



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**UN VIAJE HAMILTONIANO A TRAVÉS DE LAS
TESELACIONES REGULARES DEL PLANO
HIPERBÓLICO**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A:

CLAUDIA SILVA RUIZ



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. CHRISTIAN RUBIO MONTIEL
CIUDAD DE MÉXICO 2020**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno
Silva
Ruiz
Claudia
55 14 26 64 71
Universidad Nacional Autónoma
de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
308601576
2. Datos del tutor
Dr
Christian
Rubio
Montiel
3. Datos del sinodal 1
Dr
César
Hernández
Cruz
4. Datos del sinodal 2
Mat
Laura
Pastrana
Ramírez
5. Datos del sinodal 3
Dr
Juan José
Montellano
Ballesteros
6. Datos del sinodal 4
Dra
Eugenia
O'Reilly Regueiro
7. Datos del trabajo escrito
Un viaje hamiltoniano a través
de las teselaciones regulares del
plano hiperbólico
155 p
2020

Agradecimientos

En primer lugar, a mi familia, por apoyarme en todos los aspectos; especialmente en alentarme a hacer todo lo que amo. En particular quiero agradecer a mi hermano, por quien me enamoré de la ciencia. También le agradezco por ayudarme a editar algunas imágenes de la tesis.

A mi asesor, Christian, por dirigir mi tesis con atención y paciencia, por no apresurarme demasiado y tampoco dejar de prestar atención en mi trabajo; así como por ser un amigo más que mi asesor. A mis sinodales: Lau, Eugenia, Juan, César por revisar mi trabajo. Quiero agradecerle especialmente a Lau, ya que gracias a ella me enamoré de la teoría de gráficas. Fueron sus excelentes clases, que impartió con mucha dedicación, las que me motivaron a seguir estudiando gráficas. Quiero agradecerle también por haberme guiado académicamente durante el final de mi carrera, y otorgarme la oportunidad de trabajar con ella como ayudante. También quiero dar un agradecimiento especial a Eugenia, por permitirme participar en un evento en Oaxaca. Aunque no fue mi sinodal, quiero agradecer a Vinicio por apoyarme externamente con la tesis, también debo mencionar a Osvaldo por haber colaborado en explicar la gráfica de la penúltima sección.

Otro agradecimiento muy especial es para Amílcar, sin cuya ayuda no habría logrado hacer todas las bonitas imágenes realizadas con *Mathematica*. También le agradezco su amistad en este tiempo y sus buenas pláticas.

Antes de pasar con los agradecimientos de personas de la facultad, quiero agradecer a algunas de las personas más importantes fuera de ella, que han sido muy importantes en mi crecimiento durante la carrera:

Rossana, quien además de ser la mejor amiga en todo momento, me apoyó con una revisión de redacción de la tesis. Daf, que de igual forma ha estado presente con su amistad todo este tiempo. A los A's y compañía, por permanecer como los amigos más cercanos desde hace muchos años, en particular a Alfredo que formó parte importante del inicio de mi carrera, y de un modo muy especial a Andrés G. por fomentar también mi amor por la ciencia desde niña. A Lis, quien ha sido mi maestra, guía y amiga en lo que para mí ha sido otra carrera: la danza.

A todos mis amigos y maestros cercanos e importantes fuera de la facultad: del Montessori, Sagrado, Logos, la Esmeralda y del básquet, de la danza, etc; que no mencionaré aquí por ser una lista muy larga, pero que espero ellos sepan quiénes son y la importancia que han tenido para mí durante este largo proceso de aprendizaje.

A mis amigos, ayudantes y maestros de la facultad, por orden de aparición:

Ana y Nayely, por volverse de mis mejores amigas desde primer semestre y mantenerse como tal hasta ahora. Por compartir conmigo varios de los mejores momentos de la carrera, dentro y fuera de ella. A Ana le agradezco por haberse acercado a mí y por ser tan abierta y sincera conmigo, a pesar de nuestras diferencias. A Nayely, por hacerme reír a carcajadas como nadie, así como cuando estamos las tres juntas.

A Diana con mucho cariño, casi por las mismas razones: por su amistad desde primer semestre, y mantenernos como amigas, e incluso colegas hasta la fecha.

A Paty Cortés, por motivarme en muchas materias con sus clases, especialmente las de geometría, otra de mis áreas de especialización. A Juan, por motivarme igualmente en geometría proyectiva. A Pablo G. por su gran cariño.

A David, por ayudarme a perderle el miedo a cálculo (junto con Lety C.) y por su amistad.

A Ian, por su gran cariño, y haberle dado un giro a mi vida en tan sólo un mes. Por estar ahí cuando más lo necesitaba, por todos los buenos momentos; por su amistad, su atención, por haber dado tanto, lo mejor de sí cuando apenas me conoció, así como por presentarme a todos los amigos que también se volvieron buenos amigos míos: Jorge (a quien agradezco especialmente por ese semestre de vernos diario en nuestra hora libre), Daniel P., Daniel E., Andrea B., Sofía, Mariana G., Leo, entre otros.

A Vale, quien, a pesar de ser mi amiga desde antes, se volvió más cercana al coincidir en la facultad. Por ser una persona llena de alegría, entusiasmo, y por compartir lo que nos apasiona.

En un sentido similar quiero agradecer a Tetsuya, por su amistad desde años atrás, por poder platicar por horas juntos, y ser alguien en quien puedo confiar completamente.

También en este sentido quiero agradecer a Diego Z. por su amistad.

A Fer, por volverse uno de los mejores amigos que haya tenido jamás. A Alex, por compartir su amistad y genialidad con nosotros. A Mariana S., por su amistad tan bondadosa. A los tres, por todas las horas de estudio juntos.

A Gaby J. por su amistad y apoyo en varias tareas. A Jesús por su amistad y tiempo de estudio. A Luisa por lo mismo.

A Jeff, por ayudar a que cálculo se volviera una de mis materias preferidas, por sus clases y empeño, por hacerme descubrir los sistemas dinámicos discretos, por permitirme trabajar con él como ayudante, y por haber estado presente en el final de mi carrera.

A Fer V., por motivarme con el álgebra y por su amistad. A Gaby por su amistad. A Sidney, por su amistad y el tiempo de estudio juntas. A Pablo A. por su amistad.

A Paco, por su amistad y cariño, y por compartir juntos varios intereses, tanto los que se relacionan con las matemáticas como los que no.

A Juan G., por su amistad y su tiempo de estudio.

A Fer S. por su empeño en las ayudantías y gran esfuerzo como colega, así como nuestra amistad.

A Caro L., por su amistad y horas de estudio. También agradezco a Mariana C. y Gabriel. A Caro O. por su amistad, así como Alinna.

A Julius, por su amistad, cariño y horas de estudio. A Diego I., por el estudio juntos.

A Lau O. por motivarme mucho con ecuaciones diferenciales, por sus excelentes clases y por esforzarse en la comprensión de sus alumnos.

A Omar X., por su amistad y tiempo de estudio.

A Tort, por motivarme mucho en la clase de teselaciones, por los buenos momentos en eventos y por la gran amistad que a la fecha conservamos.

A Jonatan, por el tiempo de estudio y la amistad que tenemos desde de entonces. A Karen por lo mismo.

A Manuel por motivarme con topología y por su amistad fuera de clase.

A Micael, por todo: por el cariño, por todos los buenos momentos, por su apoyo dentro y fuera de lo académico, por nunca decepcionarme, por ser atento conmigo, por ser tan lindo y genial. Por su amistad que hasta ahora perdura.

A Omar P. por todo el tiempo de estudio.

A Gaby Araujo, por seguirme motivando mucho con gráficas, por formar un grupo bonito de trabajo, y por mantener una relación cercana conmigo.

A Montse, por su amistad y compartir juntas el gusto por gráficas, así como compartir buenos momentos en algunos eventos.

A Collins, por nuestra gran amistad, por su interés y apoyo en múltiples ocasiones. Por ayudarme a estudiar, por sus consejos, por escucharme en todo momento. Por estar presente y al pendiente; por su cariño, y por todos los buenos momentos que hemos pasado juntos, dentro y fuera de lo académico.

A Isabel, por creer en mí cuando fui su alumna, y por apoyarme para ir a muchos eventos.

A Félix A. y Cuauhtémoc, por su amistad y tiempo de estudio.

A mi alumno Alejandro, por motivarme como ayudante, y por su amistad.

A Saúl y Renato, por su empeño en una clase novedosa y muy interesante.

A mis amigos con los que no he compartido clases ni eventos, pero sí muy buenos momentos:

Shary, Diego V., Jero, Ro, y Mariana B., con quien he coincidido en diferentes contextos.

A Javi M. por contagiar ese entusiasmo por la ciencia y más, a Enrique Barrera por su gran entusiasmo, por compartir buenos momentos y muchos intereses en común, y por ser genial en muchos aspectos. Enrique Bojórquez por una muy buena amistad y compartir muchos intereses y buenos momentos. A Sebastián, por su amistad y cariño. A Juan M.F. por su gran amistad, así como Félix C.

A mis amigos de eventos:

A Fer R., por todo lo que hemos compartido. A Viviana, por quien llegué a Colombia.

A Emilio, Elías, Alma, Eric, Tero, Javi A., Carlos G. entre otros; por su amistad y buenas experiencias juntos.

A los de Colombia: Federico A., Federico C., Carolina B., por formar un evento tan padre. A la demás gente increíble que ahí conocí: en especial Jhonatan, Andrés, Greter, Luisa, Javier A., Gordon, Aram, entre otros que formarían una larga lista más.

A mis maestros y ayudantes que me motivaron y no estén mencionados aquí, así como los compañeros cercanos que hayan formado parte importante de mi proceso de estudio.

A todos los amigos cercanos que me hayan faltado mencionar, dentro y fuera de ciencias.

Finalmente, un agradecimiento muy especial a Tonatiuh, por todo: por su amistad, por inspirarme, motivarme, escucharme, apoyarme en todo y entenderme como nadie; por su cariño, su atención, y todos los increíbles momentos que hemos vivido juntos.

Índice general

Introducción	10
1. Preliminares	15
1.1. Sobre geometría	15
1.1.1. La geometría euclidiana	15
1.1.2. Las geometrías no euclidianas	16
1.1.3. La geometría hiperbólica	18
1.2. Consolidación histórica de la teoría de gráficas	21
1.3. Definiciones	24
1.3.1. Definiciones de gráficas	24
1.3.2. Algunas nociones de topología	27
1.3.3. Definiciones de gráficas infinitas	31
1.4. Notación	32
1.4.1. La notación de Schläfli	32
1.5. ¿Qué son las teselaciones?	32
1.5.1. Los 17 grupos de simetrías o grupos cristalográficos	34
1.5.2. Teselaciones fuera del plano	41
1.5.3. ¿Cuáles son las teselaciones hiperbólicas?	42
2. Hamiltonicidad en superficies	57
2.1. Hamiltonicidad en el Toro	57
2.2. Hamiltonicidad en la botella de Klein	59
3. Hamiltonicidad en teselaciones hiperbólicas	61
3.1. Hamiltonicidad en el plano hiperbólico	61
3.2. Demostraciones de los teoremas utilizados	74
4. Hamiltonicidad en el plano	79
5. Conclusiones	81
6. Anexo	83
6.1. El teorema de clasificación de superficies	83
6.2. Discusión sobre el árbol binario	88
6.2.1. Otro ejemplo de gráfica que no es contraejemplo	90
6.3. Códigos de las imágenes	92

Bibliografía 150

Introducción

Desde el nacimiento de la teoría de gráficas en el siglo XVIII, llamada así por Sylvester [11], se tuvo interés por resolver si ciertos recorridos bajo ciertas condiciones, son recorribles o no. De hecho, la teoría de gráficas surgió a partir de la pregunta para un recorrido en específico, el famoso “problema de los puentes de Königsberg”.

La historia de este problema es así: en la ciudad de Königsberg, hoy Kaliningrado, había siete puentes para cruzar los ríos que separaban las distintas partes de la ciudad. El problema que se planteaba era si se podían recorrer todos los puentes una sola vez, terminando en el punto de inicio. Euler probó que no es posible, dando comienzo a esta amplia área de las matemáticas, la teoría de gráficas, aún cuando quizás nunca dibujó una gráfica para modelar el problema y de que jamás hizo mención de gráficas; de hecho, las representaciones de gráficas como las conocidas actualmente no aparecieron hasta la segunda mitad del siglo XIX [20]. En el contexto de gráficas, se le denomina circuito euleriano a cualquier recorrido como el descrito anteriormente, donde es posible dar un paseo cerrado que pase por todas las aristas de la gráfica. La denominación se debe al padre de la teoría de gráficas, quien además dio la solución del problema planteado, para cualquier recorrido de este tipo. Este se considera el primer resultado de gráficas, así como de la topología. Más interesante aún es que la topología surgió también con el problema de los puentes de Königsberg. Es decir, tanto la teoría de gráficas como la topología aparecieron al mismo tiempo. Un interesante documental que introduce el problema y el inicio de la topología puede consultarse en [1].

Hay otro tipo de recorridos en gráficas que han interesado a matemáticos desde el inicio del desarrollo de la teoría de gráficas: los ciclos hamiltonianos. En vez de pedir que se recorran todas las aristas (los puentes del problema de Königsberg) de la gráfica, la condición es que se recorran todos los vértices, sin repetirlos, y terminando en el inicial. El nombre de estos ciclos es en honor a William Rowan Hamilton, quien inventó y resolvió el juego y acertijo (llamado *the Icosian Game* o *A Voyage Round the World*) de encontrar un ciclo así en el dodecaedro [44]. A pesar del nombre de estos ciclos, ya habían sido planteados con mucha anterioridad, desde el siglo IX, en el famoso e interesante problema del “recorrido de caballo (caballero)” en un tablero de ajedrez [40]: *¿Existe un recorrido de caballo en que un caballo visite los 64 cuadrados del tablero*

exactamente una vez y regrese al punto de inicio? Curiosamente, este problema también fue de interés para Euler [6]. La solución generalizada a este problema puede encontrarse en [33], aunque fue resuelto inicialmente por al-Adli ar-Rumi de Bagdad en el año 890 [6]. Así mismo, el matemático Thomas Kirkman, quien se involucró con problemas de combinatoria, había considerado un problema más general pocos meses antes que Hamilton [44]. De hecho, a él se le atribuye la idea inicial de estos circuitos, pero fue Hamilton quien los popularizó [3].

Para este tipo de recorridos, no existe una caracterización de las gráficas que contienen un ciclo hamiltoniano. Al menos, no una que sea computacionalmente útil. Es decir, no existe una condición necesaria y suficiente, así como óptima computacionalmente, para que una gráfica posea un ciclo hamiltoniano, así como en el caso de las eulerianas; para éstas, se tiene que una gráfica es euleriana si y sólo si todo vértice tiene grado par. Más aún, determinar si una gráfica es hamiltoniana o no, es un problema NP-completo [44].

En los párrafos anteriores, se introdujo brevemente el área de matemáticas de la teoría de gráficas. En seguida se pasará a hacer lo mismo con la geometría y un área dentro de la misma.

Desde las antiguas civilizaciones, se ha valorado estéticamente lo que se visualiza simétrico y regular. Un ejemplo claro de esto son los teselados islámicos empleados en su arquitectura. Posteriormente, este interés por los patrones regulares y por buscar las simetrías interesaría también a los matemáticos. Para resaltar la importancia de la simetría en la ciencia, hay que mencionar a la matemática Amalie Emmy Noether, quien luchó toda su vida por ocupar una profesión científica en una época muy prejuiciosa hacia el rol que debía ocupar una mujer. Con dificultades pudo ocupar puestos dignos y cobrar por ello, aunque su genio era admirado incluso por Einstein. Una de sus más grandes contribuciones a la ciencia, fue el teorema de invariancia, que es un resultado sorprendente, porque afirma que toda fórmula matemática simétrica equivale a la existencia de una entidad física invariante; y viceversa [32].

En este texto, conjuntaremos las nociones de los ciclos hamiltonianos con el tema de geometría que se ocupa de las teselaciones regulares. La motivación para trabajar con ambas áreas de las matemáticas es que su visualización esquemática facilita el entendimiento, además de resultar estéticos por sí solos. Las gráficas, también conocidas como grafos, consisten únicamente de puntos y líneas entre esos puntos. Tienen el encanto de ser objetos visualmente simples, que permiten resolver muchos problemas en las matemáticas y en el mundo real.

El estudio de ciclos hamiltonianos ha sido motivado por diversas aplicaciones. En particular, los ciclos hamiltonianos en mapas regulares del toro tienen aplicaciones en química: resonancia en estructuras químicas [23], simetrías y propiedades de moléculas hexagonales [21, 24, 26, 31]. Para el toro, la antes conjetura de si todo mapa regular tiene un ciclo hamiltoniano [5] ha sido pro-

bada en [4, 45].

Podemos preguntarnos, si los mapas regulares en otras superficies tienen ciclos hamiltonianos. Para la botella de Klein, sorprendentemente, también se tiene que una buena parte de los mapas regulares son hamiltonianos [46].

Con el conocimiento de que la hamiltonicidad en los mapas asociados a las teselaciones regulares está resuelto para el toro y parcialmente para la botella de Klein, quedan caminos por explorar en este problema, dentro del campo de las matemáticas. El camino que se seguirá en el trabajo, será escapar a una geometría no tradicional.

La geometría euclidiana, la desarrollada por Euclides en la Grecia antigua, fue la geometría imperante por veintitrés siglos, y se caracterizó por ser una geometría que se asemejaba a la realidad física del mundo perceptible. Dicha geometría se desarrolla a partir de cinco postulados, de los cuales, los primeros cuatro resultan un tanto intuitivos, y el quinto, el famoso postulado de las paralelas, fue el que causó controversia y numerosos intentos de demostrarlo a partir de los otros cuatro [16]. Nunca se consiguió probar su dependencia a partir de suponer los otros cuatro postulados. Sin embargo, al suponer los primeros cuatro y negar el quinto, surgieron dos nuevas geometrías. Son dos porque hay dos formas en que la negación del quinto postulado sea verdadera. Aquí nos adentraremos en la obtenida de una de las negaciones: la geometría hiperbólica.

Capítulo 1

Preliminares

Esta sección se ocupará de describir las nociones necesarias para poder abordar el problema planteado en el capítulo 4. Las áreas matemáticas son la teoría de gráficas, la geometría y la topología; pero se da también un contexto del desarrollo histórico de éstas.

1.1. Sobre geometría

A continuación se plasmará una síntesis del desarrollo de la geometría, tanto de la euclidiana, así como de la no euclidiana, tanto en la parte histórica como en las ideas matemáticas. En toda esta sección se utilizaron las referencias [16] y [35].

1.1.1. La geometría euclidiana

Para hablar de las geometrías no euclidianas, tenemos que hablar primero de la geometría euclidiana. Como mencionamos en la introducción, la geometría euclidiana fue desarrollada por Euclides, alrededor de los siglos III y II a.C.

Como es bien conocido, originalmente la geometría fue la ciencia de la medida, añadiendo el establecimiento de las relaciones entre los objetos geométricos. Para confirmar la veracidad de estas relaciones, los griegos de la antigüedad desarrollaron un procedimiento que caracteriza al método matemático: la demostración, el cual consiste en una sucesión de inferencias lógicas a partir de resultados previos.

En el año 300 a.C aproximadamente, Euclides escribió *Los Elementos de Geometría*, donde recopiló gran parte del conocimiento matemático que se tenía en aquel entonces. Consta de una exposición lógica, creativa y estructurada de este conocimiento al estilo de Platón. Sorprendentemente, esta ha sido la obra más difundida después de *La Biblia*. Comienza con definiciones y axiomas, lo que se asume por cierto para construir la teoría. Los axiomas son afirmaciones intuitivas que se dan por hecho para tener un consenso del cual partir. Las

definiciones y axiomas, para llegar a las proposiciones, las nuevas afirmaciones que se añaden a nuestro sistema de definiciones y axiomas; se conjugan mediante la demostración, y pueden ser empleadas para demostrar nuevos resultados (se puede leer más sobre el método axiomático en [10]). Las primeras definiciones del libro son las de punto, recta, ángulo recto, paralelismo, así como una serie de nociones comunes (axiomas) que no se demuestran, y sus famosos *postulados*, que son los 5 axiomas relevantes y de los cuales se deriva toda la geometría euclidiana que conocemos, y enunciamos a continuación:

- I. Por dos puntos distintos pasa una recta.
- II. Un segmento rectilíneo puede ser siempre prolongado.
- III. Hay una única circunferencia con un centro y un diámetro dados.
- IV. Todos los ángulos rectos son iguales.
- V. Si una línea recta corta dos rectas de forma que los ángulos interiores de un mismo lado son menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, prolongadas indefinidamente, se encuentran en el lado en el cual los ángulos son menores que los dos ángulos rectos.

Se observa con facilidad que el postulado V resalta de los demás por ser el menos intuitivo y el más complejo. Por ello, se levantó la sospecha entre los matemáticos que dicho postulado no era un axioma, no era una afirmación evidente, sino una propiedad, resultante de suponer sólo los otros cuatro postulados. En el camino de la investigación científica tratando de demostrar ese postulado a partir de los otros, lo que se encontraron fueron numerosas equivalencias al dicho postulado, es decir, afirmaciones que se cumplen si el postulado se cumple, y viceversa. Entre estas equivalencias, se encuentra el famoso teorema de Pitágoras, y la equivalencia por el cual al postulado se le conoce como el de “las paralelas”, encontrada por John Playfair, que dice: *Por un punto exterior a una recta, pasa una única paralela.*

1.1.2. Las geometrías no euclidianas

La geometría euclidiana o euclidea se considera como la expuesta en los primeros libros de los *Elementos*, y la no euclidea como la obtenida a partir de negar el quinto postulado. Si se le considera al quinto postulado en la versión de las paralelas, hay dos formas en las que la negación puede ser verdadera: que la paralela no sea única, o que no existan paralelas, lo cual se puede enunciar como sigue:

- Por un punto exterior a una recta, pasa más de una recta paralela a la dada.
- Por un punto exterior a una recta, no pasa ninguna paralela a la dada.

Intercambiando el postulado V por cualquiera de estas dos afirmaciones y preservando los primeros cuatro, se obtuvieron dos nuevas geometrías consistente, una por cada una de las afirmaciones. La primera de ellas fue desarrollada por Nikolai Lobachevski y János Bolyai y es nombrada *geometría hiperbólica*. La segunda fue desarrollada por Bernhard Riemann y se llama *geometría elíptica*. Cabe resaltar que, históricamente, el desarrollo de la geometría negando el quinto postulado era con el propósito de demostrar su dependencia de los otros cuatro, llegando a una contradicción. Mas esa contradicción nunca llegó.

Algo que también debe destacarse en el nacimiento de las geometrías no euclidianas, es la geometría de las pinturas del renacimiento, la que hoy llamamos *geometría proyectiva*. Pintores como Leonardo y Durero querían representar en sus pinturas bidimensionales lo que veían tridimensionalmente. Les preocupaba crear la sensación de profundidad y dibujar los objetos en proyección y perspectiva. Si se considera el haz de líneas de visión que parten del ojo y llegan hasta los objetos visibles, el cuadro fungía como una ventana, una sección plana que es atravesada por estas líneas que parten del haz y llegan a los objetos. En esta geometría, las líneas paralelas que se pintan convergen en un punto llamado *punto de fuga* o *punto al infinito* (también conocido como *punto ideal*), y el conjunto de los puntos de fuga de un mismo plano son colineales en la llamada *línea de horizonte*, que matemáticamente llamaríamos *recta al infinito*. De esta manera, en el plano proyectivo cambia el sentido de paralelismo concebido por Euclides, y se empieza a entrever que con este concepto nacen las nuevas geometrías [16].

¿Por qué se denominan por hiperbólica (término acuñado por Cayley [9]) y elíptica a las geometrías no euclidianas? La razón es que la clasificación de las cónicas en elipses, parábolas e hipérbolas puede darse de acuerdo al número de puntos al infinito que tiene cada tipo: elipses ninguno, parábolas uno, e hipérbolas dos. Para determinar el número de puntos al infinito se considera la pendiente de las curvas. La elipse es una curva acotada por lo que se considera que no tiene puntos al infinito; en la parábola, conforme tomamos puntos más alejados del vértice de la parábola, la tangente en dichos puntos se tiende a volver paralela al eje focal en el límite; y en la hipérbola, tomando puntos que se alejan de los vértices de la hipérbola, la tangente en un punto tiende a volverse paralela a alguna de las dos asíntotas, dependiendo de qué lado se aleja el punto del vértice en su rama. Observando que un conjunto de rectas paralelas tienen siempre la misma pendiente, identificamos un punto al infinito con la pendiente de una familia de rectas paralelas. Así, consideramos que la pendiente del eje focal corresponde al punto infinito de la parábola, y las pendientes de las asíntotas de la hipérbola corresponden a los dos puntos al infinito de la hipérbola. El comportamiento de las rectas es el que determina la denominación de estas geometrías: en la geometría elíptica, las “rectas” no tienen puntos al infinito, y en la geometría hiperbólica las “rectas” tienen dos puntos al infinito, mientras que la geometría euclidiana es *parabólica*. Cabe mencionar también que un espacio curvo de tipo hiperbólico es cóncavo y uno de tipo elíptico es convexo [35].

En otras palabras, un espacio hiperbólico posee curvatura negativa, uno esférico curvatura positiva, y un espacio euclidiano, curvatura cero.

Cabe resaltar que la geometría no euclidiana se puede extender a una superficie que puede tener tanto puntos elípticos como hiperbólicos, donde se define a la línea recta entre dos puntos como *geodésica*: la curva de menor longitud entre ellos. De este modo, la geometría de la superficie es elíptica o hiperbólica en una vecindad de un punto de acuerdo a qué tipo de punto es éste. Riemann desarrolló estas nociones, donde la curvatura del espacio puede permitir que las geometrías cambien de un punto a otro.

El motivo por el cual las geometrías no euclidianas resultaron ser muy innovadoras es porque terminaron con la idea de que los axiomas de Euclides son el fundamento inmutable al que debe acomodarse el conocimiento experimental de la realidad física. Más aún, muchos fenómenos físicos actualmente son explicados mejor mediante una geometría no euclidiana que una euclidiana. [10].

1.1.3. La geometría hiperbólica

Para consolidar la existencia de las geometrías no euclidianas, tras comprobar la consistencia del sistema de axiomas y postulados, sólo hacía falta exhibir un modelo matemático que cumpliera con dicho sistema. Se buscaba una superficie tal que algunas curvas fungieran como rectas, y que la manera de medir ángulos y longitudes permitiera la compatibilidad con el sistema axiomático. El primero de ellos se debe a Eugenio Beltrami, quien exhibió la *pseudoesfera*. Mientras Riemann y Ferdinand Minding buscaban superficies de *curvatura negativa*, Beltrami se dio cuenta de que una superficie así debía tener una geometría no euclidiana y dio con la pseudoesfera, una superficie de revolución generada por una curva llamada *tactriz*, que gira sobre su asíntota. Se define como *tactriz* a la curva que describe un objeto que es arrastrado por otro que se mantiene a distancia constante y se desplaza en línea recta. La curvatura de una superficie en uno de sus puntos la definió Gauss como la medida de la rapidez con que la superficie se aparta de su plano tangente. Esta curvatura se llama negativa cuando la superficie tiene puntos en ambos lados del plano tangente. El problema con este modelo es que las rectas hiperbólicas (geodésicas) deberían tener longitud infinita, pero eso no pasa para todas las curvas geodésicas en la pseudoesfera, por lo que el modelo no es completo. De hecho, Hilbert probaría más adelante que no existe una superficie en \mathbb{R}^3 que funcione de modelo para la geometría hiperbólica plana [34]. Beltrami propuso también un segundo modelo al que se conoce como *modelo de Beltrami-Klein* (ver la figura 1.1a), en el que se redefinen los conceptos de puntos, rectas y paralelismo. En este modelo consideraron un círculo (euclídeo), y llamaron plano a su interior, puntos a los puntos en dicho interior, a los puntos de la frontera del disco puntos al infinito, y a las rectas las cuerdas interiores del círculo (sin incluir los extremos). Aquí las mediciones de ángulos y longitudes se dan por medio de logaritmos, razón doble y números complejos, y fue Felix Klein quien dio la fórmula para

medir la distancia entre dos puntos, también demostró que esta construcción geométrica en el círculo equivale a la geometría hiperbólica, satisfaciendo los cinco axiomas y resultados de la geometría hiperbólica. De hecho, este modelo equivale al del hiperboloide propuesto por Henri Poincaré, que se obtiene del anterior colocando el disco en el plano $z = 1$, y proyectando desde el origen los puntos en el disco en puntos de la hoja superior del hiperboloide de dos mantos $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$. Al cortar el manto superior del hiperboloide con un plano por el origen, se tiene una rama de la hipérbola, que es una recta hiperbólica de este modelo [34]. Sin embargo, en este trabajo serán otros los modelos de Poincaré que se ocuparán y serán de mayor interés. Uno de ellos es el *modelo del disco* (ver la figura 1.1b), el que consta también de los puntos interiores del disco, pero donde las “rectas” son arcos de circunferencia perpendiculares al borde del disco. Poincaré fue capaz de encontrar la relación de la geometría con la variable compleja y el álgebra mediante las *transformaciones de Möbius*, que son *conformes*, lo que quiere decir que respetan ángulos, y, restringidas a la circunferencia de radio 1, mandan “rectas” en “rectas”. En este modelo, la forma de medir ángulos es igual a la euclidiana, y la distancia entre puntos se mide nuevamente mediante la razón doble. Además, las paralelas corresponden a arcos tangentes que forman un ángulo nulo en el punto al infinito común. Nótese que estamos considerando como paralelas a las rectas que comparten un punto al infinito en común. A las rectas que no comparten puntos, ya sean puntos ordinarios o puntos al infinito, se les llama *ultraparalelas*. Si se tienen dos puntos en el plano hiperbólico bajo este modelo, y uno de ellos se aproxima al disco, la distancia entre ambos se incrementará hacia el infinito, y lo mismo ocurre en el modelo de Klein. Hay un segundo modelo de Poincaré que es equivalente al del disco, mediante una transformación de Möbius, llamado modelo del *semiplano superior* (ver la figura 1.1c), así denominado porque el espacio que se considera es el plano complejo, donde los números complejos tienen parte imaginaria positiva. La transformación que lleva el interior del disco en el semiplano superior es la siguiente:

$$Q(z) = \frac{-iz + 1}{z - i}. \quad (1.1)$$

En este modelo del semiplano, las “rectas” son arcos de circunferencia perpendiculares al eje real y con centro en éste. Aquí también la forma de medir ángulos es la euclidiana, y la longitud hiperbólica corresponde al tiempo empleado en recorrer el “segmento”; tiempo que aumenta al acercarse al eje real, el cual puede pensarse como la recta al infinito; así como en el modelo del disco, el borde representa la unión de todos los puntos al infinito.



(a) Modelo del disco de Beltrami-Klein



(b) Modelo del disco de Poincaré



(c) Modelo del semiplano superior

Figura 1.1: Modelos de geometría hiperbólica. Imágenes tomadas de [9].

De igual manera que los geógrafos proyectan la superficie esférica de la tierra en los atlas planos (un interesante video de la menos común proyección estereográfica puede verse en [30]), el plano hiperbólico se puede proyectar en el euclidiano. Una de éstas es la ya mencionada de Beltrami y Klein, que es similar a la proyección ortogonal de la esfera, y en donde las rectas están dibujadas como líneas rectas. Ésta es la proyección más natural, pues es la que simula cómo se vería el plano hiperbólico visto desde un punto en el espacio hiperbólico, y los dibujos aparecen en perspectiva. El motivo por el cuál es más usado el modelo de Poincaré, a pesar de ser una proyección menos natural, es porque se visualiza mayor parte del plano, es decir, se aprecia más el plano que en el modelo de Klein, además, recordemos que este modelo preserva ángulos [9], y las intersecciones de rectas hiperbólicas se enciman menos que en el modelo de Klein, véase la figura 1.2.

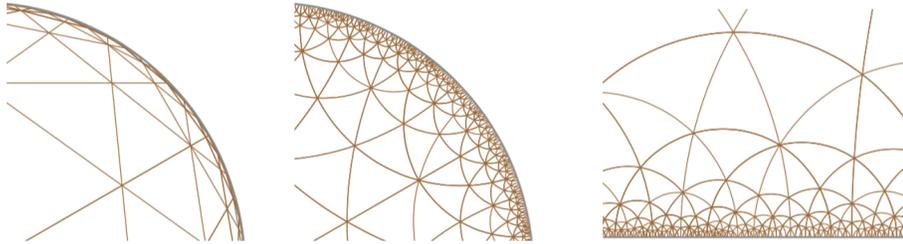


Figura 1.2: Dibujos de una misma teselación en el plano hipérbólico, con el modelo de Klein, Poincaré y el semiplano superior. Imágenes tomadas de [9].

Si se desea profundizar más acerca de la geometría hiperbólica, tanto en la parte histórica como teórica y analítica, se puede consultar en [28]. En particular resulta interesante lo que trata sobre la proyección estereográfica, entre otras cosas como las superficies de curvatura negativa.

1.2. Consolidación histórica de la teoría de gráficas

Como mencionamos en la introducción, el surgimiento de esta área de las matemáticas, la teoría de gráficas, se le atribuye a Leonhard Euler en el siglo XVIII cuando solucionó el problema de los puentes de Königsberg. Ahondando en las cartas de Euler que se han logrado encontrar al respecto en [20], abordó el acertijo como un problema relacionado a la *geometría de la posición*. El documento en el que escribió la solución en 1736, comienza así:

En adición a la rama de la geometría que se ocupa de distancias, ... hay otra rama, hasta ahora casi desconocida, que fue mencionada primero por Leibnitz, la cual llamó geometría de la posición [*Geometriam situs*]. Esta rama se ocupa sólo en la determinación de la

posición y sus propiedades; no involucra distancias, ni cálculos realizados con ellas. Aún no se ha determinado satisfactoriamente qué tipos de problemas son relevantes para esta geometría de la posición, o que métodos deberían usarse para resolverlos. Por lo tanto, cuando un problema recientemente mencionado parecía geométrico, pero estaba hecho de tal manera que no requería mediciones de distancias, y ningún cálculo era de utilidad; no me cabe duda de que se relacionaba con la geometría de la posición - especialmente porque su solución involucraba sólo posición, y ningún cálculo era de utilidad. He decidido, por lo tanto, dar aquí el método que he encontrado para resolver este problema, como un ejemplo de la geometría de la posición.

La referencia de Leibniz se remonta a 1679, donde él escribió:

No estoy satisfecho con el álgebra, ya que no produce ni las pruebas más cortas, ni las más bellas construcciones de geometría. En consecuencia, en vista de esto, considero que necesitamos aún otro tipo de análisis, geométrico o lineal, que trate directamente con la posición, así como el álgebra trata con magnitudes...

Previa a la publicación ya mencionada de Euler, las primeras correspondencias encontradas que abordan el problema de los puentes de Königsberg y geometría o cálculo de la posición son entre Ehler y Euler, comenzando con esta de Ehler, quien fungió como intermediario para Heinrich Kühn, un profesor de matemáticas:

Nos rendiría a mí y a nuestro amigo Kühn un valioso servicio, dejándonos en gran deuda con usted, gran señor, si pudiera enviarnos la solución, que usted conoce bien, al problema de los siete puentes de Königsberg, junto con una prueba de ella. Esto probaría ser un extraordinario ejemplo del cálculo de la posición [Calculi Situs], digno de su gran genio...

A lo que Euler contestó:

Así como puede ver, noble señor, este tipo de solución mantiene poca relación con las matemáticas, y no comprendo por qué espera usted que un matemático la obtenga, en vez de alguien más, ya que la solución está basada únicamente en la razón, y su descubrimiento no depende de principio matemático alguno. Es por ello que incluso yo no sé por qué estos cuestionamientos que tienen tan poca relación con las matemáticas son resueltos más rápidamente por matemáticos que por otros. Por el momento, noble señor, usted ha asignado esta pregunta a la geometría de la posición, pero yo soy ingnorante en cuanto a lo que esta nueva disciplina implica, así como qué tipos de problemas Leibniz y Wolff esperaban ver expresados de esta forma...

Alrededor de las mismas fechas, Euler le escribió a Giovanni Marinoni, un matemático e ingeniero Italiano, introduciendo el problema de este modo:

Esta pregunta es muy banal, pero me pareció merecedora de atención pues ni la geometría, ni el álgebra, ni el arte de contar fueron suficientes para resolverla. En vista de ello, comencé a preguntarme si pertenecía a la geometría de la posición [geometriam Situs], la cual Leibniz alguna vez anheló tanto. Es así como, después de deliberar un poco, obtuve una regla simple y completamente establecida, con cuya ayuda uno puede decidir inmediatamente para todos los ejemplos de este tipo, con cualquier número de puentes en cualquier disposición, si tal viaje en redondo es posible, o no...

Fueron varios los problemas como éste, así como otros juegos y acertijos, los que no fueron inicialmente considerados dentro del área de teoría de gráficas, ya que esta área de las matemáticas aún no se descubría como tal. Entre los científicos y acertijos que utilizaron esquemas a modo de gráfica, en 1847 Kirchhoff los empleó para trabajar con circuitos eléctricos; en 1852, surgió el problema de colorear mapas y propició la investigación en gráficas. En 1857, Cayley estudió la enumeración de isómeros de un compuesto orgánico dibujando líneas unidas a puntos de acuerdo con sus valencias de enlace, y fue en 1850 que Hamilton ideó su famoso juego, el cual posteriormente dio lugar a los ciclos hamiltonianos antes mencionados. En 1869 Jordan estudió estructuras arborescentes abstractamente; Lewin representó personas mediante puntos, y unió líneas entre ellos si dichas personas tenían relaciones personales, esto en el ámbito de la psicología; y Uhlenbeck, Lee y Young usaron esquemas gráficos para simbolizar estructuras moleculares y sus interacciones dentro de la física. En todos estos casos, se simbolizaba un problema mediante un esquema de gráfica, y se estudiaban las soluciones reflexionando sobre dicho esquema. Al estudiar los esquemas en general, se obtienen soluciones a problemas múltiples. Es importante recalcar que el trazado de la gráfica no es un problema de geometría métrica, la forma de las líneas que unen los puntos no es relevante, ni lo largo de ellas; lo importante son las relaciones entre los puntos y sus interacciones [3].

Un problema introducido en el siglo XIX fue el que tuvo mayor impacto para el desarrollo de la teoría de gráficas: el famoso *problema de los cuatro colores*. Introducido por Augustus de Morgan, replanteado por Francis Guthrie y popularizado por Arthur Cayley; preguntaba si era posible colorear las regiones de cualquier mapa con cuatro o menos colores de tal manera que todo par de regiones con frontera común fueran coloreadas con colores distintos. Una demostración de Alfred Bray Kempe, resultó tener un error descubierto por Percy John Heawood; y la solución final al problema se obtuvo mediante la ayuda de una computadora hasta 1976.

Hasta 1891 fue que se escribió el primer artículo puramente teórico que manejaba gráficas como objetos matemáticos, escrito por Julius Petersen, *La teoría de gráficas regulares*. Puede ser que el motivo por el cuál usó el término de “gráfica”, es porque se trataba del nombre que se le dio en ese tiempo. Fue hasta 1936

que se escribió el primer libro que trata únicamente de teoría de gráficas, *Teoría de gráficas finitas e infinitas* de Denés König. En este libro se presentó por primera vez a la teoría de gráficas como una área organizada de las matemáticas. Para los matemáticos de habla inglesa había poco interés en esta área antes de la publicación del libro, cosa que cambió al término de la Segunda Guerra Mundial, y a lo largo del siglo XX, donde se desarrolló enormemente, tanto en el ámbito matemático, como en el de sus aplicaciones en todos los campos. A este libro le siguió otro escrito por Claude Berge y posteriormente uno de Oystein Ore y uno de Frank Harary, que favorecieron a que la teoría de gráficas fuera aún mejor conocida en Europa. Paul Erdos, un estudiante de König, y uno de los matemáticos más conocidos de la segunda mitad del siglo XX, realizó contribuciones muy importantes en esta área. Otro contribuyente de gran relevancia fue William Tutte, quien jugó un papel importante descifrando códigos alemanes en la Segunda Guerra Mundial. A partir de los años sesenta del siglo XX es que se ha dado un mayor crecimiento de matemáticos, congresos, revistas y libros que investigan y tratan esta fascinante área matemática; y sigue creciendo gracias a sus aplicaciones en la comunicación, el internet y las ciencias de la computación [6].

Previamente se introdujo, no sólo el inicio de esta interesante área de las matemáticas, sino también el estudio de recorridos dentro de ésta: los eulerianos, que dieron pie al nacimiento de la teoría de gráficas; y los hamiltonianos, que trataremos en este trabajo. A continuación, se darán a conocer los conceptos empleados a lo largo del texto, y así mismo se darán las referencias para profundizar en dichos conceptos que no sólo abarcarán nociones de gráficas sino también de topología y geometría.

1.3. Definiciones

Se presentan a continuación los conceptos principales que se manejarán en el resto del presente trabajo. Las palabras en cursivas denotan definiciones, y de ellas, las que estén en negritas también, serán las de mayor relevancia.

1.3.1. Definiciones de gráficas

Hemos dado el desarrollo histórico de la teoría de gráficas, ahora comencemos por definir el concepto de gráfica y las nociones principales del área que ocuparemos. Nuestras referencias principales en esta sección serán [6] y [27], y serán empleadas también en la siguiente sección. Si se desea leer más acerca de conceptos básicos de gráficas, puede consultarse también [8].

¿Qué es una gráfica?

Gráfica : Una *gráfica* o *grafo* $G = (V, E, I)$ es un conjunto V no vacío de elementos llamados *vértices*, junto con un conjunto E , a cuyos elementos

se les llama aristas, y una *relación de incidencia* I entre los elementos de V y los elementos de E , tal que cada arista $e \in E$ es incidente a dos vértices distintos $v_1, v_2 \in V$, o es incidente “doblemente” al mismo vértice $v \in V$, en cuyo caso, la arista se llama **lazo** o **loop**.

A la cardinalidad del conjunto de vértices de una gráfica G , $|V(G)|$, se le llama el **orden** de G , y a la cardinalidad del conjunto de aristas **tamaño**.

