



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA
APLICADA

- I. UNA PRUEBA ALTERNATIVA DEL TEOREMA DE
BAKER-GROSS.
- II. CURVAS ELÍPTICAS Y CONJUNTOS DE CUATRO PUNTOS EN
LA ESFERA DE RIEMANN.
- III. TRIANGULACIONES EQUILÁTERAS EN SUPERFICIES Y
FUNCIONES DE BELYI.

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
JOSÉ JUAN ZACARÍAS

DIRECTOR DE LA TESIS:
DR. SANTIAGO ALBERTO VERJOVSKY SOLÁ
UNIDAD CUERNAVACA DEL INSTITUTO DE MATEMÁTICAS,
UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO
FACULTAD DE CIENCIAS, BUAP
DR. PETER MAKIENKO
UNIDAD CUERNAVACA DEL INSTITUTO DE MATEMÁTICAS,
UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, NOVIEMBRE DE 2020.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



MIEMBROS DEL JURADO:

DR. ALBERTO VERJOVSKY	UCIM-UNAM
DR. FRANCISCO GONZÁLEZ	UCIM-UNAM
DR. ADOLFO GUILLOT	IM-UNAM
DR. FERRÁN VALDEZ	CCM-UNAM
DR. TIMOTHY GENDRON	UCIM-UNAM

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi asesor el profesor Alberto Verjovsky por todas sus enseñanzas, por la gran cantidad de temas que aprendí con sus charlas de matemáticas, de las cuales surgieron varias de las ideas desarrolladas en esta tesis. Gracias por su paciencia para resolver mis dudas. Sobre todo agradezco su generosidad y el apoyo que me ha brindado a lo largo de todos estos años.

Agradezco a los sinodales por haber aceptado ser parte del jurado, en especial a los profesores Adolfo Guillot, Ferrán Valdez y Timothy Gendron por la lectura minuciosa de este trabajo, por sus acertados comentarios y sugerencias que ayudaron a mejorar esta tesis.

Agradezco a los profesores Patricia Domínguez y Peter Makienko por formar parte de mi Comité Tutor. A la profesora Patricia Domínguez por permitirme presentar mi trabajo en el *Workshop in holomorphic dynamics* en la BUAP. Al profesor Peter Makienko por escuchar mis ideas, por sus sugerencias y por su constante apoyo a lo largo del doctorado.

José Juan Zacarías

09 de Noviembre de 2020

Índice general

Contenido General	III
Capítulo 1. Una prueba alternativa del teorema de Baker-Gross	1
§1.1. Introducción	1
§1.2. La forma normal de Weierstrass de la cúbica de Fermat	3
§1.3. Demostración del Teorema de Baker-Gross	5
§1.4. Algunas observaciones sobre curvas de Fermat de grados superiores.	7
Capítulo 2. Curvas elípticas y conjuntos de cuatro puntos en la esfera de Riemann	9
§2.1. Introducción	9
§2.2. Correspondencia entre \mathcal{M} y conjuntos de cuatro puntos	11
§2.3. Forma normal de Legendre y de Weierstrass.	16
§2.4. Las formas normales de Jacobi y de Edwards	19
§2.5. El invariante J y la forma normal de Hesse	20
Capítulo 3. Triangulaciones equiláteras de superficies y funciones de Belyi	25
§3.1. Introducción	25
§3.2. Estructuras equiláteras en superficies	31
§3.3. Suma conexa de funciones de Belyi	48
§3.4. Curvas elípticas con descomposición hexagonal	63
§3.5. Geodésicas en superficies con una triangulación equilátera decorada	68

§3.6. Estructuras hiperbólicas cónicas	83
§3.7. Cáscaras de curvas elípticas con una triangulación equilátera decorada y su módulo τ	92
§3.8. Observaciones y preguntas finales	94
Apéndice A. La superficie de traslación asociada a un superficie triangulada decorada	95
§A.1. Mapeo desarrollante y holonomía	96
§A.2. Construcción de la superficie de traslación	97
Bibliografía	103

Contenido General

El presente trabajo tiene como temas centrales curvas elípticas y funciones de Belyi sobre superficies de Riemann. A continuación describimos los resultados obtenidos en cada uno de los tres capítulos:

Capítulo 1. En este capítulo estudiamos las soluciones de la cúbica de Fermat

$$(1) \quad F_3: x^3 + y^3 = 1$$

en el campo de funciones meromorfas del plano complejo. En su artículo [Gro66a] F. Gross conjeturó que dichas soluciones tenían que ser funciones elípticas compuestas con funciones enteras. La conjetura fue resuelta afirmativamente por I. N. Baker, F. Gross y N. Steinmetz, independientemente. El resultado principal de este capítulo es una prueba alternativa de dicha conjetura. De forma más precisa probamos el siguiente teorema:

Teorema 1 (Baker-Gross). *Sea \wp la función elíptica de Weierstrass que satisface $(\wp')^2 = 4\wp^3 - 1$ y Λ' la retícula en \mathbb{C} que define la función \wp . Entonces el mapeo $\mathbb{C}/\Lambda' \rightarrow F_3$ dado en coordenadas afines como sigue:*

$$(2) \quad z \mapsto \left(\frac{1}{2\wp(z)} \left(1 - 3^{-1/2} \wp'(z) \right), \frac{1}{2\wp(z)} \left(1 + 3^{-1/2} \wp'(z) \right) \right)$$

es un biholomorfismo entre las dos curvas elípticas. Entonces por la propiedad de levantamiento de cubrientes cualquier par de funciones F y G que son meromorfas en \mathbb{C} y satisfacen (1) se pueden expresar de la siguiente forma:

$$F = \frac{1}{2\wp(\alpha)} \left(1 - 3^{-1/2} \wp'(\alpha) \right), \quad G = \frac{1}{2\wp(\alpha)} \left(1 + 3^{-1/2} \wp'(\alpha) \right),$$

donde α es una función entera.

Nuestra prueba, basada en superficies de Riemann, podría clarificar la naturaleza de las fórmulas obtenidas por los autores mencionados anteriormente. Dicha prueba la encontramos independientemente para responder a la conjetura de Gross, ya que no sabíamos si la conjetura ya había sido resuelta.

También, nuestro método nos permite encontrar fórmulas análogas, por ejemplo las siguientes:

$$F = \frac{1}{\wp(\alpha)} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{24}} \wp'(\alpha) \right), \quad G = \frac{1}{\wp(\alpha)} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{24}} \wp'(\alpha) \right),$$

donde \wp satisface en este caso $(\wp')^2 = 4\wp^3 - 8$.

También aplicamos nuestra construcción a curvas de Fermat de grados superiores $x^n + y^n = 1$, obteniendo las siguientes expresiones para dicha curva:

$$E_2: 2 + 2 \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k} y^{2k} = x^n,$$

si n es impar y

$$E_2: 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (1 + \omega^k) y^k = x^n,$$

si n es par. Nuestra construcción nos permite dar explícitamente el isomorfismo birracional entre E_2 y F_n .

El contenido de este trabajo aparece publicado en [Jua17a] y es una continuación de mi tesis de licenciatura que realicé bajo la dirección del profesor A. Verjovsky.

Capítulo 2. En este capítulo estudiamos algunas formas normales de curvas elípticas, vistas como configuraciones de cuatro puntos en la esfera de Riemann.

Por teoría de superficies de Riemann sabemos que cualquier curva elíptica X admite una función meromorfa $f: X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de grado 2 (vea Forster [For81], Cor. 16.12) y por la fórmula de Riemann-Hurwitz esta función tiene cuatro valores críticos, esto nos permite asociar a cada curva elíptica un conjunto de cuatro puntos en la esfera de Riemann, de hecho tenemos el siguiente teorema (vea [Don11, §6.3.2]):

Teorema 2. *Sea \mathcal{M} el conjunto de clases de isomorfismo de curvas elípticas, módulo biholomorfismos. La correspondencia descrita anteriormente establece una biyección entre \mathcal{M} y conjuntos de cuatro puntos en la esfera de Riemann, módulo transformaciones de Möbius.*

Por otra parte, existen unas ecuaciones estándar en las que una curva elíptica puede expresarse llamadas formas normales (por ejemplo, la forma normal de Weierstrass, de Legendre o de Jacobi). El propósito de este trabajo es entender geoméricamente algunas formas normales clásicas vistas como configuraciones de cuatro puntos en la esfera de Riemann, o equivalentemente, entender las formas normales utilizando una función meromorfa de grado 2 sobre la superficie. En este contexto, probamos el siguiente teorema:

Teorema 3. *Cualquier curva elíptica X es isomorfa a una curva elíptica dada por una ecuación de la forma:*

$$y^2 = (x^2 - a^2)(a^2x^2 - 1), \quad \text{con } a^4 \neq 1 \text{ y } a \neq 0,$$

la cual a su vez es isomorfa a la curva elíptica en la forma normal de Edwards:

$$x^2 + y^2 = a^2 + a^2x^2y^2,$$

e isomorfa a la curva elíptica en la forma normal de Jacobi:

$$y^2 = (x^2 - 1)(k^2x^2 - 1),$$

con $k = a^2$.

Nuestro resultado principal es una prueba alternativa de que toda curva elíptica tiene una forma normal de Hesse:

Teorema 4. *Cualquier curva elíptica X es isomorfa a una curva elíptica en la forma normal de Hesse:*

$$(3) \quad x^3 + y^3 + 1 = 3kxy, \quad k \in \mathbb{C} \text{ con } k^3 \neq 1,$$

que a su vez es isomorfa a la curva elíptica en la siguiente forma:

$$(4) \quad y^2 = (x + k)(x^3 - 3kx^2 + 4), \quad k \in \mathbb{C} \text{ con } k^3 \neq 1.$$

En [BM17] Milnor y Bonifant dan una prueba con otro método. En dicho artículo los autores comentan que el resultado aparece en el famoso libro de Heinrich Weber *Lehrbuch der Algebra* publicado en 1898 (vea [Web98]).

Consideremos ahora la la siguiente expresión

$$(5) \quad y^2 = x(x - 1)(x - \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} - \{0, 1\},$$

llamada una *forma normal de Legendre* de una curva elíptica. El número λ es una razón cruzada del conjunto de los cuatro puntos asociados a la curva elíptica (con la correspondencia del Teorema 2). Esto nos motivó a buscar una construcción geométrica de la razón cruzada de cuatro puntos en el plano en posición general. Nuestra construcción está dada en términos de ciertos círculos curvilíneos. En Figura 1 ilustramos nuestra construcción.

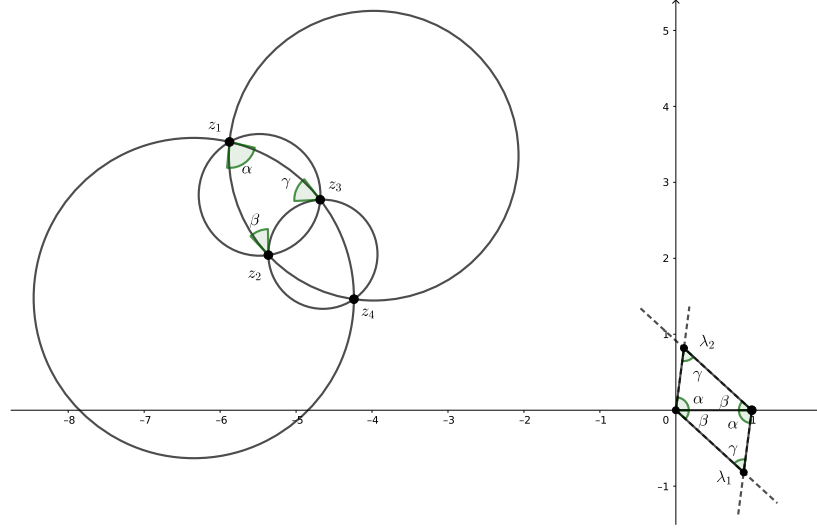


Figura 1. Las razones cruzadas $\lambda_1 = \chi(z_1, z_2, z_3, z_4)$ y $\lambda_2 = \chi(z_1, z_2, z_4, z_3)$ son los puntos de intersección de las semirectas indicadas con líneas punteadas que pasan por 0 y 1 con los ángulos α y β .

(También damos una construcción análoga cuando uno de los puntos es ∞ , vea Prop. 25). La construcción anterior nos permite tener una intuición geométrica de como comparar la razón cruzada de dos conjuntos de cuatro puntos sin necesidad de calcularlos explícitamente. Vea el Ejemplo 28 y el Ejemplo 30 para una aplicación de este método en el cálculo de la forma normal de Legendre y de Weierstrass de la curva de Fermat.

El contenido de este capítulo aparece en [Jua17b].

Capítulo 3. En este capítulo estudiamos algunas propiedades de las funciones de Belyi desde un punto de vista geométrico, vistas como superficies de Riemann con una triangulación equilátera decorada. La motivación principal de este trabajo es el siguiente resultado de G. V. Belyi (vea [Bel79]):

Teorema 5. *Sea X una superficie de Riemann compacta. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (i) X está definida sobre $\bar{\mathbb{Q}}$, el campo de los números algebraicos.
- (ii) Existe una función meromorfa $f: X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, tal que sus valores críticos están en el conjunto $\{0, 1, \infty\}$.

Con el teorema de Belyi Grothendieck observó en [Grot97] que existe un funtor invertible entre ciertas gráficas en superficies llamadas dessins

d'enfants y curvas definidas sobre $\bar{\mathbb{Q}}$. Esta correspondencia le permitió representar al grupo absoluto de Galois como una acción en gráficas de superficies.

Por otra parte, V. Voevodsky y G. Shabat prueban en [VS89], también usando el teorema de Belyi, el siguiente resultado:

Teorema 6. *Una superficie de Riemann compacta X está definida sobre $\bar{\mathbb{Q}}$ si y sólo si X admite una estructura equilátera para su estructura compleja (o equivalentemente, una estructura equilátera decorada).*

Una triangulación equilátera decorada en una superficie compacta orientable es una triangulación equilátera cuyos vértices están decorados con símbolos \circ , \bullet y $*$, de tal forma que dos vértices adyacentes no tienen la misma decoración. Dicha decoración induce una coloración en los triángulos de la siguiente manera: un triángulo es negro si la orientación positiva en su frontera está dada por la terna $(\circ, \bullet, *)$, y es blanco en otro caso.

El Teorema 6 nos motivó a estudiar a las superficies de Riemann dadas por una estructura equilátera decorada. Nuestro sueño es obtener información aritmética de la curva algebraica a partir de la geometría (por ejemplo, decir algo sobre el campo de definición o el campo móduli de la curva), pero al parecer este es un problema muy difícil. Este trabajo está en progreso y en este capítulo exponemos algunos resultados, observaciones y preguntas que hemos hecho entorno a este tema.

El contenido de este último capítulo está basado en un trabajo conjunto con mi asesor el profesor A. Verjovsky, el cual aparece en [JV20].

Considere a Δ el triángulo equilátero con vértices en $0, 1, \omega$, con $\omega = 2\pi i/6$. Denotemos por 2Δ al doble de dicho triángulo. Naturalmente 2Δ tiene una estructura equilátera, además si decoramos los vértices $0, 1, \omega$ en 2Δ con los símbolos $\circ, \bullet, *$, respectivamente, obtenemos una estructura equilátera decorada. Mediante el mapeo de Schwarz-Christoffel podemos dar un biholomorfismo $\Psi: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow 2\Delta$ de la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ a 2Δ tal que Ψ manda al semiplano superior a Δ y semiplano inferior a su reflejado, además manda a $0, 1$ e ∞ en $0, 1$ y ω , respectivamente. Supondremos que la esfera de Riemann tiene la estructura equilátera inducida por Ψ . Entonces, dada una función de Belyi $f: X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ podemos jalar la estructura equilátera de $\hat{\mathbb{C}}$, mediante f , obteniendo una triangulación equilátera decorada en X .

En §3.3 definimos una noción de suma conexas de dos funciones de Belyi. Dadas dos funciones de Belyi $f_1: X_1 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ y $f_2: X_2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ elegimos un triángulo negro T_1^+ en X_1 y uno blanco T_2^- en X_2 , definamos la suma conexas $f_1 \#_{T_1^+ \#_{T_2^-}} f_2: X_1 \#_{T_1^+ \#_{T_2^-}} X_2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ a lo largo de dichos triángulos como sigue:

$$f_1 \#_{T_1^+ \#_{T_2^-}} f_2(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in X_1 - \text{int } T_1^+ \\ f_2(x), & x \in X_2 - \text{int } T_2^-, \end{cases}$$

esta aplicación resulta una función de Belyi sobre la suma conexa de las dos superficies $X_1 \#_{T_1^+} \#_{T_2^-} X_2$. En §3.3.2 calculamos la monodromía de esta función. Además, en Ejemplo 73 mostramos que la suma conexa depende de los triángulos elegidos. Sin embargo, cuando las dos funciones son cubrientes normales (de Galois) la suma conexa es independiente de los triángulos elegidos, más precisamente probamos lo siguiente:

Proposición 7. *Si $f_1: X_1 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ y $f_2: X_2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ son dos funciones de Belyi que son de Galois, entonces dados $T_1^+, T_1'^+$ dos triángulos negros de X_1 y $T_2^-, T_2'^-$ dos triángulos blancos de X_2 , existe un biholomorfismo*

$$\Phi: X_1 \#_{T_1^+} \#_{T_2^-} X_2 \rightarrow X_1 \#_{T_1'^+} \#_{T_2'^-} X_2$$

que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_1 \#_{T_1^+} \#_{T_2^-} X_2 & \xrightarrow{\Phi} & X_1 \#_{T_1'^+} \#_{T_2'^-} X_2 \\ & \searrow f_1 \#_{T_1^+} \#_{T_2^-} f_2 & \swarrow f_1 \#_{T_1'^+} \#_{T_2'^-} f_2 \\ & \hat{\mathbb{C}} & \end{array}$$

Analizamos varios ejemplos de sumas conexas entre algunas familias de funciones de Belyi sobre la esfera de Riemann. Una de estas familias son los *polinomios de Tchebychev* definidos por la siguiente fórmula recursiva: (i) para $n = 0$, $T_0(x) = 1$; para $n \geq 1$

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

Eligiendo unos triángulos adecuados probamos lo siguiente:

Proposición 8. *Si n es impar $T_2 \# T_n = T_{n+1}$, si n es par $(1 - T_2) \# T_n = T_{n+1}$. Por lo tanto,*

$$\begin{cases} T_n = (1 - T_2) \# \cdots \# T_2 \# (1 - T_2) \# T_2, & n \text{ impar,} \\ T_n = T_2 \# \cdots \# T_2 \# (1 - T_2) \# T_2, & n \text{ par,} \end{cases}$$

donde ambas sumas contienen $n - 1$ sumandos. Equivalentemente,

$$\begin{cases} T_n = ((1 - T_2) \# T_2)^{\# \frac{n-1}{2}} = T_3^{\# \frac{n-1}{2}}, & n \text{ impar,} \\ T_n = T_2 \# T_{n-1} = T_2 \# \left(T_3^{\# \frac{n-2}{2}} \right), & n \text{ par.} \end{cases}$$

Al final de la sección damos algunas observaciones y preguntas entre la relación de sumas conexas con Flips y refinamientos elementales de triangulaciones.

En §3.4 estudiamos a las curvas elípticas que admiten una descomposición hexagonal con vértices de valencia 3. Damos la siguiente caracterización, usando dessins d'enfants:

Teorema 9. *Sea $\tau \in \mathbb{H}$, entonces $X_{1,\tau}$ admite una estructura plana sin puntos cónicos dada por una unión finita de hexágonos regulares con cada vértice de valencia 3 si y sólo si existe $\gamma \in \text{PSL}(2, \mathbb{Q})$ tal que $\tau = \gamma(\omega)$, con $\omega = \exp(2\pi i/6)$.*

En §3.5 damos algunas observaciones sobre longitudes de geodésicas en superficies trianguladas decoradas, nuestra principal motivación fue ver si es posible obtener información del campo de definición de la superficie de Belyi analizando el espectro geodésico, sin embargo el Corolario 11 nos indica que no podemos extraer esta información tan directamente como pensábamos. A lo largo de nuestra discusión fijamos, para nuestros cálculos, el punto $1/2$ como punto base para el grupo fundamental de $2\Delta - \{0, 1, \omega\}$, pero los cálculos son análogos si cambiamos de punto base (usualmente se toma el punto $1/2$ como punto base del grupo fundamental de $\hat{\mathbb{C}} - \{0, 1, \infty\}$ para calcular la monodromía de una función de Belyi, por eso elegimos dicho punto en 2Δ , pero no es un punto distinguido). Si $f: X \rightarrow 2\Delta \cong \hat{\mathbb{C}}$ es un mapeo de Belyi y $\gamma \in \pi_1(2\Delta - \{0, 1, \omega, \infty\}, 1/2)$, denotaremos por σ_γ la permutación en la fibra $f^{-1}(1/2)$ obtenida de los levantamientos de γ . En esta sección probamos el siguiente teorema:

Teorema 10. *Sea X una superficie de Riemann dada por una triangulación equilátera decorada y $f: X \rightarrow 2\Delta$ su función de Belyi. Fijemos un etiquetado de $f^{-1}(1/2)$, con símbolos a_1, \dots, a_d donde $d = \deg f$.*

Sea $\omega_0 = m + n\omega$, con $(m, n) = 1$ y n impar. Sea γ la geodésica cerrada en 2Δ basada en $1/2$ definida por una recta $\ell(t) = 1/2 + t\omega_0$, y a_i una arista del dessin de f con punto medio $p_i \in f^{-1}(1/2)$. Si τ_i es el ciclo que contiene a i en la descomposición cíclica de $\sigma_\gamma \in \text{Sym}(f^{-1}(1/2)) \cong S_d$ (el isomorfismo está dado por el etiquetado), entonces el desarrollo de $\ell(t)$ en X basado en p_i se puede expresar como:

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_{p_i} \cdot \tilde{\gamma}_{\sigma_\gamma(p_i)} \cdots \tilde{\gamma}_{\sigma_\gamma^{r-1}(p_i)}$$

(módulo una reparametrización), donde r es igual a $\text{ord } \tau_i$, es decir la longitud del ciclo τ_i .

El teorema anterior nos permite dar el siguiente corolario, que nos da una fórmula para calcular las longitudes de geodésicas en la superficie triangulada decorada en términos de la monodromía de la función de Belyi, o equivalentemente, en términos de las permutaciones asociadas.

Corolario 11. *Suponga que tenemos las hipótesis del Teorema 10. Sea γ una geodésica cerrada en 2Δ dada por la parametrización $\ell(t) = 1/2 + t\omega_0$. Si a_i es una arista del dessin de X y Ψ es el desarrollo de ℓ con respecto a p_i , entonces la geodésica $\tilde{\gamma} = \Psi(\ell)$ es suave, cerrada y tiene longitud*

Direcciones ω_0	Factorización de γ en $\pi_1(2\Delta - \{0, 1, \omega\}, 1/2)$
1. $\omega_0 = 1 + \omega \in \text{Hex}$	$\gamma = \gamma_1^{-1}\gamma_0$.
2. $\omega_0 = 3\omega \in \text{Hex}$,	$\gamma = \gamma_1^{-1}\gamma_0^{-1}\gamma_1\gamma_0$.
3. $\omega_0 = 2 + 3\omega \notin \text{Hex}$	$\gamma = \gamma_1^{-1}\gamma_0\gamma_1^{-1}(\gamma_0^{-1})^2\gamma_1^{-1}(\gamma_0^{-1})^2\gamma_1^{-1}\gamma_0^{-1}\gamma_1\gamma_0$ $\gamma_1^2\gamma_0\gamma_1^2\gamma_0\gamma_1^{-1}\gamma_0$
4. $\omega_0 = 2 + \omega \notin \text{Hex}$	$\gamma = \gamma_1^{-1}\gamma_0\gamma_1^2\gamma_0\gamma_1\gamma_0^{-1}\gamma_1^{-1}(\gamma_0^{-1})^2\gamma_1^{-1}\gamma_0$
5. $\omega_0 = 10 + \omega \in \text{Hex}$	$\gamma = \gamma_1^{-1}\gamma_0\gamma_1\gamma_0^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma_0\gamma_1\gamma_0^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma_0\gamma_1\gamma_0^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma_0$
6. $\omega_0 = 13 + 7\omega \in \text{Hex}$	$\gamma = \gamma_1^{-1}\gamma_0\gamma_1^2\gamma_0\gamma_1\gamma_0^{-1}\gamma_1^{-1}(\gamma_0^{-1})^2\gamma_1^{-1}\gamma_0\gamma_1^{-1}\gamma_0\gamma_1^{-1}$ $\gamma_0\gamma_1^2\gamma_0\gamma_1\gamma_0^{-1}\gamma_1^{-1}(\gamma_0^{-1})^2\gamma_1^{-1}\gamma_0$
7. $\omega_0 = 5 - \omega \in \text{Hex}$	$\gamma = \gamma_1\gamma_0^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma_0\gamma_1\gamma_0^{-1}$
8. $\omega_0 = 10 + 7\omega \in \text{Hex}$	$\gamma = \gamma_1^{-1}\gamma_0\gamma_1^{-1}\gamma_0\gamma_1^2\gamma_0\gamma_1^2\gamma_0\gamma_1\gamma_0^{-1}\gamma_1^{-1}(\gamma_0^{-1})^2\gamma_1\gamma_0^2$ $\gamma_1^{-1}\gamma_0\gamma_1^{-1}\gamma_0$
9. $\gamma_0 = 2 + 5\omega \in \text{Hex}$	$\gamma = \gamma_1^{-1}(\gamma_0^{-1})^2\gamma_1^{-1}\gamma_0^{-1}\gamma_1\gamma_0\gamma_1^2\gamma_0$

Cuadro 1. Algunas direcciones ω_0 y la factorización de $\gamma(t) = \pi(1/2 + t\omega_0)$ en $\pi_1(2\Delta - \{0, 1, \omega\}, 1/2)$.

$\text{long } \tilde{\gamma} = \text{ord } \sigma_{a_i} \text{ long } \gamma$, donde σ_{a_i} es el ciclo de σ_γ que contiene a a_i . Por lo tanto

$$\text{long } \tilde{\gamma} = \begin{cases} \text{ord } \sigma_{a_i} |\omega_0|, & \omega_0 \in \text{Hex} \\ 3 \text{ord } \sigma_{a_i} |\omega_0|, & \omega_0 \notin \text{Hex} \end{cases}$$

donde σ_{a_i} es el ciclo de σ_γ que contiene a a_i .

En §3.5.4 damos un algoritmo para calcular la factorización de una geodésica cerrada primitiva en 2Δ basada en $1/2$, dado su vector dirección. En la Tabla 1 mostramos varios ejemplos explícitos. Para calcular las permutaciones utilizamos el paquete *Sympy* (<https://www.sympy.org/en/index.html>). En el Ejemplo 108 mostramos algunos cálculos para ilustrar el funcionamiento del algoritmo.

Finalmente, en la última parte de este capítulo estudiamos superficies trianguladas decoradas, con triángulos hiperbólicos. Observamos que la superficie se puede desenvolver en el plano hiperbólico a un polígono que llamamos una *cáscara hiperbólica* de la superficie. Aplicamos nuestra construcción a curvas elípticas aritméticas para encontrar su módulo $\tau \in \mathbb{H}$. Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 12. *Supongamos que X es una curva elíptica dada por una triangulación equilátera decorada. Sea $p: \mathbb{C} \rightarrow X$ su cubriente universal holomorfo. Si $\Psi: P \rightarrow X$ es una cáscara hiperbólica para X , entonces existen dos curvas γ_1 y γ_2 en $\mathcal{G}_P = \Psi(\partial P)$ tales que $g_{\gamma_1}(z) = z + \omega_1$ y $g_{\gamma_2}(z) = z + \omega_2$ generan a $\text{Deck}(p)$. Por lo tanto $\tau = \omega_1/\omega_2$ uniformiza a X , es decir, X es biholomorfo a $\mathbb{C}/\Lambda_{1,\tau}$.*

El teorema anterior es un método teórico, aún estamos buscando un método práctico que nos permita calcular el módulo explícitamente.

Otro de nuestros sueños es caracterizar a los dessins d'enfants de género 1 que representen a una curva elíptica definida sobre \mathbb{Q} , y luego a las modulares, para ver si se puede abordar el *Teorema de Shimura-Taniyama* desde el punto de vista de los dessins d'enfants.

Una prueba alternativa del teorema de Baker-Gross

1.1. Introducción

Consideremos la cúbica de Fermat

$$(6) \quad F_3: x^3 + y^3 = 1.$$

Esta curva algebraica define una curva elíptica i.e., una superficie de Riemann compacta de género 1 (tomando los ceros en \mathbb{CP}^2 de su homogeneización). Una solución meromorfa de esta ecuación es, por definición, un par de funciones meromorfas en el plano complejo tal que $f^3 + g^3 = 1$. En su artículo [[Gro66a](#)], F. Gross hizo la siguiente conjetura:

Conjetura 13. ([[Gro66a](#)], Conjecture 1) Las únicas soluciones meromorfas de la ecuación (6) son funciones elípticas compuestas con funciones enteras.

La conjetura fue resuelta afirmativamente por I. N. Baker en [[Bak66](#)]. Él probó que cualquier solución es la composición de las siguientes funciones elípticas con una función entera:

$$(7) \quad f(z) = \frac{1}{2\wp(z)} \left(1 - 3^{-1/2}\wp'(z)\right), \quad g(z) = \frac{1}{2\wp(z)} \left(1 + 3^{-1/2}\wp'(z)\right),$$

donde \wp es la función elíptica de Weierstrass que satisface $(\wp')^2 = 4\wp^3 - 1$. En lo que sigue denotaremos por Λ' la retícula en \mathbb{C} que define esta \wp . En particular estas funciones son soluciones de la cúbica de Fermat. Las fórmulas

en (7) difieren de las fórmulas análogas en [Gro66a], [Gro66b], las cuales parecen contener un error. Después, F. Gross dio otra prueba en [Gro68], probando que de hecho la función f en (7) nos da una uniformización de la cúbica de Fermat (6). Formulamos el resultado anterior en el siguiente teorema:

Teorema 14 (Baker-Gross). *Sea Λ' y \wp como anteriormente. Entonces el mapeo $\mathbb{C}/\Lambda' \rightarrow F_3$ dado en coordenadas afines como sigue:*

$$(8) \quad z \mapsto \left(\frac{1}{2\wp(z)} \left(1 - 3^{-1/2} \wp'(z) \right), \frac{1}{2\wp(z)} \left(1 + 3^{-1/2} \wp'(z) \right) \right)$$

es un biholomorfismo entre las dos curvas elípticas. Entonces por la propiedad de levantamiento de cubrientes cualquier par de funciones F y G que son meromorfas en \mathbb{C} y satisfacen (6) se pueden expresar de la siguiente forma:

$$(9) \quad F = \frac{1}{2\wp(\alpha)} \left(1 - 3^{-1/2} \wp'(\alpha) \right), \quad G = \frac{1}{2\wp(\alpha)} \left(1 + 3^{-1/2} \wp'(\alpha) \right),$$

donde α es una función entera.

En este trabajo damos una prueba alternativa de este teorema usando técnicas de superficies de Riemann. Para ello encontramos un biholomorfismo explícito entre la cúbica de Fermat y su forma normal de Weierstrass. Esta prueba podría clarificar la naturaleza de las fórmulas en (9), que no son obvias. Con esta técnica obtenemos otras fórmulas análogas (vea (15) y (16)). Dicha prueba la encontramos independientemente para responder a la conjetura de Gross, ya que desconocíamos si la conjetura ya había sido resuelta.

En la Sección 1 recordamos algunas propiedades básicas de las curvas elípticas; calculamos la forma normal de Weierstrass de la cúbica de Fermat y el correspondiente biholomorfismo. En la Sección 2 probamos el teorema principal. Por último, en la última sección damos algunas observaciones sobre curvas de Fermat de grados superiores.

Recientemente, N. Steinmetz le comunicó al autor otra prueba de la conjetura de Gross en [Ste17] (§2.3.5 pp. 56-57) utilizando teoría de Nevanlinna. El probó el siguiente teorema sin hacer referencia al Teorema de Uniformización:

Teorema 15 (Steinmetz). *Supongamos que funciones meromorfas no constantes f y g parametrizan la curva algebraica*

$$F: x^n + y^m = 1 \quad (n \geq m \geq 2)$$

con $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$. Entonces (m, n) es igual a $(4, 2)$, $(3, 3)$ ó $(3, 2)$. En cualquier caso f y g están dadas por

$$f = E \circ \psi \quad y \quad g = {}^{m-1}\sqrt{E'} \circ \psi,$$

donde E es una función elíptica que satisface

$$E'^2 = 1 - E^4, \quad E'^3 = (1 - E^3)^2 \quad y \quad E'^2 = 1 - E^3,$$

respectivamente, y ψ es cualquier función entera no constante.

1.2. La forma normal de Weierstrass de la cúbica de Fermat

1.2.1. Preliminares de curvas elípticas. Una curva elíptica compleja X es por definición una superficie de Riemann compacta de género 1. La fórmula de Plücker nos dice que una curva proyectiva no singular de grado 3 en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ es una curva elíptica. El recíproco también es cierto, a continuación lo discutimos brevemente.

El *Teorema de Uniformización* dice que cualquier superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente equivalente a una de las siguientes tres superficies de Riemann: la esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$, el plano complejo \mathbb{C} , o el disco unitario abierto \mathbb{D} . Este teorema combinado con la teoría de espacios cubrientes nos da una clasificación de todas las superficies de Riemann: cualquier superficie de Riemann X es conformemente equivalente a un cociente \tilde{X}/G , donde \tilde{X} es el cubriente universal holomorfo de X (por lo tanto es conformemente equivalente a una de las tres superficies de Riemann que mencionamos anteriormente) y G es un subgrupo del grupo de automorfismos holomorfos de \tilde{X} que actúa en él de forma libre y propiamente discontinua.

En particular, cuando la superficie de Riemann es de género 1 su cubriente universal holomorfo es el plano complejo, entonces X es conformemente equivalente a \mathbb{C}/Λ , para alguna retícula $\Lambda \subset \mathbb{C}$.

Recuerde que una función elíptica $f: \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es por definición una función meromorfa doblemente periódica, es decir, existe una retícula $\Lambda \subset \mathbb{C}$ generada por dos elementos $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$, linealmente independientes sobre \mathbb{R} , tal que $f(z + \omega) = f(z)$, para cualquier $\omega \in \Lambda$. Luego, la función f desciende a una función meromorfa sobre la curva elíptica \mathbb{C}/Λ . Por abuso de notación a veces también denotaremos por f a la función inducida en el cociente.

Para una introducción a la teoría de superficies de Riemann y un prueba del Teorema de Uniformización consulte [For81] §3.27.

La homogeneización del polinomio cúbico

$$(10) \quad y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3,$$

define una curva no singular en \mathbb{CP}^2 si y sólo si el discriminante $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ no se anula. Por lo tanto, (10) define una curva elíptica si y sólo si $\Delta \neq 0$. Una *forma normal de Weierstrass* de una curva elíptica X es una curva elíptica conformemente equivalente a X dada por ecuación de la forma (10).

Recuerde también que dada una retícula $\Lambda \subset \mathbb{C}$ tenemos asociada su función elíptica de Weierstrass \wp o \wp_Λ dada por la serie:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda^*} \left(\frac{1}{(z + \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Esta función satisface la ecuación diferencial

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

donde g_2 y g_3 son constantes, definidas como:

$$g_2 = 60 \sum_{\omega \in \Lambda^*} \frac{1}{\omega^4}, \quad g_3 = 140 \sum_{\omega \in \Lambda^*} \frac{1}{\omega^6}.$$

Las cuales satisfacen $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$. Entonces \wp induce el mapeo $\Psi: \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow E$, de \mathbb{C}/Λ a la curva elíptica $E: y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$, que en coordenadas afines está dada por la fórmula:

$$(11) \quad \Psi(z) = (\wp(z), \wp'(z)).$$

El mapeo Ψ es un biholomorfismo que manda Λ a el punto al infinito $[0 : 1 : 0]$.

De lo anterior y del Teorema de Uniformización podemos concluir que cualquier curva elíptica tiene una forma normal de Weierstrass.

También se puede probar que dada una ecuación no singular (10), existe una retícula Λ con las mismas constantes g_2 y g_3 . Para un estudio más detallado consulte [Sil09, p.176].

1.2.2. El cálculo de la forma normal de Weierstrass de la cúbica de Fermat. Aunque en general es difícil calcular la forma normal de Weierstrass, partiendo de una superficie de Riemann compacta de género 1, en nuestro caso es relativamente fácil, escogiendo los cambios de variables adecuados. Puesto que este proceso se aplicará a curvas de Fermat de grados superiores en la Sección 1.4 lo describiremos paso a paso:

1. Cambiamos (x, y) por $(x - y, x + y)$ para eliminar el término cúbico y^3 , obteniendo:

$$E_1: 2x^3 + 6xy^2 = 1.$$

2. Cambiamos (x, y) por $(1/x, y/x)$ para obtener:

$$E_2: 2 + 6y^2 = x^3.$$

3. En este punto podríamos usar cualquier cambio de variables para que el coeficiente de y^2 sea 1 y el coeficiente de x^3 sea 4, por ejemplo con $(x, y/\sqrt{24})$ obtenemos las constantes $g_2 = 0$ y $g_3 = 8$:

$$E_3: y^2 = 4x^3 - 8.$$

Observe que tenemos un mapeo de la curva obtenida después del cambio de variable a la curva original (antes de hacer el cambio de variable). Por ejemplo, en paso 1 el mapeo $E_1 \rightarrow F_3$, está dado por $(x, y) \mapsto (x - y, x + y)$. Entonces, los mapeos asociados a los cambios de variables en cada uno de los pasos anteriores son:

$$(12) \quad \begin{array}{ccc} E_3 \rightarrow E_2 & E_2 \rightarrow E_1 & E_1 \rightarrow F_3 \\ (x, y) \mapsto \left(x, \frac{y}{\sqrt{24}}\right), & (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right), & (x, y) \mapsto (x - y, x + y). \end{array}$$

Los mapeos inversos (en el orden contrario, respectivamente) son:

$$(13) \quad \begin{array}{ccc} F_3 \rightarrow E_1 & E_1 \rightarrow E_2 & E_2 \rightarrow E_3 \\ (x, y) \mapsto \left(\frac{y+x}{2}, \frac{y-x}{2}\right), & (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right), & (x, y) \mapsto (x, \sqrt{24}y). \end{array}$$

Entonces en cada paso tenemos un isomorfismo birracional entre estas curvas algebraicas no singulares, por lo tanto un biholomorfismo entre las superficies de Riemann que definen. Luego, si componemos los mapeos en (13) y (12), respectivamente, obtenemos los biholomorfismos $\Phi: F_3 \rightarrow E_3$ y $\Phi^{-1}: E_3 \rightarrow F_3$:

$$(14) \quad \begin{aligned} \Phi(x, y) &= \left(\frac{2}{y+x}, \sqrt{24}\frac{y-x}{y+x}\right), \\ \Phi^{-1}(x, y) &= \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{\sqrt{24}x}, \frac{1}{x} + \frac{y}{\sqrt{24}x}\right). \end{aligned}$$

1.3. Demostración del Teorema de Baker-Gross

De las fórmulas en (14) el teorema de Baker-Gross se sigue fácilmente. Considere Λ la retícula asociada a $g_2 = 0$ y $g_3 = 8$. Sea $\Psi: \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow E_3$ definida en (11), entonces la composición $\Phi^{-1} \circ \Psi: \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow F_3$ es un biholomorfismo,

$$(15) \quad \Phi^{-1} \circ \Psi(z) = \left(\frac{1}{\wp(z)} - \frac{1}{\sqrt{24}} \frac{\wp'(z)}{\wp(z)}, \frac{1}{\wp(z)} + \frac{1}{\sqrt{24}} \frac{\wp'(z)}{\wp(z)}\right).$$

donde \wp satisface la ecuación $(\wp')^2 = 4\wp^3 - 8$.

