UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ANÁLISIS FUNCIONAL EN ESPACIOS VECTORIALES TOPOLÓGICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

DIEGO LÓPEZ ZANELLA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ALEJANDRO DARÍO ROJAS SÁNCHEZ
CIUDAD DE MÉXICO, 2020.

HOJA DE DATOS DEL JURADO

1. Datos del alumno
   López
   Zanella
   Diego
   Universidad Nacional Autónoma
   de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   313139365

2. Datos del tutor
   Dr.
   Alejandro Darío
   Rojas
   Sánchez

3. Datos del sinodal 1
   Dr.
   Javier
   Páez
   Cárdenas

4. Datos del sinodal 2
   Dra.
   Natalia
   Jonard
   Pérez

5. Datos del sinodal 3
   Dr.
   Pierre Michel
   Bayard

6. Datos del sinodal 4
   Dra.
   Judith
   Campos
   Cordero

7. Datos del trabajo escrito
   Análisis funcional en espacios
   vectoriales topológicos
   110 p
   2020

Índice general

Introducción

La topología suele introducirse a los estudiantes de matemáticas a través de la siguiente pregunta: ¿qué pasa si a un espacio métrico le quitamos la métrica? El concepto fundamental detrás del estudio de los espacios métricos es el de cercanía y es mediante este concepto que se introducen los espacios topológicos. En este trabajo nos hacemos la pregunta: ¿qué pasa si a un espacio normado le quitamos la norma? Ya sabemos que para responder esta pregunta necesitamos hablar de espacios topológicos, pero para realmente generalizar los conceptos del estudio de los espacios normados necesitaremos un concepto más fuerte: los espacios vectoriales topológicos.

Un primer objetivo es encontrar analogías entre la teoría de espacios normados y la teoría de espacios vectoriales topológicos; es por esto que en el primer capítulo se realiza un breve estudio de los espacios normados en el que se intenta presentar algunos resultados básicos desde una perspectiva topológica. También se estudian los teoremas fundamentales del análisis funcional y se generalizan al contexto de los espacios vectoriales topológicos.

En el Capítulo 1 se introducen los espacios normados, sus productos y cocientes topológicos y las aplicaciones lineales continuas entre ellos. Dado que, en matemáticas, la disponibilidad de ejemplos siempre es fundamental para comprender la teoría, se ofrece una variedad de ejemplos de espacios normados que son comunes en la literatura. Se caracteriza a los espacios de dimensión finita como los únicos espacios normados que son localmente compactos y, finalmente, se introducen los espacios de Banach, los cuales serán el principal objeto de estudio en el capítulo siguiente.

En el Capítulo 2 se enuncian y demuestran teorema los teoremas fundamentales del análisis funcional: el teorema de Hahn-Banach, el teorema de la aplicación abierta, el teorema de la gráfica cerrada y el teorema de Banach-Steinhaus; así como la equivalencia entre los primeros tres de estos teoremas en el contexto de los espacios normados. Además, se enuncia sin demostrar el teorema de la categoría de Baire, fundamental en el estudio de los teoremas fundamentales.

En el Capítulo 3 se introduce el concepto de espacio vectorial topológico (e.v.t.), ofreciendo una gran variedad de ejemplos. Se estudian las propiedades de separación de estos espacios, llegando al resultado de que cualquier e.v.t. es Tychonoff y ofreciendo un ejemplo de un e.v.t. que no es normal. Se generalizan conceptos y resultados de los espacios normados, como por ejemplo la caracterización de los espacios de dimensión finita como los únicos espacios vectoriales topológicos localmente compactos y también se estudian resultados que no se pueden generalizar de manera trivial, como que el conjunto de transformaciones lineales continuas entre dos espacios vectoriales topológicos no necesariamente coincide con el de las acotadas. Finalmente, se abordan los problemas de la normabilidad, la metrizabilidad y la metrizabilidad completa.

En el Capítulo 4, se ofrecen generalizaciones de los teoremas fundamentales presentados en el Capítulo 2. Cabe destacar que en la literatura se pueden encontrar generalizaciones más fuertes que las aquí presentadas pero que no fueron abordadas por salirse de los objetivos de este trabajo.

Esta tesis está dirigida a estudiantes de matemáticas que estén familiarizados con los conceptos básicos del análisis funcional y que quieran ahondar en él desde una perspectiva topológica. Considero que los conocimientos requeridos para comprender este trabajo corresponden a los cursos de Análisis Matemático I y II, Álgebra Lineal I y Topología I de la licenciatura en matemáticas de la Facultad de Ciencias. Algunos ejemplos requieren un manejo básico de la teoría de integración de Lebesgue y los espacios L^p, correspondientes a un curso de Teoría de la Medida I; si bien el lector no tendrá problema para comprender la teoría sin dichos conocimientos, estos ejemplos son importantes para complementar algunos aspectos de la misma.

Es importante aclarar que todos los espacios vectoriales que se tratan están considerados sobre un campo $\mathbb{F}$ que puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, indistintamente, a menos que se especifique otra cosa. Cuando se traten dos o más espacios simultáneamente se da por hecho que éstos están definidos sobre el mismo campo.

Capítulo 1

Espacios normados y espacios de Banach

En este capítulo se presentan los conceptos sobre espacios normados y de Banach necesarios para trabajar con los teoremas fundamentales en el siguiente capítulo. Dado que se busca llegar al estudio de los espacios vectoriales topológicos, se intenta dar un punto de vista topológico de los resultados de este capítulo. Muchas demostraciones han sido omitidas por considerarse fuera de los objetivos del trabajo, pero pueden ser consultadas en [9].

1.1. Normas sobre espacios vectoriales

Definición 1.1.1. Sea X un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{F}$. Una norma sobre X es una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ tal que

1. $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ para cualesquiera $\lambda \in \mathbb{F}$ y $x \in X$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para cualesquiera $x, y \in X$.

Si $\|\cdot\|$ es una norma sobre X, diremos que el par ordenado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado, o a veces simplemente diremos que X es un espacio normado.

Proposición 1.1.2. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y $x, y \in X$. Entonces*

1. $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x \pm y\|$

2. $\|x\| \geq 0$

Ejemplo 1.1.3. 1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la norma euclidiana sobre $\mathbb{F}^n$ está dada por

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots |x_n|^2}\,.$$

2. Si $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida, $p \in [1, \infty]$ entonces el espacio $\left(L^p(X, \mathcal{M}, \mu), \|\cdot\|_p\right)$ es un espacio normado con la siguiente norma

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \quad \text{si } p < \infty$$

y $\|f\|_\infty = \text{ínf}\{M \in \mathbb{R} \colon |f| \leq M \text{ ctp }\}$. Recuérdese que, formalmente, los elementos de $\left(L^p(X, \mathcal{M}, \mu), \|\cdot\|_p\right)$ no son funciones, sino clases de equivalencia de funciones que coinciden fuera de algún conjunto de medida cero. En la práctica, esta formalidad suele omitirse.

Un caso muy destacable destacable es cuando X es un subconjunto boreliano de $\mathbb{F}^n$, $\mathcal{M}$ es la σ-álgebra de conjuntos Lebesgue-medibles restringida a X y μ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{F}^n$.

Otro caso destacable es cuando $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y μ es la medida de contar. Clásicamente, este espacio es denominado ℓ^p. Si $1 \leq p < \infty$ entonces ℓ^p consiste de las sucesiones en $\mathbb{F}$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ y

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$$

mientras que ℓ^∞ consiste de las sucesiones acotadas en $\mathbb{F}$ y

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|\,.$$

En muchas ocasiones, cuando la terna $(X, \mathcal{M}, \mu)$ sea clara por el contexto, simplemente escribiremos L^p para referirnos al espacio $(L^p(X, \mathcal{M}, \mu), \|\cdot\|_p)$

3. Sean $\mathcal{A}$ un conjunto de índices no vacío y Y un espacio normado. Denotamos por $Y^{\mathcal{A}}$ al conjunto de funciones con dominio $\mathcal{A}$ y contradominio Y. Definimos

$$\ell^\infty_{\mathcal{A}}(Y) := \left\{f \in Y^{\mathcal{A}} \colon \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \|f(\alpha)\| < \infty\right\} \quad \text{y} \quad \|f\|_\infty = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \|f(\alpha)\|\,.$$

Entonces $\ell^\infty_{\mathcal{A}}(Y)$ es un espacio normado.

4. Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{B}(X,\mathbb{F})$ el conjunto de funciones acotadas de X en $\mathbb{F}$. La suma entre funciones acotadas y el producto escalar se definen punto a punto. Defínase

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)| .$$

Entonces $(\mathcal{B}(X,\mathbb{F}), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio vectorial normado. A la norma $\|\cdot\|_\infty$ se le conoce como la norma del supremo.

5. Si X es un espacio topológico entonces el espacio de funciones continuas y acotadas $C_b(X,\mathbb{F})$ es un subespacio vectorial de $(\mathcal{B}(X,\mathbb{F}), \|\cdot\|_\infty)$. En particular, si X es un espacio topológico compacto entonces $C_b(X,\mathbb{F}) = C(X,\mathbb{F})$.

1.2. Topología de un espacio normado

Proposición 1.2.1. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. La función $d\colon X\times X \to \mathbb{R}$ dada por $d(x,y) = \|x-y\|$ es una métrica sobre X.*

En virtud de la proposición anterior, a un espacio normado lo podemos considerar como un espacio métrico; sobre entendiendo que la métrica a la que nos referimos es la definida en dicha proposición. En consecuencia, a un espacio normado también lo podemos considerar como un espacio topológico.

Definición 1.2.2. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Definimos la topología inducida por $\|\cdot\|$ como la topología inducida sobre X por la métrica $d(x,y) = \|x-y\|$, es decir, la topología que tiene como base a las bolas abiertas

$$B(x,r) = \{y \in X\colon\ \|y-x\| < r\} \tag{1.1}$$

con $x \in X$ y $r > 0$.

Siempre que nos refiramos a un espacio vectorial normado X como un espacio topológico, estaremos tomando en cuenta a X con la topología de la Definición 1.2.2.

Proposición 1.2.3. *Sea X un espacio normado.*

1. *La función $+\colon X\times X \to X$ dada por $+(x,y) = x+y$ es continua, donde el espacio $X\times X$ está dotado de la topología producto.*

2. *La función* $*\colon \mathbb{F} \times X \to X$ *dada por* $*(\lambda, x) = \lambda x$ *es continua, donde el espacio* $\mathbb{F} \times X$ *está dotado de la topología producto.*

Esta proposición nos permite definir una gran variedad de homeomorfismos de X en X. Sea $x \in X$ fija. Por la proposición anterior, la aplicación $y \mapsto y - x$ es continua. Además, es invertible y su inversa es $y \mapsto y + x$, que también es una función continua. Por lo tanto, dicha aplicación es un homeomorfismo de X en X. De manera análoga, la aplicación $y \mapsto \lambda y$ es un homeomorfismo para $\lambda \neq 0$. Veremos que el hecho de que $y \mapsto y - x$ sea un homeomorfismo implica que la topología de X está completamente determinada por las vecindades del 0.

Proposición 1.2.4. *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio vectorial normado,* $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ *y* $U \subseteq X$. *Entonces*

1. *Las aplicaciones* $y \mapsto x + y$ *y* $y \mapsto \lambda y$ *son homeomorfismos de* X *en* X.

2. U *es una vecindad de* x *si y sólo si* $U - x$ *es una vecindad del* 0, *donde el conjunto* $U - x$ *es el subconjunto de* V *compuesto por todas las diferencias* $u - x$ *con* $u \in U$.

En ocasiones será importante poder decidir cuándo dos normas definen una misma topología sobre un espacio vectorial dado. El concepto de equivalencia entre normas servirá para esto.

Definición 1.2.5. Sean X un espacio vectorial y $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ dos normas sobre X. Diremos que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes si existen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mayores a 0 tales que

$$c_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2$$

para toda $x \in X$.

Si d_1 y d_2 son métricas sobre un conjunto X y existen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ positivas tales que

$$c_1 d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq c_2 d_2(x, y)$$

para cualesquiera $x, y \in X$ entonces d_1 y d_2 inducen la misma topología sobre X. En particular, si $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son métricas equivalentes sobre un espacio vectorial normado X entonces ambas normas inducen la misma topología sobre X. En el contexto de espacios normados, la estructura algebraica permite demostrar el recíproco de esta última afirmación.

Proposición 1.2.6. *Sean X un espacio vectorial y $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ dos normas sobre X. Las topologías inducidas en X por $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son iguales si y sólo si $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes.*

Demostración. Si $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes, entonces existen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ positivas tales que $c_1 \|x-y\|_2 \leq \|x-y\|_1 \leq c_2 \|x-y\|_2$ para cualesquiera $x, y \in X$. Así, por la discusión anterior a esta proposición se sigue que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ inducen la misma topología sobre X.

Recíprocamente, supongamos que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ inducen la misma topología en X. Entonces la bola $B_1(0,1) \subseteq X$ tomada respecto a la norma $\|\cdot\|_1$ es un abierto en $(X, \|\cdot\|_2)$. Así, existe $r > 0$ tal que $B_2(0,r) \subseteq B_1(0,1)$ donde la bola $B_2(0,r)$ está tomada respecto a la norma $\|\cdot\|_2$. De esta manera, sea $c_1 \in \mathbb{R}$ tal que $0 < c_1 < r$. Si $x \neq 0$ y $u := c_1(x/\|x\|_2)$ entonces $\|u\|_2 = c_1 < r$, por lo que $u \in B_2(0,r)$ y, en consecuencia, $u \in B_1(0,1)$, por lo que $\|u\|_1 < 1$. Por lo tanto, $c_1 \|x\|_1 < \|x\|_2$. Análogamente, podemos encontrar $c_2 > 0$ tal que $\|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$ para toda $x \in X$. De esta manera, $c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$ para toda $x \in X$. Así, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son normas equivalentes. $\square$

Supongamos que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ son normas sobre un espacio vectorial X y $c_1 > 0$ es tal que $\|x\|_2 \leq c_1 \|x\|_1$ para toda $x \in X$. Entonces la función $\|\cdot\|_2 : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ es continua. Por lo tanto, la función

$$\varphi\colon (B_1(0,1), \|\cdot\|_1) \to (B_2(0,1), \|\cdot\|_2)$$

dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x}{\|x\|_2} \|x\|_1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua. Recíprocamente, si existe $c_2 > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2$ entonces la función inversa de φ dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{x}{\|x\|_1} \|x\|_2 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua. De esta manera, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.2.7. *Sean X un espacio vectorial, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ dos normas sobre X y B_1, B_2 las bolas unitarias respecto a $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ respectivamente. Si $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes entonces B_1 y B_2 son homeomorfas.*

En el resto de esta sección nos dedicaremos a estudiar las características topológicas de los espacios normados de dimensión finita. Un primer resultado importante es que en un espacio vectorial de dimensión finita todas las normas son equivalentes a la euclidiana. En el lenguaje de la Proposición 1.2.6 esto significa que de todas las diferentes topologías existentes en $\mathbb{F}^n$, sólo una está inducida por una norma, específicamente, la inducida por la norma euclidiana.

Teorema 1.2.8. *Cualesquiera dos normas en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes.*

Demostración. Sean X un espacio vectorial de dimensión finita y $\{e_1 \dots, e_n\}$ una base para X. Dada $x \in X$, la expresamos como $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ con $x_i \in \mathbb{F}$ y definimos

$$\|x\|_* := \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} .$$

La función $\|\cdot\|_*$ es una norma en X. Denotemos por $X_* := (X, \|\cdot\|_*)$ al espacio X provisto de esta norma. Entonces la función $\phi\colon \mathbb{F}^n \to X_*$ dada por

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

es una isometría, considerando a $\mathbb{F}^n$ dotado con la norma euclideana. Por lo tanto, ϕ es una función continua. Notemos que si $S = \{x \in X\colon \|x\|_* = 1\}$ y $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{F}^n\colon \|x\| = 1\}$ entonces $S = \phi\left[\mathbb{S}^{n-1}\right]$. Como $\mathbb{S}^{n-1}$ es compacto (pues es cerrado y acotado en $\mathbb{F}^n$) entonces S también es compacto.

Por otro lado, sea $\|\cdot\|$ cualquier otra norma en X. Para probar el teorema basta probar que $\|\cdot\|_*$ y $\|\cdot\|$ son normas equivalentes.

Sea $c_1 := \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2\right)^{1/2}$. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^n$ se sigue que si $x \in X$ se escribe como $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ entonces

$$\begin{aligned}
\|x\| &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \\
&= (x_1, \dots, x_n) \cdot (\|e_1\|, \dots, \|e_n\|) \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2\right)^{1/2} \\
&= c_1 \|x\|_* .
\end{aligned}$$

Como consecuencia de la desigualdad $\|x\| \leq c_1 \|x\|_*$ para toda $x \in X$, la función $f\colon X_* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|x\|$ es continua, pues para cualesquiera $x, y \in X$ se tiene que

$$| \, \|x\| - \|y\| \, | \leq \|x - y\| \leq c_1 \|x - y\|_* \, .$$

Dado que S es compacto, se sigue f restringida a S alcanza un mínimo. De este modo, existe $x_0 \in S$ tal que $\|x_0\| \leq \|x\|$ para toda $x \in S$. Por lo tanto,

$$\|x_0\| \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_*} \right\|$$

para toda $x \in X \setminus \{0\}$. Luego, $\|x_0\| \, \|x\|_* \leq \|x\|$ para toda $x \in X$. Haciendo $c_2 = \|x_0\|$, se obtiene de la definición que $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_*$ son equivalentes. □

Proposición 1.2.9. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y F un subespacio vectorial de X. Si F tiene dimensión finita entonces F es cerrado en X.*

Demostración. Supongamos que F es generado por el conjunto linealmente independiente $\{e_1, \ldots, e_r\}$ y que $\|e_k\| = 1$. Para cada $x \in F$, definamos

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{r} |\lambda_k|$$

donde $x = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k e_k$. La función $\|\cdot\|_1$ es una norma sobre F. Por el Teorema 1.2.8, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\|x\|_1 \leq c \|x\|$ para toda $x \in F$. Ahora, sea $(x_n)_n$ una sucesión en F convergente a un punto $x \in X$. Esta sucesión determina sucesiones $(\lambda_{k,n})_n$ en $\mathbb{F}$ tales que

$$x_n = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{k,n} e_k$$

para cada $k \in \{1, \ldots, r\}$. Estas sucesiones son de Cauchy, pues si $n, m \in \mathbb{N}$ entonces

$$\begin{aligned} |\lambda_{k,n} - \lambda_{k,m}| &\leq \sum_{j=1}^{r} |\lambda_{j,n} - \lambda_{j,m}| \\ &= \|x_n - x_m\|_1 \\ &\leq c \|x_n - x_m\| \, . \end{aligned}$$

De esta manera, si $\lambda_k = \lim_{n\to\infty} \lambda_{k,n}$ entonces

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{r} \lambda_k e_k &= \sum_{k=1}^{r} \lim_{n\to\infty} \lambda_{k,n} e_k \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{r} \lambda_{k,n} e_k \\ &= \lim_{n\to\infty} x_n \\ &= x\,.\end{aligned}$$

Así, $x \in F$. Por lo tanto, F es cerrado.

□

El siguiente ejemplo muestra que en la proposición anterior no se puede omitir que la dimensión de F sea finita.

Ejemplo 1.2.10. Sea $X = \ell^p$ con $p \in [1, \infty)$ y consideremos c_{00} el subespacio vectorial de ℓ^p conformado por las sucesiones eventualmente iguales a 0. Este es un subespacio vectorial de dimensión infinita, pues las sucesiones x^k dadas por $x_n^k = 0$ si $k \neq n$ y $x_k^k = 1$ forman un conjunto linealmente independiente en c_{00}.

Además, c_{00} es denso en ℓ^p. En efecto, sean $x \in \ell^p$ y $\epsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} < \epsilon\,.$$

Definamos $y \in c_{00}$ como $y_n = x_n$ para $n \leq N$ y $y_n = 0$ en otro caso. Entonces

$$\|x - y\|_p = \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} < \epsilon\,.$$

Esto prueba que c_{00} es denso en ℓ^p. Puesto que c_{00} es un subespacio vectorial propio, se sigue que c_{00} no es cerrado en ℓ^p.

Vale la pena destacar que si consideramos $p = \infty$ en el ejemplo anterior entonces no es cierto que c_{00} sea denso en ℓ^∞, pues si $x \in \ell^\infty$ es la sucesión constante 1 entonces

$$B(x, 1/2) \cap c_{00} = \emptyset. \tag{1.2}$$

Sin embargo, c_{00} sigue sin ser cerrado en este espacio, pues si $x^k \in c_{00}$ está dada por $x_n^k = \frac{1}{n}$ para $n \leq k$ y $x_n^k = 0$ para $k \leq n$ entonces la sucesión

$(x^k)_k$ converge en ℓ^∞ a la sucesión $y \in \ell^\infty$ dada por $y_n = \frac{1}{n}$, la cual no es un elemento de c_{00}.

El último resultado de esta sección caracteriza topológicamente a los espacios normados de dimensión finita. Para demostrarlo haremos uso de una importante herramienta del análisis funcional: el Lema de Riesz, debido al matemático húngaro Frigyes Riesz.

Lema 1.2.11 (Riesz)**.** *Sean X un espacio vectorial normado y Y, Z dos subespacios vectoriales de X. Supongamos que Y es cerrado y está contenido propiamente en Z. Entonces, para cualquier $\alpha \in (0,1)$ existe $z \in Z$ tal que $\|z\| = 1$ y*

$$\|z - y\| > \alpha \quad \forall y \in Y\,.$$

Demostración. Sea $\alpha \in (0,1)$. Fijemos $v \in Z \setminus Y$. Como Y es cerrado, entonces $d(v, Y) > 0$, donde

$$d(v,Y) = \operatorname{ínf}\{d(v,y) \colon y \in Y\}. \tag{1.3}$$

De esta manera, existe $y_0 \in Y$ tal que

$$d(v,Y) \leq \|v - y_0\| < \frac{d(v,Y)}{\alpha}\,.$$

Hagamos $z = c(v - y_0)$ donde $c = \frac{1}{\|v-y_0\|}$. Entonces $\|z\| = 1$. Además, si $y \in Y$ entonces

$$\begin{aligned}\|z - y\| &= \|c(v - y_0) - y\| \\ &= c\left\|v - (y_0 + c^{-1}y)\right\|\,.\end{aligned}$$

Como $y_0 + c^{-1}y \in Y$ se sigue que

$$\|z - y\| \geq c d(v,Y) = \frac{d(v,Y)}{\|v - y_0\|} > \alpha\,.$$

□

Teorema 1.2.12 (Riesz)**.** *Sea X un espacio vectorial normado. X tiene dimensión finita si y sólo si $\operatorname{cl}_X B(0,1)$ es compacta.*

Demostración. En primer lugar, supongamos que X tiene dimensión finita y sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base para X. Consideremos la función $\phi \colon \mathbb{F}^n \to X$ dada por

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i. \tag{1.4}$$

Esta función es una isometría biyectiva y, por lo tanto, un homeomorfismo. De esta forma,

$$\phi[B^n(0,1)] = B_X(0,1) \tag{1.5}$$

y, en consecuencia,

$$\phi[\mathrm{cl}_{\mathbb{F}^n} B^n(0,1)] = \mathrm{cl}_X B_X(0,1), \tag{1.6}$$

donde $B^n(0,1)$ denota a la bola unitaria en $\mathbb{F}^n$. Por el teorema de Heine-Borel, $\mathrm{cl}_{\mathbb{F}^n} B^n(0,1)$ es compacto. Luego, $\mathrm{cl}_X B_X(0,1)$ también es compacto.

Ahora supongamos que X tiene dimensión infinita y hagamos $B = \mathrm{cl}_X B(0,1)$. Elijamos $x_1 \in S$ arbitraria, donde S denota a la esfera unitaria en X y sea F_1 el subespacio propio de X generado por x_1. Por la Proposición 1.2.9, F_1 es cerrado. Por el Lema de Riesz (Lema 1.2.11) se sigue que existe $x_2 \in S$ tal que

$$\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}\,.$$

De manera recursiva, supongamos que tenemos $x_1, \ldots, x_n \in S$ tales que $\|x_i - x_j\| \geq 1/2$ si $i \neq j$. Sea F_n el subespacio de X generado por $x_1, \ldots, x_n$. Como X tiene dimensión infinita, F_n es un subespacio propio. Además, por la Proposición 1.2.9 se tiene que F_n es cerrado. Por el Lema de Riesz se obtiene $x_{n+1} \in S$ tal que $\|x_{n+1} - x\| \geq 1/2$ para toda $x \in F_n$. En particular, $\|x_{n+1} - x_i\| \geq 1/2$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.

De esta manera, $(x_n)_n$ es una sucesión en $S \subseteq B$ tal que si $n \neq m$ entonces

$$\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}\,.$$

Luego, $(x_n)_n$ es una sucesión en B que no tiene subsucesiones convergentes. Por lo tanto, B no es compacto. $\square$

Corolario 1.2.13. *Sea X un espacio vectorial normado. X tiene dimensión finita si y sólo si X es localmente compacto.*

Demostración. Supongamos que X tiene dimensión finita. Por el teorema de Heine-Borel, si $x \in X$ entonces $\mathrm{cl}_X B(x,1)$ es una vecindad compacta de x y, por lo tanto, X es localmente compacto.

Recíprocamente, supongamos que X es localmente compacto. Sea U una vecindad compacta del origen. Entonces existe $r > 0$ tal que

$$\mathrm{cl}_X B(0,r) \subseteq U\,.$$

Como U es compacto entonces $\mathrm{cl}_X\, B(0,r)$ también lo es. Además, la aplicación $x \mapsto \frac{x}{r}$ es un homeomorfismo de X en X y

$$\mathrm{cl}_X\, B(0,1) = \frac{1}{r}\,\mathrm{cl}_X\, B(0,r),$$

por lo que $\mathrm{cl}_X\, B(0,1)$ es compacta. Por el Teorema de Riesz (Teorema 1.2.12) se deduce que X tiene dimensión finita. $\square$

1.3. Productos y cocientes de espacios normados

Si X y Y son espacios normados entonces a su producto topológico se le puede dotar de una estructura de espacio normado. Si X es un espacio normado y $F \leq X$ es un subespacio de X, entonces puede construirse el espacio cociente X/F con una relación de equivalencia adecuada. Demostraremos que este espacio es normado siempre que F sea cerrado.

Recordemos que si X y Y son espacios topológicos entonces la topología producto en $X \times Y$ la topología generada por los abiertos básicos $U \times V$, donde U y V son abiertos en X y en Y, respectivamente. Si X y Y son espacios vectoriales normados entonces se define una norma sobre $X \times Y$ que induce la topología producto.

Proposición 1.3.1. *Sean X y Y espacios vectoriales normados. Entonces*

1. *Si definimos entrada a entrada una suma y producto escalar sobre el producto $X \times Y$, entonces $X \times Y$ es un espacio vectorial.*

2. *Las siguientes son normas sobre $X \times Y$ equivalentes entre sí:*

   a) $\|(x,y)\|_1 = \max\{\|x\|, \|y\|\}$.
   b) $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$.
   c) $\|(x,y)\|_3 = \|x\| + \|y\|$.

3. *Las 3 normas del inciso anterior generan la topología producto de $X \times Y$.*

4. *Una sucesión $(x_n, y_n)_n$ en $X \times Y$ es convergente (de Cauchy) si y sólo si $(x_n)_n$ y $(y_n)_n$ son sucesiones convergentes (de Cauchy) en X y Y respectivamente.*

Si bien las tres normas de la proposición anterior son ampliamente usadas en la literatura, en este texto cuando hablemos del espacio $X \times Y$ siempre nos referiremos implícitamente a la norma $\|\cdot\|_3$.

Por otro lado, recordemos que si X es un espacio topológico y $\sim$ es una relación de equivalencia sobre X, entonces al cociente $X/\sim$ se le dota de la topología cuyos abiertos son los conjuntos cuya unión es un abierto de X. Ésta topología es conocida como la topología cociente y se caracteriza por ser la topología más grande (en el sentido de la contención) que hace continua a la proyección $\pi\colon X \to X/\sim$ dada por $\pi(x) = [x]$.

Proposición 1.3.2. *Sean X un espacio normado y F un subespacio vectorial cerrado de X. Definamos la siguiente relación sobre X: $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{F}$. Entonces*

1. *La relación $\sim$ es de equivalencia en X.*

2. *Sea $X/F := X/\sim$. Las operaciones $[x] + [y] = [x + y]$ y $\lambda[x] = [\lambda x]$ sobre X/F están bien definidas y X/F es un espacio vectorial con estas operaciones.*

3. *La función*
$$\|[x]\|_{X/F} = \text{ínf}\{\|y\| : y - x \in F\}$$
está bien definida y es una norma sobre X/F.

4. *La norma $\|\cdot\|_{X/F}$ genera la topología cociente inducida por $\sim$ en X/F.*

Cuando el espacio X/F esté claro por el contexto, escribiremos simplemente $\|[x]\|$ y no $\|[x]\|_{X/F}$.

Demostración. Sólo demostraremos los últimos dos incisos, ya que los primeros se siguen fácilmente de las definiciones.

Veamos que $\|\cdot\|_{X/F}$ está bien definida. Si $[x_1] = [x_2]$ entonces $x_1 - x_2 \in F$ y $x_1 - y = (x_1 - x_2) + (x_2 - y)$, por lo que $x_1 - y \in F$ si y sólo si $x_2 - y \in F$. De esta manera,

$$\{\|x_1 - y\| : y \in F\} = \{\|x_2 - y\| : y \in F\}.$$

y, en consecuencia, $\|[x_1]\| = \|[x_2]\|$. Ahora veamos que $\|\cdot\|_{X/F}$ es una norma:

1. Puesto que $\|[0]\| \leq \|0-0\| = 0$ entonces $\|[0]\| = 0$. Recíprocamente, si $\|[x]\| = 0$ entonces existe una sucesión $(x_n)_n$ en X tal que $x_n - x \in F$ y $\|x_n\| \to 0$ en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, $x_n \to 0$ en X. De esta manera,
$$\lim_{n\to\infty} (x - x_n) = x\,.$$
Como F es cerrado, se sigue que $x \in F$. Luego, $[x] = [0]$.

2. Sean $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Consideremos $y \in X$ tal que $y - x \in F$. Entonces $\lambda x - \lambda y \in F$, por lo que $\|\lambda[x]\| \leq |\lambda|\,\|y\|$. Tomando ínfimo del lado derecho obtenemos $\|\lambda[x]\| \leq |\lambda|\,\|[x]\|$. Análogamente, sea $y \in \lambda[x]$. Entonces $\frac{1}{\lambda} y \in [x]$. Así, $\|[x]\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\,\|y\|$ o, equivalentemente, $|\lambda|\,\|[x]\| \leq \|y\|$. Tomando ínfimo del lado derecho obtenemos $|\lambda|\,\|[x]\| \leq \|\lambda[x]\|$. Por lo tanto, $\|\lambda[x]\| = |\lambda|\,\|[x]\|$. El caso $\lambda = 0$ es trivial, pues $0[x] = [0]$.

3. Sean $x, y \in X$ y $z_1, z_2 \in X$ tales que $x - z_1, y - z_2 \in F$. Entonces $(x+y) - (z_1 + z_2) \in F$. Por lo tanto,
$$\|[x] + [y]\| = \|[x+y]\| \leq \|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|$$
Tomando ínfimos del lado derecho se sigue que $\|[x]+[y]\| \leq \|[x]\| + \|[y]\|$.