Si múltiples aristas son incidentes al mismo par de vértices, éstas se llaman **aristas múltiples** o **multiaristas**, y en caso de tener este tipo de aristas a la gráfica se le llama *multigráfica*. A partir de este momento no consideraremos multigráficas a menos que se especifique lo contrario.

A menudo representamos una gráfica G por medio de un diagrama (y nos referimos a la gráfica como el diagrama), donde cada vértice se indica por un pequeño punto, y una arista ab por un segmento o una línea (recta o curva) entre los vértices a y b .

Una arista $e = uv$ en una gráfica se dice que *une* a los vértices u y v , y se dice que u y v son **vértices adyacentes**, también se dice que son *vecinos* el uno del otro. Diremos que u y e son **incidentes** (igual para v y e). Si se tienen los pares de aristas $e = uv$ y $f = vw$, que comparten el mismo vértice v , éstas son **aristas adyacentes**. Esta terminología es la que ocuparemos cuando abordemos nuestros problemas de gráficas y mapas.

Grado de un vértice : El *grado* de un vértice $v \in V(G)$, denotado por $\delta(v)$, es el número de aristas que inciden en él.

Gráfica regular : Una gráfica es *regular* si todos sus vértices tienen el mismo grado. Si el grado es r , entonces es r -regular.

Una sucesión de elementos de un conjunto A es una función $s : \mathbb{N} \rightarrow A$ o $s : \{0, 1, \dots, n\} \rightarrow A$ donde lo que usualmente entendemos por sucesión es el conjunto de las imágenes $s(0), s(1), \dots$, o bien s_0, s_1, \dots .

Camino en una gráfica : Un *camino* en una gráfica es una sucesión finita de vértices (v_1, v_2, \dots, v_n) tal que v_i es adyacente a v_{i+1} , para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$; más en específico, se le llama un $v_1 v_n$ -camino. Si $v_1 = v_n$, el camino es **cerrado**. En el caso de los rayos, que serán definidos más adelante en las definiciones de gráficas infinitas, se tratan de sucesiones naturales.

Con estas primeras definiciones ya podemos dar unas de las definiciones centrales del trabajo presente.

Ciclo, ciclo hamiltoniano y gráfica hamiltoniana : Un *ciclo* de una gráfica es un camino cerrado que no repite vértices, excepto el inicial con el

final. Al ciclo de n vértices se le denota por C_n , y se le llama n -ciclo. Un ciclo es **hamiltoniano** si contiene a todos los vértices de la gráfica, una gráfica que contiene un ciclo hamiltoniano se llama **gráfica hamiltoniana**.

El número de aristas distintas en un camino o ciclo es su *longitud*.

Distancia entre vértices de una gráfica : La *distancia* entre dos vértices u y v en una gráfica G es la menor longitud de todas las uv -trayectorias en G , denotada por $d_G(u, v)$ o simplemente $d(u, v)$ si es claro con qué gráfica se está trabajando. De no existir uv -trayectorias en G , la distancia entre u y v se define como ∞ .

Subgráfica de una gráfica y subgráfica inducida : Una gráfica H se llama *subgráfica* de una gráfica G si todo vértice y arista de H es un vértice y una arista de G , respectivamente. Es decir, $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Una subgráfica H de G es *inducida* si se tiene que, para todo par de vértices u y v de H tales que son adyacentes en G , entonces también lo son en H .

Nótese que una gráfica G es subgráfica de sí misma, todas las demás subgráficas son *subgráficas propias* de G .

Trayectoria en una gráfica : Una *trayectoria* en una gráfica es una sucesión de vértices (v_1, v_2, \dots, v_n) tal que v_i es adyacente a v_{i+1} , para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$, y $v_i \neq v_j$ para todo $i \neq j$. Es decir, es un camino que no repite vértices.

Conexidad de una gráfica : Una gráfica G es *conexa* si para todo par de vértices u, v existe una uv -trayectoria.

Una gráfica G no conexa, *inconexa*, o *disconexa*¹, se puede separar en dos o más estructuras conexas, llamadas **componentes conexas** o simplemente *componentes*, donde cada una es una subgráfica de G que no es una subgráfica propia de otra subgráfica conexa de G .

Conjunto de corte : Sea G una gráfica conexa. Un *conjunto de corte* por vértices, es un conjunto $U \subset V(G)$ tal que $G - U$ es inconexa. Un conjunto de corte de cardinalidad mínima en G se llama un *conjunto de corte mínimo*.

Conexidad puntual : La *conexidad puntual* de una gráfica conexa G con $|V(G)| \geq 2$, denotada por $K(G)$, es el mínimo número de vértices que se necesitan para desconectar a G . Es decir, es la cardinalidad de un conjunto de corte mínimo de G .

¹En realidad, la palabra “disconexa” no existe en español, por lo que se usa generalmente el término inconexa para referirse a una gráfica no conexa.

Gráfica k -conexa : Una gráfica es k -conexa si $K(G) \geq k$.

Árbol : Es una gráfica conexa sin ciclos.

Gráfica cúbica : Es una gráfica 3-regular.

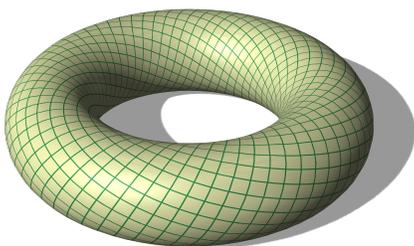
Gráfica plana : Una gráfica es *plana* si puede dibujarse en el plano de modo que sus aristas son representadas como curvas en la superficie que se intersecan sólo en los vértices.

Una gráfica plana G que está dibujada en el plano sin que sus aristas se crucen se dice que está *encajada en el plano*, resultando en un *encaje planar* de G . En seguida, en las nociones de topología, veremos que esto está íntimamente relacionado con mapas y con las características de la superficie.

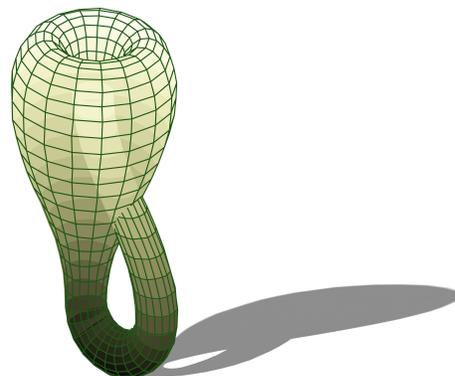
1.3.2. Algunas nociones de topología

Variedad y superficie : Una *variedad* es un espacio topológico que se comporta localmente como el espacio euclidiano. Una *superficie* es una variedad dos dimensional.

A continuación, en la figura 1.3 mostramos dos ejemplos importantes de superficies, el *toro* y la *botella de Klein*. Mostramos su construcción a partir de una superficie cuadrada (ver 1.4 y 1.5): para el toro, identificamos los pares de lados opuestos en la misma dirección. Para la botella de Klein, identificamos un par de lados opuestos en la misma dirección, y otro par de lados opuestos en dirección opuesta. En la sección de clasificación de superficies del anexo se pueden consultar con más detalle éstas y otras superficies.



(a) Toro



(b) Botella de Klein

Figura 1.3: Ejemplos de superficies

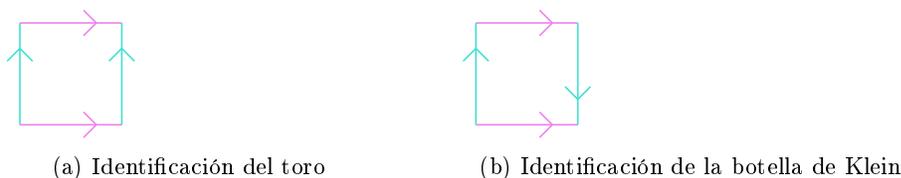


Figura 1.4: Identificación para el toro y la botella de Klein

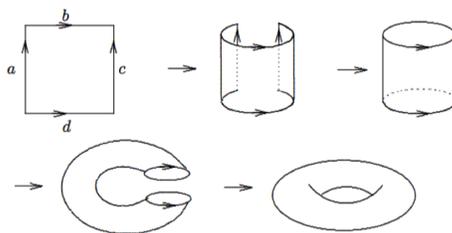


Figura 1.5: Construcción del toro. Imagen tomada de [7].

Mapa y mapa dual [11] : Un poliedro con N_2 caras, N_1 aristas y N_0 vértices puede ser considerado como un *mapa*, es decir, como la partición de una superficie no acotada en N_2 regiones poligonales por medio de N_1 curvas simples uniendo pares de N_0 puntos. De un mapa dado se puede derivar un segundo mapa, llamado el *mapa dual*, en la misma superficie. Este segundo mapa tiene N_2 vértices, uno en el interior de cada cara del mapa dado; N_1 aristas, una cruzando cada arista del mapa dado; y N_0 caras, una rodeando cada vértice del mapa dado.

Cuando trabajamos con gráficas, usualmente las dibujamos en un trozo de papel. Pero al hacer esto, también le damos una estructura abstracta a la gráfica. A esta gráfica junto con su estructura topológica es lo que llamaremos mapa. Esta definición de mapa topológico es central y es la que más usaremos a lo largo del texto.

Mapa topológico [27] : Un mapa es una gráfica dibujada o encajada sobre una superficie, es decir, en una variedad dos dimensional:

Un *mapa* M es una gráfica Γ encajada en una superficie X ($\Gamma \subset X$) de tal modo que:

- Los vértices son representados como puntos distintos de la superficie.
- Las aristas son representadas como curvas en la superficie que se intersectan sólo en los vértices.
- Si cortamos la superficie a lo largo de la gráfica dibujada, lo que queda ($X \setminus \Gamma$) es una unión ajena de componentes conexas, llamadas *caras*, cada una homeomorfa a un disco abierto.

A los mapas se les conoce también con los nombres de: *gráficas encajadas*, *gráficas de listones*, *gráficas gordas*, *gráficas con rotación* y también *gráficas topológicas*. La teoría que lo estudia es la teoría topológica de gráficas.

Es importante resaltar que una gráfica se puede dibujar de distintas formas, siempre que conserve el mismo conjunto de vértices, aristas, y las relaciones de adyacencia e incidencia.

Característica (o identidad) de Euler [3] : Para un mapa en una superficie con V vértices, A aristas y C caras, se define como: $\chi = V - A + C$.

Por ejemplo, para el plano y la esfera $\chi = 2$ y para el toro $\chi = 0$. También se le llama *característica de Euler-Poincaré*.

Género de una superficie [3] : Se define como $g = 1/2(2 - \chi)$. Se puede entender como el número de *agujeros* de la superficie. Alternativamente, puede definirse como el mayor número de curvas cerradas simples que no se intersecan y que pueden trazarse sobre la superficie sin separarla [10].

Así, en la esfera $g = 0$ y en el toro $g = 1$.

Tanto la característica como el género se consideran *características de la superficie* [3].

Una gráfica por sí sola no determina el mapa, ni si quiera su género; ésto lo determina el encaje que la gráfica tenga.

Un resultado interesante es que hay un encaje planar de una gráfica sí y sólo sí hay un encaje esférico de ella. Naturalmente, hay otras superficies más complejas en las que una gráfica se puede encajar sin que sus aristas se crucen, por ejemplo, el toro, obteniendo un *encaje toroidal*.

Teselación [36] : Una *teselación* (mosaico, o embaldosado) del plano, es una descomposición del mismo en regiones, denominadas teselas, que no se traslapan ni dejan huecos.

Mapa regular [11] : Un mapa se llama *regular*, de tipo $\{p, q\}$, si hay p vértices y p aristas por cada cara, y q aristas y q caras en cada vértice, arreglados *simétricamente*. Por cada mapa del tipo $\{p, q\}$ hay un *mapa dual* del tipo $\{q, p\}$.

Teselación regular : Una teselación es *regular* si sus teselas son todas del mismo tipo de polígono regular.

Las siguientes definiciones de topología se dan con el fin de entender qué es un espacio topológico. En particular, qué son un espacio compacto y un espacio paracompacto, las cuales son nociones que se necesitarán posteriormente. No se abordarán todos los conceptos de topología, se asumirá que el lector tiene las bases matemáticas suficientes, las cuales se pueden consultar en [13].

Espacio topológico y espacio Hausdorff [13] : Un *espacio topológico* es un par (X, O) , consistente de un conjunto X y una familia O de subconjuntos de X que satisfacen las siguientes condiciones:

- $\emptyset \in O$ y $X \in O$
- Si $U_1 \in O$ y $U_2 \in O$, entonces $U_1 \cap U_2 \in O$.
- Si $A \subset O$, entonces $\bigcup A \in O$.

Al conjunto X se le llama un *espacio*, los elementos de X se llaman *puntos* del espacio, y los subconjuntos de X pertenecientes a O se llaman *abiertos* en el espacio, y a la familia O de conjuntos abiertos de X se le llama también una *topología* de X .

Un espacio topológico X se llama *espacio Hausdorff* o *espacio T_2* , si para cada par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$, existen conjuntos abiertos U_1, U_2 tal que $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Ejemplos :

1. Sea X un conjunto arbitrario y O la familia de todos los subconjuntos de X , (X, O) es un espacio topológico, llamado *espacio discreto*.
2. Sea \mathbb{R} y O la familia consistente de todos los conjuntos $U \subset \mathbb{R}$ con la propiedad de que cada $x \in U$, existe un $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U$. A la topología O se le llama *topología natural de la recta real*. El espacio topológico resultante es Hausdorff.

Cubierta y subcubierta de un conjunto X [13] : Una *cubierta* de un conjunto X es una familia $\{A_s\}_{s \in S}$ de subconjuntos de X tal que $\bigcup_{s \in S} A_s = X$, y que (si X es un espacio topológico) $\{A_s\}_{s \in S}$ es una cubierta abierta (cerrada) de X si todos los conjuntos A_s son abiertos (cerrados). Decimos que una cubierta $\{B_t\}_{t \in T}$ es un *refinamiento* de una cubierta $\{A_s\}_{s \in S}$ del mismo conjunto X si para cada $t \in T$ existe una $s \in S$ tal que $B_t \subset A_s$, en cuyo caso también decimos que B refina a A . Una cubierta $A' = \{A'_s\}_{s \in S'}$ de X es una *subcubierta* de otra cubierta $A = \{A_s\}_{s \in S}$ de X si $S' \subset S$ y $A'_s = A_s$ para toda $s \in S'$. En particular, una subcubierta es un refinamiento.

Espacio compacto y paracompacto [13] : Un espacio topológico X se llama *espacio compacto* si X es un espacio Hausdorff y toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita. Una familia $\{A_s\}_{s \in S}$ de subconjuntos de un espacio X es *localmente finita* si para cada punto $x \in X$ existe una vecindad U tal que el conjunto $\{s \in S : U \cap A_s \neq \emptyset\}$ es finito. Un espacio topológico X se llama *espacio paracompacto* si X es un espacio Hausdorff y toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto localmente finito.

Homeomorfismo [13] : Un mapeo continuo $f : X \rightarrow Y$ se llama *homeomorfismo* si f mapea X en Y de forma biyectiva y si el mapeo inverso f^{-1} de Y a X es continuo.

1.3.3. Definiciones de gráficas infinitas

Ahora lo que sigue es dar un salto a las gráficas infinitas, es decir, aquellas gráficas donde la cardinalidad del conjunto de vértices y del conjunto aristas no necesariamente es finita. La mayor parte de las siguientes definiciones provienen de [25].

Gráfica localmente finita : Una gráfica es *localmente finita* si todos sus vértices tienen grado finito.

Rayo y rayos equivalentes : Un *rayo* es una trayectoria que es infinita hacia un extremo (en una sola dirección). Dos rayos en una gráfica G son *equivalentes* si para todo subconjunto finito S de vértices, ambos rayos tienen un “subrayo” en la misma componente de $G - S$.

End : Es una clase de equivalencia de rayos equivalentes que se pueden pensar como un mismo “punto al infinito”.

Compactificación de G : A una gráfica encajable G junto con sus ends se le llama la compactificación Freudenthal de G y se denota por $|G|$.

Curva de $|G|$, X -curva y curva hamiltoniana : Una *curva* (cerrada) de $|G|$ es la imagen de un mapeo continuo del círculo unitario S^1 a $|G|$. El mapeo en sí se llama una *parametrización* de la curva. Para un conjunto de vértices X , una X -curva es una curva cerrada en $|G|$ tal que cada vértice de X es usado exactamente una vez. La X -curva es *estricta* si no usa vértices fuera de X . Una $V(G)$ -curva, llamada **curva hamiltoniana**, pasa por cada vértice exactamente una vez, pero puede pasar por un end arbitrariamente seguido.

Orden cíclico de X inducido por C : Es el orden en que los vértices de X ocurren en C si C es una X -curva con una parametrización fija. En general decimos que un orden cíclico O (en un conjunto X) y una S -curva C (con $S \subseteq X$) son *compatibles* en S si el orden cíclico en S inducido por C es la restricción de O a S .

Si x, y, z son tres elementos de un conjunto cíclicamente ordenado X , usaremos $x \rightarrow y \rightarrow z$ para denotar que x, y, z ocurren en este orden.

Orden cíclico encajable : Llamamos a un orden cíclico O en un conjunto $X \subseteq V(G)$ *encajable* si para todo conjunto finito $S \subseteq X$ y $T \subseteq V(G) \setminus X$ existe una S -curva en $|G| - T$ que es compatible con O en S .

Trayectoria de Petrie : Una trayectoria de Petrie en un mapa (regular) M es una sucesión cíclica de aristas tales que dos de ellas consecutivas, pero no tres, comparten una cara de M .

Si se desea leer más acerca de gráficas infinitas, puede consultarse [12].

1.4. Notación

1.4.1. La notación de Schläfli

El símbolo usual de Schläfli, $\{p, q\}$, en la versión de Coxeter, denota el sólido platónico cuyas caras son p -ágonos regulares y cuyas figuras de vértice son q -ágonos regulares [9].

Recuérdese que también utilizamos esta notación para un mapa regular de tipo $\{p, q\}$, si hay p vértices y p aristas por cada cara, y q aristas y q caras en cada vértice [11]; como se puede ver en las definiciones.

1.5. ¿Qué son las teselaciones?

Una *teselación plana* F es una familia numerable de conjuntos cerrados $F = \{T_1, T_2, \dots\}$ que cubren el plano sin huecos o sobreposiciones. Más específicamente, la unión de los conjuntos T_1, T_2, \dots (a las que se llaman *teselas* de F) es todo el plano, y los interiores de los conjuntos T_i son ajenos por pares. Por “el plano” se hace referencia al plano euclidiano de geometría elemental, el cual también se puede pensar como el espacio vectorial \mathbb{R}^2 con la topología usual que comúnmente manejamos en cálculo. Una restricción natural para teselas y teselaciones “bien portadas” es pedir que cada tesela sea homeomorfa al disco cerrado, en otras palabras, que sea un disco topológico cerrado, el cual es cualquier conjunto cuya frontera es una curva cerrada simple. De aquí en adelante se considerará dicha restricción, ya que son el único tipo de teselaciones que se abordarán.

A los puntos de intersección de un conjunto finito de teselas (al menos tres teselas) de la teselación se les llamará *vértices* de la teselación, y a los arcos o rectas se les llamará *aristas*. La curva simple que forma la frontera de la tesela está dividida por los vértices de la teselación, a cada arco de la teselación se le llamará también *arista de la tesela*. Cada arista de la tesela coincide con las aristas de dos teselas que yacen a cada lado de ella. Una arista conecta dos vértices (llamados *puntos finales* de la arista) y cada vértice es el punto final de cierto número de aristas, llamado *grado* o *valencia* del vértice, que debe ser al menos tres. Si cada vértice de una teselación tiene la misma valencia j , entonces decimos que es una teselación *j-valente*.

Un caso especial de teselaciones es en las cuales sus teselas son polígonos. Un polígono con k lados (aristas) se llama un k -ágono.

Dos teselas se llaman *adyacentes* si tienen una arista en común. De modo similar, cuando dos aristas tienen un punto final común, también se llaman adyacentes. Cuando consideremos gráficas, también llamamos a los vértices adyacentes si tienen una arista en común. El término *incidente* se usa para denotar la relación de una tesela con cada una de sus aristas o vértices, y también el de una arista con cada uno de sus puntos finales. Hay que notar que esta relación es simétrica.

Las teselaciones de mayor interés en este trabajo son las *regulares*, las cuales son *monoedrales*, lo que quiere decir que todas las teselas son del mismo tamaño y forma, ya sea directamente o reflectivamente; es decir, que las teselas o son iguales, o son distintas, pero en este segundo caso se puede llegar de una a otra por medio de una *reflexión*, concepto que explicaremos en la siguiente sección. Al conjunto al que cada tesela es congruente se le llama *prototesela* de la teselación. Las teselaciones *regulares* son monoedrales en donde las prototeselas son polígonos regulares [18]. Sin embargo, aquí se considerará una definición de regularidad más estricta que se dará en la siguiente sección. Para el plano, es bien conocido que sólo hay tres: la de triángulos $\{3, 6\}$, la de cuadrados $\{4, 4\}$ y la de hexágonos $\{6, 3\}$, mostradas en la figura 1.6.

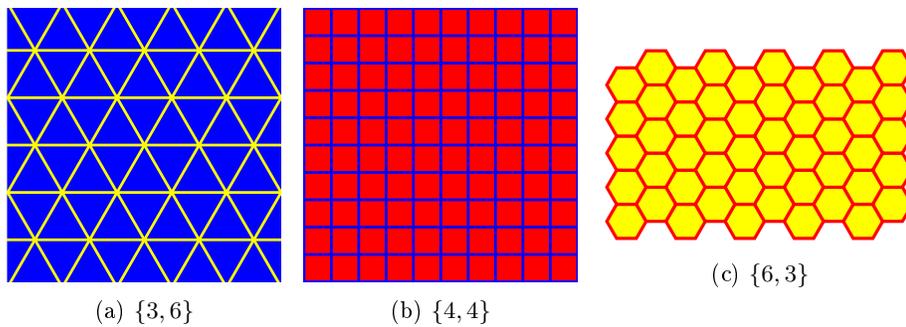


Figura 1.6: Las tres teselaciones regulares del plano

En seguida mostramos las mismas teselaciones donde se notan los vértices de las teselaciones, con otro color, que son las intersecciones entre las aristas. Estas imágenes (figura 1.7) fueron realizadas con el programa *KaleidoTile*, de Jeff Weeks.

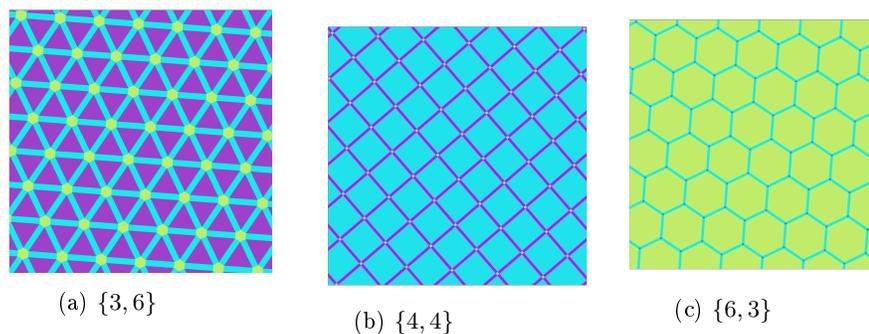


Figura 1.7: Las tres teselaciones regulares del plano donde se aprecian los vértices

1.5.1. Los 17 grupos de simetrías o grupos cristalográficos

Para hablar sobre los grupos de simetrías del plano, tenemos que explicar qué es la simetría, cuáles son las transformaciones del plano, y dar la noción de grupo. Para esta subsección nos basamos principalmente en [36] y en [18].

Antes de formalizar estas nociones, daremos una idea intuitiva de lo que son las simetrías y los tipos que existen. Para dar la idea de lo que es simetría, imagínese visualmente un objeto, tal que si es modificado, bajo ciertas reglas, el objeto se ve igual. Es a la modificación a la que se le llamará una transformación, y una de las reglas es que esta modificación no deforme el objeto, que no lo cambie de tamaño. Hay cuatro tipos de simetrías en el plano: reflexiones, rotaciones, traslaciones, y deslizamientos con reflexión. Para la reflexión, imagínese que hay un espejo perpendicular al plano en cuestión. El espejo intersecta al plano en una línea recta, y lo divide en dos partes; y refleja lo que está sobre un lado del plano en una copia exacta, pero volteada, en el otro lado del espejo (en el plano). Una rotación es una imagen que, al ser rotada bajo cierto ángulo en el plano, no se percibe que se realizó la rotación. Una traslación es la repetición del objeto tal cual, sin girarlo ni reflejarlo, a distancias iguales en el plano. Finalmente, el deslizamiento con reflexión es una combinación de esta traslación junto con una reflexión, el cual crea un efecto particular y distinto a los anteriores. Ahora se hablará de las nociones formales de lo anteriormente dicho y lo que le precede.

Una *aplicación* σ del plano asocia a cada punto p del plano un punto imagen p' , que denotamos $p' = \sigma(p)$. Un caso especial es la *identidad*, que lleva a cada punto p en sí mismo, y se denota por I . Dadas dos aplicaciones σ y τ , si la imagen de σ está contenida en el dominio de τ , se puede construir una nueva aplicación, denotada por $\tau \circ \sigma$ tal que si σ lleva p en p' , y τ lleva p' en p'' , entonces $\tau \circ \sigma$ lleva p en p'' . Una aplicación σ puede tener una aplicación inversa, la cual se denota por σ^{-1} , que compuesta con σ da la identidad, es decir, $\sigma^{-1} \circ \sigma = I$, en otras palabras, si σ lleva p en p' , entonces σ^{-1} lleva a p' en p . En este caso también sucede que $\sigma \circ \sigma^{-1} = I$.

Se les llama *transformaciones* a las aplicaciones inyectivas. Un tipo especial de transformaciones $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ son las que conservan la estructura geométrica del plano preservando la distancia, es decir, las transformaciones tales que $d(\tau(p), \tau(q)) = d(p, q)$ para cada par de puntos $p, q \in \mathbb{R}^2$, donde d es la distancia usual del plano: $d(p, q) = \|p - q\|$, donde $\|\cdot\|$ es la norma euclídea de dimensión 2. A estas transformaciones que preservan distancias se denominarán como *isometrías en el plano*, también conocidas como *transformaciones rígidas* del plano en el plano. Se puede probar que toda isometría es inyectiva y tiene inversa, además, la composición de isometrías es una isometría. De este modo, el conjunto de isometrías de un plano es un *grupo* con respecto a la composición de transformaciones. La palabra grupo enfatiza que el conjunto tiene una estructura algebraica especial. Recordemos la definición de grupo: Un *grupo* es un conjunto G en el que está definida una operación, es decir, una función $\star : G \times G \rightarrow G$ con las propiedades siguientes:

1. *Cerradura*: El resultado de operar dos elementos de G es un elemento de G . En símbolos: $g \star h \in G$ para cualesquiera $g, h \in G$.
Debe observarse que la propiedad de cerradura es consecuencia de que el contradominio de la función \star sea G , pero suele resaltarse este hecho por su importancia.
2. *Asociatividad*: Para cualesquiera tres elementos de G , da lo mismo operar los dos primeros y al resultado operarlo con el tercero, que operar el primero con el resultado de operar los dos últimos. Esto es: $(g \star h) \star k = g \star (h \star k)$.
3. *Existencia del neutro*: Existe un elemento $e \in G$ tal que al operarlo con cualquier otro no afecta a este último. Es decir: $e \star g = g \star e = g$.
4. *Existencia del inverso de cada elemento dado*: Para cada $g \in G$, existe otro elemento de G , g^{-1} , tal que al operarlo con g da como resultado el elemento neutro e . En símbolos, $g^{-1} \star g = g \star g^{-1} = e$.

Dado un grupo de transformaciones Γ , si un subconjunto no vacío H del grupo Γ es un grupo con la composición de funciones, diremos que H es un subgrupo del grupo Γ . Sólo hay cuatro tipos de isometrías del plano: las reflexiones, las traslaciones, las rotaciones, y los deslizamientos con reflexión. A continuación daremos las respectivas definiciones:

Reflexión : Dada una recta l contenida en el plano \mathbb{R}^2 , la *reflexión* σ_l , con respecto a la línea l , es la aplicación que en cada punto p del plano está definida como:

$$\sigma_l(p) = \begin{cases} p, & \text{si el punto } p \text{ está en } l \\ p', & \text{si } p \text{ no está en } l \text{ y } l \text{ es la mediatriz del segmento que une } p \text{ y } p' \end{cases}$$

Rotación : Una *rotación* alrededor de un punto c , con ángulo dirigido θ , es la transformación $\rho_{c,\theta}$ que fija el punto c , y cualquier punto p es enviado en el punto p' , donde $\|c - p\| = \|c - p'\|$ y $\theta = \angle pc p'$ es el ángulo dirigido del vector \vec{cp} al vector \vec{cp}' .

Traslación : Una *traslación* es la transformación que mueve cada punto del plano a la misma distancia y en la misma dirección.

Deslizamiento con reflexión : Un *deslizamiento con reflexión* es la composición de una traslación con una reflexión, y se obtiene al aplicar primero una traslación $\tau_{\vec{a}}$ por un vector no nulo \vec{a} , seguida de una reflexión σ_l con respecto a una línea l , cuya dirección coincide con la del vector \vec{a} .

A la reflexión también se le conoce como simetría de *espejo* o *caleidoscópica*, y que se denota por $*$ en la notación de Conway. Se le llama así por su similitud a los patrones que se ven en los caleidoscopios [9]. Otro término empleado para referirse a la reflexión como simetría del espacio (como en el caso de un espejo plano real, que refleja objetos tridimensionales), es *simetría especular*, la cual

implica el concepto de *quiralidad* (o torsión) [32], un claro ejemplo de este tipo de simetría es la que tienen la mano derecha e izquierda del cuerpo humano, de ahí el uso del concepto de mano como raíz etimológica del término *quiral*.

Describimos al deslizamiento con reflexión como composición de otras isometrías del plano. Las otras composiciones posibles no generan nuevos tipos de isometrías, lo cual no se probará aquí, pero es derivado del *Teorema mágico* mencionado en [9], así como del teorema de clasificación de superficies. Ambos volverán a ser mencionados más adelante, y el segundo será discutido a mayor profundidad en el anexo del presente trabajo.

Dado un conjunto del plano, una *simetría* para este conjunto es una isometría, la cual transforma al conjunto en sí mismo. Es decir, si S denota dicho conjunto, una simetría es una transformación $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\|\sigma(p) - \sigma(q)\| = \|p - q\|$ para todo $p, q \in S$, y, como conjuntos, $\sigma S = S$, donde $\sigma S = \{\sigma(s) : s \in S\}$ es la imagen de s bajo σ . Diremos que un conjunto S posee simetrías si admite una simetría σ , distinta de la identidad. Ahora, dado un conjunto de puntos del plano, su *grupo de simetrías* es la pareja formada por el conjunto de simetrías del conjunto, junto con la operación dada como la composición de funciones.

Acerca del álgebra dentro de los grupos de simetrías del plano, un hecho sorprendente es el teorema atribuido al científico y artista Leonardo Da Vinci, que los caracteriza en dos tipos: Todo grupo finito de simetrías del plano es un grupo cíclico C_n , o bien, un grupo diédrico D_n .

La definición de simetría se puede extender a estructuras más complicadas, para el caso de una teselación se define como sigue: Una simetría σ es una *simetría para una teselación* F , si cada tesela T de la teselación F se transforma en otra tesela del mosaico F , es decir: $T \in F$ implica $\sigma(T) \in F$.

Una manera intuitiva de entender una simetría de una teselación es imaginar que se dibuja una teselación en una hoja de papel infinita, y luego es calcada en una hoja transparente. La simetría corresponde entonces a un movimiento de la hoja transparente, tal que encaja perfectamente sobre el dibujo original después del movimiento.

Si una teselación admite alguna simetría además de la identidad, se llamará *simétrica*, y si su grupo de simetrías contiene al menos dos traslaciones en direcciones no paralelas entonces se llamará *periódica*. En este caso, se pueden representar las dos traslaciones por dos vectores a y b , de modo que $\sigma(T)$ contiene todas las traslaciones $na + mb$, donde n y m son enteros. Comenzando desde un punto cualquiera y fijo O , el conjunto de las imágenes de O bajo el conjunto de traslaciones $na + mb$ forma una *retícula* (también llamado un *enrejado* o *latiz*²). Así, cada teselación periódica es asociada con una retícula.

Dos teselas T_1 y T_2 de una teselación T se llaman *equivalentes* si el grupo de simetrías $\sigma(T)$ contiene una transformación que manda T_1 en T_2 , y al conjunto

²La palabra “latiz” tampoco existe en español, por lo que se usa generalmente el término retícula para referirse al conjunto descrito anteriormente.

de todas las teselas que son equivalentes a T_1 se le llama la *clase de transitividad* de T_1 . Si todas las teselas de T forman una única clase de transitividad se dice que T es *transitiva en teselas* o *isoedral*. La idea de **transitividad** y equivalencia se puede aplicar también a otros elementos de una teselación, por ejemplo, si el grupo de simetrías $\sigma(T)$ contiene transformaciones que manda cada vértice de T en cualquier otro vértice, entonces se dice que los vértices forman una clase de transitividad, o que la teselación es *isogonal*. Análogamente, las teselaciones en que cada arista puede mandarse en cualquier otra arista por una simetría de la teselación se llaman *isotoxal*. Aunque una teselación isoedral, isogonal e isotoxal ya consta de mucha simetría y “regularidad”, es necesario pedir una condición de transitividad aún más fuerte. Para ello, definimos lo que una *bandera* es: una tripleta (V, E, T) consistente de un vértice V , una arista E y una tesela (o cara) T tal que son mutuamente incidentes. Así, las teselaciones **regulares** son aquellas que son transitivas en banderas.

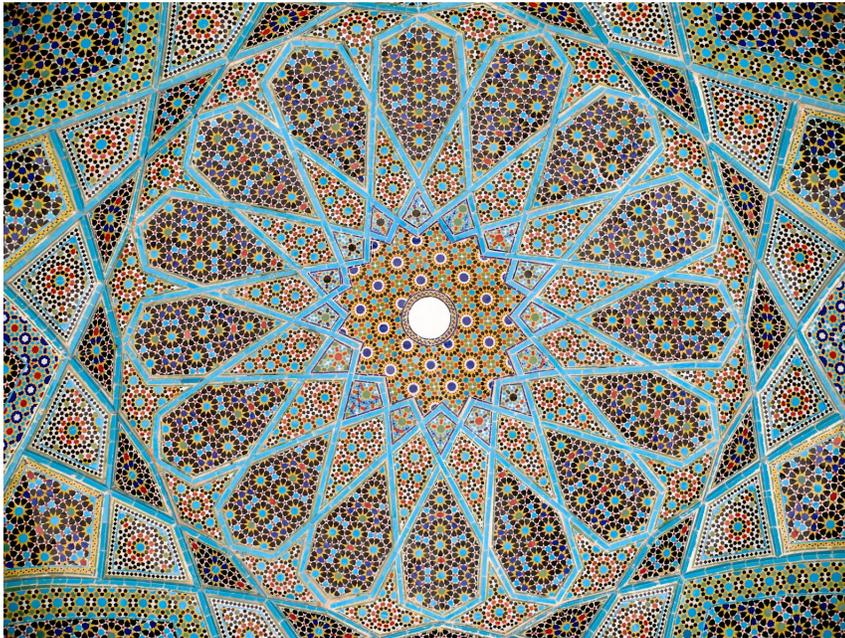


Figura 1.8: Ejemplo de teselado islámico

Se mencionó en la introducción que los árabes desarrollaron mosaicos geométricos, aunque los más antiguos conocidos proceden de Mesopotamia, y otros menos antiguos de Grecia, aunque quizás alcanzaron su mayor apogeo durante la Edad Media (en los siglos V y VI), en las culturas islámicas, también se dio en la ocupación de los moros en España, alrededor del siglo XVIII. Un gran ejemplo de ello es el palacio de la Alhambra en Granada. Como ejemplo de estos teselados islámicos, puede verse la figura 1.8 Esta búsqueda por encontrar

patrones y belleza en estos objetos geométricos, fue a causa del “Segundo Mandamiento” religioso, el cual les prohibía representar personas o animales. A pesar de que ellos no tenían conocimiento matemático formal al respecto, un hecho impresionante es que ellos conocieran cada uno de los 17 grupos de simetrías que pueden usarse para rellenar el plano con teselas, aunque aún matemáticos lo ponen en duda [32]; y más aún, también conocían muchas de las teselaciones *aperiódicas* (las que no se repiten periódicamente), de igual manera, también esculpieron teselaciones tridimensionales en bóvedas. El cristalógrafo E. S. Fedorov fue quien demostró que existen sólo 17 grupos finitos de dimensión dos, los cuales fueron redescubiertos por Polya y Niggli en el siglo XX. A este resultado se le conoce como un teorema de clasificación también nombrado como la *Restricción cristalográfica*. Como los símbolos que se utilizan normalmente para estos grupos son los de cristalografía, es por eso que a los 17 grupos de simetrías del plano también se le conoce como grupos cristalográficos. Se muestran a continuación imágenes con ejemplos de cada uno de los 17 grupos en las figuras 1.9, 1.10 y 1.11. Nótese que las tres teselaciones regulares mencionadas anteriormente, son casos particulares de los 17 grupos de simetrías del plano [36].

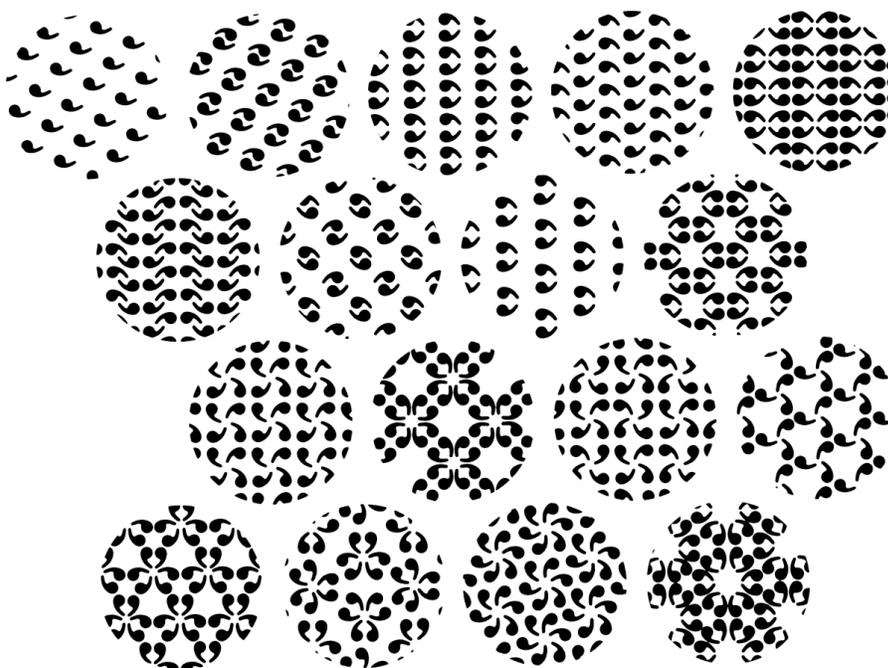


Figura 1.9: Los 17 grupos cristalográficos. Imagen tomada de *Stanford University*.

En las imágenes de las figura 1.10 y 1.11 la primera notación es de Orbifold y la segunda es la cristalográfica. Fueron realizadas con el programa Kali.

