



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA

INSTITUTO DE GEOFÍSICA

GEOFÍSICA DE LA TIERRA SÓLIDA: SISMOLOGÍA

**OPTIMACIÓN DEL MÉTODO DE PROYECCIÓN
VARIACIONAL PARA EL MODELADO DE ONDAS
SÍSMICAS**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

Maestro en Ciencias de la Tierra

P R E S E N T A:

Kevin Axel Vargas Zamudio

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Francisco José Sánchez Sesma
Instituto de Ingeniería

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., Noviembre 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Revolucionario será quien se revolucione a sí mismo.
Los límites de mi lenguaje significan los límites de mi mundo.
Yo soy mi Mundo
El Mundo y la Vida son uno Mismo.*

Ludwig Wittgenstein

Verdad es que amamos la vida: pero no porque estemos habituados a ella, sino al amor. En el amor siempre hay un poco de locura. Pero también siempre hay un poco de razón en la locura.

Friedrich Nietzsche

*Dedicada a cada persona que directa o indirectamente ha estado
conmigo en el camino*

Agradecimientos

A mi mamá, papá y hermanos, por quienes todo esto cobra sentido.

¿Con que esto es lo que significa el amanecer después de una larga noche...? A ti, que has llegado como un rayo de luz inesperado, indómito... a ti, gracias, Karla Paola Servín Recillas. Llegas a esta vida como una explosión de emoción, aleatoria y fulminante.

A todos aquellos que me han acompañado en el camino, presentes y no presentes.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, baluarte del conocimiento en nuestro país. De igual manera al Posgrado en Ciencias de la Tierra por la gran oportunidad brindada. A CONACyT y DGAPA-PAPIIT por el apoyo conferido para el desarrollo y exitosa conclusión de este trabajo.

Al Dr. Francisco José Sánchez Sesma por la calidad de sus enseñanzas, consejos y, antes que todo, su invaluable amistad.

A los Dres. Ernesto Rubio Acosta, Josué Tago Pacheco, Marcela Baena Rivera y Leonardo Ramírez Guzmán por su apreciable y significativo apoyo en el seguimiento de este trabajo.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Resumen

Optimación del Método de Proyección Variacional para el Modelado de Ondas Sísmicas

por **Kevin Axel Vargas Zamudio**

El latente interés por incrementar el conocimiento del comportamiento sísmico de estructuras geológicas realistas motiva el desarrollo de este trabajo, manteniendo como primer objetivo la optimación computacional del cálculo numérico. El *Método de Proyección Variacional* (*Variational Projection Method, VPM*) se basa en una formulación de Galerkin con la cual se aproxima una solución a las ecuaciones de la elasticidad. Los campos de desplazamientos se descomponen en la suma de un campo de referencia en la base del modelo y el campo de interés del valle aluvial. Se propone una familia de funciones de prueba que son función de la variable z y mantienen una variación suave en las direcciones horizontales. Al realizar la integración por partes se obtiene la formulación débil del problema, resultando en un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas que representan la proyección de las ecuaciones de Navier hacia el plano horizontal en superficie en cada modo. El sistema de ecuaciones resultante se resuelve numéricamente mediante el *método Pseudoespectral* para la diferenciación espacial en tanto que la parte temporal se aborda con *diferencias finitas centradas*. El movimiento de referencia impuesto en la base se realiza por medio del *método de Haskell* para la propagación de ondas planas en medios estratificados, dada una variación lateral suave de la interfaz cuenca-semiespacio, se considera que en la adyacencia de un punto de interés el efecto es similar. Para verificar los resultados del VPM se simula la propagación de ondas sísmicas en modelos simplificados 2D y 3D, como el modelo trapezoidal de Kawase y Aki (1989) y el modelo de *croissant* propuesto por Sánchez-Sesma y Luzón (1995). Finalmente se aplica el método optimado mediante *CUDA* (*Computing Unified Device Architecture*) a un modelo de profundidad simplificado de la Cuenca del Valle de México, especificando la cinemática en la base mediante pulsos de Ricker convolucionados con las funciones de transferencia del método de Haskell y por medio de registros de aceleración del sismo de Huitzucó, Guerrero (Mw 5.8, 16 de junio de 2013).

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Abstract

Optimización del Método de Proyección Variacional para el Modelado de Ondas Sísmicas

by **Kevin Axel Vargas Zamudio**

Nowadays, interest in increasing knowledge about seismic behavior of realistic geological structures remains, motivating the development of this work, keeping as a main goal the numerical computation optimization. The *Variational Projection Method (VPM)* is based on a weak Galérkin formulation of the elastic equation. Displacement fields are decomposed in the addition of one reference field imposed at alluvial valley model's base (halfspace-valley interface), with the former displacement field within the valley. The proposed test functions family are z -variable dependent with smooth variation along horizontal directions. While doing integration by parts, the weak formulation of the problem is obtained, resulting in a coupled partial differential system of equations that represents a *variational projection* towards the surficial horizontal plane ($z = 0$) at each mode. This system of equations is solved numerically by *Pseudospectral method* for spatial differentiation while temporal one is treated with *central finite difference* scheme. Reference motion at base is computed by *Haskell method* of layered media plane wave propagation, given a smooth lateral variation of halfspace-valley interface and taking into account that in the surroundings of a particular point, exists a similar frequency response. For VPM's results validation, the seismic response of 2D and 3D synthetic models are simulated, like the Kawase and Aki (1989) trapezoidal model and the Sánchez-Sesma and Luzón (1995) *croissant* model. Finally, *CUDA (Computing Unified Device Architecture)* optimized VPM is applied to a simplified model of Valley of Mexico's sedimentary deposits, with a base model kinematics defined by two approaches: one synthetic using Ricker pulse and transference functions convolutions at each point in depth and by Huitzuco, Guerrero (Mw 5.8, June 16th 2013) seismic event acceleration recordings.

ÍNDICE GENERAL

Resumen	vii
Abstract	ix
Lista de Figuras	xiii
Lista de Tablas	xvii
1 Introducción	1
1.1 Justificación	1
1.2 Objetivos	2
1.3 Metodología	2
2 Marco Teórico	5
2.1 Derivación de la ecuación de onda	5
2.1.1 Ecuación de movimiento	8
2.1.2 Ley de Hooke y ecuaciones constitutivas	9
2.1.3 Ecuación de Navier	10
2.2 Fundamentos de Cálculo Variacional	11
2.2.1 Espacios funcionales	12
2.2.2 Condiciones necesaria y suficiente para un extremo	13
2.2.3 Formulación debil de problemas con valores en la frontera	15
2.2.4 Teoremas de existencia y unicidad del Análisis Funcional	16
2.3 El método de Galérkin	17
2.4 Computación de Alto Rendimiento	19
2.4.1 Memoria compartida contra memoria distribuida	20
2.4.2 CUDA: Computing Unified Device Architecture	21
Arquitectura de una unidad de procesamiento gráfico (GPU)	22
3 Descripción del Método de Proyección Variacional	23
3.1 Modelo Matemático	23
3.1.1 Campo forzante f_i	29
3.2 Modelo numérico	34
3.3 Modelo Computacional	37
3.3.1 Pruebas al rendimiento de programación CUDA	40
4 Resultados y calibración del método VPM	45

4.1	Modelos sintéticos	45
4.1.1	Modelo 2D trapezoidal	45
4.1.2	Modelos 3D	56
	Modelo de <i>croissant</i> y su respuesta sísmica	56
4.2	Un modelo realista: Cuenca del Valle de México	65
4.2.1	Movimiento en la base del modelo mediante datos reales	79
5	Conclusiones y recomendaciones	95
5.1	Conclusiones	95
5.2	Recomendaciones	96
5.3	Reconocimientos	97
	Bibliografía	99

Lista de Figuras

FIGURA 2.1:	Esquema de un cuerpo continuo sometido a una fuerza sobre un diferencial de superficie ΔS	6
FIGURA 2.2:	Diagrama que representa el vector de tracción y componentes del tensor de esfuerzos sobre un cuerpo.	7
FIGURA 2.3:	Memoria compartida	20
FIGURA 2.4:	Memoria distribuida: cluster	21
FIGURA 2.5:	Dispositivo gráfico CUDA	22
FIGURA 3.1:	Esquema de un valle aluvial somero en tres dimensiones ante la incidencia de una onda plana	24
FIGURA 3.2:	Malla de discretización espacial-temporal 1D para una formulación velocidad-esfuerzo	35
FIGURA 3.3:	Distribución esquemática de hilos dentro de una tarjeta gráfica. Arreglo unidimensional de hilos.	39
FIGURA 3.4:	Comparación de tiempo de cálculo para la operación SAXPY, secuencial vs CUDA	41
FIGURA 3.5:	Comparación de tiempo de cálculo para la operación MATMULT, secuencial vs CUDA	43
FIGURA 3.6:	Diagrama de flujo que muestra la solución al problema de propagación para medios irregulares utilizando la formulación del Método de Proyección Variacional Optimizado (OVPM).	44
FIGURA 4.1:	Modelo sintético de un valle aluvial con forma trapezoidal de acuerdo a las dimensiones propuestas en (Kawase y Aki, 1989)	46
FIGURA 4.2:	Función de Transferencia generada con el método de Haskell para un punto a la máxima profundidad del modelo 1000[m], ante la incidencia de una onda SH.	48
FIGURA 4.3:	Sismogramas sintéticos para incidencia vertical de una onda SH, excitación producida por un pulso de Ricker con $T_p = 4[s]$, $f_p = 0.25[Hz]$	49
FIGURA 4.4:	Sismogramas sintéticos reportados por Kawase y Aki (1989), excitación producida por un pulso de Ricker con $T_p = 4[s]$, $f_p = 0.25[Hz]$	49
FIGURA 4.5:	Sismogramas sintéticos para incidencia vertical de una onda SH, excitación producida por un pulso de Ricker con $T_p = 2[s]$, $f_p = 0.5[Hz]$ y un factor de atenuación $Q = 20$	50

FIGURA 4.6:	Sismogramas sintéticos para incidencia vertical de una onda SH, excitación producida por un pulso de Ricker con $T_p = 2[s]$, $f_p = 0.5[Hz]$ y un factor de atenuación $Q = 1000$	51
FIGURA 4.7:	Sismogramas sintéticos reportados por Kawase y Aki (1989), excitación producida por un pulso de Ricker con $T_p = 2[s]$, $f_p = 0.5[Hz]$	51
FIGURA 4.8:	Sismogramas sintéticos para incidencia vertical de una onda SV, excitación producida por un pulso de Ricker con $T_p = 4[s]$, $f_p = 0.25[Hz]$. Sismograma superior: $U(x, t)$, sismograma inferior: $W(x, t)$	53
FIGURA 4.9:	Sismogramas sintéticos reportados por Kawase y Aki (1989), excitación producida por un pulso de Ricker con $T_p = 4[s]$, $f_p = 0.25[Hz]$. Sismograma superior: $U(x, t)$, sismograma inferior: $W(x, t)$	54
FIGURA 4.10:	Sismogramas sintéticos para incidencia vertical de una onda SV, excitación producida por un pulso de Ricker con $T_p = 2[s]$, $f_p = 0.5[Hz]$. Sismograma superior: $U(x, t)$, sismograma inferior: $W(x, t)$	55
FIGURA 4.11:	Sismogramas sintéticos reportados por Kawase y Aki (1989), excitación producida por un pulso de Ricker con $T_p = 2[s]$, $f_p = 0.5[Hz]$. Sismograma superior: $U(x, t)$, sismograma inferior: $W(x, t)$	56
FIGURA 4.12:	Modelo sintético de un valle aluvial con forma de <i>croissant</i> , propuesto por Sánchez-Sesma y Luzón (1995)	58
FIGURA 4.13:	Curvas de nivel del modelo de <i>croissant</i> . Se muestran las líneas de receptores cruzando a través de la parte más profunda de la cuenca.	59
FIGURA 4.14:	Sismogramas sintéticos para incidencia vertical de una onda SH, excitación producida por un pulso de Ricker con $T_p = 3[s]$, $f_p = 0.333[Hz]$. Sismogramas en orden descendente: $V(x, ny, t)$, $V(nx, y, t)$, $U(nx, y, t)$, $W(nx, y, t)$	61
FIGURA 4.15:	Sismogramas sintéticos reportados por Sánchez-Sesma y Luzón (1995), excitación producida por un pulso de Ricker con $T_p = 3[s]$, $f_p = 0.333[Hz]$. Sismogramas en orden descendente: $V(x, ny, t)$, $V(nx, y, t)$, $U(nx, y, t)$, $W(nx, y, t)$	62
FIGURA 4.16:	Sismogramas sintéticos para incidencia vertical de una onda SV, excitación producida por un pulso de Ricker con $T_p = 3[s]$, $f_p = 0.333[Hz]$. Sismogramas en orden descendente: $W(x, ny, t)$, $W(nx, y, t)$, $U(x, ny, t)$, $V(nx, y, t)$, $U(nx, y, t)$	63
FIGURA 4.17:	Sismogramas sintéticos reportados por Sánchez-Sesma y Luzón (1995), excitación producida por un pulso de Ricker con $T_p = 3[s]$, $f_p = 0.333[Hz]$. Sismogramas en orden descendente: $W(x, ny, t)$, $W(nx, y, t)$, $U(x, ny, t)$, $V(nx, y, t)$, $U(nx, y, t)$	64
FIGURA 4.18:	Mapa de contornos de la superficie que representa al modelo simplificado de la cuenca del Valle de México. Las líneas representan la posición sobre la que se está registrando el movimiento sísmico en superficie.	66
FIGURA 4.19:	Superficie del modelo simplificado de la cuenca del Valle de México desde diferentes perspectivas.	67
FIGURA 4.20:	Sismogramas sintéticos para incidencia oblicua de $\gamma = 30$ de una onda SH con un ángulo azimutal $\phi = 60$, excitación producida por un pulso de Ricker con $T_p = 2[s]$, $f_p = 0.5[Hz]$. En orden descendente se presentan los campos de desplazamiento: $V(x, 0, t)$, $V(0, y, t)$, $U(0, y, t)$, $W(0, y, t)$	69

FIGURA 4.21: Superficies del campo de desplazamiento horizontal $U(x, y, t)$. Las tomas corresponden a los tiempos 5, 10, 15, 20, 25, 30 [s].	70
FIGURA 4.22: Superficies del campo de desplazamiento horizontal $V(x, y, t)$. Las tomas corresponden a los tiempos 5, 10, 15, 20, 25, 30 [s].	71
FIGURA 4.23: Superficies del campo de desplazamiento vertical $W(x, y, t)$. Las tomas corresponden a los tiempos 5, 10, 15, 20, 25, 30 [s].	72
FIGURA 4.24: Funciones de transferencia para una onda incidente SV, vertical y con azimut $\phi = 60$	73
FIGURA 4.25: Sismogramas sintéticos para incidencia vertical $\gamma = 0$ de una onda SV con un ángulo azimutal $\phi = 60$. La excitación en la base del modelo es producida por un pulso de Ricker con $T_p = 2[s]$, $f_p = 0.5[Hz]$. En orden descendente se presentan los campos de desplazamiento: $U(x, 0, t)$, $V(x, 0, t)$, $W(x, 0, t)$	74
FIGURA 4.26: Sismogramas sintéticos para incidencia vertical $\gamma = 0$ de una onda SV con un ángulo azimutal $\phi = 60$. En orden descendente se presentan los campos de desplazamiento: $U(0, y, t)$, $V(0, y, t)$, $W(0, y, t)$	75
FIGURA 4.27: Superficies del campo de desplazamiento horizontal $U(x, y, t)$. Onda incidente SV vertical, dirección oblicua a 60°	76
FIGURA 4.28: Superficies del campo de desplazamiento horizontal $V(x, y, t)$. Onda incidente SV vertical, dirección oblicua a 60°	77
FIGURA 4.29: Superficies del campo de desplazamiento vertical $W(x, y, t)$. Onda incidente SV vertical, dirección oblicua a 60°	78
FIGURA 4.30: Mapa que muestra la distribución geográfica de las estaciones de CIRES, las estaciones de la RAI-UNAM y CIRES que se encuentran en terreno firme sobre la cuenca del Valle de México.	80
FIGURA 4.31: Acelerogramas adquiridos en la estación CUP5 en Ciudad Universitaria para el sismo de Huizuco del 16 de junio de 2013. Componentes rotadas respecto del azimuth Fuente-Receptor.	81
FIGURA 4.32: Acercamiento a una ventana de la componente radial del acelerograma en la estación CUP5. Se compara la señal original contra la señal filtrada, respectivamente	82
FIGURA 4.33: Acercamiento a una ventana de la componente radial del acelerograma en la estación CUP5. Se compara la señal original contra la señal filtrada, respectivamente	82
FIGURA 4.34: Acercamiento a una ventana de la componente radial del acelerograma en la estación CUP5. Se compara la señal original contra la señal filtrada, respectivamente	83
FIGURA 4.35: Sismogramas de desplazamiento para incidencia aproximada $\gamma \approx 20$ y con ángulo azimutal promedio $\phi = 7$. La excitación en la base del modelo es producida por datos del sismo de Huizuco con fecha del 16 de junio de 2013. En orden descendente se presentan los campos de desplazamiento: $U(x, ny, t)$, $V(x, ny, t)$, $W(x, ny, t)$	85

FIGURA 4.36: Sismogramas de desplazamiento para incidencia aproximada $\gamma \approx 20$ y con ángulo azimutal promedio $\phi = 7$. La excitación en la base del modelo es producida por datos del sismo de Huitzuco con fecha del 16 de junio de 2013. En orden descendente se presentan los campos de desplazamiento: $U(nx, y, t), V(nx, y, t), W(nx, y, t)$ 86

FIGURA 4.37: Sismogramas de desplazamiento para incidencia aproximada $\gamma \approx 20$ y con ángulo azimutal promedio $\phi = 7$. La excitación en la base del modelo es producida por datos del sismo de Huitzuco con fecha del 16 de junio de 2013. Perfil a lo largo de la región sur del Valle de México que atraviesa los antiguos lagos de Xochimilco y Chalco. En orden descendente se presentan los campos de desplazamiento: $U(x, ny, t), V(x, ny, t), W(x, ny, t)$ 88

FIGURA 4.38: Sismogramas de desplazamiento para incidencia aproximada $\gamma \approx 20$ y con ángulo azimutal promedio $\phi = 7$. La excitación en la base del modelo es producida por datos del sismo de Huitzuco con fecha del 16 de junio de 2013. Perfil a lo largo de la zona de transición poniente del Valle de México. En orden descendente se presentan los campos de desplazamiento: $U(nx, y, t), V(nx, y, t), W(nx, y, t)$ 89

FIGURA 4.39: Superficies del campo de desplazamiento horizontal $U(x, y, z, t)$ 90

FIGURA 4.40: Superficies del campo de desplazamiento horizontal $V(x, y, z, t)$ 91

FIGURA 4.41: Superficies del campo de desplazamiento vertical $W(x, y, z, t)$ 92

Lista de Tablas

TABLA 3.1:	Especificaciones equipo de cómputo (CPU)	38
TABLA 3.2:	Especificaciones equipo de cómputo (GPU)	38
TABLA 3.3:	Comparación numérica de tiempos de cálculo [ms]: SAXPY	41
TABLA 3.4:	Comparación numérica de tiempos de cálculo [ms]: MATMULT (1)	42
TABLA 3.5:	Comparación numérica de tiempos de cálculo [ms]: MATMULT (2)	42
TABLA 4.1:	Parámetros del perfil a lo largo del eje x.	46
TABLA 4.2:	Valores de las propiedades físicas del modelo trapezoidal (Kawase y Aki, 1989)	47
TABLA 4.3:	Valores de las propiedades de propagación de onda SH	47
TABLA 4.4:	Valores de las propiedades de propagación de onda SH	52
TABLA 4.5:	Parámetros de discretización de las mallas para modelos sintéticos	57
TABLA 4.6:	Valores de las propiedades físicas del modelo <i>croissant</i>	57
TABLA 4.7:	Valores de las propiedades de propagación de onda	60
TABLA 4.8:	Parámetros de discretización de la malla para el modelo simplificado de la Cuenca del Valle de México	65
TABLA 4.9:	Valores de las propiedades físicas del modelo para la cuenca del Valle de México	68
TABLA 4.10:	Características de la estaciones CIRES y RAII-UNAM	81

Introducción

1.1 Justificación

Los efectos de sitio producen grandes amplificaciones del movimiento del suelo por la ocurrencia de sismos intensos, provocando la concentración de daños en zonas específicas. De acuerdo con Sánchez-Sesma (1987), en algunos casos es posible inferir dicho efecto mediante modelos 1D simples, sin embargo, la influencia de la variación lateral por las características geológicas y topográficas de los alrededores es importante, de manera que, la caracterización del movimiento del suelo en términos de condiciones locales no es sencilla de representar, debido a la alta variabilidad espacial y la complejidad geométrica de las estructuras en el interior de la Tierra.

Los ejemplos de daños causados por amplificación local son numerosos, baste mencionar las experiencias que se encuentran en los sismos de septiembre de 1985 y 2017 en la Ciudad de México, San Francisco California en 1989 y el sismo de 1995 en la ciudad de Kobe, Japón (Frankel, 1993; Kawase y Aki, 1989; Perrot et al., 1995). Hay un gran interés por comprender la naturaleza de los efectos de sitio, mediante simulaciones de la propagación de ondas sísmicas en modelos realistas. Sin embargo, en diversas instancias de la práctica es deseable contar con herramientas que no impliquen un costo computacional elevado.

El Método de Proyección Variacional (VPM) fue desarrollado como una alternativa práctica al cálculo de la respuesta elástica de valles aluviales de poca profundidad, con el fin de caracterizar aproximadamente los efectos de sitio y analizar las variaciones espaciales del movimiento sísmico. Asimismo, el VPM se creó con el objetivo de vencer dificultades en el costo del cálculo numérico y limitaciones en la complejidad de los modelos considerados, presente en métodos como el de Elementos de Frontera (BEM), método de Solución Directa (DSM), elementos finitos (FEM) y diferencias finitas (FD), entre otros (Avila-Carrera et al., 2002).

El método se ha aplicado en modelos realistas como los del Valle de Osaka en Japón y la cuenca del Valle de México, obteniendo resultados aceptables con tiempos de cálculo más reducidos que los métodos existentes (Avila-Carrera y Sánchez-Sesma, 2013).

El presente trabajo propone mejoras del método en términos de optimizar la solución en el dominio del tiempo, reduciendo el costo computacional mediante la aplicación de esquemas modernos de cálculo basadas en la computación de alto rendimiento (High Performance Computing, HPC), específicamente por medio de la implementación de programación CUDA (Computing Unified Device Architecture), la cual integra el uso de tarjetas gráficas (GPU) como herramientas de cálculo numérico. Con el enfoque anterior se busca realizar la modelación de estructuras someras como los valles aluviales por medio de modelos simplificados y realistas, como la Cuenca del Valle de México.

1.2 Objetivos

Objetivo general

Optimar el método de Proyección Variacional para el cálculo eficiente de propagación de ondas sísmicas en medios geológicos simplificados y realistas.

Objetivos particulares

- i. Modelar la respuesta elástica de valles aluviales someros y modelos con geometrías simples y realistas.
- ii. Implementar un esquema del cómputo de alto rendimiento a través de CUDA.
- iii. Reducir el costo computacional en el cálculo numérico para modelos con una discretización en tiempo y espacio considerable.
- iv. Visualizar los resultados obtenidos mediante gráficos y animaciones del fenómeno de propagación de ondas sísmicas.
- v. Establecer las ventajas y limitaciones del método.

1.3 Metodología

A continuación se enuncia la metodología empleada para el desarrollo de este trabajo, la cual sigue una secuencia ordenada de procedimientos para lograr la optimización del VPM aplicado a diversos modelos. La secuencia se enlista a continuación:

- i. Definición de los modelos de interés.
- ii. Implementación del esquema de cómputo de alto rendimiento CUDA al VPM.
- iii. Comparación de rendimiento entre el esquema de cálculo original y el óptimo del método.

iv. Visualización de resultados en dos y tres dimensiones.

Marco Teórico

En este apartado se establecen los fundamentos teóricos sobre los cuales se establece el Método de Proyección Variacional. En primera instancia se realiza una breve descripción conceptual y matemática de la derivación de la ecuación de onda, ente matemático que rige el fenómeno de la propagación de ondas sísmicas. Posteriormente, se presentan los conceptos de funcional, extremos de funcionales y variación de un funcional, como principios del cálculo variacional. A su vez se describe la formulación débil de problemas con valores en la frontera así como los teoremas fundamentales sobre las formulaciones débiles o variacionales. En seguida se explica concisamente el método de Galérkin, como medio para la aproximación numérica de la ecuación de onda. Finalmente, se mencionan los paradigmas del cómputo de alto rendimiento con los que es posible optimar métodos numéricos y técnicas de la simulación de fenómenos físicos.

2.1 Derivación de la ecuación de onda

Considérese un cuerpo de estudio cuya composición es *continua* en el espacio, entendiendo que no presenta 'saltos' a lo largo de su estructura. La *mecánica del medio continuo* se encarga del estudio de los *desplazamientos, esfuerzos y deformaciones* sufridas por esta idealización de la materia ante la presencia de fuerzas. Existen dos tipos de fuerzas principalmente: *fuerzas de cuerpo* que son proporcionales al volumen, como la fuerza de gravedad, y las *fuerzas de superficie*, que son proporcionales al área de interacción con el cuerpo. El cuerpo de referencia representado en la figura 2.1,

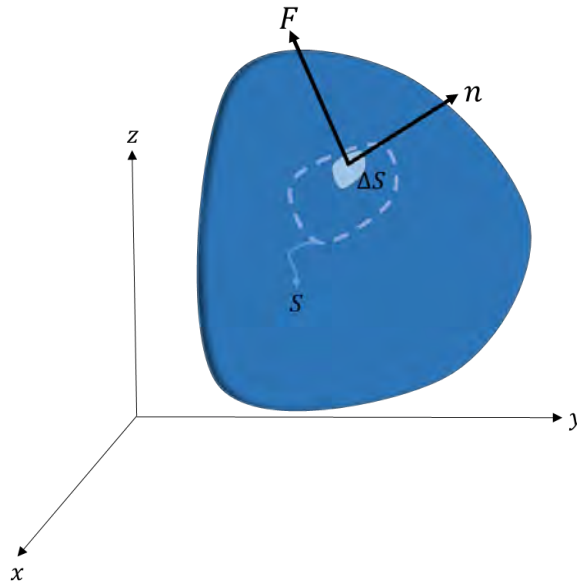


FIGURA 2.1: Esquema de un cuerpo continuo sometido a una fuerza sobre un diferencial de superficie ΔS .

ocupa una región en el espacio y se encuentra interactuando interna y externamente con el medio. ΔS es un elemento de superficie del cual emerge un vector normal n , con dirección apuntando hacia afuera del interior del cuerpo. La parte positiva del elemento de superficie ejerce una fuerza F sobre la parte negativa (contraria a dirección de n). Esta fuerza depende su localización, tamaño del área y la orientación de n . Si aceptamos que $\Delta S \rightarrow \alpha \ll \ll$, un área infinitesimal limitada en $\frac{\Delta F}{\Delta S}$ (Fung, 1994), entonces:

$$\vec{T} = \frac{dF}{dS} \quad (2.1)$$

que es el *vector tracción*, el cual representa la fuerza por unidad de área que actúa en la superficie del cuerpo. Tiene la misma dirección que la fuerza F y es función también del vector normal ya que depende de la orientación de la superficie.

De acuerdo con lo anterior, el sistema de fuerzas que actúan en un volumen se describe por seis vectores de tracción, cada uno actuando sobre una cara perpendicular a los ejes coordenados, paralelo al plano definido por los otros dos ejes. Debido a la simetría de la descripción y al equilibrio bastan tres vectores de tracción para describir las fuerzas de superficie en las seis caras del paralelepípedo elemental escogido. Sea $T^{(j)}$ el vector de tracción que actúa sobre la superficie cuya normal es \hat{e}_j , de manera que T_z^x es la componente z de la tracción que actúa sobre la superficie cuya normal es \hat{e}_x . De esta manera se conforman las fuerzas superficiales en un *tensor de esfuerzos* (Fung, 1994; Stein y Wysession, 2007):

$$\sigma_{ji} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{(x)} \\ T^{(y)} \\ T^{(z)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_x^{(x)} & T_y^{(x)} & T_z^{(x)} \\ T_x^{(y)} & T_y^{(y)} & T_z^{(y)} \\ T_x^{(z)} & T_y^{(z)} & T_z^{(z)} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

el cual indica la componente i -ésima del vector de tracción que actúa sobre la superficie cuya normal apunta hacia afuera en dirección \hat{e}_j (figura 2.2).

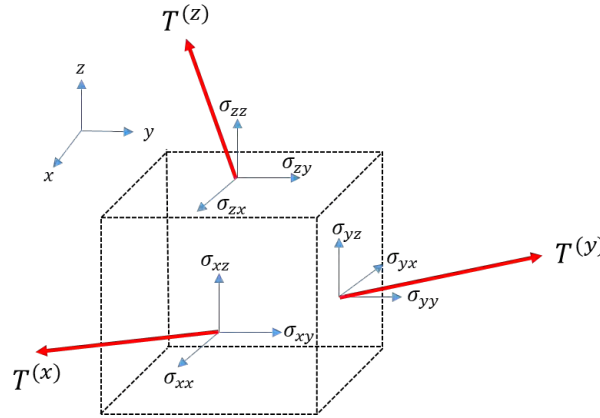


FIGURA 2.2: Diagrama que representa el vector de tracción y componentes del tensor de esfuerzos sobre un cuerpo.

La relación matemática entre el tensor de esfuerzos y el vector tracción se debe a Cauchy. Establece el equilibrio en una frontera inclinada y esta dada por:

$$T_i = \sigma_{ji}n_j \quad (2.3)$$

La ecuación 2.3 está escrita mediante notación indicial, con lo cual se tiene un sistema arbitrario, representando la interacción de fuerzas superficiales sobre cualquier volumen dentro del material.

Ahora bien, si los esfuerzos se aplican a un material que no es rígido, se presentará un movimiento relativo de las partículas del cuerpo presentándose *deformación*. Este efecto se representa mediante el *tensor de deformación*. Sea $u(x)$ el campo de desplazamiento, entonces:

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right] & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right] \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right] & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right] \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right] & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right] & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

O en su versión sintetizada:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (2.5)$$

Las componentes en la diagonal muestran la variación del desplazamiento a lo largo de los ejes coordenados, lo cual es conocido como *dilatación*:

$$\theta = e_{ii} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \nabla \cdot u \quad (2.6)$$

Los términos fuera de la diagonal describen los cambios del desplazamiento que se presentan en las otras direcciones del sistema coordenado.

2.1.1 Ecuación de movimiento

Un cuerpo de densidad ρ y volumen $dx dy dz$ que se encuentra sometido a una fuerza de cuerpo $f_i dx dy dz$. La fuerza neta será la suma de todas las fuerzas superficiales en cada cara más la fuerza volumétrica.

Tomando las caras $x + dx$ y x , suponiendo que σ_{xx} es una función continua y diferenciable y usando un desarrollo de primer orden en serie de Taylor, se tiene el siguiente estado dinámico:

$$\begin{aligned} & [\sigma_{xx}(x + dx) - \sigma_{xx}(x)] dy dz \\ &= \left[\sigma_{xx}(x) + \frac{\partial \sigma_{xx}(x)}{\partial x} dx \right] dy dz \\ &= \frac{\partial \sigma_{xx}(x)}{\partial x} dx dy dz \end{aligned} \quad (2.7)$$

Operando de manera similar para todas las fuerzas que actúan sobre la cara x e igualando a la aceleración del sistema (segunda ley de Newton):

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right] dx dy dz + f_i dx dy dz \\ &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} dx dy dz \end{aligned} \quad (2.8)$$

De manera similar se aplica lo anterior para las componentes y y z , obteniéndose un sistema de tres ecuaciones, el cual se expresa de manera compacta mediante la notación indicial:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(x, t)}{\partial x_j} + f_i(x, t) = \rho \frac{\partial^2 u_i(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

que es la *ecuación de movimiento*, satisfaciéndose en cualquier lugar dentro de un medio continuo. Expresa la segunda ley de Newton en términos de desplazamientos, esfuerzos y fuerzas de cuerpo. Si despreciamos el término de las fuerzas de cuerpo se tiene la *ecuación de movimiento homogéneo*, la cual describe la propagación de ondas sísmicas en todos lados excepto en la fuente (terremoto o explosión) (Stein y Wysession, 2007).

2.1.2 Ley de Hooke y ecuaciones constitutivas

La relación que existe entre esfuerzos y deformación se encuentra dada por la ecuación constitutiva del material. La relación más simple es la lineal, de forma que la Tierra al comportarse como un elástico lineal en un periodo de tiempo relativamente corto, da lugar a ondas sísmicas. Si se asume que el material es elástico, se implica que los desplazamientos desde un estado inicial no deformado son pequeños, lo cual es conocido como teoría de deformación infinitesimal (Stein y Wysession, 2007).

El esfuerzo y la deformación para un material linealmente elástico se relacionan entre sí mediante la ley de Hooke:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \quad (2.10)$$

donde C_{ijkl} es el módulo elástico que describe las propiedades del material. Dicho tensor se conforma por 81 componentes, que al tratarse de un tensor simétrico $C_{ijkl} = C_{jikl}$ o $C_{ijkl} = C_{ijlk}$, se reducen a 36 ya que hay 6 componentes independientes. Considerando también la simetría $C_{ijkl} = C_{klij}$, asociada a la idea de energía de deformación, el número de componentes independientes se reduce a 21. Más allá, al idealizar el material como *isótropo*, esto es, que las propiedades físicas del medio no tienen una dirección preferencial, resultan en dos constantes elásticas del tensor, conocidas como las *constantes de Lamé* representadas por λ y μ , que contribuyen al tensor elástico mediante la siguiente expresión:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.11)$$

Finalmente, en términos de las constantes de Lamé, la ecuación constitutiva para un material isótropo al sustituir la ec. 2.11 en la 2.10, se puede escribir como:

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (2.12)$$

2.1.3 Ecuación de Navier

Para la derivación de la ecuación de Navier, se reexpresará la ecuación constitutiva 2.12, al sustituir el tensor de deformación, la dilatación y cambiando los índices $ij \rightarrow kl$, se tiene:

$$\sigma_{kl} = \lambda \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \delta_{kl} + 2\mu \left[\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right] \quad (2.13)$$

Sustituyendo en la ecuación de movimiento (ec. 2.9):

$$\lambda \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_k} \delta_{kl} + \mu \left[\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_k} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_k} \right] + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.14)$$

Agrupando términos:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_k} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.15)$$

resultando la *ecuación de Navier*, que describe el equilibrio en un cuerpo elástico, lineal, homogéneo e isotrópico en termino del campo de desplazamientos.

Para la derivación de las ecuaciones de onda que describen la propagación en un medio elástico, resulta conveniente reexpresar la ecuación 2.15 en forma vectorial:

$$(\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot u) + \mu \nabla^2 u = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.16)$$

la cual haciendo uso de la identidad vectorial del laplaciano: $\nabla^2 u = \nabla(\nabla \cdot u) - \nabla \times (\nabla \times u)$ se tiene la siguiente expresión:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot u) - \mu \nabla \times (\nabla \times u) = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.17)$$

Ahora bien, mediante la *descomposición de Helmholtz* es posible expresar un campo vectorial en términos de sus potenciales, uno escalar ϕ y otro vectorial ψ :

$$u(x, t) = \nabla \phi(x, t) + \nabla \times \psi(x, t) \quad (2.18)$$

con lo cual es posible separar el campo desplazamientos en dos partes. Aquella asociada con el potencial escalar no presenta rotación y da lugar a la representación de *ondas compresionales o volumétricas*, y se expresan mediante la siguiente ecuación general:

$$\nabla^2 \phi(x, t) = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.19)$$

donde α es la velocidad de propagación de las ondas P

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (2.20)$$

Por otro lado, la parte asociada al potencial vectorial presenta una divergencia nula, indicando que no hay cambios volumétricos y corresponde a *ondas de corte o cizalla*. Se expresan por la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \psi(x, t) = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.21)$$

donde β representa la velocidad de propagación de ondas S:

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.22)$$

2.2 Fundamentos de Cálculo Variacional

Un *funcional* se entiende como una regla de correspondencia que asigna un número real definido a cada función que pertenece a una cierta clase o familia. En otras palabras, un *funcional* es un *tipo de función* en la cual la *variable independiente* es una función. Estas cantidades variables juegan un papel trascendente en problemas del análisis matemático, geometría y mecánica. De manera más formal, entendamos un *funcional* como sigue:

Sea M una clase de funciones $y(x)$. Si a toda función $y(x) \in M$ le corresponde un número determinado J se dice que en la clase de funciones M está definido el *funcional* J y se escribe $J = J[y(x)]$. Asimismo, la clase M de funciones $y(x)$ en la que está definido el funcional J se denomina *campo de definición del funcional* (Krasnov et al., 1976)

Un ejemplo general de un funcional es el siguiente: sea $F(x, y, z)$ una función continua de tres variables. La expresión:

$$J[y] = \int_a^b F[x, y(x), y'(x)] dx \quad (2.23)$$

donde $y(x)$ abarca el conjunto de todas las funciones continuamente diferenciables definidas sobre el intervalo $[a, b]$, define un *funcional*. En este sentido, es posible elegir una gran cantidad de funciones de la forma $F(x, y, z)$ para obtener diferentes funcionales.