Si continuamos el paso 3 aplicando el cambio de variable $(2x, \sqrt{2^3}y)$ obtenemos la curva $E'_3: y^2 = 4x^3 - 1$ y el mapeo $\bar{\Phi} = \Phi^{-1}(2x, \sqrt{2^3}y): E'_3 \rightarrow$

F_3

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}(x, y) &= \Phi^{-1}(2x, \sqrt{2^3}y) \\ &= \left(\frac{1}{2x} - \frac{\sqrt{2^3}y}{2\sqrt{24}x}, \frac{1}{2x} + \frac{\sqrt{2^3}y}{2\sqrt{24}x} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2x} \left(1 - \frac{y}{\sqrt{3}x} \right), \frac{1}{2x} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{3}x} \right) \right).\end{aligned}$$

Tomemos Λ' , asociada a $g_2 = 0$ y $g_3 = 1$, y $\Psi' : \mathbb{C}/\Lambda' \rightarrow E'_3$ como en (11). Al componer estos dos isomorfismos obtenemos el biholomorfismo buscado en (8) $\bar{\Phi} \circ \Psi' : \mathbb{C}/\Lambda' \rightarrow F_3$:

$$\bar{\Phi} \circ \Psi'(z) = \left(\frac{1}{2\wp(z)} \left(1 - 3^{-1/2}\wp'(z) \right), \frac{1}{2\wp(z)} \left(1 + 3^{-1/2}\wp'(z) \right) \right),$$

donde la función elíptica de Weierstrass \wp satisface en este caso $(\wp')^2 = 4\wp^3 - 1$.

Por otra parte, sea $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda'$ la proyección natural al cociente, este mapeo es un cubriente holomorfo no ramificado, entonces el mapeo $\bar{\Phi} \circ \Psi' \circ \pi : \mathbb{C} \rightarrow F_3$ también es un cubriente holomorfo no ramificado.

Si F y G son una solución meromorfa de la cúbica de Fermat, el mapeo $\phi : \mathbb{C} \rightarrow F_3$ con $\phi(z) = (F(z), G(z))$ define un mapeo holomorfo. Puesto que \mathbb{C} es simplemente conexo, ϕ tiene un levantamiento holomorfo $\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ con respecto a este cubriente, *i.e.*, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{C} \\ & \nearrow \alpha & \downarrow \bar{\Phi} \circ \Psi' \circ \pi \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\phi} & F_3 \end{array} .$$

Componiendo con α obtenemos

$$F = \frac{1}{2\wp(\alpha)} \left(1 - 3^{-1/2}\wp'(\alpha) \right), \quad G = \frac{1}{2\wp(\alpha)} \left(1 + 3^{-1/2}\wp'(\alpha) \right),$$

que son las fórmulas deseadas. Esto prueba el teorema.

Observación 16. Si usamos el mapeo $\Phi^{-1} \circ \Psi : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow F_3$ de la ecuación (15) en lugar de $\bar{\Phi} \circ \Psi'$ en el argumento anterior, obtenemos las siguientes ecuaciones

$$(16) \quad F = \frac{1}{\wp(\alpha)} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{24}}\wp'(\alpha) \right), \quad G = \frac{1}{\wp(\alpha)} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{24}}\wp'(\alpha) \right),$$

donde \wp satisface en este caso $(\wp')^2 = 4\wp^3 - 8$.

Podríamos obtener otras soluciones análogas dependiendo del factor que elijamos en el paso 3, pero siempre podemos recuperar una de la otra por este proceso.

1.4. Algunas observaciones sobre curvas de Fermat de grados superiores.

Finalizaremos dando una aplicación del proceso descrito en 1.2.2 a curvas de Fermat de grado mayor que 3 (vea (17)). Cuando la curva es de grado impar el proceso puede aplicarse directamente, pero cuando el grado es par haremos una ligera modificación al paso 1. De las ecuaciones que se obtienen damos unas funciones meromorfas sobre estas curvas de Fermat.

1.4.1. El caso impar. Los cambios de variables en los pasos 1 y 2 descritos en 1.2.2 pueden aplicarse a cualquier curva de Fermat,

$$(17) \quad F_n: x^n + y^n = 1,$$

pero en el caso de n impar obtenemos la siguiente fórmula para la curva E_2 :

$$(18) \quad E_2: 2 + 2 \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k} y^{2k} = x^n.$$

Como no modificamos los pasos 1 y 2 obtenemos el mismo isomorfismo $\Phi: F_n \rightarrow E_2$ como en (14) pero sin el paso 3, luego se sigue la siguiente fórmula:

$$(19) \quad \begin{aligned} \Phi(x, y) &= \left(\frac{2}{y+x}, \frac{y-x}{y+x} \right), \\ \Phi^{-1}(x, y) &= \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{x}, \frac{1}{x} + \frac{y}{x} \right). \end{aligned}$$

Observe que E_2 tiene una involución holomorfa natural I dada por $I(x, y) = (x, -y)$. Se puede verificar fácilmente que I es conjugado, mediante Φ , a la involución canónica de F_n , $\bar{I}(x, y) = (y, x)$, *i.e.*, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} F_3 & \xrightarrow{\bar{I}} & F_3 \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ E_2 & \xrightarrow{I} & E_2 \end{array} .$$

Note que la proyección en la primera coordenada en E_2 es una función meromorfa de grado $n-1$, entonces componiendo con Φ obtenemos la función meromorfa $2/(y+x)$ sobre F_n de grado $n-1$. Por ejemplo en el caso $n=3$ obtenemos una función meromorfa de grado 2 sobre la curva elíptica F_3 .

1.4.2. El caso par. Se pueden obtener fórmulas similares en este caso, sólo que en el paso 1 haremos el cambio de variable $(x + \omega y, x + y)$ en lugar de $(x - y, x + y)$, donde ω es una raíz de $x^n = -1$, los demás pasos no los alteramos en el proceso. Al hacer los cálculos obtenemos la siguiente ecuación:

$$E_2: 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (1 + \omega^k) y^k = x^n,$$

y $\Phi : F_n \rightarrow E_2$ resulta

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \left(\frac{\omega - 1}{\omega y - x}, \frac{x - y}{\omega y - x} \right), \\ \Phi^{-1}(x, y) &= \left(\frac{1}{x} + \omega \frac{y}{x}, \frac{1}{x} + \frac{y}{x} \right). \end{aligned}$$

Análogamente, el mapeo $(\omega - 1)/(\omega y - x)$ es una función meromorfa de grado $n - 1$ sobre la curva de Fermat F_n , para n par. Con esto finalizamos esta discusión.

Curvas elípticas y conjuntos de cuatro puntos en la esfera de Riemann

2.1. Introducción

A lo largo de este capítulo llamaremos *curva elíptica (compleja)* a una superficie de Riemann compacta X de género 1. Si $\Lambda \subset \mathbb{C}$ es una retícula, entonces el espacio cociente $T = \mathbb{C}/\Lambda$ es una superficie de Riemann compacta de género 1. Sabemos por la teoría de Weierstrass que T es conformemente equivalente a una curva elíptica dada en la siguiente forma:

$$(20) \quad E: y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3, \quad \text{con } \Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0,$$

llamada una *forma normal de Weierstrass*. Por otro lado, por el *Teorema de Uniformización* cualquier curva elíptica X es conformemente equivalente a $T = \mathbb{C}/\Lambda$, para alguna retícula Λ de \mathbb{C} . Con lo cual se sigue que toda curva elíptica X es conformemente equivalente a una en la forma normal de Weierstrass.

Para fines prácticos a veces es necesario expresar una curva elíptica en esta forma normal, ya que posiblemente esté dada por otra ecuación algebraica, no necesariamente cúbica, más aún quizá no tenemos siquiera la ecuación. En el mejor de los casos, teniendo la ecuación que lo define, podríamos intuir los cambios de variables para lograr expresarlo en esta forma normal. Pero en general no es un proceso fácil.

Un método diferente para encontrar la forma normal de Weierstrass (20), sin usar cambios de variables, requiere encontrar una función meromorfa de grado 2 sobre la curva elíptica. Por teoría de superficies de Riemann dicha función siempre existe (vea [For81] Cor. 16.12). Además, en muchos casos esta función no es tan complicada de encontrar. Por la fórmula de Riemann-Hurwitz este mapeo tiene cuatro valores críticos, sin pérdida de generalidad podemos suponer que uno de ellos es ∞ y los demás son números complejos $\{z_1, z_2, z_3\}$. Sea C el centroide de los puntos z_i y sea $e_i = z_i - C$. Con estos puntos podemos calcular las constantes g_2 y g_3 de (20), serán los coeficientes del polinomio

$$4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3).$$

Esto nos motivó al estudio de otras formas normales clásicas de curvas elípticas mediante este método. De forma más precisa, queremos entender la relación entre configuraciones de conjuntos de 4 puntos en la esfera con curvas elípticas dadas en alguna forma normal, mediante funciones meromorfas de grado 2. En este contexto damos una prueba del siguiente teorema de Edwards [Edw07]:

Teorema 17. *Cualquier curva elíptica X es isomorfa a una curva elíptica dada por una ecuación de la forma:*

$$y^2 = (x^2 - a^2)(a^2x^2 - 1), \quad \text{con } a^4 \neq 1 \text{ y } a \neq 0,$$

la cual a su vez es isomorfa a la curva elíptica en la forma normal de Edwards:

$$x^2 + y^2 = a^2 + a^2x^2y^2,$$

e isomorfa a la curva elíptica en la forma normal de Jacobi:

$$y^2 = (x^2 - 1)(k^2x^2 - 1),$$

con $k = a^2$.

Uno de nuestros principales resultados es una prueba alternativa de que cualquier curva elíptica tiene una forma normal de Hesse:

Teorema 18. *Cualquier curva elíptica X es isomorfa a una curva elíptica en la forma normal de Hesse:*

$$(21) \quad x^3 + y^3 + 1 = 3kxy, \quad k \in \mathbb{C} \text{ con } k^3 \neq 1,$$

que a su vez es isomorfa a la curva elíptica en la siguiente forma:

$$(22) \quad y^2 = (x + k)(x^3 - 3kx^2 + 4), \quad k \in \mathbb{C} \text{ con } k^3 \neq 1.$$

Nuestra prueba se basa en usar la función $x + y$ como función meromorfa de grado 2 sobre la cúbica de Hesse (21), con la cual probamos que su invariante J es una función racional (variando k como un parámetro en el

móduli). Desafortunadamente, nuestro método no nos permite calcular dicha función racional explícitamente, según [BM17] y [Pop09] esta función debe ser de grado 12 y dado por la siguiente fórmula:

$$\varphi(k) = \frac{27}{4} \left(\frac{k(k^3 + 8)}{4(k^3 - 1)} \right)^3.$$

En [BM17] Milnor y Bonifant dan una prueba con otro método. En dicho artículo los autores comentan que el resultado aparece en el famoso libro de Heinrich Weber *Lehrbuch der Algebra* publicado en 1898 (vea [Web98]).

La forma normal de Hesse ha sido usado para el estudio de la dinámica del Hessiano en el móduli de curvas elípticas (vea por ejemplo, [Pop09]). Para una discusión detalla de algunas propiedades de las formas normales mencionadas anteriormente vea [Hus02].

Para encontrar la forma de Legendre de una curva elíptica, desde el punto de vista de los cuatro puntos, damos una construcción geométrica de la razón cruzada de un conjunto ordenado de cuatro puntos en la esfera de Riemann. La construcción se da en términos de los ángulos de triángulos curvilíneos en la esfera de Riemann (ver la Figura 4 y la Figura 5). Aplicamos nuestra construcción en el cálculo de una forma normal de Weierstrass y una forma de Legendre de la cúbica de Fermat (vea el Ejemplo 28 y el Ejemplo 30).

2.2. Correspondencia entre \mathcal{M} y conjuntos de cuatro puntos

Denotemos por \mathcal{M} el *moduli de curvas elípticas*, *i.e.*, el conjunto de clases de isomorfismo de curvas elípticas, módulo biholomorfismo de superficies de Riemann.

Cualquier curva elíptica admite una función meromorfa de grado 2, y por la fórmula de Riemann-Hurwitz este mapeo tiene cuatro valores críticos. Recíprocamente, dados cuatro puntos en la esfera de Riemann existe una curva elíptica con una función meromorfa de grado 2 con valores críticos en dichos puntos. De hecho esta correspondencia es uno a uno en las clases de equivalencia (vea [Don11, §6.3.2]):

Teorema 19. *La correspondencia descrita anteriormente establece una biyección entre \mathcal{M} y conjuntos de cuatro puntos en la esfera de Riemann, módulo transformaciones de Möbius.*

Observación 20. A lo largo de este trabajo tomaremos la orientación canónica del plano complejo \mathbb{C} , la orientación positiva es al contrario de las manecillas del reloj.

2.2.1. La razón cruzada y conjuntos de tres puntos en el plano.

Recordemos que la razón cruzada $\chi(z_1, z_2, z_3, z_4)$ de una tetrada de puntos (z_1, z_2, z_3, z_4) en la esfera de Riemann es el valor $\mu(z_4)$, donde μ es la única transformación de Möbius que manda ordenadamente la terna (z_1, z_2, z_3) en la terna $(0, 1, \infty)$. Cuando los cuatro puntos están en el plano complejo la razón cruzada tiene la siguiente fórmula:

$$(23) \quad \chi(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_4 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}.$$

Tenemos esta pequeña observación:

Lema 21. Supongamos que $\{z_1, z_2, z_3, \infty\}$ y $\{w_1, w_2, w_3, \infty\}$ son dos conjuntos no ordenados de cuatro puntos en la esfera de Riemann que son equivalentes módulo una transformación de Möbius, entonces existe una transformación afín $az + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$, que mapea un conjunto en el otro.

Demostración. Sea $\mu(z)$ una transformación de Möbius que manda el conjunto $\{z_1, z_2, z_3, \infty\}$ a el conjunto $\{w_1, w_2, w_3, \infty\}$. Si μ ya fija ∞ no hay nada que hacer.

Si $\mu(\infty) = w_{i_0}$, podemos tomar la transformación de Möbius T que intercambia ∞ con w_{i_0} e intercambia los otros dos puntos. Tales transformaciones existen porque este tipo de permutaciones no cambian las razones cruzadas. Entonces la transformación afín buscada es $T \circ \mu$. \square

El Lema 21 tiene interesantes consecuencias. Primero, puesto que podemos mandar cualquier punto a ∞ por una transformación de Möbius, se sigue directamente del Lema 21 y del Teorema 19 el siguiente corolario:

Corolario 22. Existe una biyección entre \mathcal{M} y los conjuntos de tres puntos en el plano complejo \mathbb{C} módulo transformaciones afines de \mathbb{C} .

Observación 23. En lo que sigue asumiremos que nuestros puntos están en posición general, *i.e.*, los tres puntos no son colineales; también supondremos que el triángulo formado por estos puntos está orientado positivamente.

Diremos que dos conjuntos de tres puntos en el plano complejo son *equivalentes* si existe un mapeo afín $az + b$ que mapea un conjunto en el otro.

Recordemos que, por definición, dos triángulos son similares si tienen los mismos ángulos. Además, dos triángulos (orientados) son similares si y sólo si hay una transformación afín $az + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$, que mapea un triángulo en el otro. Entonces del Corolario 22 se sigue que dos conjuntos de tres puntos son equivalentes si y sólo si sus triángulos orientados son similares.

De la discusión anterior se sigue la siguiente proposición:

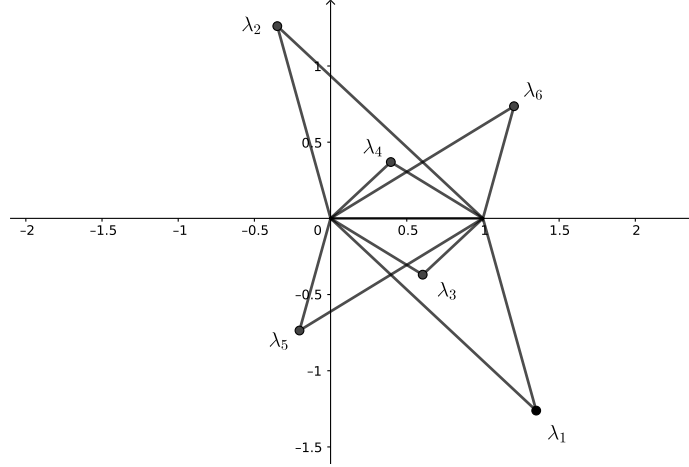


Figura 2. Seis triángulos similares que representan la misma razón cruzada.

Proposición 24. Sean z_1, z_2, z_3 tres puntos no colineales en el plano complejo. El número λ es una razón cruzada del conjunto de cuatro puntos $\{z_1, z_2, z_3, \infty\}$ si y sólo si el triángulo orientado $\{0, 1, \lambda\}$ es similar al triángulo orientado $\{z_1, z_2, z_3\}$. Por lo tanto, para cada conjunto de cuatro puntos $\{z_1, z_2, z_3, \infty\}$ existen genéricamente seis razones cruzadas (vea la Figura 2).

Veremos en la Sección 2.5 que para puntos no colineales la única excepción es cuando el triángulo orientado $\{z_1, z_2, z_3\}$ es equilátero. Las razones cruzadas equivalentes a λ se muestran en (28).

La prueba del Lema 21 nos dice como construir una razón cruzada con un orden en particular.

Proposición 25. Sean z_1, z_2, z_3 tres puntos no colineales en el plano complejo que inducen un triángulo con orientación positiva. Si los ángulos de los triángulos son α, β y γ , respectivamente, entonces las razones cruzadas $\lambda_1 = \chi(z_1, z_2, z_3, \infty)$ y $\lambda_2 = \chi(z_1, z_2, \infty, z_3)$ se obtienen por medio de la construcción geométrica ilustrada en la Figura 3.

Para encontrar, geoméricamente, las razones cruzadas de un conjunto de cuatro puntos del plano complejo en posición general necesitamos encontrar los ángulos de ciertos triángulos curvilíneos, dicha configuración será llamada la *forma* de los cuatro puntos. A continuación explicamos la construcción.

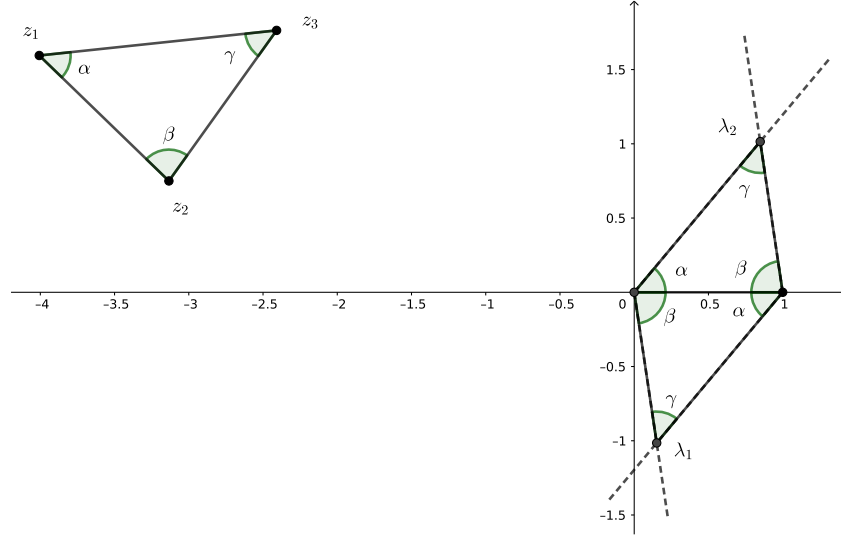


Figura 3. Considere el triángulo con vértices en z_1, z_2 y z_3 , con ángulos α, β y γ como indica la figura. Entonces, las razones cruzadas $\lambda_1 = \chi(z_1, z_2, z_3, \infty)$ y $\lambda_2 = \chi(z_1, z_2, \infty, z_3)$ pueden construirse geoméricamente como los puntos de intersección de las semirectas indicadas con líneas punteadas que pasan por 0 y por 1 con ángulos α y β , respectivamente, como en la figura. Las demás razones cruzadas se construyen análogamente.

2.2.2. La forma de un conjunto de cuatro puntos en el plano complejo. Asumiremos que los conjuntos de 4 puntos que tratamos están en posición general, *i.e.* no están todos en un círculo o en una recta.

Sea $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ un conjunto de cuatro puntos en el plano complejo. Sabemos que por cada tres puntos existe exactamente un círculo que pasa por ellos, luego en total tenemos 4 círculos asociados a estos puntos. Considere los triángulos curvilíneos formados por arcos de estos círculos y cuyos vértices están en el conjunto $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ (vea la Figura 4) (suponemos que están orientados positivamente).

Los cuatro triángulos curvilíneos tienen los mismos ángulos: para esto observe que, como en el Lema 21, que las permutaciones de la forma $2+2$, *i.e.*, permutaciones que son productos de dos trasposiciones no cambian la razón cruzada, entonces existe una transformación de Möbius que traspone dos parejas del conjunto de cuatro puntos. Note que este tipo de transformaciones forma un grupo isomorfo al grupo de Klein. Puesto que

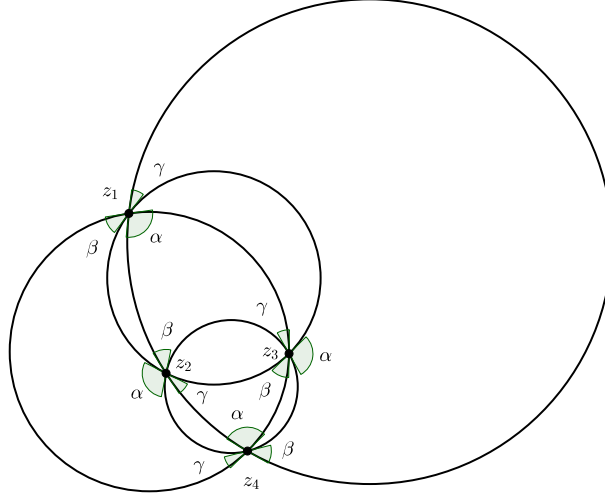


Figura 4. Configuración de triángulos curvilíneos asociada al conjunto de cuatro puntos en el plano complejo.

las transformaciones de Möbius mapean círculos en círculos conformemente, preservando la orientación, dicho grupo actúa en los cuatro triángulos curvilíneos.

Del último argumento se sigue también que dos conjuntos de cuatro puntos en \mathbb{C} que son equivalentes tienen triángulos curvilíneos con los mismos ángulos.

También, por un argumento análogo al anterior podemos probar el caso cuando uno de los puntos es ∞ . Sólo que en este caso permitiremos círculos generalizados (rectas en el plano con el punto al infinito) que pasan por tres puntos del conjunto de cuatro puntos: uno de los triángulos curvilíneos es un triángulo euclidiano y los otros triángulos tendrán un arco y dos semirectas (vea la Figura 5). El triángulo euclidiano positivamente orientado induce una orientación positiva en los triángulos con un vértice al infinito.

Recíprocamente, si dos conjuntos de cuatro puntos tienen una configuración de triángulos con los mismos ángulos, entonces dichos conjuntos tienen que ser equivalentes, módulo una transformación de Möbius. Para probar esto podemos mandar un punto de cada conjunto al infinito y aplicamos el resultado del caso euclidiano.

Lo anterior nos permite definir la *forma* de un conjunto de cuatro puntos en la esfera de Riemann como la configuración de los 4 triángulos curvilíneos con vértices en el conjunto de cuatro puntos obtenidos en la construcción anterior. Resumimos la discusión en el siguiente teorema:

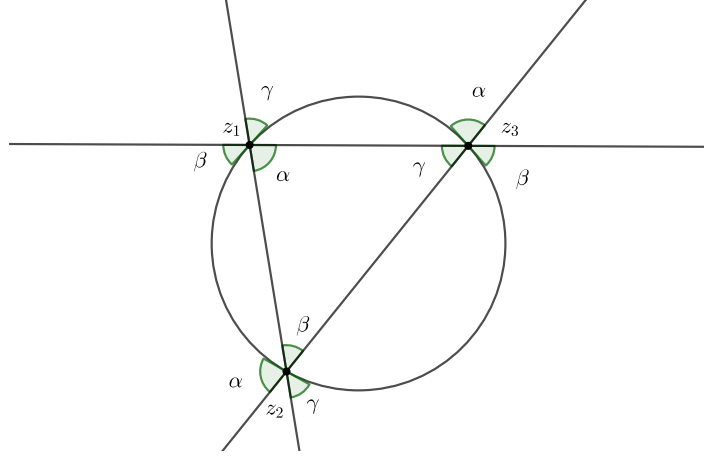


Figura 5. Forma asociada a cuatro puntos en la esfera de Riemann con un punto al infinito.

Teorema 26. *Dos conjuntos de cuatro puntos de la esfera de Riemann en posición general son equivalentes módulo una transformación de Möbius si y sólo si sus formas tienen los mismo ángulos (vea la Figura 4 y la Figura 5).*

Entonces, la razón cruzada de cuatro puntos en el plano complejo puede encontrarse geoméricamente con una construcción análoga a 2.2.1:

Proposición 27. *Sea $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ un conjunto de cuatro puntos en el plano complejo en posición general. Considere el triángulo curvilíneo con vértices en z_1, z_2 y z_3 con ángulos α, β, γ , respectivamente. Entonces las razones cruzadas $\lambda_1 = \chi(z_1, z_2, z_3, z_4)$ y $\lambda_2 = \chi(z_1, z_2, z_4, z_3)$ pueden encontrarse mediante la construcción geométrica ilustrada en la Figura 6.*

2.3. Forma normal de Legendre y de Weierstrass.

Recordemos que si $p(x)$ es un polinomio cúbico con coeficientes complejos sin raíces múltiples, tenemos asociada la superficie de Riemann $E: y^2 = p(x)$, la cual tiene a la proyección en la primera coordenada como función meromorfa de grado 2 con valores críticos las raíces del polinomio $p(x)$ e ∞ (see [For81, 8.10]). Entonces, por el Corolario 22 cualquier curva elíptica es isomorfa a una dada de esta forma.

Por la discusión de la sección anterior, dos curvas elípticas $E_1: y^2 = p(x)$, $E_2: y^2 = q(x)$ serán isomorfas si y sólo si las raíces de $p(x)$ y $q(x)$ son equivalentes, módulo una transformación afín. Cuando las raíces formen

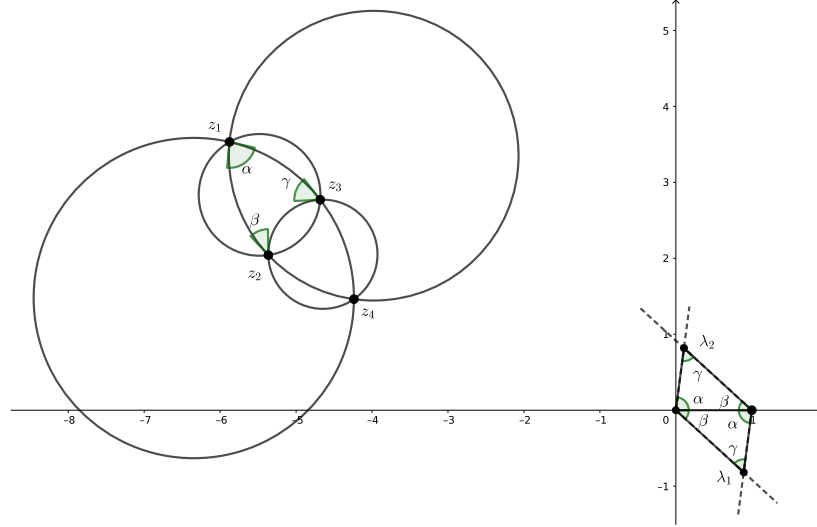


Figura 6. Considere el triángulo curvilíneo que tiene sus vértices en z_1, z_2 y z_3 con ángulos α, β y γ , como indica la figura. Entonces, las razones cruzadas $\lambda_1 = \chi(z_1, z_2, z_3, z_4)$ y $\lambda_2 = \chi(z_1, z_2, z_4, z_3)$ pueden construirse geoméricamente como los puntos de intersección de las semirectas indicadas con líneas punteadas que pasan por 0 y por 1 con ángulos α y β , respectivamente. Las demás razones cruzadas se construyen análogamente.

triángulos no degenerados esto es equivalente a que los triángulos formados por los vértices sean similares.

Dados cuatro puntos asociados a una curva elíptica, podemos tomar su razón cruzada, luego la curva elíptica es isomorfa a una de la forma:

$$E: y^2 = x(x-1)(x-\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} - \{0, 1\}.$$

Esta es llamada una *forma de Legendre* de una curva elíptica. Entonces dos de tales curvas elípticas $E_1: y^2 = x(x-1)(x-\lambda_1)$ y $E_2: y^2 = x(x-1)(x-\lambda_2)$ son isomorfas si y sólo si λ_1 y λ_2 son razones cruzadas equivalentes. Geométricamente λ_1 y λ_2 son equivalentes si y sólo si los triángulos orientados $0, 1, \lambda_1$ y $0, 1, \lambda_2$ son similares.

Otra forma normal es obtenida al considerar el centroide C de los tres puntos $\{z_1, z_2, z_3\}$ en el plano complejo y los tres puntos $e_i = z_i - C$, con $i = 1, 2, 3$. Los puntos e_i ahora tienen su centroide en 0, luego el polinomio $4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)$ tiene la forma $4x^3 - g_2x - g_3$ para algunas constantes complejas g_2, g_3 . Por lo tanto la curva curva elíptica es isomorfa a la siguiente

curva:

$$(24) \quad E: y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3, \quad \Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0,$$

donde $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ es el discriminante del polinomio cúbico. Recuerde que $\Delta \neq 0$ si y sólo si el polinomio cúbico tiene distintas raíces. La curva (24) es llamada una *forma normal de Weierstrass*.

Por la interpretación geométrica que hemos comentado, podemos pensar a esta forma normal como conjuntos de tres puntos en \mathbb{C} con centroide en 0. Como sabemos, el centroide de tres puntos puede encontrarse geométricamente como la intersección de las tres medianas.

Puesto que las transformaciones afines preservan centroides, y dado que el centroide es 0, se sigue que dos curvas elípticas en la forma normal de Weierstrass son isomorfas si y sólo si las raíces de los polinomios cúbicos que las definen difieren por un factor constante complejo. Calculando coeficientes se sigue que dos curvas elípticas $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ y $y^2 = 4x^3 - g'_2x - g'_3$ son conformemente equivalentes si y sólo si existe una constante α tal que $g_2 = \alpha^2 g'_2$ y $g_3 = \alpha^3 g'_3$.

2.3.1. Algunos ejemplos. Para ilustrar la construcción anterior damos un par de ejemplos. Primero calcularemos la forma normal de Weierstrass y de Legendre de la cúbica de Fermat sin usar cambios de variables:

Ejemplo 28. La cúbica de Fermat es una curva elíptica dada por la ecuación $x^3 + y^3 = 1$. Podemos verificar que la función meromorfa $x + y$ es de grado 2 con valores críticos en 0 y las raíces cúbicas de 4. Si componemos esta función con la transformación $1/z$, obtenemos una función con valores críticos en las raíces cúbicas de $1/4$ y en ∞ .

En este caso el centroide ya está en 0, por lo tanto una forma normal de Weierstrass es $y^2 = 4x^3 - 1$.

Además, puesto que los valores críticos en \mathbb{C} forman un triángulo equilátero, el triángulo es similar al triángulo $0, 1, -\rho$, donde $\rho = \exp(2\pi i/3)$. Luego una forma normal de Legendre de la cúbica de Fermat es $y^2 = x(x - 1)(x + \rho)$.

Para el siguiente ejemplo necesitamos hablar de curvas elípticas dadas por polinomios de grado 4. Dado un polinomio cuártico $q(x)$ con coeficientes complejos y sin raíces múltiples, tenemos asociada una superficie de Riemann $E: y^2 = q(x)$, la cual es de género 1 (vea [For81, 8.10]). Note que la proyección en la primera coordenada es una función de grado 2 con valores críticos en las raíces de $q(x)$.

Observación 29. Note que por la fórmula de Plücker la curva cuártica de género 1 $E: y^2 = p(x)$ no tiene cerradura proyectiva suave en \mathbb{CP}^2 .

Ejemplo 30. En [Ste17, §2.3.5] se considera la siguiente familia de curvas algebraicas: $F: x^n + y^m = 1$ ($n \geq m \geq 2$). Los casos $(4, 2)$, $(3, 3)$ y $(3, 2)$ definen las siguientes curvas elípticas:

$$x^4 + y^2 = 1, \quad x^3 + y^3 = 1, \quad x^3 + y^2 = 1.$$

Con nuestro método podemos ver fácilmente que las dos últimas son isomorfas y que la primera no es isomorfa a ellas. Para esto considere la proyección en la primera coordenada para la curva $(4, 2)$, ésta ramifica en las raíces cuárticas de la unidad, por lo tanto su razón cruzada es real. El segundo caso $(3, 3)$ fue calculado en el ejemplo anterior, este corresponde a un triángulo equilátero. En el tercer caso $(3, 2)$ la proyección en la primera coordenada ramifica sobre las raíces cúbicas de la unidad e ∞ , por lo tanto también corresponde a un triángulo equilátero. Luego se sigue el resultado.

2.4. Las formas normales de Jacobi y de Edwards

Recordemos que cualquier conjunto de cuatro puntos en el eje real puede mapearse por una función de Möbius a cuatro puntos simétricos con respecto a 0 con la siguiente configuración $\{a, -1/a, -a, 1/a\}$, donde $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$. Este hecho puede generalizarse a cualquier conjunto de cuatro puntos en el plano complejo de la siguiente manera: observe que para cada $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $a^4 \neq 1$, la razón cruzada

$$\varphi(a) = \chi\left(a, -\frac{1}{a}, -a, \frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^2$$

está bien definida, y como función de a es una función meromorfa en toda la esfera de Riemann, por lo tanto toma todos los valores en $\widehat{\mathbb{C}} - \{0, 1, \infty\}$ cuando $a^4 \neq 1$ y $a \neq 0$. Esto prueba que todas las curvas elípticas son isomorfas a una curva elíptica en la siguiente forma normal:

$$(25) \quad y^2 = (x^2 - a^2)(a^2x^2 - 1), \quad \text{con } a^4 \neq 1 \text{ y } a \neq 0.$$

La proyección en la primera coordenada es una función meromorfa de grado 2 cuyos valores críticos están en $\{a, -1/a, -a, 1/a\}$. Componiendo dicha función con la transformación de Möbius $\mu(z) = z/a$, obtenemos una función meromorfa de grado dos sobre la curva (25) con valores críticos en $\{1, -1/a^2, -1, 1/a^2\}$. Por lo tanto, es isomorfa a la siguiente curva elíptica:

$$(26) \quad y^2 = (x^2 - 1)(k^2x^2 - 1), \quad \text{con } k^2 \neq \pm 1 \text{ y } k \neq 0,$$

donde $k = a^2$. La ecuación (26) es llamada la forma normal de Jacobi. De hecho esta curva elíptica es isomorfa a la siguiente forma normal definida por Edwards en [Edw07]:

$$(27) \quad x^2 + y^2 = a^2 + a^2x^2y^2, \quad \text{con } a^4 \neq 1 \text{ y } a \neq 0,$$

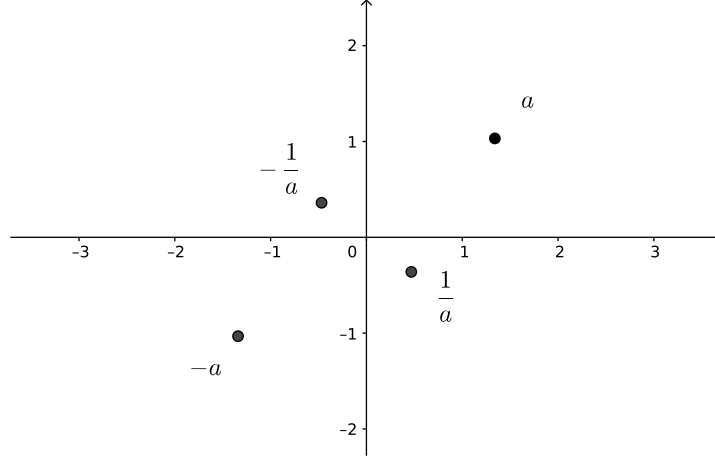


Figura 7. Una configuración de puntos para la forma normal de Edwards, correspondiente a la constante $a = 1,34023 + 1,032i$.

en este caso la proyección a la primera coordenada es de grado 2 con valores críticos igual a $\{a, -1/a, -a, 1/a\}$ (vea la Figura 7).

Resumimos la discusión anterior en el siguiente teorema:

Teorema 31. *Cualquier curva elíptica X es isomorfa a una curva elíptica dada por una ecuación de la forma:*

$$y^2 = (x^2 - a^2)(a^2x^2 - 1), \quad \text{con } a^4 \neq 1 \text{ y } a \neq 0,$$

la cual a su vez es isomorfa a la curva elíptica en la forma normal de Edwards:

$$x^2 + y^2 = a^2 + a^2x^2y^2,$$

e isomorfa a la curva elíptica en la forma normal de Jacobi:

$$y^2 = (x^2 - 1)(k^2x^2 - 1),$$

con $k = a^2$.

Para una prueba alternativa de esta equivalencia consulte [Edw07].

2.5. El invariante J y la forma normal de Hesse

Decimos que λ y $\lambda' \in \widehat{\mathbb{C}} - \{0, 1, \infty\}$ son equivalentes si los conjuntos $\{0, 1, \lambda, \infty\}$ y $\{0, 1, \lambda', \infty\}$ son Möbius-equivalentes, esto ocurre si y sólo si existe una transformación de Möbius μ que permuta $\{0, 1, \infty\}$ y satisface

$\mu(\lambda) = \lambda'$, es decir, son razones cruzadas equivalentes. Haciendo los cálculos, obtenemos que los puntos equivalentes a λ son:

$$(28) \quad \lambda, \quad \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda - 1, \quad \frac{1}{\lambda - 1}, \quad \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \quad \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

Definamos la función racional

$$(29) \quad J(\lambda) = \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2}.$$

La función J es un mapeo de grado 6 llamado el invariante J , es un invariante porque λ y λ' representan a curvas elípticas isomorfas en la forma de Legendre si y sólo si $J(\lambda) = J(\lambda')$ (nuestra definición de J es de acuerdo a [Don11, §6.3.2], la definición varía de un autor a otro por alguna constante). Entonces, el invariante J es una función bien definida en \mathcal{M} (vistas como cuatro puntos en la esfera de Riemann, módulo transformaciones de Möbius), el valor de J en un conjunto de cuatro puntos $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ se define como $J(\lambda)$, donde λ es una razón cruzada de dichos puntos.

