1$.

De todos los casos, puede verificarse que la identidad 3.3 es siempre igual a 0. Con el otro sentido de C se pueden deducir otros cuatro casos que nos arrojarán los mismos resultados. Dicho de otro modo, la igualdad 3.9 implica que $F^+(v) - F^-(v) = 0$, para cualquier vértice v . Luego entonces, $f_C \in \mathcal{C}(D)$.

Ejemplo 3.7

En el inciso (a) de la figura 3.10 mostramos un ciclo de la gráfica de la imagen 3.8, con la respectiva orientación (en sentido contrario a las manecillas del reloj) que hemos escogido; y en (b) se halla la circulación asociada a dicho ciclo.

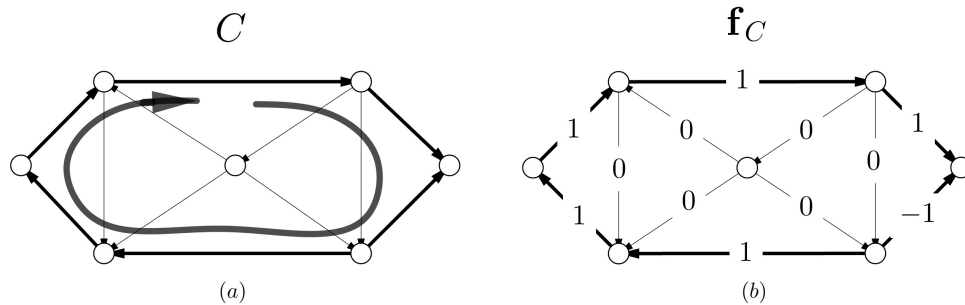


Fig. 3.10



Similarmente a como lo hicimos con las tensiones, veamos qué propiedades tienen las circulaciones asociadas a ciclos.

Lema 3.2

Sea $\mathbf{f} \in \mathcal{C}(D)$. Si $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$, entonces hay un ciclo de D contenido en $\text{supp}(f)$. Más aún, si $\mathbf{f} \geq \mathbf{0}$, entonces el soporte de f contiene un ciclo dirigido.

Demostración: Supongamos que $\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$. Para llegar a una contradicción, asumamos que $\text{supp}(f)$ no contiene ciclos. Entonces, apoyados de la proposición 1.2, sabemos que hay un vértice v de grado 1 en $\text{supp}(f)$. Digamos que $\alpha \in \text{supp}(f)$ es el único arco incidente en v . Así, hay dos casos: $d_{\text{supp}(f)}^+(v) = 1$ ó $d_{\text{supp}(f)}^-(v) = 1$.

Si $d_{\text{supp}(f)}^+(v) = 1$, entonces $\partial_{\text{supp}(f)}^+(v) = \{\alpha\}$ y $\partial_{\text{supp}(f)}^-(v) = \emptyset$. Luego, al ser f una circulación, se tiene

$$F^+(v) = f(\alpha) = 0 = F^-(v).$$

Pero esto es una contradicción pues $\alpha \in \text{supp}(f)$ y, por definición, $f(\alpha) \neq 0$. El caso cuando $d_{\text{supp}(f)}^-(v) = 1$ es totalmente análogo. Por tanto, $\text{supp}(f)$ contiene un ciclo.

Supongamos que $\mathbf{f} \geq \mathbf{0}$ y, ahora, que $\text{supp}(f)$ es acíclica. Debido a lo comentado en el segundo capítulo respecto a digráficas acíclicas, sabemos que $\text{supp}(f)$ tiene una fuente u , es decir, que $\partial_{\text{supp}(f)}^-(u) = \emptyset$ y $\partial_{\text{supp}(f)}^+(u) \neq \emptyset$. Puesto que $\mathbf{f} \geq \mathbf{0}$, se desprende inmediatamente que $\text{supp}(f) = \{a \in A(D) \mid f(a) > 0\}$. Entonces nótese que, como $\partial_{\text{supp}(f)}^+(u) \subseteq \text{supp}(f)$, entonces $f(a) > 0$, para toda $a \in \partial_{\text{supp}(f)}^+(u)$. Por otro lado,

$$F^+(u) = \sum_{a \in \partial_{\text{supp}(f)}^+(u)} f(a) = F^-(u) = 0.$$

La igualdad anterior implica, necesariamente, que $f(a) = 0$, para cualquier arco a en $\partial_{\text{supp}(f)}^+(u)$. Esto es una contradicción. Luego, $\text{supp}(f)$ no tiene ni pozos ni fuentes y, por lo tanto, debe contener un ciclo dirigido.

Q.E.D.

Teorema 3.15

Toda circulación es una combinación lineal de las circulaciones asociadas a los ciclos de D .

Demostración: La prueba se realiza por inducción fuerte sobre el número de elementos del soporte de f y es análoga a la demostración del teorema 3.14. **Q.E.D.**

Corolario 3.5

El conjunto de circulaciones asociadas a los ciclos de D es un generador del espacio $\mathcal{C}(D)$.

Veamos qué sucede si D es inconexa. Al igual que la sección pasada, suponemos que $G = \bigcup_{i=1}^c F_i$, y tomamos las subgráficas \mathcal{F}_i . Sabemos ya del capítulo 1 que

$$\text{Ker}(\mathbf{M}_D) = \text{Ker}(\mathbf{M}_{\mathcal{F}_1}) \oplus \cdots \oplus \text{Ker}(\mathbf{M}_{\mathcal{F}_c}).$$

Como, $\text{Ker}(\mathbf{M}_{\mathcal{F}_i}) = \mathcal{C}(\mathcal{F}_i)$, entonces

$$\text{Ker}(\mathbf{M}_D) = \mathcal{C}(\mathcal{F}_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{C}(\mathcal{F}_c).$$

Si, por otro lado, tomamos $\mathbf{f} \in \text{Ker}(\mathbf{M}_D)$ y lo partimos según los tamaños de las submatrices, tenemos:

$$\mathbf{M}_D \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{F_1} & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{M}_{F_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Entonces $\mathbf{M}_{F_i} \mathbf{f}_i = \mathbf{0}$, es decir, \mathbf{f}_i es una circulación en $\mathcal{C}(F_i)$, de donde

$$F^+ = \begin{cases} F_1^+(v), & v \in V(F_1) \\ \vdots & \vdots \\ F_c^+(v), & v \in V(F_c) \end{cases},$$

y

$$F^- = \begin{cases} F_1^-(v), & v \in V(F_1) \\ \vdots & \vdots \\ F_c^-(v), & v \in V(F_c) \end{cases}.$$

Por lo tanto, como cada \mathbf{f}_i es una circulación, $F^+(v) - F^-(v) = 0$. Esto sugiere que los elementos en $\text{Ker}(\mathbf{M}_D)$ se comportan como las circulaciones en digráficas conexas. De esta manera, definimos $\mathcal{C}(D) := \text{Ker}(\mathbf{M}_D)$ el espacio de circulaciones de D como el kernel de su matriz de incidencia. Luego,

$$\mathcal{C}(D) = \mathcal{C}(F_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{C}(F_c).$$

Además, los teoremas que dimos para digráficas conexas, involucrando el espacio de circulaciones, permanecen verdaderos para digráficas inconexas (con sus respectivas modificaciones).

3.4.3. Relación entre $\mathcal{B}(D)$ y $\mathcal{C}(D)$

Sabemos del primer capítulo que $(\mathbf{R}(\mathbf{M}))^\perp = \text{Ker}(\mathbf{M})$ y que $(\text{Ker}(\mathbf{M}))^\perp = \mathbf{R}(\mathbf{M})$.

Por lo tanto, $(\mathcal{B}(D))^\perp = \mathcal{C}(D)$ y $(\mathcal{C}(D))^\perp = \mathcal{B}(D)$, es decir, los espacios de tensiones y circulaciones son complementos ortogonales.

Luego, necesariamente $\mathcal{B}(D) \cap \mathcal{C}(D) = \{\mathbf{0}\}$. Ninguna tensión puede ser al mismo tiempo una circulación y viceversa. Nótese que lo que acabamos de mencionar no ocurriría con los espacios de cortes y de ciclos de las gráficas no dirigidas. En conclusión, $\mathbb{R}^m = \mathcal{B}(D) \oplus \mathcal{C}(D)$.

3.4.4. Rango, nulidad y relaciones de independencia lineal en \mathbf{M}_D

En digráficas hay un resultado similar al teorema 3.13 y muchas de las ideas que presentamos en esa sección se siguen cumpliendo. Si H es una subdigráfica generadora de D , sucede que \mathbf{M}_H es una submatriz de \mathbf{M}_D , pues conservan los mismos renglones (vértices) y las columnas de \mathbf{M}_H corresponden a $A(H) \subseteq A(D)$.

Si $A(D) = \{a_1, \dots, a_m\}$, \mathbf{c}_e es la columna de \mathbf{M} que corresponde al arco e . Entonces:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{c}_{a_1} \mid \cdots \mid \mathbf{c}_{a_m}].$$

Notemos ahora que si $S \subseteq A(D)$, entonces $\mathbf{M}_{D[S]}$ es la submatriz $[\mathbf{c}_a]_{a \in S}$ de \mathbf{M}_D .

Teorema 3.16

Si $S \subseteq A(D)$, entonces el conjunto de columnas $\{\mathbf{c}_a | a \in S\}$ es linealmente independiente si y sólo si $D[S]$ es acíclica.

Demostración: Para probar la *necesidad*, supongamos que $\{\mathbf{c}_a | a \in S\}$ es linealmente independiente y, para llegar a una contradicción, que hay un ciclo Γ en $D[S]$ y consideremos su circulación asociada f_Γ .

Entonces

$$\mathbf{M}_{D[S]} \cdot \mathbf{f}_\Gamma = \mathbf{0}.$$

No obstante, esto implica que $\sum_{a \in S} f_\Gamma(a) \cdot \mathbf{c}_a = \mathbf{0}$. Como $\{\mathbf{c}_a | a \in S\}$ es linealmente independiente, se tiene que $f_\Gamma(a) = 0$, para toda $a \in S$. Luego, $\mathbf{f}_\Gamma = \mathbf{0}$ es la circulación trivial y esto implica que el ciclo Γ en realidad es vacío (una contradicción). En consecuencia, $D[S]$ es acíclica.