A continuación se enuncian algunos ejemplos: consideremos todo el conjunto de curvas planas rectificables, de forma que un número definido se asocia con cada una de dichas

curvas y llámese, su longitud. Entonces, la longitud de una curva es un funcional definido sobre el conjunto de las curvas rectificables. En lenguaje matemático: sea $F(x, y, x) = \sqrt{1 + z^2}$, entonces $J[y]$ es la longitud de la curva $y = y(x)$ (Gelfand y Fomin, 1963).

La rama más desarrollada para tratar problemas que involucran *funcionales* recibe el nombre de *Cálculo Variacional*, la cual se ocupa de encontrar los *máximos y mínimos de funcionales*. El objeto del *Cálculo Variacional* es buscar la *función argumento* $y(x)$ en correspondencia a la cual una integral del tipo 2.39 adquiere un valor mínimo o máximo. El valor anterior se denomina *extremo* del funcional y la función $y(x)$, se llama *extremal*.

Dado lo anterior es posible enunciar que el *Problema fundamental del Cálculo Variacional* se expresa así (Levi, 1980): en el dominio de las funciones argumento admisibles para un funcional determinado, determinar el extremal para la cual el funcional alcanza un valor extremo, con respecto a los valores que ella adquiere para todas las demás funciones argumento del dominio dado, que se hallan en una vecindad suficientemente pequeña del extremal.

2.2.1 Espacios funcionales

Los funcionales se pueden explicar en términos geométricos, recordando que cada función perteneciente a algún conjunto como un punto de un espacio define un espacio funcional. Al contrario de las funciones con número finito de variables independientes, en donde resulta suficiente considerar un espacio Euclideo n-dimensional, los espacios funcionales no se definen en términos de un solo espacio universal. Lo anterior dependerá de la forma del funcional en análisis. Por ejemplo, un funcional $\int_a^b F(x, y, y') dx$ se definirá en el conjunto de todas las funciones con primera derivada continua, mientras que un funcional: $\int_a^b F(x, y, y', y'') dx$ será definido en un espacio que es el conjunto de todas las funciones con dos derivadas continuas.

Dado que la continuidad es fundamental para el desarrollo del análisis funcional, resulta apropiado definir la *norma de un espacio lineal*, la cual, en analogía con la distancia entre dos puntos de un espacio Euclideo, representará un concepto más general. Un *espacio lineal* en términos de elementos $x, y, z, \dots \in \mathbb{R}$, para los cuales las operaciones de adición y multiplicación por escalares reales α, β, \dots , están definidas, con base los siguientes axiomas:

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $x + 0 = z$, elemento neutro aditivo
4. $x + (-x) = 0$, inverso aditivo

5. $1 * x = x$, neutro multiplicativo

6. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

Un espacio lineal \mathbb{R} es *normado*, si cada elemento $x \in \mathbb{R}$ es asignado a un número no negativo $\|x\|$, llamado la *norma de x* , tal que:

1. $\|x\| = 0$ sí y sólo sí $x = 0$

2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

En un espacio lineal normado, es posible definir *distancias* entre dos elementos x, y mediante la cantidad $\|x - y\|$. Estos elementos pueden ser números, vectores, matrices o funciones. Entonces, es posible definir que un funcional $J[y]$ es *continuo* en un punto $\hat{y} \in \mathbb{R}$ si para cualquier $\epsilon > 0$, hay un $\delta > 0$ tal que:

$$|J[y] - J[\hat{y}]| < \epsilon \quad (2.24)$$

dado que $\|y - \hat{y}\| < \delta$.

La desigualdad en 2.24 es equivalente a:

$$J[y] - J[\hat{y}] > -\epsilon \quad (2.25)$$

$$J[y] - J[\hat{y}] > \epsilon \quad (2.26)$$

donde la primera desigualdad indica que $J[y]$ es *semicontinua inferior* en \hat{y} y la segunda, que $J[y]$ es *semicontinua superior* en \hat{y} (Gelfand y Fomin, 1963).

2.2.2 Condiciones necesaria y suficiente para un extremo

Considérese un espacio lineal normado \mathbb{R} y sea cada elemento $h \in \mathbb{R}$ asignado a un número $J[h]$. Sea $J[h]$ un funcional definido sobre \mathbb{R} . Entonces $J[h]$ será un *funcional lineal* si:

- i. $J[\alpha h] = \alpha J[h] \forall h \in \mathbb{R}$ y cualquier número real α
- ii. $J[h_1 + h_2] = J[h_1] + J[h_2] \forall h_1, h_2 \in \mathbb{R}$
- iii. $J[h]$ es continuo $\forall h \in \mathbb{R}$

Un ejemplo de un funcional lineal es el siguiente:

$$J[h] = \int_a^b [\alpha_0(x)h(x) + \alpha_1(x)h'(x) + \cdots + \alpha_n(x)h^{(n)}(x)]dx \quad (2.27)$$

donde $\alpha_i(x)$ son funciones fijas en el intervalo $[a, b]$.

El *incremento* de un funcional definido sobre el espacio lineal normado es:

$$\Delta J[h] = J[y + h] - J[y] \quad (2.28)$$

correspondiente al incremento $h = h(x)$ de la variable independiente $y = y(x)$. Supóngase ahora que

$$\Delta J[h] = \phi[h] + \epsilon \|h\| \quad (2.29)$$

donde $\phi[h]$ es un funcional lineal y $\epsilon \rightarrow 0$ como $\|h\| \rightarrow 0$, entonces el funcional es *diferenciable* y la parte lineal del incremento de J (el funcional lineal $\phi[h]$ del cual difiere $\Delta J[h]$ por un infinitesimal del orden más elevado que 1 relativo a $\|h\|$), se llama la *variación* de $J[y]$, denotado como $\delta J[h]$.

Derivado del concepto de variación o diferencial de un funcional, se establece la condición necesaria de un funcional para tener un extremo. Retomando el concepto de extremos relativos del análisis de funciones de n variables, considérese $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ una función multivariable diferenciable, la cual presentará *extremos relativos* en el punto $(\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_n)$ si:

$$\Delta F = F(x_1, \cdots, x_n) - F(\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_n) \quad (2.30)$$

tiene el mismo signo para todos los puntos (x_1, x_2, \cdots, x_n) que pertenecen a alguna vecindad de $(\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_n)$, donde el extremo se tratará de un *mínimo* si $\Delta F \geq 0$ y un *máximo* si $\Delta F \leq 0$.

En este sentido, el funcional $J[y]$ tiene un *extremo relativo* para $y = \hat{y}$ si $J[y] - J[\hat{y}]$ no cambia su signo en alguna vecindad de la curva $y = \hat{y}(x)$. Como se tratan funcionales definidos en algún conjunto de funciones continuamente diferenciables, las cuales pueden ser elementos del espacio \mathbb{C} o elementos del espacio \mathbb{D}_1 . De esta manera, es posible definir dos clases de extremos:

1. *Extremo débil* para $y = \hat{y}$: si existe un $\epsilon > 0$ tal que $J[y] - J[\hat{y}]$ tiene el mismo signo para toda y en el dominio de definición del funcional que satisface la condición $\|y - \hat{y}\|_1 < \epsilon$, donde $\|\cdot\|_1$ denota la norma en el espacio \mathbb{D}_1 .
2. *Extremo fuerte* para $y = \hat{y}$: si existe un $\epsilon > 0$ tal que $J[y] - J[\hat{y}]$ tiene el mismo signo para toda y en el dominio de definición del funcional que satisface la condición $\|y - \hat{y}\|_0 < \epsilon$ donde $\|\cdot\|_0$ denota la norma en el espacio \mathbb{C} .

Cada *extremo fuerte* es simultáneamente un *extremo débil*, ya que si $\|y - \hat{y}\|_1 < \epsilon$, entonces forzosamente se cumplirá $\|y - \hat{y}\|_0 < \epsilon$, entonces $J[\hat{y}]$ es un extremo con respecto a todas las y tal que $\|y - \hat{y}\|_1 < \epsilon$. No obstante, el hecho contrario no se cumple, esto es, un extremo débil puede no ser un extremo fuerte. En general, encontrar un extremo débil es más simple que encontrar un extremo fuerte, ya que los funcionales se consideran continuos en la norma del espacio \mathbb{D}_1 (Gelfand y Fomin, 1963).

Considerando lo anterior se enuncia el siguiente teorema:

Una condición necesaria para que el funcional diferenciable $J[y]$ tenga un extremo para $y = \hat{y}$, es que su variación se anule para $y = \hat{y}$, esto es:

$$\delta J[h] = 0 \tag{2.31}$$

2.2.3 Formulación débil de problemas con valores en la frontera

Un dominio Ω denota un dominio cerrado de \mathbb{R}^n con $n = 1, 2, \dots$, cuya frontera es $\partial\Omega$. Un problema con valores en la frontera de la forma

$$\begin{cases} Lu = f & \text{en } \Omega \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega^* \end{cases}$$

donde f es una función dada, u es la incógnita, L es un operador diferencial lineal y B es un operador de frontera afín; $\partial\Omega^*$ es un subconjunto de $\partial\Omega$ pudiendo ser éste la frontera completa. Es posible reformular el problema anterior desde una perspectiva débil o variacional, esto es, definir una aproximación tal que no se satisfagan las ecuaciones como tales, sino por medio de la búsqueda de soluciones débiles. Lo anterior expande el campo de aplicaciones físicas en donde no se cuentan con datos de suave distribución (Quarteroni y Valli, 2008).

La formulación débil se obtiene después de multiplicar la ecuación diferencial por algún conjunto apropiado de funciones de prueba y efectuando la integración sobre el dominio de interés. Entonces, por medio de la *fórmula de Green* de integración por partes se tiene:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u v n_i d\gamma \tag{2.32}$$

donde $n = (n_1, \dots, n_d)$ es el vector unitario que apunta hacia afuera de la frontera $\partial\Omega$, que se emplea con el fin de reducir el orden de diferenciación para la solución u . Dado lo anterior, se ha definido el problema:

$$u \in W : A(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V \quad (2.33)$$

esto es encontrar soluciones u que pertenezcan a un espacio de Hilbert¹ de soluciones admisibles W , tal que la forma bilineal $A(u, v)$ correspondiente al operador diferencial L , sea igual a un funcional lineal $F(v)$ sobre un espacio de Hilbert V para todo $v \in V$. Las condiciones de frontera de u se pueden establecer directamente en la definición de W , las cuales se denominan *condiciones de frontera esenciales*. De otra manera, se cumplen indirectamente por medio de una elección apropiada de la forma bilineal A o del funcional F y reciben el nombre de *condiciones de frontera naturales* (Quarteroni y Valli, 2008).

2.2.4 Teoremas de existencia y unicidad del Análisis Funcional

A continuación se enuncian dos teoremas fundamentales sobre existencia y unicidad que sustentan la viabilidad de la solución 2.32. En primera instancia, considérese el caso especial en donde $V = W$:

Lema de Lax-Milgram: Sea $V \in \mathbb{R}$ un espacio de Hilbert, dotado con la norma $\|\cdot\|$, $A(u, v) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal y $F(v) : V \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal continuo, esto es, $F \in V'$ donde V' denota el espacio dual de V . Además se asume que $A(\cdot, \cdot)$ es continuo, esto es:

$$\exists \gamma \geq 0 : |A(w, v)| \leq \gamma \|w\| \|v\| \quad \forall w, v \in V \quad (2.34)$$

y coercivo, esto es:

$$\exists \alpha \geq 0 : |A(v, v)| \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in V \quad (2.35)$$

Entonces, existe una solución única $u \in V$ a 2.32 y

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{V'} \quad (2.36)$$

¹Hilbert ideó una teoría para la solución de *funciones cuadráticas sumables*, que representó utilidad para la solución de funciones lineales. El principio de su teoría consiste en que así como un punto en el espacio ordinario puede considerarse como un conjunto de los valores adquiridos por tres coordenadas x, y, z , una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, puede considerarse como el conjunto de los valores adquiridos por una infinidad de coordenadas constituidas por todos los posibles valores que la función adquiere en el intervalo de interés, por tanto, es posible llamar a $f(x)$ como un *punto del espacio de infinitas dimensiones*, conocido como *Espacio de Hilbert*. La hipótesis del cuadrado sumable radica en la extensión del concepto de *distancia* al espacio de Hilbert, de manera que la distancia entre dos puntos $f_1(x)$ y $f_2(x)$ en dicho espacio es: $\Delta[f_1, f_2] = \sqrt{\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]^2 dx}$ (Levi, 1980)

Para el caso en que la forma bilineal es simétrica

$$A(w, v) = A(v, w) \quad \forall w, v \in V \quad (2.37)$$

entonces $A(\cdot, \cdot)$ define un producto escalar sobre V , y el teorema de representación de Riesz basta para inferir la existencia y unicidad para la solución de 2.33. En este caso la solución se puede considerar como la única solución al problema de minimización de encontrar:

$$u \in V : J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in V \quad (2.38)$$

donde

$$J(v) := \frac{1}{2}A(v, v) - F(v) \quad (2.39)$$

es un funcional cuadrático.

2.3 El método de Galërkin

Diversos métodos de solución numérica a ecuaciones diferenciales utilizan una aproximación de la función desconocida por medio de una suma general de la forma:

$$u(x) \approx \sum_{i=0}^N c_i \psi_i(x) \quad (2.40)$$

donde $\psi_i(x)$ son funciones prescritas y c_0, \dots, c_N son coeficientes desconocidos que deben ser determinados. Estos métodos de solución que emplean la aproximación anterior se basan en la construcción de un sistema de $N+1$ ecuaciones para determinar los coeficientes c_i . Cuando se aproxima una función f por medio de la ecuación 2.40, la idea central es minimizar la norma del error de aproximación $e = u - f$ o equivalentemente exigir que e sea ortogonal a una base de funciones V . En este sentido, existen cuatro tipos de aproximación: método de mínimos cuadrados, *método de Galërkin*, interpolación o colocación y el método de regresión (Langtangen y Mardal, 2016).

El *método de Galërkin* trata de encontrar u de manera que el error $f - u$ sea ortogonal al espacio donde u está definido. Lo anterior es conocido como una *proyección* de funciones, esto es, para $v \in V$, donde $V = \{\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_N\}$ es un espacio vectorial de funciones base con dimensión $N + 1$, linealmente independientes y diferentes de cero, entonces:

$$(e, v) = 0 \quad \forall v \in V \quad (2.41)$$

ya que cualquier $v \in V$ se expresa como $v = \sum_{i=0}^N c_i \psi_i$, entonces

$$(e, \sum_{i=0}^N c_i \psi_i) = 0 \quad (2.42)$$

para cualquier combinación de coeficientes c_0, \dots, c_N . Reescribiendo la ec. 2.42

$$\sum_{i=0}^N c_i (e, \psi_i) = 0 \quad (2.43)$$

lo cual para valores arbitrarios de c_i , se requiere que cada término en la suma se anule, $(e, \psi_i) = 0, i = 0, \dots, N$. Ahora considerando que el error es:

$$e = f - \sum_{j=0}^N c_j \psi_j \quad (2.44)$$

entonces:

$$(f - \sum_{j=0}^N c_j \psi_j, \psi_i) = (f, \psi_i) - \sum_{j=0}^N (\psi_i, \psi_j) c_j = 0 \quad (2.45)$$

por lo tanto

$$\sum_{j=0}^N (\psi_i, \psi_j) c_j = (f, \psi_i) \quad i = 0, \dots, N \quad (2.46)$$

con lo cual es posible determinar el valor de los coeficientes c_j al resolver el sistema de $N + 1$ ecuaciones.

El método de Galérkin y el de residuos pesados pueden ser aplicados con una base de funciones de elemento finito si se aplica una *integración por partes* como medio para transformar derivadas de segundo orden en derivadas de primer orden. Para ejemplificar lo anterior considérese la siguiente ecuación diferencial:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x) \quad (2.47)$$

cuya formulación de Galérkin es

$$-(u'', v) = (f, v); \forall v \in V; x \in [0, L] \quad (2.48)$$

integrando por partes se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v(x) dx &= - \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx + [v \frac{\partial u}{\partial x}]_0^L \\ &= - \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial u(L)}{\partial x} v(L) - \frac{\partial u(0)}{\partial x} v(0) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Si expresamos en la estructura anterior la matriz resultante de los productos internos del método de Galérkin, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^L \psi_i(x) \psi_j''(x) dx &= - \int_0^L \psi_i'(x) \psi_j'(x) dx + [\psi_i \psi_j']_0^L \\ &= - \int_0^L \psi_i'(x) \psi_j'(x) dx + \psi_i(L) \psi_j'(L) - \psi_i(0) \psi_j'(0) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Lo anterior muestra que la integración por partes reduce el orden de las derivadas y convierte a la matriz de coeficientes simétrica $(\psi_i', \psi_j') = (\psi_j', \psi_i')$. No obstante la simetría también dependerá de los términos involucrados en la ecuación diferencial. Ahora bien, eligiendo una base ortogonal de funciones que obligue a los términos de frontera anularse $(\psi_i(0) = \psi_i(L) = 0)$, se tendrá una formulación de Galérkin alternativa:

$$- (u'', v) = (u', v') = (f, v) ; \forall v \in V \quad (2.51)$$

obteniendo de esta forma una *formulación variacional o débil de la ecuación diferencial*, al reducir el orden de diferenciabilidad de u y la base de funciones ψ_i . La formulación variacional original con las derivadas de segundo orden se conoce como la *forma fuerte*, con requerimientos más fuertes de diferenciabilidad de las funciones (Langtangen y Mardal, 2016).

2.4 Computación de Alto Rendimiento

El desarrollo de la tecnología computacional a lo largo del tiempo ha impactado positivamente el mejoramiento de la modelación matemática de fenómenos físicos en términos de reducción en el tiempo de cálculo numérico, visualización más realista e integración de volúmenes de información más grande. Lo anterior involucra el término de *computación científica*, que se define como el conjunto de herramientas, técnicas y teorías requeridas para resolver modelos matemáticos de problemas presentes en la ciencia y la ingeniería, con base en el análisis numérico y la ciencias de la computación .

Básicamente la computación en paralelo significa que múltiples procesadores trabajen cooperativamente en una misma tarea, por lo cual, si a un solo procesador le tomara un

tiempo t realizar dicha tarea, entonces a un número p de procesadores realizará la tarea en un tiempo t/p . Pero en la realidad, lo anterior no es del todo posible y se presenta en situaciones muy especiales, sin embargo es una meta importante desarrollar algoritmos que puedan tomar la mayor ventaja de estos esquemas de cómputo (Golub y Ortega, 1993).

2.4.1 Memoria compartida contra memoria distribuida

En la memoria compartida todos los procesadores tienen acceso a una memoria en común. Cada procesador puede contar con su propia memoria local para desplegar resultados intermedios o ser parte especial del código. La comunicación entre los procesadores se realiza por medio de la memoria compartida, por lo que una gran ventaja de este esquema de paralelismo es que se contará con un rápido acceso a la información entre los procesadores. No obstante, se presenta el problema de que distintos procesadores traten de acceder a la memoria común al mismo tiempo, representando un retraso de las secuencias de cálculo hasta que la memoria se libere y continúe el flujo de trabajo. Dicho tiempo de retraso se conoce como *tiempo de contención* e incrementa conforme crece el número de procesadores (Golub y Ortega, 1993). En la figura 2.3 se muestra un esquema simple de la memoria compartida.

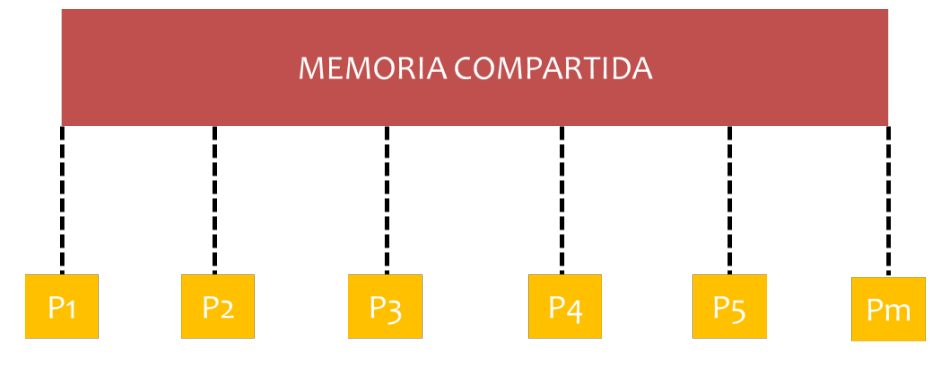


FIGURA 2.3: Esquema simplificado de la memoria compartida entre m número de procesadores.

En el caso de la memoria distribuida, cada procesador puede acceder a su propia memoria local. La comunicación entre los procesadores se efectúa mediante la transferencia de mensajes (*message passing*), en el que los datos o demás información se transfieren entre procesadores. Para ello existen diferentes esquemas de interconexión entre procesadores (que también es relevante para la memoria compartida) como los sistemas completamente conectados, con la cual cada procesador tiene una conexión directa con los demás, siendo teóricamente el esquema ideal pero que resulta impráctico para una cantidad grande de procesadores. Algunos esquemas comunes son el de *conexión por switch*, *mallas* e *hipercubos* (Golub y Ortega, 1993).

Uno de los esquemas más conocidos para la clase de memoria distribuida es por medio de *clusters*, en los cuales los procesadores están interconectados por alguna de las conexiones

mencionadas anteriormente, y estos se interconectan ligados por un *bus*. La comunicación adentro de cada cluster es local mientras que entre ellos la comunicación es global. Debido a lo anterior este esquema presenta un mejor balance de la comunicación, ya que la mayoría de los mensajes para un determinado procesador será de tipo local dentro de su propio cluster sin necesidad de salir a la parte global a buscar comunicación con otro cluster. (Golub y Ortega, 1993). En la figura 2.4 se presenta un esquema de un cluster.

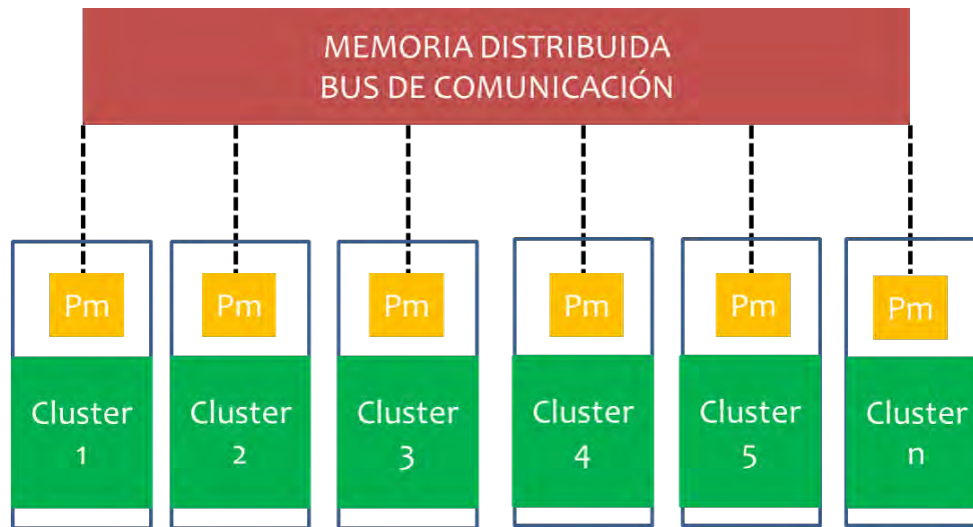


FIGURA 2.4: Esquema simplificado de memoria distribuida mediante un cluster con m número de procesadores cada uno e interconectados por un bus de comunicación.

2.4.2 CUDA: Computing Unified Device Architecture

Los primeros diseños de GPU fueron pensados para producir un color para cada píxel sobre una pantalla usando unidades aritméticas programables, con la intención de utilizar la posición (x, y) sobre la superficie, así como información adicional para combinar diversas entradas en el cálculo final del color. La naturaleza de esta información en un inicio correspondía a atributos de visualización como texturas o color, sin embargo, dado que el programador mantiene el control sobre estas entradas, fue posible entenderlas como datos numéricos de cualquier naturaleza (Golub y Ortega, 1993; Cook, 2013).

Con este modo de programación en paralelo se busca explotar las capacidades de las Unidades de Procesamiento Gráfico (GPU) de una computadora. Originalmente estos dispositivos se desarrollaron para el cálculo de gráficos de alta velocidad en la industria de los video juegos. El lenguaje en CUDA hace del GPU otro dispositivo más para la computación científica, sin necesidad de contar con el conocimiento de la programación gráfica. CUDA es una extensión del lenguaje C de programación para unificar código dirigido al GPU y al procesador anfitrión (CPU). En este sentido, el procesador en CPU ejecuta *kernels* o núcleos

de código hacia la tarjeta gráfica, específicamente hacia los hilos y bloques que componen la tarjeta gráfica. Precursora de dicha tecnología de cómputo es la compañía NVIDIA quien inicia su inmersión en esta área alrededor del año 2007. Con el paso del tiempo, se ha buscado implementar este método mediante diversos lenguajes de programación como FORTRAN, C++ y Python (Cook, 2013).

Arquitectura de una unidad de procesamiento gráfico (GPU)

Para implementar códigos de programación CUDA resulta indispensable conocer la estructura física de la unidad de procesamiento gráfico con la que se dispone, de forma que el diseño de los algoritmos se *adaptan* a la arquitectura de la unidad de procesamiento gráfico disponible. La unidad básica en un GPU es el *procesador de hilos*, conocido como *núcleo (core)*. Este componente es una unidad diseñada para realizar operaciones de punto flotante. La tarjeta gráfica contiene varios núcleos, que se agrupan en *multiprocesadores*, los cuales tienen recursos limitados usados por los hilos internos a través de registradores y memoria compartida. Estos multiprocesadores se conocen como *bloques de hilos* dentro de un esquema de modelo computacional, los cuales agrupan hilos que se mantienen constantes dentro de un multiprocesador. Este puede contener más de un bloque de hilos, sin embargo, el número de bloques que pueden residir simultáneamente está limitado por los recursos disponibles en el multiprocesador así como por los recursos requeridos por cada bloque (Ruetsch y Fatica, 2014).

El siguiente esquema ilustra un ejemplo de dispositivo gráfico CUDA que contiene un GPU con cuatro multiprocesadores, cada uno con 32 núcleos (figura 2.5)

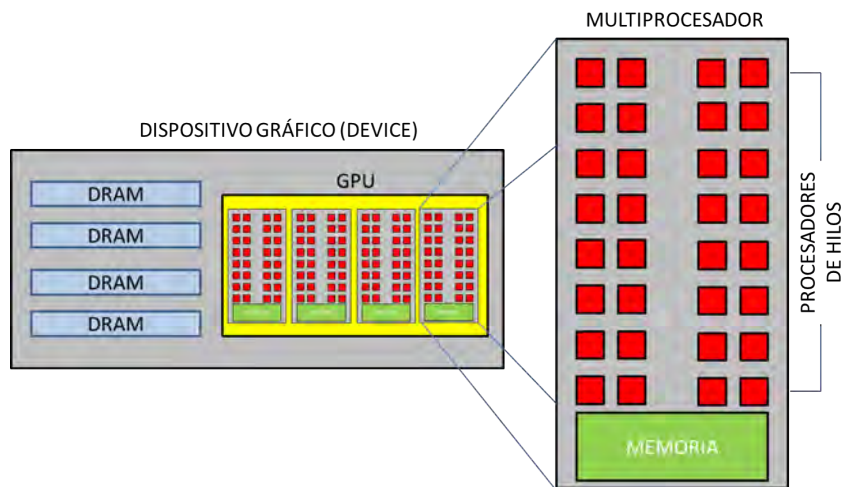


FIGURA 2.5: Esquema simplificado de una dispositivo gráfico conteniendo un GPU de 32 núcleos.

Descripción del Método de Proyección Variacional

A continuación se describe la naturaleza matemática y numérica del Método de Proyección Variacional 3D. Se realiza la aproximación de la ecuación de movimiento mediante el método de Galérkin, con lo cual se deriva la *forma débil* de dicha ecuación. Posteriormente se discretiza la diferenciación temporal por medio de un esquema en diferencias finitas centradas, mientras que la derivación espacial se realiza por medio del *método pseudoespectral*, siguiendo una formulación *velocidad - esfuerzo*. Todo lo anterior converge en un sistema de ecuaciones discretizadas, conocidas como *ecuaciones proyectadas*, que se resuelven simultáneamente para definir el campo de desplazamientos en el medio físico modelado.

3.1 Modelo Matemático

En seguida se presenta la formulación matemática del método de Proyección Variacional, aplicado sobre un modelo 3D que representa a un valle aluvial somero con una forma arbitraria y de variación geométrica relativamente suave, cuya profundidad es función de las coordenadas horizontales, y su respuesta dinámica ante la incidencia de ondas planas es conocida en la interfaz con el semiespacio (figura 3.1).

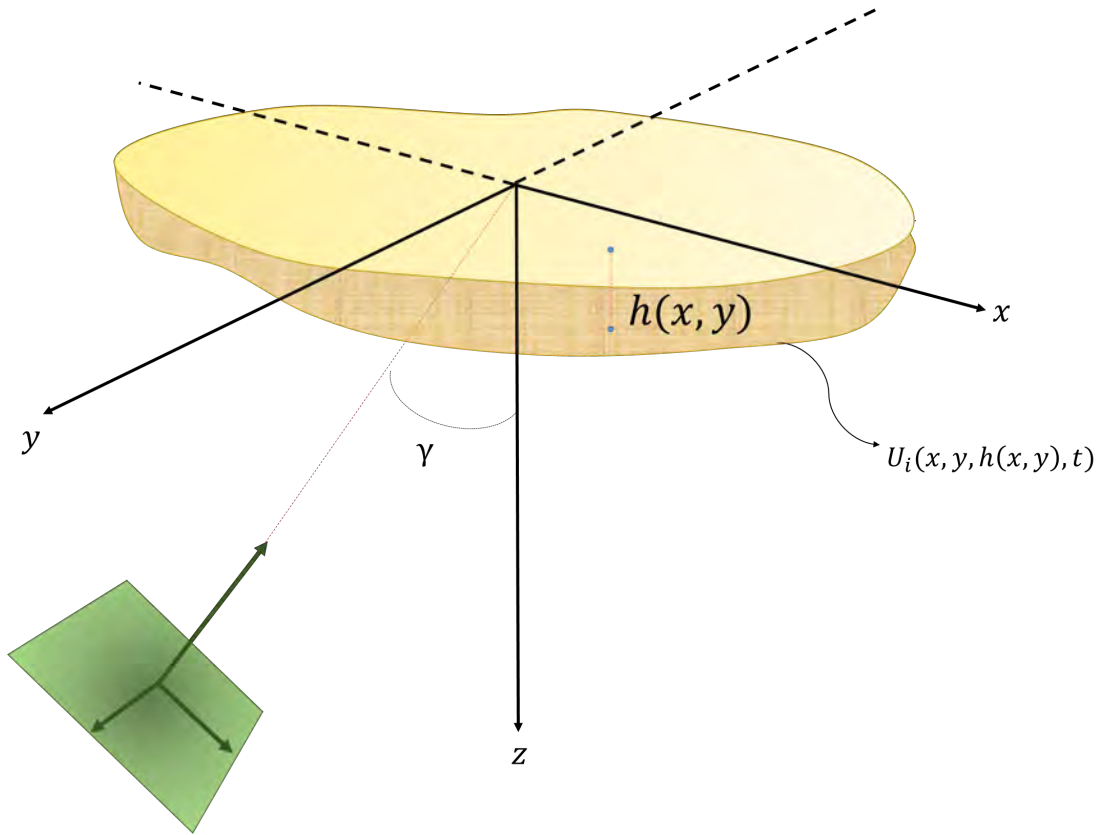


FIGURA 3.1: Esquema de un valle aluvial somero en tres dimensiones ante la incidencia de una onda plana .

Sea la ecuación de movimiento como un medio para representar el campo de desplazamientos del valle, sin considerar fuerzas de cuerpo:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

donde σ_{ij} es el tensor de esfuerzos, u_i es el campo de desplazamientos, ρ es la densidad del medio y t es el tiempo. Para el caso de tres dimensiones considérese los campos de desplazamientos en términos de coordenadas cartesianas: $u_1(x_1, x_2, x_3) \rightarrow u(x, y, z)$, $u_2(x_1, x_2, x_3) \rightarrow v(x, y, z)$, $u_3(x_1, x_2, x_3) \rightarrow w(x, y, z)$.

Proponiendo que el campo de desplazamiento elástico en los sedimentos está compuesto por un movimiento conocido de la interfaz ($u^{(r)}$), cuya profundidad queda determinada como una función de la posición horizontal: $z = h(x, y)$, así como el movimiento producido en el medio de interés (u'), donde la variable z se define en los límites $0 \leq z \leq h(x, y)$. El sistema de ecuaciones que define los campos de desplazamiento es:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u^{(r)}(x, y, h(x, y), t) + u'(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) &= v^{(r)}(x, y, h(x, y), t) + v'(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$w(x, y, z, t) = w^{(r)}(x, y, h(x, y), t) + w'(x, y, z, t) \quad (3.3)$$

Ahora bien, en el movimiento de referencia en la interfaz se encuentra implícito el término de campo forzante f_i , representado de manera general como:

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ij}^{(r)}}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial^2 u_i^{(r)}}{\partial t^2} \quad (3.4)$$

En este sentido es posible establecer el sistema de ecuaciones que representa la dinámica del movimiento en el modelo de interés:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} + f_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} + f_z &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Cuya condición de frontera libre de esfuerzos en $z = 0$:

$$\sigma_{zj}(x, y, t) = \sigma_{zj}^{(r)} + \sigma'_{zj} = 0 \quad (3.6)$$

Tomando en consideración la ley de Hooke para un material isótropo (ecuación 2.11), se tienen las siguientes relaciones constitutivas:

$$\begin{aligned}
\sigma'_{xx} &= \lambda \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u'}{\partial x} \\
\sigma'_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) = \sigma_{yx} \\
\sigma'_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) = \sigma_{zx} \\
\sigma'_{yy} &= \lambda \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v'}{\partial y} \\
\sigma'_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} \right) = \sigma_{zy} \\
\sigma'_{zz} &= \lambda \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w'}{\partial z}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Con las expresiones anteriores es posible establecer el sistema de ecuaciones diferenciales en términos de los campos de desplazamientos desconocidos y las constantes elásticas, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u'}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) \right] - \rho \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} + f_x &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v'}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} \right) \right] - \rho \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} + f_y &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w'}{\partial z} \right] - \rho \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} + f_z &= 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Para los campos de desplazamiento desconocidos se propone una aproximación mediante el método de Galërkin, de forma que:

$$\begin{aligned}
u'(x, y, z, t) &= \sum_{n=1}^N \mathcal{U}^n(x, y, t) \varphi^n(z) \\
v'(x, y, z, t) &= \sum_{n=1}^N \mathcal{V}^n(x, y, t) \varphi^n(z) \\
w'(x, y, z, t) &= \sum_{n=1}^N \mathcal{W}^n(x, y, t) \varphi^n(z)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

donde $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ son funciones que dependen de las coordenadas horizontales y del tiempo,

mientras que $\varphi^n(z)$ es una familia de funciones de prueba que dependen sólo de la profundidad y tienen la siguiente estructura matemática:

$$\varphi^n(z) = \cos \Lambda_n z = \cos \left(\frac{(2n+1)\pi}{2h(x,y)} z \right) \quad (3.10)$$

la cual es una familia de funciones completa (base del espacio de funciones continuas unidimensionales) en el intervalo $[0, h]$, que varían suavemente en las direcciones horizontales, siendo apropiadas bajo el principio de que la interfaz basamento - sedimentos se distribuye espacialmente sin cambios abruptos. La familia de funciones 3.10 son los modos normales en el caso límite de un estrato uniforme sobre base rígida. La familia de funciones $\varphi^n(z)$ y sus derivadas están sujetas a las siguientes condiciones de ortogonalidad en dicho intervalo:

$$\begin{aligned} \int_0^h \varphi^m(z) \varphi^n(z) dz &= \frac{1}{2} h \delta_{mn} \\ \int_0^h \varphi_z^m(z) \varphi_z^n(z) dz &= \lambda^2 \frac{1}{2} h \delta_{mn} \\ \int_0^h \varphi^m(z) dz &= \frac{1}{2} h \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^m}{2m+1} \\ \int_0^h \varphi^m(z) \varphi_z^n(z) dz &= a_{mn} \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde $\varphi_z^m(z)$ representa la derivación de la función de prueba con respecto a z , δ_{mn} es la delta de Kroenecker y a_{mn} es una matriz de acoplamiento dada por:

$$a_{mn} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & m = n, \\ -\frac{2n+1}{4} \left[\frac{-1+(-1)^{m+n}}{m+n+1} - \frac{1-(-1)^{m-n}}{m-n} \right], & m \neq n \end{cases} \quad (3.12)$$

Las primeras dos ecuaciones en 3.11 representan ortogonalidad, la tercera la normalización y la cuarta el acoplamiento entre modos.

Aplicando el siguiente operador de Galérkin sobre cada una de las ecuaciones diferenciales del sistema 3.8:

$$\int_0^h [*] \varphi^m(z) dz \quad (3.13)$$

lo cual en su forma más general se tendría:

$$\int_0^h \left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right] \varphi^m(z) dz = 0 \quad (3.14)$$

que es la *forma fuerte de las ecuaciones de elasticidad del método de Galérkin* a lo largo de la línea vertical $h(x, y)$. Entonces, al realizar la integración por partes al sistema de ecuaciones referido se obtendrá la *formulación variacional o débil* del problema.