En (30) mostramos el diagrama de ramificación del invariante J (los puntos en la parte inferior del diagrama son los valores críticos de J y los puntos de la parte superior son sus preimágenes respectivas, el peso de cada flecha indica la multiplicidad de cada punto en la fibra):

$$(30) \quad \begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ & \downarrow 2 & \\ & \infty & \end{array} & \begin{array}{ccc} 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ & \downarrow 2 & \\ & \frac{3^3}{4} & \end{array} & \begin{array}{ccc} -\rho & & -\rho^2 \\ & \downarrow 3 & \\ & 0 & \end{array} \end{array}$$

donde ρ es la raíz cúbica $\exp(2\pi i/3)$. Notemos que la cúbica de Fermat es un punto crítico de J , el cual corresponde a un triángulo equilátero. El invariante J se factoriza como la siguiente composición de funciones racionales (vea [Don11, p. 93]):

$$(31) \quad \widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{\frac{\rho z + \rho^2}{z + \rho^2}} \widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{z^3 + \frac{1}{z^3}} \widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{\frac{-3^3}{z-2}} \widehat{\mathbb{C}},$$

(la constante -3^3 en la última función de (31) difiere de la constante que aparece en [Don11, p. 93], el cual parece contener un error).

Considere la curva elíptica en la forma

$$x^3 + y^3 + 1 = 3kxy, \quad k \in \mathbb{C} \text{ con } k^3 \neq 1,$$

llamada la *forma normal de Hesse*. En el siguiente teorema daremos una prueba alternativa de que cualquier curva elíptica es isomorfa (como superficie de Riemann) a una en la forma normal de Hesse. Dicho resultado aparece en un libro publicado por Heinrich Weber en 1898 (vea [Web98]).

Como en el Ejemplo 28, tomemos la función $x+y$, este mapeo también es un mapeo de grado 2 sobre la curva elíptica anterior, con valores críticos el conjunto de cuatro puntos formado por $-k$ y las raíces del polinomio cúbico

$$z^3 - 3kz^2 + 4$$

(este polinomio tiene discriminante $\Delta = 4^2 3^3 (k^3 - 1)$, entonces por nuestra hipótesis no tiene raíces múltiples). Luego, podemos aplicar el invariante J a este conjunto de valores críticos, obteniendo una función bien definida $\varphi: (\hat{\mathbb{C}} - \{1, \rho, \rho^2, \infty\}) \rightarrow \mathbb{C}$ que depende de k .

Teorema 32. *Cualquier curva elíptica X es isomorfa a una curva elíptica en la forma normal de Hesse:*

$$(32) \quad x^3 + y^3 + 1 = 3kxy, \quad k \in \mathbb{C} \text{ con } k^3 \neq 1,$$

que a su vez es isomorfa a la curva elíptica en la siguiente forma:

$$(33) \quad y^2 = (x+k)(x^3 - 3kx^2 + 4), \quad k \in \mathbb{C} \text{ con } k^3 \neq 1.$$

Demostración. Basta probar que la función $\varphi: (\hat{\mathbb{C}} - \{1, \rho, \rho^2, \infty\}) \rightarrow \mathbb{C}$, definida anteriormente, es sobreyectiva. Ya que si suponemos que esto es cierto, dada una curva elíptica compleja X tomemos $\lambda_0 \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ tal que X es conformemente equivalente a la curva elíptica en la forma normal de Legendre $y^2 = x(x-1)(x-\lambda_0)$, luego por nuestra suposición existe $k_0 \in \mathbb{C}$ con $k_0^3 \neq 1$, tal que $\varphi(k_0) = J(\lambda_0)$, entonces λ_0 es equivalente a una de las razones cruzadas del conjunto de cuatro puntos formado por $-k_0$ y las raíces de $z^3 - 3k_0z^2 + 4$. Luego, X es conformemente equivalente a la curva elíptica $x^3 + y^3 + z^3 = 3k_0xy$, ya que sus conjuntos de 4 puntos asociados tienen razones cruzadas equivalentes (vea Teorema 19).

En lo que sigue probaremos que la función φ es sobreyectiva, de hecho que es una función racional: Puesto que las raíces de un polinomio dependen continuamente de los coeficientes, $\varphi(k)$ es una función continua. Además, es analítica en $\mathbb{C} - \{0, 1, \rho, \rho^2\}$, ya que podemos tomar localmente ramas de las ecuaciones generales de tercer grado:

$$(34) \quad z_\nu = k - \rho^\nu \alpha - \frac{1}{\rho^\nu} \frac{k^2}{\alpha}, \quad \nu = 1, 2, 3, \quad \text{donde } \alpha = \sqrt[3]{2 - k^3 + 2i\sqrt{k^3 - 1}},$$

y sustituimos z_ν en la fórmula de la razón cruzada (23), con $z_4 = -k$.

Vamos analizar que sucede en ∞ y en las raíces cúbicas de 1: si k_n es una sucesión tal que $k_n \rightarrow \rho^\nu$. Del hecho que las raíces dependan continuamente de los coeficientes se sigue que, para cada n podemos escoger un etiquetado

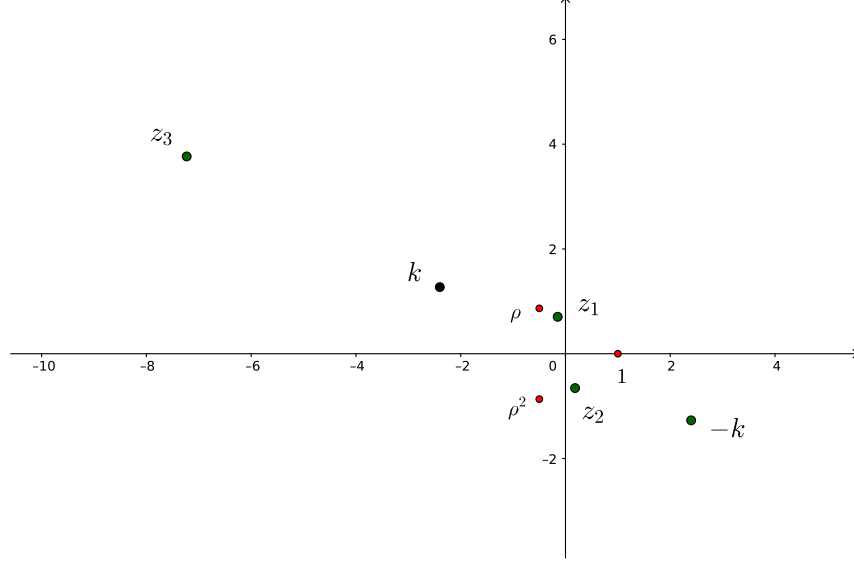


Figura 8. Una configuración de puntos para la forma normal de Hesse, correspondiente a $k = -2,39882 + 1,27189i$.

de las raíces de $z^2 - 3k_n z^2 + 4$ tal que las razones cruzadas tienden a infinito, entonces $\varphi(k_n) \rightarrow \infty$.

Por otra parte, si $k_n \rightarrow \infty$, afirmamos que $\varphi(k_n) \rightarrow \infty$. Daremos un bosquejo de la prueba: consideremos la ecuación (34), tenemos que α/k tiende a $-1, -\rho$ ó $-\rho^2$, cuando $k \rightarrow \infty$, dependiendo de la elección de la rama de la raíz cúbica en (34). Con esto podemos verificar que $\chi(z_1, z_2, z_3, -k)$ tiende a $0, 1$ ó ∞ , cuando $k \rightarrow \infty$, de acuerdo a la elección de la rama.

Entonces si para cada n tomamos $k = k_n$ en (34), se sigue que la sucesión de razones cruzadas $\chi(z_1, z_2, z_3, -k_n)$ se acumulan en un subconjunto de $\{0, 1, \infty\}$ cuando $k_n \rightarrow \infty$. En cualquiera de los casos J tiende a ∞ .

Por lo tanto, $\varphi(k)$ es una función continua en la esfera de Riemann, analítica fuera de un conjunto finito de puntos, luego por el teorema de extensión de Riemann, tiene que ser holomorfa en toda la esfera de Riemann. Por lo tanto es una función racional, cuyos polos están en ∞ y en las raíces cúbicas de 1. Esto concluye la prueba. \square

Para una prueba desde otro punto de vista consulte [BM17], [Fri02] y [Pop09]. De acuerdo a la fórmula obtenida por [Pop09] o en [BM17] la función racional $\varphi(k)$ debería de ser:

$$\varphi(k) = \frac{27}{4} \left(\frac{k(k^3 + 8)}{4(k^3 - 1)} \right)^3.$$

Triangulaciones equiláteras de superficies y funciones de Belyi

3.1. Introducción

Una función de Belyi $f: X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es por definición una función meromorfa sobre una superficie de Riemann compacta X con tres valores críticos, contenidos en $\{0, 1, \infty\}$. El *dessin d'enfant* de f es la gráfica $\mathcal{D}_f = f^{-1}([0, 1])$ cuyos vértices están en las preimágenes de 0 y de 1. Decoraremos con el símbolo \circ a las preimágenes de 0 y con el símbolo \bullet las preimágenes de 1.

El uso de las *funciones de Belyi* y de sus gráficas asociadas se remontan a los trabajos de F. Klein [Kle79], en donde se utilizan para construir cubrientes de la esfera de Riemann en sí misma con 11 hojas y grupo de monodromía $\mathrm{PSL}(2, 11)$ (vea la Figura 9). Klein llamó a dichas gráficas *Linienzüge* (polilíneas).

En 1956 A. Weil en su trabajo [Wei56] da un criterio, ahora conocido como el *Teorema de Rigidez de Weil*, que nos dice que si una curva algebraica admite una función de Belyi, entonces dicha curva está definida sobre $\overline{\mathbb{Q}}$, el campo de los números algebraicos. Posteriormente, Belyi mostró en [Bel79] con un argumento simple pero muy ingenioso que el recíproco también es cierto. Este último resultado en combinación con el resultado de Weil se conoce como el *Teorema de Belyi*.

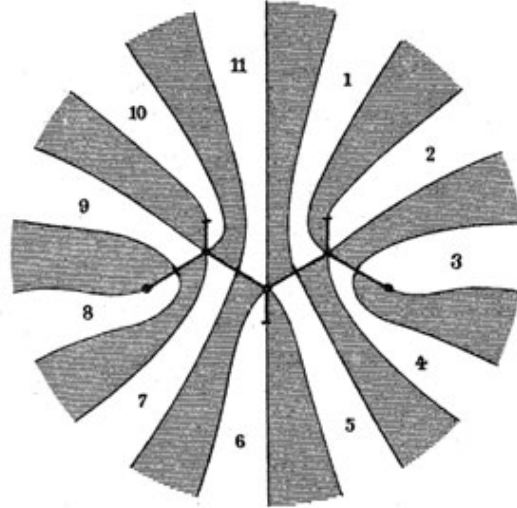


Fig. 3.

Figura 9. Ejemplo de un *Linienzüge* de Klein.

Por otra parte, dada una gráfica bicoloreada \mathcal{D} encajada en una superficie compacta orientable X , existe una estructura compleja en X y una función de Belyi $f: X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ tal que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f$ (vea [GG12] §4.2.2). El dessin \mathcal{D} (o su función de Belyi $f_{\mathcal{D}}$) determina dos permutaciones σ_0 y $\sigma_1 \in S_d$, donde d es el número de aristas de \mathcal{D} , que generan un subgrupo transitivo (fijando un etiquetado de las aristas del dessin). Dichas permutaciones generan el grupo de monodromía de $f_{\mathcal{D}}$. Recíprocamente, por teoría de cubiertas, dadas dos permutaciones σ_0 y σ_1 en S_d que generan un grupo transitivo, existe un dessin cuyas permutaciones asociadas son σ_0 y σ_1 . Esto tiene interesantes consecuencias en uniformización, en [CIW94] prueban que una superficie de Riemann es aritmética si y sólo si puede ser uniformizado por un subgrupo de índice finito de un grupo triangular $\Gamma_{l,m,n}$, o equivalentemente $X \cong \overline{\mathbb{H}}/\Gamma$ donde Γ tiene índice finito en el subgrupo de congruencias principales $\Gamma(2)$ del grupo modular.

Desde los trabajos de Dyck [Dy88] y Hefter [Hef91], [Hef98] se conocían que los mapas (gráficas encajadas en una superficie tales que su complemento es una unión ajena de discos topológicos abiertos) en superficies compactas orientables corresponden a dichas permutaciones, satisfaciendo la condición extra $\sigma_1^2 = 1$. Entonces, mapas corresponden a subgrupos de índice finito en grupos triangulares $\Gamma_{l,2,n}$; para mapas regulares, correspondientes a subgrupos normales, esto estaba implícito en Capítulo 8 de [CM65], y la

teoría general fue desarrollada independientemente en los setenta por Malgoire, Vosin [MV77], Jones y Singerman [Sin76], [JS78].

A. Grothendieck [Grot97] fue el primero que se dio cuenta que el teorema de Weil nos daba un funtor entre mapas, vía permutaciones, grupos triangulares y cubiertas ramificadas, a curvas definidas sobre $\overline{\mathbb{Q}}$, y que el teorema de Belyi nos permite invertir este funtor. Por lo tanto, tenemos una correspondencia entre objetos puramente topológicos (el término *dessins d'enfants* para dichas gráficas lo acuñó Grothendieck para enfatizar que son objetos con una estructura muy simple) y curvas definidas sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ que son extremadamente rígidas. Esta correspondencia le permitió representar al grupo absoluto de Galois como una acción en gráficas en superficies. Este descubrimiento le causó un tremendo impacto según podemos leer en la siguiente traducción de un extracto de [Grot97]:

..Este descubrimiento, que es técnicamente tan simple, me causó una impresión muy fuerte, y representa un cambio decisivo en el curso de mis reflexiones, un cambio en particular de mi centro de interés en matemáticas, que de repente se encontró fuertemente enfocado. No recuerdo que un echo matemático me hubiese impactado tan fuerte como este..

Vea [JS96] para una exposición más detallada del contexto histórico explicado en los párrafos anteriores.

El teorema de Belyi ha tenido otras aplicaciones muy interesantes, por ejemplo, Noam D. Elkies probó en [El91], vía funciones de Belyi, que la *conjetura ABC* implica el *teorema de Mordell*. Para otras aplicaciones vea [SL97a] y [SL97b]. En [Sin01] se explican algunas implicaciones de las funciones de Belyi en teoría de superficies de Riemann. Vea [JW16] y [GG12] para una exposición general sobre la teoría de los *dessins d'enfants* y funciones de Belyi.

Por otra parte, en otro contexto geométrico, Voevodsky y Shabat mostraron en [VS89] con el Teorema de Belyi que una superficie de Riemann compacta está definida sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ si y sólo si es conformemente equivalente a una superficie de Riemann dada por una triangulación equilátera (equivalentemente, una triangulación equilátera decorada).

Entonces una superficie de Riemann aritmética puede verse desde varios puntos de vista, en [SV90] se exponen con detalle dichos enfoques. En general una curva algebraica puede estudiarse desde varios aspectos, citando a Mumford [Mum75] tenemos 5 formas de definir una curva algebraica:

1. Escribiendo una ecuación.
2. Definiendo los generadores de los grupos fuchsianos que la uniformizan.

3. Especificando un punto en el móduli.
4. Introduciendo una métrica.
5. Definiendo su jacobiana.

En el caso de las superficies aritméticas tenemos un punto más, que es dando el dessin d'enfant (o las dos permutaciones σ_0 y $\sigma_1 \in S_d$). Pasar de un punto a otro no siempre es un proceso fácil, particularmente, encontrar la ecuación dado el dessin es un problema abierto. Motivados por este problema estudiamos algunas propiedades de las superficies trianguladas decoradas (determinados por un dessin d'enfant) para tratar de decir algo sobre su campo de definición, sin embargo este es un problema muy difícil. Este trabajo está en progreso y en este capítulo exponemos algunas observaciones, construcciones y preguntas que hemos hecho en torno a este tema. El contenido de este capítulo está basado en [JV20], el cual es un trabajo conjunto con mi asesor A. Verjovsky. A continuación resumimos los resultados principales de este trabajo.

Considere a Δ el triángulo equilátero con vértices en $0, 1, \omega$, con $\omega = 2\pi i/6$. Denotemos por 2Δ al doble de dicho triángulo. Naturalmente 2Δ tiene una estructura equilátera, además si decoramos los vértices $0, 1, \omega$ en 2Δ con los símbolos $\circ, \bullet, *$, respectivamente, obtenemos una estructura equilátera decorada. Mediante el mapeo de Schwarz-Christoffel podemos dar un biholomorfismo $\Psi: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow 2\Delta$ de la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ a 2Δ tal que Ψ manda al semiplano superior a Δ y semiplano inferior a su reflejado, además manda a $0, 1$ e ∞ en $0, 1$ y ω , respectivamente. Supondremos que la esfera de Riemann tiene la estructura equilátera inducida por Ψ . Entonces, dada una función de Belyi $f: X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ podemos jalar la estructura equilátera de $\hat{\mathbb{C}}$ mediante f , obteniendo una triangulación equilátera decorada en X .

En §3.3 definimos una noción de suma conexa de dos funciones de Belyi. Dadas dos funciones de Belyi $f_1: X_1 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ y $f_2: X_2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ elegimos un triángulo negro T_1^+ en X_1 y uno blanco T_2^- en X_2 , definamos la suma conexa $f_1 \#_{T_1^+ \#_{T_2^-}} f_2: X_1 \#_{T_1^+ \#_{T_2^-}} X_2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ a lo largo de dichos triángulos como sigue:

$$(35) \quad f_1 \#_{T_1^+ \#_{T_2^-}} f_2(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in X_1 - \text{int } T_1^+ \\ f_2(x), & x \in X_2 - \text{int } T_2^-, \end{cases}$$

esta aplicación resulta una función de Belyi sobre la suma conexa de las dos superficies $X_1 \#_{T_1^+ \#_{T_2^-}} X_2$. En §3.3.2 calculamos la monodromía de esta función. Además, en Ejemplo 73 mostramos que la suma conexa depende de los triángulos elegidos. Sin embargo, cuando las dos funciones son cubrientes normales (de Galois) la suma conexa es independiente de los triángulos, vea Proposición 76.

Analizamos varios ejemplos de sumas conexas entre algunas familias de funciones de Belyi sobre la esfera de Riemann. Una de estas familias son los *polinomios de Tchebychev* definidos por la siguiente fórmula recursiva: (i) para $n = 0$, $T_0(x) = 1$; para $n \geq 1$

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

Eligiendo unos triángulos adecuados, damos unas identidades para las sumas conexas de dichos polinomios, vea (46) y (45). Al final de la sección en §3.3.8 damos algunas observaciones y preguntas entre la relación de sumas conexas con Flips y refinamientos elementales de triangulaciones.

En §3.4 estudiamos a las curvas elípticas que admiten una descomposición hexagonal con vértices de valencia 3. Damos la siguiente caracterización, usando dessins d'enfants:

Teorema 33. *Sea $\tau \in \mathbb{H}$, entonces $X_{1,\tau}$ admite una estructura plana sin puntos cónicos dada por una unión finita de hexágonos regulares con cada vértice de valencia 3 si y sólo si existe $\gamma \in \text{PSL}(2, \mathbb{Q})$ tal que $\tau = \gamma(\omega)$, con $\omega = \exp(2\pi i/6)$.*

En §3.5 damos algunas observaciones sobre longitudes de geodésicas en superficies trianguladas decoradas, nuestra principal motivación fue ver si es posible obtener información del campo de definición de la superficie de Belyi analizando el espectro geodésico, sin embargo, el Corolario 35 nos indica que no podemos extraer esta información tan directamente como pensábamos. A lo largo de nuestra discusión fijamos, para nuestros cálculos, el punto $1/2$ como punto base para el grupo fundamental de $2\Delta - \{0, 1, \omega\}$, pero los cálculos son análogos si cambiamos de punto base (usualmente se toma el punto $1/2$ como punto base del grupo fundamental de $\hat{C} - \{0, 1, \infty\}$ para calcular la monodromía de una función de Belyi, por eso elegimos dicho punto en 2Δ , pero no es un punto distinguido). Si $f: X \rightarrow 2\Delta \cong \hat{C}$ es un mapeo de Belyi y $\gamma \in \pi_1(2\Delta - \{0, 1, \omega, \infty\}, 1/2)$, denotaremos por σ_γ la permutación en la fibra $f^{-1}(1/2)$ obtenida de los levatamientos de γ . En esta sección probamos el siguiente teorema:

Teorema 34. *Sea X una superficie de Riemann dada por una triangulación equilátera decorada y $f: X \rightarrow 2\Delta$ su función de Belyi. Fijemos un etiquetado de las aristas del dessin de f , con símbolos a_1, \dots, a_d donde $d = \deg f$.*

Sea $\omega_0 = m + n\omega$, con $(m, n) = 1$ y n impar. Sea γ la geodésica cerrada en 2Δ basada en $1/2$ definida por una recta $\ell(t) = 1/2 + t\omega_0$, y a_i una arista del dessin de f con punto medio $p_i \in f^{-1}(1/2)$. Si τ_i es el ciclo que contiene a i en la descomposición cíclica de $\sigma_\gamma \in \text{Sym}(f^{-1}(1/2)) \cong S_d$ (el isomorfismo está dado por el etiquetado), entonces el desarrollo de $\ell(t)$ en

X basado en p_i se puede expresar como:

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_{p_i} \cdot \tilde{\gamma}_{\sigma_\gamma(p_i)} \cdots \tilde{\gamma}_{\sigma_\gamma^{r-1}(p_i)}$$

(módulo una reparametrización), donde r es igual a $\text{ord } \tau_i$, es decir la longitud del ciclo τ_i .

El teorema anterior nos permite dar el siguiente corolario, que nos da una fórmula para calcular las longitudes de geodésicas en la superficie triangulada decorada en términos de la monodromía de la función de Belyi, o equivalentemente, en términos de las permutaciones asociadas.

Corolario 35. *Suponga que tenemos las hipótesis del Teorema 34. Sea γ una geodésica cerrada en 2Δ dada por la parametrización $\ell(t) = 1/2 + t\omega_0$. Si a_i es una arista del dessin de X y Ψ es el desarrollo de ℓ con respecto a p_i , entonces la geodésica $\tilde{\gamma} = \Psi(\ell)$ es suave, cerrada y tiene longitud $\text{long } \tilde{\gamma} = \text{ord } \sigma_{a_i} \text{ long } \gamma$, donde σ_{a_i} es el ciclo de σ_γ que contiene a a_i . Por lo tanto*

$$\text{long } \tilde{\gamma} = \begin{cases} \text{ord } \sigma_{a_i} |\omega_0|, & \omega_0 \in \text{Hex} \\ 3 \text{ord } \sigma_{a_i} |\omega_0|, & \omega_0 \notin \text{Hex} \end{cases}$$

donde σ_{a_i} es el ciclo de σ_γ que contiene a a_i .

En §3.5.4 damos un algoritmo para calcular la factorización de una geodésica cerrada primitiva en 2Δ basada en $1/2$, dado su vector dirección. En la Tabla 2 mostramos varios ejemplos explícitos. El cálculo de las permutaciones lo hicimos con el paquete *Sympy* (<https://www.sympy.org/en/index.html>). En el Ejemplo 108 mostramos algunos cálculos de longitudes de geodésicas para ilustrar el funcionamiento del algoritmo.

En el proceso de revisión de este trabajo agregamos la Sección A en donde discutimos la relación que existe entre nuestro trabajo y las superficies de traslación.

Finalmente, en la última parte de este capítulo estudiamos superficies trianguladas decoradas con triángulos hiperbólicos. Observamos que la superficie se puede desenvolver en el plano hiperbólico a un polígono que llamamos *una cáscara hiperbólica* de la superficie. Aplicamos nuestra construcción a curvas elípticas aritméticas para encontrar su módulo $\tau \in \mathbb{H}$ (vea Corolario 131). Dicho resultado nos da un método teórico para la uniformización, pero aún estamos buscando un método práctico que nos permita calcularlo explícitamente.

Otro de nuestros sueños es caracterizar a los dessins d'enfants de género 1 que representen a una curva elíptica definida sobre \mathbb{Q} , y luego a las modulares, para ver si se puede abordar el *Teorema de Shimura-Taniyama* desde el punto de vista de los dessins d'enfants.

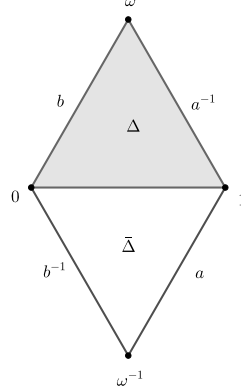


Figura 10. Esfera formada por dos triángulos equiláteros.

3.2. Estructuras equiláteras en superficies

3.2.1. Triangulación equilátera canónica de la esfera de Riemann.

Consideremos el triángulo equilátero Δ con vértices en $0, 1, \omega$, donde $\omega = \exp(2\pi i/6)$. Denote por $\bar{\Delta}$ el triángulo que es la reflexión de Δ con respecto al eje real (vea la Figura 10). Si identificamos las fronteras de Δ y $\bar{\Delta}$ por medio del mapeo conjugación $z \mapsto \bar{z}$, obtenemos una superficie compacta de género 0 con una triangulación formada por dos triángulos. Tal superficie, homeomorfa a la esfera, tiene una estructura compleja natural la cual, en el complemento de los vértices, está dada por cartas cuyos cambios de coordenadas son isometrías euclidianas que preservan orientación. En este trabajo denotaremos por 2Δ a esta superficie.

Por el teorema de uniformización (o el teorema de Riemann-Roch) cualquier superficie de Riemann de género 0 es conformemente equivalente a la esfera de Riemann, vea [Mir95] Prop. 1.7 (para el teorema de uniformización vea [For81] §3.27). De hecho, la superficie de Riemann 2Δ definida en el párrafo anterior se puede uniformizar explícitamente como sigue: considere el mapeo de Schwarz-Christoffel $\varphi: \mathbb{H} \rightarrow \Delta$ definido por la fórmula

$$\varphi(z) = C \int_0^z \frac{dw}{w^{2/3}(w-1)^{2/3}},$$

donde C es una constante compleja adecuada. La función φ es un homeomorfismo que mapea conformemente el semiplano superior \mathbb{H} al interior de Δ , y mapea los puntos $0, 1, \infty$ a $0, 1, \omega$, respectivamente.

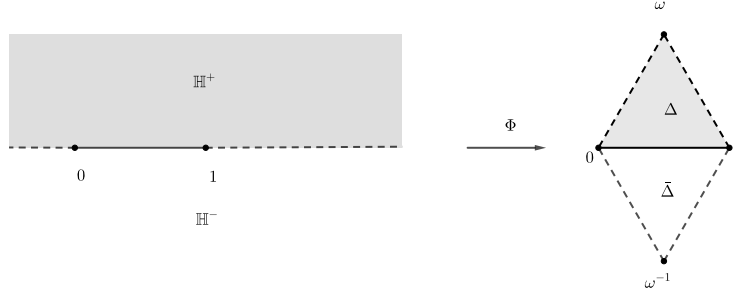


Figura 11. Mapeo de Schwarz-Christoffel y su reflexión.

Sea Ω la región $\mathbb{H}^+ \cup \mathbb{H}^- \cup [0, 1]$, y definamos la aplicación $\Phi: \Omega \rightarrow \text{Int}(\Delta \cup \bar{\Delta})$ como sigue

$$\Phi(z) = \begin{cases} \varphi(z), & z \in \mathbb{H}^+ \cup [0, 1], \\ \overline{\varphi(\bar{z})}, & z \in \mathbb{H}^- \cup [0, 1]. \end{cases}$$

El *Principio de Reflexión de Schwarz* implica que Φ es conforme en Ω . Además, Φ induce un homeomorfismo de la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ a la superficie cociente. Por abuso de notación denotaremos esta función también por Φ .

Aplicando el Principio de Reflexión de Schwarz a Φ en coordenadas locales podemos verificar que Φ es holomorfa en $\hat{\mathbb{C}} - \{0, 1, \infty\}$. Por el teorema de extensión de Riemann este mapeo se extiende a toda la esfera de Riemann.

Observación 36. La métrica plana de los triángulos Δ y $\bar{\Delta}$ induce una métrica plana singular en 2Δ , y los dos triángulos forman una triangulación equilátera de tal superficie. Los vértices son singularidades cónicas. Luego, mediante Φ , podemos jalar la métrica riemanniana plana singular a $\hat{\mathbb{C}} - \{0, 1, \infty\}$. Con esta métrica el semiplano superior y el inferior con puntos marcados $0, 1, \infty$ son isométricos a triángulos equiláteros.

3.2.2. Triangulaciones euclidianas y equiláteras en superficies.

Definición 37. (Triangulación euclidiana) Sea X una superficie compacta orientada. Una *triangulación euclidiana* en X está dada por un conjunto de homeomorfismos $\varphi_i: \Delta_i \rightarrow T_i$, donde Δ_i son triángulos euclidianos, con la condición extra que si T_i y T_j comparten una arista a , las métricas en a inducidas por φ_i y φ_j coinciden. Si todos los triángulos Δ_i son equiláteros, la triangulación euclidiana es llamada *triangulación equilátera*.

A las triangulaciones euclidianas (respectivamente equiláteras) también serán llamadas estructuras euclidianas (respectivamente equiláteras) sobre la superficie.

Observación 38. Permitiremos que los triángulos de nuestra triangulación compartan más de una arista.

Observación 39. (a) Si a es una arista común de T_i y T_j , entonces $\varphi_i: \Delta_i \rightarrow T_i$ y $\varphi_j: \Delta_j \rightarrow T_j$ inducen la misma métrica en a si y sólo si $\varphi_i^{-1}(a)$ y $\varphi_j^{-1}(a)$ tienen la misma longitud y las coordenadas baricéntricas en a , inducidas por φ_i y φ_j , son las mismas.

(b) En una triangulación equilátera todas las aristas tienen la misma longitud.

Sea $\varphi: \Delta_i \rightarrow T_i$ es un elemento de la triangulación de la superficie X . Supongamos que Δ_i tiene vértices en P_{i0}, P_{i1} y P_{i2} ; dado que Δ_i es convexo, un punto $x \in \Delta$ se puede expresar como $x = \mu_1 P_{i1} + \mu_2 P_{i2} + \mu_3 P_{i3}$, con $\mu_i \geq 0$ y $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$. Los números μ_0, μ_1, μ_3 son llamados coordenadas baricéntricas de x . Las coordenadas baricéntricas de un punto $P \in T_i$ (con respecto a φ_i) serán por definición las coordenadas baricéntricas de $\varphi_i^{-1}(P)$.

Proposición 40 ([Spr81], Thm. 5.7). *Para una triangulación $\{\varphi_i: \Delta_i \rightarrow T_i\}$ de X , es posible escoger un conjunto de mapeos φ_j tal que las coordenadas baricéntricas de un punto P en cada arista son las mismas en ambos triángulos que contienen a P .*

Llamaremos a este conjunto de coordenadas baricéntricas (dados por el conjunto $\{\varphi_j\}$) *coordenadas normales (baricéntricas)* de X .

En la siguiente proposición veremos que una triangulación con coordenadas normales baricéntricas y coherentemente orientada induce una estructura compleja en X . En particular, esto nos da una estructura compleja en una estructura equilátera.

Proposición 41 ([Spr81], Thm. 5.13). *Una estructura euclidiana induce una estructura compleja en X que la hace una superficie de Riemann. Por lo tanto (por el teorema de Riemann-Roch) es una curva algebraica compleja.*

Demostración. Las cartas para todos los puntos fuera de los vértices están dadas de la siguiente manera:

- (i) Puntos interiores. Denotemos por ψ_i a la inversa del homeomorfismo $\varphi_i: \Delta_i \rightarrow T_i$, el mapeo $\psi_i: \text{Int } T_i \rightarrow \text{Int } \Delta_i$ es una carta para todos los puntos en el interior de T_i .

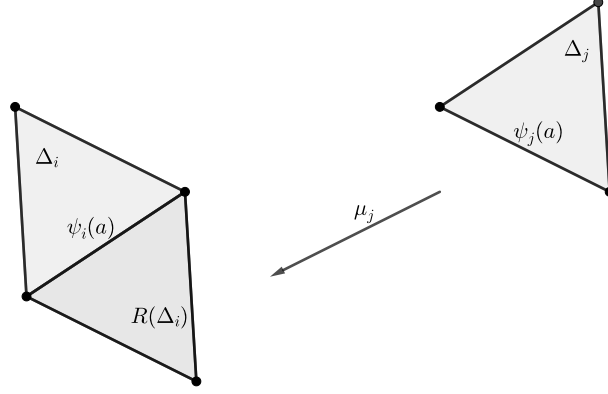


Figura 12. Isometría μ_j .

- (ii) Puntos en aristas. Supongamos que a es una arista común de los triángulos T_i y T_j , sea R la reflexión con respecto a la arista $\psi_i(a)$, existe una isometría euclidiana μ_j , que preserva orientación, que manda Δ_j en $R(\Delta_i)$ tal que $\mu_j \circ \psi_j = \psi_i$ en a (vea la Figura 12). Definamos el homeomorfismo $\Psi: T_i \cup T_j \rightarrow \Delta_i \cup R(\Delta_i)$ como

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi_i(x), & x \in T_i \\ \mu_j \circ \psi_j(x), & x \in T_j. \end{cases}$$

Tomamos como carta, para los puntos en el interior de la arista a , el mapeo anterior restringido a $\text{Int}(T_i \cup T_j)$. Podemos verificar que es compatible con las cartas definidas en (i).

Suponga que P es un vértice y que T_1, \dots, T_n son los triángulos que tienen a P como vértice común. Sabemos que $\text{Int}(\bigcup_{i=1}^n T_i) - \{P\}$ es conforme a un disco perforado, entonces existe un mapeo conforme $\varphi: (\text{Int}(\bigcup_{i=1}^n T_i) - \{P\}) \rightarrow \mathbb{D} - \{0\}$, luego podemos aplicar el Teorema de Extensión de Riemann para extender a φ de forma holomorfa a P . \square

Para otra prueba mediante diferenciales cuadráticos vea [Troy07].

Observación 42. La estructura compleja no cambia si reescalamos los triángulos equiláteros euclidianos. Así que podemos asumir en lo que sigue que las aristas tienen longitud 1.

Definición 43 (Refinamientos elementales (starrings)). Sea X una superficie con una triangulación euclidiana $\mathcal{T} = \{\varphi_i: \Delta_i \rightarrow T_i: i \in I\}$ con v vértices, a aristas y t triángulos. Sea P un punto en X que no sea un vértice, entonces

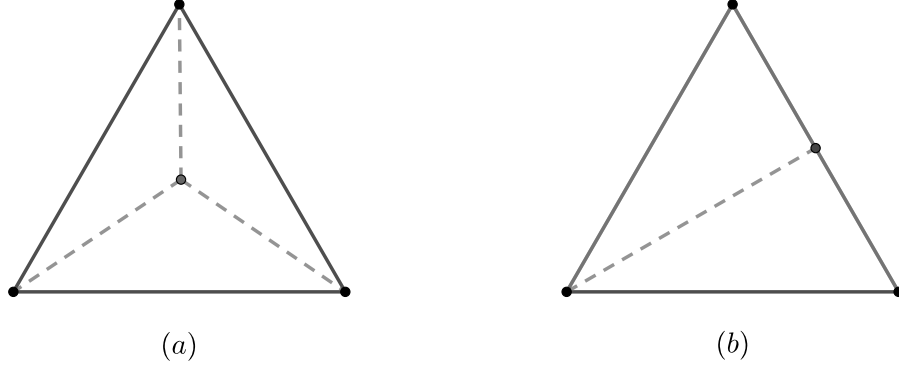


Figura 13. Dos tipos de subdivisiones de un triángulo.

1. Si P es un punto que está en el interior de un triángulo T_k , subdividamos a Δ_k uniendo al punto $\varphi_k^{-1}(P)$ con los vértices de Δ_k por medio de segmentos de recta (vea la Figura 13 (a)). Denotamos a dichos triángulos por $\Delta_{k\mu}$, $\mu = 1, 2, 3$. Defina $\varphi_{k\mu}: \Delta_{k\mu} \rightarrow \varphi_k(\Delta_{k\mu})$ como la restricción $\varphi_{k\mu} = \varphi_k|_{\Delta_{k\mu}}$. Luego, tenemos una nueva triangulación:

$$\mathcal{T}' = (\mathcal{T} - \{\varphi_k\}) \cup \{\varphi_{k\mu}: \mu = 1, 2, 3\}.$$

2. Si P es un punto en el interior de una arista común de dos triángulos T_k y T_m , subdividimos a Δ_k uniendo al punto $\varphi_k^{-1}(P)$ con el vértice opuesto a la arista en la que se encuentra (vea la Figura 13 (b)). Denotemos a dichos triángulos por $\Delta_{k\nu}$, $\nu = 1, 2$. Defina $\varphi_{k\nu}: \Delta_{k\nu} \rightarrow \varphi_k(\Delta_{k\nu})$ como la restricción $\varphi_{k\nu} = \varphi_k|_{\Delta_{k\nu}}$. Después hacemos una construcción análoga para T_m . Entonces, obtenemos la siguiente triangulación:

$$\mathcal{T}' = (\mathcal{T} - \{\varphi_k, \varphi_m\}) \cup \{\varphi_{k\nu}, \varphi_{m,\nu}: \nu = 1, 2\}.$$

La triangulación \mathcal{T}' obtenida en cada uno de los casos es llamado un refinamiento elemental de \mathcal{T} . En ambos casos la triangulación tiene $v + 1$ vértices, $a + 3$ aristas y $t + 2$ triángulos.

Definición 44 (Subdivisión baricéntrica). Suponga que X es una superficie con una triangulación euclidiana $\mathcal{T} = \{\varphi_i: \Delta_i \rightarrow T_i\}$. La subdivisión baricéntrica de \mathcal{T} es la triangulación euclidiana que se obtiene de subdividir cada triángulo de \mathcal{T} por sus medianas y agregando un vértice en su baricéntrico y un vértice en cada punto medio de sus aristas. Esta subdivisión puede expresarse como una combinación de refinamientos elementales en \mathcal{T} , aplicada en los baricéntricos y en los puntos medios de las aristas.

Observación 45. Sea X es una superficie con una triangulación euclidiana \mathcal{T} . La subdivisión baricéntrica nos da otra triangulación euclidiana de X , por lo tanto una estructura compleja. Podemos notar que esta estructura compleja es compatible con la original, ya que las cartas son restricciones de las cartas originales.

3.2.3. Funciones de Belyi. A continuación damos un repaso de funciones de Belyi y dessins d'enfant, dichos resultados pueden consultarse en [GG12].

Sea X una superficie de Riemann compacta. Una función meromorfa $f: X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ con valores críticos en $\{0, 1, \infty\}$ será llamada *función de Belyi*; si una superficie de Riemann compacta X tiene una función de Belyi f en su campo de funciones meromorfas, esta superficie será llamada *superficie de Belyi* o *curva de Belyi*, y (X, f) será llamada una *pareja de Belyi*.

Diremos que dos parejas de Belyi (X_1, f_1) y (X_2, f_2) son equivalentes si son isomorfos como cubrientes ramificados holomorfos de la esfera de Riemann, es decir, existe un biholomorfismo $\Phi: X_1 \rightarrow X_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\Phi} & X_2 \\ & \searrow f_1 & \swarrow f_2 \\ & \hat{\mathbb{C}} & \end{array}$$

Decimos que una superficie de Riemann X está definida sobre un campo $K \subset \mathbb{C}$ si existe un polinomio $P(x, y) \in K[x, y]$ tal que X es conformemente equivalente a la normalización (o desingularización) \tilde{C} de la siguiente curva algebraica afín:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : P(x, y) = 0\}.$$

(El concepto de normalización lo tomamos de acuerdo a [Gri89] Def. 3.1).