Ahora, para la *suficiencia*, asumamos que $D[S]$ es acíclica. Tomemos una combinación lineal cualquiera de $\{\mathbf{c}_a | a \in S\}$, digamos $\sum_{a \in S} \lambda_a \mathbf{c}_a = \mathbf{0}$, con $\lambda_a \in \mathbb{R}$.

La igualdad anterior implica que $\mathbf{M}_{D[S]} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$, donde $\boldsymbol{\lambda}$ es el vector cuyas entradas son λ_a .

Entonces, $\boldsymbol{\lambda} \in \text{Ker}(\mathbf{M}_{D[S]}) = \mathcal{C}(D[S]) = \{\mathbf{0}\}$, porque $G[S]$ es acíclica y su única circulación posible es la trivial. Así, $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ y, en consecuencia, $\lambda_a = 0$, para toda $a \in S$. Por lo tanto, $\{\mathbf{c}_a | a \in S\}$ es linealmente independiente.

Q.E.D.

Varias implicaciones se siguen de este importante teorema. Es claro que si T es un bosque generador maximal de D , entonces T es una subdigráfica acíclica contenida en D más grande posible. De esta forma $\{\mathbf{c}_a | a \in A(T)\}$ es el conjunto linealmente independiente más grande posible en $\mathbf{C}(\mathbf{M})$ y, por consiguiente, es una base para este espacio de columnas. Puesto que $\{\mathbf{c}_a | a \in A(T)\}$ tiene $n - c$ columnas (pues T tiene $n - c$ arcos), entonces $\dim(\mathbf{C}(\mathbf{M})) = n - c$. Sin embargo, esta también es la dimensión del espacio generado por los renglones $\mathbf{R}(\mathbf{M})$. Como $\mathcal{B}(D) = \mathbf{R}(\mathbf{M})$, concluimos que el espacio de tensiones de D tiene dimensión $n - c$; y debido al teorema de la dimensión, $\dim(\text{Ker}(\mathbf{M})) = m - n + c$, es decir, $m - n + c$ es la dimensión del espacio de circulaciones de D . Esto, a su vez, tiene otra conclusión principal respecto a la matriz de incidencia que dejamos establecida en el siguiente teorema.

Teorema 3.17

Se tiene que $\dim(\mathcal{B}(D)) = n - c$ y $\dim(\mathcal{C}(D)) = m - n + c$. Por lo tanto, $\text{rank}(\mathbf{M}_D) = n - c$ y $\text{null}(\mathbf{M}_D) = m - n + c$.

Definimos el rango y la nulidad de D , respectivamente, como los números $\rho(D) := \text{rank}(\mathbf{M}_D) = n - c$ y $\mu(D) := \text{null}(\mathbf{M}_D) = m - n + c$.

El lector atento también podrá imaginarse que, al igual que con las gráficas, las bases del espacio de columnas están estrechamente ligadas con los bosques generadores maximales.

Corolario 3.6

Sea $S \subseteq A(D)$. Entonces $\{\mathbf{c}_a | a \in S\}$ es una base para el espacio de columnas $\mathbf{C}(\mathbf{M}_D)$ si y sólo si $D[S]$ es un bosque generador maximal. Por lo tanto, las bases de $\mathbf{C}(\mathbf{M}_D)$ están en correspondencia uno a uno con los bosques generadores maximales de D .

Por último, dado $S \subseteq A(D)$, los resultados previos implican que $D[S]$ contiene un ciclo si y sólo si $\{\mathbf{c}_a | a \in S\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

3.4.5. Matrices reducidas

He aquí otra observación: ya se había mencionado que en cada columna sólo hay dos entradas: un “1” y un “-1”. Esto implica que la suma de todos los renglones de \mathbf{M} sea igual al vector $\mathbf{0}$. En otros términos, tenemos que:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{g}_{\partial(u_i)} = \mathbf{0}.$$

Lo que nos permite despejar cualquier renglón y ponerlo en combinación lineal del resto:

$$\mathbf{g}_{\partial(u_j)} = \sum_{i \neq j} -\mathbf{g}_{\partial(u_i)}.$$

Esta última igualdad nos permite definir *matrices de incidencia reducidas* para digráficas, de una manera parecida a como lo hicimos para las gráfica no orientadas: si D es conexa, entonces $\widehat{\mathbf{M}}_D$ es la matriz que resulta de remover cualquier renglón de D ; si D no es conexa, entonces $\widehat{\mathbf{M}}_D$ es la matriz que resulta de eliminar un renglón cualquiera de cada submatriz correspondiente a su respectiva componente conexa. Por ejemplo, las matrices de incidencia reducidas de los bosques serán matrices cuadradas de tamaño $(n-c) \times (n-c)$. Los razonamientos anteriores nos permiten afirmar lo siguiente.

Proposición 3.4

En \mathbb{R} , se cumple que $\text{rank}(\widehat{\mathbf{M}}_D) = \text{rank}(\mathbf{M}_D) = n - c$. En particular, la matriz de incidencia reducida de todo bosque T es una matriz no singular, es decir, $\det(\widehat{\mathbf{M}}_T) \neq 0$.

Aún más, de la proposición anterior y el teorema 3.16 se deduce un corolario más.

Corolario 3.7

Toda submatriz cuadrada, de tamaño $(n-c) \times (n-c)$, de la matriz de incidencia de G es no singular si y sólo si es la matriz de incidencia reducida de algún bosque generador maximal de T .

3.5. Cortes y ciclos fundamentales en digráficas

Hasta el momento conocemos la dimensión de los espacios $\mathcal{B}(D)$ y $\mathcal{C}(D)$ e incluso aprendimos que las tensiones asociadas a cortes minimales y las circulaciones correspondientes a ciclos conformaban conjuntos generadores para dichos espacios. No obstante, todavía no hallamos sus bases.

En gráficas no dirigidas, los cortes y ciclos fundamentales resultan ser de gran utilidad pues son bases para los espacios de corte y de ciclos, respectivamente. Veremos en esta sección cómo estos cortes y ciclos especiales nos permitirán construir sencillamente unas bases para los espacios $\mathcal{B}(D)$ y $\mathcal{C}(D)$.

3.5.1. Tensiones fundamentales

Supongamos primero que D es conexa. Sea T un árbol generador de D . Entonces T define (en la forma como lo hicimos en el capítulo 2) $n - 1$ conjuntos de cortes fundamentales en $G[D]$, la gráfica subyacente de D . Considerando las direcciones de las aristas, también diremos que estos conjuntos son *cortes fundamentales de D asociados a T* .

En secciones previas, vimos a cualquier conjunto de corte se le puede asociar una tensión de D . En particular, también sucede con los cortes fundamentales.

Sea $b \in A(T)$ y consideremos \mathcal{B}_b su corte fundamental correspondiente. Entonces la tensión asociada $\mathbf{g}_{\mathcal{B}_b}$ la escogemos de tal forma que $g_{\mathcal{B}_b}(b) = 1$ y le llamamos la *tensión fundamental de D con respecto a b y a T* . Véase la figura 3.11.

Ahora bien, supóngase que se ordenan los arcos de D de tal manera que

$$A(D) = \{b_1, \dots, b_\rho, c_1, \dots, c_\mu\},$$

con $A(T) = \{b_1, \dots, b_\rho\}$ y $A(\overline{T}) = \{c_1, \dots, c_\mu\}$. Por otro lado, consideremos todas las tensiones fundamentales de T y formamos una matriz \mathbf{B}_f en la que cada renglón es una tensión fundamental, es decir,

$$\mathbf{B}_f := \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\mathcal{B}_{b_1}}^T \\ - \\ \vdots \\ - \\ \mathbf{g}_{\mathcal{B}_{b_\rho}}^T \end{bmatrix}.$$

Recordemos que $\mathcal{B}_b \cap A(T) = \{b\}$ y b es el único arco con esta propiedad. Esto implica que, en la matriz \mathbf{B}_f , las columnas que corresponden a las ramas de T sólo tienen un “1” en el renglón de la tensión fundamental asociada a b .

Por tanto, considerando el orden que le dimos a los arcos de D , la matriz \mathbf{B}_f es de la forma:

$$\mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_\rho & \mathbf{K} \end{bmatrix}.$$

Luego, $\text{rank}(\mathbf{B}_f) = \rho = n - 1$. Ya que hay $n - 1$ renglones en \mathbf{B}_f , entonces éstos son linealmente independientes. Esto es, que el conjunto de tensiones fundamentales $\{\mathbf{g}_{\mathcal{B}_{b_1}}, \dots, \mathbf{g}_{\mathcal{B}_{b_\rho}}\}$ es linealmente independiente. Dado que $\dim(\mathcal{B}(D)) = n - 1$, concluimos que el conjunto de tensiones fundamentales es una base de $\mathcal{B}(D)$.

En el caso que $D = \bigcup_{i=1}^c F_i$ sea inconexa, consideramos un bosque generador maximal T y las digráficas \mathcal{F}_i . Se toma la base de tensiones fundamentales con respecto a T , digamos γ_i , de cada \mathcal{F}_i . Como $\mathcal{B}(D) = \mathcal{B}(\mathcal{F}_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{B}(\mathcal{F}_c)$, entonces sabemos que $\gamma = \bigcup_{i=1}^c \gamma_i$ es una base para $\mathcal{B}(D)$, con $n - c$ elementos.

3.5.2. Circulaciones fundamentales

El procedimiento que seguimos aquí es muy parecido al de la subsección anterior. Los ciclos fundamentales de D son aquellos correspondientes a su gráfica subyacente.

Sea $c \in A(\overline{T})$ y consideramos su ciclo fundamental con respecto a T . Tomamos su circulación asociada $\mathbf{f}_{\mathcal{C}_c}$ con la orientación tal que $f_{\mathcal{C}_c}(c) = 1$ y la llamamos *circulación fundamental de D con respecto a T* . Véase la figura 3.11.

Ordenamos los arcos de D de tal forma que $A(D) = A(\overline{T}) \cup A(T)$ con $A(\overline{T}) = \{c_1, \dots, c_\mu\}$ y $A(T) = \{b_1, \dots, b_\rho\}$. Acomodamos las circulaciones fundamentales como renglones de una matriz \mathbf{C}_f de tal manera que:

$$\mathbf{C}_f := \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\mathcal{C}_{c_1}}^T \\ - \\ \vdots \\ - \\ \mathbf{f}_{\mathcal{C}_{c_\mu}}^T \end{bmatrix}.$$

De nuevo, nos damos cuenta que $\mathcal{C}_c \cap \overline{T} = c$ y es el único ciclo fundamental con esa propiedad. Esto implica que en la columna de \mathbf{B}_f que corresponde a c habrá un sólo “1”, en el renglón de la respectiva circulación fundamental.