Reexpresando el sistema 3.8 mediante la sustitución de las expresiones 3.9, se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \int_0^h \{ & \lambda \mathcal{U}_{xx}^m \varphi^n \varphi^m + \lambda \mathcal{V}_{yy}^m \varphi^n \varphi^m + \lambda \mathcal{W}_x^m \varphi_z^n \varphi^m + 2\mu \mathcal{U}_{xx}^m \varphi^n \varphi^m + \mu \mathcal{U}_{yy}^m \varphi^n \varphi^m + \mu \mathcal{V}_{xy}^m \varphi^n \varphi^m \\ & - \mu \mathcal{U}^m \varphi_z^n \varphi_z^m - \mu \mathcal{W}_x^m \varphi^n \varphi_z^m - \rho \mathcal{U}_{tt}^m \varphi^n \varphi^m \} = \int_0^h f_x dz \end{aligned} \quad (3.15)$$

Resolviendo la integración con apoyo de las condiciones de ortogonalidad de la familia de funciones de prueba:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \mathcal{U}_{xx}^m \frac{h}{2} + (\lambda + \mu) \mathcal{V}_{xy}^m \frac{h}{2} + \mu \mathcal{U}_{yy}^m \frac{h}{2} - \mu \mathcal{U}^m \left(\frac{(2m+1)\pi}{2h} \right)^2 \frac{h}{2} + (\lambda - \mu) \mathcal{W}_x^m a_{mn} \frac{h}{2} \mathcal{U}_{tt}^m \\ = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^m}{2m+1} \frac{h}{2} f_x + \sigma_{zx}^{(r)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para contar con expresiones en términos de velocidades de onda (expresiones 2.20 y 2.22), se acudirá a las siguientes equivalencias con los términos elásticos:

$$\begin{aligned} \rho \alpha^2 &= \rho \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right) = \lambda + 2\mu \\ \rho \beta^2 &= \rho \left(\frac{\mu}{\rho} \right) = \mu \\ \rho(\alpha^2 - \beta^2) &= (\lambda + 2\mu - \mu) = \mu \\ \rho(\alpha^2 - 2\beta^2) &= (\lambda + 2\mu - 2\mu) = \lambda \end{aligned} \quad (3.17)$$

Sustituyendo lo anterior y aplicando el factor $\left(\frac{2}{\rho h} \right)$ en ambos lados de la ecuación, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \mathcal{U}_{tt}^m - \alpha^2 \mathcal{U}_{xx}^m - \beta^2 \mathcal{U}_{yy}^m + \beta^2 \Lambda_m^2 \mathcal{U}^m - (\alpha^2 - \beta^2) \mathcal{V}_{xy}^m - \\ & \frac{2}{h} ((\alpha^2 - 2\beta^2) a_{mn} - \beta^2 a_{nm}) \mathcal{W}_x^n = \frac{4}{\pi \rho} \frac{(-1)^m}{2m+1} f_x + \frac{2}{\rho h} \sigma_{zx}^{(r)} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Aplicando el análisis anterior a las ecuaciones de los campos v' y w' , se tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} & \mathcal{V}_{tt}^m - \beta^2 \mathcal{V}_{xx}^m - \alpha^2 \mathcal{V}_{yy}^m + \beta^2 \Lambda_m^2 \mathcal{V}^m - (\alpha^2 - \beta^2) \mathcal{U}_{xy}^m - \\ & \frac{2}{h} ((\alpha^2 - 2\beta^2) a_{mn} - \beta^2 a_{nm}) \mathcal{W}_y^n = \frac{4}{\pi \rho} \frac{(-1)^m}{2m+1} f_y + \frac{2}{\rho h} \sigma_{zy}^{(r)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{W}_{tt}^m - \beta^2 \mathcal{W}_{xx}^m - \beta^2 \mathcal{W}_{yy}^m + \alpha^2 \Lambda_m^2 \mathcal{W}^m + \frac{2}{\rho h} ((\alpha^2 - 2\beta^2) a_{mn} - \beta^2 a_{nm}) [\mathcal{U}_x^m + \mathcal{V}_y^m] - \\ & = \frac{4}{\pi \rho} \frac{(-1)^m}{2m+1} f_z + \frac{2}{\rho h} \sigma_{zz}^{(r)} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Las ecuaciones 3.18, 3.19 y 3.20 son las ecuaciones *proyectadas* de Navier en tres dimensiones en el plano horizontal para cada m . Como la ortogonalidad no es generalizada surgen matrices de acomplamiento entre *modos*. La proyección emerge al aplicar el método de Galérkin. De ahí la denominación de Método de Proyección Variacional.

3.1.1 Campo forzante f_i

La definición del campo forzante f_i está basado en un método matricial para la propagación de ondas elásticas planas, conocido como *método de Thompson-Haskell*. El método se basa en la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales que representan el movimiento y la relación constitutiva de manera tal que se requieren sólo las primeras derivadas del esfuerzo y el desplazamiento en función de la profundidad (z). Sea el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} = \mathbf{A} \mathbf{f} \quad (3.21)$$

donde $\mathbf{f} = \mathbf{f}(z, \omega, k)$ es un vector que representa la dependencia de la profundidad para el desplazamiento y el esfuerzo. La matriz constante \mathbf{A} depende de las propiedades elásticas del medio así como de la lentitud y la frecuencia.

La matriz \mathbf{A} y el vector $\mathbf{f}(z)$ para una onda incidente SH, considerando el análisis del campo de desplazamiento $v(x,z,t)$:

$$v(x, z, t) = f_1(z, \omega, k)e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.22)$$

como una solución de la ecuación de onda SH:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3.23)$$

con los siguientes esfuerzos cortantes:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz} &= \mu \frac{\partial f_1}{\partial z} e^{i(kx - \omega t)} = f_2 e^{i(kx - \omega t)} \\ \sigma_{xy} &= ik\mu f_1 e^{i(kx - \omega t)} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Del esfuerzo cortante σ_{yz} se obtiene la siguiente relación entre las dos componentes del vector \mathbf{f} :

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = \mu^{-1} f_2 \quad (3.25)$$

Considerando la segunda ley de Newton:

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3.26)$$

y realizando las derivaciones correspondientes en las expresiones 3.22, 3.24, 3.25 y sustituyendo en la ecuación anterior, es posible deducir:

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = (k^2 \mu - \rho \omega^2) f_1 \quad (3.27)$$

Reexpresando los resultados de las ecuaciones 3.26 y 3.27 en la forma de 3.21:

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mu^{-1} \\ (k^2 \mu - \rho \omega^2) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Asumiendo capas horizontales con propiedades físicas constantes, la solución de la ecuación 3.28 para un i -ésimo estrato determinado por su profundidad $h = z_{i+1} - z_i$ es:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}_{z_{i+1}} = \mathbf{P}_i \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}_{z_i} \quad (3.29)$$

donde $\mathbf{P}_i = e^{\mathbf{A}_i h}$. Para una matriz diagonalizable \mathbf{A} , es posible demostrar que existe una matriz invertible Λ tal que:

$$A = \Lambda \mathbf{V} \Lambda^{-1} \quad (3.30)$$

donde Λ es la matriz de eigenvectores de \mathbf{A} y \mathbf{V} es la matriz de eigenvalores. Los eigenvalores de $\mathbf{A} \mathbf{h}$ para la propagación de ondas SH se obtienen al resolver el polinomio de segundo orden definido por: $\det[\mathbf{A}_i \mathbf{h} - \lambda I] = 0$, resultando la matriz \mathbf{V} :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= h\nu_i \\ \lambda_2 &= -h\nu_i \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde $\nu = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2 \rho}{\mu}} = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{\beta^2}}$, es el número de onda vertical. Para los eigenvectores se resuelven las ecuaciones asociadas a los dos eigenvalores, resultando en la matriz Λ_i :

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mu_i \nu_i & -\mu_i \nu_i \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

cuya matriz inversa es:

$$\Lambda_i^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2\mu_i \nu_i} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2\mu_i \nu_i} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Tomando la exponencial de la matriz de eigenvalores \mathbf{V} : $\mathbf{E} = e^{\mathbf{V}}$:

$$\mathbf{E}_i = \begin{bmatrix} e^{\nu_i h} & 0 \\ 0 & e^{-\nu_i h} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Finalmente la matriz propagadora \mathbf{P}_i se escribe como:

$$\mathbf{P}_i = \Lambda_i \mathbf{E}_i \Lambda_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mu_i \nu_i & -\mu_i \nu_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\nu_i h} & 0 \\ 0 & e^{-\nu_i h} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Para un sistema de n estratos sobre un semiespacio se deriva una representación mediante *propagadores*, que permite una manipulación matricial que reduce la inestabilidad numérica (Lontsi et al., 2019; Aki y Richards, 1980), cuya expresión general es:

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}_{z_{n+1}} = \mathbf{P}_n \mathbf{P}_{n-1} \dots \mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}_{z_1} \quad (3.36)$$

Para una onda P-SV incidente, se considera la solución para la ecuación de onda elástica o de Navier sin dependencia con la coordenada y , cuyo vector de desplazamiento-esfuerzo $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)^T$ se obtiene mediante los campos de desplazamientos:

$$\begin{aligned} u &= w_1(z, k, \omega)e^{i(kx-\omega t)} \\ v &= 0 \\ w &= iw_2(z, k, \omega)e^{i(kx-\omega t)} \end{aligned} \quad (3.37)$$

con los esfuerzos asociados:

$$\begin{aligned} \sigma_{zx} &= w_3(z, k, \omega)e^{i(kx-\omega t)} \\ \sigma_{zz} &= iw_4(z, k, \omega)e^{i(kx-\omega t)} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Relacionando las expresiones anteriores mediante la ley de Hooke y la segunda ley de Newton, se obtiene la ecuación diferencial para el vector \mathbf{w} en un medio homogéneo:

$$\frac{d\mathbf{w}}{dz} = \mathbf{A}\mathbf{w} \quad (3.39)$$

En este sentido, la matriz \mathbf{A} se conoce como la matriz de solución del sistema (Aki y Richards, 1980). Con base en esta solución es posible construir tanto la matriz propagadora como la matriz de interfaz con el semiespacio. La matriz \mathbf{A} es:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -i\omega k & \mu^{-1} & 0 \\ \frac{-i\omega k \lambda}{\lambda+2\mu} & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda+2\mu} \\ \frac{4\omega^2 k^2 \mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} - \rho\omega^2 & 0 & 0 & \frac{-i\omega k \lambda}{\lambda+2\mu} \\ 0 & -\rho\omega^2 & -i\omega k & 0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

De manera similar al caso SH, se resuelve 3.39, mediante el problema de eigenvalores y eigenvectores del sistema lineal, quedando definido por un polinomio de cuarto orden con la forma: $\det[\mathbf{A}h - aI] = 0$, con $h = z - z_{ref}$. La solución de este polinomio da como resultado cuatro eigenvalores y cuatro eigenvectores, que se representan en las respectivas matrices \mathbf{E} y Λ :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} e^{\xi h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\eta h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\xi h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\eta h} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \alpha k & \beta \eta & \alpha k & \beta \eta \\ \alpha \xi & -\beta k & -\alpha \xi & \beta k \\ 2i\omega\rho\alpha\beta^2 k\xi & i\omega\rho\beta(1-2\beta^2 k^2) & -2i\omega\rho\alpha\beta^2 k\xi & -i\omega\rho\beta(1-2\beta^2 k^2) \\ i\omega\rho\alpha(1-2\beta^2 k^2) & -2i\omega\rho\beta^3 k\eta & i\omega\rho\alpha(1-2\beta^2 k^2) & -2i\omega\rho\beta^3 k\eta \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

donde $\xi = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{\beta} h}$, $\eta = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{\beta}}$ y sus respectivos negativos son los eigenvalores de la matriz \mathbf{A} .

La matriz inversa Λ^{-1} es:

$$\Lambda^{-1} = \frac{\beta}{2\alpha\mu\xi\nu\omega^2} \begin{bmatrix} 2\beta\mu k\xi\eta & -\beta\mu\eta(k^2 + \eta^2) & -\beta k\eta & \beta\xi\eta \\ -\alpha\mu\xi(k^2 + \eta^2) & 2\alpha\mu k\xi\eta & \alpha\xi\eta & -\alpha k\xi \\ 2\beta\mu k\xi\eta & \beta\mu\eta(\eta^2 + k^2) & \beta k\eta & \beta\xi\eta \\ -\alpha\mu\xi(k^2 + \eta^2) & -2\alpha\mu k\xi\eta & -\alpha\xi\eta & -\alpha k\xi \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Llevando a solución del vector de desplazamiento - esfuerzo en la capa del fondo (n+1) subyaciendo a la capa n, se tiene:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}_{z_{n+1}} = \mathbf{P}_n \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}_{z_n} \quad (3.44)$$

donde $\mathbf{P}_n = \Lambda_n \mathbf{E}_n \Lambda_n^{-1}$ es el propagador correspondiente a dicho sistema de capas. Finalmente, para un modelo de n-capas sobre un semiespacio, la solución queda definida por una secuencia de propagadores que van desde el fondo del modelo hasta la primer capa:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}_{z_{n+1}} = \mathbf{P}_n \mathbf{P}_{n-1} \dots \mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}_{z_1} \quad (3.45)$$

Con lo anterior es posible calcular las funciones de transferencia para ondas incidentes SH y PSV, a lo largo de diferentes profundidades para los modelos establecidos, obteniendo una primera aproximación de un campo forzante en la base del modelo, suficiente para inducir un efecto en una superficie irregular cuya variación de profundidad es lo suficientemente suave como para asumir que el efecto elástico en puntos cercanos al de interés será similar.

3.2 Modelo numérico

El método de proyección variacional se basa en dos métodos numéricos que se encargan de la solución de la ecuación de onda, para un medio con geometría irregular y una variación suave en profundidad.

El primero de ellos es el *método pseudoespectral*, que tomará en cuenta una *velocidad - esfuerzo*, lo cual tiene la finalidad de reducir el orden de la ecuación diferencial y hace apropiado implementar un esquema de *diferencias finitas con malla alternada*, esto es la discretización del espacio y tiempo para la velocidad y el esfuerzo (Avila-Carrera et al., 2002). De acuerdo con Furumura y Takenaka (1996), es un método para resolver numericamente campos de ondas en 2 y tres dimensiones en el dominio del tiempo, que ofrece ventajas de cómputo sobre otros esquemas de modelación numérica de campos de ondas, como las diferencias finitas o el elemento finito. Asimismo es posible introducir efectos anelásticos y anisotrópicos en dicho esquema. Las variables de campo espaciales son expandidas en polinomios de interpolación de Fourier y la derivación es efectuada analíticamente en el dominio del número de onda. De acuerdo con lo anterior, se encuentran ventajas al requerir una cantidad menor de almacenamiento y en consecuencia de menor tiempo de cómputo.

La idea principal del método es emplear un esquema de diferencias finitas centradas para la derivación temporal, en tanto que las derivadas espaciales se buscan resolver mediante una transformación de Fourier en el dominio del número de onda. En este sentido, considérese una discretización del medio espacial y temporal en una dimensión por cuestiones de simplificar la visualización, representado en la figura 3.2:

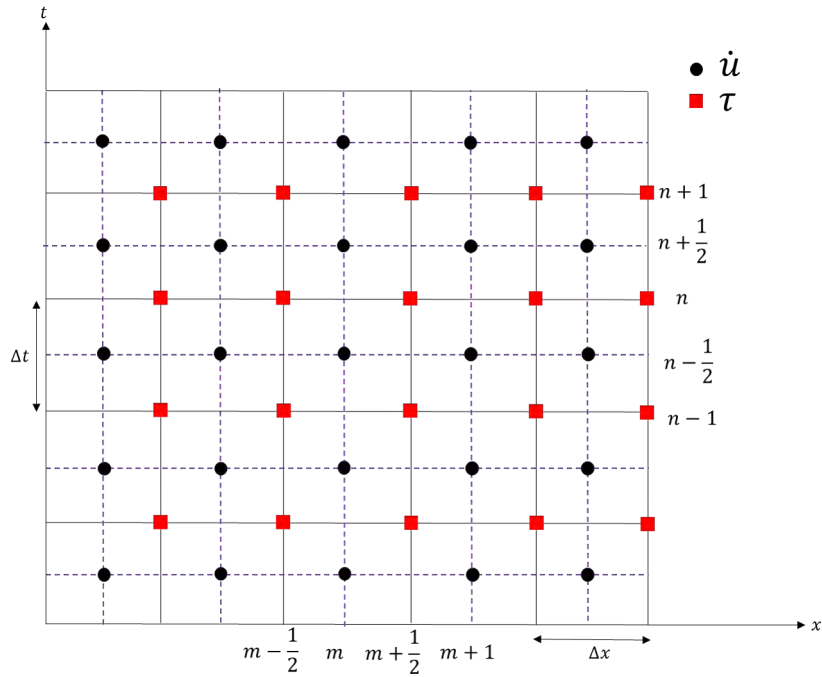


FIGURA 3.2: Malla de discretización espacial-temporal 1D para una formulación velocidad-esfuerzo .

Para ejemplificar la aplicación de este método, se discretizará la ecuación de onda SH en una dimensión:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (3.46)$$

para evitar la diferenciación de $\mu(x)$, se redefinirán las variables de la ecuación mediante las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{\partial u}{\partial t} \\ \sigma &= \mu(x) \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.47)$$

consiguiendo las siguientes ecuaciones simultáneas que sustituyen a la ecuación original:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} &= \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= \mu(x) \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Aplicando la discretización de las ecuaciones anteriores siguiendo la malla alternada de esfuerzo-velocidad, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{u}_m^{n+1/2} - \dot{u}_m^{n-1/2}}{\Delta t} &= \frac{1}{\rho_m} \frac{\sigma_{m+1/2}^n - \sigma_{m-1/2}^n}{\Delta x} \\ \frac{\sigma_{m+1/2}^{n+1} - \sigma_{m+1/2}^n}{\Delta t} &= \mu_{m+1/2} \frac{\dot{u}_{m+1}^{n+1/2} - \dot{u}_m^{n+1/2}}{\Delta x} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Con dichas *ecuaciones discretas* es posible obtener la aproximación de la ecuación propuesta usando la formulación velocidad esfuerzo para el tiempo $n + 1$ conocidos los valores de σ en la mitad de la malla en cada lado del punto de velocidad. De acuerdo con Aki y Richards (1980), el error es proporcional al cuadrado del intervalo de muestreo, que en este caso se considera a la mitad.

Con respecto a la derivación espacial se recurre a la *Transformada de Fourier*, como un método bien conocido para estudiar respuestas físicas de estructuras geológicas a través de señales que transcurren en tiempo y espacio. De manera general, este método matemático transforma el dominio temporal al de la frecuencia y el espacial al del número de onda, favoreciendo el análisis y tratamiento de las señales, esto es, simplifica operaciones matemáticas que en el dominio espacio-temporal serían complicadas de resolver.

En este sentido, la transformada de Fourier y su transformada inversa continuas, tienen la siguiente estructura respectivamente:

$$\begin{aligned} F(k, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{-ikx} dx \\ f(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k, t) e^{+ikx} dk \end{aligned} \quad (3.50)$$

Sus expresiones en un medio discreto son las siguientes:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_l &= \sum_{j=0}^{N-1} f_j \exp \left[-i2\pi \frac{lj}{N\Delta x} i\Delta x k \right], l = [0, N - 1] \\ f_j &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{F}_l \exp \left[i2\pi \frac{jl}{N} \right], i = [0, N - 1] \end{aligned} \quad (3.51)$$

De esta manera la operación de diferenciación en el dominio de Fourier implica la multiplicación del espectro de la señal por el valor del número de onda elevado al número de

orden de diferenciación. Para expresar el resultado en tiempo, basta con aplicar la transformada inversa del resultado obtenido. Lo anterior se expresa matemáticamente de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (ik^n) F(k, t) e^{ikx} dk \quad (3.52)$$

Para el caso de la derivación numérica en el tiempo, se recurre al método de diferencias finitas centradas, que aplicado a una función U con un intervalo de discretización Δt es:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \approx \frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (3.53)$$

A este esquema en diferencias finitas temporales se le introduce amortiguamiento mediante una modificación del operador diferencial temporal, conocida como *ecuación del telegrafista*, pues se usó, probablemente a sugerencia de Lord Kelvin, para modelar la atenuación en el cable del telégrafo trasatlántico:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \gamma_a \quad (3.54)$$

donde γ_a es un factor de amortiguamiento que produce atenuación espacial y temporal que para valores pequeños de atenuación son semejantes al modelo reológico de Maxwell (Kosloff y Kosloff, 1986), quien las usara para generar fronteras absorbentes. En el contexto sísmológico se han empleado modelos reológicos avanzados como el de Zener (Moczo et al., 2014). Sin embargo, por sencillez se usa la formulación 3.53. Aplicando la atenuación al operador diferencial, resulta:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U^n}{\partial t^2} + 2\gamma_a \frac{\partial U^n}{\partial t} + \gamma_a^2 U^n \quad (3.55)$$

De esta forma, el operador diferencial en tiempo resultante es:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \approx \frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{\Delta t^2} + \gamma_a \frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{\Delta t} + \gamma_a^2 \frac{U^{n+1} + U^{n-1}}{2} \quad (3.56)$$

3.3 Modelo Computacional

Para el cálculo de la respuesta sísmica de medios irregulares mediante el VPM se empleará un modelo de cómputo híbrido, en el cual se busca implementar esquemas de programación modular mediante los lenguajes Fortran y Python, así como programación en paralelo mediante la tecnología CUDA, por medio de la expansión de librerías CUDA en Fortran.

La principal finalidad de la programación en paralelo es optimizar las operaciones que se realizan sobre matrices, las cuales se encuentran involucradas en la mayoría de los algoritmos que sustentan al método de proyección variacional, ya que el cálculo del campo de desplazamientos se realiza sobre una configuración de malla cuya discretización puede resultar importante, en función del grado de detalle que se necesite representar espacial y temporalmente.

Dado lo anterior el diseño de los algoritmos está intrínsecamente relacionado con las especificaciones del equipo de cómputo disponible tanto en CPU como en GPU. En las tablas 3.1 y 3.2 se presentan las características del equipo del cómputo empleado para la implementación:

TABLA 3.1: Especificaciones equipo de cómputo (CPU)

Equipo	HP Pavilion Power LapTop 15-cb0xx
Procesador	Intel (R) Core (TM) i5 - 7300 HQ CPU @ 2.5 GHz
RAM instalada	8.00 GB (7.89 GB utilizable)
Tipo de Sistema	64 bits, procesador x64

TABLA 3.2: Especificaciones equipo de cómputo (GPU)

Información de dispositivo gráfico	
Tarjeta Gráfica	NVIDIA GeForce GTX 1050
Capacidad de Cómputo	6.1
Memoria Global Total	4.00 GB
Memoria Constante Total	65536 B
Información de multiprocesadores (MP)	
# de multiprocesadores	5
Memoria compartida x MP	49152 B
Núcleos por MP	128
Núcleos totales	640
Max. hilos x MP	2048
Max. hilos x bloque	1024
Max. dimensiones x bloque	1024 × 1024 × 64
Max. dimensiones x malla	2147483647 × 65535 × 65535

Las características anteriores representan los límites de hardware disponibles para llevar a cabo el cálculo numérico en términos de los parámetros de configuración de la programación con el GPU. En este sentido, es preciso tener presente los aspectos siguientes:

1. Número y configuración de los bloques de hilos en cada ejecución del kernel.

2. Número y configuración de los hilos en cada bloque.
3. Las mallas deben ser arreglos 2D de bloques.
4. Los bloques son arreglos 3D de hilos.
5. El producto de las 3 componentes de los bloques especificados en la configuración de ejecución del kernel debe ser menor o igual al número máximo de hilos por bloque, que en este caso es de 1024.

Los puntos anteriores son de suma importancia al tratar con arreglos tensoriales de orden 2 o superiores. Las llamadas al kernel GPU requieren de una segmentación en bloques e hilos a emplear en la ejecución del algoritmo. El número de hilos en una ejecución simple del kernel (esto es, para la paralelización de una operación con un arreglo 1D) debe ser del mismo tamaño y evidentemente no exceder el límite establecido por el hardware disponible. Para el caso de una ejecución que implique un arreglo 2D, se emplean múltiples bloques de hilos para acceder a cada una de las dimensiones de la matriz. En este caso se requiere acceder a la arquitectura de la tarjeta gráfica mediante índices de forma de obtener valores únicos para cada elemento del arreglo. Lo anterior se logra con la enumeración de las *dimensiones del bloque y el identificador de bloque*, los cuales contienen el número de hilos en un bloque y el índice del bloque dentro de la malla, respectivamente. La figura 3.3 muestra la distribución de los parámetros anteriores.

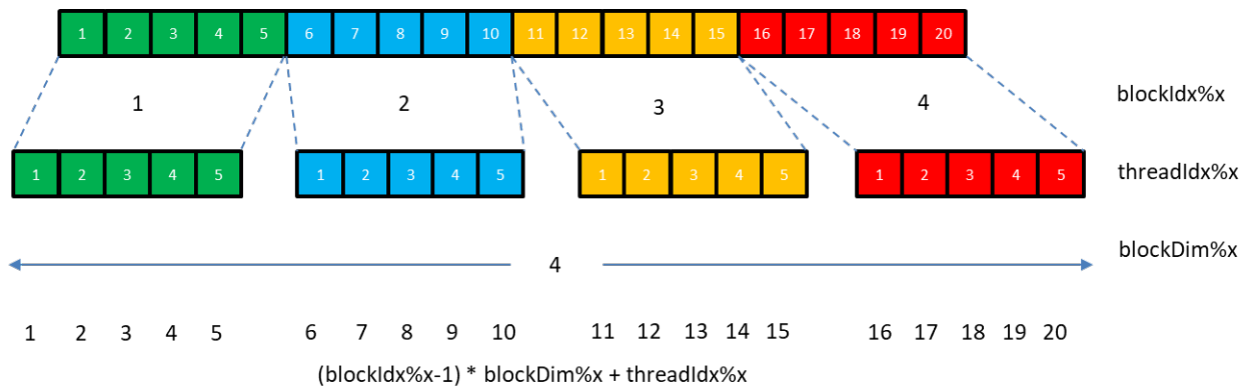


FIGURA 3.3: Distribución esquemática de hilos dentro de una tarjeta gráfica. Arreglo unidimensional de hilos.

Para arreglos vectoriales, el índice queda entonces determinado por la operación:

$$(blockIdx \% x - 1) * blockDim \% x + threadIdx \% x \quad (3.57)$$

donde $blockIdx \% x$ representa el identificador asociado a cada uno de los bloques en que se han segmentado los hilos en una dimensión, la variable $blockDim \% x$ representa el número

de bloques en una dirección y $threadIdx \% x$ representa el índice de cada hilo en su respectivo bloque.

Lo anterior es reproducible en dos dimensiones para el acceso a hilos que representen elementos dentro de un arreglo matricial. En este caso se requieren de variables que accedan a hilos en los bloques a lo largo de una segunda dimensión, y :

$$(blockIdx \% y - 1) * blockDim \% y + threadIdx \% y \quad (3.58)$$

3.3.1 Pruebas al rendimiento de programación CUDA

Se realizaron diversos cálculos aplicando programación en paralelo mediante CUDA con el fin de comparar la eficiencia con respecto a una programación convencional de naturaleza secuencial. Para ello se implementaron algunas operaciones del álgebra lineal básicas (BLAS, Basic Linear Algebra Subroutines) como el producto escalar y adición vectorial también conocida como SAXPY (Single-Precision AX Plus Y) y la multiplicación de dos matrices cuadradas (MATMULT). Para realizar la prueba se consideraron arreglos vectoriales y matriciales de diferentes dimensiones, considerando potencias de 2. En el caso SAXPY se consideraron las dimensiones: $N = \{2^{20}, 2^{21}, 2^{22}, 2^{23}, 2^{24}, 2^{25}, 2^{26}, 2^{27}\}$, lo cual significa que el arreglo mínimo consta de 1'048'576 números reales de doble precisión y el mayor de 134'217'728 números reales de doble precisión, representando el límite admitido por el sistema operativo para reservar memoria. Con respecto a las operaciones con matrices se emplearon las dimensiones: $2^N \times 2^N$ para $N=\{6,7,8,9,10,11,12,13\}$.

En la figura 3.4 se aprecian las curvas que representan el tiempo de cálculo requerido para calcular la operación SAXPY con respecto a un incremento en el número de elementos en los arreglos unidimensionales. Se aprecia que la tasa de incremento en el tiempo para la programación CUDA es sumamente relajada, alcanzando 16.921[ms] para 2^{26} elementos, mientras que secuencialmente ese cálculo se efectúa en 187.5[ms], representando un factor de 11 en mayor rapidez. En la tabla 3.3 se despliegan los resultados numéricos de esta comparación.

TABLA 3.3: Comparación numérica de tiempos de cálculo [ms]: SAXPY

# elementos	Secuencial	CUDA 512
2^{20}	1.5	0.765
2^{21}	7.25	1.093
2^{22}	15.625	1.5872
2^{23}	31.25	2.664
2^{24}	48.875	4.810
2^{25}	109.375	8.724
2^{26}	187.5	16.921
2^{27}	—	33.220

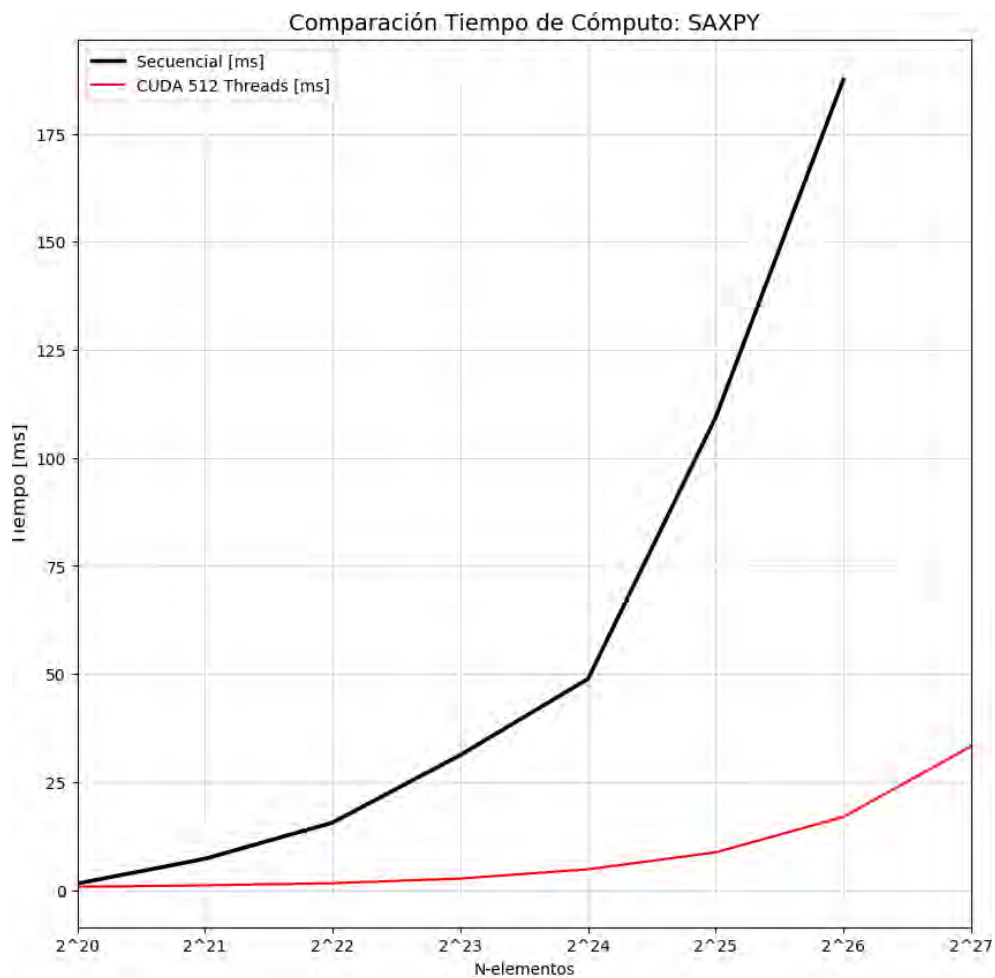


FIGURA 3.4: Comparación de tiempo de cálculo para la operación SAXPY, secuencial vs CUDA

Los resultados de la multiplicación de matrices (MATMULT) se resumen en la figura

3.5 y las tablas 3.4 y 3.5. En este caso se presenta de manera más clara la eficiencia de la programación en paralelo mediante tarjeta gráfica. Existe una amplia separación en varios órdenes de magnitud del tiempo requerido para efectuar una multiplicación de matrices cuadradas, el cual crece exponencialmente para una programación clásica. El aspecto más sobresaliente de esta comparación se aprecia en el caso del arreglo bidimensional con $8192 \times 8192 = 67'108'864$ elementos. El tiempo requerido para un cálculo secuencial con la siguiente estructura:

$$C_{ij} = A_{ik} * B_{kj} \quad (3.59)$$

requiere de $24'307'546[ms]$ equivalentes a $6.75[hrs]$ en tanto que el algoritmo diseñado para la programación en paralelo con CUDA requirió de menos de $1[ms]$. Lo anterior representa las grandes capacidades que son alcanzables con un pensamiento de programación en paralelo.

TABLA 3.4: Comparación numérica de tiempos de cálculo [ms]: MATMULT (1)

# elementos	Secuencial	CUDA 4	CUDA 8	CUDA 16	CUDA 32	CUDA 64	CUDA 128
$2^6 \times 2^6$	1.5	0.707	0.727	0.797	0.789	0.632	—
$2^7 \times 2^7$	15.62	0.654	0.818	0.622	0.622	0.763	0.553
$2^8 \times 2^8$	156.25	0.645	0.492	0.452	0.827	0.589	0.417
$2^9 \times 2^9$	1234.375	0.499	0.646	0.695	0.801	0.689	0.852
$2^{10} \times 2^{10}$	17578.125	0.856	0.801	0.843	0.905	0.798	0.788
$2^{11} \times 2^{11}$	287500	0.816	0.851	0.732	1.228	0.621	0.688
$2^{12} \times 2^{12}$	2630000	1.298	1.326	1.159	1.603	0.765	0.841
$2^{13} \times 2^{13}$	24307546	1.235	1.045	1.523	1.926	0.849	0.519

TABLA 3.5: Comparación numérica de tiempos de cálculo [ms]: MATMULT (2)

# elementos	CUDA 256	CUDA 512	CUDA 1024	CUDA 2048	CUDA 4096	CUDA 8192
$2^6 \times 2^6$	—	—	—	—	—	—
$2^7 \times 2^7$	—	—	—	—	—	—
$2^8 \times 2^8$	0.624	—	—	—	—	—
$2^9 \times 2^9$	0.680	0.799	—	—	—	—
$2^{10} \times 2^{10}$	0.800	0.714	0.637	—	—	—
$2^{11} \times 2^{11}$	0.644	0.626	0.576	0.773	—	—
$2^{12} \times 2^{12}$	0.603	0.867	0.786	0.865	0.609	—
$2^{13} \times 2^{13}$	0.553	0.933	0.849	0.844	0.715	0.670

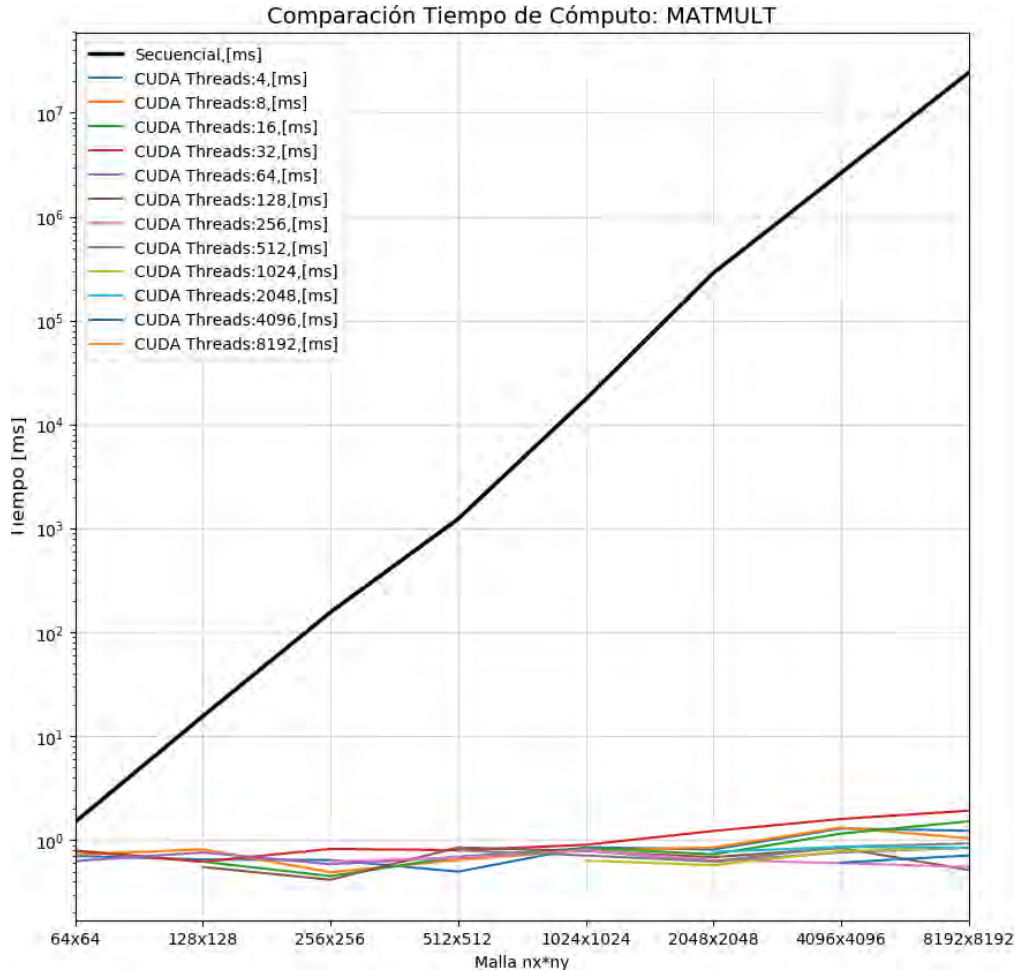


FIGURA 3.5: Comparación de tiempo de cálculo para la operación MATMULT, secuencial vs CUDA

El modelo de cómputo propuesto se basa en una programación modular y en paralelo integrado en tres lenguajes de programación: Fortran, Python y CUDA Fortran. Con este esquema se efectúa el VPM en dos etapas: definición del campo forzante f (movimiento impuesto, movimiento de referencia) en la base de los modelos, mediante las funciones de transferencia calculadas con el método de Haskell modificado; cálculo del campo de desplazamiento en superficie debido al movimiento de referencia, mediante el método VPM. Finalmente se realiza la visualización de resultados mediante sismogramas sintéticos y simulaciones computacionales del movimiento de los modelos propuestos.