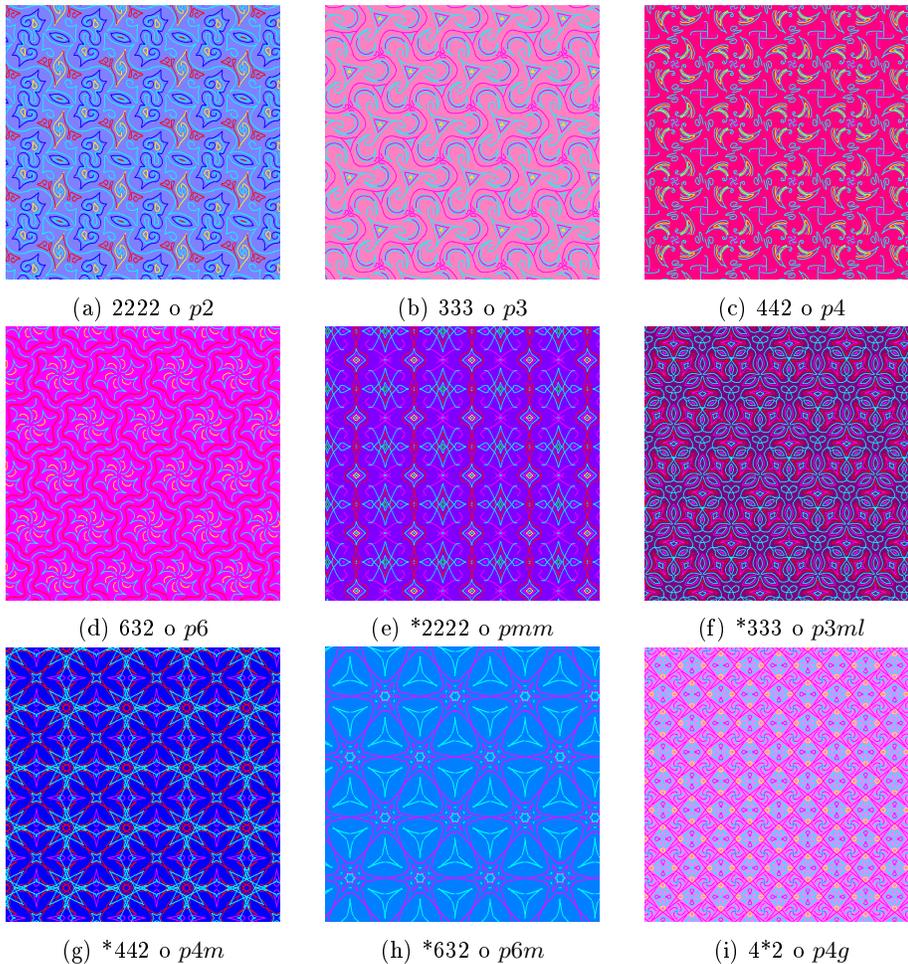


Figura 1.10: Ejemplos de 9 de los grupos cristalográficos realizados con Kali

Cabe mencionar que otra manera de clasificar las posibles simetrías del plano es a través de grupos puntuales, los que fijan un punto; y de *redes de Bravais*, llamadas así por Auguste Bravais, otro cristalógrafo del siglo XIX, también conocidas como *retículas*. Una red de éstas es una colección infinita de puntos discretos invariantes a través de traslaciones. Para el plano hay exactamente cinco: oblicua, cuadrada, hexagonal, rectangular, y rectangular centrada. A partir de estas cinco pueden construirse los grupos de simetría que actúan sobre todo el plano. También existen redes de Bravais en el espacio tridimensional. Los 17 tipos de mosaico del plano se pueden obtener al combinar las 5 redes de dimensión dos con los grupos puntuales. En el espacio, hay 32 grupos puntuales, y al considerar las posibles traslaciones en las redes espaciales, se obtienen 230 grupos posibles, los cuales también fueron descubiertos por Fedorov. Es interesante

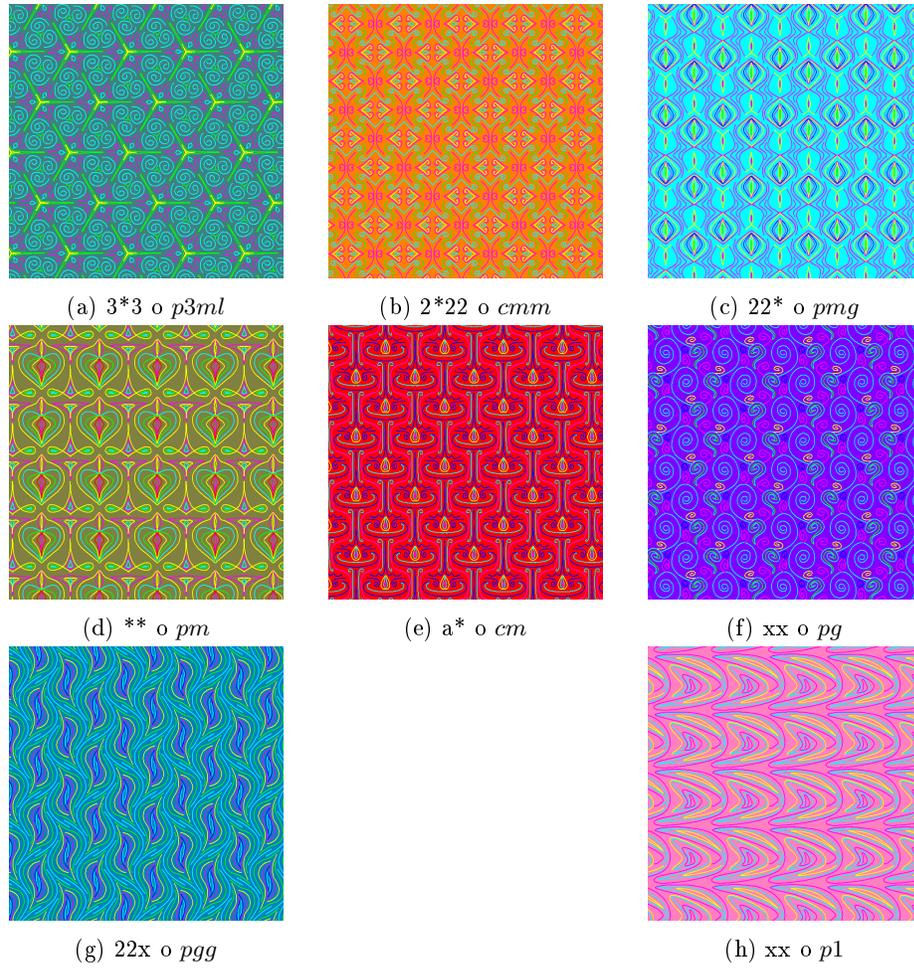


Figura 1.11: Ejemplos del resto de los grupos cristalográficos realizados con Kali

notar que los cuasicristales son objetos muy simétricos, pero no encajan dentro de esta clasificación de la restricción cristalográfica, porque no son teselaciones regulares ni semirregulares, es más, ni siquiera son periódicas. Un filósofo, físico y matemático que estudió y desarrolló muchas teselaciones no periódicas fue sir Roger Penrose [32].

1.5.2. Teselaciones fuera del plano

En los apartados anteriores, se han estudiado patrones simétricos en superficies planas. Sin embargo, muchos de los objetos simétricos que son vistos en nuestra cotidianeidad no son superficies planas.

Para la esfera, hay una restricción similar a la cristalográfica del plano, derivada del mismo *Teorema mágico*, del cuál se puede deducir la restricción cristalográfica del plano, en la versión para la esfera. En este caso, son 14 los grupos de simetrías posibles. Siete de ellos son tipos de simetrías individuales, y los otros siete en realidad son siete familias infinitas.

Un tipo de teselados no mencionado anteriormente y más simple que los vistos del plano y la esfera, es el *friso*. Los frisos están formados por las simetrías de los patrones planos que se repiten infinitamente en una sola dirección. Los vistos anteriormente del plano se dan en dos direcciones. En este caso, existen 7 tipos de frisos, y estudiar sus simetrías es equivalente a estudiarlas en el plano o en la esfera. Para la esfera, se puede imaginar el patrón envuelto sobre el ecuador de una esfera de tamaño suficientemente grande.

Un factor determinante para la restricción cristalográfica y para el teorema mágico mencionado, es la *característica de Euler*. Para un mapa, ésta se define como $V - A + C$, donde V son los vértices, A las aristas, y C las caras del mapa. Este valor depende únicamente de la superficie en donde es dibujado un mapa, y no del mapa en sí. La clasificación de superficies puede consultarse en el anexo, el cual muestra todas las formas que un *orbifold* puede tomar. Esto es de interés pues cualquier patrón que se repita puede ser plegado en un orbifold en alguna superficie. ¿Qué es un orbifold? En ocasiones, conviene pensar en los objetos que se ven iguales como uno solo (se explicará cómo con más detalle adelante), de este modo, se pueden contar cosas que no están en la superficie original, sino en una versión plegada de ella, la que se obtiene al tomar los puntos del mismo tipo en uno solo. Al conjunto de puntos del mismo tipo se le llama la *órbita* de ese tipo de punto bajo la acción del grupo de simetrías. Esta superficie plegada bajo órbitas es llamada orbifold. Una vez que ha sido especificado un orbifold, podemos recuperar una teselación desarrollando el orbifold [9].

Un acercamiento ameno hacia las superficies se puede encontrar en [22].

La órbita de un punto p , se define más formalmente como:

$$O(p) = \{\sigma(p) : \sigma \text{ pertenece al grupo } \Gamma \text{ de simetrías}\}. \quad (1.2)$$

Entonces, al espacio que se obtiene de pensar cada órbita como un punto, también se le puede ver como el espacio de las órbitas de los puntos del plano bajo la acción del grupo Γ . Si en vez de considerar al grupo completo de isometrías, se considera un subgrupo de éste, se le llama *espacio cociente módulo un subgrupo*. En este caso, un subgrupo del grupo de simetrías consta de las clases de equivalencia definidas por el subgrupo del grupo de simetrías. Al pensarlo de este modo se trata del punto de vista algebraico, y si se piensa el orbifold como una superficie de estructura euclidiana a partir de \mathbb{R}^2 como un espacio de identificación bajo una relación de equivalencia, se trata del punto de vista topológico [34].

1.5.3. ¿Cuáles son las teselaciones hiperbólicas?



Figura 1.12: *Circle Limit I*, un ejemplo de una obra de Escher con teselaciones hiperbólicas.

Cabe destacarse que un artista que utilizó las teselaciones hiperbólicas con gran destreza fue Mauritz Cornelis Escher, un grabador holandés del siglo XX. Es impresionante el hecho de que en un principio ocupó matemáticas y teselaciones hiperbólicas sin darse cuenta de ello [34]. De hecho, él era más cercano a los matemáticos que a otros artistas; por ejemplo, fue amigo de H.S.M. Coxeter. Estudió simetrías, teselaciones, poliedros, construcciones imposibles y otros objetos matemáticos. No trabajó únicamente con las teselaciones hiperbólicas, sino que también realizó diseños empleando los 17 grupos de simetría planos mencionados anteriormente, también se inspiró en algunos diseños de la Alhambra e incluso copió varios.

Otro dato curioso es que a Escher se le ocurrió cómo teselar piezas, aunque no conocía los trabajos de Conway, quien determinó una condición necesaria y suficiente para que el plano quede cubierto sin huecos entre las figuras. Relacionando estas ideas, escribió lo siguiente:

La división regular del plano en figuras congruentes que evoquen en el observador una asociación con un objeto natural familiar, es uno de esos problemas o hobbies que genera pasión. He trabajado en

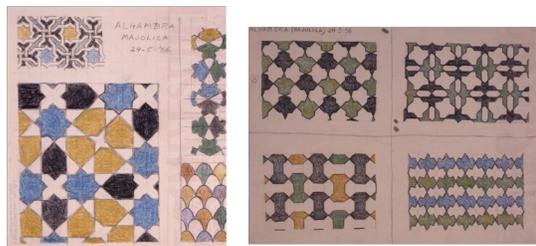


Figura 1.13: Dibujos realizados por Escher copiando diseños de la Alhambra

este problema geométrico multitud de veces a lo largo de los años, intentando resolver distintos aspectos cada vez. No puedo imaginar lo que mi vida hubiera sido si no hubiera encontrado nunca este problema; se puede decir que estoy locamente enamorado de él, y sigo sin saber por qué.

Su obra usa también la proporcionalidad, homotecia, transformaciones isométricas y heterométricas. Realizó configuraciones espaciales de teselas zoomórficas, teselas que cambian de forma y tamaño, que van de lo poligonal a lo orgánico. Ilustró el infinito y el concepto de límite, el de proporcionalidad, y mostró las transiciones entre ellos, también de lo bidimensional a lo tridimensional así como algunas cuestiones paradójicas.

La obra de Escher tiene el encanto de ser arte y geometría al mismo tiempo.

Lo expuesto sobre Escher en esta primera parte de la sección se ha basado en las referencias [34], [32], [36] y [2]. Si se desea leer un poco acerca de su vida, puede consultarse [14].

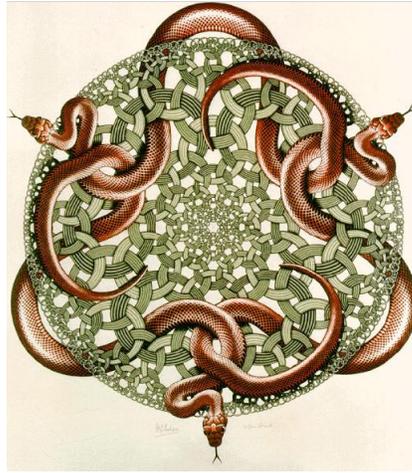


Figura 1.14: *Snakes*, de M.C. Escher.

Antes de comenzar a explicar las teselaciones hiperbólicas de acuerdo con su topología, se explicarán algunos elementos generales de ellas. Nos basaremos principalmente en el artículo [29], que también se usará al introducir las teselaciones hiperbólicas compactas. En la figura 1.15 se muestran ejemplos de teselaciones hiperbólicas realizadas con *KaleidoTile*.

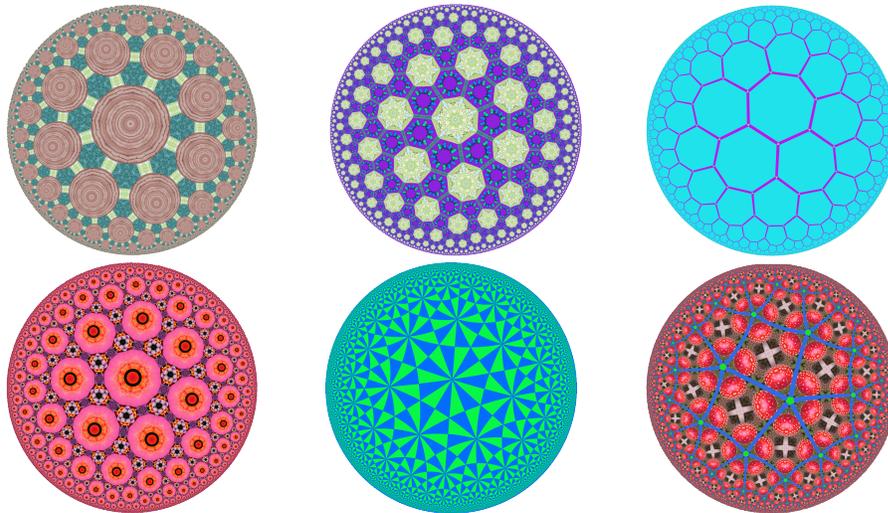


Figura 1.15: Ejemplos de teselaciones hiperbólicas realizadas con *KaleidoTile*

A diferencia del plano euclidiano y el plano elíptico, hay una infinidad de maneras de tapizar el plano hiperbólico con teselas regulares y congruentes. Esto se debe principalmente a que existen triángulos cuya suma interna de ángulos

puede ser tan pequeña como se desee, así como la forma de construir los teselados hiperbólicos. Se debe recordar que en el plano hiperbólico, la suma de ángulos de un triángulo no es π como en el plano euclidiano, sino es siempre menor a π .

A continuación en la figura 1.16 se tienen un triángulo equilátero cuya suma de ángulos es $3\pi/4$, y otro donde la suma de ángulos es cercana a cero. Esto quiere decir que se pueden dibujar triángulos equiláteros con ángulos entre 0 y $\pi/3$, y es posible dibujar una infinidad de teselaciones de triángulos equiláteros. Lo mismo sucede para los otros polígonos regulares.

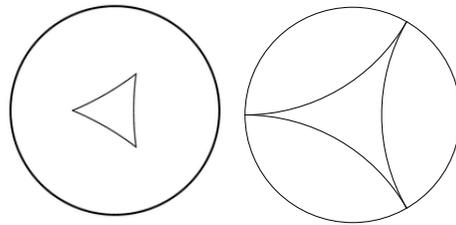


Figura 1.16: Triángulos equiláteros con distinta suma de ángulos en el disco de Poincaré

En la figura 1.17 se tiene la misma situación, pero ahora con heptágonos en vez de triángulos.

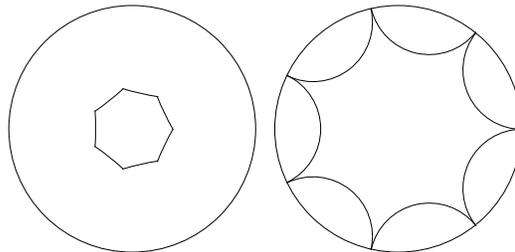


Figura 1.17: Heptágonos regulares con distinta suma de ángulos en el disco de Poincaré

En la figura 1.18, los puntos P y P' son simétricos con respecto a la recta hiperbólica que pasa por M y es perpendicular a PP' . Las distancias hiperbólicas $|MP|$ y $|MP'|$ son iguales. Se puede verificar que P' se obtiene por medio de una inversión en el círculo, la cual es la recta hiperbólica que pasa por M .

La inversión circular es de interés porque preserva ángulos y transforma círculos en círculos. En el caso del espacio, manda esferas en esferas. Para leer un poco más sobre inversión en el plano, puede consultarse [10].

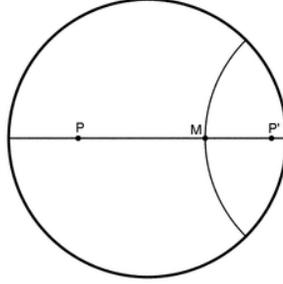


Figura 1.18: Puntos simétricos con respecto a una recta hiperbólica

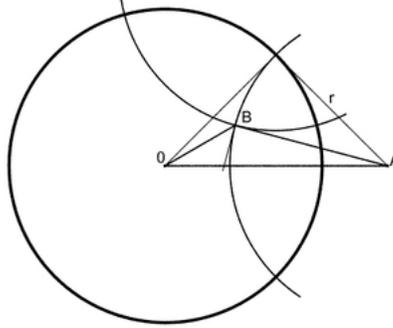


Figura 1.19: Dibujando las teselaciones compactas

Las teselaciones hiperbólicas compactas

¿Cómo se puede dibujar una teselación hiperbólica por polígonos regulares de n vértices tal que m polígonos se encuentren en cada vértice?

Las teselaciones hiperbólicas compactas son las más fáciles de entender. En la introducción, se ha descrito qué es un espacio topológico compacto. En este caso, serán de la forma $\{n, m\}$, $n, m \in \mathbb{N}$ con sólo una restricción para n y m :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{1}{2} \quad (1.3)$$

Para responder la pregunta planteada, se puede ver la figura 1.19, donde basta encontrar la posición de A y el radio r del círculo C_A tal que:

- El círculo C_A es ortogonal al círculo unitario.
- El ángulo entre C_A , y un segundo círculo con el mismo radio, rotado por un ángulo $2\pi/n$ alrededor del origen, iguala a $2\pi/m$.

En el triángulo ABO , el ángulo $\angle BOA = \pi/n$, y el ángulo $\angle OBA = \pi/m + \pi/2$. $AO = \sqrt{1 + r^2}$, usando Pitágoras en el triángulo con vértices O, A y el de la

intersección del círculo C_A y el círculo unitario, X , pues $|AX| = r$ y $|OX| = 1$, y el triángulo tiene ángulo recto en X . Como $AO = \sqrt{1+r^2}$ y $|AB| = r$, se pueden encontrar fácilmente r y $|OA|$. Esta construcción sólo es posible si

$$\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{2} < \pi, \quad (1.4)$$

de donde se sigue la desigualdad mencionada previamente (1.2).

Para dibujar el polígono, se rota el punto A alrededor del origen por un ángulo $2\pi/n$, y se dibujan arcos de radio r . Los ángulos del polígono son $2\pi/n$. Para encontrar las teselas vecinas, hay que dibujar teselas simétricas de modo hiperbólico. Los ejes de simetría son los lados del polígono. Recuérdese que la simetría en el plano hiperbólico puede ser vista como una inversión en un círculo, el círculo unitario. El hecho de que la inversión en un círculo sea una transformación conforme, asegura que los ángulos se preserven en la imagen bajo inversión [29].

A continuación en la figura 1.20 se muestran unos ejemplos de estas teselaciones para valores pequeños de n y m , que fueron realizadas con el programa *KaleidoTile*. Nótese que las parejas $\{3, 7\}$ y $\{7, 3\}$, $\{3, 8\}$ y $\{8, 3\}$, $\{4, 5\}$ y $\{5, 4\}$ son duales, mientras que $\{5, 5\}$ es autodual.

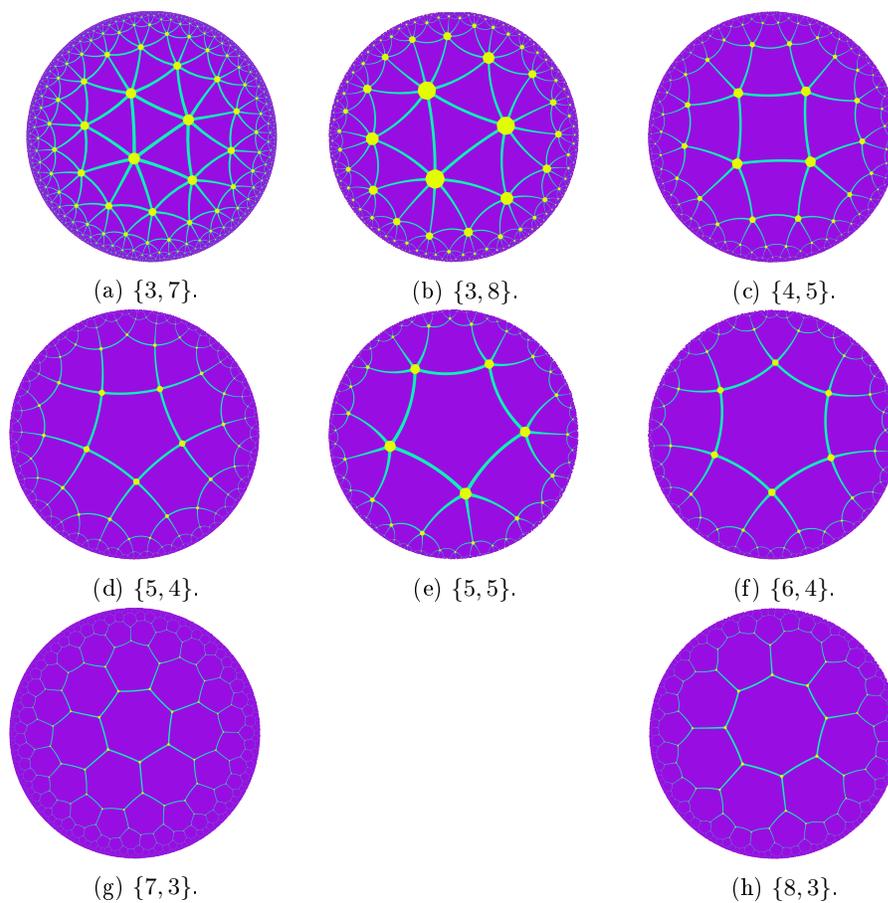


Figura 1.20: Valores pequeños de n y m para $\{n, m\}$

Teselaciones hiperbólicas paracompactas

Las primeras teselaciones hiperbólicas paracompactas mostradas a continuación (ver figuras 1.21 y 1.22) son las de la forma $\{n, \infty\}$, que se caracterizan por tener todos sus vértices en el infinito, ya sea en el disco de Poincaré, o el eje real en el caso del semiplano superior. Constarán de los n -ágonos donde cada vértice tiene grado infinito.

Pueden ser visualizadas en el disco del siguiente modo: se comienza con un n -ágono regular hiperbólico con sus vértices repartidos en el disco con la misma separación de arco. Posteriormente, se pintan n n -ágonos en cada arco definido por el primer n -ágono, donde comparten un lado con el n -ágono original y los $n - 2$ vértices restantes se reparten regularmente en el arco. El procedimiento se continúa recursivamente para obtener la teselación. Ver figuras 1.25 y 1.26.

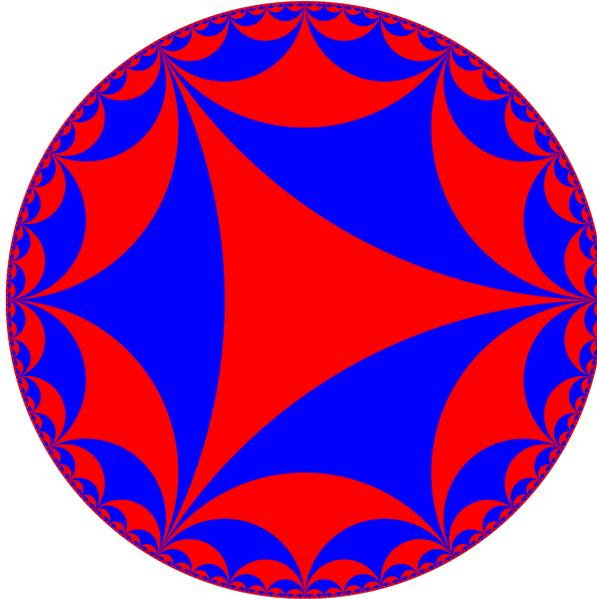


Figura 1.21: Teselación $\{3, \infty\}$ vista con el modelo del disco de Poincaré. Imagen realizada con *Wolfram Mathematica*.

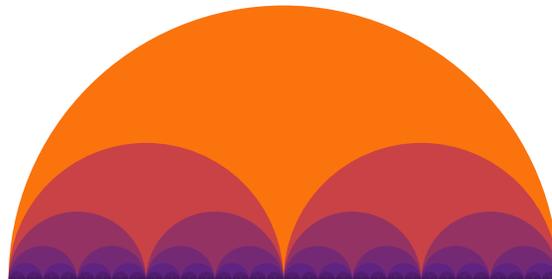


Figura 1.22: Teselación $\{3, \infty\}$ vista en el modelo del semiplano superior. Imagen realizada con *Wolfram Mathematica*.

En el caso de visualizarlo en el semiplano superior, el método es un poco más sencillo: se traza un arco perpendicular al eje real, ese será uno de los lados del primer n -ágono, donde ya se ocuparon dos de sus vértices, así como en el caso anterior. Se reparten después $n - 2$ vértices en el segmento determinado por el arco en el eje real, de forma que estén separados a distancias iguales. Se conectan todos los vértices con rectas hiperbólicas (arcos perpendiculares al eje real), y se tiene completado el primer n -ágono. Para los siguientes, se repite el procedimiento utilizando los nuevos arcos. Al repetir el proceso infinitamente, se obtiene la teselación de tal modo que cada vértice tiene grado infinito.

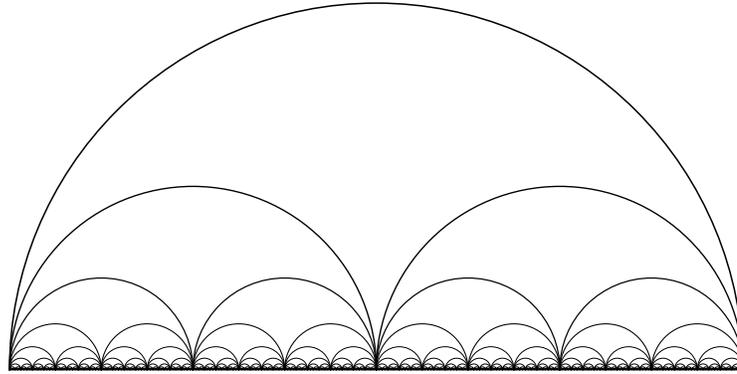


Figura 1.23: Teselación $\{3, \infty\}$ vista con el modelo del semiplano superior. Imagen realizada con *Wolfram Mathematica*.

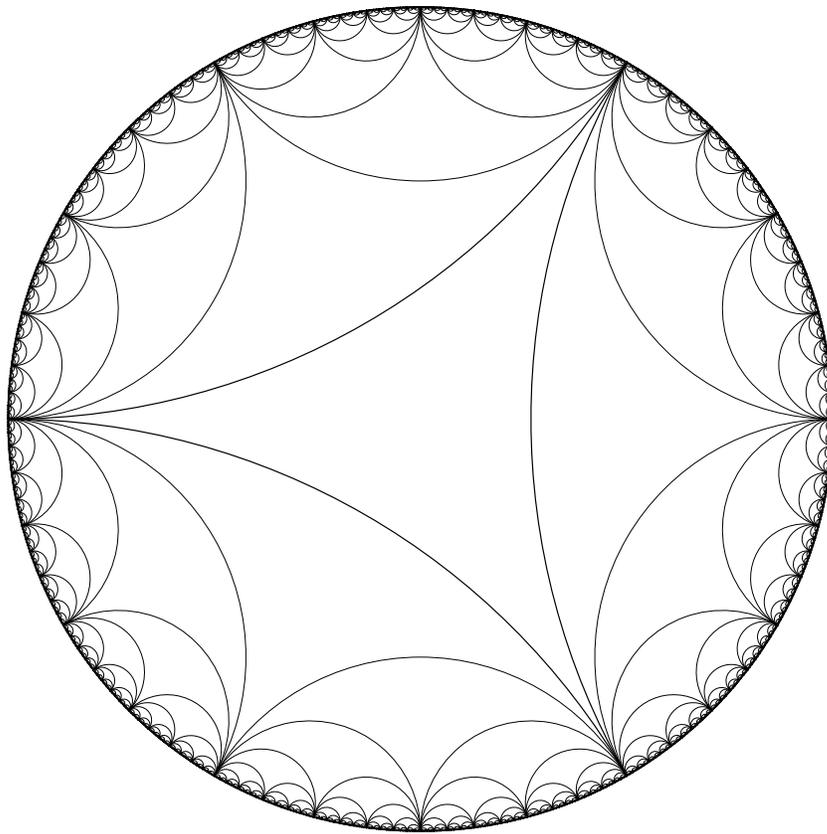


Figura 1.24: Teselación $\{3, \infty\}$ vista con el modelo del disco de Poincaré. Imagen realizada con *Wolfram Mathematica*.

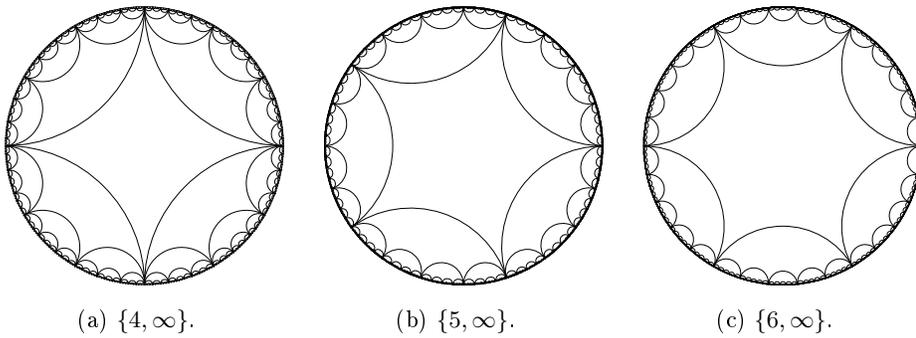


Figura 1.25: $\{n, \infty\}$ con $n = 4, 5, 6$. Imágenes realizadas con *Wolfram Mathematica*.

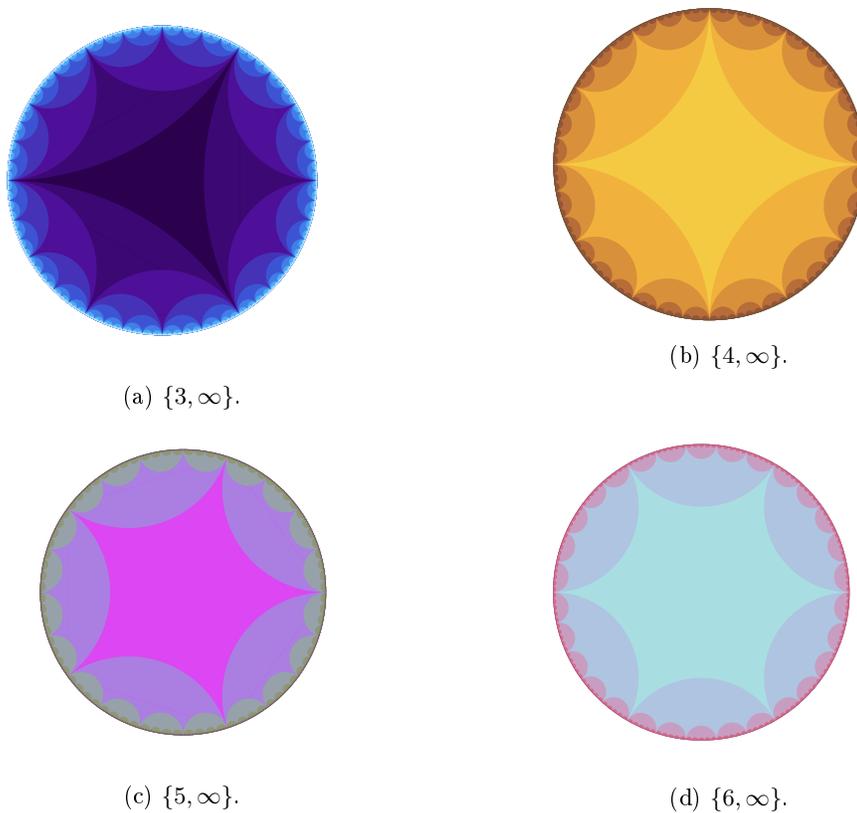


Figura 1.26: Teselaciones $\{n, \infty\}$ con $n = 3, 4, 5, 6$ y caras coloreadas, usando el modelo del disco de Poincaré. Imágenes realizadas con *Wolfram Mathematica*.

Ahora, se presentarán las teselaciones duales de las anteriores, las $\{\infty, n\}$. Éstas tienen caras de longitud infinita, con vértices de grado n . ¿Cómo se ven estas teselaciones? No son tan raras como suenan: pensando en la dualidad, se tiene que por cada cara obtenida anteriormente, ahora se tiene un vértice. Cada uno de estos vértices estará conectado con los n que correspondían a caras adyacentes. Así, lo que se forma es una especie de “árbol” infinito n -regular. Y sí, va entre comillas, porque en realidad, cada cara se completa en el infinito. Se debe recordar que se tienen caras cuya longitud es infinita, las cuales se cierran en el infinito. Un polígono como éste, es llamado en inglés *apeirogon*, un polígono con un número infinito numerable de lados. Ver figura 1.27.

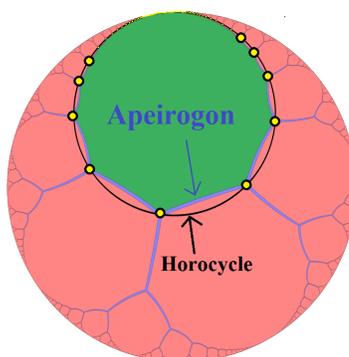


Figura 1.27: Apeirógono inscrito en un horociclo. Imagen tomada de Wikipedia.

Puede ser considerado como el límite de un n -ágono cuando n tiende a infinito. Las teselaciones $\{\infty, n\}$ tienen caras “apeirogonales” regulares, donde el apeirógono regular por sí solo se denota por $\{\infty\}$. Ver figura 1.28. La circunferencia que circunscribe a los vértices del apeirógono ortogonal al disco de Poincaré, es conocida como *horociclo*.

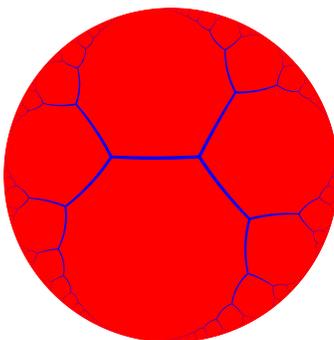


Figura 1.28: Teselación $\{\infty, 3\}$ donde todas las caras son apeirógonos y cada vértice tiene grado 3. Imagen de Wikipedia.

Un caso especial lo conforma la teselación autodual $\{\infty, \infty\}$, con vértices de

grado infinito en el disco, e infinidad de caras apeirogonales, que se muestra a continuación en la figura 1.29:

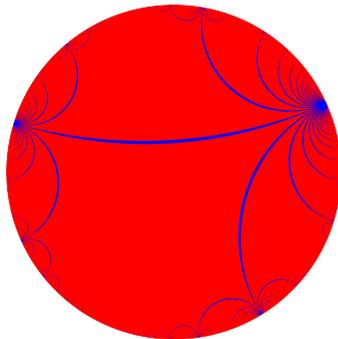


Figura 1.29: Teselación $\{\infty, \infty\}$ donde todas las caras son apeirogonos y cada vértice tiene grado infinito. Imagen de Wikipedia.

Para la última parte de las teselaciones paracompactas se usó de referencia el artículo [39], y de ahí fueron tomadas las últimas tres imágenes. Las primeras fueron realizadas con *Wolfram Mathematica*.

En la sección completa de las teselaciones hiperbólicas también se usó la referencia [41], su tabla de las teselaciones regulares hiperbólicas, y algunas imágenes de dicha tabla.

Teselaciones hiperbólicas no compactas

Se dieron a conocer las teselaciones $\{\infty, n\}$, donde las caras son apeigógonos y los vértices tienen grado n . Las teselaciones no compactas $\{i\pi/\lambda, n\}$ van a tener cierto parecido con ellas. Aquí, en vez de que las caras sean apeirógonos son pseudógonos, una generalización del apeirógono, donde los vértices ya no están necesariamente circunscritos en un horociclo, sino en un *hiperciclo* o *curva equidistante*, la cual es una curva cuyos puntos tienen la misma distancia ortogonal a una recta (hipérbolica) dada, llamada *eje*, *centro* o *línea base* del hiperciclo. Ver figura 1.30.

Esta curva se ve como un arco de circunferencia, pero que no intersecta perpendicularmente al borde del disco (o la línea al infinito, en el caso del semiplano superior). Su eje intersecta al disco en los mismos puntos que el hiperciclo, ahí sí con ángulos perpendiculares al disco, ya que el eje sí es una recta hiperbólica. A los pseudógonos regulares se les denota por $\{i\pi/\lambda\}$, donde λ es la distancia periódica entre los ejes perpendiculares [39], [38].

Así, las teselaciones $\{i\pi/\lambda, n\}$ están compuestas por caras pseudogonales, y los vértices son todos de grado n . Estas teselaciones se ven muy similares a las $\{\infty, n\}$, con la diferencia de que, en este caso, las caras no se cierran en el infinito. También se verán diferentes de acuerdo con el parámetro λ . Cabe

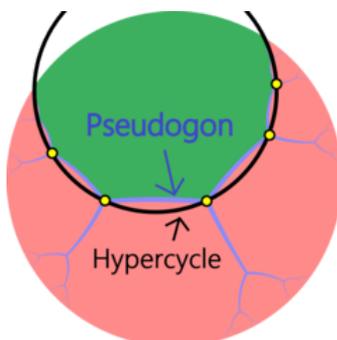


Figura 1.30: Pseudógono inscrito en un hiperciclo. Imagen de Wikipedia.

notar que aquí no hay restricción para n , que puede valer desde 2 hasta infinito. Al pensarlo gráficamente, se pueden pensar estas teselaciones como árboles infinitos regulares, con regularidad n . En el caso de $\{i\pi/\lambda, \infty\}$, ésta se ve como la $\{\infty, \infty\}$, pero en vez de caras apeirogonales son pseudogonales (con su parámetro λ), como se sabe, no se cierran en el infinito.

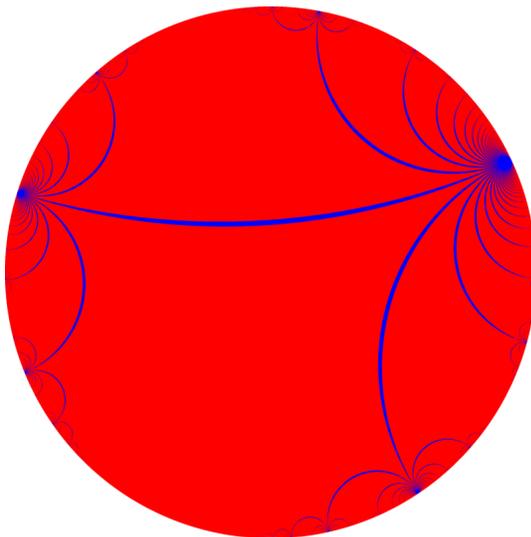


Figura 1.31: Teselación $\{i\pi/\lambda, \infty\}$. Imagen de Wikipedia.

Ahora, ¿cómo son sus teselaciones duales? Es decir, ¿cómo son las teselaciones $\{n, i\pi/\lambda\}$? Al pensar en la dualidad, se nota que las caras de las teselaciones $\{i\pi/\lambda, n\}$, no son propiamente caras cerradas, y sus “centros” quedan fuera del disco de Poincaré. Así, los vértices de la gráfica dual quedarían fuera del disco, y lo único que se obtienen son líneas, desconectadas entre sí (se conectarían más allá del borde del disco). No se pueden ver estas teselaciones propiamente como

gráficas, porque no tienen vértices dentro del disco. A continuación se muestra un ejemplo con $n = 3$ (figura 1.32).

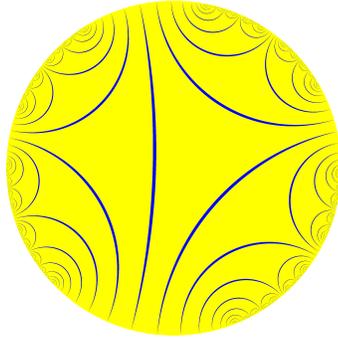


Figura 1.32: Teselación $\{3, i\pi/\lambda\}$. Imagen de Wikipedia.

Nuevamente, un caso especial es el de $\{\infty, i\pi/\lambda\}$. Este se parece a $\{i\pi/\lambda, \infty\}$, sólo que no hay vértices, y las líneas están desconectadas unas de otras. Mostramos ésta a continuación (figura 1.33):

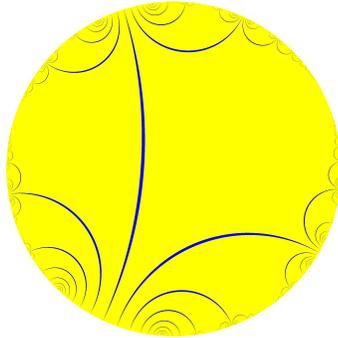


Figura 1.33: Teselación $\{\infty, i\pi/\lambda\}$. Imagen de Wikipedia.

Finalmente, el caso autodual de las teselaciones no compactas es la teselación $\{i\pi/\lambda, i\pi/\lambda\}$. Se sabe que tienen caras pseudogonales, que no hay vértices (podemos imaginar que están afuera del disco y que tienen grado infinito), que todas las aristas están desconectadas entre sí, y que las “caras” interiores formadas por rectas que no se tocan tienen infinitos lados.

Capítulo 2

Antecedentes importantes: Hamiltonicidad en superficies

Ya con las bases para entenderlos, se plantearán los problemas y preguntas que dieron lugar a la realización este trabajo. Cabe aclarar que no se presentarán las demostraciones de los teoremas presentados en este capítulo, ya que el propósito del trabajo presente es conocer la hamiltonicidad de las gráficas asociadas a las teselaciones regulares del plano hiperbólico, lo cual se abordará en el capítulo siguiente, y las herramientas principales que se ocuparán para ello son principalmente de teoría de gráficas.

2.1. ¿Los mapas regulares en el toro son hamiltonianos?

La realización de este texto comenzó después de leer el artículo de 1972 sobre circuitos hamiltonianos en el toro [5]. En éste, se resuelve la pregunta de si los mapas regulares del toro son hamiltonianos para buena parte de los casos, pero no para todos. Se iniciará esta sección proporcionando los resultados más relevantes de dicho artículo y se continuará con el desarrollo de la investigación realizada a partir de la pregunta que quedó abierta en él.

Un mapa en el toro se puede ver como un encaje de una gráfica finita en la cual se permiten aristas dobles y lazos. Se debe recordar que, para el toro, la característica de Euler es cero, es decir, $V - A + C = 0$. Si se tiene un mapa regular del tipo $\{p, q\}$, se tiene también que $qV = 2A = pC$, de donde se deduce que los únicos mapas regulares en el toro son del tipo $\{3, 6\}$, $\{4, 4\}$ y $\{6, 3\}$. Más aún, para todo entero positivo v existe un mapa regular (usualmente más de uno) de tipo $\{6, 3\}$ y de tipo $\{4, 4\}$, exactamente con v vértices, mientras que un mapa de tipo $\{3, 6\}$ en el toro con exactamente v vértices existe si y sólo si v es impar.