Por otro lado, sean τ_1 la topología cociente de X/F y τ_2 la topología generada por la norma $\|\cdot\|_{X/F}$. Primero consideremos la proyección $\pi\colon X \to (X/F, \tau_1)$ dada por $\pi(x) = [x]$. Para cualesquiera $x, y \in X$ se tiene que
$$\begin{aligned}\|\pi(x) - \pi(y)\|_{X/F} &= \|[x] - [y]\|_{X/F}\\ &= \|[x-y]\|_{X/F}\\ &\leq \|x - y\|_X\,,\end{aligned}$$
por lo que la función π es continua. Dado que τ_2 es la topología más grande que hace continua a esta función, se sigue que $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

Finalmente, veamos que $\tau_2 \subseteq \tau_1$. Sean $U \in \tau_2$ y $[x] \in U$. Como U es abierto en la topología cociente, entonces $\bigcup U$ es un abierto de X; dado que $x \in \bigcup U$, se tiene que existe $r > 0$ tal que $B_X(x, r) \subseteq \bigcup U$. De esta manera, sea $[y] \in B_{X/F}([x], r)$. Entonces
$$\|[x-y]\|_{X/F} = \|[x] - [y]\|_{X/F} < r$$

y, en consecuencia, existe $z \in X$ tal que $(x-y)-z \in F$ y $\|z\| < r$. Notemos que

$$\|x-(x-z)\|_X = \|z\| < r$$

por lo que $x - z \in \bigcup U$. Luego, existe $[w] \in U$ tal que $x - z \in [w]$, es decir, $(x-z)-w \in F$. Pero también se tiene que $(x-y)-z \in F$. Restando estos vectores obtenemos

$$((x-z)-w)-((x-y)-z) = y - w \in F\,.$$

Esto implica que $[y] = [w]$ y, en consecuencia, que $[y] \in U$, probando que U es abierto de τ_1. □

En lo sucesivo, a las clases de equivalencia $[x]$ en X/F las denotaremos por $x + F$. Notemos que en la demostración anterior usamos la hipótesis de que F sea cerrado únicamente para probar que si $\|[x]\| = 0$ entonces $[x] = 0$. Si prescindimos de la hipótesis de que F es cerrado entonces la función $\|\cdot\|_{X/F}$ no será una norma, pero cumplirá la definición de lo que llamaremos una seminorma. Las seminormas no inducen métricas pero sí pseudométricas y, por lo tanto, topologías. De esta manera, si sólo nos interesara estudiar la topología del espacio vectorial X/F entonces no necesitaríamos restringirnos al caso en el que F es cerrado. Vale la pena destacar que la prueba del inciso 4 de la proposición anterior también se puede aplicar a este caso más general para probar que la topología de X/F coincide con la topología cociente.

1.4. Aplicaciones lineales acotadas

A partir de este momento, $L(X,Y)$ denotará al conjunto de transformaciones lineales entre dos espacios vectoriales X y Y. En esta sección definiremos el subconjunto $B(X,Y)$ de $L(X,Y)$ conformado por las funciones lineales acotadas cuando X y Y son espacios normados. En el resto del texto nos dedicaremos a estudiar este objeto bajo distintas condiciones sobre X y Y.

Definición 1.4.1. Sean X y Y dos espacios vectoriales normados y $T\colon X \to Y$ una aplicación lineal.

1. Diremos que T es una aplicación lineal acotada si el conjunto $T\left[\mathrm{cl}_X\, B(0,1)\right]$ es acotado en Y.

2. Si T es una aplicación lineal acotada definimos

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|$$

Al conjunto de aplicaciones lineales acotadas de X en Y lo denotamos por $B(X,Y)$.

Notemos que una función lineal acotada T de X en Yno es acotada en el sentido usual de que $T[X]$ sea un conjunto acotado en Y, sino que el concepto al que nos referimos es de una naturaleza local. Esto queda plasmado en la siguiente proposición.

Proposición 1.4.2. *Sean X y Y dos espacios normados y $T \in L(X,Y)$. $T \in B(X,Y)$ si y sólo si siempre que U es una vecindad acotada del origen se tiene que $T[U]$ es un conjunto acotado en Y.*

La siguiente proposición nos será muy útil para determinar cuándo una aplicación lineal es acotada.

Proposición 1.4.3. *Sean X, Y dos espacios normados y $T \in L(X,Y)$. Entonces*

1. *Son equivalentes:*
   - a) $T \in B(X,Y)$.
   - b) $\sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} < \infty$
   - c) *Existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\|T(x)\| \leq M \|x\|$ para toda $x \in X$.*
2. *Si $T \in B(X,Y)$ entonces*

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \text{ínf}\{M \in \mathbb{R} \colon \forall x \in X \; \|T(x)\| \leq M \|x\|\}.$$

Ejemplo 1.4.4. 1. Sean $X = (C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$, $Y = \mathbb{R}$ y $T \colon X \to Y$ dada por $T(f) = \int_0^1 f$. Entonces para toda $f \in C([0,1])$ se tiene que

$$|T(f)| \leq \int_0^1 |f| \leq \|f\|_\infty .$$

Más aún, si $f \equiv 1$ entonces $\|f\|_\infty = 1$ y $|T(f)| = 1$, por lo que $1 \leq \|T\|$. Por lo tanto, $\|T\| = 1$.

2. Sean $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $X = (C^1([0,1], \|\cdot\|_\infty)$, $Y = (C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ y $T\colon X \to Y$ dada por $T(f)(x) = f'(x)$. Si f_n está dada por $f_n(x) = x^n$ entonces $f_n'(x) = nx^{n-1}$. De esta manera, $\|f_n\|_\infty = 1$ y, sin embargo, $\|f_n'\|_\infty = n$. Por lo tanto, T no está acotada en $\mathrm{cl}_X\, B(0,1)$ y, en consecuencia, $T \notin B(X,Y)$.

El espacio $L(X,Y)$ es un espacio vectorial en sí mismo y $B(X,Y)$ es un subespacio vectorial de éste. Como es de esperar, la aplicación $T \mapsto \|T\|$ define una norma en $B(X,Y)$.

Proposición 1.4.5. *Sean X y Y dos espacios normados. El espacio $B(X,Y)$ con la aplicación $T \mapsto \|T\|$ es un espacio vectorial normado.*

En la sección anterior caracterizamos topológicamente a los espacios normados de dimensión finita. En esta sección los caracterizamos por las aplicaciones lineales acotadas que se pueden definir sobre ellos.

Proposición 1.4.6. *Sea X un espacio normado. X tiene dimensión finita si y sólo si para cualquier espacio normado Y se tiene que $B(X,Y) = L(X,Y)$.*

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que X tiene dimensión n. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base para X. La función $\|\sum_{i=1}^n x_i e_i\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ define una norma sobre X. Por el Teorema 1.2.8, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\|x\|_1 \leq c\,\|x\|$ para toda $x \in X$. De esta manera, para toda $x \in X$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|T(x)\| &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i T(e_i) \right\| \\
&= \sum_{i=1}^n |x_i|\, \|T(e_i)\| \\
&\leq \left(\max_{1\leq i\leq n} \|T(e_i)\| \right) \sum_{i=1}^n |x_i| \\
&= \left(\max_{1\leq i\leq n} \|T(e_i)\| \right) \|x\|_1 \\
&\leq c \left(\max_{1\leq i\leq n} \|T(e_i)\| \right) \|x\| \,.
\end{aligned}$$

Por el inciso c) de la Proposición 1.4.3, concluimos que T es acotada.

$\Longleftarrow$) Supongamos que X tiene dimensión infinita. Entonces existe un conjunto $\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ linealmente independiente tal que $\|x_n\| = 1$. Consideremos $Y = \ell^1$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Definamos $T(x_n) \in \ell^1$ como

$$T(x_n)(k) = \frac{n}{2^k} \,.$$

Nótese que

$$\|T(x_n)\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |T(x_n)(k)| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{2^k} = n\,.$$

Como $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es linealmente independiente entonces existe una aplicación lineal $T\colon X \to Y$ que extiende a la aplicación $x_n \mapsto T(x_n)$. Como $\|x_n\| = 1$ y $\|T(x_n)\|_1 = n$, entonces T no está acotada en $\mathrm{cl}_X B(0,1)$. Así, $T \notin B(X,Y)$. $\square$

Terminamos esta sección con un resultado que justifica el estudio de las transformaciones lineales acotadas.

Teorema 1.4.7. *Sean X y Y dos espacios normados, y $T \in L(X,Y)$. Son equivalentes*

1. *$T \in B(X,Y)$*
2. *T es continua en 0.*
3. *T es continua.*
4. *T es Lipschitz; es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\|T(x) - T(y)\| \leq M\,\|x - y\|$ para cualesquiera $x, y \in X$.*

1.5. Espacios de Banach

Una clase importante de espacios normados son aquellos cuya métrica inducida por la norma es completa. Estos espacios reciben el nombre de espacios de Banach. En esta sección veremos que la propiedad de ser un espacio de Banach es invariante bajo homeomorfismos lineales, que cualquier espacio normado se puede encajar de manera densa e isométrica en un espacio de Banach y algunos ejemplos destacados de espacios de Banach.

Definición 1.5.1. Un espacio de Banach es un espacio normado cuya métrica es completa.

Es un hecho conocido que, en general, la propiedad de ser un espacio métrico completo no es una propiedad topológica; es decir, no necesariamente se preserva bajo homeomorfismos. Sin embargo, los homeomorfismos lineales entre espacios normados sí preservan la propiedad de ser un espacio de Banach.

Proposición 1.5.2. *Sean X, Y espacios normados y $T\colon X \to Y$ un homeomorfismo lineal. Si X es un espacio de Banach, entonces Y también lo es.*

Demostración. Supongamos que X es de Banach. Sean $(y_n)_n$ una sucesión de Cauchy en Y y $\epsilon > 0$. La función T^{-1} es lineal y, dado que T es un homeomorfismo, también es continua. De esta manera

$$\left\|T^{-1}(y_n) - T^{-1}(y_m)\right\| \leq \left\|T^{-1}\right\| \|y_n - y_m\|$$

para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, por lo que la sucesión $\left(T^{-1}(y_n)\right)_n$ es una sucesión de Cauchy en X. Como X es de Banach, existe $x \in X$ tal que $T^{-1}(y_n) \to x$. Puesto que T es continua, se sigue que $y_n \to T(x)$. Por lo tanto, Y es un espacio de Banach. $\square$

De manera más general, sean X un espacio de Banach, Y un espacio topológico y $\varphi\colon X \to Y$ un homeomorfismo entre ellos. Mediante φ se puede inducir en Y una estructura de espacio normado que haga de φ un homeomorfismo lineal, por lo cual, dicha estructura hace de Y un espacio de Banach. Los detalles de este hecho escapan a los objetivos de este texto.

Corolario 1.5.3. *Sea $(X, \|\cdot\|_1)$ un espacio de Banach. Si $\|\cdot\|_2$ es una norma equivalente a $\|\cdot\|_1$ entonces $(X, \|\cdot\|_2)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Si $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son normas equivalentes entonces la función identidad $id\colon (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ es un homeomorfismo lineal. Por la Proposición 1.5.2 se sigue que $(X, \|\cdot\|_2)$ es un espacio de Banach. $\square$

Proposición 1.5.4. *Sean X un espacio de Banach y Y un subespacio de X. Y es un espacio de Banach si y sólo si Y es cerrado en X.*

Demostración. Y es un subconjunto de un espacio métrico completo. Por lo tanto, Y es completo si y sólo si es cerrado en X. $\square$

Ejemplo 1.5.5.

1. $\mathbb{F}^n$ es un espacio de Banach para toda $n \in \mathbb{N}$.

2. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $p \in [1, \infty]$. El espacio de Lebesgue $L^p(X)$ es un espacio de Banach. Como consecuencia de esto, tenemos que $L^p(\mathbb{R}^n)$ y ℓ^p son espacios de Banach.

3. Si consideramos $C([0,1])$ como subespacio de $L^p([0,1])$ para $p \in [1,\infty)$ entonces $C([0,1])$ es denso en L^p. La existencia de funciones Lebesgue-integrables que no son equivalentes a ninguna función continua implica que este espacio no es cerrado en L^p. Por lo tanto, $(C([0,1]), \|\cdot\|_p)$ no es un espacio de Banach para ninguna $p \in [1,\infty)$.

4. El espacio de sucesiones eventualmente 0, c_{00}, no es cerrado en ℓ^p para ninguna $p \in [1,\infty]$. Por lo tanto, $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$ no es un espacio de Banach para ninguna $p \in [1,\infty]$.

5. Si $\mathcal{A}$ es un conjunto de índices no vacío y Y es un espacio de Banach entonces $\ell^\infty_{\mathcal{A}}(Y)$ es un espacio de Banach.

6. Si X es un conjunto no vacío entonces el espacio de funciones acotadas $(\mathcal{B}(X,\mathbb{F}), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

7. Si X es un espacio topológico entonces $C_b(X,\mathbb{F})$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{B}(X,\mathbb{F})$, por lo que es un espacio de Banach. En particular, $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

8. El espacio de funciones clase C^1, $(C^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ equipado de la norma del supremo no es un espacio de Banach, pues no es cerrado en $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

La siguiente es una caracterización muy útil de los espacios de Banach.

Proposición 1.5.6. *Sea X un espacio vectorial normado. X es un espacio de Banach si y sólo si toda serie absolutamente convergente es convergente en X; es decir, para toda sucesión $(x_n)_n$ en X, si $\sum_n \|x_n\| < \infty$ entonces la serie $\sum_n x_n$ converge en X.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio de Banach. Sean $(x_n)_n$ una sucesión en X tal que $\sum_n \|x_n\| < \infty$ y $\epsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N}^\infty \|x_n\| < \epsilon$. De esta manera, si $n > m > N$ entonces

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_n - \sum_{k=1}^m x_n \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n x_n \right\| \le \sum_{k=m+1}^n \|x_n\| \le \sum_{k=N}^\infty \|x_n\| < \epsilon\,.$$

Por lo tanto, la sucesión de sumas parciales $(\sum_{k=1}^n x_k)_n$ es una sucesión de Cauchy en X. Como X es de Banach, concluimos que la serie $\sum_n x_n$ converge en X.

Recíprocamente, sea $(x_n)_n$ una sucesión de Cauchy en X. Inductivamente se puede construir una subsucesión $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ tal que

$$\left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\| < 2^{-k}. \tag{1.7}$$

Esto implica que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\|$ es convergente en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ es convergente en X. De esta manera,

$$\begin{aligned} x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) &= \lim_{m\to\infty}\left(x_{n_1} + \sum_{k=1}^{m}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})\right) \\ &= \lim_{m\to\infty}\left(x_{n_1} + (x_{k_{m+1}} - x_{n_1})\right) \\ &= \lim_{m\to\infty} x_{k_m}\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x_{n_k})_k$ converge en X. Sin embargo, dado que $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy, la convergencia de esta subsucesión implica la convergencia de toda la sucesión. En consecuencia, X es un espacio de Banach. □

Proposición 1.5.7. *Si X y Y son espacios de Banach entonces $X \times Y$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $(x_n, y_n)_n$ una sucesión en $X \times Y$. Como $\|x_n\|, \|y_n\| \leq \|x_n\| + \|y_n\| = \|(x_n, y_n)\|$, se sigue que $(x_n)_n$ y $(y_n)_n$ son sucesiones de Cauchy en X y Y respectivamente. Sean $x \in X$ y $y \in Y$ los límites de $(x_n)_n$ y $(y_n)_n$ respectivamente. Entonces

$$\|(x, y) - (x_n, y_n)\| = \|x - x_n\| + \|y - y_n\|\ .$$

Por ende, $(x_n, y_n) \to (x, y)$ en $X \times Y$. Por lo tanto, $X \times Y$ es un espacio de Banach. □

Proposición 1.5.8. *Si X es un espacio de Banach y F es un subespacio vectorial cerrado de X entonces el espacio cociente X/F es un espacio de Banach.*

Demostración. Sean X un espacio de Banach y F un subespacio vectorial cerrado de X. Denotemos por π a la proyección $x \mapsto [x]$. Dado que, por la Proposición 1.3.2, X/F está dotado de la topología cociente, tenemos que π es continua. Usaremos la Proposición 1.5.6 para probar que X/F es un espacio de Banach. Sea $(x_n)_n$ una sucesión en X tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|\pi(x_n)\|_{X/F} < \infty$. Puesto que

$$\|\pi(x_n)\|_{X/F} = \inf\{\|x_n - y\| : y \in F\}, \tag{1.8}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ se puede elegir $y_n \in F$ tal que

$$\|\pi(x_n)\|_{X/F} \leq \|x_n + y_n\| \leq \|\pi(x_n)\|_{X/F} + 2^{-n} .$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n + y_n\| < \infty$. Como X es un espacio de Banach esto implica que $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n)$ converge en X. Finalmente, de la continuidad de π¸ y del hecho de que $y_n \in F$ se sigue que

$$\pi\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n + y_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi(x_n),$$

por lo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \pi(x_n)$ es convergente en X/F. Por lo tanto, X/F es un espacio de Banach. $\square$

Proposición 1.5.9. *Sean X y Y dos espacios normados. Si Y es un espacio de Banach entonces el espacio de aplicaciones lineales acotadas $B(X,Y)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $(T_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $B(X,Y)$. Consideremos $x \in X$. La desigualdad

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \, \|x\|$$

muestra que la sucesión $(T_n(x))_n$ es de Cauchy en Y. Como Y es completo, $(T_n(x))_n$ converge en Y. De esta manera, definamos $T\colon X \to Y$ mediante

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) .$$

Como cada $T_n \in L(X,Y)$ entonces $T \in L(X,Y)$.

Por otro lado, sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $n, m > N$, $\|T_n - T_m\| < \epsilon$. Sean $m, n > N$ y $x \in X$. Entonces

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \, \|x\| < \epsilon \|x\| .$$

De esta manera,

$$\|T_n(x) - T(x)\| = \left\|T_n(x) - \lim_{k\to\infty} T_k(x)\right\| = \lim_{k\to\infty} \|T_n(x) - T_k(x)\| \leq \epsilon \|x\| .$$

Por un lado, esta desigualdad prueba que $T_n - T$ es una aplicación acotada siempre que $n > N$. Como $T = T_n - (T_n - T)$ se sigue que $T \in B(X,Y)$. Por otro lado, dicha desigualdad también prueba que $\|T_n - T\| \leq \epsilon$ para toda $n > N$. Esto implica que $T_n \to T$ en $B(X,Y)$. Por lo tanto, $B(X,Y)$ es un espacio de Banach. $\square$

Consideremos un espacio métrico (X, d_1). Si bien X puede no ser completo, la completación de X es otro espacio métrico $(\hat{X}, d_2)$ que sí es completo, que contiene a X como un subconjunto denso y tal que la inclusión $i\colon (X, d_1) \hookrightarrow (X, d_2)$ es una isometría. Una construcción rigurosa de la completación de un espacio métrico se encuentra en el Teorema 1.6-2 de [9].

Es importante aclarar que en la construcción realizada en [9], los elementos de la completación $\hat{X}$ son clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy en X, donde algunas clases de equivalencia se identifican con los puntos de X y otras con los "hoyos"del espacio. De esta manera, con todo rigor, no tiene sentido decir que $X \subseteq \hat{X}$. Sin embargo, si una clase de equivalencia $[(x_n)_n]$ se identifica con un punto $x \in X$, podemos borrar a esta clase y reemplazarla con el punto x. De esta manera, se puede construir una completación de X que sí contenga a X como subconjunto (algunos de sus puntos serán puntos de X mientras que el resto serán clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy que no converjan en X). Ésta es la completación que tendremos en mente para la siguiente proposición.

Proposición 1.5.10. *Sea $(X, \|\cdot\|_1)$ un espacio vectorial normado. Entonces X se puede encajar de manera densa e isométrica en un espacio de Banach; es decir, existe un espacio de Banach $(\hat{X}, \|\cdot\|_2)$ tal que*

1. *$X \subseteq \hat{X}$.*
2. *X es denso en $\hat{X}$.*
3. *Para toda $x \in X$, $\|x\|_1 = \|x\|_2$.*

Demostración. Sabemos que existe un espacio métrico completo $(\hat{X}, d)$ tal que X está encajado de manera densa e isométrica en $\hat{X}$. Veamos que podemos dotar a $\hat{X}$ de una estructura de espacio normado que sea compatible con su estructura de espacio métrico. Para cada $x \in \hat{X}$, tomemos una sucesión $(x_n)_n$ en X tal que $x_n \to x$ en $\hat{X}$. Entonces para cualesquiera $x, y \in \hat{X}$ y $\lambda \in F$ se define

$$x + y = \lim_{n\to\infty} x_n + y_n \quad \text{y} \quad \lambda x = \lim_{n\to\infty} \lambda x_n$$

donde los límites están tomados sobre $\hat{X}$. Se puede demostrar que estas operaciones están bien definidas; es decir, que los límites involucrados efectivamente existen y que no dependen de las sucesiones que se tomen. Así mismo, se puede ver que estas operaciones hacen de $\hat{X}$ un espacio vectorial. Notemos que si $x \in \hat{X}$ entonces la desigualdad $|\,\|x_n\|_1 - \|x_m\|_1\,| \leq \|x_n - x_m\|_1$ implica que la sucesión $(\|x_n\|_1)_n$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, podemos definir

$$\|x\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_1$$

Una vez más, se puede ver que este límite no depende de la sucesión que se tome. Además, $\|\cdot\|_2$ define una norma sobre X y $\|x\|_1 = \|x\|_2$ para toda $x \in X$.

Ahora veamos que la distancia d coincide con la métrica inducida por $\|\cdot\|_2$. Sean $x, y \in \hat{X}$. Entonces

$$d(x,y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\|_1 = \|x - y\|_2$$

Por un lado, esto implica que la topología de $(\hat{X}, \|\cdot\|_2)$ es la misma que $(\hat{X}, d)$, por lo que X es denso en $(\hat{X}, \|\cdot\|_2)$. Por otro lado, dado que d es completa, se sigue que $(\hat{X}, \|\cdot\|_2)$ es un espacio de Banach. $\square$

Capítulo 2

Teoremas fundamentales en espacios de Banach

Este capítulo está dedicado a estudiar los teoremas de Hahn-Banach, de la aplicación abierta, de la gráfica cerrada y de Banach-Steinhaus (también conocido como principio de acotación uniforme). Éstos teoremas se conocen como los teoremas fundamentales del análisis funcional. Clásicamente, el teorema de la gráfica cerrada se presenta como una consecuencia del teorema de la aplicación abierta; sin embargo, tanto éstos dos teoremas como el de Banach-Steinhaus son equivalentes entre sí. Además, los tres teoremas suelen ser demostrados a partir del teorema de la categoría de Baire (por ejemplo, se puede consultar la prueba en [9]), pero en realidad este teorema no es necesario para probarlos. En este capítulo se presentan tanto las pruebas clásicas de los teoremas fundamentales del análisis funcional como las equivalencias entre ellos, así como una demostración del teorema de Banach-Steinhaus que no recurre al teorema de la categoría de Baire.

2.1. Teorema de Hahn-Banach

El teorema de Hahn-Banach permite extender cierta clase de funcionales lineales definidos sobre un subespacio de un espacio vectorial a todo el espacio. Si bien este teorema no está formulado en espacios de Banach, tiene una aplicación fundamental en el estudio de estos espacios, pues permite asegurar que en un espacio vectorial normado existe una gran variedad de funcionales lineales continuos. La prueba del teorema de Hahn-Banach que vamos a presentar está basada en la prueba ofrecida en [9] y se fundamenta en el lema de Zorn; sin embargo, es posible demostrar este teorema recurriendo a una versión más débil del axioma de elección: el teorema del ultrafiltro. Ésta demostración se puede consultar en [10].

Definición 2.1.1. Sean X un espacio vectorial y $p\colon X \to \mathbb{R}$. Diremos que p es una forma sublineal sobre X si

1. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ para cualesquiera $x, y \in X$.
2. $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ para cualesquiera $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Recordemos que si X es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{F}$, un funcional lineal sobre X es una transformación $\mathbb{F}$-lineal con dominio X y contradominio $\mathbb{F}$. El siguiente teorema da un criterio bajo el cual un funcional lineal definido sobre un subespacio se puede extender a todo el espacio.

Teorema 2.1.2 (Hahn-Banach)**.** *Sean X un espacio vectorial real y p una forma sublineal sobre X. Sean Z un subespacio vectorial de X y f un funcional lineal dominado por p en Z; es decir, $f \leq p$ en Z. Entonces f tiene una extensión lineal $\hat{f}\colon X \to \mathbb{R}$ que está dominada por p en X; es decir, $\hat{f}$ coincide con f en Z y $\hat{f} \leq p$ en X.*

Demostración. Sea E el conjunto de extensiones lineales de f definidas sobre algún subespacio vectorial de X que contenga a Z y dominadas por p en su dominio. Notemos que $f \in E$, por lo que $E \neq \emptyset$. Dada $g \in E$, denotaremos por $\operatorname{dom} g$ al dominio de g (que es un subespacio vectorial de X). Dadas $h, g \in E$, diremos que $h \leq g$ si y sólo si h es extendida por g; es decir, si $\operatorname{dom} h \subseteq \operatorname{dom} g$ y g coincide con h en $\operatorname{dom} h$. Esta relación define un orden parcial sobre E.

Sea $C \subseteq E$ una cadena en $(E, \leq)$. Sea $W = \bigcup_{g \in C} \operatorname{dom} g$. Como C es una cadena se tiene que si $g, h \in C$ entonces $\operatorname{dom} g \subseteq \operatorname{dom} h$ o $\operatorname{dom} h \subseteq \operatorname{dom} g$. Puesto que $\operatorname{dom} g$ es un subespacio vectorial de X para toda $g \in C$, se sigue que W es un subespacio vectorial de X. Además, si se define $h\colon W \to \mathbb{R}$ como $h(w) = g(w)$ si $w \in \operatorname{dom} g$, entonces h es una función bien definida, es lineal, está dominada por p y es una extensión de f y de cualquier función en C. Por lo tanto, h es una cota superior de C.

Por el Lema de Zorn, se sigue que E tiene un elemento maximal. Sea $\hat{f}$ un elemento maximal de E. Por la definición de E, $\hat{f}$ es una extensión lineal de f dominada por p en su dominio.

Veamos que $\operatorname{dom}\hat{f} = X$. Supongamos que esto no es cierto. Así pues, sea $y_1 \in X \setminus \operatorname{dom}\hat{f}$ denotemos por Y al subespacio de X generado por $\operatorname{dom}\hat{f} \cup \{y_1\}$. Nótese que $y_1 \neq 0$, por lo que cualquier $x \in Y$ puede ser representado de manera única como $x = y + \alpha y_1$ para alguna $y \in \operatorname{dom}\hat{f}$ y alguna $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dada una $c \in \mathbb{R}$ arbitraria, defínase un funcional lineal $h\colon Y \to \mathbb{R}$ como

$$h(y + \alpha y_1) = \hat{f}(y) + \alpha c.$$

Nótese que h es una extensión de $\hat{f}$ cuyo dominio contiene propiamente al dominio de $\hat{f}$. De esta manera, para llegar a una contradicción basta demostrar que se puede elegir $c \in \mathbb{R}$ tal que h esté dominada por p, pues de esta manera se tendría que $h \in E$ y $\hat{f} < h$, contradiciendo la maximalidad de $\hat{f}$.

Para encontrar dicha c, considérense $y, z \in \operatorname{dom}\hat{f}$ arbitrarios. Entonces

$$\begin{aligned}\hat{f}(y) - \hat{f}(z) &= \hat{f}(y - z)\\ &\leq p(y - z)\\ &\leq p(y + y_1) + p(-y_1 - z).\end{aligned}$$

Sumando $-\hat{f}(y) - p(-y_1 - z)$ de ambos lados se obtiene que

$$-p(-y_1 - z) - \hat{f}(z) \leq p(y + y_1) - \hat{f}(y).$$

Si definimos

$$m_0 = \sup_{z \in \operatorname{dom}\hat{f}} -p(-y_1 - z) - \hat{f}(z)$$

y

$$m_1 = \inf_{z \in \operatorname{dom}\hat{f}} p(z + y_1) - \hat{f}(z)$$

se sigue que $m_0 \leq m_1$. De esta manera, tómese $c \in [m_0, m_1]$. Entonces

$$-p(-y_1 - z) - \hat{f}(z) \leq c \quad \forall z \in \operatorname{dom}\hat{f} \tag{2.1}$$

y

$$c \leq p(z + y_1) - \hat{f}(z) \quad \forall z \in \operatorname{dom}\hat{f}. \tag{2.2}$$

Veamos ahora que

$$h(y + \alpha y_1) \leq p(y + \alpha y_1)$$

para toda $y \in \operatorname{dom} \hat{f}$ y para $\alpha < 0$. Sea $x = y + \alpha y_1$ con $y \in \operatorname{dom} \hat{f}$ y $\alpha < 0$. Haciendo $z = \alpha^{-1} y$ en la ecuación 2.1 se tiene

$$-p\left(-y_1 - \frac{1}{\alpha} y\right) - \hat{f}\left(\frac{1}{\alpha} y\right) \leq c.$$

Multiplicando por $-\alpha$

$$\alpha p\left(-y_1 - \frac{1}{\alpha} y\right) + \hat{f}(y) \leq -\alpha c.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} h(x) &= \hat{f}(y) + \alpha c \\ &\leq -\alpha p\left(-y_1 - \frac{1}{\alpha} y\right) \\ &= p(\alpha y_1 + y) \\ &= p(x). \end{aligned}$$

Para $\alpha = 0$ se tiene que $y + \alpha y_1 \in \operatorname{dom} \hat{f}$ para toda $y \in \operatorname{dom} \hat{f}$ y, por lo tanto, $h(y + \alpha y_1) \leq p(y + \alpha y_1)$.

Ahora supongamos que $x = y + \alpha y_1$ con $y \in \operatorname{dom} f$ y $\alpha > 0$. Usemos la ecuación 2.2 con $z = \alpha^{-1} y$ para obtener

$$c \leq p\left(\frac{1}{\alpha} y + y_1\right) - \hat{f}\left(\frac{1}{\alpha} y\right).$$

Multiplicando por α se sigue que

$$\alpha c \leq p(y + \alpha y_1) - \hat{f}(y).$$

Por ende,

$$h(x) = \hat{f}(y) + \alpha c \leq p(x).$$

De esta manera, $h(x) \leq p(x)$ para toda $x \in Y$. Como ya se dijo, esto prueba que $g \in E$ y que $\hat{f} < g$, contradiciendo la maximalidad de $\hat{f}$. Por lo tanto, $\operatorname{dom} \hat{f} = X$, lo que demuestra que $\hat{f}$ es la extensión buscada. $\square$

Si bien el teorema anterior se enuncia únicamente para espacios reales, H. F. Bohnenblust y A. Sobczyk formularon en [1] una generalización que incluye a los espacios complejos.

Teorema 2.1.3 (Hahn-Banach generalizado)**.** *Sean X un espacio vectorial (real o complejo) y $p\colon X \to \mathbb{R}$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$*

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \tag{2.3}$$

y para cualquier $\alpha \in \mathbb{F}$ se satisface que

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x). \tag{2.4}$$

Además, sean Z un subespacio vectorial de X y f un funcional lineal sobre Z cuyo módulo esté dominado por p. Entonces existe un funcional lineal $\hat{f}$ sobre X que extiende a f y cuyo módulo está dominado por p en X.