Denote por C^* a la parte no singular de la curva C . La superficie de Riemann compacta \tilde{C} contiene una copia holomorfa de C^* con complemento finito. Se puede probar que \tilde{C} es única salvo biholomorfismos.

En 1979 Belyi [Bel79] dio un criterio para saber cuándo una superficie de Riemann compacta está definida sobre los números algebraicos:

Teorema 46 (Teorema de Belyi). *Sea X una superficie de Riemann compacta. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- (i) X está definida sobre $\overline{\mathbb{Q}}$, el campo de los números algebraicos.
- (ii) Existe una función meromorfa $f: X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, tal que sus valores críticos están en el conjunto $\{0, 1, \infty\}$.

Este teorema es la principal motivación de este trabajo. La prueba puede consultarse en [Bel79], [GG12] o [JW16]. En las siguientes secciones de este trabajo discutiremos varios ejemplos de funciones de Belyi.

Definición 47. Un *dessin d'enfant*, o simplemente *dessin*, es una pareja (X, \mathcal{D}) donde X es una superficie topológica compacta orientada, y $\mathcal{D} \subset X$ es una gráfica finita tal que:

- (i) \mathcal{D} es conexa.
- (ii) \mathcal{D} es bicolorada, *i.e.*, los vértices están coloreados de blanco y negro de tal forma que dos vértices conectados por una arista tienen diferente color.
- (iii) $X - \mathcal{D}$ es una unión finita de discos topológicos llamados caras.

Dos dessins (X_1, \mathcal{D}_1) , (X_2, \mathcal{D}_2) se consideran equivalentes si existe un homeomorfismo que preserva orientación $h: X_1 \rightarrow X_2$ tal que $h(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_2$ y tal que la restricción de h en \mathcal{D}_1 induce un isomorfismo entre las gráficas \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 , que preserva la coloración de los vértices.

Definición 48. Dado un dessin d'enfant \mathcal{D} en una superficie X con d aristas, asociamos un par de permutaciones (σ_0, σ_1) en S_d (el grupo simétrico de grado d), de la siguiente forma: primero damos un etiquetado en las aristas del dessin; dibujamos un disco (topológico) pequeño alrededor de cada vértice blanco y tomamos $\sigma_0(i) = j$ si j es la arista consecutiva a i , bajo una rotación positiva.

Análogamente, definimos σ_1 con la misma construcción pero usando los vértices negros.

Dicha construcción aparece explicada en [GG12] §4.4.1.

Observación 49. Dado un dessin (X, \mathcal{D}) con par (σ_0, σ_1) , los ciclos de σ_0 están en correspondencia uno a uno con vértices blancos de \mathcal{D} , la longitud de cada ciclo es el grado (valencia) del vértice. Lo mismo se cumple para con σ_1 con respecto a los vértices negros.

Los ciclos de $\sigma_1\sigma_0$ están en correspondencia uno a uno con las caras de \mathcal{D} (los discos del complemento del dessin).

Proposición 50 ([GG12] Prop. 4.10). *Sea g el género de X . Entonces se cumple la siguiente fórmula*

$$2 - 2g = (\#\{\text{ciclos de } \sigma_0\} + \#\{\text{ciclos de } \sigma_1\}) - N + \#\{\text{ciclos de } \sigma_1\sigma_0\}.$$

Proposición 51 ([GG12] Prop 4.13). *Sea (σ_0, σ_1) dos permutaciones en S_d tal que (σ_0, σ_1) es un grupo transitivo. Entonces existe un dessin d'enfant (X, \mathcal{D}) tal que su par de permutaciones es (σ_0, σ_1) .*

La siguiente proposición nos dice cómo asociar un dessin d'enfant a una función de Belyi.

Proposición 52 ([GG12] Prop 4.22). *Suponga que (X, f) es una pareja de Belyi, y considere $\mathcal{D}_f = f^{-1}([0, 1])$ como una gráfica encajada y bicoloreada en X , donde los vértices blancos (resp. negros) son los puntos de $f^{-1}(0)$ (resp. $f^{-1}(1)$). Entonces (X, \mathcal{D}_f) es un dessin d'enfant.*

Dado un dessin (X, \mathcal{D}) podemos construir una triangulación $\mathcal{T}(\mathcal{D})$, la cual describimos a continuación a grandes rasgos: primero agregamos un vértice *centro* en cada cara de \mathcal{D} , decoramos a dichos puntos por $*$; después para un centro $*$ en una cara del dessin, conectamos a $*$ con los vértices de \mathcal{D} por medio de curvas que no se autointersectan contenidas en dicha cara, estas curvas serán las nuevas aristas. Vea [GG12] §4.2.1 para los detalles de dicha construcción.

La triangulación $\mathcal{T}(\mathcal{D})$ satisface las siguientes propiedades ([GG12] Summary 4.15):

- (i) Cada triángulo contiene un vértice de tipo \circ , \bullet y $*$.
- (ii) Cada arista j pertenece a dos triángulos T_j^+ y T_j^- (un triángulo es denotado por T_j^+ si la terna $(\circ, \bullet, *)$ induce una orientación positiva en la frontera del triángulo, y es denotado por T_j^- en otro caso.
Cuando j pertenece a una única cara de \mathcal{D} , entonces T_j^+ y T_j^- pertenecen a la misma cara de \mathcal{D} . Por otra parte, si dos caras tocan a j entonces uno de ellos contiene a T_j^+ y la otra contiene a T_j^- .
- (iii) Dos triángulos adyacentes son de diferente tipo ($+$ o $-$).
- (iv) Cada cara de \mathcal{D} se descompone en una unión de un número par de triángulos, una mitad de cada tipo.

Partiendo de una triangulación $\mathcal{T}(\mathcal{D})$ del dessin, podemos construir un mapeo continuo (vea [GG12] §4.2.2) $f_{\mathcal{T}(\mathcal{D})}: X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ tal que: (i) el mapeo es un homeomorfismo que preserva orientación en cada triángulo de $\mathcal{T}(\mathcal{D})$, mapea T_j^+ al semiplano superior, y T_j^- al semiplano inferior, (ii) manda la frontera de un triángulo al eje real, y (iii) mapea los vértices $\circ, \bullet, *$ en $0, 1, \infty$, respectivamente.

La restricción $f_{\mathcal{T}(\mathcal{D})}: (X^* = (X - f_{\mathcal{T}(\mathcal{D})}^{-1}\{0, 1, \infty\})) \rightarrow (\hat{\mathbb{C}} - \{0, 1, \infty\})$ resulta un mapeo cubriente. Esto nos permite dar a X^* la única estructura compleja que hace a $f_{\mathcal{T}(\mathcal{D})}$ un mapeo holomorfo. Después, podemos extender esta estructura compleja a todo X , denotaremos a dicha superficie de Riemann por $X_{\mathcal{D}}$. Entonces, obtenemos una función meromorfa $f_{\mathcal{T}(\mathcal{D})}: X_{\mathcal{D}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Dicha función cumple las siguientes propiedades ([GG12] Summ. 4.16):

- (i) $f_{\mathcal{T}(\mathcal{D})}$ ramifica solamente en los vértices de $\mathcal{T}(\mathcal{D})$ (es decir, en los puntos $\circ, \bullet, *$).
- (ii) En particular, $f_{\mathcal{T}(\mathcal{D})}$ no tiene otros valores críticos que $0, 1, \infty$. Por lo tanto $f_{\mathcal{T}(\mathcal{D})}$ es una función de Belyi.
- (iii) $\deg(f_{\mathcal{T}(\mathcal{D})})$ coincide con el número de aristas de \mathcal{D} , como podemos ver al contar el número de preimágenes de $1/2$.
- (iv) La multiplicidad de $f_{\mathcal{T}(\mathcal{D})}$ en el vértice v de \mathcal{D} es la mitad de número de triángulos que lo circundan.
- (v) Por construcción $f_{\mathcal{T}(\mathcal{D})}^{-1}([0, 1]) = \mathcal{D}$.

Se puede probar que si tomamos otra triangulación $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ entonces las parejas de Belyi $(X_{\mathcal{D}}, f_{\mathcal{T}(\mathcal{D})})$ y $(X_{\mathcal{D}}, f_{\mathcal{L}(\mathcal{D})})$ son equivalentes.

Por lo tanto escribiremos $(X_{\mathcal{D}}, f_{\mathcal{D}})$ en lugar de $(X_{\mathcal{D}}, f_{\mathcal{T}(\mathcal{D})})$.

Entonces tenemos el siguiente resultado:

Proposición 53. *Suponga que (X, \mathcal{D}) es un dessin, entonces existe una estructura compleja en X que la convierte en una superficie de Riemann $X_{\mathcal{D}}$ y una función de Belyi $f_{\mathcal{D}}: X_{\mathcal{D}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ que realiza el dessin.*

Además, la pareja de Belyi $(X_{\mathcal{D}}, f_{\mathcal{D}})$ es única, salvo equivalencia de cubrientes ramificados.

En la siguiente sección describimos con más detalle la construcción de $f: X_{\mathcal{T}(\mathcal{D})} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ cuando $\mathcal{T}(\mathcal{D})$ sea una triangulación equilátera decorada, esto lo definiremos en la siguiente sección.

El siguiente teorema nos dice que las correspondencias mencionadas anteriormente, vistas en el conjunto de clases de equivalencias, son inversas:

Proposición 54 ([GG12] Thm. 4.25). *La correspondencia*

$$(X, f) \longmapsto (X, \mathcal{D}_f)$$

induce una correspondencia uno a uno entre el conjunto de clases de equivalencia de dessins d'enfant y el conjunto de clases de equivalencias de parejas de Belyi. Además, la aplicación inversa está inducida por la correspondencia

$$(X, \mathcal{D}) \longmapsto (X_{\mathcal{D}}, f_{\mathcal{D}}).$$

3.2.4. Monodromía de una función de Belyi. Consideremos una función de Belyi $f: X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de grado d . En este caso se puede describir la monodromía de una forma muy simple. En este caso $\pi_1(\hat{\mathbb{C}} - \{0, 1, \infty\}, 1/2)$ es un grupo libre de rango 2 (vea [GG12] Thm. 2.34) generados por dos lazos γ_0 y γ_1 son lazos alrededor de 0 y 1 con *índice* (winding number) 1 alrededor de 0 y 1 (respectivamente).

Dado $\gamma \in \pi_1(2\Delta - \{0, 1, \infty\}, 1/2)$ tenemos asociada la permutación $\sigma_\gamma: f^{-1}(1/2) \rightarrow f^{-1}(1/2)$ definido como:

$$(36) \quad \sigma_\gamma(\tilde{x}) = \tilde{\gamma}(1)$$

donde $\tilde{\gamma}$ es un levantamiento de γ basado en \tilde{x} . Si fijamos un etiquetado de la fibra podemos pensar a σ_γ como un elemento en S_d (el grupo simétrico de grado d), con $d = \deg f$.

El homomorfismo $\mu: \pi_1(2\Delta - \{0, 1, \omega\}, 1/2) \rightarrow S_d$ definido por $\mu(\gamma) = \sigma_{\gamma^{-1}}$ es un homomorfismo de grupos conocido como la *monodromía* de f y su imagen es llamado el *grupo de monodromía* de f .

Observación 55. (Ver [GG12] §4.3.1) Como γ_0 y γ_1 generan a $\pi_1(\hat{\mathbb{C}} - \{0, 1, \infty\}, 1/2)$ la monodromía de f queda determinado por las dos permutaciones $\mu(\gamma_0) = \sigma_{\gamma_0}^{-1}$ y $\mu(\gamma_1) = \sigma_{\gamma_1}^{-1}$.

Note que si (σ_0, σ_1) es la pareja de permutaciones de \mathcal{D}_f entonces $\sigma_{\gamma_0} = \sigma_0$. Esto es porque si x_j es el punto en $f^{-1}(1/2)$ que está sobre la arista j de D_f entonces el levantamiento de γ_0 con punto inicial x_j termina en $x_{\sigma(j)}$ ya que f es de la forma $z \mapsto z^n$ en una vecindad de un punto en $f^{-1}(0)$ (un vértice blanco de \mathcal{D}). Un argumento similar muestra que $\sigma_{\gamma_1} = \sigma_1$.

Entonces tenemos la siguiente proposición.

Proposición 56 ([GG12] Prop. 4.29). *La pareja de permutaciones asociada a un dessin y la pareja de permutaciones asociada a su correspondiente función de Belyi, están determinados una a la otra.*

Observación 57. De lo anterior tenemos que si x_1, \dots, x_k son los puntos en la fibra $f^{-1}(0)$ tal que f tiene multiplicidad m_i en x_i , entonces σ_0 se factoriza en ciclos disjuntos como

$$\sigma_0 = \sigma_{x_1} \cdots \sigma_{x_k}$$

donde σ_{x_i} es un ciclo de longitud m_i que corresponde a la permutación cíclica alrededor del vértice x_i . Lo mismo se cumple si en lo anterior reemplazamos $f^{-1}(0)$ por $f^{-1}(1)$ y σ_0 por σ_1 .

Resumimos las correspondencias comentadas en el siguiente teorema:

Teorema 58. *Tenemos una correspondencia uno a uno entre los siguientes conjuntos:*

- (i) *Parejas de Belyi (X, f) , módulo equivalencia de cubrientes ramificados.*
- (ii) *Dessins (X, \mathcal{D}) , módulo equivalencia.*
- (iii) *Parejas de permutaciones (σ_0, σ_1) tales que $\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle$ es un subgrupo transitivo de S_d , módulo conjugación.*

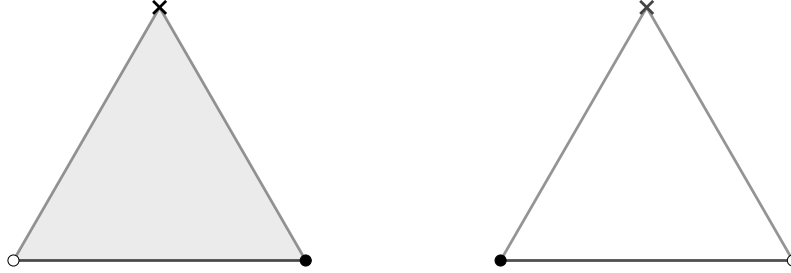


Figura 14. Piezas de construcción.

3.2.5. Función de Belyi de una triangulación equilátera decorada.

Supongamos que X es una superficie compacta orientada con una triangulación equilátera $\Delta = \{\varphi_i: \Delta_i \rightarrow T_i\}$, dotada con su estructura compleja y su métrica riemanniana (fuera de los vértices) que hace a todos sus triángulos equiláteros. De hecho, podemos incluir a los vértices obteniendo una *métrica euclidiana singular*. Las singularidades serán los vértices que tienen vecindades isométricas a conos planos sobre un círculo.

Supongamos también que los vértices de la triangulación están decorados con los símbolos \circ , \bullet y $*$, de tal forma que *dos vértices adyacentes no tienen la misma decoración*.

Dicha decoración nos permite asignar una coloración a los triángulos de la siguiente manera: primero, recuerde que una región de Jordan tiene dos orientaciones, una positiva que coincide con la de X y negativa en otro caso. Esto induce también una orientación en la frontera, que es una curva de Jordan, la cual a su vez queda determinada por una terna ordenada de puntos. Por lo tanto, la orientación de una región de Jordan queda determinada por una terna ordenada de puntos en la frontera.

Por hipótesis los vértices de cada triángulo de la triangulación están decorados con los tres símbolos diferentes, entonces las ternas $(\circ, \bullet, *)$ y $(\circ, *, \bullet)$ determinan una orientación en cada triángulo. Entonces, pintamos a los triángulos de negro aquellos que resultan orientados positivamente con dicha terna, y de blanco a los que resultan orientados negativamente.

Por lo tanto tales superficies se obtienen pegando las aristas de un número finito de triángulos equiláteros como en la Figura 14, con isometrías que respetan la decoración de los vértices.

Observación 59. (i) Para cada par de triángulos adyacentes T_i y T_j con una arista a en común, existe una reflexión $R_a: T_i \cup T_j \rightarrow T_i \cup T_j$, que intercambia T_i con T_j , es decir, R_a es una isometría que invierte orientación y que fija a puntualmente a la arista a .

(ii) Sea T_i un triángulo negro y un homeomorfismo $\phi_i: T_i \rightarrow \overline{\mathbb{H}}^+$ que preserve fronteras, que es conforme en el interior y que manda los vértices $\circ, \bullet, *$ en $0, 1, \infty$, respectivamente.

Si T_j es un triángulo blanco adyacente a T_i con arista en común a , podemos extender continuamente ϕ_i a una función $\Phi: T_i \cup T_j \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, la cual está definida en T_j por $\Phi(x) = \overline{\phi_i \circ R_a(x)}$. Por el principio de Reflexión de Schwarz esta función es holomorfa en el interior de $T_i \cup T_j$. Notemos que Φ es un homeomorfismo cuando lo restringimos a T_j y respeta las decoraciones de sus vértices (\circ son ceros, \bullet si están en la preimagen de 1 y $*$ son polos). Análogamente podemos extender cualquier homeomorfismo $\phi_j: T_j \rightarrow \overline{\mathbb{H}}^-$, definido sobre un triángulo blanco, a uno negro que es adyacente a él.

Observación 60. Consideremos el biholomorfismo $\Phi: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow 2\Delta$ descrito en §3.2.1, definamos la estructura equilátera decorada en la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ jalando la estructura equilátera de 2Δ mediante Φ . Entonces, dada una función de Belyi $f: X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, podemos jalar la estructura equilátera decorada de $\hat{\mathbb{C}}$, para inducir una estructura equilátera decorada en X , la cual llamaremos *la triangulación equilátera decorada inducida* por f . Con la métrica inducida las aristas del dessin d'enfant de f tendrán longitud 1. A lo largo de este trabajo identificaremos a $\hat{\mathbb{C}}$ con 2Δ mediante Φ , entonces a veces escribiremos $f: X \rightarrow 2\Delta$ para denotar una función de Belyi sobre una superficie de Riemann X .

Recíprocamente, veremos a continuación la construcción de una función de Belyi de una superficie con una triangulación equilátera. Dicha construcción aparece en [Bos92], [SV90],[VS89].

Teorema 61. *Sea X es una superficie de Riemann compacta dada por una triangulación equilátera decorada. Existe una función de Belyi $f: X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ cuya triangulación decorada coincide con la original.*

Demostración. Primero escogemos un triángulo negro T_i y un homeomorfismo $\phi_i: T_i \rightarrow \overline{\mathbb{H}}^+$ que satisface las hipótesis de la Observación 59 (ii). Extendemos la función ϕ_i al triángulo adyacente a T_i que comparte su vértice blanco, gracias al principio de reflexión descrito en la Observación 59 (i). Continuamos el proceso al otro triángulo adyacente, hasta agotar todos los triángulos de la vecindad del vértice blanco en común (vea la Figura 15). La función obtenida por este proceso será denotada por f .

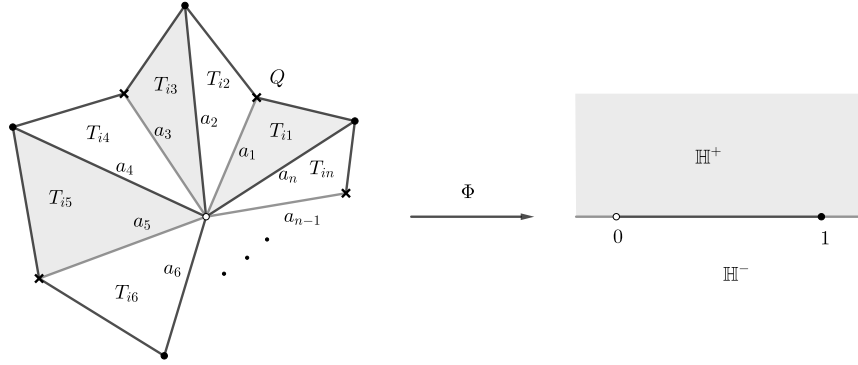


Figura 15. Extensión f en una vecindad del vértice blanco de $T_i = T_{i1}$.

La aplicación f está bien definida y es holomorfa en el interior de $T_{i1} \cup \dots \cup T_{in}$. También está bien definida en la arista a_n del triángulo $T_{i1} = T_i$ con vértices \circ y \bullet . Si $x \in a_n$, $f(x) = \phi_i \circ R_{a_1} \circ \dots \circ R_{a_{n-1}}(x) = \phi_i(x)$. La función ϕ_i se extiende continuamente a la vecindad del vértice blanco $T_{i1} \cup \dots \cup T_{in}$, y la extensión es holomorfa en el interior de cada triángulo. Por construcción f es conforme en el interior de cada triángulo.

Análogamente, hacemos la extensión alrededor del vértice negro de T_i y del vértice $*$. Continuamos este proceso a los demás triángulos que son adyacentes a aquellos en donde f ya ha sido definida, hasta agotar todos los triángulos de la estructura euclidiana decorada, obteniendo así una función meromorfa $f: X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ con valores críticos en $\{0, 1, \infty\}$. Por construcción las preimágenes de $0, 1, \infty$ están decoradas con $\circ, \bullet, *$, respectivamente. Los triángulos negros corresponden a las preimágenes del semiplano superior y los blancos a las preimágenes del semiplano inferior. El 1-esqueleto de la triangulación corresponde a la preimagen de $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. \square

3.2.6. Función de Belyi de una triangulación simétrica decorada.

Podemos notar que la prueba del Teorema 61 no necesita que los triángulos sean equiláteros, basta que tengan una simetría en cada arista como en la Observación 59 (i) y que estén decoradas.

Definición 62. Diremos que una triangulación euclidiana es *simétrica* si para cada par de triángulos adyacentes T_i y T_j con una arista a en común, existe una reflexión $R_a: T_i \cup T_j \rightarrow T_i \cup T_j$, que intercambia T_i con T_j , es decir, R_a es una isometría que invierte orientación y que fija a puntualmente a la arista a .

Si los vértices de la triangulación están decorados con $\circ, \bullet, *$, entonces sus triángulos se pueden colorear de blanco y negro como antes. A las triangulaciones simétricas que tienen dicha decoración en los vértices serán llamadas *triangulaciones simétricas decoradas*.

Entonces, tenemos el siguiente resultado, cuya prueba es análoga al Teorema 61.

Proposición 63. *Si X es una superficie de Riemann compacta dada por una triangulación simétrica decorada, entonces existe una función de Belyi $f: X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ que realiza la triangulación.*

La noción de triangulación simétrica decorada la comentan los autores de [CIW94] (en la introducción de §3), pero no la definen explícitamente, ellos prefieren definir la noción de *triangulación con cubierta simétrica* (*covered symmetric triangulation*), la cual explicamos a continuación: sea Σ una superficie de Riemann compacta dada por una triangulación (orientada) \mathcal{T} con $2N$ celdas abiertas $T = T_n^+$ (orientación positiva) y T_m^- (orientación negativa) con $n, m = 1, \dots, N$ homeomorfas a triángulos euclidianos (hay que notar que en dicho trabajo los autores toman como convención que sus triángulos son conjuntos abiertos). Sea $\tilde{\Sigma}$ una cubierta simplemente conexa de Σ , posiblemente ramificada en los vértices de \mathcal{T} . La triangulación se levanta a una triangulación (generalmente infinita) $\tilde{\mathcal{T}}$ en $\tilde{\Sigma}$ con celdas $\tilde{T} = \tilde{T}_\nu^+$ y \tilde{T}_μ^- , $\nu, \mu = 1, 2, \dots$. Ellos llaman a estas celdas abiertas “triángulos”.

Definición 64. Decimos que $(\mathcal{T}, \tilde{\Sigma})$ es una *triangulación con cubierta simétrica* (*covered symmetric triangulation*) de Σ si satisface las siguientes propiedades: para cualquier elemento \tilde{T} de $\tilde{\mathcal{T}}$ existen tres reflexiones σ_j en los lados e_j , $j = 1, 2, 3$ de \tilde{T} tal que:

- las σ_j son homeomorfismos de $\tilde{\Sigma}$ en sí mismo, preservando la triangulación formada por las $\tilde{T}_\nu^+, \tilde{T}_\mu^-$,
- cada σ_j mapea \tilde{T} a su vecino que comparte la arista e_j con \tilde{T} . Además, $\sigma_j|_{e_j}$ es la identidad y $\sigma_j^2 = 1$ para $j = 1, 2, 3$,
- la acción de las σ_j en los triángulos cambia la orientación, *i.e.* para cualquier T_ν^\pm y j existe una \tilde{T}_μ^\mp tal que $\sigma_j \tilde{T}_\nu^\pm = \tilde{T}_\mu^\mp$.
- el cubriente ramificado $\varphi: \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ es holomorfa y las $\sigma_j: \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Sigma}$ son mapeos antiholomorfos.

Tenemos el siguiente teorema que es similar a la Proposición 63:

Proposición 65 ([CIW94] Prop. 3). *Sea \mathcal{C} una curva algebraica suave definida sobre un campo numérico. Cualquier función de Belyi define una triangulación con cubierta simétrica, y cualquier triangulación con cubierta simétrica tiene una subtriangulación que proviene de una función de Belyi.*

Finalizamos esta discusión con el siguiente teorema, que es una consecuencia del teorema de Belyi:

Teorema 66 ([CIW94] Thm. 2). *Una curva algebraica proyectiva suave sobre los números complejos está definida sobre un campo numérico si y sólo si, como una superficie de Riemann compacta, tiene una triangulación con cubierta simétrica.*

A continuación veremos qué pasa con la estructura compleja en la subdivisión baricéntrica (vea la Definición 44 y la Observación 45) si cambiamos la métrica para que sus triángulos sean equiláteros.

Corolario 67. *Suponga que X es una superficie de Riemann dada por una estructura equilátera. Entonces dada la subdivisión baricéntrica de la triangulación hay una métrica en X en la que todos los triángulos de la subdivisión son equiláteros y la estructura compleja inducida coincide con la original.*

Demostración. Por definición la estructura compleja dada por la subdivisión baricéntrica, visto como estructura euclidiana, coincide con la estructura compleja de X .

Decoremos a los vértices de la subdivisión de la siguiente forma: de color negro a los vértices originales, de blanco a los puntos medios y de $*$ a los baricentros. Entonces esta triangulación es simétrica y por lo tanto tenemos una triangulación simétrica decorada. Por la Proposición 63 hay una función de Belyi $g : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ que realiza la triangulación.

Si tomamos la estructura equilátera de la esfera de Riemann que construimos al inicio, podemos dar mediante g una métrica que convierte a todos los triángulos de la subdivisión baricéntrica en equiláteros, la cual a su vez induce otra estructura compleja en X , puesto que g es conforme en el interior de cada triángulo, esta estructura compleja coincide con la original. \square

Ejemplo 68 (El invariante j). Considere la siguiente función racional $j : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de grado 6:

$$(37) \quad j(\lambda) = \frac{4}{27} \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2}.$$

En este capítulo llamaremos a esta función el invariante j , esperando no causar confusión con la función J dada en (29). Las dos funciones están relacionadas por la fórmula $j(\lambda) = (4/27)J(\lambda)$.

La función j tiene 8 puntos críticos, dos ceros de orden 3, tres preimágenes de 1 con multiplicidad 2 y 3 polos dobles. Sus valores críticos son $\{0, 1, \infty\}$, es decir, es una función de Belyi. Su dessin d'enfant está formado

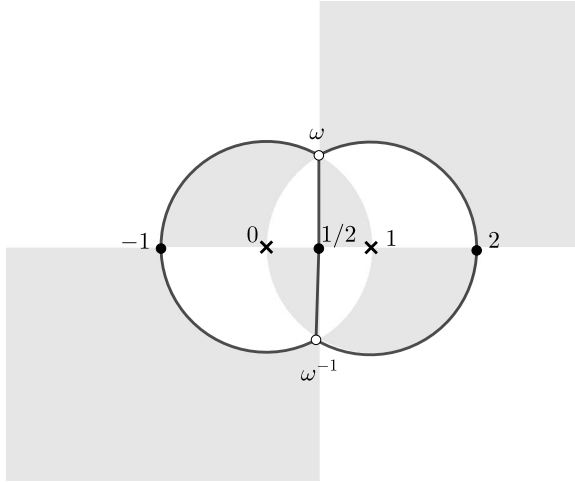


Figura 16. Dessin de j , donde $\omega = \exp(2\pi i/6)$.

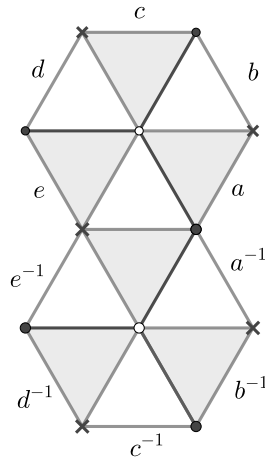


Figura 17. Triangulación equilátera de la esfera asociada a j . La figura muestra un polígono con lados identificados, la arista a se pega con a^{-1} con una isometría que preserva la decoración de los vértices. Las otras aristas de la frontera se pegan de forma análoga.

por dos segmentos de recta que conectan $\omega, 1/2$ y ω^{-1} , también por dos arcos circulares de radio 1 centrados en 0 y en 1 (vea la Figura 16).

La función j induce, vía pull-back, una métrica en la esfera de Riemann que hace a todos los triángulos equiláteros. Esta triangulación equilátera puede representarse como un pegado de triángulos equiláteros euclidianos como se muestra en la Figura 17.

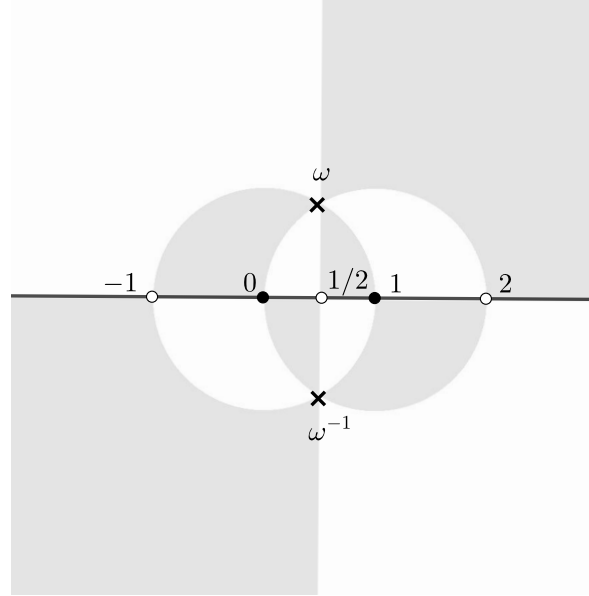


Figura 18. Dessin d'enfant de $1 - 1/j$.

En la prueba del Corolario 67 vimos que dada una triangulación equilátera \mathcal{T} (no necesariamente decorada) en una superficie X , existe una función de Belyi $g: X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ tal que su triangulación asociada coincide con la subdivisión baricéntrica de \mathcal{T} . A continuación veremos en Proposición 69 que si \mathcal{T} está decorada, entonces g es igual a $1 - 1/j(f)$, donde $f: X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es la función de Belyi que realiza a la triangulación equilátera decorada \mathcal{T} (la cual sabemos que existe por Teorema 61). Esta proposición es bien conocida.

Proposición 69. *Sea X una superficie de Riemann compacta dada por una triangulación equilátera decorada \mathcal{T} , y sea $f: X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ su función de Belyi asociada. Entonces la función de Belyi dada por la subdivisión baricéntrica de \mathcal{T} (decorada como en el Corolario 67) es equivalente a $1 - 1/j(f)$.*

Demostración. A partir del dessin de j (vea la Figura 16) podemos notar que la triangulación (decorada) de $1 - 1/j$ está dada por la Figura 18, observe que las triangulaciones de j y $1 - 1/j$ difieren en la decoración de los vértices.

Denote por \mathcal{D} el dessin de f y \mathcal{T} su triangulación. Tenemos las siguientes observaciones sobre el dessin d'enfant de $1 - 1/j(f)$, las cuales se siguen de la Figura 18:

- (i) Los vértices de la triangulación \mathcal{T} serán vértices del dessin de $1 - 1/j(f)$ con decoración \bullet .

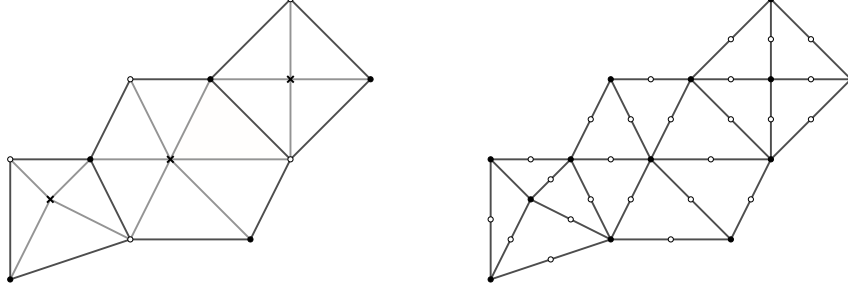


Figura 19. Dessin d'enfant de $1 - 1/j(f)$.

- (ii) Cada vértice decorado con \circ del dessin de $1 - 1/j(f)$ está en el interior de una única arista de \mathcal{T} .

Entonces el dessin de $1 - 1/j(f)$ (vea la Figura 19) es equivalente al dessin de la función de Belyi asociado a la subdivisión baricéntrica. Por lo tanto dichas funciones son equivalentes (bajo equivalencia de cubrientes ramificados).

□

3.3. Suma conexas de funciones de Belyi

3.3.1. Definición de la suma conexas de dos funciones de Belyi.

Sean $f_1: X_1 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ y $f_2: X_2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ dos funciones de Belyi. Consideremos también sus triangulaciones equiláteras decoradas. Sea T_1^+ un triángulo negro de f_1 y T_2^- un triángulo blanco de f_2 . Podemos hacer la suma conexas de X_1 con X_2 quitando el interior de T_1^+ y el interior de T_2^- y pegando las fronteras de T_1^+ y T_2^- por el homeomorfismo $f_2^{-1} \circ f_1: \partial T_1^+ \rightarrow \partial T_2^-$. Denote dicha superficie por $X_1 \#_{T_1^+, T_2^-} X_2$.

La aplicación $f_1 \#_{T_1^+, T_2^-} f_2: X_1 \#_{T_1^+, T_2^-} X_2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ dada por la fórmula

$$(38) \quad f_1 \#_{T_1^+, T_2^-} f_2(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in X_1 - \text{int } T_1^+ \\ f_2(x), & x \in X_2 - \text{int } T_2^-, \end{cases}$$

está bien definida y continua.

Por construcción la superficie $X_1 \#_{T_1^+ T_2^-} X_2$ tiene una estructura equilátera decorada inducida por las estructuras equiláteras de X_1 y X_2 , con la cual es una superficie de Riemann. Claramente la función (38) es holomorfa fuera de $\partial T_1^+ = \partial T_2^-$ en $X_1 \#_{T_1^+ T_2^-} X_2$, y por continuidad es holomorfa también en toda la suma conexa. Podemos notar que dicha función es la que realiza la triangulación obtenida en la suma conexa.

Definición 70. Consideremos a las funciones de Belyi f_1 y f_2 con sus triangulaciones asociadas. Dada una arista a_1 del dessin de f_1 y una arista a_2 del dessin de f_2 , existe un único triángulo negro T_1 que contiene a a_1 y un único triángulo blanco que contiene a a_2 , luego podemos definir $X_1 \#_{a_1 a_2} X_2$ como $X_1 \#_{T_1 T_2} X_2$.

Observación 71. Veremos en 3.3.2 que la suma conexa de funciones de Belyi depende de los triángulos elegidos, es decir, los cubrientes ramificados obtenidos en la suma conexa pueden no ser isomorfos, si cambiamos de triángulos decorados.

No sabemos si la clase de isomorfismo conforme de $X_1 \#_{T_1^+ T_2^-} X_2$ cambia si cambiamos los dos triángulos decorados en donde se efectúa la suma conexa.

3.3.2. Cálculo de la monodromía de la suma conexa de dos funciones de Belyi. En la siguiente proposición damos unas fórmulas para la suma conexa de dos funciones de Belyi, en la prueba calculamos las permutaciones que generan el grupo de monodromía de la suma conexa. Si $f: X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es una función meromorfa sobre una superficie de Riemann X y $p \in X$, denotaremos por $\text{mult}_p(f)$ la multiplicidad de f en p .

Proposición 72. Sean $f_1: X_1 \rightarrow 2\Delta$ y $f_2: X_2 \rightarrow 2\Delta$ dos funciones de Belyi, y sean T_1^+ y T_2^- un triángulo blanco y uno negro en X_1 y X_2 , respectivamente. Sean P_0 y Q_0 (resp. P'_0 y Q'_0) los vértices de T_1^+ (resp. de T_2^-) decorados con \circ y \bullet , respectivamente. Entonces se satisfacen las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \text{mult}_{P_0}(f_1 \#_{T_1^+ T_2^-} f_2) &= \text{mult}_{P_0} f_1 + \text{mult}_{P'_0} f_2 - 1 \\ \text{mult}_{Q_0}(f_1 \#_{T_1^+ T_2^-} f_2) &= \text{mult}_{Q_0} f_1 + \text{mult}_{Q'_0} f_2 - 1 \\ \deg(f_1 \#_{T_1^+ T_2^-} f_2) &= \deg f_1 + \deg f_2 - 1. \end{aligned}$$

Demostración. Como antes, fijemos un etiquetado (enumeración) de las aristas de los dessins \mathcal{D}_{f_1} y \mathcal{D}_{f_2} con números en $\{1, \dots, \deg f_1\}$ y en $\{1, \dots, \deg f_2\}$, respectivamente. Y sean (σ_0, σ_1) y (σ'_0, σ'_1) , las parejas de permutaciones asociadas a los dessins \mathcal{D}_{f_1} y \mathcal{D}_{f_2} , respectivamente (vea Definición 48). Recuerde que tales permutaciones determinan la monodromía de las funciones de Belyi, vea la Proposición 56 y la Observación 55.

Sean $d_1 = \deg f_1$ y $d_2 = \deg f_2$. Como $\{1, \dots, d_1\}$ es un subconjunto de $\{1, \dots, d_1 + d_2\}$ podemos pensar a (σ_0, σ_1) como una pareja de permutaciones en $S_{d_1 + d_2}$. Por otra parte, si identificamos a $i \in \{1, \dots, d_2\}$ con $d_1 + i$, podemos pensar a (σ'_0, σ'_1) como una pareja de permutaciones en $S_{d_1 + d_2}$ que permuta los números del $d_1 + 1$ al $d_1 + d_2$. A lo largo de la demostración asumiremos estas identificaciones. También, asumiremos que las aristas de los dessins están etiquetadas de acuerdo con esta identificación. Además podemos suponer que \mathcal{D}_{f_1} y \mathcal{D}_{f_2} están contenidos en $X_{1T_1^+} \#_{T_2^-} X_2$.

Denote por $(\sigma_{0T_1} \#_{T_2} \sigma'_0, \sigma_{1T_1} \#_{T_2} \sigma'_1)$ la pareja de permutaciones asociadas a $\mathcal{D}_{f_1T_1^+ \#_{T_2^-} f_2}$.