Se tienen los siguientes dos teoremas:

Teorema 2.1.1 [5] : En cualquier mapa regular del tipo $\{3, 6\}$ en el toro hay un circuito hamiltoniano.

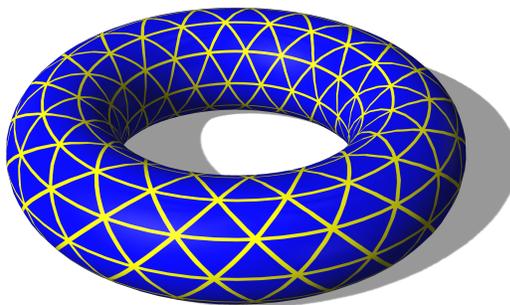


Figura 2.1: Teselación de triángulos en el toro

Teorema 2.1.2 [5] : En cualquier mapa regular del tipo $\{4, 4\}$ en el toro hay un circuito hamiltoniano.

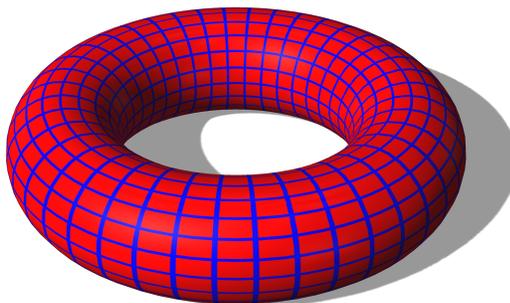


Figura 2.2: Teselación de cuadrados en el toro

Además de probar su existencia, la demostración de los teoremas exhibe explícitamente un ciclo hamiltoniano para cada caso. Sin embargo, para los mapas del tipo $\{6, 3\}$ no se logra establecer en el artículo un teorema como los anteriores. Se prueba que para estos tipos existe siempre un paseo hamiltoniano, y también la existencia de un ciclo hamiltoniano para una clase de mapas $\{6, 3\}$, que no se logró determinar si se trataba de una clase propia o impropia de todos los mapas del tipo $\{6, 3\}$.

Posteriormente, en los artículos [4, 45], entre otros, se explora el caso faltante. En el primero de ellos, se prueban teoremas más generales, y en el segundo se prueba que los mapas regulares $\{6, 3\}$ en el toro son hamiltonianos, a los que llaman *panal de abejas generalizado*, los cuales son también mencionados en el primero.

En las figuras 2.1, 2.2 y 2.3 se puede observar una teselación por triángulos, cuadrados y hexágonos regulares en el toro, respectivamente. Fueron realizadas con *Adobe Photoshop* a partir de las del plano, las cuales fueron elaboradas con *Wolfram Mathematica*.

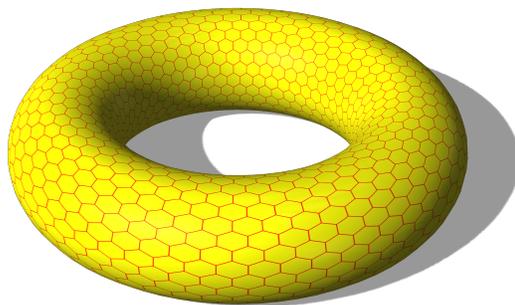


Figura 2.3: Teselación de hexágonos en el toro

Otros ejemplos de teselaciones cuadradas en el toro y la botella de Klein pueden apreciarse en la figura 1.3.

2.2. ¿Los mapas regulares en la botella de Klein son hamiltonianos?

Con el conocimiento de la hamiltonicidad para los mapas regulares del toro, la pregunta natural es preguntarse qué sucede en la botella de Klein.

El primer resultado ha sido encontrado en [46], donde a las gráficas cúbicas cuyas caras son hexagonales son llamadas gráficas *polyhex*. Si la gráfica está encajada en una superficie, por la fórmula de Euler, la superficie puede ser únicamente el toro o la botella de Klein. En este artículo se reafirma que las gráficas *polyhex* toroidales son hamiltonianas, y prueban que toda gráfica *polyhex* de la botella de Klein es hamiltoniana también.

No sabemos si los demás mapas regulares de la botella de Klein son hamiltonianos o no. Averiguarlo da pie a un posible camino de investigación, pero no es el que seguiremos en este trabajo.

Capítulo 3

Explorando otras geometrías: La hamiltonicidad en teselaciones hiperbólicas

Con la hamiltonicidad resuelta para los mapas regulares del toro, y parcialmente resuelta para los de la botella de Klein, se dará aquí un salto: en vez de buscar otras superficies o géneros, interesará más en este apartado estudiar la hamiltonicidad de teselaciones regulares en otras geometrías, en este caso, la geometría hiperbólica. Primero se analizará un caso particular para entender intuitivamente lo que se puede hacer, y posteriormente se presentarán y utilizarán como herramienta dos teoremas principales que serán esenciales para la determinación de la hamiltonicidad en buena parte de las teselaciones regulares hiperbólicas. Luego se hará una generalización de la construcción realizada para el caso particular, ocupando el primer teorema. Finalmente, se utilizará el segundo teorema para determinar otra gran cantidad de casos, y se discutirá qué ocurre con los casos que no caben dentro del análisis de estos dos teoremas.

3.1. Descubriendo la hamiltonicidad para las teselaciones del plano hiperbólico

Como vimos al introducir las teselaciones regulares hiperbólicas en la sección 2.5.3, hay una infinidad de teselaciones regulares que son paracompactas o bien que no son compactas, las cuales también serán consideradas.

Lo primero que surge, son los siguientes cuestionamientos: ¿De verdad existen los ciclos infinitos en las gráficas infinitas? De existir, ¿cómo son? En particular, ¿cómo es, si es que existe, un ciclo hamiltoniano de una gráfica infinita? ¿Cómo garantizar que es posible “regresar” después de “llegar al infinito”?

La primera idea es que se puede lograr por medio de una sucesión de ciclos

C_1, C_2, \dots tal que $V(C_n)$ contiene a $V(C_{n-1})$, y cada uno de ellos, los C_i , contiene a todos los vértices etiquetados del 1 al i .

Con estas ideas presentes, se iniciará el análisis con las teselaciones 3- regulares. En particular, se comenzará con la teselación compacta $\{7, 3\}$, y se dará la sucesión de ciclos como sigue:

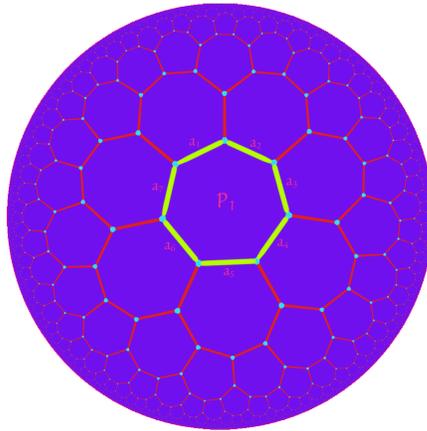


Figura 3.1: El primer ciclo C_1

Contrucción de ciclos para $\{7, 3\}$:

Paso 1: La teselación $\{7, 3\}$ está formada por heptágonos, donde cada vértice es de grado 3. Se comienza por un heptágono P_1 cualquiera. Se escoge la orientación de las manecillas del reloj. Sea C_1 el ciclo formado por el heptágono, $C_1 = a_1, a_2, \dots, a_7$ con las aristas tomadas en la orientación escogida (ver la figura 3.1).

Paso 2: Para C_2 , se retira la arista a_7 . El vértice que incide en las aristas a_6 y a_7 incide también en una tercer arista b_1 , la cual se escoge para nuestro ciclo C_2 . De momento, se tiene la trayectoria $a_1, a_2, \dots, a_6, b_1$.

Se considera ahora la arista que incide en a_7 , que no es ninguna de las aristas $\{a_1, a_6, b_1\}$, llamémosle c_1 . Considérese la trayectoria de Petrie (infinita), P que contiene a a_7 y a c_1 (ver figura 3.2).

Sea c_2 la siguiente arista de P que incide con c_1 , y c_3 la siguiente arista de P que incide con c_2 , y así sucesivamente. Así, se construye P' , que es un rayo contenido en P , que comienza en a_7 y se va al infinito por un extremo.

Ahora, P_1 está rodeado por 7 heptágonos. Se nombra A_i al heptágono adyacente a P_1 de modo tal que ambos comparten la arista a_i , $i \in \{1, \dots, 7\}$ (ver figura 3.3). Se agregan todas las aristas de A_6 formando una trayectoria con las

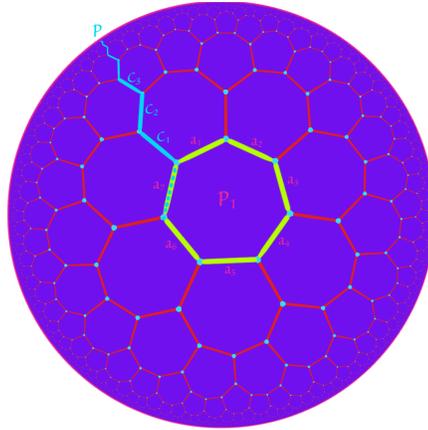


Figura 3.2: Trayectoria de Petrie P

aristas que ya se tenían, $a_1, a_2, \dots, a_6, b_1$. La arista b_2 que no se toma de A_6 es precisamente la que incide en a_6 (y a_5) que no es a_5 . A partir de aquí se realiza un procedimiento similar con el heptágono A_5 , se toman todas las aristas del polígono que no sean b_2 ni la que incide en a_5 . Se continúa con este procedimiento hasta llegar a A_1 . Se cierra el ciclo tomando las aristas c_1 (y c_2) de P' . Así el ciclo C_2 se define $C_2 = (a_1, a_2, \dots, a_6, b_1, \dots, c_2, c_1)$ (ver figura 3.4).

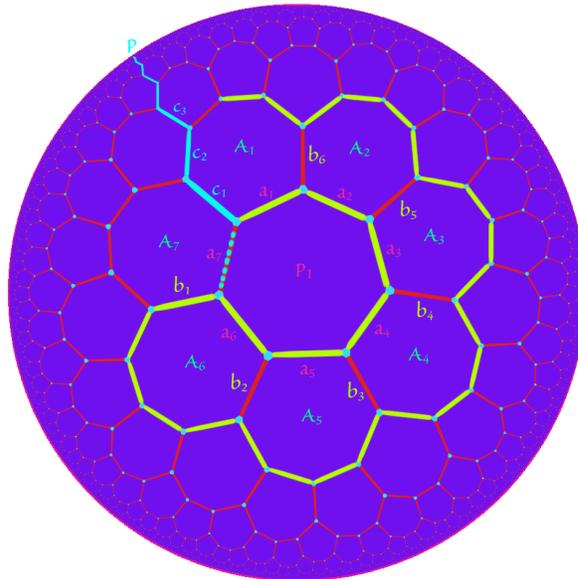
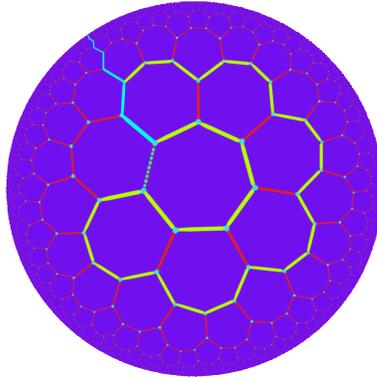
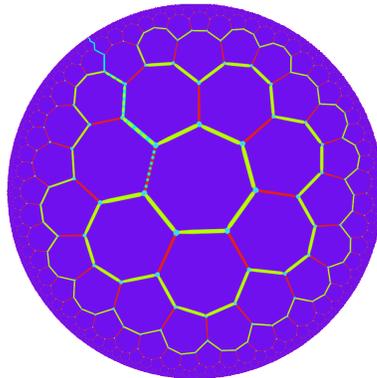


Figura 3.3: Construcción de C_2

Figura 3.4: Ciclo C_2

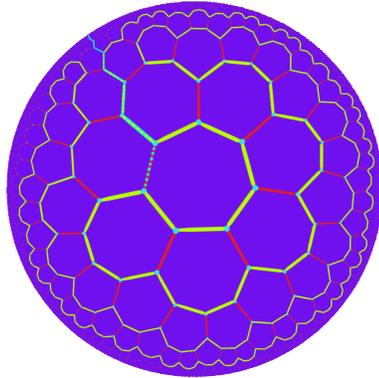
Paso 3: Ahora, sea b la última arista en C_2 fuera de P' , es decir, la arista en C_2 que es adyacente a c_2 y que no es c_1 . Para C_3 , se retiran las aristas que pertenezcan a P' y a b , y se toma la arista que incide en b que no pertenece a P' . Se repite el mismo procedimiento empleado anteriormente para generar el ciclo $C_3 = (a_1, a_2, \dots, a_6, b_1, \dots, c_3, c_2, c_1)$ (ver figura 3.5).

Figura 3.5: Ciclo C_3

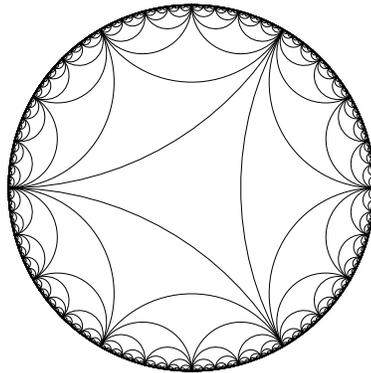
Es importante notar que en este paso deben tomarse los vértices de A_7 que no se habían tomado antes (no se habían tomado todos para el ciclo C_2).

Paso 4: Para el cuarto ciclo, se debe seguir teniendo cuidado con ese “hundimiento” que se genera: se trata de ir haciendo el ciclo “pegado” al anterior siempre.

Al continuar con el procedimiento, se obtiene una sucesión $\{C_1, C_2, \dots, C_n, \dots\}$ donde $C_n = (a_1, a_2, \dots, a_6, b_1, \dots, c_n, \dots, c_3, c_2, c_1)$. Esta es una sucesión que cumple que $V(C_{n+1})$ contiene a $V(C_n)$. De modo que, para cualquier subconjunto finito S de vértices, se puede encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que S está contenido en C_n .

Figura 3.6: Ciclo C_4 .

Cuando esta sucesión de ciclos tiende a infinito, converge a un ciclo que cubre a todos los vértices. Más adelante demostraremos que efectivamente se trata de un ciclo hamiltoniano, y una generalización de esta construcción.

Figura 3.7: Teselación $\{3, \infty\}$ con el modelo de Poincaré

¿Qué pasa si se considera ahora a $\{3, \infty\}$? Se puede dar también una sucesión de ciclos de la siguiente manera: se considera un triángulo cualquiera de $\{3, \infty\}$, véase la figura 3.7. Recuérdese que las teselaciones regulares son transitivas en caras (lo que quiere decir que el grupo de automorfismos actúa transitivamente en las caras), de modo que cualquier triángulo es equivalente a cualquier otro de la teselación. Llámese a este triángulo C_1 , que es un ciclo (v_1, v_2, v_3, v_1) (ver figura 3.8).

Partiendo de v_1 , se toma el triángulo adyacente a C_1 que comparte la arista v_1v_2 , donde el tercer vértice es u_1 . Se considera ahora el triángulo adyacente a C_1 por la arista v_2v_3 , con tercer vértice u_2 , y finalmente se considera al triángulo adyacente a C_1 por la arista v_3v_1 con el tercer vértice u_3 . Se define a C_2 como

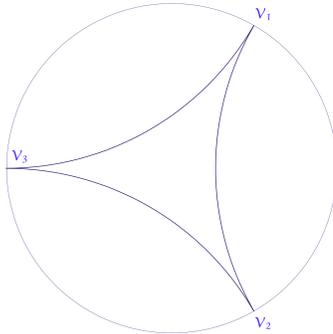


Figura 3.8: Ciclo C_1 de $\{3, \infty\}$

$(v_1, u_1, v_2, u_2, v_3, u_3, v_1)$ (ver figura 3.9).

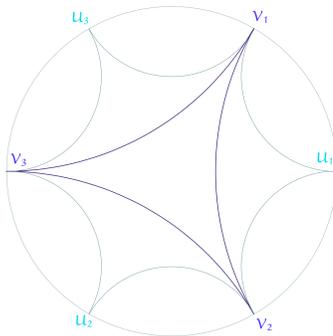


Figura 3.9: Ciclos C_1 y C_2 de $\{3, \infty\}$

Se realiza el mismo procedimiento, ahora con las aristas

$$v_1 u_1, u_1 v_2, v_2 u_2, u_2 v_3, v_3 u_3, u_3 v_1,$$

con nuevos vértices $u_{1,1}, u_{1,2}, u_{2,2}, u_{2,3}, u_{3,3}, u_{3,1}$, respectivamente. Así, $C_3 = (v_1, u_{1,1}, u_1, u_{1,2}, v_2, u_{2,2}, u_2, u_{2,3}, v_3, u_{3,3}, u_3, u_{3,1}, v_1)$ (ver figura 3.10).

Se observa que C_1 es un triángulo, C_2 es un hexágono, y C_3 es un polígono de 12 lados. Recursivamente, C_n un polígono con el doble de aristas y vértices de C_{n-1} . Más precisamente, será un polígono de $3(2^n - 1)$ lados. Ver figuras 3.11 y 3.12.

Entonces, ¿realmente también esta gráfica es hamiltoniana? ¡Pues no! A continuación se explica porqué.

Considérese una arista cualquiera de $\{3, \infty\}$, como todos los vértices de la teselación están en el borde del disco, es decir, en el infinito, cualquier arista divide al plano hiperbólico en dos. Si la gráfica fuera hamiltoniana, al quitar

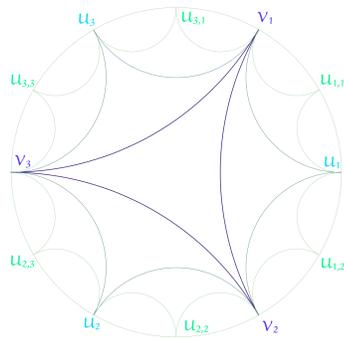


Figura 3.10: Ciclos C_1 , C_2 y C_3 de $\{3, \infty\}$.

dicha arista, con sus respectivos vértices, debería quedar una trayectoria. Sin embargo, esto no puede suceder en dicho caso, ya que al quitar la arista con sus vértices, la gráfica queda inconexa, por lo que no puede ser una trayectoria (que es conexa), de modo que ninguna arista puede pertenecer a un ciclo hamiltoniano. De este modo, ¡la sucesión de ciclos construída, converge únicamente a vértices! A todos los vértices, ¡pero no a las aristas!

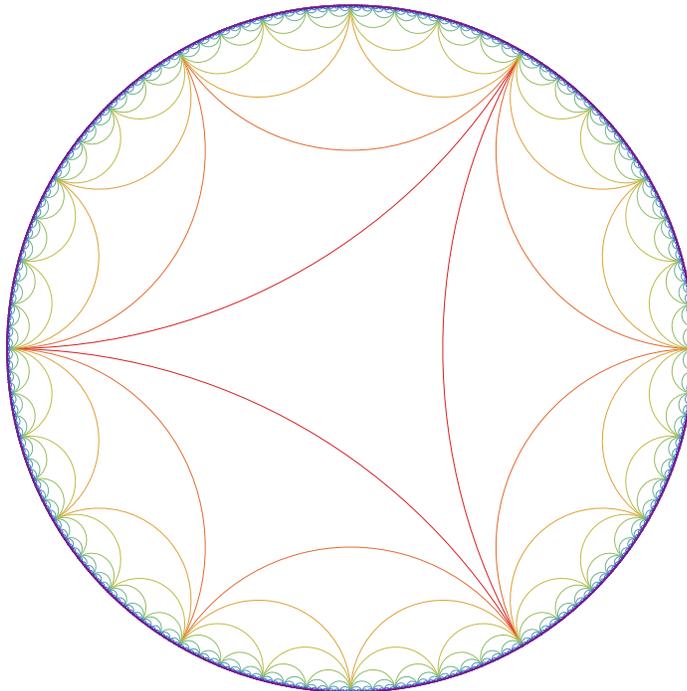


Figura 3.11: Construcción de ciclos para $\{3, \infty\}$ visto con el modelo de Poincaré

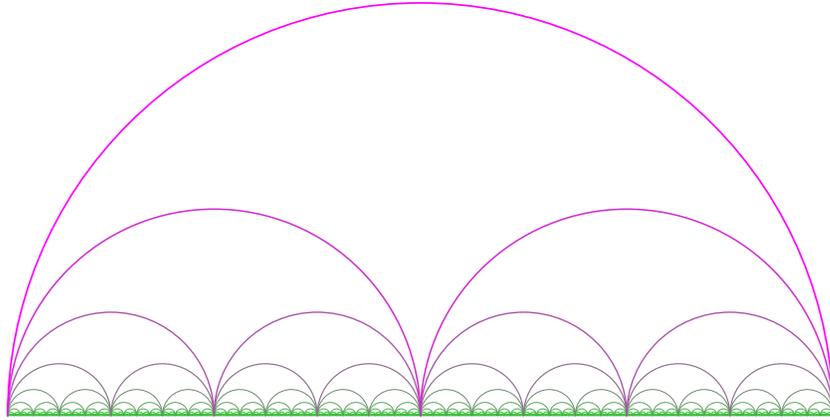


Figura 3.12: Construcción de ciclos para $\{3, \infty\}$ visto con el modelo del semiplano superior

Entonces, ¿cómo es que el argumento de los ciclos sí funciona para la otra teselación? ¿Como garantizamos que efectivamente la otra sí converge a los puntos y aristas? Y finalmente, ¿cómo funciona la convergencia en este caso?

Para contestar estas preguntas, recordemos las definiciones de gráficas infinitas que se dieron previamente, en particular, la compactificación de una gráfica G y la de curva hamiltoniana:

Compactificación de G : A una gráfica encajable G junto con sus ends (clases de equivalencia de rayos equivalentes) se le llama la compactificación Freudenthal de G y se denota por $|G|$.

Curva de $|G|$, X -curva y curva hamiltoniana : Una *curva* (cerrada) de $|G|$ es la imagen de un mapeo continuo del círculo unitario S^1 a $|G|$. El mapeo en sí se llama una *parametrización* de la curva. Para un conjunto de vértices X , una X -*curva* es una curva cerrada en $|G|$ tal que cada vértice de X es usado exactamente una vez. La X -curva es *estricta* si no usa vértices fuera de X . Una $V(G)$ -curva, llamada **curva hamiltoniana**, pasa por cada vértice exactamente una vez, pero puede pasar por un end arbitrariamente seguido.

Con la definición de curva hamiltoniana de la compactificación de una gráfica G , obtenemos una extensión de hamiltonicidad para gráficas infinitas, hay que observar que la curva se define para la compactificación, no para la gráfica por sí sola. Con las definiciones dadas para gráficas infinitas, se puede pasar a presentar el siguiente teorema:

Teorema 1 [25] : Para una gráfica G localmente finita son equivalentes:

- i) Para todo subconjunto finito S de vértices, G tiene un ciclo que contiene a S .

- ii) Para todo subconjunto finito S de vértices, existe una S -curva en $|G|$.
- iii) $|G|$ tiene una curva hamiltoniana.

Con este teorema, y el procedimiento antes efectuado, es posible garantizar que $|\{7, 3\}|$ tiene una curva hamiltoniana, por los incisos i) y iii); y que para $|\{3, \infty\}|$ no se puede aplicar el teorema, pues $\{3, \infty\}$ no es una gráfica localmente finita, ya que todos los vértices tienen grado infinito (los vértices están todos en el borde del disco y tienen una infinidad de adyacencias). Y, dado el argumento planteado, $\{3, \infty\}$ no puede ser una gráfica hamiltoniana, o bien su compactificación no puede tener una curva hamiltoniana.

Para continuar estudiando los casos generales, porque existe una infinidad de casos, se hará énfasis en un segundo teorema importante:

Teorema 2 [25] : Toda gráfica plana localmente finita 4-conexa tiene una curva hamiltoniana.

Este segundo teorema garantiza que casi todas las compactificaciones de las teselaciones compactas van a poseer curvas hamiltonianas, ya que, en su mayoría, todas son 4-conexas (cosa que se debe probar), excepto las de la forma $\{n, 3\}$, que no pueden ser 4-conexas, pues son 3-regulares. Para este último caso, funcionará el procedimiento utilizado en un inicio (ocupando el teorema 1). Aunque aún queda pendiente las demostraciones correspondientes, puede suponerse que ya se tiene resuelto el caso para las teselaciones regulares compactas.

Recuérdese que también se tiene resuelto el caso para las de la forma $\{n, \infty\}$, por el argumento empleado para $\{3, \infty\}$. Además, debe observarse que no se están considerando a los vértices del disco como vértices de la gráfica, de modo que este tipo de teselaciones no pueden considerarse gráficas como tal. En el caso de que sí se consideraran como vértices ordinarios, la compactificación y la hamiltonicidad podrían cambiar. Nótese además que los puntos del disco no son ends de la compactificación, por la definición de end. Antes de pasar a sus duales, las de la forma $\{\infty, n\}$, se prestará atención a los casos no compactos.

Para empezar, los de la forma $\{n, i\pi/\lambda\}$, ni siquiera son conexos, y, como mencionamos al introducirlos dentro de las teselaciones hiperbólicas, tampoco pueden considerarse como gráficas propiamente; así que pueden ser descartados rápidamente del panorama. Similarmente ocurre con sus duales, $\{i\pi/\lambda, n\}$, que pueden ser pensados como árboles infinitos, de modo que no es posible pensar en curvas hamiltonianas ahí.

Entonces, sólo queda ver que ocurre con $\{\infty, n\}$. Se observa que, para $3 \leq n$, se tiene que $\{\infty, n\}$ es 4-conexa. Sin embargo, al prestar atención a la equivalencia de 1 y 3 en el teorema 1, se deberían tener que para cada subconjunto de vértices finito, G debería tener un ciclo que lo contiene, pero eso no puede pasar en $\{\infty, n\}$ ya que aquí la gráfica se parece a los árboles infinitos de $\{i\pi/\lambda, n\}$, donde la diferencia radica en que en $\{\infty, n\}$ la gráfica no es un árbol, en este caso sus caras son polígonos infinitos. Entonces se deben comprender bien los

teoremas de [25] y las teselaciones $\{\infty, n\}$, cuestionándonos si realmente los mapas asociados a las teselaciones $\{\infty, n\}$ son gráficas; así como la 4-conexidad de una gráfica infinita.

Para esto, es necesario recordar cuáles son las equivalencias de que una gráfica G sea 4-conexa, que hemos visto ya en la sección de definiciones de gráficas:

G es 4-conexa si y sólo si:

- $K(G) \geq 4$, es decir, al remover 3 vértices o menos, no se desconecta la gráfica (definición).
- Para todo $u, v \in V(G)$, existen al menos 4 uv - trayectorias internamente ajenas.

El teorema que establece que ambas afirmaciones son equivalentes, es el **teorema de Menger**.

La equivalencia también será de utilidad para probar la hamiltonicidad de $\{n, m\}$ con $m \geq 3$, a menos que se emplee la misma construcción utilizada para $\{n, 3\}$ en una versión más general.

Construcción de la sucesión de ciclos para $\{n, 3\}$:

Debe observarse que esta es la construcción generalizada de la realizada para $\{7, 3\}$.

La teselación $\{n, 3\}$ está formada por n -ágonos, donde cada vértice es de grado 3. Se inicia con un n -ágono P_1 cualquiera. Se escoge la orientación de las manecillas del reloj. Sea C_1 el ciclo formado por el n -ágono, $C_1 = a_1, a_2, \dots, a_n$ con las aristas tomadas en la orientación escogida. Para C_2 , se retira la arista a_n . El vértice que incide en las aristas a_{n-1} y a_n incide en una tercer arista b_1 , la cual se escoge para nuestro ciclo C_2 . De momento, se tiene la trayectoria $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b_1$.

Se considera ahora la arista que incide en a_n que no es ninguna de las aristas $\{a_1, a_{n-1}, b_1\}$, llamémosle c_1 . Considérese la trayectoria de Petrie (infinita), P que contiene a a_n y a c_1 . Sea c_2 la siguiente arista de P que incide con c_1 , y c_3 la siguiente arista de P que incide con c_2 , y así sucesivamente. Así, se construye P' , que es un rayo contenido en P , el cual comienza en a_n y se va al infinito por un extremo.

Ahora, P_1 está rodeado por n n -ágonos. Se nombra A_i al n -ágono adyacente a P_1 tal que compartan ambos la arista a_i , $i \in \{1, \dots, n\}$. Se agregan todas las aristas de A_{n-1} formando una trayectoria con las aristas que ya se tenían, $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b_1$. La arista b_2 que no se toma de A_{n-1} es precisamente la que incide en a_{n-1} (y a_{n-2}) que no es a_{n-2} . Se realiza un procedimiento similar con el n -ágono A_{n-2} , tomando todas las aristas del polígono que no sean b_2 ni la que incide en a_{n-2} . Se continúa con este procedimiento hasta llegar a A_1 . El ciclo se cierra tomando las aristas c_1 (y c_2) de P' . Ahora tenemos el ciclo $C_2 = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, c_2, c_1)$. Sea b la última arista en C_2 fuera de P' , es decir, la arista en C_2 que es adyacente a c_2 y que no es c_1 . Para

C_3 , se retiran las aristas que pertenezcan a P' y a b , y se toma la arista que incide en b que no pertenezca a P' . Se repite el mismo procedimiento empleado anteriormente para generar el ciclo $C_3 = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, c_3, c_2, c_1)$. Al continuar de esta forma, se obtiene una sucesión $\{C_1, C_2, \dots, C_n, \dots\}$ donde $C_n = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, c_n, \dots, c_3, c_2, c_1)$. Esta es una sucesión que cumple con que $V(C_{n+1})$ contiene a $V(C_n)$. De modo que, para cualquier subconjunto finito S de vértices, se puede encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que S está contenido en C_n .

Así se concluye, por el teorema 1, que $|\{n, 3\}|$ tiene una curva hamiltoniana, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para terminar, debe notarse que la compactificación depende de la topología del espacio donde se esté trabajando. Es decir, se están considerando las gráficas encajadas en una superficie (espacio topológico). Determinar si existen o no los posibles ciclos hamiltonianos depende de dónde se encajen éstas. Nótese que si una gráfica tuviera un ciclo hamiltoniano y un número infinito de vértices, entonces hay puntos de acumulación dentro del ciclo, lo cuál no debería suceder, pues eso no te permitiría “recorrer” el ciclo de forma discreta.

Otra observación importante es señalar que cuando analizamos el caso de $\{3, \infty\}$, la teselación en sí no es la compactificación de ninguna gráfica. Si se considera una subdivisión de la teselación, de modo que, en cada arista de la teselación original, haya vértices que no estén en el infinito, se puede obtener una gráfica compactificada que sí va a resultar hamiltoniana, precisamente al utilizar el teorema 1, empleando nuevamente i) implica iii). Otro modo más sencillo en que podría resultar hamiltoniana la compactificación de $\{n, \infty\}$ es que se consideraran los vértices del disco como vértices ordinarios.

Para el caso de las teselaciones que hacía falta analizar, las $\{\infty, n\}$, el razonamiento es similar al anterior. En abstracto, por el teorema 1, se tiene que la compactificación $|\{\infty, n\}|$ no puede tener una curva hamiltoniana, pues de tenerla, debería cumplir que para todo subconjunto finito, la gráfica (donde no se están considerando a los vértices en el borde el disco) debería cumplir el inciso i), el cual no cumple, pues como gráfica (abstracta), $\{\infty, n\}$ es igual que $\{i\pi/\lambda, n\}$, el árbol infinito n -regular, que claramente no tiene ciclos. Lo que cambia es la topología, y todo depende del encaje realizado y por lo tanto su compactificación. Nótese que en este caso, los vértices del borde que “cierran” las caras tampoco son ends de la compactificación.

Por último, lo único que queda pendiente es probar la 4-conexidad de todas las teselaciones compactas con regularidad mayor a 3, es decir, todas las teselaciones $\{n, m\}$ con $m > 3$. Se empleará la equivalencia: G es 4-conexa si y sólo si para todo $u, v \in V(G)$, existen al menos 4 uv - trayectorias internamente ajenas. La manera de probarlo será constructiva, similarmente a como se probó la existencia de ciclos para las teselaciones compactas 3-regulares.

Construcción:

Construcción:

72CAPÍTULO 3. HAMILTONICIDAD EN TESELACIONES HIPERBÓLICAS

Sean $u, v \in V(G)$, y G la gráfica asociada a una teselación compacta $\{n, m\}$ con $m > 3$. Como G es conexa, existe al menos una uv -trayectoria. Sea T una uv -trayectoria de longitud mínima, es decir, de todas las trayectorias posibles entre u y v se escoge una tal que su longitud sea mínima, en otras palabras, tal que $l(T) = d(u, v)$, donde l es la longitud de T (ver figura 3.13). En realidad, no es necesario pedir una trayectoria con esta propiedad, pero se hará por simplicidad.

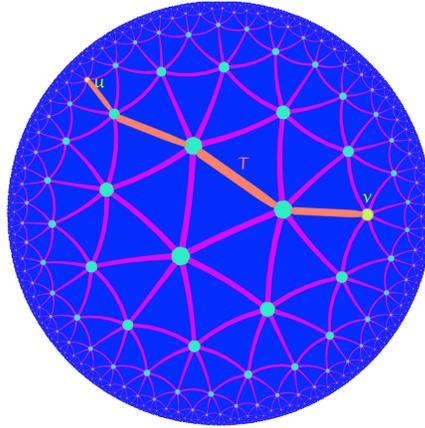


Figura 3.13: Trayectoria T entre u y v .

Denotemos a $T = (u = v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = v)$, que a su vez puede verse como la sucesión de aristas $(a_1 = (u, v_1), a_2 = (v_1, v_2), \dots, a_n = (v_{n-1}, v))$. Se puede pensar, coloquialmente hablando, que este segmento de recta separa, al menos localmente, al plano en dos regiones. Se elige una de las dos, como sigue: escójase una arista incidente con u (es decir, adyacente a a_1) tal que comparta una cara con a_1 . Por comodidad, tómease la que, de acuerdo a la dirección opuesta de las manecillas del reloj, esté más próxima. Llámese a esta arista b_1 , $b_1 = (u, w_1)$. Considérese como referencia todas las caras que contienen a las aristas a_1, a_2, \dots, a_n del mismo lado que está A_1 , y se nombra A_i a la que contiene a a_i para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Para la trayectoria, tómease todos los vértices adyacentes a estas caras que no sean vértices de T . Uniendo los vértices que son adyacentes, puede que lo que se obtenga no sea una trayectoria aún, sino varios tramos de trayectoria desconectados. En caso de no tener una trayectoria aún, se completa con vértices que sean adyacentes a los del conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Por construcción, lo que queda es una uv -trayectoria T_2 (ver figura 3.14). Para T_3 , se efectúa el mismo procedimiento pero ahora del “otro lado” de T , es decir, ahora tomando las caras del otro lado delimitadas por las aristas de T (ver figura 3.15).

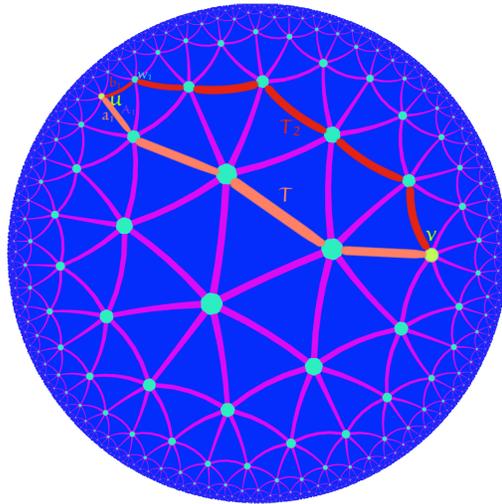


Figura 3.14: Trayectorias T y T_2 entre u y v

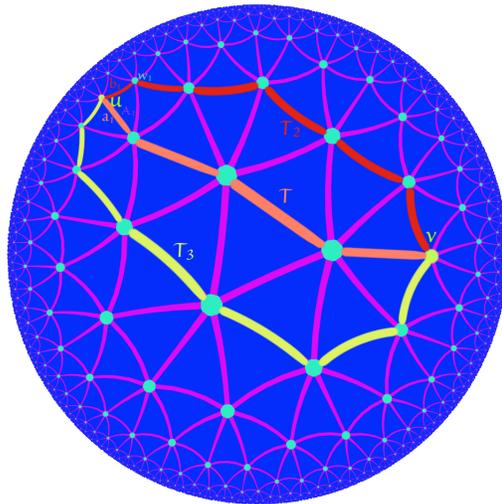


Figura 3.15: Trayectorias T , T_2 y T_3 entre u y v

Para la cuarta trayectoria T_4 , se realiza el mismo procedimiento para obtener T_2 pero ahora utilizando la trayectoria T_2 como base, en vez de T . Esto se puede hacer pues el grado de cada vértice es al menos 4 (ver figura 3.16). Así, se tienen las 4 trayectorias: T, T_2, T_3 y T_4 y, por construcción, son internamente ajenas.

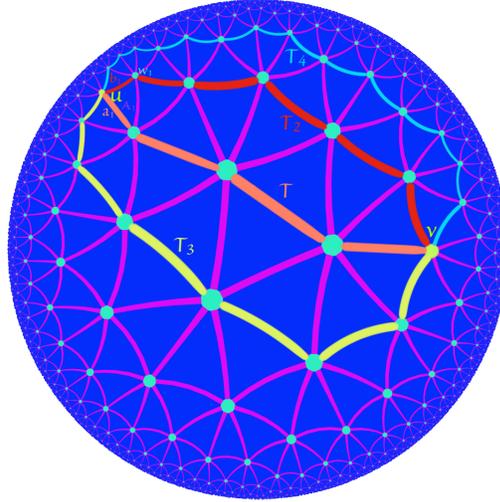


Figura 3.16: Trayectorias T , T_2 , T_3 y T_4 entre u y v

3.2. Demostraciones de los teoremas utilizados

El siguiente lema se usará como parte de la demostración del teorema 1.

Lema 3.2.1 [17]: Si (V, E) es una gráfica conexa localmente finita, entonces el conjunto de vértices V es finito o numerable.

Demostración. Se fija un vértice de referencia $x \in V$ y se considera el conjunto $B_n = \{y \in V : d(x, y) \leq n\}$, que es una bola con respecto a la distancia d usual en gráficas. Se probará por inducción sobre n que $|B_n| \leq \infty$.

La base de inducción es trivial pues para $n = 0$, $B_0 = \{x\}$.

Paso inductivo: asumiendo que B_n es finito, se probará que B_{n+1} es finito. Es suficiente probar que $B_{n+1} \setminus B_n$ es finito. Para cualquier vértice $y \in B_{n+1} \setminus B_n$, se tiene que $d(x, y) = n + 1$, por lo tanto, existe una trayectoria $\{x_k\}_{k=0}^{n+1}$ de x a y de longitud $n + 1$. Consideremos el vértice $z = x_n$. Claramente, la trayectoria $\{x_k\}_{k=0}^n$ conecta a x y a z y es de longitud n , lo que implica que $d(x, z) \leq n$, y, por lo tanto, $z \in B_n$. Por otra parte, tenemos por construcción que z y y son adyacentes. De este modo, se ha probado que todo vértice $y \in B_{n+1} \setminus B_n$ está conectado a uno de los vértices en B_n .

Pero el número de vértices de B_n es finito (por hipótesis de inducción), y cada uno de ellos tiene un número finito de vecinos (por hipótesis, la gráfica es localmente finita). Por lo tanto, el número total de vecinos de B_n es finito, lo que implica que $|B_{n+1} \setminus B_n| \leq \infty$ y por lo tanto $|B_{n+1}| \leq \infty$. Finalmente, obsérvese

que $V = \bigcup_{n+1}^{\infty} B_n$, porque para cualquier $y \in V$ se tiene que $d(x, y) \leq \infty$, por lo que y pertenece a alguna bola B_n , para alguna n natural. Entonces, V es finito o numerable, como unión numerable de conjuntos finitos.

□

De igual manera, se utilizará el siguiente lema, el cual no será demostrado aquí, la demostración puede encontrarse en [25]:

Lema 3.2.2: Sea G una gráfica localmente finita, y O un orden cíclico de un conjunto de vértices X . O es un orden cíclico encajable de X si y sólo si existe una X -curva estricta C tal que el orden cíclico de X inducido por C es O .

Ahora recordemos que $|G|$ denota la compactificación de G , recordemos también el enunciado del teorema 1:

Teorema 1 [25] : Para una gráfica G localmente finita son equivalentes:

- i) Para todo subconjunto finito S de vértices, G tiene un ciclo que contiene a S .
- ii) Para todo subconjunto finito S de vértices, existe una S -curva en $|G|$.
- iii) $|G|$ tiene una curva hamiltoniana.

Demostración:

Obsérvese que la implicación de interés para el fin del trabajo presente es únicamente i) implica iii), la cual se verá desglosada en i) implica ii) y ii) implica iii). Para la demostración de iii) implica i), ver [25].

i) implica ii)

Es inmediato pues todo ciclo que contiene a S es una S -curva en $|G|$.

ii) implica iii)

Para esta demostración, se utilizará el lema 3.2.2.

Demostración de que el lema 3.2.2 implica (ii) implica iii):

Demostración. Nótese que para demostrar que el lema 3.2.2 implica (ii) implica iii)), basta probar que (lema 3.2.2 y ii)) implica iii), por la regla lógica de inferencia *exportación*:

$$\frac{(p \wedge q) \Rightarrow r}{\therefore p \Rightarrow (q \Rightarrow r)} \quad (3.1)$$

Obsérvese que se desea emplear la ida del lema, ya que si se considera $X = V(G)$, si se encuentra un orden cíclico encajable de $V(G)$, entonces hay una $V(G)$ -curva (estricta). Y por definición de orden cíclico encajable, si es encontrado, quiere decir que para todo subconjunto $S \subseteq X$ finito hay una S -curva en $|G|$. En particular en $|G| - T$ con $T \subseteq V(G) \setminus X$, pero en este caso, como

$X = V(G), T = \emptyset$. Así, por el lema esto implicaría iii) , es decir, se tendría una $V(G)$ -curva.