Demostración. **a)** Supongamos que X es un espacio real. Dado que $|f|$ está dominado por p se sigue que f está dominada por p. Así, el teorema de Hahn-Banach para espacios reales asegura que existe una funcion lineal $\hat{f}$ definida sobre X que extiende a f y que está dominada por p. De esto se sigue que

$$-\hat{f}(x) = \hat{f}(-x) \leq p(-x) = p(x)$$

para toda $x \in X$. Por lo tanto, $-p(x) \leq \hat{f}(x)$ para toda $x \in X$. Por ende, $|\hat{f}|$ está dominado por p en X.

b) Ahora supongamos que X es un espacio complejo. Entonces Z también es un espacio complejo y f asume valores complejos. De esta manera, podemos suponer que $f = f_1 + if_2$ donde f_1 y f_2 son funciones definidas sobre Z, aditivas y toman valores reales. Nótese que la desigualdad $f_1 \leq |f|$ implica que f_1 está dominada por p. De esta forma, si consideramos a X y Z como espacios reales se sigue, por el teorema de Hahn-Banach, que existe una función $\hat{f}_1$, real, $\mathbb{R}$-lineal y definida sobre X que extiende a f_1 y que está dominada por p.

Por otro lado, se cumple que para toda $x \in Z$

$$i(f_1(x) + if_2(x)) = if(x) = f(ix) = f_1(ix) + if_2(ix).$$

Igualando partes reales se sigue que $f_2(x) = -f_1(ix)$. Es necesario que la extensión buscada también cumpla esta relación. Por lo tanto, definimos $\hat{f}\colon X \to \mathbb{C}$ como $\hat{f}(x) = \hat{f}_1(x) - i\hat{f}_1(ix)$. Un simple cálculo muestra que esta función es, en efecto, una función $\mathbb{C}$-lineal definida sobre X. Además, si

$x \in Z$ entonces

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= \hat{f}_1(x) - i\hat{f}_1(ix)\\ &= f_1(x) - if_1(x)\\ &= f_1(x) + f_2(x)\\ &= f(x).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\hat{f}$ extiende a f. Así, sólo queda demostrar que $|\hat{f}|$ está dominado por p.

Primero nótese que p es no negativa, pues $p(0) = 0p(0) = 0$ y para toda $x \in X$

$$p(0) = p(x - x) \leq p(x) + p(-x) = p(x) + p(x).$$

Luego, si $\hat{f}(x) = 0$ entonces $\hat{f}(x) \leq p(x)$. De esta manera, supongamos que $x \in X$ y $\hat{f}(x) \neq 0$. Usando coordenadas polares se tiene que $\hat{f}(x) = |\hat{f}(x)|e^{i\theta}$ y, por ende,

$$|\hat{f}(x)| = e^{-i\theta}\hat{f}(x) = \hat{f}(e^{-i\theta}x).$$

Puesto que $|\hat{f}(x)|$ es un número real, se sigue que el último miembro de la igualdad anterior es igual a su parte real; es decir,

$$\begin{aligned}|\hat{f}(x)| &= \hat{f}(e^{-i\theta}x)\\ &= \hat{f}_1(e^{-i\theta}x)\\ &\leq p(e^{-i\theta}x)\\ &= |e^{-i\theta}|p(x)\\ &= p(x).\end{aligned}$$

□

El siguiente corolario nos permitirá posteriormente mostrar la gran riqueza de funcional lineales continuos que existe en un espacio normado.

Corolario 2.1.4. *Sean X un espacio vectorial normado, Z un subespacio vectorial de X y $f\colon Z \to \mathbb{F}$ un funcional lineal continuo. Existe una funcional lineal continuo $\hat{f}\colon X \to \mathbb{F}$ que extiende a f y tal que $\left\|\hat{f}\right\|_X = \|f\|_Z$*

Demostración. Si $Z = \{0\}$ entonces $f \equiv 0$ y la extension $\hat{f} \equiv 0$ satisface lo que se busca. Así, supongamos que $Z \neq \{0\}$. Consideremos la función $p\colon X \to \mathbb{C}$ dada por

$$p(x) = \|f\|_Z \, \|x\| .$$

La función p es subaditiva y $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ para cualesquiera $\alpha \in \mathbb{F}$ y $x \in X$. Además, para toda $x \in Z$ se tiene que

$$|f(x)| \leq \|f\|_Z \|x\| = p(x).$$

Dado que se satisfacen las condiciones del teorema de Hahn-Banach generalizado, consideremos una función lineal $\hat{f}\colon X \to \mathbb{F}$ que extienda a f y tal que $|\hat{f}|$ que esté dominado por p. De aquí,

$$\left|\hat{f}(x)\right| \leq \|f\|_Z \|x\|$$

para toda $x \in X$. En consecuencia, $\hat{f}$ es acotada y $\left\|\hat{f}\right\|_X \leq \|f\|_Z$. Por otro lado, como $\hat{f}$ extiende a f entonces para toda $x \in Z$ se tiene que

$$|f(x)| = \left|\hat{f}(x)\right| \leq \left\|\hat{f}\right\|_X \|x\|.$$

Y, por ende, $\|f\|_Z \leq \left\|\hat{f}\right\|_X$. Por lo tanto, $\left\|\hat{f}\right\|_X = \|f\|_Z$. □

Corolario 2.1.5. *Sean X un espacio vectorial normado y $x_0 \in X \setminus \{0\}$. Entonces existe un funcional lineal continuo $\hat{f}$ sobre X tal que $\left\|\hat{f}\right\| = 1$ y $\hat{f}(x_0) = \|x_0\|$*

Demostración. Sea Z el subespacio de X generado por x_0. Sobre Z, defínase la función

$$f(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|.$$

Esta función es un funcional lineal. Además, para cualquier escalar λ

$$|f(\lambda x_0)| = |\lambda| \|x_0\| = \|\lambda x_0\|.$$

Por lo tanto, $\|f\| = 1$. Además, $f x_0 = \|x_0\|$. De esta manera, por el Corolario 2.1.4 existe un funcional lineal continuo $\hat{f}$ definido sobre X que extiende a f y tal que $\left\|\hat{f}\right\| = 1$. Este es el funcional lineal buscado. □

Este último corolario asegura que dado un espacio vectorial normado X, el conjunto de funcionales lineales continuos sobre dicho espacio, denotado por X^* y llamado dual toplógico, es no trivial y, de hecho, está compuesto por una gran variedad de funciones. En el Ejemplo 3 veremos que si un espacio vectorial posee una topología adecuada para hablar de funcionales lineales continuos, su dual topológico no necesariamente es no trivial.

2.2. Teorema de la categoría de Baire

El teorema de la categoría será fundamental en el resto de este capítulo. Su demostración escapa a los objetivos de este texto, pero puede ser consultada junto a los demás resultados de esta sección en la Sección 2.1 de [7]. El concepto topológico de categoría fue introducido por el matemático francés René-Louis Baire, con el fin de distinguir conjuntos "grandes" y "pequeños" dentro de un espacio topológico. Los espacios de Baire son aquellos en los que los abiertos son de la segunda categoría. El teorema de la categoría de Baire enuncia que los espacios localmente compactos y Hausdorff, y los espacios completamente metrizables son espacios de Baire.

Definición 2.2.1. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Diremos que

1. A es denso en ninguna parte o nunca denso si $\operatorname{int}_X \operatorname{cl}_X A = \emptyset$.
2. A es de primera categoría en X si se puede escribir como una unión numerable de conjuntos nunca densos en X.
3. A es de segunda categoría en X si no es de primera categoría en X.

Equivalentemente, dados X un espacio topológico y $A \subseteq X$, A es de la segunda categoría en X si y sólo si para cualquier cubierta $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ de A compuesta por cerrados de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}_X F_k \neq \emptyset$.

Definición 2.2.2. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es un espacio de Baire si cualquier abierto no vacío en X es de segunda categoría en X.

La siguiente proposición da una carecterización de los espacios de Baire.

Proposición 2.2.3. *Sea X un espacio topológico. Son equivalentes:*

1. *X es un espacio de Baire.*
2. *Si $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de abiertos densos en X entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ es denso en X.*
3. *Si $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de cerrados cuya unión tiene interior no vacío, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}_X F_0 \neq \emptyset$.*

Teorema 2.2.4 (Teorema de la Categoría de Baire)**.** *Sea X un espacio topológico. Si X es completamente metrizable, o localmente compacto y Hausdorff entonces X es un espacio de Baire.*

2.3. Teorema de la aplicación abierta

Una función entre dos espacios topológicos es abierta si la imagen bajo dicha función de un abierto del dominio es un abierto del contradominio. El teorema de la aplicación abierta afirma que una función lineal continua y suprayectiva entre dos espacios de Banach es abierta. Clásicamente, este resultado se demuestra utilizando el teorema de la tategoría de Baire. Una consecuencia del teorema de la aplicación abierta es el teorema del isomorfismo de Banach, el cual asevera que cualquier isomorfismo lineal continuo entre dos espacios de Banach es un homeomorfismo topológico.

Definición 2.3.1. Sean X y Y dos espacios topológicos. Una función $f\colon X \to Y$ es abierta si para todo $U \subseteq X$ abierto se tiene que $f[U]$ es abierto en Y.

Dado que la topología de un espacio normado está completamente determinada por las vecindades del 0, para determinar si una aplicación lineal entre espacios normados es abierta bastará estudiar las vecindades del 0 en el dominio.

Lema 2.3.2. *Sean X y Y espacios vectoriales normados. Si $T\colon X \to Y$ es una aplicación lineal (no necesariamente continua) entonces son equivalentes:*

1. *T es una función abierta.*
2. *$T[B(0,1)]$ es abierto en Y.*
3. *$T[B(0,1)]$ es una vecindad del 0 en Y.*

Demostración. Las implicaciones 1) $\implies$ 2) y 2) $\implies$ 3) son claras. Para probar 3) $\implies$ 1), supongamos que $T[B(0,1)]$ es una vecindad del 0 en Y. Así, si $x \in X$ y $r > 0$ entonces $T[B(x,r)] = rT[B(0,1)] + T(x)$ es una vecindad de $T(x)$.

Por otro lado, si $U \subseteq X$ es abierto y $x \in U$, entonces existe $r > 0$ tal que $T[B(x,r)] \subseteq T[U]$. Como $T[B(x,r)]$ es una vecindad de $T(x)$ entonces existe un abierto $V \subseteq Y$ tal que $T(x) \in V \subseteq T[U]$. Por lo tanto, $T[U]$ es abierto en Y. Luego, T es una aplicación abierta. □

Lema 2.3.3. *Sean X un espacio de Banach y Y un espacio vectorial normado. Sea $T \in B(X,Y)$. Si existe $r > 0$ tal que $B_Y(0,r) \subseteq \mathrm{cl}_Y\, T[B_X(0,1)]$ entonces T es una aplicación abierta.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $B_n = B_X(0, 2^{-n}) \subseteq X$. Sea $r > 0$ tal que $B_Y(0, r) \subseteq \mathrm{cl}_Y T[B_0]$. Nótese que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mathrm{cl}_Y T[B_n] = 2^{-n} \mathrm{cl}_Y T[B_0]$. Por lo tanto,

$$B_Y\left(0, \frac{r}{2^n}\right) \subseteq \mathrm{cl}_Y T[B_n].$$

De esta manera, si hacemos $V_n = B_Y\left(0, \frac{r}{2^n}\right)$ se sigue que $V_n \subseteq \mathrm{cl}_Y T[B_n]$.

A continuación probaremos que

$$V_1 = B\left(0, \frac{r}{2}\right) \subseteq T[B_0].$$

Así pues, sea $y \in V_1$ arbitrario. Por la discusión anterior, se tiene que $y \in \mathrm{cl}_Y T[B_1]$. Así, existe $x_1 \in B_1$ tal que

$$\|y - T(x_1)\| < \frac{r}{2^2}.$$

Por lo tanto, $y - T(x_1) \in V_2 \subseteq \mathrm{cl}_Y T[B_2]$ y, en consecuencia, existe $x_2 \in B_2$ tal que

$$\|(y - T(x_1)) - T(x_2)\| < \frac{r}{2^3}.$$

De manera inductiva, se construye así una sucesión $(x_n)_n$ en X tal que $x_n \in B_n$ y

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{n} T(x_k) \right\| < \frac{r}{2^{n+1}}.$$

Por lo tanto, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} T(x_k)$ converge en Y y es igual a y. Ahora veamos que $\sum_{k=1}^{\infty} T(x_k) \in T[B_0]$. Dado que $x_n \in B_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-n} = 1,$$

de forma que la Proposición 1.5.6 implica que la serie $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge en X (pues X es un espacio de Banach). Además, la continuidad de la norma asegura que $\|x\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < 1$, por lo que $x \in B_0$. Dado que T es continua, se sigue que $T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T(x_n) = y$. Por lo tanto, $y \in T[B_0]$.

Así, $V_1 \subseteq T[B_0]$. Como V_1 es abierto en Y y $0 \in V_1$, concluimos que $T[B_0]$ es una vecindad del 0 en Y. Por el Lema 2.3.2, tenemos que T es abierta. □

Teorema 2.3.4 (Teorema de la aplicación abierta)**.** *Sean X y Y espacios de Banach. Si $T \in B(X, Y)$ es suprayectiva entonces T es abierta.*

Demostración. Sea $T \in B(X,Y)$ suprayectiva. Defínanse $B_0 := B_X(0,1) \subseteq X$ y $B_1 := B_X(0,1/2) \subseteq X$. En virtud del Lema 2.3.3, buscamos probar que existe $r > 0$ tal que $B_Y(0,r) \subseteq \mathrm{cl}_Y\, T[B_0]$. Dado que T es suprayectiva y lineal, se tiene que

$$Y = T[X] = T\left[\bigcup_{k\in\mathbb{N}} kB_1\right] = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} kT[B_1] \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}_Y\, kT[B_1] \subseteq Y.$$

Por lo tanto,

$$Y = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}_Y\, kT[B_1].$$

Puesto que Y es un espacio de Banach, se sigue del teorema de la categoría de Baire que existe k_0 tal que $\mathrm{cl}_Y\, k_0T[B_1]$ tiene interior no vacío. Por lo tanto, $\mathrm{cl}_Y\, T[B_1]$ tiene interior no vacío. De esta manera, sean $y_0 \in X$ y $r > 0$ tales que $B^* := B_Y(y_0,r) \subseteq \mathrm{cl}_Y\, T[B_1]$. Notemos que

$$B_Y(0,r) = B^* - y_0 \subseteq \mathrm{cl}_Y\, T[B_1] - y_0.$$

Probaremos que $B^* - y_0 \subseteq \mathrm{cl}_Y\, T[B_0]$. Esto se hará demostrando que

$$\mathrm{cl}_Y\, T[B_1] - y_0 \subseteq \mathrm{cl}_Y\, T[B_0].$$

Así pues, sea $y \in \mathrm{cl}_Y\, T[B_1] - y_0$. Entonces $y + y_0 \in \mathrm{cl}_Y\, T[B_1]$. Además, por construcción, también se tiene que $y_0 \in \mathrm{cl}_Y\, T[B_1]$, pues $B^* \subseteq \mathrm{cl}_Y\, T[B_1]$. De esta manera, existen sucesiones $(w_n)_n$ y $(z_n)_n$ en B_1 tales que $T(w_n) \to y + y_0$ y $T(z_n) \to y_0$, de forma que $T(w_n) - T(z_n) \to y$. Por lo tanto,

$$y = \lim_{n\to\infty} T(w_n - z_n).$$

Por otro lado, dado que $w_n, z_n \in B_1$ y B_1 tiene radio $\frac{1}{2}$ entonces $\|w_n - z_n\| < 1$, por lo que $w_n - z_n \in B_0$. Luego, $y \in \mathrm{cl}_Y\, T[B_0]$. Por lo tanto,

$$\mathrm{cl}_Y\, T[B_1] - y_0 \subseteq \mathrm{cl}_Y\, T[B_0]$$

y, en consecuencia, $B_Y(0,r) \subseteq \mathrm{cl}_Y\, T[B_0]$. De esta manera, hemos probado que $\mathrm{cl}_Y\, T[B(0,1)]$ es una vecindad del 0 en Y. Por el el Lema 2.3.3, se sigue que T es una aplicación abierta. □

Si una función continua entre dos espacios topológicos es biyectiva y abierta entonces es un homeomorfismo. De esta manera, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.3.5 (Teorema del isomorfismo de Banach)**.** *Sean X y Y espacios de Banach. Si $T \in B(X, Y)$ es biyectiva entonces T es un homeomorfismo.*

En el teorema de la aplicación abierta, las hipótesis de que X y Y sean espacios de Banach son esenciales, como lo muestran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.3.6. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach de dimensión infinita. Sea $\{v_i : i \in I\}$ una base para X tal que $\|v_i\| = 1$ para toda $i \in I$. Definamos una norma $p: X \to [0, \infty)$ como $p(x) = \sum_{i \in I} |\lambda_i|$, si $x = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$. Puesto que para una $x \in X$ dada, sólo una cantidad finita de los coeficientes λ_i son distintos de 0 se tiene que la función p está bien definida.

A continuación probaremos que (X, p) no es un espacio de Banach. Sea $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto de $\{v_i : i \in I\}$, numerable, linealmente independiente y tal que $v_n \neq v_m$ si $n \neq m$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defínase $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{v_k}{2^k}$.

Nótese que si $n > m$ entonces

$$p(x_n - x_m) = p\left(\sum_{k=m+1}^{n} \frac{v_k}{2^k}\right) = \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{2^k}.$$

Por lo tanto, $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en (X, p). Sin embargo, esta sucesión no converge en (X, p). En efecto, sea $x \in X$. Supongamos que x se escribe como $x = \lambda_1 v_{j_1} + \lambda_2 v_{j_2} + \cdots \lambda_m v_{j_m}$. Se puede tomar $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $v_n \neq v_{j_k}$ para toda $k \in \{1, \cdots, m\}$. De esta manera, si $n > N$ entonces $x_n - x$ se escribe como

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_{j_i} + \sum_{k=1}^{N} \beta_k v_k + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{v_k}{2^k}$$

para algunos escalares $\alpha_i, \beta_k \in \mathbb{F}$. Por la elección de N, se tiene, sin importar los valores de las α_i y las β_k, que

$$\begin{aligned} p(x_n - x) &\geq \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{2^k} \\ &\geq \frac{1}{2^{N+1}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x_n)_n$ no converge a x en (X, p). Esto prueba que (X, p) no es un espacio de Banach.

De esta manera, consideremos la aplicación $T: (X, p) \to (X, \|\cdot\|)$ dada por $T(x) = x$. Para ver que T es acotada, sea $x \in X$ y supongamos que x se escribe como $x = \lambda_1 v_{j_1} + \lambda_2 v_{j_2} + \cdots \lambda_n v_{j_n}$. Entonces

$$\begin{aligned}\|T(x)\| &= \|\lambda_1 v_{j_1} + \lambda_2 v_{j_2} + \cdots \lambda_n v_{j_n}\| \\ &\leq |\lambda_1| \|v_{j_1}\| + \cdots + |\lambda_n| \|v_{j_n}\| \\ &= |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n| \\ &= p(x).\end{aligned}$$

Por lo tanto, T es una aplicación lineal acotada y suprayectiva. Sin embargo, si T fuera abierta entonces T^{-1} sería continua y, en consecuencia, las normas $\|\cdot\|$ y p serían equivalentes. Esto no es posible, pues $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach pero (X, p) no lo es (ver Corolario 1.5.3).

Ejemplo 2.3.7. Sean $X = (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ y $Y = (C([0,1], \|\cdot\|_2)$. Sabemos que X es un espacio de Banach pero Y no lo es. Consideremos la aplicación $T\colon X \to Y$ dada por $T(f) = f$. Esta aplicación es suprayectiva y además acotada, pues si $f \in C([0,1])$ entonces

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 f^2(t)\, dt\right)^{1/2} \leq \left(\|f\|_\infty^2\right)^{1/2} = \|f\|_\infty .$$

Sin embargo, T no es abierta, pues de lo contrario su inversa sería continua y, por lo tanto, las normas $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_2$ serían equivalentes sobre $C([0,1])$; esto no es posible, pues $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach mientras que $(C([0,1], \|\cdot\|_2)$ no lo es.

2.4. Teorema de la gráfica cerrada

Es un hecho conocido en topología general que la gráfica de una función continua entre espacios topológicos es un cerrado del producto topológico, siempre que el contradominio sea T_2 y el recíproco de esta afirmación no es necesariamente cierto (una condición para que sí lo sea es que el contradominio sea compacto). El teorema de la gráfica cerrada afirma que si la gráfica de una función entre espacios de Banach es cerrada entonces dicha función necesariamente es continua. Clásicamente, este teorema se demuestra usando el teorema de la aplicación abierta.

Teorema 2.4.1 (Teorema de la gráfica cerrada)**.** *Sean X y Y espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$ una aplicación lineal. Si la gráfica de T, $G_T := \{(x,y) \in X \times Y : y = T(x)\}$, es cerrada en $X \times Y$ entonces $T \in B(X,Y)$.*

Demostración. Notemos que G_T es un subespacio vectorial de $X \times Y$, pues $T \in L(X, Y)$. Supongamos que G_T es cerrada en $X \times Y$. Al ser $X \times Y$ un espacio de Banach, se sigue que G_T también es un espacio de Banach.

Consideremos $\pi\colon X \times Y \to X$ la proyección sobre X y definamos $P = \pi|_{G_T}$. Entonces P es lineal y continua, por ser una restricción de una función continua; es decir, $P \in B(G_T, X)$. Además, P es biyectiva y su inversa está dada por $P^{-1}(x) = (x, T(x))$. Por el teorema del isomorfismo de Banach (Corolario 2.3.5), se sigue que $P^{-1} \in B(X, G_T)$. De esta manera, para toda $x \in X$ se tiene que

$$\|T(x)\| \leq \|(x, T(x))\| = \left\|P^{-1}(x)\right\| \leq \left\|P^{-1}\right\| \|x\| .$$

Por lo tanto, $T \in B(X, Y)$ y $\|T\| \leq \left\|P^{-1}\right\|$. □

En el teorema de la gráfica cerrada, las hipótesis de que X y Y sean espacios de Banach son esenciales.

Ejemplo 2.4.2. Sean $X = C^1([0,1])$ y $Y = C([0,1])$, ambos equipados con la norma del supremo. En este caso tenemos que X no es un espacio de Banach. Consideremos el operador lineal $T\colon X \to Y$ dado por $T(f)(x) = f'(x)$ para cualesquiera $f \in X$ y $x \in [0,1]$. Probaremos que la gráfica de T es cerrada a pesar de que T no es acotada.

Sea $n \in \mathbb{N}$ y definamos $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x^n$. Entonces $f_n \in C^1([0,1])$, $f_n'(x) = nx^{n-1}$ y $\|f_n\| = 1$. Sin embargo, $\|T(f_n)\| = \|f_n'\| = n$. Por lo tanto, T no es un operador acotado.

Ahora, sea $(f_n, T(f_n))_n$ una sucesión convergente a (f, g) en $X \times Y$. Entonces $T(f_n)$ converge a g en Y, lo que se traduce en que $T(f_n)$ converge uniformemente a g. Por lo tanto, para cada $x \in [0,1]$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_0^x g(t)\, dt &= \int_0^x \lim_{n\to\infty} T(f_n)(t)\, dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^x T(f_n)(t)\, dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^x f_n'(t)\, dt \\
&= \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(0)) \\
&= f(x) - f(0).
\end{aligned}$$

Por el teorema fundamental del cálculo, esto implica que $g(x) = f'(x)$. Por lo tanto, $(f, g) = (f, T(f)) \in G_T$. Luego, la gráfica de T es cerrada en $X \times Y$.

Ejemplo 2.4.3. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach de dimensión infinita. Consideremos el espacio (X, p) definido en el Ejemplo 2.3.6. Éste es un espacio vectorial normado que no es de Banach.

Consideremos la aplicación lineal $T\colon (X, \|\cdot\|) \to (X, p)$ dada por $T(x) = x$. En el Ejemplo 2.3.6 probamos que T no es continua. Sin embargo, la gráfica de T sí es cerrada.

La prueba del teorema de la gráfica cerrada que se presentó utilizó el teorema de la aplicación abierta. En el último resultado de esta sección se presenta una prueba del teorema de la aplicación abierta que se basa en teorema de la gráfica cerrada. De esta manera, habremos probado que estos dos teoremas son equivalentes. La prueba que se ofrece aquí está basada en la demostración del Teorema 2.1 de [8].

Teorema 2.4.4. *El teorema de la gráfica cerrada implica el teorema de la aplicación abierta*

Demostración. Supongamos cierto el teorema de la gráfica cerrada. Sean X, Y espacios de Banach, $T \in B(X, Y)$ suprayectiva y $N := \ker T$. Puesto que T es continua entonces N es cerrado. Por lo tanto, el espacio cociente X/N es un espacio de de Banach con la norma

$$\|x + N\|_{X/N} = \inf_{z \in N} \|x - z\|_X .$$

Además, dado que T es suprayectiva, se tiene que si $y \in Y$ entonces existe $x \in X$ tal que $T(x) = y$. De esta manera, defínase $S\colon Y \to X/N$ como

$$S(y) = x + N$$

donde $x \in X$ satisface que $T(x) = y$. Para ver que S está bien definida, tómense $y \in Y$ y $x_1, x_2 \in X$ tales que $T(x_1) = y = T(x_2)$. Entonces $x_1 - x_2 \in N$ y, en consecuencia, $x_1 + N = x_2 + N$. Por lo tanto S está bien definida. Además, S es lineal.

Para ver que S es acotada ocuparemos el teorema de la gráfica cerrada. Sea $(y_n, S(y_n))_n$ una sucesión convergente a $(y, z + N)$ en $Y \times X/N$. Supongamos que $y_n = T(x_n)$, de tal manera que $S(y_n) = x_n + N$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De esta forma,

$$\begin{aligned}
\|S(y_n) - (z + N)\|_{X/N} &= \|(x_n + N) - (z + N)\|_{X/N} \\
&= \|(x_n - z) + N\|_{X/N} \\
&= \inf_{w \in N} \|x_n - z - w\| .
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\inf_{w\in N} \|x_n - z - w\| \to 0.$$

De esta manera, existe una sucesión $(w_n)_n$ en N tal que $\|x_n - z - w_n\| \to 0$. Por lo tanto, $(x_n - w_n) \to z$ en X. Dado que T es continua, se sigue que $T(x_n - w_n) \to T(z)$ en Y. Sin embargo, dado que $w_n \in N$ se tiene que $T(x_n - w_n) = T(x_n) = y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $y_n \to y$, se sigue que $T(x_n - w_n) \to y$. Por lo tanto, $T(z) = y$. Luego, $(y, z + N) = (y, S(y))$. En consecuencia, la gráfica de S es cerrada y, por el teorema de la gráfica cerrada, se sigue que S es continua.

Por lo tanto, para toda $y \in Y$ se tiene que

$$\|S(y)\|_{X/N} \leq \|S\| \, \|y\| \,.$$

Así, si $\|y\| < \frac{1}{\|S\|+1}$ entonces $\|S(y)\|_{X/N} < 1$. De esta manera, sea $y \in Y$ tal que $\|y\| < \frac{1}{\|S\|+1}$ y consideremos $x \in X$ tal que $T(x) = y$. Luego,

$$\inf_{z\in N} \|x - z\| = \|x + N\|_{X/N} = \|S(y)\|_{X/N} < 1.$$

Por lo tanto, existe $z \in N$ tal que $\|x - z\| < 1$. Además, $T(x-z) = T(x) = y$ (pues $z \in N$). Así, $y \in T[B_X(0,1)]$. De esta manera, hemos probado que

$$B_Y\left(0, \frac{1}{\|S\| + 1}\right) \subseteq T[B_X(0,1)].$$

Por lo tanto, $T[B_X(0,1)]$ es una vecindad del 0. Por el Lema 2.3.2 se sigue que T es abierta. $\square$

2.5. Teorema de Banach-Steinhaus

En esta sección se formula la versión clásica del teorema de Banach-Steinhaus, cuya prueba se realiza usualmente mediante el teorema de la categoría de Baire. Sin embargo, incluimos otras dos pruebas de este teorema: la primera elemental en el sentido de que no ocupa el teorema de Baire ni otro de los teoremas fundamentales, y la segunda mediante el teorema de la gráfica cerrada. Posteriormente, se usa el teorema de Banach-Steinhaus para probar el teorema de la aplicación abierta, con lo que cumplimos nuestro propósito de demostrar la equivalencia entre estos tres teoremas. Finalmente, se formula una versión más general del teorema de Banach-Steinhaus que en el Capítulo 3 nos dará un entendimiento más profundo de este teorema.

Definición 2.5.1. Sean X y Y dos espacios normados, y $\Gamma \subseteq B(X,Y)$. Diremos que la familia Γ está

1. Puntualmente acotada si $\sup\limits_{T\in\Gamma} \|T(x)\| < \infty$ para toda $x \in X$.

2. Uniformemente acotada si $\sup\limits_{T\in\Gamma} \|T\| < \infty$

Lema 2.5.2. *Sean X y Y espacios vectoriales normados. Sea $\Gamma \subseteq B(X,Y)$ una familia puntualmente acotada. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que el conjunto*

$$A_n := \{x \in X : \forall\, T \in \Gamma \ \ \|T(x)\| \leq n\}$$

tiene interior no vacío, entonces dicha familia está uniformemente acotada.

Demostración. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int} A_{n_0} \neq \emptyset$. Consideremos $x_0 \in X$ y $r > 0$ tales que $\operatorname{cl}_X B(x_0, r) \subseteq A_{n_0}$ y sea $M = \sup_{T\in\Gamma} \|T(x_0)\|$. Por hipótesis, $M < \infty$.

Ahora, sea $T \in \Gamma$ fija. Buscamos estimar el valor de $\|T\|$. Tomemos $x \in \operatorname{cl}_X B_X(0,1)$ y definamos $z = x_0 + rx$. Entonces $z \in \operatorname{cl}_X B(x_0, r)$. Por lo tanto, $z \in A_{n_0}$. Por lo tanto, $\|T(z)\| \leq n_0$. De esta manera,

$$\begin{aligned}
\|T(x)\| &= \left\| T\left(\frac{z - x_0}{r}\right) \right\| \\
&\leq \frac{\|T(z)\| + \|T(x_0)\|}{r} \\
&\leq \frac{n_0 + M}{r}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|T\| \leq \frac{n_0+M}{r}$. Así,

$$\sup_{T\in\Gamma} \|T\| \leq \frac{n_0 + M}{r} < \infty.$$

□

La formulación clásica del teorema de Banach-Steinhaus, acompañada de su demostración usual, es la siguiente

Teorema 2.5.3 (Banach-Steinhaus)**.** *Sean X un espacio de Banach y Y un espacio vectorial normado. Si $\Gamma \subseteq B(X,Y)$ es una familia puntualmente acotada, entonces Γ está uniformemente acotada.*

Demostración. Para una $n \in \mathbb{N}$ dada, considérese el conjunto

$$A_n = \{x \in X : \forall\, T \in \Gamma \ \ \|T(x)\| \leq n\}.$$

Nótese que $A_n = \bigcap_{T \in \Gamma} \{x \in X : \ \|T(x)\| \leq n\}$. Puesto que T es continua para cada $T \in \Gamma$, se sigue que A_n es cerrado en X. Además, como Γ está puntulamente acotada entonces para cada $x \in X$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|T(x)\| \leq n$ para toda $T \in \Gamma$; es decir, para cada $x \in X$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_n$. Por lo tanto, $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Debido a que cada A_n es cerrado y X es un espacio de Banach, el teorema de la categoría de Baire asegura que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que el A_{n_0} tiene interior no vacío. Del Lema 2.5.2 se sigue que Γ está uniformemente acotada. □

Dado un espacio normado X, podemos considerar la topología débil inducida en X por la familia $B(X, \mathbb{F})$ denotada por σ. Si bien este espacio en general no es metrizable (ver Proposición 2.5.14 de [11]), en el Capítulo 3 daremos una definición de conjuntos acotados en este espacio. Una aplicación del teorema de Banach-Steinhaus es que los conjuntos acotados en el espacio (X, σ) también son acotados en $(X, \|\cdot\|)$.

