



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

RESPUESTA MAGNETO-PLASMÓNICA DE
NANOSISTEMAS ESFÉRICOS DE INSB

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

ALONSO MÁRQUEZ HERNÁNDEZ

TUTOR

DR. RAÚL PATRICIO ESQUIVEL SIRVENT



CIUDAD UNIVERSITARIA, Cd. Mx., 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A Ana Elia, mi mamá.

Agradecimientos

No puedo comenzar los agradecimientos de otra forma más que agradeciéndole a mi mamá, **Ana Elia**, por todo el apoyo que me ha dado a través de los años. Gracias por motivarme a ser cada día mejor, no solo como estudiante, hijo o amigo, sino como persona. Gracias por siempre creer en mi y apoyarme en todo lo que he decidido hacer. Lo más importante, y lo que nunca podré agradecer lo suficiente, gracias por todo el amor.

A mis dos hermanos mayores, **Daniel** y **Carla**, gracias por siempre estar ahí para mí. Gracias por mostrarme que el camino lo hace uno mismo, y que no importa que suceda siempre nos tenemos uno al otro. Dicen que uno no aprende en cabeza ajena, pero he aprendido de ustedes como no tienen idea y eso siempre se los agradeceré.

A mi papá, **Antonio**, gracias por el respaldo todos estos años. Gracias por enseñarme lo que se puede lograr a través del esfuerzo y el trabajo. Gracias por seguir apoyándome para lograr mis metas.

Al **Dr. Raúl Patricio Esquivel Sirvent**, gracias por brindarme su apoyo y experiencia desde que comencé mi servicio social y hasta el día de hoy. Gracias por ayudarme a conocer un poco más del mundo de la investigación científica. Gracias por su trabajo como tutor de esta tesis.

Un agradecimiento muy grande al **Dr. Wolf Luis Mochán Backal**, al **Dr. Augusto García Valenzuela**, al **Dr. Alejandro Reyes Coronado** y a la **Dra. Roxana Mitzayé del Castillo Vázquez** por su apoyo y sus valiosos comentarios en la revisión de esta tesis. Gracias por su tiempo y conocimiento.

A **mi familia**, gracias por todo el aliento y sustento. Gracias por mostrarme el valor de la unidad, y que sin importar el tiempo y la distancia, la familia siempre está.

Oscar, Grace y Fercho , gracias por estar conmigo estos cuatro años. Gracias por todas sus palabras, por todo su apoyo y por todos los momentos que hemos compartido. Gracias por permitirme crecer junto a ustedes, académica y personalmente.

Dany, Scar y Liz, gracias por las risas, por las caídas y los logros que hemos vivido juntos. No importa cuanto tiempo pase yo sé que ustedes están ahí para mí y que yo estaré ahí para ustedes.

Juan Pablo, gracias por la complicidad y la felicidad que hemos compartido los últimos dos años. Gracias por permitirme estar en tu vida y hacerme saber que siempre puedo contar contigo. Gracias por siempre impulsarme a seguir y superarme. Gracias por dejarme ser quien soy y quererme así. Gracias por todo.

Gracias a todos mis profesores por su dedicación y su labor, a través de ustedes no solo he adquirido conocimiento sobre distintas disciplinas y áreas de estudio, sino que también han logrado contagiarme la emoción por la docencia. Cada uno de ustedes me ha impulsado a seguir construyendo y compartiendo el conocimiento.

Gracias a la UNAM, por todas las oportunidades que me ha dado y por la excelente formación que he recibido.

Finalmente, gracias al **Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT)** por el apoyo dado dentro del proyecto **Fricción cuántica en estado sólido** con clave **IN110819** para el desarrollo y conclusión de esta tesis.

Resumen

En este trabajo se presenta un estudio de la respuesta magnetoplasmónica de nanosistemas esféricos de InSb en el rango de THz, el estudio se hace a través de un modelo de respuesta lineal bajo campos eléctricos considerando un tensor de función dieléctrica anisotrópico debido a un campo magnético externo. Para partículas esféricas se utiliza el formalismo de esparcimiento para partículas pequeñas comparadas con la longitud de onda, mientras que para los sistemas más complejos, como cascarones, se hace una extensión usando la polarizabilidad de esferas anidadas.