Con esto ya entendido, se procederá a encontrar un ordenamiento encajable O de $X = V(G)$, comenzando con el lema 3.2.1.

Por ii), G es conexa, y como G es localmente finita, $X = V(G) = \{v_1, v_2, \dots\}$ es un conjunto numerable.

Sean $X_i = \{v_1, v_2, \dots, v_i\}$ y C_i una X_i -curva en $|G|$, se sabe que existe por hipótesis de ii). Se construirá un orden cíclico O en $X = V(G)$, construyendo primero órdenes cíclicos O_i en X_i tal que para todo $i < j$, O_i es la restricción de O_j a X_i . Más aún, para toda $i \geq j$, se encontrará una X_i -curva C_i^j cuyo orden inducido en X_j es O_j .

Sean $C_i^1 = C_i^2 = C_i$ y O_1 y O_2 los órdenes cíclicos triviales en X_1 y X_2 , respectivamente, $O_1 = \{v_1\}$ y $O_2 = \{v_1, v_2\}$. Para $j \geq 3$, se define C_i^j y O_j recursivamente. Como X_j es finito, existe sólo una cantidad finita de órdenes cíclicos en X_j . Pero hay un número infinito de X_j -curvas que induce O_{j-1} en X_{j-1} , esto es por ii) y porque $V(G)$ es infinito. A estas X_j -curvas que induce O_{j-1} en X_{j-1} se les llamará C_i^{j-1} , para toda $i \geq j$. Por lo tanto, es posible encontrar un orden cíclico O_j en X_j , que está inducido por una infinidad de estas X_j -curvas. Así es como se define la recursión, ya se tiene $C_i^1 = C_i^2 = C_i$, y $O_1 = \{v_1\}$ y $O_2 = \{v_1, v_2\}$. Así, O_3 será el orden cíclico en X_3 inducido por la infinidad de X_3 -curvas inducidas por O_2 en X_2 , a las que se les llamará C_i^2 . Continuando con este procedimiento, se define $\{C_i^j\}_{i=1}^\infty$ como la subsucesión de $\{C_i^{j-1}\}_{i=1}^\infty$ que induce O_j en X_j .

Ahora, se define al límite de $(O_i)_{i=1}^\infty$ como el orden cíclico O en $V(G)$ tal que cumpla la siguiente condición: para toda $v_i, v_j, v_k \in V(G)$, $v_i \rightarrow v_j \rightarrow v_k$ en O si y sólo si $v_i \rightarrow v_j \rightarrow v_k$ en $O_{\max\{i,j,k\}}$. Es decir, $v_i \rightarrow v_j \rightarrow v_k$ en O si y sólo si $v_i \rightarrow v_j \rightarrow v_k$ en O_l con $l = \max\{i, j, k\}$. Por construcción, O_i es la restricción de O en X_i para toda $i \geq 1$.

Finalmente, para ver que O es un orden cíclico encajable, se consideran los conjuntos finitos $S \subseteq X$ y $T \subseteq V(G) \setminus X$. Recuérdese que $X = V(G)$, y que $T = \emptyset$. Así, para todo $S \subseteq V(G)$, se puede encontrar j lo suficientemente grande tal que $S \subseteq X_j$. Por lo tanto, C_j^j es la S -curva deseada.

Es decir, suponiendo ii) se ha encontrado el orden encajable de $V(G)$, que junto con el lema garantiza la existencia de la $V(G)$ -curva que es necesaria para garantizar iii).

Con esto se concluye que el lema 3.2.1 implica (ii) implica iii)). No se probará iii) implica i), que igualmente puede consultarse en [25].

□

Ahora, se pasará a la prueba del teorema 2, para lo cual se empleará el siguiente teorema:

Teorema 3.2.3 [19] : Sea G una gráfica plana y X un subconjunto de $V(G)$ con al menos dos vértices no adyacentes. Si ningún par de vértices de X están separados por menos de 4 vértices (es decir, cada conjunto de corte de la subgráfica inducida por X , tiene al menos 4 vértices), entonces X está contenido en un ciclo de G .

No se incluirá la prueba del teorema 3.2.3, se puede consultar en [19].

Teorema 2 [25] : Toda gráfica plana localmente finita 4-conexa tiene una curva hamiltoniana.

Demostración. Para esta demostración, se usará el teorema 1 y el teorema 3.2.3.

Se observa que, al igual que antes, se desea utilizar la parte i) implica iii) del teorema 1.

Sean G una gráfica plana, localmente finita, 4-conexa, y S un subconjunto de $V(G)$ finito. Basta probar que S está contenido en un ciclo. Para todo par de vértices u, v en S , se escogen cuatro trayectorias internamente ajenas entre u y v . Éstas existen por el teorema de Menger (en su versión para gráficas infinitas, puede consultarse en [12]). Sea G_1 la subgráfica finita de G obtenida de la unión de todas las trayectorias escogidas (es finita pues S es un conjunto finito). Entonces G_1 cumple con las hipótesis del teorema anterior (el teorema 4.1), ya que es una gráfica plana, ningún par de vértices está separado por menos de 4 vértices (esto se tiene por ser 4-conexa), y existen al menos dos vértices no adyacentes de G_1 pues, si la gráfica tiene 4 vértices y la gráfica es completa, se sabe ya que la gráfica K_4 tiene un ciclo hamiltoniano; y si la gráfica tiene 5 vértices o más, como es plana, no puede ser completa, de modo que existen al menos dos vértices no adyacentes. Por lo tanto, S está contenido en un ciclo en G_1 .

□

Capítulo 4

¿Las teselaciones regulares del plano son hamiltonianas?

Recuérdese que vimos ya las tres teselaciones regulares del plano, que poseen los mismos símbolos de Schläfli que las del toro y la botella de Klein: $\{3, 6\}$, $\{4, 4\}$ y $\{6, 3\}$.

En el mismo artículo, referido en la sección de la hamiltonicidad para la botella de Klein, [46], se menciona que se ha probado que toda gráfica plana y cúbica con sólo caras cuadradas y hexagonales es hamiltoniana. De aquí que $\{6, 3\}$ sea hamiltoniana. Claramente este resultado no puede aplicarse a $\{4, 4\}$ debido a que $\{4, 4\}$ no es cúbica: su regularidad es 4. Sin embargo, para ésta y para $\{3, 6\}$ se utilizarán algunas herramientas del capítulo anterior.

¿Será cierta la hamiltonicidad para $\{4, 4\}$ y $\{3, 6\}$ también?

Comenzando por $\{4, 4\}$, se tiene que este mapa es 4-regular, ésto da pie a pensar que se puede utilizar el teorema 2. Efectivamente, la demostración para probar que $\{4, 4\}$ es 4-conexa, es idéntica a la construcción realizada en 3.1 para las teselaciones compactas con regularidad mayor a 3. Así, teniendo que $\{4, 4\}$ es 4-conexa, y que claramente esta es una gráfica plana y localmente finita; se puede emplear el teorema 2 para afirmar que tiene una curva hamiltoniana.

Ahora, para $\{3, 6\}$ se procede de manera idéntica: también esta es una gráfica 4-conexa por el mismo argumento y se puede emplear el teorema 2 para demostrar su hamiltonicidad.

Bastó con el teorema 2 para los casos faltantes, con esto queda demostrado que las tres teselaciones regulares del plano euclidiano son hamiltonianas, bajo la definición de hamiltonicidad empleada también para las teselaciones regulares del plano hiperbólico.

Capítulo 5

Conclusiones

Después de hacer una incursión por la teoría de gráficas, la geometría y en particular, las teselaciones y la geometría hiperbólica; se planteó la pregunta de si las gráficas encajadas o mapas asociados a las teselaciones regulares del plano hiperbólico son hamiltonianas o no, es decir, si poseen o no un ciclo hamiltoniano. Tras sentar las bases necesarias para abordar el problema, e investigar los antecedentes en las superficies, se logró cumplir el objetivo de determinar la hamiltocinidad para todas las teselaciones regulares del plano hiperbólico: sólo las teselaciones regulares compactas son hamiltonianas, mientras que el resto, las paracompactas y las no compactas, no lo son; sin perder en cuenta que se consideró una extensión un tanto natural para gráficas infinitas de ciclos hamiltonianos, donde el encaje de la gráfica y su compactificación son determinantes. Existen otras maneras de generalizar la hamiltonicidad, que pueden ser consideradas también para trabajos futuros. Igualmente algunos caminos posibles para futura investigación, son: indagar en la hamiltonicidad de los casos faltantes de la botella de Klein, o en otras superficies además del toro y la botella, por ejemplo; puede resultar interesante investigar en superficies como el monstruo del lago Ness, que es una superficie obtenida de pegar infinitos toros a lo largo de un rayo (es decir, una esfera con infinitos agujeros); y otro camino puede ser plantearse estas preguntas para teselaciones arquimedianas en vez de sólo regulares.

Con los teoremas empleados para probar la hamiltonicidad en las teselaciones regulares del plano hiperbólico, fue posible demostrar también la hamiltonicidad en las teselaciones regulares del plano euclidiano .

Capítulo 6

Anexo

6.1. El teorema de clasificación de superficies: el teorema del cierre (ZIP)

La sencillez del teorema y su prueba, así como los dibujos para entenderlos mejor, fueron las motivaciones para incluir esta sección en el presente trabajo. Principalmente estará basada en [15], cuya prueba está fundamentada en la realizada por Conway; también se basará en la propia prueba de Conway, dada en [9]. Se ocuparán también algunos de los dibujos mostradas en ambas referencias.

El teorema de clasificación es conocido desde la década de 1860, y reduce las diversas formas que una superficie puede tomar topológicamente a esferas con un cierto número de asas (handles) o crosscaps. Se debe tomar en cuenta que en la rama de la topología, las superficies pueden ser deformadas y estiradas, siempre que se haga de forma continua, “suave”. En este sentido, dos superficies se consideran equivalentes u *homeomorfas* si y sólo si se puede llevar una en la otra mediante una función continua y biyectiva.

Las superficies pueden describirse al identificar algunas aristas de otras más simples. Aquí se hará en términos de *cierres* o *pares de cierre*. Matemáticamente, un cierre es un par de aristas dirigidas (a cada una se le llamará *zip*) que se desean identificar. Se indicarán con flechas que se emparejan (en la misma dirección, ver figura 6.1).

A una superficie se le pueden hacer simples modificaciones cerrando fronteras de uno o dos agujeros. En el caso de que se tenga un agujero con los cierres ocupando cada mitad de la frontera circular, en direcciones opuestas en la circunferencia (A en la figura 6.2), entonces se puede cerrar el cierre con normalidad (B y C) y se obtiene un *cap* (D), al sellarlo sólo se tapa el agujero y puede ser ignorado.

Si en la misma situación, las direcciones son las mismas en la circunferencia (A en la figura 6.3), el resultado es un poco más complejo, al que se denomina *crosscap*. Se puede dividir cada cierre en dos cierres más, como muestra la

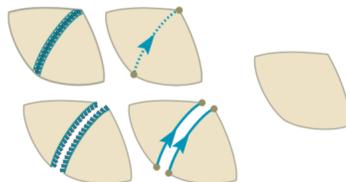
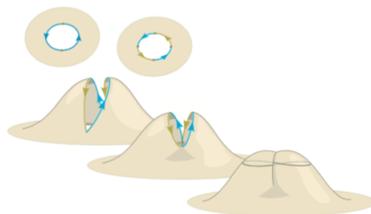


Figura 6.1: Cerrando un cierre

Figura 6.2: Cerrando un *cap*

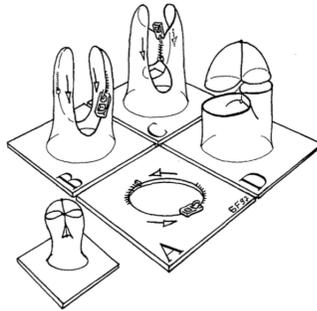
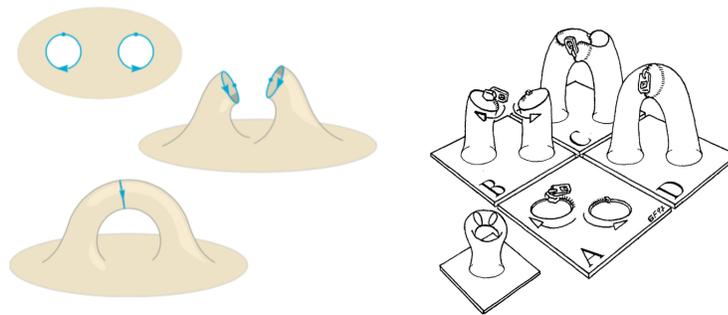
siguiente figura. Luego se distorsiona la superficie uniendo los pares de cierres opuestos.

Figura 6.3: *Crosscap*

Es posible pensar en deformar la superficie para que los puntos correspondientes (es decir, los que quedan en la misma dirección) estén opuestos unos de otros (figura 6.4 B), y se comienza a cerrar por uno de los lados. En la imagen, se comienza a cerrar hacia arriba (figura 6.4 C), y al alcanzar la cima, el cierre empieza a bajar, cerrando las flechas marcadas abajo, creando una línea de autointersección. Esta no tiene efecto en la topología intrínseca de la superficie. En 6.4 D, la figura tiene un corte para ver más claramente las autointersecciones.

Ahora, si se tienen dos agujeros cercanos, nuevamente hay dos casos posibles. El más sencillo ocurre cuando ambos tienen cierres en dirección opuesta. Al hacer crecer los “tubos” de un mismo lado de la superficie, se encuentran y cierran en una *asa* o *handle*.

En el caso donde los cierres se encuentren en el mismo sentido en ambos

Figura 6.4: Cerrando un *crosscap*Figura 6.5: Cerrando una *asa* o *handle*

agujeros, puede verse de dos formas distintas. Una es levantar los tubos por lados opuestos de la superficie y unirlos por un lado de ella, formando un *cross handle*, llamado también *Klein handle*.

La otra forma de verlo, es que uno de los tubos debe autointersecarse para invertir su dirección del cierre, B en la figura 6.7, que muestra una “rebanada” de superficie removida para apreciar la estructura con mayor facilidad. Ya con los cierres emparejados, se cierran (figura 6.7 C) obteniendo una especie de asa con una línea de autointersección (figura 6.7 D). Igual que antes, esta autointersección no afecta la topología intrínseca de la superficie.

Observaciones:

Cabe destacar que una esfera con un número dado de crosscaps, asas, crosshandles y agujeros es equivalente a otra esfera con el mismo número de elementos de cada tipo, dado que éstos se pueden deformar y los agujeros pueden moverse a donde sea a lo largo de la superficie; de modo que lo que resulta determinante es qué cantidad de estos elementos hay en cada componente.

Las superficies son compactas, pueden tener frontera, pero no son necesariamente conexas. Por otra parte, todas las superficies (variedades dos dimensio-

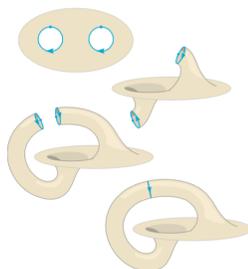


Figura 6.6: Cerrando una *cross handle*

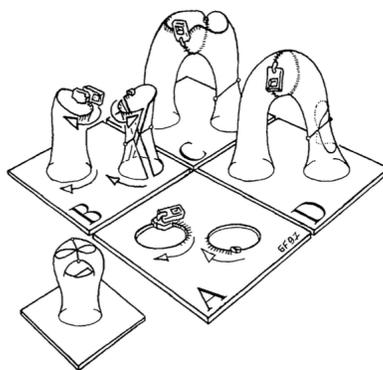


Figura 6.7: Cerrando una *cross handle* mediante una autointersección

nales) pueden ser trianguladas, pero la prueba es difícil y no será incluida, así que se considerará el teorema de clasificación para superficies que ya han sido trianguladas.

Una *perforación* es lo que queda de remover un disco abierto en una superficie. Una superficie es *ordinaria* si es homeomorfa a una colección finita de esferas, cada una con un número finito de asas, crosshandles, crosscaps y perforaciones.

Teorema de Clasificación (versión preliminar)[15] : Toda superficie es ordinaria.

Demostración. Sea una superficie arbitraria triangulada. Imagínese que se tienen parches triangulares sostenidos juntos por pares de cierres.

Al abrir los pares de cierres, la superficie se separará en una colección de triángulos con cierres en sus aristas. Esta colección de triángulos es una superficie ordinaria, pues cada triángulo es homeomorfo a una esfera con una sola perforación.

Ahora, se cierra un cierre con su respectivo par de cierre. La superficie resultante debe ser ordinaria también, (ver el lema enunciado a continuación). Se continúan cerrando los pares de cierres con sus parejas originales, par por par,

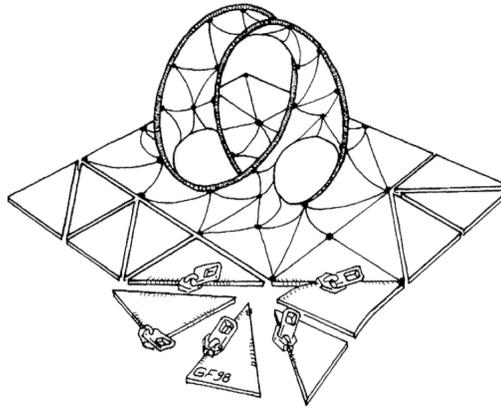


Figura 6.8: Triangulación de la superficie



Figura 6.9: Un triángulo es una superficie ordinaria: una esfera con un agujero en él

notando que en cada paso la superficie se mantiene siendo ordinaria. Al terminar de cerrar el último cierre, se obtiene la superficie original, y ésta es ordinaria.

Lema 6.1 [15] : Considérese una superficie con dos cierres atados a porciones de su frontera. Si la superficie es ordinaria antes de que los cierres se cierren juntos, es ordinaria también después de cerrarlos.

No se probará este lema, que puede consultarse en [15].

□

Ahora se hará mención de dos lemas que simplifican las relaciones entre handles, crosshandles y crosscaps, cuyas pruebas se pueden consultar también en [15]:

Lema 6.2 [15] : Un crosshandle es homeomorfo a dos crosscaps.

Lema 6.3 [15](Teorema de Dyck) : Handles y crosshandles son equivalentes en la presencia de un crosscap.

Con todas las herramientas previas, está todo listo ya para enunciar y demostrar el teorema de clasificación en su versión más simplificada y elegante:

Teorema de Clasificación [15] : Toda superficie conexa y cerrada es homeomorfa a una esfera con crosscaps o a una esfera con handles.

Demostración. Por la versión preliminar del teorema de clasificación, una superficie conexa y cerrada es homeomorfa a una esfera con handles, crosshandles y crosscaps.

Caso 1: Al menos hay un crosshandle o crosscap.

Cada crosshandle es homeomorfo a dos crosscaps por el lema 6.2, entonces la superficie completa es homeomorfa a una esfera con crosscaps y handles solamente. Existe al menos un crosscap presente en la superficie, por lo que cada handle es equivalente a un crosshandle por el teorema de Dyck, que a su vez cada uno es homeomorfo a dos crosscaps (de nuevo por el lema 6.2), resultando la superficie en una esfera sólo con crosscaps.

Caso 2: No hay crosshandles ni crosscaps.

En este caso, la superficie es homeomorfa a una esfera con sólo handles.

De este modo, se ha probado que toda superficie conexa cerrada es homeomorfa a una esfera con sólo crosscaps o a una esfera con sólo handles. □

Se debe notar que las superficies del teorema anterior son topológicamente distintas y se pueden reconocer por su orientación y su característica o su número de handles o crosscaps. Una esfera con n handles es orientable con número de Euler $2 - 2n$, mientras que una esfera con n crosscaps es no orientable con número de Euler $2 - n$.

En cuestión de nomenclatura, a una esfera con un handle se le llama *toro*, a una esfera con dos handles, *doblo toro*, con tres handles, un *triple toro*, y así sucesivamente. Análogamente, Conway llama a una esfera con un crosscap *superficie cross*, con dos crosscaps *superficie cross doble*, y así sucesivamente; aunque tradicionalmente a la superficie cross se le conoce como el *plano proyectivo real*, a la superficie cross doble como *botella de Klein*, y a la superficie cross triple como *superficie de Dyck*.

6.2. Discusión sobre el árbol binario

A raíz del lema 3.2.1, el cual será recordado a continuación, surgieron nuevas preguntas.

Lema 3.2.1 [17]: Si (V, E) es una gráfica conexa localmente finita, entonces el conjunto de vértices V es finito o numerable.

Antes de encontrar su demostración, intentando explicar por qué era cierto, pensé en un interesante ejemplo de espacio topológico el cual también puede ser

la gráfica pasan una infinidad de trayectorias, y una infinidad no numerable: tantas como subsucesiones de ceros y unos, con los primeros elementos de la sucesión fija. De modo que nuestro lema no se contradice con este ejemplo de espacio topológico y gráfica.

6.2.1. Otro ejemplo de gráfica que no es contraejemplo

Después de la revisión de la tesis realizada por los sinodales, uno de ellos preguntó qué fallaba en cierta gráfica como posible contraejemplo al lema 3.2.1.

Antes de dar la gráfica, recordemos algunos conceptos, definiciones, teoremas y axiomas que serán necesarios para entender tal gráfica. Las referencias que se utilizaron fueron [37], [42] y [43].

Orden total : Es una relación binaria \leq , en un conjunto X , tal que para cualesquiera a, b y c en X se cumplen las siguientes propiedades:

Reflexividad : $a \leq a$.

Transitividad : Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

Antisimetría : Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

Comparabilidad : $a \leq b$ o $b \leq a$.

Relación de equivalencia : Es una relación binaria \sim , en un conjunto X , tal que se cumplen las propiedades reflexiva, transitiva, y simétrica, que describimos a continuación:

Simetría : Para todo a y $b \in X$, si $a \sim b$ entonces $b \sim a$.

Conjunto bien ordenado : Un *buen orden* en un conjunto S es un orden total en S con la propiedad de que todo subconjunto no vacío de S tiene un elemento mínimo en este orden.

Teorema de Zermelo o Teorema del buen orden : Todo conjunto puede ser bien ordenado. El Teorema del buen orden en realidad es un axioma, el cual es equivalente al axioma de elección.

Ya habiendo recordado los conceptos principales que ocuparemos, pasemos a describir la gráfica:

Consideremos una gráfica donde haya un vértice por cada uno de los números reales, de forma que cada vértice esté asociado con un número real. Por el Teorema de Zermelo, sabemos que los reales están bien ordenados. Elijamos un buen orden de los reales. Hacemos dos vértices adyacentes si y sólo si sus números reales correspondientes son consecutivos en el buen orden elegido.

El conjunto de vértices no es finito ni numerable pues tiene la cardinalidad de los reales. De modo que, si cumple las hipótesis, tendremos un contraejemplo al lema.

Llamemos $G_{\mathbb{R}}$ a la gráfica descrita, y definamos en ella la siguiente relación entre vértices:

$a \sim b$ si y sólo si la distancia entre a y b es finita. Veamos que esta relación es de equivalencia: Sean a, b, c vértices cualesquiera de $G_{\mathbb{R}}$, entonces:

Reflexividad : $a \sim a$, ya que la distancia de un vértice a él mismo es 0 en cualquier gráfica.

Simetría : Si $a \sim b$ entonces $b \sim a$, pues si la distancia entre a y b es finita, existe al menos una trayectoria $T_1 = (a = v_0, v_1, \dots, v_n = b)$ entre a y b , de longitud $n < \infty$, así, tenemos que existe la trayectoria $T_2 = (b = v_n, v_{n-1}, \dots, v_0 = a)$ entre b y a que es también de longitud n .

Transitividad : Si $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces $a \sim c$, ya que, como $a \sim b$, la distancia entre a y b es finita, entonces existe al menos una trayectoria $T_1 = (a = v_0, v_1, \dots, v_n = b)$ entre a y b , de longitud $n < \infty$. De igual manera, como $b \sim c$, existe al menos una trayectoria $T_2 = (b = u_0, u_1, \dots, u_m = c)$ entre b y c , de longitud $m < \infty$. Así, se tiene la ac -trayectoria $T_1 \cup T_2$, de longitud $n + m$, de modo que $d(a, c) \leq m + n < \infty$.

Analícemos las clases de equivalencia dadas por esta relación.

Afirmación: Cada clase de equivalencia es una trayectoria finita o una trayectoria infinita hacia un lado (un rayo).

Demostración. Sea P una clase de equivalencia. Como elegimos un buen orden de los reales y cada real está asociado a un vértice de la gráfica, y definimos la relación sobre los vértices de $G_{\mathbb{R}}$, P es en particular un subconjunto de $V(G_{\mathbb{R}})$, que podemos pensarlo como un subconjunto de reales, que por estar bien ordenados tiene un mínimo, es decir, existe $a_0 = \min(P)$. Tenemos que a_0 no es sucesor inmediato de ningún otro vértice, ya que, si a_0 fuera el sucesor de un vértice b , entonces b pertenecería a la clase de equivalencia P y sería menor que a_0 , contradiciendo que a_0 es el mínimo de P . Sean a_1 el sucesor de a_0 , a_2 el sucesor de a_1 , etc. En el caso de que P no tenga máximo, P contiene como subgráfica a la trayectoria $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$. Ahora, a_0 sólo tiene un vecino en $G_{\mathbb{R}}$, y a_n con $n > 0$ sólo tiene dos vecinos en $G_{\mathbb{R}}$. De esta manera, los únicos vértices a distancia finita de a_0 son los vértices a_n con $n > 0$, de modo que $P = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. En el caso en que P tuviera máximo, entonces sería de la forma $P = \{a_0, \dots, a_n\}$, con a_n el máximo de P , es decir, P sería la trayectoria $P = (a_0, \dots, a_n)$. □

A partir de lo anterior, podemos observar lo siguiente:

- A lo más una clase puede tener máximo, ya que por tener un buen orden, en particular el orden es total, así, si a y b fueran máximos, por la comparabilidad, $a \leq b$ o $b \leq a$.

- Si el buen orden cumple con que ninguna clase tiene máximo, entonces toda trayectoria tiene cardinalidad infinita.
- La afirmación se vale para cualquier buen orden que se escoja.
- La gráfica no tiene trayectorias infinitas para los dos lados por el argumento del mínimo descrito en la prueba de la afirmación.
- $G_{\mathbb{R}}$ es la unión de rayos y a lo más una trayectoria finita. Se puede escoger un buen orden donde no haya trayectoria finita.
- La gráfica no puede ser conexa, ya que de serlo, estaría compuesta sólo por una de estas trayectorias, por lo que la cardinalidad de vértices sería a lo más numerable, contradiciendo que $G_{\mathbb{R}}$ tiene la cardinalidad de vértices igual a la cardinalidad de los reales.

Tras analizar la gráfica y hacer estas observaciones, podemos deducir que la gráfica $G_{\mathbb{R}}$ no es un contraejemplo al lema, ya que no cumple la hipótesis de ser conexa.

6.3. Códigos de las imágenes

A continuación, se comparten los códigos de las imágenes que fueron realizadas con *Wolfram Mathematica*.

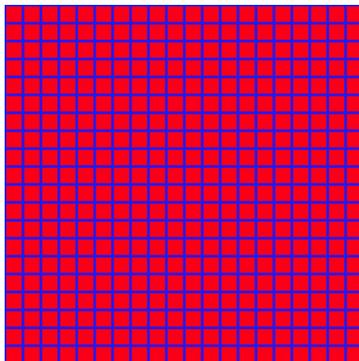
```

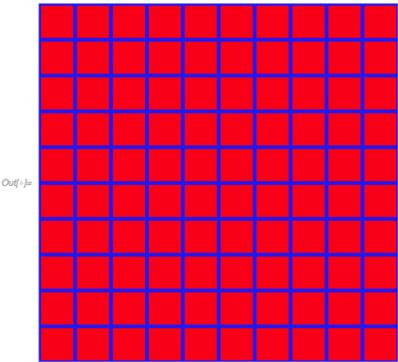
In[ ]:= Triangulos2[m_, gr_] := Function[{n, thc},
  [función]
  Lines2 = Table[InfiniteLine[{1 * i, 0}, {0, 1}], {i, -n, n}];
  [tabla] [línea infinita]
  Lines2 = Append[Lines2, Table[InfiniteLine[{0, 1 * i}, {1, 0}], {i, -n, n}]];
  [añade] [tabla] [línea infinita]
  Lines2 = Flatten[Lines2];
  [aplana]
  Graphics[{Thickness[thc], Lines2}, PlotRange -> {{-n/2, n/2}, {-n/2, n/2}}, Background -> Red, BaseStyle -> Blue]
  [gráfico] [grosor] [rango de representación] [fondo de imagen] [rojo] [estilo base] [azul]
] [m, gr]

In[ ]:= Graphics[{Thickness[0.007], Lines2}, PlotRange -> {{-n/2, n/2}, {-n/2, n/2}}, Background -> Red, BaseStyle -> Blue]
[gráfico] [grosor] [rango de representación] [fondo de imagen] [rojo] [estilo base] [azul]
Triangulos2[10, 0.01]

```

Out[]:=





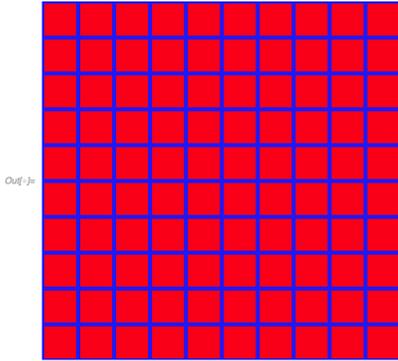
Out[]:=

```
Export["/Users/Claudia/Desktop/Cuadrados01.pdf", %44, "PDF"]
```

|exporta

```
Export["/Users/Claudia/Desktop/Cuadrados01.pdf", %44, "PDF"]
```

|exporta



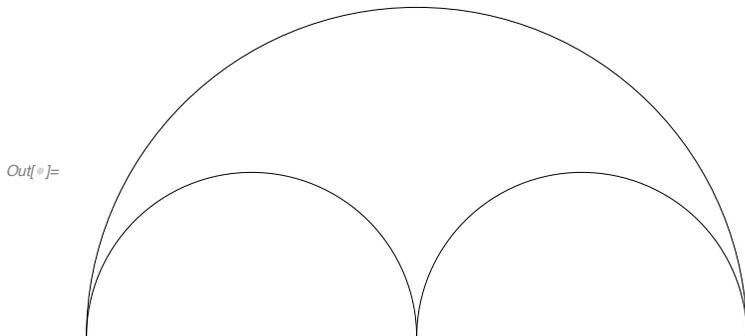
Out[]:=

```
In[ ]:= Export["/Users/Claudia/Desktop/cuadrados03.pdf", %45, "PDF"]
```

|exporta

Out[]:= /Users/Claudia/Desktop/cuadrados03.pdf

```
In[ ]:= Graphics[{{Circle[{1/2, 0}, 1/2, {0, Pi}],
  [gráfico [círculo [número pi]
    Circle[{1/4, 0}, 1/4, {0, Pi}], Circle[{3/4, 0}, 1/4, {0, Pi}]}]}]
  [círculo [número pi]
```



```
In[ ]:= Radios = Table[1/2^i, {i, 1, 10}]
  [tabla
```

```
Out[ ]:= {1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, 1/128, 1/256, 1/512, 1/1024}
```

```
In[ ]:= NCentros = Table[2^i, {i, 0, 9}]
  [tabla
```

```
Out[ ]:= {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512}
```

```
In[ ]:= Centros[k_] := Function[m,
  [función
```

```
  CEN1 = Table[j/2^m, {j, 1, (2^m) - 1}];
  [tabla
```

```
  CEN0 = Table[j/2^(m-1), {j, 1, 2^(m-1) - 1}];
  [tabla
```

```
  Complement[CEN1, CEN0]
  [complemento
```

```
] [k]
```

```
In[ ]:= k = 2
```

```
Out[ ]:= 2
```

```
In[ ]:= CEN0 = Table[j/2^(k-1), {j, 1, 2^(k-1) - 1}]
  [tabla
```

```
Out[ ]:= {1/2}
```

```
In[ ]:= CEN1 = Table[j/2^k, {j, 1, (2^k) - 1}]
  [tabla
```

```
Out[ ]:= {1/4, 1/2, 3/4}
```

```
In[ ]:= Complement[CEN1, CEN0]
      |complemento
```

```
Out[ ]:= {1/4, 3/4}
```

```
In[ ]:= Centros[2]
```

```
Out[ ]:= {1/4, 3/4}
```

```
In[ ]:= Centros[3]
```

```
Out[ ]:= {1/8, 3/8, 5/8, 7/8}
```

```
In[ ]:= Círculos[k_, l_] := Function[{m, g},
      |función
```

```
  CEN1 = Table[j/2^m, {j, 1, (2^m) - 1}];
      |tabla
```

```
  CEN0 = Table[j/2^(m-1), {j, 1, 2^(m-1) - 1}];
      |tabla
```

```
  CENTROSK = Complement[CEN1, CEN0];
      |complemento
```

```
  Table[{Directive[Thickness[g],
      |tabla |directiva |grosor
```

```
    RGBColor[5 * Exp[-(k-1)/5]/10, 0, 5/10 + (5/10) * (1 - Exp[-(k-1)/5])]],
      |color RGB |exponencial |exponencial
```

```
    Circle[{CENTROSK[[i]], 0}, 1/2^k, {0, Pi}], {i, Length[CENTROSK]}]
      |círculo |número pi |longitud
```

```
] [
k,
l]
```

SetDelayed: Tag List in <<1>> is Protected.

```
Out[ ]:= $Failed
```

```
In[ ]:= Discos[k_] := Function[m,
      |función
```

```
  CEN1 = Table[j/2^m, {j, 1, (2^m) - 1}];
      |tabla
```

```
  CEN0 = Table[j/2^(m-1), {j, 1, 2^(m-1) - 1}];
      |tabla
```

```
  CENTROSK = Complement[CEN1, CEN0];
      |complemento
```

```
  Table[{Directive[ColorData["Rainbow", 1/Sqrt[m]]],
      |tabla |directiva |datos de colores |raíz cuadrada
```

```
    Disk[{CENTROSK[[i]], 0}, 1/2^k, {0, Pi}], {i, Length[CENTROSK]}]
      |disco |número pi |longitud
```

```
] [
k]
```

In[]:= **Graphics[Discos[3]]**
 [gráfico]



In[]:= **ColorData["NeonColors"]**
 [datos de colores]



In[]:= **ColorData["NeonColors", "Range"]**
 [datos de colores] [rango]

Out[]:= {0, 1}

In[]:= **ColorData["NeonColors", "Panel"]**
 [datos de colores] [panel]



In[]:= 

Out[]:= 

In[]:= **ColorData["NeonColors", 0.5]**
 [datos de colores]

Out[]:= 

In[]:= **ColorData["NeonColors", 0]**
 [datos de colores]

Out[]:= 

In[]:= **Graphics[Circulos[10, 0.01]]**
 [gráfico]

Out[]:= 



In[]:= **RGBColor[4/10, 0, 5/10]**
 [color RGB]

Out[]:= 

```

In[ ]:= Iterador[M_] := Function[L,
    [función]
    LISTA = {};
    For[i = 1, i ≤ L, i++,
    [para cada]
        LISTA = Circulos[i, 0.002 * (1 - (i - 1) / L)] ∪ LISTA
    ];
    LISTA =
    LISTA ∪ {Directive[Thickness[0.002 * (1 - (L - 1) / L)]], Line[{{0, 0}, {1, 0}}]};
    [directiva] [grosor] [línea]
    LISTA
] [M]

```

```

In[ ]:= IteradorD[M_] := Function[L,
    [función]
    LISTA = {};
    For[i = 1, i ≤ L, i++,
    [para cada]
        LISTA = Append[LISTA, Discos[i]]
        [añade]
    ];
    LISTA
] [M]

```

```

In[ ]:= Graphics[IteradorD[10]]
[gráfico]

```

Out[]:=



```

In[ ]:= Export["Guacamaya1.pdf", Graphics[IteradorD[10]]]
[exporta] [gráfico]

```

Out[]:= Guacamaya1.pdf

```
In[ ]:= SystemOpen["Guacamaya1.pdf"]
| abre en sistema
```

```
In[ ]:= SystemOpen["Sunset1.pdf"]
| abre en sistema
```

```
In[ ]:= SystemOpen["CMYK2.pdf"]
| abre en sistema
```

```
In[ ]:= SystemOpen["CMYK1.pdf"]
| abre en sistema
```

```
In[ ]:= SystemOpen["Morado-Azul.pdf"]
| abre en sistema
```

```
In[ ]:= Export["Prueba.pdf", Graphics[Iterador[10]]]
| exporta | gráfico
```

Union: Heads List and

$$\left\{ \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\left\{1, 1\right\}, 1, \left\{\pi, \frac{3\pi}{2}\right\}\right], \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\left\{-1, 1\right\}, 1, \left\{\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}\right], \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\left\{-1, -1\right\}, 1, \left\{2\pi, \frac{5\pi}{2}\right\}\right], \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\left\{1, -1\right\}, 1, \left\{\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right\}\right] \right\}, \ll 3 \gg, \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.0004]], \text{Circle}\left[\left\{1, \text{Tan}\left[\frac{\pi}{324}\right], \text{Tan}\left[\frac{\pi}{324}\right], \left\{\frac{41\pi}{81}, \frac{3\pi}{2}\right\}\right], \ll 49 \gg, \ll 274 \gg \right\} \right\}$$

at positions 2 and 1 are expected to be the same.

Union: Heads List and

$$\left\{ \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\left\{1, 1\right\}, 1, \left\{\pi, \frac{3\pi}{2}\right\}\right], \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\left\{-1, 1\right\}, 1, \left\{\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}\right], \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\left\{-1, -1\right\}, 1, \left\{2\pi, \frac{5\pi}{2}\right\}\right], \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\left\{1, -1\right\}, 1, \left\{\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right\}\right] \right\}, \ll 3 \gg, \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.0004]], \text{Circle}\left[\left\{1, \text{Tan}\left[\frac{\pi}{324}\right], \text{Tan}\left[\frac{\pi}{324}\right], \left\{\frac{41\pi}{81}, \frac{3\pi}{2}\right\}\right], \ll 49 \gg, \ll 274 \gg \right\} \right\}$$

at positions 3 and 1 are expected to be the same.

Union: Heads List and

$$\left\{ \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\left\{1, 1\right\}, 1, \left\{\pi, \frac{3\pi}{2}\right\}\right], \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\left\{-1, 1\right\}, 1, \left\{\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}\right], \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\left\{-1, -1\right\}, 1, \left\{2\pi, \frac{5\pi}{2}\right\}\right], \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\left\{1, -1\right\}, 1, \left\{\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right\}\right] \right\}, \ll 3 \gg, \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.0004]], \text{Circle}\left[\left\{1, \text{Tan}\left[\frac{\pi}{324}\right], \text{Tan}\left[\frac{\pi}{324}\right], \left\{\frac{41\pi}{81}, \frac{3\pi}{2}\right\}\right], \ll 49 \gg, \ll 274 \gg \right\} \right\}$$

at positions 4 and 1 are expected to be the same.

General: Further output of Union::heads will be suppressed during this calculation.

```
Out[ ]:= Prueba.pdf
```

```
In[ ]:= SystemOpen["Prueba.pdf"]
| abre en sistema
```

In[]:= **Graphics [Iterador [10]]**

[Gráfico](#)

... **Union**: Heads List and

$$\left\{ \left\{ \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\{1, 1\}, 1, \left\{\pi, \frac{3\pi}{2}\right\}\right], \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\{-1, 1\}, 1, \left\{\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}\right], \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\{-1, -1\}, 1, \left\{2\pi, \frac{5\pi}{2}\right\}\right], \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\{1, -1\}, 1, \left\{\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right\}\right] \right\} \right\}, \ll 3 \gg, \left\{ \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.0004]], \text{Circle}\left[\{1, \text{Tan}\left[\frac{\pi}{324}\right]\right], \text{Tan}\left[\frac{\pi}{324}\right], \left\{\frac{41\pi}{81}, \frac{3\pi}{2}\right\}\right], \ll 49 \gg, \ll 274 \gg \right\} \right\}$$

at positions 2 and 1 are expected to be the same.

... **Union**: Heads List and

$$\left\{ \left\{ \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\{1, 1\}, 1, \left\{\pi, \frac{3\pi}{2}\right\}\right], \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\{-1, 1\}, 1, \left\{\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}\right], \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\{-1, -1\}, 1, \left\{2\pi, \frac{5\pi}{2}\right\}\right], \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\{1, -1\}, 1, \left\{\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right\}\right] \right\} \right\}, \ll 3 \gg, \left\{ \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.0004]], \text{Circle}\left[\{1, \text{Tan}\left[\frac{\pi}{324}\right]\right], \text{Tan}\left[\frac{\pi}{324}\right], \left\{\frac{41\pi}{81}, \frac{3\pi}{2}\right\}\right], \ll 49 \gg, \ll 274 \gg \right\} \right\}$$

at positions 3 and 1 are expected to be the same.

... **Union**: Heads List and

$$\left\{ \left\{ \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\{1, 1\}, 1, \left\{\pi, \frac{3\pi}{2}\right\}\right], \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\{-1, 1\}, 1, \left\{\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}\right], \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\{-1, -1\}, 1, \left\{2\pi, \frac{5\pi}{2}\right\}\right], \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\{1, -1\}, 1, \left\{\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right\}\right] \right\} \right\}, \ll 3 \gg, \left\{ \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.0004]], \text{Circle}\left[\{1, \text{Tan}\left[\frac{\pi}{324}\right]\right], \text{Tan}\left[\frac{\pi}{324}\right], \left\{\frac{41\pi}{81}, \frac{3\pi}{2}\right\}\right], \ll 49 \gg, \ll 274 \gg \right\} \right\}$$

at positions 4 and 1 are expected to be the same.

... **General**: Further output of Union::heads will be suppressed during this calculation.

Out[]:=



In[]:= **Export["Circulitos5.pdf", Graphics[Iterator[10]]]**
[\[exporta\]](#) [\[gráfico\]](#)

... **Union**: Heads List and

$$\left\{ \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\left\{1, 1\right\}, 1, \left\{\pi, \frac{3\pi}{2}\right\}\right], \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\left\{-1, 1\right\}, 1, \left\{\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}\right], \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\left\{-1, -1\right\}, 1, \left\{2\pi, \frac{5\pi}{2}\right\}\right], \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\left\{1, -1\right\}, 1, \left\{\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right\}\right] \right\} \right\}, \ll 3 \gg, \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.0004]], \text{Circle}\left[\left\{1, \text{Tan}\left[\frac{\pi}{324}\right]\right\}, \text{Tan}\left[\frac{\pi}{324}\right], \left\{\frac{41\pi}{81}, \frac{3\pi}{2}\right\}\right], \ll 49 \gg, \ll 274 \gg \right\}$$

at positions 2 and 1 are expected to be the same.

