



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

CONTROLADORES BI-HOMOGÉNEOS

TESIS
PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

PRESENTA
NEVID MISAEL MEZA RODRÍGUEZ

TUTOR PRINCIPAL
DR. JAIME ALBERTO MORENO PÉREZ
INSTITUTO DE INGENIERÍA

CIUDAD DE MÉXICO, MÉXICO, DICIEMBRE, 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Espinosa Pérez Gerardo René
Secretario: Dr. Arteaga Pérez Marco Antonio
1er. Vocal: Dr. Moreno Pérez Jaime Alberto
2do. Vocal: Dr. Fridman Leonid
3er. Vocal: Dr. Rocha Cózatl Edmundo Gabriel

La tesis se realizó en el Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez

A mi madre, padre y hermano, que me han acompañado e incentivado a lograr nuevos desafíos, siendo ellos mi principal motivación para mi superación profesional y personal.

A mi familia, que siempre me han brindado su cariño y apoyo.

A mi ahijada y a mis sobrinas.

Yo.

Reconocimientos

Dando un agradecimiento especial a mi tutor de tesis el Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez por brindarme parte de su tiempo, paciencia y conocimientos durante el desarrollo de esta tesis. Así como al Dr. Leonid Friedman, por sus consejos durante las clases y seminarios de la maestría.

A mis profesores de maestría quienes me dieron los conocimientos necesarios para iniciar y concluir mi tesis.

A mis compañeros de cubículo quienes me dieron sus consejos a lo largo del desarrollo de esta tesis.

A la Facultad de Ingeniería y al programa de posgrado de la Universidad Nacional Autónoma de México que me ha permitido realizar mis estudios de maestría.

Al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (UNAM-PAPIIT) con el número de proyecto IN110719, por permitirme realizar mi investigación.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico que me otorgó durante mis estudios de maestría, bajo el CVU 929269.

Declaración de autenticidad

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

Nevid Misael Meza Rodríguez. Ciudad de México, México, Diciembre, 2020

Resumen

En este trabajo se resuelve el problema de unificación suave de controladores homogéneos para cadenas de integradores de orden uno, dos y tres, a partir de la introducción y el diseño de controladores “bi-homogéneos”. Dichos controladores al ser homogéneos en el bi-límite provocan que el sistema en lazo cerrado sea a su vez homogéneo en el bi-límite asociado a dos grados de homogeneidad diferentes, con propiedades de estabilidad distintas. Para su construcción, se diseñan inicialmente Funciones de Lyapunov de Control Bi-homogéneas (F.L.C.BH) definidas a partir de la combinación lineal de dos Funciones de Lyapunov de Control Homogéneas (F.L.C.H) con estructura preexistente. Dichas F.L.C.BH son empleadas para definir la estructura de los dos controladores homogéneos con grado de homogeneidad diferente que en combinación lineal definirán al controlador bi-homogéneo; fijando en el proceso el intervalo de grados de homogeneidad admisibles que pueden atribuirse al sistema en lazo cerrado al emplear dicho controlador.

Finalmente se presentan simulaciones de todos los controladores bi-homogéneos diseñados en este documento. Se muestra una comparación gráfica entre la dinámica obtenida al emplear cada uno de ellos y la dinámica obtenida al utilizar los controladores homogéneos con grado de homogeneidad diferente que componen a dichos controladores bi-homogéneos.

Notación

La notación que se usó a lo largo del trabajo fue la siguiente:

- $\{, \}$ - Delimitadores de conjunto.
- \forall - “Para todos / Para cualquier / Para cada”.
- \exists - “Existe por lo menos uno (unos)”.
- $<$ - “Menor que”.
- $>$ - “Mayor que”.
- \leq - “Menor o igual que”.
- \geq - “Mayor o igual que”.
- $\|\cdot\|$ - Norma euclidiana de un vector.
- $|\cdot|$ - Valor absoluto de una función.
- $a \in A$ - El elemento a pertenece al conjunto A .
- $A \subset B$ - El conjunto de elementos en A es un subconjunto de B .
- $A \setminus B$ - El conjunto de elementos en A que no se encuentran en B .
- $f : A \rightarrow B$ - f es un mapeo del conjunto A a B .
- \mathbb{R} - Conjunto de números reales.
- \mathbb{R}^+ - Conjunto de números reales positivos.
- \mathbb{N} - Conjunto de números naturales.
- \mathcal{C}^p - Representa a la clase de funciones p veces continuamente diferenciables.
- \dot{x} - Representa la primer derivada de x respecto al tiempo.

- $x^{(n)}$ - Representa la “n-esima” derivada de x respecto al tiempo.
- $\max\{\cdot\}$ y $\min\{\cdot\}$ - Representa el máximo y mínimo valor de una función.
- $\nabla V(x)$ - Representa la diferencial ó gradiente de la función escalar $V(x)$.
- $L_f V(x)$ - Representa la derivada de Lie de la función escalar $V(x)$ a lo largo del campo vectorial $f(x)$, es decir, $\langle \nabla V, f(x) \rangle$.
- \triangle - Fin de algún teorema, definición, corolario ó lema.
- \blacksquare - Fin de prueba.
- Sea $x \in \mathbb{R}$ una variable real y $n \in \mathbb{R}$ un número real. $[x]^n = |x|^n \text{sign}(x)$ corresponde a la potencia signada de x a la n . Es así como $[x]^0 = \text{sign}(x)$, $\frac{d}{dx}[x]^n = n|x|^{n-1}$ y $\frac{d}{dx}|x|^n = n[x]^{n-1}$. Note finalmente que $|x|^2 = x^2$ y que $[x]^n [x]^m = |x|^{n+m} \text{sign}(x)$.

Glosario

En este apartado se recopilan ciertas definiciones de términos utilizados a lo largo de la tesis:

- *Planta*:[\[18\]](#) Hace referencia a cualquier equipo físico o conjunto de partes de una máquina, que trabajan en conjunto para realizar una tarea determinada. En este documento (por simplicidad) se llamara así a cualquier objeto físico u abstracto que vaya a controlarse.
- *Sistema*:[\[18\]](#) Es una combinación de componentes que trabajan en conjunto para lograr un cierto objetivo. En este trabajo de llamara así a cualquier objeto físico u abstracto que vaya a controlarse.
- *Sistema en Lazo Abierto*:[\[18\]](#) Sistemas donde la salida no tiene efecto alguno en la dinámica del mismo, por lo que dichos sistemas no pueden realizar ninguna tarea encomendada.
- *Sistema en Lazo Cerrado*:[\[18\]](#) Sistemas donde la salida tiene efecto directo en la dinámica del mismo, ya que se introduce una función de control que retroalimenta el sistema.
- *Controlador* [\[14\]](#): Algoritmo diseñado para atacar un problema de control específico referente a: estabilización, seguimiento de trayectorias, atenuación o rechazo de perturbaciones y combinaciones entre ellos.

Índice general

Índice de figuras	XIX
1. Introducción	1
1.1. Presentación	1
1.2. Objetivos	2
1.2.1. Objetivo Principal	2
1.2.2. Objetivos Secundarios	2
1.3. Motivación	2
1.4. Contribuciones	5
1.5. Estructura de la tesis	5
2. Marco teórico	7
2.1. Estabilidad en el Sentido de Lyapunov	7
2.2. Función de Lyapunov de Control (F.L.C)	9
2.3. Homogeneidad	9
2.3.1. Homogeneidad Clásica	9
2.3.1.1. Homogeneidad de Funciones	9
2.3.1.2. Homogeneidad de Campos Vectoriales	10
2.3.2. Homogeneidad Ponderada (Cuasi-homogeneidad)	10
2.3.2.1. Homogeneidad de Funciones	10
2.3.2.2. Homogeneidad de Campos Vectoriales	11
2.3.3. Aproximación Homogénea	11
2.3.3.1. Homogeneidad en el Límite-0	11
2.3.3.2. Homogeneidad en el Límite- ∞	12
2.3.3.3. Homogeneidad en Bi-límite	12
2.3.3.4. Bi-homogeneidad de Funciones	12
2.3.4. Funciones de Lyapunov Homogéneas	13
2.3.4.1. Estabilidad en Tiempo Fijo	14
2.4. Desigualdades Importantes de Homogeneidad	14
3. Controladores Bi-Homogéneos	
Sistemas de Orden 1 y 2	17
3.1. Planteamiento del Problema	17

3.2.	Controlador Bi-Homogéneo - Sistema de Orden 1	19
3.2.1.	Homogeneidad del Sistema	19
3.2.2.	Diseño de Control Homogéneo	20
3.2.2.1.	Función de Lyapunov de Control Homogénea	20
3.2.2.2.	Controlador Homogéneo	21
3.2.3.	Diseño de Control Bi-Homogéneo	22
3.2.3.1.	Función de Lyapunov de Control Bi-Homogénea	22
3.2.3.2.	Controladores Bi-Homogéneos Polinomiales y Racionales	23
3.3.	Controlador Bi-Homogéneo - Sistema de Orden 2	26
3.3.1.	Homogeneidad del Sistema	26
3.3.2.	Diseño de Control Homogéneo	26
3.3.2.1.	Función de Lyapunov de Control Homogénea	26
3.3.2.2.	Controlador Homogéneo	28
3.3.3.	Diseño de Control Bi-Homogéneo	29
3.3.3.1.	Función de Lyapunov de Control Bi-Homogénea	29
3.3.3.2.	Controladores Bi-Homogéneos Polinomiales y Racionales	37
3.3.4.	Diseño de Control Homogéneo - Una Nueva Candidata a F.L.C .	42
3.3.4.1.	Función de Lyapunov de Control Homogénea	42
3.3.4.2.	Caso Particular	43
3.3.4.3.	Controlador Homogéneo	44
3.3.5.	Diseño de Control Bi-homogéneo	45
3.3.5.1.	Función de Lyapunov de Control Bi-homogénea	45
3.3.5.2.	Controladores Bi-Homogéneos Polinomiales y Racionales	50
3.3.6.	Diseño de Control Homogéneo - Una Mejor Candidata a F.L.C .	54
3.3.6.1.	Función de Lyapunov de Control Homogénea	54
3.3.6.2.	Caso Particular	55
3.3.6.3.	Controlador Homogéneo	56
3.3.7.	Diseño de Control Bi-homogéneo	57
3.3.7.1.	Función de Lyapunov Bi-homogénea	57
3.3.7.2.	Controladores Bi-Homogéneos Polinomiales y Racionales	64
4.	Controladores Bi-Homogéneos	
	Sistema de Orden 3	69
4.1.	Controlador Bi-Homogéneo - Sistema de Orden 3	69
4.1.1.	Homogeneidad del Sistema	69
4.1.2.	Diseño de Control Homogéneo	70
4.1.2.1.	Función de Lyapunov de Control Homogénea	70
4.1.2.2.	Caso Particular	72
4.1.2.3.	Controlador Homogéneo	73
4.1.3.	Diseño de Control Bi-homogéneo	75
4.1.3.1.	Función de Lyapunov Bi-homogénea	75
4.1.3.2.	Controladores Bi-Homogéneos Polinomiales y Racionales	84

5. Simulaciones	93
5.1. Controlador Bi-Homogéneo - Sistema de Orden 1	93
5.2. Controlador Bi-Homogéneo - Sistema de Orden 2	96
5.2.1. Controlador Bi-Homogéneo - Una Nueva Candidata a F.L.C . . .	99
5.2.2. Controlador Bi-Homogéneo - Una Mejor Candidata a F.L.C . . .	101
5.3. Controlador Bi-Homogéneo - Sistema de Orden 3	104
6. Conclusiones	107
Bibliografía	109

Índice de figuras

3.1. Muestra los valores de (x_1^*, x_2^*) donde $LgV(x^*) = 0$	31
3.2. Muestra el comportamiento de la función $\frac{\pi(x_1^*)}{v(x_1^*)}$	36
3.3. Muestra el comportamiento de $\dot{V}(x^*) = L_f V(x^*) _{S_g}$ cerca del origen. . .	37
3.4. Muestra los valores de (x_1^*, x_2^*) donde $LgV(x^*) = 0$	47
3.5. Muestra el comportamiento de la función $\lambda(x^*)$	49
3.6. Muestra los valores de (x_1^*, x_2^*) donde $LgV(x^*) = 0$	59
3.7. Muestra el comportamiento de la función $\frac{\pi(x_1^*)}{v(x_1^*)}$	63
3.8. Muestra el comportamiento de $\dot{V}(x^*) = L_f V(x^*) _{S_g}$ cerca del origen. . .	64
4.1. Muestra los valores de (x^*) donde $LgV(x^*) = 0$	78
4.2. Muestra el comportamiento de la función $\nu(x_1^*)$ y el de la constante $-C_o$ (para efectos demostrativos).	83
4.3. Muestra el comportamiento de $\dot{V}(x^*) = L_f V(x^*) _{S_{g,1o,1\infty}}$ cerca del origen.	83
5.1. Muestra la dinámica del sistema en lazo abierto.	93
5.2. Muestra una comparativa (local, no local y global/compuesta) entre la dinámica del sistema en L.C y las funciones de control polinomiales apli- cadas.	94
5.3. Muestra una comparativa (local, no local y global/compuesta) entre la dinámica del sistema en L.C y las funciones de control racionales aplicadas.	94
5.4. Muestra el tiempo de convergencia que presentan ambos controladores a medida que la condición inicial crece.	95
5.5. Muestra la dinámica del sistema en lazo abierto.	96
5.6. Muestra el comportamiento de $\dot{V}(x^*) = L_f V(x_1^*) _{S_g}$, además del de la función $\frac{\pi(x_1^*)}{v(x_1^*)}$	97
5.7. Muestra el comportamiento $\dot{V}(x^*) = L_f V(x^*) _{S_g}$, además del de la fun- ción $\frac{\pi(x_1^*)}{v(x_1^*)}$	97
5.8. Muestra una comparativa (local, no local y global/compuesta) entre la dinámica del sistema en L.C y las funciones de control polinomiales apli- cadas.	98

5.9. Muestra una comparativa (local, no local y global/compuesta) entre la dinámica del sistema en L.C y las funciones de control racionales aplicadas.	98
5.10. Muestra la dinámica del sistema en lazo abierto.	99
5.11. Muestra el comportamiento de la función $\lambda(x_1^*)$.	99
5.12. Muestra una comparativa (local, no local y global/compuesta) entre la dinámica del sistema en L.C y las funciones de control polinomiales aplicadas.	100
5.13. Muestra una comparativa (local, no local y global/compuesta) entre la dinámica del sistema en L.C y las funciones de control racionales aplicadas.	100
5.14. Muestra la dinámica del sistema en lazo abierto.	101
5.15. Muestra el comportamiento de la función $\frac{\pi(x_1^*)}{v(x_1^*)}$.	102
5.16. Muestra el comportamiento de $\dot{V}(x^*) = L_f V(x_1^*) _{S_g}$.	102
5.17. Muestra una comparativa (local, no local y global/compuesta) entre la dinámica del sistema en L.C y las funciones de control polinomiales aplicadas.	103
5.18. Muestra una comparativa (local, no local y global/compuesta) entre la dinámica del sistema en L.C y las funciones de control racionales aplicadas.	103
5.19. Muestra la dinámica del sistema en lazo abierto.	104
5.20. Muestra el comportamiento de $\dot{V}(x^*) = L_f V(x_1^*) _{S_{g,1o,1\infty}}$, además del de la función $v(x_1^*)$ y el de la constante $-C_o$ (para efectos demostrativos).	105
5.21. Muestra el comportamiento $\dot{V}(x^*) = L_f V(x_1^*) _{S_{g,1o,1\infty}}$, además del de la función $v(x_1^*)$ y el de la constante $-C_o$ (para efectos demostrativos).	105
5.22. Muestra una comparativa (local, no local y global/compuesta) entre la dinámica del sistema en L.C y las funciones de control polinomiales aplicadas.	106
5.23. Muestra una comparativa (local, no local y global/compuesta) entre la dinámica del sistema en L.C y las funciones de control racionales aplicadas.	106

Introducción

1.1. Presentación

El problema general a resolver dentro de esta tesis se conoce comúnmente en la literatura como: “problema de unificación de controladores”, donde se busca diseñar una ley de control unificada que modifica la dinámica del sistema recuperando y combinando las propiedades de los controladores que la componen. Lo anterior surge, debido a que las investigaciones que se han realizado a lo largo de los años han dado lugar a controladores cuyo objetivo recae de forma general en sólo una de estas dos grandes categorías:

- Controladores óptimos y robustos localmente.
- Controladores que garantizan estabilidad robusta de forma global.

Por otro lado, las leyes de control homogéneas presentan propiedades que recaen indirectamente en alguna de ellas, pues le atribuyen al sistema en lazo cerrado un grado de homogeneidad positivo, cero o negativo; que modifica la fuerza que cada una de estas leyes de control presenta, variando dependiendo de que tan lejos o cerca están las trayectorias del punto de operación. Haciendo énfasis en la fuerza que los controladores homogéneos presentan cuando le otorgan al sistema en lazo cerrado un grado de homogeneidad δ :

- Negativo: La ley de control es fuerte cerca del origen y se vuelve más débil para valores grandes en los estados.
- Positivo: La ley de control es débil cerca del origen pero se vuelve fuerte para valores grandes en los estados.

Como consecuencia a lo anterior, se diseña un controlador bi-homogéneo construido a partir de la combinación lineal de dos funciones de control homogéneas; mezclando así las propiedades que cada ley de control le proporciona al sistema en lazo cerrado: estabilidad asintótica o racional ($\delta > 0$), estabilidad exponencial ($\delta = 0$) y estabilidad en tiempo finito ($\delta < 0$); mejorando la respuesta general del sistema, evitando (en la medida de lo posible) la pérdida de fuerza de la acción de control, estabilizando así eficientemente el punto de operación del sistema de forma global.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo Principal

Resolver el problema de unificación suave de controladores homogéneos para cadenas de integradores de orden uno, dos y tres, a partir del diseño de controladores bi-homogéneos.

1.2.2. Objetivos Secundarios

- Diseñar controladores homogéneos polinomiales que permitan estabilizar el origen de una cadena de integradores de orden uno, dos y tres, basado en Funciones de Lyapunov de Control Homogéneas (F.L.C.H).
- Diseñar Funciones de Lyapunov de Control Bi-homogéneas (F.L.C.BH), para cadenas de integradores de orden uno, dos y tres, a partir de la combinación lineal de dos Funciones de Lyapunov de Control Homogéneas (F.L.C.H).
- Diseñar controladores bi-homogéneos polinomiales y racionales, que permitan estabilizar de forma global el origen de una cadena de integradores de orden uno, dos y tres, basado en Funciones de Lyapunov de Control Bi-homogéneas (F.L.C.BH).
- Realizar simulaciones de los controladores bi-homogéneos polinomiales y racionales diseñados con anterioridad para
 - Cadenas de integradores de orden 1.
 - Cadenas de integradores de orden 2.
 - Cadenas de integradores de orden 3.

1.3. Motivación

En teoría de control dos problemas altamente estudiados en el área son la estabilización y el seguimiento de trayectorias. En estabilización, se pretende que el sistema alcance un punto de operación constante y en seguimiento de trayectorias, se desea imponer un comportamiento específico en el sistema al modificar su punto de operación de forma variable.

Para lograr realizar cualquiera de estas dos tareas, inicialmente se debe modelar mediante ecuaciones diferenciales de primer orden el comportamiento dinámico del sistema físico no lineal a estudiar, para posteriormente representarlo en variables de estado, como lo enuncia Khalil [14] y muestra Wellstad [26], obteniendo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)v \\ y &= h(x),\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ representa los estados del sistema, $u \in \mathbb{R}^p$ corresponde a las señales de entrada de la planta, $y \in \mathbb{R}^q$ presenta las señales de salida del sistema, $f(x)$ corresponde a la dinámica interna, $g(x)$ representa los canales de entrada y $h(x)$ presenta los canales de salida de la planta.

Una vez modelado el sistema, se procede a diseñar la ley de control que garantiza el cumplimiento de cualquiera de los objetivos (ya antes mencionados); buscando inicialmente representaciones equivalentes al modelo de la planta para incrementar así la cantidad de técnicas con las que pueda diseñarse el controlador, seleccionando aquella que cumpla mejor con el objetivo de control propuesto.

Es así como, si (1.1) presenta un grado relativo bien definido, el sistema se puede transformar a su representación en la forma normal, presentada por Isidori [12, 13] y Khalil [14], dada por

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi) & (1.2) \\ \dot{\xi}_i &= \xi_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq \rho - 1 \\ \dot{\xi}_\rho &= L_f^\rho(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x)v \\ y &= \xi_1.\end{aligned}$$

Si además, $h(x)$ se selecciona de tal forma que la dinámica cero del sistema ($\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$) sea de fase mínima fuerte respecto a η y sea entrada estados estable respecto a ξ , el problema de estabilización global de la cascada (1.2) puede reducirse a buscar estabilizar el punto operación del sistema (1.3), que se encuentra en la forma de controlador y que corresponde a una cadena de integradores de orden ρ

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_i &= \xi_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq \rho - 1 \\ \dot{\xi}_\rho &= L_f^\rho(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x)v & (1.3) \\ y &= \xi_1.\end{aligned}$$

(1.3) al poder ser linealizado por retroalimentación, incrementa el conjunto de técnicas con las que se puede diseñar el controlador, introduciendo con ellas el método de diseño homogéneo que sobresale por ser robusto. Dicho método, a partir de la definición de una función de control homogénea, preserva la homogeneidad arbitraria δ del sistema en lazo abierto (L.A), para posteriormente fijar su valor en lazo cerrado (L.C), definiendo así el tipo de estabilidad global del punto de operación del sistema, que gracias a lo que postulan Bacciotti and Rosier [4], será: asintótica o racional si ($\delta > 0$), exponencial si ($\delta = 0$) o en tiempo finito si ($\delta < 0$). Cabe mencionar que la fuerza que presentan este tipo de controladores se ve afectada dependiendo del grado de homogeneidad que inducen en el sistema en lazo cerrado. Aquellos controladores que fijan un grado de homogeneidad positivo presentarán mayor fuerza para valores grandes en los estados, pues la acción de control crece más rápido que una función lineal del estado; mientras que los controladores con grado de homogeneidad negativo presentarán mayor fuerza para valores pequeños en los estados, pues la acción de control es más fuerte que una función lineal para valores pequeños del estado.

1. INTRODUCCIÓN

Por otro lado, Ángel Mercado-Uribe and Moreno [28] y Hayashi and Nakamura [11] en sus estudios, logran estabilizar en tiempo fijo dos sistemas descritos en la forma de controlador empleando algoritmos de “swicheo”. Si bien, se observa en la bibliografía que este tipo de algoritmos se utilizan para unificar distintas clases de controladores, en este caso se orientan a inducir la conmutación adecuada entre dos controladores homogéneos con propiedades de estabilidad diferentes (estabilidad asintótica o racional ($\delta > 0$) y estabilidad en tiempo finito ($\delta < 0$)), recuperando así la propiedad de convergencia en tiempo fijo. Para el desarrollo de esta tesis se toman los trabajos de Ángel Mercado-Uribe and Moreno [28] y Hayashi and Nakamura [11] como punto de partida ya que representan las investigaciones más cercanas a la unificación de controladores homogéneos. Considerando sus resultados, se diseña un método de diseño que permite unificar dos controladores homogéneos (con distinto grado de homogeneidad (δ)) induciendo en el sistema en lazo cerrado propiedades de estabilidad diferentes. Es importante mencionar que esta investigación está orientada en la unificación “suave” de los dos controladores homogéneos, por lo que en esta metodología de diseño se evitan definir sub-sistemas adicionales Teel and Kapoor [25] y Morin et al. [17], condiciones de “swicheo” Ángel Mercado-Uribe and Moreno [28], Hayashi and Nakamura [11] Teel et al. [24] y Efimov [8], o dinámicas discretas Benabdallah and Hdidi [5], Pieur and Praly [19] y Prieur and Teel [21]; siendo estas metodologías innecesariamente complicadas o perjudiciales al poder producir comportamientos cíclicos problemáticos cuando se busca estabilizar el punto de operación del sistema (1.3).

Considerando lo anterior, el problema de unificación suave de controladores homogéneos para sistemas descritos en la forma de controlador, con grado relativo uno, dos y tres, es resuelto utilizando únicamente (de forma general) los dos controladores homogéneos con grado de homogeneidad diferente que se desean unificar y las Funciones de Lyapunov de Control Homogéneas (F.L.C.H) asociadas a éstos, donde cada una de ellas garantiza la estabilidad del punto de operación del sistema, cuando ambas funciones de control son introducidas en la planta de forma individual. Es así como, a partir de la metodología propuesta por Andrieu and Prieur [2], se busca garantizar que la combinación lineal de dos F.L.C.H, satisfaga la definición de una Función de Lyapunov de Control (siendo este el problema más grande a atacar al utilizar esta metodología). El controlador es construido a partir de la definición de una Función de Lyapunov de Control Bi-Homogénea (F.L.C.BH) (construida a partir de la combinación lineal de dos F.L.C.H), cuya derivada de Lie respecto al campo vectorial $g(x)$ será empleada para diseñar dos controladores homogéneos con distinto grado de homogeneidad que en combinación lineal definirán al controlador bi-homogéneo. Dicha función de control al ser homogénea en el bi-límite provoca que el sistema en lazo cerrado sea homogéneo en el bi-límite asociado a dos grados de homogeneidad distintos con propiedades de estabilidad diferentes. La intención de lo anterior se concentra en que estas propiedades cooperen entre sí, logrando sacar el máximo provecho de cada una de ellas, estabilizando de forma global el punto de operación del sistema (1.3), con grado relativo uno, dos y tres.

Cabe recalcar que aunque en este trabajo no se aborda el problema perturbado, éste puede ser estudiado y justifica la noción de la nomenclatura “local” y “no local” que aparece a lo largo de la tesis. Ésto es, en presencia de perturbaciones o incertidumbres Lipschitz globales, las propiedades de estabilidad que presentan los sistemas homogéneos adquieren un carácter “local” o “no local” dependiendo de si el grado de homogeneidad del sistema en L.C (δ) presenta valores positivos o negativos. Es por ésto que (bajo éste contexto), si $\delta < 0$ el controlador homogéneo logrará únicamente estabilidad “local” en tiempo finito, mientras que si $\delta > 0$ el controlador homogéneo solo logrará atraer las trayectorias lejanas cerca del origen, sin poder garantizar estabilidad local, asegurando únicamente acotamiento final y uniforme (“estabilidad no local”). A partir de lo anterior, se asevera que la combinación adecuada de los dos controladores homogéneos permite garantizar la estabilidad “global” de las trayectorias del sistema (1.3) (similar al caso no perturbado), llevando las mismas al origen en tiempo fijo (cuando el canal de control presenta perturbaciones o incertidumbres que crecen linealmente en el estado).

1.4. Contribuciones

En el presente trabajo se resuelve el problema de unificación suave de controladores homogéneos para cadenas de integradores de orden uno, dos y tres, a partir de la definición de dos controladores bi-homogéneos: producto de la combinación lineal de dos controladores homogéneos con estructura preexistente. Se muestra el diseño de distintas Funciones de Lyapunov de Control Bi-homogéneas: producto de la combinación lineal de dos Funciones de Lyapunov de Control Homogéneas; empleadas para diseñar los dos controladores bi-homogéneos. Como consecuencia a los logros conseguidos en este trabajo, se obtienen resultados similares a los obtenidos por Ángel Mercado-Uribe and Moreno [28] y Hayashi and Nakamura [11] para cadenas de integradores de orden uno y dos, pues a partir de este algoritmo de unificación suave de controladores homogéneos se logran estabilizar dichos sistemas en tiempo fijo.

1.5. Estructura de la tesis

Este trabajo está dividido en 5 Capítulos.

El Capítulo 2 presenta conceptos fundamentales para el correcto entendimiento de los resultados plasmados en esta tesis. Dicho capítulo comienza con conceptos básicos relacionados con Estabilidad en Sentido de Lyapunov, Función de Lyapunov (F.L) y Función de Lyapunov de Control (F.L.C). Posteriormente, se dan a conocer definiciones importantes relacionadas con homogeneidad clásica y ponderada para funciones y campos vectoriales, seguido de conceptos asociados a aproximación homogénea en el bi-límite, como lo son las definiciones de: homogeneidad en el límite-0 y homogeneidad en el límite- ∞ para funciones y campos vectoriales. Finalmente, se da a conocer

1. INTRODUCCIÓN

la estructura de las funciones bi-homogéneas que se reportan a lo largo de la tesis, además de dar a conocer propiedades fundamentales propias de funciones de Lyapunov homogéneas que dan la pauta para introducir el concepto de convergencia en tiempo fijo y ciertas desigualdades de gran interés ampliamente utilizadas a lo largo de este documento.

En los Capítulos 3 y 4 se presenta el planteamiento del problema generalizado, para posteriormente dar a conocer la contribución real de esta tesis relacionada con la definición de los controladores bi-homogéneos para las cadenas de integradores de orden uno, dos y tres.

En el Capítulo 5 se presentan las simulaciones de los controladores definidos en el dos capítulos anteriores.

En el Capítulo 6 se concluye y se enuncian trabajos futuros que podrían realizarse a partir de los resultados plasmados en esta tesis.

Marco teórico

2.1. Estabilidad en el Sentido de Lyapunov

Considere el sistema autónomo

$$\dot{x} = f(x), \tag{2.1}$$

donde $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un mapeo continuo de un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ en \mathbb{R}^n . Suponga además que \bar{x} es un punto de equilibrio del sistema (2.1), es decir, que $f(\bar{x}) = 0$. Sin pérdida de generalidad siempre es posible realizar un cambio de coordenadas para mover dicho punto de equilibrio al origen del sistema. Enunciando por simplicidad todas las definiciones y teoremas que aparecen en este capítulo para el caso en el que el punto de equilibrio se encuentra en el origen del sistema (2.1), es decir, cuando $\bar{x} = 0$.

Analizando la estabilidad del origen del sistema (2.1), asumiendo que $f(x)$ siempre satisface $f(0) = 0$, se obtiene lo siguiente

Definición 2.1. [14] *El punto de equilibrio $x = 0$ de (2.1) es*

- *Estable en el sentido de Lyapunov si, para cualquier $\epsilon > 0$, existe un valor de $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, tal que*

$$\|x(0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq 0.$$

- *Inestable, si no es estable.*
- *Asintóticamente estable, si es estable y δ puede ser escogido de tal forma que*

$$\|x(0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad \triangle$$

2. MARCO TEÓRICO

Es decir, el origen del sistema (2.1) es estable en el sentido de Lyapunov, si existe una función $\delta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que para toda condición inicial $x(0)$ contenida dentro de una bola de radio $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, la trayectoria solución está contenida dentro de la bola de radio $\epsilon > 0$, para todo tiempo futuro. Si no sucede esto, el punto de equilibrio es inestable. Y si las trayectorias del sistema que inician suficientemente cerca convergen al origen cuando el tiempo $t \rightarrow \infty$, el origen es asintóticamente estable.

Por otro lado, demostrar el tipo de estabilidad que presenta el origen de (2.1) a partir de la definición anterior, por lo general no es posible, pues no es fácil encontrar la función $\delta(\epsilon)$ que satisface dicha definición. Debido a lo anterior y por simplicidad, Lyapunov propuso el siguiente teorema para facilitar el trabajo:

Teorema 2.1. [14] *Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de (2.1) y $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene a $x = 0$. Sea $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable, tal que*

$$V(0) = 0 \quad y \quad V(x) > 0 \quad en \quad D \setminus \{0\} \quad (2.2)$$

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq 0 \quad en \quad D, \quad (2.3)$$

entonces $x = 0$ es estable. Además, si

$$\dot{V}(x) < 0 \quad en \quad D \setminus \{0\} \quad (2.4)$$

entonces $x = 0$ es asintóticamente estable. \triangle

El Teorema 2.1 permite concluir el tipo de estabilidad que presenta el origen del sistema (2.1) a partir de una función de energía conocida como función de Lyapunov que dependiendo del signo de su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema $\dot{V}(x) = L_f V(x)$ permite concluir: estabilidad (si $\dot{V}(x) \leq 0$) o estabilidad asintótica (si $\dot{V}(x) < 0$), del punto de equilibrio. Es importante hacer notar que la función $V(x)$ no se relaciona con el sistema en un inicio de ninguna forma, por lo que su definición se realiza de forma independiente vinculándose con la planta hasta que se calcula $\dot{V}(x)$. Cabe mencionar que $V(x)$ deja de ser una candidata a función de Lyapunov y se convierte en una función de Lyapunov para el sistema (2.1) hasta que $\dot{V}(x)$ permite concluir algún tipo de estabilidad por medio de su signo.

Por último, es importante hacer notar que el Teorema 2.1 está basado en un concepto de energía. Los puntos de “energía” constante $\{x \in \mathbb{R}^n | V(x) = c\}$ para algún $c > 0$ son curvas de nivel de $V(x)$ y son cerradas y acotadas para c pequeños. Si $\dot{V}(x) < 0$ ($\dot{V}(x) \leq 0$) las trayectorias se mueven hacia valores de energía menores (o iguales) y convergen eventualmente al valor mínimo de energía $V(0)$.

2.2. Función de Lyapunov de Control (F.L.C)

Se introduce un concepto complementario al descrito por el *Teorema 2.1* donde se contempla la aplicación de una función control en el sistema (2.1). Dicho concepto busca garantizar la estabilidad previa del sistema (2.5) en lazo abierto para aquellos valores de x en donde la acción de control deja de incidir, lo cual posteriormente ayuda a garantizar, mediante el *Teorema 2.1*, la estabilidad en lazo cerrado del sistema (2.5).

Definición 2.2. *Una función $V(x)$, continuamente diferenciable y positiva definida, es una Función de Lyapunov de Control para el sistema*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.5)$$

si,

$$L_g V(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x) = 0, \text{ para algún } x \in D \setminus \{0\}, \Rightarrow L_f V(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) < 0. \quad \triangle \quad (2.6)$$

Definición 2.3. (Teorema de Arstein) *El origen $x = 0$ del sistema (2.5) con $f(0) = 0$ es Globalmente Asintóticamente Estabilizable por una ley de control retroalimentado $u = \phi(x)$, continua en todas partes excepto posiblemente en $x = 0$, si y solo si posee una F.L.C.*

2.3. Homogeneidad

2.3.1. Homogeneidad Clásica

2.3.1.1. Homogeneidad de Funciones

Definición 2.4. [16] *Sean n, m dos enteros positivos. La función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es homogénea de grado $\delta \in \mathbb{R}$ si $\forall \lambda > 0$:*

$$f(\lambda x) = \lambda^\delta f(x). \quad \triangle \quad (2.7)$$

2.3.1.2. Homogeneidad de Campos Vectoriales

Definición 2.5. [16] Sea n un entero positivo. El campo vectorial $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es homogéneo de grado $\delta \in \mathbb{R}$ si $\forall \lambda > 0$:

$$f(\lambda x) = \lambda^\delta f(x). \quad \triangle \tag{2.8}$$

El flujo (solución) asociado al campo vectorial $f(x)$ de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ esta denotado por la función $\varphi(x, t)$.

Si $\lambda > 0$, la homogeneidad del flujo se define como

$$f(\lambda x) = \lambda^\delta f(x) \quad \Rightarrow \quad \varphi(t, \lambda x) = \lambda \varphi(\lambda^{\delta-1} t, x). \quad \triangle \tag{2.9}$$

2.3.2. Homogeneidad Ponderada (Cuasi-homogeneidad)

Sean

- $r = (r_1, \dots, r_n)$ un vector de pesos generalizado con $r_i > 0$.
- $\Lambda_r x = \Lambda_r(\lambda, x)$, el operador de dilatación del grupo $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ en \mathbb{R}^n dado por

$$\begin{aligned} \Lambda_r : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \Lambda_r(\lambda, x) &\rightarrow \text{diag}\{\lambda^{r_i}\}x, \end{aligned}$$

con $\lambda > 0$.

2.3.2.1. Homogeneidad de Funciones

Definición 2.6. [4][16] Sean n, m dos enteros positivos. La función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es r -homogénea de grado $\delta \in \mathbb{R}$ si $\forall \lambda > 0$

$$f(\Lambda_r x) = \lambda^\delta f(x) \quad \triangle. \tag{2.10}$$

- Homogeneidad clásica = Homogeneidad ponderada con $r = (r_1, \dots, r_n) = (1, \dots, 1)$.
- Si $f(x)$ es r -homogénea de grado δ , entonces es $(r\alpha)$ -homogénea de grado $(\delta\alpha)$ para cualquier $\alpha > 0$.

2.3.2.2. Homogeneidad de Campos Vectoriales

Definición 2.7. [4][16] Sea n un entero positivo. El campo vectorial $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es homogéneo de grado $\delta \in \mathbb{R}$ si $\forall \lambda > 0$:

$$f(\Lambda_r x) = \lambda^\delta \Lambda_r f(x). \quad \triangle \quad (2.11)$$

El flujo (solución) asociado al campo vectorial $f(x)$ de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ está denotado por la función $\varphi(x, t)$.

Si $\lambda > 0$, la r -homogeneidad del flujo se define como

$$f(\Lambda_r x) = \lambda^\delta \Lambda_r f(x) \quad \Rightarrow \quad \varphi(t, \Lambda_r x) = \Lambda_r \varphi(\lambda^\delta t, x). \quad \triangle \quad (2.12)$$

2.3.3. Aproximación Homogénea

2.3.3.1. Homogeneidad en el Límite-0

Definición 2.8. [1] Una función $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es homogénea en el límite-0, asociada al triplete (r_0, d_0, ϕ_0) , donde $r_0 \in (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})^n$ es el vector de pesos, $d_0 \in \mathbb{R}^+$ es el grado de homogeneidad y $\phi_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la función de aproximación, si ϕ es continua, ϕ_0 es continua y no es idénticamente cero y, para cada conjunto compacto $C \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y cada $\epsilon > 0$, existe λ_0 de tal forma que

$$\max_{x \in C} \left| \frac{\phi(\lambda^{r_0} x)}{\lambda^{d_0}} - \phi_0(x) \right| \leq \epsilon, \quad \lambda \in (0, \lambda_0]. \quad \triangle \quad (2.13)$$

Una campo vectorial $f = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ se dice homogéneo en el límite-0, asociado al triplete $(r_0, \mathfrak{d}_0, f_0)$, donde $r_0 \in (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})^n$ es el vector de pesos, $\mathfrak{d}_0 \in \mathbb{R}^+$ es el grado de homogeneidad y $f_0 : \sum_{i=1}^n f_{0,i} \frac{\partial}{\partial x_i}$ es el campo vectorial de aproximación, si, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathfrak{d}_0 + r_{0,i} \geq 0$ y la función f_i es homogénea en el límite-0 asociada al triplete $(r_0, \mathfrak{d}_0 + r_{0,i}, f_{0,i})$. \triangle

2.3.3.2. Homogeneidad en el Límite- ∞

Definición 2.9. [1] Una función $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es homogénea en el límite- ∞ , asociada al triplete $(r_\infty, d_\infty, \phi_\infty)$, donde $r_\infty \in (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})^n$ es el vector de pesos, $d_\infty \in \mathbb{R}^+$ es el grado de homogeneidad y $\phi_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la función de aproximación, si ϕ es continua, ϕ_∞ es continua y no es idénticamente cero y, para cada conjunto compacto $C \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y cada $\epsilon > 0$, existe λ_∞ de tal forma que

$$\max_{x \in C} \left| \frac{\phi(\lambda^{r_\infty} x)}{\lambda^{d_\infty}} - \phi_\infty(x) \right| \leq \epsilon, \quad \lambda \geq \lambda_\infty. \quad \Delta \quad (2.14)$$

Una campo vectorial $f = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ se dice homogéneo en el límite- ∞ , asociado al triplete $(r_\infty, \mathfrak{d}_\infty, f_\infty)$, donde $r_\infty \in (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})^n$ es el vector de pesos, $\mathfrak{d}_\infty \in \mathbb{R}^+$ es el grado de homogeneidad y $f_\infty : \sum_{i=1}^n f_{\infty,i} \frac{\partial}{\partial x_i}$ es el campo vectorial de aproximación, si, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathfrak{d}_\infty + r_{\infty,i} \geq 0$ y la función f_i es homogénea en el límite- ∞ asociada al triplete $(r_\infty, \mathfrak{d}_\infty + r_{\infty,i}, f_{\infty,i})$. Δ

2.3.3.3. Homogeneidad en Bi-límite

Definición 2.10. [1] Una función $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (o un campo vectorial $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$) se dice que es homogéneo en el bi-límite si es homogéneo en el límite-0 y es homogéneo en el límite- ∞ . Δ

Observación 2.1. [1] Si una función ϕ (respectivamente un campo vectorial f) es homogéneo en el bi-límite, entonces la función de aproximación ϕ_0 o ϕ_∞ (resp. el campo vectorial de aproximación f_0 o f_∞) es homogéneo en el sentido estándar (con los mismos pesos y el mismo grado de homogeneidad).

2.3.3.4. Bi-homogeneidad de Funciones

A lo largo de esta tesis se utilizará una forma muy particular de construir funciones homogéneas en el bi-límite (funciones bi-homogéneas), cuya estructura estará dada por

Propiedad 2.1. Sean $\phi_o : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\phi_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dos funciones r -homogéneas con un distinto vector de pesos $r_o = (r_{1o}, \dots, r_{no})$ y $r_\infty = (r_{1\infty}, \dots, r_{n\infty})$, e igual o distinto

grado de homogeneidad δ_o y δ_∞ (por suposición $\delta_\infty \geq \delta_o$); la combinación lineal de ambas funciones define una función bi-homogénea $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, al ser homogénea en el bi-límite, asociada a los tripletes: (r_o, δ_o, ϕ_o) en el límite -0 y $(r_\infty, \delta_\infty, \phi_\infty)$ en el límite $-\infty$.

2.3.4. Funciones de Lyapunov Homogéneas

Teorema 2.2. [4] Sea f un campo vectorial en \mathbb{R}^n , tal que el origen dicho sistema es un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable. Asumiendo que f es r -homogénea de grado δ para alguna $r \in \mathbb{R}^+$. Entonces, para cualquier $p \in \mathbb{N}^*$ y $m > p \cdot \max_i \{r_i\}$, existe una función de Lyapunov estricta $V(x)$ para (2.1), que es r -homogénea de grado m y de clase C^p . La cual como consecuencia directa presenta a, $\dot{V} = \langle \nabla V, f \rangle$ como una función r -homogénea de grado $m + \delta$. \triangle

Corolario 2.1. [4][16] Sea f un campo vectorial en \mathbb{R}^n , continuo y r -homogéneo de grado δ para algún vector de pesos r con origen asintóticamente estable.

- Si $\delta > 0$, entonces existen constantes $M_1, M_2 > 0$ tal que, para cualquier trayectoria $x(t)$ de (2.1), y para toda $t \geq 0$, se satisface

$$M_1(1 + \|x(0)\|_{r,p}^\delta t)^{-\frac{1}{\delta}} \|x(0)\|_{r,p} \leq \|x(t)\|_{r,p} \leq M_2(1 + \|x(0)\|_{r,p}^\delta t)^{-\frac{1}{\delta}} \|x(0)\|_{r,p}, \quad (2.15)$$

por lo que el origen del sistema $x = 0$ es racionalmente estable.

- Si $\delta = 0$, entonces existen constantes M_1, M_2 y $D > 0$ tales que

$$M_1 \exp(-Dt) \|x(0)\|_{r,p} \leq \|x(t)\|_{r,p} \leq M_2 \exp(-Dt) \|x(0)\|_{r,p}, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.16)$$

se satisface, por lo que el origen del sistema es exponencialmente estable.

- Si $\delta < 0$, entonces el origen del sistema es estable en tiempo finito. \triangle

Es importante recalcar que los sistemas lineales asintóticamente estables poseen una función de Lyapunov estricta cuadrática de orden $m = 2$, pues dichos sistemas por naturaleza son homogéneos de grado $\delta = 1$.