En el siguiente diagrama de flujo se ejemplifica el proceso de cómputo para lograr cada uno de los puntos descritos anteriormente.

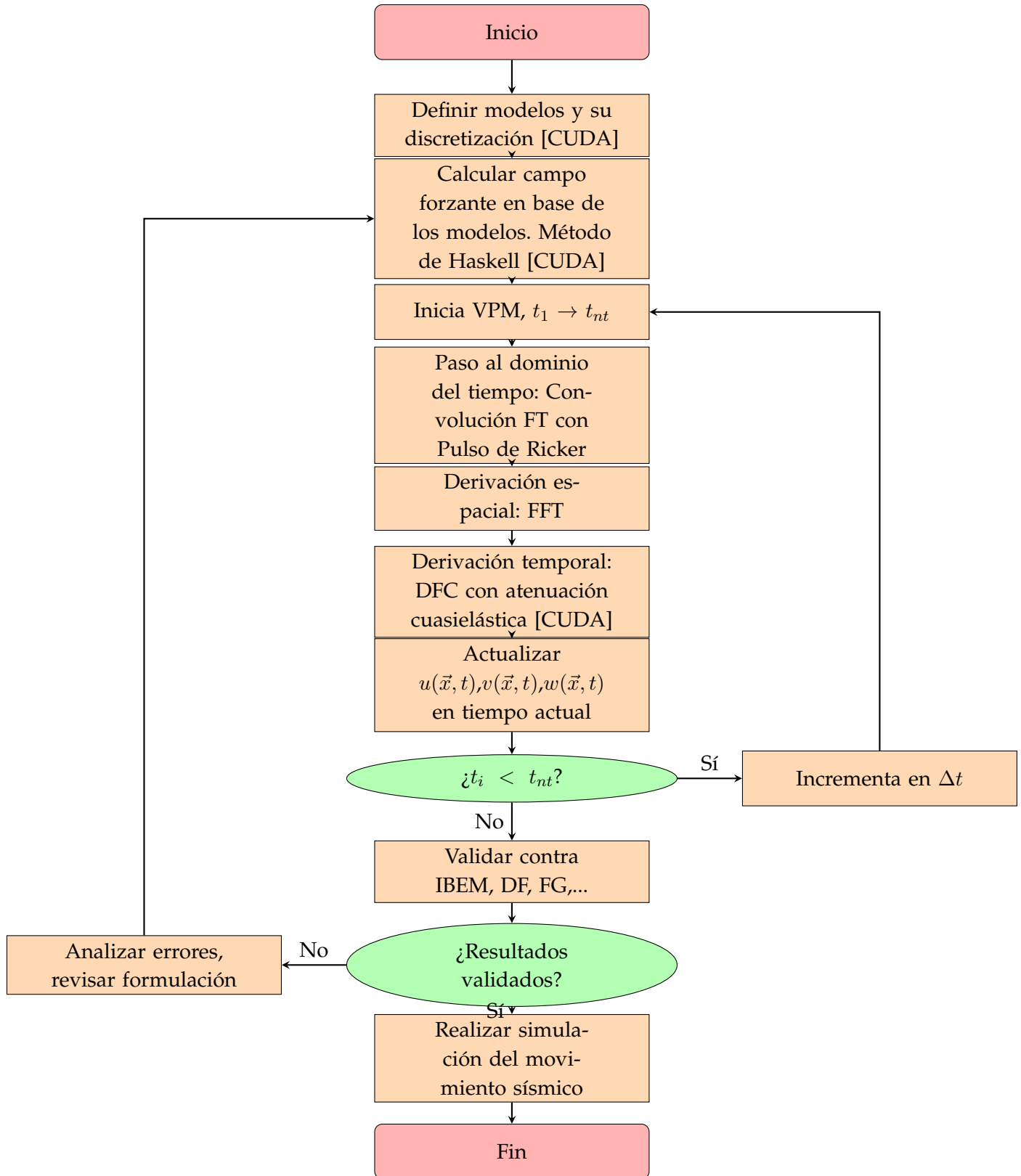


FIGURA 3.6: Diagrama de flujo que muestra la solución al problema de propagación para medios irregulares utilizando la formulación del Método de Proyección Variacional Optimizado (OVPM).

Resultados y calibración del método VPM

En este capítulo se describen los modelos para los cuales será aplicado el VPM como método para calcular el campo de desplazamientos producido por la propagación de ondas sísmicas. Se presentan diversos ejemplos de modelos simplificados de cuencas, en 2 y 3 dimensiones. Para el primer caso se compara la respuesta sísmica de un modelo con forma trapezoidal de acuerdo al trabajo de Kawase y Aki (1989). Para el segundo caso, se comparan las respuestas elásticas para un modelo de paraboloides y de croissant (Sánchez-Sesma y Luzón, 1995), calculados con el método IBEM. Asimismo, se prueba el método en un caso de modelo realista, el cual representará la Cuenca del Valle de México, en el que se busca explorar la eficiencia del método en términos de tiempo de cálculo considerando una robusta discretización del valle.

4.1 Modelos sintéticos

4.1.1 Modelo 2D trapezoidal

En este caso se realiza el cálculo de la respuesta sísmica de un modelo con forma trapezoidal propuesto por Kawase y Aki (1989) para hacer una aproximación de una cuenca aluvial profunda, con 1 km de profundidad, 10 km de anchura y una zona de transición de 2 km.

Los parámetros de discretización del perfil empleado para el cálculo de los campos de desplazamiento se resume en la tabla 4.1:

TABLA 4.1: Parámetros del perfil a lo largo del eje x.

Puntos de discretización dirección X,Y:	$nx = 64$
Espaciamiento en dirección X, Y:	$dx = 0.15625[km]$
Longitud: X	$10.0[km]$
Profundidad máx:	$1[km]$

Un esquema de este modelo se presenta en la figura 4.1

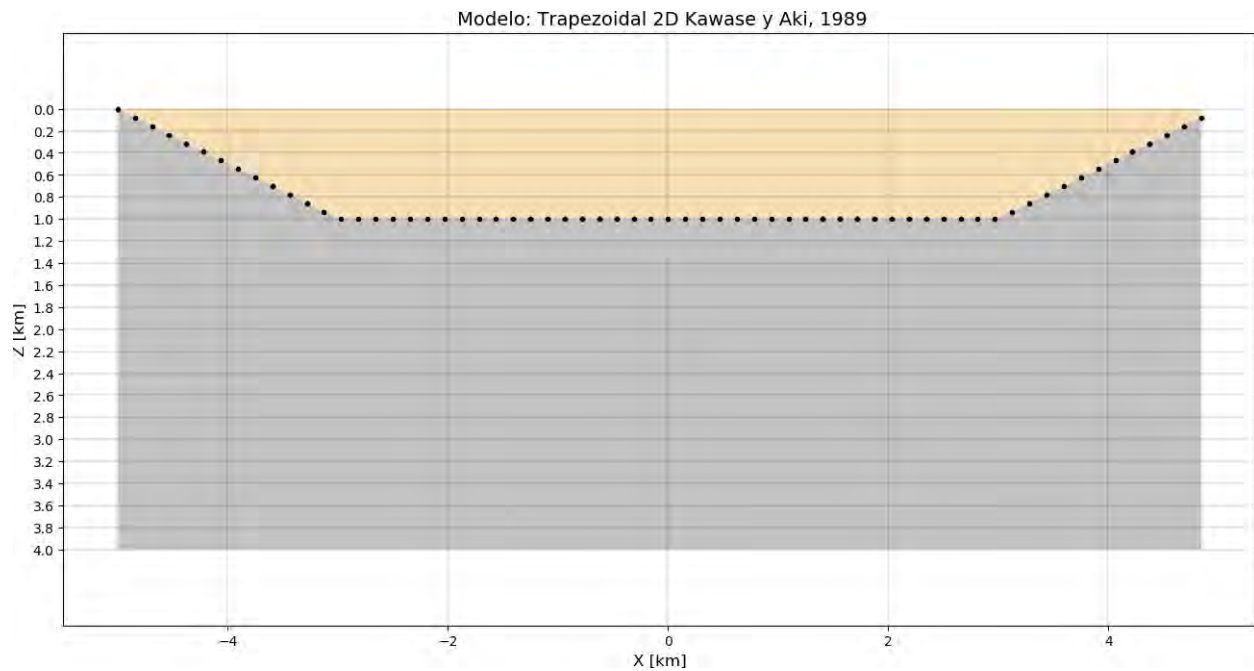


FIGURA 4.1: Modelo sintético de un valle aluvial con forma trapezoidal de acuerdo a las dimensiones propuestas en (Kawase y Aki, 1989)

El valle está conformado por materiales relativamente blandos respecto del semiespacio que sobreyace. En la tabla 4.2 se muestran los valores numéricos de las propiedades físicas del valle y del semiespacio, retomados del trabajo original.

TABLA 4.2: Valores de las propiedades físicas del modelo trapezoidal (Kawase y Aki, 1989)

Velocidad ondas S del modelo β_{valle}	$1.0[\frac{km}{s}]$
Velocidad ondas S del semiespacio β_{HS}	$2.5[\frac{km}{s}]$
Velocidad ondas P del modelo α_{valle}	$2.0[\frac{km}{s}]$
Velocidad ondas P del semiespacio α_{HS}	$5.0[\frac{km}{s}]$
Densidad del valle ρ_{valle}	$1.0[\frac{g}{cm^3}]$
Densidad del semiespacio ρ_{HS}	$1.0[\frac{g}{cm^3}]$
Profundidad máx. del modelo:	$1000[m]$
Factor de amortiguamiento Onda P Modelo QP_{valle}	100
Factor de amortiguamiento Onda P Semiespacio QP_{HS}	1000
Factor de amortiguamiento Onda S Modelo QS_{valle}	100
Factor de amortiguamiento Onda S Semiespacio QS_{HS}	1000

En primer lugar se tiene una comparación del campo de desplazamientos generados por la incidencia de una onda SH, cuyos parámetros de propagación se concentran en la siguiente tabla:

TABLA 4.3: Valores de las propiedades de propagación de onda SH

Tipo de onda	SH
Ángulo de incidencia γ	0°
Azimut ϕ	0°
Polarización	0°
Periodos pulso de Ricker t_s, t_p	$5.0[s], \{2.0, 4.0\}[s]$
Número de frecuencias	512
Frecuencia Máxima f_{max}	$16.667[Hz]$

Para el primer caso se presenta una incidencia vertical de onda SH, con movimiento impuesto en la base mediante un pulso de Ricker de $t_p = 4[s]$, $f_p = 0.25[Hz]$, cuya función de transferencia se muestra en la figura 4.2.

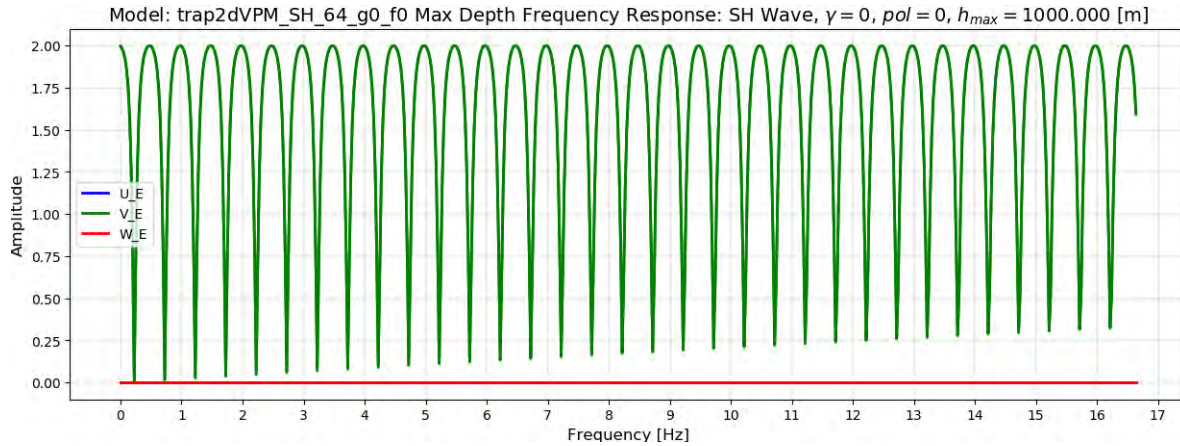


FIGURA 4.2: Función de Transferencia generada con el método de Haskell para un punto a la máxima profundidad del modelo 1000[m], ante la incidencia de una onda SH.

En el campo de desplazamiento $V(x, t)$ se distingue la presencia de un patrón de ondas propagándose horizontal generadas por la zona de transición del trapecoide, efecto identificado como el modo fundamental de las ondas de Love, cuya amplitud es menor que la incidencia directa. Se identifica una regular atenuación dada por el factor $Q_{valle} = 100$ en combinación con una configuración modal del VPM relajada ($m = 2$). El parámetro anterior resulta ser suficiente para generar de manera suficiente el modo fundamental de las ondas de Love, sin causar la presencia de reverberancias espurias en los sismogramas sintéticos, además de coadyuvar en la eficiencia del cálculo. En la figura 4.3 se aprecia el campo de ondas descrito anteriormente, en comparación con los resultados obtenidos por Kawase y Aki (1989), que se muestra una similitud coherente entre ambos, resaltando que el método aplicado por citados autores es de solución por *funciones de Green*. Es importante mencionar que para este caso no se está aplicando una optimización por medio de CUDA, dado que el método aplicado a un caso bidimensional, es en esencia ligero computacionalmente, logrando obtener los resultados en unos segundos.

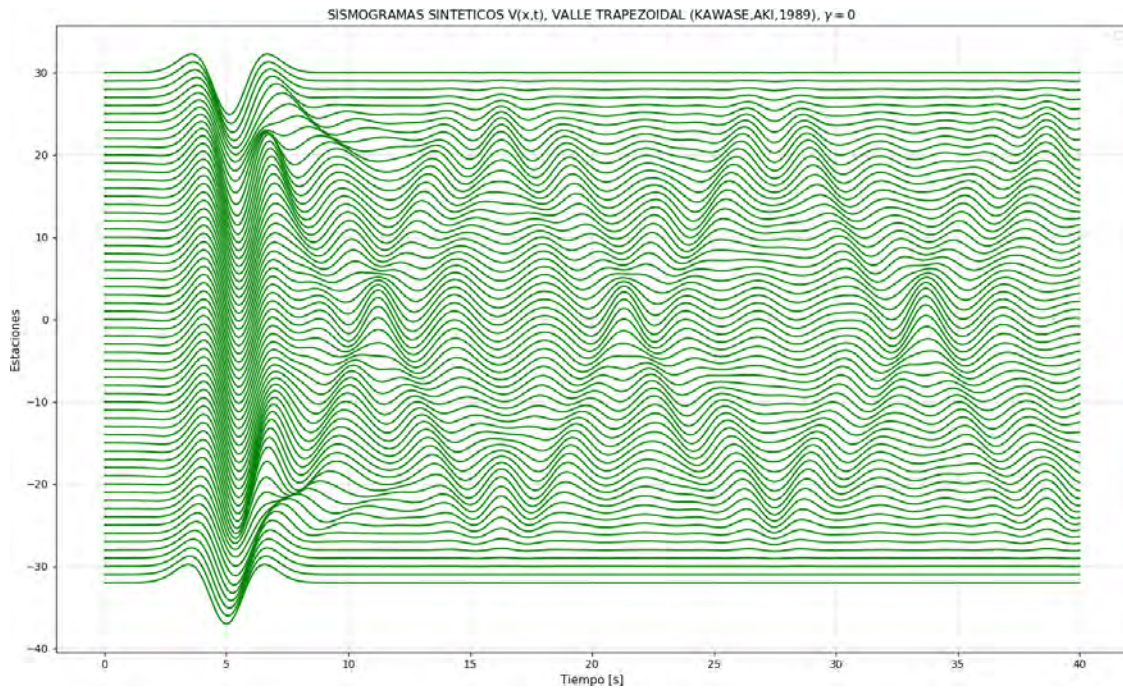


FIGURA 4.3: Sismogramas sintéticos para incidencia vertical de una onda SH, excitación producida por un pulso de Ricker con $T_p = 4[s]$, $f_p = 0.25[Hz]$

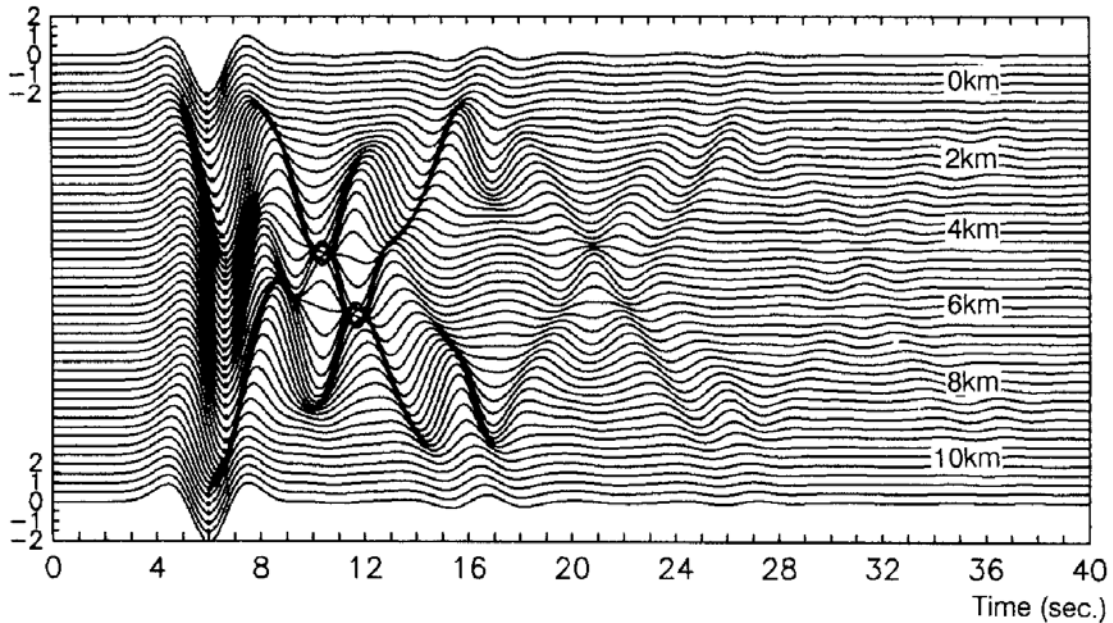


FIGURA 4.4: Sismogramas sintéticos reportados por Kawase y Aki (1989), excitación producida por un pulso de Ricker con $T_p = 4[s]$, $f_p = 0.25[Hz]$

Ahora se comparan resultados para un pulso de Ricker con $T_p = 2[s]$, $f_p = 0.5[Hz]$.

Se aprecia que la amplitud de las ondas de Love es ligeramente menor a lo largo de la propagación, debido a la dispersión de energía entre el modo fundamental y el primer modo superior en frecuencias mayores que 0.5 [Hz] de acuerdo a Kawase y Aki (1989) (figura 4.7). En el caso de los resultados del VPM (4.5), se empiezan a presentar inestabilidades en forma de ruido numérico que provoca oscilaciones de relativa poca amplitud a lo largo de todo el movimiento, ya que la frecuencia del pulso se acerca al límite de estabilidad del método dada por la condición de Courant. Para moderar este efecto, es posible ajustar parámetros como el número modal del método así como el factor de atenuación Q . Ejemplo de la variación del factor de atenuación, se presenta el resultado de aplicar $Q = 1000$, que es 50 veces menor que el factor aplicado en el primer resultado mostrado. Se distinguen las ondas de Love pero con presencia más importante de oscilaciones de mayor frecuencia.

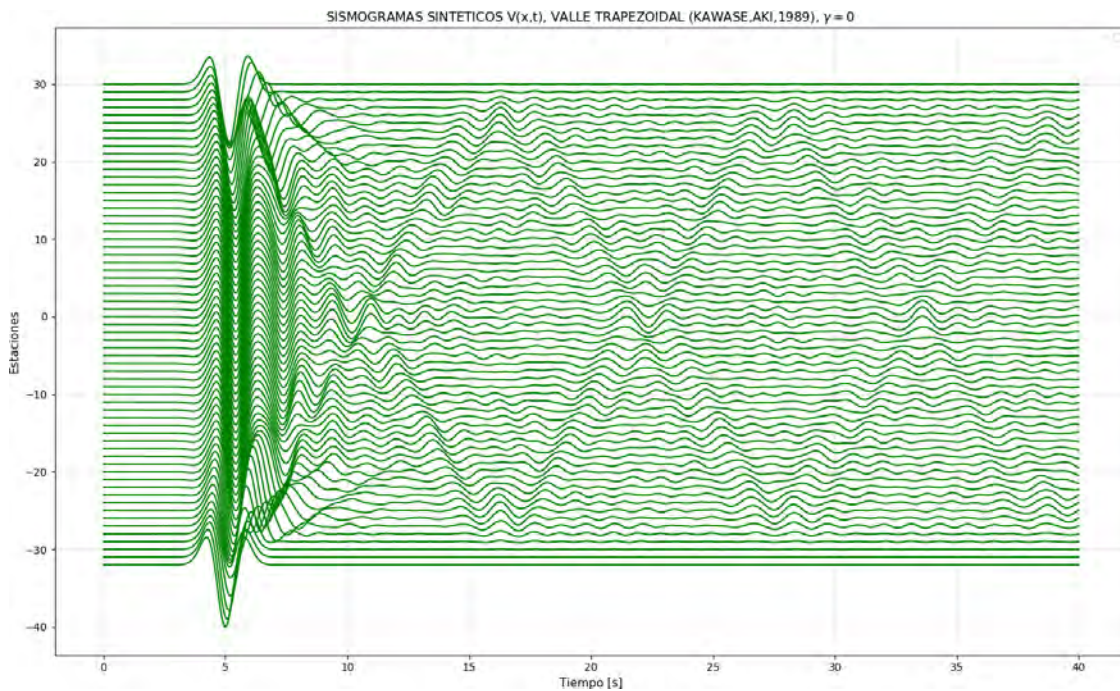


FIGURA 4.5: Sismogramas sintéticos para incidencia vertical de una onda SH, excitación producida por un pulso de Ricker con $T_p = 2[s]$, $f_p = 0.5[Hz]$ y un factor de atenuación $Q = 20$

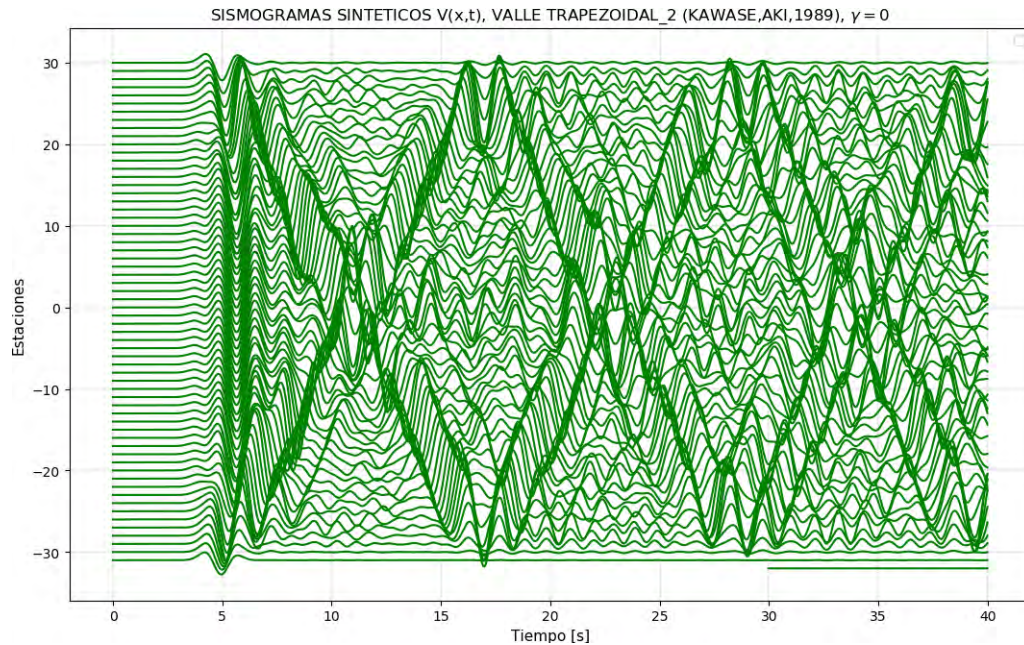


FIGURA 4.6: Sismogramas sintéticos para incidencia vertical de una onda SH, excitación producida por un pulso de Ricker con $T_p = 2[s]$, $f_p = 0.5[Hz]$ y un factor de atenuación $Q = 1000$

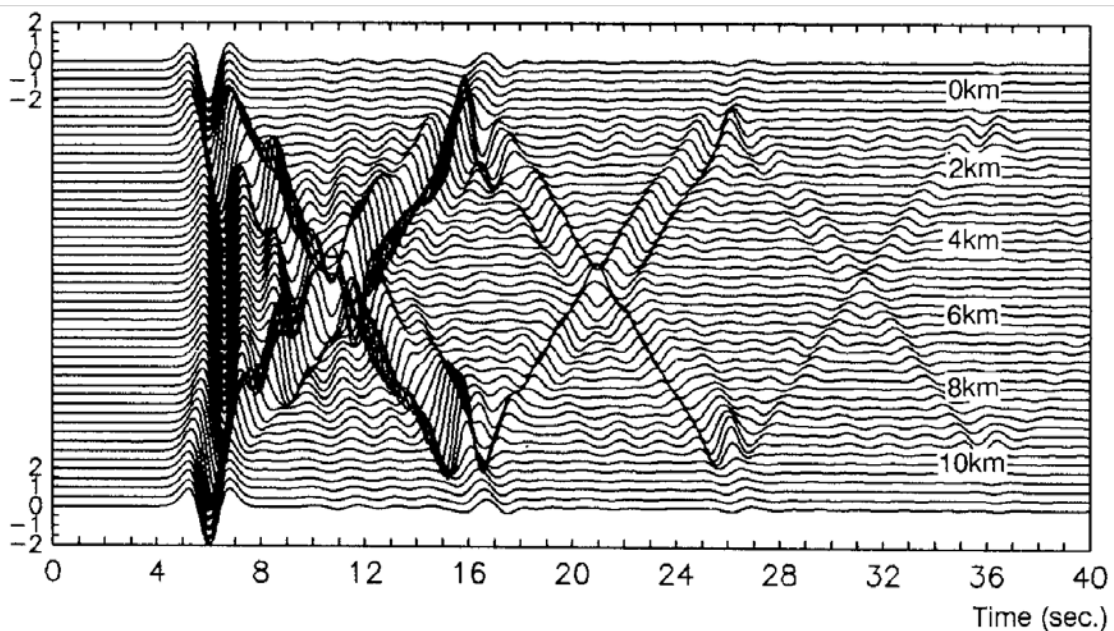


FIGURA 4.7: Sismogramas sintéticos reportados por Kawase y Aki (1989), excitación producida por un pulso de Ricker con $T_p = 2[s]$, $f_p = 0.5[Hz]$

Ahora se comparan los sismogramas que resultan de la interacción de una onda SV que incide verticalmente con el valle (tabla 4.4). De la misma forma, se presentan los casos de

una excitación por medio de un pulso de Ricker a las dos frecuencias $f_p = 0.25[Hz], 0.4[Hz]$. Para el caso horizontal se pierde el patrón en forma de X que se aprecia en el movimiento antiplano dada la incidencia de la onda SH, pero se cuenta con la presencia de un patrón de onda en las zonas correspondientes a la transición de la geometría y la zona plana. Dichas diferencias se deben al valor más alto de velocidades de fase y grupo por parte de las ondas de Rayleigh generadas en la superficie. Se distingue que la onda superficial toma 5 [s] para llegar al lado opuesto del modelo (figura 4.9). Por parte de los resultados generados por el VPM, se aprecia la generación de las ondas de Rayleigh y la llegada al lado opuesto del modelo, pero con una resonancia más pronunciada a lo largo del tiempo. En las componentes verticales se distingue una buena correlación del movimiento, notando que en el caso del VPM, la movimiento tiene una atenuación más relajada (figura 4.8)

TABLA 4.4: Valores de las propiedades de propagación de onda SH

Tipo de onda	SV
Ángulo de incidencia γ	0°
Azimut ϕ	0°
Polarización	90°
Periodos pulso de Ricker t_s, t_p	$5.0[s], \{2.0, 4.0\}[s]$
Número de frecuencias	512
Frecuencia Máxima f_{max}	$16.667[Hz]$

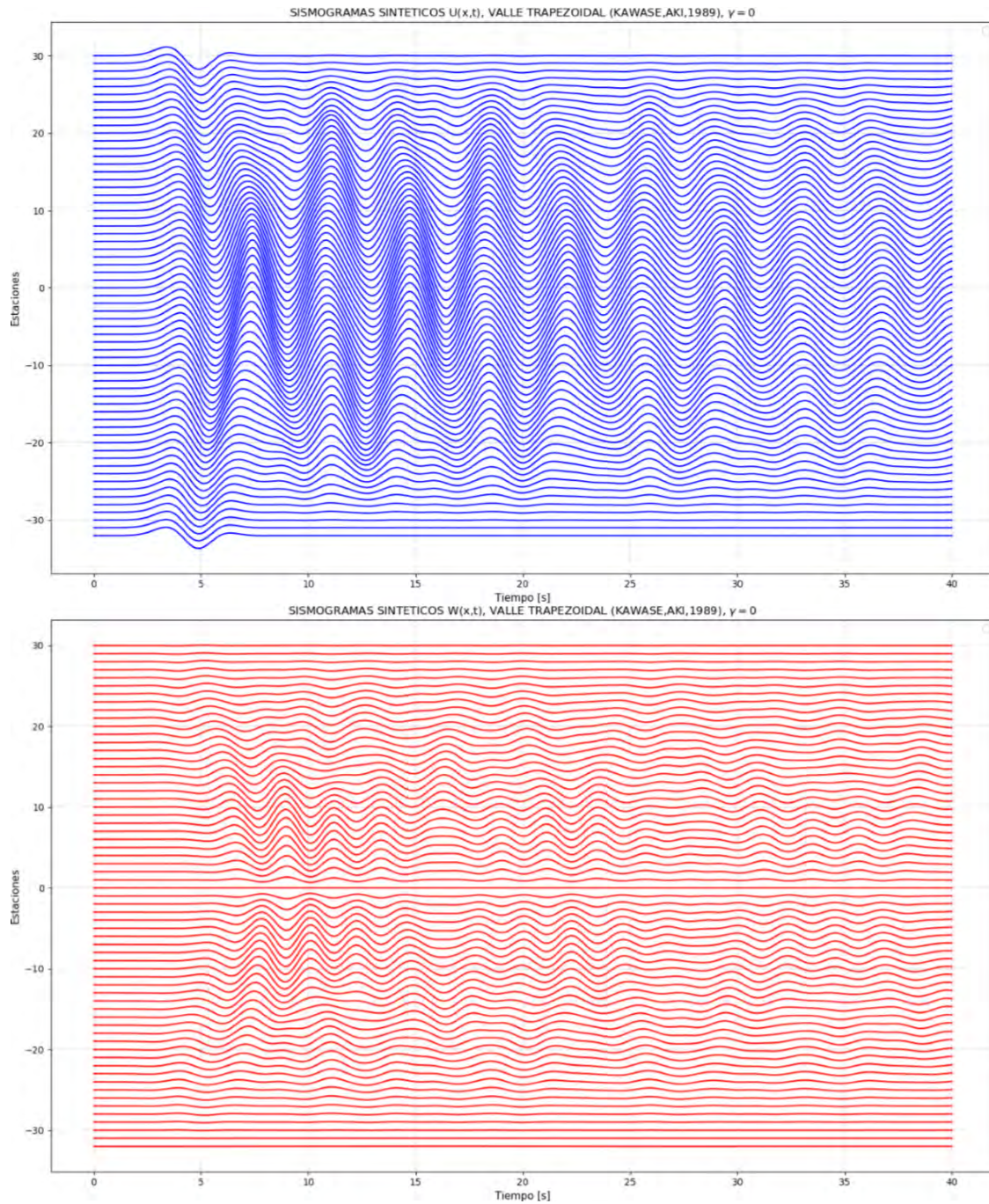


FIGURA 4.8: Sismogramas sintéticos para incidencia vertical de una onda SV, excitación producida por un pulso de Ricker con $T_p = 4[s]$, $f_p = 0.25[Hz]$. Sismograma superior: $U(x, t)$, sismograma inferior: $W(x, t)$

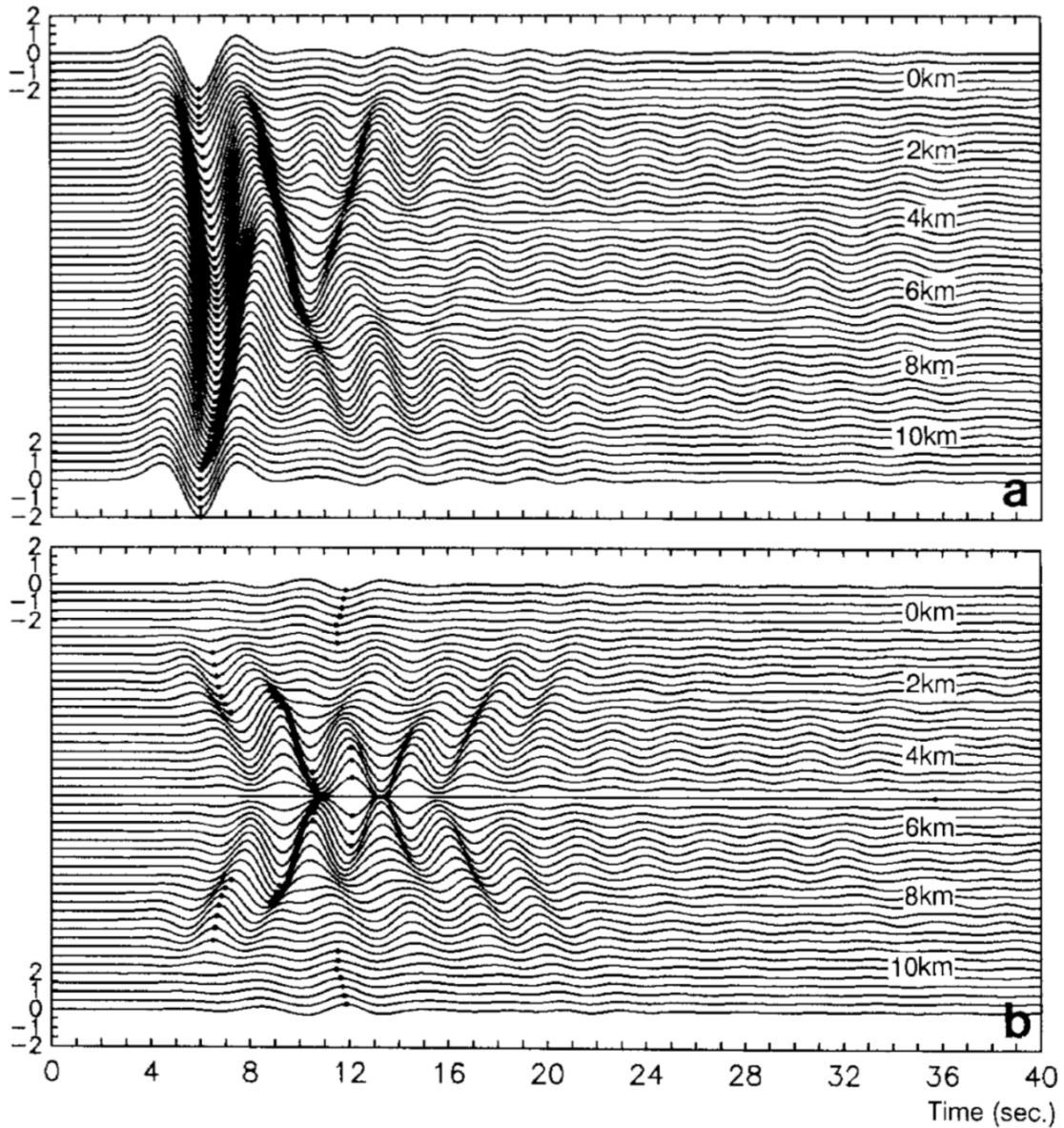


FIGURA 4.9: Sismogramas sintéticos reportados por Kawase y Aki (1989), excitación producida por un pulso de Ricker con $T_p = 4[s]$, $f_p = 0.25[Hz]$. Sismograma superior: $U(x, t)$, sismograma inferior: $W(x, t)$

Para la excitación correspondiente a la ondícula de Ricker con $f_p = 0.5[Hz]$, se identifican ondas de Rayleigh, revelándose el modo fundamental con un movimiento vertical dominante, así como el primer modo dominando sobre el movimiento horizontal, ambos con un tiempo de movimiento de alrededor 20 [s] (figura 4.11) ((Kawase y Aki, 1989)). El método VPM alcanza a reproducir una aproximación bastante buena de la interacción de las ondas SV en superficie, aunque se debe tomar con cierta cautela, dado que la formulación rígida del método no asegura una correcta absorción de la energía en el valle aluvial (figura 4.10).