En virtud de que se tiene un tensor de función dieléctrica anisotrópico, se decidió utilizar el sistema de ejes principales para calcular la respuesta del material como función del campo magnético por medio de la eficiencia de extinción de éste.

Para esferas, se encontró que la eficiencia de extinción presenta una separación en las resonancias en presencia de un campo magnético externo. Se halló que la separación de la resonancia estaba asociada a los eigenvalores del tensor de función dieléctrica, y que la separación muestra un comportamiento lineal y prácticamente simétrico respecto a la resonancia sin campo magnético, fenómeno que recuerda a la separación de energías exhibida en el efecto Zeeman.

Para cascarones, se observaron respuestas similares, donde además se estudió el cambio de éstas al modificar los parámetros propios del sistema.

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	IV
1. Introducción	1
2. Función dieléctrica	4
2.1. Modelo de Drude	5
2.2. Drude-Lorentz	7
2.3. Función dieléctrica por vibraciones en el cristal	9
2.4. Magnetoplasmones	11
3. Esparcimiento y absorción para partículas esféricas	13
3.1. Aproximación dipolar	16
3.2. Solución de Mie	18
4. Esfera anisotrópica	23
4.1. Ejes principales	23
4.2. Campo magnético	25
5. Esfera de n-InSb	29
5.1. Función dieléctrica	29
5.2. Polarizabilidad	33
5.3. Eficiencias de absorción y esparcimiento	34
5.4. Contribución electrónica y fonónica	38
5.5. Eigenvalores	40
5.6. Separación de las resonancias como función del campo magnético B	41
6. Cascarón de n-InSb	45
6.1. Cálculos y Resultados	45

7. Conclusiones y comentarios finales

49

Índice de figuras

2.1. Parte real de la función dieléctrica para oro y plata calculada utilizando el modelo de Drude.	7
2.2. Parte imaginaria de la función dieléctrica para oro y plata calculada utilizando el modelo de Drude.	7
2.3. Parte real de la función dieléctrica en el modelo de Drude-Lorentz para los parámetros $\omega_p^2/\omega_0^2 = 2$ y $\omega_0/\gamma = 3$	8
2.4. Parte imaginaria de la función dieléctrica en el modelo de Drude-Lorentz para los parámetros $\omega_p^2/\omega_0^2 = 2$ y $\omega_0/\gamma = 3$	9
3.1. Esquema de una partícula arbitraria sobre la cual incide un campo electromagnético, E_i representa el campo incidente y E_s el campo esparcido.	13
3.2. (a) Eficiencia de extinción para una esfera de plata de $7nm$ de radio bajo la aproximación dipolar y utilizando el formalismo de Mie. (b) Eficiencia de extinción para una esfera de plata de $20nm$ de radio bajo la aproximación dipolar y utilizando el formalismo de Mie. En ambos casos se utilizaron los datos de [23].	21
4.1. Esquema de una esfera sobre la que actua un campo magnético \vec{B} donde $\vec{B} = B\hat{z}$	25
5.1. Parte real de las componentes del tensor de función dieléctrica en el sistema de ejes principales en ausencia de campo magnético donde (a) ε'_1 , (b) ε'_3 y (c) ε'_2	30
5.2. Parte imaginaria de las componentes del tensor de función dieléctrica en el sistema de ejes principales en ausencia de campo magnético donde (a) ε'_1 , (b) ε'_3 y (c) ε'_2	30
5.3. Parte real de los componentes del tensor de función dieléctrica ε'_1 (azul) y ε'_2 (verde) bajo un campo magnético externo $B = 1T$, se comparan con ε_3 que no depende del campo magnético.	31