... **Union**: Heads List and

$$\left\{ \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\left\{1, 1\right\}, 1, \left\{\pi, \frac{3\pi}{2}\right\}\right], \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\left\{-1, 1\right\}, 1, \left\{\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}\right], \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\left\{-1, -1\right\}, 1, \left\{2\pi, \frac{5\pi}{2}\right\}\right], \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\left\{1, -1\right\}, 1, \left\{\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right\}\right] \right\} \right\}, \ll 3 \gg, \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.0004]], \text{Circle}\left[\left\{1, \text{Tan}\left[\frac{\pi}{324}\right]\right\}, \text{Tan}\left[\frac{\pi}{324}\right], \left\{\frac{41\pi}{81}, \frac{3\pi}{2}\right\}\right], \ll 49 \gg, \ll 274 \gg \right\}$$

at positions 3 and 1 are expected to be the same.

... **Union**: Heads List and

$$\left\{ \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\left\{1, 1\right\}, 1, \left\{\pi, \frac{3\pi}{2}\right\}\right], \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\left\{-1, 1\right\}, 1, \left\{\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}\right], \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\left\{-1, -1\right\}, 1, \left\{2\pi, \frac{5\pi}{2}\right\}\right], \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.002]], \text{Circle}\left[\left\{1, -1\right\}, 1, \left\{\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right\}\right] \right\} \right\}, \ll 3 \gg, \left\{ \text{Directive}[\text{Thickness}[0.0004]], \text{Circle}\left[\left\{1, \text{Tan}\left[\frac{\pi}{324}\right]\right\}, \text{Tan}\left[\frac{\pi}{324}\right], \left\{\frac{41\pi}{81}, \frac{3\pi}{2}\right\}\right], \ll 49 \gg, \ll 274 \gg \right\}$$

at positions 4 and 1 are expected to be the same.

... **General**: Further output of Union::heads will be suppressed during this calculation.

Out[]:= **Circulitos5.pdf**

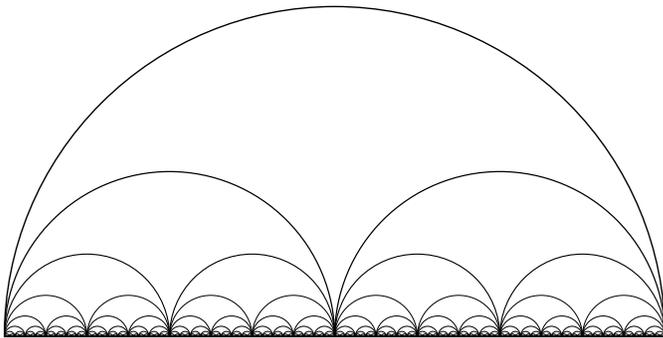
In[]:= **SystemOpen["Circulitos5.pdf"]**
[\[abre en sistema\]](#)

```

In[ ]:= Círculos0[k_, l_] := Function[{m, g},
      [función]
      CEN1 = Table[j/2^m, {j, 1, (2^m) - 1}];
      [tabla]
      CEN0 = Table[j/2^(m-1), {j, 1, 2^(m-1) - 1}];
      [tabla]
      CENTROSK = Complement[CEN1, CEN0];
      [complemento]
      Table[{Directive[Thickness[g]],
      [tabla] [directiva] [grosor]
      Circle[{CENTROSK[[i]], 0}, 1/2^k, {0, Pi}]}], {i, Length[CENTROSK]}]
      [círculo] [número pi] [longitud]
    ][k, l]
Iterador0[M_] := Function[L,
      [función]
      LISTA = {};
      For[i = 1, i ≤ L, i++,
      [para cada]
      LISTA = Círculos0[i, 0.002 * (1 - (i - 1) / L)] ∪ LISTA
      ];
      LISTA =
      LISTA ∪ {Directive[Thickness[0.002 * (1 - (L - 1) / L)]], Line[{{0, 0}, {1, 0}]}];
      [directiva] [grosor] [línea]
      LISTA
    ][M]
Graphics[Iterador0[10]]
[gráfico]

```

Out[]:=



In[]:=

El disco de Poincaré:

```
In[*]:= C0 = Table[Circle[
  [tabla [círculo
    {Cos[i * 2 * Pi / 3] / Cos[2 * Pi / 6], Sin[i * 2 * Pi / 3] / Cos[2 * Pi / 6]}, Tan[2 * Pi / 6],
    [coseno [número pi [coseno [número pi [seno [número pi [coseno [número pi [tangente [número pi
    {Pi + i * 2 * Pi / 3 + (Pi / 2 - 2 * Pi / 6), Pi + i * 2 * Pi / 3 - (Pi / 2 - 2 * Pi / 6)}], {i, 0, 2}]
    [número pi [número pi
```

```
Out[*]:= {Circle[{2, 0},  $\sqrt{3}$ , { $\frac{7\pi}{6}$ ,  $\frac{5\pi}{6}$ }]},
  Circle[{-1,  $\sqrt{3}$ },  $\sqrt{3}$ , { $\frac{11\pi}{6}$ ,  $\frac{3\pi}{2}$ }]}, Circle[{-1,  $-\sqrt{3}$ },  $\sqrt{3}$ , { $\frac{5\pi}{2}$ ,  $\frac{13\pi}{6}$ }]}
```

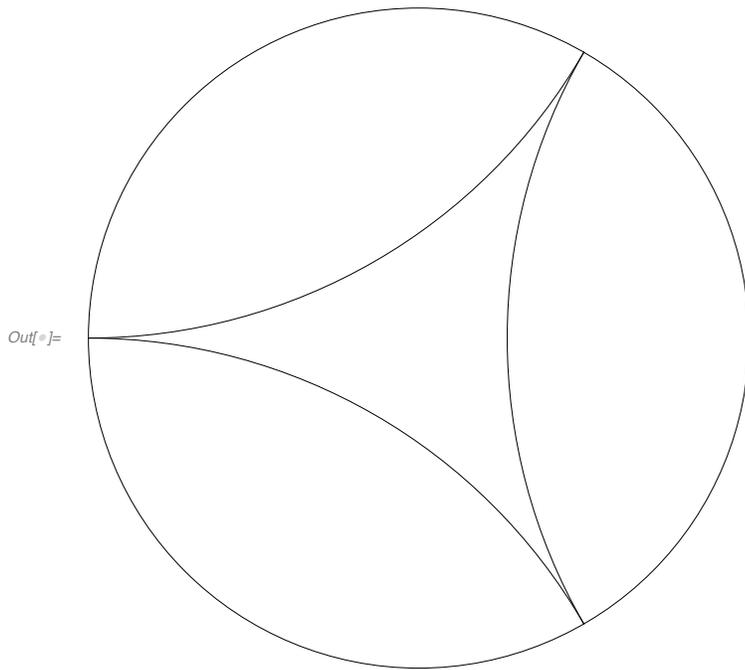
```
In[*]:= C1 = Table[Circle[{Cos[i * 2 * Pi / (3 * 2)], Sin[i * 2 * Pi / (3 * 2)]}, 2 * Sin[2 * Pi / 6]],
  [tabla [círculo [coseno [número pi [seno [número pi [seno [número pi
  {i, 0, 3 * 2 - 1}]
```

```
Out[*]:= {Circle[{1, 0},  $\sqrt{3}$ ], Circle[{ $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ },  $\sqrt{3}$ ], Circle[{- $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ },  $\sqrt{3}$ ],
  Circle[{-1, 0},  $\sqrt{3}$ ], Circle[{- $\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ },  $\sqrt{3}$ ], Circle[{ $\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ },  $\sqrt{3}$ ]}
```

```
In[*]:= Complement[C1, C0]
  [complemento
```

```
Out[*]:= {Circle[{-1, 0},  $\sqrt{3}$ ], Circle[{- $\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ },  $\sqrt{3}$ ], Circle[{- $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ },  $\sqrt{3}$ ],
  Circle[{ $\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ },  $\sqrt{3}$ ], Circle[{ $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ },  $\sqrt{3}$ ], Circle[{1, 0},  $\sqrt{3}$ ]}
```

```
In[ ]:= Graphics[{Circle[{0, 0}, 1], C0}]
```



```
In[ ]:= Export["/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/trianguloPoin01.pdf",
```

```
Graphics[{Circle[{0, 0}, 1], {Circle[{2, 0},  $\sqrt{3}$ , { $\frac{7\pi}{6}$ ,  $\frac{5\pi}{6}$ }}, Circle[{-1,  $\sqrt{3}$ },
```

```
 $\sqrt{3}$ , { $\frac{11\pi}{6}$ ,  $\frac{3\pi}{2}$ }}, Circle[{-1,  $-\sqrt{3}$ },  $\sqrt{3}$ , { $\frac{5\pi}{2}$ ,  $\frac{13\pi}{6}$ }}]}], "PDF"]
```

... Export: Directory C:\home\amilcar\Documentos\8voSemestre\ProgClau\ does not exist.

... Export: Cannot open /home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/trianguloPoin01.pdf.

```
Out[ ]:= $Failed
```

```
In[ ]:=
```

```
In[ ]:= ANG0 = {0, 2 * Pi / 3, 4 * Pi / 3}
```

```
Out[ ]:= {0,  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $\frac{4\pi}{3}$ }
```

```

In[*]:= CuatriPares[L_] := Function[l,
  [función]
  n = Length[l];
  [longitud]
  Nl = {};
   $\theta = (l[[2]] - l[[1]]) / 4;$ 
  For[i = 1, i ≤ n, i++,
  [para cada]
    Nl = Append[Nl, {L[[i]] -  $\theta$ , L[[i]] +  $\theta$ }]
    [añade]
  ];
  Nl = Flatten[Nl]
  [aplana]
] [L]

```

```

In[*]:= CuatriPares[ANG0]

```

```

Out[*]:=  $\{-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\}$ 

```

```

In[*]:= TriPares[TriPares[ANG0]]

```

```

Out[*]:= TriPares[TriPares[{0,  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $\frac{4\pi}{3}$ }]]

```

```

In[*]:= RAD[L_] := Sec[(L[[2]] - L[[1]]) / 2]
  [secante]

```

```

In[*]:= RAD[ANG0]

```

```

Out[*]:= 2

```

```

In[*]:= ANG0

```

```

Out[*]:=  $\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$ 

```

```

In[*]:= ANG1 = CuatriPares[ANG0]

```

```

Out[*]:=  $\{-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\}$ 

```

```

In[*]:= r = RAD[ANG1]

```

```

Out[*]:=  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 

```

```

In[*]:= Sec[Pi / 6]
  [se... [número p]

```

```

Out[*]:=  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 

```

In[]:= $\theta = (\text{ANG1}[[2]] - \text{ANG1}[[1]]) / 2$

Out[]:= $\frac{\pi}{6}$

In[]:= `CoordenadasC = Table[Circle[{r * Cos[ANG1[[i]]], r * Sin[ANG1[[i]]}], Sqrt[r^2 - 1],`
[tabla] [círculo] [coseno] [seno] [raiz cuadrada]
`{Pi + ANG1[[i]] + Pi/2 - θ , Pi + ANG1[[i]] - Pi/2 + θ }, {i, 1, Length[ANG1]}`
[número pi] [número pi] [número pi] [número pi] [longitud]

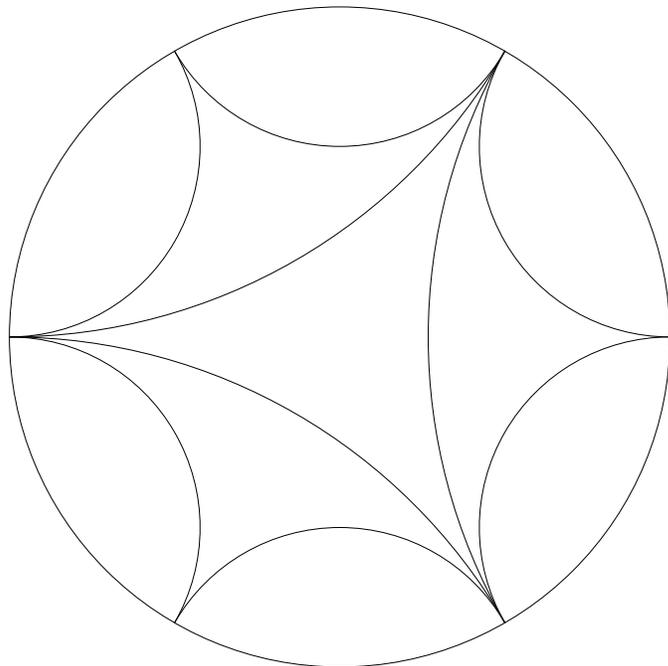
Out[]:= `{Circle[{1, - $\frac{1}{\sqrt{3}}$ }, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, { $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$ }}, Circle[{1, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ }, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, { $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$ }},`
`Circle[{0, $\frac{2}{\sqrt{3}}$ }, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, { $\frac{11\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ }}, Circle[{-1, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ }, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, { $\frac{13\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$ }},`
`Circle[{-1, - $\frac{1}{\sqrt{3}}$ }, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, { $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{11\pi}{6}$ }}, Circle[{0, - $\frac{2}{\sqrt{3}}$ }, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, { $\frac{17\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$ }}]}`

In[]:= `C0`

Out[]:= `{Circle[{2, 0}, $\sqrt{3}$, { $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ }},`
`Circle[{-1, $\sqrt{3}$ }, $\sqrt{3}$, { $\frac{11\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$ }}, Circle[{-1, - $\sqrt{3}$ }, $\sqrt{3}$, { $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{13\pi}{6}$ }}]}`

In[]:= `Graphics[{Circle[{0, 0}, 1], CoordenadasC, C0}]`
[gráfico] [círculo]

Out[]:=



In[]:= `CuatriPares[ANG0]`

Out[]:= `{- $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$ }`

In[*]:= **ANG1**

$$\text{Out[*]} = \left\{ -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

In[*]:= **ANG2 = CuatriPares[ANG1]**

$$\text{Out[*]} = \left\{ -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{5\pi}{4}, \frac{17\pi}{12}, \frac{19\pi}{12} \right\}$$

In[*]:= **r = RAD[ANG2]**

$$\text{Out[*]} = \sqrt{2} \left(-1 + \sqrt{3} \right)$$

In[*]:= **$\theta = (\text{ANG2}[[2]] - \text{ANG2}[[1]]) / 2$**

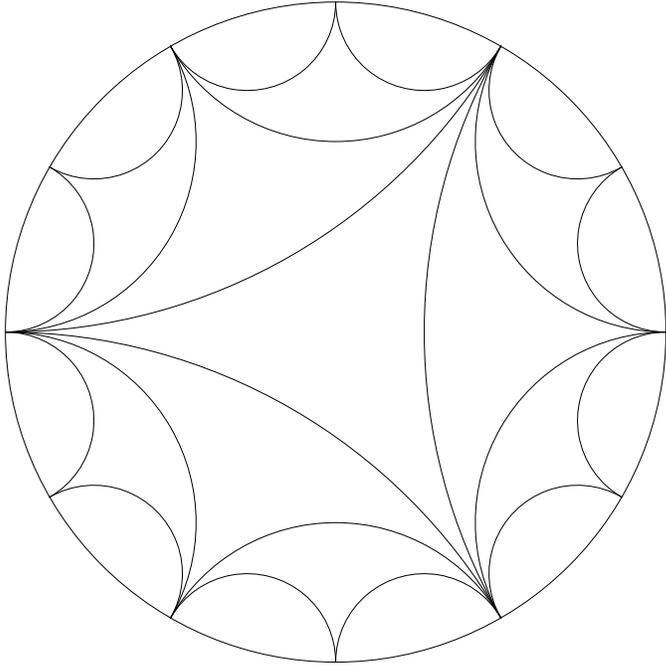
$$\text{Out[*]} = \frac{\pi}{12}$$

```
In[*]:= CoordenadasC2 = Table[Circle[{r * Cos[ANG2[[i]]], r * Sin[ANG2[[i]]]}, Sqrt[r^2 - 1],
  {Pi + ANG2[[i]] + Pi/2 - theta, Pi + ANG2[[i]] - Pi/2 + theta}], {i, 1, Length[ANG2]}]
```

```
Out[*]:= {Circle[{-1 + sqrt(3), 1 - sqrt(3)}, sqrt(-1 + 2(-1 + sqrt(3))^2), {7pi/6, pi/3}],
  Circle[{1/2(-1 + sqrt(3))(1 + sqrt(3)), -1/2(-1 + sqrt(3))^2}, sqrt(-1 + 2(-1 + sqrt(3))^2), {4pi/3, pi/2}],
  Circle[{1/2(-1 + sqrt(3))(1 + sqrt(3)), 1/2(-1 + sqrt(3))^2}, sqrt(-1 + 2(-1 + sqrt(3))^2), {3pi/2, 2pi/3}],
  Circle[{-1 + sqrt(3), -1 + sqrt(3)}, sqrt(-1 + 2(-1 + sqrt(3))^2), {5pi/3, 5pi/6}],
  Circle[{1/2(-1 + sqrt(3))^2, 1/2(-1 + sqrt(3))(1 + sqrt(3))}, sqrt(-1 + 2(-1 + sqrt(3))^2), {11pi/6, pi}],
  Circle[{-1/2(-1 + sqrt(3))^2, 1/2(-1 + sqrt(3))(1 + sqrt(3))}, sqrt(-1 + 2(-1 + sqrt(3))^2), {2pi, 7pi/6}],
  Circle[{1 - sqrt(3), -1 + sqrt(3)}, sqrt(-1 + 2(-1 + sqrt(3))^2), {13pi/6, 4pi/3}],
  Circle[{-1/2(-1 + sqrt(3))(1 + sqrt(3)), 1/2(-1 + sqrt(3))^2}, sqrt(-1 + 2(-1 + sqrt(3))^2), {7pi/3, 3pi/2}],
  Circle[{-1/2(-1 + sqrt(3))(1 + sqrt(3)), -1/2(-1 + sqrt(3))^2}, sqrt(-1 + 2(-1 + sqrt(3))^2), {5pi/2, 5pi/3}],
  Circle[{1 - sqrt(3), 1 - sqrt(3)}, sqrt(-1 + 2(-1 + sqrt(3))^2), {8pi/3, 11pi/6}],
  Circle[{-1/2(-1 + sqrt(3))^2, -1/2(-1 + sqrt(3))(1 + sqrt(3))}, sqrt(-1 + 2(-1 + sqrt(3))^2), {17pi/6, 2pi}],
  Circle[{1/2(-1 + sqrt(3))^2, -1/2(-1 + sqrt(3))(1 + sqrt(3))}, sqrt(-1 + 2(-1 + sqrt(3))^2), {3pi, 13pi/6}]}
```

```
In[ ]:= Graphics[{Circle[{0, 0}, 1], CoordenadasC2, CoordenadasC, C0}]
```

Out[]:=



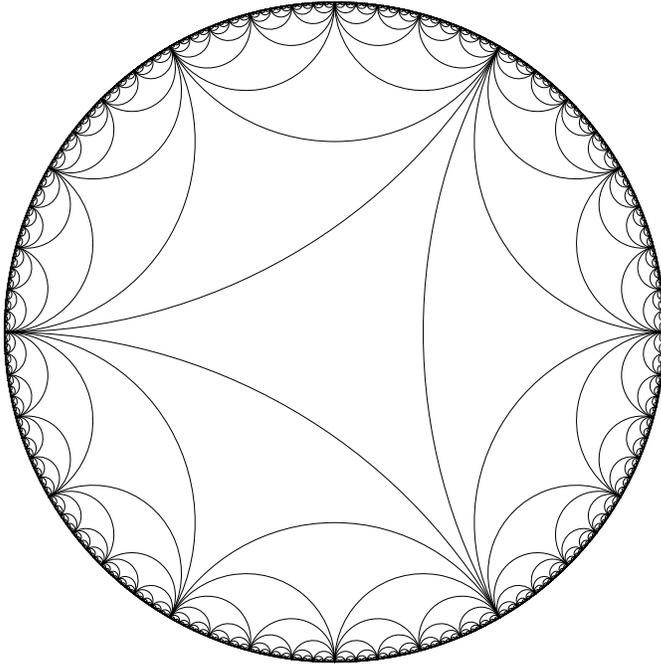
```

In[*]:= IteradorP[ANG0_, n_] := Function[{Angulos, m},
  [función]
  ANGU = Angulos;
  r = RAD[ANGU];
   $\theta = (\text{ANGU}[[2]] - \text{ANGU}[[1]]) / 2;$ 
  Resultado = Table[Circle[{r * Cos[ANGU[[i]]], r * Sin[ANGU[[i]]]}, Sqrt[r^2 - 1],
    [tabla [círculo [coseno [seno [raíz cuadrada
    {Pi + ANGU[[i]] + Pi/2 -  $\theta$ , Pi + ANGU[[i]] - Pi/2 +  $\theta$ }, {i, 1, Length[ANGU]};
    [número pi [número pi [número pi [número pi [longitud
  For[j = 2, j ≤ m, j++,
    [para cada
    ANGU = CuatriPares[ANGU];
    r = RAD[ANGU];
     $\theta = (\text{ANGU}[[2]] - \text{ANGU}[[1]]) / 2;$ 
    Resultado =
      Append[Resultado, Table[{Directive[Thickness[0.002 * (1 - (j - 1) / j)]],
        [añade [tabla [directiva [grosor
        Circle[{r * Cos[ANGU[[i]]], r * Sin[ANGU[[i]]]}, Sqrt[r^2 - 1],
          [círculo [coseno [seno [raíz cuadrada
          {Pi + ANGU[[i]] + Pi/2 -  $\theta$ , Pi + ANGU[[i]] - Pi/2 +  $\theta$ }, {i, 1, Length[ANGU]};
          [número pi [número pi [número pi [número pi [longitud
      ]];
    Append[Flatten[Resultado],
      [añade [aplana
      {Directive[Thickness[0.002 * (1 - (m - 1) / m)]], Circle[{0, 0}, 1]}
      [directiva [grosor [círculo
  ] [
  ANG0,
  n]

```

In[]:= **Graphics**[**IteradorP**[**ANG0**, 10]]
[gráfico](#)

Out[]:=



In[]:= **Export**[
[exporta](#)

"/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/triángulosPoin02.pdf", %80, "PDF"]
[función c](#)

... **Export**: Directory C:\home\amilcar\Documentos\8voSemestre\ProgClau\ does not exist.

... **Export**: Cannot open /home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/triángulosPoin02.pdf.

Out[]:= **\$Failed**

In[]:= **SystemOpen**["/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/triángulosPoin02.pdf"]
[abre en sistema](#)

In[]:= **ANG0**

Out[]:= $\left\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

In[]:= **ANG2**

Out[]:= $\left\{-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{5\pi}{4}, \frac{17\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}\right\}$

In[]:= **ANG1**

Out[]:= $\left\{-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

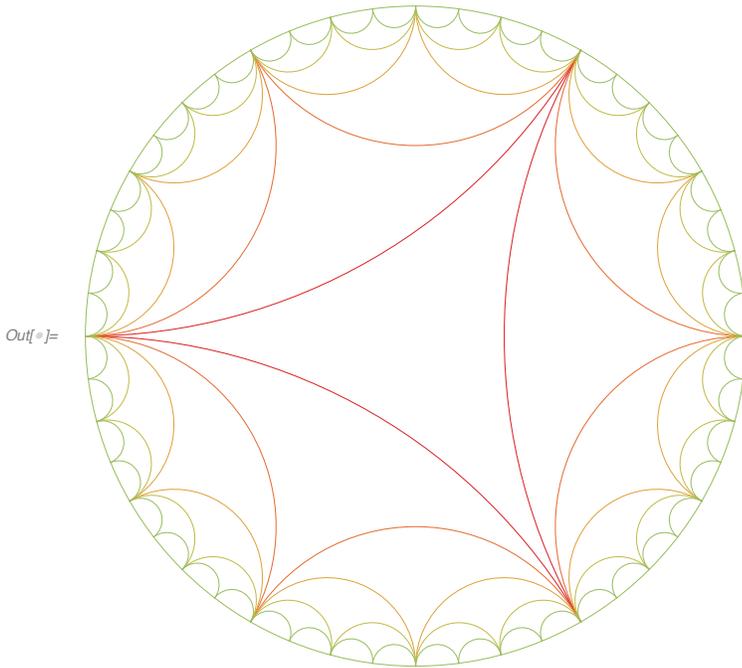
Con colores:

```

In[ ]:= IteradorPCol[ANG0_, n_, k_, SC_, direc_] := Function[{Angulos, m, n0, scheme, DIR},
    |función
    ANGU = Angulos;
    r = RAD[ANGU];
     $\theta = (ANGU[[2]] - ANGU[[1]]) / 2;$ 
    Resultado = Table[{Directive[ColorData[scheme, If[DIR == 1,  $\theta$ , 1]]],
    |tabla |directiva |datos de colores |si
        Circle[{r * Cos[ANGU[[i]]], r * Sin[ANGU[[i]]], Sqrt[r^2 - 1],
    |círculo |coseno |seno |raíz cuadrada
        {Pi + ANGU[[i]] + Pi/2 -  $\theta$ , Pi + ANGU[[i]] - Pi/2 +  $\theta$ }}, {i, 1, Length[ANGU]}];
    |número pi |número pi |número pi |número pi |longitud
    For[j = 2, j ≤ m, j++,
    |para cada
        ANGU = CuatriPares[ANGU];
        r = RAD[ANGU];
         $\theta = (ANGU[[2]] - ANGU[[1]]) / 2;$ 
        Resultado =
        Append[Resultado, Table[{Directive[Thickness[0.002 * (1 - (j - 1) / j)],
    |añade |tabla |directiva |grosor
            ColorData[scheme, If[DIR == 1, (j - 1) / (n0 - 1), 1 - (j - 1) / (n0 - 1)]]],
    |datos de colores |si
            Circle[{r * Cos[ANGU[[i]]], r * Sin[ANGU[[i]]], Sqrt[r^2 - 1],
    |círculo |coseno |seno |raíz cuadrada
            {Pi + ANGU[[i]] + Pi/2 -  $\theta$ , Pi + ANGU[[i]] - Pi/2 +  $\theta$ }}, {i, 1, Length[ANGU]}];
    |número pi |número pi |número pi |número pi |longitud
        ];
        Append[Flatten[Resultado],
    |añade |aplana
            {Directive[Thickness[0.002 * (1 - (n0 - 1) / n0)]], Circle[{0, 0}, 1]}
    |directiva |grosor |círculo
        ] [ANG0, n, k, SC, direc]

```

```
In[ ]:= Graphics[IteratorPCol[ANG0, 5, 10, "Rainbow", 0]]
  gráfico
```



```
In[ ]:= Export[
  gráfico
  "/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin011.pdf", %89, "PDF"]
  función
```

```
... Export: Directory C:\home\amilcar\Documentos\8voSemestre\ProgClau\ does not exist.
```

```
... Export: Cannot open /home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin011.pdf.
```

Out[]:= \$Failed

```
In[ ]:= SystemOpen["/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin011.pdf"]
  abre en sistema
```

```
In[ ]:= SystemOpen["/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin010.pdf"]
  abre en sistema
```

```
In[ ]:= Export[
  gráfico
  "/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin09.pdf", %75, "PDF"]
  función
```

```
... Export: Directory C:\home\amilcar\Documentos\8voSemestre\ProgClau\ does not exist.
```

```
... Export: Cannot open /home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin09.pdf.
```

Out[]:= \$Failed

```
In[ ]:= SystemOpen["/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin09.pdf"]
  abre en sistema
```

```

In[ ]:= Export [
  |exporta
  "/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin07.pdf", %50, "PDF"]
  |función c

... Export: Directory C:\home\amilcar\Documentos\8voSemestre\ProgClau\ does not exist.
... Export: Cannot open /home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin07.pdf.

Out[ ]:= $Failed

In[ ]:= SystemOpen["/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin07.pdf"]
  |abre en sistema

In[ ]:=

In[ ]:= Export [
  |exporta
  "/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin06.pdf", %44, "PDF"]
  |función c

... Export: Directory C:\home\amilcar\Documentos\8voSemestre\ProgClau\ does not exist.
... Export: Cannot open /home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin06.pdf.

Out[ ]:= $Failed

In[ ]:= SystemOpen["/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin06.pdf"]
  |abre en sistema

In[ ]:= Export [
  |exporta
  "/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin05.pdf", %40, "PDF"]
  |función c

... Export: Directory C:\home\amilcar\Documentos\8voSemestre\ProgClau\ does not exist.
... Export: Cannot open /home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin05.pdf.

Out[ ]:= $Failed

In[ ]:= SystemOpen["/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin05.pdf"]
  |abre en sistema

In[ ]:= Export [
  |exporta
  "/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin04.pdf", %98, "PDF"]
  |función c

... Export: Directory C:\home\amilcar\Documentos\8voSemestre\ProgClau\ does not exist.
... Export: Cannot open /home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin04.pdf.

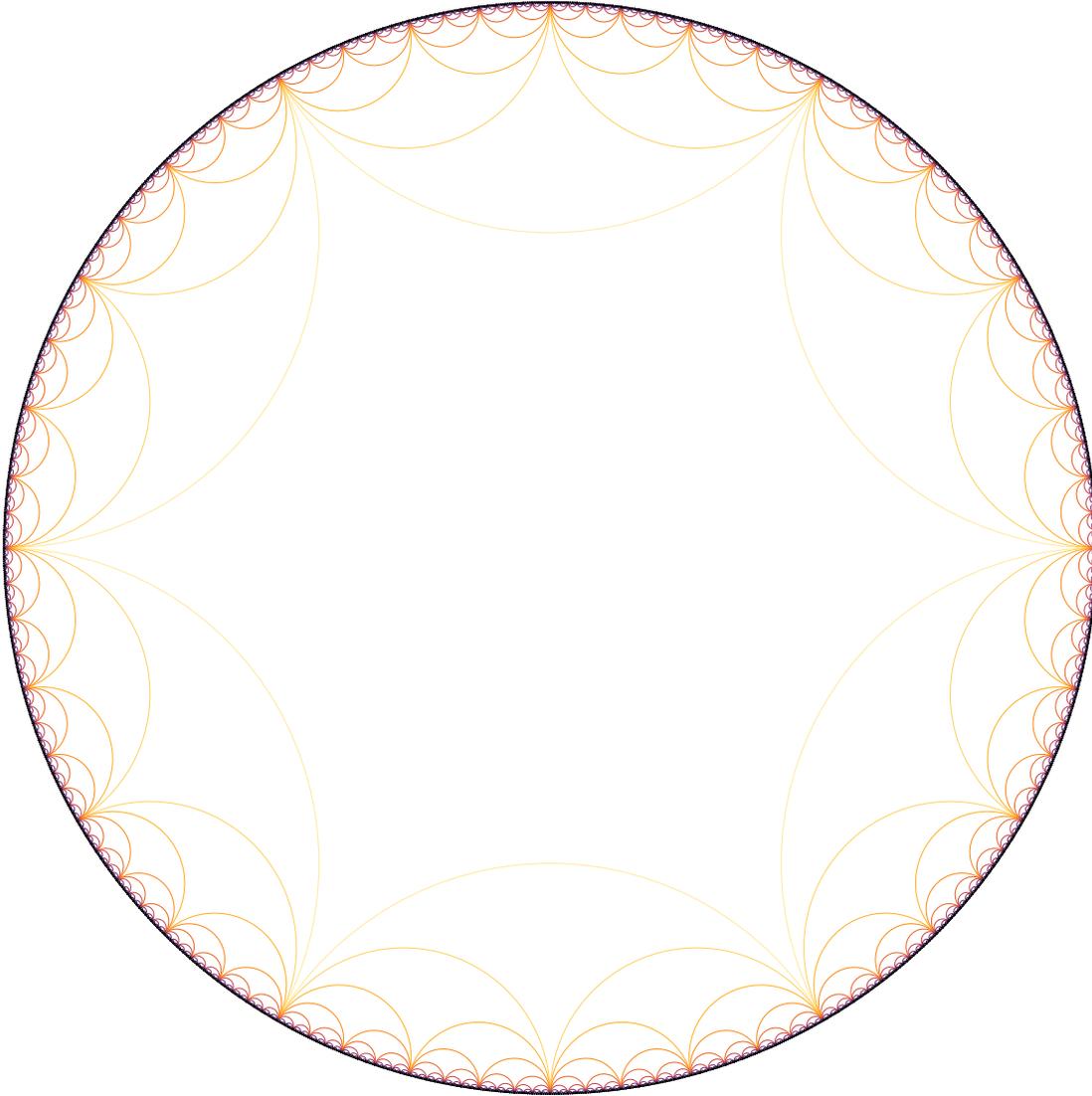
Out[ ]:= $Failed

```



```
In[ ]:= Graphics[IteratorPCol[ANG0, 10, "SunsetColors", 0]]
```

[\[gráfico\]](#)



Out[]:=

```
In[ ]:= Export[
```

[\[exporta](#)

```
"/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin012.pdf", %95, "PDF"]
```

[\[función\]](#)

```
Export: Directory C:\home\amilcar\Documentos\8voSemestre\ProgClau\ does not exist.
```

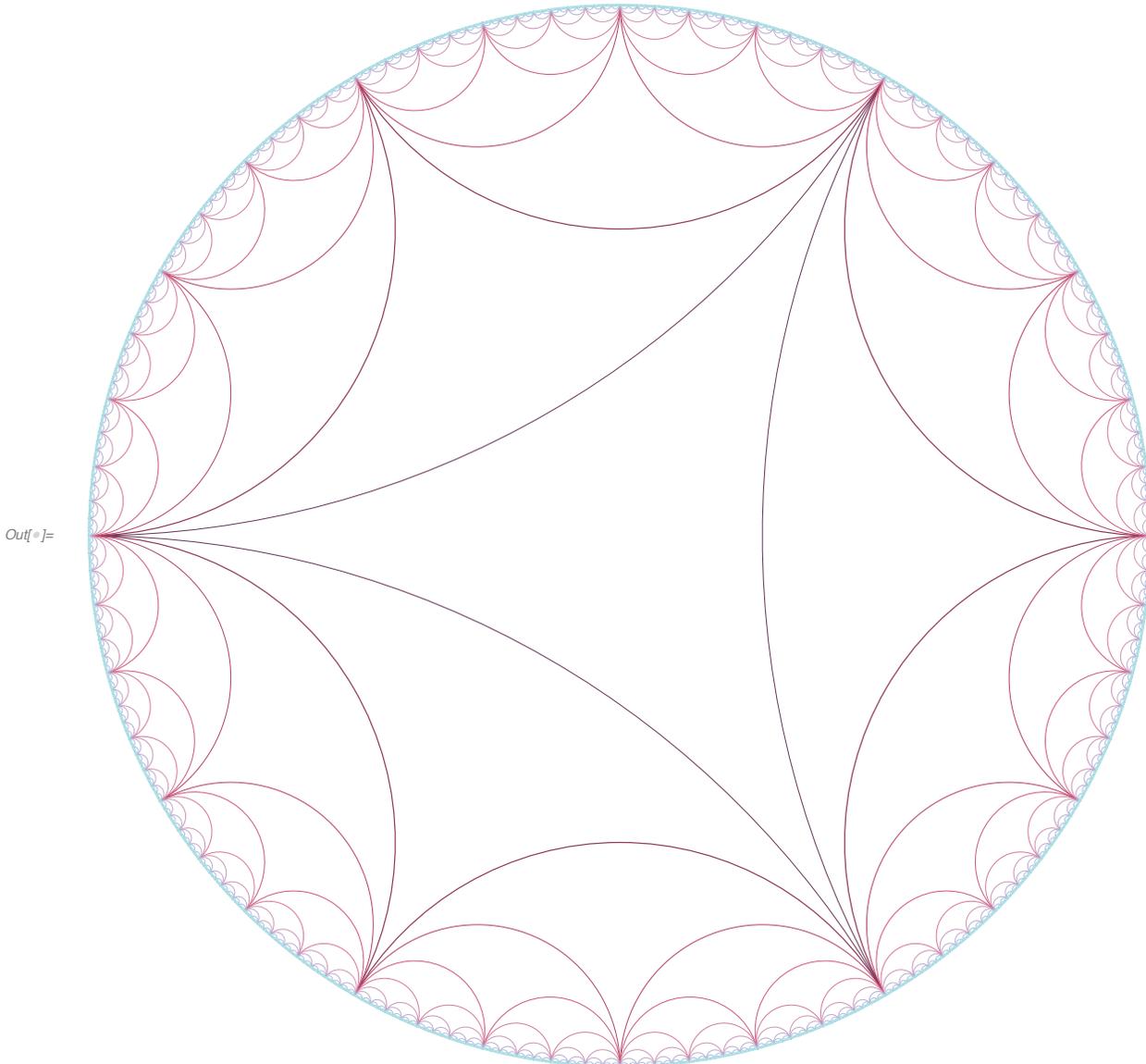
```
Export: Cannot open /home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin012.pdf.
```

Out[]:= \$Failed

```
In[ ]:= SystemOpen["/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin012.pdf"]
```

[\[abre en sistema\]](#)

```
In[ ]:= Graphics[IteratorPCol[ANG0, 10, "CandyColors", 1]]  
[gráfico
```



```
In[ ]:= Export["/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin014.pdf",  
[exporta  
%102, "PDF"]  
[función de densidad de probabilidad
```

```
... Export: Directory C:\home\amilcar\Documentos\8voSemestre\ProgClau\ does not exist.
```

```
... Export: Cannot open /home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin014.pdf.
```

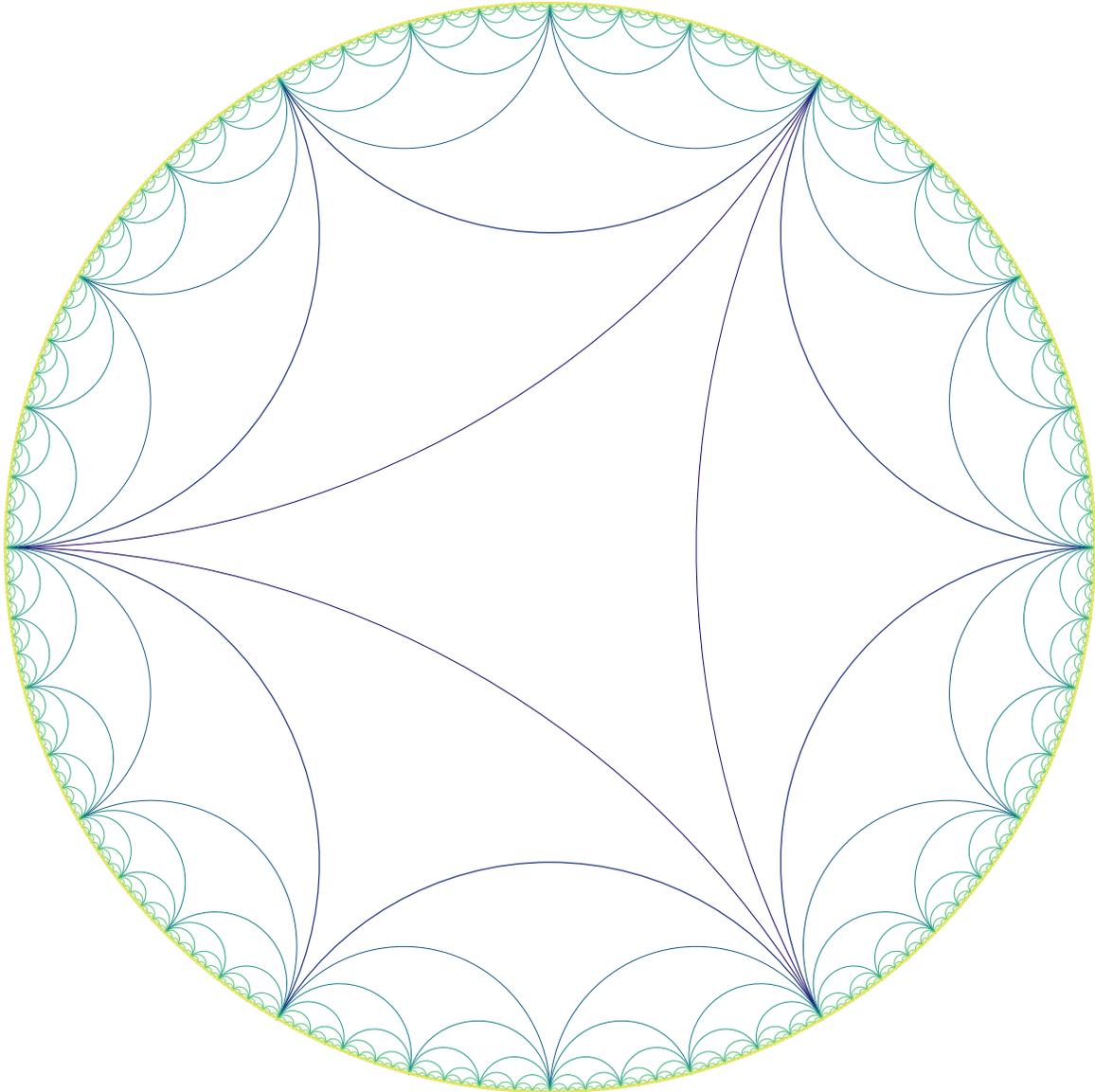
```
Out[ ]:= $Failed
```

```
In[ ]:= SystemOpen["/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin014.pdf"]  
[abre en sistema
```

```
In[ ]:= SystemOpen["/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin013.pdf"]
[abre en sistema]
```

```
In[ ]:= Graphics[IteratorPCol[ANG0, 10, "BlueGreenYellow", 1]]
[gráfico]
```

Out[]:=



```
In[ ]:= Show[%108, Background → Directive[RGBColor[0.89, 0.11, 0.], Opacity[0.408]]]
[muestra [fondo de imagen [directiva [color RGB [opacidad]

```

... Show: Symbol is not a type of graphics.

```
Out[ ]:= Show[Null, Background → Directive[■, Opacity[0.408]]]
```

```
In[ ]:= Export["/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin016.pdf",  
_exporta
```

```
  %108, "PDF"]
```

```
  _función de densidad de probabilidad
```

```
... Export: Directory C:\home\amilcar\Documentos\8voSemestre\ProgClau\ does not exist.
```

```
... Export: Cannot open /home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin016.pdf.
```

```
Out[ ]:= $Failed
```

```
In[ ]:= SystemOpen["/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin016.pdf"]  
_abre en sistema
```

```
In[ ]:= Export["/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin015.pdf",  
_exporta
```

```
  %105, "PDF"]
```

```
  _función de densidad de probabilidad
```

```
... Export: Directory C:\home\amilcar\Documentos\8voSemestre\ProgClau\ does not exist.
```

```
... Export: Cannot open /home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin015.pdf.
```

```
Out[ ]:= $Failed
```

```
In[ ]:= SystemOpen["/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoin015.pdf"]  
_abre en sistema
```

```

In[ ]:= IteradorPCol2[ANG0_, n_, SC_, direc_] := Function[{Angulos, m, scheme, DIR},
  _función
  ANGU = Angulos;
  r = RAD[ANGU];
   $\theta = (ANGU[[2]] - ANGU[[1]]) / 2;$ 
  Resultado = {Directive[ColorData[scheme, If[DIR == 1, 1, 0]], Disk[{0, 0}, 1]};
  _directiva _datos de colores _si _disco
  Resultado = Append[Resultado,
  _añade
  Table[{Directive[ColorData[scheme, If[DIR == 1, 0, 1]], Disk[{0, 0}, 1]  $\cap$ 
  _tabla _directiva _datos de colores _si _disco
  Disk[{r * Cos[ANGU[[i]]], r * Sin[ANGU[[i]]], Sqrt[r^2 - 1], {Pi + ANGU[[i]] +
  _disco _coseno _seno _raíz cuadrada _número pi
  Pi / 2 -  $\theta$ , Pi + ANGU[[i]] - Pi / 2 +  $\theta$ }}, {i, 1, Length[ANGU]}}];
  _número pi _número pi _número pi _longitud
  For[j = 2, j  $\leq$  m, j++,
  _para cada
  ANGU = CuatriPares[ANGU];
  r = RAD[ANGU];
   $\theta = (ANGU[[2]] - ANGU[[1]]) / 2;$ 
  Resultado =
  Append[Resultado, Table[{Directive[Thickness[0.002 * (1 - (j - 1) / j)],
  _añade _tabla _directiva _grosor
  ColorData[scheme, If[DIR == 1, (j - 1) / (m - 1), 1 - (j - 1) / (m - 1)]}],
  _datos de colores _si
  Disk[{0, 0}, 1]  $\cap$  Disk[{r * Cos[ANGU[[i]]], r * Sin[ANGU[[i]]],
  _disco _disco _coseno _seno
  Sqrt[r^2 - 1], {Pi + ANGU[[i]] + Pi / 2 -  $\theta$ ,
  _raíz cuadrada _número pi _número pi
  Pi + ANGU[[i]] - Pi / 2 +  $\theta$ }}, {i, 1, Length[ANGU]}}];  $\times$ 
  _número pi _número pi _longitud
  Resultado = Flatten[Resultado];
  _aplana
  Resultado;
  ] [ANG0, n, SC, direc]

```

```

In[ ]:= Graphics[IteradorPCol2[ANG0, 10, "Rainbow", 1]]
_gráfico

```

... Set: Tag Times in

```

Null[{Directive[■], Disk[{0, 0}, 1], <<8>>, {<<1>>}, {{Directive[Thickness[0.0002], ■], Disk[{0, 0}], {Directive[Thickness[
0.0002], ■], Disk[{0, 0}], {Directive[Thickness[0.0002], ■], Disk[{0, 0}], {Directive[Thickness[0.0002], ■], Disk
[{0, 0}], {Directive[Thickness[0.0002], ■], Disk[{0, 0}], <<42>>, {Directive[Thickness[0.0002], ■], Disk[{0, 0}], {
Directive[Thickness[0.0002], ■], Disk[{0, 0}], {Directive[Thickness[0.0002], ■], Disk[{0, 0}], <<1486>>}}
is Protected.