2.3.4.1. Estabilidad en Tiempo Fijo

La combinación apropiada de dos controladores homogéneos con grado de homogeneidad diferente conlleva a la obtención de un controlador que logra extender el concepto de estabilidad en tiempo finito al recuperar la siguiente propiedad

Definición 2.11. [7][20][3] *El origen $x = 0$ del sistema (2.5) es estable en tiempo fijo si el tiempo de convergencia T de dicho sistema hacia el origen esta uniformemente acotado independiente a cualquier condición inicial dada.*

2.4. Desigualdades Importantes de Homogeneidad

Lema 2.1. [9] *Sean $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $p > 1$ y $q > 1$ números reales, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, la siguiente desigualdad siempre se cumple*

$$ab \leq c^p \frac{a^p}{p} + c^{-q} \frac{b^q}{q}. \quad \triangle \tag{2.17}$$

Lema 2.2. [1] *Sean $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ dos funciones r -homogéneas continuas, con el mismo vector de pesos $r = (r_1, \dots, r_n)$ y grado de homogeneidad m , con $\gamma(x) \geq 0$, de tal forma que se cumple*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \gamma(x) = 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \eta(x) < 0\}, \tag{2.18}$$

entonces, existe un número real λ^ tal que, para toda $\lambda > \lambda^*$, toda $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y algún $c > 0$, se cumple*

$$\eta(x) - \lambda\gamma(x) < -c\|x\|_{r,p}^m. \quad \triangle$$

Cabe recalcar que el lema anterior sólo es válido para funciones homogéneas continuas, por lo que se presenta la extensión de dicho resultado para funciones homogéneas discontinuas.

Lema 2.3. [6] Sean $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ dos funciones r -homogéneas semicontinuas por debajo (o por arriba) uni-valuadas, con el mismo vector de pesos $r = (r_1, \dots, r_n)$ y grado de homogeneidad m . Suponga además que $\gamma(x) \geq 0$ (o $\gamma(x) \leq 0$) en \mathbb{R}^n . Si $\eta(x) > 0$ (o $\eta(x) < 0$) para toda $x \neq 0$ y $\gamma(x) = 0$ en dichos valores de x , entonces existe una constante $\lambda^* \in \mathbb{R}$ y una constante $c > 0$ tal que para toda $\lambda \geq \lambda^*$ y para toda $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, se satisface

$$\eta(x) - \lambda\gamma(x) \geq c\|x\|_{r,p}^m, \quad (2.19)$$

$$(\eta(x) - \lambda\gamma(x) \leq -c\|x\|_{r,p}^m). \quad \triangle \quad (2.20)$$

Controladores Bi-Homogéneos

Sistemas de Orden 1 y 2

En este capítulo se presentan parte de los resultados principales de la tesis, lo cual corresponde al diseño de controladores bi-homogéneos para cadenas de integradores de orden uno y dos, con grados de homogeneidad admisibles que presentan valores entre $1 > \delta \geq -1$. Para ello, se introduce en un inicio el planteamiento del problema generalizado, donde se da a conocer el objetivo de control y las características generales de los sistemas que se van a controlar.

Posteriormente se divide el capítulo en dos secciones diferentes. En cada una éstas, se introduce el diseño de control homogéneo para cada cadena de integradores, lo cual posteriormente ayuda a realizar el diseño de su respectivo controlador bi-homogéneo.

3.1. Planteamiento del Problema

Sea el sistema a analizar un sistema SISO afín a la entrada de la forma

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \omega(z) + b(z)v \\ \sigma &= h(z)\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde $z \in \mathbb{R}^n$ corresponde a los estados del sistema, $v \in \mathbb{R}$ representa la variable de control y $\sigma \in \mathbb{R}$ es la variable de salida. Así mismo, sea $\omega(z) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ un mapeo que representa la dinámica interna, $b(z) : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ un mapeo que corresponde a los canales de entrada y $h(z) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ un mapeo que representa los canales de salida, siendo las tres funciones suficientemente suaves en un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Si se supone que la selección de la salida del sistema (3.1) se realiza de tal forma que su grado relativo $\rho \in \Psi = \{1, 2, 3\}$ esté bien definido. Dicho sistema puede transformarse mediante un difeomorfismo a su representación en la forma normal, como lo enuncian

3. CONTROLADORES BI-HOMOGÉNEOS SISTEMAS DE ORDEN 1 Y 2

Isidori [12, 13] y Khalil [14], dado por

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi}_i &= \xi_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq \rho - 1 \\ \dot{\xi}_\rho &= L_f^\rho h(z) + L_g L_f^{\rho-1} h(z)v \\ y &= \xi_1,\end{aligned}\tag{3.2}$$

compuesto por una cadena de integradores de orden ρ cuya dinámica depende directamente de la variable de estado ξ ; presentando adicionalmente, de forma explícita, la dinámica cero del sistema representada por la función $f_0(\eta, \xi)$.

Además, supóngase que la salida del sistema (3.2) se selecciona de tal forma que su dinámica cero sea de fase mínima fuerte, es decir que sea asintóticamente estable respecto a η y sea entrada estados estable respecto a ξ . El problema de estabilización global del sistema en cascada (3.2) puede reducirse a estabilizar el origen del sistema (3.3) que se encuentra en la forma de controlador

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_i &= \xi_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq \rho - 1 \\ \dot{\xi}_\rho &= L_f^\rho h(z) + L_g L_f^{\rho-1} h(z)v.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Con el objetivo de realizar un análisis más generalizado, se re-plantea el problema para que el sistema (3.3) realice seguimiento de trayectorias; suponiendo que se desea que la salida del sistema siga la señal de referencia $r(t)$, considerando además, que ésta y sus derivadas $r^{(p)}(t)$ son acotadas y que se dispone de ellas en línea (utilizando por ejemplo el “Diferenciador robusto y exacto de orden arbitrario” reportado por Shtessel et al. [23]). Es así como, introduciendo el cambio de variables

$$R(t) = \begin{bmatrix} r(t) \\ \vdots \\ r^\rho(t) \end{bmatrix}, \quad e(t) = \begin{bmatrix} \xi_1 - r(t) \\ \vdots \\ \xi_\rho - r^{\rho-1}(t) \end{bmatrix} = \xi(t) - R(t),\tag{3.4}$$

se reescribe el sistema (3.3) en términos del error de seguimiento, en la forma

$$\begin{aligned}\dot{e}_i &= e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq \rho - 1 \\ \dot{e}_\rho &= L_f^\rho h(z) + L_g L_f^{\rho-1} h(z)v - r^\rho(t),\end{aligned}\tag{3.5}$$

para posteriormente aplicar la función de control $v = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(z)} \left[-L_f^\rho h(z) + r^\rho(t) + u \right]$, buscando compensar las funciones (conocidas) que aparecen en el último canal del sistema (3.5), logrando obtener el sistema reducido

$$\begin{aligned}\dot{e}_i &= e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq \rho - 1 \\ \dot{e}_\rho &= u.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Renombrado por conveniencia las variables del sistema (3.6), se ataca el problema de estabilización global del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, & 1 \leq i \leq \rho - 1 \\ \dot{x}_\rho &= u, \end{aligned} \quad (3.7)$$

con grado relativo $\rho \in \Psi = \{1, 2, 3\}$. Para ello se introduce una nueva familia controladores llamados “bi-homogéneos” que complementan suavemente entre sí las propiedades que le proporcionan al sistema en lazo cerrado dos controladores homogéneos con grados de homogeneidad δ diferentes. Dicha familia de controladores se diseña a partir de la definición previa de dos Funciones de Lyapunov de Control Homogéneas que en combinación lineal definen una Función de Lyapunov de Control Bi-homogénea. La derivada de Lie de dicha F.L.C.BH respecto al campo vectorial $g(x)$ será empleada para diseñar dos controladores homogéneos con grados de homogeneidad diferentes, que en combinación lineal definirán al controlador bi-homogéneo. Dicho controlador al ser homogéneo en el bi-límite provoca que el sistema (3.7) en lazo cerrado sea a su vez homogéneo en el bi-límite asociado a dos grados de homogeneidad diferentes δ_o y δ_∞ con propiedades de estabilidad distintas. La intención de lo anterior se concentra en que estas propiedades cooperen entre si, logrando sacar el máximo provecho de cada una de ellas, resolviendo de esta forma el problema de unificación suave de controladores homogéneos para sistemas descritos en la forma de controlador con grado relativo $\rho \in \Psi = \{1, 2, 3\}$.

3.2. Controlador Bi-Homogéneo - Sistema de Orden 1

3.2.1. Homogeneidad del Sistema

Sea (3.7) el sistema a analizar con $\rho = 1$, es decir, sea el sistema a estudiar una cadena de integradores de orden uno

$$\dot{x} = u. \quad (3.8)$$

Considerando al control u como variable adicional con peso de homogeneidad r_2 , la homogeneidad en lazo cerrado del sistema (3.8) se obtiene a partir de

$$f(\Lambda_r x) = \lambda^\delta \Lambda_r f(x) \quad \Rightarrow \quad f(\Lambda_r x) = [\lambda^{r_2} u] = \lambda^\delta [\lambda^{r_1} u] \quad \Rightarrow \quad r_2 = \delta + r_1 \geq 0, \quad (3.9)$$

donde si se fija $r_1 = 1$, se restringen los parámetros r_2 y δ de la forma

$$r_2 = 1 + \delta \geq 0 \quad \rightarrow \quad \delta \geq -1. \quad (3.10)$$

3.2.2. Diseño de Control Homogéneo

3.2.2.1. Función de Lyapunov de Control Homogénea

A partir de [6], se propone como candidata a F.L.C Homogénea la función

$$V(x) = \gamma \frac{r_1}{m} |x|^{\frac{m}{r_1}}, \quad (3.11)$$

con $\gamma > 0$; la cual considerando (3.10), se puede reescribir como

$$V(x) = \frac{\gamma}{m} |x_1|^m. \quad (3.12)$$

Dicha función es homogénea de grado m , positiva definida $\forall \gamma > 0$, radialmente no acotada y continuamente diferenciable, si

$$m > 1. \quad (3.13)$$

Teorema 3.1. (3.12) es una F.L.C Homogénea para el sistema (3.8), ya que satisface la Definición 2.2, es decir cumple

$$S_g \triangleq \{x^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\} | L_g V(x^*) = 0\} \subseteq S_f \triangleq \{x^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\} | L_f V(x^*) < 0\} \quad (3.14)$$

\Updownarrow

$$\{L_g V(x^*) = 0 \cap x^* \neq 0\} \Rightarrow L_f V(x^*) < 0. \quad \Delta$$

Prueba 3.1. Tomando la derivada de (3.12) a lo largo de las trayectorias del sistema (3.8), se obtiene

$$\dot{V}(x) = L_f V(x) + L_g V(x)u,$$

donde

$$L_f V(x) = 0, \quad (3.15)$$

$$L_g V(x) = \gamma [x]^{m-1}. \quad (3.16)$$

Verificando (3.14), despejando x^* de (3.16), calculando los puntos donde $L_g V = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} \gamma [x^*]^{m-1} &= 0 \\ x^* &= 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

lo cual cumple (3.14) ya que $\nexists \{x^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\} | L_g V(x^*) = 0\}$, demostrando que $V(x)$ es una F.L.C Homogénea para el sistema (3.8). ■

3.2.2.2. Controlador Homogéneo

Analizando la homogeneidad de (3.15) y (3.16) para definir la función de control homogénea que estabilizará el origen del sistema (3.8), recordando que $r_1 = 1$, se tiene

$$L_f V(x) = \lambda^n \cdot 0,$$

$$\begin{aligned} L_g V(x) &= \gamma [\lambda x]^{m-1} \\ &= \lambda^{m-1} \{\gamma [x]^{m-1}\}, \end{aligned}$$

por lo que $L_f V(x)$ es homogéneo de grado $n \in \mathbb{R}$ y $L_g V(x)$ es homogéneo de grado $m-1$.

Considerando el grado de homogeneidad de $L_g V(x)$ y recordando (3.10), se diseña un controlador homogéneo $u = \phi(x)$ de grado $r_2 = 1 + \delta$, definido como

$$\phi(x) = -k [L_g V(x)]^{\frac{1+\delta}{m-1}} = -k [\gamma [x]^{m-1}]^{\frac{1+\delta}{m-1}}. \quad (3.18)$$

Teorema 3.2. (3.12) es una F.L Homogénea para el sistema (3.8) en lazo cerrado aplicada la ley de control (3.18), ya que satisface el Teorema 2.1, es decir cumple

$$\dot{V} = L_f V(x) + L_g V(x) \phi(x) < 0, \quad \forall x \neq 0. \quad \Delta \quad (3.19)$$

Corolario 3.1. El controlador homogéneo (3.18) estabiliza asintóticamente, exponencialmente o en tiempo finito el origen del sistema (3.8), dependiendo del valor de δ , al satisfacer el Corolario 2.1. Δ

Prueba 3.2. Verificando (3.19), se reescribe $\dot{V}(x, \phi)$ como

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \phi) &= L_f V(x) - k L_g V(x) [L_g V(x)]^{\frac{1+\delta}{m-1}} \\ &= L_f V(x) - k L_g V(x) |L_g V(x)|^{\frac{1+\delta}{m-1}-1} L_g V(x)^2 \\ &= L_f V(x) - k |L_g V(x)|^{\frac{1+\delta}{m-1}-1} |L_g V(x)|^2 \\ &= L_f V(x) - k |L_g V(x)|^{\frac{m+\delta}{m-1}}, \end{aligned}$$

por lo que finalmente se obtiene

$$\dot{V}(x, \phi) = 0 - k |\gamma [x]^{m-1}|^{\frac{m+\delta}{m-1}} = -k \gamma^{\frac{m+\delta}{m-1}} |x|^{m+\delta} < 0, \quad (3.20)$$

que permite garantizar que $\dot{V}(x, \phi) < 0$, concluyendo así que $V(x)$ es una Función de Lyapunov Homogénea para el sistema en lazo cerrado aplicado el controlador (3.18). \blacksquare

3.2.3. Diseño de Control Bi-Homogéneo

3.2.3.1. Función de Lyapunov de Control Bi-Homogénea

Se propone como candidata a F.L.C. Bi-homogénea la función

$$V(x) = \mu_A V_o(x) + \mu_B V_\infty(x), \quad (3.21)$$

con $\mu_A \geq 0$, $\mu_B \geq 0$ y $\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty > 0$. Donde $V_o(x)$ y $V_\infty(x)$ son F.L.C Homogéneas de la forma (3.12), con parámetros

$$\begin{aligned} (\delta_o, r_{1o}, r_{2o}, m_o) &= (\delta_o, 1, 1 + \delta_o, m) \\ (\delta_\infty, r_{1\infty}, r_{2\infty}, m_\infty) &= (\delta_\infty, 1, 1 + \delta_\infty, m) \end{aligned}$$

por (3.10), donde se define a $m = m_o = m_\infty > 1$ para poder encontrar una solución explícita de la ecuación $L_g V(x^*) = 0$ respecto a x^* (contemplando (3.13)), considerando a su vez a $\delta_\infty > \delta_o \geq -1$ por suposición (contemplando (3.10)).

Teorema 3.3. (3.21) es una F.L.C Bi-Homogénea para el sistema (3.8), ya que satisface la Definición 2.2, es decir cumple

$$\forall \{ x^* \neq 0 \mid \underbrace{\mu_A L_g V_o + \mu_B L_g V_\infty}_{L_g V(x^*)=0} = 0 \} \Rightarrow \dot{V}(x^*) = \underbrace{\mu_A L_f V_o + \mu_B L_f V_\infty}_{L_f V(x^*)} < 0. \quad \Delta \quad (3.22)$$

Prueba 3.3. Analizando la homogeneidad de (3.21), suponiendo (por simplicidad) que $m_\infty > m_o$, recordando que $V_o(x)$ y $V_\infty(x)$ presentan a $r_{1o} = r_{1\infty} = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} V(x) &= \mu_A V_o(x) + \mu_B V_\infty(x) \\ &= \mu_A \frac{\gamma_o}{m_o} |\lambda x_1|^{m_o} + \mu_B \frac{\gamma_\infty}{m_\infty} |\lambda x_1|^{m_\infty} \\ &= \underbrace{\lambda^{m_o} \left(\mu_A \frac{\gamma_o}{m_o} |x_1|^{m_o} \right)}_{r_{1o}\text{-Homogéneo de grado } m_o} + \underbrace{\lambda^{m_\infty} \left(\mu_B \frac{\gamma_\infty}{m_\infty} |x_1|^{m_\infty} \right)}_{r_{1\infty}\text{-Homogéneo de grado } m_\infty}, \end{aligned}$$

lo cual permite garantizar que $V(x) \approx V_o(x)$ en una vecindad cercana a cero y $V(x) \approx V_\infty(x)$ en una vecindad cercana a infinito, ya que $V_o(x)$ presenta potencias más pequeñas que $V_\infty(x)$. Es así como se demuestra que $V(x)$ es una función bi-homogénea de grado m_o/m_∞ .

Definiendo a $m = m_o = m_\infty > 1$, tomando la derivada de (3.21) a lo largo de las trayectorias del sistema (3.8), se tiene

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \mu_A \dot{V}_o(x) + \mu_B \dot{V}_\infty(x) \\ \dot{V}(x) &= \mu_A (L_f V_o(x) + L_g V_o(x)u) + \mu_B (L_f V_\infty(x) + L_g V_\infty(x)u) \\ \dot{V}(x) &= \underbrace{(\mu_A L_f V_o(x) + \mu_B L_f V_\infty(x))}_{L_f V(x)} + \underbrace{(\mu_A L_g V_o(x) + \mu_B L_g V_\infty(x))}_{L_g V(x)} u,\end{aligned}\quad (3.23)$$

con

$$L_f V(x) = 0, \quad (3.24)$$

$$L_g V(x) = (\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty) [x]^{m-1}. \quad (3.25)$$

Calculando los valores de x^* donde $L_g V(x^*) = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned}(\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty) [x^*]^{m-1} &= 0 \\ x^* &= 0.\end{aligned}\quad (3.26)$$

Por lo tanto se concluye que V es una F.L.C Bi-Homogénea para el sistema (3.8), ya que $\# \{x^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\} | L_g V(x^*) = 0\}$, lo cual permite garantizar que (3.22) siempre se satisface. ■

3.2.3.2. Controladores Bi-Homogéneos Polinomiales y Racionales

A partir de los controladores homogéneos diseñados por Cruz-Zavala and Moreno [6], se definen dos clases de controladores bi-homogéneos diferentes

$$\phi_P(x) = - \underbrace{k_o [L_g V(x)]^{\frac{1+\delta_o}{m-1}}}_{\text{Control Local}} - \underbrace{k_\infty [L_g V(x)]^{\frac{1+\delta_\infty}{m-1}}}_{\text{Control No Local}} \Rightarrow \text{Controlador Polinomial}, \quad (3.27)$$

$$\phi_R(x) = - \underbrace{k_o \frac{L_g V(x)}{M_o(x)}}_{\text{Control Local}} - \underbrace{k_\infty \frac{L_g V(x)}{M_\infty(x)}}_{\text{Control No Local}} \Rightarrow \text{Controlador Racional}, \quad (3.28)$$

donde, $k_o > 0$ y $k_\infty > 0$. $M_o(x)$ es una función positiva definida, continua y r_o -homogénea de grado $\delta_{M_o} = m - \delta_o - 2$ y $M_\infty(x)$ es una función positiva definida, continua y r_∞ -homogénea de grado $\delta_{M_\infty} = m - \delta_\infty - 2$.

Observación 3.1. Las funciones de control (3.27) y (3.28), y sus respectivos sistemas en lazo cerrado resultantes, son homogéneos en el bi-límite ya que satisfacen la Definición 2.10.

Observación 3.2. Si se aplica el controlador (3.27) en el sistema (3.8), se puede recuperar un

Controlador Local Homogéneo Polinomial de grado $\delta = 1 + \delta_o$

Si $k_\infty = 0$ y $\mu_B = 0$, obteniendo

$$\dot{x} = -k_o [L_g V(x)]^{\frac{1+\delta_o}{m-1}} = -k_o [\mu_A \gamma_o [x]^{m-1}]^{\frac{1+\delta_o}{m-1}} \quad (3.29)$$

que es homogéneo de grado δ_o (en lazo cerrado).

Controlador No Local Homogéneo Polinomial de grado $\delta = 1 + \delta_\infty$

Si $k_o = 0$ y $\mu_A = 0$, obteniendo

$$\dot{x} = -k_\infty [L_g V(x)]^{\frac{1+\delta_\infty}{m-1}} = -k_\infty [\mu_B \gamma_\infty [x]^{m-1}]^{\frac{1+\delta_\infty}{m-1}} \quad (3.30)$$

que es homogéneo de grado δ_∞ (en lazo cerrado).

Observación 3.3. Si se aplica el controlador (3.28) en el sistema (3.8), se puede recuperar un

Controlador Local Homogéneo Racional de grado $\delta = 1 + \delta_o$

Si $k_\infty = 0$ y $\mu_B = 0$, obteniendo

$$\dot{x} = -k_o \frac{L_g V(x)}{M_o(x)} = -k_o \left[\frac{\mu_A \gamma_o [x]^{m-1}}{M_o(x)} \right] \quad (3.31)$$

que es homogéneo de grado δ_o (en lazo cerrado).

Controlador No Local Homogéneo Racional de grado $\delta = 1 + \delta_\infty$

Si $k_o = 0$ y $\mu_A = 0$, obteniendo

$$\dot{x} = -k_\infty \frac{L_g V(x)}{M_\infty(x)} = -k_\infty \left[\frac{\mu_B \gamma_\infty [x]^{m-1}}{M_\infty(x)} \right] \quad (3.32)$$

que es homogéneo de grado δ_∞ (en lazo cerrado).

Teorema 3.4. (3.21) es una F.L Bi-Homogénea para el sistema (3.8) en lazo cerrado aplicada la función de control (3.27), ya que satisface el Teorema 2.1, es decir cumple

$$\dot{V}(x, \phi_P) = L_f V(x) - k_o |L_g V(x)|^{\frac{m+\delta_o}{m-1}} - k_\infty |L_g V(x)|^{\frac{m+\delta_\infty}{m-1}} < 0, \quad \forall x \neq 0. \quad \Delta \quad (3.33)$$

Corolario 3.2. Si se selecciona $\delta_o < 0$ y $\delta_\infty > 0$, el controlador bi-homogéneo polinomial (3.27) estabilizará el origen del sistema (3.8) en tiempo fijo. Δ

Prueba 3.4. Verificando (3.33), se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \phi_P) &= -k_o \left| (\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty) [x]^{m-1} \right|^{\frac{m+\delta_o}{m-1}} - k_\infty \left| (\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty) [x]^{m-1} \right|^{\frac{m+\delta_\infty}{m-1}} \\ &= - \left[k_o (\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty)^{\frac{m+\delta_o}{m-1}} |x|^{m+\delta_o} + k_\infty (\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty)^{\frac{m+\delta_\infty}{m-1}} |x|^{m+\delta_\infty} \right] < 0, \end{aligned} \quad (3.34)$$

que permite demostrar que $V(x)$ es una F.L Bi-Homogénea para el sistema (3.8) en lazo cerrado aplicado el controlador (3.27), logrando garantizar a su vez que dicha función de control polinomial al ser homogénea en el bi-límite lleva las trayectorias del sistema (3.8) al origen en tiempo fijo (si se seleccionan $\delta_o < 0$ y $\delta_\infty > 0$). \blacksquare

Teorema 3.5. (3.21) es una F.L Bi-Homogénea para el sistema (3.8) en lazo cerrado aplicada la función de control (3.28), ya que satisface el Teorema 2.1, es decir cumple

$$\dot{V}(x, \phi_R) = L_f V(x) - \left(\frac{k_o}{M_o(x)} + \frac{k_\infty}{M_\infty(x)} \right) L_g V(x)^2 < 0, \quad \forall x \neq 0. \quad \Delta \quad (3.35)$$

Corolario 3.3. Si se selecciona $\delta_o < 0$ y $\delta_\infty > 0$, el controlador bi-homogéneo racional (3.28) estabilizará el origen del sistema (3.8) en tiempo fijo. Δ

Prueba 3.5. Verificando (3.35), se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \phi_R) &= - \left(\frac{k_o}{M_o(x)} + \frac{k_\infty}{M_\infty(x)} \right) [(\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty) [x]^{m-1}]^2 \\ &= - \left(\frac{k_o}{M_o(x)} + \frac{k_\infty}{M_\infty(x)} \right) (\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty)^2 |x|^{2(m-1)} < 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

la cual permite demostrar que $V(x)$ es una F.L Bi-Homogénea para el sistema (3.8) en lazo cerrado aplicado el controlador (3.28), logrando garantizar a su vez que dicha función de control racional al ser homogénea en el bi-límite lleva las trayectorias del sistema (3.8) al origen en tiempo fijo (si se seleccionan $\delta_o < 0$ y $\delta_\infty > 0$). \blacksquare

3.3. Controlador Bi-Homogéneo - Sistema de Orden 2

3.3.1. Homogeneidad del Sistema

Sea (3.7) el sistema a analizar con $\rho = 2$, es decir, sea el sistema a estudiar una cadena de integradores de orden dos

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Considerando al control u como variable adicional con peso de homogeneidad r_3 , la homogeneidad en lazo cerrado del sistema (3.37) se obtiene a partir de

$$f(\Lambda_r x) = \lambda^\delta \Lambda_r f(x) \quad \Rightarrow \quad f(\Lambda_r x) = \left. \begin{aligned} & \left[\lambda^{r_2} x_2 \right] \\ & \left[\lambda^{r_3} u \right] \end{aligned} = \lambda^\delta \left. \begin{aligned} & \left[\lambda^{r_1} x_2 \right] \\ & \left[\lambda^{r_2} u \right] \right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} r_2 &= \delta + r_1 \\ r_3 &= \delta + r_2 \end{aligned},$$

donde si se fija $r_2 = 1$, se restringen los parámetros r_1 , r_3 y δ de la forma

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= 1 - \delta > 0 & \rightarrow & 1 > \delta \\ r_3 &= 1 + \delta \geq 0 & \rightarrow & \delta \geq -1 \end{aligned} \right\} 1 > \delta \geq -1. \quad (3.38)$$

3.3.2. Diseño de Control Homogéneo

3.3.2.1. Función de Lyapunov de Control Homogénea

A partir de [6], se propone como candidata a F.L.C Homogénea la función

$$V(x) = \gamma \frac{r_1}{m} |x_1|^{\frac{m}{r_1}} + \frac{r_2}{m} |x_2|^{\frac{m}{r_2}} + k_1^{\frac{m-r_2}{r_2}} [x_1]^{\frac{m-r_2}{r_1}} x_2 + \left(1 - \frac{r_2}{m}\right) k_1^{\frac{r_2}{r_2}} |x_1|^{\frac{m}{r_1}}, \quad (3.39)$$

con $\gamma > 0$ y $k_1 > 0$; la cual considerando (3.38), se puede reescribir como

$$V(x) = \left[\gamma \left(\frac{1-\delta}{m} \right) + \left(\frac{m-1}{m} \right) k_1^m \right] |x_1|^{\frac{m}{1-\delta}} + k_1^{m-1} [x_1]^{\frac{m-1}{1-\delta}} x_2 + \frac{1}{m} |x_2|^m. \quad (3.40)$$

Dicha función es homogénea de grado m , positiva definida $\forall \gamma > 0$, radialmente no acotada y continuamente diferenciable, si

$$\begin{aligned} \frac{m}{1-\delta} &> 1 & \rightarrow & m > 1 - \delta \\ \frac{m-1}{1-\delta} &\geq 1 & \rightarrow & m \geq 2 - \delta \quad * \\ m &> 1 & \rightarrow & m > 1, \end{aligned} \quad (3.41)$$

se satisfacen, donde $*$ representa la condición más restrictiva sobre el parámetro m .

Teorema 3.6. (3.40) es una F.L.C Homogénea para el sistema (3.37), ya que satisface la Definición 2.2, es decir cumple

$$S_g \triangleq \{x^* \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} | L_g V(x^*) = 0\} \subseteq S_f \triangleq \{x^* \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} | L_f V(x^*) < 0\} \quad (3.42)$$

\Updownarrow

$$\{L_g V(x^*) = 0 \cap x^* \neq 0\} \Rightarrow L_f V(x^*) < 0. \quad \triangle$$

Prueba 3.6. Tomando la derivada de (3.40) a lo largo de las trayectorias del sistema (3.37), se obtiene

$$\dot{V}(x) = L_f V(x) + L_g V(x)u,$$

donde

$$L_f V(x) = \left[\gamma + \left(\frac{m-1}{1-\delta} \right) k_1^m \right] [x_1]^{\frac{m-1+\delta}{1-\delta}} x_2 + \left(\frac{m-1}{1-\delta} \right) k_1^{m-1} |x_1|^{\frac{m-2+\delta}{1-\delta}} x_2^2, \quad (3.43)$$

$$L_g V(x) = [x_2]^{m-1} + k_1^{m-1} [x_1]^{\frac{m-1}{1-\delta}}. \quad (3.44)$$

Verificando (3.42), despejando x_2^* de (3.44), calculando los puntos donde $L_g V = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} [x_2^*]^{m-1} + k_1^{m-1} [x_1^*]^{\frac{m-1}{1-\delta}} &= 0 \\ [x_2^*]^{m-1} &= -k_1^{m-1} [x_1^*]^{\frac{m-1}{1-\delta}} \\ x_2^* &= -k_1 [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta}}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

sustituyendo (3.45) en (3.43), se obtiene

$$\begin{aligned} L_f V(x^*) &= \\ & \left\{ -k_1 [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta}} \right\} \\ & \left\{ \left[\gamma + \left(\frac{m-1}{1-\delta} \right) k_1^m \right] [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta}} + \left(\frac{m-1}{1-\delta} \right) k_1^{m-1} (-k_1 [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta}}) \right\} |x_1^*|^{\frac{m-2+\delta}{1-\delta}} \\ &= -k_1 \left[\underbrace{\gamma [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta}} + \left(\frac{m-1}{1-\delta} \right) k_1^m [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta}} - \left(\frac{m-1}{1-\delta} \right) k_1^m [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta}}}_{=0} \right] [x_1^*]^{\frac{m-2+\delta}{1-\delta} + \frac{1}{1-\delta}} \\ &= -k_1 [x_1^*]^{\frac{m-1+\delta}{1-\delta}} \left[\gamma [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta}} \right] = -\gamma k_1 |x_1^*|^{\frac{m+\delta}{1-\delta}} < 0, \end{aligned} \quad (3.46)$$

lo cual cumple (3.42), demostrando que $V(x)$ es una F.L.C Homogénea para el sistema (3.37). ■

3. CONTROLADORES BI-HOMOGÉNEOS SISTEMAS DE ORDEN 1 Y 2

3.3.2.2. Controlador Homogéneo

Analizando la homogeneidad de (3.43) y (3.44) para definir la función de control homogénea que estabilizará el origen del sistema (3.37), recordando que $r_1 = 1 - \delta$ y $r_2 = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} L_f V(x) &= \left\{ \left[\gamma + \left(\frac{m-1}{1-\delta} \right) k_1^m \right] [\lambda^{1-\delta} x_1]^{\frac{1}{1-\delta}} + \left(\frac{m-1}{1-\delta} \right) k_1^{m-1} (\lambda x_2) \right\} |\lambda^{1-\delta} x_1|^{\frac{m-2+\delta}{1-\delta}} (\lambda x_2) \\ &= \left\{ \left[\gamma + \left(\frac{m-1}{1-\delta} \right) k_1^m \right] \lambda [x_1]^{\frac{1}{1-\delta}} + \lambda \left(\frac{m-1}{1-\delta} \right) k_1^{m-1} x_2 \right\} \lambda^{m-1+\delta} |x_1|^{\frac{m-2+\delta}{1-\delta}} x_2 \\ &= \lambda^{m+\delta} \left\{ \left[\gamma + \left(\frac{m-1}{1-\delta} \right) k_1^m \right] [x_1]^{\frac{1}{1-\delta}} + \left(\frac{m-1}{1-\delta} \right) k_1^{m-1} x_2 \right\} |x_1|^{\frac{m-2+\delta}{1-\delta}} x_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_g V(x) &= k_1^{m-1} [\lambda^{1-\delta} x_1]^{\frac{m-1}{1-\delta}} + [\lambda x_2]^{m-1} \\ &= \lambda^{m-1} \left\{ k_1^{m-1} [x_1]^{\frac{m-1}{1-\delta}} + [x_2]^{m-1} \right\}, \end{aligned}$$

por lo que $L_f V(x)$ es homogéneo de grado $m+\delta$ y $L_g V(x)$ es homogéneo de grado $m-1$.

Considerando el grado de homogeneidad de $L_g V(x)$ y recordando (3.38), se diseña un controlador homogéneo $u = \phi(x)$ de grado $r_3 = 1 + \delta$, definido como

$$\phi(x) = -k_2 [L_g V(x)]^{\frac{1+\delta}{m-1}} = -k_2 [k_1^{m-1} [x_1]^{\frac{m-1}{1-\delta}} + [x_2]^{m-1}]^{\frac{1+\delta}{m-1}}. \quad (3.47)$$

Teorema 3.7. (3.40) es una F.L Homogénea para el sistema (3.37) en lazo cerrado aplicada la ley de control (3.47) con $k_2 > 0$ suficientemente grande, ya que satisface el Teorema 2.1, es decir cumple

$$\dot{V} = L_f V(x) + L_g V(x) \phi(x) < 0, \quad \forall x \neq 0. \quad \triangle \quad (3.48)$$

Corolario 3.4. El controlador homogéneo (3.47) estabiliza asintóticamente, exponencialmente o en tiempo finito el origen del sistema (3.37), dependiendo del valor de δ , al satisfacer el Corolario 2.1. \triangle

Prueba 3.7. Verificando (3.48), se reescribe $\dot{V}(x, \phi)$ como

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \phi) &= L_f V(x) - k_2 L_g V(x) [L_g V(x)]^{\frac{1+\delta}{m-1}} \\ &= L_f V(x) - k_2 |L_g V(x)|^{\frac{1+\delta}{m-1}-1} L_g V(x)^2 \\ &= L_f V(x) - k_2 |L_g V(x)|^{\frac{1+\delta}{m-1}-1} |L_g V(x)|^2 \\ &= L_f V(x) - k_2 |L_g V(x)|^{\frac{m+\delta}{m-1}}, \end{aligned}$$

por lo que finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \phi) = & -k_2 |k_1^{m-1} [x_1]^{\frac{m-1}{1-\delta}} + [x_2]^{m-1}|^{\frac{m+\delta}{m-1}} \\ & + \left\{ \left[\gamma + \left(\frac{m-1}{1-\delta} \right) k_1^m \right] [x_1]^{\frac{1}{1-\delta}} + \left(\frac{m-1}{1-\delta} \right) k_1^{m-1} x_2 \right\} |x_1|^{\frac{m-2+\delta}{1-\delta}} x_2. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Note que el 1^{er} término de (3.49) es no positivo y se desvanece en el conjunto $S_g = \{x_2 = -k_1 [x_1]^{\frac{1}{1-\delta}}\}$ (3.45), por lo que al evaluar $V(x)$ en dicho conjunto se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \phi)|_{S_g} = & \left\{ -k_1 [x_1]^{\frac{1}{1-\delta}} \right\} \\ & \left\{ \left[\gamma + \left(\frac{m-1}{1-\delta} \right) k_1^m \right] [x_1]^{\frac{1}{1-\delta}} + \left(\frac{m-1}{1-\delta} \right) k_1^{m-1} (-k_1 [x_1]^{\frac{1}{1-\delta}}) \right\} |x_1|^{\frac{m-2+\delta}{1-\delta}} \\ = & -k_1 \left[\gamma [x_1]^{\frac{1}{1-\delta}} + \left(\frac{m-1}{1-\delta} \right) k_1^m [x_1]^{\frac{1}{1-\delta}} - \left(\frac{m-1}{1-\delta} \right) k_1^m [x_1]^{\frac{1}{1-\delta}} \right] [x_1]^{\frac{m-2+\delta}{1-\delta} + \frac{1}{1-\delta}} \\ = & -k_1 [x_1]^{\frac{m-1+\delta}{1-\delta}} \left[\gamma [x_1]^{\frac{1}{1-\delta}} \right] = -\gamma k_1 |x_1|^{\frac{m+\delta}{1-\delta}} < 0. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Utilizando el *Lema 2.3* se puede garantizar que $\dot{V}(x, \phi)|_{S_g} < 0$ seleccionando $k_2 > 0$ suficientemente grande, por lo que se concluye que $V(x)$ es una Función de Lyapunov Homogénea para el sistema en lazo cerrado aplicado el controlador (3.47). ■

3.3.3. Diseño de Control Bi-Homogéneo

3.3.3.1. Función de Lyapunov de Control Bi-Homogénea

Se propone como candidata a F.L.C. Bi-homogénea la función

$$V(x) = \mu_A V_o(x) + \mu_B V_\infty(x), \quad (3.51)$$

con $\mu_A \geq 0$, $\mu_B \geq 0$ y $\mu_A + \mu_B > 0$. Donde $V_o(x)$ y $V_\infty(x)$ son F.L.C Homogéneas de la forma (3.40), con parámetros

$$\begin{aligned} (\delta_o, r_{1o}, r_{2o}, r_{3o}, m_o) &= (\delta_o, 1 - \delta_o, 1, 1 + \delta_o, m) \\ (\delta_\infty, r_{1\infty}, r_{2\infty}, r_{3\infty}, m_\infty) &= (\delta_\infty, 1 - \delta_\infty, 1, 1 + \delta_\infty, m) \end{aligned}$$

por (3.38), donde se define a $m = m_o = m_\infty \geq \max\{2 - \delta_o, 2 - \delta_\infty\} = 2 - \delta_o$ para poder encontrar una solución explícita de la ecuación $L_g V(x^*) = 0$ respecto a x_2^* (contemplando (3.41)), considerando a su vez a $1 > \delta_\infty > \delta_o \geq -1$ por suposición (contemplando (3.38)).

3. CONTROLADORES BI-HOMOGÉNEOS SISTEMAS DE ORDEN 1 Y 2

Teorema 3.8. (3.51) es una F.L.C Bi-Homogénea para el sistema (3.37), ya que satisface la Definición 2.2, es decir cumple

$$\forall \{ x^* \neq 0 \mid \underbrace{\mu_A L_g V_o + \mu_B L_g V_\infty}_{L_g V(x^*)=0} = 0 \} \Rightarrow \dot{V}(x^*) = \underbrace{\mu_A L_f V_o + \mu_B L_f V_\infty}_{L_f V(x^*)} < 0. \quad \triangle \quad (3.52)$$

Prueba 3.8. Analizando la homogeneidad de (3.51), suponiendo (por simplicidad) que $m_\infty > m_o$, recordando que $V_o(x)$ presenta a $r_{1_o} = 1 - \delta_o$ y $r_{2_o} = 1$; considerando además que $V_\infty(x)$ presenta a $r_{1_\infty} = 1 - \delta_\infty$ y $r_{2_\infty} = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} V(x) &= \mu_A V_o(x) + \mu_B V_\infty(x) \\ &= \mu_A \left\{ \left[\frac{\gamma_o(1 - \delta_o) + k_{1_o}^{m_o}(m_o - 1)}{m_o} \right] |\lambda^{1-\delta_o} x_1|^{\frac{m_o}{1-\delta_o}} + k_{1_o}^{m_o-1} [\lambda^{1-\delta_o} x_1]^{\frac{m_o-1}{1-\delta_o}} (\lambda x_2) + \frac{1}{m_o} |\lambda x_2|^{m_o} \right\} \\ &+ \mu_B \left\{ \left[\frac{\gamma_\infty(1 - \delta_\infty) + k_{1_\infty}^{m_\infty}(m_\infty - 1)}{m_\infty} \right] |\lambda^{1-\delta_\infty} x_1|^{\frac{m_\infty}{1-\delta_\infty}} + k_{1_\infty}^{m_\infty-1} [\lambda^{1-\delta_\infty} x_1]^{\frac{m_\infty-1}{1-\delta_\infty}} (\lambda x_2) + \frac{1}{m_\infty} |\lambda x_2|^{m_\infty} \right\} \\ &= \lambda^{m_o} \mu_A \underbrace{\left\{ \left[\frac{\gamma_o(1 - \delta_o) + k_{1_o}^{m_o}(m_o - 1)}{m_o} \right] |x_1|^{\frac{m_o}{1-\delta_o}} + k_{1_o}^{m_o-1} [x_1]^{\frac{m_o-1}{1-\delta_o}} x_2 + \frac{1}{m_o} |x_2|^{m_o} \right\}}_{(r_{1_o}, r_{2_o})\text{-Homogéneo de grado } m_o} \\ &+ \lambda^{m_\infty} \mu_B \underbrace{\left\{ \left[\frac{\gamma_\infty(1 - \delta_\infty) + k_{1_\infty}^{m_\infty}(m_\infty - 1)}{m_\infty} \right] |x_1|^{\frac{m_\infty}{1-\delta_\infty}} + k_{1_\infty}^{m_\infty-1} [x_1]^{\frac{m_\infty-1}{1-\delta_\infty}} x_2 + \frac{1}{m_\infty} |x_2|^{m_\infty} \right\}}_{(r_{1_\infty}, r_{2_\infty})\text{-Homogéneo de grado } m_\infty}, \end{aligned}$$

lo cual permite garantizar que $V(x) \approx V_o(x)$ en una vecindad cercana a cero y $V(x) \approx V_\infty(x)$ en una vecindad cercana a infinito, ya que $V_o(x)$ presenta potencias más pequeñas que $V_\infty(x)$. Es así como se demuestra que $V(x)$ es una función bi-homogénea de grado m_o/m_∞ .

Definiendo a $m = m_o = m_\infty \geq 2 - \delta_o$, tomando la derivada de (3.51) a lo largo de las trayectorias del sistema (3.37), se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \mu_A \dot{V}_o(x) + \mu_B \dot{V}_\infty(x) \\ \dot{V}(x) &= \mu_A (L_f V_o(x) + L_g V_o(x)u) + \mu_B (L_f V_\infty(x) + L_g V_\infty(x)u) \\ \dot{V}(x) &= \underbrace{(\mu_A L_f V_o(x) + \mu_B L_f V_\infty(x))}_{L_f V(x)} + \underbrace{(\mu_A L_g V_o(x) + \mu_B L_g V_\infty(x))}_{L_g V(x)} u, \quad (3.53) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
 L_f V(x) = & \mu_A \left\{ \left[\gamma_o + \left(\frac{m-1}{1-\delta_o} \right) k_{1o}^m \right] |x_1|^{\frac{1}{1-\delta_o}} + \left(\frac{m-1}{1-\delta_o} \right) k_{1o}^{m-1} x_2 \right\} |x_1|^{\frac{m-2+\delta_o}{1-\delta_o}} x_2 \\
 & + \mu_B \left\{ \left[\gamma_\infty + \left(\frac{m-1}{1-\delta_\infty} \right) k_{1\infty}^m \right] |x_1|^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + \left(\frac{m-1}{1-\delta_\infty} \right) k_{1\infty}^{m-1} x_2 \right\} |x_1|^{\frac{m-2+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} x_2,
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

$$L_g V(x) = (\mu_A + \mu_B) [x_2]^{m-1} + \mu_A k_{1o}^{m-1} [x_1]^{\frac{m-1}{1-\delta_o}} + \mu_B k_{1\infty}^{m-1} [x_1]^{\frac{m-1}{1-\delta_\infty}}. \tag{3.55}$$

Calculando los valores de x_2^* donde $L_g V(x^*) = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned}
 (\mu_A + \mu_B) [x_2^*]^{m-1} &= - \left(\mu_A k_{1o}^{m-1} [x_1^*]^{\frac{m-1}{1-\delta_o}} + \mu_B k_{1\infty}^{m-1} [x_1^*]^{\frac{m-1}{1-\delta_\infty}} \right) \\
 x_2^* &= - \left[\frac{\mu_A}{\mu_A + \mu_B} k_{1o}^{m-1} [x_1^*]^{\frac{m-1}{1-\delta_o}} + \frac{\mu_B}{\mu_A + \mu_B} k_{1\infty}^{m-1} [x_1^*]^{\frac{m-1}{1-\delta_\infty}} \right]^{\frac{1}{m-1}} \\
 x_2^* &= - \left[\left(\frac{\mu_A}{\mu_A + \mu_B} k_{1o}^{m-1} + \frac{\mu_B}{\mu_A + \mu_B} k_{1\infty}^{m-1} |x_1^*|^{\frac{m-1}{1-\delta_\infty} - \frac{m-1}{1-\delta_o}} \right) [x_1^*]^{\frac{m-1}{1-\delta_o}} \right]^{\frac{1}{m-1}} \\
 x_2^* &= - \underbrace{\left[\frac{\mu_A}{\mu_A + \mu_B} k_{1o}^{m-1} + \frac{\mu_B}{\mu_A + \mu_B} k_{1\infty}^{m-1} |x_1^*|^{\frac{(m-1)(\delta_\infty - \delta_o)}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right]^{\frac{1}{m-1}}}_{>0} [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} \\
 x_2^* &= - \left(\frac{\mu_A}{\mu_A + \mu_B} k_{1o}^{m-1} + \frac{\mu_B}{\mu_A + \mu_B} k_{1\infty}^{m-1} |x_1^*|^{\frac{(m-1)(\delta_\infty - \delta_o)}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right)^{\frac{1}{m-1}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} \\
 x_2^* &= -\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}}.
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

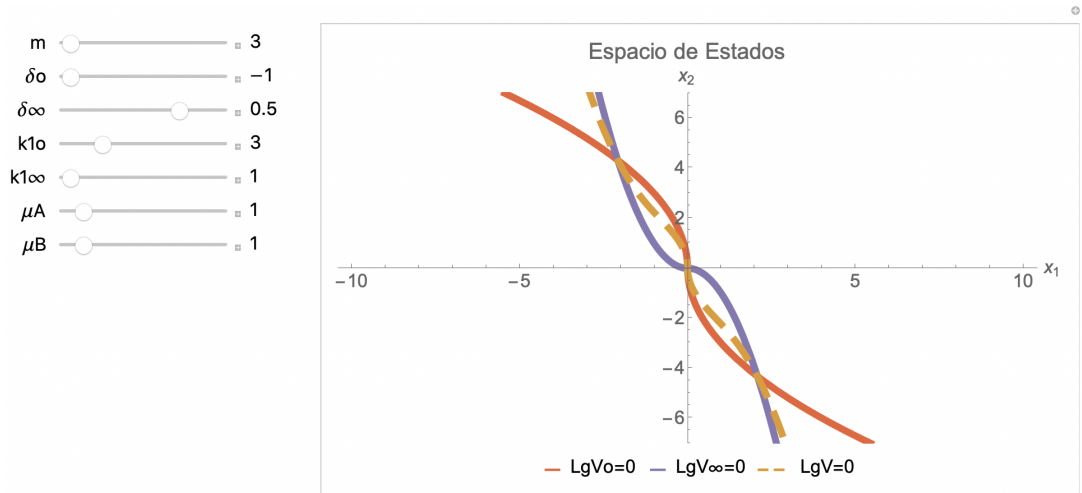


Figura 3.1: Muestra los valores de (x_1^*, x_2^*) donde $L_g V(x^*) = 0$.