5.4. Parte imaginaria de los componentes del tensor de función dieléctrica ε'_1 (azul) y ε'_2 (verde) bajo un campo magnético externo $B = 1T$, se comparan con ε_3 que no depende del campo magnético.	32
5.5. Parte real de los componentes del tensor de función dieléctrica ε'_1 (azul) y ε'_2 (verde) para distintos valores del campo magnético externo B , se comparan con ε_3	32
5.6. Parte imaginaria de los componentes del tensor de función dieléctrica ε'_1 (azul) y ε'_2 (verde) para distintos valores del campo magnético externo B , se comparan con ε_3	33
5.7. Parte real de los componentes del tensor de polarizabilidad α'_1 (azul) y α'_2 (verde) para una esfera de $20nm$ de radio a distintos valores del campo magnético externo B , se comparan con α_3 que no depende del campo magnético.	34
5.8. Parte imaginaria de los componentes del tensor de polarizabilidad α'_1 (azul) y α'_2 (verde) para una esfera de $20nm$ de radio a distintos valores del campo magnético externo B , se comparan con α_3 que no depende del campo magnético.	35
5.10. Eficiencia de esparcimiento (Q_{sca}) para una esfera de n-InSb de $20nm$ de radio en ausencia de un campo magnético externo ($B = 0$).	35
5.9. Magnitud del parámetro de tamaño x y su cuadrado x^2 calculado para una esfera de 50 nm.	36
5.11. Eficiencia de absorción (Q_{sca}) para una esfera de n-InSb de $20nm$ de radio en ausencia de un campo magnético externo ($B = 0$).	36
5.12. Eficiencia de esparcimiento (Q_{sca}) para una esfera de n-InSb de $20nm$ de radio a distintos valores de $B \in [0, 1T]$	37
5.13. Eficiencia de absorción (Q_{abs}) para una esfera de n-InSb de $20nm$ de radio a distintos valores de $B \in [0, 1T]$	37
5.14. Eficiencia de absorción (Q_{abs}) para una esfera de n-InSb de $20nm$ de radio para $B = 0$, se compara la contribución electrónica y fonónica.	39
5.15. Eficiencia de absorción (Q_{abs}) para una esfera de n-InSb de $20nm$ de radio para $B = 0.6T$, se compara la contribución electrónica y fonónica.	39
5.16. Eficiencia de absorción (Q_{abs}) para una esfera de n-InSb de $20nm$ de radio para $B = 0$, se compara la contribución de los eigenvalores ε'_1 y ε'_2 .	40
5.17. Eficiencia de absorción (Q_{abs}) para una esfera de n-InSb de $20nm$ de radio para $B = 0.6$ T, se compara la contribución de los eigenvalores ε'_1 y ε'_2	41

5.18. Eficiencia de absorción (Q_{abs}) para una esfera de n-InSb de $20nm$ de radio a distintos valores de $B \in [0, 1T]$, usando $\omega' = \omega - \omega_o$, la frecuencia recorrida.	42
5.19. Separación de las frecuencias de resonancia de la eficiencia de absorción calculada encontrada a partir de los máximos locales encontrados para la resonancia electrónica.	42
5.20. Separación de las frecuencias de resonancia de la eficiencia de absorción calculada a partir de los distintos eigenvalores para la resonancia electrónica.	43
5.21. Eficiencia de absorción normalizada para las frecuencias de resonancia a distintos valores de $B \in [0, 1T]$	44
6.1. Esquema de un cascaron esférico de dos materiales, el radio total del cascaron es r_s que contiene una esfera concéntrica de radio r_c	46
6.2. Eficiencia de absorción (Q_{abs}) para un cascarón esférico de n-InSb de 30 nm de radio variando el radio del núcleo (r_c) en ausencia de un campo magnético externo. ($B = 0$)	46
6.3. Eficiencia de absorción (Q_{abs}) para un cascarón esférico de n-InSb de 30 nm de radio variando el radio del núcleo (r_c) en presencia de un campo magnético externo. ($B = 0.6T$)	47
6.4. Eficiencia de absorción (Q_{abs}) para un cascarón esférico de n-InSb de 30 nm de radio con un nucleo de agua de $24nm$ de radio en presencia de un campo magnético externo. ($B \in [0, 1T]$)	48

Capítulo 1

Introducción

Entendemos a los plasmones como oscilaciones colectivas de portadores de carga debido a la interacción con un campo electromagnético [1]. Estos tienen diversas aplicaciones, que van desde la creación de guías de onda [2] hasta el diseño de nuevos sistemas de detección de cáncer [3]. Es por esta razón que el estudio de la respuesta plasmónica de los materiales es de interés para la comunidad científica y permanece como un campo de estudio activo.