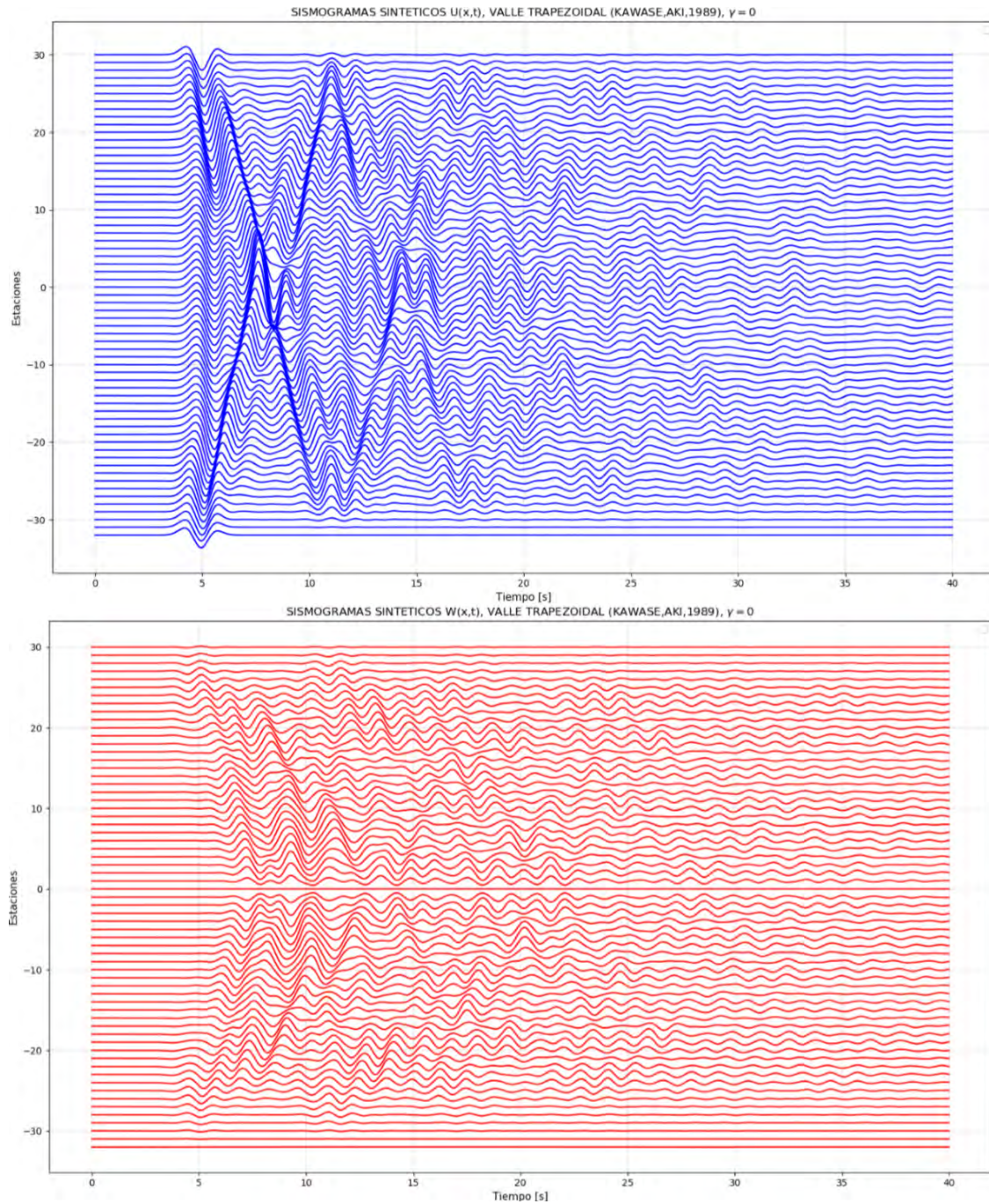


FIGURA 4.10: Sismogramas sintéticos para incidencia vertical de una onda SV, excitación producida por un pulso de Ricker con $T_p = 2[s]$, $f_p = 0.5[Hz]$. Sismograma superior: $U(x, t)$, sismograma inferior: $W(x, t)$

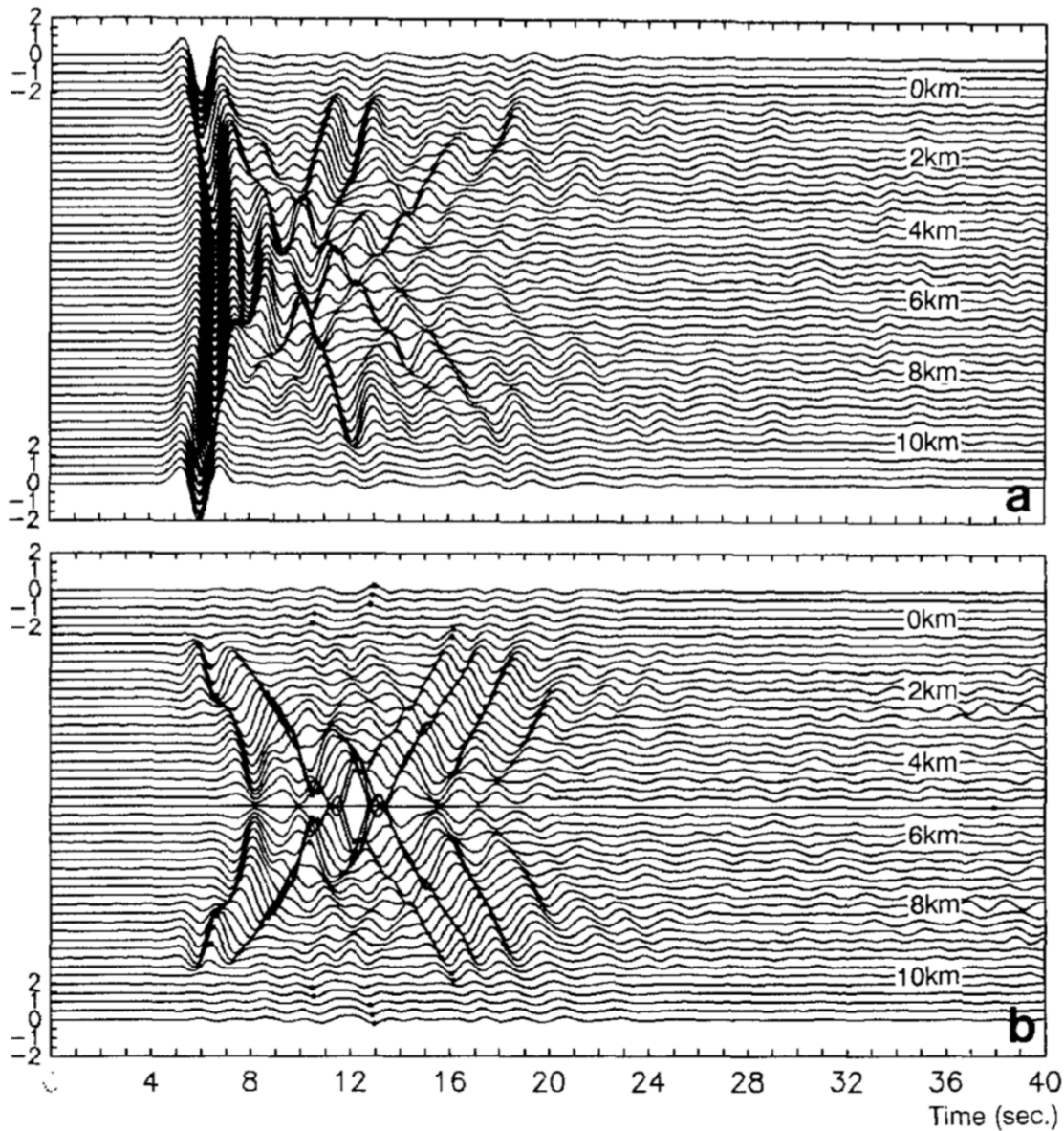


FIGURA 4.11: Sismogramas sintéticos reportados por Kawase y Aki (1989), excitación producida por un pulso de Ricker con $T_p = 2[s]$, $f_p = 0.5[Hz]$. Sismograma superior: $U(x,t)$, sismograma inferior: $W(x,t)$

4.1.2 Modelos 3D

Modelo de *croissant* y su respuesta sísmica

A continuación se presenta la aplicación del método desarrollado en esta tesis a modelos tridimensionales con el fin de evaluar la factibilidad en términos de aproximación a la física de la propagación de energía elástica en medios geoméricamente más complejos, así como su desempeño computacional. Para este fin, se presenta una comparación con resultados

obtenidos a través del Método Indirecto de Elementos de Frontera (IBEM, Indirect Boundary-Element Method), el cual está basado en representaciones integrales para ondas sísmicas empleando fuentes en la frontera de una capa simple. Se calcula la respuesta elástica de un medio con forma irregular, formada por la intersección de dos cirunferencias de diámetros diferentes. Se comparan los resultados por Sánchez-Sesma y Luzón (1995) para un caso de incidencia de onda SH a $\gamma = 30$ e incidencia de onda SV a $\gamma = 30$ y $\phi = 0$, para ambos casos.

Los parámetros de discretización de la malla empleada para el cálculo de los campos de desplazamiento se resume en la tabla 4.5:

TABLA 4.5: Parámetros de discretización de las mallas para modelos sintéticos

Puntos de discretización dirección X,Y: $n_x \times n_y = n$	$64 \times 64 = 4096$
Espaciamiento en dirección X, Y: d_x, d_y	$0.15625[km], 0.1875[km]$
Longitud: X, Y	$10[km], 12[km]$
Semieje mayor: a	$4[km]$
Semieje menor: b	$2.8[km]$
Profundidad máx:	$648[m]$

El modelo fue propuesto por Sánchez-Sesma y Luzón (1995), el cual representa un valle aluvial con una geometría irregular, denominada coloquialmente como *croissant*. Las propiedades del semiespacio corresponden a las de un *sólido de Poisson* $\nu = 0.25$, mientras que las del valle aluvial corresponden a materiales más blandos relativamente, considerando $\nu_{HS} = 0.35$ y con densidad $\rho_{valle} = 0.8\rho_{HS}$. En la tabla 4.6 se muestran los valores numéricos de las propiedades físicas del modelo.

TABLA 4.6: Valores de las propiedades físicas del modelo *croissant*

Velocidad ondas S del modelo β_{valle}	$1.0[\frac{km}{s}]$
Velocidad ondas S del semiespacio β_{HS}	$2.0[\frac{km}{s}]$
Velocidad ondas P del modelo α_{valle}	$2.0817[\frac{km}{s}]$
Velocidad ondas P del semiespacio α_{HS}	$3.4641[\frac{km}{s}]$
Densidad del valle ρ_{valle}	$2.136[\frac{g}{cm^3}]$
Densidad del semiespacio ρ_{HS}	$2.67[\frac{g}{cm^3}]$
Profundidad máx. del modelo:	$201.433[m]$
Factor de amortiguamiento Onda P Modelo QP_{valle}	20
Factor de amortiguamiento Onda P Semiespacio QP_{HS}	1000
Factor de amortiguamiento Onda S Modelo QS_{valle}	20
Factor de amortiguamiento Onda S Semiespacio QS_{HS}	1000

En la figura 4.12 se aprecia la distribución espacial del modelo de *croissant*. Asimismo, se presentan las curvas de nivel del modelo con el respectivo mallado de 4096 nodos y las líneas de receptores, de forma que sea posible determinar el movimiento elástico considerando la parte más profunda de la cuenca (figura 4.13)

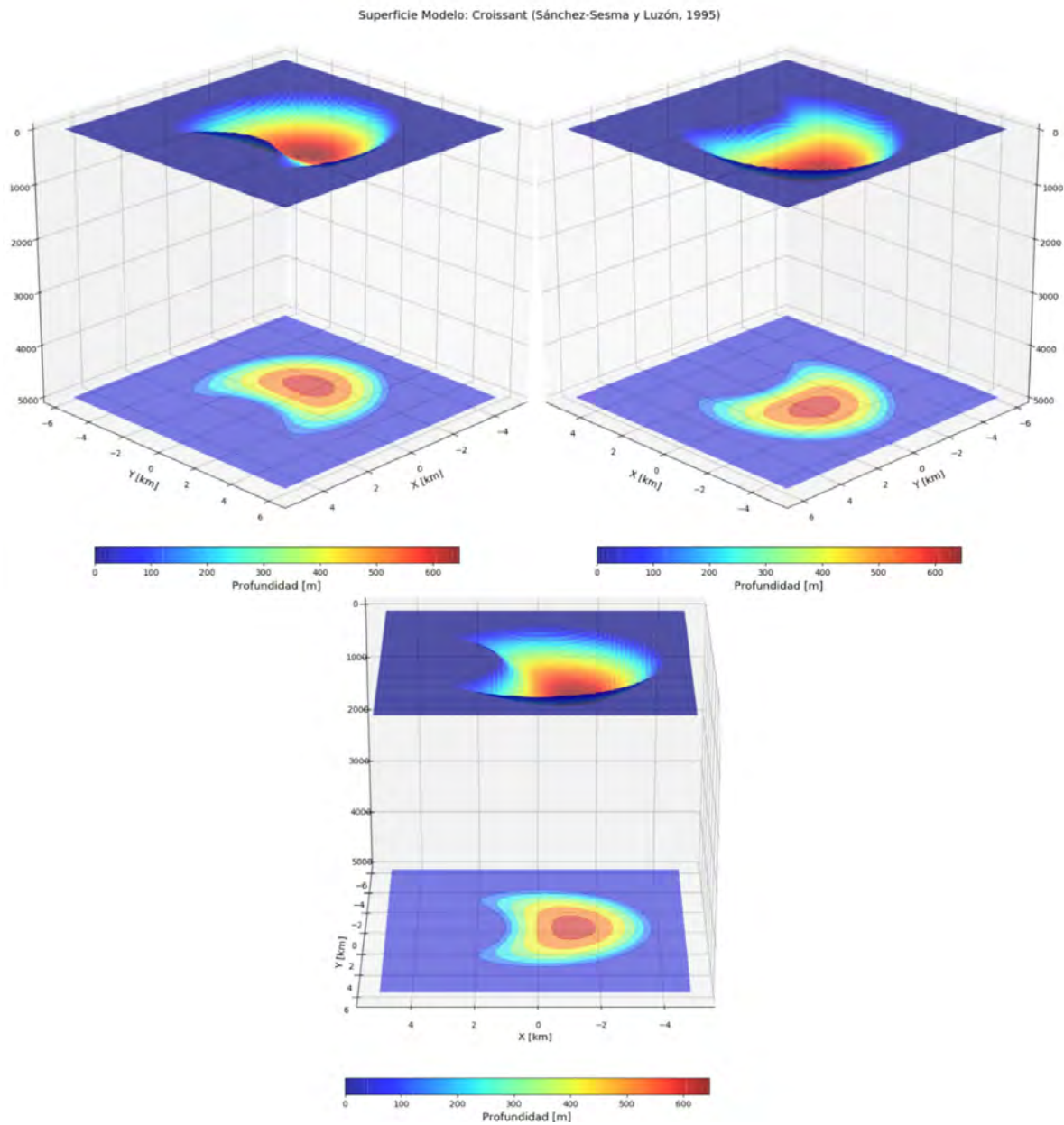


FIGURA 4.12: Modelo sintético de un valle aluvial con forma de *croissant*, propuesto por Sánchez-Sesma y Luzón (1995)

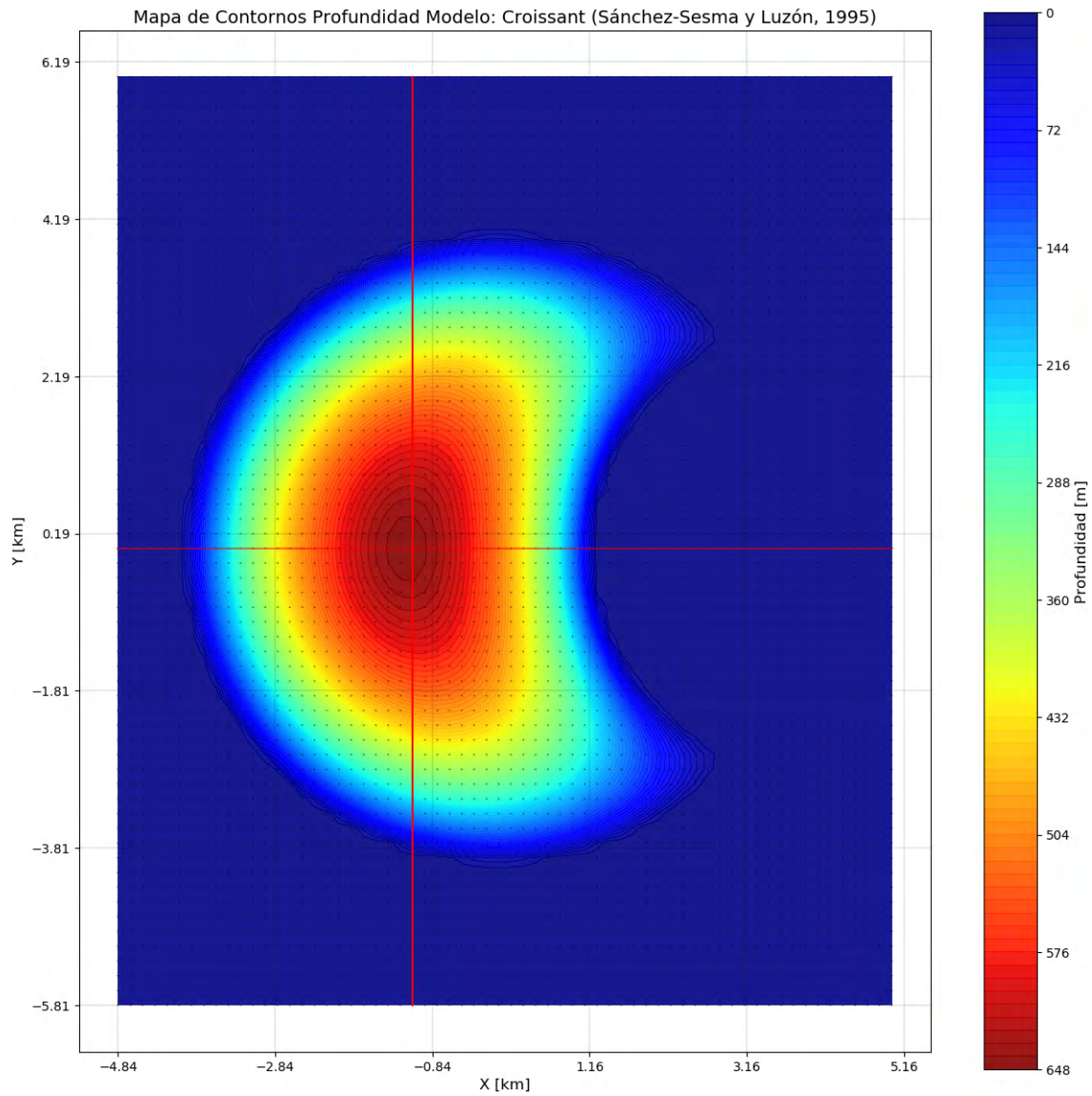


FIGURA 4.13: Curvas de nivel del modelo de *croissant*. Se muestran las líneas de receptores cruzando a través de la parte más profunda de la cuenca.

Como primer caso se representa el efecto sísmico que causa la incidencia de una onda SH con un ángulo $\gamma = 30$.

TABLA 4.7: Valores de las propiedades de propagación de onda

Tipo de onda	SH
Ángulo de incidencia γ	30°
Azimut ϕ	0°
Polarización	0°
Periodos pulso de Ricker t_s, t_p	$5.0[s], 3.0[s]$
Número de frecuencias	512
Frecuencia Máxima f_{max}	$20[Hz]$

En la figura 4.15 se muestran los resultados obtenidos por Sánchez-Sesma y Luzón (1995). Se distingue que existe una emisión de ondas difractadas causadas por la irregularidad del valle, mostrando una amplitud ligeramente menor que la incidencia de la onda. Es posible observar la emisión de energía difractada de forma muy sutil debido a que se presenta una fuerte atenuación geométrica. Por parte de los resultados generados por el VPM (figura 4.14), se encuentra una similitud aceptable, aunque de nuevo, la atenuación presenta ciertas discrepancias debido a que el método es formulado como base rígida, impidiendo una óptima absorción de la energía, y la consecuente ondulación, que es posible *regular* mediante un control paramétrico del VPM, a través del número modal m .

Para la incidencia de ondas SV se observan patrones de ondas refractadas dentro del valle así como emisión de energía difractada, lo cual produce dispersión de ondas de Rayleigh por la emisión tardía en el rebote de las ondas dentro de la cuenca sedimentaria (Sánchez-Sesma y Luzón, 1995) (figura 4.17). El método VPM es capaz de reproducir una fracción de esta física a un costo computacional muy bajo, suficiente para modelar el efecto de ondas superficiales en medios geoméricamente más complejos. Se muestra una correlación aceptable entre la emisión de ondas causadas por la irregularidad de la cuenca (figura 4.16).

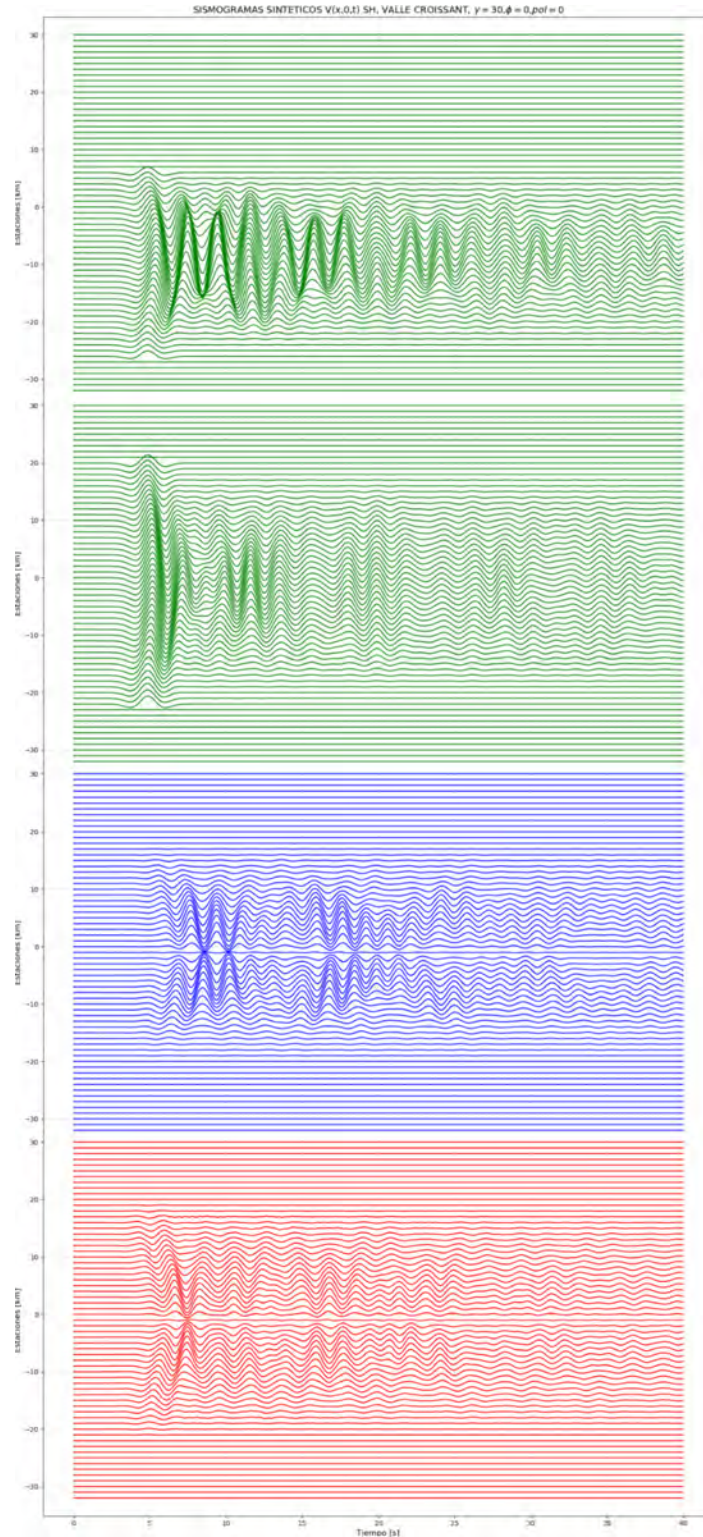


FIGURA 4.14: Sismogramas sintéticos para incidencia vertical de una onda SH, excitación producida por un pulso de Ricker con $T_p = 3[s]$, $f_p = 0.333[Hz]$. Sismogramas en orden descendente: $V(x, ny, t)$, $V(nx, y, t)$, $U(nx, y, t)$, $W(nx, y, t)$.

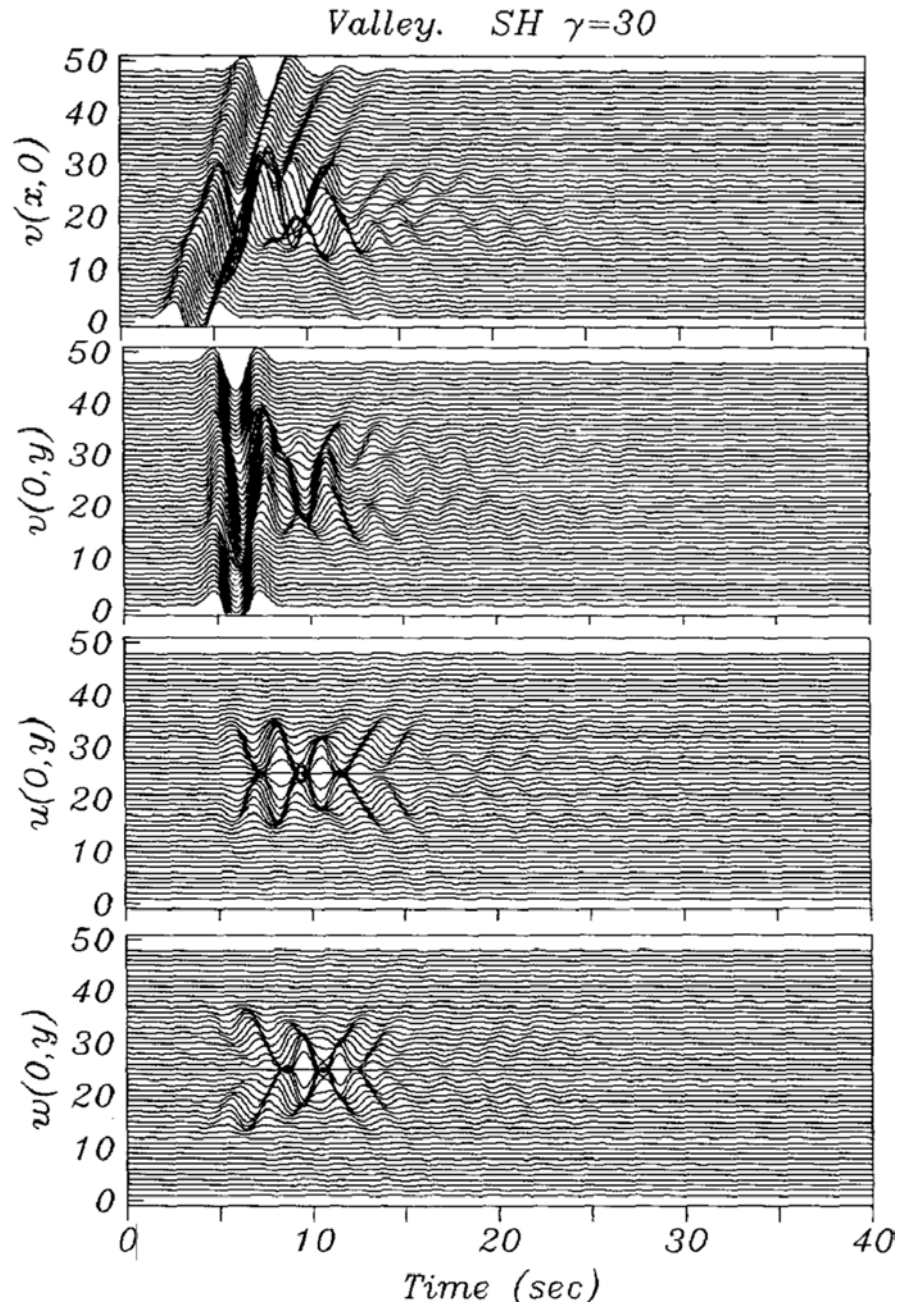


FIGURA 4.15: Sismogramas sintéticos reportados por Sánchez-Sesma y Luzón (1995), excitación producida por un pulso de Ricker con $T_p = 3[s]$, $f_p = 0.333[Hz]$. Sismogramas en orden descendente: $V(x, ny, t)$, $V(nx, y, t)$, $U(nx, y, t)$, $W(nx, y, t)$.

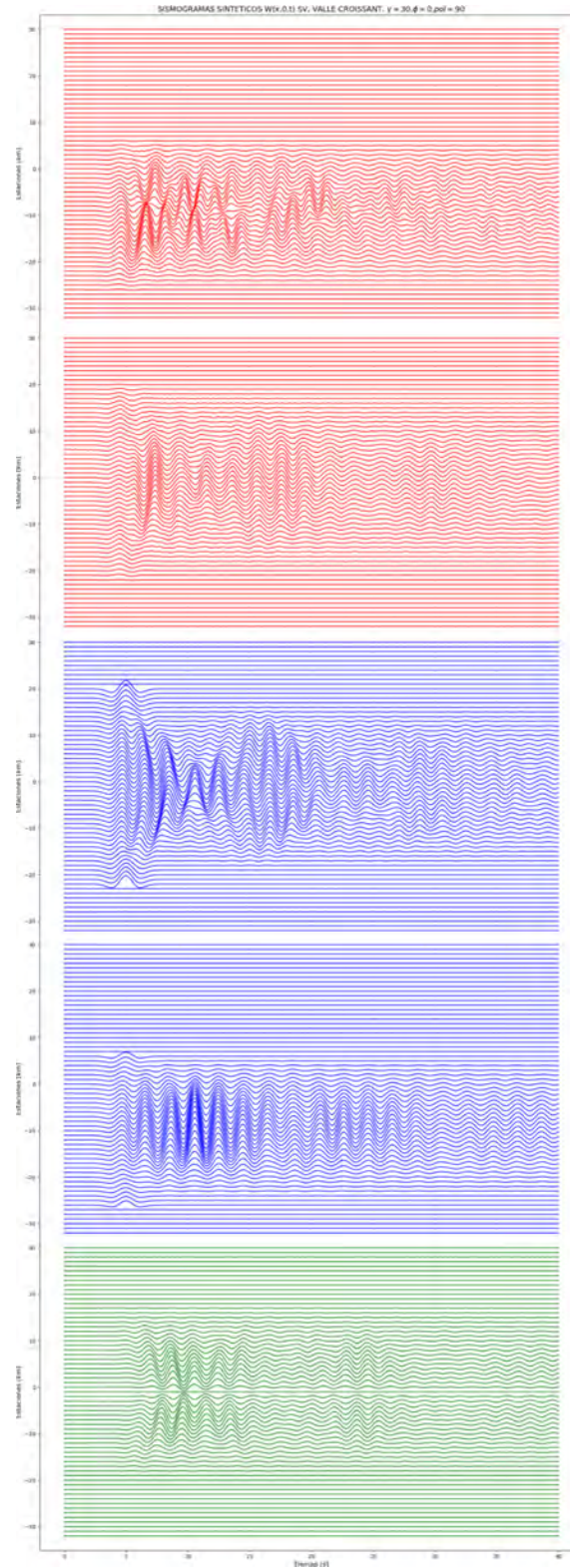


FIGURA 4.16: Sismogramas sintéticos para incidencia vertical de una onda SV, excitación producida por un pulso de Ricker con $T_p = 3[s]$, $f_p = 0.333[Hz]$. Sismogramas en orden descendente: $W(x, ny, t)$, $W(nx, y, t)$, $U(x, ny, t)$, $V(nx, y, t)$, $U(nx, y, t)$.

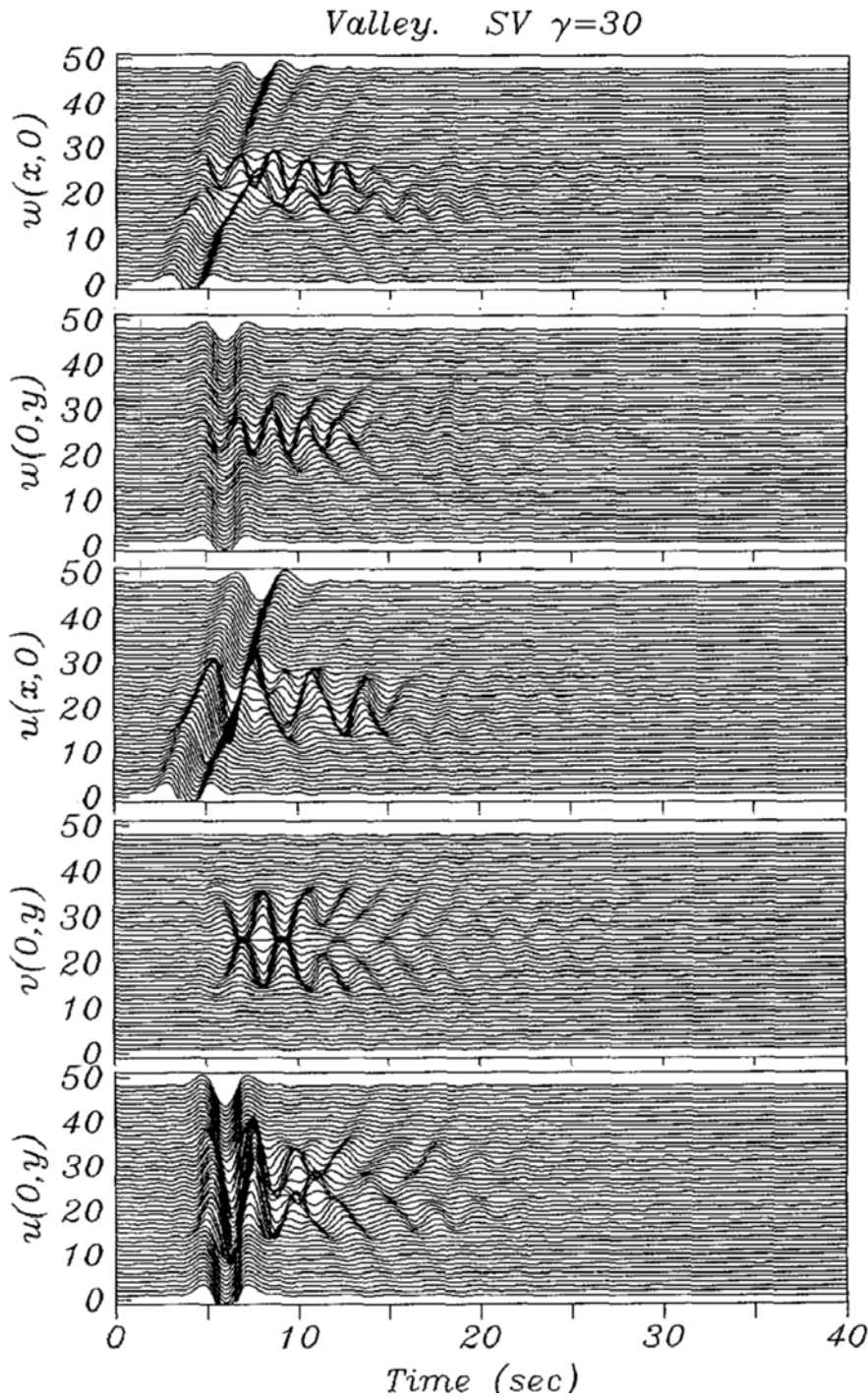


FIGURA 4.17: Sismogramas sintéticos reportados por Sánchez-Sesma y Luzón (1995), excitación producida por un pulso de Ricker con $T_p = 3[s]$, $f_p = 0.333[Hz]$. Sismogramas en orden descendente: $W(x, ny, t)$, $W(nx, y, t)$, $U(x, ny, t)$, $V(nx, y, t)$, $U(nx, y, t)$.