3. CONTROLADORES BI-HOMOGÉNEOS SISTEMAS DE ORDEN 1 Y 2

A partir de (3.53), se evalúa en (3.54) el conjunto $S_g = \{x_2^* = -\omega(x_1^*)[x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}}\}$ (3.56), obteniendo la expresión

$$\begin{aligned}
 L_f V(x_1^*)|_{S_g} = & \quad (3.57) \\
 & \mu_A \left\{ \left[\gamma_o + \left(\frac{m-1}{1-\delta_o} \right) k_{1o}^m \right] [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right. \\
 & \left. + \left(\frac{m-1}{1-\delta_o} \right) k_{1o}^{m-1} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right)}_{x_2^*} \right\} |x_1^*|^{\frac{m-2+\delta_o}{1-\delta_o}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right)}_{x_2^*} \\
 & + \mu_B \left\{ \left[\gamma_\infty + \left(\frac{m-1}{1-\delta_\infty} \right) k_{1\infty}^m \right] [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} \right. \\
 & \left. + \left(\frac{m-1}{1-\delta_\infty} \right) k_{1\infty}^{m-1} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} \right)}_{x_2^*} \right\} |x_1^*|^{\frac{m-2+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} \right)}_{x_2^*},
 \end{aligned}$$

la cual al ser simplificada se reduce en

$$\begin{aligned}
 L_f V(x_1^*)|_{S_g} = & \\
 & -\omega(x_1^*) \left[\mu_A \left[\left[\gamma_o + \left[\frac{m-1}{1-\delta_o} \right] k_{1o}^m \right] [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} - \left[\frac{m-1}{1-\delta_o} \right] k_{1o}^{m-1} \omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right] [x_1^*]^{\frac{m-1+\delta_o}{1-\delta_o}} \right. \\
 & \left. + \mu_B \left[\left[\gamma_\infty + \left[\frac{m-1}{1-\delta_\infty} \right] k_{1\infty}^m \right] [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} - \left[\frac{m-1}{1-\delta_\infty} \right] k_{1\infty}^{m-1} \omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} \right] [x_1^*]^{\frac{m-2+\delta_\infty}{1-\delta_\infty} + \frac{1}{1-\delta_o}} \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_f V(x_1^*)|_{S_g} = & \\
 & -\omega(x_1^*) \left\{ \mu_A \left[\left[\gamma_o + \left(\frac{m-1}{1-\delta_o} \right) k_{1o}^m \right] - \left(\frac{m-1}{1-\delta_o} \right) k_{1o}^{m-1} \omega(x_1^*) \right] |x_1^*|^{\frac{m+\delta_o}{1-\delta_o}} \right. \\
 & \left. + \mu_B \left[\left[\gamma_\infty + \left(\frac{m-1}{1-\delta_\infty} \right) k_{1\infty}^m \right] |x_1^*|^{\frac{1}{1-\delta_\infty} - \frac{1}{1-\delta_o}} - \left(\frac{m-1}{1-\delta_\infty} \right) k_{1\infty}^{m-1} \omega(x_1^*) \right] |x_1^*|^{\frac{m-2+\delta_\infty}{1-\delta_\infty} + \frac{2}{1-\delta_o}} \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_f V(x_1^*)|_{S_g} = & \\
 & -\omega(x_1^*) \left\{ \mu_A \left[\gamma_o + \left(\frac{m-1}{1-\delta_o} \right) k_{1o}^m \right] |x_1^*|^{\frac{m+\delta_o}{1-\delta_o}} + \mu_B \left[\gamma_\infty + \left(\frac{m-1}{1-\delta_\infty} \right) k_{1\infty}^m \right] |x_1^*|^{\frac{m}{1-\delta_\infty} + \frac{\delta_o}{1-\delta_o}} \right. \\
 & \left. - \mu_A \left(\frac{m-1}{1-\delta_o} \right) k_{1o}^{m-1} \omega(x_1^*) |x_1^*|^{\frac{m+\delta_o}{1-\delta_o}} - \mu_B \left(\frac{m-1}{1-\delta_\infty} \right) k_{1\infty}^{m-1} \omega(x_1^*) |x_1^*|^{\frac{m-2+\delta_\infty}{1-\delta_\infty} + \frac{2}{1-\delta_o}} \right\},
 \end{aligned}$$

por lo que finalmente se obtiene

$$L_f V(x_1^*)|_{S_g} = - \underbrace{[\pi(x_1^*) - v(x_1^*)]}_{\lambda(x_1^*)} \omega(x_1^*) \quad (3.58)$$

con

$$\pi(x_1^*) = \mu_A \left[\gamma_o + \left(\frac{m-1}{1-\delta_o} \right) k_{1o}^m \right] |x_1^*|^{\frac{m+\delta_o}{1-\delta_o}} + \mu_B \left[\gamma_\infty + \left(\frac{m-1}{1-\delta_\infty} \right) k_{1\infty}^m \right] |x_1^*|^{\frac{m}{1-\delta_\infty} + \frac{\delta_o}{1-\delta_o}}, \quad (3.59)$$

$$v(x_1^*) = \left[\mu_A \left(\frac{m-1}{1-\delta_o} \right) k_{1o}^{m-1} |x_1^*|^{\frac{m+\delta_o}{1-\delta_o}} + \mu_B \left(\frac{m-1}{1-\delta_\infty} \right) k_{1\infty}^{m-1} |x_1^*|^{\frac{m-2+\delta_\infty}{1-\delta_\infty} + \frac{2}{1-\delta_o}} \right] \omega(x_1^*), \quad (3.60)$$

donde $\pi(x_1^*) > 0$, $v(x_1^*) > 0$ y $\omega(x_1^*) > 0$, $\forall x_1^* \neq 0$ y $\pi(0) = 0$, $v(0) = 0$.

Recordando el *Teorema 3.8*, para que $L_f V(x^*)|_{S_g} < 0$ se debe garantizar que $\lambda(x_1^*) > 0$, $\forall \{x_1^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$, lo cual se logra si

$$\pi(x_1^*) > v(x_1^*) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi(x_1^*)}{v(x_1^*)} > 1 \quad (3.61)$$

se satisface.

Para realizar el análisis de (3.61), se estudian previamente las potencias de (3.59) y (3.60), considerando que $1 > \delta_\infty > \delta_o \geq -1$, obteniendo

$$\begin{aligned} \text{de: } \pi(x_1^*) \Rightarrow & \quad \frac{m+\delta_o}{1-\delta_o} < \frac{m}{1-\delta_\infty} + \frac{\delta_o}{1-\delta_o} \\ & \quad \frac{m}{1-\delta_o} + \frac{\delta_o}{1-\delta_o} < \frac{m}{1-\delta_\infty} + \frac{\delta_o}{1-\delta_o} \\ & \quad m \left(\frac{1}{1-\delta_o} < \frac{1}{1-\delta_\infty} \right), \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \text{de: } v(x_1^*) \Rightarrow & \quad \frac{m+\delta_o}{1-\delta_o} < \frac{m-2+\delta_\infty}{1-\delta_\infty} + \frac{2}{1-\delta_o} \\ & \quad \frac{m}{1-\delta_o} + \frac{\delta_o}{1-\delta_o} < \frac{m}{1-\delta_\infty} - \frac{1}{1-\delta_\infty} - 1 + \frac{2}{1-\delta_o} \\ & \quad \frac{m}{1-\delta_o} + \frac{\delta_o}{1-\delta_o} < \frac{m}{1-\delta_\infty} - \frac{1}{1-\delta_\infty} + \frac{1}{1-\delta_o} + \frac{\delta_o}{1-\delta_o} \\ & \quad (m-1) \left(\frac{1}{1-\delta_o} < \frac{1}{1-\delta_\infty} \right), \end{aligned} \quad (3.63)$$

3. CONTROLADORES BI-HOMOGÉNEOS SISTEMAS DE ORDEN 1 Y 2

además de determinar los términos dominantes de

$$\omega(x_1^*) = \left(\underbrace{\frac{\mu_A}{\mu_A + \mu_B} k_{1o}^{m-1}}_{\text{Dom. } x_1^* \rightarrow 0} + \underbrace{\frac{\mu_B}{\mu_A + \mu_B} k_{1\infty}^{m-1} |x_1^*|^{\frac{(m-1)(\delta_\infty - \delta_o)}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}}}_{\text{Dom. } x_1^* \rightarrow \infty} \right)^{\frac{1}{m-1}}. \quad (3.64)$$

(3.62) y (3.63) permiten concluir que los términos dominantes de (3.59) y (3.60), para valores pequeños de x_1^* cercanos a cero (términos de menor orden) son

$$\pi_o(x_1^*) = \mu_A \left[\gamma_o + \left(\frac{m-1}{1-\delta_o} \right) k_{1o}^m \right] |x_1^*|^{\frac{m+\delta_o}{1-\delta_o}}, \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} v_o(x_1^*) &= \left[\mu_A \left(\frac{m-1}{1-\delta_o} \right) k_{1o}^{m-1} |x_1^*|^{\frac{m+\delta_o}{1-\delta_o}} \right] \omega(x_1^*) |_{\text{Dom. } x_1^* \rightarrow 0} \\ &= \mu_A \left(\frac{m-1}{1-\delta_o} \right) \left(\frac{\mu_A}{\mu_A + \mu_B} \right)^{\frac{1}{m-1}} k_{1o}^m |x_1^*|^{\frac{m+\delta_o}{1-\delta_o}}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

y para valores grandes de x_1^* (términos de mayor orden) son

$$\pi_\infty(x_1^*) = \mu_B \left[\gamma_\infty + \left(\frac{m-1}{1-\delta_\infty} \right) k_{1\infty}^m \right] |x_1^*|^{\frac{m}{1-\delta_\infty} + \frac{\delta_o}{1-\delta_o}}, \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} v_\infty(x_1^*) &= \left[\mu_B \left(\frac{m-1}{1-\delta_\infty} \right) k_{1\infty}^{m-1} |x_1^*|^{\frac{m-2+\delta_\infty}{1-\delta_\infty} + \frac{2}{1-\delta_o}} \right] \omega(x_1^*) |_{\text{Dom. } x_1^* \rightarrow \infty} \\ &= \left[\mu_B \left(\frac{m-1}{1-\delta_\infty} \right) k_{1\infty}^{m-1} |x_1^*|^{\frac{m-2+\delta_\infty}{1-\delta_\infty} + \frac{2}{1-\delta_o}} \right] \left(\underbrace{\frac{\mu_B}{\mu_A + \mu_B} k_{1\infty}^m |x_1^*|^{\frac{(m-1)(\delta_\infty - \delta_o)}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}}}_{\omega(x_1^*) |_{\text{Dom. } x_1^* \rightarrow \infty}} \right)^{\frac{1}{m-1}} \\ &= \mu_B \left(\frac{m-1}{1-\delta_\infty} \right) k_{1\infty}^m |x_1^*|^{\frac{m-2+\delta_\infty}{1-\delta_\infty} + \frac{2}{1-\delta_o} + \frac{1}{1-\delta_\infty} - \frac{1}{1-\delta_o}} \left(\frac{\mu_B}{\mu_A + \mu_B} \right)^{\frac{1}{m-1}} \\ &= \mu_B \left(\frac{m-1}{1-\delta_\infty} \right) \left(\frac{\mu_B}{\mu_A + \mu_B} \right)^{\frac{1}{m-1}} k_{1\infty}^m |x_1^*|^{\frac{m}{1-\delta_\infty} + \frac{\delta_o}{1-\delta_o}}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Analizando (3.61), considerando a (3.65) y (3.66), en el caso ($x_1^* \rightarrow 0$), se obtiene

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x_1^* \rightarrow 0} \frac{\pi_o(x_1^*)}{\nu_o(x_1^*)} \\
 & \lim_{x_1^* \rightarrow 0} \frac{\cancel{\mu_A} \left[\gamma_o + \left(\frac{m-1}{1-\delta_o} \right) k_{1o}^m \right] |x_1^*|^{\frac{m+\delta_o}{1-\delta_o}}}{\cancel{\mu_A} \left(\frac{m-1}{1-\delta_o} \right) \left(\frac{\mu_A}{\mu_A + \mu_B} \right)^{\frac{1}{m-1}} k_{1o}^m |x_1^*|^{\frac{m+\delta_o}{1-\delta_o}}} \\
 & \lim_{x_1^* \rightarrow 0} \left(\frac{1-\delta_o}{m-1} \right) \left(\frac{\gamma_o}{k_{1o}^m} + \left(\frac{m-1}{1-\delta_o} \right) \right) \left(1 + \frac{\mu_B}{\mu_A} \right)^{\frac{1}{m-1}} > 1 \\
 & \Downarrow \\
 & \gamma_o > k_{1o}^m \left(\frac{m-1}{1-\delta_o} \right) \left[\left(\frac{\mu_A}{\mu_A + \mu_B} \right)^{\frac{1}{m-1}} - 1 \right], \tag{3.69}
 \end{aligned}$$

que permite concluir que seleccionando $\gamma_o > 0$ suficientemente grande, para valores pequeños de x_1^* cercanos a cero se puede garantizar que (3.61) se cumple.

Realizando el mismo análisis, en el caso ($x_1^* \rightarrow \pm\infty$), considerando a (3.67) y (3.68), se obtiene

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x_1^* \rightarrow \pm\infty} \frac{\pi_\infty(x_1^*)}{\nu_\infty(x_1^*)} \\
 & \lim_{x_1^* \rightarrow \pm\infty} \frac{\cancel{\mu_B} \left[\gamma_\infty + \left(\frac{m-1}{1-\delta_\infty} \right) k_{1\infty}^m \right] |x_1^*|^{\frac{m}{1-\delta_\infty} + \frac{\delta_o}{1-\delta_o}}}{\cancel{\mu_B} \left(\frac{m-1}{1-\delta_\infty} \right) \left(\frac{\mu_B}{\mu_A + \mu_B} \right)^{\frac{1}{m-1}} k_{1\infty}^m |x_1^*|^{\frac{m}{1-\delta_\infty} + \frac{\delta_o}{1-\delta_o}}} \\
 & \lim_{x_1^* \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1-\delta_\infty}{m-1} \right) \left(\frac{\gamma_\infty}{k_{1\infty}^m} + \left(\frac{m-1}{1-\delta_\infty} \right) \right) \left(\frac{\mu_A}{\mu_B} + 1 \right)^{\frac{1}{m-1}} > 1 \\
 & \Downarrow \\
 & \gamma_\infty > k_{1\infty}^m \left(\frac{m-1}{1-\delta_\infty} \right) \left[\left(\frac{\mu_B}{\mu_A + \mu_B} \right)^{\frac{1}{m-1}} - 1 \right], \tag{3.70}
 \end{aligned}$$

que permite concluir que seleccionando $\gamma_\infty > 0$ suficientemente grande, para valores grandes de x_1^* se puede garantizar que (3.61) también se satisface.

3. CONTROLADORES BI-HOMOGÉNEOS SISTEMAS DE ORDEN 1 Y 2

Es así como la función $\frac{\pi(x_1^*)}{v(x_1^*)}$ cumple que:

- Es positiva en todas partes (excepto posiblemente en el origen), pues el numerador y el denominador son positivos.
- Es continua en todas partes (excepto posiblemente en el origen), pues el denominador es continuo.
- Sus límites son mayores que 1: $\lim_{x_1^* \rightarrow 0} \frac{\pi(x_1^*)}{v(x_1^*)} > 1$ y $\lim_{x_1^* \rightarrow \pm\infty} \frac{\pi(x_1^*)}{v(x_1^*)} > 1$, por (3.69) y (3.70).

La última condición (por continuidad) implica que en una vecindad (cerrada) cerca del origen $x_1^* \in [-\epsilon, \epsilon]$ y en una vecindad del infinito $x_1^* \in [\Omega, \infty)$ y $x_1^* \in (-\infty, -\Omega]$, la función $\frac{\pi(x_1^*)}{v(x_1^*)} > 1$. Por lo que, en el compacto $[-\Omega, -\epsilon] \cup [\epsilon, \Omega]$, la función continua $\frac{\pi(x_1^*)}{v(x_1^*)}$ alcanza su mínimo valor, el cual es positivo, y depende de γ_0 y γ_∞ . Dicho valor puede alterarse haciéndolo mayor que 1 seleccionando γ_0 y γ_∞ suficientemente grandes.

Por lo tanto se concluye que V es una F.L.C Bi-Homogénea para el sistema (3.37). ■

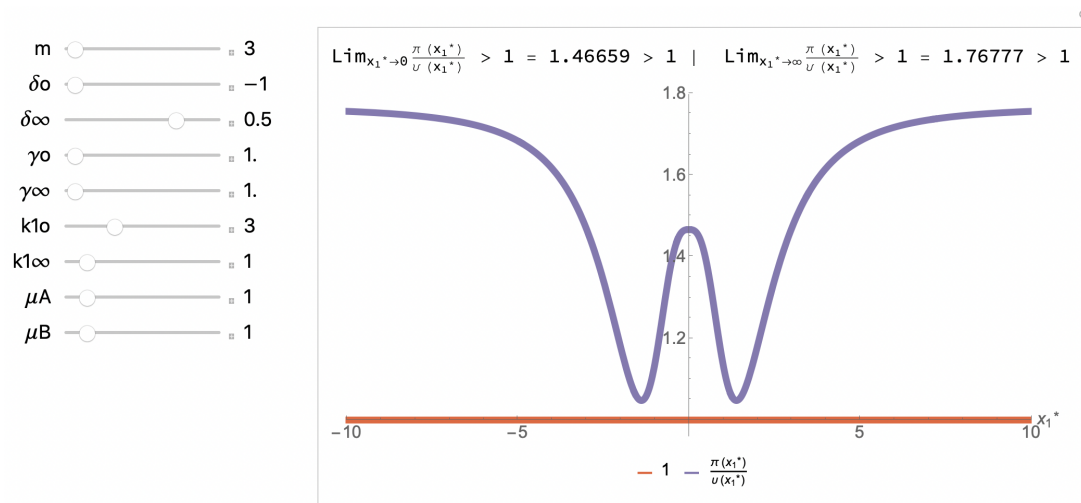


Figura 3.2: Muestra el comportamiento de la función $\frac{\pi(x_1^*)}{v(x_1^*)}$.

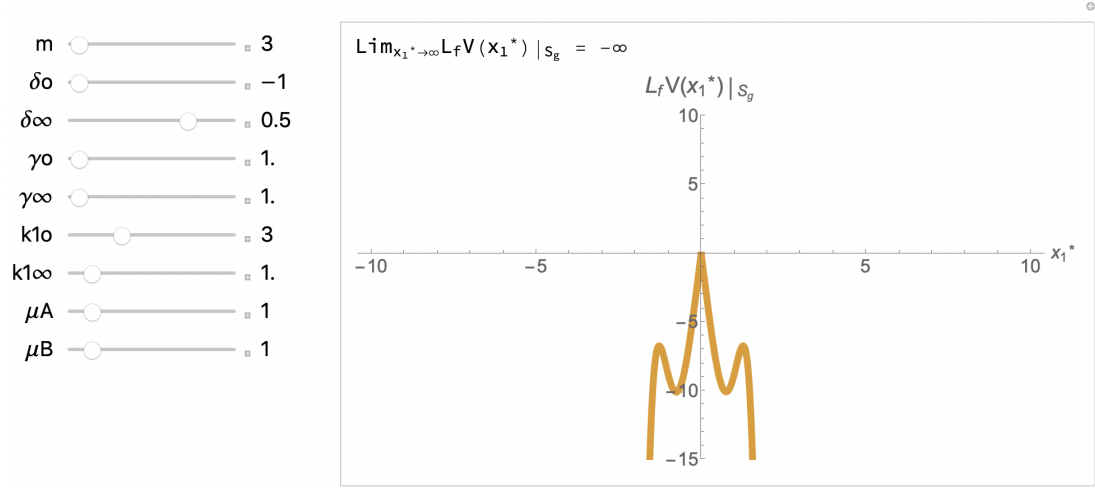


Figura 3.3: Muestra el comportamiento de $\dot{V}(x^*) = L_f V(x^*)|_{S_g}$ cerca del origen.

3.3.3.2. Controladores Bi-Homogéneos Polinomiales y Racionales

A partir de los controladores homogéneos diseñados por Cruz-Zavala and Moreno [6], se definen dos clases de controladores bi-homogéneos diferentes

$$\phi_P(x) = \underbrace{-k_{2o} [L_g V(x)]^{\frac{1+\delta_o}{m-1}}}_{\text{Control Local}} - \underbrace{k_{2\infty} [L_g V(x)]^{\frac{1+\delta_\infty}{m-1}}}_{\text{Control No Local}} \Rightarrow \text{Controlador Polinomial}, \quad (3.71)$$

$$\phi_R(x) = -\underbrace{k_{2o} \frac{L_g V(x)}{M_o(x)}}_{\text{Control Local}} - \underbrace{k_{2\infty} \frac{L_g V(x)}{M_\infty(x)}}_{\text{Control No Local}} \Rightarrow \text{Controlador Racional}, \quad (3.72)$$

donde, $k_{2o} > 0$ y $k_{2\infty} > 0$. $M_o(x)$ es una función positiva definida, continua y r_o -homogénea de grado $\delta_{M_o} = m - \delta_o - 2$ y $M_\infty(x)$ es una función positiva definida, continua y r_∞ -homogénea de grado $\delta_{M_\infty} = m - \delta_\infty - 2$. Donde

$$\begin{aligned} L_g V(x) &= (\mu_A + \mu_B) [x_2]^{m-1} + \mu_A k_{1o}^{m-1} [x_1]^{\frac{m-1}{1-\delta_o}} + \mu_B k_{1\infty}^{m-1} [x_1]^{\frac{m-1}{1-\delta_\infty}} \\ &= \left(\mu_A k_{1o}^{m-1} + \mu_B k_{1\infty}^{m-1} |x_1|^{\frac{(m-1)(\delta_\infty - \delta_o)}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right) [x_1]^{\frac{m-1}{1-\delta_o}} + (\mu_A + \mu_B) [x_2]^{m-1} \end{aligned} \quad (3.73)$$

con $\gamma_o > 0$ y $\gamma_\infty > 0$ suficientemente grandes para que (3.61) se garantice.

Observación 3.4. Las funciones de control (3.71) y (3.72), y sus respectivos sistemas en lazo cerrado resultantes, son homogéneos en el bi-límite ya que satisfacen la Definición 2.10.

3. CONTROLADORES BI-HOMOGÉNEOS SISTEMAS DE ORDEN 1 Y 2

Observación 3.5. Si se aplica el controlador (3.71) en el sistema (3.37), se puede recuperar

Controlador Local Homogéneo Polinomial de grado $\delta = 1 + \delta_o$

Si $k_{2o} = 0$ y $\mu_B = 0$, obteniendo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_{2o} [L_g V(x)]^{\frac{1+\delta_o}{m-1}} = -k_{2o} \left[\mu_A k_{1o}^{m-1} [x_1]^{\frac{m-1}{1-\delta_o}} + \mu_A [x_2]^{m-1} \right]^{\frac{1+\delta_o}{m-1}} \end{aligned} \quad (3.74)$$

que es homogéneo de grado δ_o (en lazo cerrado).

Controlador No Local Homogéneo Polinomial de grado $\delta = 1 + \delta_\infty$

Si $k_{2o} = 0$ y $\mu_A = 0$, obteniendo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_{2\infty} [L_g V(x)]^{\frac{1+\delta_\infty}{m-1}} = -k_{2\infty} \left[\mu_B k_{1\infty}^{m-1} [x_1]^{\frac{m-1}{1-\delta_\infty}} + \mu_B [x_2]^{m-1} \right]^{\frac{1+\delta_\infty}{m-1}} \end{aligned} \quad (3.75)$$

que es homogéneo de grado δ_∞ (en lazo cerrado).

Observación 3.6. Si se aplica el controlador (3.72) en el sistema (3.37), se puede recuperar

Controlador Local Homogéneo Racional de grado $\delta = 1 + \delta_o$

Si $k_{2\infty} = 0$ y $\mu_B = 0$, obteniendo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_{2o} \frac{L_g V(x)}{M_o(x)} = -k_{2o} \left[\frac{\mu_A k_{1o}^{m-1} [x_1]^{\frac{m-1}{1-\delta_o}} + \mu_A [x_2]^{m-1}}{M_o(x)} \right] \end{aligned} \quad (3.76)$$

que es homogéneo de grado δ_o (en lazo cerrado).

Controlador No Local Homogéneo Racional de grado $\delta = 1 + \delta_\infty$

Si $k_{2o} = 0$ y $\mu_A = 0$, obteniendo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_{2\infty} \frac{L_g V(x)}{M_\infty(x)} = -k_{2\infty} \left[\frac{\mu_B k_{1\infty}^{m-1} [x_1]^{\frac{m-1}{1-\delta_\infty}} + \mu_B [x_2]^{m-1}}{M_\infty(x)} \right] \end{aligned} \quad (3.77)$$

que es homogéneo de grado δ_∞ (en lazo cerrado).

Teorema 3.9. (3.51) es una F.L Bi-Homogénea para el sistema (3.37) en lazo cerrado aplicada la función de control (3.71) con $k_{2o} > 0$, $k_{2\infty} > 0$, $\gamma_o > 0$ y $\gamma_\infty > 0$ suficientemente grandes, ya que satisface el Teorema 2.1, es decir cumple

$$\dot{V}(x, \phi_P) = L_f V(x) - k_{2o} |L_g V(x)|^{\frac{m+\delta_o}{m-1}} - k_{2\infty} |L_g V(x)|^{\frac{m+\delta_\infty}{m-1}} < 0, \quad \forall x \neq 0. \quad \Delta \quad (3.78)$$

Corolario 3.5. Si se selecciona $\delta_o < 0$ y $\delta_\infty > 0$, el controlador bi-homogéneo polinomial (3.71) estabilizará el origen del sistema (3.37) en tiempo fijo. Δ

Prueba 3.9. Verificando (3.78), se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \phi_P) = & \quad (3.79) \\ & \mu_A \left\{ \left[\gamma_o + \left(\frac{m-1}{1-\delta_o} \right) k_{1o}^m \right] |x_1|^{\frac{1}{1-\delta_o}} + \left(\frac{m-1}{1-\delta_o} \right) k_{1o}^{m-1} x_2 \right\} |x_1|^{\frac{m-2+\delta_o}{1-\delta_o}} x_2 \\ & + \mu_B \left\{ \left[\gamma_\infty + \left(\frac{m-1}{1-\delta_\infty} \right) k_{1\infty}^m \right] |x_1|^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + \left(\frac{m-1}{1-\delta_\infty} \right) k_{1\infty}^{m-1} x_2 \right\} |x_1|^{\frac{m-2+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} x_2 \\ & - k_{2o} \left| \left(\mu_A k_{1o}^{m-1} + \mu_B k_{1\infty}^{m-1} |x_1|^{\frac{(m-1)(\delta_\infty-\delta_o)}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right) [x_1]^{\frac{m-1}{1-\delta_o}} + (\mu_A + \mu_B) [x_2]^{m-1} \right|^{\frac{m+\delta_o}{m-1}} \\ & - k_{2\infty} \left| \left(\mu_A k_{1o}^{m-1} + \mu_B k_{1\infty}^{m-1} |x_1|^{\frac{(m-1)(\delta_\infty-\delta_o)}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right) [x_1]^{\frac{m-1}{1-\delta_o}} + (\mu_A + \mu_B) [x_2]^{m-1} \right|^{\frac{m+\delta_\infty}{m-1}}. \end{aligned}$$

Note que el 3^{er} y el 4^{to} término de (3.79) son no positivos y se desvanecen en el conjunto $S_g = \{L_g V(x^*) = 0\} = \{x_2^* = -\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}}\}$ (3.56), por lo que al evaluar (3.79) en dicho conjunto se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \phi_P)|_{S_g} = L_f V(x_1^*)|_{S_g} = & \mu_A \left\{ \left[\gamma_o + \left(\frac{m-1}{1-\delta_o} \right) k_{1o}^m \right] [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right. \\ & \left. + \left(\frac{m-1}{1-\delta_o} \right) k_{1o}^{m-1} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right)}_{x_2^*} \right\} |x_1^*|^{\frac{m-2+\delta_o}{1-\delta_o}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right)}_{x_2^*} \\ & + \mu_B \left\{ \left[\gamma_\infty + \left(\frac{m-1}{1-\delta_\infty} \right) k_{1\infty}^m \right] [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} \right. \\ & \left. + \left(\frac{m-1}{1-\delta_\infty} \right) k_{1\infty}^{m-1} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} \right)}_{x_2^*} \right\} |x_1^*|^{\frac{m-2+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} \right)}_{x_2^*} \\ & - \underbrace{k_{2o} |0|^{\frac{m+\delta_o}{m-1}} - k_{2\infty} |0|^{\frac{m+\delta_\infty}{m-1}}}_{=0}, \end{aligned} \quad (3.80)$$

3. CONTROLADORES BI-HOMOGÉNEOS SISTEMAS DE ORDEN 1 Y 2

la cual, en conjunto con el *Lema 2.3* permite demostrar que $\dot{V}(x, \phi_P)|_{S_g} < 0$, si se seleccionan $k_{2o} > 0$ y $k_{2\infty} > 0$ suficientemente grandes, ya que la expresión (3.80) se transforma en (3.57), adquiriendo posteriormente la forma (3.58)

$$\dot{V}(x, \phi_P)|_{S_g} = L_f V(x_1^*)|_{S_g} = - \underbrace{[\pi(x_1^*) - v(x_1^*)]}_{\lambda(x_1^*)} \omega(x_1^*),$$

tras ser simplificada, indicando que se debe garantizar (3.61) $\forall \{x_1^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ para que $\dot{V}(x, \phi_P)|_{S_g} = L_f V(x_1^*)|_{S_g} < 0$.

Cabe mencionar que las condiciones que se necesitan para que ésto ocurra ya han sido descritas en la subsección anterior, donde se requiere seleccionar $\gamma_o > 0$ y $\gamma_\infty > 0$ suficientemente grandes para que $\lambda(x_1^*) > 0$.

Lo anterior permite demostrar que $V(x)$ es una F.L Bi-Homogénea para el sistema (3.37) en lazo cerrado aplicado el controlador (3.71), permitiendo garantizar a su vez que dicha función de control polinomial al ser homogénea en el bi-límite lleva las trayectorias del sistema (3.37) al origen en tiempo fijo (si se seleccionan $\delta_o < 0$ y $\delta_\infty > 0$). ■

Teorema 3.10. (3.51) es una F.L Bi-Homogénea para el sistema (3.37) en lazo cerrado aplicada la función de control (3.72) con $k_{2o} > 0$, $k_{2\infty} > 0$, $\gamma_o > 0$ y $\gamma_\infty > 0$ suficientemente grandes, ya que satisface el Teorema 2.1, es decir cumple

$$\dot{V}(x, \phi_R) = L_f V(x) - \left(\frac{k_{2o}}{M_o(x)} + \frac{k_{2\infty}}{M_\infty(x)} \right) L_g V(x)^2 < 0, \quad \forall x \neq 0. \quad \Delta \quad (3.81)$$

Corolario 3.6. Si se selecciona $\delta_o < 0$ y $\delta_\infty > 0$, el controlador bi-homogéneo racional (3.72) estabilizará el origen del sistema (3.37) en tiempo fijo. Δ

Prueba 3.10. Verificando (3.81), se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \phi_R) = & \quad (3.82) \\ & \mu_A \left\{ \left[\gamma_o + \left(\frac{m-1}{1-\delta_o} \right) k_{1o}^m \right] [x_1]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + \left(\frac{m-1}{1-\delta_o} \right) k_{1o}^{m-1} x_2 \right\} |x_1|^{\frac{m-2+\delta_o}{1-\delta_o}} x_2 \\ & + \mu_B \left\{ \left[\gamma_\infty + \left(\frac{m-1}{1-\delta_\infty} \right) k_{1\infty}^m \right] [x_1]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + \left(\frac{m-1}{1-\delta_\infty} \right) k_{1\infty}^{m-1} x_2 \right\} |x_1|^{\frac{m-2+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} x_2 \\ & - \left[\frac{k_{2o}}{M_o(x)} + \frac{k_{2\infty}}{M_\infty(x)} \right] \left[\left(\mu_A k_{1o}^{m-1} + \mu_B k_{1\infty}^{m-1} |x_1|^{\frac{(m-1)(\delta_\infty-\delta_o)}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right) [x_1]^{\frac{m-1}{1-\delta_o}} \right. \\ & \left. + (\mu_A + \mu_B) [x_2]^{m-1} \right]^2. \end{aligned}$$

Note que el 3^{er} término de (3.82) es no positivo y se desvanece en el conjunto $S_g = \{L_g V(x^*) = 0\} = \{x_2^* = -\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}}\}$ (3.56), por lo que al evaluar (3.82) en dicho conjunto se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \phi_R)|_{S_g} = L_f V(x_1^*)|_{S_g} = & \mu_A \left\{ \left[\gamma_o + \left(\frac{m-1}{1-\delta_o} \right) k_{1o}^m \right] [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right. \\ & \left. + \left(\frac{m-1}{1-\delta_o} \right) k_{1o}^{m-1} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right)}_{x_2^*} \right\} |x_1^*|^{\frac{m-2+\delta_o}{1-\delta_o}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right)}_{x_2^*} \\ & + \mu_B \left\{ \left[\gamma_\infty + \left(\frac{m-1}{1-\delta_\infty} \right) k_{1\infty}^m \right] [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} \right. \\ & \left. + \left(\frac{m-1}{1-\delta_\infty} \right) k_{1\infty}^{m-1} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} \right)}_{x_2^*} \right\} |x_1^*|^{\frac{m-2+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} \right)}_{x_2^*} \\ & - \underbrace{\left[\frac{k_{2o}}{M_o(x)} + \frac{k_{2\infty}}{M_\infty(x)} \right]}_{=0} [0]^2, \end{aligned} \quad (3.83)$$

la cual, en conjunto con el *Lema 2.3* permite demostrar que $\dot{V}(x, \phi_R)|_{S_g} < 0$ seleccionando $k_{2o} > 0$ y $k_{2\infty} > 0$ suficientemente grandes, ya que la expresión (3.83) se transforma en (3.57), adquiriendo posteriormente la forma (3.58)

$$\dot{V}(x, \phi_R)|_{S_g} = L_f V(x_1^*)|_{S_g} = - \underbrace{[\pi(x_1^*) - v(x_1^*)]}_{\lambda(x_1^*)} \omega(x_1^*),$$

tras ser simplificada, indicando que se debe garantizar (3.61) $\forall \{x_1^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ para que $\dot{V}(x, \phi_R)|_{S_g} = L_f V(x_1^*)|_{S_g} < 0$.

Similar al caso anterior, las condiciones que se necesitan para que ésto ocurra ya han sido descritas en subsecciones previas, donde se requiere seleccionar $\gamma_o > 0$ y $\gamma_\infty > 0$ suficientemente grandes para que $\lambda(x_1^*) > 0$.

Lo anterior permite demostrar que $V(x)$ también es una F.L Bi-Homogénea para el sistema (3.37) en lazo cerrado aplicado el controlador (3.72), permitiendo garantizar a su vez que dicha función de control racional al ser homogénea en el bi-límite lleva las trayectorias del sistema (3.37) al origen en tiempo fijo (si se seleccionan $\delta_o < 0$ y $\delta_\infty > 0$). ■

3.3.4. Diseño de Control Homogéneo - Una Nueva Candidata a F.L.C

3.3.4.1. Función de Lyapunov de Control Homogénea

Modificando ligeramente la estructura de las F.L.C.H propuestas por Cruz-Zavala and Moreno [6], se propone como candidata a F.L.C Homogénea

$$V(x) = \gamma \left(k_1 |x_1|^{\frac{2}{r_1}} + \frac{r_2}{2} |x_2|^{\frac{2}{r_2}} \right)^{\frac{m}{2}} + [x_1]^{\frac{m-r_2}{r_1}} x_2, \quad (3.84)$$

con $\gamma > 0$ y $k_1 > 0$; la cual considerando (3.38), se puede reescribir como

$$V(x) = \gamma \left(k_1 |x_1|^{\frac{2}{1-\delta}} + \frac{1}{2} |x_2|^2 \right)^{\frac{m}{2}} + [x_1]^{\frac{m-1}{1-\delta}} x_2. \quad (3.85)$$

Dicha función es homogénea de grado m , positiva definida con $\gamma > 0$ (suficientemente grande), radialmente no acotada y continuamente diferenciable, si

$$\begin{cases} \frac{m}{2} \geq 1 & \rightarrow & m \geq 2 \\ \frac{m-1}{1-\delta} \geq 1 & \rightarrow & m \geq 2 - \delta \quad * \\ \frac{2}{1-\delta} > 1 & \rightarrow & \delta > -1 \quad * \end{cases} \quad (3.86)$$

se satisfacen, donde * representa las condiciones más restrictivas sobre los parámetros m y δ .

Teorema 3.11. (3.85) con $m = 2$ es una F.L.C Homogénea para el sistema (3.37), ya que satisface la Definición 2.2, es decir cumple

$$S_g \triangleq \{x^* \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} | L_g V(x^*) = 0\} \subseteq S_f \triangleq \{x^* \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} | L_f V(x^*) < 0\} \quad (3.87)$$

\Updownarrow

$$\{L_g V(x^*) = 0 \cap x^* \neq 0\} \Rightarrow L_f V(x^*) < 0. \quad \triangle$$

Prueba 3.11. Tomando la derivada de (3.85) a lo largo de las trayectorias del sistema (3.37), se obtiene

$$\dot{V}(x) = L_f V(x) + L_g V(x)u,$$

donde

$$L_f V(x) = \left[\frac{m-1}{1-\delta} \right] \left[\gamma k_1 \left(\frac{m}{m-1} \right) \left(k_1 |x_1|^{\frac{2}{1-\delta}} + \frac{1}{2} |x_2|^2 \right)^{\frac{m-2}{2}} + [x_1]^{\frac{m-3}{1-\delta}} x_2 \right] [x_1]^{\frac{1+\delta}{1-\delta}} x_2, \quad (3.88)$$

$$L_g V(x) = [x_1]^{\frac{m-1}{1-\delta}} + \gamma \frac{m}{2} \left(k_1 |x_1|^{\frac{2}{1-\delta}} + \frac{1}{2} |x_2|^2 \right)^{\frac{m-2}{2}} x_2. \quad (3.89)$$

Observación 3.7. No es posible (en general) resolver explícitamente la ecuación $L_g V(x^*) = 0$ respecto a x_2^* para verificar (3.87), por lo que se analiza un caso particular del problema seleccionando $m = 2$, ya que para este valor si es posible encontrar una solución explícita de $L_g V(x^*) = 0$.

3.3.4.2. Caso Particular

Considérese el caso en el que se define a $m = 2$, por lo que (3.88) y (3.89) adquieren la forma

$$\begin{aligned} L_f V(x) &= \left[\frac{2-1}{1-\delta} \right] \left[\gamma k_1 \left(\frac{2}{2-1} \right) \left(k_1 |x_1|^{\frac{2}{1-\delta}} + \frac{1}{2} |x_2|^2 \right)^{\frac{2-2}{2}} + [x_1]^{\frac{2-3}{1-\delta}} x_2 \right] [x_1]^{\frac{1+\delta}{1-\delta}} x_2 \\ &= \left(\frac{1}{1-\delta} \right) \left(2\gamma k_1 + [x_1]^{-\frac{1}{1-\delta}} x_2 \right) [x_1]^{\frac{1+\delta}{1-\delta}} x_2, \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned} L_g V(x) &= [x_1]^{\frac{2-1}{1-\delta}} + \gamma \frac{2}{2} \left(k_1 |x_1|^{\frac{2}{1-\delta}} + \frac{1}{2} |x_2|^2 \right)^{\frac{2-2}{2}} x_2 \\ &= [x_1]^{\frac{1}{1-\delta}} + \gamma x_2. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Verificando (3.87), despejando x_2^* de (3.91), calculando los puntos donde $L_g V = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} [x_1]^{\frac{1}{1-\delta}} + \gamma x_2 &= 0 \\ x_2^* &= -\gamma^{-1} [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta}}, \end{aligned} \quad (3.92)$$

sustituyendo (3.92) en (3.90), se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} L_f V(x_1^*)|_{S_g} &= \left[\frac{1}{1-\delta} \right] \left[2\gamma k_1 + [x_1^*]^{-\frac{1}{1-\delta}} \left(-\gamma^{-1} [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta}} \right) \right] [x_1^*]^{\frac{1+\delta}{1-\delta}} \left(-\gamma^{-1} [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta}} \right) \\ &= - \left[\frac{1}{\gamma(1-\delta)} \right] \underbrace{[2\gamma k_1 - \gamma^{-1}]}_{>0} |x_1^*|^{\frac{2+\delta}{1-\delta}} < 0, \end{aligned} \quad (3.93)$$

la cual permite verificar que se cumple (3.87) si $\gamma^2 > \frac{1}{2k_1}$, demostrando así que $V(x)$ es una F.L.C Homogénea para el sistema (3.37). ■

3.3.4.3. Controlador Homogéneo

Analizando la homogeneidad de (3.90) y (3.91) para definir la función de control homogénea que estabilizará el origen del sistema (3.37), recordando que $r_1 = 1 - \delta$ y $r_2 = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} L_f V(x) &= \left(\frac{1}{1-\delta} \right) \left[2\gamma k_1 + [\lambda^{1-\delta} x_1]^{-\frac{1}{1-\delta}} (\lambda x_2) \right] [\lambda^{1-\delta} x_1]^{\frac{1+\delta}{1-\delta}} (\lambda x_2) \\ &= \lambda^{2+\delta} \left(\frac{1}{1-\delta} \right) \left[2\gamma k_1 + [x_1]^{-\frac{1}{1-\delta}} x_2 \right] [x_1]^{\frac{1+\delta}{1-\delta}} x_2, \\ L_g V(x) &= [\lambda^{1-\delta} x_1]^{\frac{1}{1-\delta}} + \gamma (\lambda x_2) \\ &= \lambda^1 \left[[x_1]^{\frac{1}{1-\delta}} + \gamma x_2 \right], \end{aligned}$$

por lo que $L_f V(x)$ es homogéneo de grado $2 + \delta$ y $L_g V(x)$ es homogéneo de grado 1.