Si a un material plasmónico le aplicamos un campo magnético externo constante, los portadores de carga presentes en éste se verán afectados por la parte magnética de la fuerza de Lorentz. Esta respuesta magneto-óptica da lugar a lo que se conoce como **magnetoplasmones**. [4].

Actualmente, la innovación tecnológica en fotónica y nanotecnología ha tenido como consecuencia que la radiación electromagnética en el rango de THz tenga aplicabilidad en nuevos sectores como son las tecnologías de la información y computación (TIC's), biología y medicina, seguridad nacional, control de calidad en comida y productos agrícolas, y computación ultrarápida, entre otros [5].

Las nanoestructuras de metales nobles como el oro y la plata, tienen una respuesta plasmónica en el espectro visible e infrarrojo cercano, mientras que a menores energías no exhiben este comportamiento [1]. Es por esto que para poder estudiar la región de THz se han tenido que proponer otro tipo de materiales, como semiconductores, hexaferritas y grafeno, los cuales además de tener una respuesta plasmónica en esta región también exhiben un comportamiento magnetoplasmónico. [6]

En el caso del grafeno existen diversos estudios acerca de su respuesta magnetoplasmónica, debido a que la frecuencia de ciclotrón es comparable con la frecuencia de plasmón [7] para campos del orden de $\sim 17T$. Sin embargo, este tipo de sistemas requieren bajas temperaturas, alrededor de $4.5K$ y los campos magnéticos de este orden son difíciles de obtener experimentalmente.. [8].

Es por esta razón que los semiconductores presentan una opción viable, debido a su operabilidad en temperatura ambiente y a que requieren campos magnéticos menores, alrededor de $\sim 1T$, esto debido a la baja masa efectiva de sus electrones, ya sean intrínsecos o por dopaje. [6]

El antimoniuro de indio (InSb) resulta ser un candidato idóneo para el estudio de la respuesta magnetoplasmónica en la región de THz debido a que su frecuencia de plasma se puede situar en esta región y a su alta movilidad electrónica [9]. Es por esta razón que ha sido estudiado ampliamente.

Keyes et al. (1956) fueron los pioneros en el estudio de la espectroscopia de InSb bajo campos [10], y posteriormente Palik et al (1961), desarrollaron una teoría para el estudio de semiconductores para el infrarrojo lejano, a bajas temperaturas (helio o nitrógeno líquido) y campos magnéticos grandes [11]. Sin embargo, se encontraban limitados a la región de frecuencias de $0.1 - 3$ THz, debido a la ausencia de fuentes de otras frecuencias. Por esto, los autores requerían las condiciones anteriores para poder observar algún tipo de respuesta magnetoplasmónica [6]. No obstante, debido a los avances tecnológicos, actualmente contamos con fuentes que nos permiten estudiar un mayor rango de frecuencias, lo cual nos permite hacer un estudio más completo de estos materiales.

En la presente tesis se tiene como objetivo calcular la respuesta magneto-óptica de nanosistemas esféricos de InSb en la región de THz. Para esto estudiaremos el esparcimiento y la extinción de la luz en estos sistemas, bajo las aproximaciones pertinentes considerando que nos encontramos en el régimen donde la longitud de onda es mucho más grande que el tamaño de la partícula.

La motivación para realizar este trabajo es:

- Estudiar la respuesta magnetoplasmónica de esferas y cascarones de InSb para campos magnéticos externos del orden de $1T$.