Corolario 2.5.4. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y σ la topología débil inducida en X por la familia de funciones $B(X, \mathbb{F})$. Supongamos que $A \subseteq X$ satisface que si U es una vecindad del origen en (X, σ) entonces existe $t > 0$ tal que $A \subseteq tU$. Entonces A es acotado en el espacio $(X, \|\cdot\|)$.*

Demostración. Para cada $x \in A$, sea $T_x : B(X, \mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ el funcional lineal dado por $T_x(f) = f(x)$. Sea $x \in A$ fijo. Para toda $f \in B(X, \mathbb{F})$ se tiene que

$$|T_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \, \|x\|,$$

por lo que T_x es continua y $\|T_x\| \leq \|x\|$. Para calcular $\|T_x\|$, notemos que, por el Corolario 2.1.5, existe un funcional lineal $f_0 \in B(X, \mathbb{F})$ tal que $\|f_0\| = 1$ y $f_0(x) = \|x\|$. Así,

$$|T_x f_0| = |f_0(x)| = \|x\|$$

por lo que $\|T_x\| = \|x\|$.

Ahora veamos que la familia $\{T_x : x \in A\}$ está puntualmente acotada. Sea $f \in B(X, \mathbb{F})$. Puesto que $f^{-1}[(-1, 1)]$ es una vecindad del origen en (X, σ) entonces existe $t > 0$ tal que

$$A \subseteq t f^{-1}[(-1, 1)].$$

De esta manera, $|T_x(f)| = |f(x)| \leq t$ para toda $x \in A$. Luego, $\{T_x \colon x \in A\}$ está puntualmente acotada. Dado que $B(X, \mathbb{F})$ es un espacio de Banach (Proposición 1.5.9), el teorema de Banach-Steinhaus implica que existe $M > 0$ tal que $\|T_x\| \leq M$ para toda $x \in A$. Así, $\|x\| \leq M$ para toda $x \in A$. Por lo tanto, A es un conjunto acotado en $(X, \|\cdot\|)$. $\square$

A pesar de que la prueba del teorema 2.5.3 utiliza el teorema de la categoría de Baire, el teorema de Banach-Steinhaus puede ser demostrado sin él, como veremos a continuación. La prueba que aquí se ofrece está basada en la que se encuentra en [15].

Lema 2.5.5. *Sean X y Y espacios normados. Sea $T \in B(X, Y)$. Para cada $x \in X$ y $r > 0$ se tiene que*

$$r \|T\| \leq \sup_{z \in B_X(x,r)} \|T(z)\|.$$

Demostración. Sean $x \in X$ y $r > 0$ fijas. Sea $y \in B_X(0, 1) \subseteq X$ arbitraria. Definamos $z_1 = x + ry$ y $z_2 = x - ry$. Entonces $z_1, z_2 \in B_X(x, r)$ y, además, $2ry = z_1 - z_2$. De esta manera,

$$\begin{aligned} r \|T(y)\| &= \frac{1}{2} \|T(z_1 - z_2)\| \\ &\leq \frac{1}{2} (\|T(z_1)\| + \|T(z_2)\|) \\ &\leq \text{máx}\{\|T(z_1)\|, \|T(z_2)\|\} \\ &\leq \sup_{z \in B_X(x,r)} \|T(z)\|. \end{aligned}$$

Dado que y fue tomada de manera arbitraria dentro de $B_X(0, 1)$ se sigue que

$$r \|T\| \leq \sup_{z \in B_X(x,r)} \|T(z)\|.$$

$\square$

Ahora sí, comencemos la prueba del teorema de Banach-Steinhaus, la cual realicermos por contrapositiva. Sea $\Gamma \subseteq B(X, Y)$ y supongamos que $\sup_{T \in \Gamma} \|T\| = \infty$. Probaremos que existe un punto $x \in X$ tal que $\sup_{T \in \Gamma} \|T(x)\| = \infty$, probando así que Γ no está puntuamente acotada. Éste punto será el límite de una sucesión de Cauchy adecuada. Sea $(T_n)_n \subseteq \Gamma$ una sucesión tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\|T_n\| \geq 4^n$.

1. Sea $x_0 = 0$. Aplicando el Lema 2.5.5 a la bola $B_X\left(x_0, \frac{2}{3}\right)$ y la aplicación T_1 se tiene que
$$\frac{2}{3}\|T_1\| \leq \sup_{z \in B_X(x_0, 2/3)} \|T_1(z)\|.$$
Por lo tanto, existe $x_1 \in B_X(x_0, \frac{2}{3})$ tal que
$$\frac{2}{3}\|T_1\| - 1 \leq \|T_1(x_1)\|.$$
2. Inductivamente, se puede construir una sucesión $(x_n)_n$ en X tal que $x_0 = 0$, $\|x_{n+1} - x_n\| < \frac{2}{3^{n+1}}$ y
$$\frac{2}{3^n}\|T_n\| - \frac{1}{n} \leq \|T_n(x_n)\|.$$

Nótese que la sucesión $(x_n)_n$ es de Cauchy, pues si $n, k > 1$ entonces

$$\begin{aligned}
\|x_{n+k} - x_n\| &\leq \|x_{n+k} - x_{n+k-1}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\| \\
&< \frac{2}{3^{n+k}} + \cdots + \frac{2}{3^{n+1}} \\
&= \frac{2}{3^n} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{3^j} \\
&\leq \frac{2}{3^n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3^j} \\
&= \frac{1}{3^n}.
\end{aligned}$$

Dado que X es un espacio de Banach, se sigue que la sucesión $(x_n)_n$ es convergente en X. Así pues, sea $x = \lim_{n \to \infty} x_n$.

Por otro lado, si en la desigualdad
$$\|x_{n+k} - x_n\| \leq \frac{1}{3^n}$$
tomamos $k \to \infty$ se sigue que $\|x - x_n\| \leq 3^{-n}$ para toda $n > 1$.

Con esto en mente, veamos que x es el punto buscado. Sea $n \in \mathbb{N}$. Por la desigualdad del triángulo y la continuidad de T_n, se tiene que
$$\|T_n(x_n)\| - \|T_n(x)\| \leq \|T_n(x_n - x)\| \leq \|T_n\| \|x_n - x\|.$$
De esta manera,
$$\|T_n(x_n)\| - \|T_n\| \|x_n - x\| \leq \|T_n(x)\|.$$

Por un lado, en el segundo paso de la construcción elegimos a las x_n de forma que

$$\|T_n(x_n)\| \geq \frac{2}{3^n} \|T_n\| - \frac{1}{n}$$

y tales que

$$\|x_n - x\| < \frac{1}{3^n}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|T_n(x_n)\| - \|T_n\| \|x_n - x\| &\geq \left(\frac{2}{3^n} \|T_n\| - \frac{1}{n}\right) - \|T_n\| \frac{1}{3^n} \\
&= \frac{\|T_n\|}{3^n} - \frac{1}{n} \\
&\geq \frac{4^n}{3^n} - \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|T_n(x)\| \geq \frac{4^n}{3^n} - \frac{1}{n}$ y, así, $\sup_{T\in\Gamma} \|T(x)\| = \infty$. Esto concluye la prueba.

A continuación veremos que el teorema de Banach-Steinhaus también puede ser demostrado usando el teorema de la gráfica cerrada. Esta prueba es la misma que la que se presenta en el Teorema 4 de [14].

Teorema 2.5.6. *El teorema de la gráfica cerrada implica el teorema de Banach-Steinhaus.*

Demostración. Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\Gamma = \{T_\alpha \colon \alpha \in A\} \subseteq B(X, Y)$ una familia puntualmente acotada.

Primero supongamos que Y es un espacio de Banach. Entonces el espacio

$$\ell_A^\infty(Y) = \left\{ y \in Y^A \colon \sup_{\alpha\in A} \|y(\alpha)\|_Y < \infty \right\}$$

con la norma $\|y\|_\infty = \sup_{\alpha\in A} \|y(\alpha)\|_Y$ es un espacio de Banach (ver Ejemplo 1.5.5). Consideremos la aplicación lineal $T \colon X \to \ell_A^\infty(Y)$ dada por $T(x)(\alpha) = T_\alpha(x)$. Dado que Γ está puntualmente acotada entonces T es una función bien definida.

Veamos que la gráfica de T es cerrada en $X \times \ell_A^\infty(Y)$. Sea $(x_n, T(x_n))_n$ una sucesión convergente a (x, y) en $X \times \ell_A^\infty(Y)$. Fijemos $\alpha \in A$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\|T_\alpha(x_n) - y(\alpha)\|_Y = \|(T(x_n) - y)(\alpha)\|_Y \leq \|T(x_n) - y\|_\infty .$$

Por lo tanto, $(T_\alpha(x_n))_n$ converge a $y(\alpha)$ en Y (pues $(T(x_n))_n$ converge a y). Pero, dado que T_α es continua, $(T_\alpha(x_n))_n$ también converge a $T_\alpha(x)$ (pues $(x_n)_n$ converge a x). Por lo tanto, $y(\alpha) = T_\alpha(x)$. De esta manera, $y = T(x)$. Luego, la gráfica de T es cerrada.

Así, por el teorema de la gráfica cerrada, podemos asegurar que T es continua. De modo que, para una $\alpha \in A$ fija y $x \in X$ se tiene que

$$\|T_\alpha(x)\|_Y = \|T(x)(\alpha)\|_Y \leq \|T(x)\|_\infty \leq \|T\| \, \|x\|_X .$$

Por lo tanto, $\|T_\alpha\| \leq \|T\|$ para toda $\alpha \in A$. Esto prueba que la familia Γ está uniformemente acotada.

Para abordar el caso general en el que Y no es necesariamente un espacio de Banach, recordemos de la Proposición 1.5.10 que existe un espacio de Banach $\hat{Y}$ tal que Y está encajado isométricamente en $\hat{Y}$. Si para cada $T \in \Gamma$ definimos $\hat{T} \colon X \to \hat{Y}$ como $\hat{T}(x) = T(x)$ entonces $\hat{T} \in B(X, \hat{Y})$ y $\left\|\hat{T}\right\| = \|T\|$. Aplicando lo que acabamos de demostrar a la familia $\hat{\Gamma} = \{\hat{T} \colon T \in \Gamma\} \subseteq B(X, \hat{Y})$ obtenemos que esta familia está uniformemente acotada, por lo que la familia Γ también lo está. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que en las hipótesis del teorema de Banach-Steinhaus es necesario que X sea de Banach.

Ejemplo 2.5.7. Consideremos $X = (c_{00}, \|\cdot\|_1)$. Este es un espacio normado que no es un espacio de Banach (ver Ejemplo 1.5.5). Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos la aplicación lineal $T_n \colon X \to \mathbb{R}$ dada por $T_n(x) = nx_n$. Veamos que T_n es acotada y que $\|T_n\| = n$. Para cada $x \in X$ se tiene que

$$|T_n(x)| = |nx_n| \leq n \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| = n \|x\|_1 .$$

Por lo tanto, T_n es continua y $\|T_n\| \leq n$. Así, para demostrar que $\|T_n\| = n$ basta exhibir alguna $x \in X$ tal que $\|x\|_1 = 1$ y $|T_n(x)| = n$. La sucesión $x \in X$ definida por $x_k = 0$ si $k \neq n$ y $x_n = 1$ satisface dicha condición. Por lo tanto, $\|T_n\| = n$. En consecuencia, la familia $\{T_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ no está uniformemente acotada.

Sin embargo, esta familia sí está puntualmente acotada. En efecto, dada $x \in X$ fija existe $N_x \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = 0$ para toda $n > N$. De esta manera, si $n > N_x$ entonces $T_n(x) = 0$.

En la Sección 2.4 se probó que el teorema de la aplicación abierta y el teorema de la gráfica cerrada son equivalentes entre sí; así mismo, en esta sección se ha probado que este último teorema implica el teorema de Banach-Steinhaus. A continuación probaremos que el teorema de Banach-Steinhaus implica el teorema de la aplicación abierta. De esta manera, quedará demostrado que los tres teoremas mencionados son equivalentes entre sí.

Teorema 2.5.8. *El teorema de Banach-Steinhaus implica al teorema de la aplicación abierta.*

Demostración. Sean X y Y espacios de Banach y $T \in B(X,Y)$ una aplicación suprayectiva. Para demostrar que T es abierta encontraremos una $r > 0$ tal que $B_Y(0,r) \subseteq \operatorname{cl}_Y T[B_X(0,1)]$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $y \in Y$, defínase

$$\|y\|_n = \text{ínf}\{\|u\|_X + n\,\|v\|_Y : u \in X,\ v \in Y \text{ y } y = T(u) + v\}.$$

Esto define una norma en Y. Puesto que $y = T(0) + y = T(x) + 0$, para cualquier $x \in X$ tal que $y = T(x)$, se tiene que $\|y\|_n \leq n\,\|y\|_Y$ y $\|y\|_n \leq \|x\|_X$.

Sea F el espacio de sucesiones en Y que son eventualmente 0; es decir,

$$F = \left\{ f \in Y^{\mathbb{N}} \colon \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N (f(n) = 0) \right\}.$$

Equipemos a F con la siguiente norma: $\|f\|_F = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f(n)\|_n$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defínase $S_n \colon Y \to (F, \|\cdot\|_F)$ mediante

$$S_n(y)(k) = \begin{cases} y & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases}$$

S_n es lineal y, para cada $y \in Y$,

$$\|S_n(y)\|_F = \|y\|_n \leq n\,\|y\|_Y\,.$$

Por lo tanto, $S_n \in B(Y,F)$. Además, dada $y \in Y$ fija, existe $x \in X$ tal que $y = T(x)$, pues T es suprayectiva. De este modo,

$$\|S_n(y)\|_F = \|y\|_n \leq \|x\|_X\,.$$

Por lo tanto, la familia $\Gamma = \{S_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ está puntualmente acotada. Por el teorema de Banach-Steinhaus se sigue que Γ está uniformemente acotada. Así, existe $M > 0$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, $\|S_n\| \leq M$.

Considérese $r \in \left(0, \frac{1}{M}\right)$. Sea $y \in B_Y(0,r)$. Entonces

$$\|y\|_n = \|S_n(y)\|_F \leq \|S_n\| \, \|y\|_Y \leq M \, \|y\|_Y < 1$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Por la definición de $\|\cdot\|_n$, se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $x_n \in X$ y $y_n \in Y$ tales que $y = T(x_n) + y_n$ y

$$\|y\|_n \leq \|x_n\|_X + n \, \|y_n\|_Y < 1.$$

Por ende,

$$\|x_n\| < 1 \quad \text{y} \quad \|y_n\| < \frac{1}{n}.$$

Por lo tanto, $x_n \in B_X(0,1)$ y

$$\|y - T(x_n)\| = \|y_n\| < \frac{1}{n}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia $y = \lim_{n\to\infty} T(x_n) \in \mathrm{cl}_Y \, T[B(0,1)]$. Luego, $B_Y(0,r) \subseteq \mathrm{cl}_Y \, T[B(0,1)]$. Por el Lema 2.3.3 se sigue que T es abierta. □

Finalmente, enunciamos y demostramos una versión más general del teorema de Banach-Steinhaus en cuya prueba sí utilizaremos el teorema de la categoría de Baire. Esta prueba se basa en la demostración del Teorema 3.14 de [3].

Teorema 2.5.9. *Sean X un espacio de Banach y Y un espacio vectorial normado. Sea $\Gamma \subseteq B(X,Y)$. Ocurre una de las siguientes alternativas:*

1. *Existe $G \subseteq X$ un G_δ denso en X tal que para toda $x \in G$, $\sup_{T\in\Gamma} \|T(x)\| = \infty$.*
2. $\sup_{T\in\Gamma} \|T\| < \infty$.

Demostración. Dada una $n \in \mathbb{N}$, considérese el conjunto

$$A_n = \bigcap_{T\in\Gamma} \{x \in X\colon \ \|T(x)\| \leq n\}.$$

Como cada $T \in \Gamma$ es continua entonces cada A_n es cerrado.

Si existiera $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int} A_{n_0} \neq \emptyset$ entonces, por el Lema 2.5.2, se tendría que $\sup_{T\in\Gamma} \|T\| < \infty$. Así pues, supongamos que $\operatorname{int} A_n = \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Definamos

$$G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus A_n).$$

Nótese que $x \in G$ si y sólo si $\sup_{T\in\Gamma} \|T(x)\| = \infty$. De esta manera, sólo queda ver que G es un G_δ denso en X.

1. Puesto que A_n es cerrado entonces $X \setminus A_n$ es abierto para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(X \setminus A_n)$ es G_δ en X.

2. Debido a que $\operatorname{int} A_n = \emptyset$ entonces $X \setminus A_n$ es un abierto denso en X para toda $n \in \mathbb{N}$. Dado que X es un espacio de Banach, se sigue del teorema de la categoría de Baire que $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(X \setminus A_n)$ es denso en X.

$\square$

Capítulo 3

Espacios vectoriales topológicos

En este capítulo se introducen los espacios vectoriales topológicos como una generalización de los espacios vectoriales normados. En realidad, un espacio vectorial topológico es un caso particular de un grupo topológico y éste, a su vez, es un caso particular de un espacio uniforme. Aunque muchos resultados de esta sección son válidos en estas clases de espacios, éstas generalizaciones se encuentran fuera de los objetivos del trabajo. El lector interesado en estos temas puede consultar [4].

En las siguientes secciones se estudiarán las propiedades de separación de los espacios vectoriales topológicos y se generalizarán algunos conceptos y resultados del Capítulo 1 a este nuevo contexto. Finalmente, se abordarán los problemas de la normabilidad y la metrizabilidad de un espacio vectorial topológico. Es importante recalcar que, como se dijo en la introducción, todos los espacios vectoriales que usamos aquí están definidos sobre $\mathbb{C}$ o sobre $\mathbb{R}$. Si bien una gran parte de la teoría y los ejemplos aquí presentados siguen siendo ciertos cuando se consideran espacios sobre otros campos, estas consideraciones escapan a los objetivos del texto.

3.1. Topologías en espacios vectoriales

De todas las topologías que se pueden definir sobre un espacio vectorial, es natural preguntarse por aquellas que son compatibles en algún sentido con la estructura algebraica del espacio. En éste y el siguiente capítulo sólo nos interesarán las topologías que hagan continuas a las operaciones del espacio. Como es usual en topología, supondremos que todos los espacios cumplen con un cierto axioma de separación, en este caso el axioma T_0. Esto se justifica en que la mayoría de los ejemplos interesantes cumplen esta propiedad y la mayoría de los resultados importantes la requieren. Sin embargo, cabe destacar que en esta sección dicho axioma de separación no será relevante.

Definición 3.1.1. Sean X un espacio vectorial y τ una topología en X. Diremos que (X, τ) es un espacio vectorial topológico (e.v.t.) si es un espacio T_0 y las operaciones $+\colon X \times X \to X$ y $*\colon \mathbb{F} \times X \to X$ dadas por $+(x, y) = x + y$ y $*(\lambda, x) = \lambda x$ son continuas cuando X se considera con la topología τ, y $X \times X$ y $\mathbb{F} \times X$ se consideran con la topología producto.

Ejemplo 3.1.2. 1. Si X es un espacio normado entonces la Proposición 1.2.3 implica que X es un e.v.t.

2. Sean X un espacio vectorial no trivial con la topología discreta y $x_0 \in X \setminus \{0_X\}$. Entonces $\{0_X\}$ es un abierto de X y $(0_{\mathbb{F}}, x_0) \in \mathbb{F} \times X$ es una pre-imagen del 0_X bajo el producto escalar. Si $U \subseteq \mathbb{F} \times X$ es una vecindad de $(0_{\mathbb{F}}, x_0)$ entonces existe $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0_{\mathbb{F}}\}$ tal que $(\lambda, x_0) \in U$. Como $\lambda \neq 0_{\mathbb{F}}$ y $x_0 \neq 0_X$ entonces $\lambda x_0 \notin \{0_X\}$. Por lo tanto, el producto escalar de X no es continuo en $(0_{\mathbb{F}}, x_0)$ y, en consecuencia, X no es un e.v.t.

3. Sean $\{X_\alpha\colon \alpha \in J\}$ una familia no vacía de espacios vectoriales topológicos y $X = \Pi_{\alpha \in J} X_\alpha$. Sean $f\colon X \times X \to X$ y $g\colon \mathbb{F} \times X \to X$ la suma vectorial y el producto escalar, respectivamente. En primer lugar, veamos que f es continua. Sea $\alpha \in J$ y consideremos π_α la proyección sobre X_α. Sea $h_1\colon X \times X \to X_\alpha \times X_\alpha$ dada por $h_1(x, y) = (x_\alpha, y_\alpha)$; esta función es continua. Además, si $x, y \in X$ entonces

$$\begin{aligned} \pi_\alpha \circ f(x, y) &= \pi_\alpha(x + y) \\ &= (x + y)_\alpha \\ &= x_\alpha + y_\alpha \\ &= +_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) \\ &= +_\alpha \circ h_1(x, y) \end{aligned}$$

donde $+_\alpha$ es la suma vectorial de X_α. Como $+_\alpha$ y h_1 son continuas, entonces $\pi_\alpha \circ f$ es continua para toda $\alpha \in J$. Por lo tanto, f es continua.

Análogamente, sea $\alpha \in J$ y definamos $h_2\colon \mathbb{F} \times X \to X$ mediante $h_2(\lambda, x) = (\lambda, x_\alpha)$. Entonces

$$\pi_\alpha \circ g(\lambda, x) = \lambda x_\alpha = *_\alpha \circ h_2(\lambda, x)$$

donde $*_\alpha$ es el producto escalar de X_α. Como $*_\alpha$ y g son continuas, se sigue que $\pi_\alpha \circ g$ es continua para toda $\alpha \in J$ y, en consecuencia, g es continua.

De esta manera queda demostrado que el producto topológico arbitrario de espacios vectoriales topológicos es un e.v.t.

4. Si X es un e.v.t. y Y es un subespacio vectorial de X entonces Y es un e.v.t, pues las operaciones de Y son restricciones de las operaciones de X.

5. Sean X es un e.v.t., Y es un espacio vectorial dotado de una topología τ. Si existe $T\colon X \to (Y, \tau)$ un isomorfismo lineal que además es un homeomorfismo topológico entonces (Y, τ) es un e.v.t.

6. Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $p \in (0, 1)$. Sea $L^p = L^p(X.\mathcal{A}, \mu)$ el espacio de funciones medibles $f\colon X \to \mathbb{F}$ tales que $|f|^p \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, con la identificación usual en la que dos funciones son equivalentes si y sólo son iguales en c.t.p. En primer lugar, demostremos que L^p es un espacio vectorial. Sean $f, g \in L^p$. Puesto que $0 < p < 1$ entonces $(1 + x)^p \le 1 + x^p$ para cualquier $x \ge 0$ (el lector puede demostrar esto derivando la función $f(x) = 1 + x^p - (1 + x)^p$ y verificando que esta derivada es positiva en el intervalo $(0, \infty)$). En consecuencia,

$$(a + b)^p \le a^p + b^p \tag{3.1}$$

para cualesquiera $a, b \ge 0$. De esta manera,

$$\int_X |f + g|^p d\mu \le \int_X (|f| + |g|)^p \, d\mu \le \int_X |f|^p + \int_X |g|^p d\mu < \infty$$

por lo que $f + g \in L^p$. Por otra parte, para cada $\alpha \in \mathbb{F}$ y $f \in L^p$ se tiene que

$$\int_X |\alpha f|^p d\mu = |\alpha|^p \int_X |f|^p d\mu < \infty$$

por lo que $\alpha f \in L^p$. Por lo tanto, L^p es un espacio vectorial.

Definamos la siguiente métrica en L^p: para $f, g \in L^p$ definamos

$$d(f,g) = \int_X |f-g|^p d\mu.$$

Por la desigualdad 3.1, tenemos que si $h \in L^p$ entonces

$$|f-g|^p \leq (|f-h| + |h-g|)^p \leq |f-h|^p + |h-g|^p$$

y, en conscuencia, $d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$. Además, es inmediato que $d(f,g) = 0$ si y sólo si $f = g$, y $d(f,g) = d(g,f)$. De esta manera, d en verdad define una métrica sobre L^p. Se puede demostrar, de manera similar al caso $p \in [1,\infty)$ que esta es una métrica completa (véase el Teorema 6.8 de [6]).

Veamos que L^p es un e.v.t. Como L^p y $\mathbb{F}$ son espacios métricos, podemos verificar la continuidad de la suma vectorial y el producto escalar mediante sucesiones. Sean $f, g, f_n, g_n \in L^p$ y $\alpha, \alpha_n \in \mathbb{F}$ tales que $f_n \to f$ y $g_n \to g$ en L^p y $\alpha_n \to \alpha$ en $\mathbb{F}$. Buscamos probar que $f_n + g_n \to f + g$ y $\alpha_n f_n \to \alpha f$. Por un lado,

$$|(f_n + g_n) - (f-g)| \leq |f_n - f| + |g_n - g|.$$

Así, la desigualdad 3.1 implica que

$$|(f_n + g_n) - (f-g)|^p \leq |f_n - f|^p + |g_n - g|^p.$$

En consecuencia, $d(f_n + g_n, f+g) \leq d(f_n.f) + d(g_n, g)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Luego, $f_n + g_n \to f + g$ en L^p. Por lo tanto, la suma vectorial es continua en L^p. Por otro lado,

$$|\alpha_n f_n - \alpha f| \leq |\alpha_n f_n - \alpha_n f| + |\alpha_n f - \alpha f| = |\alpha_n||f_n - f| + |f||\alpha_n - \alpha|.$$

Una vez más, la desigualdad 3.1 implica que

$$|\alpha_n f_n - \alpha f|^p \leq |\alpha_n|^p |f_n - f|^p + |f|^p |\alpha_n - \alpha|^p.$$

Luego, $d(\alpha_n f_n, \alpha f) \leq |\alpha_n|^p d(f_n, f) + |\alpha_n - \alpha|^p d(f,0)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $\alpha_n f_n \to \alpha$. Por lo tanto, el producto escalar es continuo en L^p. Por lo tanto, L^p es un e.v.t. metrizable.

Recordemos que al abordar el caso $p \in [1,\infty)$ es necesario considerar la expresión $d(f,0)^{1/p}$ para poder obtener una norma. Sin embargo, si intentamos hacer lo mismo en el caso $p \in (0, 1)$, la función resultante no satisfará la desigualdad del triángulo, por lo que no habremos obtenido una norma. No obstante, hasta ahora no tenemos las herramientas para determinar si la topología de L^p proviene de una norma para $p \in (0, 1)$. Este problema lo abordaremos en la Sección 3.5.

7. Sean (X, τ) un e.v.t. y σ la topología débil en X inducida por la familia de funcionales lineales continuos sobre X. Consideremos el espacio $Y = (X, \sigma)$. Sea $f\colon Y \times Y \to Y$ la suma vectorial de Y. Para ver que f es continua basta demostrar que $T \circ f$ es continua para toda $T \in B(X, \mathbb{F})$, pues σ es la topología débil inducida por $B(X, \mathbb{F})$. Así pues, sea $T \in B(X, \mathbb{F})$ y consideremos la función $h_1\colon Y \times Y \to \mathbb{F}^2$ dada por $h_1(x, y) = (T(x), T(y))$. Una vez más, como $T \in B(X, \mathbb{F})$ y Y tiene la topología débil inducida por esta familia, entonces las funciones coordenadas de h_1, $(x, y) \mapsto T(x)$ y $(x, y) \mapsto T(y)$ son continuas, por lo que h_1 misma es continua. Además, si $(x, y) \in Y \times Y$ entonces

$$\begin{aligned} T \circ f(x, y) &= T(x + y) \\ &= T(x) + T(y) \\ &= +_{\mathbb{F}} \circ h_1(x, y) \end{aligned}$$

donde $+_{\mathbb{F}}$ es la suma de $\mathbb{F}$, por lo que $T \circ f$ es continua, pues h_1 y $+_{\mathbb{F}}$ lo son. Por lo tanto, f es continua.

Por otro lado, sea $g\colon \mathbb{F} \times Y \to Y$ el producto escalar de Y. Para demostrar que g es continua, consideremos $T \in B(X, \mathbb{F})$ y definamos la función $h_2\colon \mathbb{F} \times Y \to \mathbb{F}^2$ como $h_2(\lambda, y) = (\lambda, T(y))$. Entonces

$$\begin{aligned} T \circ g(\lambda, y) &= T(\lambda y) \\ &= \lambda T(y) \\ &= *_{\mathbb{F}} \circ h_2(x, y) \end{aligned}$$

donde $*_{\mathbb{F}}$ es el producto de $\mathbb{F}$. Análogamente al párrafo anterior, esto nos permite concluir que g es continua. Por lo tanto, Y es un e.v.t.

Al igual que en un espacio normado, la topología de un espacio vectorial topológico está completamente determinada por las vecindades del origen. La demostración de la siguiente proposición es completamente análoga a la de la Proposición 1.2.4.

Proposición 3.1.3. *Sea X un espacio vectorial topológico.*

1. *Las funciones $x \mapsto x + y$ y $x \mapsto \lambda x$ son homeomorfismos de X en X para cualesquiera $y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.*

2. *Sean $A \subseteq X$ y $x \in A$. A es una vecindad (abierta) de x si y sólo si $A - x$ es una vecindad (abierta) del 0.*

En el estudio de los espacios vectoriales topológicos serán necesarios los siguientes conceptos.

Definición 3.1.4. Sea X un espacio vectorial topológico y $A \subseteq X$. Diremos que A es:

1. Balanceado si $\alpha A \subseteq A$ para toda $\alpha \in \mathbb{F}$ con $|\alpha| \leq 1$.

2. Acotado si para todo $U \subseteq X$ abierto existe $t > 0$ tal que $A \subseteq sU$ para toda $s > t$.

3. Absorbente si para toda $x \in X$ existe $t > 0$ tal que $x \in tA$.

Notemos que los conceptos de conjunto balanceado y absorbente no dependen en ninguna medida de la topología de X, sino de su estructura algebraica.

Ejemplo 3.1.5.
1. Si X es un espacio vectorial y $C \subseteq X$ es un conjunto convexo, entonces C es un conjunto balanceado.

2. El conjunto
$$\big\{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [-1, 1], y = 0\big\} \cup \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = 0, y \in [-1, 1]\big\}$$
es balancado en $\mathbb{R}^2$ pero no es convexo.