Considerando el grado de homogeneidad de $L_g V(x)$ y recordando (3.38), se diseña un controlador homogéneo $u = \phi(x)$ de grado $r_3 = 1 + \delta$, definido como

$$\phi(x) = -k_2 [L_g V(x)]^{1+\delta} = -k_2 \left[[x_1]^{\frac{1}{1-\delta}} + \gamma x_2 \right]^{1+\delta}. \quad (3.94)$$

Teorema 3.12. (3.85) con $m = 2$ es una F.L Homogénea para el sistema (3.37) en lazo cerrado aplicada la ley de control (3.94) con $k_2 > 0$ suficientemente grande y $\gamma^2 > \frac{1}{2k_1}$, ya que satisface la Definición 2.1, es decir cumple

$$\dot{V} = L_f V(x) + L_g V(x) \phi(x) < 0, \quad \forall x \neq 0. \quad \triangle \quad (3.95)$$

Corolario 3.7. El controlador homogéneo (3.94) estabiliza asintóticamente, exponencialmente o en tiempo finito el origen del sistema (3.37), dependiendo del valor de δ , al satisfacer el Corolario 2.1. \triangle

Prueba 3.12. Verificando (3.95), se reescribe $\dot{V}(x, \phi)$ como

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \phi) &= -k_2 \left| [x_1]^{\frac{1}{1-\delta}} + \gamma x_2 \right|^{2+\delta} \\ &\quad + \left(\frac{1}{1-\delta} \right) \left(2\gamma k_1 + [x_1]^{-\frac{1}{1-\delta}} x_2 \right) [x_1]^{\frac{1+\delta}{1-\delta}} x_2. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Note que el 1^{er} término de (3.96) es no positivo y se desvanece en el conjunto $S_g = \{x_2^* = -\gamma^{-1}[x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta}}\}$, por lo que al evaluar en $V(x)$ dicho conjunto se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, \phi)|_{S_g} &= \left[\frac{1}{1-\delta} \right] \left[2\gamma k_1 + [x_1^*]^{-\frac{1}{1-\delta}} \left(-\gamma^{-1}[x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta}} \right) \right] [x_1^*]^{\frac{1+\delta}{1-\delta}} \left(-\gamma^{-1}[x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta}} \right) \\ &= - \left[\frac{1}{\gamma(1-\delta)} \right] \underbrace{[2\gamma k_1 - \gamma^{-1}]_{>0}} [x_1^*]^{\frac{2+\delta}{1-\delta}} < 0.\end{aligned}\quad (3.97)$$

Utilizando el *Lema 2.3* se puede garantizar que $\dot{V}(x, \phi)|_{S_g} < 0$ seleccionando $k_2 > 0$ suficientemente grande y $\gamma^2 > \frac{1}{2k_1}$, por lo que se concluye que $V(x)$ es una Función de Lyapunov Homogénea para el sistema en lazo cerrado aplicado el controlador (3.94). ■

3.3.5. Diseño de Control Bi-homogéneo

3.3.5.1. Función de Lyapunov de Control Bi-homogénea

Se propone como candidata a F.L.C. Bi-homogénea la función

$$V(x) = \mu_A V_o(x) + \mu_B V_\infty(x), \quad (3.98)$$

con $\mu_A \geq 0$, $\mu_B \geq 0$ y $\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty > 0$. Donde $V_o(x)$ y $V_\infty(x)$ son F.L.C Homogéneas de la forma (3.85), con parámetros

$$\begin{aligned}(\delta_o, r_{1o}, r_{2o}, r_{3o}, m_o) &= (\delta_o, 1 - \delta_o, 1, 1 + \delta_o, m) \\ (\delta_\infty, r_{1\infty}, r_{2\infty}, r_{3\infty}, m_\infty) &= (\delta_\infty, 1 - \delta_\infty, 1, 1 + \delta_\infty, m)\end{aligned}$$

por (3.38), donde se define a $m = m_o = m_\infty = 2$ para poder encontrar una solución explícita de la ecuación $L_g V(x^*) = 0$ respecto a x_2^* (contemplando (3.86)), considerando a su vez a $1 > \delta_\infty > \delta_o \geq 0$ por suposición (contemplando (3.38) y (3.86)).

Teorema 3.13. (3.98) es una F.L.C Bi-homogénea para el sistema (3.37), ya que satisface la Definición 2.2, es decir cumple

$$\forall \{ x^* \neq 0 \mid \underbrace{\mu_A L_g V_o + \mu_B L_g V_\infty}_{L_g V(x^*)=0} = 0 \} \Rightarrow \dot{V}(x^*) = \underbrace{\mu_A L_f V_o + \mu_B L_f V_\infty}_{L_f V(x^*)} < 0. \quad \Delta \quad (3.99)$$

3. CONTROLADORES BI-HOMOGÉNEOS SISTEMAS DE ORDEN 1 Y 2

Prueba 3.13. Analizando la homogeneidad de (3.98), suponiendo (por simplicidad) que $m_\infty > m_o$, recordando que $V_o(x)$ presenta a $r_{1_o} = 1 - \delta_o$ y $r_{2_o} = 1$; considerando además que $V_\infty(x)$ presenta a $r_{1_\infty} = 1 - \delta_\infty$ y $r_{2_\infty} = 1$, se tiene

$$\begin{aligned}
V(x) &= \mu_A V_o(x) + \mu_B V_\infty(x) \\
&= \mu_A \left[\gamma_o \left(k_{1o} |\lambda^{1-\delta_o} x_1|^{\frac{2}{1-\delta_o}} + \frac{1}{2} |\lambda x_2|^2 \right)^{\frac{m_o}{2}} + [\lambda^{1-\delta_o} x_1]^{\frac{m_o-1}{1-\delta_o}} (\lambda x_2) \right] \\
&+ \mu_B \left[\gamma_\infty \left(k_{1\infty} |\lambda^{1-\delta_\infty} x_1|^{\frac{2}{1-\delta_\infty}} + \frac{1}{2} |\lambda x_2|^2 \right)^{\frac{m_\infty}{2}} + [\lambda^{1-\delta_\infty} x_1]^{\frac{m_\infty-1}{1-\delta_\infty}} (\lambda x_2) \right] \\
&= \underbrace{\lambda^{m_o} \mu_A \left[\gamma_o \left(k_{1o} |x_1|^{\frac{2}{1-\delta_o}} + \frac{1}{2} |x_2|^2 \right)^{\frac{m_o}{2}} + [x_1]^{\frac{m_o-1}{1-\delta_o}} x_2 \right]}_{(r_{1_o}, r_{2_o})\text{-Homogéneo de grado } m_o} \\
&+ \underbrace{\lambda^{m_\infty} \mu_B \left[\gamma_\infty \left(k_{1\infty} |x_1|^{\frac{2}{1-\delta_\infty}} + \frac{1}{2} |x_2|^2 \right)^{\frac{m_\infty}{2}} + [x_1]^{\frac{m_\infty-1}{1-\delta_\infty}} x_2 \right]}_{(r_{1_\infty}, r_{2_\infty})\text{-Homogéneo de grado } m_\infty},
\end{aligned}$$

lo cual permite garantizar que $V(x) \approx V_o(x)$ en una vecindad cercana a cero y $V(x) \approx V_\infty(x)$ en una vecindad cercana a infinito, ya que $V_o(x)$ presenta potencias más pequeñas que $V_\infty(x)$. Es así como se demuestra que $V(x)$ es una función bi-homogénea de grado m_o/m_∞ .

Definiendo a $m = m_o = m_\infty = 2$, tomando la derivada de (3.98) a lo largo de las trayectorias del sistema (3.37), se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= \mu_A \dot{V}_o(x) + \mu_B \dot{V}_\infty(x) \\
\dot{V}(x) &= \mu_A (L_f V_o(x) + L_g V_o(x)u) + \mu_B (L_f V_\infty(x) + L_g V_\infty(x)u) \\
\dot{V}(x) &= \underbrace{(\mu_A L_f V_o(x) + \mu_B L_f V_\infty(x))}_{L_f V(x)} + \underbrace{(\mu_A L_g V_o(x) + \mu_B L_g V_\infty(x))}_{L_g V(x)} u, \quad (3.100)
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
L_f V(x) &= \mu_A \left(\frac{1}{1-\delta_o} \right) \left\{ 2\gamma_o k_{1o} + [x_1]^{-\frac{1}{1-\delta_o}} x_2 \right\} [x_1]^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} x_2 \\
&+ \mu_B \left(\frac{1}{1-\delta_\infty} \right) \left\{ 2\gamma_\infty k_{1\infty} + [x_1]^{-\frac{1}{1-\delta_\infty}} x_2 \right\} [x_1]^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} x_2, \quad (3.101)
\end{aligned}$$

$$L_g V(x) = \mu_A [x_1]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + \mu_B [x_1]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + (\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty) x_2. \quad (3.102)$$

Calculando los valores de x_2^* donde $L_g V(x^*) = 0$, se obtiene la curva mostrada en la Fig 3.4, representada por

$$\begin{aligned}
 (\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty) x_2^* &= - \left(\mu_A [x_1]^{1-\delta_o} + \mu_B [x_1]^{1-\delta_\infty} \right) \\
 x_2^* &= - \left(\frac{\mu_A}{\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty} [x_1^*]^{1-\delta_o} + \frac{\mu_B}{\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty} [x_1^*]^{1-\delta_\infty} \right) \\
 x_2^* &= - \underbrace{\left(\frac{\mu_A}{\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty} + \frac{\mu_B}{\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty} [x_1^*]^{\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right)}_{\omega(x_1^*) > 0} [x_1^*]^{1-\delta_o} \\
 x_2^* &= -\omega(x_1^*) [x_1^*]^{1-\delta_o}. \tag{3.103}
 \end{aligned}$$

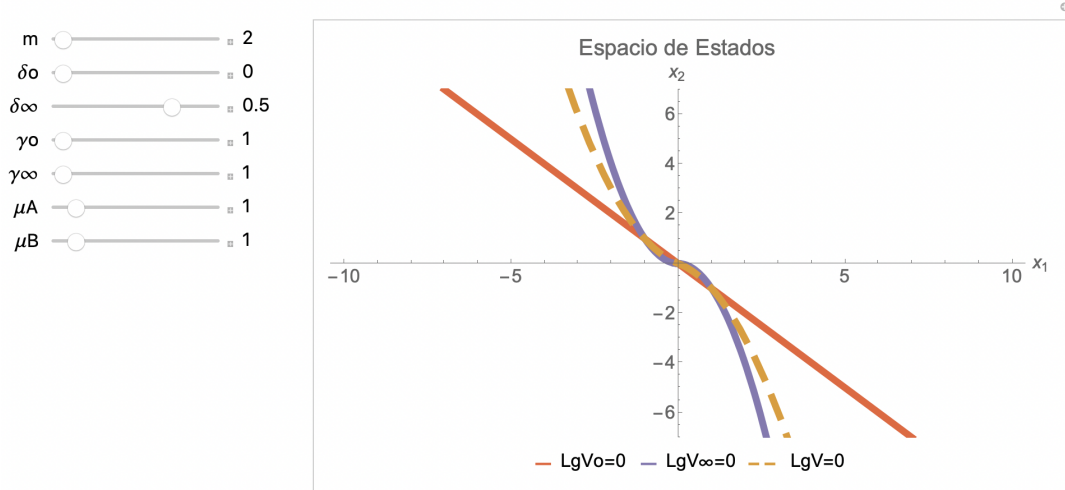


Figura 3.4: Muestra los valores de (x_1^*, x_2^*) donde $L_g V(x^*) = 0$.

A partir de (3.100), se evalúa en (3.101) el conjunto $S_g = \{x_2^* = -\omega(x_1^*) [x_1^*]^{1-\delta_o}\}$ (3.103), obteniendo la expresión

$$\begin{aligned}
 L_f V(x_1^*)|_{S_g} &= \tag{3.104} \\
 & \left[\frac{\mu_A}{1-\delta_o} \right] \left[2\gamma_o k_{1o} + [x_1^*]^{-\frac{1}{1-\delta_o}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{1-\delta_o} \right)}_{x_2^*} \right] [x_1^*]^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{1-\delta_o} \right)}_{x_2^*} \\
 & + \left[\frac{\mu_B}{1-\delta_\infty} \right] \left[2\gamma_\infty k_{1\infty} + [x_1^*]^{-\frac{1}{1-\delta_\infty}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{1-\delta_o} \right)}_{x_2^*} \right] [x_1^*]^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{1-\delta_o} \right)}_{x_2^*},
 \end{aligned}$$

3. CONTROLADORES BI-HOMOGÉNEOS SISTEMAS DE ORDEN 1 Y 2

la cual al ser simplificada se reduce en

$$L_f V(x_1^*)|_{S_g} =$$

$$\left[\left(\frac{\mu_A}{1 - \delta_o} \right) \left(2\gamma_o k_{1o} - \omega(x_1^*) \right) |x_1^*|^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} \right. \\ \left. + \left(\frac{\mu_B}{1 - \delta_\infty} \right) \left(2\gamma_\infty k_{1\infty} - \omega(x_1^*) |x_1^*|^{-\left[\frac{1}{1-\delta_\infty} - \frac{1}{1-\delta_o} \right]} \right) |x_1^*|^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} \right] \left[-\omega(x_1^*) |x_1^*|^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right],$$

$$L_f V(x_1^*)|_{S_g} =$$

$$- \left[\left(\frac{\mu_A}{1 - \delta_o} \right) \left(2\gamma_o k_{1o} - \omega(x_1^*) \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{\mu_B}{1 - \delta_\infty} \right) \left(2\gamma_\infty k_{1\infty} - \omega(x_1^*) |x_1^*|^{-\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right) |x_1^*|^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty} - \frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} \right] \omega(x_1^*) |x_1^*|^{\frac{1}{1-\delta_o} + \frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}},$$

$$L_f V(x_1^*)|_{S_g} =$$

$$- \left[\left(\frac{\mu_A}{1 - \delta_o} \right) \left(2\gamma_o k_{1o} - \omega(x_1^*) \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{\mu_B}{1 - \delta_\infty} \right) \left(2\gamma_\infty k_{1\infty} - \omega(x_1^*) |x_1^*|^{-\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right) |x_1^*|^{\frac{2(\delta_\infty - \delta_o)}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right] \omega(x_1^*) |x_1^*|^{\frac{2+\delta_o}{1-\delta_o}},$$

obteniendo finalmente la expresión

$$L_f V(x_1^*)|_{S_g} = - \underbrace{\left[\pi(x_1^*) - v(x_1^*) \right]}_{\lambda(x_1^*)} \omega(x_1^*) |x_1^*|^{\frac{2+\delta_o}{1-\delta_o}} \quad (3.105)$$

con

$$\pi(x_1^*) = 2 \left[\gamma_o k_{1o} \left(\frac{\mu_A}{1 - \delta_o} \right) + \gamma_\infty k_{1\infty} \left(\frac{\mu_B}{1 - \delta_\infty} \right) |x_1^*|^{\frac{2(\delta_\infty - \delta_o)}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right] \quad (3.106)$$

$$v(x_1^*) = \left[\left(\frac{\mu_A}{1 - \delta_o} \right) + \left(\frac{\mu_B}{1 - \delta_\infty} \right) |x_1^*|^{\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right] \omega(x_1^*) \quad (3.107)$$

donde $\pi(x_1^*) > 0$, $v(x_1^*) > 0$ y $\omega(x_1^*) > 0$, $\forall x_1^* \neq 0$.

Recordando el *Teorema 3.13*, para que $L_f V(x_1^*)|_{S_g} < 0$ se debe garantizar que $\lambda(x_1^*) > 0$, $\forall \{x_1^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$, lo cual se logra si

$$\lambda(x_1^*) = \pi(x_1^*) - v(x_1^*) > 0 \quad (3.108)$$

se satisface.

Verificando (3.108), se desarrolla $\lambda(x_1^*)$, obteniendo la función cuadrática

$$\lambda(x_1^*) = \alpha \xi_1^2 - \beta \xi_1 + \epsilon > 0, \quad (3.109)$$

con parámetros

$$\begin{aligned} \xi_1 &= |x_1^*|^{\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1 - \delta_\infty)(1 - \delta_o)}}, \\ \alpha &= \frac{\mu_B}{1 - \delta_\infty} \left(2\gamma_\infty k_{1\infty} - \frac{\mu_B}{\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty} \right), \\ \beta &= \frac{\mu_A \mu_B}{\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty} \left(\frac{1}{1 - \delta_o} + \frac{1}{1 - \delta_\infty} \right), \\ \epsilon &= \frac{\mu_A}{1 - \delta_o} \left(2\gamma_o k_{1o} - \frac{\mu_A}{\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty} \right), \end{aligned}$$

que es cóncava hacia arriba con vértice positivo en $v = (0, \epsilon)$, si $\alpha > 0$ y $\epsilon > 0$, lo cual es equivalente a que

$$\gamma_o > -\frac{\mu_B(2\gamma_\infty^2 k_{1\infty} - 1)}{2\gamma_\infty k_{1\infty} \mu_A}, \quad (3.110)$$

$$\gamma_\infty > -\frac{\mu_B(2\gamma_o^2 k_{1o} - 1)}{2\gamma_o k_{1o} \mu_A}, \quad (3.111)$$

se satisfagan.

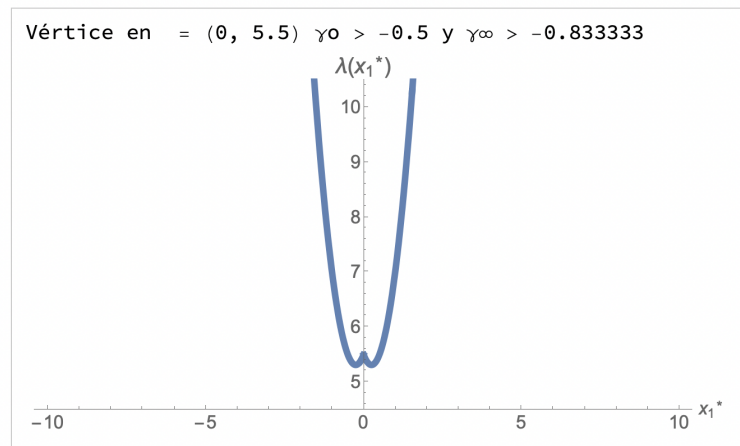
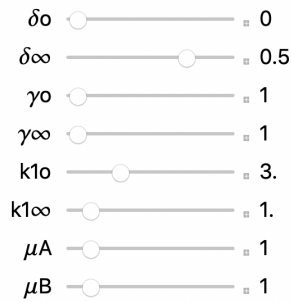


Figura 3.5: Muestra el comportamiento de la función $\lambda(x^*)$.

Cabe mencionar que es muy fácil garantizar dichas condiciones ya que si se selecciona a $k_{1o} > \frac{1}{2\gamma_o^2}$ y $k_{1\infty} > \frac{1}{2\gamma_o^2}$, por definición de $\gamma_o > 0$ y $\gamma_\infty > 0$, dichas condiciones siempre se cumplirán. Es así como se concluye que (3.98) es una F.L.C Homogénea para el sistema (3.37). ■

3.3.5.2. Controladores Bi-Homogéneos Polinomiales y Racionales

Empleando la misma estructura de los controladores bi-homogéneos que se definieron en la subsección anterior: polinomial (3.71) y racional (3.72), con $m = 2$ y

$$\begin{aligned} L_g V(x) &= \mu_A [x_1]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + \mu_B [x_1]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + (\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty) x_2 \\ &= \left(\mu_A + \mu_B |x_1|^{\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right) [x_1]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + (\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty) x_2, \end{aligned} \quad (3.112)$$

se dispone a probar que (3.98) también es una F.L Bi-homogénea (con $m = 2$) para el sistema (3.37) en lazo cerrado, aplicados dichos controladores.

Observación 3.8. *Las funciones de control (3.71) y (3.72), y sus respectivos sistemas en lazo cerrado resultantes, son homogéneos en el bi-límite ya que satisfacen la Definición 2.10.*

Observación 3.9. *Si se aplica el controlador (3.71) en el sistema (3.37), se puede recuperar*

Controlador Local Homogéneo Polinomial de grado $\delta = 1 + \delta_o$

Si $k_{2\infty} = 0$ y $\mu_B = 0$, obteniendo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_{2o} [L_g V(x)]^{1+\delta_o} = -k_{2o} \left[\mu_A [x_1]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + \gamma_o \mu_A x_2 \right]^{1+\delta_o} \end{aligned} \quad (3.113)$$

que es homogéneo de grado δ_o (en lazo cerrado).

Controlador No Local Homogéneo Polinomial de grado $\delta = 1 + \delta_\infty$

Si $k_{2o} = 0$ y $\mu_A = 0$, obteniendo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_{2\infty} [L_g V(x)]^{1+\delta_\infty} = -k_{2\infty} \left[\mu_B [x_1]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + \gamma_\infty \mu_B x_2 \right]^{1+\delta_\infty} \end{aligned} \quad (3.114)$$

que es homogéneo de grado δ_∞ (en lazo cerrado).

Observación 3.10. Si se aplica el controlador (3.72) en el sistema(3.37), se puede recuperar

Controlador Local Homogéneo Racional de grado $\delta = 1 + \delta_o$

Si $k_{2\infty} = 0$ y $\mu_B = 0$, obteniendo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_{2o} \frac{L_g V(x)}{M_o(x)} = -k_{2o} \left[\frac{\mu_A [x_1]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + \gamma_o \mu_A x_2}{M_o(x)} \right] \end{aligned} \quad (3.115)$$

que es homogéneo de grado δ_o (en lazo cerrado).

Controlador No Local Homogéneo Racional de grado $\delta = 1 + \delta_\infty$

Si $k_{2o} = 0$ y $\mu_A = 0$, obteniendo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_{2\infty} \frac{L_g V(x)}{M_\infty(x)} = -k_{2\infty} \left[\frac{\mu_B [x_1]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + \gamma_\infty \mu_B x_2}{M_\infty(x)} \right] \end{aligned} \quad (3.116)$$

que es homogéneo de grado δ_∞ (en lazo cerrado).

Teorema 3.14. (3.98) es una F.L Bi-Homogénea para el sistema (3.37) en lazo cerrado aplicada la función de control (3.71) con $k_{2o} > 0$ y $k_{2\infty} > 0$ suficientemente grandes, además de $k_{1o} > \frac{1}{2\gamma_o^2}$ y $k_{1\infty} > \frac{1}{2\gamma_\infty^2}$, ya que satisface el Teorema 2.1, es decir cumple

$$\dot{V}(x, \phi_P) = L_f V(x) - k_{2o} |L_g V(x)|^{2+\delta_o} - k_{2\infty} |L_g V(x)|^{2+\delta_\infty} < 0, \quad \forall x \neq 0. \quad \triangle \quad (3.117)$$

Prueba 3.14. Verificando (3.117), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \phi_P) &= \mu_A \left(\frac{1}{1-\delta_o} \right) \left\{ 2\gamma_o k_{1o} + [x_1]^{-\frac{1}{1-\delta_o}} x_2 \right\} [x_1]^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} x_2 \\ &+ \mu_B \left(\frac{1}{1-\delta_\infty} \right) \left\{ 2\gamma_\infty k_{1\infty} + [x_1]^{-\frac{1}{1-\delta_\infty}} x_2 \right\} [x_1]^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} x_2 \\ &- k_{2o} \left| \left(\mu_A + \mu_B |x_1|^{\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right) [x_1]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + (\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty) x_2 \right|^{2+\delta_o} \\ &- k_{2\infty} \left| \left(\mu_A + \mu_B |x_1|^{\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right) [x_1]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + (\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty) x_2 \right|^{2+\delta_\infty}. \end{aligned} \quad (3.118)$$

3. CONTROLADORES BI-HOMOGÉNEOS SISTEMAS DE ORDEN 1 Y 2

Note que el 3^{er} y el 4^{to} término de (3.118) son no positivos y se desvanecen en el conjunto $S_g = \{L_g V(x^*) = 0\} = \{x_2^* = -\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}}\}$ (3.103), por lo que al evaluar (3.118) en dicho conjunto, se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \phi_P)|_{S_g} &= L_f V(x_1^*)|_{S_g} = \underbrace{-k_{2o}|0|^{2+\delta_o} - k_{2\infty}|0|^{2+\delta_\infty}}_{=0} \quad (3.119) \\ &+ \left[\frac{\mu_A}{1-\delta_o} \right] \left[2\gamma_o k_{1o} + [x_1^*]^{-\frac{1}{1-\delta_o}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right)}_{x_2^*} \right] [x_1^*]^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right)}_{x_2^*} \\ &+ \left[\frac{\mu_B}{1-\delta_\infty} \right] \left[2\gamma_\infty k_{1\infty} + [x_1^*]^{-\frac{1}{1-\delta_\infty}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right)}_{x_2^*} \right] [x_1^*]^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right)}_{x_2^*}, \end{aligned}$$

que en conjunto con el *Lema 2.3* permite demostrar $\dot{V}(x, \phi_P)|_{S_g} < 0$ seleccionando $k_{2o} > 0$ y $k_{2\infty} > 0$ suficientemente grandes, ya que la expresión (3.119) se transforma en (3.104), adquiriendo posteriormente la forma (3.105)

$$L_f V(x_1^*)|_{S_g} = - \underbrace{[\pi(x_1^*) - v(x_1^*)]}_{\lambda(x_1^*)} \omega(x_1^*) |x_1^*|^{\frac{2+\delta_o}{1-\delta_o}} < 0,$$

tras ser simplificada, indicando que (3.110) y (3.111) deben de satisfacerse siempre para que $\lambda(x_1^*) > 0, \forall \{x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.

Cabe mencionar que las condiciones que se necesitan para que ésto ocurra ya han sido descritas en la subsección anterior, donde se requiere seleccionar $k_{1o} > \frac{1}{2\gamma_o^2}$ y $k_{1\infty} > \frac{1}{2\gamma_\infty^2}$.

Lo anterior permite demostrar que $V(x)$ es una Función de Lyapunov Bi-homogénea para el sistema (3.37) en lazo cerrado aplicado el controlador polinomial (3.71). ■

Teorema 3.15. (3.98) es una F.L Bi-Homogénea para el sistema (3.37) en lazo cerrado aplicada la función de control (3.72) con $k_{2o} > 0$ y $k_{2\infty} > 0$ suficientemente grandes, además de $k_{1o} > \frac{1}{2\gamma_o^2}$ y $k_{1\infty} > \frac{1}{2\gamma_\infty^2}$, ya que satisface el Teorema 2.1, es decir cumple

$$\dot{V}(x, \phi_R) = L_f V(x) - \left(\frac{k_{2o}}{M_o(x)} + \frac{k_{2\infty}}{M_\infty(x)} \right) L_g V(x)^2 < 0, \quad \forall x \neq 0. \quad \triangle \quad (3.120)$$

Prueba 3.15. Verificando (3.120), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \phi_R) = & \mu_A \left(\frac{1}{1 - \delta_o} \right) \left\{ 2\gamma_o k_{1o} + [x_1]^{-\frac{1}{1-\delta_o}} x_2 \right\} [x_1]^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} x_2 \\ & + \mu_B \left(\frac{1}{1 - \delta_\infty} \right) \left\{ 2\gamma_\infty k_{1\infty} + [x_1]^{-\frac{1}{1-\delta_\infty}} x_2 \right\} [x_1]^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} x_2 \\ & - \left[\frac{k_{2o}}{M_o(x)} + \frac{k_{2\infty}}{M_\infty(x)} \right] \left[\left(\mu_A + \mu_B |x_1|^{\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right) [x_1]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + (\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty) x_2 \right]^2. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Note que el 3^{er} término de (3.121) es no positivo y se desvanece en el conjunto $S_g = \{L_g V(x^*) = 0\} = \{x_2^* = -\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}}\}$ (3.103), por lo que al evaluar (3.121) en dicho conjunto se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \phi_R)|_{S_g} = & L_f V(x_1^*)|_{S_g} = - \underbrace{\left[\frac{k_{2o}}{M_o(x)} + \frac{k_{2\infty}}{M_\infty(x)} \right]}_{=0} [0]^2 \\ & + \left[\frac{\mu_A}{1 - \delta_o} \right] \left[2\gamma_o k_{1o} + [x_1^*]^{-\frac{1}{1-\delta_o}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right)}_{x_2^*} \right] [x_1^*]^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right)}_{x_2^*} \\ & + \left[\frac{\mu_B}{1 - \delta_\infty} \right] \left[2\gamma_\infty k_{1\infty} + [x_1^*]^{-\frac{1}{1-\delta_\infty}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right)}_{x_2^*} \right] [x_1^*]^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right)}_{x_2^*}, \end{aligned} \quad (3.122)$$

que en conjunto con el *Lema 2.3* permite demostrar $\dot{V}(x, \phi_R)|_{S_g} < 0$ seleccionando $k_{2o} > 0$ y $k_{2\infty} > 0$ suficientemente grandes, ya que la expresión (3.122) se transforma en (3.104), adquiriendo posteriormente la forma (3.105)

$$L_f V(x_1^*)|_{S_g} = - \underbrace{\left[\pi(x_1^*) - v(x_1^*) \right]}_{\lambda(x_1^*)} \omega(x_1^*) |x_1^*|^{\frac{2+\delta_o}{1-\delta_o}} < 0,$$

tras ser simplificada, indicando que (3.110) y (3.111) deben de satisfacerse siempre para que $\lambda(x_1^*) > 0, \forall \{x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.

Similar al caso anterior, las condiciones que se necesitan para que ésto ocurra ya han sido descritas en subsecciones previas, donde se requiere seleccionar $k_{1o} > \frac{1}{2\gamma_o^2}$ y $k_{1\infty} > \frac{1}{2\gamma_\infty^2}$.

Lo anterior permite demostrar que $V(x)$ es una Función de Lyapunov Bi-homogénea para el sistema (3.37) en lazo cerrado aplicado el controlador racional (3.72). ■

3.3.6. Diseño de Control Homogéneo - Una Mejor Candidata a F.L.C

3.3.6.1. Función de Lyapunov de Control Homogénea

Modificando ligeramente la estructura de las F.L.C.H propuestas por Cruz-Zavala and Moreno [6], se propone como candidata a F.L.C Homogénea

$$V(x) = \gamma \left(k_1 |x_1|^{\frac{3}{r_1}} + \frac{r_2}{3} |x_2|^{\frac{3}{r_2}} \right)^{\frac{m}{3}} + [x_1]^{\frac{m-r_2}{r_1}} x_2, \quad (3.123)$$

con $\gamma > 0$ y $k_1 > 0$; la cual considerando (3.38), se puede reescribir como

$$V(x) = \gamma \left(k_1 |x_1|^{\frac{3}{1-\delta}} + \frac{1}{3} |x_2|^3 \right)^{\frac{m}{3}} + [x_1]^{\frac{m-1}{1-\delta}} x_2. \quad (3.124)$$

Dicha función es homogénea de grado m , positiva definida con $\gamma > 0$ (suficientemente grande), radialmente no acotada y continuamente diferenciable, si

$$\begin{cases} \frac{m}{3} \geq 1 & \rightarrow & m \geq 3 \\ \frac{m-1}{1-\delta} \geq 1 & \rightarrow & m \geq 2 - \delta \quad * \\ \frac{1}{1-\delta} > 1 & \rightarrow & \delta > -2 \quad * \end{cases} \quad (3.125)$$

se satisfacen, donde $*$ representa las condiciones más restrictivas sobre los parámetros m y δ .

Teorema 3.16. (3.124) con $m = 3$ es una F.L.C Homogénea para el sistema (3.37), ya que satisface la Definición 2.2, es decir cumple

$$S_g \triangleq \{x^* \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} | L_g V(x^*) = 0\} \subseteq S_f \triangleq \{x^* \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} | L_f V(x^*) < 0\} \quad (3.126)$$

\Updownarrow

$$\{L_g V(x^*) = 0 \cap x^* \neq 0\} \Rightarrow L_f V(x^*) < 0. \quad \triangle$$

Prueba 3.16. Tomando la derivada de (3.124) a lo largo de las trayectorias del sistema (3.37), se obtiene

$$\dot{V}(x) = L_f V(x) + L_g V(x)u,$$

donde

$$L_f V(x) = \left[\frac{m-1}{1-\delta} \right] \left[\gamma k_1 \left(\frac{m}{m-1} \right) \left(k_1 |x_1|^{\frac{3}{1-\delta}} + \frac{1}{3} |x_2|^3 \right)^{\frac{m-3}{3}} + [x_1]^{\frac{m-4}{1-\delta}} x_2 \right] [x_1]^{\frac{2+\delta}{1-\delta}} x_2, \quad (3.127)$$

$$L_g V(x) = [x_1]^{\frac{m-1}{1-\delta}} + \gamma \frac{m}{3} \left(k_1 |x_1|^{\frac{3}{1-\delta}} + \frac{1}{3} |x_2|^3 \right)^{\frac{m-3}{3}} [x_2]^2. \quad (3.128)$$

Observación 3.11. *No es posible (en general) resolver explícitamente la ecuación $L_g V(x^*) = 0$ respecto a x_2^* para verificar (3.126), por lo que se analiza un caso particular del problema seleccionando $m = 3$, ya que para este valor si es posible encontrar una solución explícita de $L_g V(x^*) = 0$.*

3.3.6.2. Caso Particular

Considérese el caso en el que se define a $m = 3$, por lo que (3.127) y (3.128) adquieren la forma

$$\begin{aligned} L_f V(x) &= \left[\frac{3-1}{1-\delta} \right] \left[\gamma k_1 \left(\frac{3}{3-1} \right) \left(k_1 |x_1|^{\frac{3}{1-\delta}} + \frac{1}{3} |x_2|^3 \right)^{\frac{3-3}{3}} + [x_1]^{\frac{3-4}{1-\delta}} x_2 \right] [x_1]^{\frac{2+\delta}{1-\delta}} x_2 \\ &= \left(\frac{2}{1-\delta} \right) \left(\frac{3}{2} \gamma k_1 + [x_1]^{-\frac{1}{1-\delta}} x_2 \right) [x_1]^{\frac{2+\delta}{1-\delta}} x_2, \end{aligned} \quad (3.129)$$

$$\begin{aligned} L_g V(x) &= [x_1]^{\frac{3-1}{1-\delta}} + \gamma \frac{3}{3} \left(k_1 |x_1|^{\frac{3}{1-\delta}} + \frac{1}{3} |x_2|^3 \right)^{\frac{3-3}{3}} [x_2]^2 \\ &= [x_1]^{\frac{2}{1-\delta}} + \gamma [x_2]^2. \end{aligned} \quad (3.130)$$

Verificando (3.126), despejando x_2^* de (3.130), calculando los puntos donde $L_g V = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} [x_1]^{\frac{2}{1-\delta}} + \gamma [x_2]^2 &= 0 \\ x_2^* &= -\gamma^{-\frac{1}{2}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta}}, \end{aligned} \quad (3.131)$$

sustituyendo (3.131) en (3.129), se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} L_f V(x_1^*)|_{S_g} &= \left[\frac{2}{1-\delta} \right] \left[\frac{3}{2} \gamma k_1 + [x_1^*]^{-\frac{1}{1-\delta}} \left(-\gamma^{-\frac{1}{2}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta}} \right) \right] [x_1^*]^{\frac{2+\delta}{1-\delta}} \left(-\gamma^{-\frac{1}{2}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta}} \right) \\ &= - \left[\frac{2}{(1-\delta)\sqrt{\gamma}} \right] \underbrace{\left[\frac{3}{2} \gamma k_1 - \gamma^{-\frac{1}{2}} \right]}_{>0} |x_1^*|^{\frac{3+\delta}{1-\delta}} < 0, \end{aligned} \quad (3.132)$$

la cual permite garantizar que (3.126) se satisface si $\gamma > \left(\frac{2}{3k_1} \right)^{\frac{3}{2}}$, demostrando así que $V(x)$ es una F.L.C Homogénea para el sistema (3.37). ■

3.3.6.3. Controlador Homogéneo

Analizando la homogeneidad de (3.129) y (3.130) para definir la función de control homogénea que estabilizará el origen del sistema (3.37), recordando que $r_1 = 1 - \delta$ y $r_2 = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} L_f V(x) &= \left(\frac{2}{1-\delta} \right) \left[\frac{3}{2} \gamma k_1 + [\lambda^{1-\delta} x_1]^{-\frac{1}{1-\delta}} (\lambda x_2) \right] [\lambda^{1-\delta} x_1]^{\frac{2+\delta}{1-\delta}} (\lambda x_2) \\ &= \lambda^{3+\delta} \left(\frac{2}{1-\delta} \right) \left[\frac{3}{2} \gamma k_1 + [x_1]^{-\frac{1}{1-\delta}} x_2 \right] [x_1]^{\frac{2+\delta}{1-\delta}} x_2 \\ L_g V(x) &= [\lambda^{1-\delta} x_1]^{\frac{2}{1-\delta}} + \gamma [\lambda x_2]^2 \\ &= \lambda^2 \left([x_1]^{\frac{2}{1-\delta}} + \gamma [x_2]^2 \right), \end{aligned}$$

por lo que $L_f V(x)$ es homogéneo de grado $3 + \delta$ y $L_g V(x)$ es homogéneo de grado 2.

Considerando el grado de homogeneidad de $L_g V(x)$ y recordando (3.38), se diseña un controlador homogéneo $u = \phi(x)$ de grado $r_3 = 1 + \delta$, definido como

$$\phi(x) = -k_2 [L_g V(x)]^{\frac{1+\delta}{2}} = -k_2 \left[[x_1]^{\frac{2}{1-\delta}} + \gamma [x_2]^2 \right]^{\frac{1+\delta}{2}}. \quad (3.133)$$

Teorema 3.17. (3.124) con $m = 3$ es una F.L Homogénea para el sistema (3.37) en lazo cerrado aplicada la ley de control (3.133) con $k_2 > 0$ suficientemente grande y $\gamma > \left(\frac{2}{3k_1}\right)^{\frac{3}{2}}$, ya que satisface la Definición 2.1, es decir cumple

$$\dot{V} = L_f V(x) + L_g V(x) \phi(x) < 0, \quad \forall x \neq 0. \quad \triangle \quad (3.134)$$

Corolario 3.8. El controlador homogéneo (3.133) estabiliza asintóticamente, exponencialmente o en tiempo finito el origen del sistema (3.37), dependiendo del valor de δ , al satisfacer el Corolario 2.1. \triangle

Prueba 3.17. Verificando (3.134), se reescribe $\dot{V}(x, \phi)$ como

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \phi) &= -k_2 \left| [x_1]^{\frac{2}{1-\delta}} + \gamma [x_2]^2 \right|^{\frac{3+\delta}{2}} \\ &\quad + \left(\frac{2}{1-\delta} \right) \left(\frac{3}{2} \gamma k_1 + [x_1]^{-\frac{1}{1-\delta}} x_2 \right) [x_1]^{\frac{2+\delta}{1-\delta}} x_2. \end{aligned} \quad (3.135)$$

Note que el 1^{er} término de (3.135) es no positivo y se desvanece en el conjunto $S_g = \{x_2^* = -\gamma^{-\frac{1}{2}}[x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta}}\}$, por lo que al evaluar en $V(x)$ dicho conjunto se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \phi)|_{S_g} &= \left[\frac{2}{1-\delta} \right] \left[\frac{3}{2}\gamma k_1 + [x_1^*]^{-\frac{1}{1-\delta}} \left(-\gamma^{-\frac{1}{2}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta}} \right) \right] [x_1^*]^{\frac{2+\delta}{1-\delta}} \left(-\gamma^{-\frac{1}{2}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta}} \right) \\ &= - \left[\frac{2}{(1-\delta)\sqrt{\gamma}} \right] \underbrace{\left[\frac{3}{2}\gamma k_1 - \gamma^{-1} \right]}_{>0} |x_1^*|^{\frac{3+\delta}{1-\delta}} < 0. \end{aligned} \quad (3.136)$$

Utilizando el *Lema 2.3* se puede garantizar que $\dot{V}(x, \phi)|_{S_g} < 0$ seleccionando $k_2 > 0$ suficientemente grande y $\gamma > \left(\frac{2}{3k_1}\right)^{\frac{3}{2}}$, por lo que se concluye que $V(x)$ es una Función de Lyapunov Homogénea para el sistema (3.37) en lazo cerrado aplicado el controlador (3.133). ■

3.3.7. Diseño de Control Bi-homogéneo

3.3.7.1. Función de Lyapunov Bi-homogénea

Se propone como candidata a F.L.C. Bi-homogénea la función

$$V(x) = \mu_A V_o(x) + \mu_B V_\infty(x), \quad (3.137)$$

con $\mu_A \geq 0$, $\mu_B \geq 0$ y $\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty > 0$. Donde $V_o(x)$ y $V_\infty(x)$ son F.L.C Homogéneas de la forma (3.124), con parámetros

$$\begin{aligned} (\delta_o, r_{1o}, r_{2o}, r_{3o}, m_o) &= (\delta_o, 1 - \delta_o, 1, 1 + \delta_o, m) \\ (\delta_\infty, r_{1\infty}, r_{2\infty}, r_{3\infty}, m_\infty) &= (\delta_\infty, 1 - \delta_\infty, 1, 1 + \delta_\infty, m) \end{aligned}$$

por (3.38), donde se define a $m = m_o = m_\infty = 3$ para poder encontrar una solución explícita de la ecuación $L_g V(x^*) = 0$ respecto a x_2^* (contemplando (3.125)), considerando a su vez a $1 > \delta_\infty > \delta_o \geq -1$ por suposición (contemplando (3.38) y (3.125)).

Teorema 3.18. (3.137) es una F.L.C Bi-homogénea para el sistema (3.37), ya que satisface la Definición 2.2, es decir cumple

$$\forall \{ x^* \neq 0 \mid \underbrace{\mu_A L_g V_o + \mu_B L_g V_\infty}_{L_g V(x^*)=0} = 0 \} \Rightarrow \dot{V}(x^*) = \underbrace{\mu_A L_f V_o + \mu_B L_f V_\infty}_{L_f V(x^*)} < 0. \quad \triangle \quad (3.138)$$

3. CONTROLADORES BI-HOMOGÉNEOS SISTEMAS DE ORDEN 1 Y 2

Prueba 3.18. Analizando la homogeneidad de (3.137), suponiendo (por simplicidad) que $m_\infty > m_o$, recordando que $V_o(x)$ presenta a $r_{1o} = 1 - \delta_o$ y $r_{2o} = 1$; considerando además que $V_\infty(x)$ presenta a $r_{1\infty} = 1 - \delta_\infty$ y $r_{2\infty} = 1$, se tiene

$$\begin{aligned}
V(x) &= \mu_A V_o(x) + \mu_B V_\infty(x) \\
&= \mu_A \left[\gamma_o \left(k_{1o} |\lambda^{1-\delta_o} x_1|^{\frac{3}{1-\delta_o}} + \frac{1}{3} |\lambda x_2|^3 \right)^{\frac{m_o}{3}} + [\lambda^{1-\delta_o} x_1]^{\frac{m_o-1}{1-\delta_o}} (\lambda x_2) \right] \\
&+ \mu_B \left[\gamma_\infty \left(k_{1\infty} |\lambda^{1-\delta_\infty} x_1|^{\frac{3}{1-\delta_\infty}} + \frac{1}{3} |\lambda x_2|^3 \right)^{\frac{m_\infty}{3}} + [\lambda^{1-\delta_\infty} x_1]^{\frac{m_\infty-1}{1-\delta_\infty}} (\lambda x_2) \right] \\
&= \underbrace{\lambda^{m_o} \mu_A \left[\gamma_o \left(k_{1o} |x_1|^{\frac{3}{1-\delta_o}} + \frac{1}{3} |x_2|^3 \right)^{\frac{m_o}{3}} + [x_1]^{\frac{m_o-1}{1-\delta_o}} x_2 \right]}_{(r_{1o}, r_{2o})\text{-Homogéneo de grado } m_o} \\
&+ \underbrace{\lambda^{m_\infty} \mu_B \left[\gamma_\infty \left(k_{1\infty} |x_1|^{\frac{3}{1-\delta_\infty}} + \frac{1}{3} |x_2|^3 \right)^{\frac{m_\infty}{3}} + [x_1]^{\frac{m_\infty-1}{1-\delta_\infty}} x_2 \right]}_{(r_{1\infty}, r_{2\infty})\text{-Homogéneo de grado } m_\infty},
\end{aligned}$$

lo cual permite garantizar que $V(x) \approx V_o(x)$ en una vecindad cercana a cero y $V(x) \approx V_\infty(x)$ en una vecindad cercana a infinito, ya que $V_o(x)$ presenta potencias más pequeñas que $V_\infty(x)$. Es así como se demuestra que $V(x)$ es una función bi-homogénea de grado m_o/m_∞ .