```

Out[]:= ■



```

In[ ]:= ANGU = ANGO;
scheme = "Rainbow";
DIR = 1;
r = RAD[ANGU];
 $\theta = (\text{ANGU}[[2]] - \text{ANGU}[[1]]) / 2;$ 
Resultado = Table[{Directive[ColorData[scheme, If[DIR == 1, 0, 1]]],
  RegionIntersection[Disk[{r * Cos[ANGU[[i]]], r * Sin[ANGU[[i]]}],
    Sqrt[r^2 - 1], {Pi + ANGU[[i]] + Pi/2 -  $\theta$ , Pi + ANGU[[i]] - Pi/2 +  $\theta$ },
    Disk[{0, 0}, 1]}], {i, 1, Length[ANGU]};

```

In[]:= Resultado

```

Out[ ]:= {{Directive[,
  BooleanRegion[#1 && #2 &, {Disk[{2, 0},  $\sqrt{3}$ , { $\frac{7\pi}{6}$ ,  $\frac{5\pi}{6}}$ }}, Disk[{0, 0}, 1]}]},
  {Directive[, BooleanRegion[#1 && #2 &,
    {Disk[{-1,  $\sqrt{3}$ },  $\sqrt{3}$ , { $\frac{11\pi}{6}$ ,  $\frac{3\pi}{2}}$ }}, Disk[{0, 0}, 1]}]}, {Directive[,
  BooleanRegion[#1 && #2 &, {Disk[{-1, - $\sqrt{3}$ },  $\sqrt{3}$ , { $\frac{5\pi}{2}$ ,  $\frac{13\pi}{6}}$ }}, Disk[{0, 0}, 1]}]}]}

```

In[]:= Graphics[Resultado]



Out[]:= 



```

In[ ]:= RegionIntersection[Disk[{r * Cos[0], r * Sin[0]},
  Sqrt[r^2 - 1], {Pi + 0 + Pi/2 -  $\theta$ , Pi + 0 - Pi/2 +  $\theta$ },
  Disk[{0, 0}, 1]}

```

```

Out[ ]:= BooleanRegion[#1 && #2 &, {Disk[{2, 0},  $\sqrt{3}$ , { $\frac{7\pi}{6}$ ,  $\frac{5\pi}{6}}$ }}, Disk[{0, 0}, 1]}]

```

```

In[ ]:= RegionIntersection[Disk[{2, 0},  $\sqrt{3}$ , { $\frac{7\pi}{6}$ ,  $\frac{5\pi}{6}}$ },
  Disk[{0, 0}, 1]}

```

```

Out[ ]:= BooleanRegion[#1 && #2 &, {Disk[{2, 0},  $\sqrt{3}$ , { $\frac{7\pi}{6}$ ,  $\frac{5\pi}{6}}$ }}, Disk[{0, 0}, 1]}]

```

In[]:= ANGO

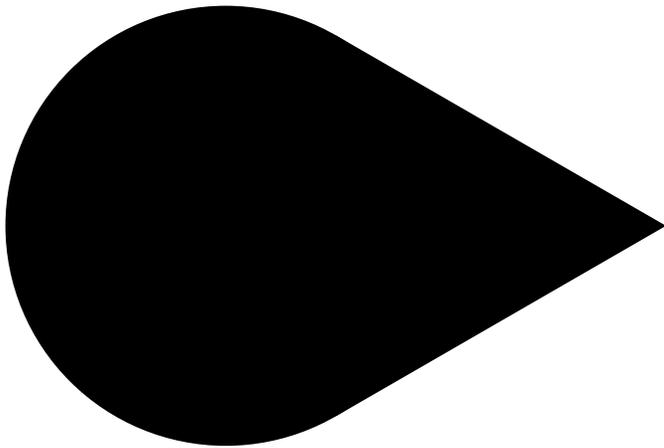
```

Out[ ]:= {0,  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $\frac{4\pi}{3}$ }

```

```
In[ ]:= Graphics[{{Disk[{2, 0},  $\sqrt{3}$ , { $\frac{7\pi}{6}$ ,  $\frac{5\pi}{6}$ }]}, Disk[{0, 0}, 1]}]
```

Out[]:=



```
In[ ]:= ANGO
```

```
Out[ ]:= {0,  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $\frac{4\pi}{3}$ }
```

```

In[ ]:= IteradorPCol2[ANG0_, n_, SC_, direc_] := Function[{Angulos, m, scheme, DIR},
    función
    ANGU = Angulos;
    r = RAD[ANGU];
     $\theta = (\text{ANGU}[[2]] - \text{ANGU}[[1]]) / 2;$ 
    Gajos = Flatten[Table[{Directive[ColorData[scheme, If[DIR == 1, 1 / m, 1 - 1 / m]]],
        aplana tabla directiva datos de colores si
        DiskSegment[{r * Cos[ANGU[[i]]], r * Sin[ANGU[[i]]]}, Sqrt[r^2 - 1],
        segmento de disco coseno seno raíz cuadrada
        {Min[Pi + ANGU[[i]] + Pi / 2 -  $\theta$ , Pi + ANGU[[i]] - Pi / 2 +  $\theta$ ],
        mí... número pi número pi número pi número pi
        Max[Pi + ANGU[[i]] + Pi / 2 -  $\theta$ , Pi + ANGU[[i]] - Pi / 2 +  $\theta$ ]}],
        má... número pi número pi número pi número pi
        DiskSegment[{0, 0}, 1, {Min[ANGU[[i]] -  $\theta$ , ANGU[[i]] +  $\theta$ ],
        segmento de disco mínimo
        Max[ANGU[[i]] -  $\theta$ , ANGU[[i]] +  $\theta$ ]}], {i, 1, Length[ANGU]}]];
        máximo longitud
    Gajos = Append[{Directive[ColorData[scheme, If[DIR == 1, 0, 1]]],
        añade directiva datos de colores si
        Disk[{0, 0}, 1]}, Gajos];
        disco
    For[j = 2, j ≤ m, j++,
        para cada
        ANGU = CuatriPares[ANGU];
        r = RAD[ANGU];
         $\theta = (\text{ANGU}[[2]] - \text{ANGU}[[1]]) / 2;$ 
        Gajos = Append[Gajos,
            añade
            Flatten[Table[{Directive[ColorData[scheme, If[DIR == 1, j / m, 1 - (j / m)]]],
                aplana tabla directiva datos de colores si
                DiskSegment[{r * Cos[ANGU[[i]]], r * Sin[ANGU[[i]]]}, Sqrt[r^2 - 1],
                segmento de disco coseno seno raíz cuadrada
                {Min[Pi + ANGU[[i]] + Pi / 2 -  $\theta$ , Pi + ANGU[[i]] - Pi / 2 +  $\theta$ ],
                mí... número pi número pi número pi número pi
                Max[Pi + ANGU[[i]] + Pi / 2 -  $\theta$ , Pi + ANGU[[i]] - Pi / 2 +  $\theta$ ]}],
                má... número pi número pi número pi número pi
                DiskSegment[{0, 0}, 1, {Min[ANGU[[i]] -  $\theta$ , ANGU[[i]] +  $\theta$ ],
                segmento de disco mínimo
                Max[ANGU[[i]] -  $\theta$ , ANGU[[i]] +  $\theta$ ]}], {i, 1, Length[ANGU]}]]]
            máximo longitud
        ];
        Gajos
    ] [ANG0, n, SC, direc]

```

```
In[*]:= Export[
  |exporta
  "/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/DiscoPoinAurora.pdf", %7, "PDF"]
  |función de
```

```
... Export: Directory C:\home\amilcar\Documentos\8voSemestre\ProgClau\ does not exist.
```

```
... Export: Cannot open /home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/DiscoPoinAurora.pdf.
```

```
Out[*]= $Failed
```

```
In[*]:= Export["/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoinCandy.pdf",
  |exporta
  %9, "PDF"]
  |función de densidad de probabilidad
```

```
... Export: Directory C:\home\amilcar\Documentos\8voSemestre\ProgClau\ does not exist.
```

```
... Export: Cannot open /home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoinCandy.pdf.
```

```
Out[*]= $Failed
```

```
In[*]:= Export["/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoinCandy2.pdf",
  |exporta
  %11, "PDF"]
  |función de densidad de probabilidad
```

```
... Export: Directory C:\home\amilcar\Documentos\8voSemestre\ProgClau\ does not exist.
```

```
... Export: Cannot open /home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoinCandy2.pdf.
```

```
Out[*]= $Failed
```

```
In[*]:= Export["/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoinBGY1.pdf",
  |exporta
  %13, "PDF"]
  |función de densidad de probabilidad
```

```
... Export: Directory C:\home\amilcar\Documentos\8voSemestre\ProgClau\ does not exist.
```

```
... Export: Cannot open /home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoinBGY1.pdf.
```

```
Out[*]= $Failed
```

```
In[*]:= Export["/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoinBGY2.pdf",
  |exporta
  %15, "PDF"]
  |función de densidad de probabilidad
```

```
... Export: Directory C:\home\amilcar\Documentos\8voSemestre\ProgClau\ does not exist.
```

```
... Export: Cannot open /home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoinBGY2.pdf.
```

```
Out[*]= $Failed
```

```
In[ ]:= Export["/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoinSunset1.pdf",
  _exporta
```

```
  %17, "PDF"]
```

```
  _función de densidad de probabilidad
```

```
... Export: Directory C:\home\amilcar\Documentos\8voSemestre\ProgClau\ does not exist.
```

```
... Export: Cannot open /home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoinSunset1.pdf.
```

```
Out[ ]:= $Failed
```

```
In[ ]:= SystemOpen[
```

```
  _abre en sistema
```

```
  "/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoinSunset1.pdf"]
```

```
In[ ]:= Export["/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoinSunset2.pdf",
  _exporta
```

```
  %20, "PDF"]
```

```
  _función de densidad de probabilidad
```

```
... Export: Directory C:\home\amilcar\Documentos\8voSemestre\ProgClau\ does not exist.
```

```
... Export: Cannot open /home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoinSunset2.pdf.
```

```
Out[ ]:= $Failed
```

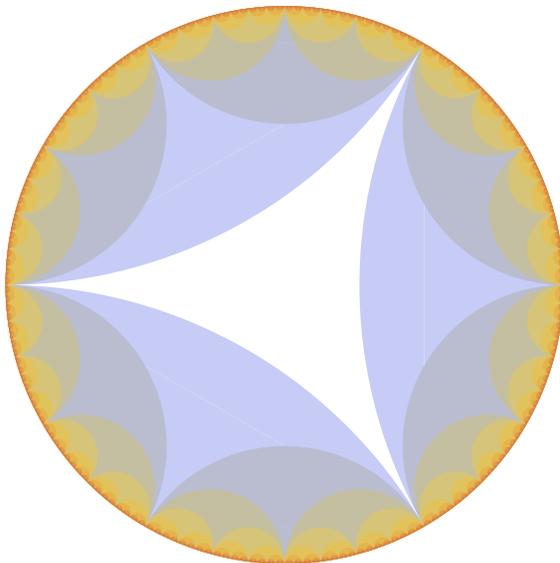
```
In[ ]:= ANG0
```

```
Out[ ]:= {0,  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $\frac{4\pi}{3}$ }
```

```
In[ ]:= Graphics[IteradorPCol2[ANG0, 8, "BeachColors", 0]]
```

```
  _gráfico
```

```
Out[ ]:=
```



```

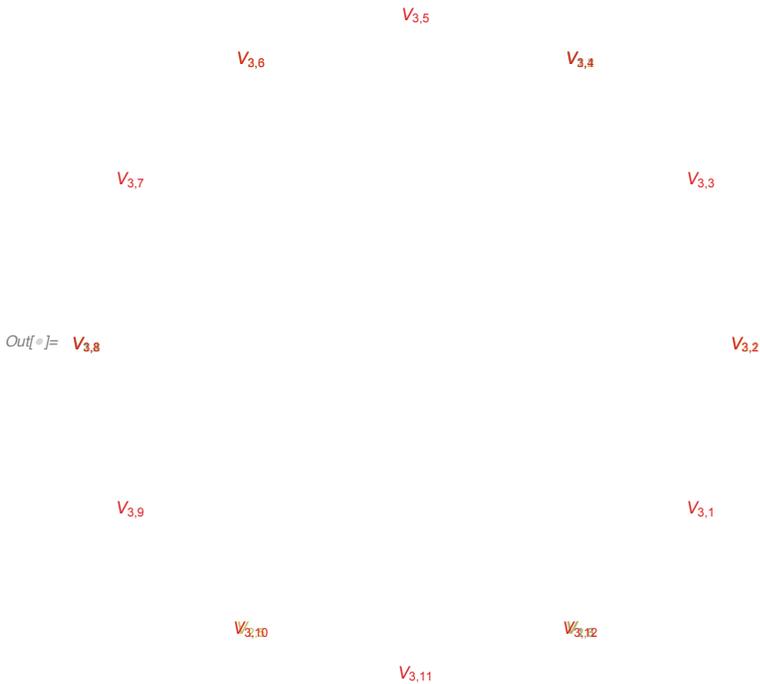
In[ ]:= Export["/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoinBeach2.pdf",
  |exporta
  %77, "PDF"]
  |función de densidad de probabilidad
  ... Export: Directory C:\home\amilcar\Documentos\8voSemestre\ProgClau\ does not exist.
  ... Export: Cannot open /home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoinBeach2.pdf.
Out[ ]:= $Failed

In[ ]:= SystemOpen[
  |abre en sistema
  "/home/amilcar/Documentos/8voSemestre/ProgClau/TriangulosPoinFruitPunch2.pdf"]

In[ ]:= Etiquetas[ANG0_, n_, SC_, direc_] := Function[{Angulos, m, scheme, DIR},
  |función
  ANGU = Angulos;
   $\theta = (\text{ANGU}[[2]] - \text{ANGU}[[1]]) / 2;$ 
  Nombres =
  Flatten[Table[{Text[V1,i], {Cos[ANGU[[i]] +  $\theta$ ], Sin[ANGU[[i]] +  $\theta$ ]}, BaseStyle →
  |aplana |tabla |texto |coseno |seno |estilo base
    {ColorData[scheme, If[DIR == 1, 1 / m, 1 - 1 / m]]}], {i, 1, Length[ANGU]}]];
  |datos de colores |si |longitud
  For[j = 2, j ≤ m, j++,
  |para cada
  ANGU = CuatriPares[ANGU];
   $\theta = (\text{ANGU}[[2]] - \text{ANGU}[[1]]) / 2;$ 
  Nombres = Append[Nombres, Flatten[Table[
  |añade |aplana |tabla
    {Text[Vj,i], {Cos[ANGU[[i]] +  $\theta$ ], Sin[ANGU[[i]] +  $\theta$ ]}, BaseStyle → {ColorData[
  |texto |coseno |seno |estilo base |datos de colores
    scheme, If[DIR == 1, j / m, 1 - (j / m)]}], {i, 1, Length[ANGU]}]]]
  |si |longitud
  ];
  Nombres
][ANG0_, n, SC, direc]

```

In[]:= Graphics[Etiquetas[ANG0, 3, "Rainbow", 1]]
 [gráfico]



In[]:= ANG0

Out[]:= $\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$

In[]:= CuatriPares[ANG0]

Out[]:= $\{-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\}$

In[]:= CuatriPares[CuatriPares[ANG0]]

Out[]:= $\{-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{5\pi}{4}, \frac{17\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}\}$

In[]:=

In[]:= Text[V_{a,e}, BaseStyle → {Red}]
 [texto] [estilo base] [rojo]

Out[]:= V_{a,e}

Teselaciones en el plano.

In[*]:= n = 20

```
Lineas = Table[InfiniteLine[{2 * i, 0}, {1, Sqrt[3]}], {i, -n, n}]
```

[tabla] [línea infinita] [raíz cuadrada]

```
Lineas = Append[Lineas, Table[InfiniteLine[{0, Sqrt[3] * i}, {1, 0}], {i, -n, n}]]
```

[añade] [tabla] [línea infinita] [raíz cuadrada]

```
Lineas = Append[Lineas, Table[InfiniteLine[{2 * i, 0}, {-1, Sqrt[3]}], {i, -n, n}]]
```

[añade] [tabla] [línea infinita] [raíz cuadrada]

Out[*]= 20

```
Out[*]= {InfiniteLine[{-40, 0}, {1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{-38, 0}, {1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{-36, 0}, {1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{-34, 0}, {1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{-32, 0}, {1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{-30, 0}, {1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{-28, 0}, {1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{-26, 0}, {1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{-24, 0}, {1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{-22, 0}, {1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{-20, 0}, {1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{-18, 0}, {1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{-16, 0}, {1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{-14, 0}, {1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{-12, 0}, {1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{-10, 0}, {1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{-8, 0}, {1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{-6, 0}, {1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{-4, 0}, {1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{-2, 0}, {1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{0, 0}, {1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{2, 0}, {1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{4, 0}, {1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{6, 0}, {1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{8, 0}, {1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{10, 0}, {1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{12, 0}, {1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{14, 0}, {1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{16, 0}, {1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{18, 0}, {1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{20, 0}, {1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{22, 0}, {1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{24, 0}, {1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{26, 0}, {1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{28, 0}, {1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{30, 0}, {1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{32, 0}, {1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{34, 0}, {1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{36, 0}, {1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{38, 0}, {1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{40, 0}, {1, Sqrt[3]}]}
```



```

InfiniteLine[{-38, 0}, {-1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{-36, 0}, {-1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{-34, 0}, {-1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{-32, 0}, {-1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{-30, 0}, {-1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{-28, 0}, {-1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{-26, 0}, {-1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{-24, 0}, {-1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{-22, 0}, {-1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{-20, 0}, {-1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{-18, 0}, {-1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{-16, 0}, {-1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{-14, 0}, {-1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{-12, 0}, {-1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{-10, 0}, {-1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{-8, 0}, {-1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{-6, 0}, {-1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{-4, 0}, {-1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{-2, 0}, {-1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{0, 0}, {-1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{2, 0}, {-1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{4, 0}, {-1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{6, 0}, {-1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{8, 0}, {-1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{10, 0}, {-1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{12, 0}, {-1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{14, 0}, {-1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{16, 0}, {-1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{18, 0}, {-1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{20, 0}, {-1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{22, 0}, {-1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{24, 0}, {-1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{26, 0}, {-1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{28, 0}, {-1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{30, 0}, {-1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{32, 0}, {-1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{34, 0}, {-1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{36, 0}, {-1, Sqrt[3]}],
InfiniteLine[{38, 0}, {-1, Sqrt[3]}], InfiniteLine[{40, 0}, {-1, Sqrt[3]}]]}

```

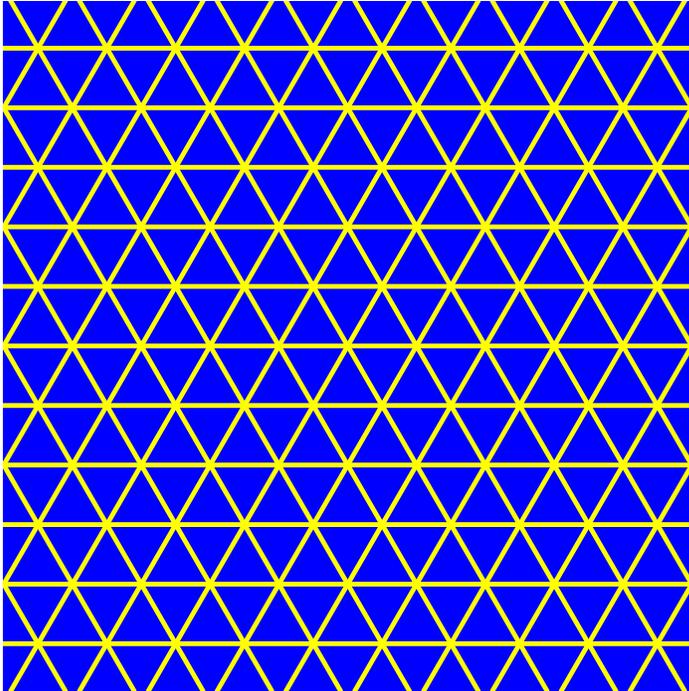
```

In[ ]:= Triangulos[m_, gr_] := Function[{n, thc},
  |función
  Lineas = Table[InfiniteLine[{2 * i, 0}, {1, Sqrt[3]}], {i, -n, n}];
  |tabla |línea infinita |raíz cuadrada
  Lineas =
  Append[Lineas, Table[InfiniteLine[{0, Sqrt[3] * i}, {1, 0}], {i, -n, n}]];
  |añade |tabla |línea infinita |raíz cuadrada
  Lineas = Append[Lineas, Table[InfiniteLine[{2 * i, 0}, {-1, Sqrt[3]}],
  |añade |tabla |línea infinita |raíz cuadrada
  {i, -n, n}]];
  Lineas = Flatten[Lineas];
  |aplana
  Graphics[{Thickness[thc], Lineas},
  |gráfico |grosor
  PlotRange -> {{-n/2, n/2}, {-n/2, n/2}}, Background -> Blue, BaseStyle -> Yellow]
  |rango de representación |fondo de imagen |azul |estilo base |amarillo
]
m,
gr]

```

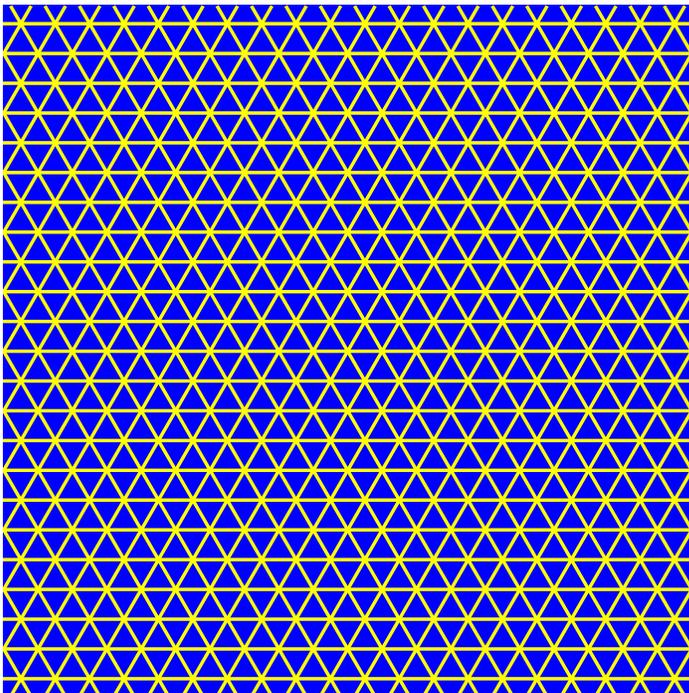
```
In[ ]:= Graphics[{Thickness[0.007], Lines},  
  gráfico      grosor  
  PlotRange -> {{-n/2, n/2}, {-n/2, n/2}}, Background -> Blue, BaseStyle -> Yellow]  
  rango de representación      fondo de imagen azul      estilo base      amarillo
```

Out[]:=



```
In[ ]:= Triangulos[40, 0.005]
```

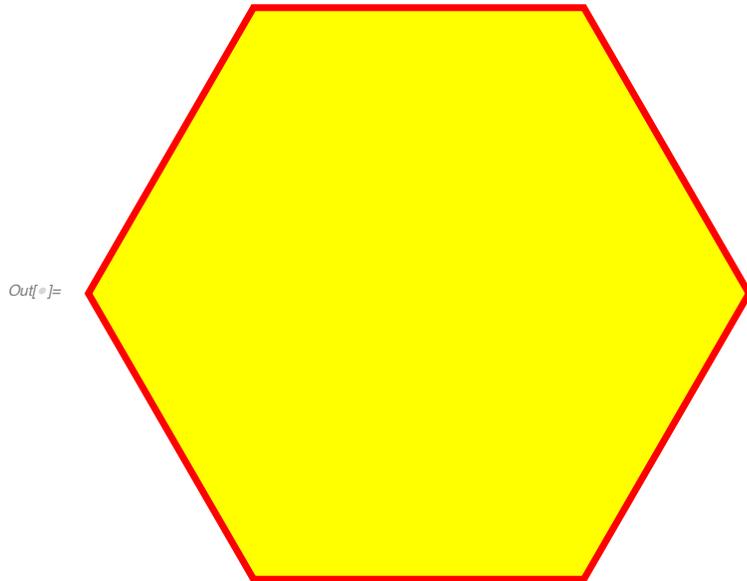
Out[]:=



```
In[ ]:= Hexagono = Table[{N[Cos[i * 2 * Pi / 6]], N[Sin[i * 2 * Pi / 6]]}, {i, 1, 6}]
```

```
Out[ ]:= {{0.5, 0.866025}, {-0.5, 0.866025},
          {-1., 0.}, {-0.5, -0.866025}, {0.5, -0.866025}, {1., 0.}}
```

```
In[ ]:= Graphics[{EdgeForm[{Thickness[0.01], Red}], FaceForm[Yellow], Polygon[Hexagono]}]
```



```
In[ ]:= Length[Hexagono]
```

```
Out[ ]:= 6
```

```
In[ ]:= Hexagono2 = Table[Hexagono[[i]] + {1, 0} + {0.5, 0.8660254037844386}, {i, 1, 6}]
```

```
Out[ ]:= {{2., 1.73205}, {1., 1.73205}, {0.5, 0.866025}, {1., 0.}, {2., 0.}, {2.5, 0.866025}}
```

```
In[ ]:= SumaVec[Figura_, vector_] := Function[{Fig, vec},
```

```
    n = Length[Fig];
```

```
    Resultado = Table[Fig[[i]] + vec, {i, 1, n}];
```

```
    Resultado
  ][Figura, vector]
```

```
In[ ]:= SumaVec[Hexagono, {1, 0} + {0.5, 0.8660254037844386}]
```

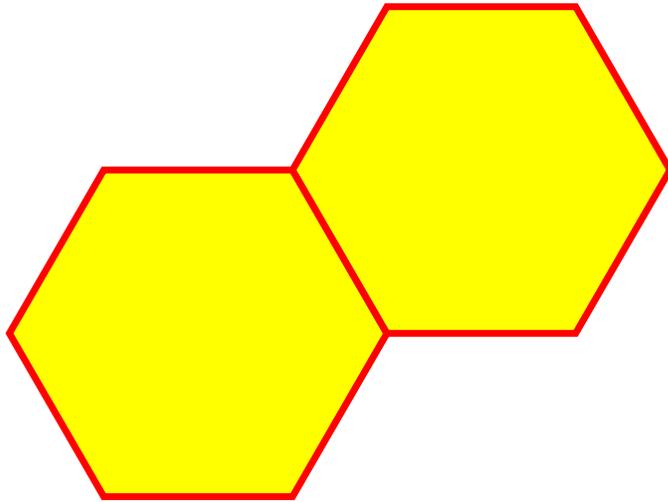
```
Out[ ]:= {{2., 1.73205}, {1., 1.73205}, {0.5, 0.866025}, {1., 0.}, {2., 0.}, {2.5, 0.866025}}
```

```
In[ ]:= Hexagono2
```

```
Out[ ]:= {{2., 1.73205}, {1., 1.73205}, {0.5, 0.866025}, {1., 0.}, {2., 0.}, {2.5, 0.866025}}
```

```
In[ ]:= Graphics[ {EdgeForm[ {Thickness[0.01], Red} ],
  [gráfico [forma de bo... [grosor [rojo
    FaceForm[Yellow], Polygon[Hexagono], Polygon[Hexagono2] ] ]
    [forma del i... [amarillo [polígono [polígono
```

Out[]:=



```
In[ ]:= a1 = {1, 0} + {0.5, 0.8660254037844386}
a2 = {1, 0} + {0.5, -0.8660254037844386}
a3 = {-0.5, 0.8660254037844386} + {0.5, 0.8660254037844386}
```

Out[]:= {1.5, 0.866025}

Out[]:= {1.5, -0.866025}

Out[]:= {0., 1.73205}

```
In[ ]:= HEXA[m_] := Function[n,
  [función
    a1 = {1, 0} + {0.5, 0.8660254037844386};
    a2 = {1, 0} + {0.5, -0.8660254037844386};
    a3 = {-0.5, 0.8660254037844386} + {0.5, 0.8660254037844386};
    HEXAGONOS =
      Table[Polygon[SumaVec[Hexagono, i * (a1 + a2) + j * a3]], {i, 1, n}, {j, 1, n}];
      [tabla [polígono
    HEXAGONOS = Append[HEXAGONOS, Table[
      [añade [tabla
        Polygon[SumaVec[Hexagono2, i * (a1 + a2) + j * a3]], {i, 1, n}, {j, 1, n}]];
        [polígono
    Flatten[HEXAGONOS]
    [aplana
  ] [m]
```

```
In[ ]:= HEXAGONOS = Table[Polygon[SumaVec[Hexagono, i * (a1 + a2) + j * a3]], {i, 1, n}, {j, 1, n}]
```

```
HEXAGONOS = Append[HEXAGONOS,
```

```
Table[Polygon[SumaVec[Hexagono2, i * (a1 + a2) + j * a3]], {i, 1, n}, {j, 1, n}]]
```

Out[]:= { { Polygon [ Number of points: 6
Embedding dimension: 2], Polygon [ Number of points: 6
Embedding dimension: 2] },

Polygon [ Number of points: 6
Embedding dimension: 2], Polygon [ Number of points: 6
Embedding dimension: 2] },

Polygon [ Number of points: 6
Embedding dimension: 2], Polygon [ Number of points: 6
Embedding dimension: 2] } },

{ Polygon [ Number of points: 6
Embedding dimension: 2], Polygon [ Number of points: 6
Embedding dimension: 2] },

Polygon [ Number of points: 6
Embedding dimension: 2], Polygon [ Number of points: 6
Embedding dimension: 2] },

Polygon [ Number of points: 6
Embedding dimension: 2], Polygon [ Number of points: 6
Embedding dimension: 2] } },

{ Polygon [ Number of points: 6
Embedding dimension: 2], Polygon [ Number of points: 6
Embedding dimension: 2] },

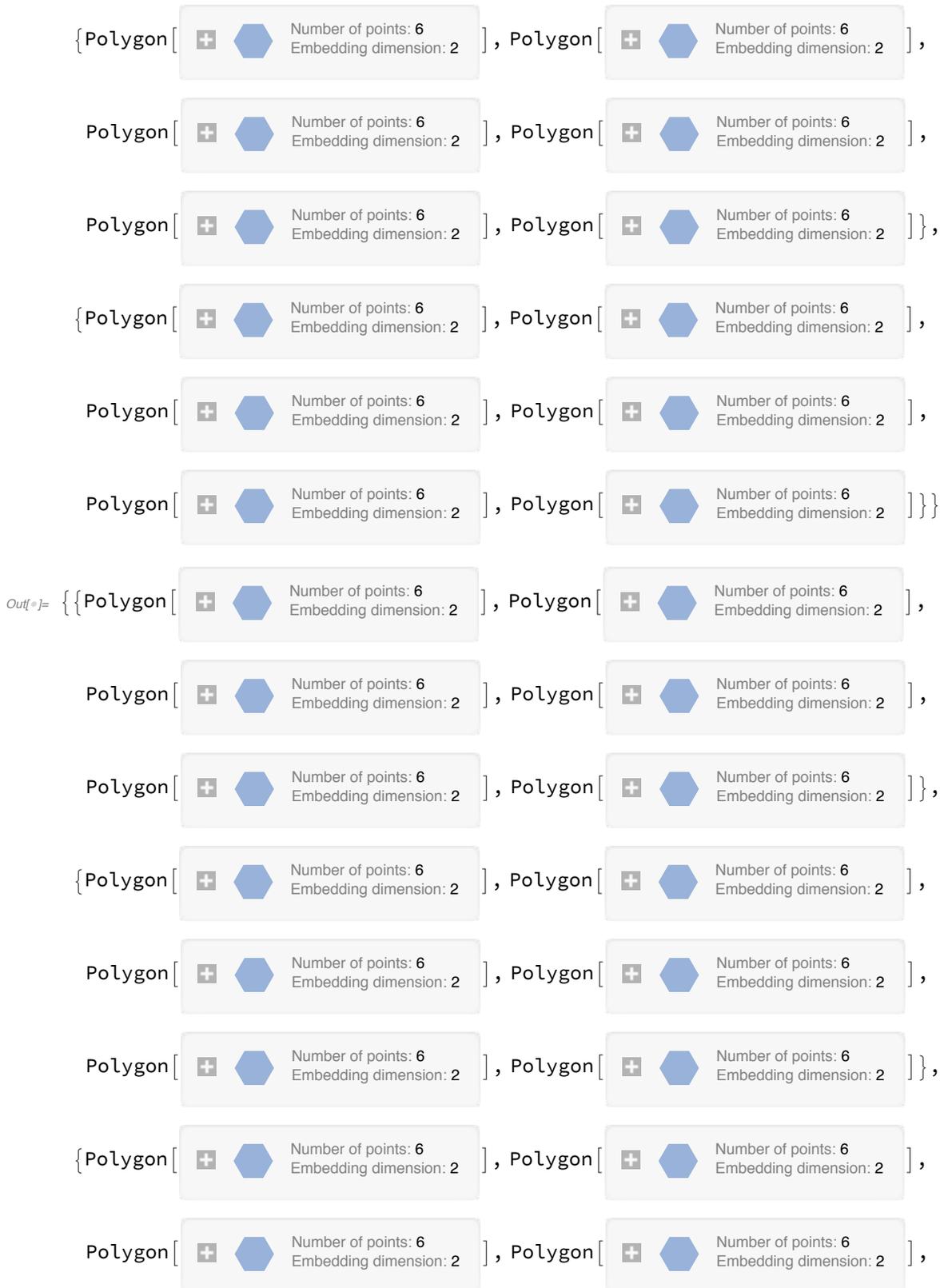
Polygon [ Number of points: 6
Embedding dimension: 2], Polygon [ Number of points: 6
Embedding dimension: 2] },

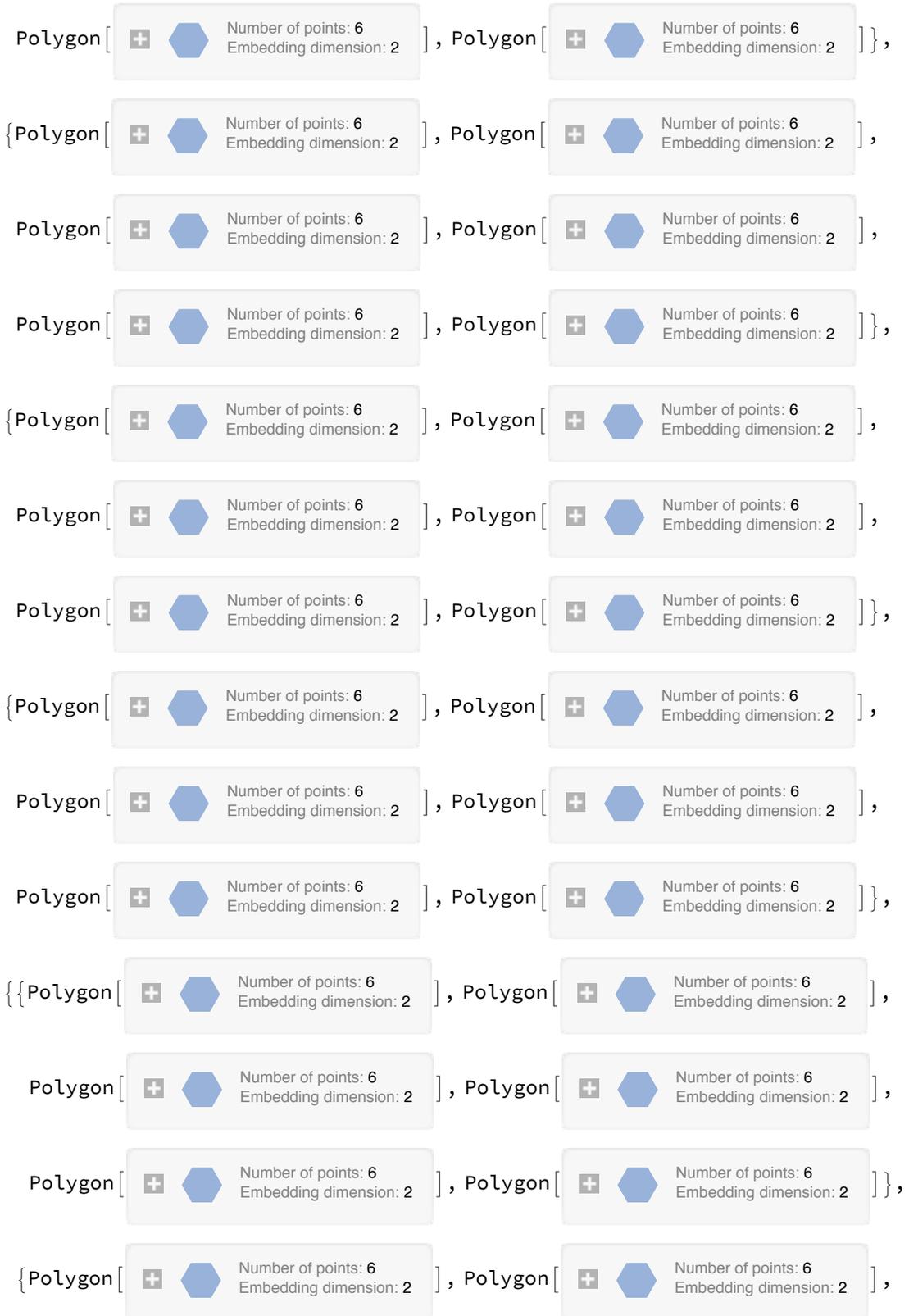
Polygon [ Number of points: 6
Embedding dimension: 2], Polygon [ Number of points: 6
Embedding dimension: 2] } },

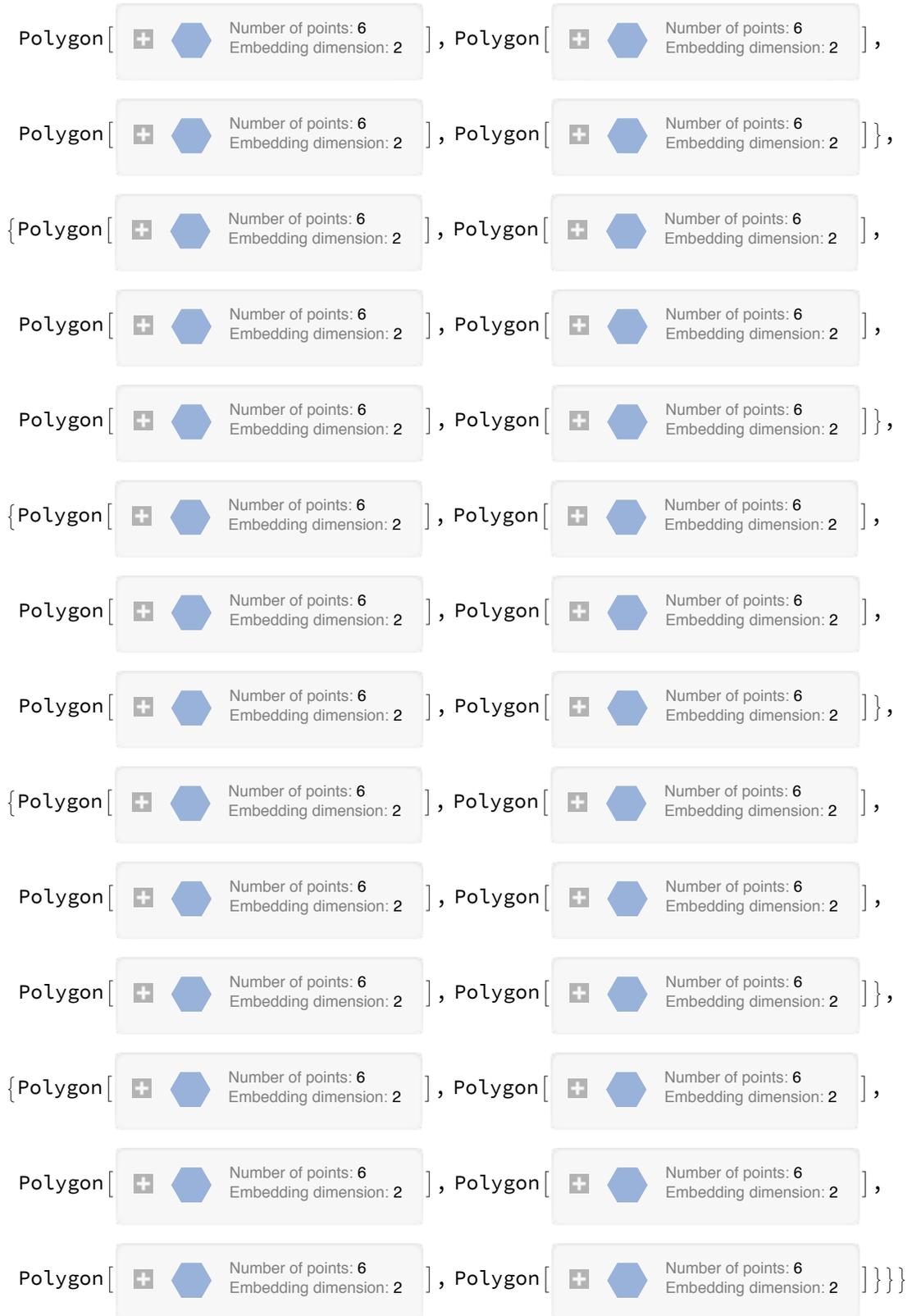
{ Polygon [ Number of points: 6
Embedding dimension: 2], Polygon [ Number of points: 6
Embedding dimension: 2] },

Polygon [ Number of points: 6
Embedding dimension: 2], Polygon [ Number of points: 6
Embedding dimension: 2] },

Polygon [ Number of points: 6
Embedding dimension: 2], Polygon [ Number of points: 6
Embedding dimension: 2] } },







In[]:= n = 36

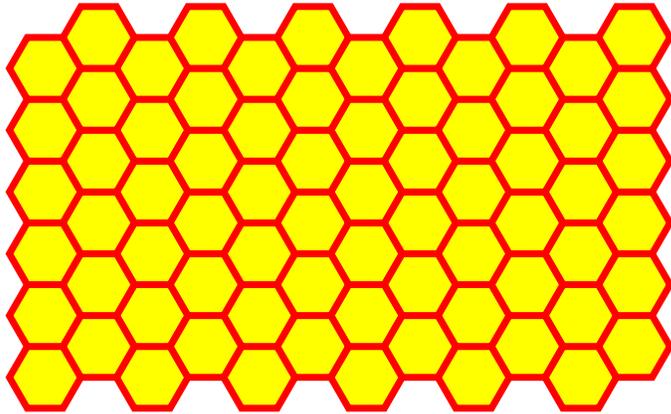
Out[]:= 36

In[]:=

```
In[ ]:= Graphics[{EdgeForm[{Thickness[0.01], Red}], FaceForm[Yellow], HEXAGONOS}]
```

[gráfico] [forma de bo...] [grosor] [rojo] [forma del i...] [amarillo]

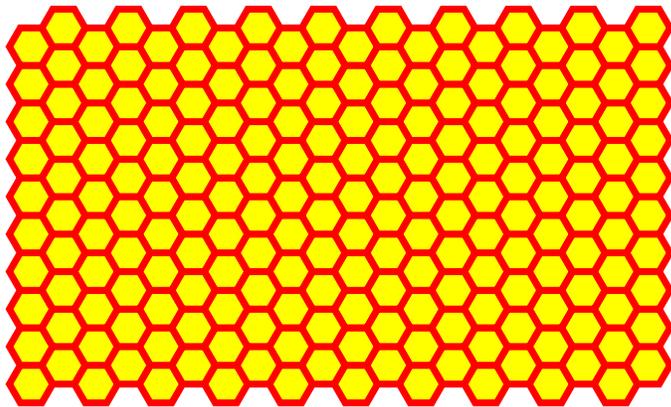
Out[]:=



```
In[ ]:= Graphics[{EdgeForm[{Thickness[0.01], Red}], FaceForm[Yellow], HEXA[10]}]
```

[gráfico] [forma de bo...] [grosor] [rojo] [forma del i...] [amarillo]

Out[]:=



De vuelta al disco de Poincaré.