3. Los únicos conjuntos balanceados en $\mathbb{R}$ son $\emptyset$, $\mathbb{R}$ y los intervalos de la forma $(-a, a)$ y $[-b, b]$.

4. Los únicos conjuntos balanceados en $\mathbb{C}$ son $\mathbb{C}, \{0\}, \emptyset$ y las bolas centradas en el 0 (tanto abiertas como cerradas). Estos también son conjuntos balanceados en $\mathbb{R}^2$, pero los segmentos de recta que pasan por el origen y simétricos respecto a éste también son conjuntos balanceados en $\mathbb{R}^2$. Esto enfatiza el hecho de que los conjuntos balanceados dependen de la estructura algebraica de X y no de su estructura topológica.

5. Sea X es un espacio normado considerado como e.v.t. Un conjunto $A \subseteq X$ es acotado en el sentido de la Definición 3.1.4 si y sólo si existe $r > 0$ tal que $A \subseteq B_X(0, r)$. De esta manera, el concepto de conjunto acotado introducido en la Definición 3.1.4 coincide con el concepto de conjunto acotado ya conocido en espacios normados.

6. Todas las bolas centradas en el origen (tanto abiertas como cerradas) son absorbentes.

7. Sea (X, τ) un e.v.t. metrizable mediante una métrica d. La función $\rho(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$ definida sobre $X \times X$ es una métrica acotada compatible con τ. De esta manera, todos los subconjuntos de X son acotados en el espacio métrico (X, ρ) y este espacio es un e.v.t. Sin embargo, no necesariamente es cierto que todos los subconjuntos de X sean acotados en el e.v.t (X, τ). Este ejemplo muestra que la noción de conjunto acotado en espacios vectoriales topológicos no necesariamente extiende a la misma noción en espacios métricos.

La siguiente proposición de carácter técnico enuncia algunas propiedades básicas de la topología en un e.v.t. que más adelante serán útiles.

Proposición 3.1.6. *Sean X un e.v.t. y $A, B \subseteq X$. Entonces:*

1. $\mathrm{cl}_X A = \bigcap_{V \in \mathcal{N}(0)} (A + V)$ *donde* $\mathcal{N}(0)$ *es el conjunto de vecindades del* 0.

2. $\mathrm{cl}_X A + \mathrm{cl}_X B \subseteq \mathrm{cl}_X(A + B)$.

3. Si $A \subseteq B$ y B es acotado entonces A es acotado.

4. Si A es balanceado entonces $\mathrm{cl}_X A$ *también lo es.*

5. Si A y B son balanceados entonces $A \cap B$ también lo es.

Demostración. 1. Sea $x \in X$. En virtud de la Proposición 3.1.3, $x \in \mathrm{cl}_X A$ si y sólo $(x + V) \cap A \neq \emptyset$ para toda $V \in \mathcal{N}(0)$ y esto, a su vez, ocurre si y sólo si $x \in A - V$ para toda $V \in \mathcal{N}(0)$. Por la misma Proposición ya referida, V es una vecindad del 0 si y sólo si $-V$ lo es, por lo que $x \in \mathrm{cl}_X A$ si y sólo si $x \in A + V$ para toda $V \in \mathcal{N}(0)$.

2. Sean $a \in \mathrm{cl}_X A$ y $b \in \mathrm{cl}_X B$. Consideremos $W \subseteq X$ una vecindad de $a+b$. Como $a+b \in W$ y la suma de X es continua, existen $W_1, W_2 \subseteq X$ vecindades de a y b, respectivamente, tales que
$$W_1 + W_2 \subseteq W.$$
De esta manera, si tomamos $x \in W_1 \cap A$ y $y \in W_2 \cap B$ entonces $x + y \in W \cap (A + B)$. Por lo tanto,
$$\mathrm{cl}_X A + \mathrm{cl}_X B \subseteq \mathrm{cl}_X(A + B).$$

3. Supongamos que $A \subseteq B$ y que B es acotado. Sea $U \subseteq X$ abierto. Como B es acotado, existe $t > 0$ tal que $A \subseteq B \subseteq sU$ para toda $s > t$. Por lo tanto, A es acotado.

4. Supongamos que A es balanceado. Entonces $\{0\} = 0A \subseteq A$, por lo que $0 \in A$ y, en consecuencia, $0 \in \mathrm{cl}_X A$. De esta manera,
$$\{0\} = 0\,\mathrm{cl}_X A \subseteq \mathrm{cl}_X A.$$
Así, sea $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ con $|\alpha| \leq 1$. Por la Proposición 3.1.3, la aplicación $x \mapsto \alpha x$ es un homeomorfismo de X en X; por lo tanto,
$$\alpha\,\mathrm{cl}_X A = \mathrm{cl}_X(\alpha A) \subseteq \mathrm{cl}_X A$$
donde la última contención se da porque $\alpha A \subseteq A$, al ser A un conjunto balanceado.

5. Supongamos que A y B son balanceados. Entonces, para toda $\alpha \in \mathbb{F}$ con $|\alpha| \leq 1$ se tiene que
$$\alpha(A \cap B) \subseteq \alpha A \cap \alpha B \subseteq A \cap B.$$
Por lo tanto, $A \cap B$ es balanceado.

$\square$

Más adelante veremos que los conjuntos balanceados juegan un papel fundamental en el estudio de los e.v.t.. La siguiente proposición garantiza que siempre que se trabaje con vecindades del origen, éstas se pueden asumir balanceadas.

Proposición 3.1.7. *Sea X un espacio vectorial topológico.*

1. *Cualquier vecindad del origen contiene una vecindad balanceada del* 0*. Si el origen tiene una base local de vecindades convexas entonces cualquier vecindad del* 0 *contiene una vecindad balanceada y convexa del origen.*

2. *X tiene una base local compuesta de conjuntos balanceados. Si el origen tiene una base local de vecindades convexas del origen entonces el origen tiene una base local de vecindades convexas y balanceadas.*

Demostración. 1. Sea $U \subseteq X$ una vecindad del 0. Dado que el producto escalar es continuo en $(0_{\mathbb{F}}, 0_X)$, existen $\delta > 0$ y una vecindad del origen V tales que $\alpha V \subseteq U$ siempre que $|\alpha| < \delta$. Sea $W = \bigcup_{|\alpha|<\delta} \alpha V$. Entonces W es una vecindad del origen y $W \subseteq U$. Para ver que W es balanceada, tomemos $\lambda \in \mathbb{F}$ y $\alpha x \in W$ con $|\lambda| \leq 1$, $|\alpha| < \delta$ y $x \in V$. Entonces $|\lambda\alpha| \leq |\alpha| < \delta$, por lo que $\lambda(\alpha x) = (\lambda\alpha)x \in W$.

   Si el origen tiene una base local del vecindades convexas entonces V puede tomarse convexa, por lo que los conjuntos αV son convexos y, en consecuencia, W es convexo.

2. Si $\mathcal{B}$ es una base local de X entonces para cada $W \in \mathcal{B}$ considérese una vecindad balanceada del origen V_W tal que $V_W \subseteq W$. Entonces $\{V_W : W \in \mathcal{B}\}$ es una base local del 0 compuesta por vecindades balanceadas.

   Si el origen tiene una base local de vecindades convexas $\mathcal{B}$ entonces para cada $W \in \mathcal{B}$ se puede tomar una vecindad balanceada y convexa del 0, $V_W \subseteq W$, por lo que $\{V_W : W \in \mathcal{B}\}$ es una base local del 0 que satisface lo deseado.

□

La siguiente proposición explora un el concepto de conjunto acotado. Destacamos del segundo inciso que, al igual que en un espacio normado, en un e.v.t. todo conjunto compacto es acotado.

Proposición 3.1.8. *Sean X un espacio vectorial topológico y $V \subseteq X$ una vecindad del origen.*

1. *Si $(r_n)_n$ es una sucesión de números reales positivos y $r_n \to \infty$ entonces*

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} r_n V.$$

En particular, toda vecindad del origen es absorbente.

2. *Si $K \subseteq X$ es compacto entonces K es acotado.*
3. *Supongamos que V está acotada. Si $(\delta)_n$ es una sucesión de números reales positivos y $\delta_n \to 0$ entonces la colección $\{\delta_n V : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local del origen. En particular, si el origen tiene una vecindad acotada entonces X es primero numerable.*

Demostración.

1. Sea $x \in X$ y consideremos la función continua $f : \mathbb{F} \to X$ dada por $f(t) = tx$. Sea $A = f^{-1}[V]$. Entonces $0 \in A$ y, por lo tanto, A es una vecindad del 0 en $\mathbb{F}$. Como $r_n \to \infty$, se sigue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{r_N} \in A$; es decir, $x \in r_N V$.
2. Sean $K \subseteq X$ compacto y $U \subseteq X$ una vecindad del origen. Por la Proposición 3.1.7, podemos considerar una vecindad balanceada del origen $W \subseteq U$. De esta manera, se sigue del inciso anterior que $K \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nW$. Por la compacidad de K, existen $n_1 < \cdots < n_s$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{s} n_k W = n_s W$$

donde la igualdad se da debido a que W es balanceada. Por esta misma razón, tenemos que si $t > n_s$ entonces $K \subseteq n_s W \subseteq tW \subseteq tU$. Por lo tanto, K es acotado.

3. Supongamos que V está acotada. Sea $U \subseteq X$ una vecindad del 0. Existe $s > 0$ tal que si $t > s$ entonces $V \subseteq tU$. Como $\delta_n \to 0$ y cada δ_n es positivo, consideremos $n \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande para que $s < \frac{1}{\delta_n}$ entonces $V \subseteq \frac{1}{\delta_n} U$, por lo que $\delta_n V \subseteq U$.

   Finalmente, por la Proposición 3.1.3, si $x \in X$ entonces $\{x + \delta_n V : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local numerable para x. Por lo tanto, X es primero numerable.

□

Para finalizar esta sección, definiremos algunas clases de espacios vectoriales topológicos que estudiaremos en el resto del capítulo.

Definición 3.1.9. Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico.

1. X es localmente convexo si el origen tiene una base local de vecindades convexas.

2. X es localmente acotado si el origen tiene una vecindad acotada.

3. X es localmente compacto si el origen tiene una vecindad compacta.

4. Una métrica sobre X es invariante (bajo traslaciones) si $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ para cualesquiera $x, y, z \in X$.

5. X es un F-espacio si es metrizable mediante una métrica completa e invariante.

6. X es un espacio de Fréchet si es localmente convexo y es un F-espacio.

7. X es normable si τ está inducida por una norma.

8. X tiene la propiedad de Heine-Borel si cualquier subconjunto de X cerrado y acotado es compacto.

3.2. Propiedades de separación

Una de las primeras tareas que se realizan cuando se introduce una clase de espacios topológicos es estudiar sus propiedades de separación. Uno de los teoremas más importantes en este sentido dentro de la clase de los espacios vectoriales topológicos es que a un e.v.t. le basta con ser T_0 para poder asegurar que es Tychonoff. Para demostrar este teorema será necesario realizar una construcción que volverá a ser útil en la Sección 3.6.

Proposición 3.2.1. *Sean X un espacio vectorial topológico y $W \subseteq X$ una vecindad abierta del origen. Entonces:*

1. *Existe una vecindad del origen V tal que V es simétrica (es decir, $V = -V$) y $V + V \subseteq W$.*

2. *Existe una vecindad simétrica del origen V tal que $V + V + V \subseteq W$.*

Demostración.

1. Dado que la suma en X es continua y $0+0 = 0$, entonces existen vecindades del 0, $V_1, V_2 \subseteq X$ tales que $V_1 + V_2 \subseteq W$. Si hacemos $V = V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2)$ entonces V es simétrica y $V + V \subseteq W$.

2. Por el inciso 1, existe una vecindad simétrica del origen V_1 tal que $V_1 + V_1 \subseteq W$. Aplicando el mismo inciso a la vecindad V_1, obetenemos una vecindad simétrica del origen V tal que $V + V \subseteq V_1$. Por lo tanto,

$V + V + V + V \subseteq V_1 + V_1 \subseteq W$. Finalmente, como $0 \in V$ entonces $V + V + V \subseteq V + V + V + V \subseteq W$

□

Corolario 3.2.2. *Cualquier e.v.t. es un espacio T_1.*

Demostración. Sea X un e.v.t. En primer lugar, veamos que $\{0\}$ es cerrado. Sea $x \in X \setminus \{0\}$. Como X es T_0, ocurre una de las siguientes 2 alternativas:

1. Existe $U \subseteq X$ una vecindad de x tal que $0 \notin U$. En este caso es inmediato que $x \notin \mathrm{cl}_X\{0\}$.

2. Existe $W \subseteq X$ una vecindad abierta del 0 tal que $x \notin W$. Aplicando el primer inciso de la Proposición 3.2.1 a W, obtenemos $V \subseteq X$ una vecindad simétrica del origen tal que
$$V + V \subseteq W.$$
Por la Proposición 3.1.3, $x+V$ es una vecindad abierta de x. Si sucediera que $0 \in x + V$ entonces existiría $v \in V$ tal que $0 = x + v$, por lo que $x = -v \in -V = V$. Sin embargo, como $0 \in V$ entonces
$$V \subseteq V + V \subseteq W$$
contradiciendo que $x \notin W$. Una vez más, podemos concluir que $x \notin \mathrm{cl}_X\{0\}$.

Como en cualquier caso se concluye que $x \notin \mathrm{cl}_X\{0\}$, se sigue que $\mathrm{cl}_X\{0\} = \{0\}$ y, en consecuencia, $\{0\}$ es cerrado.

Finalmente, sea $x \in X$ y probemos que $\{x\}$ es cerrado. Como $\{x\} = x + \{0\}$, se sigue de la Proposición 3.1.3 que $\{x\}$ es cerrado. Por lo tanto, X es T_1. □

Si bien más adelante veremos que no todo e.v.t. es normal, la siguiente proposición muestra que en todo e.v.t. se pueden separar cerrados de compactos.

Proposición 3.2.3. *Sean X un espacio vectorial topológico, $K \subseteq X$ compacto y $F \subseteq X$ cerrado. Si $K \cap F = \emptyset$ entonces existe una vecindad del origen V tal que*
$$(K + V) \cap (F + V) = \emptyset.$$
Si X es localmente acotado, compacto o convexo entonces V puede tomarse con la misma propiedad.

Demostración. Por el Corolario 3.2.2, sabemos que X es T_1.

El caso $K = \emptyset$ es obvio, así que asumamos que K es no vacío. Sea $x \in K$. Aplicando el segundo inciso de la Proposición 3.2.1 al abierto $(X \setminus F) - x$ (recuerde el lector que este conjunto se define como el conjunto de las diferencias $y - x \in X$ con $y \in (X \setminus F)$), obtenemos una vecindad simétrica del origen V_x tal que

$$x + V_x + V_x + V_x \subseteq X \setminus F.$$

De esta manera, la simetría de V_x implica que

$$(x + V_x + V_x) \cap (F + V_x) = \emptyset$$

por lo que $x + V_x + V_x \subseteq X \setminus (F + V_x)$.

Por otro lado, nótese que $x \in x + V_x$, pues $0 \in V_x$. Por lo tanto,

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} x + V_x.$$

Así, la compacidad de K implica que existen $x_1, \ldots x_n \in K$ tales que $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} x_k + V_{x_k}$. Hagamos $V = \bigcap_{k=1}^{n} V_{x_k}$. Entonces V es una vecindad del origen tal que

$$\begin{aligned}
K + V &\subseteq \left(\bigcup_{k=1}^{n} (x_k + V_{x_k}) \right) + V \\
&= \bigcup_{k=1}^{n} (x_k + V_{x_k} + V) \\
&\subseteq \bigcup_{k=1}^{n} (x_k + V_{x_k} + V_{x_k}) \\
&\subseteq X \setminus (F + V).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(K + V) \cap (F + V) = \emptyset$.

Si X es localmente acotado, compacto o convexo, entonces primero obtenemos una vecindad del origen V_1 tal que $(K + V_1) \cap (C + V_1) = \emptyset$. Luego consideramos una vecindad del origen V con la propiedad correspondiente y tal que $V \subseteq V_1$. Entonces $(K + V) \cap (C + V) \subseteq (K + V_1) \cap (C + V_1) = \emptyset$. □

Sea X un e.v.t. Notemos que si $A, U \subseteq X$ y U es abierto entonces

$$A + U = \bigcup_{a \in A} a + U$$

y, por lo tanto, $A+U$ es abierto. Por lo tanto, la Proposición 3.2.3 implica que un cerrado y un compacto ajenos pueden separarse por abiertos ajenos en X. En particular, dos puntos distintos pueden ser separados por abiertos ajenos y un cerrado puede separarse de un punto fuera de él mediante abiertos ajenos. De esta manera, obtenemos los siguientes corolarios.

Corolario 3.2.4. *Cualquier espacio vectorial topológico es T_2.*

Demostración. Sean X un espacio vectorial topológico T_0 y $x_1, x_2 \in X$ puntos distintos. Considerando el cerrado $\{x_1\}$ y el compacto $\{x_2\}$, mediante la Proposición 3.2.3 se obtienen vecindades ajenas de x_1 y x_2. □

Corolario 3.2.5. *Cualquier espacio vectorial topológico T_3.*

Demostración. Sean X un espacio vectorial topológico T_0, $F \subseteq X$ un cerrado y $x \in X$ tales que $x \notin F$. Aplicando la Proposición 3.2.3 a $K = \{x\}$ y F obtenemos vecindades ajenas de x y F, por lo que X es regular. Como X también es Hausdorff, se sigue que X es T_3. □

Para demostrar que cualquier e.v.t. es Tychonoff realizaremos una construcción que será útil en la Sección 3.6 para estudiar la metrizabilidad de los espacios vectoriales topológicos.

Sean X un e.v.t. y $B \subseteq X$ una vecindad balanceada del origen.

Recursivamente, definamos $B(1) = B$ y $B(2^{n+1}) = B(2^n) + B(2^n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $B(2^{-n})$ como una vecindad balanceada del origen tal que $B\left(2^{-(n+1)}\right) + \left(2^{-(n+1)}\right) \subseteq B(2^{-n})$.

A continuación, definiremos $B(m2^n)$ para $m \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{Z}$. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{Z}$ fijos y sea $a = \frac{m}{2^n}$. Entonces a admite una expansión diádica, es decir, a se puede escribir como

$$\delta_{p(a)}\delta_{p(a)-1}\cdots\delta_0.\delta_{-1}\delta_{-2}\cdots\delta_{q(a)}$$

donde $\delta_i \in \{0,1\}$, $p(a) \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ y $q(a) \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$. De esta manera, definimos $B(a) = \sum_{i=q(a)}^{p(a)} \delta_i B(2^i)$. Notemos que la definición de $B(a)$ es independiente de la expansión de a que se elija. En particular, si $a = 2^k$ para alguna $k \in \mathbb{Z}$ entonces $B(a) = B(2^k)$. Además, $B(a)$ es una vecindad balanceada del origen, pues es una suma finita de vecindades balanceadas del origen.

A continuación probaremos que si r_1 y r_2 son diádicos positivos entonces $B(r_1) + B(r_2) \subseteq B(r_1 + r_2)$. Sea $r_3 = r_1 + r_2$. Notemos que agregando ceros a las expansiones diádicas de r_1, r_2 y r_3 podemos suponer que dichas expansiones tienen la misma longitud. De esta manera, sean $n_1 \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ y $n_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tales que

$$r_i = \delta^i_{n_2}\delta^i_{n_2-1}\cdots\delta^i_0.\delta^i_{-1}\delta^i_{-2}\cdots\delta^i_{n_1}.$$

Sea $A_{n_1} = B(r_1) + B(r_2) = \sum_{i=n_1}^{n_2} \delta^1_i B(2^i) + \sum_{i=n_1}^{n_2} \delta^2_i B(2^i)$. En esta suma hay exactamente cero, uno o dos términos de la forma $1 \cdot B(2^{n_1})$. Si la suma tiene dos de estos términos, los eliminamos y los sustituimos por un término de la forma $1 \cdot B\left(2^{n_1+1}\right)$ y la nueva suma la denotamos por A_{n_1+1}. De lo contrario, hacemos $A_{n_1+1} = A_{n_1}$. En cualquier caso, dado que $B(2^{n_1}) + B(2^{n_1}) \subseteq B\left(2^{n_1+1}\right)$, se tiene que $A_{n_1} \subseteq A_{n_1+1}$. Ahora, en la suma A_{n_1+1} hay exactamente cero, uno, dos o tres términos de la forma $1 \cdot B(2^{n_1+1})$. Si hay al menos dos de estos términos, sustituimos dos de ellos por uno de la forma $1 \cdot B(2^{n_1+2})$ y llamamos A_{n_1+2} a la nueva suma. En otro caso, simplemente hacemos $A_{n_1+2} = A_{n_1}$. Una vez más, $A_{n_1+1} \subseteq A_{n_1+2}$. Siguiendo este procedimiento, obtenemos una sucesión de sumas $A_{n_1}, A_{n_1+1}, \ldots, A_{n_2+1}$ tales que $A_{n_1} \subseteq A_{n_1+1} \subseteq \cdots \subseteq A_{n_2+1}$ y los coeficientes de A_{n_2+1} coinciden con ser los de la expansión diádica de $r_1 + r_2$, por lo que $A_{n_2+1} = B(r_1 + r_2)$. Por lo tanto, $B(r_1) + B(r_2) \subseteq B(r_1 + r_2)$.

Así pues, para cada $t > 0$ definamos

$$B(t) = \bigcup \{B(r)\colon r \text{ es diádico y } 0 < r \leq t\}.$$

Como $B(t)$ es una unión de vecindades balanceadas del origen entonces $B(t)$ es una vecindad balanceada del origen para toda $t > 0$. Además, notemos que si r_1 y r_2 son diádicos positivos tales que $r_1 < r_2$ entonces $B(r_1) \subseteq B(r_1) + B(r_2 - r_1) \subseteq B(r_2)$ pues $0 \in B(r_1)$ y $r_1, r_2 - r_1$ son diádicos positivos. Por lo tanto, esta definición es consistente con los conjuntos $B(r)$ que ya hemos definido.

Ahora veamos que $B(s) + B(t) \subseteq B(s+t)$ para cualesquiera $s, t > 0$. Sean $r_1, r_2 > 0$ diádicos tales que $r_1 < s$ y $r_2 < t$. Entonces $r_1 + r_2 < s + t$. De esta manera, $B(r_1) + B(r_2) \subseteq B(r_1 + r_2) \subseteq B(s+t)$. Por lo tanto, $B(s) + B(t) \subseteq B(s+t)$

Por otro lado, por la Proposición 3.1.8, se tiene que B es un conjunto absorbente, por lo que para cada $x \in X$ existe $t_x > 0$ tal que $x \in t_x B$. Pero, por hipótesis, B es balanceada, por lo que para $n \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande se cumple

$$x \in t_x B \subseteq 2^n B = \sum_{k=1}^{2^n} B = B(2^n).$$

Por lo tanto, $X = \bigcup \{B(t) \colon t > 0\}$. De esta manera, podemos definir $f \colon X \to [0, \infty)$ dada por

$$f(x) = \operatorname{ínf}\{t > 0 \colon x \in B(t)\}.$$

A continuación demostramos algunas propiedades de esta función.

1. Como $0 \in B(t)$ para toda $t > 0$ entonces $f(0) = 0$.

2. Para cada $t > 0$, si $x \in X \setminus B(t)$ entonces $f(x) \geq t$, pues de lo contrario existiría $r < t$ tal que $x \in B(r) \subseteq B(t)$. En particular, $f(x) \geq 1$ para toda $x \in X \setminus B$.

3. Como los conjuntos $B(t)$ son balanceados, entonces $x \in B(t)$ si y sólo si $-x \in B(t)$ para cualesquiera $x \in X$ y $t > 0$. Luego, $f(x) = f(-x)$ para toda $x \in X$.

4. Sean $x, y \in X$ y $\epsilon > 0$. Por la definición de $f(x)$ y $f(y)$, existen $s, t > 0$ tales que $x \in B(s)$, $y \in B(t)$,

$$s < f(x) + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad t < f(y) + \frac{\epsilon}{2}.$$

   Entonces $x + y \in B(s) + B(t) \subseteq B(s + t)$. Por lo tanto, $f(x + y) \leq s + t < f(x) + f(y) + \epsilon$. Como esta útlima desigualdad se cumple para toda $\epsilon > 0$, se sigue que $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

5. Sean $x, y \in X$. Por el inciso anterior,

$$f(x) \leq f(x - y) + f(y) \quad \text{y} \quad f(y) \leq f(x - y) + f(x).$$

   Por lo tanto, $|f(x) - f(y)| \leq f(x - y)$.

Finalmente, veamos que f es continua. Sean $x_0 + X$ y $\epsilon > 0$. Consideremos a $x_0 + B(\epsilon)$, vecindad de x_0 . Si $x \in x_0 + B(\epsilon)$ entonces $x - x_0 \in B(\epsilon)$. Por lo tanto,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq f(x - x_0) \leq \epsilon.$$

Luego, f es continua.

En conclusión, si $B \subseteq X$ es una vecindad balanceada del origen entonces existe una función continua $f \colon X \to [0, \infty)$ tal que $f(0) = 0$ y $f(x) \geq 1$ para toda $x \in X \setminus B$.

Teorema 3.2.6. *Cualquier espacio vectorial topológico es completamente regular.*

Demostración. Sean X un e.v.t., $x_0 \in X$ y $F \subseteq X$ un cerrado tal que $x_0 \notin F$. Como $X \setminus F$ es una vecindad abierta de x entonces $(X \setminus F) - x_0$ es una vecindad abierta del origen. Así, por la Proposición 3.1.7 existe $B \subseteq X$ una vecindad balanceada del origen tal que $B \subseteq (X \setminus F) - x_0$.

Sea $f\colon X \to [0, \infty)$ una función continua tal que $f(0) = 0$ y $f(x) \geq 1$ para toda $x \in X \setminus B$. Consideremos la función continua $\varphi\colon X \to [0, 1]$ dada por $\varphi(x) = \text{mín}\{1, f(x - x_0)\}$. Si $x \in F$ entonces $x - x_0 \notin B$, pues de lo contrario se tendría que $x = (x - x_0) + x_0 \in X \setminus F$. Por lo tanto, $f(x - x_0) \geq 1$ y, por tanto, $\varphi(x) = 1$. Además, $\varphi(x_0) = 0$, pues $f(0) = 0$. Por lo tanto, φ separa a F y a x_0. En consecuencia, X es completamente regular. □

El siguiente ejemplo muestra que no todos los espacios vectoriales topológicos son necesariamente normales y con él concluimos el estudio de las propiedades de separación de esta clase de espacios. Desgraciadamente, los detalles de esta prueba escapan a los objetivos del texto, pero éstos pueden encontrarse en el ejercicio 32.9 de [12] y el Ejemplo 103 de [16].

Ejemplo 3.2.7. Sean J un conjunto no numerable y $X = \mathbb{R}^J$. Por el Ejemplo 3.1.2, X es un e.v.t. Consideremos el subespacio $Y = \mathbb{Z}_+^J$. En el ejercicio referido de [12] se prueba que Y es cerrado en X. Sin embargo, en [16] se prueba que Y no es normal. Por lo tanto, X no es normal.

3.3. Transformaciones lineales continuas

En la Sección 1.4 demostramos que las transformaciones lineales acotadas entre espacios normados coinciden con las continuas. Si bien esto deja de ser necesariamente cierto en espacios vectoriales topológicos, en esta sección se mostrarán algunas analogías que las transformaciones lineales continuas entre espacios vectoriales topológicos tienen con el caso de espacios normados.

Proposición 3.3.1. *Sean X, Y dos espacios vectoriales topológicos y $T \in L(X, Y)$. Si T es continua en 0_X entonces T es continua en X y, más aún, si W es una vecindad de 0_Y en Y entonces existe V una vecindad de 0_X en X tal que si $x - y \in V$ entonces $T(x) - T(y) \in W$.*

Demostración. Sea $W \subseteq Y$ una vecindad de 0_Y. Dado que T es continua en 0_X, existe una vecindad $V \subseteq X$ de 0_X tal que $T[V] \subseteq W$. La linealidad de T implica que si $x - y \in V$ entonces $T(x) - T(y) \in W$.

De esta manera, sean $x \in X$ y $W \subseteq Y$ una vecindad de $T(x)$. Entonces existe una vecindad del origen $V \subseteq X$ tal que si $y - z \in V$ entonces $T(y) - T(z) \in W - T(x)$. Consideremos la vecindad de x, $V + x$. Si $y \in V + x$ entonces $y - x \in V$ y, por lo tanto, $T(y) - T(x) \in W - T(x)$. Así, si $y \in V + x$ entonces $T(y) \in W$; es decir, $T[V + x] \subseteq W$. De esta manera, T es continua en x. $\square$

Nótese que si (X, d_1) y (Y, d_2) son espacios vectoriales topológicos donde d_1 y d_2 son métricas invariantes, entonces una transformación lineal $T \colon X \to Y$ es uniformemente continua si y sólo si para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d_1(x - y, 0) < \delta$ entonces $d(T(x) - T(y), 0) < \epsilon$. De esta manera, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.3.2. *Sean (X, d_1) y (Y, d_2) dos espacios vectoriales topológicos donde d_1 y d_2 son métricas invariantes. Si $T \in L(X, Y)$ es continua en 0 entonces T es uniformemente continua.*

Las transformaciones lineales acotadas entre espacios vectoriales topológicos se definen de manera natural.

Definición 3.3.3. Sean X, Y espacios vectoriales topológicos y $T \in L(X, Y)$. Diremos que T es acotada si para todo conjunto acotado $A \subseteq X$ se tiene que $T[A]$ es acotado en Y.

En la Sección 1.4 vimos que las transformaciones lineales continuas entre espacios normados siempre coinciden con las acotadas. Esto deja de ser cierto cuando consideramos espacios vectoriales topológicos arbitrarios. Para probar esto requerimos del siguiente lema.

Lema 3.3.4. *Sean X un espacio normado de dimensión infinita y σ la topología débil inducida en X por la familia $B(X, \mathbb{F})$. Entonces la esfera unitaria S^1 no es un cerrado de σ.*

Demostración. Sean $x_0 \in B_X(0, 1)$ y $U \in \sigma$ tal que $x_0 \in U$. Entonces existen funcionales lineales continuos $f_1, \ldots, f_n \in B(X, \mathbb{F})$ y $U_1, \ldots, U_n \subseteq X$ abiertos en $\mathbb{F}$ tales que

$$x_0 \in \bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}[U_j] \subseteq U.$$

Como cada U_j es abierto, $f_j(x_0) \in U_j$ y $f_j \in B(X, \mathbb{F})$ entonces existe $r > 0$ tal que

$$x_0 \in \bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}\left[B_{\mathbb{F}}(f_j(x_0), r)\right] \subseteq U.$$

Ahora veamos que existe $y_0 \in X \setminus \{0\}$ tal que $f_j(y_0) = 0$ para toda $j \in \{1, \ldots, n\}$. Consideremos la función lineal $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon X \to \mathbb{F}^n$. Como X es de dimensión infinita entonces f no es inyectiva, por lo que su núcleo es no trivial. Así, basta considerar $y_0 \in \ker f \setminus \{0\}$.