Supongamos que alrededor de $P_0 \in X_1$ inciden las aristas $i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, \dots, d_1 + d_2\}$ del dessin \mathcal{D}_{f_1} , con ese orden cíclico siguiendo la orientación positiva, entonces σ_0 es igual al ciclo $(i_1 i_2 \dots i_n)$, con n la valencia de P_0 . Análogamente, en la Figura 20 están indicadas las aristas que inciden en Q_0, P'_0 y Q'_0 . Luego se tienen los siguientes ciclos en $S_{d_1 + d_2}$:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= (i_1 i_2 \dots i_n), \\ \sigma_1 &= (i'_1 i'_2 \dots i'_k), \\ \sigma'_0 &= (j_1 j_2, \dots j_m), \\ \sigma'_1 &= (j'_1 j'_2, \dots j'_l). \end{aligned}$$

Notemos que al hacer el pegado en la construcción de suma conexa, la arista i_1 e j_1 se fusionan en una sola. Entonces tenemos lo siguiente:

- (i) Observe de la Figura 20 que el ciclo de $\sigma_{0T_1} \#_{T_2} \sigma'_0$ alrededor del vértice $P_0 = P'_0 \in X_{1T_1^+} \#_{T_2^-} X_2$ es:

$$(39) \quad (j_1 j_2 \dots j_m i_2 \dots i_n),$$

esto es, primero recorremos las aristas del dessin $\mathcal{D}_{f_2} \subset X_{1T_1^+} \#_{T_2^-} X_2$ que inciden en P'_0 y después al llegar a j_1 recorremos las aristas de $\mathcal{D}_{f_1} \subset X_{1T_1^+} \#_{T_2^-} X_2$ que inciden en P_0 , siguiendo la orientación positiva.

Puesto que los demás vértices blancos no fueron alterados al hacer la suma conexa, los demás ciclos de $\sigma_{0T_1^+} \#_{T_2^-} \sigma'_0$ se quedan igual.

- (ii) Análogamente para $Q_0 = Q'_0$ en la superficie $X_{1T_1^+} \#_{T_2^-} X_2$, la permutación cíclica de $\sigma_{1T_1} \#_{T_2} \sigma'_1$ alrededor de dicho punto es

$$(40) \quad (i_1 i'_2 \dots i'_k j'_2 \dots j'_l),$$

y los demás ciclos de $\sigma_{1T_1^+} \#_{T_2^-} \sigma'_1$ no se alteran.

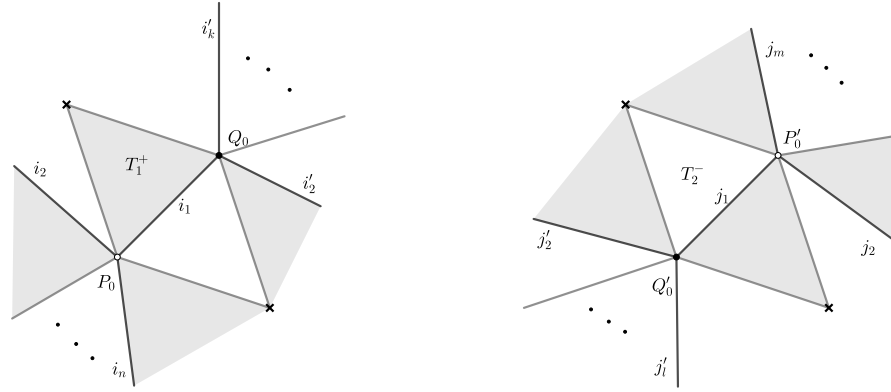


Figura 20. A la izquierda (resp. a la derecha) están indicadas las aristas de la triangulación de X_1 (resp. de X_2) que tienen en común el vértice \circ y \bullet de T_1^+ (resp. T_2^-).

Con esto queda descrito la pareja $(\sigma_{0T_1} \#_{T_2} \sigma'_0, \sigma_{1T_1} \#_{T_2} \sigma'_1)$, la cual genera el grupo de monodromía de $f_{1T_1^+} \#_{T_2^-} f_2$.

De lo anterior se siguen las fórmulas buscadas, ya que la multiplicidad de $f_{1T_1^+} \#_{T_2^-} f_2$ en $P_0 = P'_0$ es justo la longitud del ciclo (39), el cual es $\text{mult}_{P_0} f_1 + \text{mult}_{P'_0} f_2 - 1$. Para la segunda fórmula aplicamos un argumento análogo con el ciclo (40). Por último, para calcular el grado sumamos las multiplicidades de las preimágenes de 0 (los vértices blancos) aplicando la fórmula anterior. \square

Observe que la gráfica en el dessin d'enfant de la suma conexa de dos funciones de Belyi se obtiene fusionando las aristas de T_1^+ y T_2^- que están en los dessin correspondientes.

Ejemplo 73. Considere los polinomios

$$f_1(z) = \frac{4^4}{3^3} z(1-z)^3, \quad f_2(z) = 4z(1-z),$$

los cuales son casos particulares de polinomios *doble estrella* $P_{m,n}$ (vea [GG12] p. 171, 259) cuyos dessin son árboles en la esfera de Riemann (vea la Figura 27). En Figura 21 mostramos a la esfera con dos triangulaciones equiáteras decoradas cuyos dessin asociados son equivalentes a los de f_1 y f_2 . En dicha figura la esfera está representado mediante polígonos con lados identificados.

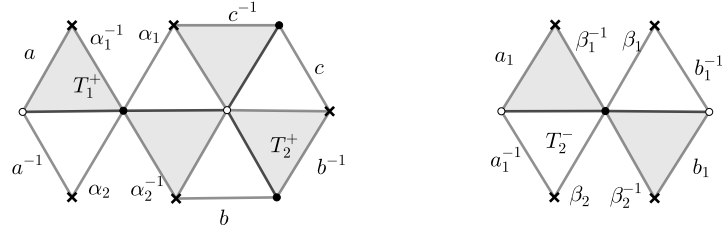


Figura 21. Dessins de $f_1(z) = \frac{4^4}{3^3}z(1-z)^3$, $f_2(z) = 4z(1-z)$. En las dos figuras hemos indicado un apareamiento de las aristas de la frontera: una arista x se pegará con la arista x^{-1} por medio de una isometría que preserve la decoración de los vértices.

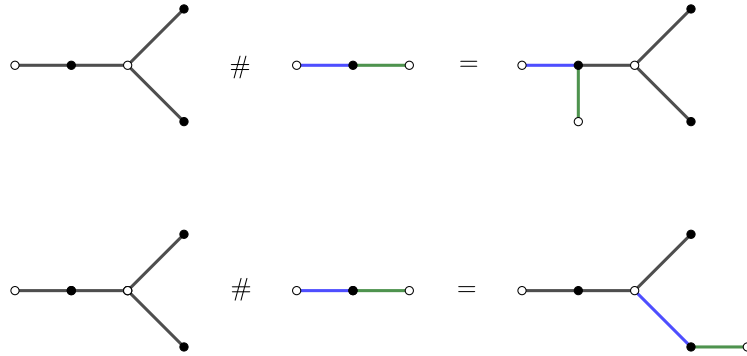


Figura 22. Gráficas en el plano correspondientes al dessin de $f_{1_{T_1^+} \#_{T_2^-} f_2}$ y $f_{1_{T_2^+} \#_{T_2^-} f_2}$, respectivamente.

En la Figura 22 mostramos las gráficas correspondientes a $f_{1_{T_1^+} \#_{T_2^-} f_2}$ y $f_{1_{T_2^+} \#_{T_2^-} f_2}$.

Podemos observar de las fórmulas anteriores que en general la suma conexa de funciones depende de los triángulos elegidos (vea el Ejemplo 73). En 3.3.3 damos una condición para que la suma conexa sea independiente de la elección de los triángulos.

En el siguiente ejemplo describimos la suma conexa del invariante j consigo mismo.

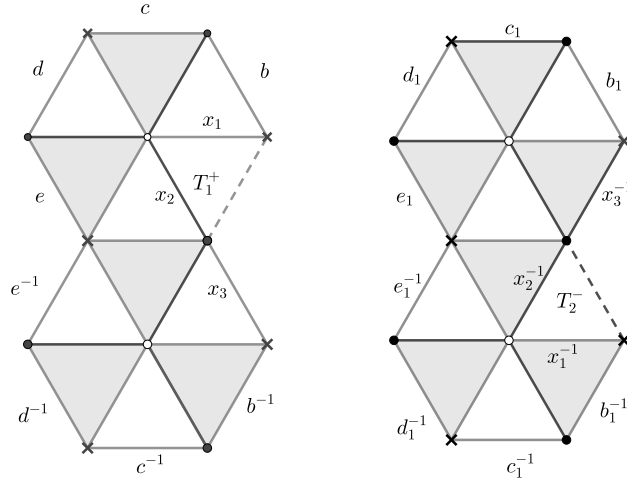


Figura 23. Dessin de $j_{T_1^+} \#_{T_2^-} j$.

Ejemplo 74 (Suma conexa $j \# j$). Consideremos el dessin del invariante j (ver la Figura 17), tomemos la suma conexa $j_{T_1^+} \#_{T_2^-} j$, donde T_1^+ y T_2^- están indicados en la Figura 23 con líneas punteadas.

En el pegado obtenemos, topológicamente, la esfera con la decoración mostrada en la Figura 24.

3.3.3. Suma conexa de funciones de Belyi que son de Galois. Recuerde que una función meromorfa $f: X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es de *Galois* o *regular* si su grupo de transformaciones de cubierta $\text{Deck}(f)$ actúa transitivamente en las fibras de los valores regulares de f (ver [For81]). Equivalentemente la cubierta no ramificada, obtenida al remover los valores críticos y sus preimágenes, es un cubriente regular (o de Galois).

Observación 75. Suponga que $f: X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es de Belyi y de Galois. Puesto que $\text{Deck}(f)$ actúa en las fibras, $\text{Deck}(f)$ actúa en los vértices del dessin preservando las decoraciones, recuerde que los puntos \circ (resp. $\bullet, *$) son los puntos en la fibra $f^{-1}(0)$ (resp. $f^{-1}(1), f^{-1}(\infty)$).

Note que el semiplano superior \mathbb{H} está uniformemente cubierto por f y que la preimagen $f^{-1}(\mathbb{H})$ es la unión ajena de los interiores de los triángulos negros. Por otra parte, como f es de Galois, $\text{Deck}(f)$ actúa transitivamente en las componentes conexas de $f^{-1}(\mathbb{H})$. Por lo tanto, concluimos que $\text{Deck}(f)$ actúa transitivamente en los interiores de los triángulos negros. Un argumento similar muestra que $\text{Deck}(f)$ también actúa transitivamente en los interiores de los triángulos blancos.

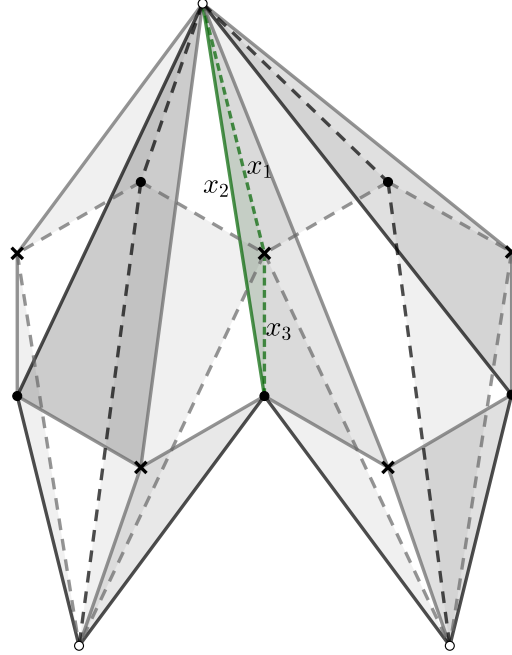


Figura 24. Visualización topológica de la suma conexas $j_{T_1^+} \#_{T_2^-} j$. La frontera de los triángulos en donde se realizó el pegado está indicada con verde.

Análogamente, $f^{-1}((0, 1))$ es la unión de las aristas (sin vértices) del dessin y, $\text{Deck}(f)$ actúa transitivamente en las componentes conexas de $f^{-1}((0, 1))$, por ser de Galois. Por lo tanto $\text{Deck}(f)$ actúa transitivamente en las aristas.

Con lo anterior concluimos que $\text{Deck}(f)$ actúa transitivamente en los triángulos blancos y negros preservando la decoración de los vértices.

Proposición 76. Si $f_1: X_1 \rightarrow \hat{C}$ y $f_2: X_2 \rightarrow \hat{C}$ son dos funciones de Belyi que son de Galois, entonces dados $T_1^+, T_1'^+$ dos triángulos negros de X_1 y $T_2^-, T_2'^-$ dos triángulos blancos de X_2 , existe un biholomorfismo

$$\Phi: X_1 \#_{T_1^+} \#_{T_2^-} X_2 \rightarrow X_1 \#_{T_1'^+} \#_{T_2'^-} X_2$$

que hace conmutar el siguiente diagrama

$$(41) \quad \begin{array}{ccc} X_1 \#_{T_1^+} \#_{T_2^-} X_2 & \xrightarrow{\Phi} & X_1 \#_{T_1'^+} \#_{T_2'^-} X_2 \\ & \searrow f_1 \#_{T_1^+} \#_{T_2^-} f_2 & \swarrow f_1 \#_{T_1'^+} \#_{T_2'^-} f_2 \\ & \hat{C} & \end{array}$$

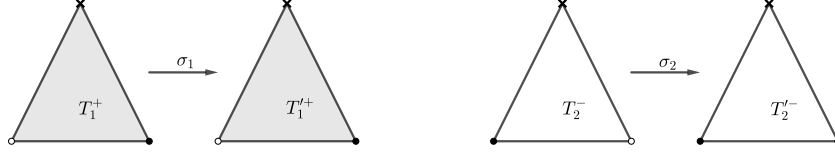


Figura 25. Transformaciones deck preservan decoración.

Demostración. Por la Observación 75 existe $\sigma_1 \in \text{Deck}(f_1)$ y $\sigma_2 \in \text{Deck}(f_2)$ tal que $\sigma_1(T_1^+) = T_1'^+$ y $\sigma_2(T_2^-) = T_2'^-$ que preservan la decoración de los vértices (vea la Figura 25).

Definamos el mapeo

$$\sigma_{1T_1^+ \#_{T_2^-} \sigma_2}: X_{1T_1^+} \#_{T_2^-} X_2 \rightarrow X_{1T_1'^+} \#_{T_2'^-} X_2$$

como sigue

$$\sigma_{1T_1^+ \#_{T_2^-} \sigma_2}(x) = \begin{cases} \sigma_1(x), & x \in X_1 - \text{int } T_1^+ \\ \sigma_2(x), & x \in X_2 - \text{int } T_2^-. \end{cases}$$

La aplicación está bien definida porque si $x \in \partial T_1^+$, $y \in \partial T_2^-$ tal que $x \sim y$, entonces $f_1(x) = f_2(y)$, luego $f_1(\sigma(x)) = f_2(\sigma(y))$, por lo tanto $\sigma(x) \sim \sigma(y)$. Además, $\sigma_{1T_1^+ \#_{T_2^-} \sigma_2}$ es un homeomorfismo.

Claramente $\sigma_{1T_1^+ \#_{T_2^-} \sigma_2}$ es conforme en el complemento de $\partial T_1^+ = \partial T_2^-$ y, por continuidad dicha función también puede extenderse conformemente a toda la suma conexa.

El diagrama (41) conmuta porque

$$\begin{aligned} (f_{1T_1'^+} \#_{T_2'^-} f_2) \circ (\sigma_{1T_1^+ \#_{T_2^-} \sigma_2})(x) &= (f_1 \circ \sigma_1)_{T_1^+} \#_{T_2^-} (f_2 \circ \sigma_2)(x) \\ &= f_{1T_1^+} \#_{T_2^-} f_2(x). \end{aligned}$$

□

3.3.4. Suma conexa de polinomios z^m . Como los polinomios de la forma z^m , con $m \geq 1$, son de Galois, la suma conexa no depende de los triángulos elegidos. En este caso denotaremos la suma conexa simplemente por $z^m \# z^n$.

De la discusión anterior tenemos que el dessin de $z^m \# z^n$ es el mismo que el de z^{m+n-1} , por lo tanto ambas funciones de Belyi tienen la misma

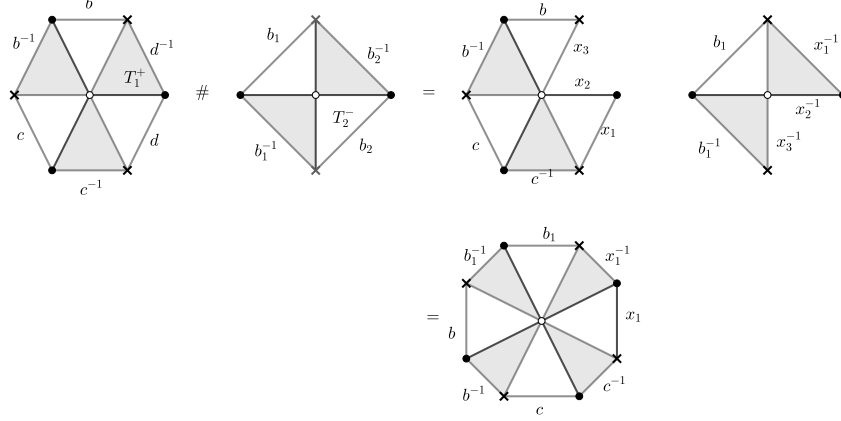


Figura 26. Suma conexa de z^3 con z^2 , representado topológicamente por polígonos identificados.

monodromía (vea Proposición 56). Por lo tanto, tenemos que:

$$z^m \# z^n = z^{m+n-1}$$

(salvo isomorfismo de cubrientes ramificados).

Entonces tenemos las siguientes propiedades:

- (i) Asociatividad: $(z^m \# z^n) \# z^k = z^{m+n+k-2} = z^m \# (z^n \# z^k)$.
- (ii) Existencia del neutro: el polinomio z .
- (iii) Conmutatividad.

Por lo tanto las funciones de Belyi de la forma z^m forman, con la operación suma conexa, un monoide conmutativo (bajo relación de equivalencia de cubrientes ramificados). En la Figura 26 ilustramos la suma conexa de z^3 con z^2 .

Observación 77. La suma conexa de dos polinomios de la forma z^m , con m impar, es una operación cerrada.

Observación 78 (Polinomios de Shabat). Un polinomio que es una función de Belyi tiene como dessin un árbol bicolorado y recíprocamente, dado un árbol bicolorado existe un polinomio de Belyi cuyo dessin es equivalente a dicho árbol. Dichos polinomios son conocidos como *polinomios de Shabat* (vea [SZ94]).

Si (X, \mathcal{D}) es un dessin con X de género 0, podemos notar que \mathcal{D} es un árbol si y sólo si \mathcal{D} tiene sólo una cara, esto es $X - \mathcal{D}$ tiene solo una componente conexas. Luego, si (σ_0, σ_1) son las permutaciones asociadas a \mathcal{D} ,

entonces \mathcal{D} es un árbol si y sólo si $\sigma_0\sigma_1$ tiene un único ciclo (vea Observación 49).

En lo que sigue supondremos que un polinomio de Shabat P está dado por la función de Belyi de una triangulación equilátera decorada en la esfera de Riemann, esto se puede suponer por que siempre podemos jalar a $\hat{\mathbb{C}}$ la estructura equilátera decorada de 2Δ mediante P .

Proposición 79. *La suma conexa de polinomios de Shabat es de nuevo un polinomio de Shabat, salvo equivalencia de cubrientes ramificados.*

Demostración. Para la prueba calcularemos el número de caras del dessin de la suma conexa de dos polinomios de Shabat y verificaremos que es igual a 1, para esto aplicaremos la fórmula de la Proposición 50:

$$(42) \quad 2-2g = (\#\{\text{ciclos de } \sigma_0\} + \#\{\text{ciclos de } \sigma_1\}) - N + \#\{\text{ciclos de } \sigma_1\sigma_0\},$$

que se cumple para un dessin (X, \mathcal{D}) sobre una superficie de género g , con pareja de permutaciones (σ_0, σ_1) y con N aristas.

Supongamos P_1 y P_2 son dos polinomios de Shabat de grados d_1 y d_2 . Sean \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 sus dessins respectivos, cuyas parejas de permutaciones asociadas son (σ_0, σ_1) y (σ'_0, σ'_1) . Sabemos que d_1 (resp. d_2) es igual al número de aristas de \mathcal{D}_1 (resp. \mathcal{D}_2). Entonces de (42) se siguen las siguiente fórmulas:

$$(43) \quad \begin{aligned} 1 &= \#\{\text{ciclos de } \sigma_0\} + \#\{\text{ciclos de } \sigma_1\} - d_1 \\ 1 &= \#\{\text{ciclos de } \sigma'_0\} + \#\{\text{ciclos de } \sigma'_1\} - d_2 \end{aligned}$$

(por la Observación 78 el número de ciclos de $\sigma_0\sigma_1$ y de $\sigma'_0\sigma'_1$ es igual a 1).

Considere la suma conexa $P_1\#P_2$ (para simplificar la notación por el momento no escribiremos los triángulos en donde realizamos la suma conexa), de la Proposición 72 tenemos que $\deg(P_1\#P_2) = \deg P_1 + \deg P_2 - 1$, también de la prueba de Proposición 72 se tiene que:

$$(44) \quad \begin{aligned} \#\{\text{ciclos de } \sigma_0\#\sigma'_0\} &= \#\{\text{ciclos de } \sigma_0\} + \#\{\text{ciclos de } \sigma'_0\} - 1, \\ \#\{\text{ciclos de } \sigma_1\#\sigma'_1\} &= \#\{\text{ciclos de } \sigma_1\} + \#\{\text{ciclos de } \sigma'_1\} - 1. \end{aligned}$$

Recordemos, por topología, que la suma conexa de dos superficies de género 0 es de nuevo de género 0, luego aplicando la fórmula (42) a $\mathcal{D}_{P_1\#P_2}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} 2 &= \#\{\text{ciclos de } \sigma_0\#\sigma'_0\} + \#\{\text{ciclos de } \sigma_1\#\sigma'_1\} - (d_1 + d_2 - 1) + \\ &\quad \#\{\text{ciclos de } (\sigma_0\#\sigma'_0)(\sigma_1\#\sigma'_1)\} \\ &= \#\{\text{ciclos de } (\sigma_0\#\sigma'_0)(\sigma_1\#\sigma'_1)\} + 1 \end{aligned}$$

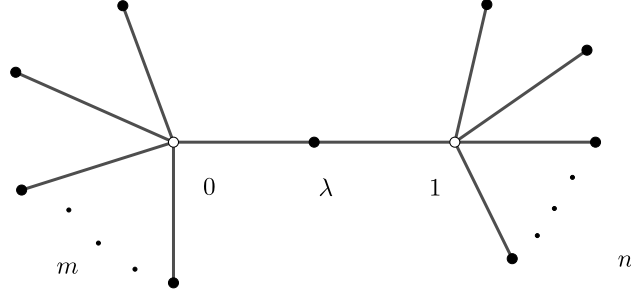


Figura 27. Árbol doble-estrella dado por $P_{m,n}$.

(la última igualdad se obtiene sustituyendo las ecuaciones (43) y (44)).

Por lo tanto $\#\{\text{ciclos de } (\sigma_0 \# \sigma'_0)(\sigma_1 \# \sigma'_1)\} = 1$. Luego, por la observación 78 se sigue que $P_1 \# P_2$ es isomorfo (como cubriente ramificado) a un polinomio de Shabat. \square

3.3.5. Suma conexa de polinomios doble-estrella. Los árboles doble estrella son gráficas del estilo mostrado en la Figura 27. Estos dessins pueden realizarse por polinomios de de la forma:

$$P_{m,n}(z) = \mu z^m (1-z)^n, \quad \mu = \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n}, \quad \lambda = \frac{m}{m+n}, \quad m, n \geq 1.$$

Denotemos por a y b a los intervalos $[0, \lambda]$ y $[\lambda, 1]$, respectivamente, y por a_1, b_1 a los intervalos $[-1, 0]$ y $[0, 1]$ respectivamente. Note que la suma conexa $z^m \#_{a_1} (1-z^2) \#_{b_1} z^n$ (la suma conexa a lo largo de las aristas se realiza de acuerdo a la Definición 70) tiene el mismo dessin que $P_{m,n}$, por lo tanto se tiene la siguiente igualdad

$$z^m \#_{a_1} (1-z^2) \#_{b_1} z^n = P_{m,n}(z)$$

(salvo isomorfismo de cubrientes ramificados).

3.3.6. Suma conexa de polinomios de Tchebychev. Recordemos que los *polinomios Tchebychev* son aquellos que satisfacen la identidad funcional:

$$T_n(\cos z) = \cos nz.$$

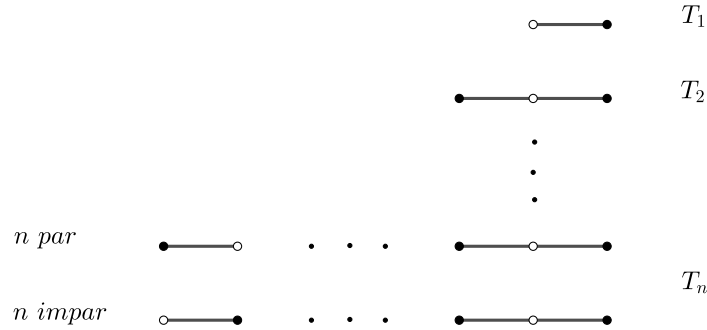


Figura 28. Dessins de polinomios de Tchebychev T_n . Todos los dessins tienen como puntos extremos a -1 y 1 , y vértices en $\cos k\pi/n$.

Usando la fórmula de De Moivre es posible calcularlos explícitamente. De hecho tienen que satisfacer la siguiente fórmula recursiva: (i) para $n = 0$, $T_0(x) = 1$; para $n \geq 1$

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

Esto implica que el polinomio T_n es de grado n .

Los puntos críticos del polinomio $T_n(x)$ son $\cos k\pi/n$, con $k = 1, \dots, n - 1$, por lo tanto los valores críticos son

$$T_n\left(\cos \frac{k\pi}{n}\right) = \cos k\pi = \begin{cases} -1, & k \text{ impar} \\ 1, & k \text{ par, } k = 1, \dots, n - 1. \end{cases}$$

Entonces T_n tiene solo tres valores críticos. La función

$$\bar{T}_n(z) = \frac{1}{2}(T_n(z) + 1)$$

es una función de Belyi, para cada $n \geq 1$ con valores críticos en $0, 1$ y ∞ . Los dessins de estas funciones se muestran en la Figura 28.

Cuando hablemos de la función de Belyi T_n , por abuso de notación, nos referimos realmente a \bar{T}_n . En lo siguiente también trabajaremos con la función $1 - \bar{T}_n$, que también por abuso de notación, solamente escribiremos $1 - T_n$.

Note que en los dessin de las funciones de Belyi dados por polinomios de Tchebychev T_k , con $n \geq 2$, tienen dos aristas distinguidas, a saber, aquellas que están en los extremos. Observando los dessins de cada suma conexa

podemos notar las siguientes identidades:

$$(45) \quad \begin{cases} T_l \# T_m = T_{l+m-1}, & m \text{ impar}, \\ (1 - T_l) \# T_m = T_{l+m-1}, & m \text{ par}, \\ T_l \# (1 - T_m) = 1 - T_{l+m-1}, & m \text{ par}, \end{cases}$$

donde la suma conexas la tomamos con respecto a las aristas extremas; el de la derecha para la primera función y el de la izquierda para la segunda función. Note que para $m \geq 1$, el dessin de $1 - T_m$ se obtiene del dessin de T_m con los colores invertidos, luego se puede realizar las dos últimas sumas conexas de la ecuación (45).

luego cuando m es par, $1 - T_m$ tiene a sus vértices extremos decorados con \circ .

De (45) se sigue lo siguiente:

Proposición 80. *Si n es impar $T_2 \# T_n = T_{n+1}$, si n par $(1 - T_2) \# T_n = T_{n+1}$. Por lo tanto,*

$$\begin{cases} T_n = (1 - T_2) \# T_2 \# (1 - T_2) \# \cdots \# T_2 \# (1 - T_2) \# T_2, & n \text{ impar}, \\ T_n = T_2 \# (1 - T_2) \# T_2 \# \cdots \# T_2 \# (1 - T_2) \# T_2, & n \text{ par}, \end{cases}$$

donde ambas sumas contienen $n - 1$ sumandos y son sumas alternadas de T_2 con $1 - T_2$.

Equivalentemente,

$$(46) \quad \begin{cases} T_n = ((1 - T_2) \# T_2)^{\# \frac{n-1}{2}} = T_3^{\# \frac{n-1}{2}}, & n \text{ impar}, \\ T_n = (T_2 \# (1 - T_2))^{\# \frac{n-2}{2}} \# T_2 = \left((1 - T_3)^{\# \frac{n-2}{2}} \right) \# T_2, & n \text{ par}. \end{cases}$$

Se sigue de la Proposición 80, para el caso m par, la siguiente identidad:

$$(47) \quad T_m = T_2 \# T_{m-1} = T_2 \# \left(T_3^{\# \frac{m-2}{2}} \right),$$

esta se obtiene aplicando la fórmula $T_2 \# T_n = T_{n+1}$ haciendo $n = m - 1$, y aplicando la fórmula (46) a T_{m-1} .

Observación 81. De (45) se sigue que la suma conexas es cerrada en los polinomios de Tchebychev de grado impar. Además, forman un monoide conmutativo. De (46) se sigue que dicho monoide está generado por T_3 .

3.3.7. Suma conexas de superficies con triangulaciones equiláteras. Suponga que X_1 y X_2 son superficies de Riemann dadas por estructuras equiláteras (no necesariamente decoradas). Sean T_1 y T_2 dos triángulos de X_1 y X_2 , respectivamente. Decoremos a T_1 y T_2 con los símbolos $(\circ, \bullet, *)$ de tal forma que dicha decoración induce una orientación positiva en T_1 y

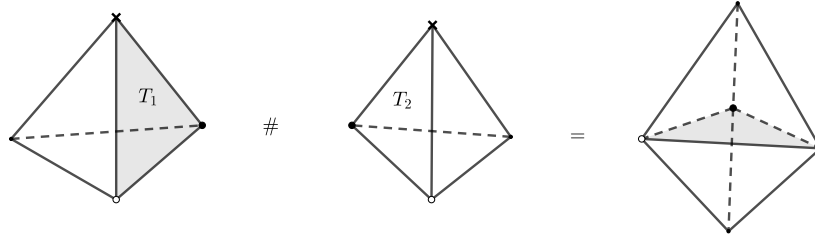


Figura 29. Suma conexa de dos tetraedros.

negativa en T_2 . Consideremos la suma conexa $X_{1T_1} \#_{T_2} X_2$, donde el homeomorfismo de pegado es la isometría de T_1 a T_2 que preserva la decoración. Como antes, $X_{1T_1} \#_{T_2} X_2$ tiene también una estructura equilátera, con la cual es una superficie de Riemann aritmética.

La Figura 29 muestra un ejemplo de suma conexa de dos superficies trianguladas equiláteramente.

3.3.8. Flips. Otra forma de definir la suma conexa de dos superficies trianguladas es la siguiente: en lugar de retirar un triángulo en cada superficie removemos rombos, es decir, pares de triángulos adyacentes. Sean R_1 y R_2 dos rombos en X_1 y X_2 , respectivamente, y supongamos que un triángulo de cada rombo está decorado con $(\circ, \bullet, *)$, de tal forma que dicha decoración induce una orientación positiva en R_1 y negativa en R_2 , entonces podemos formar la suma conexa $X_{1R_1} \#_{R_2} X_2$, donde el mapeo de pegado es la isometría de ∂R_1 a ∂R_2 que respeta la decoración de los triángulos.

Dada una estructura equilátera decorada en una superficie X si efectuamos la suma conexa de X con un tetraedro sobre un rombo la triangulación de la suma conexa se obtiene de la triangulación de X haciendo un *flip* de las diagonales del rombo (en la Figura 30 mostramos un ejemplo). Cualesquiera dos triangulaciones simpliciales de X con el mismo, y suficientemente grande, número de vértices puede transformarse en la otra, salvo homeomorfismo, por un número finito de flips [BNN95]. Si $P(X, n)$ denota el conjunto de triangulaciones simpliciales de X con n vértices estas triangulaciones son permutadas por los flips.

Pregunta 82. ¿Cuales son los campos de definición de las curvas algebraicas correspondientes a las superficies trianguladas de las diferentes permutaciones bajo la acción de los flips?

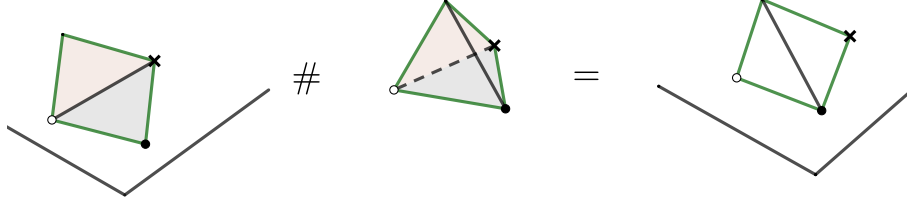


Figura 30. La suma conexas se realiza retirando el interior de un rombo en cada superficie y pegando a lo largo de sus fronteras (las cuales se encuentran indicadas de color verde en la figura) por medio de una isometría euclidiana que invierte la orientación. Combinatoriamente, esto es un flip sobre una diagonal

La respuesta a esta pregunta podría ayudar a entender mejor la relación entre la combinatoria de los dessins d'enfants y sus campos de definición.

3.3.9. Suma conexas con tetraedros y refinamientos elementales (starrings). En esta subsección haremos algunas observaciones elementales sobre las relación entre *starrings* y sumas conexas con tetraedros (vea la Definición 43 para la definición de los refinamientos elementales (*starrings*)). Una triangulación de una superficie puede ser subdividida (o refinarse) por medio de unas operaciones elementales llamadas *starrings* (vea [Mir95] pág. 51). Si partimos de una triangulación equilátera, podemos aplicar este refinamiento y obtener una nueva triangulación equilátera (declarando todos los triángulos equiláteros de longitud 1) que induce una nueva métrica plana con singularidades cónicas.

Observación 83. En general no sabemos cómo cambia la estructura compleja con este proceso, ni como varían los campos de definición.

Sea X el tetraedro regular con su estructura compleja inducida por su triangulación equilátera. Supongamos que uno de sus triángulos T_2 está negativamente orientado con respecto a la decoración $(\circ, \bullet, *)$. Sea X_1 una superficie de Riemann definida por una estructura equilátera, y sea T_1 un triángulo que está orientado positivamente con la decoración $(\circ, \bullet, *)$. Entonces, combinatoriamente, la superficie de Riemann $X_{1T_1} \#_{T_2} X$, se obtiene de X_1 haciendo el *starring* de T_1 con respecto a un punto interior (vea la Figura 31).

Análogamente, si realizamos la suma conexas de dos tetraedros obtenemos una pirámide doble BP con seis triángulos (vea la Figura 29) y consideramos un rombo R_2 formado por un triángulo de cada tetraedro de la suma conexas (orientado negativamente respecto a la decoración usual). Si

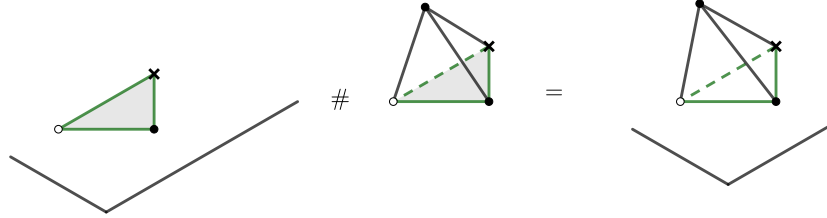


Figura 31. Suma conexas de una superficie con un tetraedro. La suma conexas se obtiene retirando el interior de dos triángulos y pegando las fronteras (las cuales están indicadas con color verde en la figura) por medio de una isometría euclidiana que invierte orientación. Combinatoriamente, esto corresponde al starring con un punto en el interior de un triángulo.

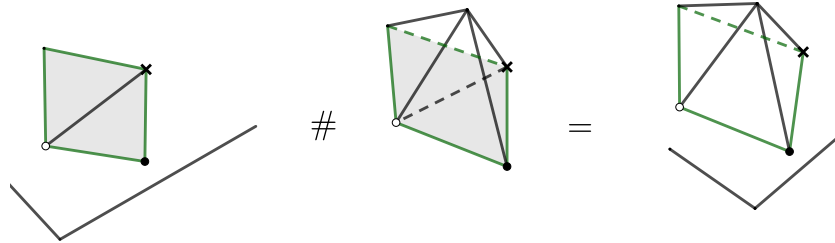


Figura 32. Suma conexas de una superficie con un doble tetraedro. La suma conexas se obtiene retirando el interior de dos rombos y pegando las fronteras (las cuales se encuentran indicadas con color verde en la figura). Combinatoriamente, esto corresponde al starring con un punto en el interior de una arista.

R_1 es un rombo de una superficie X_1 (orientado positivamente, respecto a la decoración usual) podemos hacer la suma conexas $X_1 R_1 \#_{R_2} BP$ para una superficie de Riemann triangulada que combinatoriamente es el starring de la triangulación de X_1 respecto a un punto en el punto medio de una arista de T_1 (vea la Figura 32).

3.4. Curvas elípticas con descomposición hexagonal

3.4.1. Cubrientes de curvas elípticas y órbitas de $PSL(2, \mathbb{Q})$ en el semiplano superior. Comenzaremos con la siguiente proposición:

Proposición 84. *Sea Λ una retícula del plano. Entonces una superficie de Riemann X es un cubriente holomorfo no ramificado de \mathbb{C}/Λ si y sólo si X es conformemente equivalente a \mathbb{C}/Γ para alguna subretícula $\Gamma \leq \Lambda$.*

Demostración. Si $\Gamma \leq \Lambda$ es una subretícula, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$(48) \quad \begin{array}{ccc} & \mathbb{C} & \\ \pi_\Gamma \swarrow & & \searrow \pi_\Lambda \\ \mathbb{C}/\Gamma & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{C}/\Lambda, \end{array}$$

donde π_Γ y π_Λ son las proyecciones naturales al cociente y Φ es la función que cambia de clase de equivalencia. Se sigue de (48) que Φ es un mapeo holomorfo y, por la fórmula de Riemann-Hurwitz, es no ramificado.

Recíprocamente, si existe $f: X \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ un cubriente holomorfo no ramificado, el grupo de transformaciones de cubierta $\text{Deck}(f)$ es una subretícula de Λ y X es conformemente equivalente a $X/\text{Deck}(f)$, entonces tomamos $\Gamma = \text{Deck}(f)$. \square

Proposición 85. Si τ y $\tau' \in \mathbb{H}$, entonces $X_{\tau'}$ es un cubriente holomorfo de X_τ si y sólo si existe $\gamma \in \text{PSL}(2, \mathbb{Q})$ tal que $\tau' = \gamma(\tau)$.