Luego, gracias al orden que le dimos a los arcos de D , la matriz \mathbf{B}_f tiene la forma:

$$\mathbf{C}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_\mu & \mathbf{L} \end{bmatrix}.$$

Por consiguiente, $\text{rank}(\mathbf{C}_f) = \mu = m - n + 1$. Esto implica que las $m - n + 1$ circulaciones fundamentales son linealmente independientes. Como $\dim(\mathcal{C}(D)) = m - n + 1$, se sigue que $\{\mathcal{C}_{c_1}, \dots, \mathcal{C}_{c_\mu}\}$ es una base para el espacio de circulaciones de D .

En el caso que $D = \bigcup_{i=1}^c F_i$ sea inconexa (y de manera muy similar a las tensiones) consideramos un bosque generador maximal T y se toma la base de circulaciones fundamentales con respecto a T , digamos γ_i , de cada subdigráfica \mathcal{F}_i . Como $\mathcal{C}(D) = \mathcal{C}(\mathcal{F}_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{C}(\mathcal{F}_c)$, entonces sabemos que $\gamma = \bigcup_{i=1}^c \gamma_i$ es una base para $\mathcal{C}(D)$, con $m - n + c$ elementos.

Ejemplo 3.8

En la figura 3.7 representamos un árbol generador de K_4 . En (b) colocamos una tensión y una circulación fundamentales respecto a los arcos f y b , respectivamente.

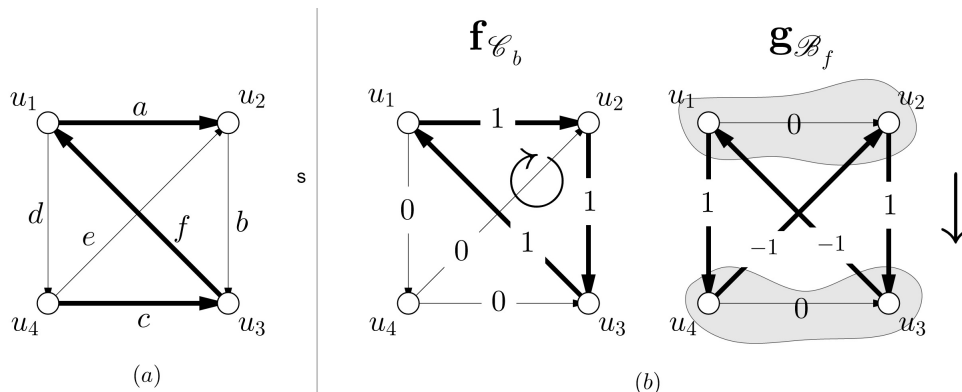


Fig. 3.11



Algunas aplicaciones



ESTE último capítulo está dedicado a la exploración de algunas de las consecuencias que ha tenido la combinación del Álgebra Lineal y la Teoría de Gráficas. Advertimos al lector que muchos de los teoremas que estableceremos aquí quedarán sin demostración pues están fuera del alcance de la tesis.

4.1. Otras matrices asociadas a gráficas y digráficas

Al final del capítulo anterior hicimos uso de ciertas matrices con el propósito de construir bases para los espacios $\mathcal{B}(D)$ y $\mathcal{C}(D)$. En esta sección exploraremos con más detalle estas ideas. Puede consultarse también [6, 15, 10]. Supondremos de ahora en adelante que G es una gráfica, con n vértices y m aristas. También vamos a asumir que G tiene k conjuntos de corte minimales: B_1, \dots, B_k ; y q ciclos: C_1, \dots, C_q . Aclaremos que G puede ser conexa o no.

De igual manera, D denotará una digráfica, con n vértices y m arcos. También supondremos que tiene k cortes minimales y q ciclos, para los cuales usaremos la misma notación que los cortes y ciclos de G . T denotará un bosque generador maximal tanto para G como para D .

4.1.1. Matriz de cortes

Definimos la *matriz de cortes de G* como aquella matriz $\mathbf{B} \in \mathbb{M}_{k \times m}(GF(2))$ cuyos renglones son:

$$\mathbf{B} := \begin{bmatrix} \chi_{B_1}^T \\ - \\ \vdots \\ \chi_{B_k}^T \end{bmatrix}.$$

Es decir, los renglones de \mathbf{B} son los vectores de incidencia de los conjuntos de corte minimales de G . En el inciso (a) de la figura 4.1 se encuentran una gráfica y su matriz \mathbf{B} .

Por el desarrollo hecho en el capítulo anterior, es sencillo darse cuenta que $R(\mathbf{B}) = \vec{\mathcal{B}}(G)$ y, por tanto, $Ker(\mathbf{B}) = \vec{\mathcal{C}}(G)$. Luego, $rank(\mathbf{B}) = \rho(G)$ y $null(\mathbf{B}) = \mu(G)$.

Si H es una subgráfica generadora de G , su respectiva matriz de cortes \mathbf{B}_H está conformada por los renglones de la forma $\chi_{B_i \cap H}^T$, $i \in \{1, \dots, k\}$ (ya que H conserva los mismos vértices de G).

Hay un resultado análogo al teorema 3.13 (cuya demostración también es similar):

Teorema 4.1

Si $S \subseteq E(G)$ entonces el conjunto de columnas de \mathbf{B} asociadas a S , $\{\mathbf{b}_a | a \in S\}$, es linealmente independiente si y sólo si $G[S]$ es acíclica.

Corolario 4.1

Sea $S \subseteq E(G)$. Entonces $\{\mathbf{b}_e | e \in S\}$ es una base para el espacio de columnas $C(\mathbf{B})$ si y sólo si $G[S]$ es un bosque generador maximal. Por lo tanto, las bases de $C(\mathbf{B})$ están en correspondencia uno a uno con los bosques generadores maximales de G .

Hasta aquí, el lector podrá darse cuenta que las matrices de corte y las de incidencias son muy parecidas.

Una *matriz base de cortes de una gráfica G* es una matriz cuyos renglones forman una base para el espacio $\vec{\mathcal{B}}(G)$. Obsérvese que su tamaño es $\rho(G) \times m$. Es sencillo verificar que estas matrices cumplen el teorema anterior. Aún más, podemos confirmar lo siguiente.

Teorema 4.2

Si \mathbf{Q} es una matriz base de cortes, entonces cualquiera de sus submatrices cuadradas, de tamaño $\rho \times \rho$, es no singular si y sólo si sus columnas corresponden a las aristas de algún bosque generador maximal de G .

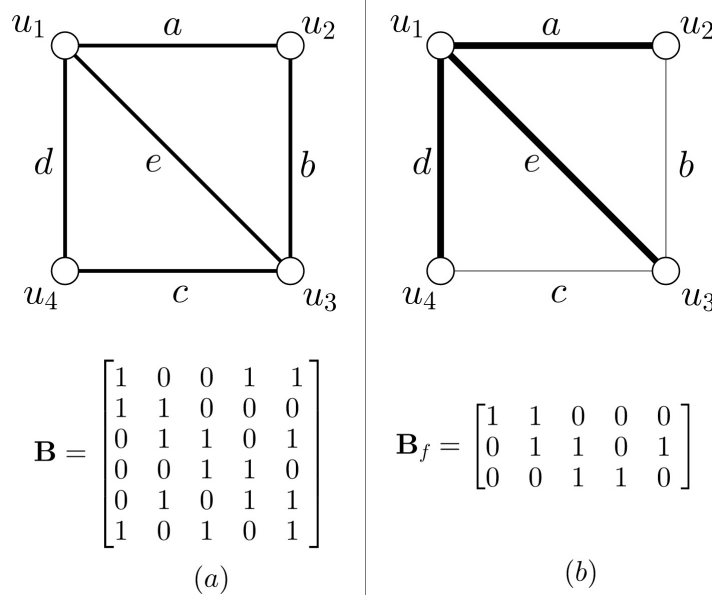


Fig. 4.1

Una matriz base de cortes, en particular, es la matriz \mathbf{B}_f en la que sus renglones corresponden a cortes fundamentales respecto a algún bosque generador maximal. En el inciso (b) de la figura 4.1

mostramos la matriz \mathbf{B}_f respecto al árbol generador cuyas ramas se han resaltado.

Tomemos T un bosque generador maximal de G . Notemos que si ordenamos las aristas de G como $E(G) = E(\bar{T}) \cup E(T)$ y a los cortes fundamentales de tal forma que sus ramas coincidan con el orden de $E(T)$, entonces podemos reescribir a la matriz \mathbf{B}_f como

$$\mathbf{B}_f = [\bar{\mathbf{T}} \mid \mathbf{I}_\rho].$$

En cuanto a las digráficas, los conceptos son análogos. La *matriz de cortes de la digráfica de D* es la matriz $\mathbf{B} \in \mathbb{M}_{k \times m}(\mathbb{R})$ cuyos renglones son las tensiones asociadas a sus cortes minimales, es decir,

$$\mathbf{B} := \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{B_1}^T \\ - \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{B_k}^T \end{bmatrix}.$$

Es fácil deducir que $R(\mathbf{B}) = \mathcal{B}(D)$ y, por tanto, $Ker(\mathbf{B}) = \mathcal{C}(D)$. Luego, $rank(\mathbf{B}) = \rho(D)$ y $null(\mathbf{B}) = \mu(D)$. Véase la figura 4.2.

Una *matriz base de cortes de la digráfica D* es la matriz cuyos renglones son una base para el espacio de tensiones $\mathcal{B}(D)$. Además, las relaciones de dependencia lineal son las mismas: las columnas linealmente independientes de \mathbf{B} corresponden a digráficas sin ciclos.