Definiendo a $m = m_o = m_\infty = 3$, tomando la derivada de (3.137) a lo largo de las trayectorias del sistema (3.37), se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= \mu_A \dot{V}_o(x) + \mu_B \dot{V}_\infty(x) \\
\dot{V}(x) &= \mu_A (L_f V_o(x) + L_g V_o(x)u) + \mu_B (L_f V_\infty(x) + L_g V_\infty(x)u) \\
\dot{V}(x) &= \underbrace{(\mu_A L_f V_o(x) + \mu_B L_f V_\infty(x))}_{L_f V(x)} + \underbrace{(\mu_A L_g V_o(x) + \mu_B L_g V_\infty(x))}_{L_g V(x)} u, \quad (3.139)
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
L_f V(x) &= \mu_A \left(\frac{2}{1-\delta_o} \right) \left\{ \frac{3}{2} \gamma_o k_{1o} + [x_1]^{-\frac{1}{1-\delta_o}} x_2 \right\} [x_1]^{\frac{2+\delta_o}{1-\delta_o}} x_2 \\
&+ \mu_B \left(\frac{2}{1-\delta_\infty} \right) \left\{ \frac{3}{2} \gamma_\infty k_{1\infty} + [x_1]^{-\frac{1}{1-\delta_\infty}} x_2 \right\} [x_1]^{\frac{2+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} x_2, \quad (3.140)
\end{aligned}$$

$$L_g V(x) = \mu_A [x_1]^{\frac{2}{1-\delta_o}} + \mu_B [x_1]^{\frac{2}{1-\delta_\infty}} + (\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty) [x_2]^2. \quad (3.141)$$

Calculando los valores de x_2^* donde $L_g V(x^*) = 0$, se obtiene la curva mostrada en la Fig 3.6, representada por

$$\begin{aligned}
 (\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty) [x_2^*]^2 &= - \left(\mu_A [x_1]^{-\frac{2}{1-\delta_o}} + \mu_B [x_1]^{-\frac{2}{1-\delta_\infty}} \right) \\
 x_2^* &= - \left[\frac{\mu_A}{\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty} [x_1^*]^{-\frac{2}{1-\delta_o}} + \frac{\mu_B}{\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty} [x_1^*]^{-\frac{2}{1-\delta_\infty}} \right]^{\frac{1}{2}} \\
 x_2^* &= - \left[\frac{\mu_A}{\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty} + \frac{\mu_B}{\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty} [x_1^*]^{-\frac{2}{1-\delta_\infty} - \frac{2}{1-\delta_o}} \right]^{\frac{1}{2}} [x_1^*]^{-\frac{1}{1-\delta_o}} \\
 x_2^* &= - \underbrace{\left[\frac{\mu_A}{\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty} + \frac{\mu_B}{\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty} [x_1^*]^{-\frac{2(\delta_\infty - \delta_o)}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right]^{\frac{1}{2}}}_{\omega(x_1^*) > 0} [x_1^*]^{-\frac{1}{1-\delta_o}} \\
 x_2^* &= -\omega(x_1^*) [x_1^*]^{-\frac{1}{1-\delta_o}}. \tag{3.142}
 \end{aligned}$$

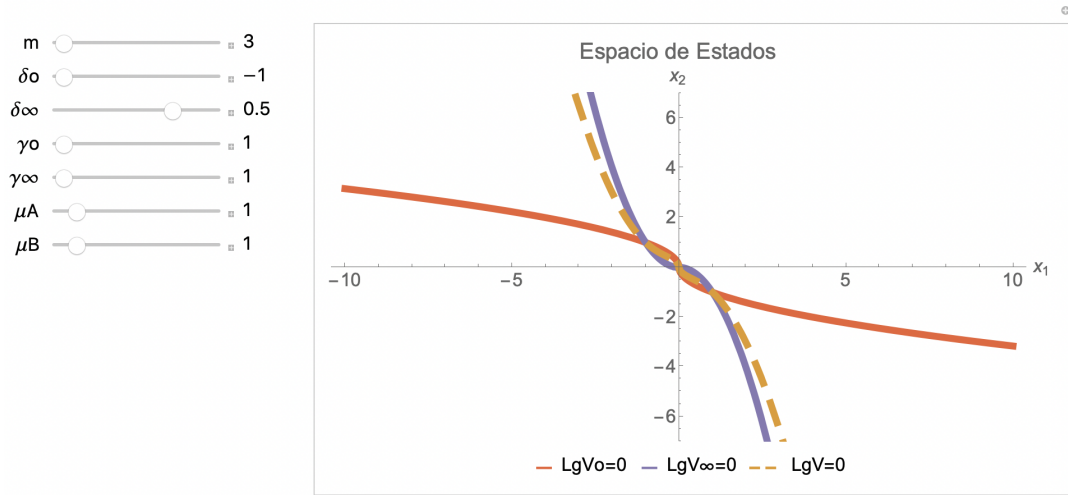


Figura 3.6: Muestra los valores de (x_1^*, x_2^*) donde $L_g V(x^*) = 0$.

A partir de (3.139), se evalúa en (3.140) el conjunto $S_g = \{x_2^* = -\omega(x_1^*) [x_1^*]^{-\frac{1}{1-\delta_o}}\}$ (3.142), obteniendo la expresión

$$\begin{aligned}
 L_f V(x_1^*)|_{S_g} &= \tag{3.143} \\
 & \left[\frac{2\mu_A}{1-\delta_o} \right] \left[\frac{3}{2} \gamma_o k_{1o} + [x_1^*]^{-\frac{1}{1-\delta_o}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{-\frac{1}{1-\delta_o}} \right)}_{x_2^*} \right] [x_1^*]^{\frac{2+\delta_o}{1-\delta_o}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{-\frac{1}{1-\delta_o}} \right)}_{x_2^*} \\
 & + \left[\frac{2\mu_B}{1-\delta_\infty} \right] \left[\frac{3}{2} \gamma_\infty k_{1\infty} + [x_1^*]^{-\frac{1}{1-\delta_\infty}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{-\frac{1}{1-\delta_o}} \right)}_{x_2^*} \right] [x_1^*]^{\frac{2+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{-\frac{1}{1-\delta_o}} \right)}_{x_2^*},
 \end{aligned}$$

3. CONTROLADORES BI-HOMOGÉNEOS SISTEMAS DE ORDEN 1 Y 2

la cual al ser simplificada se reduce en

$$\begin{aligned}
L_f V(x_1^*)|_{S_g} &= \\
&\left[\left(\frac{2\mu_A}{1-\delta_o} \right) \left(\frac{3}{2} \gamma_o k_{1o} - \omega(x_1^*) \right) |x_1^*|^{\frac{2+\delta_o}{1-\delta_o}} \right. \\
&+ \left. \left(\frac{2\mu_B}{1-\delta_\infty} \right) \left(\frac{3}{2} \gamma_\infty k_{1\infty} - \omega(x_1^*) |x_1^*|^{-\left[\frac{1}{1-\delta_\infty} - \frac{1}{1-\delta_o}\right]} \right) |x_1^*|^{\frac{2+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} \right] \left[-\omega(x_1^*) |x_1^*|^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right], \\
L_f V(x_1^*)|_{S_g} &= \\
&- \left[\left(\frac{2\mu_A}{1-\delta_o} \right) \left(\frac{3}{2} \gamma_o k_{1o} - \omega(x_1^*) \right) \right. \\
&+ \left. \left(\frac{2\mu_B}{1-\delta_\infty} \right) \left(\frac{3}{2} \gamma_\infty k_{1\infty} - \omega(x_1^*) |x_1^*|^{-\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right) |x_1^*|^{\frac{2+\delta_\infty}{1-\delta_\infty} - \frac{2+\delta_o}{1-\delta_o}} \right] \omega(x_1^*) |x_1^*|^{\frac{1}{1-\delta_o} + \frac{2+\delta_o}{1-\delta_o}}, \\
L_f V(x_1^*)|_{S_g} &= \\
&- \left[\left(\frac{2\mu_A}{1-\delta_o} \right) \left(\frac{3}{2} \gamma_o k_{1o} - \omega(x_1^*) \right) \right. \\
&+ \left. \left(\frac{2\mu_B}{1-\delta_\infty} \right) \left(\frac{3}{2} \gamma_\infty k_{1\infty} - \omega(x_1^*) |x_1^*|^{-\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right) |x_1^*|^{\frac{3(\delta_\infty - \delta_o)}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right] \omega(x_1^*) |x_1^*|^{\frac{3+\delta_o}{1-\delta_o}},
\end{aligned}$$

obteniendo finalmente la expresión

$$L_f V(x_1^*)|_{S_g} = - \underbrace{\left[\pi(x_1^*) - v(x_1^*) \right]}_{\lambda(x_1^*)} \omega(x_1^*) |x_1^*|^{\frac{3+\delta_o}{1-\delta_o}} \quad (3.144)$$

con

$$\pi(x_1^*) = \frac{3}{2} \left[\gamma_o k_{1o} \left(\frac{2\mu_A}{1-\delta_o} \right) + \gamma_\infty k_{1\infty} \left(\frac{2\mu_B}{1-\delta_\infty} \right) |x_1^*|^{\frac{3(\delta_\infty - \delta_o)}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right], \quad (3.145)$$

$$v(x_1^*) = \left[\left(\frac{2\mu_A}{1-\delta_o} \right) + \left(\frac{2\mu_B}{1-\delta_\infty} \right) |x_1^*|^{\frac{2(\delta_\infty - \delta_o)}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right] \omega(x_1^*), \quad (3.146)$$

donde $\pi(x_1^*) > 0$, $v(x_1^*) > 0$ y $\omega(x_1^*) > 0$, $\forall x_1^* \neq 0$.

Recordando el *Teorema 3.18*, para que $L_f V(x_1^*)|_{S_g} < 0$ se debe garantizar que $\lambda(x_1^*) > 0 \forall \{x_1^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$, lo cual se logra si

$$\pi(x_1^*) > v(x_1^*) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi(x_1^*)}{v(x_1^*)} > 1 \quad (3.147)$$

se satisface.

Previo al análisis de (3.147), se determinan los términos dominantes de

$$\omega(x_1^*) = \left(\underbrace{\frac{\mu_A}{\mu_A\gamma_o + \mu_B\gamma_\infty}}_{\text{Dom. } x_1^* \rightarrow 0} + \underbrace{\frac{\mu_B}{\mu_A\gamma_o + \mu_B\gamma_\infty} |x_1^*|^{\frac{2(\delta_\infty - \delta_o)}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}}}_{\text{Dom. } x_1^* \rightarrow \infty} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.148)$$

para posteriormente determinar los términos de alto y bajo orden de (3.145) y (3.146). De esta forma se concluye que los términos dominantes para valores pequeños de x_1^* cercanos a cero (términos de menor orden), son:

$$\pi_o(x_1^*) = \mu_A \gamma_o k_{1o} \left(\frac{3}{1 - \delta_o} \right), \quad (3.149)$$

$$\begin{aligned} v_o(x_1^*) &= \left[\mu_A \left(\frac{2}{1 - \delta_o} \right) \right] \omega(x_1^*)|_{\text{Dom. } x_1^* \rightarrow 0} \\ &= \mu_A \left(\frac{2}{1 - \delta_o} \right) \left(\frac{\mu_A}{\mu_A\gamma_o + \mu_B\gamma_\infty} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.150)$$

y para valores grandes de x_1^* (términos de mayor orden) son

$$\pi_\infty(x_1^*) = \mu_B \gamma_\infty k_{1\infty} \left(\frac{3}{1 - \delta_\infty} \right) |x_1^*|^{\frac{3(\delta_\infty - \delta_o)}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}}, \quad (3.151)$$

$$\begin{aligned} v_\infty(x_1^*) &= \left[\mu_B \left(\frac{2}{1 - \delta_\infty} \right) |x_1^*|^{\frac{2(\delta_\infty - \delta_o)}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right] \omega(x_1^*)|_{\text{Dom. } x_1^* \rightarrow \infty} \\ &= \left[\mu_B \left(\frac{2}{1 - \delta_\infty} \right) |x_1^*|^{\frac{2(\delta_\infty - \delta_o)}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right] \underbrace{\left(\frac{\mu_B}{\mu_A\gamma_o + \mu_B\gamma_\infty} |x_1^*|^{\frac{2(\delta_\infty - \delta_o)}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right)^{\frac{1}{2}}}_{\omega(x_1^*)|_{\text{Dom. } x_1^* \rightarrow \infty}} \\ &= \mu_B \left(\frac{2}{1 - \delta_\infty} \right) \left(\frac{\mu_B}{\mu_A\gamma_o + \mu_B\gamma_\infty} \right)^{\frac{1}{2}} |x_1^*|^{\frac{3(\delta_\infty - \delta_o)}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}}. \end{aligned} \quad (3.152)$$

3. CONTROLADORES BI-HOMOGÉNEOS SISTEMAS DE ORDEN 1 Y 2

Analizando (3.147), considerando (3.149) y (3.150), en el caso ($x_1^* \rightarrow 0$), se obtiene

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x_1^* \rightarrow 0} \frac{\pi_o(x_1^*)}{v_o(x_1^*)} \\
 & \lim_{x_1^* \rightarrow 0} \frac{\cancel{\mu_A} \gamma_o k_{1o} \left(\frac{3}{1-\delta_o} \right)}{\cancel{\mu_A} \left(\frac{2}{1-\delta_o} \right) \left(\frac{\mu_A}{\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty} \right)^{\frac{1}{2}}} \\
 & \lim_{x_1^* \rightarrow 0} \frac{3\gamma_o k_{1o} (\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty)^{\frac{1}{2}}}{2\mu_A^{\frac{1}{2}}} > 1 \\
 & \Downarrow \\
 & \gamma_\infty > -\frac{\mu_A (9\gamma_o^3 k_{1o}^2 - 4)}{\mu_B (9\gamma_o^3 k_{1o}^2)}, \tag{3.153}
 \end{aligned}$$

que permite concluir por definición de $\gamma_\infty > 0$ que si se selecciona $k_{1o} > \frac{2}{3\gamma_o^{3/2}}$ (o $\gamma_o > 0$ suficientemente grande), para valores pequeños de x_1^* cercanos a cero, se puede garantizar que (3.147) se satisface.

Así mismo, analizando (3.147), considerando (3.151) y (3.152), en el caso ($x_1^* \rightarrow \pm\infty$), se obtiene

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x_1^* \rightarrow \pm\infty} \frac{\pi_\infty(x_1^*)}{v_\infty(x_1^*)} \\
 & \lim_{x_1^* \rightarrow \pm\infty} \frac{\cancel{\mu_B} \left[\gamma_\infty \left(\frac{3}{1-\delta_\infty} \right) k_{1\infty} \right] |x_1^*|^{\frac{3(\delta_\infty - \delta_o)}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}}}{\cancel{\mu_B} \left(\frac{2}{1-\delta_\infty} \right) \left(\frac{\mu_B}{\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty} \right)^{\frac{1}{2}} k_{1\infty}^m |x_1^*|^{\frac{3(\delta_\infty - \delta_o)}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}}} \\
 & \lim_{x_1^* \rightarrow \pm\infty} \frac{3\gamma_\infty k_{1\infty} (\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty)^{\frac{1}{2}}}{2\mu_B^{\frac{1}{2}}} > 1 \\
 & \Downarrow \\
 & \gamma_o > -\frac{\mu_B (9\gamma_\infty^3 k_{1\infty}^2 - 4)}{\mu_A (9\gamma_\infty^3 k_{1\infty}^2)}, \tag{3.154}
 \end{aligned}$$

que permite concluir por definición de $\gamma_o > 0$ que si se selecciona $k_{1\infty} > \frac{2}{3\gamma_\infty^{3/2}}$ (o $\gamma_\infty > 0$ suficientemente grande), para valores grandes de x_1^* , se puede garantizar que (3.147) se satisface.

Es así como la función $\frac{\pi(x_1^*)}{v(x_1^*)}$ satisface que:

- Es positiva en todas partes (excepto posiblemente en el origen), pues el numerador y el denominador son positivos.
- Es continua en todas partes (excepto posiblemente en el origen), pues el denominador es continuo.
- Sus límites son mayores que: $\lim_{x_1^* \rightarrow 0} \frac{\pi(x_1^*)}{v(x_1^*)} > 1$ y $\lim_{x_1^* \rightarrow \pm\infty} \frac{\pi(x_1^*)}{v(x_1^*)} > 1$, por (3.153) y (3.154).

La última condición (por continuidad) implica que en una vecindad (cerrada) cerca del origen $x_1^* \in [-\epsilon, \epsilon]$ y en una vecindad del infinito $x_1^* \in [\Omega, \infty)$ y $x_1^* \in (-\infty, -\Omega]$, la función $\frac{\pi(x_1^*)}{v(x_1^*)} > 1$. Por lo que, en el compacto $[-\Omega, -\epsilon] \cup [\epsilon, \Omega]$, la función continua $\frac{\pi(x_1^*)}{v(x_1^*)}$ alcanza su mínimo valor, el cual es positivo, y depende de γ_o y γ_∞ . Dicho valor puede alterarse haciéndolo mayor que 1 seleccionando γ_o y γ_∞ suficientemente grandes.

Por lo tanto se concluye que V es una F.L.C Bi-Homogénea para el sistema (3.37). ■

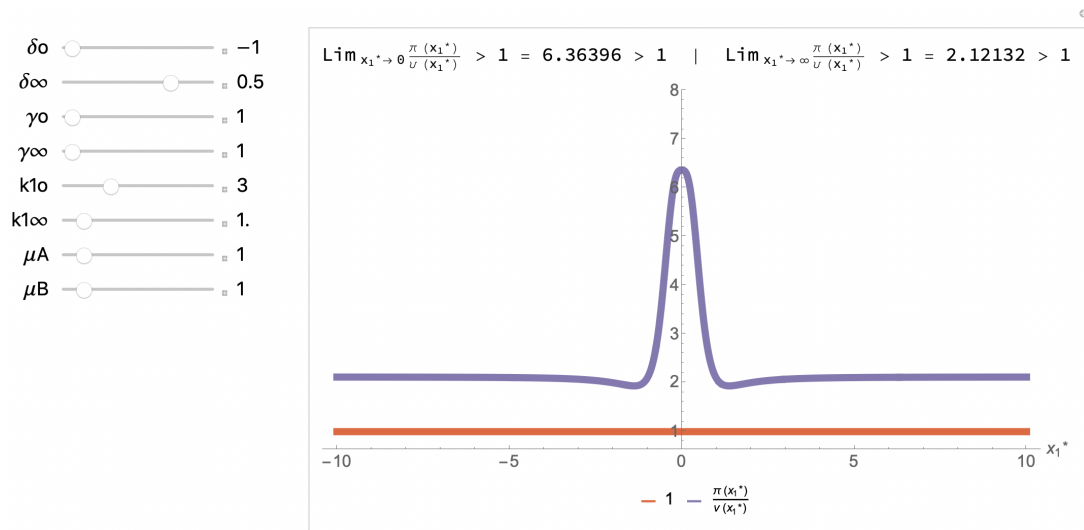


Figura 3.7: Muestra el comportamiento de la función $\frac{\pi(x_1^*)}{v(x_1^*)}$.

3. CONTROLADORES BI-HOMOGÉNEOS SISTEMAS DE ORDEN 1 Y 2

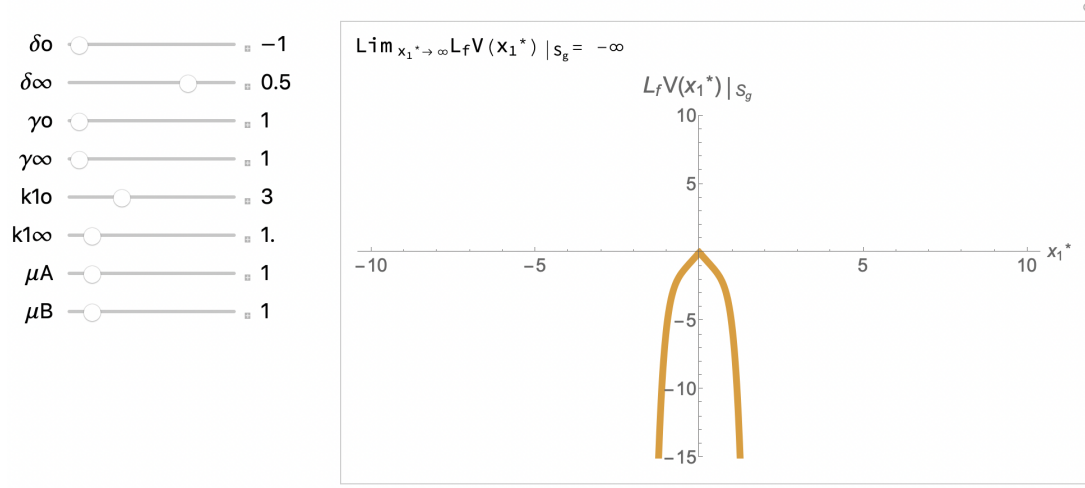


Figura 3.8: Muestra el comportamiento de $\dot{V}(x^*) = L_f V(x^*)|_{S_g}$ cerca del origen.

3.3.7.2. Controladores Bi-Homogéneos Polinomiales y Racionales

Empleando la misma estructura de los controladores bi-homogéneos que se definieron en la subsección anterior: polinomial (3.71) y racional(3.72), con $m = 3$ y

$$\begin{aligned} L_g V(x) &= \mu_A [x_1]^{\frac{2}{1-\delta_o}} + \mu_B [x_1]^{\frac{2}{1-\delta_\infty}} + (\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty) [x_2]^2 \\ &= \left(\mu_A + \mu_B |x_1|^{\frac{2(\delta_\infty - \delta_o)}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right) [x_1]^{\frac{2}{1-\delta_o}} + (\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty) [x_2]^2, \end{aligned} \quad (3.155)$$

se dispone a probar que (3.137) también es una F.L Bi-homogénea (con $m = 3$) para el sistema (3.37) en lazo cerrado aplicados dichos controladores.

Observación 3.12. Las funciones de control (3.71) y (3.72), y sus respectivos sistemas en lazo cerrado resultantes, son homogéneos en el bi-límite ya que satisfacen la Definición 2.10.

Observación 3.13. Si se aplica el controlador (3.71) en el sistema (3.37), se puede recuperar

Controlador Local Homogéneo Polinomial de grado $\delta = 1 + \delta_o$

Si $k_{2\infty} = 0$ y $\mu_B = 0$, obteniendo

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.156)$$

$$\dot{x}_2 = -k_{2o} [L_g V(x)]^{\frac{1+\delta_o}{2}} = -k_{2o} \left[\mu_A [x_1]^{\frac{2}{1-\delta_o}} + \gamma_o \mu_A [x_2]^2 \right]^{\frac{1+\delta_o}{2}}$$

que es homogéneo de grado δ_o (en lazo cerrado).

Controlador No Local Homogéneo Polinomial de grado $\delta = 1 + \delta_\infty$

Si $k_{2o} = 0$ y $\mu_A = 0$, obteniendo

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.157)$$

$$\dot{x}_2 = -k_{2\infty} [L_g V(x)]^{\frac{1+\delta_\infty}{2}} = -k_{2\infty} \left[\mu_B [x_1]^{\frac{2}{1-\delta_\infty}} + \gamma_\infty \mu_B [x_2]^2 \right]^{\frac{1+\delta_\infty}{2}}$$

que es homogéneo de grado δ_∞ (en lazo cerrado).

Observación 3.14. Si se aplica el controlador (3.72) en el sistema(3.37), se puede recuperar

Controlador Local Homogéneo Racional de grado $\delta = 1 + \delta_o$

Si $k_{2\infty} = 0$ y $\mu_B = 0$, obteniendo

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.158)$$

$$\dot{x}_2 = -k_{2o} \frac{L_g V(x)}{M_o(x)} = -k_{2o} \left[\frac{\mu_A [x_1]^{\frac{2}{1-\delta_o}} + \gamma_o \mu_A [x_2]^2}{M_o(x)} \right]$$

que es homogéneo de grado δ_o (en lazo cerrado).

Controlador No Local Homogéneo Racional de grado $\delta = 1 + \delta_\infty$

Si $k_{2o} = 0$ y $\mu_A = 0$, obteniendo

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.159)$$

$$\dot{x}_2 = -k_{2\infty} \frac{L_g V(x)}{M_\infty(x)} = -k_{2\infty} \left[\frac{\mu_B [x_1]^{\frac{2}{1-\delta_\infty}} + \gamma_\infty \mu_B [x_2]^2}{M_\infty(x)} \right]$$

que es homogéneo de grado δ_∞ (en lazo cerrado).

Teorema 3.19. (3.137) es una F.L Bi-Homogénea para el sistema (3.37) en lazo cerrado aplicada la función de control (3.71) con $k_{2o} > 0$, $k_{2\infty} > 0$, $\gamma_o > 0$ y $\gamma_\infty > 0$ suficientemente grandes, ya que satisface el Teorema 2.1, es decir cumple

$$\dot{V}(x, \phi_P) = L_f V(x) - k_{2o} |L_g V(x)|^{\frac{3+\delta_o}{2}} - k_{2\infty} |L_g V(x)|^{\frac{3+\delta_\infty}{2}} < 0, \quad \forall x \neq 0. \quad \triangle \quad (3.160)$$

Corolario 3.9. Si se selecciona $\delta_o < 0$ y $\delta_\infty > 0$, el controlador bi-homogéneo polinomial (3.71) estabilizará el origen del sistema (3.37) en tiempo fijo. \triangle

3. CONTROLADORES BI-HOMOGÉNEOS SISTEMAS DE ORDEN 1 Y 2

Prueba 3.19. Verificando (3.160), se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x, \phi_P) = & \mu_A \left(\frac{2}{1 - \delta_o} \right) \left\{ \frac{3}{2} \gamma_o k_{1o} + [x_1]^{-\frac{1}{1-\delta_o}} x_2 \right\} [x_1]^{\frac{2+\delta_o}{1-\delta_o}} x_2 \\
& + \mu_B \left(\frac{2}{1 - \delta_\infty} \right) \left\{ \frac{3}{2} \gamma_\infty k_{1\infty} + [x_1]^{-\frac{1}{1-\delta_\infty}} x_2 \right\} [x_1]^{\frac{2+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} x_2 \\
& - k_{2o} \left| \left(\mu_A + \mu_B |x_1|^{\frac{2(\delta_\infty - \delta_o)}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right) [x_1]^{\frac{2}{1-\delta_o}} + (\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty) [x_2]^2 \right|^{\frac{3+\delta_o}{2}} \\
& - k_{2\infty} \left| \left(\mu_A + \mu_B |x_1|^{\frac{2(\delta_\infty - \delta_o)}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right) [x_1]^{\frac{2}{1-\delta_o}} + (\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty) [x_2]^2 \right|^{\frac{3+\delta_\infty}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.161}$$

Note que el 3^{er} y el 4^{to} término de (3.161) son no positivos y se desvanecen en el conjunto $S_g = \{L_g V(x^*) = 0\} = \{x_2^* = -\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}}\}$ (3.142), por lo que al evaluar (3.161) en dicho conjunto, se obtiene la expresión

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x, \phi_P)|_{S_g} = & L_f V(x_1^*)|_{S_g} = \underbrace{-k_{2o}|0|^{\frac{3+\delta_o}{2}} - k_{2\infty}|0|^{\frac{3+\delta_\infty}{2}}}_{=0} \\
& + \left[\frac{2\mu_A}{1 - \delta_o} \right] \left[\frac{3}{2} \gamma_o k_{1o} + [x_1^*]^{-\frac{1}{1-\delta_o}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right)}_{x_2^*} \right] [x_1^*]^{\frac{2+\delta_o}{1-\delta_o}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right)}_{x_2^*} \\
& + \left[\frac{2\mu_B}{1 - \delta_\infty} \right] \left[\frac{3}{2} \gamma_\infty k_{1\infty} + [x_1^*]^{-\frac{1}{1-\delta_\infty}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right)}_{x_2^*} \right] [x_1^*]^{\frac{2+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right)}_{x_2^*},
\end{aligned} \tag{3.162}$$

que en conjunto con el *Lema 2.3* permite demostrar $\dot{V}(x, \phi_P)|_{S_g} < 0$ seleccionando $k_{2o} > 0$ y $k_{2\infty} > 0$ suficientemente grandes, ya que la expresión (3.162) se transforma en (3.143), adquiriendo posteriormente la forma (3.144)

$$\dot{V}(x, \phi_P)|_{S_g} = L_f V(x_1^*)|_{S_g} = - \underbrace{[\pi(x_1^*) - v(x_1^*)]}_{\lambda(x_1^*)} \omega(x_1^*) |x_1^*|^{\frac{3+\delta_o}{1-\delta_o}} < 0$$

tras ser simplificada, indicando que se debe garantizar (3.147) $\forall \{x_1^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ para que $\dot{V}(x, \phi_P)|_{S_g} = L_f V(x_1^*)|_{S_g} < 0$.

Cabe mencionar que las condiciones que se necesitan para que ésto ocurra ya han sido descritas en la subsección anterior, donde se requiere seleccionar $\gamma_o > 0$ y $\gamma_\infty > 0$ suficientemente grandes para que $\lambda(x_1^*) > 0$.

Lo anterior permite demostrar que $V(x)$ es una F.L Bi-Homogénea para el sistema (3.37) en lazo cerrado aplicado el controlador (3.71), permitiendo garantizar a su vez que dicha función de control polinomial al ser homogénea en el bi-límite lleva las trayectorias del sistema (3.37) al origen en tiempo fijo (si se seleccionan $\delta_o < 0$ y $\delta_\infty > 0$). ■

Teorema 3.20. (3.137) es una F.L Bi-Homogénea para el sistema (3.37) en lazo cerrado aplicada la función de control (3.72) con $k_{2o} > 0$, $k_{2\infty} > 0$, $\gamma_o > 0$ y $\gamma_\infty > 0$ suficientemente grandes, ya que satisface el Teorema 2.1, es decir cumple

$$\dot{V}(x, \phi_R) = L_f V(x) - \left(\frac{k_{2o}}{M_o(x)} + \frac{k_{2\infty}}{M_\infty(x)} \right) L_g V(x)^2 < 0, \quad \forall x \neq 0. \quad \Delta \quad (3.163)$$

Corolario 3.10. Si se selecciona $\delta_o < 0$ y $\delta_\infty > 0$, el controlador bi-homogéneo racional (3.72) estabilizará el origen del sistema (3.37) en tiempo fijo. Δ

Prueba 3.20. Verificando (3.163), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \phi_R) = & \mu_A \left(\frac{2}{1 - \delta_o} \right) \left\{ \frac{3}{2} \gamma_o k_{1o} + [x_1]^{-\frac{1}{1-\delta_o}} x_2 \right\} [x_1]^{\frac{2+\delta_o}{1-\delta_o}} x_2 \\ & + \mu_B \left(\frac{2}{1 - \delta_\infty} \right) \left\{ \frac{3}{2} \gamma_\infty k_{1\infty} + [x_1]^{-\frac{1}{1-\delta_\infty}} x_2 \right\} [x_1]^{\frac{2+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} x_2 \\ & - \left[\frac{k_{2o}}{M_o(x)} + \frac{k_{2\infty}}{M_\infty(x)} \right] \\ & \left[\left(\mu_A + \mu_B |x_1|^{\frac{2(\delta_\infty - \delta_o)}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right) [x_1]^{\frac{2}{1-\delta_o}} + (\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty) [x_2]^2 \right]^2. \end{aligned} \quad (3.164)$$

Note que el 3^{er} término de (3.164) es no positivo y se desvanece en el conjunto $S_g = \{L_g V(x^*) = 0\} = \{x_2^* = -\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}}\}$ (3.142), por lo que al evaluar (3.164) en dicho conjunto se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \phi_R)|_{S_g} = & L_f V(x_1^*)|_{S_g} = - \underbrace{\left[\frac{k_{2o}}{M_o(x)} + \frac{k_{2\infty}}{M_\infty(x)} \right]}_{=0} [0]^2 \\ & + \left[\frac{2\mu_A}{1 - \delta_o} \right] \left[\frac{3}{2} \gamma_o k_{1o} + [x_1^*]^{-\frac{1}{1-\delta_o}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right)}_{x_2^*} \right] [x_1^*]^{\frac{2+\delta_o}{1-\delta_o}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right)}_{x_2^*} \\ & + \left[\frac{2\mu_B}{1 - \delta_\infty} \right] \left[\frac{3}{2} \gamma_\infty k_{1\infty} + [x_1^*]^{-\frac{1}{1-\delta_\infty}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right)}_{x_2^*} \right] [x_1^*]^{\frac{2+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} \underbrace{\left(-\omega(x_1^*) [x_1^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right)}_{x_2^*}, \end{aligned} \quad (3.165)$$

3. CONTROLADORES BI-HOMOGÉNEOS SISTEMAS DE ORDEN 1 Y 2

que en conjunto con el *Lema 2.3* permite demostrar $\dot{V}(x, \phi_R)|_{S_g} < 0$ seleccionando $k_{2o} > 0$ y $k_{2\infty} > 0$ suficientemente grandes, ya que la expresión (3.165) se transforma en (3.143), adquiriendo posteriormente la forma (3.144)

$$\dot{V}(x, \phi_R) = L_f V(x_1^*)|_{S_g} = - \underbrace{[\pi(x_1^*) - \nu(x_1^*)]}_{\lambda(x_1^*)} \omega(x_1^*) |x_1^*|^{\frac{3+\delta_o}{1-\delta_o}} < 0$$

tras ser simplificada, indicando de igual manera que se debe garantizar (3.147) $\forall \{x_1^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ para que $\dot{V}(x, \phi_R) = L_f V(x_1^*)|_{S_g} < 0$.

Cabe mencionar que las condiciones que se necesitan para que ésto ocurra ya han sido descritas en subsecciones previas, donde se requiere seleccionar $\gamma_o > 0$ y $\gamma_\infty > 0$ suficientemente grandes para que $\lambda(x_1^*) > 0$.

Lo anterior permite demostrar que $V(x)$ es una F.L Bi-Homogénea para el sistema (3.37) en lazo cerrado aplicado el controlador (3.72), permitiendo garantizar a su vez que dicha función de control racional al ser homogénea en el bi-límite lleva las trayectorias del sistema (3.37) al origen en tiempo fijo (si se seleccionan $\delta_o < 0$ y $\delta_\infty > 0$). ■

Controladores Bi-Homogéneos

Sistema de Orden 3

En este capítulo se presentan los resultados finales de la tesis, lo cual corresponde al diseño de controladores bi-homogéneos para cadenas de integradores de orden tres, con grados de homogeneidad admisibles que presentan valores entre $\frac{1}{2} > \delta \geq 0$.

Para ello, se contempla inicialmente el planteamiento del problema enunciado en el capítulo previo, introduciendo posteriormente el diseño del controlador homogéneo para dicha cadena de integradores, que ayudará finalmente a realizar el diseño de su respectivo controlador bi-homogéneo.

4.1. Controlador Bi-Homogéneo - Sistema de Orden 3

4.1.1. Homogeneidad del Sistema

Sea (3.7) el sistema a analizar con $\rho = 3$, es decir, sea el sistema a estudiar una cadena de integradores de orden tres

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Considerando al control u como variable adicional con peso de homogeneidad r_4 , la homogeneidad en lazo cerrado del sistema (4.1) se obtiene a partir de

$$f(\Lambda_r x) = \lambda^\delta \Lambda_r f(x) \quad \Rightarrow \quad f(\Lambda_r x) = \left. \begin{aligned} &\left[\begin{array}{c} \lambda^{r_2} x_2 \\ \lambda^{r_3} x_3 \\ \lambda^{r_4} u \end{array} \right] = \lambda^\delta \left[\begin{array}{c} \lambda^{r_1} x_2 \\ \lambda^{r_2} x_3 \\ \lambda^{r_3} u \end{array} \right] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} r_2 &= \delta + r_1 \\ r_3 &= \delta + r_2, \\ r_4 &= \delta + r_3 \end{aligned}$$

4. CONTROLADORES BI-HOMOGÉNEOS SISTEMA DE ORDEN 3

donde si se fija $r_3 = 1$, se restringen los parámetros r_1, r_2, r_4 y δ de la forma

$$\left. \begin{array}{l} r_1 = 1 - 2\delta > 0 \rightarrow \frac{1}{2} > \delta \\ r_2 = 1 - \delta > 0 \rightarrow 1 > \delta \\ r_4 = 1 + \delta \geq 0 \rightarrow \delta \geq -1 \end{array} \right\} \frac{1}{2} > \delta \geq -1. \quad (4.2)$$

4.1.2. Diseño de Control Homogéneo

4.1.2.1. Función de Lyapunov de Control Homogénea

Modificando ligeramente la estructura de las F.L.C.H propuestas por Cruz-Zavala and Moreno [6], se propone como candidata a F.L.C Homogénea

$$V(x) = \gamma_2 V_1(x) + W_2(x), \quad (4.3)$$

con

$$V_1(x) = \left(\gamma_1 k_1^{\frac{m}{r_2}} |x_1|^{\frac{2}{r_1}} + \frac{r_2}{2} |x_2|^{\frac{2}{r_2}} \right)^{\frac{m}{2}} + k_1^{\frac{m-r_2}{r_2}} [x_1]^{\frac{m-r_2}{r_1}} x_2, \quad (4.4)$$

$$W_2(x) = \left(\frac{1}{2} k_2^{\frac{2}{r_3}} \left| [x_2]^{\frac{1}{r_2}} + k_1^{\frac{1}{r_2}} [x_1]^{\frac{1}{r_1}} \right|^2 + \frac{r_3}{2} |x_3|^{\frac{2}{r_3}} \right)^{\frac{m}{2}} + k_2^{\frac{m-r_3}{r_3}} \left[[x_2]^{\frac{1}{r_2}} + k_1^{\frac{1}{r_2}} [x_1]^{\frac{1}{r_1}} \right]^{\frac{m-1}{r_3}} x_3, \quad (4.5)$$

donde $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $k_1 > 0$ y $k_2 > 0$. Considerando (4.2), (4.4) y (4.5) se pueden reescribir como

$$V_1(x) = \left(\gamma_1 k_1^{\frac{m}{1-\delta}} |x_1|^{\frac{2}{1-2\delta}} + \frac{1-\delta}{2} |x_2|^{\frac{2}{1-\delta}} \right)^{\frac{m}{2}} + k_1^{\frac{m-1+\delta}{1-\delta}} [x_1]^{\frac{m-1+\delta}{1-2\delta}} x_2, \quad (4.6)$$

$$W_2(x) = \left(\frac{1}{2} k_2^2 \left| [x_2]^{\frac{1}{1-\delta}} + k_1^{\frac{1}{1-\delta}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta}} \right|^2 + \frac{1}{2} |x_3|^2 \right)^{\frac{m}{2}} + k_2^{m-1} \left[[x_2]^{\frac{1}{1-\delta}} + k_1^{\frac{1}{1-\delta}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta}} \right]^{m-1} x_3. \quad (4.7)$$

(4.3) es una función homogénea de grado m , positiva definida con $\gamma_2 > 0$ (suficientemente grande), radialmente no acotada y continuamente diferenciable, si

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{m}{2} \geq 1 \rightarrow m \geq 2 \quad * \\ m-1 \geq 1 \rightarrow m \geq 2 \quad * \\ \frac{m-1+\delta}{1-2\delta} \geq 1 \rightarrow m \geq 2-3\delta \\ \frac{2}{1-\delta} > 1 \rightarrow \delta > -1 \\ \frac{2}{1-2\delta} > 1 \rightarrow \delta > -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{1-2\delta} \geq 1 \rightarrow \delta \geq 0 \quad * \\ \frac{1}{1-\delta} \geq 1 \rightarrow \delta \geq 0 \quad *, \end{array} \right. \quad (4.8)$$

se satisfacen, donde $*$ representa las condiciones más restrictivas sobre los parámetros m y δ .

Teorema 4.1. (4.3) con $m = 2$ es una F.L.C Homogénea para el sistema (4.1), ya que satisface la Definición 2.2, es decir cumple

$$S_g \triangleq \{x^* \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} | L_g V(x^*) = 0\} \subseteq S_f \triangleq \{x^* \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} | L_f V(x^*) < 0\} \quad (4.9)$$

$$\Downarrow$$

$$\{L_g V(x^*) = 0 \cap x^* \neq 0\} \Rightarrow L_f V(x^*) < 0. \quad \Delta$$

Prueba 4.1. Tomando la derivada de (4.3) a lo largo de las trayectorias del sistema (4.1), se obtiene

$$\dot{V}(x) = L_f V(x) + L_g V(x)u,$$

donde

$$\begin{aligned} L_f V(x) &= \langle \partial V(x), f(x) \rangle = \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} x_3 \\ &= \left[\frac{\gamma_1 \gamma_2 m k_1^{\frac{m}{1-\delta}}}{1-2\delta} [x_1]^{\frac{1+2\delta}{1-2\delta}} \left(\gamma_1 k_1^{\frac{m}{1-\delta}} |x_1|^{\frac{2}{1-2\delta}} + \frac{1-\delta}{2} |x_2|^{\frac{2}{1-\delta}} \right)^{\frac{m-2}{2}} \right. \\ &\quad + \gamma_2 k_1^{\frac{m-1+\delta}{1-\delta}} \left(\frac{m-1+\delta}{1-2\delta} \right) |x_1|^{\frac{m-2+3\delta}{1-2\delta}} x_2 \\ &\quad + \frac{m k_2^2 k_1^{\frac{1}{1-\delta}}}{2(1-2\delta)} \left(\frac{1}{2} k_2^2 \left| [x_2]^{\frac{1}{1-\delta}} + k_1^{\frac{1}{1-\delta}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta}} \right|^2 + \frac{1}{2} |x_3|^2 \right)^{\frac{m-2}{2}} \\ &\quad \left. \left([x_2]^{\frac{1}{1-\delta}} + k_1^{\frac{1}{1-\delta}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta}} \right) |x_1|^{\frac{2\delta}{1-2\delta}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_2^{m-1} k_1^{\frac{1}{1-\delta}} (m-1)}{1-2\delta} \left| [x_2]^{\frac{1}{1-\delta}} + k_1^{\frac{1}{1-\delta}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta}} \right|^{m-2} |x_1|^{\frac{2\delta}{1-2\delta}} x_3 \right] x_2 \\ &+ \left[\frac{\gamma_2 m}{2} \left(\gamma_1 k_1^{\frac{m}{1-\delta}} |x_1|^{\frac{2}{1-2\delta}} + \frac{1-\delta}{2} |x_2|^{\frac{2}{1-\delta}} \right)^{\frac{m-2}{2}} [x_2]^{\frac{1+\delta}{1-\delta}} + \gamma_2 k_1^{\frac{m-1+\delta}{1-\delta}} [x_1]^{\frac{m-1+\delta}{1-2\delta}} \right. \\ &\quad + \frac{m k_1^2}{2(1-\delta)} \left(\frac{1}{2} k_2^2 \left| [x_2]^{\frac{1}{1-\delta}} + k_1^{\frac{1}{1-\delta}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta}} \right|^2 + \frac{1}{2} |x_3|^2 \right)^{\frac{m-2}{2}} \\ &\quad \left. \left([x_2]^{\frac{1}{1-\delta}} + k_1^{\frac{1}{1-\delta}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta}} \right) |x_2|^{\frac{\delta}{1-\delta}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_2^{m-1} (m-1)}{1-\delta} \left| [x_2]^{\frac{1}{1-\delta}} + k_1^{\frac{1}{1-\delta}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta}} \right|^{m-2} |x_2|^{\frac{\delta}{1-\delta}} x_3 \right] x_3, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned}
L_g V(x) &= \langle \partial V(x), g(x) \rangle = \frac{\partial V(x)}{\partial x_3} \\
&= \left(\frac{m}{2}\right) \left(\frac{1}{2} k_2^2 \left[|x_2|^{\frac{1}{1-\delta}} + k_1^{\frac{1}{1-\delta}} |x_1|^{\frac{1}{1-2\delta}} \right]^2 + \frac{1}{2} |x_3|^2 \right)^{\frac{m-2}{2}} x_3 \\
&\quad + k_2^{m-1} \left[|x_2|^{\frac{1}{1-\delta}} + k_1^{\frac{1}{1-\delta}} |x_1|^{\frac{1}{1-2\delta}} \right]^{m-1}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Observación 4.1. No es posible (en general) resolver explícitamente la ecuación $L_g V(x^*) = 0$ respecto a x_3^* para verificar (4.9), por lo que se analiza un caso particular del problema seleccionando $m = 2$, ya que para este valor si es posible encontrar una solución explícita de $L_g V(x^*) = 0$.