Demostración. Si $X_{\tau'}$ es un cubriente holomorfo de X_τ , existe una subretícula $\Gamma = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ de $\langle 1, \tau \rangle$, tal que $X_{\tau'}$ es conformemente equivalente a \mathbb{C}/Γ . Podemos suponer que $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{H}$. Entonces existen $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tal que

$$(49) \quad \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix}, \quad ad - bc \neq 0,$$

por lo tanto $\gamma(z) = (az + b)/(cz + d)$ está en $\text{PSL}(2, \mathbb{Q})$ y $\gamma(\tau) = \omega_1/\omega_2$. Por otra parte, ω_1/ω_2 está en la órbita de τ' bajo $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$, ya que sus curvas elípticas asociadas son conformemente equivalentes. Por lo tanto τ' está en la órbita que τ bajo $\text{PSL}(2, \mathbb{Q})$.

Recíprocamente, suponga que existe $\gamma \in \text{PSL}(2, \mathbb{Q})$ tal que $\gamma(\tau) = \tau'$. Quitando denominadores podemos suponer que

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ y } ad - bc \neq 0.$$

Luego si definimos $\omega_1 = a\tau + b$ y $\omega_2 = c\tau + d$ tenemos que $\Gamma = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle \leq \langle 1, \tau \rangle$, por lo tanto \mathbb{C}/Γ es cubriente holomorfo de X_τ . Puesto que $\tau' = \omega_1/\omega_2$, \mathbb{C}/Γ es isomorfo a $X_{\tau'}$ y se sigue el resultado. \square

Por el resultado anterior y el Teorema de Belyi se obtiene:

Corolario 86. Si $\tau \in \mathbb{H}$ es tal que X_τ es una curva elíptica aritmética (i.e., definida sobre $\overline{\mathbb{Q}}$) entonces para cualquier $\gamma \in \text{PSL}(2, \mathbb{Q})$, $X_{\gamma(\tau)}$ es también aritmética.

También tenemos el siguiente corolario:

Corolario 87. Si τ y $\tau' \in \mathbb{H}$, entonces $X_{\tau'}$ es cubriente holomorfo de X_{τ} si y sólo si X_{τ} es cubriente holomorfo de $X_{\tau'}$.

El Corolario 87 también puede deducirse de la siguiente manera: supongamos que $X_{\tau'}$ es cubriente holomorfo de X_{τ} , entonces $X_{\tau'} \cong \mathbb{C}/\Gamma$ para alguna subretícula $\Gamma = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle \leq \langle 1, \tau \rangle$. Por la Observación 88 existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k\langle 1, \tau \rangle \leq \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$. Como la curva elíptica X_{τ} es isomorfa a $\mathbb{C}/\langle k, k\tau \rangle$, se sigue que X_{τ} es un cubriente holomorfo de $X_{\tau'}$.

Observación 88. Si $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle \leq \langle 1, \tau \rangle$ es una subretícula, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k\langle 1, \tau \rangle \leq \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$. Esto es porque existe una matriz que satisface (49), luego si tomamos $k = ad - bc$ tenemos que

$$k \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}.$$

3.4.2. Superficies que admiten una descomposición hexagonal regular.

Definición 89 (Grupo triangular). Suponga que T es un triángulo euclidiano con vértices en v_1, v_2, v_3 y ángulos $\pi/l, \pi/m$ y π/n respectivamente, tal que l, m, n son enteros mayores o iguales que 1 y satisfacen la igualdad $\pi/l + \pi/m + \pi/n = 1$. Sea R_i las reflexiones en los lados L_i de T (aquí L_i denota a la arista que conecta v_i con v_{i+1} con subíndices tomados módulo 3). Suponemos que la enumeración es tomada de acuerdo a la orientación positiva. Sean $x_1 = R_3 \circ R_1, x_2 = R_1 \circ R_2$ y $x_3 = R_2 \circ R_3$. Entonces, el grupo

$$\Gamma_{l,m,n} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$$

es llamado el *grupo triangular* de signatura (l, m, n) .

Por ser la composición de dos reflexiones, x_1 (resp. x_2, x_3) es una rotación alrededor del vértice v_1 (resp. v_2, v_3), con ángulo π/l (resp. π/m y π/n) se puede verificar que se cumplen las siguientes relaciones:

$$(50) \quad x_1^l = x_2^m = x_3^n = x_1 x_2 x_3 = 1.$$

El grupo $\Gamma_{l,m,n}$ es un subgrupo discreto de isometrías del plano complejo.

Observación 90. Cuando $1/l + 1/m + 1/n < 1$ o $1/l + 1/m + 1/n > 1$ podemos construir el grupo triangular $\Gamma_{l,m,n}$ como un subgrupo de isometrías del semiplano superior \mathbb{H} o la esfera \mathbb{S}^2 , respectivamente. Ahora los triángulos estarán en la geometría hiperbólica o esférica, pero la construcción es completamente análoga. En este caso también tendremos que $\Gamma_{l,m,n}$ será un grupo discreto de isometrías y se satisfacen las relaciones (50), vea [GG12] §2.2.4 para los detalles de esta construcción.

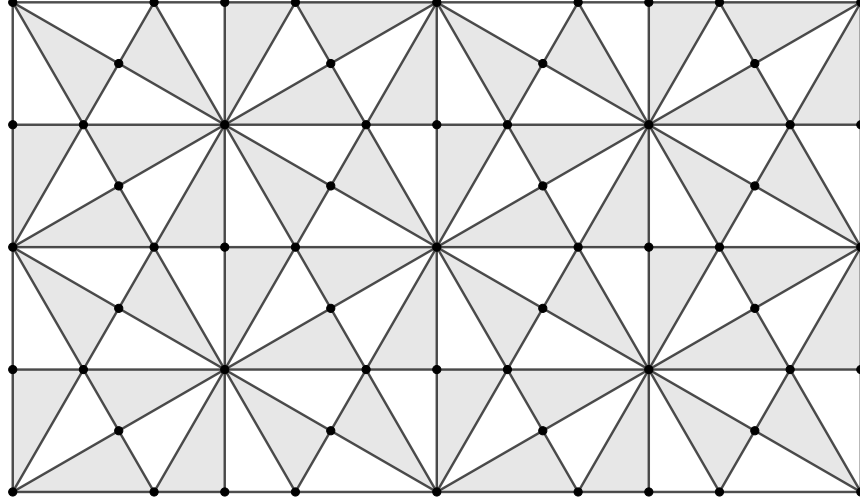


Figura 33. Teselación en el plano del grupo triangular $\Gamma_{2,3,6}$.

En el caso hiperbólico se permite que l, m, n sean infinito, esto corresponde a los vértices del triángulo hiperbólico que tienen ángulo cero.

Proposición 91. *Si Γ es un subgrupo libre de torsión del grupo triangular $\Gamma_{2,3,6}$, entonces Γ es una subretícula de $\Lambda_{1,\omega}$, donde ω es igual a $\exp(2\pi i/6)$.*

Demostración. Consideremos la acción de $\Gamma_{2,3,6}$ en el plano complejo \mathbb{C} y su teselación asociada (vea la Figura 33). Notemos que los únicos puntos en \mathbb{C} con estabilizador no trivial son los vértices de la teselación. Entonces, si $T \in \Gamma_{2,3,6}$ tiene un punto fijo, T tiene que estar en el estabilizador de un vértice, pero estos estabilizadores son cíclicos, por lo tanto T es de torsión.

Por otra parte, si $T \in \Gamma_{2,3,6}$ es una traslación, T manda vértices (de la teselación) en vértices y preserva sus valencias, por lo tanto, preserva la retícula triangular $\Lambda_{1,\omega}$ (los puntos de la retícula triangular son los vértices de valencia 12).

Se sigue que si γ está en el subgrupo libre de torsión Γ , entonces γ tiene que ser una traslación y tiene que preservar la retícula triangular. Por lo tanto $\gamma \in \Lambda_{1,\omega}$. \square

Proposición 92. *Suponga que X es una superficie de Riemann compacta. Entonces, X admite una estructura plana dada por una unión finita de hexágonos regulares (cuyos vértices son de valencia 3) si y sólo si X es conformemente equivalente a \mathbb{C}/Γ , donde Γ es una subretícula de $\Lambda_{1,\omega}$.*

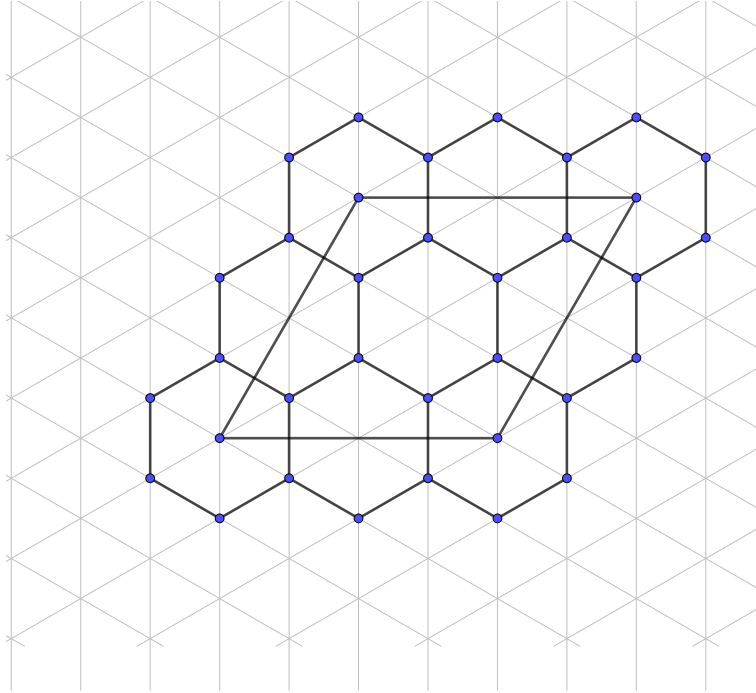


Figura 34. Descomposición hexagonal de $\mathbb{C}/\Lambda_{1,\omega}$.

Demostración. Supongamos que X está dado por una descomposición celular en hexágonos regulares con vértices de valencia 3, así que la superficie no tiene singularidades. Decoremos con el símbolo \bullet los vértices, con el símbolo \circ los puntos medios de las aristas. Definimos nuevas aristas dividiendo a la mitad cada arista de los hexágonos. Este mapa es un dessin d'enfant *uniforme* con valencia $(2, 3, 6)$. Por lo tanto X es conformemente equivalente a \mathbb{C}/Γ para algún subgrupo libre de torsión $\Gamma \leq \Gamma_{2,3,6}$ (vea [GG12] §4.4.1). Por la Proposición 91 tiene que ser una subretícula de $\Lambda_{1,\omega}$.

Recíprocamente, suponga que Γ es una subretícula (*i.e.* un subgrupo) de $\Lambda_{1,\omega}$ con $\omega = \exp(2\pi i/6)$. Por la Proposición 84 el mapeo de cambio de clase $\Phi: \mathbb{C}/\Gamma \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ es un mapeo cubriente holomorfo. Luego cualquier descomposición hexagonal regular de \mathbb{C}/Λ se levanta, por medio de Φ , a una estructura hexagonal en \mathbb{C}/Γ . La estructura compleja inducida por la estructura hexagonal coincide con la original porque Φ es holomorfo. \square

Observación 93. (i) La curva elíptica $\mathbb{C}/\Lambda_{1,\omega}$, con $\omega = \exp(2\pi i/6)$, admite descomposiciones hexagonales, incluso descomposiciones en donde dos hexágonos se intersectan en a lo más una arista, vea la Figura 34.

(ii) En la prueba de la Proposición 92 no suponemos que los hexágonos se intersectan en a lo más una arista. Por ejemplo, la descomposición podría tener un sólo hexágono.

De las proposiciones anteriores (Prop. 84, 85, 92) se sigue el siguiente teorema:

Teorema 94. *Sea $\tau \in \mathbb{H}$, entonces $X_{1,\tau}$ admite una estructura plana sin puntos cónicos dada por una unión finita de hexágonos regulares con cada vértice de valencia 3 si y sólo si existe $\gamma \in \text{PSL}(2, \mathbb{Q})$ tal que $\tau = \gamma(\omega)$, con $\omega = \exp(2\pi i/6)$.*

3.5. Geodésicas en superficies con una triangulación equilátera decorada

Observación 95. Denotaremos por Δ (como anteriormente) al triángulo equilátero con vértices en $0, 1, \omega$, con $\omega = \exp(2\pi i/6)$, decorados con \circ, \bullet y $*$, respectivamente. Supondremos que los vértices de la teselación del grupo triangular $\Gamma_{3,3,3}$, generado por Δ , está decorado de forma compatible con respecto a Δ , es decir, los puntos de la órbita de $0, 1$ y ω bajo $\Gamma_{3,3,3}$ están decorados con $\circ, \bullet, *$, respectivamente. Además supondremos que los triángulos están coloreados de negro si la terna $(\circ, \bullet, *)$ induce una orientación positiva en su frontera, y estará coloreado de blanco en otro caso (vea la Figura 35). Puesto que $\Gamma_{3,3,3}$ actúa en la teselación preservando la decoración de los vértices y preservando la orientación de los triángulos, se sigue que los triángulos negros son los triángulos que están en la órbita de Δ bajo la acción de $\Gamma_{3,3,3}$ y los triángulos blancos son los triángulos que están en la órbita de $\bar{\Delta}$ (la imagen de Δ bajo la conjugación compleja) bajo la acción de $\Gamma_{3,3,3}$.

A lo largo de esta sección supondremos que X es una superficie de Riemann obtenida por una estructura equilátera decorada (en otras palabras X está dada por un dessin d'enfant) y que $f: X \rightarrow 2\Delta$ es su función de Belyi asociada (recuerde que esta aplicación continua manda a cada triángulo de X a uno de los dos triángulos de 2Δ , por medio de una isometría que preserva la decoración de los vértices).

El propósito de esta sección es presentar un método para calcular longitudes de geodésicas en una superficie triangulada decorada en términos del dessin d'enfant. A lo largo de nuestra discusión fijamos al punto $1/2$ en 2Δ como punto base para el grupo fundamental de $2\Delta - \{0, 1, \infty\}$, así que nuestras geodésicas cerradas estarán basadas en $1/2$ (esta elección la hicimos porque usualmente éste es el punto que se toma para definir la monodromía de una función de Belyi, pero no es un punto distinguido). En §A.2 notamos

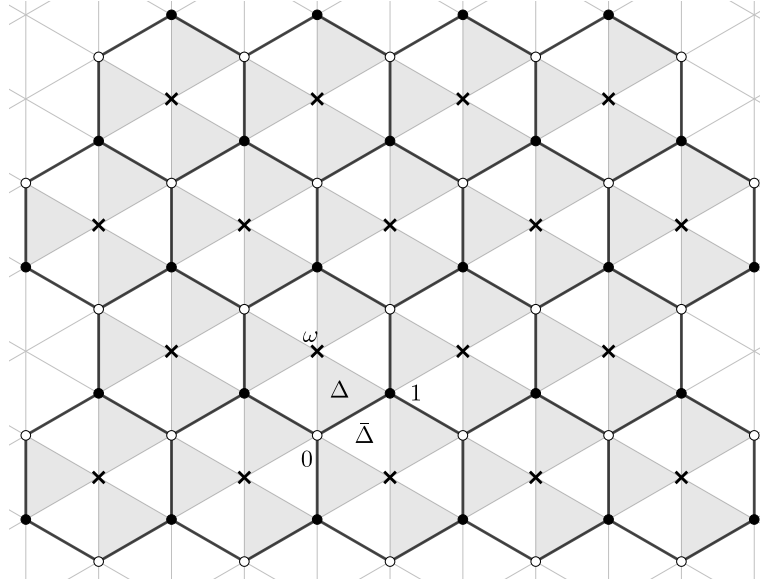


Figura 35. Tesselación decorada del grupo triangular $\Gamma_{3,3,3}$ asociado a Δ . Los puntos de la órbita de 0, 1 y ω bajo $\Gamma_{3,3,3}$ están decorados con $\circ, \bullet, *$, respectivamente.

que la longitud de una geodésica cerrada en 2Δ no cambia cuando movemos el punto base.

Algunas partes de nuestra discusión podría abordarse en un contexto más general, esto lo veremos en la Sección A. En dicha sección damos el concepto de mapeo desarrollante, el cual está implícito en las construcciones que daremos en §3.5.1 (aunque no lo habíamos notado). Con el mapeo desarrollante construimos la superficie de traslación de una superficie euclidiana. Después discutimos las implicaciones en las superficies trianguladas decoradas.

3.5.1. Geodésicas definidas por una línea recta. Sea $\ell(t)$ una línea recta que pasa por $1/2$ y que no contiene ningún punto de la retícula $\Lambda_{1,\omega}$. Sea P la unión de todos los triángulos de la tesselación de $\Gamma_{3,3,3}$ que intersecta ℓ . Note que ℓ está contenido en el interior de P .

De ahora en adelante supondremos P tiene la decoración (en los vértices y en los triángulos) inducida por la decoración de la tesselación de $\Gamma_{3,3,3}$ (vea la Figura 36).

Sea p el punto medio de una arista del dessin de X determinado por f , es decir, $p \in f^{-1}(1/2)$. Existe un único mapeo continuo $\Psi: P \rightarrow X$ que satisface las siguientes condiciones:

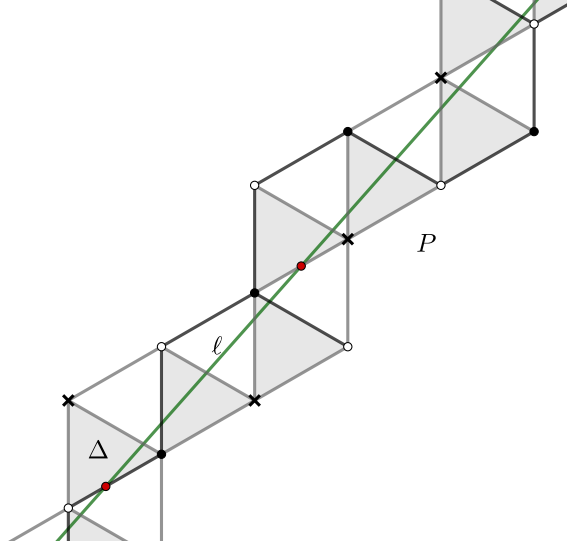


Figura 36. Recta ℓ que pasa por $1/2$ y el polígono decorado P (formado por triángulos decorados de la teselación de $\Gamma_{3,3,3}$) que lo contiene.

- (i) $\Psi(1/2) = p$.
- (ii) Ψ manda isométricamente triángulos en triángulos, por medio de una isometría que preserva la decoración de los vértices y la coloración de los triángulos.

Si T es el triángulo negro en X que contiene a p y $\phi: \Delta \rightarrow T$ es la única isometría que preserva la decoración de los vértices, entonces por la condición (i) y (ii) se cumple $\Psi = \phi$ en Δ . Luego, por el teorema de identidad, se sigue que el mapeo es único (estos mapeos son analíticos con respecto a la estructura equilátera de X).

Por otra parte, el mapeo Ψ se puede obtener como la continuación analítica de ϕ a lo largo de ℓ , por medio de reflexiones sobre los triángulos de P .

Observe que Ψ manda dos triángulos adyacentes de P , por una isometría, a dos triángulos adyacentes en X . Entonces, Ψ es una isometría local en el interior de P . El mapeo Ψ será llamado el *desarrollo* de ℓ en X con respecto a p .

Por la discusión anterior $\Psi(\ell)$ es una geodésica geométrica en X (no necesariamente parametrizada por longitud de arco), con respecto a la métrica plana singular de la estructura equilátera de X . Llamaremos a la curva $\Psi(\ell)$ la *geodésica geométrica inducida* por ℓ en X .

Observación 96. Observemos que la superficie 2Δ se obtiene como el cociente $\mathbb{C}/\Gamma_{3,3,3}$. La proyección natural $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma_{3,3,3}$ es un cubriente ramificado de 2Δ , con puntos críticos los vértices de la teselación de $\Gamma_{3,3,3}$. Además, es una isometría cuando la restringimos a cada triángulo y preserva la decoración. Esto implica que $\pi(\ell)$ es una geodésica geométrica en 2Δ .

Observación 97. Consideremos, con las hipótesis anteriores, a la función de Belyi $f: X \rightarrow 2\Delta$, la recta $\ell(t)$ y un punto $p \in f^{-1}(1/2)$. Sea $\Psi: P \rightarrow X$ el desarrollo de ℓ en X respecto a p y $\Psi_{2\Delta}: P \rightarrow 2\Delta$ el desarrollo de ℓ en 2Δ con respecto a $1/2 \in 2\Delta$.

Considere la función $f \circ \Psi: P \rightarrow 2\Delta$, la cual cumple lo siguiente:

- (i) $f \circ \Psi(1/2) = f(p) = 1/2 \in 2\Delta$,
- (ii) $f \circ \Psi$ mapea triángulos en triángulos con una isometría que preserva la decoración de los vértices y la coloración de los triángulos (ya que f y Ψ cumplen dicha propiedad).

Por lo tanto, $f \circ \Psi = \Psi_{2\Delta}$, esto es, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow \Psi & \downarrow f \\ P & \xrightarrow{\Psi_{2\Delta}} & 2\Delta \end{array}$$

Luego $\tilde{\gamma} = \Psi(\ell)$ es el levantamiento, con respecto a f , de la geodésica $\gamma = \Psi_{2\Delta}(\ell)$. Note que por la Observación 96 $\Psi_{2\Delta} = \pi|_P$, luego γ es igual a $\pi(\ell)$.

3.5.2. Geodésicas cerradas y primitivas en 2Δ . Consideremos la línea recta parametrizada $\ell(t) = 1/2 + t\omega_0$, con $\omega_0 \in \Lambda_{1,\omega}$ (la parametrización es por un múltiplo de longitud de arco). En esta subsección estudiaremos las condiciones que debemos imponer sobre ω_0 que garantizan que $\ell(t)$ induce una geodésica cerrada suave en 2Δ que no contiene ningún vértice de 2Δ . Los resultados que damos en esta subsección son bien conocidos en teoría de billares, como lo explicamos en Apéndice A, pero los presentamos aquí como una exposición elemental.

La siguiente proposición nos da la condición para que $\ell(t)$ no contenga ningún punto de la retícula $\Lambda_{1,\omega}$. En lo que sigue denotaremos por (m, n) el máximo común divisor de dos números enteros m, n .

Proposición 98. Si $\omega_0 \in \Lambda_{1,\omega}$ se expresa como $\omega_0 = m_0 + n_0\omega$, con $n_0 \neq 0$, entonces $\ell(t) = 1/2 + t\omega_0$ no contiene puntos de la retícula $\Lambda_{1,\omega}$ si y sólo si $2(n_0, -m_0)$ no divide a n_0 .

Demostración. Supongamos que ℓ contiene algún punto de la retícula, es decir, existe t tal que

$$(51) \quad \frac{1}{2} + t(m_0 + n_0\omega) = m + n\omega,$$

para algunos enteros m, n . Por lo tanto,

$$(52) \quad \frac{1}{2} + m_0t = m, \quad n_0t = n.$$

Se siguen las ecuaciones

$$(53) \quad \begin{aligned} 1 + 2m_0t &= 2m, \\ n_0 + 2m_0n_0t &= 2mn_0, \\ n_0 + 2m_0n &= 2mn_0. \end{aligned}$$

Luego, la ecuación diofántica lineal

$$(54) \quad n_0 = (2n_0)x + (-2m_0)y$$

tiene solución, por lo tanto $(2n_0, -2m_0)$ divide a n_0 .

Recíprocamente, si $(2n_0, -2m_0)$ divide a n_0 , la ecuación (54) tiene solución en los enteros, digamos $x = m$ y $y = n$. Entonces, si definimos t tal que $n = n_0t$ (por hipótesis $n_0 \neq 0$), se cumplen las igualdades (53) (de abajo hacia arriba). Por lo tanto, se cumple (51). \square

Corolario 99. Si $\omega_0 = m + n\omega \in \Lambda_{1,\omega}$ con $(m, n) = 1$, entonces $\ell(t) = 1/2 + t\omega_0$ no contiene puntos de la retícula $\Lambda_{1,\omega}$ si y sólo si n es impar.

Observación 100. Definamos Hex como el subgrupo libre de torsión de $\Gamma_{3,3,3}$ formado las traslaciones que preservan a los vértices blancos de la teselación.

Observe que $\omega_1 = 2 - \omega$ y $\omega_2 = 1 + \omega$ son vectores linealmente independientes sobre \mathbb{R} que están en Hex (vea la Figura 37). Como Hex tiene rango a lo más 2 (por ser un grupo de traslaciones del plano), se sigue que

$$\text{Hex} = \langle 2 - \omega, 1 + \omega \rangle.$$

Luego cualquier elemento α de Hex se expresa en la base $\{1, \omega\}$ como sigue

$$\alpha = m\omega_1 + n\omega_2 = (2m + n) + (n - m)\omega.$$

Observación 101. Si $\omega_0 = m + n\omega \in \Lambda_{1,\omega}$, entonces $3\omega_0 \in \text{Hex}$, esto es porque

$$3(m + n\omega) = (m - n)(2 - \omega) + (m + n)(1 + \omega).$$

Además si $2\omega_0 = 2(m + n\omega) \in \text{Hex}$, entonces $\omega_0 \in \text{Hex}$.

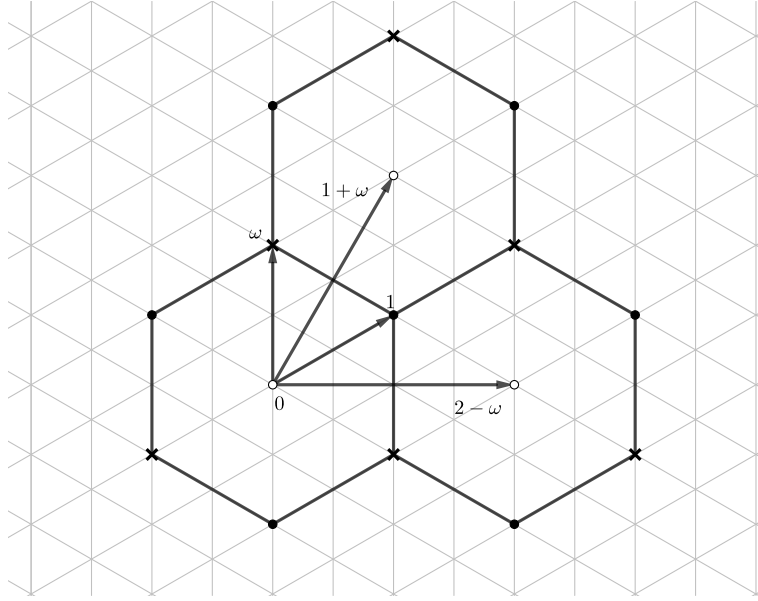


Figura 37. Generadores de la subretícula Hex de $\Lambda_{1,\omega}$.

Proposición 102. Sea $\omega_0 = m_0 + n_0\omega$ con $(m_0, n_0) = 1$. Entonces, la intersección de la recta $\ell(t) = t\omega_0$ con la retícula $\Lambda_{1,\omega}$ es igual al conjunto de las $k\omega_0$, con $k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto la recta $1/2 + t\omega_0$ interseca a $1/2 + \Lambda_{1,\omega}$ en el conjunto de puntos de la forma $1/2 + k\omega_0$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Claramente $k\omega_0 \in \Lambda_{1,\omega}$, para cada $k \in \mathbb{Z}$. Recíprocamente, si $t\omega_0 = m_1 + n_1\omega$ para algunos enteros m_1, n_1 , se tiene que $tm_0 = m_1$ y $tn_0 = n_1$. Como $(m_0, n_0) = 1$ existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $am_0 + bn_0 = 1$, entonces $t = am_1 + bn_1 \in \mathbb{Z}$. \square

Teorema 103. Sea $\gamma(t)$ una curva cerrada en $2\Delta - \{0, 1, \omega\}$ con punto base en $1/2$. Entonces, $\gamma(t)$ es una geodésica (parametrizada) cerrada y primitiva en 2Δ si y sólo si existe $\omega_0 = m + n\omega$, con $(m, n) = 1$ y n impar tal que $\gamma(t) = \pi(1/2 + t\omega_0)$, donde $t \in [0, 1]$ si $\omega_0 \in \text{Hex}$ y $t \in [0, 3]$ si $\omega_0 \notin \text{Hex}$.

Demostración. Sea $\omega_0 = m + n\omega$, con $(m, n) = 1$ y n impar. Considere la recta $\ell(t) = 1/2 + t\omega_0$, por el Corolario 99 sabemos que $\gamma(t) = \pi(\ell(t))$ no pasa por los vértices. Si $\omega_0 \in \text{Hex}$ $\gamma(t)$ es cerrada primitiva en el intervalo $[0, 1]$. Si $\omega_0 \notin \text{Hex}$, sabemos por Observacion 101 que $\gamma(t)$ será cerrada y primitiva en el intervalo $[0, 3]$.

Sea γ una geodésica cerrada suave en 2Δ basada en $1/2$ y que no pasa por los vértices; sea ℓ su levantamiento con respecto a la proyección canónica $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma_{3,3,3}$ con punto base $1/2$ (el levantamiento existe porque π

es un cubriente fuera de los vértices de la teselación). Como π es una isometría local fuera de los vértices, ℓ también es una geodésica (con la métrica euclidiana de \mathbb{C}) que pasa por $1/2$ y que no contiene ningún vértice de la teselación de $\Gamma_{3,3,3}$. Por lo tanto es una línea recta que no contiene ningún punto de $\Lambda_{1,\omega}$. Puesto que la imagen de ℓ bajo π es una curva cerrada, ésta debe de conectar a $1/2$ con $1/2 + \omega_0$, para algún $\omega'_0 \in \Gamma_{3,3,3}$. Puesto que π es una isometría riemanniana local fuera de los vértices los ángulos entre la recta y las aristas que contienen a $1/2$ y $1/2 + \omega_0$ son los mismos, por lo tanto las aristas son paralelas y $\omega'_0 \in \Lambda_{1,\omega}$. Luego, ω'_0 es un vértice blanco de la teselación decorada de $\Gamma_{3,3,3}$.

La Proposición 102 implica que podemos escoger $\omega_0 = m_0 + n_0\omega$ de módulo mínimo que genera la misma recta que ω'_0 . Entonces $(m_0, n_0) = 1$ y como $\ell(t)$ no contiene puntos de la retícula se sigue que n_0 es impar. \square

Corolario 104. *La longitud de la geodésica γ con la parametrización $\pi(\ell(t)) = \pi(1/2 + t\omega_0)$, $\omega_0 = m + n\omega$ con $(m, n) = 1$ y n impar, es igual a*

$$\text{long } \gamma = \begin{cases} |\omega_0|, & \text{si } \omega_0 \in \text{Hex}, \\ 3|\omega_0|, & \text{si } \omega_0 \notin \text{Hex}. \end{cases}$$

(Vea la Proposición 140 para una reformulación del Teorema 103 y Corolario 104).

3.5.3. Geodésicas cerradas y primitivas en superficies. Sea X una superficie de Riemann obtenida de una estructura equilátera decorada y $f: X \rightarrow 2\Delta$ su función de Belyi asociada.

Sea p un punto en $f^{-1}(1/2)$, es decir, p es un punto medio de alguna arista del dessin. Si $\alpha(t)$ es una geodésica cerrada en X que no pasa por los vértices de la triangulación y basada en p , entonces $f(\alpha)$ es una geodésica cerrada en 2Δ basada en $1/2$. Luego, por la discusión de la sección anterior, existe ω_0 que satisface las condiciones del Teorema 103 y tal que $f(\alpha) = \pi(\ell)$ con $\ell(t) = 1/2 + t\omega_0$.

Si Ψ es el desarrollo de ℓ en X con respecto a p (vea la definición de Ψ en §3.5.1), sabemos que $\tilde{\gamma} = \Psi(\ell)$ es el levantamiento de $f(\alpha)$ basado en $1/2$, entonces por unicidad del levantamiento se sigue que $\tilde{\gamma} = \alpha$.

Recíprocamente, veremos en el Corolario 106 que dado $\omega_0 = m + n\omega$, con $(m, n) = 1$ y n impar, la geodésica correspondiente $\tilde{\gamma} = \Psi(\ell(t)) = \pi(1/2 + t\omega_0)$ es también cerrada y suave.

Supongamos que hemos fijado un etiquetado de las aristas del dessin d'enfant asociado a $f: X \rightarrow 2\Delta$ con símbolos a_i , $i = 1, \dots$, $\deg f$. De acuerdo con este etiquetado denotaremos por p_i al punto medio de la arista a_i y, dada una curva γ basada en $1/2$, denotaremos por $\tilde{\gamma}_{p_i}$ su levantamiento basado en p_i .

Como anteriormente, σ_γ denota a la permutación asociada a un elemento $\gamma \in \pi_1(\hat{\mathbb{C}} - \{0, 1, \infty\}, 1/2)$, y (σ_0, σ_1) es la pareja de permutaciones asociadas al dessin de f (vea §3.2.4).

Teorema 105. *Sea X una superficie de Riemann dada por una triangulación equilátera decorada y $f: X \rightarrow 2\Delta$ su función de Belyi. Fijemos un etiquetado de las aristas del dessin d'enfant de f , con símbolos a_1, \dots, a_d donde $d = \deg f$.*

Sea γ una geodésica cerrada en 2Δ basada en $1/2$ definida por una recta $\ell(t) = 1/2 + t\omega_0$ como en el Teorema 103, y a_i una arista del dessin de f con punto medio $p_i \in f^{-1}(1/2)$. Si τ_i es el ciclo que contiene a i en la descomposición cíclica de $\sigma_\gamma \in \text{Sym}(f^{-1}(1/2)) \cong S_d$ (el isomorfismo está dado por el etiquetado), entonces el desarrollo de $\ell(t)$ en X basado en p_i se puede expresar como:

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_{p_i} \cdot \tilde{\gamma}_{\sigma_\gamma(p_i)} \cdots \tilde{\gamma}_{\sigma_\gamma^{r-1}(p_i)}$$

(módulo una reparametrización), donde r es igual a $\text{ord } \tau_i$, es decir la longitud del ciclo τ_i .

Demostración. Existe $\omega_0 = m + n\omega$, con $(m, n) = 1$ y n impar tal que $\gamma(t) = \pi(\ell(t))$, donde $\ell(t) = 1/2 + t\omega_0$. Considere el desarrollo Ψ de $\ell(t)$ con respecto a $p_i \in a_i$. Tenemos que $\tilde{\gamma} = \Psi(\ell)$.

Supongamos que $\omega_0 \in \text{Hex}$. Entonces para cada entero $k \geq 0$ definamos el segmento $\ell_k: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ como $\ell_k(t) = \ell(t + k)$ (i.e., es el segmento de ℓ en el intervalo $[k, k + 1]$). Sea $\tilde{\gamma}_k(t) = \Psi(\ell_k(t))$ y $\gamma_k(t) = \pi(\ell_k(t))$, para $t \in [0, 1]$. Puesto que localmente $f = \pi \circ \Psi^{-1}$, $\tilde{\gamma}_k(t)$ es levantamiento de $\gamma_k(t)$, con $t \in [0, 1]$.

Tenemos que

$$\tilde{\gamma}_k(0) = \tilde{\gamma}_{k-1}(1) = \sigma_\gamma(\tilde{\gamma}_{k-1}(0)),$$

por lo tanto

$$\tilde{\gamma}_k(0) = \sigma_\gamma^k(\tilde{\gamma}_0(0)) = \sigma_\gamma^k(p_i).$$

Luego

$$\tilde{\gamma}_k(1) = \tilde{\gamma}_{k+1}(0) = \sigma_\gamma^{k+1}(p_i),$$

entonces

$$\tilde{\gamma}_{r-1}(1) = \sigma_\gamma^r(p_i) = p_i.$$

Puesto que el producto $\tilde{\gamma}_0 \cdots \tilde{\gamma}_{r-1}: [0, 1] \rightarrow X$ es una reparametrización de $\tilde{\gamma} = \Psi(\ell): [0, r] \rightarrow X$, se sigue que

$$\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}_0 \cdots \tilde{\gamma}_{r-1}(t), \quad t \in [0, r]$$

(módulo una reparametrización). Puesto que $\Psi\ell(0) = \Psi\ell(r)$ y se cierra con el mismo vector tangente, se sigue que $\tilde{\gamma}$, parametrizada en el intervalo $[0, r]$, es una geodésica cerrada suave.

Observe que $\tilde{\gamma}_k = \tilde{\gamma}_{\sigma_\gamma^k(p_i)}$ porque

$$\tilde{\gamma}_{\sigma_\gamma^k(p_i)}(0) = \sigma_\gamma^k(p_i) = \tilde{\gamma}_k(0).$$

Con lo cual concluimos que

$$\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}_{p_i} \cdot \tilde{\gamma}_{\sigma_\gamma(p_i)} \cdots \tilde{\gamma}_{\sigma_\gamma^{r-1}(p_i)}(t), \quad t \in [0, r]$$

(módulo una reparametrización).

Si $\omega_0 \notin \text{Hex}$, con $(m, n) = 1$ y n impar podemos aplicar un argumento análogo al anterior, sólo que ahora con $3\omega_0 \in \text{Hex}$, así que tomamos $\ell_k = \ell(3(t+k))$ con $t \in [0, 1]$ para cada entero $k \geq 0$. Con lo cual obtenemos, módulo una reparametrización, la siguiente igualdad:

$$\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}_{p_i} \cdot \tilde{\gamma}_{\sigma_\gamma(p_i)} \cdots \tilde{\gamma}_{\sigma_\gamma^{r-1}(p_i)}(t), \quad t \in [0, 3r].$$

□

De la prueba del teorema anterior se sigue el siguiente corolario que nos da una fórmula para calcular la longitud de una geodésica en una superficie triangulada decorada en términos del dessin d'enfant (para geodésicas basadas en algún punto de la fibra de $1/2$):

Corolario 106. *Sea γ una geodésica cerrada en 2Δ dada por la parametrización $\ell(t) = 1/2 + t\omega_0$, donde $\omega_0 = m + n\omega$ con $(m, n) = 1$ y n impar. Si a_i es una arista del dessin de X y Ψ es el desarrollo de ℓ con respecto a p_i (el punto medio de a_i), entonces la geodésica $\tilde{\gamma} = \Psi(\ell)$ es suave, cerrada y tiene longitud $\text{long } \tilde{\gamma} = \text{ord } \sigma_{a_i} \text{ long } \gamma$, donde σ_{a_i} es el ciclo de σ_γ que contiene a a_i . Por lo tanto*

$$\text{long } \tilde{\gamma} = \begin{cases} \text{ord } \sigma_{a_i} |\omega_0|, & \omega_0 \in \text{Hex} \\ 3 \text{ord } \sigma_{a_i} |\omega_0|, & \omega_0 \notin \text{Hex} \end{cases}$$

donde σ_{a_i} es el ciclo de σ_γ que contiene a a_i .

3.5.4. Descomposición cíclica de σ_γ . En lo que sigue veremos un algoritmo para calcular la descomposición cíclica de σ_γ .

Considere $\ell(t) = 1/2 + t\omega_0$, donde $\omega_0 = m + n\omega$ con $(m, n) = 1$ y n impar. Supongamos por el momento que $\omega_0 \in \text{Hex}$, entonces $\gamma(t) = \pi(\ell(t))$ con $t \in [0, 1]$ es una geodésica cerrada en 2Δ .

Supongamos que para $t \in [0, 1]$ la recta $\ell(t)$ intersecta a los hexágonos H_1, \dots, H_k , de la teselación hexagonal (con vértices decorados con \circ, \bullet , de la teselación de $\Gamma_{3,3,3}$) y en ese orden. Notemos que $\ell(t)$ intersecta a cada hexágono en 2, 3 ó 4 triángulos de la teselación de $\Gamma_{3,3,3}$.