\mathbf{B}_f también denota a la matriz base de cortes cuyos renglones son las tensiones fundamentales asociadas a un árbol generador maximal de D . Por supuesto, ordenando de manera adecuada las tensiones fundamentales y los arcos $A(D) = A(\bar{T}) \cup A(T)$, podemos escribir:

$$\mathbf{B}_f = [\bar{\mathbf{T}} \mid \mathbf{I}_\rho].$$

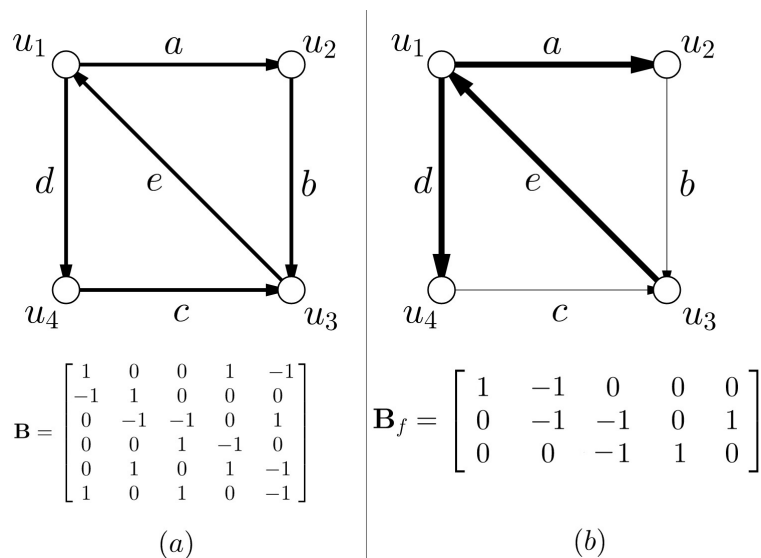


Fig. 4.2

4.1.2. Matriz de ciclos

La *matriz de ciclos* de G es la matriz $\mathbf{C} \in \mathbb{M}_{q \times m}(\mathbb{R})$ de la forma:

$$\mathbf{C} := \begin{bmatrix} \chi_{C_1}^T \\ - \\ \vdots \\ \chi_{C_q}^T \end{bmatrix},$$

donde cada $\chi_{C_i}^T$ es el vector de incidencia del ciclo C_i , $i \in \{1, \dots, q\}$. En la imagen 4.3 mostramos la matriz \mathbf{C} de la figura 4.1.

Debido a la definición de esta matriz, podemos darnos cuenta que $R(\mathbf{C}) = \vec{\mathcal{C}}(G)$ y, por tanto, $Ker(\mathbf{C}) = \vec{\mathcal{B}}(G)$. Luego, $rank(\mathbf{C}) = \mu(G)$ y $null(\mathbf{C}) = \rho(G)$.

Lo anterior implica un teorema *dual* al 4.1:

Teorema 4.3

Si $S \subseteq E(G)$ entonces el conjunto de columnas de \mathbf{C} asociadas a S , $\{\mathbf{c}_a | a \in S\}$, es linealmente independiente si y sólo si $G[S]$ no contiene cortes minimales.

Entonces $G[S]$ contiene un corte minimal si y sólo si $\{\mathbf{c}_a | a \in S\}$ es un conjunto linealmente dependiente. Además, los conjuntos de aristas más grandes posibles, que no desconectan una gráfica, son los complementos de los árboles generadores maximales, como lo afirmamos en el siguiente corolario.

Corolario 4.2

Sea $S \subseteq E(G)$. Entonces $\{\mathbf{c}_e | e \in S\}$ es una base para el espacio de columnas $\mathcal{C}(\mathbf{C})$ si y sólo si $G[S]$ es el complemento de un bosque generador maximal. Por lo tanto, las bases de $\mathcal{C}(\mathbf{C})$ están en correspondencia uno a uno con los complementos de bosques generadores maximales de G .

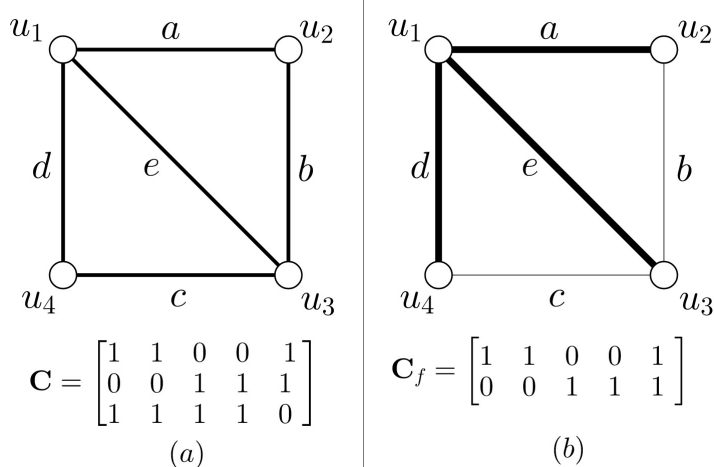


Fig. 4.3

Una *matriz base de ciclos* es una matriz cuyos renglones forman una base para el espacio $\vec{\mathcal{C}}(D)$. Obsérvese que su tamaño es $\mu(G) \times m$. Además de que estas matrices cumplen las proposiciones previas, también tenemos lo siguiente.

Teorema 4.4

Si \mathbf{Q} es una matriz base de ciclos, entonces cualquiera de sus submatrices cuadradas, de tamaño $\mu \times \rho$, es no singular si y sólo si sus columnas corresponden a las cuerdas del complemento de algún bosque generador maximal de G .

Una matriz base de ciclos es la matriz \mathbf{C}_f en las que sus renglones corresponden a los ciclos fundamentales respecto a algún bosque generador maximal. En el inciso (b) de la figura 4.3 mostramos la matriz \mathbf{C}_f respecto al árbol generador de la figura 4.1.

Tomemos T un bosque generador maximal de G . Ordenando las aristas de G como $E(G) = E(\bar{T}) \cup E(T)$ y a sus ciclos fundamentales de tal forma que sus cuerdas coincidan con el orden de $E(\bar{T})$, podemos reescribir a la matriz \mathbf{C}_f como

$$\mathbf{C}_f = [\mathbf{I}_\mu \mid \mathbf{T}].$$

Respecto a las digráficas, las definiciones son parecidas. La *matriz de ciclos de la digráfica de D* es la matriz $\mathbf{C} \in \mathbb{M}_{q \times m}(\mathbb{R})$ cuyos renglones son las circulaciones asociadas a sus ciclos, es decir,

$$\mathbf{C} := \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{C_1}^T \\ - \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{C_k}^T \end{bmatrix}.$$

Notemos que $R(\mathbf{C}) = \mathcal{C}(D)$ y, por tanto, $Ker(\mathbf{C}) = \mathcal{B}(D)$. Luego, $rank(\mathbf{C}) = \mu(D)$ y $null(\mathbf{C}) = \rho(D)$. Véase la figura 4.4.

Una *matriz base de ciclos de D* es la matriz cuyos renglones son una base para el espacio de circulaciones $\mathcal{C}(D)$. Además las relaciones de dependencia lineal que se tenían para gráficas, aquí también se siguen cumpliendo, esto es, que las columnas linealmente independientes de \mathbf{C} corresponden a digráficas que no contienen cortes minimales.

\mathbf{C}_f también denota a la matriz base de cortes cuyos renglones son las circulaciones fundamentales asociadas a un árbol generador maximal de D . Ordenando de manera adecuada las circulaciones fundamentales y los arcos $A(D) = A(\bar{T}) \cup A(T)$, podemos escribir:

$$\mathbf{C}_f = [\mathbf{I}_\mu \mid \mathbf{T}].$$

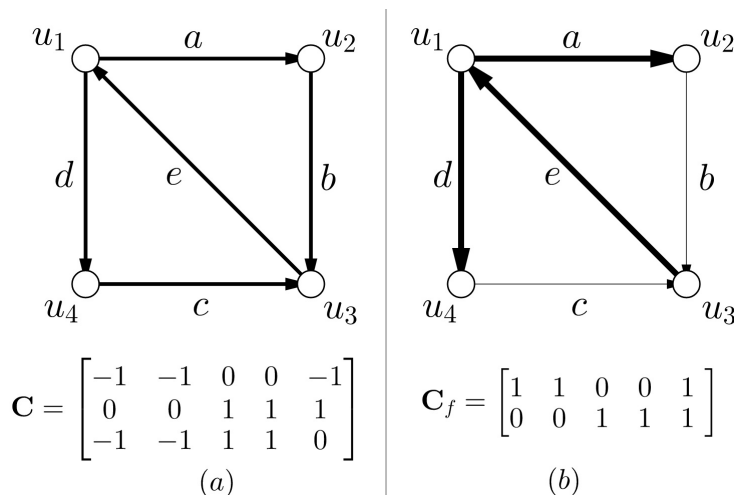


Fig. 4.4

4.1.3. Relaciones entre las matrices \mathbf{M} , \mathbf{B} y \mathbf{C}

Ya sean gráficas dirigidas o no, vimos en el capítulo anterior que los ciclos y los cortes son ortogonales, así como las circulaciones y las tensiones. Debido a sus definiciones, la propiedad de ortogonalidad repercute en las matrices que hemos estudiado en estas secciones.

Teorema 4.5

Supongamos que \mathbf{M} , \mathbf{B} y \mathbf{C} son las matrices de incidencia, de cortes y de ciclos (de tensiones y de circulaciones), respectivamente, de una gráfica (de una digráfica). Si asumimos que tales matrices tiene el mismo orden de columnas, entonces se cumplen las siguientes igualdades: $\mathbf{M}\mathbf{C}^T = \mathbf{O}$, $\mathbf{C}\mathbf{M}^T = \mathbf{O}$, $\mathbf{B}\mathbf{C}^T = \mathbf{O}$ y $\mathbf{C}\mathbf{B}^T = \mathbf{O}$.

Aún más, si $\widehat{\mathbf{M}}$ es la matriz de incidencia reducida, y \mathbf{B}_f y \mathbf{C}_f son las matrices base de cortes y ciclos (tensiones y circulaciones) fundamentales respecto a un bosque generador maximal, también se cumple que: $\widehat{\mathbf{M}}\mathbf{C}_f^T = \mathbf{O}$, $\mathbf{C}_f\widehat{\mathbf{M}}^T = \mathbf{O}$, $\mathbf{B}_f\mathbf{C}_f^T = \mathbf{O}$ y $\mathbf{C}_f\mathbf{B}_f^T = \mathbf{O}$.

Recordando que las submatrices cuadradas de $(n-c) \times (n-c)$, no singulares, de $\widehat{\mathbf{M}}$, corresponden a bosques generadores maximales, enunciamos el corolario que sigue.