Consideremos la función continua $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \|x_0 + ty_0\|$. Nótese que $g(0) < 1$ (pues $x_0 \in B_X(0,1)$) y que $g(t) \to \infty$ si $t \to \infty$, ya que $\|y_0\| > 0$. De esta manera, por el teorema del valor intermedio, podemos considerar $t_0 \in \mathbb{R}$ positiva tal que $x_0 + t_0 y_0 \in S^1$. Puesto que

$$|f_j(x_0 + t_0 y_0) - f_j(x_0)| = |t_0||f_j(y_0)| = 0 < r$$

para toda $j \in \{1, \ldots, n\}$ entonces $x_0 + t_0 y_0 \in U$. De esta manera, $U \cap S^1 \neq \emptyset$. Como U fue una vecindad en (X, σ) arbitraria de x_0 entonces $x_0 \in \mathrm{cl}_\sigma S^1$. Esto prueba que $B_X(0,1) \subseteq \mathrm{cl}_\sigma S^1$, por lo que S^1 no es cerrado en σ. □

Ejemplo 3.3.5. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado de dimensión infinita. El séptimo inciso del Ejemplo 3.1.2 muestra que (X, σ) es un e.v.t. Consideremos la transformación lineal $id\colon (X, \sigma) \to (X, \|\cdot\|)$. Por el Lema 3.3.4, $X \setminus S^1$ no es abierto en (X, σ) pero sí lo es en $(X, \|\cdot\|)$, por lo que la función id no es continua. Sin embargo, el Corolario 2.5.4 implica que id sí es acotada.

Aunque no todas las transformaciones lineales acotadas son continuas, todas las transformaciones lineales continuas sí son acotadas.

Proposición 3.3.6. *Sean X, Y espacios vectoriales topológicos y $T \in L(X, Y)$. Si T es continua entonces T es acotada.*

Demostración. Supongamos que T es continua y sea $A \subseteq X$ un conjunto acotado. Sea $V \subseteq Y$ una vecindad del origen. Entonces $T^{-1}[V]$ es una vecindad del origen en X. Por lo tanto, existe $t > 0$ tal que $A \subseteq sT^{-1}[V]$ para toda $s > t$. Luego, $T[A] \subseteq sV$ para toda $s > t$. Así, $T[A]$ es acotado en Y. □

Afortunadamente, al tratar funcionales lineales sobre un e.v.t. podemos rescatar más propiedades de los funcionales lineales continuos sobre espacios normados.

Proposición 3.3.7. *Sean X un e.v.t. y T un funcional lineal sobre X distinto de la constante* 0*. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *T es continua.*

2. $\ker T$ *es cerrado en X.*

3. $\ker T$ *no es denso en X.*

4. *T está acotada sobre alguna vecindad del origen en X.*

Demostración. 1) $\implies$ 2) Si T es continua, entonces $\ker T = T^{-1}[\{0\}]$ es cerrado en X.

2) $\implies$ 3) Dado que $\ker T \neq X$, si $\ker T$ es cerrado en X entonces $\ker T$ no es denso en X.

3) $\implies$ 4) Supongamos que $\ker T$ no es denso en X. Entonces existen $x \in X$ y una vecindad balanceada del origen $V \subseteq X$ tales que

$$(x + V) \cap \ker T = \emptyset.$$

Por la linealidad de T, se tiene que $T[V]$ es un conjunto balanceado en $\mathbb{F}$. Notemos que un conjunto balanceado de $\mathbb{F}$ es igual a $\mathbb{F}$ o es acotado. En el segundo caso ya terminamos, por lo que $T[V] = \mathbb{F}$. De esta manera, existe $y \in V$ tal que $T(y) = -T(x)$, por lo que $x + y \in (x + V) \cap \ker T$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, T está acotada en V.

4) $\implies$ 1) Sean $V \subseteq X$ una vecindad del origen en X y $M \in \mathbb{R}$ tales que $|T(x)| < M$ para toda $x \in V$. Para una $\epsilon > 0$ dada, consideremos la vecindad del origen $W = (\epsilon/M)V$. Entonces $|T(x)| < \epsilon$ para toda $x \in W$. Por lo tanto, T es continua en 0. Por la Proposición 3.3.1, se sigue que T es continua.

□

Corolario 3.3.8. *Sean X un e.v.t. localmente acotado y $T \in L(X, \mathbb{F})$. T es continua si y sólo si T es acotada.*

Demostración. Por la Proposición 3.3.6, si T es continua entonces T es acotada. Recíprocamente, supongamos que T es acotada. Sea $U \subseteq X$ una vecindad acotada del origen. Por hipótesis T está acotada en U. Así, la Proposición 3.3.7 implica que T es continua. □

3.4. Espacios de dimensión finita

En esta sección extenderemos los resultados sobre espacios normados de dimensión finita de la Sección 1.1 a espacios vectoriales topológicos de dimensión finita. Veremos que $\mathbb{F}^n$ tiene una única topología que lo hace un e.v.t y que la compacidad local caracteriza a los e.v.t de dimensión finita.

Lema 3.4.1. *Sea X un e.v.t. Si $T \in L(\mathbb{F}^n, X)$ entonces T es continua.*

Demostración. Sea $T \in L(\mathbb{F}^n, X)$ y consideremos $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{F}^n$. Entonces

$$Tz = \sum_{k=1}^{n} \pi_k(z) T e_k$$

para toda $z \in \mathbb{F}^n$, donde π_k es la k-ésima proyección de $\mathbb{F}^n$ sobre $\mathbb{F}$. Como cada π_k es continua, se sigue que T es continua. □

Proposición 3.4.2. *Sean X un e.v.t. y Y un subespacio vectorial de X de dimensión $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Si $T\colon \mathbb{F}^n \to Y$ es un isomorfismo lineal entonces T es un homeomorfismo.*
2. *Y es cerrado.*

Demostración. 1. Por el Lema 3.4.1, T es continua, por lo que resta ver que T^{-1} también lo es. Supongamos que $T^{-1} = (T_1, \ldots, T_n)$ donde $T_1, \ldots, T_n$ son funcionales lineales sobre Y. Para probar que T^{-1} es continua, probaremos que cada T_i lo es. Esto se hará demostrando que estas funciones están acotadas sobre alguna vecindad de 0_Y.

Sean $S = S^{n-1} \subseteq \mathbb{F}^n$, $B = B_{\mathbb{F}^n}(0,1)$ y $K = T[S]$. Puesto que T es continua entonces K es compacto. Además, la inyectividad de T implica que $0 \notin K$. Como K es cerrado, la Proposición 3.1.7 implica que existe $V \subseteq X$, una vecindad balanceada del origen, tal que $V \subseteq X \setminus K$. Definamos

$$E = T^{-1}[V \cap Y].$$

Notemos que si $x \in E$ entonces $T(x) \notin K$, por lo que $x \notin S$. De esta manera, $E \cap S = \emptyset$. Además, la linealidad de T implica que E es balancedo (pues V lo es).Cualquier conjunto balanceado es estrellado, por lo que, en particular, E es conexo. Puesto que $0 \in E \cap B$ (pues $0 \in V$) y $E \cap S = \emptyset$, la conexidad de E implica que $E \subseteq B$.

De esta manera, $|T_k(z)| \leq \|T^{-1}(z)\| < 1$ para toda $z \in V \cap Y$ y cada $k \in \{1, \ldots n\}$. Así, cada T_k está acotada en la vecindad del origen $V \cap Y$. Por la Proposición 3.3.7, se sigue que cada T_k es continua. Por lo tanto, T^{-1} es continua.

2. Sea $p \in \mathrm{cl}_X Y$. Consideremos un isomorfismo lineal $T \colon \mathbb{F}^n \to Y$. Definamos B y V como en el inciso anterior. Como V es absorbente, existe $t > 0$ tal que $p \in tV$. Supongamos que $U \subseteq X$ es una vecindad de p. Entonces $p \in U \cap tV$, por lo que $(Y \cap tV) \cap U \neq \emptyset$. De esta manera, $p \in \mathrm{cl}_X(Y \cap tV)$. Sin embargo, recordemos que $T^{-1}[Y \cap V] \subseteq B$, por lo que
$$Y \cap tV \subseteq T[tB] \subseteq T[t\,\mathrm{cl}_{\mathbb{F}^n} B].$$
Pero la compacidad de $t\,\mathrm{cl}_{\mathbb{F}^n} B$ y la continuidad de T implican que $T[t\,\mathrm{cl}_{\mathbb{F}^n} B]$ es compacto y, en particular, cerrado. Por lo tanto, $p \in T[t\,\mathrm{cl}_{\mathbb{F}^n} B] \subseteq Y$. Luego, $Y = \mathrm{cl}_X Y$.

□

Mediante la Proposición 3.4.2 podemos probar que los espacios vectoriales de dimensión finita en realidad coinciden con los espacios normados de dimensión finita.

Corolario 3.4.3. *Sea τ una topología sobre $\mathbb{F}^n$. Si $(\mathbb{F}^n, \tau)$ es un e.v.t. entonces τ es la topología euclidiana.*

Demostración. Supongamos que $(\mathbb{F}^n, \tau)$ es un e.v.t. Sea τ_e la topología euclidiana de $\mathbb{F}$. Dado que la función identidad $id \colon (X, \tau_e) \to (X, \tau)$ es un isomorfismo lineal, se sigue de la Proposición 3.4.2 que id es un homeomorfismo. Por lo tanto, $\tau = \tau_e$. □

En el Corolario 1.2.13 se demostró que todos los espacios normados localmente compactos son de dimensión finita. El mismo resultado sigue siendo cierto para espacios vectoriales topológicos.

Teorema 3.4.4. *Sea X un e.v.t. Si X es localmente compacto entonces X tiene dimensión finita.*

Demostración. Supongamos que X es localmente compacto y sea $V \subseteq X$ una vecindad balanceada del origen tal que $\mathrm{cl}_X V$ sea compacta. Por el segundo inciso de la Proposición 3.1.8, $\mathrm{cl}_X V$ está acotado, por lo que V también lo está. Así, por el tercer inciso de la misma proposición, $\{2^{-n}V : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local del origen. Por lo tanto,

$$\operatorname{cl}_X V \subseteq \bigcup_{x \in \operatorname{cl}_X V} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(x + 2^{-n}V\right).$$

De esta manera, la compacidad de $\operatorname{cl}_X V$ implica que existen $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ y $x_1, \dots, x_m \in \operatorname{cl}_X V$ tales que

$$\operatorname{cl}_X V \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} \left(x_k + 2^{-k}V\right).$$

Como $-n_1, \dots, -n_k \leq -1$ y V es balanceado entonces

$$\operatorname{cl}_X V \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} \left(x_k + 2^{-1}V\right).$$

Sea Y el espacio generado por $x_1, \dots, x_m$. Entonces Y tiene dimensión finita. Por la Proposición 3.4.2, Y es cerrado en X.

Por otra parte, la definición de Y implica que $V \subseteq Y + 2^{-1}V$. Por lo tanto,

$$V \subseteq Y + \frac{1}{2}V \subseteq Y + Y + \frac{1}{4}V = Y + \frac{1}{4}V.$$

Inductivamente, deducimos que $V \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}(Y+2^{-n}V)$. Puesto que $\{2^{-n}V : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local del origen en X, podemos usar el primer inciso de la Proposición 3.1.6 para concluir que $V \subseteq \operatorname{cl}_X Y = Y$. De esta manera, $nV \subseteq Y$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por el primer inciso de la Proposición 3.1.8, se sigue que $X \subseteq Y$. Así, $X = Y$. Luego, X tiene dimensión finita. □

Corolario 3.4.5. *Sea X un espacio vectorial topológico. Si X es localmente acotado y tiene la propiedad de Heine-Borel, entonces X tiene dimensión finita.*

Demostración. Supongamos que X es localmente acotado y tiene la propiedad de Heine-Borel. Sea $V \subseteq X$ una vecindad acotada del origen. Luego, por la Proposición 3.1.6, tenemos que $\operatorname{cl}_X V$ es cerrado y acotado. Como X tiene la propiedad Heine-Borel, se sigue que $\operatorname{cl}_X V$ es compacto. Por lo tanto, X es localmente compacto. Así, por el Teorema 3.4.4, X tiene dimensión finita. □

3.5. Seminormas, convexidad y normabilidad

En esta sección se introduce una técnica para construir espacios vectoriales topológicos a partir de un espacio vectorial y una familia de seminormas. Si X es un espacio vectorial y $\mathcal{P}$ es una familia separante de seminormas sobre X entonces ésta familia induce sobre X una estructura de e.v.t. localmente convexo que hace continuas a todas las seminormas en $\mathcal{P}$. Recíprocamente, se demostrará que cualquier e.v.t. localmente convexo puede construirse a partir de una familia de seminormas continuas. Finalmente veremos la estrecha relación entre la convexidad de un espacio y su normabilidad.

Definición 3.5.1. Sean X un espacio vectorial y $p\colon X \to \mathbb{R}$. Diremos que p es una seminorma sobre X si

1. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ para cualesquiera $x, y \in X$.
2. $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ para cualesquiera $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{F}$.

Las siguiente propiedades de una seminorma son inmediatas de la definición.

Proposición 3.5.2. *Sean X un espacio vectorial y p una seminorma sobre X. Entonces*

1. $p(0) = 0$.
2. $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$.
3. $p(x) \geq 0$.

De la misma forma que una norma induce una topología de e.v.t. sobre un espacio vectorial, se puede ver que una seminorma sobre un espacio vectorial X induce una topología sobre X que hace continuas a la suma vectorial y al producto escalar. Sin embargo, el hecho de que en general una seminorma no logre distinguir a los puntos distintos del 0 ocasionará que dicha topología no necesariamente sea T_0. Este problema lo resolveremos trabajando con familias de seminormas en las que cada punto distinto de 0 sea identificado como tal por algún elemento de la familia.

Definición 3.5.3. Sea X un espacio vectorial y $\mathcal{P}$ una familia de seminormas sobre X. Diremos que $\mathcal{P}$ es separante si para cada $x \in X$ existe $p \in \mathcal{P}$ tal que $p(x) \neq 0$.

Ahora demostraremos que una familia separante de seminormas sobre X induce una topología de e.v.t. en X. Es importante destacar que, al contrario de lo que sucede en espacios normados, el conjunto de bolas respecto a cada seminorma de la familia no necesariamente formará una base para alguna topología en X. Esto lo solucionaremos considerando a este conjunto como una sub-base y no como una base.

Teorema 3.5.4. *Sea X un espacio vectorial y $\mathcal{P}$ una familia separante de seminormas sobre X. Para cada $p \in \mathcal{P}$ y $n \in \mathbb{N}$ defínase*

$$V(p,n) = \left\{ x \in X \colon p(x) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Sean $\mathcal{B}_1$ la familia de intersecciones finitas de conjuntos de la forma $V(p,n)$ y $\mathcal{B}_2 = \{x + B \colon x \in X, B \in \mathcal{B}_1\}$. Entonces $\mathcal{B}_2$ es base para alguna topología $\tau_{\mathcal{P}}$ que hace de X un e.v.t. localmente convexo tal que

1. *Cada $p \in \mathcal{P}$ es continua.*

2. *Un conjunto $E \subseteq X$ es acotado si y sólo si cada $p \in \mathcal{P}$ está acotada en E.*

Demostración. Nótese que, por la Proposición 3.5.2, siempre se cumple que $0 \in V(p,n)$, por lo que $x \in x + V(p,n)$ para cualesquiera $x \in X$, $p \in \mathcal{P}$ y $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\mathcal{B}_2$ cubre a X.

Sean $z \in (x + B_1) \cap (y + B_2)$, con $x, y \in X$ y

$$B_1 = \bigcap_{i=1}^{n} V\left(p_i^1, n_i^1\right) \text{ y } B_2 = \bigcap_{j=1}^{m} V\left(p_j^2, n_j^2\right).$$

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $z - x \in V(p_i^1, n_i^1)$, por lo que $p_i^1(x-z) < \frac{1}{n_i^1}$. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ podemos considerar $m_i^1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{m_i^1} < \frac{1}{n_i^1} - p_i^1(x-z).$$

De manera análoga, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ elíjase $m_j^2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{m_j^2} < \frac{1}{n_j^2} - p_j^2(y-z).$$

Así pues, hagamos

$$B_3 = \left(\bigcap_{i=1}^{n} V\left(p_i^1, m_i^1\right) \cap \bigcap_{j=1}^{m} V\left(p_j^2, m_j^2\right) \right) \in \mathcal{B}_1$$

y consideremos el básico $z + B_3$. Sean $w \in z + B_3$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces

$$\begin{aligned} p_i^1(w - x) &\leq p_i^1(w - z) + p_i^1(z - x) \\ &< \frac{1}{m_i^1} + p_i^1(z - x) \\ &< \frac{1}{n_i^1} - p_i^1(x - z) + p_i^1(z - x) \\ &= \frac{1}{n_i^1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $w - x \in V\left(p_i, n_i^1\right)$ y, en consecuencia, $w \in x + B_1$. Análogamente, $w \in y + B_2$. Por lo tanto, $z \in B_3 \subseteq (x + B_1) \cap (y + B_2)$.

De esta manera, $\mathcal{B}_2$ es base para alguna topología $\tau_{\mathcal{P}}$ en X. Nótese que como cada p_i es una seminorma entonces cada elemento de $\mathcal{B}_2$ es convexo y balanceado. Por lo tanto, X es localmente convexo. Además, notemos que $U \in \tau_{\mathcal{P}}$ es una vecindad del 0 si y sólo si $x + U$ es vecindad abierta de x para toda $x \in X$.

Para ver que $(X, \tau_{\mathcal{P}})$ es T_1 consideremos $x_0 \in X$ y $y \in X \setminus \{x_0\}$. Como $\mathcal{P}$ es separante y $x_0 - y \neq 0$ entonces existe $p \in \mathcal{P}$ tal que $p(x_0 - y) > 0$. Así, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 - y \notin V(p, n)$ ó, equivalentemente, $x_0 \notin y + V(p, n)$. Por lo tanto, $y \notin \mathrm{cl}_X\{x_0\}$ y, así, $\mathrm{cl}_X\{x_0\} = \{x_0\}$. Luego, X es T_1.

Ahora veamos que las operaciones de X son continuas. Sean $x, y \in X$ y $(x + y) + \bigcap_{i=1}^m V(p_i, n_i)$ una vecindad básica de $x + y$. Sea $V = \cap_{i=1}^m V(p_i, 2n_i)$ y consideremos

$$W = (x + V) \times (y + V)$$

una vecindad básica de (x, y) en $X \times X$. Si $(a, b) \in W$ entonces

$$p_i((a + b) - (x + y)) \leq p_i(a - x) + p_i(b - y) < \frac{1}{2n_i} + + \frac{1}{2n_i} = \frac{1}{n_i}.$$

Por lo tanto, $(a + b) \in (x + y) + \bigcap_{i=1}^m V(p_i, n_i)$. Luego, la suma de X es continua.

Por otro lado, consideremos $\alpha \in \mathbb{F}$, $x \in X$ y $\alpha x + \bigcap_{i=1}^m V(p_i, n_i)$ una vecindad básica de αx. Notemos que si $\beta \in \mathbb{F}$ y $y \in X$ entonces

$$\begin{aligned} p_i(\beta y - \alpha x) &= p_i(\beta(x - y) + (\beta - \alpha)x) \\ &\leq |\beta| p_i(x - y) + |\beta - \alpha| p_i(x). \end{aligned}$$

De esta manera, consideremos $\epsilon > 0$ tal que

$$\epsilon < \frac{1}{n_i}$$

para toda $i \in \{1, \dots\}$ y elijamos $\delta > 0$ tal que

$$\delta < \frac{\epsilon}{2(p_i(x) + 1)}$$

para toda $i \in \{1, \dots\}$. Así, si $|\beta - \alpha| < \delta$ entonces

$$\begin{aligned} p_i(\beta y - \alpha x) &\leq |\beta| p_i(y - x) + \frac{\epsilon}{2(p_i(x) + 1)} p_i(x) \\ &< (\delta + |\alpha|) p_i(y - x) + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Entonces, para hacer $p_i(\beta y - \alpha x) < \epsilon$ basta tomar $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{k} < \frac{\epsilon}{2(\delta + |\alpha|)}.$$

De esta manera, si $y \in x + \bigcap_{i=1}^m V(p_i, k)$ y $\beta \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ entonces

$$p_i(\beta y - \alpha x) < \epsilon < \frac{1}{n_i}$$

para toda $i \in \{1, \dots, n\}$. Luego, $\beta y \in \alpha x + \bigcap_{i=1}^m V(p_i, n_i)$ y, en consecuencia, la multiplicación por escalares es continua en (α, x).

Así, hemos demostrado que (X, τ) es un e.v.t. localmente convexo. Para ver la continuidad de cada $p \in \mathcal{P}$, fijemos $p \in \mathcal{P}$ y $x \in X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, si $z \in x + V(p, n)$ entonces

$$|p(z) - p(x)| \leq p(z - x) < \frac{1}{n}$$

por lo que p es continua en x. Por lo tanto, todas las seminormas en P son continuas.

Finalmente, sean $E \subseteq X$ un conjunto acotado y $p \in \mathcal{P}$. Dado que $V(p, 1)$ es un abierto, entonces $E \subseteq kV(p, 1)$ para alguna $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $p(x) < k$ para toda $x \in E$.

Recíprocamente, supongamos que $E \subseteq X$ es tal que toda seminorma en $\mathcal{P}$ está acotada en E. Sea $\bigcap_{i=1}^m V(p_i, n_i)$ una vecindad básica del origen y consideremos $M \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $p_i < M$ en E y $n > M n_i$ para toda $i \in \{1, \dots, m\}$. De esta manera, si $x \in E$ entonces

$$p_i\left(\frac{x}{n}\right) < \frac{M}{n} < \frac{1}{n_i}$$

para toda $i \in \{1, \dots, m\}$. Por lo tanto, $x/n \in V$ y, en consecuencia, $E \subseteq nV$. Si $t > n$ entonces $nV \subseteq tV$, por lo que $E \subseteq tV$ para toda $t \leq n$. Por ende, E es acotado. $\square$

Destacablemente, cuando la familia $\mathcal{P}$ es numerable, el teorema anterior da lugar a un e.v.t. localmente convexo y metrizable mediante una métrica invariante.

Proposición 3.5.5. *Sean X un espacio vectorial y $\mathcal{P} = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia separante de seminormas sobre X. Entonces el e.v.t $(X, \tau_{\mathcal{P}})$ es metrizable.*

Demostración. Para cada $x, y \in X$ definamos

$$d(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^{-n} p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)}.$$

Nótese que d es una métrica invariante.

Sea $r > 0$. Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2^{-n}p_n(x)}{1+p_n(x)} < r$ si y sólo si $p_n(x) < \frac{r}{2^{-n}-r}$. Además, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$, $\frac{1}{2^n} < r$. En consecuencia, $\frac{2^{-n}p_n(x)}{1+p_n(x)} < r$ para toda $n > N$, pues $\frac{p_n(x)}{1+p_n(x)} < 1$. Luego, $d(x,0) < r$ si y sólo si

$$p_n(x) < \frac{r}{2^{-n} - r}$$

para $1 \leq n \leq N$. Es decir,

$$B_d(0,r) = \bigcap_{n=1}^{N} \left\{ x \in X : p_n(x) < \frac{r}{2^{-n} - r} \right\}.$$

Puesto que cada p_n es continua (Teorema 3.5.4), entonces la bola $B_d(0,r)$ es una intersección finita de abiertos de $\tau_{\mathcal{P}}$ y, por ende, también es abierta. Dado que d es una métrica invariante, tenemos que $B_d(x,r) = B_d(0,r) + x$ para cualesquiera $x \in X$ y $r > 0$. Por lo tanto, todas las bolas respecto a la métrica d son abiertas en $\tau_{\mathcal{P}}$. Veamos que estas bolas forman una base para esta topología. Sea $W \subseteq X$ una vecindad del 0 respecto a $\tau_{\mathcal{P}}$. Entonces existen $n_1, \ldots n_k \in \mathbb{N}$ tales que

$$\bigcap_{j=1}^{k} V(p_j, n_j) \subseteq W$$

donde los conjuntos $V(p_j, n_j)$ están definidos como en el Teorema 3.5.4. Sea $r > 0$ tal que

$$2r < \min\{2^{-j}\frac{1}{n_j} : 1 \leq j \leq k\}.$$

Si $x \in B_d(0,r)$ entonces

$$\frac{2^{-j}p_j(x)}{1 + p_j(x)} < r < \frac{2^{-j}}{2n_j}$$

para $1 \leq j \leq k$, por lo que

$$\frac{p_x(x)}{1+p_j(x)} < \frac{1}{2n_j}.$$

Un simple cálculo muestra que esto implica que $p_j(x) < \frac{1}{n_j}$ para $1 \leq j \leq k$. En consecuencia, $x \in W$. Luego, $B_d(0,r) \subseteq W$.

Finalmente, si $x \in X$ y $W \subseteq X$ es una vecindad abierta de x respecto a $\tau_{\mathcal{P}}$ entonces existe $r > 0$ tal que $B_d(0,r) \subseteq W - x$. Por lo tanto, $B_d(x,r) = B_d(0,r) + x \subseteq W$. De esta manera, las bolas respecto a la métrica d forman una base para la topología $\tau_{\mathcal{P}}$. $\square$

Mediante esta proposición, podemos construir el que más tarde será nuestro primer ejemplo de un espacio de Fréchet que no es normable.

Ejemplo 3.5.6. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Sea $(K_n)_n$ una sucesión de compactos contenidos en Ω que cubran a Ω y tales que $K_n \subseteq \operatorname{int} K_{n+1}$. Definimos $C(\Omega)$ como el espacio de funciones continuas $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Consideramos la familia separante de seminormas en $C(\Omega)$ conformada por

$$p_n(f) = \max_{x \in K_n} |f(x)|$$

y dotemos a $C(\Omega)$ con la topología generada por esta familia. Veamos que éste es un espacio de Fréchet. Por la Proposición 3.5.5, este espacio es metrizable mediante la métrica invariante

$$d(f,g) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{2^{-n} p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}.$$

Una sucesión $(f_k)_k$ en $C(\Omega)$ converge a $g \in C(\Omega)$ si y sólo si $(f_k)_k$ converge uniformemente a g en cada compacto K_n y una sucesión $(f_k)_k$ es de Cauchy en $C(\Omega)$ si y sólo si $(f_k)_k$ es uniformemente de Cauchy en cada K_n.

Así pues, sea $(f_k)_k$ una sucesión de Cauchy en $C(\Omega)$. Entonces $(f_k)_k$ converge uniformemente en K_n a una función continua $g_n\colon K_n \to \mathbb{C}$. Puesto que la sucesión de compactos $(K_n)_n$ cubre a Ω, podemos definir $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mediante $g(x) = g_n(x)$ si $x \in K_n$ (el hecho de que la sucesión $(K_n)_n$ esté anidada implica que g está bien definida). La sucesión $(f_k)_k$ converge uniformemente a g en cada K_n, por lo que para ver que $f_k \to g$ en $C(\Omega)$, sólo resta ver que $g \in C(\Omega)$. Sean $x \in \Omega$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \operatorname{int} K_n$. Como $\operatorname{int} K_n$ es una vecindad de x donde $g = g_n$ y g_n es continua en x entonces g es continua en x. Por lo tanto, $g \in C(\Omega)$ y $f_k \to g$ en $C(\Omega)$.

Esto prueba que d es una distancia invariante y completa compatible con la topología de $C(\Omega)$, por lo que $C(\Omega)$ es un F-espacio. Adicionalmente, el Teorema 3.5.4 asegura que este espacio es localmente convexo, por lo que $C(\Omega)$ es un espacio de Fréchet.

El trabajo que hemos hecho hasta ahora en esta sección muestra que si en un espacio vectorial X se tiene una familia separante de seminormas, a X se le puede dotar de una estructura de e.v.t. localmente convexo. A continuación veremos que en realidad cualquier e.v.t. localmente convexo se puede construir de esta manera.

Primero veamos que en un espacio normado, la norma puede expresarse en términos topológicos-algebraicos. Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $B_1 = B(0,1)$. Consideremos $x \in X$ y $s > \|x\|$. Entonces $\left\|s^{-1}x\right\| < 1$ y, por ende, $s^{-1}x \in B_1$. Por otro lado, si $s \leq \|x\|$ entonces $\left\|s^{-1}x\right\| \geq 1$ y, en consecuencia, $s^{-1}x \notin B_1$. Esto prueba que

$$\|x\| = \text{ínf}\{t > 0\colon t^{-1}x \in B_1\}.$$

De esta manera, dado un espacio vectorial X y un conjunto $A \subseteq X$ podremos definir, bajo condiciones apropiadas, una seminorma cuya bola unitaria sea A.

Definición 3.5.7. Sean X un espacio vectorial y $A \subseteq X$ un conjunto absorbente. El funcional de Minkowski de A, $\mu_A\colon X \to \mathbb{R}$, se define como

$$\mu_A(x) = \text{ínf}\{t > 0\colon t^{-1}x \in A\}.$$

Por la discusión anterior, el funcional de Minkoski de la bola unitaria de una norma es igual a dicha norma. Podemos demostrar lo mismo para una seminorma.

Proposición 3.5.8. *Sean X un espacio vectorial y p una seminorma sobre X. Entonces la bola unitaria $B = \{x \in X\colon p(x) < 1\}$ es convexa, balanceada y absorbente. Además, $p = \mu_B$.*

Demostración. Las primeras tres propiedades son inmediatas de la definición de seminorma.

Puesto que B es absorbente, entonces podemos considerar el funcional de Minkowski de B. Para ver que $\mu_B = p$, primero tomemos $x \in X$ y consideremos $s > p(x)$. Entonces $p(s^{-1}x) = s^{-1}p(x) < 1$. Por lo tanto,

$s^{-1}x \in B$. En consecuencia, $\mu_B(x) \leq s$. Haciendo tender s a $p(x)$ obtenemos que $\mu_B(x) \leq p(x)$.

Finalmente, consideremos $0 < t \leq p(x)$. Entonces $p(t^{-1}x) \geq 1$, por lo que $t^{-1}x \notin B$; es decir, si $s > 0$ y $s^{-1}x \in B$ entonces $p(x) < s$. En consecuencia, $p(x) \leq \mu_B(x)$. De esta manera, $\mu_B = p$. $\square$

Para asegurar que el funcional de Minkowski de un conjunto absorbente A sea una seminorma, bastará asumir que A es balanceado. Bajo esta suposición, A y la bola unitaria de μ_A tendrán el mismo funcional de Minkowski.

Proposición 3.5.9. *Sean X un espacio vectorial y $A \subseteq X$ un conjunto convexo y absorbente. Entonces*

1. $\mu_A(x+y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$.
2. $\mu_A(tx) = t\mu_A(x)$ *para toda* $t \geq 0$.
3. *Si A es balanceado entonces μ_A es una seminorma sobre X.*
4. *Si A es balanceado, $B = \{x \in X : \mu_A(x) < 1\}$ y $C = \{x \in X : \mu_A(x) \leq 1\}$ entonces $B \subseteq A \subseteq C$ y $\mu_B = \mu_A = \mu_C$.*

Demostración. 1. Sean $x, y \in X$ y $\epsilon > 0$. Entonces existen $\epsilon_1, \epsilon_2 \in (0, \frac{\epsilon}{2})$ tales que $s := \mu_A(x) + \epsilon_1$ y $t := \mu_A(y) + \epsilon_2$ satisfacen que $s^{-1}x, t^{-1}y \in A$. Como A es convexo, entonces

$$\frac{x+y}{s+t} = \frac{s}{s+t}\frac{x}{s} + \frac{t}{s+t}\frac{y}{t} \in A.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mu_A(x+y) &\leq s+t \\ &= \mu_A(x) + \mu_A(y) + \epsilon_1 + \epsilon_2 \\ &< \mu_A(x) + \mu_A(y) + \epsilon. \end{aligned}$$

De esta manera, $\mu_A(x+y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$.