4.2 Un modelo realista: Cuenca del Valle de México

Se busca probar la efectividad del método VPM en un modelo con mayor complejidad. En este sentido se propone un modelo simplificado de la Cuenca del Valle de México, el cual se distribuye horizontalmente $46.635[km]$ en dirección E-W y $42.7148[km]$ en dirección N-S. El cálculo del campo de desplazamiento se realiza mediante la discretización espacial en una malla de 128×128 nodos en dirección XY, respectivamente, lo cual se traduce en el siguiente espaciamiento: $dx = 0.36434[km]$, $dy = 0.333371[km]$. Con estas características se ha reconstruido una superficie de la cuenca empleando datos de profundidad de Martínez-González et al. (2015). Tomando como referencia esta información se ha realizado una interpolación para extender los valores de la profundidad a la discretización deseada mediante el método de triangulación con interpolación lineal. La información de la malla empleada en el cálculo se muestra en la tabla 4.9, en tanto que el modelo simplificado de la cuenca se muestra en las figuras 4.18 y 4.19.

TABLA 4.8: Parámetros de discretización de la malla para el modelo simplificado de la Cuenca del Valle de México

Puntos de discretización dirección X,Y: $n_x \times n_y = n$	$128 \times 128 = 16384$
Espaciamiento en dirección X, Y: d_x, d_y	$0.36434[km], 0.333371[km]$
Longitud: XY	$46.635[km], 42.7148[km]$
Profundidad máx:	$0.109[km]$

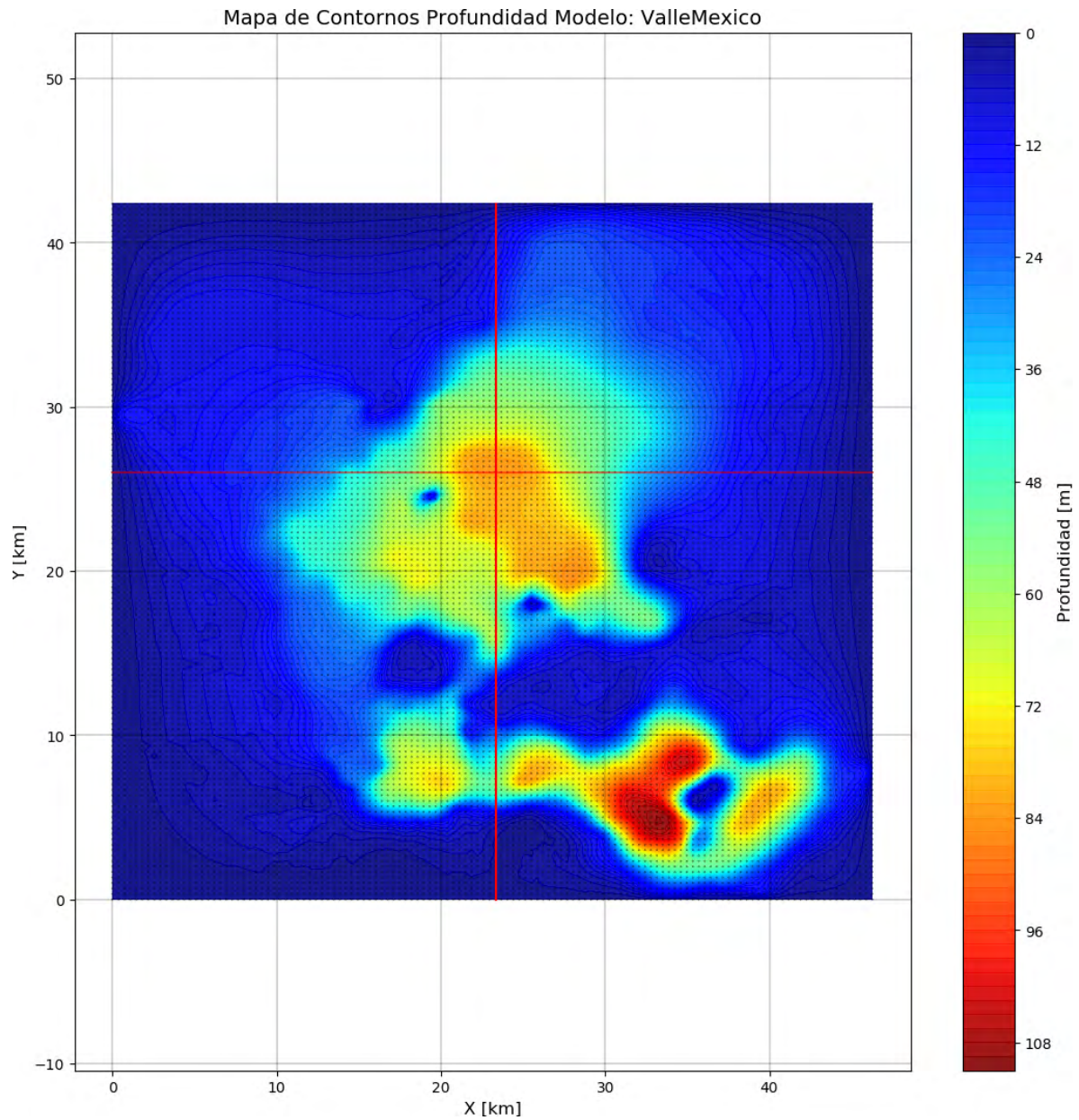


FIGURA 4.18: Mapa de contornos de la superficie que representa al modelo simplificado de la cuenca del Valle de México. Las líneas representan la posición sobre la que se está registrando el movimiento sísmico en superficie.

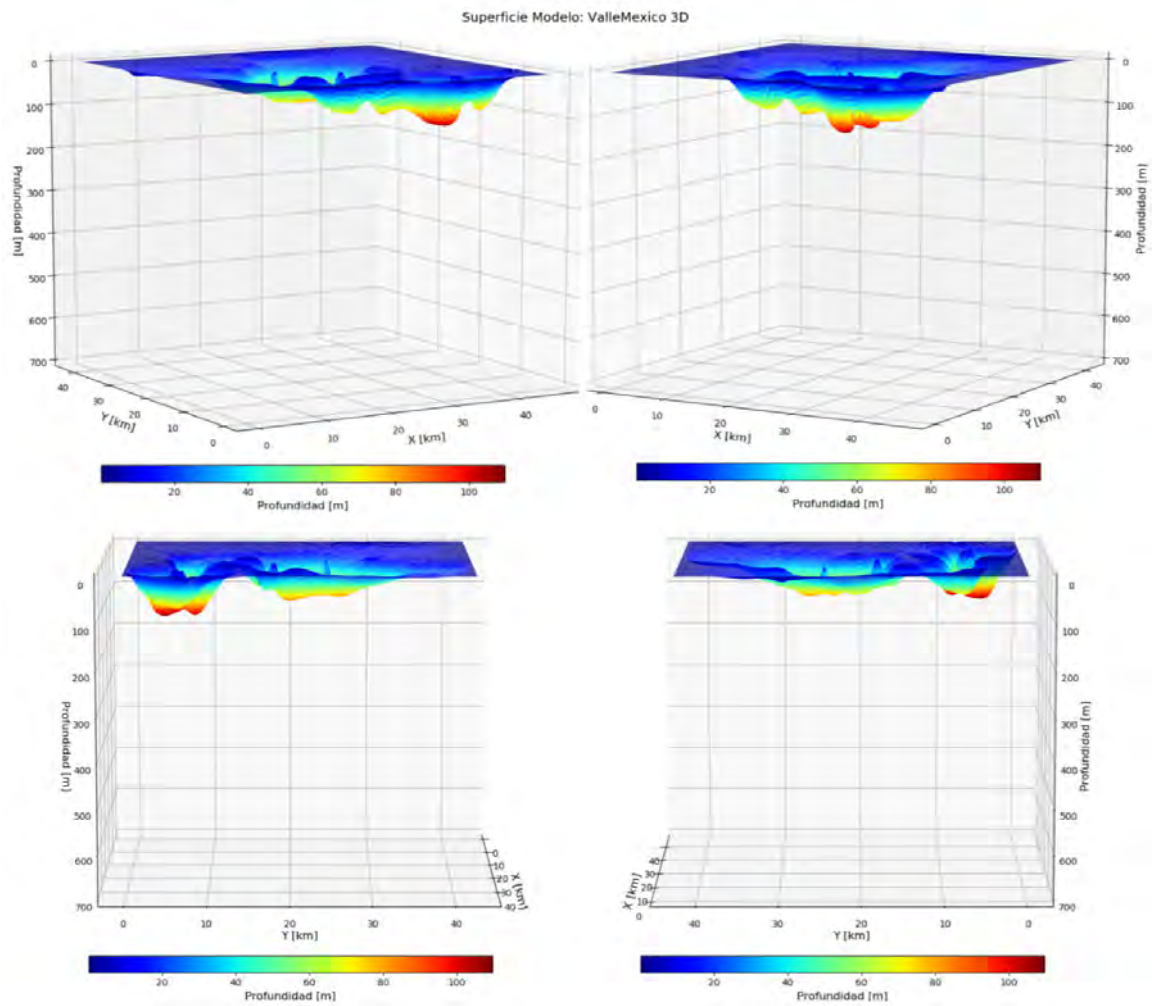


FIGURA 4.19: Superficie del modelo simplificado de la cuenca del Valle de México desde diferentes perspectivas.

La asignación de valores a los parámetros físicos de este modelo toma como referencia el trabajo de Martínez-González et al. (2015), del cual se hace uso del mapa de isoperiodos para la cuenca del Valle de México. Considerando una velocidad de ondas S típica de $\beta_R = 0.08[km/s]$, así como la expresión correspondiente al periodo dominante T de un sitio considerando un estrato de cierto espesor h :

$$T = \frac{4h}{\beta_R} \quad (4.1)$$

De la expresión anterior es posible obtener el espesor dada la velocidad β_R y el periodo de forma que:

$$h = \frac{\beta_R T}{4} \quad (4.2)$$

Empleando el valor de la velocidad β_R , se tiene que en cada punto de la cuenca el espesor en función de su posición horizontal está dado por: $h(x, y) = 0.02T[km]$. De acuerdo a Marsal y Mazari (1959-2016) y Juárez-Badillo y Rico-Rodríguez (2016) se asigna un valor de densidad promedio de $2.4g/cm^3$, asociado a arcillas volcánicas típicas del Valle de México. Además, se considera un coeficiente de Poisson $\nu_R = 0.49$.

Para el caso del semiespacio se consideran valores estándar de la corteza terrestre como una velocidad de onda cortante $\beta_{HS} = 1km/s$ y densidad $\rho_{HS} = 2.7g/cm^3$, así como un coeficiente de Poisson de $\nu_{HS} = \frac{1}{3}$. En la tabla 4.9 se aprecia la totalidad de las propiedades físicas necesarias en la modelación.

TABLA 4.9: Valores de las propiedades físicas del modelo para la cuenca del Valle de México

Velocidad ondas S del modelo β_{valle}	$0.08[\frac{km}{s}]$
Velocidad ondas S del semiespacio β_{HS}	$1[\frac{km}{s}]$
Velocidad ondas P del modelo α_{valle}	$0.571314[\frac{km}{s}]$
Velocidad ondas P del semiespacio α_{HS}	$2.5[\frac{km}{s}]$
Densidad del valle ρ_{valle}	$2.4[\frac{g}{cm^3}]$
Densidad del semiespacio ρ_{HS}	$2.7[\frac{g}{cm^3}]$
Profundidad máx. del modelo:	$109.853[m]$
Factor de amortiguamiento Q_{valle}	30

Como primer caso se presenta la incidencia de una onda SH a $\gamma = 60$ y un ángulo azimutal $\phi = 30$, cuya excitación en la base del modelo se realiza mediante la convolución de un pulso de Ricker con un periodo característico $T_p = 2[s]$, con lo cual se busca evaluar la respuesta unidimensional de la cuenca a una relativa alta frecuencia dentro de los límites de la estabilidad del Método VPM. Como un primer resultado se evalúa la respuesta sísmica en la región centro-norte de la cuenca aproximadamente correspondiendo a una capa de sedimentos de espesor relevante (entre 75 y 90 [m]), producto de la sedimentación acaecida en el lago de Texcoco. En la figura 4.2 se muestran las líneas de receptores en donde los campos de desplazamiento han sido medidos. En seguida se presentan los sismogramas resultantes de la interacción de la onda SH con el medio.

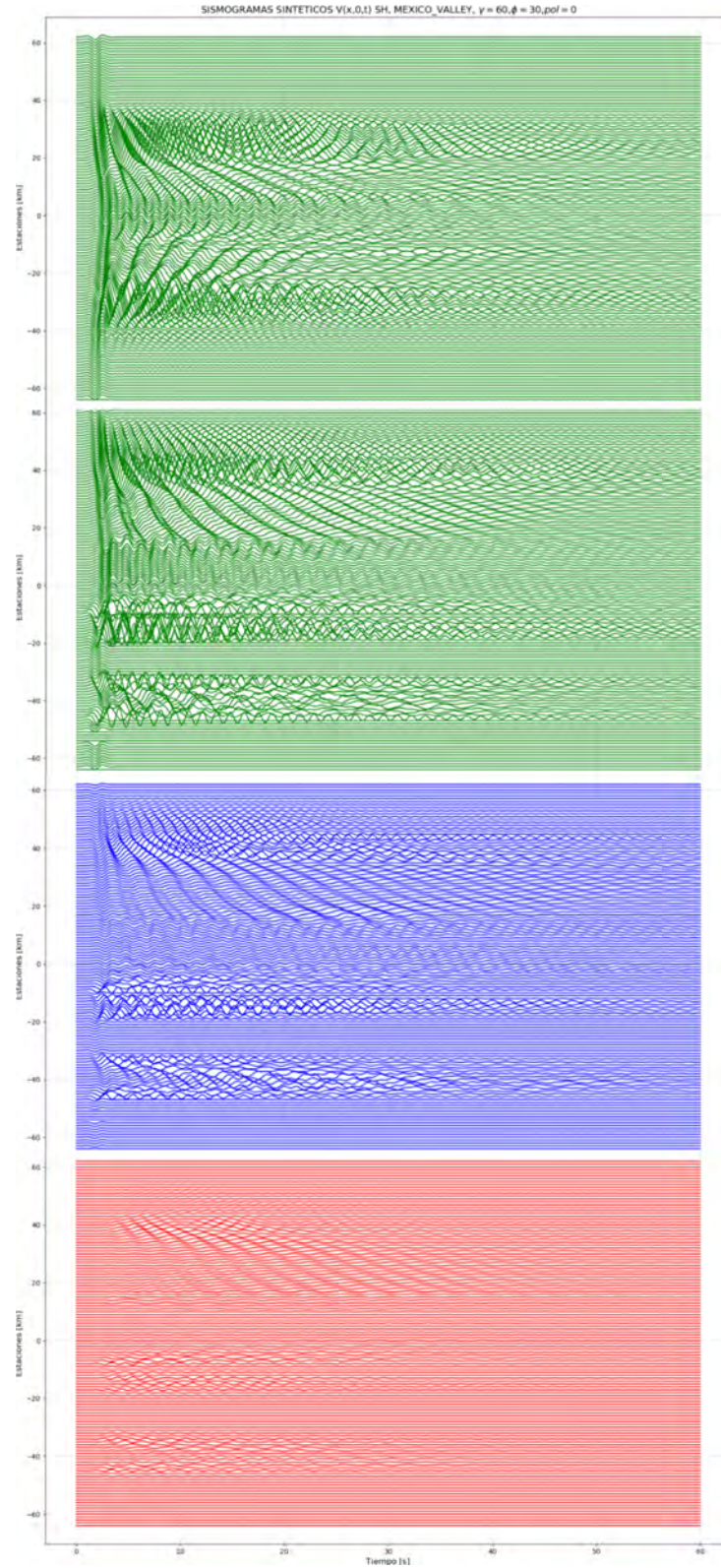


FIGURA 4.20: Sismogramas sintéticos para incidencia oblicua de $\gamma = 30$ de una onda SH con un ángulo azimutal $\phi = 60$, excitación producida por un pulso de Ricker con $T_p = 2[s]$, $f_p = 0.5[Hz]$. En orden descendente se presentan los campos de desplazamiento: $V(x, 0, t)$, $V(0, y, t)$, $U(0, y, t)$, $W(0, y, t)$

En las figuras 4.21 - 4.23 se despliegan varias tomas de los campos de desplazamiento actuando como una variable espacial z , la cual está representando la amplitud del desplazamiento y su relación con la distribución horizontal de la cuenca. En las imágenes es posible apreciar como se distribuye la energía en la cuenca.

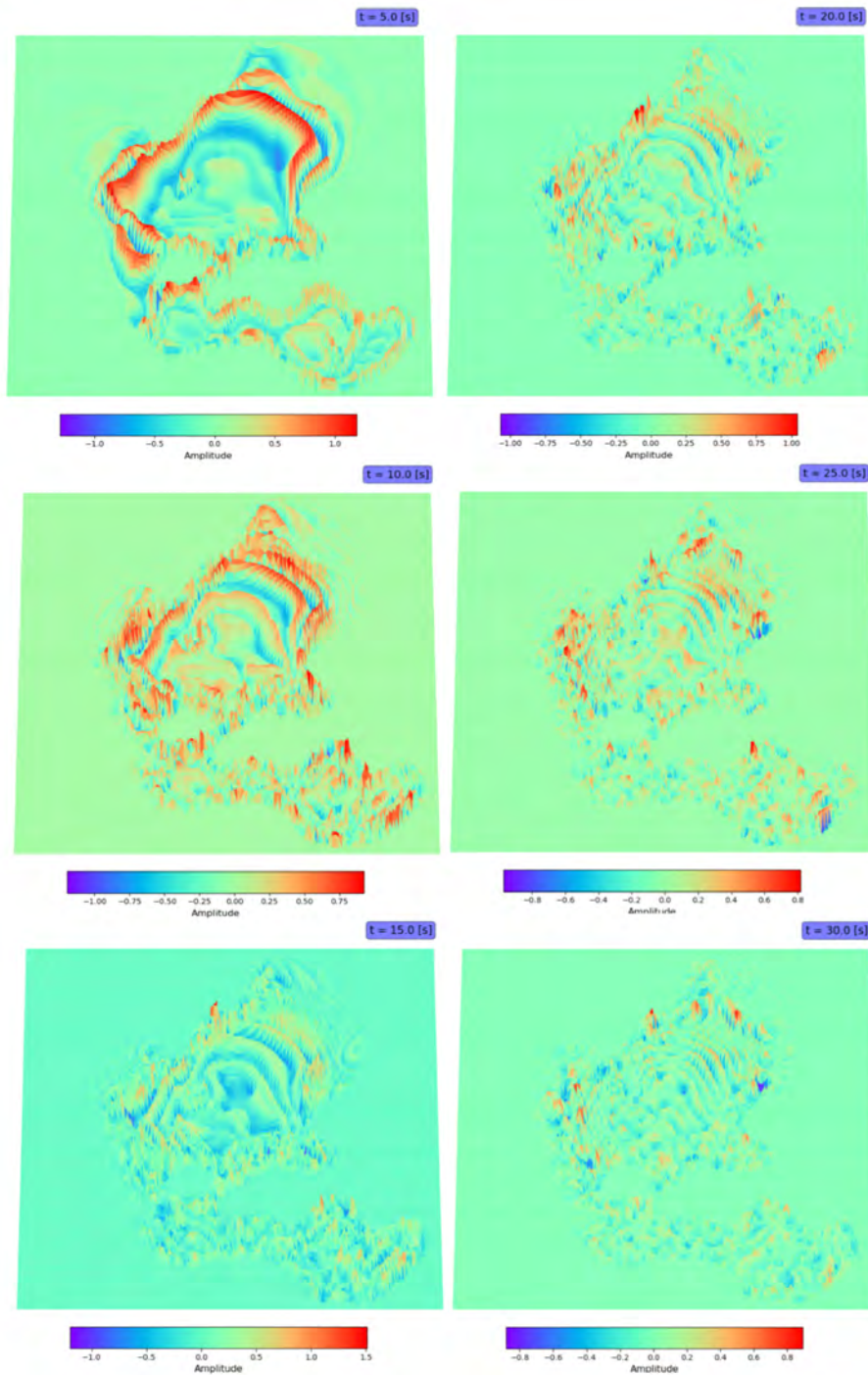


FIGURA 4.21: Superficies del campo de desplazamiento horizontal $U(x, y, t)$. Las tomas corresponden a los tiempos 5, 10, 15, 20, 25, 30 [s].

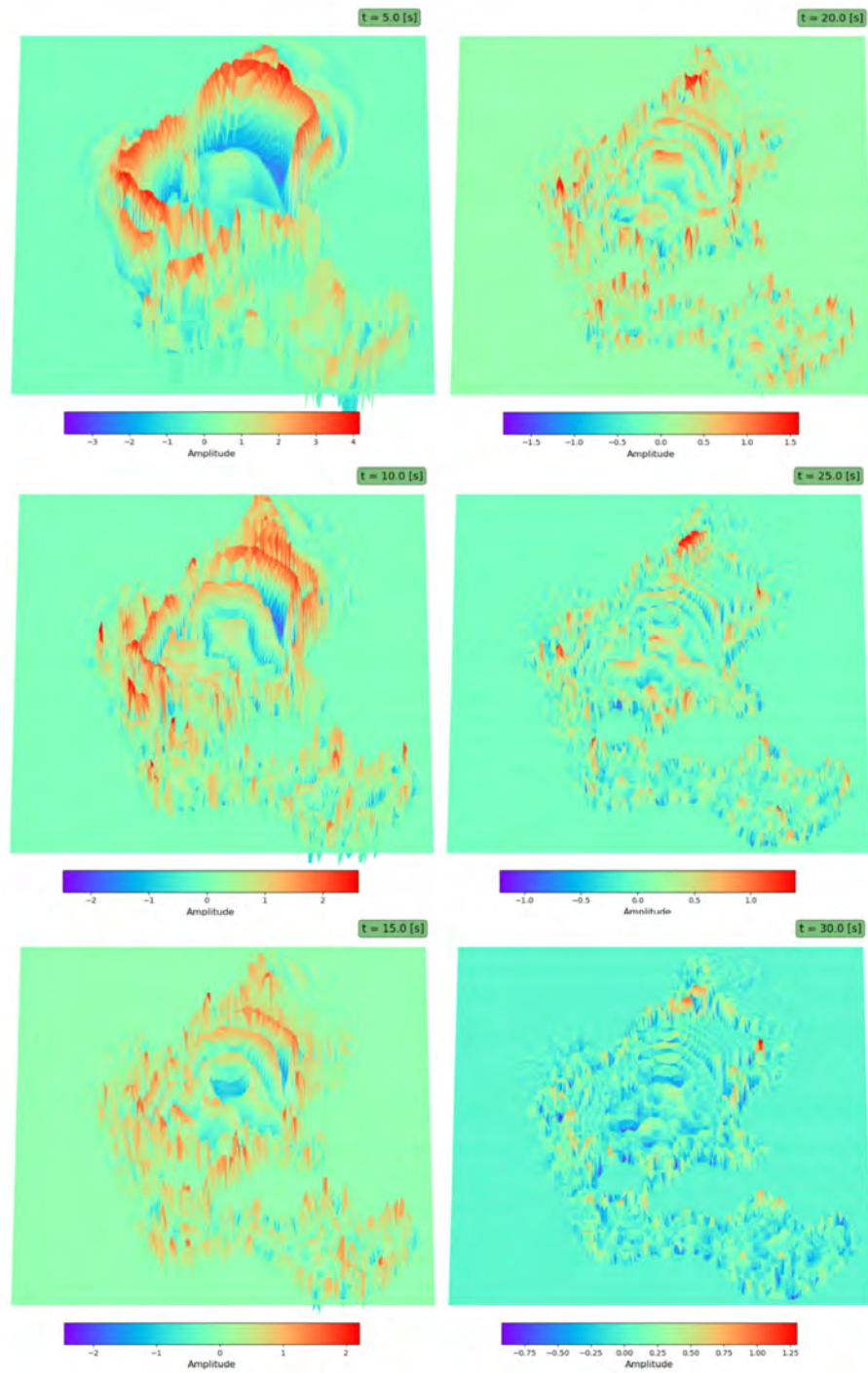


FIGURA 4.22: Superficies del campo de desplazamiento horizontal $V(x, y, t)$. Las tomas corresponden a los tiempos 5, 10, 15, 20, 25, 30 [s].

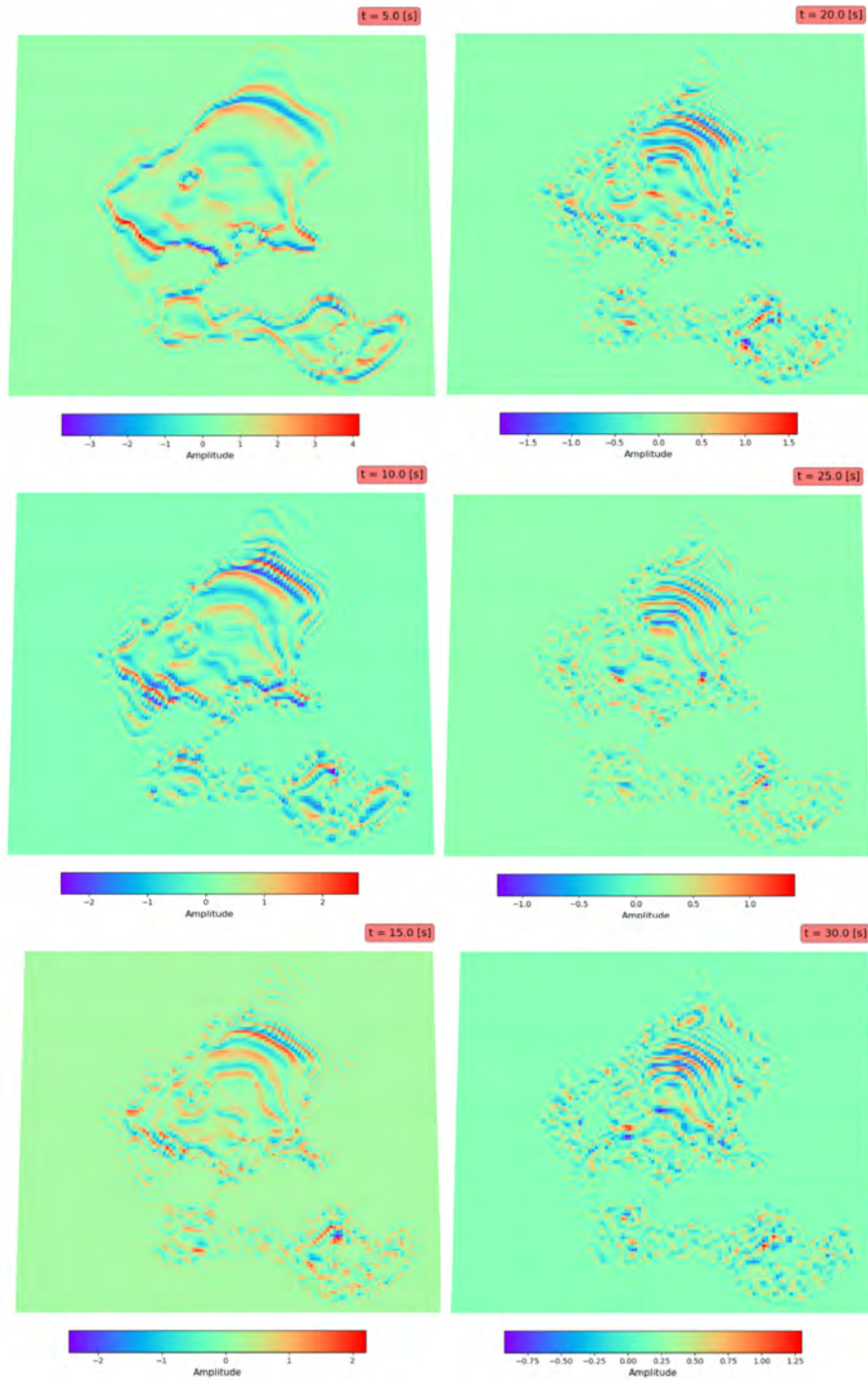


FIGURA 4.23: Superficies del campo de desplazamiento vertical $W(x, y, t)$. Las tomas corresponden a los tiempos 5, 10, 15, 20, 25, 30 [s].

Ahora se presenta un caso de incidencia vertical $\gamma = 0$ para una onda SV, cuya dirección de propagación tiene un ángulo azimutal $\phi = 60$. En este caso se busca distinguir el efecto azimutal en la propagación de la onda. Tal como se aprecia en los sismogramas sintéticos de

las figuras 4.25 y 4.26, el patrón de ondas generadas en la cuenca tiene un comportamiento simétrico al efecto generado por la incidencia oblicua de la onda SH del caso anterior.

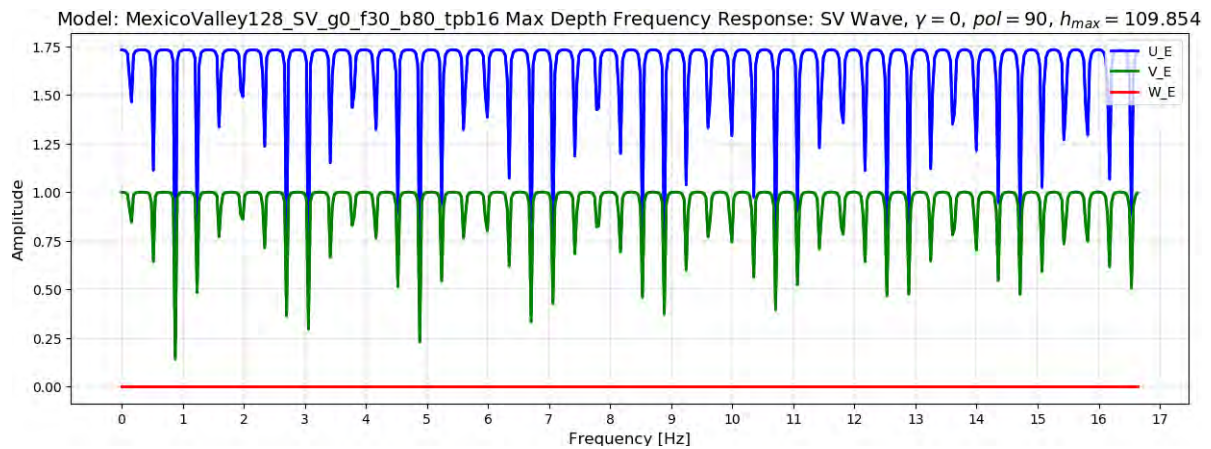


FIGURA 4.24: Funciones de transferencia para una onda incidente SV, vertical y con azimut $\phi = 60$

Se observa un movimiento horizontal amplificado en sentido radial a los receptores, el cual es generado en las regiones donde hay un cambio de espesor, esto es, los bordes de la cuenca en donde se adelgazan los sedimentos para dar el cambio a la zona de transición geotectónica. A pesar de que el movimiento inducido en el modelo es meramente horizontal, tal como se aprecia en las funciones de transferencia (figura 4.24), se alcanza a vislumbrar una cinemática de carácter vertical, que se mantiene en bajas amplitudes a lo largo de 35 [s] de movimiento en la cuenca.

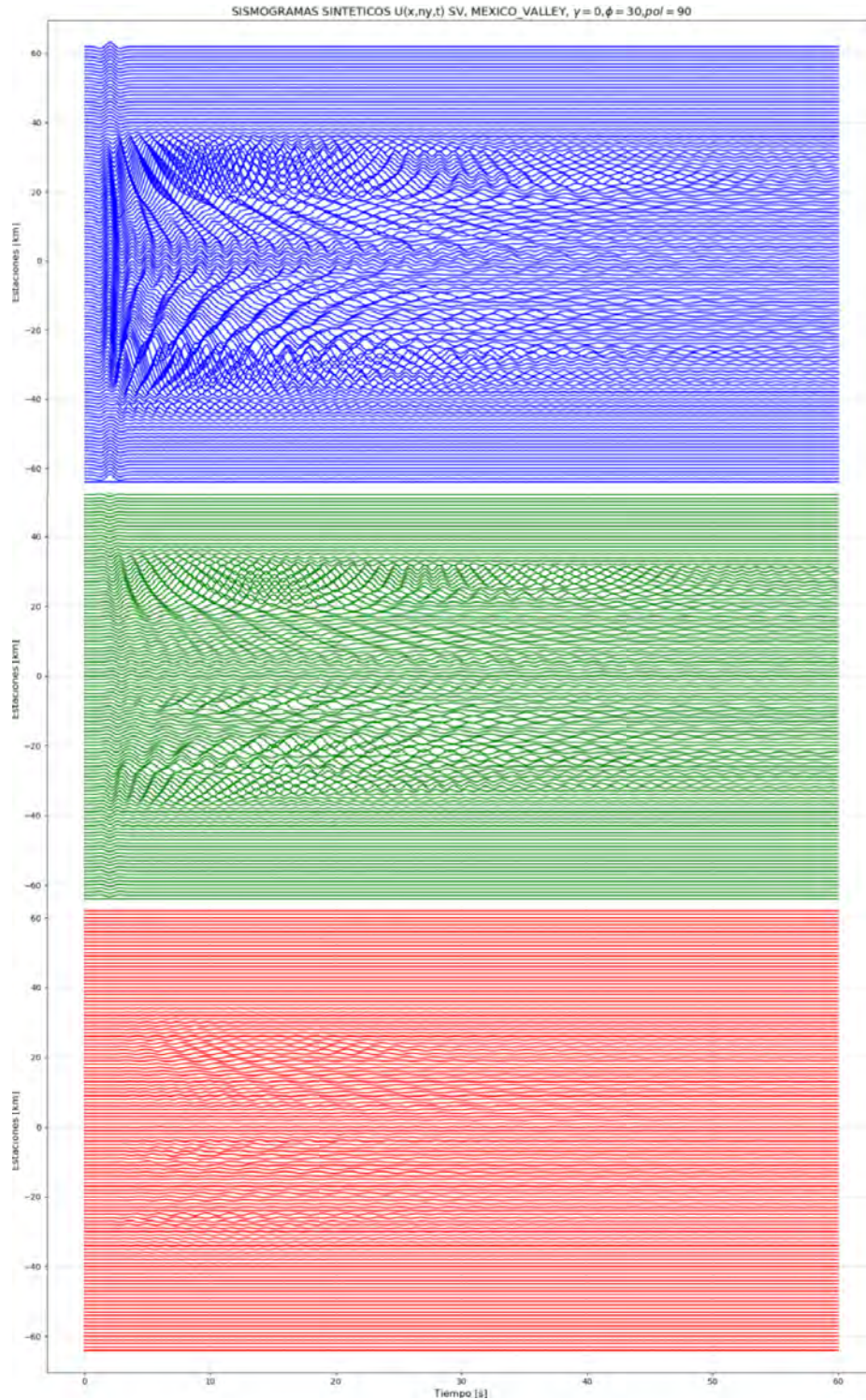


FIGURA 4.25: Sismogramas sintéticos para incidencia vertical $\gamma = 0$ de una onda SV con un ángulo azimutal $\phi = 60$. La excitación en la base del modelo es producida por un pulso de Ricker con $T_p = 2[s]$, $f_p = 0.5[Hz]$. En orden descendente se presentan los campos de desplazamiento:

$$U(x, 0, t), V(x, 0, t), W(x, 0, t)$$

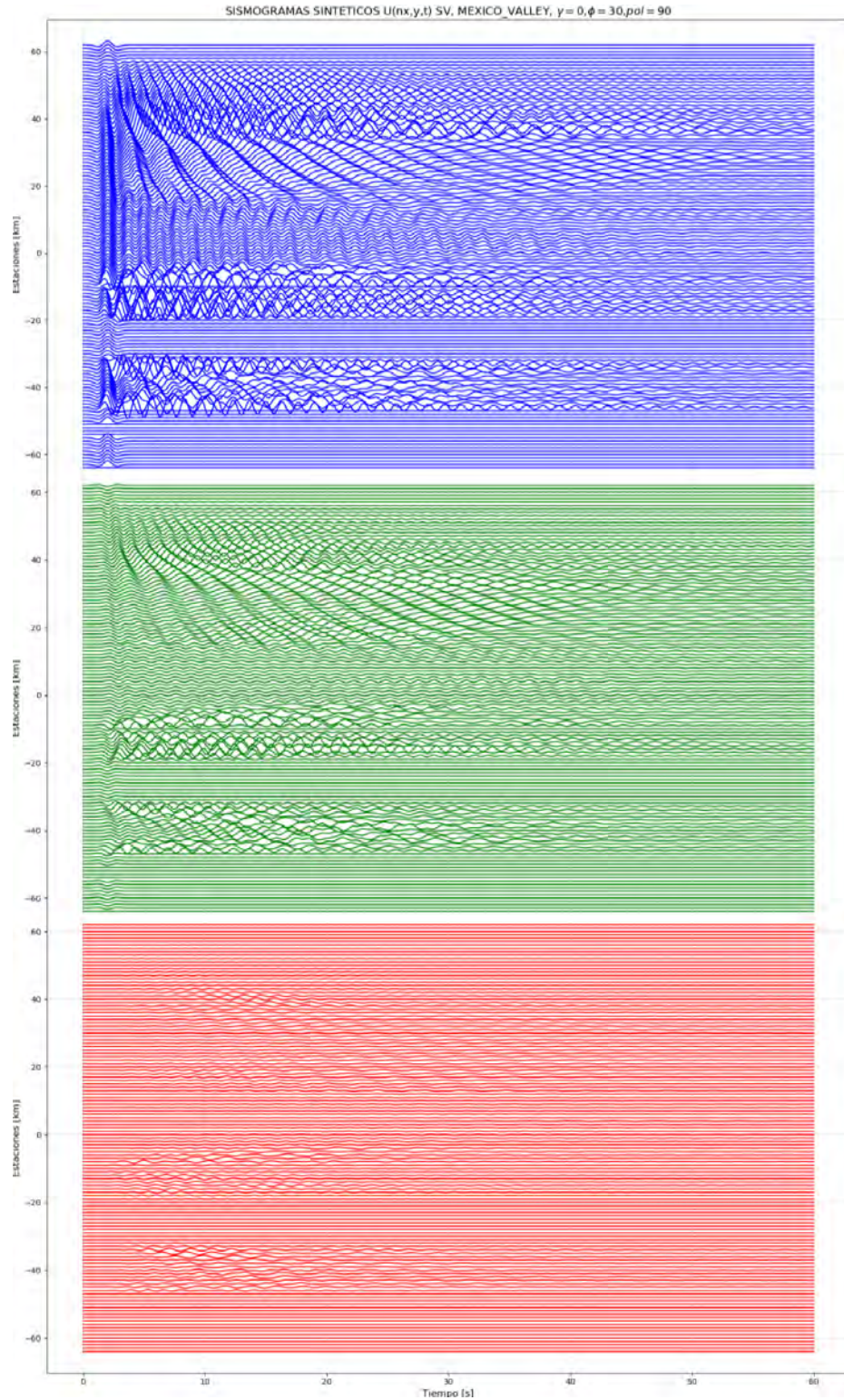


FIGURA 4.26: Sismogramas sintéticos para incidencia vertical $\gamma = 0$ de una onda SV con un ángulo azimutal $\phi = 60$. En orden descendente se presentan los campos de desplazamiento: $U(0, y, t)$, $V(0, y, t)$, $W(0, y, t)$

En las siguientes figuras se muestran superficies de desplazamiento para los tres campos $U(x, y, t)$, $V(x, y, t)$, $W(x, y, t)$. Se presentan seis capturas del movimiento a 5, 10, 15, 20, 25 y 30 [s].