Corolario 4.3

Sea T un bosque generador maximal de una gráfica G (o de una digráfica D). Supongamos que las columnas de las matrices $\widehat{\mathbf{M}}$, \mathbf{B}_f , \mathbf{C}_f se han arreglado según $E(G) = E(\overline{T}) \cup E(T)$ (o $A(D) = A(\overline{T}) \cup A(T)$), de forma que $\widehat{\mathbf{M}} = [\widehat{\mathbf{M}}_{\overline{T}} \mid \widehat{\mathbf{M}}_T]$, $\mathbf{B}_f = [\overline{\mathbf{T}} \mid \mathbf{I}_\rho]$ y $\mathbf{C}_f = [\mathbf{I}_\mu \mid \mathbf{T}]$. Entonces podemos afirmar que las matrices de cortes y ciclos fundamentales (tensiones y circulaciones) son de la forma:

$$\mathbf{B}_f = [\widehat{\mathbf{M}}_T^{-1}\widehat{\mathbf{M}}_{\overline{T}} \mid \mathbf{I}_\rho]$$

$$\mathbf{C}_f = [\mathbf{I}_\mu \mid -\widehat{\mathbf{M}}_{\overline{T}}^T(\widehat{\mathbf{M}}_T^T)^{-1}]$$

Lo anterior significa que, a partir de la matriz de incidencia y un bosque generador maximal, podemos construir los cortes (tensiones) y ciclos (circulaciones) fundamentales de una gráfica (digráfica).

4.2. ¿Cuántos árboles generadores tiene una gráfica?

$t(G)$ denota a la cantidad total de árboles generadores de una gráfica G conexa. Se sabe que Arthur Cayley (1821 - 1895) estableció que hay $t(K_n) = n^{n-2}$ árboles generadores en una gráfica completa de n vértices.

Las herramientas que hemos desarrollado en todo este trabajo nos permiten elaborar una fórmula que nos dice cuántos árboles generadores tiene una gráfica conexa arbitraria.

Para lograr nuestro objetivo, haremos uso de la matriz de incidencia de una digráfica. Esta matriz es *totalmente unimodular*, lo cual significa que cualquiera de sus submatrices cuadradas tiene determinante 1, -1 ó 0.

Teorema 4.6

Dada D una digráfica conexa, su matriz de incidencia \mathbf{M}_D es totalmente unimodular.

Demostración: Esta prueba se hace por inducción sobre el tamaño de las submatrices cuadradas

de \mathbf{M} . Téngase en cuenta que \mathbf{M} es una matriz cuyas entradas son sólo 1, -1 ó 0. Así, una submatriz cuadrada \mathbf{M} , de tamaño 1×1 , tiene como única entrada alguno de esos valores, cumpliéndose el enunciado.

Supongamos que toda submatriz cuadrada de tamaño $(k-1) \times (k-1)$, de \mathbf{M} , tiene determinante 1, -1 ó 0.

Sea \mathbf{A} una submatriz cuadrada \mathbf{M} , de tamaño $k \times k$. Si \mathbf{A} tiene un renglón o una columna cuyas entradas son todas 0, entonces $\det(\mathbf{A}) = 0$. Si todas las columnas de \mathbf{A} tiene exactamente un 1 y un -1 en sus entradas, también $\det(\mathbf{A}) = 0$, pues si sumamos todos renglones de \mathbf{A} , mediante operaciones elementales, obtendremos un renglón con todas sus entradas iguales a 0, regresando al caso anterior.

El único caso restante es cuando \mathbf{A} tiene alguna columna con una única entrada con valor 1 ó -1 (y las demás 0). Utilizando la fórmula de Laplace y expandiendo el determinante sobre esta columna obtenemos que

$$\mathbf{A} = \pm 1 \cdot \widetilde{\mathbf{A}}_{ij},$$

donde $\widetilde{\mathbf{A}}_{ij}$ es una matriz de tamaño $(k-1) \times (k-1)$. De aquí que, por hipótesis de inducción, $\det(\mathbf{A}) \in \{-1, 0, 1\}$. Por lo tanto, \mathbf{M} es totalmente unimodular.

Q.E.D.

Corolario 4.4

La matriz de incidencia reducida de cualquier digráfica es totalmente unimodular.

Haremos uso de una fórmula que nos permite calcular el determinante de un producto de matrices. La enunciaremos, pero sin demostración (puede hallarse una prueba en [6]). Antes debemos explicar nuestra notación: tomemos una matriz \mathbf{A} , cuyo conjunto de columnas está indexado por un conjunto E . Si $S \subseteq E$, entonces $\mathbf{A}|_S$ es la submatriz de \mathbf{A} donde sus columnas son aquellas que corresponden a los elementos de S .

Teorema 4.7 (Fórmula de Cauchy-Binet)

Si $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}_{k \times m}(\mathbb{R})$, entonces

$$\det(\mathbf{AB}^T) = \sum_{S \in \binom{\{1, \dots, m\}}{k}} \det(\mathbf{A}|_S) \cdot \det(\mathbf{B}|_S).$$

Ya tenemos todo lo necesario para poder expresar el número de árboles generadores de una gráfica. Consideremos de antemano que los árboles generadores de una digráfica son los mismos de los de su gráfica subyacente (sin las orientaciones de las aristas).

Teorema 4.8 (El teorema Matriz-Árbol)

Sea G una gráfica conexa, con n vértices y m aristas. De igual manera, sea \vec{G} una orientación cualquiera de G . Entonces

$$t(G) = \det(\widehat{\mathbf{M}}_{\vec{G}}(\widehat{\mathbf{M}}_{\vec{G}})^T).$$

Demostración: Ya sabemos que las submatrices de $\widehat{\mathbf{M}}_{\vec{G}}$ de tamaño $(n-1) \times (n-1)$ son no singulares si las $n-1$ columnas corresponden a las aristas de un árbol generador de G ; y estas submatrices tienen determinante 1 ó -1 por el teorema 4.6.

Por la fórmula de Cauchy-Binet y porque $\widehat{\mathbf{M}}_{\vec{G}}$ es totalmente unimodular, tenemos:

$$\begin{aligned} \det(\widehat{\mathbf{M}}_{\vec{G}}(\widehat{\mathbf{M}}_{\vec{G}})^T) &= \sum_{S \in \binom{\{1, \dots, m\}}{n-1}} \det(\widehat{\mathbf{M}}_{\vec{G}}|_S) \cdot \det(\widehat{\mathbf{M}}_{\vec{G}}|_S) \\ &= \sum_{S \in \binom{\{1, \dots, m\}}{n-1}} (\det(\widehat{\mathbf{M}}_{\vec{G}}|_S))^2 \\ &= \sum_{S \in \binom{\{1, \dots, m\}}{n-1}} \{1 | \vec{G}[S] \text{ es árbol generador}\} \\ &= t(G). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Ejemplo 4.1

Consideraremos la *gráfica de Petersen* y su matriz de incidencia reducida, que se encuentran en la figura 4.5.

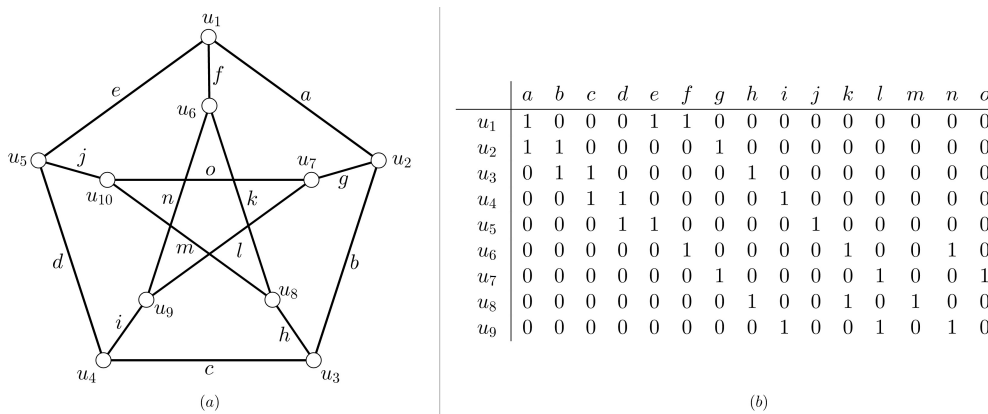


Fig. 4.5

Darle una orientación a esta gráfica se traduce en cambiar algún 1 por un -1 en cada columna:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
u ₁	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u ₂	-1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
u ₃	0	-1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
u ₄	0	0	-1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
u ₅	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
u ₆	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	1	0
u ₇	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	1
u ₈	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	1	0	0
u ₉	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	-1	0

Fig. 4.6

Puede probarse que $\det(\mathbf{M}\mathbf{M}^t) = 2000$. Por tanto, la gráfica de Petersen tiene 2000 árboles generadores. ◆

4.3. Redes eléctricas

A muy grandes rasgos, una *red eléctrica* (en otros contextos también se le conoce como *circuito eléctrico*) es una colección de elementos (o dispositivos) eléctricos conectados entre sí, tales como resistencias, capacitores, transistores, etc. El comportamiento de estas redes depende de dos factores: las características de los elementos eléctricos involucrados y de qué manera estos objetos están conectados (o sea, de su *topología*). No profundizaremos en el primer aspecto dado que concierne a sus propiedades *físicas*. Sin embargo, el segundo es de nuestro interés, pues es donde la Teoría de Gráficas hace su aparición.

Una red eléctrica se modela con una gráfica, en donde sus aristas corresponden a los dispositivos eléctricos y los nodos que conectan tales elementos son los vértices.

A cada arista e_k (o dispositivo) de la red eléctrica se le asocian dos variables en un momento dado t : su *voltaje* $v_k(t)$ y su corriente $i_k(t)$. Puede considerarse al voltaje como aquella variable que representa la diferencia de potencial de los extremos de la arista; y la corriente es una variable que *fluye* a través de la arista. Precisamente, para indicar las direcciones de los voltajes y del flujo de las corrientes, es necesario asignarle orientaciones a las aristas de gráfica asociada a la red eléctrica. Por tanto, las redes pueden ser estudiadas a través de las orientaciones de una gráfica. En la figura 4.7 mostramos en (a) un elemento de una red eléctrica, y en (b) su arista asociada, junto con su dirección y sus dos variables asociadas. Como una convención, el voltaje $+$ se asume siempre en la cola del arco.