Digamos que $\ell(t)$ interseca a un H_j en 4 triángulos $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$, en ese orden. Sea a_i la arista de H_j que está en Δ_i y sea p_i su punto medio. Considere la poligonal ℓ_{H_j} que conecta a p_1, p_2, p_3, p_4 , siguiendo ese orden. Notemos que $\ell_{H_j} \subset \bigcup_{i=1}^4 \Delta_i$ y que $\bigcup_{i=1}^4 \Delta_i$ es simplemente conexo. Entonces $\ell \sim \ell_{H_j}$, por una homotopía libre dentro de H_j .

Usando un argumento análogo al anterior podemos probar que $\ell \sim \ell_H$ por una homotopía libre contenido en H_j , en el caso de que ℓ interseca a H_j en 2 o 3 triángulos.

Concluimos que

$$\ell \sim \ell_{H_1} \cdots \ell_{H_k}$$

con una homotopía que fija los puntos extremos (recuerde que estamos tomando el segmento de ℓ en $[0, 1]$) y dentro de la unión de los triángulos que interseca $\ell(t)$, para $t \in [0, 1]$.

Si γ_0 y γ_1 son los generadores de $\pi_1(2\Delta - \{0, 1, \omega\}, 1/2)$, los lazos naturales alrededor de 0 y 1, respectivamente, entonces en 2Δ tenemos:

$$\gamma = \pi(\ell) = \prod \eta_i, \quad \eta_i \in \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_1^{-1}, \gamma_0^{-1}\}$$

ya que un segmento que conecta a los puntos medios de dos aristas adyacentes desciende a γ_0 , γ_1 o a sus inversos, según el color del vértice en común y su orientación.

El razonamiento anterior también puede aplicarse cuando $\omega_0 \notin \text{Hex}$, solo que en este caso debemos tomar la parametrización de $\ell(t)$ en el intervalo $[0, 3]$. A continuación damos un ejemplo que ilustra estas ideas:

Ejemplo 107. Sea $\omega_0 = 3\omega \in \text{Hex}$, $\ell(t) = 1/2 + t\omega_0$, $t \in [0, 1]$ (vea la Figura 38). En este caso ℓ interseca a dos hexágonos H_1 y H_2 , y en cada hexágono interseca 3 triángulos. Entonces $\ell(t)$, con $t \in [0, 1]$, es homotópico a $\ell_{H_1}\ell_{H_2}$ por una homotopía que fija los puntos extremos y contenida en la unión de los triángulos que interseca. Entonces

$$\gamma = \gamma_1^{-1}\gamma_0^{-1}\gamma_1\gamma_0.$$

De la prueba anterior, tal como podemos ver en el Ejemplo 107, podemos notar que para encontrar la factorización de $\gamma = \pi(\ell)$ basta ver a los triángulos que interseca el segmento $\ell(t)$ (con $t \in [0, 1]$ si $\omega_0 \in \text{Hex}$ ó $t \in [0, 3]$ si $\omega_0 \notin \text{Hex}$), y ver como permuta las aristas decoradas con \circ y \bullet de estos triángulos, según avanza t de 0 a 1 (o de 0 a 3, cuando $\omega_0 \notin \text{Hex}$). La permutación alrededor de un vértice blanco aporta un factor γ_0 o γ_0^{-1} , si la rotación fue positiva o negativa, respectivamente; y aporta un factor γ_1 ó γ_1^{-1} , si la rotación con respecto a un vértice negro fue positiva o negativa, respectivamente.

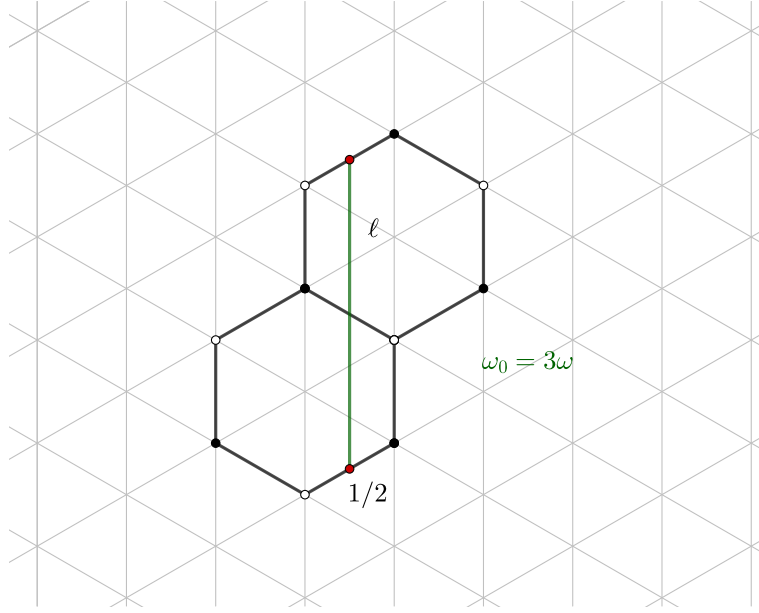


Figura 38. Factorización de γ dada por $\omega_0 = 3\omega$.

Recuerde que para cualesquiera dos elementos γ_1 y γ_2 en el grupo fundamental $\pi_1(\hat{\mathbb{C}} - \{0, 1, \infty\}, 1/2)$, se tiene que $\sigma_{\gamma_1\gamma_2} = \sigma_{\gamma_2}\sigma_{\gamma_1}$. Por lo tanto, si γ se factoriza como

$$\gamma = \eta_1 \cdots \eta_m, \quad \eta_i \in \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_0^{-1}, \gamma_1^{-1}\}$$

se sigue que

$$(55) \quad \sigma_\gamma = \sigma_{\eta_m} \cdots \sigma_{\eta_1}, \quad \sigma_{\eta_i} \in \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_0^{-1}, \sigma_1^{-1}\}$$

recuerde que $\sigma_0 = \sigma_{\gamma_0}$ y $\sigma_1 = \sigma_{\gamma_1}$.

Por hipótesis conocemos explícitamente las permutaciones σ_0 y σ_1 , entonces podemos sustituirlas en la ecuación (55) y poder calcular explícitamente su descomposición cíclica. En el Cuadro 2 hemos calculado la factorización de algunas geodésicas $\gamma = \pi(1/2 + t\omega_0)$ en el grupo fundamental $\pi_1(2\Delta - \{0, 1, \omega\}, 1/2)$, siguiendo el algoritmo que describimos, recordemos que $t \in [0, 1]$ si $\omega_0 \in \text{Hex}$ y $t \in [0, 3]$ en otro caso.

A continuación damos un ejemplo en donde aplicamos el algoritmo anterior para calcular la longitud de algunas geodésicas.

Ejemplo 108. Consideremos las superficie X cuya estructura equilátera decorada se obtiene del doble del anillo plano que se muestra en la Figura

Direcciones ω_0	Factorización de γ en $\pi_1(2\Delta - \{0, 1, \omega\}, 1/2)$
1. $\omega_0 = 1 + \omega \in \text{Hex}$	$\gamma = \gamma_1^{-1}\gamma_0$.
2. $\omega_0 = 3\omega \in \text{Hex}$,	$\gamma = \gamma_1^{-1}\gamma_0^{-1}\gamma_1\gamma_0$.
3. $\omega_0 = 2 + 3\omega \notin \text{Hex}$	$\gamma = \gamma_1^{-1}\gamma_0\gamma_1^{-1}(\gamma_0^{-1})^2\gamma_1^{-1}(\gamma_0^{-1})^2\gamma_1^{-1}\gamma_0^{-1}\gamma_1\gamma_0$ $\gamma_1^2\gamma_0\gamma_1^2\gamma_0\gamma_1^{-1}\gamma_0$
4. $\omega_0 = 2 + \omega \notin \text{Hex}$	$\gamma = \gamma_1^{-1}\gamma_0\gamma_1^2\gamma_0\gamma_1\gamma_0^{-1}\gamma_1^{-1}(\gamma_0^{-1})^2\gamma_1^{-1}\gamma_0$
5. $\omega_0 = 10 + \omega \in \text{Hex}$	$\gamma = \gamma_1^{-1}\gamma_0\gamma_1\gamma_0^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma_0\gamma_1\gamma_0^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma_0\gamma_1\gamma_0^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma_0$
6. $\omega_0 = 13 + 7\omega \in \text{Hex}$	$\gamma = \gamma_1^{-1}\gamma_0\gamma_1^2\gamma_0\gamma_1\gamma_0^{-1}\gamma_1^{-1}(\gamma_0^{-1})^2\gamma_1^{-1}\gamma_0\gamma_1^{-1}\gamma_0\gamma_1^{-1}$ $\gamma_0\gamma_1^2\gamma_0\gamma_1\gamma_0^{-1}\gamma_1^{-1}(\gamma_0^{-1})^2\gamma_1^{-1}\gamma_0$
7. $\omega_0 = 5 - \omega \in \text{Hex}$	$\gamma = \gamma_1\gamma_0^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma_0\gamma_1\gamma_0^{-1}$
8. $\omega_0 = 10 + 7\omega \in \text{Hex}$	$\gamma = \gamma_1^{-1}\gamma_0\gamma_1^{-1}\gamma_0\gamma_1^2\gamma_0\gamma_1^2\gamma_0\gamma_1\gamma_0^{-1}\gamma_1^{-1}(\gamma_0^{-1})^2\gamma_1\gamma_0^2$ $\gamma_1^{-1}\gamma_0\gamma_1^{-1}\gamma_0$
9. $\gamma_0 = 2 + 5\omega \in \text{Hex}$	$\gamma = \gamma_1^{-1}(\gamma_0^{-1})^2\gamma_1^{-1}\gamma_0^{-1}\gamma_1\gamma_0\gamma_1^2\gamma_0$

Cuadro 2. Algunas direcciones ω_0 y la factorización de $\gamma(t) = \pi(1/2 + t\omega_0)$ en $\pi_1(2\Delta - \{0, 1, \omega\}, 1/2)$.

39. Fijemos el etiquetado de su dessin d'enfant como se muestra en el lado derecho de la Figura 39.

Sus permutaciones asociadas son:

$$(56) \quad \begin{aligned} \sigma_0 &= (1\ 2\ 3\ 4\ 5)(9\ 8\ 10)(6\ 7)(11\ 12) \\ \sigma_1 &= (1\ 12\ 10\ 9\ 11)(3\ 4\ 6)(2\ 5)(7\ 8). \end{aligned}$$

Sea $\omega_0 = 5 - \omega$. Según el Cuadro 2 $\gamma = \pi(1/2 + t\omega_0)$ se factoriza en $\pi_1(2\Delta - \{0, 1, \omega\}, 1/2)$ como

$$\gamma = \gamma_1\gamma_0^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma_0\gamma_1\gamma_0^{-1}.$$

Luego σ_γ se factoriza como

$$\sigma_\gamma = \sigma_0^{-1}\sigma_1\sigma_0\sigma_1^{-1}\sigma_0^{-1}\sigma_1.$$

Sustituyendo (56) en la ecuación anterior, obtenemos

$$\sigma_\gamma = (1\ 6\ 11\ 3\ 9\ 4\ 10\ 5\ 8)(2\ 7\ 12).$$

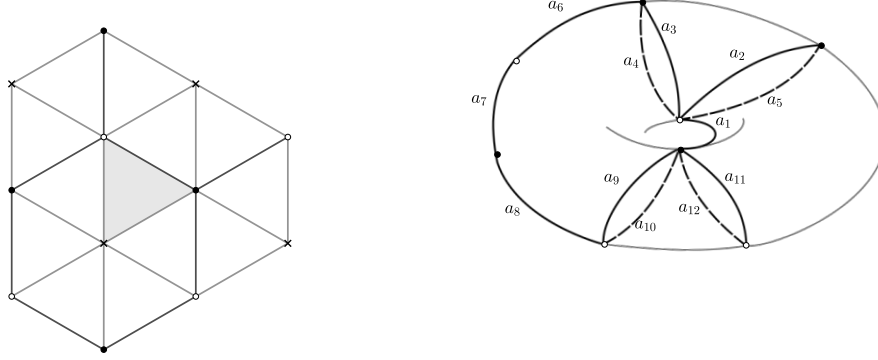


Figura 39. Doble del anillo diamante y su dessin asociado.

Utilizamos el paquete *Sympy* (<https://www.sympy.org/en/index.html>) de *Python* para calcular este producto.

Si $\tilde{\gamma}$ es la geodésica en X con vector tangente $\omega_0 = 5 - \omega$ en el punto medio de la arista a_2 , vea la Figura 40 obtenemos que $\text{ord } \sigma_{a_2} = 3$ y que $5 - \omega \in \text{Hex}$. Luego por el Corolario 106 se sigue que

$$\text{long } \tilde{\gamma} = \text{ord } \sigma_{a_2} |\omega_0| = 3|5 - \omega| \approx 13,76.$$

Esta longitud puede corroborarse manualmente en la Figura 40.

Análogamente, si $\omega_0 = 10 + \omega$, σ_γ tiene la descomposición cíclica

$$\sigma_\gamma = (1 \ 8 \ 5 \ 2 \ 12 \ 11 \ 6)(3 \ 4)(9 \ 10)(7).$$

Luego si $\tilde{\gamma}$ es la geodésica con vector tangente $10 + \omega$ en el punto medio de a_7 (vea la Figura 41), se tiene que

$$\text{long}(\tilde{\gamma}) = \text{ord } \sigma_{a_7} |\omega_0| = |10 + \omega| \approx 10,54$$

Si $\tilde{\gamma}$ está basado en a_1 , $\text{ord } \sigma_{a_1} = 7$, y

$$\text{long}(\tilde{\gamma}) = \text{ord } \sigma_{a_1} |\omega_0| = 7|10 + \omega| \approx 73,75.$$

Las descomposiciones cíclicas de σ_γ para los ejemplos anteriores, y de otros más, se muestran en el Cuadro 3.

Proposición 109. Para cada $k \geq 0$, $\omega_0 = (3k+1)+\omega$ está en Hex. Además, si γ_{ω_0} es la geodésica $\pi(1/2 + t\omega_0)$ en 2Δ , entonces

$$(57) \quad \gamma_{\omega_0} = (\gamma_1^{-1} \gamma_0)(\gamma_1 \gamma_0^{-1} \gamma_1^{-1} \gamma_0)^k.$$

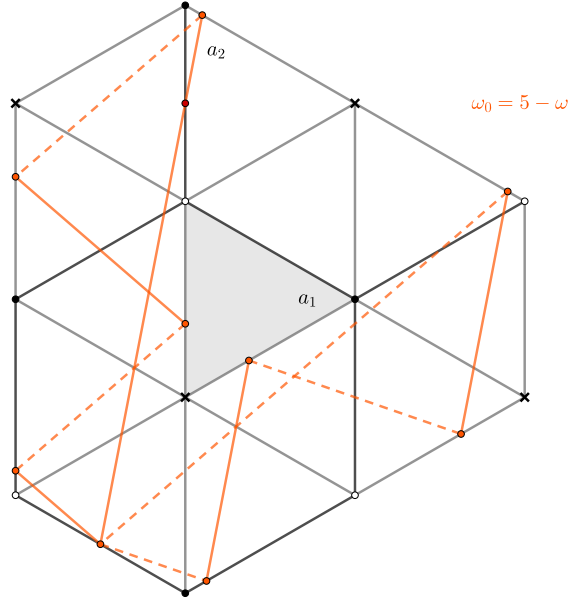


Figura 40. Geodésica $\tilde{\gamma}$ basada en el punto medio de a_2 con dirección $5 - \omega$.

Direcciones ω_0	Factorización de $\sigma_\gamma \in S_{12}$
1. $\omega_0 = 1 + \omega \in \text{Hex}$	$\sigma_\gamma = (1\ 12\ 2)(3\ 7\ 10\ 11\ 8\ 6\ 5)$
2. $\omega_0 = 3\omega \in \text{Hex}$	$\sigma_\gamma = (1\ 9\ 6\ 5\ 11\ 8\ 4)(2\ 7\ 12\ 3\ 10)$
3. $\omega_0 = 2 + \omega \notin \text{Hex}$	$\sigma_\gamma = (2\ 4\ 11)(3\ 7\ 10)(5\ 9\ 12)$
4. $\omega_0 = 13 + 17\omega \in \text{Hex}$	$\sigma_\gamma = (1\ 5\ 12\ 7\ 2\ 11)(4\ 8\ 6\ 9)$
5. $\omega_0 = 5 - \omega \in \text{Hex}$	$\sigma_\gamma = (1\ 6\ 11\ 3\ 9\ 4\ 10\ 5\ 8)(2\ 7\ 12)$
6. $\omega_0 = 10 + \omega \in \text{Hex}$	$\sigma_\gamma = (1\ 8\ 5\ 2\ 12\ 11\ 6)(3\ 4)(9\ 10)$

Cuadro 3. Algunas direcciones ω_0 y la factorización de σ_γ con respecto al dessin dado por (56).

Por lo tanto, si X es una superficie de Riemann con una estructura equilátera decorada cuyo dessin d'enfant define las permutaciones σ_0 y σ_1 , entonces

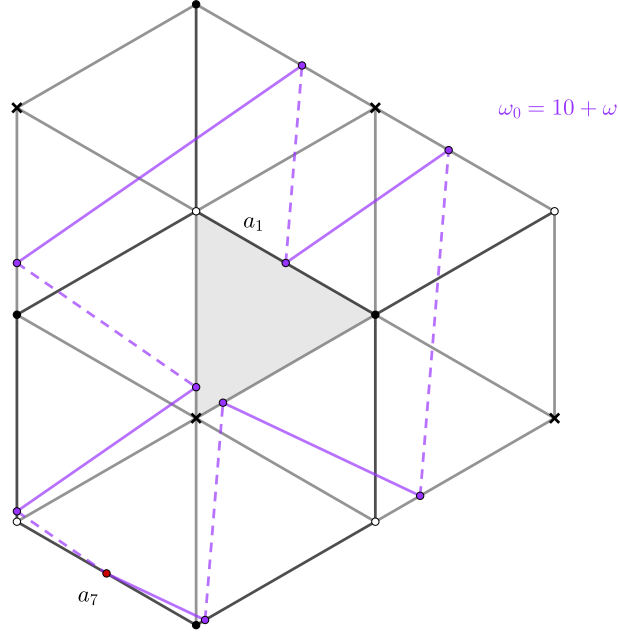


Figura 41. Geodésica $\tilde{\gamma}$ basada en el punto medio de a_1 con dirección $10 + \omega$.

$\sigma_{\gamma_{\omega_0}}$ se factoriza como

$$\sigma_{\gamma_{\omega_0}} = (\sigma_0 \sigma_1^{-1} \sigma_0^{-1} \sigma_1)^k \sigma_0 \sigma_1^{-1}.$$

Demostración. Notemos que $(3k + 1) + \omega = m(2 - \omega) + n(1 + \omega)$, con $m = k$ y $n = k + 1$. Esto prueba la primera afirmación.

Por otra parte, observemos que

$$\gamma_{\omega_0} = \gamma_{(3(k-1)+1)+\omega} (\gamma_1 \gamma_0^{-1} \gamma_1^{-1} \gamma_0).$$

Luego, si aplicamos la fórmula anterior recursivamente obtenemos

$$\gamma_{\omega_0} = \gamma_{1+\omega} (\gamma_1 \gamma_0^{-1} \gamma_1^{-1} \gamma_0)^k.$$

Puesto que $\gamma_{1+\omega} = \gamma_1^{-1} \gamma_0$, se sigue la fórmula (57). \square

Observación 110. Si $\sigma_1 = (1)$ y $\omega_0 = (3k+1)+\omega$, se sigue de la proposición anterior que $\sigma_{\gamma} = \sigma_0$.

Ejemplo 111. Considere el dessin sobre la esfera de Riemann dada por la función de Belyi z^n . En este caso las permutaciones están dadas por

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= (1 \ 2 \ \cdots \ n) \\ \sigma_1 &= \text{Id.} \end{aligned}$$

Consideremos la triangulación asociada al dessin y declaremos a cada triángulo equilátero, para obtener una estructura equilátera. Entonces de la Observación 110 se sigue que para una geodésica $\tilde{\gamma}$ con vector tangente $\omega_0 = (3k + 1) + \omega$ anclado en algún punto medio de una arista, se tiene que

$$\text{long } \tilde{\gamma} = n|(3k + 1) + \omega|.$$

3.6. Estructuras hiperbólicas cónicas

3.6.1. Métrica hiperbólica cónica en superficies compactas con una triangulación decorada. En esta sección explicamos algunas construcciones que obtuvimos estudiando a las superficies trianguladas decoradas mediante triángulos hiperbólicos equiláteros, en lugar de euclidianos. Uno de nuestros objetivos era encontrar explícitamente el módulo de una curva elíptica aritmética, sin embargo, no alcanzamos este propósito, a lo más encontramos un método teórico (vea el Teorema 131), nuestra construcción utiliza un polígono hiperbólico simplemente conexo al que llamamos *cáscara hiperbólica* de la curva elíptica (vea Definición 114).

Sea X una superficie compacta con una triangulación decorada y sea $f_1: X \rightarrow 2\Delta$ su función de Belyi asociada. Consideremos un triángulo hiperbólico, contenido en el disco de Poincaré \mathbb{D} , que tiene como vértices z_1, z_2 y z_3 tal que: (i) z_1 es igual a 0, (ii) la arista entre z_1 y z_2 está sobre el eje real y (iii) la terna (z_1, z_2, z_3) define una orientación positiva en el triángulo. Recuerde que dicho triángulo queda determinado por sus ángulos. Si $\pi/m, \pi/n$ y π/l son los ángulos en z_1, z_2 y z_3 , respectivamente, entonces dicho triángulo será denotado por $\Delta_{m,n,l}$ (vea la Figura 42).

Supondremos además que dicho triángulo está decorado con $\circ, \bullet, *$ en z_1, z_2 y z_3 , respectivamente. Tal decoración determina también la coloración en los triángulos tal como lo hicimos en el caso euclidiano.

Por una construcción análoga a la de 2Δ , definiremos a $2\Delta_{m,n,l}$: consideremos la reflexión hiperbólica R que deja fija, puntualmente, la arista entre z_1 y z_2 ; identificamos la frontera de $\Delta_{m,n,l}$ con la frontera de su reflejado $R(\Delta_{m,n,l})$, mediante R . Esta superficie $2\Delta_{m,n,l}$ es homeomorfa a la 2-esfera y tiene una métrica hiperbólica fuera de los vértices. Y cada uno de los dos triángulos es isométrico a $\Delta_{m,n,l}$. Además, como en el caso euclidiano, dicha triangulación induce una estructura compleja que la hace una superficie de Riemann. Asumiremos que la superficie de Riemann $2\Delta_{m,n,l}$ está dotada de esta métrica hiperbólica cónica y que la decoración de $2\Delta_{m,n,l}$ es la inducida por $\Delta_{m,n,l}$.

Observación 112. La superficie $2\Delta_{m,n,l}$ es conformemente equivalente a $\mathbb{H}/\Gamma_{m,n,l}$, donde $\Gamma_{m,n,l}$ es el grupo triangular generado por $\Delta_{m,n,l}$.

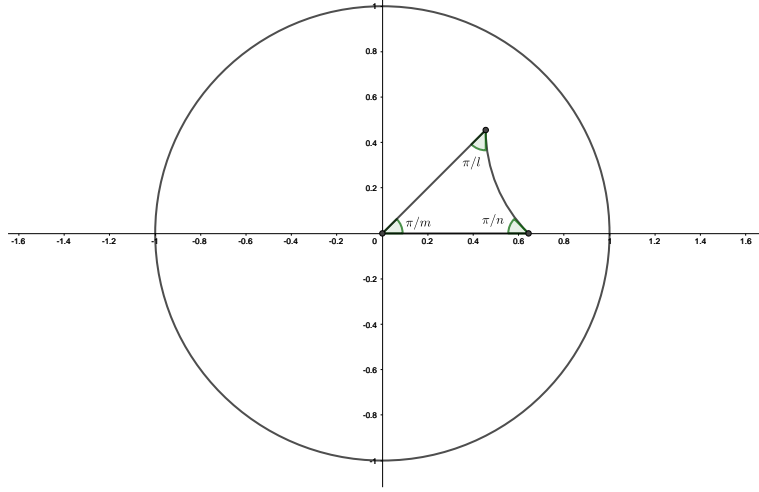


Figura 42. Triángulo hiperbólico $\Delta_{m,n,l}$, con $m = n = l = 4$.

Existe un mapeo conforme $\Phi: \Delta \rightarrow \Delta_{m,n,l}$ que preserva las fronteras, manda vértices en vértices y respeta la decoración; por el Principio de Reflexión de Schwarz podemos extender este mapeo a sus triángulos reflejados; al hacer las identificaciones obtenemos un mapeo conforme en el cociente $\Phi: 2\Delta \rightarrow 2\Delta_{m,n,l}$, vea la Figura 43.

Usando Φ construimos una función de Belyi $f = \Phi \circ f_1: X \rightarrow 2\Delta_{m,n,l}$. Este es un mapeo holomorfo con respecto a la estructuras complejas que hemos definido. Note que esta función realiza la triangulación decorada que teníamos originalmente.

Podemos jalar la métrica de $2\Delta_{m,n,l}$ a X mediante la función f . Con esta métrica cada triángulo se vuelve isométrico a $\Delta_{m,n,l}$.

Resumimos la discusión anterior en la siguiente proposición:

Proposición 113. *Sea X una superficie triangulada y decorada. Para cualesquiera m, n, l , enteros positivos tales que $1/m + 1/n + 1/l < 1$, existe una métrica hiperbólica cónica en X que hace a cada triángulo isométrico al triángulo hiperbólico $\Delta_{m,n,l}$. Dicha métrica está inducida por una función de Belyi $f: X \rightarrow 2\Delta_{m,n,l}$ que realiza la triangulación decorada.*

3.6.2. Representación de una superficie de Belyi en el plano hiperbólico. Sea X una superficie triangulada y decorada inducida por un dessin d'enfant. Sea $O(T)$ la valencia más grande de los vértices de la triangulación T . Si $f: X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es la función de Belyi que realiza la triangulación T se tiene que $O(T) = \max_{p \in f^{-1}\{0,1,\infty\}} \text{mult}_p(f)$.

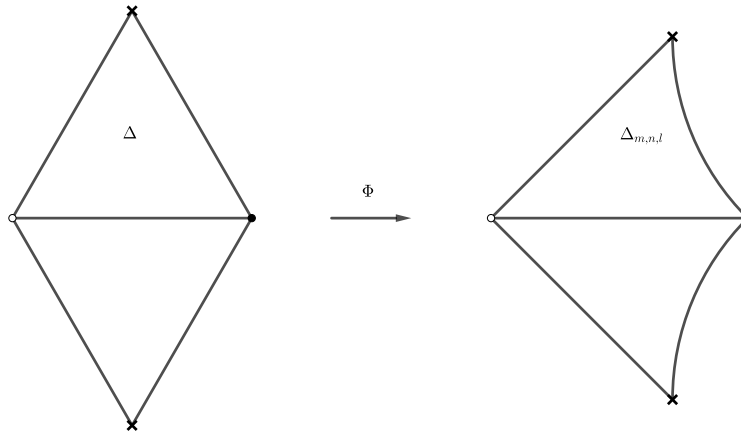


Figura 43. Mapeo conforme entre 2Δ y $2\Delta_{m,n,l}$.

Sea m un entero, con $m > 3$ y $m > O(T)$. Dotemos a X con la métrica hiperbólica cónica inducida por una función de Belyi $f: X \rightarrow 2\Delta_{m,m,m}$, que realiza la triangulación decorada (vea la Proposición 113).

Sea P un polígono conexo formado por un número finito de triángulos de la teselación $T(m, m, m)$ correspondiente al grupo triangular $\Gamma_{m,m,m}$, generado por el triángulo $\Delta_{m,m,m}$ [Mag74]. Además, supondremos que dichos triángulos forman una triangulación de P .

Definición 114. Una *cáscara* (hiperbólica) de X es una función continua $\Psi: P \rightarrow X$ que satisface las siguientes condiciones:

- (i) Preserva triángulos.
- (ii) Es una isometría en la restricción de cada triángulo de P .
- (iii) Respeta las decoraciones (suponemos que la teselación de $\Gamma_{m,m,m}$ está decorada de forma compatible con $\Delta_{m,m,m}$ y que P hereda dicha decoración).
- (iv) La función es inyectiva en el interior de P y cada punto de X tiene a lo más dos preimágenes bajo Ψ .

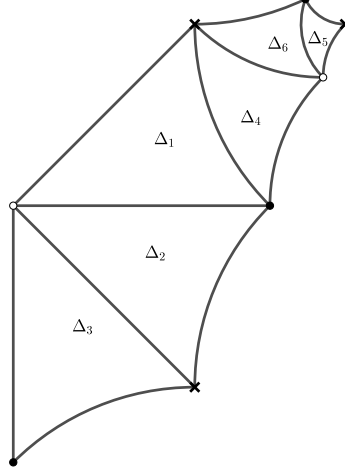


Figura 44. Cáscara asociada a la curva elíptica $\mathbb{C}/\Lambda_{1,\omega}$, con $\omega = \exp(2\pi i/6)$. En este caso tomamos m igual a 4.

Si definimos una relación en P como $x \sim y$ si y sólo si $\Psi(x) = \Psi(y)$, obtenemos un pegado en los lados del polígono, por medio de isometrías hiperbólicas que están en $\Gamma_{m,m,m}$.

Note que la cáscara Ψ desciende en el cociente a un encaje que denotaremos por $\hat{\Psi}$.

Ejemplo 115. En la Figura 44 mostramos una cáscara para la curva elíptica de la Figura 45. La función Ψ mapea cada triángulo Δ_i en T_i respetando las decoraciones. Como anteriormente, suponemos que el hexágono tiene la métrica inducida por la función de Belyi $f: X \rightarrow 2\Delta_{4,4,4}$.

Observación 116. Si $\Psi: P \rightarrow X$ es una cáscara para X , en cada vértice p del polígono P acuden a lo más $O(T)$ triángulos. Puesto que $m > O(T)$ la unión de dichos triángulos no forma una vecindad de p . Por lo tanto, todos los vértices de la triangulación de P están en la frontera.

Observación 117. Si todas las aristas de ∂P están emparejadas dos a dos, entonces $\hat{\Psi}$ es sobre. Ya que $\Psi(P/\sim)$ es una superficie cerrada (conexa y sin frontera) contenida en X .

Proposición 118. Si alguno de los lados de P no está emparejado con otro, entonces Ψ puede extenderse a un polígono que tiene un triángulo más que P .

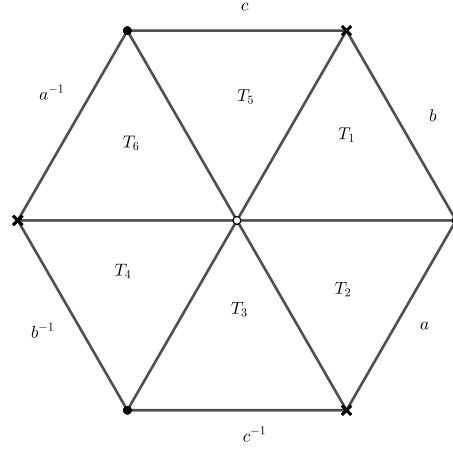


Figura 45. Hexágono con lados identificados, correspondiente a $\mathbb{C}/\Lambda_{1,\omega}$, con $\omega = \exp(2\pi i/6)$.

Demostración. Sea a una arista de ∂P que no está emparejada con otra. Adjuntemos al polígono P el triángulo Δ_1 de la teselación que tiene a a como arista y que no está en P . Tal triángulo debe de existir porque a está en la frontera de P . Puesto que $m > O(T)$ las aristas de Δ_1 , que son distintas de a , no están en P ; esto asegura que no usamos una arista que ya estaba emparejada.

Decoremos los vértices de Δ_1 de acuerdo a la decoración de la arista a y lo coloreamos de acuerdo a la orientación positiva o negativa, según los vértices.

Si T_1 es el triángulo en X , adyacente a $\Psi(a)$, definimos $\Psi: \Delta_1 \rightarrow T_1$ como la isometría que preserva la decoración, obtenemos una cáscara $\Psi: P \cup \Delta_1 \rightarrow \Psi(P) \cup T_1$ que tiene un triángulo más que P . \square

Observación 119. Existe una cáscara $\Psi: P \rightarrow X$ cuyos lados están emparejados dos a dos. Esta afirmación se sigue de la Proposición 118 y por un argumento de maximalidad. Note que por la Proposición 117 dicha cáscara desciende a un homeomorfismo $\hat{\Psi}: (P/\sim) \rightarrow X$, que resulta un mapeo conforme.

Resumimos lo anterior en el siguiente teorema.

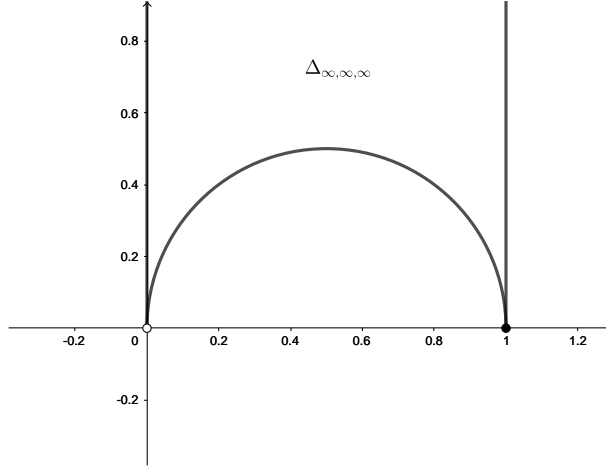


Figura 46. Triángulo ideal con vértices en 0, 1 e ∞ .

Teorema 120. *Si X una superficie triangulada decorada con una métrica hiperbólica cónica inducida por una función de Belyi $f: X \rightarrow 2\Delta_{m,m,m}$ que realiza la triangulación, donde m es un entero tal que $m > 3$ y $m > O(T)$. Entonces existe una cáscara $\Psi: P \rightarrow X$ que es maximal y desciende a un mapeo conforme en el cociente $\hat{\Psi}: (P/\sim) \rightarrow X$.*

Note que $\Psi: (P/\sim) \rightarrow X$ es un mapeo conforme que también manda triángulos en triángulos, respeta las decoraciones y su restricción a cada triángulo es una isometría. Naturalmente, P/\sim tiene una función de Belyi $f_P: (P/\sim) \rightarrow 2\Delta_{m,m,m}$, definida como el mapeo que manda triángulos en triángulos, por medio de una isometría que respeta la decoración. Por construcción, el mapeo $\hat{\Psi}$ es un isomorfismo de cubrientes ramificados, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 P/\sim & \xrightarrow{\hat{\Psi}} & X \\
 & \searrow f_P & \swarrow f \\
 & & 2\Delta_{m,m,m}
 \end{array}$$

3.6.3. El caso de de las triangulaciones hiperbólicas decoradas ideales. A continuación haremos una construcción análoga con triángulos hiperbólicos ideales. Sea $\Delta_{\infty,\infty,\infty}$ el triángulo en el semiplano superior \mathbb{H} que tiene como vértices 0, 1 e ∞ (vea la Figura 46).

Decoremos los vértices 0, 1 e ∞ con los símbolos $\circ, \bullet, *$, respectivamente; tomamos la reflexión hiperbólica R en la arista que conecta a \circ con \bullet , e identificamos mediante R la frontera $\Delta_{\infty,\infty,\infty}$ con la frontera $R(\Delta_{\infty,\infty,\infty})$.

La superficie de género 0 que acabamos de construir lleva una estructura hiperbólica cónica, la cual a su vez induce una estructura compleja. Denotaremos a esta superficie de Riemann por $2\Delta_{\infty,\infty,\infty}$.

Observación 121. La superficie $2\Delta_{\infty,\infty,\infty}$ es conformemente equivalente a $\mathbb{H}/\Gamma(2)$, donde $\Gamma(2)$ es el grupo de congruencias módulo 2 (vea [GG12] Teorema 2.34).

Si X es una superficie con una triangulación decorada, existe un mapeo de Belyi $f: X \rightarrow 2\Delta_{\infty,\infty,\infty}$ que la realiza. Dotaremos a X con la métrica hiperbólica cónica obtenida de jalar la métrica de $2\Delta_{\infty,\infty,\infty}$, mediante la función f .

Por un argumento análogo podemos probar que también tendremos una cáscara maximal $\Psi: P \rightarrow X$, que desciende en el cociente a un mapeo conforme $\Psi: (P/\sim) \rightarrow X$.

Observación 122. En este caso el polígono ideal P tiene que ser convexo.

La cáscara ideal P también puede obtenerse de la uniformización de la esfera perforada en tres puntos: consideremos a $2\Delta_{\infty,\infty,\infty}$ como el cociente $\mathbb{H}/\Gamma(2)$. Dada una función de Belyi $f: X \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma(2)$, existe un subgrupo K_0 de $\Gamma(2)$ de índice finito y un mapeo conforme Ψ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$(58) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{H}/K_0 & \xrightarrow{\Psi} & X \\ & \searrow \pi & \swarrow f \\ & & \mathbb{H}/\Gamma(2) \end{array},$$

donde π es la función que cambia de clase $[z]_{K_0} \mapsto [z]_{\Gamma(2)}$. Entonces, Ψ debe mandar triángulos en triángulos, preservar la decoración y ser una isometría en la restricción de cada triángulo. Luego, si tomamos una región fundamental P de K_0 , obtenemos una cáscara $\Psi: P \rightarrow X$ que coincide en el cociente con el mapeo Ψ del diagrama (58).

Ejemplo 123. En la Figura 47 mostramos tres paralelogramos identificados por la frontera. La superficie con frontera, que obtenemos al hacer el pegado, es homeomorfa a un anillo cerrado. Si decoramos dicha superficie como indica la figura, al tomar su doble obtenemos una superficie X de género 1 con una triangulación equilátera decorada.

En la Figura 47 están etiquetados 6 triángulos de X con símbolos Δ_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Los otros 6 triángulos de X estarán etiquetados con la letra Δ'_i , de tal forma que Δ'_i está al reverso de Δ_i .

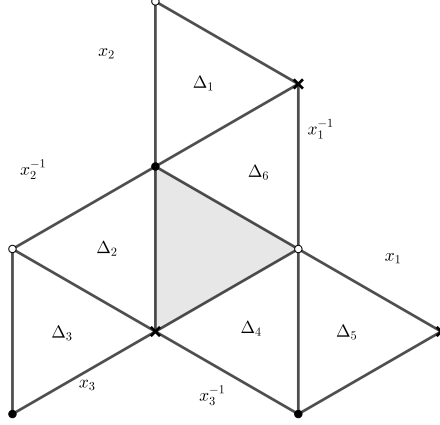


Figura 47. Paralelogramos identificados por la frontera. Después de hacer la identificación obtenemos un anillo.

Ahora considere la métrica hiperbólica cónica sobre la superficie X que hace a cada triángulo Δ_i y Δ'_i isométrico al triángulo hiperbólico ideal con vértices en $1, \rho, \rho^2$, donde $\rho = \exp(2\pi i/3)$.