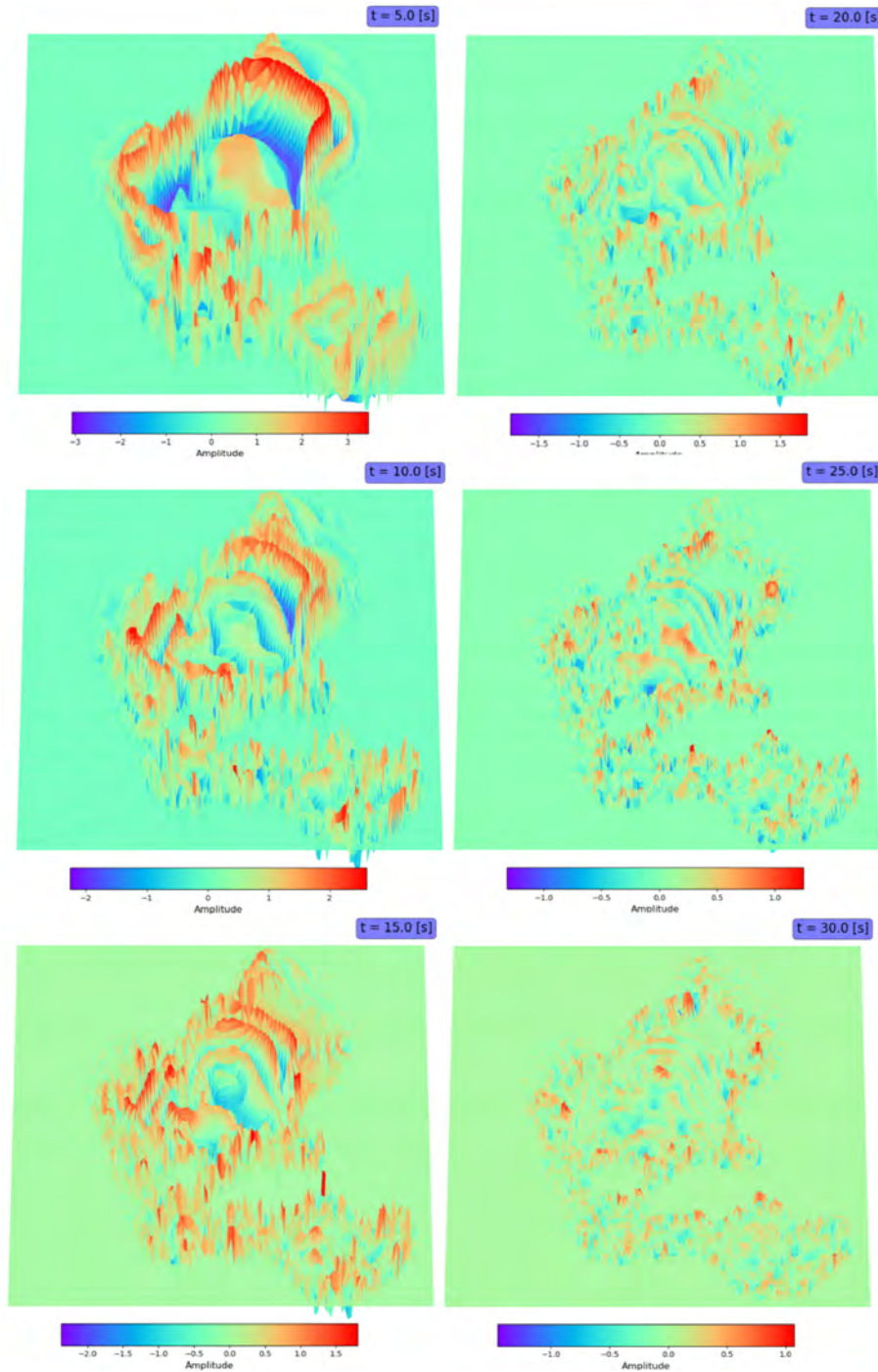


FIGURA 4.27: Superficies del campo de desplazamiento horizontal $U(x, y, t)$. Onda incidente SV vertical, dirección oblicua a 60°

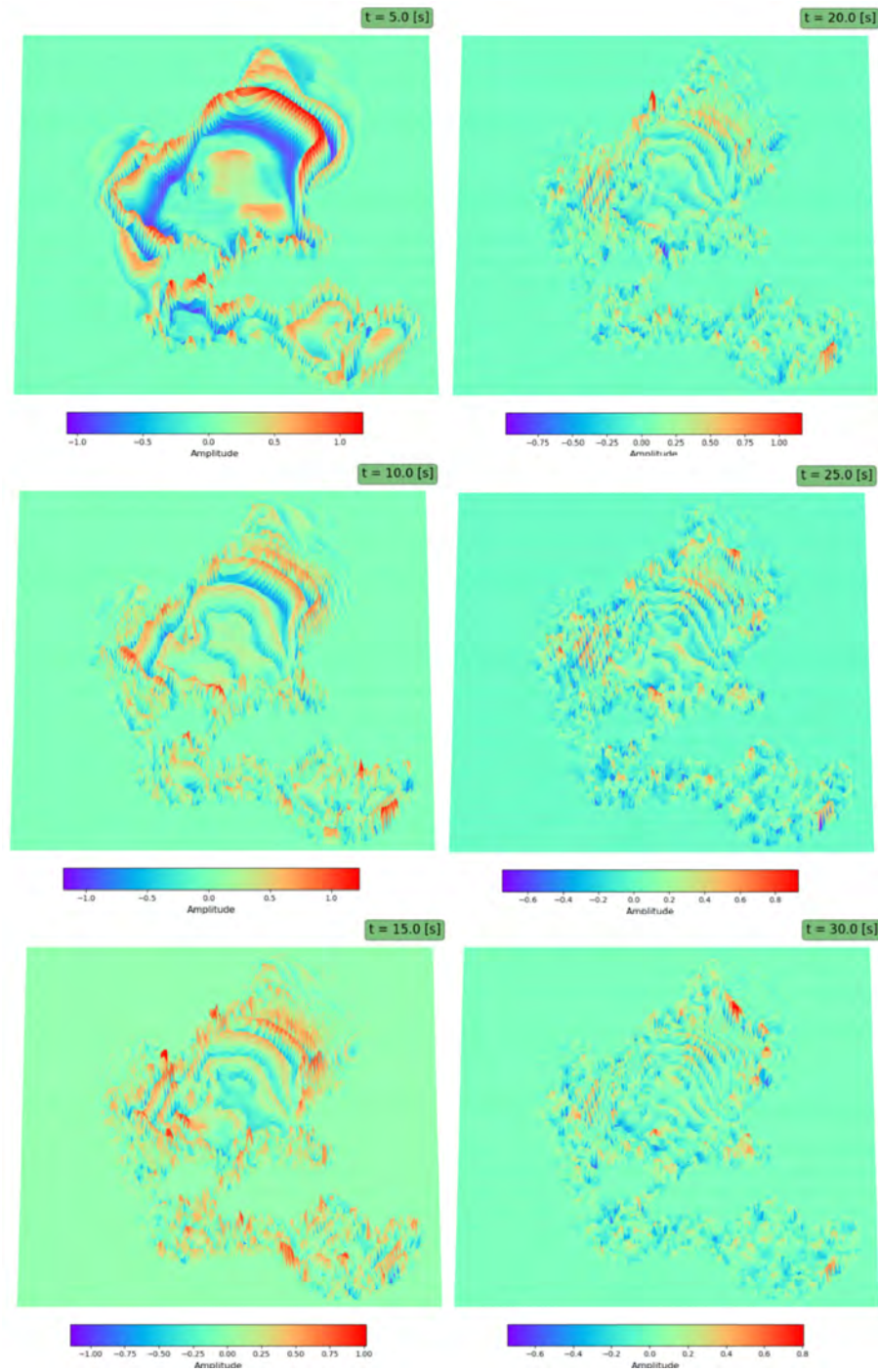


FIGURA 4.28: Superficies del campo de desplazamiento horizontal $V(x, y, t)$. Onda incidente SV vertical, dirección oblicua a 60°

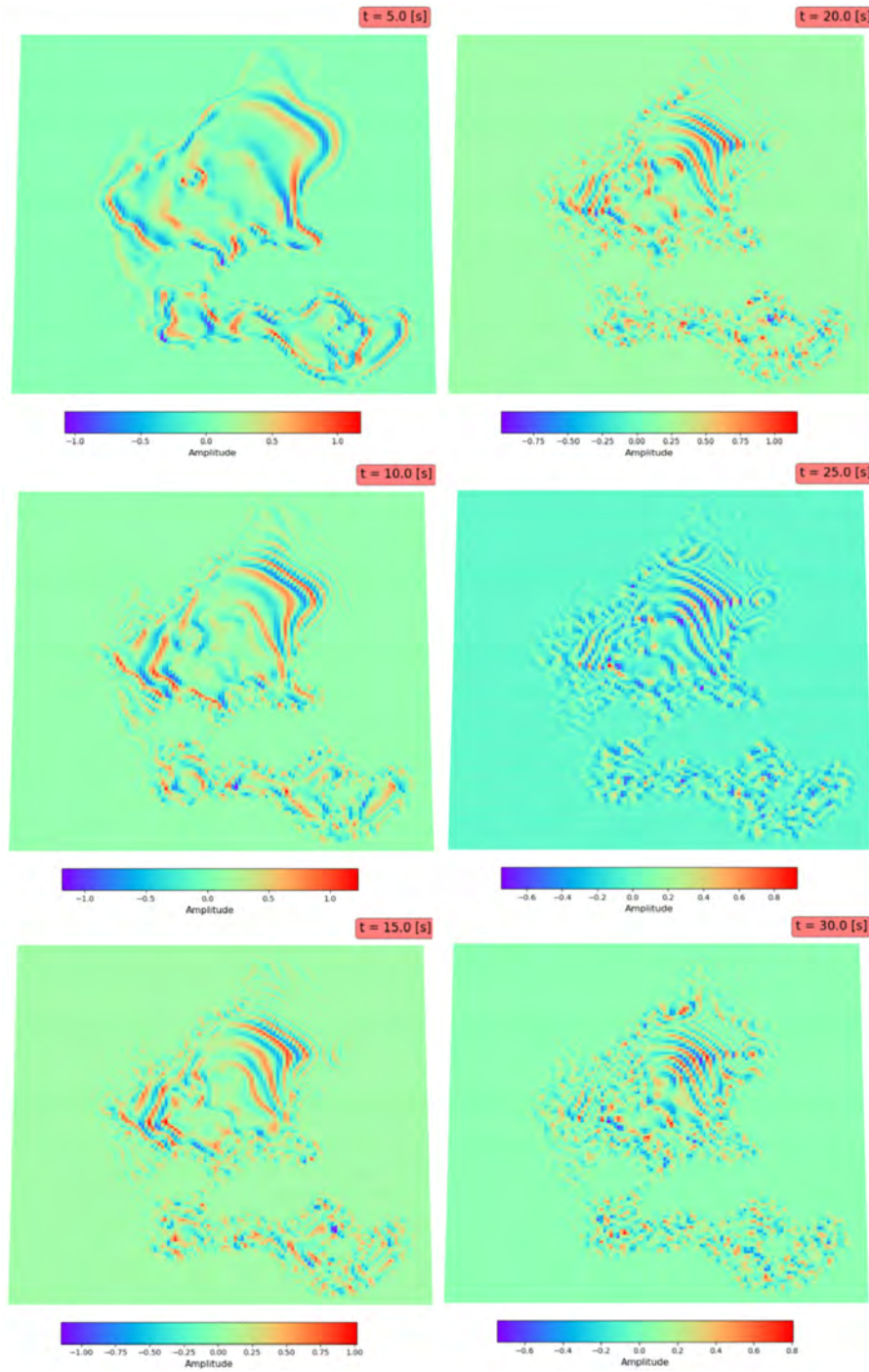


FIGURA 4.29: Superficies del campo de desplazamiento vertical $W(x, y, t)$. On-
da incidente SV vertical, dirección oblicua a 60°

4.2.1 Movimiento en la base del modelo mediante datos reales

En este apartado se muestran los resultados de imponer el movimiento en la base del modelo de la Cuenca del Valle de México a través de datos de aceleración del evento sísmico de Huitzucó, Guerrero, acaecido el 16 de junio de 2013. Dichos registros fueron recuperados de la base de datos de la Red Acelerográfica de la Ciudad de México (RACM), cuya adquisición es gestionada por el Centro de Instrumentación y Registro Sísmico, A.C. (CIRES). Dicha red está compuesta por 64 estaciones distribuidas en la zona metropolitana de México y complementadas con los registros TACY y CUP5 que forman parte de la Red Acelerográfica del Instituto de Ingeniería de la UNAM (RAII-UNAM) (figura 4.30), cuyo número de estaciones es de alrededor de 220 con 100 sitios de operación en campo libre, distribuidas en varios estados costeros de la República Mexicana como Jalisco, Michoacán, Guerrero, Oaxaca, Chiapas, así como en estados del centro y oriente como Puebla, Estado de México, Tlaxcala, Ciudad de México, Veracruz y Tabasco.

Estaciones CIRES y RAII de interés, Zonas Geotécnicas y profundidad estimada de la Cuenca del Valle de México

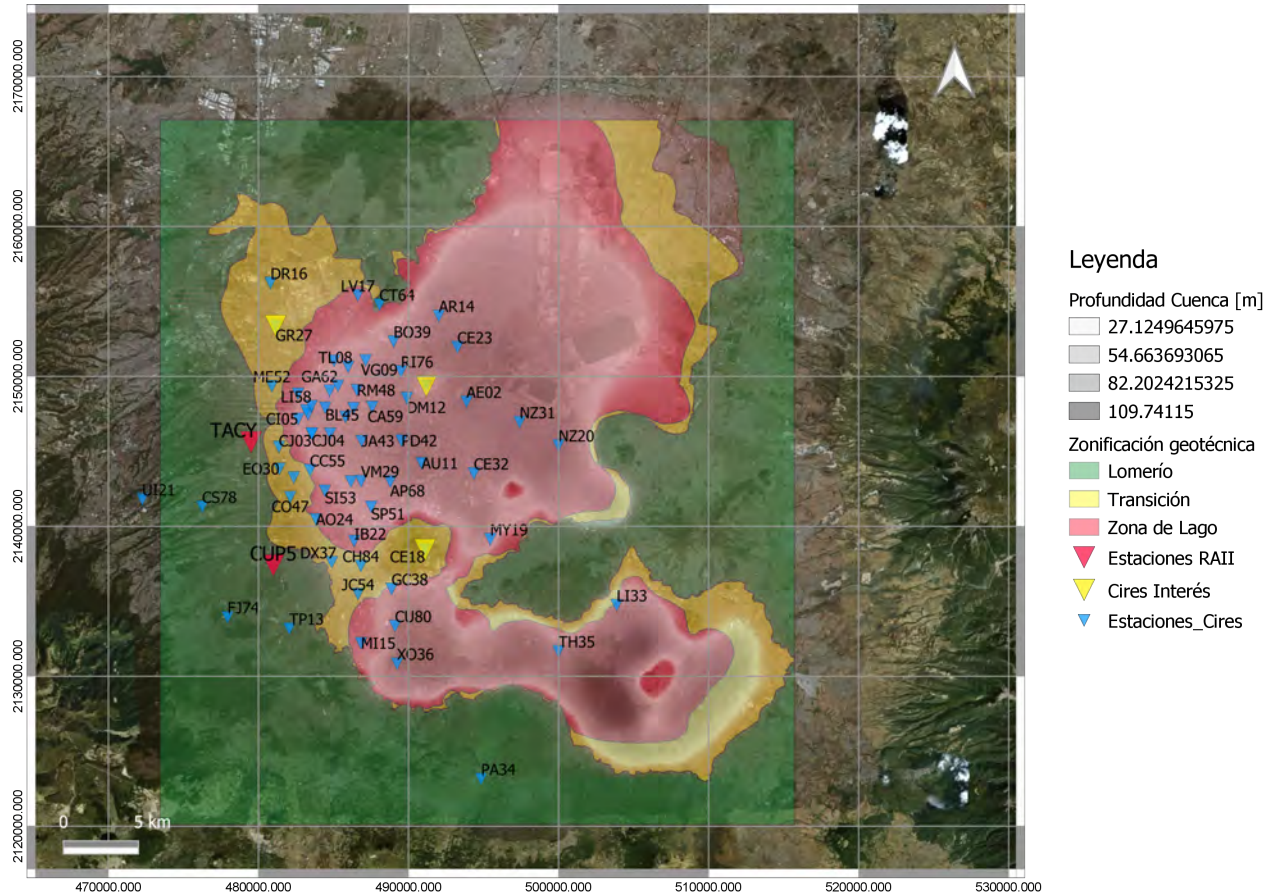


FIGURA 4.30: Mapa que muestra la distribución geográfica de las estaciones de CIRES, las estaciones de la RAII-UNAM y CIRES que se encuentran en terreno firme sobre la cuenca del Valle de México.

Con los datos de las estaciones TACY, CUP5, CE18, CP28 y GR27 se busca obtener evidencia suficiente para representar el movimiento en la base del modelo asumiendo una tierra homogénea relativamente firme cuya distribución en los nodos correspondientes está afectada por atenuación geométrica con respecto a la distancia hipocentral de la fuente. En la tabla 4.10 se presentan las características principales de las estaciones consideradas.

TABLA 4.10: Características de la estaciones CIRES y RAII-UNAM

Estación	Latitud	Longitud	Az. Est-Fuente	D. Epicentral	D. Hipocentral	Tipo de suelo
CUP5	19.3302	-99.1809	182.9288	142.9954	155.0731	Roca Basáltica
TACY	19.4044	-99.1952	182.2002	151.1453	162.6189	Suelo Duro
CE18	19.3398	-99.0847	186.9369	144.9254	156.8546	Arenoso, limoso, compacto
CP28	19.4385	-99.0839	186.4826	155.7862	166.9412	Arenoso, limoso, compacto
GR27	19.4747	99.1797	183.4626	158.9786	169.9241z	Arenoso, limoso, compacto

En la figura 4.31, se muestran los acelerogramas de la estación CUP5, establecida en terreno de roca basáltica, en cuya componente vertical se visualiza un notable arribo de onda P seguido de trenes de múltiples con una duración promedio de 15 segundos, después de los cuales se aprecia un incremento de amplitud en las componentes radial y transversal, indicando la emergencia de un paquete de ondas S marcado alrededor de los 65 a 80 [s] en el acelerograma.

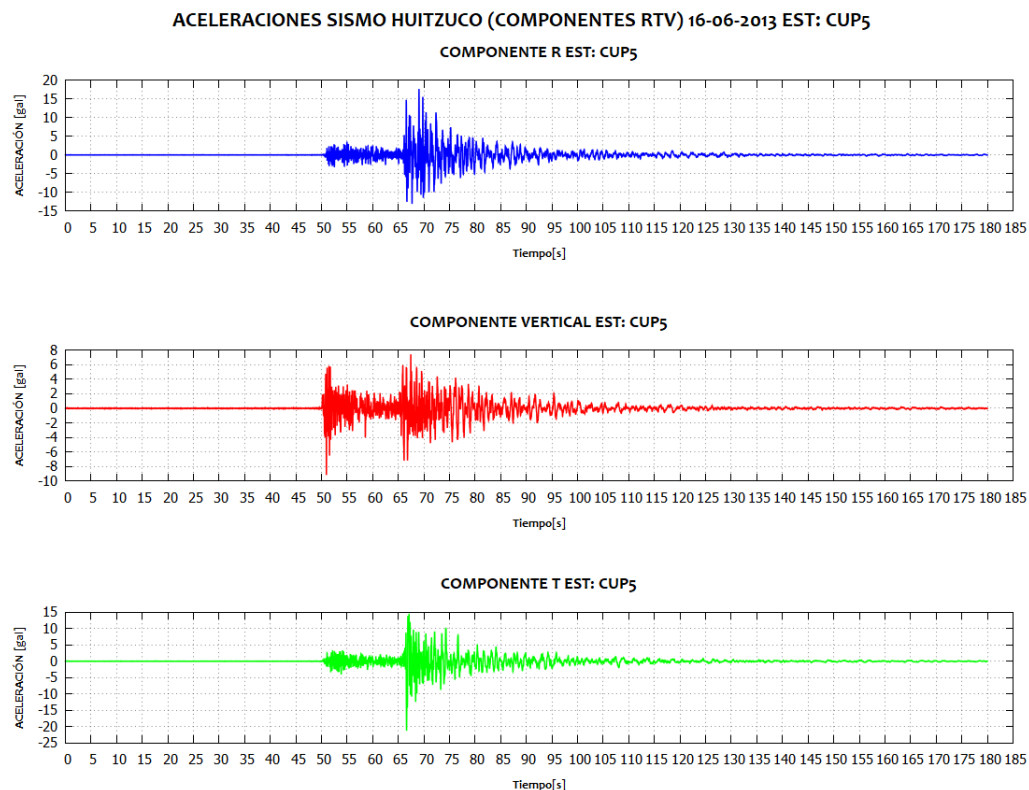


FIGURA 4.31: Acelerogramas adquiridos en la estación CUP5 en Ciudad Universitaria para el sismo de Huizuco del 16 de junio de 2013. Componentes rotadas respecto del azimuth Fuente-Receptor.

A estos datos se les ha aplicado un filtro pasabajas a 3[Hz], con el fin de eliminar resonancias de alta frecuencia que pueden estar asociadas a efectos de sitio y demás ruido sísmico que no es de interés para la generación de un modelo sismológico sencillo, que sea utilizado como el generador del movimiento de referencia en la base del modelo. El efecto del filtro se aprecia en las imágenes 4.32, 4.33 y 4.34, donde se ha elegido una ventana que muestra los arribos de la onda P y onda S, en marcados paquetes de ondas alrededor de los tiempos descritos anteriormente.

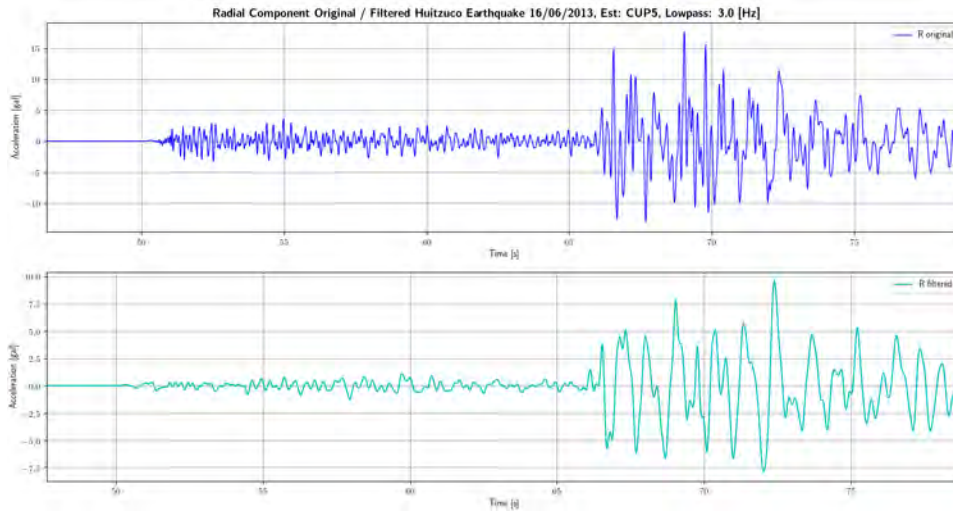


FIGURA 4.32: Acercamiento a una ventana de la componente radial del acelerograma en la estación CUP5. Se compara la señal original contra la señal filtrada, respectivamente

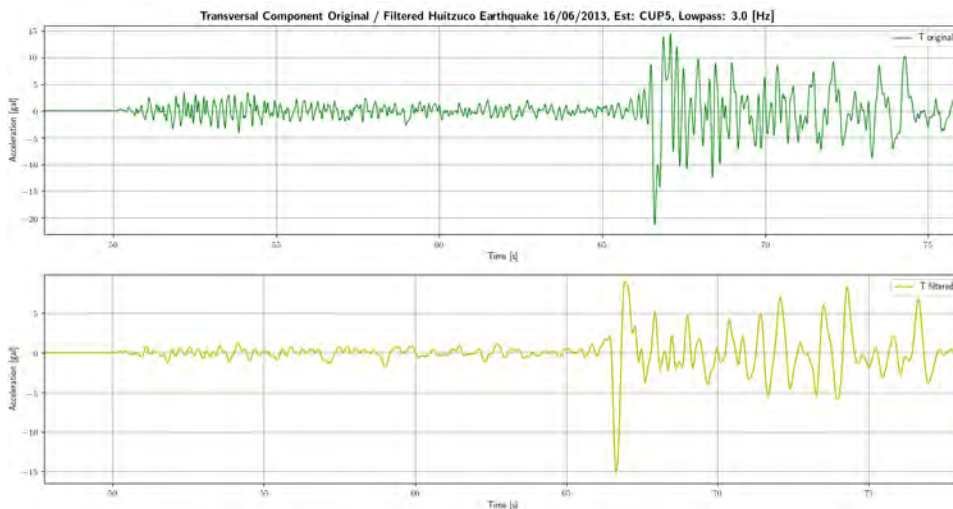


FIGURA 4.33: Acercamiento a una ventana de la componente radial del acelerograma en la estación CUP5. Se compara la señal original contra la señal filtrada, respectivamente

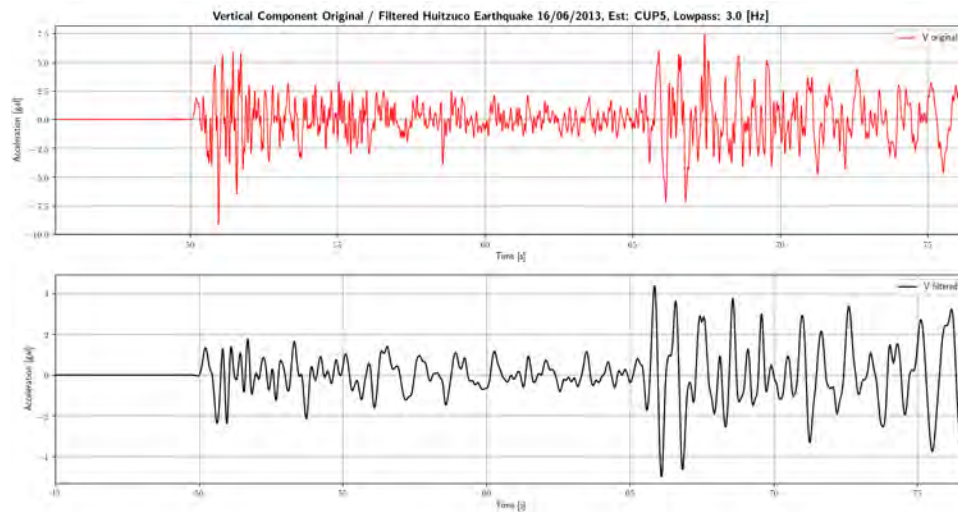


FIGURA 4.34: Acercamiento a una ventana de la componente radial del acelerograma en la estación CUP5. Se compara la señal original contra la señal filtrada, respectivamente

Estas características se muestran consistentes en las demás estaciones de suelo firme, como las del Cerro de la Estrella (CE18), Cerro del Peñón (CP28), Tacubaya (TACY) y Azcapotzalco (GR27) con variaciones de amplitud debidas posiblemente a la atenuación geométrica de energía elástica. Con los datos provenientes de dichas estaciones se *construye* el movimiento en la interfaz del valle aluvial con el semiespacio, en cada nodo de la malla. Se realiza una *sectorización del modelo del valle aluvial* con base en la latitud de las 5 estaciones empleadas. Esto se realiza para darle una mayor variabilidad a las formas de onda P y S extraídas. Estas formas de onda no son más que los primeros dos a tres segundos de los arribos de cada una de las fases P y S, representando de una manera práctica una señal más realista con información implícita de la fuente y el medio de propagación. Esta aproximación de la cinemática en la interfaz se sustenta bajo la consideración de una tierra homogénea en la cual la distancia entre la fuente y cada una de los nodos en la malla se considera como la trayectoria de un rayo. Las propiedades típicas del semiespacio que se tomaron en cuenta para la simulación son los siguiente: $\alpha = 8\text{km/s}$, $\beta = 6\text{km/s}$ y $\rho = 2.67\text{g/cm}^3$. Bajo las consideraciones anteriores es posible calcular la diferencia de tiempo de llegada de la onda Δt_i^{inc} , así como el factor de atenuación geométrico (SpG_i) en cada nodo:

$$SpG_i = \frac{R_{ref}}{R_i} \quad (4.3)$$

El tiempo de arribo de la onda en cada nodo se calcula de la siguiente forma:

$$\Delta t_i^{inc} = \frac{R_i - R_{ref}}{\alpha \parallel \beta}$$

$$t_i^{inc} = t_{ref}^{inc} + \Delta t_i^{inc} \quad (4.4)$$

donde R_i es la distancia fuente-nodo en profundidad del modelo, R_{ref} es la distancia hipocentral a las estaciones de referencia y t_{ref}^{inc} es el tiempo de arribo para onda P y S. Dado que se tienen registros de aceleración y el método VPM requiere de valores de velocidad y desplazamiento, se realiza una integración por medio de la regla trapezoidal con una previa corrección de línea base y la aplicación de un filtro pasa altas con frecuencia de corte de 0.1 [Hz].

En las figuras 4.35 y 4.36 se presentan los resultados obtenidos sobre los mismos perfiles que en el caso del movimiento impuesto en la interfaz del modelo con el pulso de Ricker. La respuesta que se observa en esa región del Norte-Centro del valle (figura 4.18) presenta una gran similitud en la distribución del desplazamiento dada la incidencia de una onda SV, de manera relevante en las componentes radial y vertical. La propagación de energía en los segundos subsecuentes sugiere que se trata de ondas de Rayleigh propagándose en ese estrato de espesor importante de materiales semientarios. Se alcanza a observar cierta evidencia del movimiento en la componente transversal por efecto de los 7° grados promedio de azimut que presenta la propagación de la energía elástica desde la fuente en Huitzuco. Se aprecia que el efecto de las ondas SH es mayor en la región sur que corresponde a la zona de los lagos de Xochimilco y Chalco. Nótese que la amplitud y posterior efecto de las ondas P en los primeros 20 segundos del movimiento es poco relevante en cualquiera de las tres componentes.

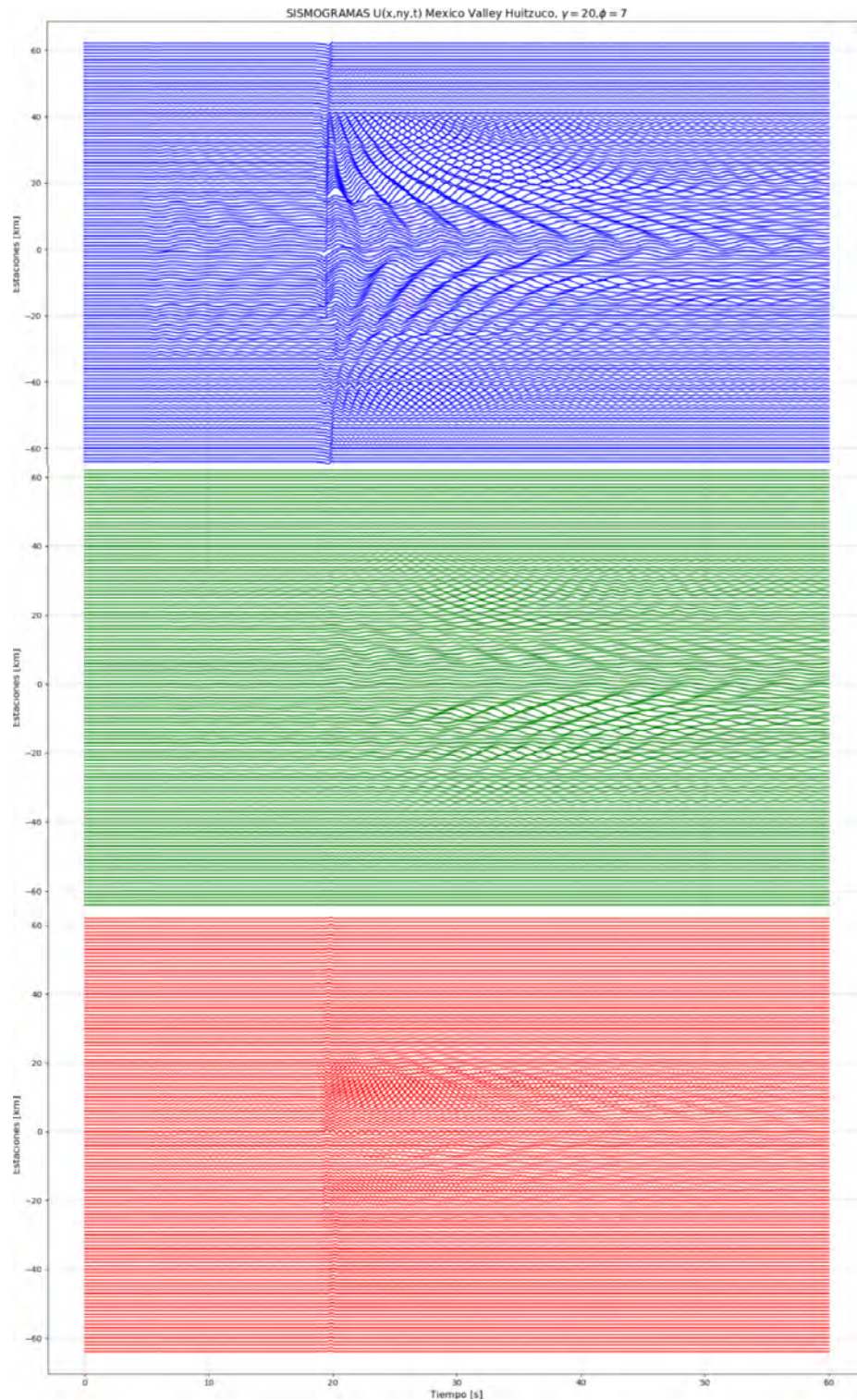


FIGURA 4.35: Sismogramas de desplazamiento para incidencia aproximada $\gamma \approx 20$ y con ángulo azimutal promedio $\phi = 7$. La excitación en la base del modelo es producida por datos del sismo de Huitzuco con fecha del 16 de junio de 2013. En orden descendente se presentan los campos de desplazamiento:

$$U(x, ny, t), V(x, ny, t), W(x, ny, t)$$

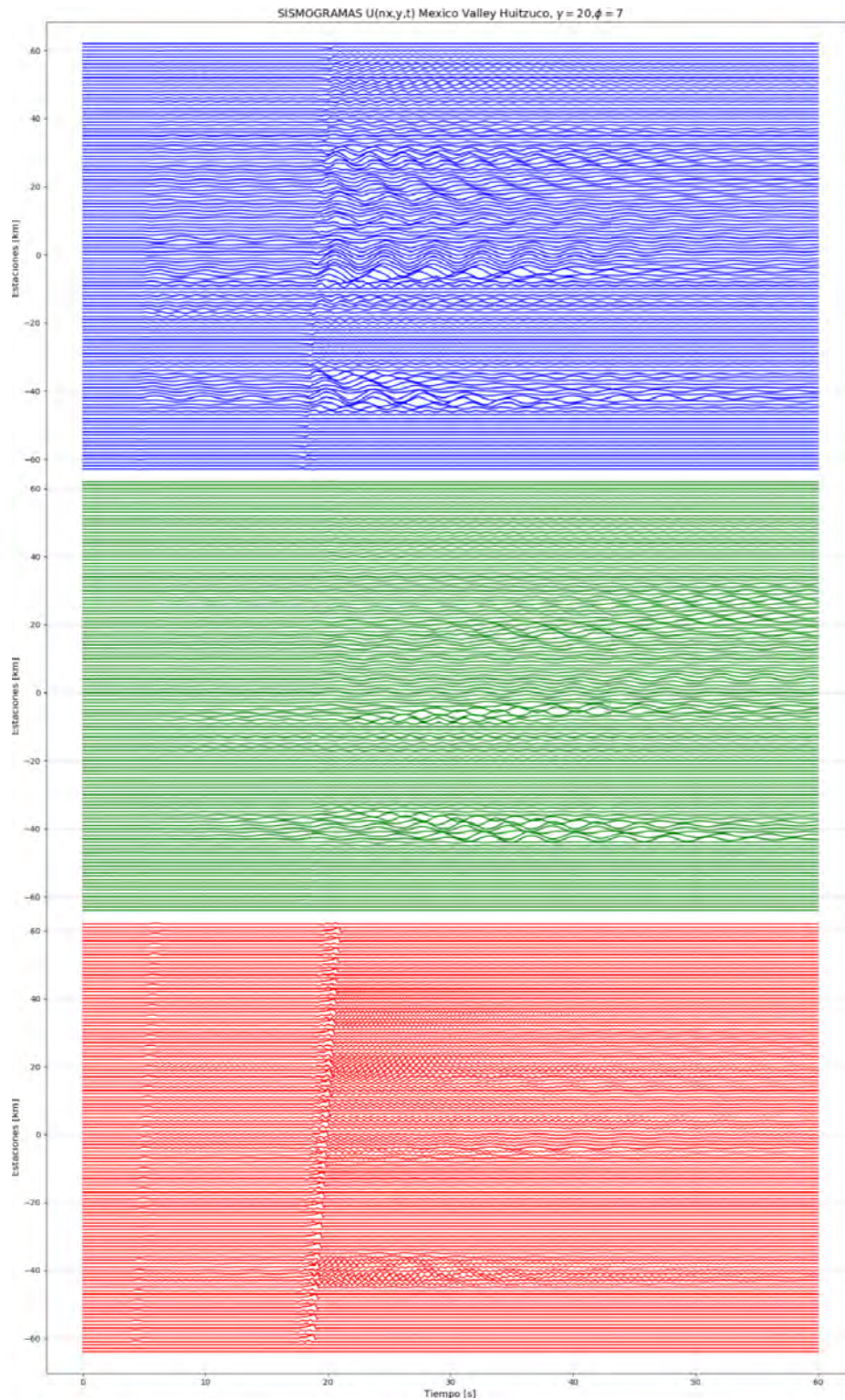


FIGURA 4.36: Sismogramas de desplazamiento para incidencia aproximada $\gamma \approx 20$ y con ángulo azimutal promedio $\phi = 7$. La excitación en la base del modelo es producida por datos del sismo de Huitzucó con fecha del 16 de junio de 2013. En orden descendente se presentan los campos de desplazamiento:

$$U(nx, y, t), V(nx, y, t), W(nx, y, t)$$

El siguiente ejemplo muestra la respuesta del valle a lo largo de un perfil transversal que atraviesa la región sur de la cuenca que corresponde a los lagos de Xochimilco y Chalco. Asimismo, se presenta un perfil longitudinal que pasa aproximadamente por la zona de transición poniente de la cuenca del valle de México. La simulación presenta una respuesta esperada para la zona de los antiguos lagos, donde se presenta una amplificación marcada tanto de ondas primarias y secundarias, dando lugar a una relativa larga duración del movimiento superficial para la componente radial y vertical. El movimiento horizontal transversal, aunque de menor amplitud, también se preserva por varios segundos (figura 4.37). Para el perfil a lo largo de la zona de transición poniente, se observa un movimiento menos importante que en el del sur de la cuenca, en el que se distingue que la energía se preserva por mayor tiempo en la parte donde la profundidad del modelo incrementa de 20 a 50 m de espesor (figura 4.38).