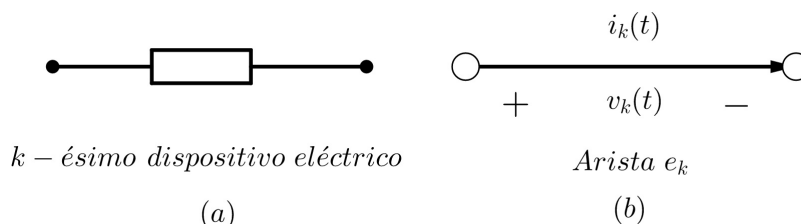


Fig. 4.7

Supongamos que $G = (V, E)$ representa alguna red eléctrica con $V = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. Los valores de las corrientes que atraviesan las aristas en un momento t los representamos en un vector columna llamado el *vector de corrientes*:

$$\mathbf{i}(t) := \begin{bmatrix} i_1(t) \\ \vdots \\ i_m(t) \end{bmatrix}.$$

De igual manera, el *vector de voltajes* es el vector columna que representa los voltajes de cada arista en el tiempo t :

$$\mathbf{v}(t) := \begin{bmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_m(t) \end{bmatrix}.$$

Una de las grandes contribuciones del físico Gustav Kirchhoff (1824 - 1887) fue postular dos leyes que gobiernan el comportamiento de los voltajes y las corrientes de una red eléctrica, en todo tiempo t :

- *Ley de las corrientes de Kirchhoff:* En cualquier vértice v , la suma de las corrientes que entran en ese vértice es igual a la suma de las corrientes que salen. De forma equivalente, la suma de todas las corrientes que pasan por el vértice es igual a cero:

$$\sum_{a \in \partial(v)} i_a(t) = 0.$$

- *Ley de los voltajes de Kirchhoff:* La suma de todos los voltajes en un ciclo C de la red eléctrica es igual a cero:

$$\sum_{a \in E(C)} v_a(t) = 0.$$

En la primera ley consideramos las direcciones de las aristas (y los signos + y - de los voltajes); y en la segunda se considera de antemano una orientación arbitraria de los ciclos. Por ejemplo, consideremos la red eléctrica de la figura 4.8.

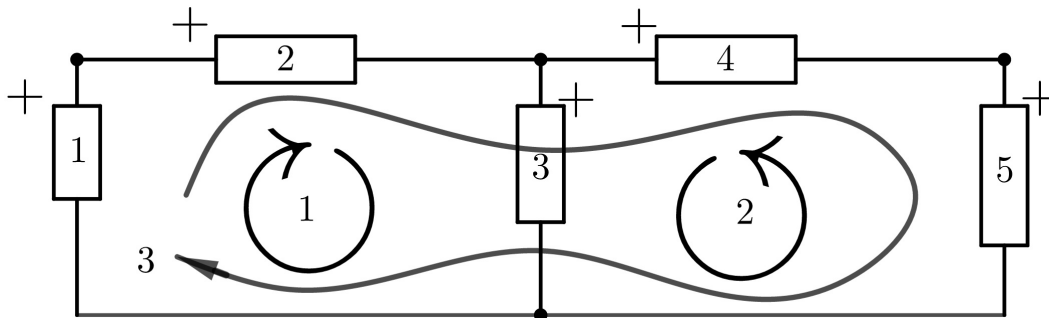


Fig. 4.8

Los signos + nos dicen en qué dirección van los voltajes y las corrientes. También indicamos la orientación de los ciclos de la red. En la figura 4.9 colocamos la digráfica D asociada, mostrando también las orientaciones de los arcos y los ciclos.

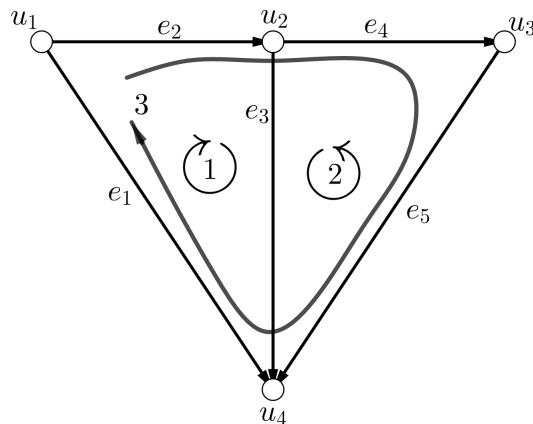


Fig. 4.9

Así, según las leyes de Kirchhoff, tenemos las siguientes ecuaciones:

■ *Ecuaciones de las corrientes:*

$$\begin{array}{rcllclclcl}
 \text{Vértice } u_1 : & i_1(t) & + & i_2(t) & & & & = & 0 \\
 \text{Vértice } u_2 : & & - & i_2(t) & + & i_3(t) & + & i_4(t) & = & 0 \\
 \text{Vértice } u_3 : & & & & & & - & i_4(t) & + & i_5(t) & = & 0 \\
 \text{Vértice } u_4 : & -i_1(t) & & & & - & i_3(t) & & & - & i_5(t) & = & 0
 \end{array}$$

■ *Ecuaciones de los voltajes:*

$$\begin{array}{rcllclclcl}
 \text{Ciclo 1 :} & -v_1(t) & + & v_2(t) & + & v_3(t) & & & = & 0 \\
 \text{Ciclo 2 :} & & & & & v_3(t) & - & v_4(t) & - & v_5(t) & = & 0 \\
 \text{Ciclo 3 :} & -v_1(t) & + & v_2(t) & & & + & v_4(t) & + & v_5(t) & = & 0
 \end{array}$$

En notación matricial, las ecuaciones de las corrientes y voltajes se expresan como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \\ i_4(t) \\ i_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \\ v_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si observamos atentamente, podemos darnos cuenta que las matrices asociadas a las corrientes y a los voltajes son, respectivamente, las matrices de incidencia y de ciclos de la digráfica que representa a la red eléctrica. Entonces el vector de corrientes está en el kernel de la matriz de incidencia, i.e., es una circulación del espacio $\mathcal{C}(D)$; y el vector de voltajes está en el kernel de la matriz de ciclos, o sea, es una tensión del espacio $\mathcal{B}(D)$. Por estas razones, los espacios $\mathcal{B}(D)$ y $\mathcal{C}(D)$ recibieron sus nombres.

Este fenómeno no es exclusivo del ejemplo previo, es algo que sucede en general, cualquiera que sea la cantidad de vértices o de aristas.

Gracias a la herramientas desarrolladas en esta tesis, las leyes de Kirchhoff se reformulan como sigue:

- *Ley de las corrientes de Kirchhoff:* Las corrientes de una red eléctrica forman una circulación de la digráfica asociada, es decir:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{i}(t) = \mathbf{0}.$$

- *Ley de los voltajes de Kirchhoff:* Los voltajes de una red eléctrica forman una tensión de la digráfica asociada, o sea:

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{v}(t) = \mathbf{0}.$$

Parte del trabajo de Kirchhoff fue determinar qué ecuaciones de las corrientes y los voltajes eran linealmente independientes. Ahora podemos afirmar que, necesariamente, hay $n - 1$ ecuaciones de las corrientes linealmente independientes; y $m - n + 1$ ecuaciones de los voltajes linealmente independientes. Aún más, estas ecuaciones se obtienen a partir de un árbol generador de la red y considerando las matrices $\widehat{\mathbf{M}}$ y \mathbf{C}_f .

Hay una cantidad considerable de literatura que trata estos temas. El lector interesado puede consultar [6, 15, 17, 5].

4.4. Gráficas planas

Los conjuntos de corte y los ciclos (y las gráficas pares, en general) parecen estar íntimamente ligados, como ha quedado demostrado en todo este trabajo. Pareciera, incluso, que tiene un comportamiento dual. Comentaremos esta noción de dualidad desde un punto de vista más formal.

No será nuestro objetivo hacer un estudio de las gráficas planas. El libro [3] es una excelente referencia al respecto. Sin embargo, también puede hallarse información en [5, 6, 7, 15, 10]. Es necesario hacer algunas observaciones: como el lector sabrá, en términos muy generales, decimos que una gráfica es *plana* si es posible dibujarla en un plano de tal manera que sus aristas sólo se corten en sus extremos (y no en otros puntos del plano).

Ejemplos de gráficas no planas son K_5 y $K_{3,3}$, ni lo son, tampoco, ninguna de sus subdivisiones. Una subdivisión de una gráfica G es una gráfica que resulta de subdividir aristas de G . De hecho, Kazimierz Kuratowski (1896 - 1980) probó lo siguiente:

Teorema 4.9 (Teorema de Kuratowski)

Una gráfica es plana si y sólo si no contiene subdivisiones de K_5 o de $K_{3,3}$.

Cada gráfica plana *parte* al plano en un número finito f de regiones conexas por trayectorias. Tales regiones son llamadas las *caras de la gráfica*. Una de estas caras siempre será no acotada, la cual se llama *cara exterior*. En la figura 4.10 se muestra una gráfica plana junto con sus caras.

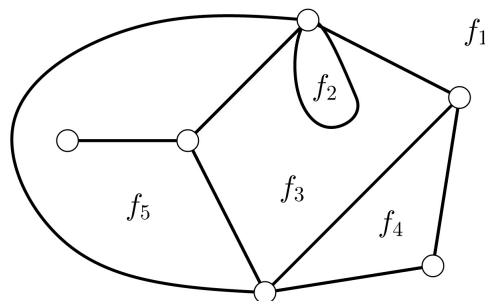


Fig. 4.10

Si G es plana, podemos construir otra gráfica G^* donde sus vértices corresponden a las caras de G y éstos son adyacentes si sus caras respectivas son separadas por una arista. A cada arista e de G , le corresponde una arista e^* en G^* . Véase la figura 4.11, en donde dibujamos el dual de la gráfica de la figura 4.10. Se sabe que G^* es plana; y que si G es conexa, G^* también es conexa.

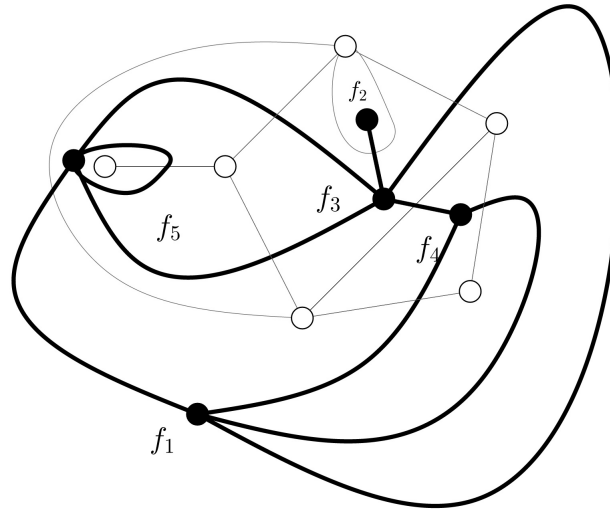


Fig. 4.11

Si $S \subseteq E(G)$, escribimos $S^* = \{e^* | e \in S\} \subseteq E(G^*)$. Las propiedades más relevantes que nos conciernen son enunciadas como un teorema y un corolario:

Teorema 4.10

Sea G una gráfica plana y conexa y consideremos su dual G^* . Se cumple lo siguiente:

- Si C es un ciclo de G , entonces C^* es un corte minimal en G^* .
- Si B es un corte minimal en G , entonces B^* es un ciclo de G^* .