Sea P el polígono hiperbólico ideal decorado de la Figura 48. Definamos $\Psi: P \rightarrow X$ como la aplicación que mapea cada triángulo de P (vea la Figura 48) a cada triángulo de X por medio de una isometría que preserva la decoración, de acuerdo al etiquetado señalado. Por definición Ψ es una cáscara para X .

Observe que $\Psi(\partial P)$ forma una gráfica en la superficie que es una unión de aristas de la triangulación (vea la Figura 49).

Definición 124. Sea X una superficie de Riemann y Γ un subgrupo de $\text{Aut}(X)$ (grupo de automorfismos holomorfos de X). Decimos que una región F de X es un dominio fundamental para Γ si: i) cualquier $z \in X$ es equivalente bajo la acción de Γ a un elemento z' en la cerradura de F (es decir, están en la misma órbita); ii) dos puntos en F no pueden ser equivalentes bajo la acción Γ .

Observación 125. Sea X una curva elíptica (una superficie de Riemann compacta de género 1) cuya estructura compleja está dada por una triangulación equilátera hiperbólica decorada, con triángulos isométricos a $\Delta_{\infty, \infty, \infty}$ (por lo tanto, tiene una métrica hiperbólica en el complemento de un número finito de puntos). Sea $\Psi: P \rightarrow X$ una cáscara hiperbólica ideal para X . Supongamos que $\Lambda_{1, \tau}$ es la retícula que uniformiza a X y $\pi: \mathbb{C} \rightarrow X$ un mapeo cubriente tal que $\text{Deck}(\pi)$ (el grupo de transformaciones de cubierta) es igual a $\Lambda_{1, \tau}$.

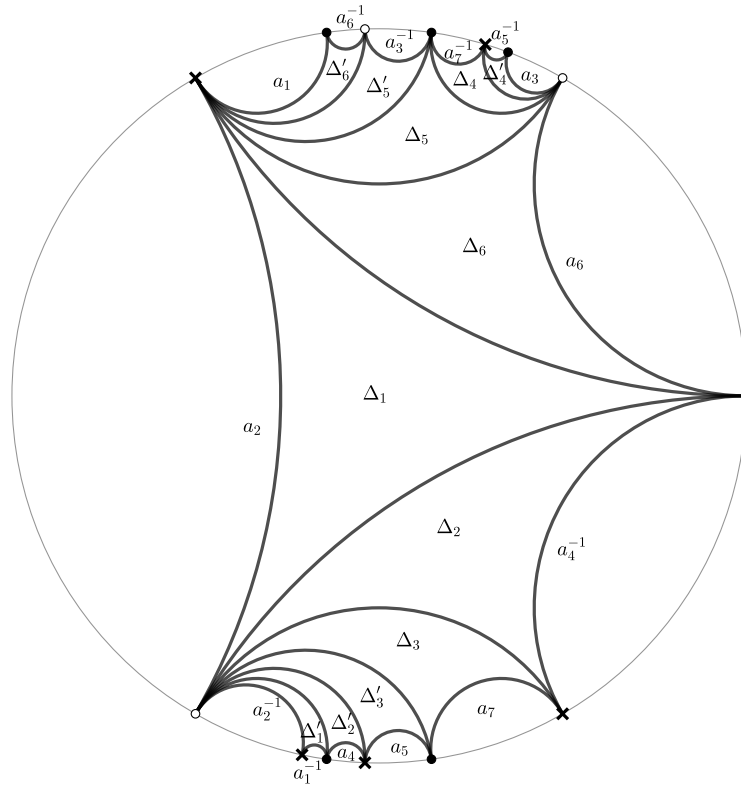


Figura 48. Ejemplo de una cascara hiperbólica ideal. Al hacer las identificaciones indicadas obtenemos una curva elíptica.

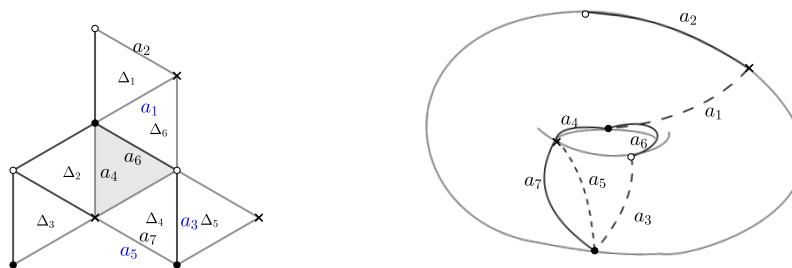


Figura 49. La imagen de ∂P bajo Ψ forma una gráfica en X cuyo complemento es simplemente conexo. En la imagen del lado derecho, las letras de color azul indican que la arista está en el reverso del triángulo.

Dado que P es un espacio simplemente conexo, podemos aplicar el *Teorema del Levantamiento* y encontrar un mapeo continuo $\tilde{\Psi}: P \rightarrow \mathbb{C}$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$(59) \quad \begin{array}{ccc} & & \mathbb{C} \\ & \nearrow \tilde{\Psi} & \downarrow \pi \\ P & \xrightarrow{\Psi} & X \end{array}$$

Afirmamos que $\tilde{\Psi}(\mathring{P})$ es un dominio fundamental para $\Lambda_{1,\tau}$, donde \mathring{P} denota el interior de P . Esto es equivalente a probar que $\pi(\overline{\tilde{\Psi}(\mathring{P})}) = X$ y que $\pi: \tilde{\Psi}(\mathring{P}) \rightarrow X$ es inyectiva.

Para la primera afirmación, notemos que por continuidad $\overline{\tilde{\Psi}(\mathring{P})} = \tilde{\Psi}(P)$, luego

$$\pi(\overline{\tilde{\Psi}(\mathring{P})}) = \pi(\tilde{\Psi}(P)) = \Psi(P) = X.$$

Para la segunda afirmación, sean $x, y \in \tilde{\Psi}(\mathring{P})$ tal que $\pi(x) = \pi(y)$. Entonces, existen $p_1, p_2 \in \mathring{P}$ tal que $x = \tilde{\Psi}(p_1)$ y $y = \tilde{\Psi}(p_2)$. Como el diagrama (59) conmuta $\Psi(p_1) = \Psi(p_2)$, luego $p_1 = p_2$ y por lo tanto $x = y$. Esto prueba que $\tilde{\Psi}(\mathring{P})$ es un dominio fundamental para $\Lambda_{1,\tau}$.

3.7. Cáscaras de curvas elípticas con una triangulación equilátera decorada y su módulo τ

En esta sección aplicamos los resultados anteriores para dar un método teórico para calcular el módulo de una curva elíptica aritmética (una curva elíptica que admite una función de Belyi).

Observación 126. Sea X una superficie de Riemann dada por una triangulación equilátera decorada. Tenemos una gráfica decorada formada por las aristas y vértices de la triangulación. Si $\Psi: P \rightarrow X$ es una cáscara para X , entonces \mathcal{G}_P denota a la subgráfica $\Psi(\partial P)$. En la Figura 49 (imagen derecha) podemos ver la gráfica \mathcal{G}_P para la cáscara indicada en la Figura 48.

Recuerde que dos espacios X y Y tienen el mismo tipo de homotopía si existen mapeos continuos $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f$ es homotópico al mapeo identidad id_X y $f \circ g$ es homotópico a id_Y .

Dos gráficas (finitas o no) son del mismo tipo de homotopía si y sólo si tienen grupos fundamentales (que son grupos libres) isomorfos.

Proposición 127. Si X es una curva elíptica dada por una estructura equilátera decorada y $\Psi: P \rightarrow X$ es una cáscara para X , entonces \mathcal{G}_P es homotópica a un bouquet de dos círculos. Por lo tanto, $\pi_1(\partial \mathcal{G}_P, x_0)$ es un grupo libre en dos generadores, para cualquier x_0 en $\partial \mathcal{G}_P$.

Demostración. Por teoría de gráficas, \mathcal{G}_P tiene el tipo de homotopía de un bouquet con el siguiente número de círculos:

$$1 - \chi(\mathcal{G}_P) = 1 - v + a,$$

donde $\chi(\mathcal{G}_P)$ es la característica de Euler de la gráfica. Por otra parte, si tomamos la descomposición celular del toro dado por \mathcal{G}_P , tenemos que $\chi(X) = 0 = v - a + 1$. Por lo tanto $1 - \chi(\mathcal{G}_P) = 2$. \square

Observación 128. La misma prueba puede usarse para probar que, si en lugar del toro, X es una superficie de género g entonces $1 - \chi(\mathcal{G}) = 2g$ así que \mathcal{G}_P es homotópica a un bouquet de $2g$ círculos.

Observación 129. Sea X una curva elíptica con una triangulación equilátera decorada y $\Psi: P \rightarrow X$ una cáscara para X . Note que la inclusión $i: \mathcal{G}_P \rightarrow X$ induce un isomorfismo en los primeros grupos de homología

$$i_*: H_1(\mathcal{G}_P, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X, \mathbb{Z}).$$

Esta afirmación se sigue de la sucesión exacta larga de homología de la pareja (X, \mathcal{G}_P) , dado que $X - \mathcal{G}_P$ es contráctil.

Por lo tanto, el homomorfismo inducido en los grupos fundamentales

$$i_{\#}: \pi_1(\mathcal{G}_P, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

es un epimorfismo del grupo libre en dos generadores a el grupo fundamental de la curva elíptica, que es isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Por lo tanto podemos escoger curvas γ_1 y γ_2 basadas en un punto $x_0 \in \mathcal{G}_P$, totalmente contenidas en \mathcal{G}_P , que generan a $\pi_1(X, x_0)$.

Observación 130. Sea X una superficie de Riemann con un punto marcado x_0 y $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ su cubriente universal, con $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ en la fibra de x_0 . Por teoría de espacios cubrientes sabemos que para cada $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ existe un único $g_\gamma \in \text{Deck}(\tilde{X}, p)$ con la propiedad $g_\gamma(\tilde{x}_0) = \tilde{\gamma}(1)$, donde $\tilde{\gamma}$ es el levantamiento de γ basado en \tilde{x}_0 . Luego, tenemos una aplicación $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Deck}(\tilde{X}, p)$. Se puede probar que esta aplicación es un isomorfismo de grupos.

Teorema 131. *Supongamos que X es una curva elíptica dada por una triangulación equilátera decorada. Sea $p: \mathbb{C} \rightarrow X$ su cubriente universal holomorfo. Si $\Phi: P \rightarrow X$ es una cáscara hiperbólica para X , entonces existen dos curvas γ_1 y γ_2 en \mathcal{G}_P tales que $g_{\gamma_1}(z) = z + \omega_1$ y $g_{\gamma_2}(z) = z + \omega_2$ generan a $\text{Deck}(p)$. Por lo tanto $\tau = \omega_1/\omega_2$ uniformiza a X , es decir, X es biholomorfo a $\mathbb{C}/\Lambda_{1,\tau}$.*

3.8. Observaciones y preguntas finales

En lo que sigue supondremos que X es una curva elíptica dada por una triangulación equilátera decorada con dessin d'enfant \mathcal{D} .

A continuación listamos algunas preguntas que queremos estudiar en un futuro, y que fueron nuestras motivaciones iniciales:

- (i) ¿Qué propiedades debe satisfacer \mathcal{D} para que la curva elíptica esté definida sobre \mathbb{Q} ?
- (ii) ¿Qué propiedades debe satisfacer \mathcal{D} para que la curva sea modular?
- (iii) ¿Qué propiedades debe satisfacer \mathcal{D} para que esté definido sobre una extensión cuadrática $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ (con d un entero libre de cuadrados)?
En particular, ¿Qué propiedades debe de tener \mathcal{D} para que X sea una curva elíptica con multiplicación compleja?

La pregunta (iii) tiene respuestas parciales (vea [JW16]).

Notemos que si las condiciones en (i) implicaran las condiciones en (ii) se seguiría la célebre conjetura de Shimura-Taniyama, que ahora es un teorema. En 1995 Wiles y Richard Taylor probaron un caso especial de la conjetura, lo cual era suficiente para probar el Último Teorema de Fermat, vea [Wil95]. En 2001 la conjetura fue probada completamente por Christophe Breuil, Brian Conrad, Fred diamond y Richard Taylor. La prueba fue una de las grandes hazañas en el campo de las matemáticas del siglo XX.

Demostrar la conjetura de Shimura-Taniyama vía los dessins d'enfants es uno de nuestros sueños.

La superficie de traslación asociada a un superficie triangulada decorada

En este apartado discutimos brevemente el tema de superficies de traslación y billares, y algunas implicaciones de estos temas en nuestro trabajo. Recordaremos el concepto de *mapeo desarrollante* para utilizarla en la construcción de la superficie de traslación de una superficie (con una estructura euclidiana). En el caso de que tengamos una superficie triangulada decorada X , con función de Belyi $f: X \rightarrow 2\Delta$, veremos que existe un cubriente ramificado $\tilde{f}: \text{Tras}(X) \rightarrow \mathbb{C}/\text{Hex}$ de la superficie de traslación de X , $\text{Tras}(X)$, a la curva elíptica \mathbb{C}/Hex , tal que \tilde{f} hace conmutar el siguiente diagrama:

$$(60) \quad \begin{array}{ccc} \text{Tras}(X) & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{C}/\text{Hex} \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_{2\Delta} \\ X & \xrightarrow{f} & 2\Delta \end{array}$$

donde π_X y $\pi_{2\Delta}$ son las cubiertas ramificadas naturales asociadas a cada superficie de traslación.

Agradezco a A. Guillot quien en el proceso de revisión de este trabajo me hizo notar la construcción de la superficie de traslación, la cual aparece en el trabajo de Fox-Kershner [FK36] y también en el trabajo de Katok-Zemlyakov [ZK76].

Con esta observación surgieron nuevos problemas en los cuales se podría seguir investigando. Por ejemplo, un posible problema sería: determinar propiedades de la superficie de traslación de una superficie triangulada decorada a partir de las dos permutaciones σ_0 y σ_1 del dessin d'enfant.

A.1. Mapeo desarrollante y holonomía

Comenzaremos recordando el concepto de mapeo desarrollante sobre una variedad dotada de una (G, X) -estructura (decidimos estudiar este tema en un contexto más general, no sólo para superficies euclidianas, ya que posiblemente lo usemos después con otras geometrías). Asumiremos algunos resultados sobre las (G, X) -estructuras, para las definiciones básicas y para una exposición más detallada consulte [Thu97] y [Rat94].

Supongamos que X es una variedad real analítica y G un grupo de difeomorfismos reales analíticos que actúan en X . Sea M una (G, X) -variedad, fijemos un punto base x_0 en M y una carta (U_0, ϕ_0) alrededor de p .

Dada una curva $\alpha: [0, 1] \rightarrow M$ en M , con punto inicial p , tomemos la continuación analítica (utilizando cartas de la estructura) de ϕ_0 a lo largo de la curva α . Denote por ϕ_0^α la función obtenida alrededor de $\alpha(1)$ por este proceso.

Se puede probar que el germen de ϕ_0^α sólo depende de la clase de homotopía de α (con homotopías que fijan los puntos extremos). Por lo tanto, la notación $\phi_0^{[\alpha]} = \phi_0^\alpha$ está bien definida.

Considere \widetilde{M} el cubriente universal de M , vista como el conjunto de clases de homotopía de curvas con punto base p . El mapeo cubriente $\pi: \widetilde{M} \rightarrow M$ está dado por $\pi([\alpha]) = \alpha(1)$. Definiremos el *mapeo desarrollante* $D: \widetilde{M} \rightarrow M$ como la aplicación que coincide localmente con la continuación analítica de ϕ_0 a lo largo de la curva. En símbolos,

$$(61) \quad D = \phi_0^{[\sigma]} \circ \pi,$$

en una vecindad de $[\sigma] \in \widetilde{M}$.

Si le damos a \widetilde{M} la (G, X) -estructura inducida por el mapeo cubriente π , entonces el mapeo desarrollante es un (G, X) -difeomorfismo local.

Teorema 132 (Vea [Rat94], Thm. 8.8.4). *Sea M una (G, X) -variedad simplemente conexa. Si $\xi_1, \xi_2: M \rightarrow X$ son (G, X) -mapeos, entonces existe un único elemento g de G tal que $\xi_2 = g\xi_1$.*

Luego, si $D': \widetilde{M} \rightarrow X$ es otro mapeo desarrollante, existe $g \in G$ tal que $D' = g \circ D$.

Sea $\tilde{p} \in \widetilde{M}$ tal que $\pi(\tilde{p}) = p$. Supongamos que $\alpha: [0, 1] \rightarrow M$ es un lazo basado en p . Entonces α se levanta a una única curva $\tilde{\alpha}$ en \widetilde{M} con

punto inicial \tilde{p} . Por teoría de cubrientes, existe una única transformación de cubierta T_α de π tal que $T_\alpha(\tilde{p}) = \tilde{\alpha}(1)$ (T_α no cambia si tomamos otro representante de la clase de homotopía de α). Además, se puede verificar que $T_{\alpha\beta} = T_\alpha T_\beta$, para cualesquiera α, β .

Si $D: \tilde{M} \rightarrow X$ es un mapeo desarrollante de M , entonces, como $D \circ T_\alpha: \tilde{M} \rightarrow X$ es un (G, X) -mapeo, existe un único elemento g_α tal que $D \circ T_\alpha = g_\alpha \circ D$. Definamos $h: \pi_1(M, p) \rightarrow G$ como $h([\alpha]) = g_\alpha$. La aplicación está bien definida, porque g_α sólo depende de la clase de homotopía de α . Observe que

$$DT_{\alpha\beta} = DT_\alpha T_\beta = g_\alpha DT_\beta = g_\alpha g_\beta D.$$

por lo tanto h es un homomorfismo de grupos. El homomorfismo h es llamado el *homomorfismo de holonomía*. Observe que g_α satisface $\phi^\alpha = g_\alpha \phi_0$, en una vecindad de p .

Si tomamos $D': \tilde{M} \rightarrow X$ otro mapeo desarrollante para M , sabemos que existe $g \in G$ tal que $D' = gD$, por lo tanto

$$(62) \quad D'T_\alpha = gDT_\alpha = gg_\alpha D = gg_\alpha g^{-1} D'.$$

Entonces la holonomía de D' difiere de h sólo por una conjugación con un elemento de G .

Definición 133. Denote por $\text{Isom}^+(\mathbb{C})$ las isometrías de \mathbb{C} que preservan orientación y suponga que \mathbb{C} está contenido en $\text{Isom}^+(\mathbb{C})$, visto como el grupo de traslaciones del plano. Decimos que una (G, X) -estructura en M es una *estructura euclidiana* si $(G, X) = (\text{Isom}^+(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ y es una *estructura de traslación* si $(G, X) = (\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Observación 134. En la exposición anterior utilizamos la letra X para denotar a la variedad modelo, siguiendo la notación en la literatura, sin embargo sólo será así en el presente apartado, en lo que sigue, X seguirá denotando (como en el resto de este trabajo) una superficie triangulada decorada.

A.2. Construcción de la superficie de traslación

Aplicaremos los conceptos anteriores al caso que nos interesa, las superficies con triangulaciones euclidianas, o más específicamente, a superficies con triangulaciones equiláteras. Esta discusión está basada en [Gui18].

Sea S una superficie con una estructura euclidiana, considere $D: \tilde{S} \rightarrow \mathbb{C}$ un mapeo desarrollante de S y $h: \pi_1(S, p) \rightarrow \text{Isom}^+(\mathbb{C})$ su holonomía correspondiente. Consideremos el homomorfismo $L: \text{Isom}^+(\mathbb{C}) \rightarrow \text{SO}^+(\mathbb{C})$ que manda una transformación afín en su parte lineal, en símbolos $L(az + b) =$

az. Entonces $L \circ h: \pi_1(S, p) \rightarrow \text{SO}^+(\mathbb{C})$ es un homomorfismo de grupos. Denotemos por H al núcleo $\ker(L \circ h)$. Por teoría de cubrientes (correspondencia de Galois) sabemos que existe un único cubriente normal $\pi_H: S_H \rightarrow S$ correspondiente a H .

Observación 135. Si inducimos la estructura euclidiana de S a S_H , podemos notar que la holonomía de S_H toma valores en el grupo de traslaciones, por lo tanto, la estructura euclidiana de S_H contiene una estructura de traslación (vea [Rat94], Thm. 8.4.5). Además, podemos probar que es la cubierta más pequeña de S que tiene una estructura de traslación.

Observación 136. Supongamos que con su estructura euclidiana, S es una superficie de Riemann de tipo finito, obtenida de remover un número finito de puntos de una superficie de Riemann compacta X , y que $\pi_H: S_H \rightarrow S$ es un mapeo propio, entonces por *el teorema de completación de cubrientes* ([For81], §1.8) π_H se puede extender a un cubriente ramificado holomorfo $\pi_X: \text{Tras}(X) \rightarrow X$ de una superficie de Riemann compacta $\text{Tras}(X)$ que contiene a S_H con complemento finito.

Sea X una superficie de Riemann compacta dada por una triangulación equilátera decorada y $f: X \rightarrow 2\Delta$ su función de Belyi asociada. Denote por $X' \subset X$ al complemento de los puntos cónicos de la triangulación. Dado que en X' tenemos una estructura euclidiana, podemos tomar un mapeo desarrollante $D: \widetilde{X}' \rightarrow \mathbb{C}$ y su correspondiente holonomía $h: \pi_1(\widetilde{X}', p) \rightarrow \text{Isom}^+(\mathbb{C})$; también podemos hablar de la superficie de traslación X'_H de X' . En este caso se satisfacen las condiciones de la Observación 136 con $S = X'$, por lo tanto, tenemos una superficie de Riemann compacta $\text{Tras}(X)$ y un cubriente ramificado holomorfo $\pi_X: \text{Tras}(X) \rightarrow X$ que extiende $\pi_H: X'_H \rightarrow X'$. Llamaremos a $\text{Tras}(X)$ la *superficie de traslación* de X .

Observación 137. Consideremos la función de Belyi $f: X \rightarrow 2\Delta$ de la superficie triangulada decorada X . Note que los mapeos $f \circ \pi_X: \text{Tras}(X) \rightarrow 2\Delta$ y $\pi_{2\Delta}: \text{Tras}(2\Delta) \rightarrow 2\Delta$ son cubrientes no ramificados fuera de los puntos singulares, por lo tanto, por la propiedad de minimalidad de la superficie de traslación, existe un mapeo \tilde{f} de la superficie de traslación de X a la superficie de traslación de 2Δ que satisface $f \circ \pi_X = \pi_{2\Delta} \circ \tilde{f}$, naturalmente este mapeo se extiende a un cubriente holomorfo ramificado entre las compactificaciones, esto es, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \text{Tras}(X) & \xrightarrow{\tilde{f}} & \text{Tras}(2\Delta) \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_{2\Delta} \\ X & \xrightarrow{f} & 2\Delta \end{array}$$

Una geodésica en una superficie de traslación no tiene auto intersecciones. Por lo tanto, si una geodésica conecta a un punto consigo mismo, tiene que ser periódica. Observe que la información de las geodésicas de una superficie con una estructura euclidiana quedan codificadas por su superficie de traslación. Los resultados fundamentales de propiedades de geodésicas en superficies de traslación fueron dados por Masur:

Teorema 138 ([Mas86], [Mas88], [Mas90]). *Sea M una superficie de traslación.*

1. *Existe una geodésica periódica en M de longitud a lo más $c\sqrt{a}$, donde a es el área de M y $c > 0$ es una constante que depende solamente del género de M .*
2. *Las direcciones de las geodésicas periódicas en M son densas en S^1 .*
3. *Denote por $N_1(M, R)$ al número de cilindros periódicos de M de longitud a lo más $R > 0$. Entonces existe $0 < c_1(M) < c_2(M) < \infty$ tal que*

$$c_1(M) \leq N_1(M, R)/R^2 \leq c_2(M)$$

para R suficientemente grande.

Por otra parte, resulta que las superficies de traslación corresponden a diferenciales cuadráticos que son cuadrados de diferenciales abelianos, esto permite su estudio desde el punto de vista de la *Teoría de Teichmüller*. Los artículos [War98] y [HS99] investigan a las superficies de traslación desde este punto de vista.

A continuación explicamos la construcción clásica de $\text{Tras}(2T)$, para T un triángulo euclidiano racional. Esta construcción aparece en el trabajo de Fox-Kershner [FK36] y en el trabajo de Katok-Zemlyakov [ZK76].

Sea Γ el grupo generado por las reflexiones σ_1 , σ_2 y σ_3 en los lados ℓ_1 , ℓ_2 y ℓ_3 de T . En la unión disjunta $\sqcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(T)$,

1. pegamos $\gamma(T)$ con $\gamma\sigma_i(T)$ a lo largo del lado común $\gamma(\ell_i)$ y,
2. si $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ es una traslación, identificamos $\gamma_1(T)$ con $\gamma_2(T)$.

Viéndolo de esta manera, podemos notar que la superficie de traslación de 2Δ es la curva elíptica definida por la retícula hexagonal (vea la Figura 37), esto es, $\text{Tras}(2\Delta) \cong \mathbb{C}/\text{Hex}$. Luego, tenemos las siguientes propiedades:

Observación 139. La superficie $\text{Tras}(2\Delta) = \mathbb{C}/\text{Hex}$ no tiene puntos cónicos, todos los vértices de su triangulación tienen valencia 6. Entonces, en este caso tenemos que:

1. Los vértices no son un obstáculo para las geodésicas.

2. Las geodésicas cerradas primitivas están inducidas por rectas de la forma $p + t\omega$, con $\omega \in \text{Hex}$ primitivo (de módulo mínimo en Hex) y $p \in \mathbb{C}$.
3. La longitud cerrada primitiva tiene longitud $|\omega|$.
4. La longitud no cambia si lo trasladamos paralelamente.
5. Las geodésicas cerradas primitivas son simples.

Puesto que las geodésicas de 2Δ quedan codificadas en su superficie de traslación, se tienen resultados análogos para las órbitas periódicas de 2Δ :

Proposición 140. *Suponga que γ es una geodésica cerrada primitiva en 2Δ , con punto base $p \in \Delta$; tal que γ que no pasa por los vértices, entonces γ está inducida por una recta de la forma $p + t\omega$ para algún $\omega \in \text{Hex}$ primitivo. Por lo tanto, la longitud de γ es $|\omega|$; además, γ no cambia de longitud en 2Δ si cambiamos el punto base con el mismo vector tangente.*

La proposición anterior nos dice que el punto $1/2$ que elegimos en la discusión de nuestro trabajo no es un punto distinguido en 2Δ .

Podemos hacer una construcción similar cuando P un polígono euclidiano racional. Definimos $2P$ de forma análoga a 2Δ , luego, obtenemos también una superficie de Riemann compacta de género 0 con una estructura euclidiana, formada por dos copias de P . Se puede probar que la superficie de traslación $(2P)'_H$ tendrá un número finito de copias de P (sin vértices), luego, el cubriente $\pi_H: (2P)'_H \rightarrow (2P)'$ será un mapeo propio y puede extenderse a un cubriente ramificado holomorfo $\pi_{2P}: \text{Tras}(2P) \rightarrow 2P$ entre las dos superficies de Riemann compactas. La superficie de Riemann $\text{Tras}(2P)$ es conocida como una *superficie de Katok-Zemlyakov* (vea [Gut00]).

Finalizamos con una breve discusión sobre billares triangulares. Pensemos en una mesa de billar triangular T , el juego consiste en dejar a una partícula moverse libremente en el interior de la mesa y cuando choca con el borde rebota con el mismo ángulo de llegada (no definiremos el futuro de la partícula si cae en uno de las esquinas). El problema es describir la evolución de las trayectorias, o decir algo sobre las órbitas periódicas. Se tiene la siguiente conjetura:

Conjetura 141. *Sea $T \subset \mathbb{R}^2$ un triángulo plano. El juego de billares en T tiene una órbita periódica.*

Se sabe que la conjetura se cumple para varios triángulos, sin embargo, la conjetura permanece abierta. Para triángulos agudos, el triángulo pedal (el triángulo que tiene sus vértices en los pies de las alturas) da una órbita periódica, un resultado de Fagnano 1775. En este contexto, más cercano a nuestro tema, Baxter y Umble en su trabajo [BU07] clasifican y cuentan

las clases de equivalencia de órbitas periódicas de un periodo dado en un triángulo equilátero.

Análogamente, se puede considerar billares en una mesa poligonal P . Varias preguntas básicas, en general en billares poligonales, y en particular para la *función contadora de órbitas periódicas* $\phi_P(x)$, siguen abiertas (vea, por ejemplo, [Gut96], [Tab95]).

Bibliografía

- [AD08] M. Artebani, I. Dolgachev, *The Hesse pencil of plane cubic curves*, preprint arXiv:math/0611590 [math.AG].
- [Bak66] Baker I. N., *On a class of meromorphic functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **17** (1966), 819822.
- [BCDT01] Breuil C.; Conrad B.; Diamond F.; Taylor, R., *On the modularity of elliptic curves over \mathbb{Q} : Wild 3-adic exercises*, Journal of the American Mathematical Society **14** (2001), pp. 843–939.
- [Bel79] G. V. Belyi, *Galois extensions of a maximal cyclotomic field*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43**(2) 267276, 479 (1979).
- [BM17] A. Bonifant & J. Milnor, *On Real and complex cubic curves*, preprint arXiv:1603.09018v2 [math.AG].
- [BNN95] Brunet, R.; Nakamoto, A. ; Negami, S. *Diagonal flips of triangulations on closed surfaces preserving specified properties*. J. Combin. Theory Ser. B **68** (1996), no. 2, 295–309.
- [Bos92] Bost, J-B. *Introduction to Compact Riemann Surfaces, Jacobians and Abelian Varieties* From number theory to physics (Les Houches, 1989), 64–211, Springer, Berlin, 1992.
- [BU07] A. Baxter and T. Humble, *Periodic orbits of billiards on an equilateral triangle*, preprint arXiv:math/0509292v7 [math.DS].
- [CIW94] Cohen, Paula Beazley; Itzykson, Claude; Wolfart, Jürgen *Fuchsian triangle groups and Grothendieck dessins. Variations on a theme of Belyĭ*. Comm. Math. Phys. **163** (1994), no. 3, 605–627.
- [CM65] H. S. M. Coxeter and W. O. J. Moser, *Generators and relations for discrete groups*, Springer, Berlin, (1965).
- [Don11] S. Donaldson, *Riemann surfaces*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, **22**, Oxford University Press, Oxford, 2011.
- [Dy88] W. Dick, *Beitrag zur Analysis Situs*, Math. Ann. **32** (1888) 457–512.
- [Edw07] H. Edwards, *A normal form for elliptic curves*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **44** (2007), no. 3, 393422.

- [El91] Noam D. Elkies, *ABC implies Mordell*, Internat. Math. Res. Notices no. 7, 99–109 (1991).
- [FK36] R.H. Fox and R.B. Kershner, *Concerning the transitive properties of geodesics on a rational polyhedron*. Duke Math. J. **2**(1), 147-150 (1936).
- [For81] Forster O., *Lectures on Riemann surfaces*, Graduate Texts in Mathematics, **81**, Springer-Verlag (1981).
- [Fri02] H. R. Frium, *The group law on elliptic curves in Hesse form*, Finite fields with applications to coding theory, cryptography and related areas (Oaxaca, 2001), 123151, Springer, Berlin, 2002.
- [GG12] Girondo E. & González-Diez G., *Introduction to compact Riemann surfaces and dessins d'enfants*, London Mathematical Society Student Texts, **79**, Cambridge University Press (2012).
- [Gri89] P. A. Griffiths, *Introduction to algebraic curves*, Translation of Mathematical Monographs, **76**, American Mathematical Society (1989).
- [Gro66a] Gross F., *On the equation $f^n + g^n = 1$* , Bull. Amer. Math. Soc., **72** (1966), 8688.
- [Gro66b] Gross F., *Erratum: On the equation $f^n + g^n = 1$* , Bull. Amer. Math. Soc., **72** (1966), 576.
- [Gro68] Fred Gross, *On the equation $f^n + g^n = 1$. II*, Bull. Amer. Math. Soc., **74** (1968), 647648.
- [Grot97] Grothendieck, A.; *Esquisse d'un programme*. In L. Schneps & P. Lochak (Eds.), *Geometric Galois Actions* (London Mathematical Society Lecture Note Series, pp. I-Vi). Cambridge: Cambridge University Press (1997).
- [Gui18] A. Guillot, *Complex differential equations and geometric structures on curves*. In L. Hernandez-Lamonedá et. al. (eds.), *Geometrical Themes Inspired by the N-Body problem*, Lecture Notes in Mathematics 2204, Springer (2018).
- [Gut96] E. Gutkin, *Billiard in polygons: survey of recent results*, J. Stat. Phys. **83** (1996), 7-26.
- [Gut00] E. Gutkin, *Branched coverings and closed geodesics in flat surfaces, with applications to billiards*, Dyn. Syst.: From Crystals to Chaos, World Scientific, 259-273 (2000).
- [Hef91] L. Heffter, *Über das Problem der Nachbargebiete*, Math. Ann. **38** (1891) 477-508.
- [Hef98] L. Heffter, *Über metacyklische Gruppen und Nachbarconfigurationen*, Math. Ann. **50** (1898) 261-268.
- [Hess44a] Hesse O., *Über die Elimination der Variablen aus drei algebraischen Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei Variablen*. Journal für die reine und angewandte Mathematik **28** (1844) 68–96.
- [Hess44b] Hesse O., *Über die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung*. Journal für die reine und angewandte Mathematik **28** (1844) 97–107.
- [HS99] P. Hubert and T. Schmidt, *Veech groups and polygonal coverings*, preprint (1999), to appear in J. Geom. Phys.
- [Hus02] D. Husemöller, *Elliptic curves*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics 111, Springer-Verlag (2002).
- [JS78] G. A. Jones and D. Singerman, *Theory of maps on orientable surfaces*, Proc. London Math. Soc. (3) **37** (1978) 273-307.
- [JS96] Gareth Jones and David Singerman, *Belyĭ functions, hypermaps and Galois groups*, Bull. London Math. Soc. **28**, no. 6, 561–590 (1996).

- [Jua17a] J. Juan-Zacarias, *Baker-Gross theorem revisited*. Morfismos 22, No. 1. Departamento de Matemáticas CINVESTAV, 2018.
- [Jua17b] J. Juan-Zacarias, *Some remarks on the correspondence between elliptic curves and four points in the Riemann sphere*. Proceedings of the 2018 Workshop in Holomorphic dynamics, Papirhos. Serie actas, No. 1. Instituto de Matemáticas UNAM, 2019.
- [JV20] J. Juan-Zacarias; A. Verjovsky, *Some remarks on equilateral triangulations of surfaces and Belyi functions*, preprint arXiv:2002.04660 [math.CV].
- [JW16] Jones, G. A.; Wolfart, J. *Dessins d'enfants on Riemann surfaces*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Cham, 2016. xiv+259 pp.
- [Kle79] Felix Klein, *Ueber die Transformation elfter Ordnung der elliptischen Functionen*, Mathematische Annalen, 15 (3-4): 533-555, (1879).
- [Mag74] Magnus, W., *Noneuclidean tessellations and their groups*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 61. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1974. xiv+207 pp.
- [Mas86] H. Masur, *Closed trajectories for quadratic differentials with application to billiards*, Duke Math. J. 53 (1986), no. 2, 307-314.
- [Mas88] H. Masur, *Lower bounds for the number of saddle connections and closed trajectories of a quadratic differentials*, Holomorphic functions and moduli, Vol. I (Berkeley, CA, 1986), 215-228. Math. Sci. Res. Inst. Publ., 10. Springer, New-York-Berlin, 1988.
- [Mas90] H. Masur, *The growth rate of trajectories of quadratic differential*. Ergod. Th. and Dynam. Sys. 10 (1990), no. 1, 151-176.
- [Mir95] Rick Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics 5, American Mathematical Society (1995).
- [Mum75] Mumford D., *Curves and their Jacobians*, Univ. of Michigan Press, 1975.
- [MV77] Malgoire and C. Voisin, *Cartes cellulaires*, Cahiers Math. Montpellier 12 (Univ. Sci. Tech. Languedoc, Montpellier), (1977).
- [Pop09] P. Popescu-Pampu, *Iterating the Hessian: A dynamical system on the moduli space of elliptic curves and dessins denfants*. Noncommutativity and singularities, 8398, Adv. Stud. Pure Math., 55, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2009.
- [Rat94] J. Ratcliffe, *Foundations of hyperbolic Manifolds*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics 149, Springer-Verlag (1994).
- [Sil09] Joseph H. Silverman, *The arithmetic of elliptic curves*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics 106, Springer-Verlag (2009).
- [Sin76] D. Singerman, *Automorphisms of maps, permutation groups and Riemann surfaces*, Bull. London Math. Soc. 8 (1976) 65-68.
- [Sin01] David Singerman, *Riemann surfaces, Belyi functions and hypermaps*, Topics on Riemann surfaces and Fuchsian groups (Madrid, 1998), 43-68, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 287, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2001).
- [SL97a] Leila Schneps and Pierre Lochak (eds.), *Geometric Galois actions 1. Around Grothendieck's "Esquisse d'un programme"*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 242. Cambridge University Press, Cambridge (1997).
- [SL97b] Leila Schneps and Pierre Lochak (eds.), *Geometric Galois actions 2. The inverse Galois problem, moduli spaces and mapping class groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 243, Cambridge University Press, Cambridge (1997).
- [Spr81] Springer G., *Introduction to Riemann surfaces*, 2nd ed. (1981).

- [Ste17] Norbert Steinmetz, *Nevanlinna theory, Normal families, and algebraic differential equations*, Universitext, Springer (2017).
- [SV90] Shabat, G. B.; Voevodsky, V. A. *Drawing curves over number fields*. The Grothendieck Festschrift, Vol. III, 199–227, Progr. Math., 88, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [SZ94] Shabat, G. B.; Zvonkin, A. *Plane trees and algebraic numbers*. Jerusalem combinatorics 93, 233–275, Contemp. Math., 178, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [Thu97] Thurston W., *Three dimensional geometry and topology*, Princeton University Press, 1997.
- [Troy07] Troyanov, M. *On the moduli space of singular euclidean surfaces* Handbook of Teichmüller theory. Vol. I, 507–540, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 11, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.
- [Tab95] S. Tabachnikov, *Billiards*, Panoramas et Syntheses, n.1, So. Math. Frances, Paris, 1995.
- [TW95] Taylor, R.; Wiles, A., *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras*. Ann. of Math. (2) 141 (1995), no. 3, 553–572.
- [VS89] Voevodski, V. A.; Shabat, G. B. *Equilateral triangulations of Riemann surfaces, and curves over algebraic number fields*. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR 304 (1989), no. 2, 265–268; translation in Soviet Math. Dokl. 39 (1989), no. 1, 38–41.
- [War98] C. Ward, *Calculation of Fuchsian groups associated to billiards in a rational triangle*, Ergod. Theor. Dyn. Syst. 18 (1998), 1019–1042.
- [Web98] H. Weber, *Lehrbuch der Algebra* (Braunschweig 1898); third edition 1908 republished by Chelsea, New York.
- [Wei56] A. Weil, *The field of definition of a variety*, Amer. J. Math. 78 (1956) 509–524.
- [Wil95] Wiles, A., *Modular elliptic curves and Fermat’s last theorem*. Ann. of Math. (2) 141 (1995), no. 3, 443–551.
- [ZK76] A. Zemlyakov and Katok, *Topological transitivity of billiards in polygons*, Math. Notes 18 (1976), 760–764.