2. Sean $x \in X$ y $t \geq 0$. Entonces

$$\{s > 0 \colon s(tx) \in A\} = t\{s > 0 \colon sx \in A\}.$$

Por lo tanto, $\mu_A(tx) = t\mu_A(x)$.

3. Supongamos que A es balanceado. Por el primer inciso, μ_A es subaditiva. Primero mostraremos que si $\alpha \in \mathbb{F}$ cumple que $0 < |\alpha| \leq 1$ entonces $\mu_A(\alpha x) = \mu_A(|\alpha| x)$. Así pues, sean $\alpha \in \mathbb{F}$ con $|\alpha| \leq 1$ y $x \in X$. En primer lugar, consideremos $t > 0$ tal que $t^{-1}(|\alpha| x) \in A$. Como A es balanceado, entonces

   $$t^{-1}(\alpha x) = \frac{\alpha}{|\alpha|}(t^{-1}|\alpha| x) \in A.$$

   Por lo tanto, $\mu_A(\alpha x) \leq t$ y, en consecuencia, $\mu_A(\alpha x) \leq \mu_A(|\alpha| x)$.

   Recíprocamente, sea $t > 0$ tal que $t^{-1}(\alpha x) \in A$. Entonces

   $$t^{-1}(|\alpha| x) = \frac{|\alpha|}{\alpha}(t^{-1}\alpha x) \in A.$$

   Por lo tanto, $\mu_A(|\alpha| x) \leq t$ y, en consecuencia, $\mu_A(|\alpha| x) \leq \mu_A(\alpha x)$. De esta manera, $\mu_A(|\alpha| x) = \mu_A(\alpha x)$.

   Ahora, sea $\beta \in \mathbb{F}$ distinta de 0. Usando el inciso anterior y lo que acabamos de probar se obtiene que

   $$\begin{aligned}\mu_A(\beta x) &= \mu_A\left(|\beta| \frac{\beta}{|\beta|} x\right) \\ &= |\beta| \mu_A\left(\frac{\beta}{|\beta|} x\right) \\ &= |\beta| \mu_A(x).\end{aligned}$$

   En el caso $\beta = 0$ es inmediato que $\mu_A(\beta x) = |\beta| \mu_A(x)$. Por lo tanto, μ_A es una seminorma.

4. Supongamos que A es balanceado. Por el inciso anterior, se tiene que μ_A es una seminorma. Luego, por la Proposición 3.5.8, $\mu_B = \mu_A$.

   Por otro lado, notemos que si $x \in A$ entonces $\mu_A(x) \leq 1$, por lo que $A \subseteq C$. Además, si $x \in X$ es tal que $\mu_A(x) < 1$ entonces existe $s \in (0, 1)$ tal que $s^{-1}x \in A$. Como A es balanceado, se sigue que $x = s(s^{-1}x) \in A$. Así, $B \subseteq A$.

   De la contención $A \subseteq C$ y de la definición del funcional de Minkowski, se obtiene la desigualdad $\mu_C \leq \mu_A$. Para obtener la desigualdad en el otro sentido, consideremos $t > s > \mu_C(x)$. Como $\mu_C(x/s) < 1$ (pues μ_C es seminorma) entonces $x/s \in C$, por lo que $\mu_A(x/s) \leq 1$. De esta manera,

   $$\mu_A\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{s}{t} \mu_A\left(\frac{x}{s}\right) \leq \frac{s}{t} < 1$$

y, en consecuencia, $\mu_A(x) < t$. Haciendo tender t a $\mu_C(x)$ obtenemos que $\mu_A(x) \leq \mu_C(x)$. Por lo tanto, $\mu_A = \mu_B = \mu_C$.

$\square$

Cuando nuestro espacio vectorial es un e.v.t., el funcional de Minkowski nos permite ver que los conjuntos convexos, balanceados y abiertos realmente se pueden ver como bolas unitarias.,

Lema 3.5.10. *Sean X un e.v.t. y $A \subseteq X$ un conjunto convexo, y balanceado. Si A es abierto entonces $A = \{x \in X : \mu_A(x) < 1\}$.*

Demostración. Supongamos que A es abierto. Por el cuarto inciso de la Proposición 3.5.9 tenemos que

$$\{x \in X : \mu_A(x) < 1\} \subseteq A.$$

Recíprocamente, sea $x \in A$. Consideremos la función continua $f : (0, \infty) \to X$ dada por $f(t) = \frac{x}{t}$. Como $f(1) = x$, $x \in A$ y A es abierto entonces existe $\delta > 0$ tal que $\delta < 1$ y si $s \in (1 - \delta, 1 + \delta)$ entonces $f(s) \in A$. De esta manera, si $s \in (1 - \delta, 1)$ entonces $\frac{x}{s} \in A$, por lo que $\mu_A(x) \leq s < 1$. $\square$

Teorema 3.5.11. *Sean (X, τ) un e.v.t. y $\mathcal{B}$ una base local del origen compuesta por conjuntos abiertos, convexos y balanceados. Entonces:*

1. *$\mathcal{P} = \{\mu_V : V \in \mathcal{B}\}$ es una familia separante de seminormas continuas sobre X.*

2. *La topología $\tau_{\mathcal{P}}$ coincide con la topología de X.*

Demostración. 1. Sea $V \in \mathcal{B}$. Por la Proposición 3.5.9, μ_V es una seminorma. Así, si $r > 0$ y $x, y \in X$ entonces

$$|\mu_V(x) - \mu_V(y)| \leq \mu_V(x - y) \leq r$$

siempre que $x - y \in rV$. Por lo tanto, μ_V es continua.

Por otro lado, si $x \in X \setminus \{0\}$ entonces existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \notin V$, pues X es T_1. Dado que V es abierto, convexo y balanceado, se sigue del Lema 3.5.10 que $\mu_V(x) \geq 1$. Por lo tanto, $\mathcal{P}$ es una familia separante de seminormas continuas sobre X.

2. Puesto que cada $p \in \mathcal{P}$ es continua, entonces los conjuntos $V(p,n)$ del Teorema 3.5.4 son abiertos en (X,τ) para toda $p \in \mathcal{P}$. Por lo tanto, $\tau_{\mathcal{P}} \subseteq \tau$.

   Por otro lado, dado que cada $V \in \mathcal{B}$ es convexo, balanceado y abierto, el Lema 3.5.10 implica que

$$V = \{x \in X \colon \mu_V(x) < 1\} = V(\mu_V, 1) \in \tau_{\mathcal{P}}$$

   para toda $V \in \mathcal{B}$. Por lo tanto, $\tau \subseteq \tau_{\mathcal{P}}$.

□

A continuación, resolveremos el problema de la normabilidad de un e.v.t. En la Sección 3.6 veremos que cualquier e.v.t. localmente acotado es metrizable. Sin embargo, si a esta hipótesis le añadimos que el espacio sea localmente convexo obtendremos que el espacio en cuestión en realidad es normable.

Teorema 3.5.12. *Sea X un e.v.t. X es normable si y sólo X es localmente convexo y localmente acotado.*

Demostración. Si X es normable entonces las bolas $B(0,r)$ son una base local de vecindades convexas y acotadas del origen.

Recíprocamente, supongamos que X es localmente convexo y localmente acotado. Por la Proposición 3.1.7, existe $U \subseteq X$ una vecindad abierta, convexa, acotada y balanceada del 0. Definamos $\|x\| := \mu_U(x)$ para cualquier $x \in X$. Como U es abierto, balanceado y convexo entonces $\|\cdot\|$ es una seminorma sobre X (Proposición 3.5.9).

Por la Proposición 3.1.8, los conjuntos rU con $r > 0$ forman una base local del origen, pues U es acotado. Dado que X es T_1, se sigue que si $x \neq 0$ entonces existe $r > 0$ tal que $x \notin rU$. Como U es balanceado, se sigue que $\|x\| \geq r$. Por lo tanto, $\|\cdot\|$ es una norma.

Por otro lado, como U es abierto entonces $U = \{x \in X \colon \|x\| < 1\}$ (Lema 3.5.10). Por lo tanto, $rU = \{x \in X \colon \|x\| < r\}$. En primer lugar, esto implica que las bolas de la norma $\|\cdot\|$ son abiertas en X y, en segundo lugar, que estas bolas forman una base local del origen. Luego, los conjuntos

$$rU + y = \{x \in X \colon \|x - y\| < r\}$$

forman una base para la topología de X. En consecuencia, la norma $\|\cdot\|$ es compatible con la topología de X. Por lo tanto, X es normable. □

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ una vecindad abierta, acotada y convexa del origen. Como A es convexo y $0 \in A$ entonces A es balanceado. Por la construcción hecha en el Teorema 3.5.12 se tiene que μ_A es una norma sobre $\mathbb{R}^n$ y $A = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \mu_A(x) < 1\}$. El Teorema 1.2.8 implica que μ_A es equivalente a la norma euclidiana. Así, se sigue de la Proposición 1.2.7 que A es homeomorfo a la bola unitaria de la norma euclidiana. De esta manera, el Teorema 3.5.12 tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.5.13. *Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ dos vecindades abiertas, acotadas y convexas del origen. Entonces A y B son homeomorfos.*

Con el Teorema 3.5.12 ya estamos en condiciones de probar que $C(\Omega)$ no es un espacio normable.

Ejemplo 3.5.14. Consideremos el espacio $C(\Omega)$ definido en el Ejemplo 3.5.6 cuya topología está determinada por la familia de seminormas

$$p_n(f) = \max_{x \in K_n} |f(x)|.$$

Notemos que $p_n \leq p_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo que los conjuntos

$$V_n = \left\{ f \in C(\Omega) \colon p_n(f) < \frac{1}{n}. \right\}$$

forman una base local para el 0.

Por otro lado, por el Teorema 3.5.4, tenemos que un conjunto $E \subseteq C(\Omega)$ es acotado si y sólo si para toda $n \in N$ existe $M_n \in \mathbb{R}$ tal que $p_n(f) \leq M_n$; es decir, para toda $f \in E$ y $x \in K_n$

$$|f(x)| \leq M_n.$$

Pero cada V_n contiene alguna $f \in C(\Omega)$ tal que $p_{n+1}(f)$ sea tan grande como se quiera. Por lo tanto, V_n no está acotada para ninguna $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, el 0 no tiene vecindades acotadas. Por el Teorema 3.5.12, se sigue que $C(\Omega)$ no es normable.

El espacio del ejemplo anterior no es normable porque no es localmente acotado, a pesar de ser localmente convexo. El ejemplo siguiente no es normable porque la única vecindad convexa del origen es el espacio mismo.

Ejemplo 3.5.15. Sean λ la medida de Lebesgue sobre el intervalo $[0, 1]$ y $p \in (0, 1)$. Consideremos el espacio $X = L^p([0, 1])$ presentado en el Ejemplo

3.1.2. Sean $V \subseteq L^p$ una vecindad convexa del origen y $r > 0$ tal que $B(0,r) \subseteq V$. Sea $f \in L^p \setminus \{0\}$. Dado que $p < 1$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(f,0) < n^{1-p}r$.

Por otro lado, consideremos la función continua $x \overset{h}{\mapsto} \int_{[0,x]} |f|^p d\lambda$ con dominio $[0,1]$. De la desigualdad

$$0 \leq \int_{[0,x]} |f|^p d\lambda \leq \int_{[0,1]} |f|^p d\lambda$$

y del teorema del valor intermedio se sigue que para cada $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ existe $x_i \in [0,1]$ tal que

$$\int_{[0,x_i]} |f|^p \, d\lambda = \frac{i}{n} \int_{[0,1]} |f|^p \, d\lambda.$$

Como h es no decreciente y $\int_{[0,1]} |f|^p \, d\lambda > 0$ entonces $x_i < x_{i+1}$, por lo que

$$\int_{[x_i,x_{i+1}]} |f|^p \, d\lambda = \frac{1}{n} \int_{[0,1]} |f|^p \, d\lambda$$

para cada $i \in \{0,\ldots,n-1\}$. Definamos $g_i = nf\chi_{[x_i,x_{i+1})}$. Entonces

$$\int_{[0,1]} |g_i|^p \, d\lambda = n^p \int_{[x_i,x_{i+1}]} |f|^p \, d\lambda = n^{p-1} \int_{[0,1]} |f|^p \, d\lambda < r$$

por lo que $g_i \in V$. Como V es convexo, entonces

$$f = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} g_i \in V.$$

De esta manera, $V = L^p$. Por lo tanto, L^p no es localmente convexo. Por el Teorema 3.5.12 se sigue que L^p no es normable.

3.6. Espacios metrizables

Sabemos que cualquier espacio topológico metrizable es primero numerable y que el recíproco de ésta afirmación no es cierto. Sin embargo, en la clase de los espacios vectoriales topológicos, la metrizabilidad sí es equivalente a la primero numerabilidad. Más aún, un e.v.t. primero numerable es metrizable mediante una métrica invariante; en esta demostración se usará la construcción realizada para demostrar el Teorema 3.2.6.

Antes de abordar el problema de la metrizabilidad, veamos que sí existen espacios vectoriales topológicos no metrizables

Ejemplo 3.6.1. Sea J un conjunto de índices no numerable. Entonces el espacio $X = \Pi_{j\in J}\mathbb{F}$ es un e.v.t. que no es primero numerable, por lo que tampoco es metrizable.

Sean X un e.v.t. primero numerable y $\mathcal{B} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base local del origen. Recursivamente, definamos V_1 como una vecindad balanceada del origen tal que $V_1 \subseteq U_1$ y V_{n+1} como una vecindad balanceada del origen tal que $V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n \cap U_n$. Entonces $V_n \subseteq U_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local del origen compuesta por vecindades balanceadas del origen y $V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n$. Si X es localmente convexo entonces esto puede realizarse de forma que los conjuntos V_n sean convexos. Por lo tanto, podemos aplicar la construcción realizada para demostrar el Teorema 3.2.6 a la colección $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. A través de la función obtenida en esta construcción podremos definir una métrica sobre X.

Teorema 3.6.2. *Sea (X, τ) un e.v.t. Si X es primero numerable entonces existe una métrica invariante d sobre X tal que*

1. *d es compatible con la topología de X.*
2. *Las bolas abiertas de la métrica d centradas en el origen son balanceadas.*

Si X es localmente convexo entonces d puede ser construida de manera tal que las bolas abiertas sean convexas.

Demostración. Sea $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base local del 0 compuesta por vecindades balanceadas tal que $V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Si X es localmente convexo entonces podemos suponer que los conjuntos V_n son convexos. Para utilizar la construcción del Teorema 3.2.6, definamos $B(2^{-n}) = V_n$ y $B(1) = V_1$. Defínanse los conjuntos $B(t)$ $(t > 0)$ como en dicha construcción. Notemos que si los conjuntos V_n son convexos y r es un número diádico entonces $B(r)$ es una suma finita de conjuntos convexos, por lo que $B(r)$ es convexo. De esta manera, si los conjuntos V_n son convexos entonces para toda $t > 0$ se tiene que $B(t)$ es una unión anidada de conjuntos convexos y, por lo tanto, es convexo. La función $f : X \to [0, \infty)$ dada por

$$f(x) = \text{ínf}\{t > 0 : x \in B(t)\}$$

es una función continua con las siguientes propiedades

1. $f(0) = 0$.

2. $f(x) = f(-x)$ para toda $x \in X$.

3. $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ para cualesquiera $x, y \in X$.

Sea $x \in X \setminus \{0\}$. Dado que $\{V_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ es una base local del origen y X es T_1 entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin V_n = B(2^{-n})$ por lo que $f(x) \geq 2^{-n} > 0$. Esto implica que si $x \neq 0$ entonces $f(x) \neq 0$.

Definamos $d(x,y) = f(x-y)$ para $x, y \in X$. Veamos que d es una métrica invariante en X. Sean $x, y, z \in X$.

1. Si $d(x,y) = 0$ entonces $f(x-y) = 0$ por lo que $x - y = 0$. Además, $d(x,x) = f(x-x) = 0$.

2. $d(x,y) = f(x-y) = f(y-x) = d(y,x)$.

3. $d(x,z) = f(x-z) \leq f(x-y) + f(y-z) = d(x,y) + d(y,z)$.

4. $d(x+z, y+z) = f((x+z) - (y+z)) = f(x-y) = d(x,y)$.

Para ver que d es compatible con τ, consideremos los conjuntos

$$A(r) = \bigcup \{B(s) \colon 0 < s < r\}, \quad r > 0.$$

Destaquemos que $A(r)$ es unión de conjuntos balanceados y, en consecuencia, también es balanceado. Además, si X es localmente convexo entonces $A(r)$ es unión anidada de conjuntos convexos y, por lo tanto, también es convexo. Notemos que $x \in A(r)$ si y sólo si $f(x) < r$, es decir, si y sólo si $x \in B_d(0,r)$. Por lo tanto, para cada $r > 0$ se tiene que $A(r) = B_d(0,r)$.

Por otro lado, si U es una vecindad del origen entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B(2^{-n}) \subseteq U$. Dado que $A(2^{-n-1}) \subseteq B(2^{-n})$ se sigue que $\{A(r) \colon r > 0\}$ es una base local del origen (compuesta por conjuntos convexos, si X es localmente convexo).

Finalmente, tenemos que para toda $r > 0$ se tiene que

$$x + V(r) = \{y \in X \colon f(x-y) < r\} = B_d(x,r).$$

Como $\{V(r) \colon r > 0\}$ es una vase local del origen, se sigue que $\{B_d(x,r) \colon x \in X, r > 0\}$ es una base de X. Por lo tanto, τ y la topología inducida por d comparten una misma base. Luego, d es compatible con τ. Además, las bolas abiertas de la métrica d centradas en el origen son conjuntos balanceados (y convexos, si X es localmente convexo).

$\square$

Por un lado, el Teorema 3.6.2 nos permite probar que al estudiar un e.v.t. metrizable podemos suponer que la métrica que atestigua su metrizabilidad es invariante.

Corolario 3.6.3. *Sea (X, τ) un e.v.t. Si X es metrizable entonces existe una métrica invariante d sobre X con las características del Teorema 3.6.2.*

Demostración. Si X es metrizable entonces X es primero numerable, por lo que el Teorema 3.6.2 asegura que existe una métrica d con las condiciones requeridas. □

Por otro lado, en la Proposición 3.1.8 se demostró que cualquier e.v.t. localmente acotado es primero numerable. De esta manera, el siguiente corolario es inmediato del Teorema 3.6.2.

Corolario 3.6.4. *Sea X un e.v.t. Si X es localmente acotado entonces X es metrizable.*

Sin embargo, no todos los espacios vectoriales topológicos metrizables son localmente acotados.

Ejemplo 3.6.5. Consideremos el espacio $X = \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ dotado de la topología producto. Este espacio es completamente metrizable mediante la métrica completa invariante

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{mín}\{1, |x(n) - y(n)|\}}{2^n}$$

y la convergencia en esta métrica es equivalente a la convergencia por coordenadas. En el Ejemplo 3.1.2 se demostró que este espacio es un e.v.t.

Por otro lado, es fácil probar que los conjuntos

$$V_n = \left\{ x \in X : \forall i \in \{1, \dots n\} \left(|x(i)| < \frac{1}{n} \right) \right\}$$

forman una base local del origen compuesta por abiertos convexos. De esta manera, X es un espacio de Fréchet.

Para ver que X no es localmente acotado, basta probar que V_n no es acotado para ninguna $n \in \mathbb{N}$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y sea $t > 0$. Definamos $x \in X$ tal que $x(n+1) = t$ y $x(i) = 0$ para $i \neq n+1$. Entonces $x \in V_n$ pero $x \notin tV_{n+1}$, por lo que $V_n \nsubseteq tV_{n+1}$. Luego, V_n no es acotado.

La siguiente proposición nos muestra una de las utilidades de poder trabajar con métricas invariantes en cualquier e.v.t. metrizable.

Proposición 3.6.6. *Sea X un e.v.t.*

1. *Si d es una métrica invariante sobre X entonces*
$$d(nx, 0) \leq nd(x, 0)$$
para cualesquiera $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$.

2. *Supongamos que X es metrizable. Si $(x_n)_n$ es una sucesión en X que converge a 0 entonces existe una sucesión $(\gamma_n)_n$ en $\mathbb{F}$ tal que $\gamma_n \to \infty$ y $\gamma_n x_n \to 0$.*

Demostración.

1. Sea d una métrica invariante sobre X. Sea $x \in X$. Notemos que
$$d(x, 0) = d(0 + x, -x + x) = d(0, -x).$$
La prueba será por inducción. Claramente, el resultado es cierto para $n = 1$. Así, supongamos que el resultado es cierto para alguna $k \in \mathbb{N}$. Entonces
$$\begin{aligned} d((k+1)x, 0) &= d(kx + x, 0) \\ &= d(kx, -x) \\ &\leq d(kx, 0) + d(0, -x). \end{aligned}$$
Por hipótesis de inducción, $d(kx, 0) = kd(x, 0)$, por lo que
$$d((k+1)x, 0) \leq kd(x, 0) + d(x, 0) = (k+1)d(x, 0).$$

2. Por el Corolario 3.6.3, existe una métrica d sobre X invariante y compatible con la topología de X. Sea $(x_n)_n$ una sucesión convergente a 0 en X. Dado que $d(x_n, 0) \to 0$ entonces para toda $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq n_k$,
$$d(x_n, 0) < \frac{1}{k^2}.$$
Definamos $\gamma_n = 1$ para $n < n_1$ y $\gamma_n = k$ para $n_k \leq n < n_{k+1}$. Por construcción, $\gamma_n \to \infty$. Además, si $n_k \leq n < n_{k+1}$ entonces
$$d(\gamma_n x_n, 0) = d(kx_n, 0) \leq kd(x_n, 0) < \frac{1}{k}$$
por lo que $\gamma_n x_n \to 0$.

□

En el Corolario 3.3.8 se demostró que los funcionales lineales acotados sobre un espacio localmente acotado coinciden con los continuos. La última proposición de esta sección muestra que para garantizar esto en realidad es suficiente pedir que el dominio sea metrizable.

Proposición 3.6.7. *Sean X, Y espacios vectoriales topológicos y $T(X, Y)$. Supongamos que X es metrizable. Si T es acotada entonces T es continua.*

Demostración. Sea $(x_n)_n$ una sucesión en X tal que $x_n \to 0$. Por la Proposición 3.6.6, existe una sucesión de escalares $(\gamma_n)_n$ tal que $\gamma_n \to \infty$ y $\gamma_n x_n \to 0$. Dado que $\gamma_n x_n \to 0$ entonces el conjunto $\{\gamma_n x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado en X. Puesto que T es acotada, se sigue que $\{\gamma_n T(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado en Y.

Sea $W \subseteq Y$ una vecindad del origen. Entonces existe $t > 0$ tal que $\gamma_n T(x_n) \in sW$ para toda $s > t$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma_n \geq t$ para toda $n \geq N$. Entonces $\gamma_n T(x_n) \in \gamma_n W$ para toda $n \geq N$. Luego, $T(x_n) \in W$ para toda $n \geq N$. Por lo tanto, $T(x_n) \to 0$ en Y y, en consecuencia, T es continua en 0. Por la Proposición 3.3.1 se sigue que T es continua. □

3.7. Espacios completamente metrizables

En la sección anterior se mostró que en un e.v.t. metrizable siempre se pueden encontrar métricas invariantes compatibles con la topología del espacio. En esta sección mostraremos que en un e.v.t. completamente metrizable siempre se pueden encontrar métricas invariantes y completas compatibles con la topología del espacio. Más aún, en un e.v.t. completamente metrizable todas las métricas invariantes son completas.

Consideremos un e.v.t. X, metrizable mediante una métrica invariante d_X y sea (Y, d_Y) la completación del espacio métrico (X, d_X). En la Proposición 1.5.10 vimos que si d_X es una norma entonces d_Y es una norma completa y Y es un espacio de Banach. Desafortunadamente, en el caso de espacios vectoriales topológicos metrizables ni siquiera podemos darle una buena estructura de espacio vectorial a Y, pues la definición del producto escalar en Y requirió de la homogeneidad de la norma en la proposición ya referida. Sin embargo, sí podemos definir una suma en Y.

Dados $x, y \in Y$, sean $(x_n)_n$ y $(y_n)_n$ sucesiones en X tales que $x_n \to x$ y

$y_n \to y$ en Y. Entonces

$$\begin{aligned} d_Y(x_n + y_n, x_m + y_m) &= d_X(x_n + y_n, x_m + y_m) \\ &= d_X((x_n + y_n) - (x_m + y_m), 0) \\ &= d_X((x_n - x_m) + (y_n - y_m), 0) \\ &= d_X(x_n - x_m, y_m - y_n) \\ &\leq d_X(x_n - x_m, 0) + d_X(0, y_m - y_n) \\ &= d_X(x_n, x_m) + d_X(y_n, y_m) \\ &= d_Y(x_n, x_m) + d_Y(y_n, y_m). \end{aligned}$$

Como las sucesiones $(x_n)_n$ y $(y_n)_n$ son de Cauchy en Y entonces $(x_n + y_n)_n$ también es de Cauchy en Y y, por lo tanto, podemos definir $x + y$ como

$$x + y = \lim_{n \to \infty} (x_n + y_n).$$

Este límite no depende de las sucesiones que se tomen. Si hacemos $0_Y = 0_X$ y $-x = \lim_{n\to\infty} -x_n$ entonces $(Y, +, 0_Y)$ es un grupo abeliano. Además, por la continuidad de d_Y y la invarianza de d_X, tenemos que para cualquier $z \in Y$, si tomamos una sucesión $(z_n)_n$ en X tal que $z_n \to z$ entonces

$$\begin{aligned} d_Y(x + z, y + z) &= \lim_{n \to \infty} d_Y(x_n + z_n, y_n + z_n) \\ &= \lim_{n \to \infty} d_X(x_n + z_n, y_n + z_n) \\ &= \lim_{n \to \infty} d_X(x_n, y_n) \\ &= \lim_{n \to \infty} d_Y(x_n, y_n) \\ &= d_Y(x, y), \end{aligned}$$

por lo que d_Y es invariante bajo traslaciones.

Finalmente, la suma en Y es continua. Para ver esto, sean $x, y \in Y$ y $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ sucesiones en Y tales que $x_n \to x$ y $y_n \to y$. Veamos que $x_n + y_n \to x + y$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $\alpha_n, \beta_n \in X$ tales que

$$d_Y(\alpha_n, x_n) < \frac{1}{2n} \text{ y } d_Y(\beta_n, y_n) < \frac{1}{2n}.$$

Dado que $x_n \to x$ y $y_n \to y$, entonces $\alpha_n \to x$ y $\beta_n \to y$. Por lo tanto,$x + y = \lim_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n)$. Además, como d_Y es invariante bajo traslaciones, se tiene

$$d_Y(\alpha_n + \beta_n, x_n + y_m) \leq d_Y(\alpha_n, x_n) + d_Y(\beta_n, y_n) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

por lo que $\lim_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n)$. Luego, $x_n + y_n \to x + y$.

Así, hemos probado el siguiente lema.

Lema 3.7.1. *Sea X un e.v.t. metrizable mediante una métrica invariante d_X. Si (Y, d_Y) es la completación del espacio métrico (X, d_X) entonces se puede definir una suma continua en Y que extiende a la suma vectorial en X tal que $(Y, +)$ es un grupo abeliano y d_Y es una métrica invariante.*

El siguiente lema corresponde a un curso de topología general y probarlo escapa a los objetivos de este texto. Su demostración puede consultarse en el Lema 2.3.15 de [11].

Lema 3.7.2 (W. Sierpiński,1928)**.** *Sean Y un espacio topológico metrizable y X un subespacio de Y. Si X es completamente metrizable entonces X es un G_δ en Y.*

Supongamos que $(Y, +)$ es un grupo abeliano y τ es una topología en Y que hace continua a la operación de Y. Sea $y_0 \in Y$. Entonces la función $y \mapsto y + y_0$ es continua y su inversa $y \mapsto y - y_0$ también es continua. Por lo tanto, $y \mapsto y + y_0$ es un homeomorfismo de Y en Y para toda $y_0 \in Y$. Este hecho es fundamental en los siguientes dos lemas que ahondan más en este tipo de estructuras.

Lema 3.7.3. *Sean $(Y, +)$ un grupo abeliano y τ una topología sobre Y que haga continua a la operación del grupo. Si $A \subseteq Y$ es de la primera categoría en Y entonces $y + A = \{y + a \colon a \in A\}$ es de la primera categoría en Y para toda $y \in Y$.*

Demostración. Primero notemos que para cualesquiera $B \subseteq Y$ y $y \in Y$ se tiene que $y + \mathrm{cl}_Y B = \mathrm{cl}_Y(y + B)$, pues la operación $x \mapsto x + y$ es un homeomorfismo. Por otro lado, sean $N \subseteq Y$ un conjunto denso en ninguna parte en Y y $y \in Y$. Si $y + N$ no es denso en ninguna parte entonces existe un abierto no vacío $U \subseteq Y$ tal que $U \subseteq \mathrm{cl}_Y(y + N) = y + \mathrm{cl}_Y N$, por lo que el abierto $-y + U$ está contenido en $\mathrm{cl}_Y N$, contradiciendo que N es denso en ninguna parte.

Así pues, sean $A \subseteq Y$ un conjunto de la primera categoría en Y, $y \in Y$ y $(N_k)_k$ una sucesión de conjuntos densos en ninguna parte en Y tales que

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_k.$$

Entonces los conjuntos $y + N_k$ son densos en ninguna parte y

$$y + A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} y + N_k$$

por lo que $y + A$ es de la primera categoría en Y. $\square$

Lema 3.7.4 (V.L. Klee, 1952)**.** *Sean $(Y, +)$ un grupo abeliano y τ una topología sobre Y que haga continua a la operación del grupo . Supongamos que Y es de la segunda categoría en sí mismo. Si $X \subseteq Y$ es un subgrupo de Y y X es un G_δ denso en Y entonces $X = Y$.*

Demostración. Sea $X \subseteq Y$ un subgrupo de Y tal que X es un G_δ denso en Y. Consideremos abiertos $U_n \subseteq Y$ tales que

$$X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n.$$

Nótese que cada U_n es un abierto denso en Y. Además,

$$Y \setminus X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (Y \setminus U_n).$$

Como cada U_n es un abierto denso entonces los conjuntos $Y \setminus U_n$ son densos en ninguna parte, por lo que $Y \setminus X$ es un conjunto de la primera categoría en Y. Puesto que Y es de segunda categoría en sí mismo entonces Y no puede verse como la unión de dos conjuntos de primera categoría en Y. Por lo tanto, X es de segunda categoría en Y.