In[]:= n = 4

Out[]:= 4

In[]:= m = 3

Out[]:= 3

```
In[ ]:= Angulos[n_, k_] := Table[2 * Pi * j / (n * (n - 1) ^ (k - 1)), {j, 0, n * (n - 1) ^ (k - 1)}]
```

[tabla] [número pi]

In[*]:= **Angulos**[4, 1]

Out[*]:= $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$

In[*]:= **Radio**[n_, k_] := **Tan**[**Pi** / (n * (n - 1) ^ (k - 1))]
[ta... [número pi]

In[*]:= **RADIO**[n_, k_] := **Sec**[**Pi** / (n * (n - 1) ^ (k - 1))]
[se... [número pi]

In[*]:= **RADIO**[4, 1]

Out[*]:= $\sqrt{2}$

In[*]:= **r** = **RADIO**[4, 1]
θ = **Angulos**[4, 1]
θ = **θ**[[2]]

Out[*]:= $\sqrt{2}$

Out[*]:= $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$

Out[*]:= $\frac{\pi}{2}$

In[*]:= **3 * Pi** / 2 - **θ**[[2]]
[número pi]

Out[*]:= π

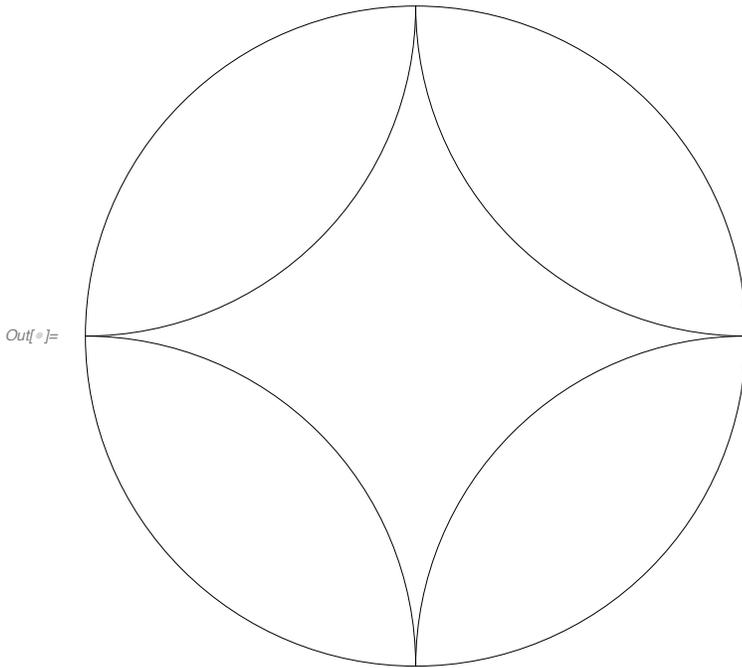
In[*]:= **θ**[[1]] + **3 * Pi** / 2
[número]

Out[*]:= $\frac{3\pi}{2}$

In[*]:= **Iter1** = **Table**[**Circle**[{**r** * **Cos**[**θ**/2 + **θ**[[i]]], **r** * **Sin**[**θ**/2 + **θ**[[i]]]},
[tabla [círculo [coseno [seno]
Radio[4, 1], {**θ**[[i]] + **3 * Pi** / 2 - **θ**, **θ**[[i]] + **3 * Pi** / 2}], {i, 1, 4}]
[número pi [número pi]

Out[*]:= **Circle**[{1, 1}, 1, { π , $\frac{3\pi}{2}$ }], **Circle**[-1, 1}, 1, { $\frac{3\pi}{2}$, 2π }],
Circle[-1, -1}, 1, { 2π , $\frac{5\pi}{2}$ }], **Circle**[{1, -1}, 1, { $\frac{5\pi}{2}$, 3π }]}

```
In[ ]:= Graphics[{Iter1, Circle[{0, 0}, 1]}]
      |gráfico |círculo
```

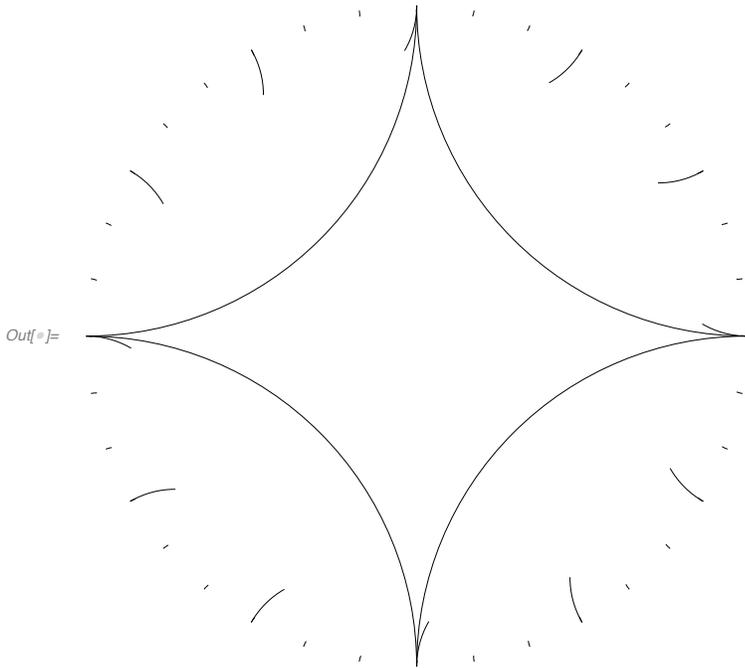


```
In[ ]:= Círculos = {}
```

```
Out[ ]:= {}
```

```
In[ ]:= For[i = 1, i ≤ m, i++,
  |para cada
  r = RADIO[n, i];
  θ = Angulos[n, i];
  θ = θ[[2]];
  R = Radio[n, i];
  Círculos =
  Append[Círculos, Table[Circle[{r * Cos[θ/2 + θ[[j]]], r * Sin[θ/2 + θ[[j]]]},
  |añade |tabla |círculo |coseno |seno
  R, {θ[[j]] + 3 * Pi/2 - θ, θ[[j]] + 3 * Pi/2}], {j, 1, n * (n - 1) ^ (i - 1)}]]
  ]
```

In[]:= **Graphics[Circulos]**
[\[gráfico\]](#)



In[]:= **θ**

Out[]:= $\left\{0, \frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{9}, \frac{5\pi}{18}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{18}, \frac{4\pi}{9}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{9}, \frac{11\pi}{18}, \frac{2\pi}{3}, \frac{13\pi}{18}, \frac{7\pi}{9}, \frac{5\pi}{6}, \frac{8\pi}{9}, \frac{17\pi}{18}, \pi, \frac{19\pi}{18}, \frac{10\pi}{9}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{9}, \frac{23\pi}{18}, \frac{4\pi}{3}, \frac{25\pi}{18}, \frac{13\pi}{9}, \frac{3\pi}{2}, \frac{14\pi}{9}, \frac{29\pi}{18}, \frac{5\pi}{3}, \frac{31\pi}{18}, \frac{16\pi}{9}, \frac{11\pi}{6}, \frac{17\pi}{9}, \frac{35\pi}{18}, 2\pi\right\}$

In[]:= **$\theta = \text{Angulos}[4, 2]$**

Out[]:= $\left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi\right\}$

In[]:= **$\theta = \theta[[2]]$**

Out[]:= $\frac{\pi}{6}$

In[]:= **Iter1**

Out[]:= $\left\{\text{Circle}[\{1, 1\}, 1, \left\{\pi, \frac{3\pi}{2}\right\}], \text{Circle}[\{-1, 1\}, 1, \left\{\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}], \text{Circle}[\{-1, -1\}, 1, \left\{2\pi, \frac{5\pi}{2}\right\}], \text{Circle}[\{1, -1\}, 1, \left\{\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right\}]\right\}$

In[]:= **r = RADIO[4, 2]**

Out[]:= $\sqrt{2} \left(-1 + \sqrt{3}\right)$

```
In[ ]:=  $\sqrt{2} (-1 + \sqrt{3})$ 
```

```
R = Radio[4, 2]
```

```
Out[ ]:=  $\sqrt{2} (-1 + \sqrt{3})$ 
```

```
Out[ ]:=  $2 - \sqrt{3}$ 
```

```
In[ ]:= Circulos = {}
```

```
Out[ ]:= {}
```

```
In[ ]:= For [i = 1, i ≤ (Length[θ] - 1), i++,
```

```
  [para cada] [longitud]
```

```
  Circulos = Append[Circulos, Circle[{r * Cos[θ/2 + θ[[i]]], r * Sin[θ/2 + θ[[i]]]}],
```

```
    [añade]
```

```
    [círculo]
```

```
    [coseno]
```

```
    [seno]
```

```
    R, {θ + θ[[i]] + Pi/2, θ[[i]] + 3 * Pi/2}]
```

```
      [número pi]
```

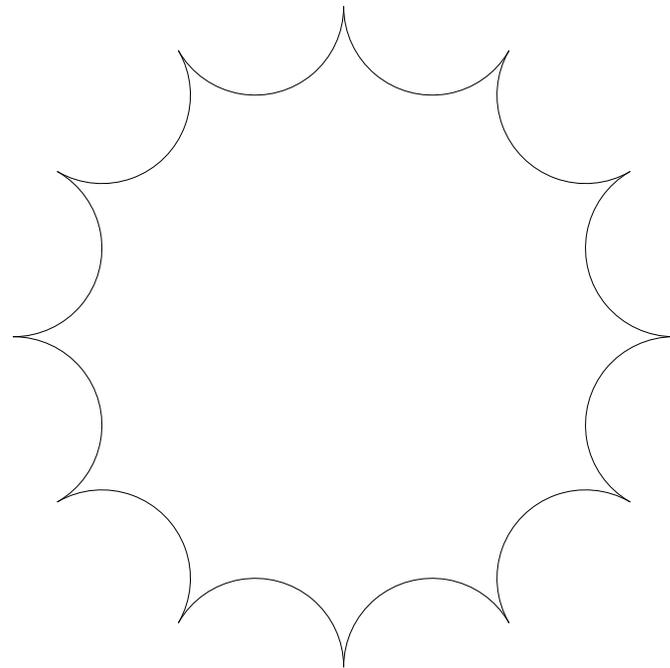
```
      [número pi]
```

```
  ]
```

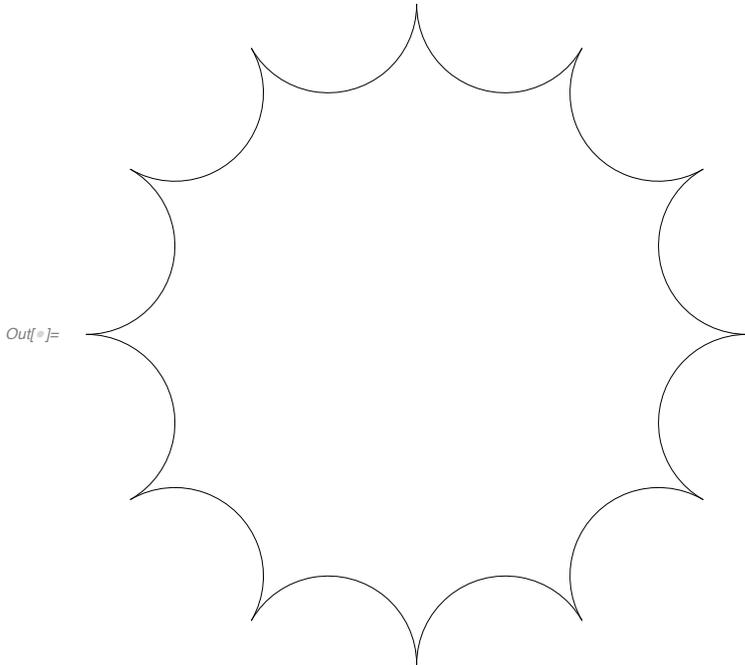
```
In[ ]:= Graphics[Circulos]
```

```
[gráfico]
```

```
Out[ ]:=
```



```
In[*]:= Graphics[Table[Circle[{r * Cos[ $\theta/2 + \theta[[j]]$ ], r * Sin[ $\theta/2 + \theta[[j]]$ ]},
  gráfico      tabla      círculo      coseno      seno
  R, { $\theta + \theta[[j]] + \text{Pi}/2$ ,  $\theta[[j]] + 3 * \text{Pi}/2$ }, {j, 1, 12}]]
  número pi      número pi
```



```
In[*]:= Círculos = {}
```

```
Out[*]= {}
```

```
In[*]:= m
```

```
Out[*]= 3
```

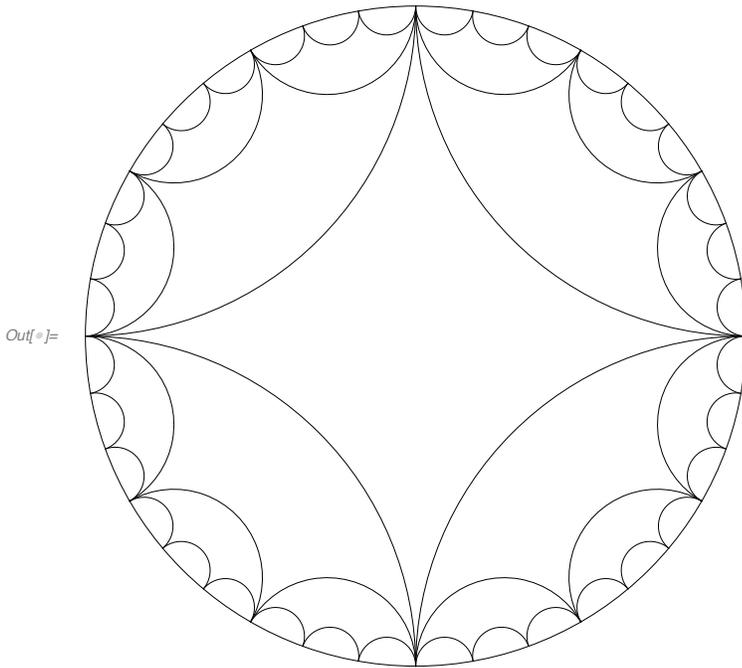
```
In[*]:= n
```

```
Out[*]= 4
```

```
In[*]:= For[i = 1, i ≤ m, i++,
  para cada
  r = RADIO[n, i];
   $\theta$  = Angulos[n, i];
   $\theta$  =  $\theta[[2]]$ ;
  R = Radio[n, i];
  Círculos =
  Append[Círculos, Table[Circle[{r * Cos[ $\theta/2 + \theta[[j]]$ ], r * Sin[ $\theta/2 + \theta[[j]]$ ]},
  añade      tabla      círculo      coseno      seno
  R, { $\theta + \theta[[j]] + \text{Pi}/2$ ,  $\theta[[j]] + 3 * \text{Pi}/2$ }, {j, 1, n * (n - 1) ^ (i - 1)}]]
  número pi      número pi
]
```

```
In[ ]:= Graphics[{Circulos, Circle[{0, 0}, 1]}]
```

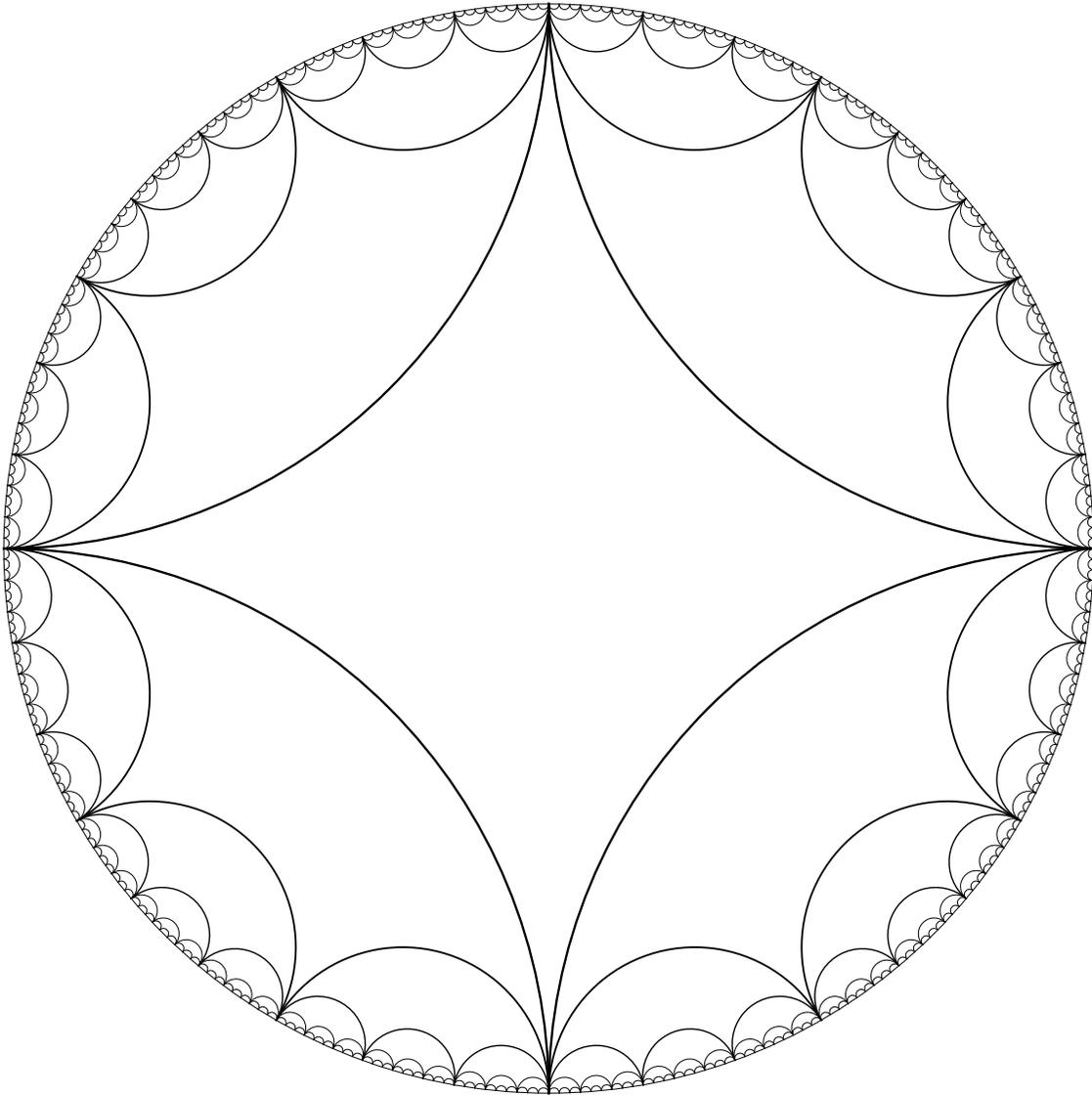
gráfico círculo



```
In[ ]:= Teselaciones[nfig_, niter_] := Function[{n, m},
función
  Circulos = {};
  For[i = 1, i ≤ m, i++,
para cada
    r = RADIO[n, i];
    θ = Angulos[n, i];
    θ = θ[[2]];
    R = Radio[n, i];
    Circulos = Append[Circulos, Table[{Directive[Thickness[0.002 * (1 - (i - 1) / m)]],
añade tabla directiva grosor
      Circle[{r * Cos[θ/2 + θ[[j]]], r * Sin[θ/2 + θ[[j]]], R,
círculo coseno seno
        {θ + θ[[j]] + Pi/2, θ[[j]] + 3 * Pi/2}], {j, 1, n * (n - 1) ^ (i - 1)}}]
    ];
  Append[Circulos, {Directive[Thickness[0.002 / m], Circle[{0, 0}, 1]}]
añade directiva grosor círculo
  ][nfig, niter]
```

In[]:= Graphics[Teselaciones[4, 5]]
|gráfico

Out[]:=



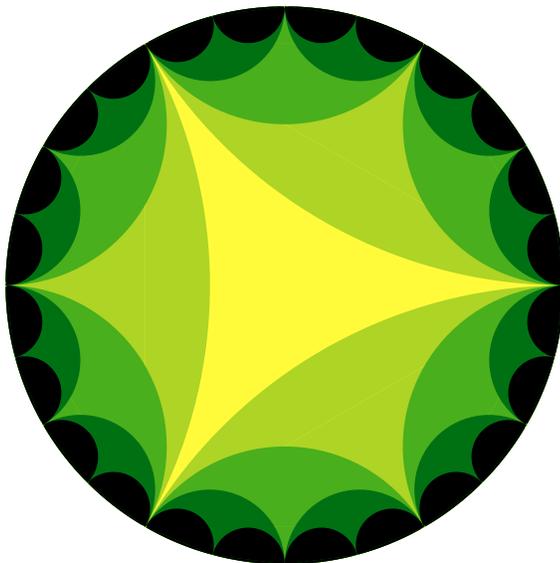
```

In[ ]:= TeselacionesColor[nfig_, niter_, Esquema_] := Function[{n, m, sch},
    Discos = {Directive[Thickness[0.002/m]],
    Directive[ColorData[sch, 1]], Disk[{0, 0}, 1]};
    For[i = 1, i ≤ m, i++,
    r = RADIO[n, i];
    θ = Angulos[n, i];
    θ = θ[[2]];
    R = Radio[n, i];
    Discos = Append[Discos, Table[{Directive[ColorData[sch, (m - i) / m]],
    DiskSegment[{r * Cos[θ / 2 + θ[[j]]], r * Sin[θ / 2 + θ[[j]]]},
    Sqrt[r^2 - 1], {θ + θ[[j]] + Pi / 2, θ[[j]] + 3 * Pi / 2}],
    DiskSegment[{0, 0}, 1, {θ[[j]], θ + θ[[j]]}], {j, 1, n * (n - 1) ^ (i - 1)}]
    ];
    Flatten[Discos]
    ][nfig, niter, Esquema]

In[ ]:= Graphics[TeselacionesColor[3, 4, "AvocadoColors"]]

```

Out[]:=



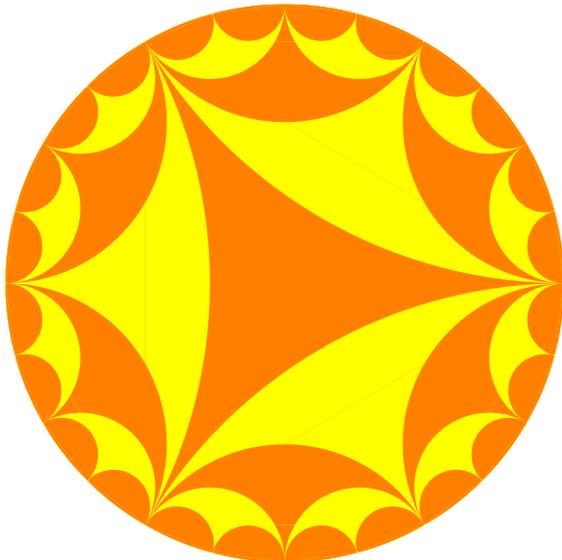
```

In[ ]:= TeselacionesColor2[nfig_, niter_, Color1_, Color2_] := Function[{n, m, col1, col2},
    [función]
    Discos = {Directive[Thickness[0.002/m]], Directive[col2], Disk[{0, 0}, 1]};
    [directiva] [grosor] [directiva] [disco]
    For[i = 1, i ≤ m, i++,
    [para cada]
        r = RADIO[n, i];
        θ = Angulos[n, i];
        θ = θ[[2]];
        R = Radio[n, i];
        Discos = Append[Discos, Table[{Directive[If[Mod[i, 2] == 1, col1, col2]],
        [añade] [tabla] [directiva] [si] [operación módulo]
            DiskSegment[{r * Cos[θ/2 + θ[[j]]], r * Sin[θ/2 + θ[[j]]]},
            [segmento de disco] [coseno] [seno]
                Sqrt[r^2 - 1], {θ + θ[[j]] + Pi/2, θ[[j]] + 3 * Pi/2}],
            [raíz cuadrada] [número pi] [número pi]
                DiskSegment[{0, 0}, 1, {θ[[j]], θ + θ[[j]]}], {j, 1, n * (n - 1)^(i - 1)}]
            [segmento de disco]
        ];
        Flatten[Discos]
    ] [nfig, niter, Color1, Color2]

In[ ]:= Graphics[TeselacionesColor2[3, 4, Yellow, Orange]]
[gráfico] [amarillo] [naranja]

```

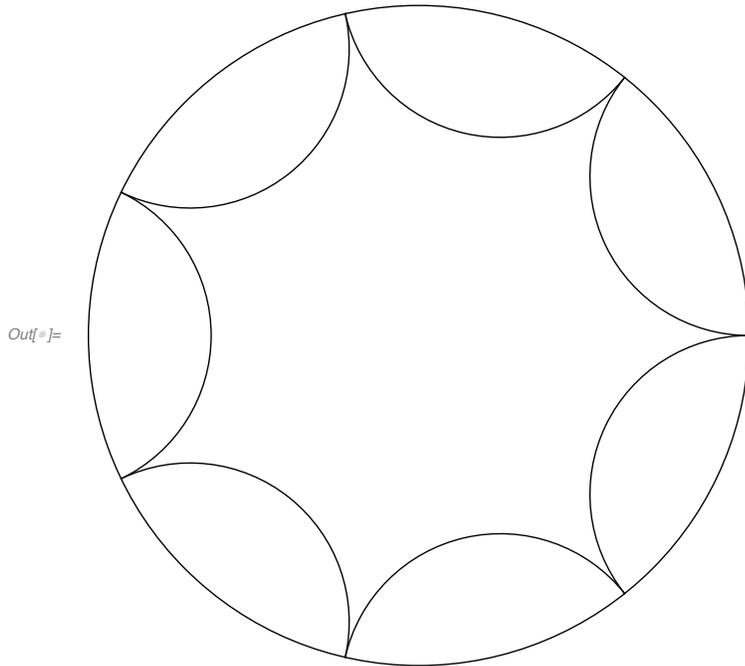
Out[]:=



Teselaciones regulares

```
In[ ]:= Graphics[Teselaciones[7, 1]]
```

gráfico



```
In[ ]:=  $\alpha = \text{Table}[i * 2 * \text{Pi} / 7, \{i, 0, 6\}]$ 
```

tabla

número pi

```
Out[ ]:= {0,  $\frac{2\pi}{7}$ ,  $\frac{4\pi}{7}$ ,  $\frac{6\pi}{7}$ ,  $\frac{8\pi}{7}$ ,  $\frac{10\pi}{7}$ ,  $\frac{12\pi}{7}$ }
```

```
In[ ]:=  $\theta = \alpha[[2]]$ 
```

```
Out[ ]:=  $\frac{2\pi}{7}$ 
```

```
In[ ]:=  $r1 = 1/3$ 
```

```
 $r2 = 2$ 
```

```
Out[ ]:=  $\frac{1}{3}$ 
```

```
Out[ ]:= 2
```

```
In[ ]:=  $\phi = 2 * \text{ArcSin}[r1 * \text{Sin}[\theta/2] / r2]$ 
```

arco seno

seno

```
Out[ ]:=  $2 \text{ArcSin}\left[\frac{1}{6} \text{Sin}\left[\frac{\pi}{7}\right]\right]$ 
```

In[]:= $\beta = (\# + \theta / 2 + \text{Pi}) \& / @ \alpha$
[número pi]

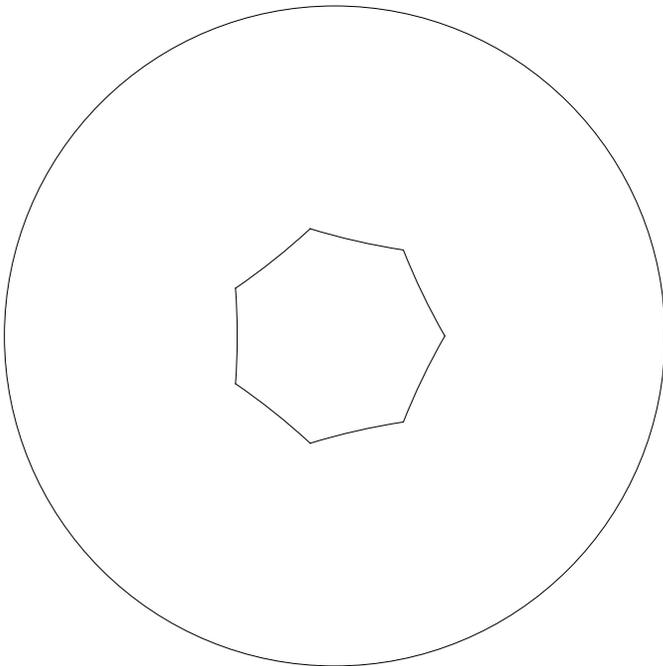
Out[]:= $\left\{ \frac{8\pi}{7}, \frac{10\pi}{7}, \frac{12\pi}{7}, 2\pi, \frac{16\pi}{7}, \frac{18\pi}{7}, \frac{20\pi}{7} \right\}$

In[]:= $R = r1 * \text{Cos}[\theta / 2] + r2 * \text{Cos}[\phi / 2]$
[coseno] [coseno]

Out[]:= $\frac{1}{3} \text{Cos}\left[\frac{\pi}{7}\right] + 2 \sqrt{1 - \frac{1}{36} \text{Sin}\left[\frac{\pi}{7}\right]^2}$

In[]:= `Graphics[{ Table[Circle[{ R * Cos[$\alpha[[i]] + \theta / 2$], R * Sin[$\alpha[[i]] + \theta / 2$] },
[gráfico] [tabla] [círculo] [coseno] [seno]
 $r2, \{ \beta[[i]] - \phi / 2, \beta[[i]] + \phi / 2 \}$], { i, 1, 7 }], Circle[{ 0, 0 }, 1] }`
[círculo]

Out[]:=



Bibliografía

- [1] *La historia de las matemáticas: Hacia el infinito y más allá*, <https://www.youtube.com/watch?v=116FZgkC3a0>.
- [2] Miquel Albertí, *El mosaico sin fin: Teselaciones y dibujos sobre el plano*, RBA Coleccionables, 2014.
- [3] Claudi Alsina, *Mapas del metro y redes neuronales: la teoría de grafos*, RBA Coleccionables, 2014.
- [4] B. Alspach and Cun Quan Zhang, *Hamilton cycles in cubic Cayley graphs on dihedral groups*, *Ars Combin.* **28** (1989), 101–108. MR 1039136
- [5] Amos Altshuler, *Hamiltonian circuits in some maps on the torus*, *Discrete Mathematics* **1** (1972), no. 4, 299–314.
- [6] Arthur Benjamin, Gary Chartrand, and Ping Zhang, *The fascinating world of graph theory*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2015. MR 3307972
- [7] Gary Chartrand and Ping Zhang, *Chromatic graph theory*, Chapman and Hall/CRC, 2008.
- [8] ———, *A first course in graph theory*, Courier Corporation, 2013.
- [9] John H. Conway, Heidi Burgiel, and Chaim Goodman-Strauss, *The symmetries of things*, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2008. MR 2410150
- [10] Richard Courant, Herbert Robbins, Ian Stewart, et al., *What is mathematics?: an elementary approach to ideas and methods*, Oxford University Press, USA, 1996.
- [11] H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*, Methuen & Co., Ltd., London; Pitman Publishing Corporation, New York, 1948; 1949. MR 0027148
- [12] Reinhard Diestel, *Graph theory 3rd ed*, Graduate texts in mathematics **173** (2005).
- [13] Ryszard Engelking, *General topology*, second ed., Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989, Translated from the Polish by the author. MR 1039321

- [14] Sandra Forty, *MC Escher*, Taj Books, 2003.
- [15] George K. Francis and Jeffrey R. Weeks, *Conway's ZIP proof*, Amer. Math. Monthly **106** (1999), no. 5, 393–399. MR 1699257
- [16] Joan Gómez, *Cuando las rectas se vuelven curvas: las geometrías no euclideas*, RBA, 2010.
- [17] Alexander Grigor'yan, *Introduction to analysis on graphs*, University Lecture Series, vol. 71, American Mathematical Society, Providence, RI, 2018. MR 3822363
- [18] Branko Grünbaum and G. C. Shephard, *Tilings and patterns*, A Series of Books in the Mathematical Sciences, W. H. Freeman and Company, New York, 1989, An introduction. MR 992195
- [19] Jochen Harant and Stefan Senitsch, *A generalization of Tutte's theorem on Hamiltonian cycles in planar graphs*, Discrete Math. **309** (2009), no. 15, 4949–4951. MR 2531642
- [20] Brian Hopkins and Robin J. Wilson, *The truth about Königsberg*, College Math. J. **35** (2004), no. 3, 198–207. MR 2053120
- [21] Haruo Hosoya, Yoko Tsukano, Kyoko Nakada, Sayaka Iwata, and Umpei Nagashima, *Supersymmetry of hexabenzocoronene torus*, Croatica chemica acta **77** (2004), no. 1-2, 89–95.
- [22] Alejandro Illanes, *La caprichosa forma de globión*, Secretaría de Educación Pública, 1999.
- [23] D. J. Klein and H. Zhu, *Resonance in elemental benzenoids*, Discrete Appl. Math. **67** (1996), no. 1-3, 157–173. MR 1393302
- [24] Douglas J. Klein and Hongyao Zhu, *All-conjugated carbon species*, From Chemical Topology to Three-Dimensional Geometry, Springer, 2002, pp. 297–341.
- [25] André Kündgen, Binlong Li, and Carsten Thomassen, *Cycles through all finite vertex sets in infinite graphs*, European J. Combin. **65** (2017), 259–275. MR 3679848
- [26] Klavdija Kutnar, Aleksander Malnic, and Dragan Marušić, *Chirality of toroidal molecular graphs*, Journal of chemical information and modeling **45** (2005), no. 6, 1527–1535.
- [27] Sergei K. Lando and Alexander K. Zvonkin, *Graphs on surfaces and their applications*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 141, Springer-Verlag, Berlin, 2004, With an appendix by Don B. Zagier, Low-Dimensional Topology, II. MR 2036721

- [28] Silvio Levy (ed.), *Flavors of geometry*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, vol. 31, Cambridge University Press, Cambridge, 1997. MR 1491096
- [29] Jos Leys, *The hyperbolic chamber*, 2008, http://www.josleys.com/article_show.php?id=83.
- [30] Jos Leys, Étienne Ghys, and Aurélien Alvarez, *Dimensions*, <https://www.youtube.com/watch?v=zL3o1JKXQo0&t=1s>.
- [31] Dragan Marušič and Tomaž Pisanski, *Symmetries of hexagonal molecular graphs on the torus*, *Croatica Chemica Acta* **73** (2000), no. 4, 969–981.
- [32] Joaquín Navarro, *Al otro lado del espejo: la simetría en matemáticas*, RBA, 2010.
- [33] Ian Parberry, *An efficient algorithm for the knight's tour problem*, *Discrete Appl. Math.* **73** (1997), no. 3, 251–260. MR 1438157
- [34] Ana Irene Ramírez-Galarza and J. Seade-Kuri, *Introducción a la geometría avanzada*, Las Prensas de Ciencias, 2002.
- [35] Ana Irene Ramírez-Galarza and Guillermo Sienna-Loera, *Invitación a las geometrías no euclidianas*, UNAM, 2000.
- [36] Laura Hidalgo Solís, *Mosaicos*, UNAM, 2007.
- [37] Wikipedia, *Orden total — wikipedia, la enciclopedia libre*, 2020, [Internet; descargado 12-agosto-2020].
- [38] Wikipedia contributors, *Hypercycle (geometry) — Wikipedia, the free encyclopedia*, 2018, [Online; accessed 19-October-2019].
- [39] _____, *Apeirogon — Wikipedia, the free encyclopedia*, 2019, [Online; accessed 10-October-2019].
- [40] _____, *Hamiltonian path — Wikipedia, the free encyclopedia*, 2019, [Online; accessed 6-July-2019].
- [41] _____, *Uniform tilings in hyperbolic plane — Wikipedia, the free encyclopedia*, 2019, [Online; accessed 18-November-2019].
- [42] _____, *Well-order — Wikipedia, the free encyclopedia*, 2020, [Online; accessed 12-August-2020].
- [43] _____, *Well-ordering theorem — Wikipedia, the free encyclopedia*, https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Well-ordering_theorem&oldid=972506180, 2020, [Online; accessed 12-August-2020].
- [44] R.J. Wilson, *Combinatorics: A very short introduction*, Very short introductions, Oxford University Press, 2016.

- [45] Xiaofan Yang, David J. Evans, Hongjian Lai, and Graham M. Megson, *Generalized honeycomb torus is Hamiltonian*, Inform. Process. Lett. **92** (2004), no. 1, 31–37. MR 2085619
- [46] Dong Ye, *Hamilton cycles in cubic polyhex graphs on the Klein bottle*, Ars Combin. **112** (2013), 205–212. MR 3112576