4.1.2.2. Caso Particular

Considérese el caso en el que $m = 2$, por lo que (4.10) y (4.11) adquieren la forma

$$\begin{aligned}
L_f V(x) &= \langle \partial V(x), f(x) \rangle = \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} x_3 \\
&= \frac{2\gamma_1 \gamma_2 k_1^{\frac{2}{1-\delta}}}{1-2\delta} |x_1|^{\frac{1+2\delta}{1-2\delta}} x_2 + \gamma_2 k_1^{\frac{1+\delta}{1-\delta}} \left(\frac{1+\delta}{1-2\delta} \right) |x_1|^{\frac{3\delta}{1-2\delta}} x_2^2 \\
&\quad + \gamma_2 \left(|x_2|^{\frac{1+\delta}{1-\delta}} + k_1^{\frac{1+\delta}{1-\delta}} |x_1|^{\frac{1+\delta}{1-2\delta}} \right) x_3 \\
&\quad + k_2 \left[k_2 \left(|x_2|^{\frac{1}{1-\delta}} + k_1^{\frac{1}{1-\delta}} |x_1|^{\frac{1}{1-2\delta}} \right) + x_3 \right] \left[\frac{k_1^{\frac{1}{1-\delta}}}{1-2\delta} |x_1|^{\frac{2\delta}{1-2\delta}} x_2 + \frac{1}{1-\delta} |x_2|^{\frac{\delta}{1-\delta}} x_3 \right],
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
L_g V(x) &= \langle \partial V(x), g(x) \rangle = \frac{\partial V(x)}{\partial x_3} \\
&= x_3 + k_2 \left(|x_2|^{\frac{1}{1-\delta}} + k_1^{\frac{1}{1-\delta}} |x_1|^{\frac{1}{1-2\delta}} \right).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Verificando (4.9), despejando x_3^* de (4.13), calculando los puntos donde $L_g V = 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
x_3^* + k_2 \left(|x_2^*|^{\frac{1}{1-\delta}} + k_1^{\frac{1}{1-\delta}} |x_1^*|^{\frac{1}{1-2\delta}} \right) &= 0 \\
x_3^* &= -k_2 \left(|x_2^*|^{\frac{1}{1-\delta}} + k_1^{\frac{1}{1-\delta}} |x_1^*|^{\frac{1}{1-2\delta}} \right),
\end{aligned} \tag{4.14}$$

sustituyendo (4.14) en (4.12), se obtiene la expresión

$$L_f V(x^*)|_{S_g} = -\epsilon(x^*) + \theta(x^*) \tag{4.15}$$

con

$$\epsilon(x^*) = k_2 \gamma_2 \left([x_2^*]^{\frac{1+\delta}{1-\delta}} + k_1^{\frac{1+\delta}{1-\delta}} [x_1^*]^{\frac{1+\delta}{1-2\delta}} \right) \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta}} + k_1^{\frac{1}{1-\delta}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta}} \right) \quad (4.16)$$

$$\theta(x^*) = \frac{2\gamma_1 \gamma_2 k_1^{\frac{2}{1-\delta}}}{1-2\delta} [x_1^*]^{\frac{1+2\delta}{1-2\delta}} x_2^* + \gamma_2 k_1^{\frac{1+\delta}{1-\delta}} \left(\frac{1+\delta}{1-2\delta} \right) |x_1^*|^{\frac{3\delta}{1-2\delta}} x_2^{*2}. \quad (4.17)$$

Note que el 1^{er} término de (4.15) es no positivo y se desvanece en el conjunto $S_1 \triangleq \left\{ x_2^* = -k_1 [x_1^*]^{\frac{1-\delta}{1-2\delta}} \right\}$, por lo que al evaluar en $V(x)$ dicho conjunto se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} L_f V(x_1^*)|_{S_{g,1}} &= \frac{2\gamma_1 \gamma_2 k_1^{\frac{2}{1-\delta}}}{1-2\delta} [x_1^*]^{\frac{1+2\delta}{1-2\delta}} \left(-k_1 [x_1^*]^{\frac{1-\delta}{1+2\delta}} \right) \\ &\quad + \gamma_2 k_1^{\frac{1+\delta}{1-\delta}} \left(\frac{1+\delta}{1-2\delta} \right) |x_1^*|^{\frac{3\delta}{1-2\delta}} \left(-k_1 [x_1^*]^{\frac{1-\delta}{1+2\delta}} \right)^2 \\ &= -\frac{2\gamma_1 \gamma_2 k_1^{\frac{2}{1-\delta}+1}}{1-2\delta} |x_1^*|^{\frac{1+2\delta}{1-2\delta} + \frac{1-\delta}{1-2\delta}} + \gamma_2 k_1^{\frac{1+\delta}{1-\delta}+2} \left(\frac{1+\delta}{1-2\delta} \right) |x_1^*|^{\frac{3\delta}{1-2\delta} + \frac{2(1-\delta)}{1-2\delta}} \\ &= -\frac{\gamma_2 k_1^{\frac{3-\delta}{1-\delta}}}{1-2\delta} \underbrace{[2\gamma_1 - (1+\delta)]}_{>0} |x_1^*|^{\frac{2+\delta}{1-2\delta}}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

que en conjunto con el *Lema 2.3* permite garantizar que (4.9) se satisface si $\gamma_1 > \frac{1+\delta}{2}$, demostrando así que $V(x)$ es una F.L.C Homogénea para el sistema (4.1). ■

4.1.2.3. Controlador Homogéneo

Analizando la homogeneidad de (4.12) y (4.13) para definir la función de control homogénea que estabilizará el origen del sistema (4.1), recordando que $r_1 = 1 - 2\delta$, $r_2 = 1 - \delta$ y $r_3 = 1$, se tiene

$$\begin{aligned} L_f V(x) &= \langle \partial V(x), f(x) \rangle = \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} x_3 \\ &= \lambda^{2+\delta} \left\{ \frac{2\gamma_1 \gamma_2 k_1^{\frac{2}{1-\delta}}}{1-2\delta} [x_1]^{\frac{1+2\delta}{1-2\delta}} x_2 + \gamma_2 k_1^{\frac{1+\delta}{1-\delta}} \left(\frac{1+\delta}{1-2\delta} \right) |x_1|^{\frac{3\delta}{1-2\delta}} x_2^2 \right. \\ &\quad + \gamma_2 \left([x_2]^{\frac{1+\delta}{1-\delta}} + k_1^{\frac{1+\delta}{1-\delta}} [x_1]^{\frac{1+\delta}{1-2\delta}} \right) x_3 \\ &\quad \left. + k_2 \left[k_2 \left([x_2]^{\frac{1}{1-\delta}} + k_1^{\frac{1}{1-\delta}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta}} \right) + x_3 \right] \left[\frac{k_1^{\frac{1}{1-\delta}}}{1-2\delta} |x_1|^{\frac{2\delta}{1-2\delta}} x_2 + \frac{1}{1-\delta} |x_2|^{\frac{\delta}{1-\delta}} x_3 \right] \right\}, \end{aligned}$$

4. CONTROLADORES BI-HOMOGÉNEOS
SISTEMA DE ORDEN 3

$$\begin{aligned} L_g V(x) &= \langle \partial V(x), g(x) \rangle = \frac{\partial V(x)}{\partial x_3} \\ &= \lambda^1 \left\{ x_3 + k_2 \left([x_2]^{\frac{1}{1-\delta}} + k_1^{\frac{1}{1-\delta}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta}} \right) \right\}, \end{aligned}$$

por lo que $L_f V(x)$ es homogéneo de grado $2 + \delta$ y $L_g V(x)$ es homogéneo de grado 1.

Considerando el grado de homogeneidad de $L_g V(x)$ y recordando las restricciones dadas por (4.2), se diseña un controlador homogéneo $u = \phi(x)$ de grado $r_4 = 1 + \delta$, definido como

$$\phi(x) = -k_3 [L_g V(x)]^{1+\delta} = -k_3 \left[x_3 + k_2 \left([x_2]^{\frac{1}{1-\delta}} + k_1^{\frac{1}{1-\delta}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta}} \right) \right]^{1+\delta}. \quad (4.19)$$

Teorema 4.2. (4.3) con $m = 2$ es una F.L Homogénea para el sistema (4.1) en lazo cerrado aplicada la ley de control (4.19) con $k_3 > 0$ y $k_2 > 0$ suficientemente grandes, además de $\gamma_1 > \frac{1+\delta}{2}$, ya que satisface la Definición 2.1, es decir cumple

$$\dot{V} = L_f V(x) + L_g V(x)\phi(x) < 0, \quad \forall x \neq 0. \quad \triangle \quad (4.20)$$

Corolario 4.1. El controlador homogéneo (4.19) estabiliza asintóticamente, exponencialmente o en tiempo finito el origen del sistema (4.1), dependiendo del valor de δ , al satisfacer el Corolario 2.1. \triangle

Prueba 4.2. Verificando (4.20), se reescribe $\dot{V}(x, \phi)$ como

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \phi) &= -k_3 \left| x_3 + k_2 \left([x_2]^{\frac{1}{1-\delta}} + k_1^{\frac{1}{1-\delta}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta}} \right) \right|^{2+\delta} + \frac{2\gamma_1 \gamma_2 k_1^{\frac{2}{1-\delta}}}{1-2\delta} [x_1]^{\frac{1+2\delta}{1-2\delta}} x_2 \\ &\quad + \gamma_2 k_1^{\frac{1+\delta}{1-\delta}} \left(\frac{1+\delta}{1-2\delta} \right) |x_1|^{\frac{3\delta}{1-2\delta}} x_2^2 + \gamma_2 \left([x_2]^{\frac{1+\delta}{1-\delta}} + k_1^{\frac{1+\delta}{1-\delta}} [x_1]^{\frac{1+\delta}{1-2\delta}} \right) x_3 \\ &\quad + k_2 \left[k_2 \left([x_2]^{\frac{1}{1-\delta}} + k_1^{\frac{1}{1-\delta}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta}} \right) + x_3 \right] \left[\frac{k_1^{\frac{1}{1-\delta}}}{1-2\delta} |x_1|^{\frac{2\delta}{1-2\delta}} x_2 + \frac{1}{1-\delta} |x_2|^{\frac{\delta}{1-\delta}} x_3 \right]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Note que el 1^{er} término de (4.21) es no positivo y se desvanece en el conjunto $S_g \triangleq \left\{ x_2^* = -k_2 \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta}} + k_1^{\frac{1}{1-\delta}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta}} \right) \right\}$, por lo que al evaluar en $\dot{V}(x, \phi)$ dicho conjunto se obtiene la expresión (4.15) descrita como

$$\dot{V}(x, \phi)|_{S_g} = L_f V(x^*)|_{S_g} = -\epsilon(x^*) + \theta(x^*)$$

con

$$\begin{aligned}\epsilon(x^*) &= k_2 \gamma_2 \left([x_2^*]^{\frac{1+\delta}{1-\delta}} + k_1^{\frac{1+\delta}{1-\delta}} [x_1^*]^{\frac{1+\delta}{1-2\delta}} \right) \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta}} + k_1^{\frac{1}{1-\delta}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta}} \right) \\ \theta(x^*) &= \frac{2\gamma_1 \gamma_2 k_1^{\frac{2}{1-\delta}}}{1-2\delta} [x_1^*]^{\frac{1+2\delta}{1-2\delta}} x_2^* + \gamma_2 k_1^{\frac{1+\delta}{1-\delta}} \left(\frac{1+\delta}{1-2\delta} \right) |x_1^*|^{\frac{3\delta}{1-2\delta}} x_2^{*2}.\end{aligned}$$

Note de igual forma que el 1^{er} término de dicha expresión es no positivo y se desvanece en el conjunto $S_1 \triangleq \{x_2^* = -k_1 [x_1^*]^{\frac{1-\delta}{1-2\delta}}\}$, por lo que al evaluar en $\dot{V}(x, \phi)|_{S_g}$ dicho conjunto se obtiene la expresión (4.18), es decir

$$\dot{V}(x, \phi)|_{S_{g,1}} = L_f V(x_1^*)|_{S_{g,1}} = -\frac{\gamma_2 k_1^{\frac{3-\delta}{1-\delta}}}{1-2\delta} \underbrace{[2\gamma_1 - (1+\delta)]}_{>0} |x_1^*|^{\frac{2+\delta}{1-2\delta}},$$

que en conjunto con el *Lema 2.3* permite garantizar que $\dot{V}(x, \phi)|_{S_{g,1}} < 0$ si se selecciona $k_3 > 0$ y $k_2 > 0$ suficientemente grandes, además de $\gamma_1 > \frac{1+\delta}{2}$. De esta forma se concluye que $V(x)$ es una Función de Lyapunov Homogénea para el sistema (4.1) en lazo cerrado aplicado el controlador (4.19). ■

4.1.3. Diseño de Control Bi-homogéneo

4.1.3.1. Función de Lyapunov Bi-homogénea

Se propone como candidata a F.L.C. Bi-homogénea la función

$$V(x) = \mu_A V_o(x) + \mu_B V_\infty(x), \quad (4.22)$$

con $\mu_A \geq 0$, $\mu_B \geq 0$ y $\mu_A + \mu_B > 0$. Donde $V_o(x)$ y $V_\infty(x)$ son F.L.C Homogéneas de la forma (4.3), con parámetros

$$\begin{aligned}(\delta_o, r_{1o}, r_{2o}, r_{3o}, r_{4o}, m_o) &= (\delta_o, 1 - 2\delta_o, 1 - \delta_o, 1, 1 + \delta_o, m) \\ (\delta_\infty, r_{1\infty}, r_{2\infty}, r_{3\infty}, r_{4\infty}, m_\infty) &= (\delta_\infty, 1 - 2\delta_\infty, 1 - \delta_\infty, 1, 1 + \delta_\infty, m)\end{aligned}$$

por (4.2), donde se define a $m = m_o = m_\infty = 2$ para poder encontrar una solución explícita de la ecuación $L_g V(x^*) = 0$ respecto a x_3^* (contemplando (4.8)), considerando a su vez a $\frac{1}{2} > \delta_\infty > \delta_o \geq 0$ por suposición (contemplando (4.2) y (4.8)).

Teorema 4.3. (4.22) es una F.L.C Bi-homogénea para el sistema (4.1), ya que satisface la Definición 2.2, es decir cumple

$$\forall \{x^* \neq 0 \mid \underbrace{\mu_A L_g V_o + \mu_B L_g V_\infty}_{L_g V(x^*)=0} = 0\} \Rightarrow \dot{V}(x^*) = \underbrace{\mu_A L_f V_o + \mu_B L_f V_\infty}_{L_f V(x^*)} < 0. \quad \triangle \quad (4.23)$$

4. CONTROLADORES BI-HOMOGÉNEOS SISTEMA DE ORDEN 3

Prueba 4.3. Analizando la homogeneidad de (4.22), suponiendo (por simplicidad) que $m_\infty > m_o$, recordando que $V_o(x)$ presenta a $r_{1o} = 1 - 2\delta_o$, $r_{2o} = 1 - \delta_o$ y $r_{3o} = 1$; considerando además que $V_\infty(x)$ presenta a $r_{1\infty} = 1 - 2\delta_\infty$, $r_{2\infty} = 1 - \delta_\infty$ y $r_{3\infty} = 1$, se tiene

$$\begin{aligned}
V(x) &= \mu_A V_o(x) + \mu_B V_\infty(x) \\
&= \mu_A \left\{ \gamma_{2o} \left[\left(\gamma_{1o} k_{1o}^{\frac{m_o}{1-\delta_o}} |\lambda^{1-2\delta_o} x_1|^{\frac{2}{1-2\delta_o}} + \frac{1-\delta_o}{2} |\lambda^{1-\delta_o} x_2|^{\frac{2}{1-\delta_o}} \right)^{\frac{m_o}{2}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + k_{1o}^{\frac{m_o-1+\delta_o}{1-\delta_o}} [\lambda^{1-2\delta_o} x_1]^{\frac{m_o-1+\delta_o}{1-2\delta_o}} (\lambda^{1-\delta_o} x_2) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{2} k_{2o}^2 \left| [\lambda^{1-\delta_o} x_2]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [\lambda^{1-2\delta_o} x_1]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right|^2 + \frac{1}{2} |\lambda x_3|^2 \right)^{\frac{m_o}{2}} \right. \\
&\quad \left. + k_{2o}^{m_o-1} \left[[\lambda^{1-\delta_o} x_2]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [\lambda^{1-2\delta_o} x_1]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right]^{m_o-1} (\lambda x_3) \right\} \\
&+ \mu_B \left\{ \gamma_{2\infty} \left[\left(\gamma_{1\infty} k_{1\infty}^{\frac{m_\infty}{1-\delta_\infty}} |\lambda^{1-2\delta_\infty} x_1|^{\frac{2}{1-2\delta_\infty}} + \frac{1-\delta_\infty}{2} |\lambda^{1-\delta_\infty} x_2|^{\frac{2}{1-\delta_\infty}} \right)^{\frac{m_\infty}{2}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + k_{1\infty}^{\frac{m_\infty-1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} [\lambda^{1-2\delta_\infty} x_1]^{\frac{m_\infty-1+\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} (\lambda^{1-\delta_\infty} x_2) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{2} k_{2\infty}^2 \left| [\lambda^{1-\delta_\infty} x_2]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [\lambda^{1-2\delta_\infty} x_1]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right|^2 + \frac{1}{2} |\lambda x_3|^2 \right)^{\frac{m_\infty}{2}} \right. \\
&\quad \left. + k_{2\infty}^{m_\infty-1} \left[[\lambda^{1-\delta_\infty} x_2]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [\lambda^{1-2\delta_\infty} x_1]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right]^{m_\infty-1} (\lambda x_3) \right\} \\
&= \mu_A [\lambda^{m_o} \gamma_{2o} V_{1o}(x) + \lambda^{m_o} W_{2o}(x)] + \mu_B [\lambda^{m_\infty} \gamma_{2\infty} V_{1\infty}(x) + \lambda^{m_\infty} W_{2\infty}(x)] \\
&= \underbrace{\lambda^{m_o} \mu_A [\gamma_{2o} V_{1o}(x) + W_{2o}(x)]}_{(r_{1o}, r_{2o}, r_{3o})\text{-Homogéneo de grado } m_o} + \underbrace{\lambda^{m_\infty} \mu_B [\gamma_{2\infty} V_{1\infty}(x) + W_{2\infty}(x)]}_{(r_{1\infty}, r_{2\infty}, r_{3\infty})\text{-Homogéneo de grado } m_\infty},
\end{aligned}$$

lo cual permite garantizar que $V(x) \approx V_o(x)$ en una vecindad cercana a cero y $V(x) \approx V_\infty(x)$ en una vecindad cercana a infinito, ya que $V_o(x)$ presenta potencias más pequeñas que $V_\infty(x)$. Es así como se demuestra que $V(x)$ es una función bi-homogénea de grado m_o/m_∞ .

Definiendo $m = m_o = m_\infty = 2$, tomando la derivada de (4.22) a lo largo de las trayectorias del sistema (4.1), se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \mu_A \dot{V}_o(x) + \mu_B \dot{V}_\infty(x) \\ \dot{V}(x) &= \mu_A (L_f V_o(x) + L_g V_o(x)u) + \mu_B (L_f V_\infty(x) + L_g V_\infty(x)u) \\ \dot{V}(x) &= \underbrace{(\mu_A L_f V_o(x) + \mu_B L_f V_\infty(x))}_{L_f V(x)} + \underbrace{(\mu_A L_g V_o(x) + \mu_B L_g V_\infty(x))}_{L_g V(x)} u,\end{aligned}\quad (4.24)$$

con

$$\begin{aligned}L_f V(x) &= \mu_A \left\{ \frac{2\gamma_{1o}\gamma_{2o}k_{1o}^{\frac{2}{1-\delta_o}}}{1-2\delta_o} [x_1]^{\frac{1+2\delta_o}{1-2\delta_o}} x_2 + \gamma_{2o}k_{1o}^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} \left(\frac{1+\delta_o}{1-2\delta_o} \right) |x_1|^{\frac{3\delta_o}{1-2\delta_o}} x_2^2 \right. \\ &\quad + \gamma_{2o} \left([x_2]^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} [x_1]^{\frac{1+\delta_o}{1-2\delta_o}} \right) x_3 \\ &\quad + k_{2o} \left[k_{2o} \left([x_2]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) + x_3 \right] \\ &\quad \left. \left[\frac{k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}}}{1-2\delta_o} |x_1|^{\frac{2\delta_o}{1-2\delta_o}} x_2 + \frac{1}{1-\delta_o} |x_2|^{\frac{\delta_o}{1-\delta_o}} x_3 \right] \right\} \\ &\quad + \mu_B \left\{ \frac{2\gamma_{1\infty}\gamma_{2\infty}k_{1\infty}^{\frac{2}{1-\delta_\infty}}}{1-2\delta_\infty} [x_1]^{\frac{1+2\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} x_2 + \gamma_{2\infty}k_{1\infty}^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} \left(\frac{1+\delta_\infty}{1-2\delta_\infty} \right) |x_1|^{\frac{3\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} x_2^2 \right. \\ &\quad + \gamma_{2\infty} \left([x_2]^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} [x_1]^{\frac{1+\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} \right) x_3 \\ &\quad + k_{2\infty} \left[k_{2\infty} \left([x_2]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right) + x_3 \right] \\ &\quad \left. \left[\frac{k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}}}{1-2\delta_\infty} |x_1|^{\frac{2\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} x_2 + \frac{1}{1-\delta_\infty} |x_2|^{\frac{\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} x_3 \right] \right\} \\ L_g V(x) &= (\mu_A + \mu_B)x_3 + \mu_A k_{2o} \left([x_2]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) \\ &\quad + \mu_B k_{2\infty} \left([x_2]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right).\end{aligned}\quad (4.26)$$

4. CONTROLADORES BI-HOMOGÉNEOS SISTEMA DE ORDEN 3

Calculando los valores de x_3^* donde $L_g V(x^*) = 0$, se obtiene la superficie mostrada en la *Fig 4.1*, representada por la expresión

$$x_3^* = - \left[\frac{\mu_A k_{2o}}{\mu_A + \mu_B} \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) + \frac{\mu_B k_{2\infty}}{\mu_A + \mu_B} \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right) \right]. \quad (4.27)$$

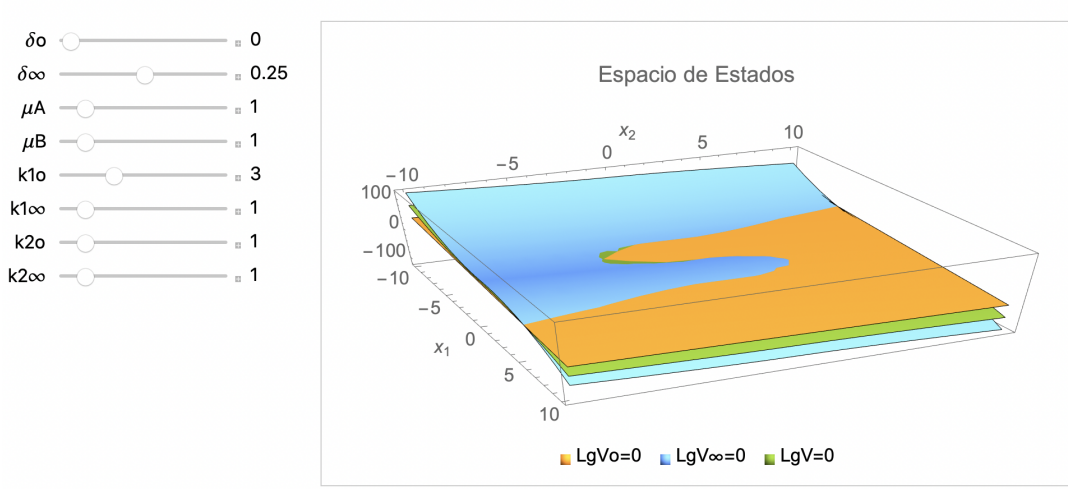


Figura 4.1: Muestra los valores de (x^*) donde $L_g V(x^*) = 0$.

A partir de (4.24), se evalúa en (4.25) el conjunto (4.27), obteniendo la expresión

$$\begin{aligned} L_f V(x^*)|_{S_g} = & \frac{2\mu_A \gamma_{1o} \gamma_{2o} k_{1o}^{\frac{2}{1-\delta_o}}}{1-2\delta_o} [x_1^*]^{\frac{1+2\delta_o}{1-2\delta_o}} x_2^* + \mu_A \gamma_{2o} k_{1o}^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} \left(\frac{1+\delta_o}{1-2\delta_o} \right) |x_1^*|^{\frac{3\delta_o}{1-2\delta_o}} x_2^{*2} \\ & - \frac{\mu_A^2 \gamma_{2o} k_{2o}}{\mu_A + \mu_B} \left([x_2^*]^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} [x_1^*]^{\frac{1+\delta_o}{1-2\delta_o}} \right) \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) \\ & - \frac{\mu_A \mu_B \gamma_{2o} k_{2\infty}}{\mu_A + \mu_B} \left([x_2^*]^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} [x_1^*]^{\frac{1+\delta_o}{1-2\delta_o}} \right) \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right) \\ & + \mu_A k_{2o} \left[k_{2o} \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) \left(1 - \frac{\mu_A}{\mu_A + \mu_B} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{\mu_B k_{2\infty}}{\mu_A + \mu_B} \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right) \right] \left[\frac{k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}}}{1-2\delta_o} |x_1^*|^{\frac{2\delta_o}{1-2\delta_o}} x_2^* \right. \\ & \quad \left. - \frac{\mu_A k_{2o}}{(\mu_A + \mu_B)(1-\delta_o)} \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) |x_2^*|^{\frac{\delta_o}{1-\delta_o}} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\mu_B k_{2\infty}}{(\mu_A + \mu_B)(1-\delta_\infty)} \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right) |x_2^*|^{\frac{\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2\mu_B\gamma_{1\infty}\gamma_{2\infty}k_{1\infty}^{\frac{2}{1-\delta_\infty}}}{1-2\delta_\infty} [x_1^*]^{\frac{1+2\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} x_2^* + \mu_B\gamma_{2\infty}k_{1\infty}^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} \left(\frac{1+\delta_\infty}{1-2\delta_\infty} \right) |x_1^*|^{\frac{3\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} x_2^{*2} \\
 & - \frac{\mu_A\mu_B\gamma_{2\infty}k_{2o}}{\mu_A+\mu_B} \left([x_2^*]^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1+\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} \right) \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right) \\
 & - \frac{\mu_B^2\gamma_{2\infty}k_{2\infty}}{\mu_A+\mu_B} \left([x_2^*]^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1+\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} \right) \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right) \\
 & + \mu_B k_{2\infty} \left[k_{2\infty} \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right) \left(1 - \frac{\mu_B}{\mu_A+\mu_B} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\mu_A k_{2o}}{\mu_A+\mu_B} \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) \right] \left[\frac{k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}}}{1-2\delta_\infty} |x_1^*|^{\frac{2\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} x_2^* \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\mu_A k_{2o}}{(\mu_A+\mu_B)(1-\delta_\infty)} \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) |x_2^*|^{\frac{\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\mu_B k_{2\infty}}{(\mu_A+\mu_B)(1-\delta_\infty)} \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right) |x_2^*|^{\frac{\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} \right], \quad (4.28)
 \end{aligned}$$

la cual puede desarrollarse y reescribirse como

$$\begin{aligned}
 L_f V(x^*)|_{S_g} & = \underbrace{-\gamma_1(x^*)}_{\leq 0} + \underbrace{\alpha(x^*) + \beta(x^*) - \pi(x^*) - \epsilon(x^*)}_{\lambda_1(x^*)} \\
 & \quad - \underbrace{\gamma_2(x^*)}_{\leq 0} + \underbrace{\theta(x^*) + \omega(x^*) - \kappa(x^*)}_{\lambda_2(x^*)}
 \end{aligned} \quad (4.29)$$

con

$$\alpha(x^*) = \frac{2\mu_A\gamma_{1o}\gamma_{2o}k_{1o}^{\frac{2}{1-\delta_o}}}{1-2\delta_o} [x_1^*]^{\frac{1+2\delta_o}{1-2\delta_o}} x_2^*, \quad (4.30)$$

$$\beta(x^*) = \mu_A\gamma_{2o}k_{1o}^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} \left(\frac{1+\delta_o}{1-2\delta_o} \right) |x_1^*|^{\frac{3\delta_o}{1-2\delta_o}} x_2^{*2}, \quad (4.31)$$

$$\gamma_1(x^*) = \frac{\mu_A^2\gamma_{2o}k_{2o}}{\mu_A+\mu_B} \left([x_2^*]^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} [x_1^*]^{\frac{1+\delta_o}{1-2\delta_o}} \right) \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right), \quad (4.32)$$

$$\epsilon(x^*) = \frac{\mu_A\mu_B\gamma_{2o}k_{2\infty}}{\mu_A+\mu_B} \left([x_2^*]^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} [x_1^*]^{\frac{1+\delta_o}{1-2\delta_o}} \right) \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right), \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned}
 \pi(x^*) & = \left(\frac{\mu_A\mu_B}{\mu_A+\mu_B} \right) \left(\zeta(x^*)\eta(x^*)|x_2^*| + \rho(x^*)\tau(x^*)|x_1^*|^{\frac{1}{1-2\delta_o}} + \zeta(x^*)\tau(x^*)x_2^* \operatorname{sign}(x_1^*) \right. \\
 & \quad \left. + \rho(x^*)\eta(x^*)|x_1^*|^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \operatorname{sign}(x_2^*) \right), \quad (4.34)
 \end{aligned}$$

4. CONTROLADORES BI-HOMOGÉNEOS
SISTEMA DE ORDEN 3

$$\zeta(x^*) = \left[\left(\frac{k_{2\infty}}{1-\delta_\infty} |x_2^*|^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} - \frac{k_{2o}}{1-\delta_o} |x_2^*|^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right) \left(\frac{\mu_B k_{2\infty} |x_2^*|^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + \mu_A k_{2o} |x_2^*|^{\frac{1}{1-\delta_o}}}{\mu_A + \mu_B} \right) |x_2^*|^{\frac{2(\delta_o-1)}{1-\delta_o}} \right. \\ \left. - \left(\frac{k_{2\infty} k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}}}{1-2\delta_\infty} |x_1^*|^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} - \frac{k_{2o} k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}}}{1-2\delta_o} |x_1^*|^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) |x_1^*|^{\frac{2\delta_o-1}{1-2\delta_o}} \right], \quad (4.35)$$

$$\eta(x^*) = \left[k_{2\infty} |x_2^*|^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} - k_{2o} |x_2^*|^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right], \quad (4.36)$$

$$\rho(x^*) = \left[\left(\frac{k_{2\infty}}{1-\delta_\infty} |x_2^*|^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} - \frac{k_{2o}}{1-\delta_o} |x_2^*|^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right) \left(|x_2^*|^{\frac{\delta_o-1}{1-\delta_o}} |x_1^*|^{-\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) \right. \\ \left. \left(\frac{\mu_B k_{2\infty} k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} |x_1^*|^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} + \mu_A k_{2o} k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} |x_1^*|^{\frac{1}{1-2\delta_o}}}{\mu_A + \mu_B} \right) \right], \quad (4.37)$$

$$\tau(x^*) = \left[k_{2\infty} k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} |x_1^*|^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} - k_{2o} k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} |x_1^*|^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right], \quad (4.38)$$

$$\theta(x^*) = \frac{2\mu_B \gamma_{1\infty} \gamma_{2\infty} k_{1\infty}^{\frac{2}{1-\delta_\infty}}}{1-2\delta_\infty} [x_1^*]^{\frac{1+2\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} x_2^*, \quad (4.39)$$

$$\omega(x^*) = \mu_B \gamma_{2\infty} k_{1\infty}^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} \left(\frac{1+\delta_\infty}{1-2\delta_\infty} \right) |x_1^*|^{\frac{3\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} x_2^{*2}, \quad (4.40)$$

$$\gamma_2(x^*) = \frac{\mu_B^2 \gamma_{2\infty} k_{2\infty}}{\mu_A + \mu_B} \left([x_2^*]^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1+\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1+\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} \right) \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right), \quad (4.41)$$

$$\kappa(x^*) = \frac{\mu_A \mu_B \gamma_{2\infty} k_{2o}}{\mu_A + \mu_B} \left([x_2^*]^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1+\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1+\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} \right) \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right). \quad (4.42)$$

Note que $\lambda_1(x^*)$ y $\gamma_1(x^*) \leq 0$ son funciones homogéneas de grado $2 + \delta_o$, así mismo note que $\lambda_2(x^*)$ y $\gamma_2(x^*) \leq 0$ son funciones homogéneas de grado $2 + \delta_\infty$; haciendo uso del *Lema 2.3*, se evalúan en $L_f V(x^*)|_{S_g}$ los conjuntos $S_{1o} = \{x_2^* = k_{1o} [x_1^*]^{\frac{1-\delta_o}{1-2\delta_o}}\}$ (donde $\gamma_1(x^*) = 0$) y $S_{1\infty} = \{x_2^* = k_{1\infty} [x_1^*]^{\frac{1-\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}}\}$ (donde $\gamma_2(x^*) = 0$), obteniendo la expresión reducida

$$L_f V|_{S_{g,1o,1\infty}} = -\mu_A \left\{ \underbrace{\frac{\gamma_{2o} k_{1o}^{\frac{3-\delta_o}{1-\delta_o}}}{1-2\delta_o} [2\gamma_{1o} - (1+\delta_o)]}_{C_o} + \underbrace{k_{2\infty} \left(\frac{\mu_B}{\mu_A + \mu_B} \right) v(x_1^*) |x_1^*|^{\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-2\delta_o)(1-\delta_\infty)}}}_{\nu(x_1^*)} \right\} |x_1^*|^{\frac{2+\delta_o}{1-2\delta_o}} \\ - \frac{\mu_B \gamma_{2\infty} k_{1\infty}^{\frac{3-\delta_\infty}{1-\delta_\infty}}}{1-2\delta_\infty} [2\gamma_{1\infty} - (1+\delta_\infty)] |x_1^*|^{\frac{2+\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} \quad (4.43)$$

con

$$\begin{aligned}
 v(x_1^*) = & \left[\left(\frac{\mu_B k_{2\infty}}{\mu_A + \mu_B} \right) \left(k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} |x_1^*|^{\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-2\delta_\infty)(1-\delta_\infty)}} - k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} \right) \right. \\
 & \left(\frac{k_{2\infty} k_{1o}^{\frac{\delta_\infty}{1-\delta_\infty}}}{1-\delta_\infty} |x_1^*|^{\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-2\delta_o)(1-\delta_\infty)}} - \frac{k_{2o} k_{1o}^{\frac{\delta_o}{1-\delta_o}}}{1-\delta_o} \right) |x_1^*|^{\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-2\delta_o)(1-\delta_\infty)}} \\
 & + k_{1o} \left(\frac{k_{2\infty} k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}}}{1-2\delta_\infty} |x_1^*|^{\frac{2(\delta_\infty - \delta_o)}{(1-2\delta_o)(1-2\delta_\infty)}} - \frac{k_{2o} k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}}}{1-2\delta_o} \right) \left. \right] \\
 & \left[k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} |x_1^*|^{\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-2\delta_\infty)(1-2\delta_o)(1-\delta_\infty)}} - k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} \right]. \tag{4.44}
 \end{aligned}$$

Recordando el *Teorema 4.3*, para que $L_f V(x_1^*)|_{S_{g,1o,1\infty}} < 0$, se debe de garantizar inicialmente que $k_{2o} > 0$ y $k_{2\infty} > 0$ sean seleccionadas suficientemente grandes, con $\gamma_{1o} > \frac{1+\delta_o}{2}$ y $\gamma_{1\infty} > \frac{1+\delta_\infty}{2}$, para posteriormente buscar satisfacer

$$C_o > \nu(x_1^*). \tag{4.45}$$

Estudiando a $\nu(x_1^*)$ para determinar si es posible garantizar (4.45), se recuperan las potencias de los elementos que componen dicha expresión, determinando sus términos dominantes, concluyendo que para valores pequeños de x_1^* cercanos a cero, los términos de menor orden son

$$v_o(x_1^*) = \left[k_{1o} \left(-\frac{k_{2o} k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}}}{1-2\delta_o} \right) \right] \left[-k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} \right] \tag{4.46}$$

y para valores grandes de x_1^* , los términos de mayor orden son

$$\begin{aligned}
 v_\infty(x_1^*) = & \left[\left(\frac{\mu_B k_{2\infty}}{\mu_A + \mu_B} \right) \left(k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} k_{1o}^{\frac{\delta_o - 1}{1-\delta_o}} |x_1^*|^{\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-2\delta_\infty)(1-2\delta_o)(1-\delta_\infty)}} \right) \left(\frac{k_{2\infty} k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}}}{1-\delta_\infty} |x_1^*|^{\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-2\delta_o)(1-\delta_\infty)}} \right) \right. \\
 & \left(|x_1^*|^{\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-2\delta_o)(1-\delta_\infty)}} \right) + k_{1o} \left(\frac{k_{2\infty} k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}}}{1-2\delta_\infty} |x_1^*|^{\frac{2(\delta_\infty - \delta_o)}{(1-2\delta_o)(1-2\delta_\infty)}} \right) \left. \right] \\
 & \left[k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} |x_1^*|^{\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-2\delta_\infty)(1-2\delta_o)(1-\delta_\infty)}} \right]. \tag{4.47}
 \end{aligned}$$

4. CONTROLADORES BI-HOMOGÉNEOS SISTEMA DE ORDEN 3

Analizando (4.45), considerando a (4.46), en el caso ($x_1^* \rightarrow 0$), se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{x_1^* \rightarrow 0} v_o(x_1^*) &= \frac{k_{2o} k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o} + \frac{1}{1-\delta_\infty} + 1}}{1 - 2\delta_o} > 0 \\ &\Downarrow \\ k_{2o} &> 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

que permite concluir, por definición de $k_{2o} > 0$, que (4.45) se satisface siempre para valores pequeños de x_1^* cercanos a cero, ya que $v(x_1^*) > 0$ para dichos valores.

Realizando el mismo análisis, en el caso ($x_1^* \rightarrow \pm\infty$), considerando a (4.47), se obtiene

$$\lim_{x_1^* \rightarrow \pm\infty} v_\infty(x_1^*) = k_{2\infty} k_{1\infty}^{\frac{2}{1-\delta_\infty}} \sigma(x_1^*) |x_1^*|^{\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-2\delta_\infty)(1-2\delta_o)(1-\delta_\infty)}} \quad (4.49)$$

con

$$\sigma(x_1^*) = \left[\frac{\mu_B k_{2\infty} k_{1\infty}^{\frac{\delta_\infty}{1-\delta_\infty}}}{(\mu_A + \mu_B)(1 - \delta_\infty)} |x_1^*|^{\frac{(\delta_\infty - \delta_o)(3-4\delta_o)}{(1-2\delta_\infty)(1-2\delta_o)(1-\delta_\infty)}} + \frac{k_{1o}}{1 - 2\delta_\infty} |x_1^*|^{\frac{2(\delta_\infty - \delta_o)}{(1-2\delta_o)(1-2\delta_\infty)}} \right]$$

por lo que

$$\lim_{x_1^* \rightarrow \pm\infty} v_\infty(x_1^*) = +\infty, \quad (4.50)$$

lo anterior permite concluir que (4.45) de igual forma siempre se satisface para valores grandes de x_1^* , ya que $v(x_1^*) > 0$ para dichos valores.

Es así como la función $v(x_1^*)$ cumple que:

- Es continua en todas partes.
- Sus límites son mayores a: $\lim_{x_1^* \rightarrow 0} v(x_1^*) > 0$ y $\lim_{x_1^* \rightarrow \pm\infty} v(x_1^*) > 0$, por (4.48) y (4.50).

La última condición (por continuidad) implica que en una vecindad (cerrada) cerca del origen $x_1^* \in [-\epsilon, \epsilon]$ y en una vecindad del infinito $x_1^* \in [\Omega, \infty)$ y $x_1^* \in (-\infty, -\Omega]$, la función $v(x_1^*) > 0$. Por lo que, en el compacto $[-\Omega, -\epsilon] \cup [\epsilon, \Omega]$, la función continua

$v(x_1^*)$ alcanza su mínimo valor, el cual no siempre es positivo, pero está alojado en una vecindad cercana al origen dependiente del valor de los parámetros: δ_o , δ_∞ , k_{1o} , $k_{1\infty}$, k_{2o} y $k_{2\infty}$, decrementado además su valor al ser producto de $|x_1^*|^{\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-2\delta_o)(1-\delta_\infty)}}$. El mínimo valor de $v(x_1^*)$ puede ser dominado por C_o seleccionando $\gamma_{1o} > 0$ y $\gamma_{2o} > 0$ suficientemente grandes, ya que dicho valor no depende de esos parámetros y C_o depende además de k_{1o} que tiene un mayor efecto sobre el mínimo valor de $v(x_1^*)$, garantizando así que (4.45) se satisface siempre $\forall \{x_1^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Por lo tanto se concluye que V es una F.L.C Bi-homogénea para el sistema (4.1).■

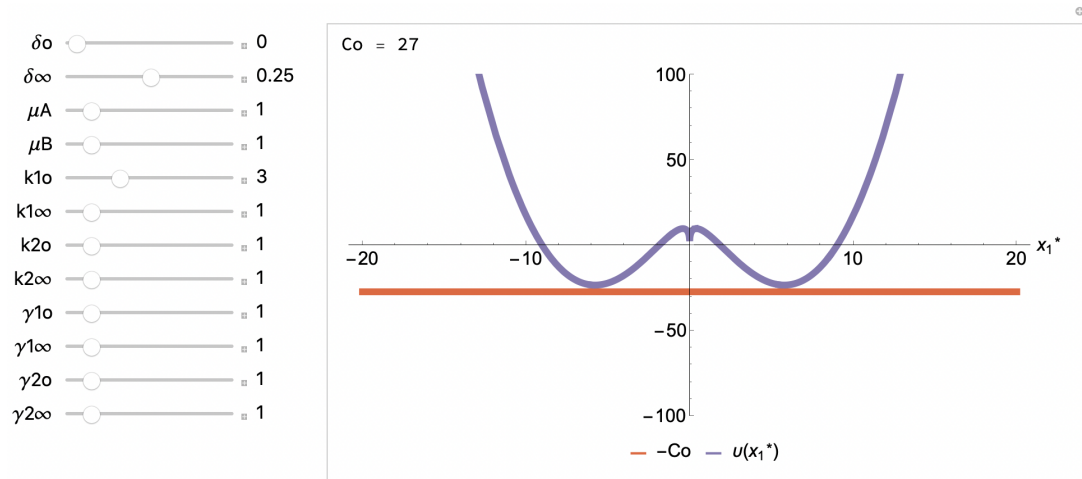


Figura 4.2: Muestra el comportamiento de la función $v(x_1^*)$ y el de la constante $-C_o$ (para efectos demostrativos).