Si existe $y \in Y \setminus X$ entonces $y + X \subseteq Y \setminus X$, pues X es un subgrupo de Y. Pero todos los subconjuntos de un conjunto de primera categoría también son de primera categoría, por lo que $y + X$ es de primera categoría en Y y, en consecuencia, X también lo es (por el Lema 3.7.3), lo que es una contradicción. Por lo tanto, $Y \setminus X = \emptyset$. $\square$

Teorema 3.7.5 (V.L. Klee, 1952)**.** *Sea (X, τ) un e.v.t. completamente metrizable. Toda métrica invariante sobre X compatible con τ es completa.*

Demostración. Sea d_X una métrica invariante sobre X compatible con τ. Consideremos (Y, d_Y) la completación del espacio métrico (X, d_X). Por el Lema 3.7.1, se puede definir una suma continua en Y tal que $(X, +)$ es un subgrupo de $(Y, +)$. Como Y es metrizable y, por hipótesis, X es completamente metrizable, el Lema 3.7.2 implica que X es un G_δ en Y. Además, por construcción, X es un subgrupo denso en Y. Finalmente, el teorema de la categoría de Baire implica que Y es de la segunda categoría en sí mismo. De esta manera, el Lema 3.7.4 implica que $X = Y$. En particular, tenemos que $d_X = d_Y$. Por ende, d_X es una métrica completa. $\square$

Combinando el Teorema 3.7.5 con el Corolario 3.6.3 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.7.6. *Sea (X, τ) un e.v.t. completamente metrizable. Entonces existe una métrica invariante y completa sobre X compatible con τ.*

A su vez, este corolario nos proporciona una importante caracterización de los F-espacios.

Corolario 3.7.7. *Sea X un e.v.t. X es un F-espacio si y sólo si X es completamente metrizable.*

Puesto que las normas inducen métricas invariantes, el Teorema 3.7.5 nos da una gran variedad de espacios vectoriales topológicos que son metrizables pero no completamente metrizables.

Ejemplo 3.7.8. Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado que no es de Banach entonces X no es completamente metrizable. Por ejemplo, $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$ y $(C([0,1], \|\cdot\|_p)$ no son completamente metrizables para $p \in (1, \infty)$.

En la Proposición 1.5.2 se probó que si dos espacios normados son homeomorfos mediante un homeomorfismo lineal entonces ambos espacios son de Banach o ninguno lo es. Ahora estamos en condiciones de dar una fuerte generalización de dicha proposición.

Corolario 3.7.9. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Si X es homeomorfo a un espacio métrico completo entonces $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Supongamos que X es homeomorfo a un espacio métrico completo. Entonces X es completamente metrizable. Como la métrica inducida por $\|\cdot\|$ es una métrica invariante, el Teorema 3.7.5 implica que dicha métrica es completa. $\square$

Capítulo 4

Teoremas fundamentales en espacios vectoriales topológicos

En este capítulo generalizaremos los teoremas fundamentales de los espacios de Banach al contexto de los espacios vectoriales topológicos.

A pesar de que el teorema de Hahn-Banach está formulado en espacios vectoriales arbitrarios, en el Capítulo 2 mostramos algunas aplicaciones importantes en espacios normados. Son estas aplicaciones las que se generalizan a los espacios vectoriales topológicos en este capítulo.

Por otro lado, hay que destacar que la completez jugó un papel fundamental en la demostración de los teoremas de la aplicación abierta, de la gráfica cerrada y de Banach-Steinhaus. Es por esto que los teoremas fundamentales se generalizan de manera natural a la clase de los F-espacios. Si bien el teorema de Banach-Steinhaus también se puede formular de manera natural en esta clase de espacios, este teorema puede plantearse en un contexto mucho más general.

4.1. Teorema de Hahn-Banach

En el Capítulo 2 demostramos que un espacio normado no trivial siempre tiene funcionales lineales continuos no triviales. Desafortunadamente esto deja de ser cierto en espacios vectoriales topológicos. Sin embargo, en esta sección demostramos una versión del teorema de Hahn-Banach que permite demostrar dicha afirmación en cualquier espacio localmente convexo.

Lema 4.1.1. *Sean X un e.v.t. y T un funcional lineal sobre X. Si T no es constante entonces T es abierta.*

Demostración. Sea $T\colon X \to \mathbb{F}$ un funcional lineal no constante, lo que implica que T es suprayectiva. Sea $U \subseteq X$ un abierto y fijemos $x_0 \in U$. Consideremos $x_1 \in X$ tal que $T(x_1) = 1$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $x_0 + tx_1 \in U$ siempre que $|t| < \delta$.

Consideremos $B_{\mathbb{F}}(T(x_0), \delta)$. Sea $y \in B_{\mathbb{F}}(T(x_0), \delta)$. Entonces $|y - T(x_0)| < \delta$ y, por lo tanto, $x_0 + (y - T(x_0))x_1 \in U$. Así, $y = T(x_0 + (y - T(x_0))x_1) \in T[U]$. Luego, $B_{\mathbb{F}}(T(x_0), \delta) \subseteq T[U]$. Por lo tanto, $T[U]$ es abierto en Y y, en consecuencia, T es abierta. □

Para probar la siguiente versión del teorema de Hahn-Banach haremos uso del funcional de Minkowski (Definición 3.5.7) y sus propiedades que se demostraron en la Proposición 3.5.9.

Teorema 4.1.2. *Sea X un espacio vectorial topológico. Sean $A, B \subseteq X$ no vacíos, ajenos y convexos.*

1. *Si A es abierto entonces existen un funcional lineal continuo T definido sobre X y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\operatorname{Re} T(x) < \gamma \leq \operatorname{Re} T(y)$$

   para cualesquiera $x \in A$ y $y \in B$.

2. *Si A es compacto, B es cerrado y X es localmente convexo, entonces existen $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ y un funcional lineal continuo definido sobre X tales que*

$$\operatorname{Re} T(x) < \gamma_1 < \gamma_2 < \operatorname{Re} T(y)$$

   para cualesquiera $x \in A$ y $y \in B$.

Demostración. Supongamos que hemos probado el teorema para espacios reales. Si X es un espacio complejo, entonces considerándolo como un espacio real encontramos un funcional $\mathbb{R}$-lineal continuo T que satisface la desigualdad deseada. Si hacemos $S(z) = T(z) - iT(iz)$ entonces S es un funcional $\mathbb{C}$-lineal (vease la prueba del teorema de Hahn-Banach) continuo que tiene a T como parte real. Por lo tanto, S satisface las condiciones deseadas. De esta manera, basta demostrar el teorema para espacios reales.

1. Supongamos que A es abierto. Fijemos $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$. Hagamos $x_0 = b_0 - a_0$ y $C = A - B + x_0$. Entonces C es una vecindad abierta y convexa del 0 en X. Sea p el funcional de Minkowski de C . Por la Proposición 3.5.9, tenemos que p es una forma sublineal.

   Por otro lado, como A y B son ajenos, entonces $x_0 \notin C$, por lo que $p(x_0) \geq 1$. De esta manera, si M es el subespacio de X generado por x_0, definamos el funcional lineal $f \colon M \to \mathbb{R}$ mediante $f(tx_0) = t$. Si $t \geq 0$ entonces
$$f(tx_0) = t \leq tp(x_0) = p(tx_0)$$
   y si $t < 0$ entonces $f(tx_0) < 0 \leq p(tx_0)$. Por lo tanto, f es un funcional lineal sobre M dominado por la forma sublineal p. Por el teorema de Hahn-Banach, existe un funcional lineal T definido sobre X que extiende a f y tal que $T \leq p$. En particular, $T \leq 1$ sobre C, por lo que $T \geq -1$ sobre $-C$. Luego, $|T| \leq 1$ sobre $C \cap (-C)$, que es una vecindad del origen en X. Por lo tanto, T es un funcional lineal acotada en una vecindad del origen y, en consecuencia, es continua (Proposición 3.3.7).

   Ahora, si $a \in A$ y $b \in B$ entonces
$$T(a) - T(b) + 1 = T(a - b + x_0) \leq p(a - b + x_0) \leq 1$$
   pues $T(x_0) = f(x_0) = 1$, $a - b + x_0 \in C$. Por lo tanto, $T(a) \leq T(b)$.

   Esto, junto con la continuidad de T y la conexidad de A y B, implica que $T[A]$ y $T[B]$ son intervalos en $\mathbb{R}$, con $T[A]$ a la izquierda de $T[B]$. Además, $T[A]$ es abierto por el Lema 4.1.1. Si γ es el extremo derecho de A entonces $\gamma \in \mathbb{R}$, pues $T[A]$ está acotado superiormente por el conjunto no vacío $T[B]$. Por lo tanto,
$$T(a) < \gamma \leq T(b)$$
   para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$, que es lo que buscábamos.

2. Supongamos que X es localmente convexo, A compacto y B cerrado. Por la Proposición 3.2.3, existe $V \subseteq X$ una vecindad abierta y convexa del origen tal que $(A + V) \cap B = \emptyset$. Aplicando la primera parte del teorema con $A + V$ en lugar de A, obtenemos un funcional lineal continuo T definido sobre X tal que $T[A + V]$ y $T[B]$ son intervalos ajenos en $\mathbb{R}$ con $T[A + V]$ abierto y a la izquierda de $T[B]$. Pero $T[A]$

es un subintervalo compacto de $T[A+V]$. De esta manera, si γ_1 es el extremo derecho de $T[A]$ y γ_2 es el extremo izquierdo de $T[B]$ entonces $\gamma_1 < \gamma_2$. Por lo tanto,

$$T(a) < \gamma_1 < \gamma_2 < T(b)$$

para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$.

□

Corolario 4.1.3. *Sea X un espacio vectorial topológico localmente convexo. Si $x_1, x_2 \in X$ son puntos distintos entonces existe un funcional lineal continuo T definido sobre X tal que $T(x_1) \neq T(x_2)$*

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in X$ puntos distintos. Basta aplicar el segundo inciso del Teorema 4.1.2 a los compactos $A = \{x_1\}$ y $B = \{x_2\}$. □

Si X no es localmente convexo entonces X puede no tener funcionales lineales continuos no triviales.

Ejemplo 4.1.4. Sea $p \in (0,1)$ y consideremos el espacio $L^p([0,1])$. En el Ejemplo 3.5.15 demostramos que $L^p([0,1])$ es un espacio vectorial topológico en el que los únicos abiertos convexos son $\emptyset$ y L^p, por lo que L^p no es localmente convexo. Ahora consideremos un funcional lineal continuo $T\colon L^p \to \mathbb{F}$ y sea $\epsilon > 0$. Dado que T es lineal y continua entonces $T^{-1}[B_{\mathbb{F}}(0,\epsilon)]$ es convexo y abierto, por lo que $T^{-1}[B_{\mathbb{F}}(0,\epsilon)] = L^p$. Por lo tanto, $|T(f)| < \epsilon$ para toda $f \in L^p$. Así, $T \equiv 0$.

4.2. Teorema de Banach-Steinhaus

En esta Sección reinterpretaremos el teorema de Banach-Steinhaus presentada en la Sección 2.5 de tal forma que quede formulado en términos puramente topológicos. Veremos que las familias de funciones lineales entre espacios normados uniformemente acotadas coinciden con las familias equicontinuas de funciones lineales y que en la clase de los espacios vectoriales topológicos la equicontinuidad es un concepto más fuerte que la acotación uniforme. El teorema de Banach-Steinhaus se puede formular en espacios vectoriales topológicos arbitrarios mediante el concepto de categoría de Baire, por lo que al formularlo en la clase de los F-espacios será fundamental el teorema de la categoría de Baire.

Definición 4.2.1. Sean X y Y dos espacios vectoriales topológicos y $\Gamma \subseteq L(X,Y)$ una familia de aplicaciones lineales continuas. Diremos que Γ es equicontinua si para toda $W \subseteq Y$ vecindad del 0 en Y existe $V \subseteq X$ una vecindad del 0 en X tal que $T[V] \subseteq W$ para toda $T \in \Gamma$.

Sean X, Y espacios vectoriales normados y $\Gamma \subseteq B(X,Y)$. Notemos que la familia Γ está uniformente acotada si y sólo si existe $M > 0$ tal que

$$\bigcup_{T \in \Gamma} T[B_X(0,1)] \subseteq B_Y(0,M).$$

De manera más general, Γ está uniformente acotada si y sólo si para todo conjunto acotado $E \subseteq X$ se tiene que $\bigcup_{T\in\Gamma} T[E]$ es un conjunto acotado en Y. De esta manera, podemos dar la siguiente definición topológica de una familia uniformemente acotada de funciones lineales continuas entre espacios vectoriales topológicos.

Definición 4.2.2. Sean X, Y espacios vectoriales topológicos y $\Gamma \subseteq L(X,Y)$ una familia de aplicaciones lineales continuas. Diremos que Γ está uniformemente acotada si para cualquier conjunto acotado $E \subseteq X$ se tiene que $\bigcup_{T\in\Gamma} T[E]$ es un conjunto acotado en Y.

En el caso de espacios normados, una familia $\Gamma \subseteq L(X,Y)$ está uniformemente acotada si y sólo si es equicontinua.

Proposición 4.2.3. *Sean X y Y espacios vectoriales normados y $\Gamma \subseteq B(X,Y)$. Γ está uniformemente acotada si y sólo si es equicontinua.*

Demostración. Primero supongamos que Γ es uniformemente acotada. Entonces para cualesquiera $x, y \in X$ y $T \in \Gamma$ se tiene que

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \|T\|\,\|x-y\| \leq \sup_{T\in\Gamma} \|T\|\,\|x-y\|$$

Por lo tanto, Γ es equicontinua.

Recíprocamente, supongamos que Γ no está uniformemente acotada. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y tomemos $T_n \in \Gamma$ tal que $\|T_n\| \geq 2^n$. Sea $x_n \in \mathrm{cl}_X\, B(0,1)$ tal que $\|T_n\| - 1/n < \|T_n(x_n)\|$ y definamos $y_n = \frac{x_n}{n}$. Así, consideremos las sucesiones $(y_n)_n$ y $(T_n)_n$. Nótese que $y_n \to 0$. Además, dada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\|T_n y_n\| = \frac{\|T_n(x_n)\|}{n} \geq \frac{1}{n}\left(\|T_n\| - \frac{1}{n}\right) \geq \frac{2^n}{n} - \frac{1}{n^2}.$$

Esto prueba que Γ no es equicontinua, pues de lo contrario existiría $\delta > 0$ tal que si $\|y\| < \delta$ entonces $\|T(y)\| < 1$ para toda $T \in \Gamma$. No obstante, dada $\delta > 0$ se tiene que $\|y_n\| < \delta$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2^n}{n} - \frac{1}{n^2} > 1$. Sin embargo, $T_n \in \Gamma$ y

$$\|T_n(y_n)\| \geq \frac{2^n}{n} - \frac{1}{n^2} > 1.$$

□

Aunque en el contexto de los espacios normados las familias uniformemente acotadas coincidan con las equicontinuas, esto no tiene por qué ser cierto en el contexto de los espacios vectoriales topológicos. Por ejemplo, consideremos un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ y sea σ la topología débil en X inducida por la familia de funciones $B(X, \mathbb{F})$. En el Ejemplo 3.3.5 vimos que la transformación identidad $id\colon (X, \sigma) \to (X, \|\cdot\|)$ es acotada aunque no es continua, por lo que la familia $\{id\}$ está uniformemente acotada aunque no es equicontinua. No obstante, una familia equicontinua siempre está uniformemente acotada.

Proposición 4.2.4. *Sean X y Y espacios vectoriales topológicos y $\Gamma \subseteq L(X, Y)$ una familia de transformaciones lineales continuas. Si Γ es equicontinua entonces Γ está uniformemente acotada.*

Demostración. Supongamos que Γ es equicontinua. Sea $E \subseteq X$ un conjunto acotado y $W \subseteq Y$ una vecindad del 0 en Y. Puesto que Γ es equicontinua, sea $V \subseteq X$ una vecindad del 0 en X tal que $T[V] \subseteq W$ para toda $T \in \Gamma$.

Como E es acotado en X, existe $t > 0$ tal que $E \subseteq sV$ para toda $s > t$. Por lo tanto, $T[E] \subseteq sT[V] \subseteq sW$ para cualesquiera $T \in \Gamma$ y $s > t$. Por lo tanto, $\bigcup_{T \in \Gamma} T[E] \subseteq sW$, para toda $s > t$. □

De esta forma, el teorema de Banach-Steinhaus entre espacios normados puede reformularse de la siguiente manera.

Teorema (Banach-Steinhaus). *Sean X un espacio de Banach, Y un espacio vectorial normado y $\Gamma \subseteq B(X, Y)$. Si Γ está puntualmente acotada entonces Γ es equicontinua.*

En la siguiente formulación que daremos de este teorema, en un principio no será necesario que la familia Γ esté puntualmente acotada en todo el dominio, sino solamente en un subconjunto de segunda categoría del mismo.

Teorema 4.2.5 (Banach-Steinhaus). *Sean X y Y dos espacios vectoriales topológicos y $\Gamma \subseteq L(X,Y)$ una familia de aplicaciones lineales continuas. Sea $B = \{x \in X : \Gamma(x)$ es acotado en $Y\}$ donde $\Gamma(x)$ es la órbita de x bajo Γ; es decir, $\Gamma(x) = \{T(x) : T \in \Gamma\}$. Si B es de segunda categoría en X entonces Γ es equicontinua y $B = X$.*

Demostración. Sea $W \subseteq Y$ una vecindad del origen en Y. Dado que Y es T_3 (Corolario 3.2.5), existe $U \subseteq Y$ una vecindad cerrada del origen tal que $U - U \subseteq W$. Sea

$$E := \bigcap_{T\in\Gamma} T^{-1}[U].$$

Como cada $T \in \Gamma$ es continua y U es cerrado en Y, entonces E es cerrado en X.

Por otro lado, sea $x \in B$. Entonces existe alguna $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $\Gamma(x) \subseteq n_x U$ (pues $\Gamma(x)$ es acotado para toda $x \in B$). Por lo tanto, $T(x) \in n_x U$ para toda $T \in \Gamma$. Luego, $x \in n_x T^{-1}[U]$ para toda $T \in \Gamma$. De esta manera,

$$x \in \bigcap_{T\in\Gamma} n_x T^{-1}[U] = n_x \bigcap_{T\in\Gamma} T^{-1}[U] = n_x E.$$

Por lo tanto, $B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nE$.

Puesto que B es de segunda categoría en X y cada nE es cerrado, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}_X kE \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\operatorname{int}_X E \neq \emptyset$. De esta manera, sea $x_0 \in \operatorname{int}_X E$ y definamos $V := x_0 - E$, entonces V es una vecindad del origen (no necesariamente abierta). Nótese que $T(x_0) \in U$ y $T[E] \subseteq U$ para toda $T \in \Gamma$. Por lo tanto,

$$T[V] = T(x_0) - T[E] \subseteq U - U \subseteq W$$

para toda $T \in \Gamma$. Por lo tanto, Γ es equicontinua.

Finalmente, dado que Γ es equicontinua, se tiene que Γ está uniformemente acotada, por lo que $\Gamma(x)$ está acotado para toda $x \in X$. Por lo tanto, $X = B$. □

Si X es un F-espacio entonces el teorema de la categoría de Baire nos permite enunciar el siguiente corolario.

Corolario 4.2.6. *Sean X un F-espacio, Y un e.v.t. y $\Gamma \subseteq L(X,Y)$ una familia de aplicaciones lineales continuas. Si $\Gamma(x)$ es un conjunto acotado en Y para toda $x \in X$ entonces Γ es equicontinua.*

4.3. Teorema de la aplicación abierta

Una generalización natural del Teorema 2.3.4 a la clase de los F-espacios es la siguiente.

Teorema. *Sean X, Y dos F-espacios y $T \in L(X, Y)$ una aplicación lineal continua. Si T es suprayectiva entonces T es abierta.*

Análogamente al teorema de Banach-Steinhaus, la hipótesis de que T sea suprayectiva puede sustituirse por que $T[X]$ sea de segunda categoría en Y y de esta manera formular el teorema de la aplicación abierta en un contexto más general.

Lema 4.3.1. *Sean X y Y dos espacios vectoriales topológicos y $T\colon X \to Y$ una aplicación lineal continua. Entonces*

1. *T es abierta si y sólo si $T[U]$ es una vecindad del origen en Y siempre que U es una vecindad del origen en X.*
2. *Si T es abierta entonces T es suprayectiva.*

Demostración.

1. Si T es abierta y U es una vecindad del origen en X entonces $T[U]$ es una vecindad del origen en Y. Recíprocamente, supongamos que $T[U]$ es una vecindad del origen en Y siempre que U es una vecindad del origen en X. Sea $U \subseteq X$ abierto y $T(x) \in T[U]$ con $x \in U$. Como $U - x$ es una vecindad del origen en X entonces $T[U - x] = T[U] - T(x)$ es una vecindad del origen en Y, por lo que $T[U]$ es una vecindad de $T(x)$ en Y. Luego, T es abierta.
2. Supongamos que T es abierta. Entonces $T[X]$ es una vecindad del origen y, por tanto, un conjunto absorbente. Así, dada $y \in Y$ existe $t > 0$ tal que $y \in tT[X]$. Como $T[X]$ es un subespacio vectorial de Y se sigue que $y \in T[X]$, por lo que $T[X] = Y$.

□

Teorema 4.3.2 (Aplicación abierta)**.** *Sean X un F-espacio, Y un e.v.t. y $T \in L(X, Y)$ una aplicación lineal continua. Si $T[X]$ es de segunda categoría en Y entonces $T[X] = Y$ y T es abierta.*

Demostración. Por el segundo inciso del Lema 4.3.1, basta probar que T es abierta. Así pues, sea $U \subseteq X$ una vecindad del origen en X. Sean d

una métrica completa invariante compatible con la topología de X y $r > 0$ tal que $\mathrm{cl}_X\, B_X(0,r) \subseteq U$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ hagamos $U_n = B_X(0, r2^{-n})$. Mostraremos que existe $V \subseteq Y$ una vecindad del 0 en Y tal que

$$V \subseteq \mathrm{cl}_Y\, T[U_1] \subseteq T[U].$$

Primero notemos que $U_2 - U_2 \subseteq U_1$, pues si $x, y \in U_2$ entonces $d(x-y,0) \leq d(x,0) + d(y,0) < r2^{-1}$. Así, el segundo inciso de la Proposición 3.1.6 implica que

$$\mathrm{cl}_Y\, T[U_2] - \mathrm{cl}_Y\, T[U_2] \subseteq \mathrm{cl}_Y\, (T[U_2] - T[U_2]) \subseteq \mathrm{cl}_Y\, T[U_1].$$

Por otro lado, como U_2 es abierto entonces $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nU_2$ (Proposición 3.1.8) y, por ende, $T[X] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nT[U_2]$. Puesto que $T[X]$ es de segunda categoría en Y, se sigue que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\emptyset \neq \mathrm{int}_Y\, \mathrm{cl}_Y\, kT[U_2] = k\, \mathrm{int}_Y\, \mathrm{cl}_Y\, T[U_2]$. Por lo tanto, $\mathrm{int}_Y\, \mathrm{cl}_Y\, T[U_2] \neq \emptyset$. De esta manera, sean $y_0 \in Y$ y $V \subseteq Y$ una vecindad del origen en Y tales que $y_0 + V \subseteq \mathrm{cl}_Y\, T[U_2]$. Como V es vecindad del origen entonces

$$V \subseteq V - V = (y_0 + V) - (y_0 + V) \subseteq \mathrm{cl}_Y\, T[U_2] - \mathrm{cl}_Y\, T[U_2] \subseteq \mathrm{cl}_Y\, T[U_1].$$

Esta es la primera contención que buscábamos.

Nótese que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $U_{n+1} - U_{n+1} \subseteq U_n$, por lo que el argumento anterior se puede usar para mostrar que $\mathrm{cl}_Y\, T[U_n]$ es una vecindad del origen para toda $n \in \mathbb{N}$.

Ahora tomemos $y_1 \in \mathrm{cl}_Y\, T[U_1]$ y elijamos inductivamente $y_n \in \mathrm{cl}_Y\, T[U_n]$ y $x_n \in U_n$ de la siguiente manera. Supongamos que hemos elegido $y_n \in \mathrm{cl}_Y\, T[U_n]$. Como $\mathrm{cl}_Y\, T[U_{n+1}]$ es una vecindad del origen en Y, entonces $y_n - \mathrm{cl}_Y\, T[U_{n+1}]$ es una vecindad de y_n en Y y, en consecuencia, $T[U_n] \cap (y_n - \mathrm{cl}_Y\, T[U_{n+1}]) \neq \emptyset$. Elijamos $x_n \in U_n$ tal que $T(x_n) \in y_n - \mathrm{cl}_Y\, T[U_{n+1}]$ y hagamos $y_{n+1} := y_n - T(x_n)$, de forma que $y_{n+1} \in \mathrm{cl}_Y\, T[U_{n+1}]$.

Dado que d es una métrica invariante, entonces para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n > m$ se tiene que

$$\begin{aligned} d\left(\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{m} x_k\right) &= d\left(\sum_{k=m+1}^{n} x_k, 0\right) \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{n} d(x_k, 0) \\ &< \sum_{k=m+1}^{n} r2^{-n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge en X (pues (X,d) es completo). Además,

$$d\left(\sum_{k=1}^{n} x_k, 0\right) < \sum_{k=1}^{\infty} r2^{-n} = r$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\sum_{k=1}^{n} x_k \in B(0,r)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Luego, $x \in \mathrm{cl}_X\, B(0,r) \subseteq U$.

Finalmente, veamos que $T(x) = y_1$. Como $T(x_n) = y_n - y_{n+1}$ y T es continua, entonces

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n - y_{n+1} = y_1 - \lim_{n\to\infty} y_{n+1}.$$

Para ver que $y_n \to 0$, tomemos W_1 una vecindad del origen en Y. Como Y es regular, existe W_2 una vecindad cerrada del origen en Y tal que $W_2 \subseteq W_1$. Además, los conjuntos U_n forman una base local del origen en X que es decreciente. La continuidad de T implica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T[U_n] \subseteq W_2$ para toda $n \geq n_0$, por lo que $\mathrm{cl}_Y\, T[U_n] \subseteq W_2 \subseteq W_1$ para toda $n \geq n_0$. Puesto que $y_n \in \mathrm{cl}_Y\, T[U_n]$, se sigue que $y_n \in W_1$ para toda $n \geq n_0$. Luego, $y_n \to 0$ en Y. Esto prueba que $\mathrm{cl}_Y\, T[U_1] \subseteq T[\mathrm{cl}_X\, B(0,r)] \subseteq T[U]$.

De esta manera, hemos probado que $V \subseteq \mathrm{cl}_Y\, T[U_1] \subseteq T[U]$, por lo que $T[U]$ es una vecindad del origen en Y. Por el Lema 4.3.1 se sigue que T es una aplicación abierta. □

Como aplicación de este teorema y del teorema de la categoría de Baire, podemos formular una versión más general del teorema del isomorfismo de Banach que la presentada en el Capítulo 2.

Corolario 4.3.3. *Sean X y Y dos F-espacios y $T \in L(X,Y)$ una aplicación lineal continua. Si T es biyectiva entonces T es un homeomorfismo.*

Una consecuencia interesante de este teorema, es que a un F-espacio no se le pueden agregar más abiertos sin que deje de ser un F-espacio.

Corolario 4.3.4. *Sean X un espacio vectorial y τ_1, τ_2 dos topologías que hagan de X un F-espacio. Si $\tau_1 \subseteq \tau_2$ entonces $\tau_1 = \tau_2$.*

Demostración. Basta aplicar el Corolario 4.3.3 a la aplicación $Id\colon (X,\tau_2) \to (X,\tau_1)$. □

4.4. Teorema de la gráfica cerrada

Dado que el producto de dos espacios vectoriales topológicos es un e.v.t. y el producto de dos espacios topológicos completamente metrizables es completamente metrizable entonces el producto de dos F-espacios es un F-espacio. De esta manera, el teorema de la gráfica cerrada se formula de manera natural en la clase de los F-espacios.

Teorema 4.4.1 (Gráfica cerrada)**.** *Sean X y Y dos F-espacios, y $T \in L(X, Y)$. Si la gráfica de T es cerrada en $X \times Y$ entonces T es continua.*

Demostración. Sea G la gráfica de T y supongamos que G es cerrado en $X \times Y$. Como T es lineal entonces G es un subespacio de $X \times Y$. Como G es cerrado y $X \times Y$ es un F-espacio, entonces G es un F-espacio. Consideremos π_1, π_2 las proyecciones de $X \times Y$ en X y Y, respectivamente. Notemos que $\pi_1 \colon G \to X$ es inyectiva, pues si $\pi_1(x_1, T(x_1)) = \pi_1(x_2, T(x_2))$ entonces $x_1 = x_2$, por lo que $(x_1, T(x_1)) = (x_2, T(x_2))$. De esta manera, $\pi_1|_G$ es biyectiva, lineal y continua. Por el Corolario 4.3.3 se sigue que $(\pi_1|_G)^{-1}$ es continua. Notemos que $\pi_2 \circ (\pi_1|_G)^{-1}(x) = \pi_2(x, T(x)) = T(x)$, por lo que $T = \pi_2 \circ (\pi_1|_G)^{-1}$. En consecuencia, T es continua. $\square$

Bibliografía

[1] BOHNENBLUST, H.F.; SOBCZYK, A., *Extensions of Functionals on Complex Linear Spaces*. Bulletin of the American Mathematical Society, volumen 44, número 2, 1938, 91-93.

[2] CAROTHERS, N. L., *A short Course on Banach Space Theory*, primera edición, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[3] CERDÀ, J., *Linear Functional Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, volumen 116, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010.

[4] ENGELKING, RYSZARD, *General Topology*, primera edición, Heldermann Verlag, Berlín, 1989.

[5] FRIEDBERG, H.; INSEL, A. ; SPENCE I., *Linear Algebra* , Prentice Hall College, 2002.

[6] GRABINSKY, GUILLERMO, *Teoría de la Medida*, primera edición, UNAM, Facultad de Ciencias, México, 2016.

[7] KAKOL, J; KUBIŚ, W; LÓPEZ-PELLICER, M. *Descriptive Topology in Selected Topics in Functional Analysis* , primera edición, Springer, US, 2011.

[8] KESAVAN, S.,*A Note on the Grand Theorems of Functional Analysis*. Mathematics Newsletter, Ramanujan Mathematical Society, volumen 27, número 3, 2017, 188-191.

[9] KREYSZIG, ERWIN, *Functional Analysis with Applications*, primera edición, John Wiley & Sons, New York, 1978.

[10] LUXEMBURG, W.A.J., *Two Applications of the Method of Construction by Ultrapowers to Analysis*, Bulletin of the American Mathematical Society, volumen 68, número 4, 1962, 416-419.

[11] MEGGINSON, Robert E., *An introduction to Banach Space Theory*, primera edición, Springer-Verlag New York, 1998.

[12] MUNKRES, James R., *Topology*, segunda edición, Prentice Hall, New Jersey, 2000.

[13] RUDIN, Walter, *Functional Analysis*, segunda edición, McGraw- Hill, New York, 1991.

[14] SCHEP, Anton R., *The open mapping theorem and related theorems*, consultado en http://people.math.sc.edu/schep/Openmapping.pdf

[15] SOKAL, A.D., *A really simple elementary proof of the uniform boundedness theorem*, American Mathematical Monthly, volumen 118, número 5, 2011, 450-452.

[16] STEEN, Lynn A., Seebach J.A., *Counterexamples in Topology*, primera edición, Holt, Rinehart and Winston, 1970.

[17] WAWRZYŃCZYK, Antoni, *Introducción al Análisis Funcional*, primera edición, Universidad Autónoma Metropolitana, México, D.F., 1993.