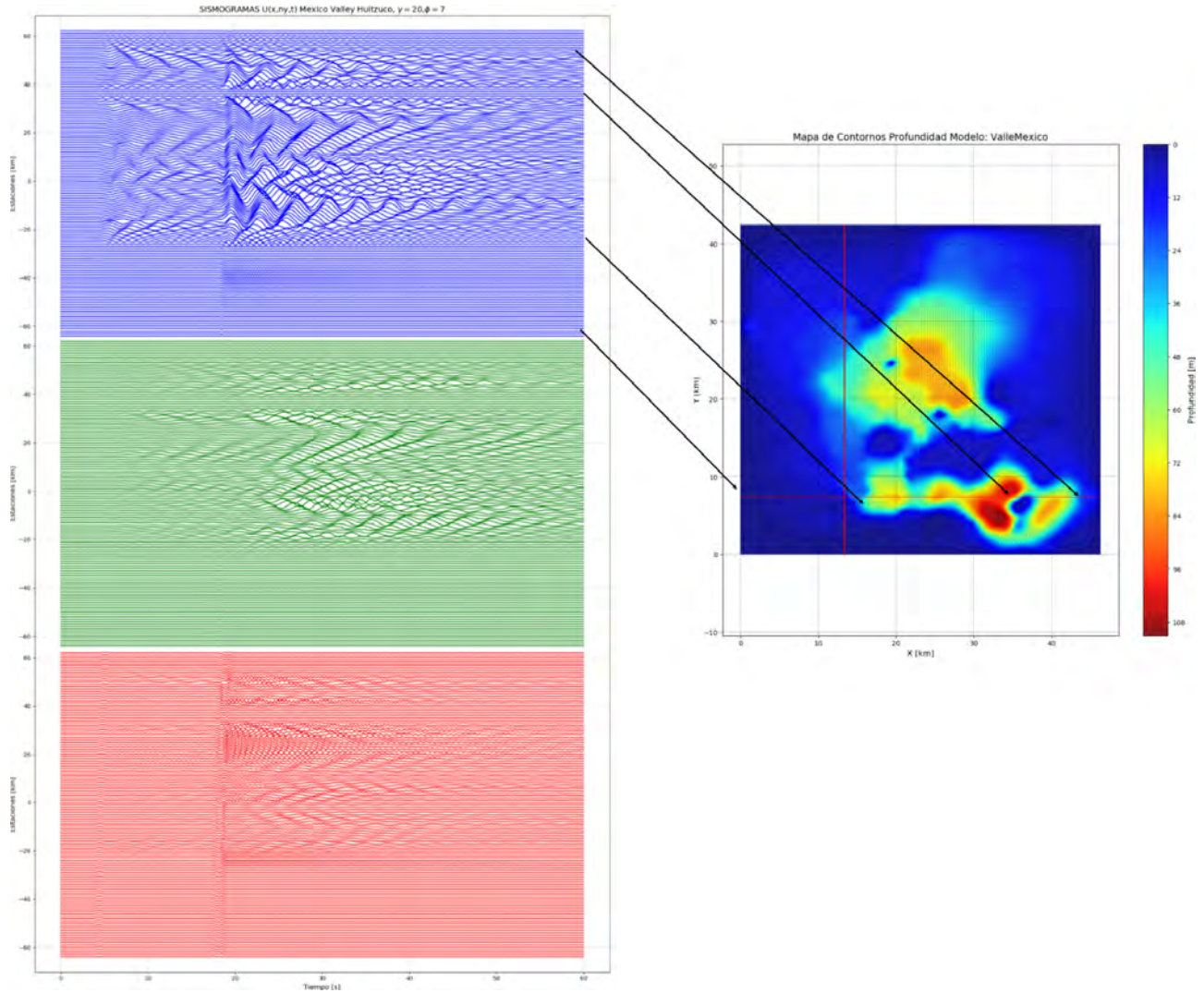


FIGURA 4.37: Sismogramas de desplazamiento para incidencia aproximada $\gamma \approx 20$ y con ángulo azimutal promedio $\phi = 7$. La excitación en la base del modelo es producida por datos del sismo de Huitzuco con fecha del 16 de junio de 2013. Perfil a lo largo de la región sur del Valle de México que atraviesa los antiguos lagos de Xochimilco y Chalco. En orden descendente se presentan los campos de desplazamiento: $U(x, ny, t)$, $V(x, ny, t)$, $W(x, ny, t)$

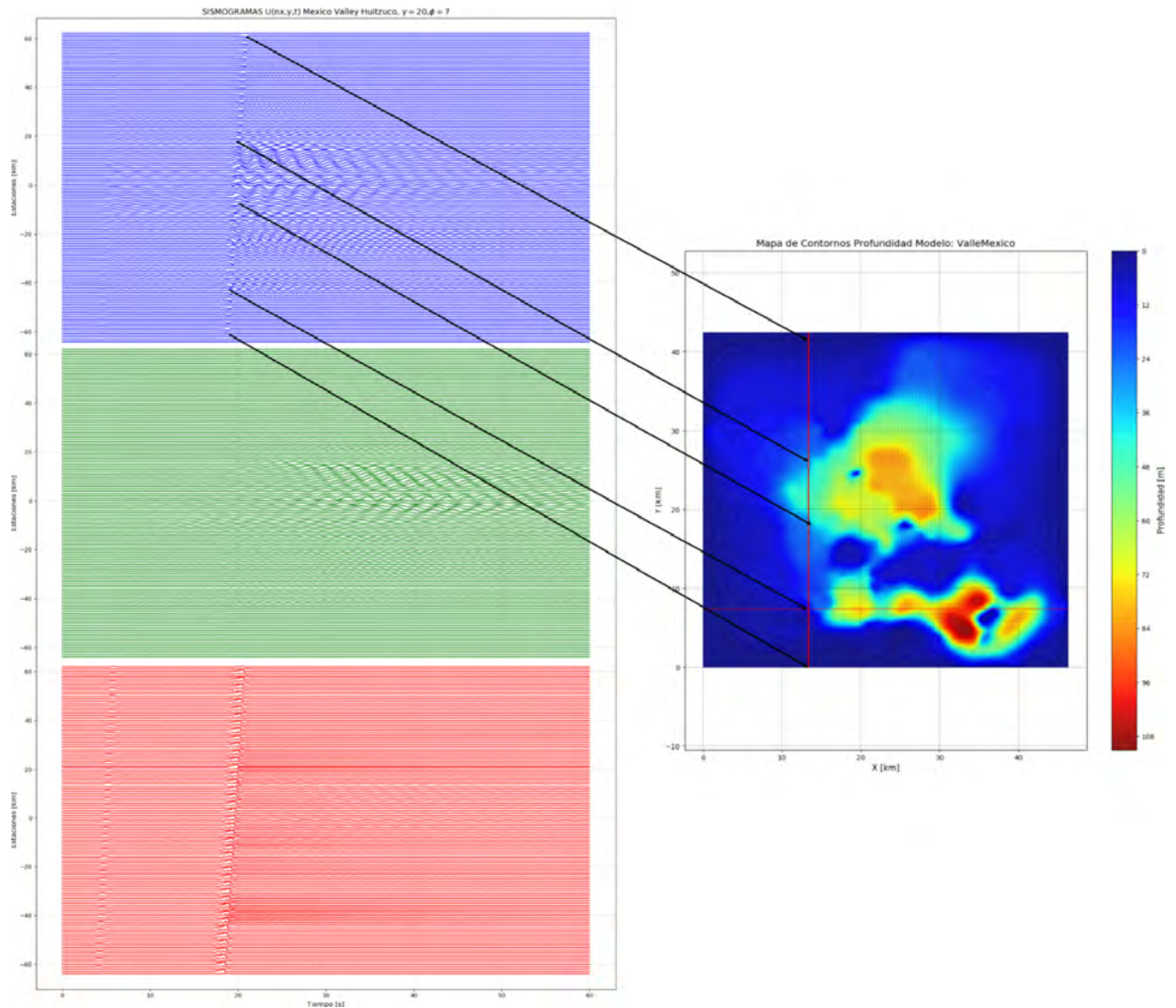


FIGURA 4.38: Sismogramas de desplazamiento para incidencia aproximada $\gamma \approx 20$ y con ángulo azimutal promedio $\phi = 7$. La excitación en la base del modelo es producida por datos del sismo de Huitzucó con fecha del 16 de junio de 2013. Perfil a lo largo de la zona de transición poniente del Valle de México. En orden descendente se presentan los campos de desplazamiento:

$$U(nx, y, t), V(nx, y, t), W(nx, y, t)$$

Finalmente, se presentan instantáneas del movimiento de la cuenca sedimentaria, con el fin de tener una apreciación espacial global de la simulación (figuras 4.39, 4.40 y 4.41).

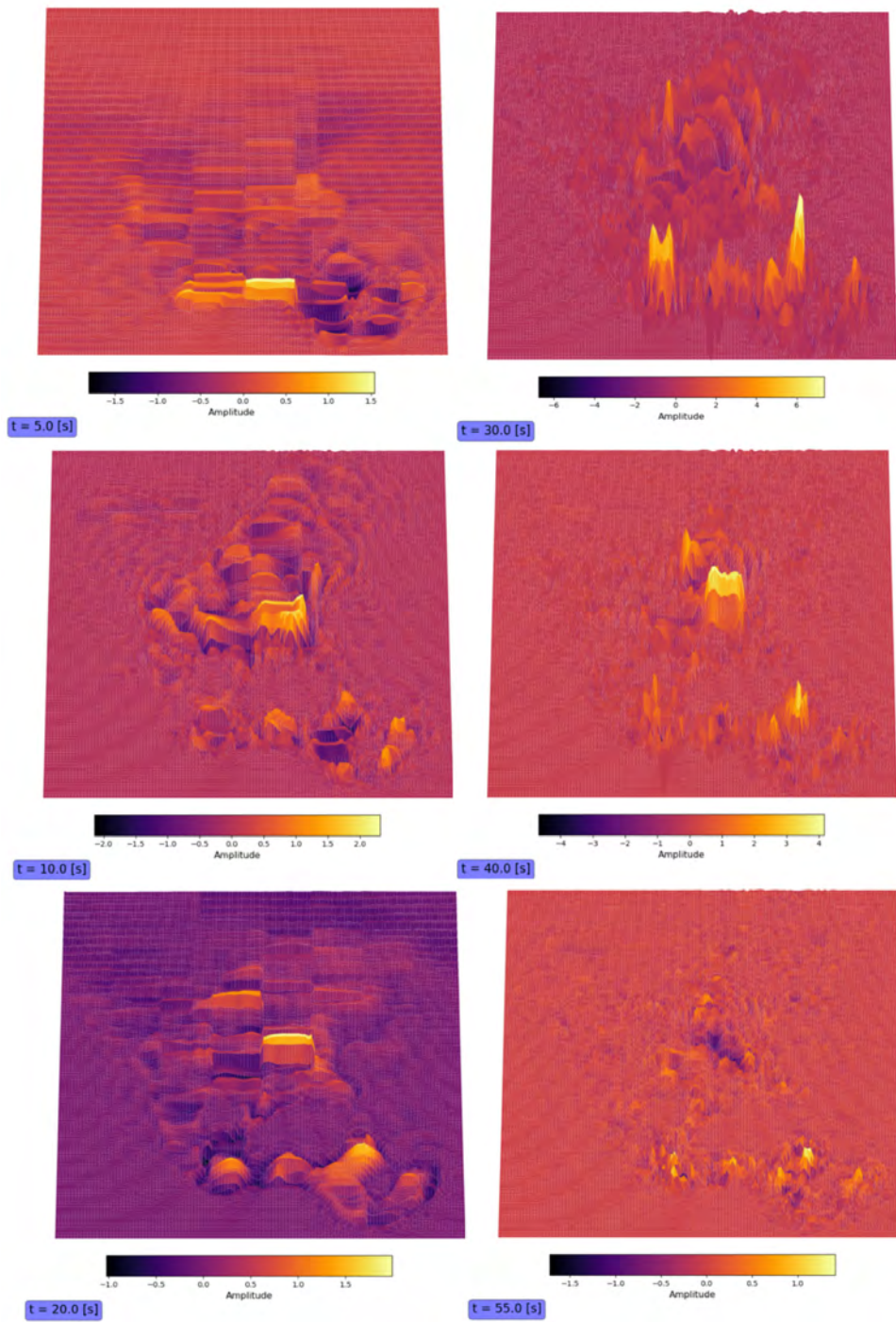
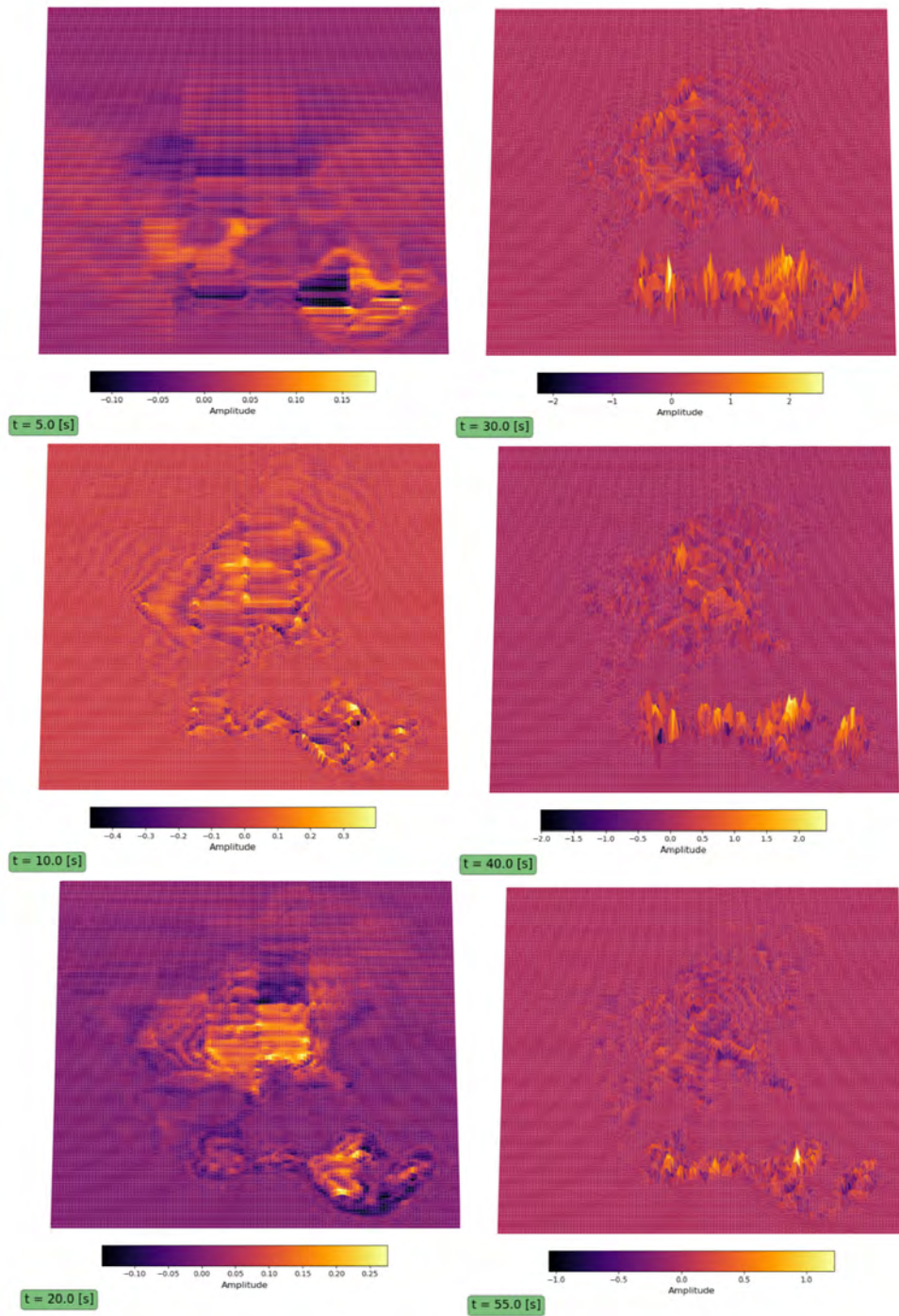


FIGURA 4.39: Superficies del campo de desplazamiento horizontal $U(x, y, z, t)$.

FIGURA 4.40: Superficies del campo de desplazamiento horizontal $V(x, y, z, t)$.

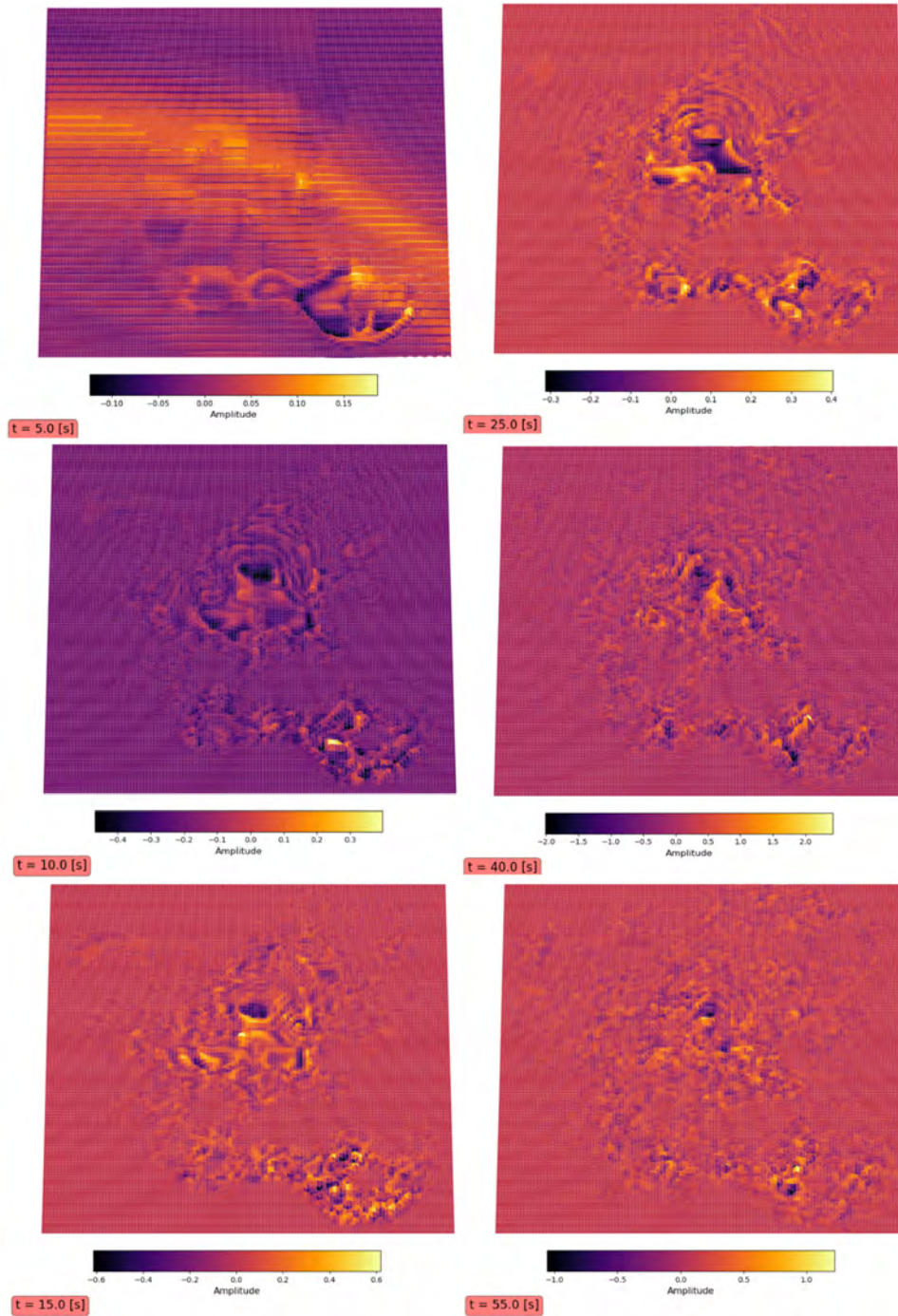


FIGURA 4.41: Superficies del campo de desplazamiento vertical $W(x, y, z, t)$.

Los datos sísmicos fueron proporcionados por la Red Acelerográfica del Instituto de Ingeniería (RAII-UNAM), producto de las labores de instrumentación y procesamiento de la Unidad de Instrumentación Sísmica, así como de la Red Acelerográfica de la Ciudad de México del Centro de Instrumentación y Registro Sísmico, A. C. (RACM - CIRES). Los datos son distribuidos a través del Sistema de Base de Datos Acelerográficos en web: <http://aplicaciones.iingen.unam.mx/AcelerogramasRSM/>

<http://www.cires.org.mx/>

Conclusiones y recomendaciones

5.1 Conclusiones

Se define una serie de alcances y limitaciones para el Método de Proyección Variacional Optimizado, que lo sitúan como una metodología práctica para modelar, en una aproximación exploratoria, la respuesta sísmica de medios geológicos irregulares de dimensiones espaciales importantes, restringido a modelos con variación de profundidad suave y relativamente someros, que como se ha visto, pueden representar ejemplos realistas como la cuenca del Valle de México.

Con respecto al grado de exactitud obtenido respecto de otros métodos rigurosos como IBEM (Sánchez-Sesma y Luzón, 1995) o las funciones de Green (Kawase y Aki, 1989), la comparación de los resultados resulta satisfactoria, ya que se alcanza a reproducir la generación de ondas superficiales y efectos de borde, así como efectos por dispersión de energía en cuencas con geometría irregular en tres dimensiones. El refinamiento de la aproximación mediante el VPM es susceptible de modificarse mediante la variación de diferentes parámetros propios del método, como el número de modos implícitos en la variación de la profundidad mediante la familia de funciones de prueba propuesta, en combinación con el factor de atenuación γ , el espaciamiento en tiempo dt y en espacio $d\vec{x}$. Se encontró que el método es sensible al incremento en el número de modos, afectando directamente al tiempo de cálculo y provocando la aparición de oscilaciones espurias que no representan la cinemática de la respuesta elástica de una cuenca aluvial. En este sentido, la prueba paramétrica determinó una configuración óptima para evitar en la mayor medida la distorsión numérica sobre la simulación del fenómeno sísmico.

Se realizó una representación exitosa de la respuesta sísmica del Valle de México mediante dos propuestas para el movimiento impuesto en la interfaz cuenca-semiespacio: la primera siendo puramente sintética y la segunda por medio de los datos del sismo de Huitzuco del 16 de junio de 2013. En el primer caso, se convolucionan un pulso de Ricker en frecuencias características de $0.25 - 0.5[Hz]$, con las respectivas funciones de transferencia en cada punto de la base del modelo. Con esta aproximación, es posible identificar patrones de ondas

superficiales generadas dentro de la cuenca, así como efectos de las irregularidades laterales del modelo, destacándose ampliaciones en las componentes sísmicas correctas de acuerdo al tipo de onda incidente. Dicha ampliación de la energía se presenta en las regiones donde la profundidad de sedimentos es mayor, asimismo, se observa que la tasa de disipación de energía es baja, causando que reverberaciones de alta frecuencia se conserven durante más tiempo del que se esperaría. Dicho efecto tiene su origen en la formulación de base rígida con el que se diseña el método, que no da lugar a una eficiente absorción de la energía, apreciándose en modelos 2D y 3D. Como se ha mencionado anteriormente, dicha limitación se regula directamente con una configuración adecuada de los parámetros en el VPM. Más allá, se implementó una alternativa del campo forzante, haciendo uso de datos del sismo de Huitzoco 2013, a través de diversas estaciones sobre terreno firme para evitar lo más posible efectos de sitio en las señales. Se utilizaron de dos a tres segundos de las primeras incidencias de las ondas P y S, para recetar el movimiento en la interfaz del valle aluvial - semiespacio. Con esta aproximación más realista se observó que el movimiento predominante corresponde aproximadamente al de la interacción con una onda SV, destacando que existen efectos por azimut e irregularidad lateral. Los sismogramas obtenidos a partir del perfil que pasa a través de los lagos de Xochimico y Chalco muestran la importancia de la profundidad de los sedimentos en la ampliación del movimiento sísmico. Se observa que las ondas tardan relativamente en perder la energía, generando nuevos patrones de ondas superficiales.

En términos de eficiencia, es posible afirmar que el método ofrece una gran factibilidad de aplicarse a problemas de naturaleza tridimensional y de geometría relativamente compleja, cuya solución para una malla suficientemente densa (decenas de miles de nodos) en la base del modelo, puede obtenerse en cuestión algunos minutos. Por ejemplo, para una malla de $128 \times 128 = 16384$ nodos representando los depósitos sedimentarios del Valle de México, tardó alrededor de 5 minutos de cálculo numérico, dando pauta a concluir que la optimización basada en la aplicación de programación unificada de arquitecturas (CUDA) fue exitosa. Aplicando dicho esquema computacional se obtuvo una aceleración del cálculo numérico al integrar en el diseño de los algoritmos, la arquitectura de las unidades de procesamiento gráfico (GPU). No obstante, se encuentran algunas limitaciones inherentes al uso de las GPU, siendo la principal aquella asociada al hardware en particular con el que se disponga, ya que cada generación de GPU tiene límites bien establecidos que a su vez restringirán el grado de optimización en tiempo de cálculo alcanzable. Para el caso de la unidad empleada en este trabajo (NVIDIA®GEFORCE GTX 1050), cumplió satisfactoriamente con las expectativas dados los resultados obtenidos en cada una de las simulaciones tridimensionales implementadas, cuyo rango de rendimiento en tiempo de cálculo se encuentra entre 1 y 5 minutos para las mallas más densas.

5.2 Recomendaciones

Establecidos los alcances, límites y resultados obtenidos queda afirmar que se abre un gran abanico de oportunidades para mejorar y llevar al método a otro nivel de aplicabilidad, así

como el esquema de optimación aplicado. En este sentido, es posible incrementar la complejidad del medio modelado, al incorporar una estratificación con variaciones de profundidad suaves y autosemejantes a estratos sobreyacientes. Pensando en modelos de cuencas aluviales, ha sido común encontrar variaciones de materiales a través de zonas de transición hacia materiales rígidos propios de una zona montañosa. La inclusión de estratos conlleva una modificación directa en el tratamiento de la integración por partes a lo largo de la profundidad que define la forma débil de la ecuación de elasticidad, alterándose las ecuaciones que definen la ortogonalidad, normalización y la matriz de acoplamiento entre modos (ecuaciones 3.11 y 3.12).

Para mejorar la parte de la absorción de energía, queda estudiar la posibilidad de implementar modelos reológicos más refinados para medios elásticos como el *cuerpo de Zener o de sólido lineal*, por ejemplo, el cual permite una respuesta instantánea de la aplicación de un esfuerzo aunque tenga una deformación nula. Conceptualmente consiste en colocar en paralelo un sólido de Hooke a un cuerpo de Maxwell (sistema en serie compuesto por un amortiguador y un sólido de Hooke), ayudando a remover la deformación acumulada. La respuesta del sistema se traduce en un incremento paulatino de la deformación desde cero, con una liberación gradual del esfuerzo del resorte conectado en serie. En el límite, el esfuerzo relajado, se apreciará en el resorte conectado en paralelo con el cuerpo de Maxwell (Moczo et al., 2014).

Con respecto a las ventajas que ha ofrecido la programación en paralelo mediante CUDA en la optimación del método VPM es posible afirmar que es un procedimiento altamente recomendable para incrementar el rendimiento de los métodos numéricos a gran escala, sin necesidad de realizar una inversión económica exorbitante. En este sentido, una propuesta es conformar un arreglo de GPUs de características similares para llevar a cabo simulaciones basadas en métodos robustos que implican un costo computacional elevado, como el caso de las diferencias finitas, elementos finitos, volumen finito o por funciones de base radial. Evidentemente el manejo de arreglos de GPUs significa incrementar la habilidad de la codificación de los algoritmos y el manejo de las diferentes clases de memoria que interactúan en los procesos, por ejemplo.

5.3 Reconocimientos

El tema de la tesis fue propuesto por el Dr F. J. Sánchez Sesma y supervisada por él y los Dres. E. Rubio Acosta y J. Tago Pacheco quienes formaron el comité tutor. La Dra. M. Baena Rivera y el Dr. L. Ramírez Guzmán se incorporan como jurados del examen de grado. A todos ellos mi aprecio y reconocimiento por sus observaciones y sugerencias. El Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) me otorgó la beca de maestría para el posgrado y la DGAPA-UNAM me ha apoyado con una beca de conclusión de estudios mediante el proyecto PAPIIT IN1107720.

Bibliografía

- Aki, K. and P. G. Richards (1980). *Quantitative Seismology. Theory and Methods*. Freeman and Company.
- Avila-Carrera, R. and F. J. Sánchez-Sesma (2013). "The Variational Projection Method (VPM): A modern technique to simulate the seismic response of shallow alluvial valleys." In: *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 50, pp. 134–142.
- Avila-Carrera, R., V. J. Palencia, and F. J. Sánchez-Sesma (2002). "El VPM: Una Técnica Variacional para Simular la Respuesta Sísmica de Valles Aluviales Somero." In: *Revista de Ingeniería Sísmica* 67, pp. 79–100.
- Ciarlet, P. G. and J. L. Lions (2003). *Handbook of Numerical Analysis. Vol. II Finite Element Methods (Part 1)*. Elsevier Science. North Holland.
- Cook, S. (2013). *CUDA Programming. A Developer's Guide to Parallel Computing with GPU's*. Elsevier Morgan Kaufmann.
- Frankel, A. (1993). "Three-dimensional simulations of ground motion in the San Bernardino Valley, California, for hypothetical earthquakes on the San Andreas Fault." In: *Bulletin of Seismological Society of America* 83, pp. 1020–1041.
- Fung, Y. C. (1994). *A First Course in Continuum Mechanics*. Prentice Hall.
- Furumura, T. and H. Takenaka (1996). "2.5-D modelling of elastic waves using the pseudospectral method." In: *Geophysical Journal International* 124, pp. 820–832.
- Gelfand, I. M. and S. V. Fomin (1963). *Calculus of Variations*. Prentice Hall Inc.
- Golub, G. and J. M. Ortega (1993). *Scientific Computing. An Introduction with Parallel Computing*. Academic Press, Inc.
- Juárez-Badillo, E. and A. Rico-Rodríguez (2016). *Mecánica de Suelos. Tomo 1: Fundamentos de la Mecánica de Suelos*. Limusa.
- Kawase, H. and K. Aki (1989). "A study on the response of a soft basin for incident S, P and Rayleigh waves with spectral reference to the long duration observed in Mexico City." In: *Bulletin of Seismological Society of America* 79, pp. 1361–1382.
- Kosloff, R. and D. Kosloff (1986). "Absorbing Boundaries for Wave Propagation Problems." In: *Journal of Computational Physics* 63, pp. 363–376.

- Krasnov, M. L., G. I. Makarenko, and A. I. Kiseliiov (1976). *Cálculo Variacional. Ejemplos y problemas*. Editorial Mir.
- Langtangen, H. P. and K. A. Mardal (2016). *Introduction to Numerical Methods for Variational Problems*. University of Oslo, Finland.
- Levi, Enzo (1980). *Teorías y Métodos de las Matemáticas Aplicadas*. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Lontsi, A. M., A. García-Jerez, J. C. Molina-Villegas, F. J. Sánchez-Sesma, C. Molkenhth, M. Ohrnberger, F. Krüger, R. Wang, and D. Fäh (2019). "A generalized theory for full microtremor horizontal-to-vertical [H/V(z,f)] spectral ratio interpretation in offshore and onshore environments." In: *Geophysical Journal International*.
- Marsal, R. J. and M. Mazari (1959-2016). *El Subsuelo de la Ciudad de México*. Instituto de Ingeniería, UNAM.
- Martínez-González, J. A., J. Lermo, F. Vergara-Huerta, and E. Ramos-Pérez (2015). "Avances en la zonificación sísmica de la Ciudad de México y zona de Chalco, Edo. de Méx., propuesta de nuevo mapa de periodos dominantes para las NTC para diseño por sismo del reglamento del D.F." In: *XX Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica*.
- Moczo, P., J. Kristek, and M. Galis (2014). *The Finite Difference Modelling of Earthquake Motions. Waves and Ruptures*. Cambridge.
- Noye, J. (1984). *Computational Techniques for Differential Equations*. North Holland Mathematical Studies Elsevier.
- Perrot, J., F. J. Sánchez-Sesma, K. Irikura, J. L. Rodríguez-Zúñiga, and R. Ávila (1995). "Simulation of seismic reponse of Osaka basin during the January 17, 1995 Kobe earthquake using the Variational Projection Method." In: *Memorias AGU Fall Meeting*.
- Quarteroni, A. and A. Valli (2008). *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer Series in Computational Mathematics.
- Ruetsch, G. and M. Fatica (2014). *CUDA Fortran for Scientists and Engineers. Best Practices for Efficient CUDA Fortran Programming*. Elsevier. Morgan Kauffman.
- Sanders, J. and E. Kandrot (2011). *CUDA by Example. An Introduction to General-Purpose GPU Programming*. Addison-Wesley.
- Sánchez-Sesma, F. J. (1987). "Site effects on strong ground motion." In: *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 6.2, pp. 124–132.
- Sánchez-Sesma, F. J. and F. Luzón (1995). "Seismic response of three-dimensional alluvial valleys for incident P, S and Rayleigh waves." In: *Bulletin of Seismological Society of America* 85, pp. 269–284.

Stein, S. and M. Wysession (2007). *An Introduction to Seismology, Earthquakes and Earth Structure*. Blackwell Publishing.