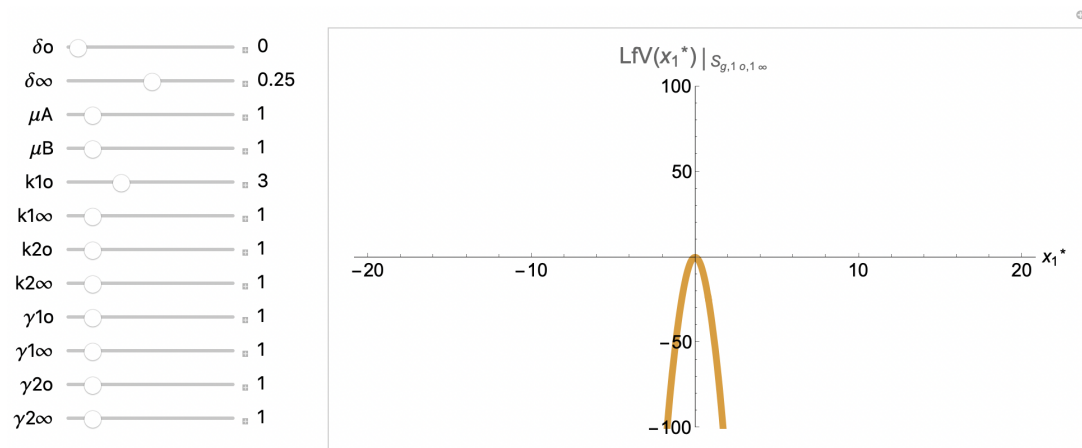


Figura 4.3: Muestra el comportamiento de $\dot{V}(x^*) = L_f V(x^*)|_{S_{g,1o,1\infty}}$ cerca del origen.

4.1.3.2. Controladores Bi-Homogéneos Polinomiales y Racionales

A partir de los controladores homogéneos diseñados por Cruz-Zavala and Moreno [6], se definen dos clases de controladores bi-homogéneos diferentes

$$\phi_P(x) = - \underbrace{k_{3o} [L_g V(x)]^{1+\delta_o}}_{\text{Control Local}} - \underbrace{k_{3\infty} [L_g V(x)]^{1+\delta_\infty}}_{\text{Control No Local}} \Rightarrow \text{Controlador Polinomial}, \quad (4.51)$$

$$\phi_R(x) = - \underbrace{k_{3o} \frac{L_g V(x)}{M_o(x)}}_{\text{Control Local}} - \underbrace{k_{3\infty} \frac{L_g V(x)}{M_\infty(x)}}_{\text{Control No Local}} \Rightarrow \text{Controlador Racional}, \quad (4.52)$$

donde, $k_{3o} > 0$ y $k_{3\infty} > 0$. $M_o(x)$ es una función positiva definida, continua y r_o -homogénea de grado $\delta_{M_o} = -\delta_o$ y $M_\infty(x)$ es una función positiva definida, continua y r_∞ -homogénea de grado $\delta_{M_\infty} = -\delta_\infty$, con

$$\begin{aligned} L_g V(x) = & (\mu_A + \mu_B)x_3 + \mu_A k_{2o} \left([x_2]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) \\ & + \mu_B k_{2\infty} \left([x_2]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right), \end{aligned} \quad (4.53)$$

donde $k_{2o} > 0$, $k_{2\infty} > 0$, $\gamma_{1o} > \frac{1+\delta_o}{2}$ y $\gamma_{2o} > 0$ deben ser seleccionadas suficientemente grandes, además de seleccionar $\gamma_{1\infty} > \frac{1+\delta_\infty}{2}$ para que (4.45) se pueda garantizar.

Observación 4.2. Las funciones de control (4.51) y (4.52), y sus respectivos sistemas en lazo cerrado resultantes, son homogéneos en el bi-límite ya que satisfacen la Definición 2.10.

Observación 4.3. Si se aplica el controlador (4.51) en el sistema (4.1), se puede recuperar

Controlador Local Homogéneo Polinomial de grado $\delta = 1 + \delta_o$

Si $k_{3\infty} = 0$ y $\mu_B = 0$, obteniendo

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.54)$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -k_{3o} [L_g V(x)]^{1+\delta_o} = -k_{3o} \left[\mu_A k_{2o} \left([x_2]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) + \mu_A x_3 \right]^{1+\delta_o}$$

que es homogéneo de grado δ_o (en lazo cerrado).

Controlador No Local Homogéneo Polinomial de grado $\delta = 1 + \delta_\infty$

Si $k_{3o} = 0$ y $\mu_A = 0$, obteniendo

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{4.55}$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -k_{3\infty} [L_g V(x)]^{1+\delta_\infty} = -k_{3\infty} \left[\mu_B k_{2\infty} \left([x_2]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right) + \mu_B x_3 \right]^{1+\delta_\infty}$$

que es homogéneo de grado δ_∞ (en lazo cerrado).

Observación 4.4. Si se aplica el controlador (4.52) en el sistema (4.1), se puede recuperar

Controlador Local Homogéneo Racional de grado $\delta = 1 + \delta_o$

Si $k_{3\infty} = 0$ y $\mu_B = 0$, obteniendo

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{4.56}$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -k_{3o} \frac{L_g V(x)}{M_o(x)} = -k_{3o} \left[\frac{\mu_A k_{2o} \left([x_2]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) + \mu_A x_3}{M_o(x)} \right]$$

que es homogéneo de grado δ_o (en lazo cerrado).

Controlador No Local Homogéneo Racional de grado $\delta = 1 + \delta_\infty$

Si $k_{3o} = 0$ y $\mu_A = 0$, obteniendo

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{4.57}$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -k_{3\infty} \frac{L_g V(x)}{M_\infty(x)} = -k_{3\infty} \left[\frac{\mu_B k_{2\infty} \left([x_2]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right) + \mu_B x_3}{M_\infty(x)} \right]$$

que es homogéneo de grado δ_∞ (en lazo cerrado).

4. CONTROLADORES BI-HOMOGÉNEOS
SISTEMA DE ORDEN 3

Teorema 4.4. (4.22) es una F.L Bi-Homogénea para el sistema (4.1) en lazo cerrado aplicada la función de control (4.51) con $k_{3o} > 0$, $k_{3\infty} > 0$, $k_{2o} > 0$, $k_{2\infty} > 0$, $\gamma_{1o} > \frac{1+\delta_o}{2}$ y $\gamma_{2o} > 0$ suficientemente grandes, además de $\gamma_{1\infty} > \frac{1+\delta_\infty}{2}$, ya que satisface el Teorema 2.1, es decir cumple

$$\dot{V}(x, \phi_P) = L_f V(x) - k_{3o} |L_g V(x)|^{2+\delta_o} - k_{3\infty} |L_g V(x)|^{2+\delta_\infty} < 0, \quad \forall x \neq 0. \quad \triangle \quad (4.58)$$

Prueba 4.4. Verificando (4.58), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \phi_P) = & \mu_A \left\{ \frac{2\gamma_{1o}\gamma_{2o}k_{1o}^{\frac{2}{1-\delta_o}}}{1-2\delta_o} [x_1]^{\frac{1+2\delta_o}{1-2\delta_o}} x_2 + \gamma_{2o}k_{1o}^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} \left(\frac{1+\delta_o}{1-2\delta_o} \right) |x_1|^{\frac{3\delta_o}{1-2\delta_o}} x_2^2 \right. \\ & + \gamma_{2o} \left([x_2]^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} [x_1]^{\frac{1+\delta_o}{1-2\delta_o}} \right) x_3 \\ & + k_{2o} \left[k_{2o} \left([x_2]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) + x_3 \right] \\ & \left. \left[\frac{k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}}}{1-2\delta_o} |x_1|^{\frac{2\delta_o}{1-2\delta_o}} x_2 + \frac{1}{1-\delta_o} |x_2|^{\frac{\delta_o}{1-\delta_o}} x_3 \right] \right\} \\ & + \mu_B \left\{ \frac{2\gamma_{1\infty}\gamma_{2\infty}k_{1\infty}^{\frac{2}{1-\delta_\infty}}}{1-2\delta_\infty} [x_1]^{\frac{1+2\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} x_2 + \gamma_{2\infty}k_{1\infty}^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} \left(\frac{1+\delta_\infty}{1-2\delta_\infty} \right) |x_1|^{\frac{3\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} x_2^2 \right. \\ & + \gamma_{2\infty} \left([x_2]^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} [x_1]^{\frac{1+\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} \right) x_3 \\ & + k_{2\infty} \left[k_{2\infty} \left([x_2]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right) + x_3 \right] \\ & \left. \left[\frac{k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}}}{1-2\delta_\infty} |x_1|^{\frac{2\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} x_2 + \frac{1}{1-\delta_\infty} |x_2|^{\frac{\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} x_3 \right] \right\} \\ & - k_{3o} \left| \mu_A k_{2o} \left([x_2]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) \right. \\ & \quad \left. + \mu_B k_{2\infty} \left([x_2]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right) + (\mu_A + \mu_B) x_3 \right|^{2+\delta_o} \\ & - k_{3\infty} \left| \mu_A k_{2o} \left([x_2]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) \right. \\ & \quad \left. + \mu_B k_{2\infty} \left([x_2]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right) + (\mu_A + \mu_B) x_3 \right|^{2+\delta_\infty}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Note que el 3^{er} y el 4^{to} término de (4.59) son no positivos y se desvanecen en el conjunto $S_g = \{L_g V(x^*) = 0\}$ (4.27), por lo que al evaluar (4.59) en dicho conjunto, se obtiene la expresión

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x, \phi_P)|_{S_g} = L_f V(x_1^*)|_{S_g} = & \underbrace{-k_{3o}|0|^{2+\delta_o} - k_{3\infty}|0|^{2+\delta_\infty}}_{=0} \tag{4.60} \\
 & + \frac{2\mu_A \gamma_{1o} \gamma_{2o} k_{1o}^{\frac{2}{1-\delta_o}}}{1-2\delta_o} [x_1^*]^{\frac{1+2\delta_o}{1-2\delta_o}} x_2^* + \mu_A \gamma_{2o} k_{1o}^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} \left(\frac{1+\delta_o}{1-2\delta_o} \right) |x_1^*|^{\frac{3\delta_o}{1-2\delta_o}} x_2^{*2} \\
 & - \frac{\mu_A^2 \gamma_{2o} k_{2o}}{\mu_A + \mu_B} \left([x_2^*]^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} [x_1^*]^{\frac{1+\delta_o}{1-2\delta_o}} \right) \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) \\
 & - \frac{\mu_A \mu_B \gamma_{2o} k_{2\infty}}{\mu_A + \mu_B} \left([x_2^*]^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} [x_1^*]^{\frac{1+\delta_o}{1-2\delta_o}} \right) \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right) \\
 & + \mu_A k_{2o} \left[k_{2o} \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) \left(1 - \frac{\mu_A}{\mu_A + \mu_B} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\mu_B k_{2\infty}}{\mu_A + \mu_B} \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right) \right] \left[\frac{k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}}}{1-2\delta_o} |x_1^*|^{\frac{2\delta_o}{1-2\delta_o}} x_2^* \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\mu_A k_{2o}}{(\mu_A + \mu_B)(1-\delta_o)} \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) |x_2^*|^{\frac{\delta_o}{1-\delta_o}} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\mu_B k_{2\infty}}{(\mu_A + \mu_B)(1-\delta_\infty)} \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right) |x_2^*|^{\frac{\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} \right] \\
 & + \frac{2\mu_B \gamma_{1\infty} \gamma_{2\infty} k_{1\infty}^{\frac{2}{1-\delta_\infty}}}{1-2\delta_\infty} [x_1^*]^{\frac{1+2\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} x_2^* + \mu_B \gamma_{2\infty} k_{1\infty}^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} \left(\frac{1+\delta_\infty}{1-2\delta_\infty} \right) |x_1^*|^{\frac{3\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} x_2^{*2} \\
 & - \frac{\mu_A \mu_B \gamma_{2\infty} k_{2o}}{\mu_A + \mu_B} \left([x_2^*]^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1+\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} \right) \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) \\
 & - \frac{\mu_B^2 \gamma_{2\infty} k_{2\infty}}{\mu_A + \mu_B} \left([x_2^*]^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1+\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} \right) \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right) \\
 & + \mu_B k_{2\infty} \left[k_{2\infty} \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right) \left(1 - \frac{\mu_B}{\mu_A + \mu_B} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\mu_A k_{2o}}{\mu_A + \mu_B} \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) \right] \left[\frac{k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}}}{1-2\delta_\infty} |x_1^*|^{\frac{2\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} x_2^* \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\mu_A k_{2o}}{(\mu_A + \mu_B)(1-\delta_\infty)} \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) |x_2^*|^{\frac{\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\mu_B k_{2\infty}}{(\mu_A + \mu_B)(1-\delta_\infty)} \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right) |x_2^*|^{\frac{\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} \right].
 \end{aligned}$$

4. CONTROLADORES BI-HOMOGÉNEOS SISTEMA DE ORDEN 3

Aplicando el *Lema 2.3* de forma recursiva, se puede demostrar que $\dot{V}(x, \phi_P)|_{S_g} < 0$ seleccionando inicialmente $k_{3o} > 0$ y $k_{3\infty} > 0$ suficientemente grandes, ya que de esta manera la expresión (4.60) puede reescribirse de la forma (4.29), para posteriormente ser evaluada en los conjuntos $S_{1o} = \{x_2^* = k_{1o}[x_1^*]^{\frac{1-\delta_o}{1-2\delta_o}}\}$ (donde $\gamma_1(x^*) = 0$) y $S_{1\infty} = \{x_2^* = k_{1\infty}[x_1^*]^{\frac{1-\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}}\}$ (donde $\gamma_2(x^*) = 0$), tras seleccionar a $k_{2o} > 0$ y $k_{2\infty} > 0$ suficientemente grandes, adquiriendo finalmente la forma (4.43)

$$\begin{aligned} L_f V(x_1^*)|_{S_{g,1o,1\infty}} = & \\ & - \mu_A \left\{ \underbrace{\frac{\gamma_{2o} k_{1o}^{\frac{3-\delta_o}{1-\delta_o}}}{1-2\delta_o} [2\gamma_{1o} - (1+\delta_o)]}_{C_o} + \underbrace{k_{2\infty} \left(\frac{\mu_B}{\mu_A + \mu_B} \right) v(x_1^*) |x_1^*|^{\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-2\delta_o)(1-\delta_\infty)}}}_{v(x_1^*)} \right\} |x_1^*|^{\frac{2+\delta_o}{1-2\delta_o}} \\ & - \frac{\mu_B \gamma_{2\infty} k_{1\infty}^{\frac{3-\delta_\infty}{1-\delta_\infty}}}{1-2\delta_\infty} [2\gamma_{1\infty} - (1+\delta_\infty)] |x_1^*|^{\frac{2+\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} v(x_1^*) = & \left[\left(\frac{\mu_B k_{2\infty}}{\mu_A + \mu_B} \right) \left(k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} |x_1^*|^{\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-2\delta_\infty)(1-2\delta_o)(1-\delta_\infty)}} - k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} \right) \right. \\ & \left(\frac{k_{2\infty} k_{1o}^{\frac{\delta_\infty}{1-\delta_\infty}}}{1-\delta_\infty} |x_1^*|^{\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-2\delta_o)(1-\delta_\infty)}} - \frac{k_{2o} k_{1o}^{\frac{\delta_o}{1-\delta_o}}}{1-\delta_o} \right) |x_1^*|^{\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-2\delta_o)(1-\delta_\infty)}} \\ & \left. + k_{1o} \left(\frac{k_{2\infty} k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}}}{1-2\delta_\infty} |x_1^*|^{\frac{2(\delta_\infty - \delta_o)}{(1-2\delta_o)(1-2\delta_\infty)}} - \frac{k_{2o} k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}}}{1-2\delta_o} \right) \right] \\ & \left[k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} |x_1^*|^{\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-2\delta_\infty)(1-2\delta_o)(1-\delta_\infty)}} - k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} \right], \end{aligned}$$

indicando que se debe garantizar (4.45) $\forall \{x_1^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ para que $L_f V(x_1^*)|_{S_{g,1o,1\infty}} < 0$.

Cabe mencionar que las condiciones que se requieren para que esto suceda ya han sido descritas en subsecciones previas, donde se requiere seleccionar $\gamma_{1\infty} > \frac{1+\delta_\infty}{2}$, y $\gamma_{1o} > \frac{1+\delta_o}{2}$ y $\gamma_{2o} > 0$ suficientemente grandes.

Lo anterior permite demostrar que $V(x)$ es una Función de Lyapunov Bi-homogénea para el sistema en lazo cerrado aplicado el controlador (4.51). ■

Teorema 4.5. (4.22) es una F.L Bi-Homogénea para el sistema (4.1) en lazo cerrado aplicada la función de control (4.52) con $k_{3o} > 0$, $k_{3\infty} > 0$, $k_{2o} > 0$, $k_{2\infty} > 0$, $\gamma_{1o} > \frac{1+\delta_o}{2}$ y $\gamma_{2o} > 0$ suficientemente grandes, además de $\gamma_{1\infty} > \frac{1+\delta_\infty}{2}$, ya que satisface el Teorema 2.1, es decir cumple

$$\dot{V}(x, \phi_R) = L_f V(x) - \left(\frac{k_{3o}}{M_o(x)} + \frac{k_{3\infty}}{M_\infty(x)} \right) L_g V(x)^2 < 0, \quad \forall x \neq 0. \quad \triangle \quad (4.61)$$

Prueba 4.5. Verificando (4.61), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \phi_R) = & \mu_A \left\{ \frac{2\gamma_{1o}\gamma_{2o}k_{1o}^{\frac{2}{1-\delta_o}}}{1-2\delta_o} [x_1]^{\frac{1+2\delta_o}{1-2\delta_o}} x_2 + \gamma_{2o}k_{1o}^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} \left(\frac{1+\delta_o}{1-2\delta_o} \right) |x_1|^{\frac{3\delta_o}{1-2\delta_o}} x_2^2 \right. \\ & + \gamma_{2o} \left([x_2]^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} [x_1]^{\frac{1+\delta_o}{1-2\delta_o}} \right) x_3 \\ & + k_{2o} \left[k_{2o} \left([x_2]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) + x_3 \right] \\ & \left. \left[\frac{k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}}}{1-2\delta_o} |x_1|^{\frac{2\delta_o}{1-2\delta_o}} x_2 + \frac{1}{1-\delta_o} |x_2|^{\frac{\delta_o}{1-\delta_o}} x_3 \right] \right\} \\ & + \mu_B \left\{ \frac{2\gamma_{1\infty}\gamma_{2\infty}k_{1\infty}^{\frac{2}{1-\delta_\infty}}}{1-2\delta_\infty} [x_1]^{\frac{1+2\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} x_2 + \gamma_{2\infty}k_{1\infty}^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} \left(\frac{1+\delta_\infty}{1-2\delta_\infty} \right) |x_1|^{\frac{3\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} x_2^2 \right. \\ & + \gamma_{2\infty} \left([x_2]^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} [x_1]^{\frac{1+\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} \right) x_3 \\ & + k_{2\infty} \left[k_{2\infty} \left([x_2]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right) + x_3 \right] \\ & \left. \left[\frac{k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}}}{1-2\delta_\infty} |x_1|^{\frac{2\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} x_2 + \frac{1}{1-\delta_\infty} |x_2|^{\frac{\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} x_3 \right] \right\} \\ & - \left[\frac{k_{3o}}{M_o(x)} + \frac{k_{3\infty}}{M_\infty(x)} \right] \left[\mu_A k_{2o} \left([x_2]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) \right. \\ & \left. + \mu_B k_{2\infty} \left([x_2]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right) + (\mu_A + \mu_B) x_3 \right]^2. \end{aligned} \quad (4.62)$$

4. CONTROLADORES BI-HOMOGÉNEOS SISTEMA DE ORDEN 3

Note que el 3^{er} y el 4^{to} término de (4.62) son no positivos y se desvanecen en el conjunto $S_g = \{L_g V(x^*) = 0\}$ (4.27), por lo que al evaluar (4.62) en dicho conjunto, se obtiene la expresión

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x, \phi_R)|_{S_g} = L_f V(x_1^*)|_{S_g} = & - \underbrace{\left[\frac{k_{3o}}{M_o(x)} + \frac{k_{3\infty}}{M_\infty(x)} \right]}_{=0} [0]^2 \tag{4.63} \\
& + \frac{2\mu_A \gamma_{1o} \gamma_{2o} k_{1o}^{\frac{2}{1-\delta_o}}}{1-2\delta_o} [x_1^*]^{\frac{1+2\delta_o}{1-2\delta_o}} x_2^* + \mu_A \gamma_{2o} k_{1o}^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} \left(\frac{1+\delta_o}{1-2\delta_o} \right) |x_1^*|^{\frac{3\delta_o}{1-2\delta_o}} x_2^{*2} \\
& - \frac{\mu_A^2 \gamma_{2o} k_{2o}}{\mu_A + \mu_B} \left([x_2^*]^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} [x_1^*]^{\frac{1+\delta_o}{1-2\delta_o}} \right) \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) \\
& - \frac{\mu_A \mu_B \gamma_{2o} k_{2\infty}}{\mu_A + \mu_B} \left([x_2^*]^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1+\delta_o}{1-\delta_o}} [x_1^*]^{\frac{1+\delta_o}{1-2\delta_o}} \right) \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right) \\
& + \mu_A k_{2o} \left[k_{2o} \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) \left(1 - \frac{\mu_A}{\mu_A + \mu_B} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\mu_B k_{2\infty}}{\mu_A + \mu_B} \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right) \right] \left[\frac{k_{1o}^{\frac{1-\delta_o}{1-2\delta_o}}}{1-2\delta_o} |x_1^*|^{\frac{2\delta_o}{1-2\delta_o}} x_2^* \right. \\
& \quad \left. - \frac{\mu_A k_{2o}}{(\mu_A + \mu_B)(1-\delta_o)} \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) |x_2^*|^{\frac{\delta_o}{1-\delta_o}} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\mu_B k_{2\infty}}{(\mu_A + \mu_B)(1-\delta_\infty)} \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right) |x_2^*|^{\frac{\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} \right] \\
& + \frac{2\mu_B \gamma_{1\infty} \gamma_{2\infty} k_{1\infty}^{\frac{2}{1-\delta_\infty}}}{1-2\delta_\infty} [x_1^*]^{\frac{1+2\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} x_2^* + \mu_B \gamma_{2\infty} k_{1\infty}^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} \left(\frac{1+\delta_\infty}{1-2\delta_\infty} \right) |x_1^*|^{\frac{3\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} x_2^{*2} \\
& - \frac{\mu_A \mu_B \gamma_{2\infty} k_{2o}}{\mu_A + \mu_B} \left([x_2^*]^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1+\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} \right) \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) \\
& - \frac{\mu_B^2 \gamma_{2\infty} k_{2\infty}}{\mu_A + \mu_B} \left([x_2^*]^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1+\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1+\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} \right) \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right) \\
& + \mu_B k_{2\infty} \left[k_{2\infty} \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right) \left(1 - \frac{\mu_B}{\mu_A + \mu_B} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\mu_A k_{2o}}{\mu_A + \mu_B} \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) \right] \left[\frac{k_{1\infty}^{\frac{1-\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}}}{1-2\delta_\infty} |x_1^*|^{\frac{2\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}} x_2^* \right. \\
& \quad \left. - \frac{\mu_A k_{2o}}{(\mu_A + \mu_B)(1-\delta_o)} \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) |x_2^*|^{\frac{\delta_o}{1-\delta_o}} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\mu_B k_{2\infty}}{(\mu_A + \mu_B)(1-\delta_\infty)} \left([x_2^*]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1^*]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right) |x_2^*|^{\frac{\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} \right].
\end{aligned}$$

Aplicando el *Lema 2.3* de forma recursiva, se puede demostrar que $\dot{V}(x, \phi_R)|_{S_g} < 0$ seleccionando inicialmente $k_{3o} > 0$ y $k_{3\infty} > 0$ suficientemente grandes, ya que de esta manera la expresión (4.63) puede reescribirse de la forma (4.29), para posteriormente ser evaluada en los conjuntos $S_{1o} = \{x_2^* = k_{1o}[x_1^*]^{\frac{1-\delta_o}{1-2\delta_o}}\}$ (donde $\gamma_1(x^*) = 0$) y $S_{1\infty} = \{x_2^* = k_{1\infty}[x_1^*]^{\frac{1-\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}}\}$ (donde $\gamma_2(x^*) = 0$), tras seleccionar a $k_{2o} > 0$ y $k_{2\infty} > 0$ suficientemente grandes, adquiriendo finalmente la forma (4.43)

$$\begin{aligned}
 L_f V(x_1^*)|_{S_{g,1o,1\infty}} = & \\
 & - \mu_A \left\{ \underbrace{\frac{\gamma_{2o} k_{1o}^{\frac{3-\delta_o}{1-\delta_o}}}{1-2\delta_o} [2\gamma_{1o} - (1+\delta_o)]}_{C_o} + \underbrace{k_{2\infty} \left(\frac{\mu_B}{\mu_A + \mu_B} \right) v(x_1^*) |x_1^*|^{\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-2\delta_o)(1-\delta_\infty)}}}_{\nu(x_1^*)} \right\} |x_1^*|^{\frac{2+\delta_o}{1-2\delta_o}} \\
 & - \frac{\mu_B \gamma_{2\infty} k_{1\infty}^{\frac{3-\delta_\infty}{1-\delta_\infty}}}{1-2\delta_\infty} [2\gamma_{1\infty} - (1+\delta_\infty)] |x_1^*|^{\frac{2+\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}}
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 v(x_1^*) = & \left[\left(\frac{\mu_B k_{2\infty}}{\mu_A + \mu_B} \right) \left(k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} |x_1^*|^{\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-2\delta_\infty)(1-2\delta_o)(1-\delta_\infty)}} - k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right) \right. \\
 & \left(\frac{k_{2\infty} k_{1o}^{\frac{\delta_\infty}{1-\delta_\infty}}}{1-\delta_\infty} |x_1^*|^{\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-2\delta_o)(1-\delta_\infty)}} - \frac{k_{2o} k_{1o}^{\frac{\delta_o}{1-\delta_o}}}{1-\delta_o} \right) |x_1^*|^{\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-2\delta_o)(1-\delta_\infty)}} \\
 & + k_{1o} \left(\frac{k_{2\infty} k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}}}{1-2\delta_\infty} |x_1^*|^{\frac{2(\delta_\infty - \delta_o)}{(1-2\delta_o)(1-2\delta_\infty)}} - \frac{k_{2o} k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}}}{1-2\delta_o} \right) \left. \right] \\
 & \left[k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} |x_1^*|^{\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-2\delta_\infty)(1-2\delta_o)(1-\delta_\infty)}} - k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} \right],
 \end{aligned}$$

indicando que se debe garantizar (4.45) $\forall \{x_1^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ para que $L_f V(x_1^*)|_{S_{g,1o,1\infty}} < 0$.

De igual forma, las condiciones que se requieren para que esto suceda ya han sido descritas en subsecciones previas, donde se requiere seleccionar $\gamma_{1\infty} > \frac{1+\delta_\infty}{2}$, y $\gamma_{1o} > \frac{1+\delta_o}{2}$ y $\gamma_{2o} > 0$ suficientemente grandes.

Lo anterior permite demostrar que $V(x)$ es una Función de Lyapunov Bi-homogénea para el sistema en lazo cerrado aplicado el controlador (4.52). ■

Simulaciones

5.1. Controlador Bi-Homogéneo - Sistema de Orden 1

Sea el sistema a controlar

$$\dot{x} = u, \quad (5.1)$$

el cual presenta tres conjuntos de condiciones iniciales diferentes: $x_o = 2$, $x_{o10} = 20$ y $x_{o100} = 200$, las cuales en lazo abierto producen el comportamiento mostrado en la *Fig. 5.1*; donde se observa que x permanece fijo en cada condición inicial.

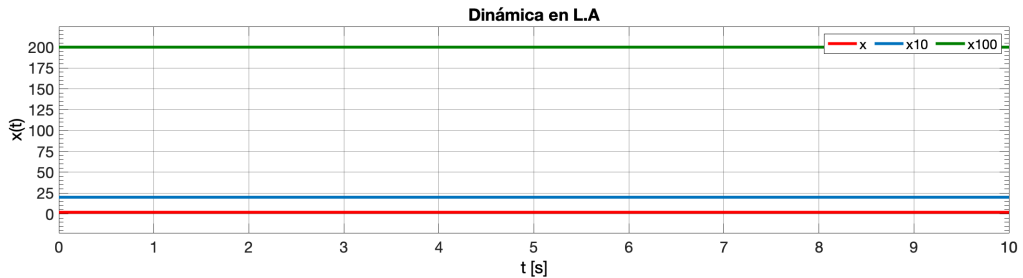


Figura 5.1: Muestra la dinámica del sistema en lazo abierto.

Se pretende estabilizar el origen de dicho sistema en tiempo fijo, haciendo uso de las dos clases de controladores bi-homogéneos reportados en el capítulo tres

$$\phi_P(x) = - \underbrace{k_o (\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty)^{\frac{1+\delta_o}{m-1}} [x]^{1+\delta_o}}_{\text{Control Local } (\phi_o)} - \underbrace{k_\infty (\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty)^{\frac{1+\delta_\infty}{m-1}} [x]^{1+\delta_\infty}}_{\text{Control No Local } (\phi_\infty)}, \quad (5.2)$$

$$\phi_R(x) = - \underbrace{k_o \frac{(\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty) [x]^{m-1}}{\beta_o |x|^{m-\delta_o-2}}}_{\text{Control Local } (\phi_o)} - \underbrace{k_\infty \frac{(\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty) [x]^{m-1}}{\beta_\infty |x|^{m-\delta_\infty-2}}}_{\text{Control No Local } (\phi_\infty)}. \quad (5.3)$$

Seleccionando los parámetros admisibles: $m = 3$, $\delta_o = -1$, $\delta_\infty = 0.5$, $k_o = 0.9$, $k_\infty = 1.3$, $\gamma_o = \gamma_\infty = \mu_A = \mu_B = 1$, $\beta_o = 3$ y $\beta_\infty = 5$, se obtienen los resultados mostrados en las *Fig. 5.2* y *Fig. 5.3*.

Control bi-homogéneo polinomial

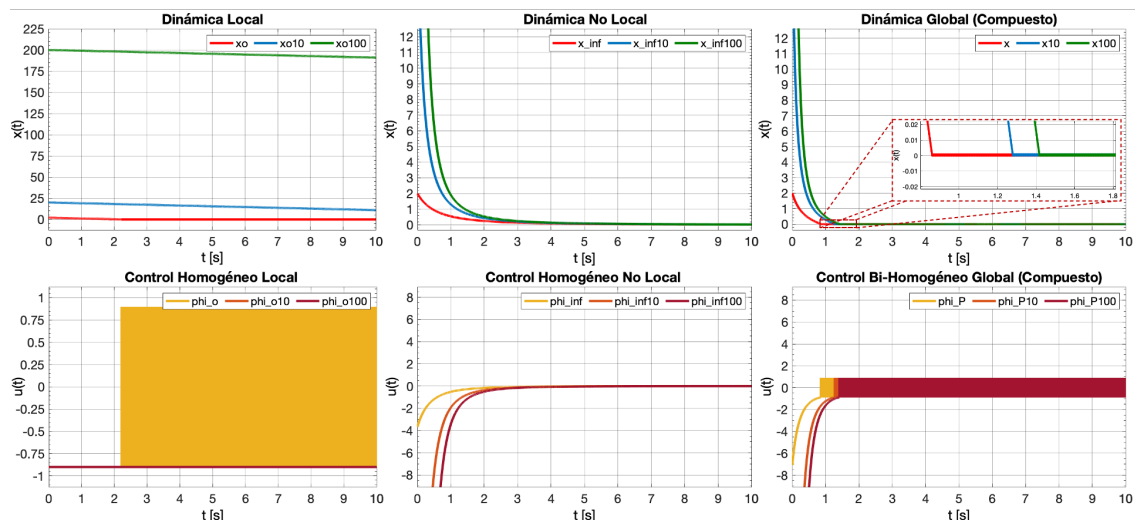


Figura 5.2: Muestra una comparativa (local, no local y global/compuesta) entre la dinámica del sistema en L.C y las funciones de control polinomiales aplicadas.

Control bi-homogéneo racional

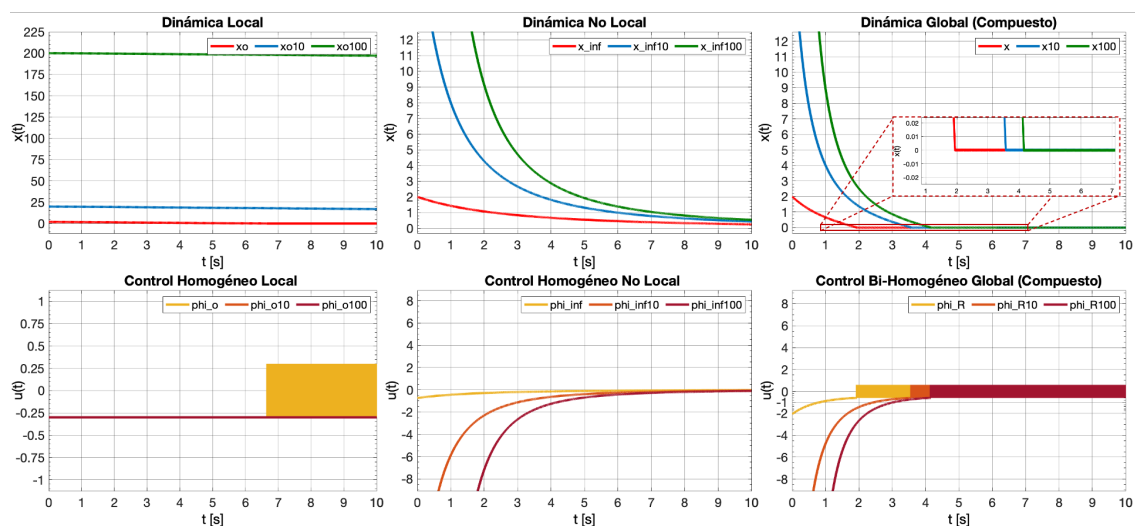


Figura 5.3: Muestra una comparativa (local, no local y global/compuesta) entre la dinámica del sistema en L.C y las funciones de control racionales aplicadas.

Tiempo de convergencia

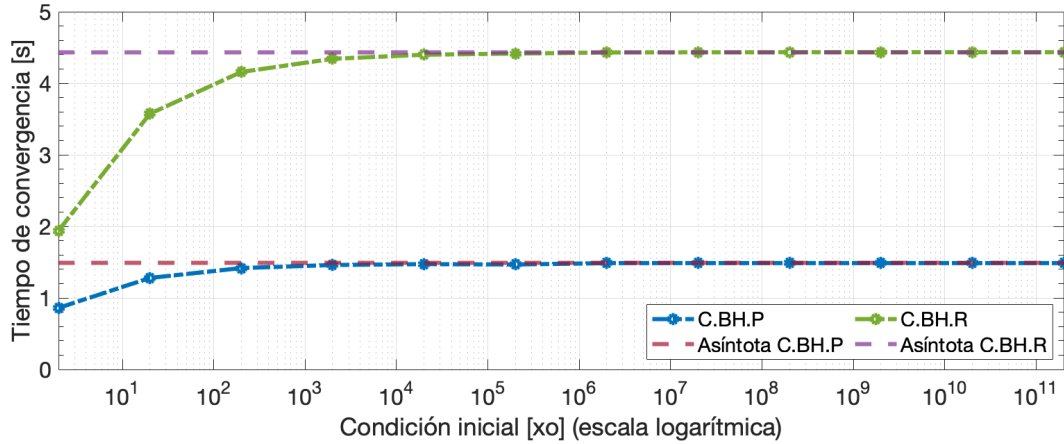


Figura 5.4: Muestra el tiempo de convergencia que presentan ambos controladores a medida que la condición inicial crece.

Observación 5.1. En las figuras anteriores se puede advertir que al aplicar cualquiera de las dos clases de controladores bi-homogéneos, el estado converge al origen en tiempo fijo, es decir: que el tiempo de convergencia de las trayectorias del sistema al origen está uniformemente acotado independiente a cualquier condición inicial dada. Cabe mencionar que lo anterior difiere a los resultados locales y no locales (mostrados en las mismas figuras), en donde se introducen por separado las funciones de control homogéneas: $\phi_o(x)$ y $\phi_\infty(x)$ que componen a los dos tipos de controladores bi-homogéneos (ya antes mencionados). Lo anterior se debe a que dichas funciones de control homogéneas pierden fuerza dependiendo de que tan lejos o cerca están las trayectorias del origen, esto es: únicamente para valores x grandes, $\phi_\infty(x)$ presenta la suficiente fuerza para acercar las trayectorias al origen (sin tocarlo), ocasionando que el sistema converja a éste de forma racional; mientras que en su contraparte, sólo para valores de x pequeños, $\phi_o(x)$ presenta la fuerza suficiente para llevar las trayectorias del sistema al origen, por lo que a medida que crecen las condiciones iniciales dicho controlador requerirá de más tiempo para poder responder y lograr estabilizar el sistema en tiempo finito.

5.2. Controlador Bi-Homogéneo - Sistema de Orden 2

Sea el sistema a controlar

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u, \end{aligned} \quad (5.4)$$

el cual presenta tres conjuntos de condiciones iniciales diferentes: $x_o = [-6.5, 149.474]$ (valor de x^* : $L_g V(x^*) = 0$), $x_{o10} = [-65, 1494.74]$ y $x_{o100} = [-65, 14947.4]$, las cuales en lazo abierto, producen el comportamiento mostrado en la *Fig. 5.5*; donde se observa que x_2 permanece fijo en cada condición inicial, mientras que x_1 tiende a infinito sin importar la condición inicial dada.

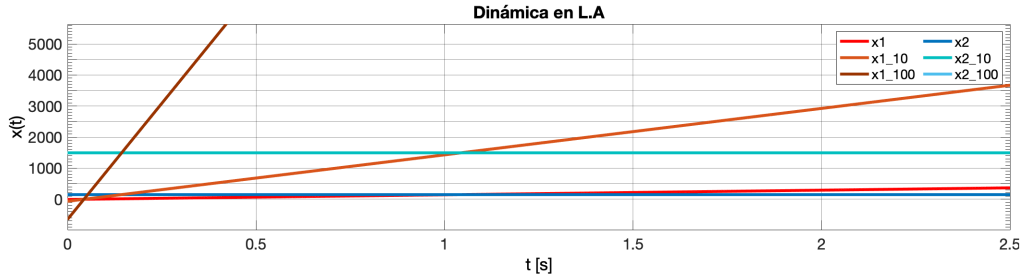


Figura 5.5: Muestra la dinámica del sistema en lazo abierto.

Se pretende estabilizar el origen del sistema (5.4) en tiempo fijo, haciendo uso de las dos clases de controladores bi-homogéneos reportados en el capítulo tres

$$\phi_P(x) = \underbrace{-k_{2o} [L_g V(x)]^{\frac{1+\delta_o}{m-1}}}_{\text{Control Local } \phi_o(x)} - \underbrace{k_{2\infty} [L_g V(x)]^{\frac{1+\delta_\infty}{m-1}}}_{\text{Control No Local } \phi_\infty(x)}, \quad (5.5)$$

$$\phi_R(x) = -k_{2o} \underbrace{\frac{L_g V(x)}{|x_2|^{m-\delta_o-2} + \beta_o |x_1|^{\frac{m-\delta_o-2}{1-\delta_o}}}}_{\text{Control Local } \phi_o(x)} - k_{2\infty} \underbrace{\frac{L_g V(x)}{|x_2|^{m-\delta_\infty-2} + \beta_\infty |x_1|^{\frac{m-\delta_\infty-2}{1-\delta_\infty}}}}_{\text{Control No Local } \phi_\infty(x)}, \quad (5.6)$$

donde

$$L_g V(x) = \left(\mu_A k_{1o}^{m-1} + \mu_B k_{1\infty}^{m-1} |x_1|^{\frac{(m-1)(\delta_\infty-\delta_o)}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right) [x_1]^{\frac{m-1}{1-\delta_o}} + (\mu_A + \mu_B) [x_2]^{m-1}. \quad (5.7)$$

Seleccionando (para efectos demostrativos) los parámetros admisibles: $m = 3$, $\delta_o = -1$, $\delta_\infty = 0.5$, $k_{1o} = 3$, $k_{1\infty} = 5$, $k_{2o} = 6$, $k_{2\infty} = 9$, $\beta_o = 5$, $\beta_\infty = 6$ y $\gamma_o = \gamma_\infty = \mu_A = \mu_B = 1$, se obtienen los resultados mostrados en la *Fig.5.6*, donde se puede observar que aunque γ_o y γ_∞ satisfacen las condiciones (3.69) y (3.70); éstos no presentan valores suficientemente grandes para que se cumpla la condición (3.61), ocasionando que $\exists x_1^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid L_f V(x_1^*)|_{S_g} > 0$.

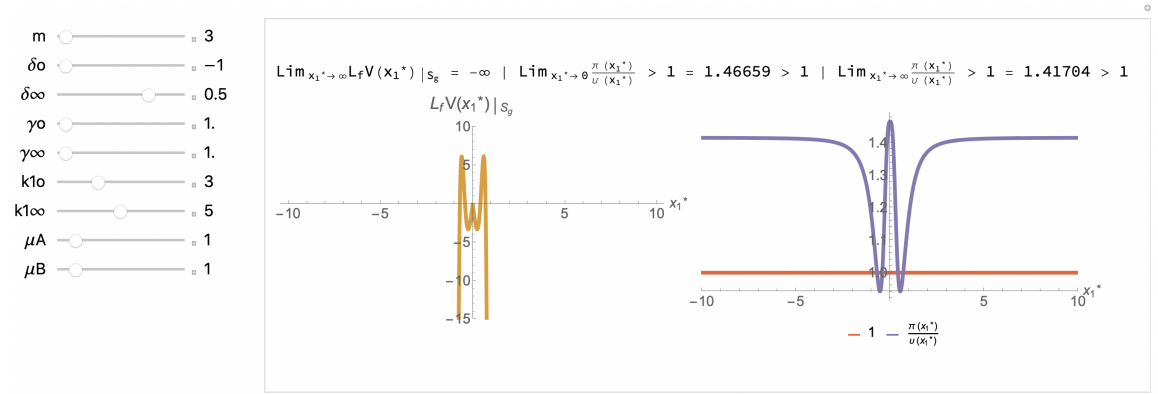


Figura 5.6: Muestra el comportamiento de $\dot{V}(x^*) = L_f V(x_1^*)|_{S_g}$, además del de la función $\frac{\pi(x_1^*)}{v(x_1^*)}$.

Para evitar lo anterior se redefine $\gamma_o = \gamma_\infty = 6$ obteniendo los resultados mostrados en la *Fig.5.7*, donde se puede observar que γ_o y γ_∞ ahora si satisfacen (3.61), (3.69) y (3.70), permitiendo garantizar, como se muestra en la *Fig.5.8* y *Fig.5.9*, que las funciones de control (5.5) y (5.6) estabilizan el origen del sistema (5.4) en tiempo fijo.

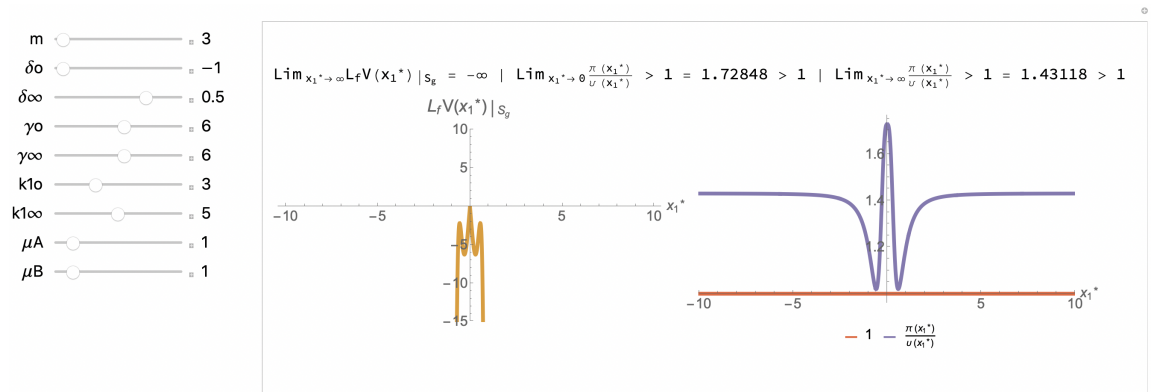


Figura 5.7: Muestra el comportamiento $\dot{V}(x^*) = L_f V(x_1^*)|_{S_g}$, además del de la función $\frac{\pi(x_1^*)}{v(x_1^*)}$.