Corolario 4.5

Para toda gráfica plana G , el espacio de ciclos de G , $\mathcal{C}(G)$, es isomorfo al espacio de cortes de G^* , $\mathcal{B}(G^*)$.

El teorema de Kuratowski caracteriza las gráficas planas de una manera muy *geométrica*. Durante algún tiempo se buscó una caracterización menos *topológica* y más *combinatoria* (o más bien, *algebraica*). Quien logró tal hazaña fue el matemático Hassler Whitney (1907-1989) en los años 30 del siglo XX, en una serie de famosos artículos.

Whitney estudió en [18] las relaciones que hay entre una gráfica y su *dual geométrico* y propuso una noción de dualidad más abstracta. El objetivo entonces era probar que dos gráficas duales geoméricamente, también lo eran en el sentido de Whitney, y viceversa.

Supongamos que tenemos dos gráficas G_1 y G_2 , y una función biyectiva $\theta: E(G_1) \rightarrow E(G_2)$. Entonces podemos construir otra función biyectiva $\theta: \mathcal{E}(G_1) \rightarrow \mathcal{E}(G_2)$ que manda una subgráfica generadora de G_1 en la correspondiente subgráfica generadora de G_2 , vía θ ; es decir, que para toda $H \in \mathcal{E}(G_1)$,

$$\theta(H) := G_2[\theta(E(H))] \in \mathcal{E}(G_2).$$

Decimos que dos gráficas G_1 y G_2 son *duales en el sentido de Whitney* (o también que son *duales algebraicamente*) si existe una función $\theta: E(G_1) \rightarrow E(G_2)$ tal que, para toda $H \in \mathcal{E}(G_1)$, se cumple:

$$\rho(G_2 \setminus \theta(H)) = \rho(G_2) - \mu(H).$$

Equivalentemente, G_1 y G_2 son *duales en el sentido de Whitney* si existe una función $\theta: E(G_1) \rightarrow E(G_2)$ tal que $C \in \mathcal{E}(G_1)$ es un ciclo de G_1 si y sólo si $\theta(C)$ es un corte minimal de G_2 .

Whitney logró demostrar que *ni K_5 ni $K_{3,3}$ tiene duales algebraicos*. Aún más, probó que *toda gráfica es plana si y sólo si tiene un dual algebraico*. Finalmente, *que toda gráfica tiene un dual algebraico si y sólo si no contiene subdivisiones de K_5 ni de $K_{3,3}$* ; logrando así una caracterización algebraica de las gráficas planas.

4.5. Optimización Combinatoria

La Optimización Combinatoria es una rama de las Matemáticas que, para resolver los problemas que se plantea, se vale de otras ramas y técnicas de combinatoria. Su uso de la Teoría de Gráficas y el Álgebra Lineal es frecuente.

En esta sección mencionaremos brevemente cómo la teoría presentada en este trabajo ha sido, de una u otra manera, útil para Optimización Combinatoria. A continuación, describiremos algunos de los problemas más famosos que se han estudiado.

Dada una gráfica, un *apareamiento* es un subconjunto de aristas que no tienen vértices extremos en común. El apareamiento es *perfecto* si todo vértice de la gráfica es extremo de alguna arista del apareamiento.

El estudio de los apareamientos en gráficas ha sido productivo. Por ejemplo, los problema de encontrar un apareamiento de cardinalidad máxima y el de hallar un apareamiento de peso máximo (otorgándole pesos a las aristas) pueden ser modelados usando las herramientas que trabajamos en los capítulos anteriores.

Otro es el *problema de asignación* que consiste en encontrar un apareamiento perfecto de peso mínimo. De forma similar, hallar un árbol generador de peso máximo o peso mínimo son problemas clásicos. El lector encontrará en [11] una excelente fuente para profundizar en estos temas.

Las redes de comunicación y de transporte han generado también diversas cuestiones que se han contestado gracias a la Optimización Combinatoria. El estudio de las redes involucra un concepto similar (y de cierto modo, equivalente) a las circulaciones en digráficas.

4.5.1. Flujo en redes

Una *red* es una cuádrupla $N := (D, c, s, t)$ en donde D es una digráfica junto con dos vértices distinguidos: una fuente s y un pozo t ; y una función no negativa $c: A(D) \rightarrow \mathbb{R}$. Los demás vértices de la red son llamados *vértices intermedios* e I denota el conjunto de éstos. La función c es conocida como la *función de capacidad* de la red N , y cada valor $c(a)$ es la *capacidad* del arco a . A veces a D se le llama la *digráfica subyacente* de la red N .

Un *flujo* en N es una función $f: A(D) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface la condición de conservación en sus vértices internos, es decir, para todo $v \in I$,

$$F^+(v) - F^-(v) = 0.$$

Se dice que un flujo es *factible* si satisface la *restricción de capacidad*:

$$0 \leq f(a) \leq c(a), \text{ para todo } a \in A(D).$$

Un $s-t$ corte en la red N es un excorte $\partial^+(X)$ de su digráfica subyacente, de tal forma que $s \in X$

y $t \in \bar{X}$. La capacidad de un $s - t$ corte es la suma de las capacidades de sus arcos, es decir:

$$\text{cap}(\partial^+(X)) := \sum_{a \in \partial^+(X)} c(a) = C^+(X).$$

Por otro lado, dado $X \subseteq V(D)$, el *flujo que sale* de X es el número $F^+(X) - F^-(X)$ y el *flujo que entra* en X es $F^-(X) - F^+(X)$. Puede probarse que la cantidad $F^+(X) - F^-(X)$ es constante, dado cualquier subconjunto X que cumpla que $s \in X$ y $t \in \bar{X}$. Este número es el *valor del flujo* f y se escribe $\text{val}(f)$.

Un $s - t$ corte es un *corte mínimo* si no hay otro $s - t$ corte en N de menor capacidad; y un flujo f es de *flujo máximo* si no hay otro flujo de mayor valor.

Los $s - t$ cortes y los flujos están íntimamente relacionados. Por ejemplo, dado cualquier $s - t$ corte K y cualquier flujo f , se sabe que $\text{val}(f) \leq \text{cap}(K)$. Aún más, si $\text{val}(f) = \text{cap}(K)$, necesariamente f es un flujo máximo y K un corte mínimo.

Uno de los problemas más famosos de la Optimización Combinatoria es de encontrar un flujo máximo en una red dada. El algoritmo más famoso para resolverlo es el de Ford y Fulkerson, publicado en los años 50 del siglo XX. El teorema que sigue es un resultado central que caracteriza los flujos máximos en redes y los cortes de capacidad mínima.

Teorema 4.11 (El teorema Máximo Flujo Mínimo Corte)

En toda red, el valor de un flujo máximo es igual a la capacidad de un corte mínimo

El teorema anterior es una generalización de otro resultado ampliamente conocido en la Teoría de Gráficas: dando el valor de 1 a las capacidades de cada arco de una red, se deduce el Teorema de Menger.

Teorema 4.12 (Teorema de Menger)

En cualquier digráfica con dos vértices distinguidos s y t , el número máximo de (s, t) -trayectorias ajenas por aristas (dos a dos) es igual al mínimo número de arcos en un $s - t$ corte.

Finalmente, asignando pesos y costos a los arcos e imponiendo otras restricciones, los famosos problemas de Programación Lineal tales como el de *la ruta más corta*, *asignación óptima*, *el problema de transporte* y el de *transbordo*, han sido modelados en términos de flujos en redes, encontrándose que son equivalentes. Los libros [8, 5, 4, 3, 11] tratan con más detalle el estudio de los flujos en redes.

4.5.2. Matroides

En el capítulo 3 de esta tesis pudimos darnos cuenta de cómo se relacionan las matrices de incidencia con los espacios vectoriales asociados a las gráficas. Nos dimos cuenta también cómo las bases del espacio de columnas de dicha matriz corresponden a los árboles (bosques maximales) generadores de la gráfica; así como los ciclos corresponden a los conjuntos de columnas linealmente dependientes.

Inspirado en estos fenómenos, Whitney dio un paso más allá en su artículo [18] de 1935 generalizando a la vez los espacios vectoriales y las gráficas en una nueva estructura llamada *matroide*. Así, el estudio de los matroides es el estudio de una teoría abstracta de la dependencia lineal. Un buen libro para estudiar la Teoría de Matroides es [13].

Un matroide M es un par ordenado (E, \mathcal{I}) que consiste de un conjunto finito E y una colección \mathcal{I} de subconjuntos de E con las siguientes propiedades:

- $\emptyset \in \mathcal{I}$.

- Si $I \in \mathcal{I}$ e $I' \subseteq I$, entonces $I' \in \mathcal{I}$.
- Si I_1 e I_2 pertenecen a \mathcal{I} y $|I_1| < |I_2|$, entonces existe un elemento $e \in I_2 \setminus I_1$ tal que $I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

Los elementos de \mathcal{I} son conocidos como *conjuntos independientes* del matroide M . Los *conjuntos dependientes de M* son los subconjuntos de E que no pertenecen a \mathcal{I} . Los *circuitos* son los conjuntos dependientes minimales de M . Los conjuntos independientes maximales reciben el nombre de *bases de M* .

De hecho, los matroides pueden ser definidos de manera equivalente por medio de sus bases. El siguiente párrafo expresa estas ideas.

Un matroide es un par ordenado (E, \mathcal{B}) que consiste de un conjunto finito E y una colección \mathcal{B} de subconjuntos de E llamados *bases*, que satisfacen dos condiciones:

- $\mathcal{B} \neq \emptyset$.
- *Propiedad de intercambio.* Si B_1 y B_2 son dos bases y $e \in B_1 \setminus B_2$, entonces existe $f \in B_2 \setminus B_1$ tal que $(B_1 \setminus \{e\}) \cup \{f\} \in \mathcal{B}$.

Entonces los conjuntos independientes de un matroide son subconjuntos de sus bases. Por ejemplo, una matriz \mathbf{M} con entradas en un campo \mathbb{F} da pie al *matroide lineal* (E, \mathcal{B}) en donde E es el conjunto de columnas de \mathbf{M} y \mathcal{B} el conjunto de todas las bases del espacio de columnas de \mathbf{M} .

El *matroide gráfico* $M(G) := (E, \mathcal{B})$ asociado a una gráfica G es aquel donde E es el conjunto de aristas de G y \mathcal{B} los conjuntos de aristas correspondientes a los bosques generadores maximales de G . En ese caso, los conjuntos independientes son las subgráficas acíclicas y los circuitos son los ciclos de G .

El *dual* de un matroide M es el matroide $M^* = (E, \mathcal{B}^*)$ donde $\mathcal{B}^* := \{E \setminus B \mid B \in \mathcal{B}\}$. En cuanto al matroide gráfico $M(G)$, las bases de su dual $M^*(G)$ son los complementos de los bosques generadores maximales y sus circuitos son los conjuntos de corte minimales. $M^*(G)$ es conocido como el *matroide co-gráfico*.

Al principio de esta sección mencionamos algunos problemas de maximización y de minimización. Resulta que, gracias a su estructura, incluso éstos pueden ser generalizados con matroides.

El *Problema de Maximización* en matroides puede ser formulado como sigue: dado un matroide $M = (E, \mathcal{I})$ con pesos en los elementos de E , es decir, una función no negativa $c: E \rightarrow \mathbb{R}$, hallar un conjunto independiente X de peso máximo, o sea, $X \in \mathcal{I}$ tal que $C(X) = \sum_{e \in X} c(e)$ es máximo.

El *Problema de Minimización* se establece de forma análoga: dado un matroide $M = (E, \mathcal{B})$ con pesos en los elementos de E , encontrar una base de peso mínimo.

Otros problemas conocidos son aquellos que involucran la intersección de matroides. Si (E, \mathcal{I}_1) y (E, \mathcal{I}_2) son dos matroides sobre el mismo conjunto E , su *intersección* es el sistema de conjuntos $(E, \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2)$. Aunque, en general, tal intersección no es un matroide, es de interés hallar el conjunto $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ de cardinalidad máxima; más aún, si los matroides tienen pesos, encontrar $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ de peso $c(X)$ máximo. El problema de encontrar un apareamiento de cardinalidad máxima en una gráfica bipartita puede modelarse en términos de una intersección de matroides.

Podemos darnos cuenta que la Teoría de Matroides es útil por su poder de generalización y sus aplicaciones. Es por esto que los matemáticos se han esforzado en estudiar y desarrollar teoría y algoritmos para matroides. A manera de conclusión, los matroides son, de cierto modo, una conclusión de los temas revisados en la presente tesis, y un comienzo para nuevas áreas cuyas influencias siguen repercutiendo en las Matemáticas hasta nuestros días.

Bibliografía

- [1] BANG-JENSEN, J. y GUTIN G. Z. *Digraphs. Theory, Algorithms and Applications*. Segunda edición. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2008.
- [2] BIGGS, N. L. y LLOYD E. K. y WILSON R. J. *Graph Theory 1736 - 1936*. Oxford University Press, 1976.
- [3] BONDY, J. A. y MURTY U. S. R. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 244. Springer, 2008.
- [4] CHEN, W.K. *Graph Theory and Its Engineering Applications*. Advances Series in Electrical and Computer Engineering, Vol. 5. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1997.
- [5] CHEN, W.K. *Net Theory and its Applications, Flows in Networks*. Series in Electrical and Computer Engineering, Vol 1. Imperial College Press, 2003.
- [6] DEO, N. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. Prentice-Hall Series in Automatic Computation. Prentice-Hall, 1974.
- [7] DIESTEL, R. *Graph Theory*. Quinta edición. Graduate Texts in Mathematics, Vol.173. Springer, 2017.
- [8] FORD, L. R. y FULKERSON D. R. *Flows in Networks*. Princeton University Press, 1962.
- [9] FRIEDBERG, S. H. y INSEL A. J. y SPENCE L. E. *Linear Algebra*. Cuarta edición. Prentice-Hall, 2002.
- [10] GROSS, J. L y YELLEN J. y ZHANG P. *Handbook of Graph Theory*. Segunda edición. Discrete Mathematics and Its Applications. CRC Press, 2014.
- [11] KORTE, B. y VYGEN J. *Combinatorial Optimization, Theory and Algorithms*. Sexta edición. Algorithms and Combinatorics, Vol 21. Springer, 2018.
- [12] NOBLE, B. *Applied Linear Algebra*. Prentice-Hall, 1968.
- [13] OXLEY, J. *Matroid Theory*. Segunda edición. Oxford Graduate Texts in Mathematics. Oxford University Press, 2011.
- [14] PAPADIMITRIOU, C. H. y STEIGLITZ K. *Combinatorial Optimization, Algorithms and Complexity*. Prentice-Hall, Inc, 1982.
- [15] SESHU, S. y REED M. B. *Linear Graphs and Electrical Networks*. Addison Wesley, 1961.

- [16] SHORES, T. S. *Applied Linear Algebra and Matrix Analysis*. Segunda edición. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 2018.
 - [17] SLEPIAN, P. *Mathematical Foundations of Network Analysis*. Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol 16. Springer, 1968.
 - [18] WHITNEY, H. (1935). On the abstract properties of linear dependence. *Amer. J. Math.* **57**, 509–533.
 - [19] ZHANG, H. *Matrix Theory: Basic Results and Techniques*. Segunda edición. Universitext. Springer, 2011.
-

Índice alfabético

- Árbol, 17
 - de una digráfica, 21
 - generador, 17
- Apareamiento, 90
 - perfecto, 90
- Arco
 - hacia adelante, 47
 - hacia atrás, 47
- Arco de una digráfica, 20
- Arista
 - de una gráfica, 11
 - paralela, 12
- Aristas adyacentes, 11
- Base, 7
- Bosque, 17
 - de una digráfica, 21
 - generador, 17
- Camino, 14
 - abierto, 15
 - cerrado, 15
 - de una digráfica, 22
 - dirigido, 22
- Campo, 5
 - propiedades de, 5
- Ciclo, 14
 - de una digráfica, 21
 - fundamental, 42
- Circuito, 15
 - de una digráfica, 22
- Circulación
 - fundamental, 74
- Combinación lineal, 7
- Complemento ortogonal, 9
- Componentes conexas, 17
- Conjunto de corte
 - asociado a X respecto a H , 23
 - como subgráfica generadora inducida por aristas, 23
 - de G asociado a X , 23
 - de una digráfica, 45
 - fundamental, 36
 - minimal, 30
 - minimal en una digráfica, 46
- Converso de una digráfica, 21
- Coárbol, 35
- Descomposición de una gráfica, 39
- Determinante, 11
- Diagrama
 - de una digráfica, 20
 - de una gráfica, 12
- Digráfica, 20
 - conexa, 22
 - fuertemente conexa, 22
- Dimensión, 7
- Escalar, 6
- Espacio

- con producto interior, 8
 - de aristas, 49
 - de ciclos, 53
 - de circulaciones, 67
 - de columnas, 10
 - de cortes, 51
 - de renglones, 10
 - de tensiones, 63
 - generado, 7
 - subespacio, 6
 - vectorial, 6
- Excorte de una digráfica, 45
- Exgrado, 20
- Flujo, 90
- Función de incidencia
- de una digráfica, 20
 - de una gráfica, 11
- Grado, 20
- Grado de un vértice, 12
- Gráfica, 11
- bipartita, 13
 - bipartita completa, 13
 - completa, 13
 - conexa, 14
 - dirigida, 20
 - finita, 13
 - inconexa, 14
 - inducida, 13
 - nula, 13
 - par, 38
 - plana, 88
 - simple, 12
 - subyacente, 21
 - trivial, 13
 - generadora, 13
- Gráficas ajenas, 16
- Gráficas ajenas por aristas, 16
- Imagen de una transformación, 8
- Incorte de una digráfica, 45
- Ingrado, 20
- Intersección de gráficas, 16
- Isomorfismo, 8
- Kernel
- de una matriz, 10
 - de una transformación, 8
- Lazo, 12
- Ley de las corrientes de Kirchhoff, 85
- Ley de los voltajes de Kirchhoff, 85
- Linealmente
- dependiente, 7
 - independiente, 7
- Longitud
- de un camino, 14
 - de un ciclo, 14
- Matriz, 9
- cuadrada, 11
 - de ciclos de una digráfica, 81
 - de ciclos de una gráfica, 80
 - de cortes de una digráfica, 79
 - de cortes de una gráfica, 77
 - de incidencia de una digráfica, 22
 - de incidencia de una gráfica, 18
 - diagonal, 11
 - diagonal por bloques, 11
 - identidad, 11
 - partición por bloques, 10
 - totalmente unimodular, 82
- Matriz base
- de ciclos de una digráfica, 81
 - de ciclos de una gráfica, 80
 - de cortes de una digráfica, 79
 - de cortes de una gráfica, 78
- Matriz de incidencia
- reducida de una gráfica, 59
- Matroide, 91
- dual, 92
 - gráfico, 92
- Nulidad
- de una gráfica, 59
 - de una matriz, 10
 - de una transformación, 8
- Orientación de una gráfica, 21
- Paseo, 15
- de una digráfica, 22
- Potencial, 62
- Problema de asignación, 90
-

-
- Producto interior, 8
Producto interior degenerado, 9
- Rango
 de una gráfica, 59
 de una matriz, 10
- Rango de una transformación, 8
- Red, 90
- Red Eléctrica, 85
- Subdigráfica, 21
- Subgráfica, 13
- Submatriz, 10
- Suma
 de dos subespacios, 8
- Suma de matrices, 10
- Tensión, 62
 fundamental, 73
- Transformación lineal, 8
- Trayectoria, 15
 de una digráfica, 22
- Unión de gráficas, 16
- Unión de gráficas ajenas, 17
- Vector, 6
 columna, 6
 de corrientes, 85
 de incidencia, 55
 de voltajes, 85
 renglón, 6
- Vectores ortogonales, 9
- Vértice
 cabeza, 20
 cola, 20
 de una digráfica, 20
 de una gráfica, 11
 extremo, 11, 15
 interno, 15
- Vértices adyacentes, 11
-