Controlador bi-homogéneo polinomial

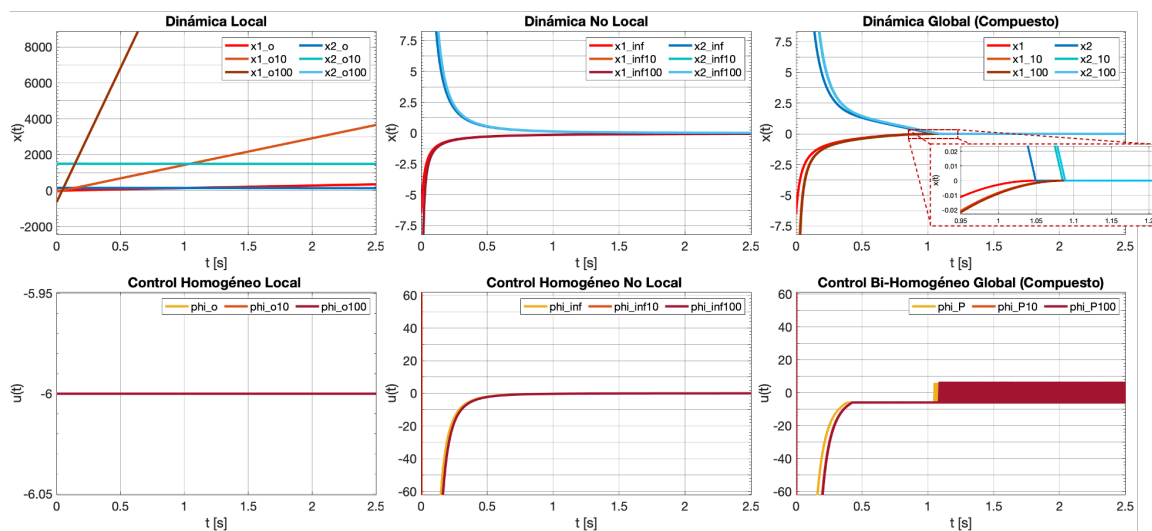


Figura 5.8: Muestra una comparativa (local, no local y global/compuesta) entre la dinámica del sistema en L.C y las funciones de control polinomiales aplicadas.

Controlador bi-homogéneo racional

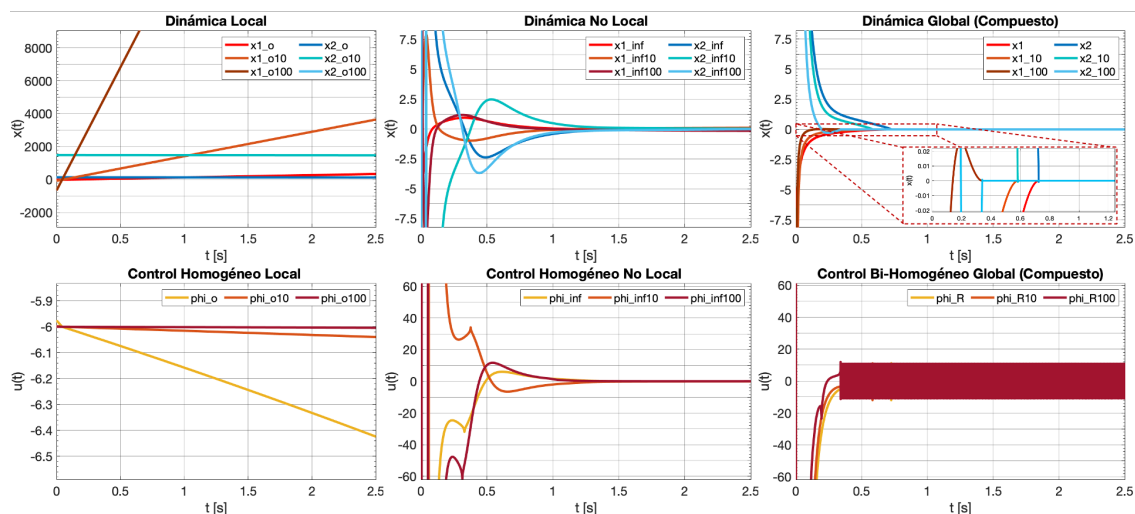


Figura 5.9: Muestra una comparativa (local, no local y global/compuesta) entre la dinámica del sistema en L.C y las funciones de control racionales aplicadas.

Note que la *Observación 5.1* aplica también para las *Fig.5.8* y *Fig.5.9*.

5.2.1. Controlador Bi-Homogéneo - Una Nueva Candidata a F.L.C

Sea el sistema a controlar el sistema (5.4), el cual presenta tres conjuntos de condiciones iniciales diferentes: $x_o = [-6.5, 24.375]$ (valor de x^* : $L_g V(x^*) = 0$), $x_{o_{10}} = [-65, 243.75]$ y $x_{o_{100}} = [-65, 2437.5]$, las cuales en lazo abierto, producen el comportamiento mostrado en la *Fig.5.10*; donde se observa que x_2 permanece fijo en cada condición inicial, mientras que x_1 tiende a infinito sin importar la condición inicial dada.

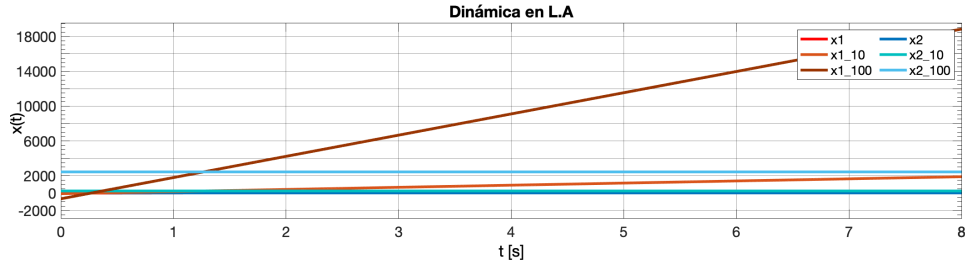


Figura 5.10: Muestra la dinámica del sistema en lazo abierto.

Se pretende estabilizar de forma global el origen del sistema (5.4), haciendo uso de las dos clases de controladores bi-homogéneos reportados en el capítulo tres: polinomial (5.5) y racional (5.6), con $m = 2$ y

$$L_g V(x) = \left(\mu_A + \mu_B |x_1|^{\frac{\delta_\infty - \delta_o}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right) [x_1]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + (\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty) x_2. \quad (5.8)$$

Seleccionando los parámetros admisibles: $\delta_o = 0$, $\delta_\infty = 0.5$, $k_{1o} = 0.9$, $k_{1\infty} = 1.2$, $k_{2o} = 2.5$, $k_{2\infty} = 3.6$, $\beta_o = 0.5$, $\beta_\infty = 0.8$ y $\gamma_o = \gamma_\infty = \mu_A = \mu_B = 1$, se obtienen los resultados mostrados en las figuras: *Fig.5.11*, *Fig.5.12* y *Fig.5.13*.

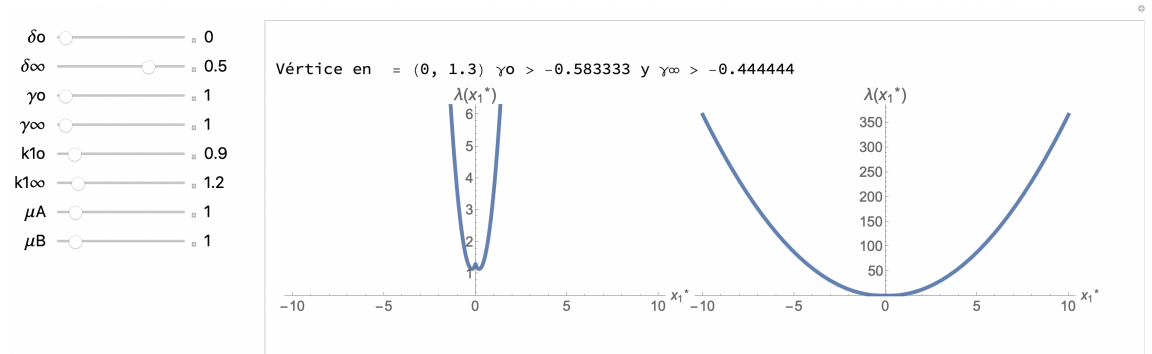


Figura 5.11: Muestra el comportamiento de la función $\lambda(x_1^*)$.

En la *Fig.5.11* se puede observar que ya que $k_{1o} > \frac{1}{2\gamma_o^2} = 0.5$ y $k_{1\infty} > \frac{1}{2\gamma_\infty^2} = 0.5$, (3.110) y (3.111) se satisfacen siempre, ocasionando que $\lambda(x_1^*) > 0, \forall \{x_1^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.

Controlador bi-homogéneo polinomial

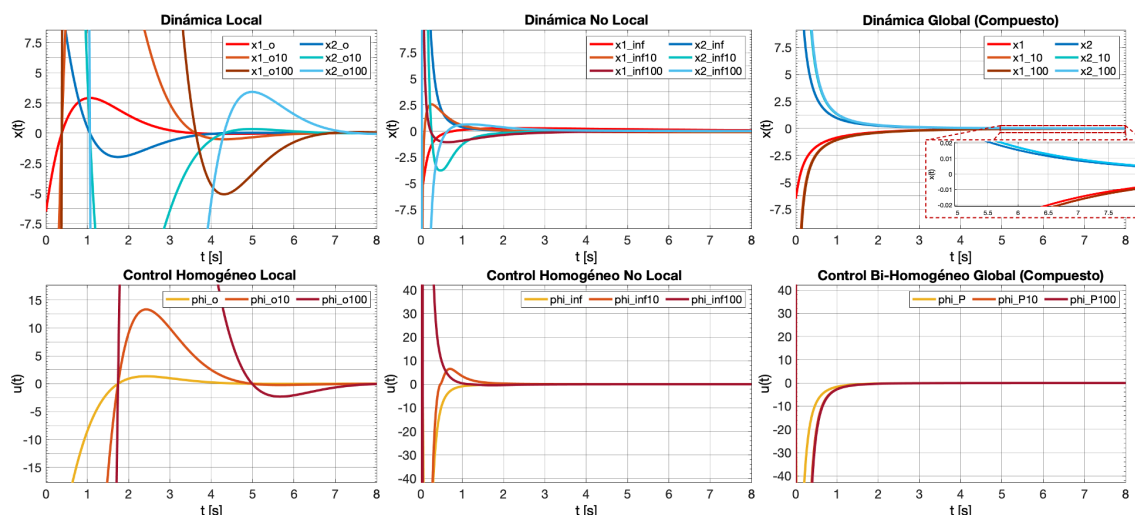


Figura 5.12: Muestra una comparativa (local, no local y global/compuesta) entre la dinámica del sistema en L.C y las funciones de control polinomiales aplicadas.

Controlador bi-homogéneo racional

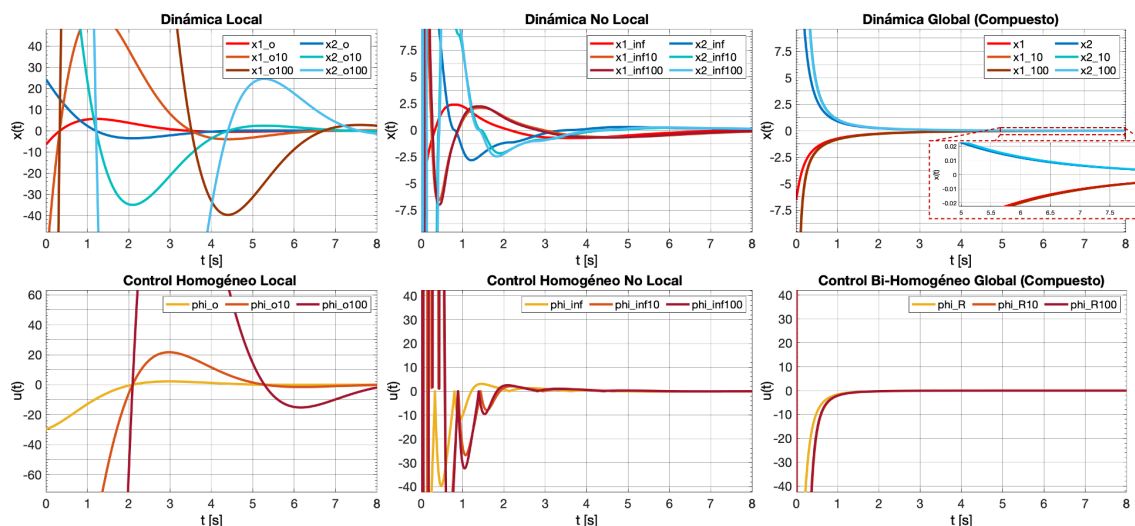


Figura 5.13: Muestra una comparativa (local, no local y global/compuesta) entre la dinámica del sistema en L.C y las funciones de control racionales aplicadas.

Observación 5.2. En la Fig.5.12 y Fig.5.13 se puede advertir (de forma cualitativa) que la unificación de ambos controladores genera trayectorias con dinámicas más suaves en comparación con las que se dibujan utilizando los controladores por separado.

5.2.2. Controlador Bi-Homogéneo - Una Mejor Candidata a F.L.C

Sea el sistema a controlar el sistema (5.4), el cual presenta tres conjuntos de condiciones iniciales diferentes: $x_o = [-6.5, 29.9296]$ (valor de $x^* : L_g V(x^*) = 0$), $x_{o_{10}} = [-65, 299.296]$ y $x_{o_{100}} = [-65, 2992.96]$, las cuales en lazo abierto, producen el comportamiento mostrado en la Fig.5.14; donde se observa que x_2 permanece fijo en cada condición inicial, mientras que x_1 tiende a infinito sin importar la condición inicial dada.

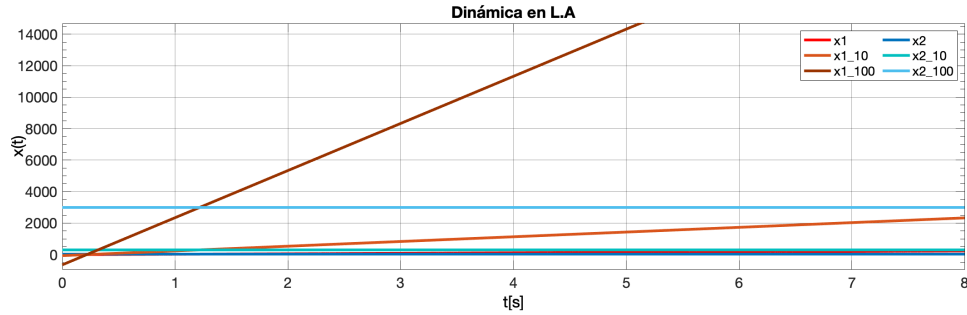


Figura 5.14: Muestra la dinámica del sistema en lazo abierto.

Se pretende estabilizar el origen del sistema (5.4) en tiempo fijo, haciendo uso de las dos clases de controladores bi-homogéneos reportados en el capítulo tres: polinomial (5.5) y racional (5.6), con $m = 3$ y

$$L_g V(x) = \left(\mu_A + \mu_B |x_1|^{\frac{2(\delta_\infty - \delta_o)}{(1-\delta_\infty)(1-\delta_o)}} \right) [x_1]^{\frac{2}{1-\delta_o}} + (\mu_A \gamma_o + \mu_B \gamma_\infty) [x_2]^2. \quad (5.9)$$

Seleccionando los parámetros admisibles: $\delta_o = -1$, $\delta_\infty = 0.5$, $k_{1o} = 0.9$, $k_{1\infty} = 1.2$, $k_{2o} = 2.5$, $k_{2\infty} = 3.6$, $\beta_o = 0.5$, $\beta_\infty = 0.8$ y $\gamma_o = \gamma_\infty = \mu_A = \mu_B = 1$, se obtienen los resultados mostrados en las figuras: Fig.5.15, Fig.5.16, Fig.5.17 y Fig.5.18.

Observación 5.3. A partir de las simulaciones, se advierte que es suficiente pedir que $\gamma_o = \gamma_\infty = 1$ para garantizar que $\lambda(x_1^*) > 0, \forall \{x_1^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Ya que una vez que se definen dichos parámetros, $\min \{\lambda(x_1^*)\} > 0$ sin importar (generalmente) que selección de parámetros ($\delta_o, \delta_\infty, k_{1o}, k_{1\infty}, \mu_A$ y μ_B) se realice.

Observación 5.4. Comparando las condiciones que cada F.L.C.BH homogénea pide satisfacer para poder emplear los distintos controladores bi-homogéneos reportados en este documento. La F.L.C.BH homogénea compuesta a partir de la combinación lineal de dos F.L.C.H de la forma (3.124), relaja las condiciones que (3.40) pide para poder unificar dos controladores (similar a como lo hace la F.L.C.H (3.85)), conservando a su vez, el conjunto de familias de controladores que la F.L.C.H (3.40) demuestra que se pueden unificar, presentando grados de homogeneidad admisibles entre $1 > \delta \geq -1$.

5. SIMULACIONES

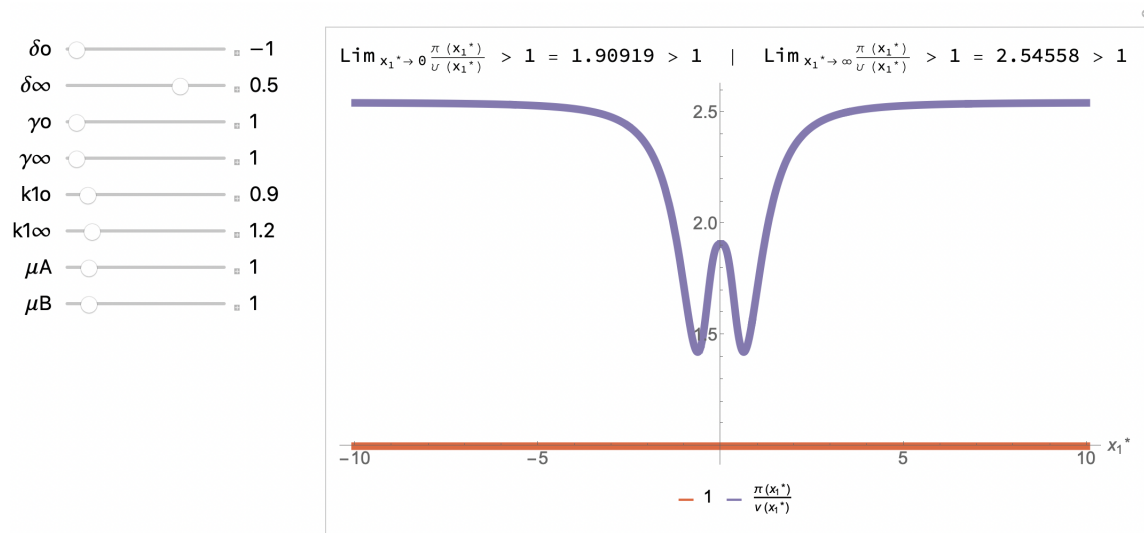


Figura 5.15: Muestra el comportamiento de la función $\frac{\pi(x_1^*)}{v(x_1^*)}$.

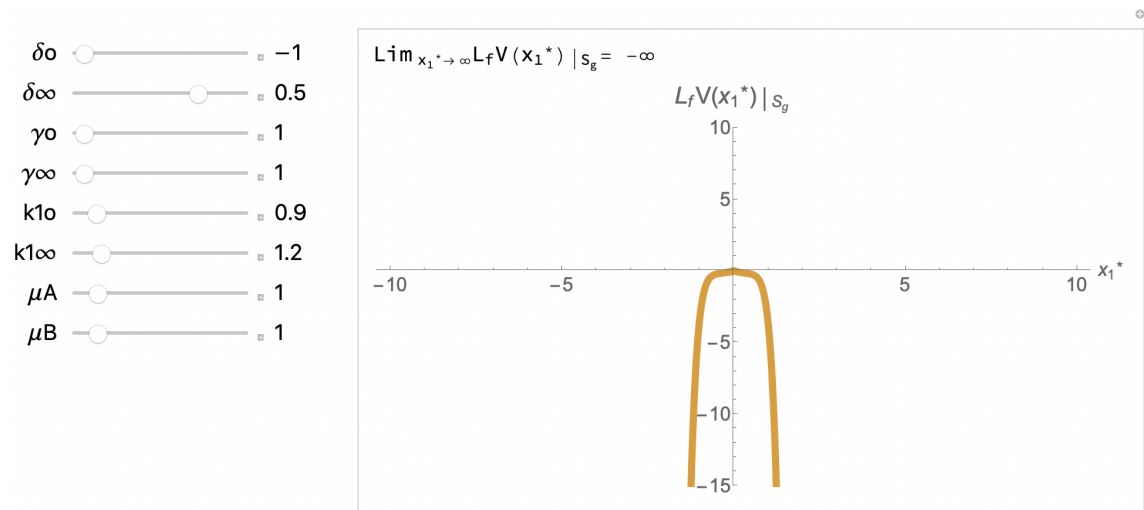


Figura 5.16: Muestra el comportamiento de $\dot{V}(x^*) = L_f V(x_1^*)|_{S_g}$.

Controlador bi-homogéneo polinomial

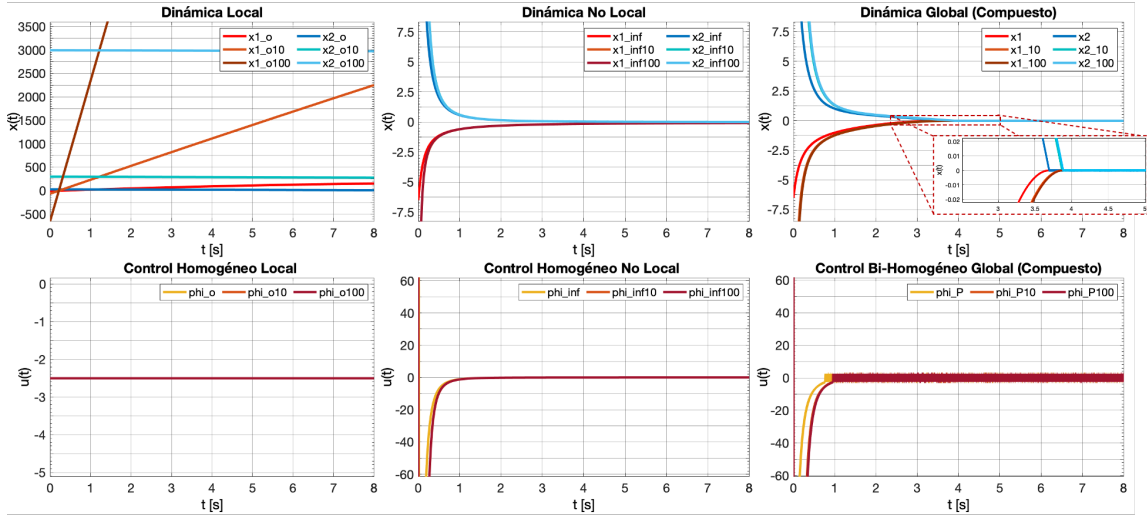


Figura 5.17: Muestra una comparativa (local, no local y global/compuesta) entre la dinámica del sistema en L.C y las funciones de control polinomiales aplicadas.

Controlador bi-homogéneo racional

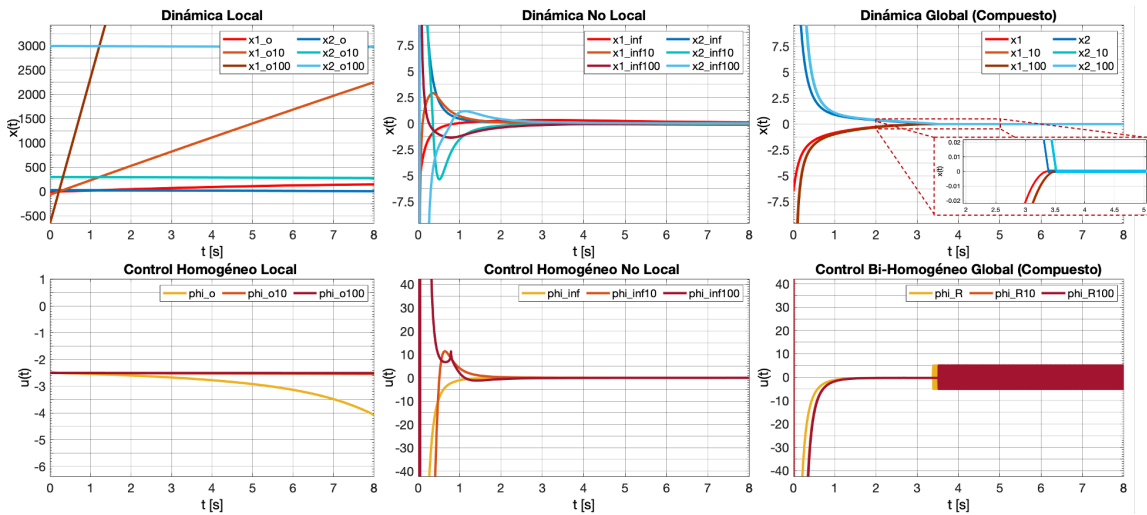


Figura 5.18: Muestra una comparativa (local, no local y global/compuesta) entre la dinámica del sistema en L.C y las funciones de control racionales aplicadas.

Note que la Observación 5.1 aplica también para las Fig.5.17 y Fig.5.18.

5.3. Controlador Bi-Homogéneo - Sistema de Orden 3

Sea el sistema a controlar

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & (5.10) \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u, \end{aligned}$$

el cual presenta tres conjuntos de condiciones iniciales diferentes: $x_o = [1, -5.5, 29.7993]$ (valor de $x^* : L_g V(x^*) = 0$), $x_{o10} = [10, -55, 297.993]$ y $x_{o100} = [100, -550, 2979.93]$, las cuales en lazo abierto, producen el comportamiento mostrado en la *Fig. 5.19*; donde se observa que x_3 permanece fijo en cada condición inicial, mientras que x_1 y x_2 tienen a infinito sin importar la condición inicial dada.

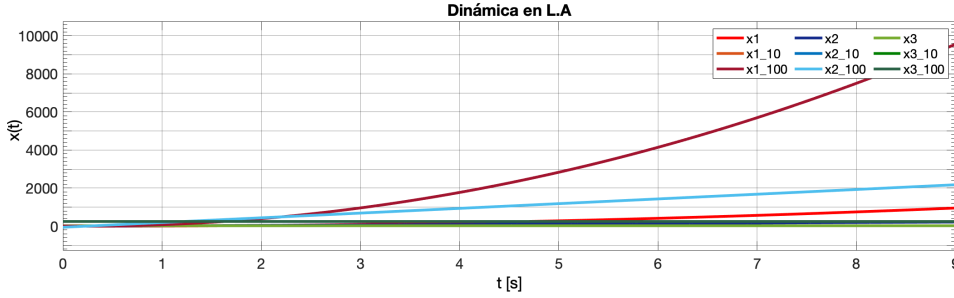


Figura 5.19: Muestra la dinámica del sistema en lazo abierto.

Se pretende estabilizar el origen del sistema (5.10), haciendo uso de las dos clases de controladores bi-homogéneos reportados en el capítulo anterior

$$\phi_P(x) = \underbrace{-k_{3o} [L_g V(x)]^{1+\delta_o}}_{\text{Control Local } \phi_o(x)} - \underbrace{k_{3\infty} [L_g V(x)]^{1+\delta_\infty}}_{\text{Control No Local } \phi_\infty(x)}, \quad (5.11)$$

$$\phi_R(x) = \underbrace{-k_{3o} \frac{L_g V(x)}{|x_3|^{-\delta_o} + \beta_{2o}|x_2|^{-\frac{\delta_o}{1-\delta_o}} + \beta_{1o}|x_1|^{-\frac{\delta_o}{1-2\delta_o}}}}_{\text{Control Local } \phi_o(x)} - \underbrace{k_{3\infty} \frac{L_g V(x)}{|x_3|^{-\delta_\infty} + \beta_{2\infty}|x_2|^{-\frac{\delta_\infty}{1-\delta_\infty}} + \beta_{1\infty}|x_1|^{-\frac{\delta_\infty}{1-2\delta_\infty}}}}_{\text{Control No Local } \phi_\infty(x)}, \quad (5.12)$$

donde

$$\begin{aligned} L_g V(x) &= (\mu_A + \mu_B)x_3 + \mu_A k_{2o} \left([x_2]^{\frac{1}{1-\delta_o}} + k_{1o}^{\frac{1}{1-\delta_o}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta_o}} \right) \\ &+ \mu_B k_{2\infty} \left([x_2]^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} + k_{1\infty}^{\frac{1}{1-\delta_\infty}} [x_1]^{\frac{1}{1-2\delta_\infty}} \right). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Seleccionando (para efectos demostrativos) los parámetros admisibles: $\delta_o = 0$, $\delta_\infty = 0.35$, $k_{1o} = 1.5$, $k_{1\infty} = 2.1$, $k_{2o} = 2.75568$, $k_{2\infty} = 4.56478$, $\beta_{1o} = \beta_{1\infty} = 0.3$, $\beta_{2o} = \beta_{2\infty} = 0.5$ y $\gamma_{1o} = \gamma_{1\infty} = \gamma_{2o} = \gamma_{2\infty} = \mu_A = \mu_B = 1$, se obtienen los resultados mostrados en la *Fig.5.20*, donde se puede observar que γ_{1o} y γ_{2o} no presentan valores suficientemente grandes como para que (4.45) se satisfaga, ocasionando que $\exists x_1^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid L_f V(x_1^*)|_{S_{g,1o,1\infty}} > 0$.

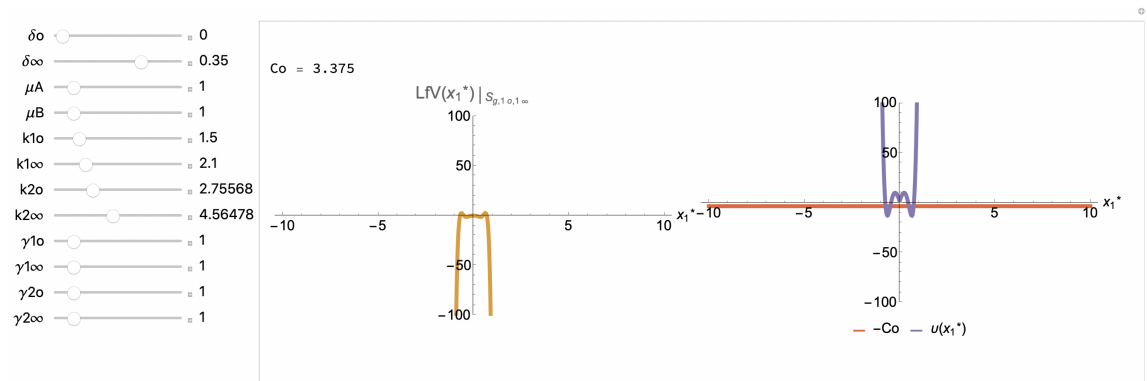


Figura 5.20: Muestra el comportamiento de $\dot{V}(x^*) = L_f V(x_1^*)|_{S_{g,1o,1\infty}}$, además del de la función $v(x_1^*)$ y el de la constante $-C_o$ (para efectos demostrativos).

Para evitar lo anterior se redefine $\gamma_{1o} = 2$ y $\gamma_{2o} = 2.5$ obteniendo los resultados mostrados en la *Fig.5.21*, donde se puede observar que (4.45) ahora si satisface, permitiendo garantizar, como se muestra en la *Fig.5.22* y *Fig.5.23*, que las funciones de control (5.11) y (5.12) estabilizan de forma global el origen del sistema (5.10).

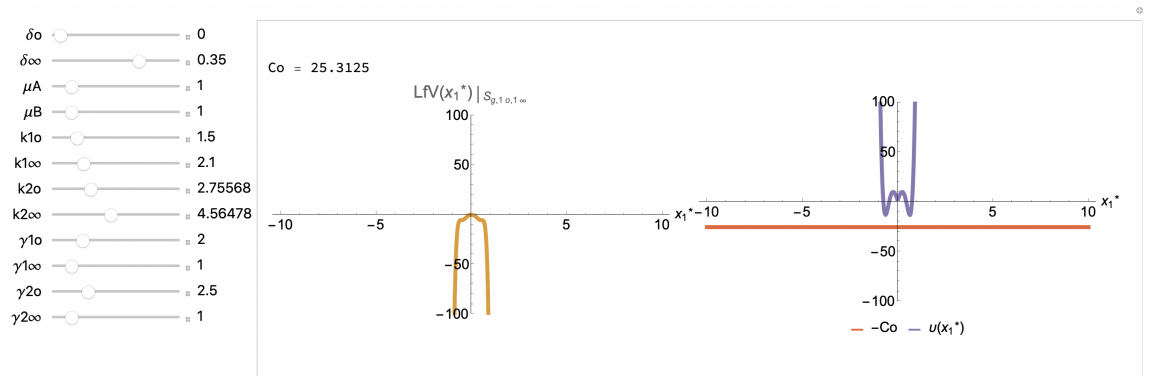


Figura 5.21: Muestra el comportamiento $\dot{V}(x^*) = L_f V(x_1^*)|_{S_{g,1o,1\infty}}$, además del de la función $v(x_1^*)$ y el de la constante $-C_o$ (para efectos demostrativos).

Controlador bi-homogéneo polinomial

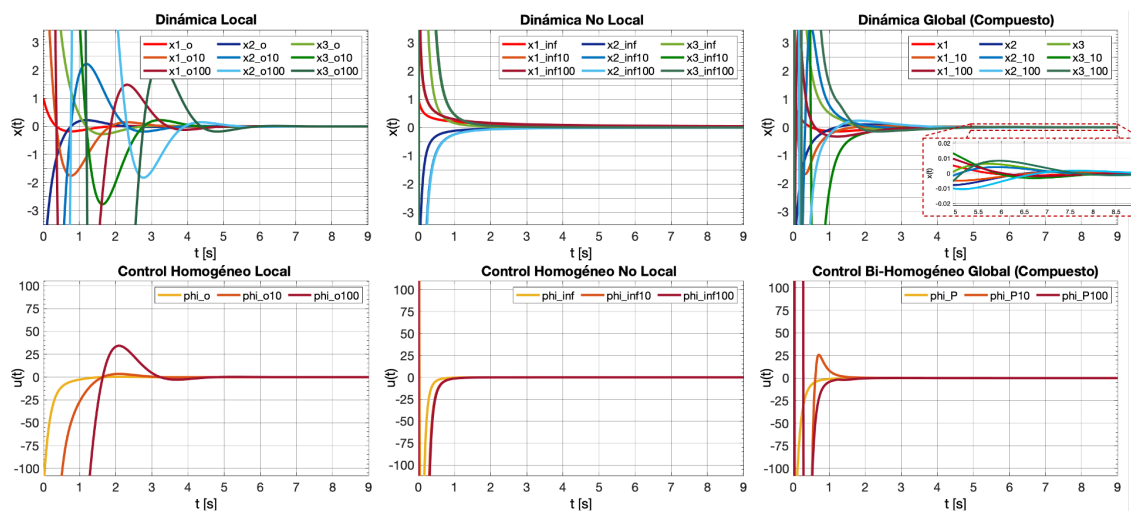


Figura 5.22: Muestra una comparativa (local, no local y global/compuesta) entre la dinámica del sistema en L.C y las funciones de control polinomiales aplicadas.

Controlador bi-homogéneo racional

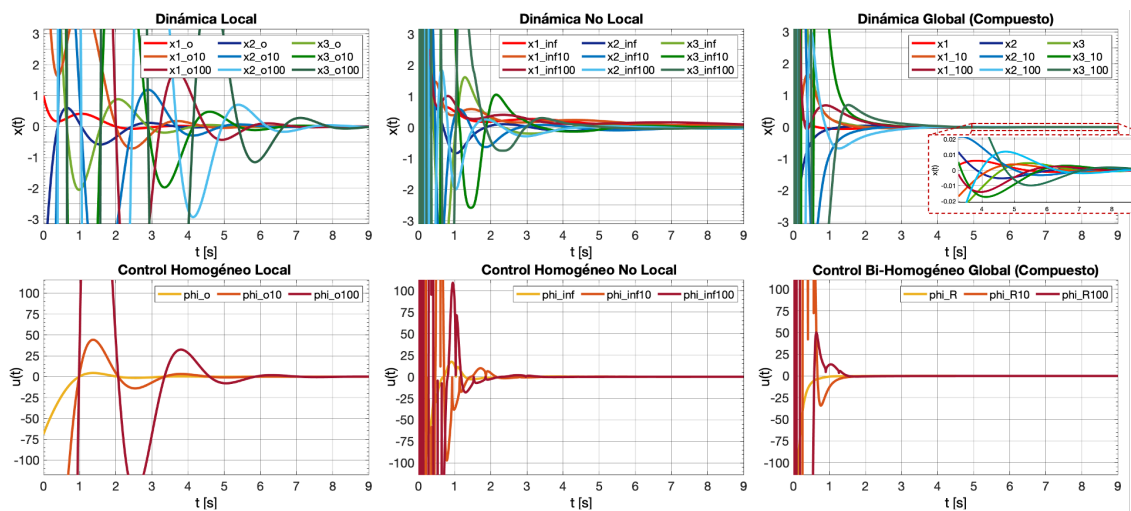


Figura 5.23: Muestra una comparativa (local, no local y global/compuesta) entre la dinámica del sistema en L.C y las funciones de control racionales aplicadas.

Note que la *Observación 5.1* aplica también para las *Fig.5.22* y *Fig.5.23*.

Conclusiones

El problema de unificación suave de controladores homogéneos para sistemas descritos en la forma de controlador con grado relativo uno, dos y tres, puede resolverse a partir del diseño de controladores bi-homogéneos. Dichos controladores logran combinar suavemente (sin elementos adicionales) las propiedades que le atribuyen al sistema en lazo cerrado dos controladores homogéneos con grado de homogeneidad diferente (positivo, negativo ó cero).

Se pueden construir candidatas a Funciones de Lyapunov de Control Bi-homogéneas a partir de la combinación lineal de dos Funciones de Lyapunov de Control Homogéneas. La homogeneidad de dichas funciones será de gran ayuda para probar que se cumplen las condiciones que se requieren para que dichas candidatas sean Funciones de Lyapunov de Control Bi-homogéneas.

La estructura del controlador bi-homogéneo se puede definir a partir de la combinación lineal de dos controladores homogéneos con grado de homogeneidad diferente, en donde la composición de cada uno de ellos dependerá de la derivada de las Funciones de Lyapunov de Control Bi-homogéneas previamente diseñadas.

Es posible estabilizar en tiempo fijo sistemas descritos en la forma de controlador con grado relativo uno y dos, haciendo uso de los controladores bi-homogéneos reportados en esta tesis. Lo anterior se debe a que las funciones de control bi-homogéneas diseñadas para dichos sistemas, permiten unificar dos controladores con grados de homogeneidad admisibles que pueden presentar valores entre $1 > \delta \geq -1$. Cabe mencionar que aunque esto no aplica para sistemas representados en la forma de controlador con grado relativo tres, en las simulaciones presentadas en el último capítulo se puede observar, que en aquellos casos en los que no se pueden estabilizar en tiempo fijo los sistemas, el controlador bi-homogéneo mejora el comportamiento cualitativo de las trayectorias del sistema alrededor del origen.

Como trabajo futuros:

- Extender los resultados plasmados en esta tesis, buscando una Función de Lyapunov de Control Bi-homogénea con estructura recursiva para sistemas de orden superior, con grados de homogeneidad admisibles que pudieran presentar valores

6. CONCLUSIONES

entre $m > \delta \geq -n$.

- Atacar el problema perturbado, introduciendo en el canal de control perturbaciones o incertidumbres que crecen linealmente en el estado, buscando estudiar su efecto, repercutiendo en los análisis de estabilidad reportados a lo largo de este documento.
- Fijar los parámetros libres que se tienen al emplear esta metodología; buscando decrementar el esfuerzo de control, logrando un comportamiento óptimo y eficiente.

Bibliografía

- [1] Andrieu, V., Praly, L., and Astolfi, A. (2008). Homogeneous approximation recursive observer design and output feedback. *SIAM J. Control Optim.*, 47(4):1814–1850. [11](#), [12](#), [14](#)
- [2] Andrieu, V. and Prieur, C. (2010). Uniting two control lyapunov functions for affine systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55:1923–1927. [4](#)
- [3] Angulo, M. T., Moreno, J. A., and Friedman, L. (2013). Robust exact uniformly convergent arbitrary order differentiator. *Automatica*, pages 49:2489–2495. [14](#)
- [4] Bacciotti, A. and Rosier, L. (2005). *Lyapunov Functions and Stability in Control Theory*. Springer. [3](#), [10](#), [11](#), [13](#)
- [5] Benabdallah, A. and Hdidi, W. (2018). Uniting two local output controllers for linear system subject to input saturation: Lmi approach. *Journal of the Franklin Institute*, 355:6969–6991. [4](#)
- [6] Cruz-Zavala, E. and Moreno, J. A. (2017). Homogeneous high order sliding mode design: A lyapunov approach. *Automatica*, 80:232–238. [15](#), [20](#), [23](#), [26](#), [37](#), [42](#), [54](#), [70](#), [84](#)
- [7] Cruz-Zavala, E., Moreno, J. A., and Fridman, L. (2010). Uniform second-order sliding mode observer for mechanical systems. *IEEE*, pages 14–19. [14](#)
- [8] Efimov, D. (2006). Uniting global and local controllers under acting disturbances. *Automatica*, 42:489–495. [4](#)
- [9] G. H. Hardy, J. E. L. and Pólya (1951). *Inequalities*. Cambridge University Press. [14](#)
- [10] Grammatico, S., Blanchini, F., and Caiti, A. (2013). Control-sharing and merging control lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59:107–119.
- [11] Hayashi, T. and Nakamura, H. (2017). Control lyapunov function based fixed-time controller design for double integrator system. *IEEE*, pages 120–125. [4](#), [5](#)
- [12] Isidori, A. (1995a). *Non Linear Control Systems*. Springer Verlag, Berlin. [3](#), [18](#)

- [13] Isidori, A. (1995b). *Non Linear Control Systems II*. Springer Verlag, London. 3, 18
- [14] Khalil, H. K. (2002). *Non Linear Systems, 3rd*. Prentice-Hall, Inc. XIII, 2, 3, 7, 8, 18
- [15] Moreno, J. A. (2016). Discontinuous integral systems for mechanical systems. *International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, doi:10.1109/VSS.2016.7506906:142–147.
- [16] Moreno, J. A. (2019). Homogeneity based design of sliding mode controllers. 9, 10, 11, 13
- [17] Morin, P., Murray, R., and Praly, L. (1998). Nonlinear rescaling of control laws with application to stabilization in the presence of magnitude saturation. *IFAC Nonlinear Control Systems Design*, pages 663–668. 4
- [18] Ogata, K. (2002). *Modern Control Engineering*. Prentice Hall. XIII, XIII, XIII, XIII
- [19] Pieur, C. and Praly, L. (1999). Uniting local and global controllers. *IEEE*, pages 1214–1219. 4
- [20] Polyakov, A. (2012). Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems. *IEEE*, pages 57:2106–2110. 14
- [21] Prieur, C. and Teel, A. R. (2011). Uniting local and global output feedback controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56:1636–1649. 4
- [22] Sanchez, T. and Moreno, J. A. (2019). Design of lyapunov functions for a class of homogeneous systems: Generalized forms approach. *Int J Robust Nonlinear Control*, pages 29:661–681.
- [23] Shtessel, Y., Edward, C., Friedman, L., and Levant, A. (2014). *Sliding Mode Control and Observation*. Springer Science+Business. 18
- [24] Teel, A. R., Kaiser, O. E., and Murray, R. M. (1997). Uniting local and global controllers for the caltech ducted fan. *American Control Conference*, pages 1539–1543. 4
- [25] Teel, A. R. and Kapoor, N. (1997). Uniting local and global controllers. *ECC European Control Conference*, 1-4:3868–3873. 4
- [26] Wellstad, P. E. (1979). *Indroduction to Physical System Modelling*. Academic Press Ltd. 2
- [27] Ángel Mercado-Uribe and Moreno, J. A. (2017). Discontinuous integral control for systems in controller form. *Congreso Nacional de Control Automático*.
- [28] Ángel Mercado-Uribe and Moreno, J. A. (2018). Fixed-time homogeneous integral controller. *IFAC*, 52-25:377–382. 4, 5