Para esto se estudia el sistema desde la aproximación dipolar, se revisa el formalismo de Mie, y se utiliza el sistema coordenado de ejes principales, con la intención de obtener un panorama general de la respuesta en esta escala.

En el capítulo 2 comenzaremos con el marco teórico partiendo de los distintos modelos que existen para describir la función dieléctrica. En el capítulo 3 y 4 de igual manera se continua con el marco teórico. En el capítulo 3 se discute el formalismo para estudiar el esparcimiento y absorción de una esfera, desde la aproximación dipolar hasta la solución de Mie. El capítulo 4 describe un acercamiento hacia el estudio de esferas anisotrópicas. Así mismo en este capítulo se presenta el caso particular del n-InSb, partiendo del tensor de función dieléctrica y llegando hasta las eficiencias

de absorción y esparcimiento. En el capítulo 5 se presentan los resultados numéricos obtenidos para esferas a través de un código escrito en lenguaje Python. En el capítulo 6 se revisa la teoría para cascarones. Además se presentan los resultados computacionales obtenidos para cascarones. Por último en el capítulo 7 se presentan las conclusiones y comentarios finales.

Capítulo 2

Función dieléctrica

Los materiales experimentan de formas distintas la presencia de un campo eléctrico (\vec{E}). Por ejemplo, en el caso de un material isotrópico compuesto por átomos neutros o moléculas no polares, el campo inducirá un momento dipolar sobre estos. Al final, lo que se tiene es un material con pequeños dipolos orientados a lo largo de la dirección del campo eléctrico, por lo que se dice que ahora el material está polarizado. La polarización (\vec{P}) inducida por este campo genera un cambio en el campo interno del material. Introducimos el campo de desplazamiento eléctrico (\vec{D}) [12] como

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (2.1)$$

Cuando la respuesta del material es lineal, es decir la polarización es lineal respecto al campo, tenemos como función de respuesta a éste la susceptibilidad del material ($\hat{\chi}$), lo cual nos permite escribir la polarización, en el espacio de frecuencias (ω) y vector de onda (\vec{q}), como [13]

$$\vec{P}(\vec{q}, \omega) = \varepsilon_0 \hat{\chi}(\vec{q}, \omega) \vec{E}(\vec{q}, \omega). \quad (2.2)$$

En la ecuación anterior podemos notar que por lo general $\hat{\chi}$ se puede representar a través de un tensor, lo que dependerá estrictamente del material y los modelos que se utilicen para describirlo, mientras que en otros casos bastará con que sea un escalar.

Bajo las consideraciones anteriores, si sustituimos la ecuación (2.2) en la ecuación (2.1) podemos obtener una expresión para el campo de desplazamiento en el régimen de respuesta lineal

$$\vec{D}(\vec{q}, \omega) = \varepsilon_0 (\hat{I} + \hat{\chi}(\vec{q}, \omega)) \vec{E}(\vec{q}, \omega). \quad (2.3)$$

De esta forma, el campo de desplazamiento también depende linealmente del cam-

po eléctrico externo. Esto nos permite definir a la función dieléctrica ($\hat{\epsilon}$) de tal forma que para el caso donde tenemos polarización lineal

$$\vec{D}(\vec{q}, w) = \epsilon_0 \hat{\epsilon}(\vec{q}, w) \vec{E}(\vec{q}, w), \quad (2.4)$$

donde

$$\hat{\epsilon}(\vec{q}, w) = \hat{I} + \hat{\chi}(\vec{q}, w). \quad (2.5)$$

Para describir la función dieléctrica existen varios modelos que dependen de el material, en particular, de la forma en que los materiales interactuan con la radiación electromagnética. Dentro de estos modelos tenemos el modelo de plasma, el modelo de Drude y el modelo de Lorentz, así como modelos para materiales más específicos, como modelos de fonones ópticos y de materiales magnéticos.

2.1. Modelo de Drude

El modelo de Drude es un modelo para metales. En estos, debido a que la energía requerida para mover los electrones en la última capa de valencia es muy baja, podemos considerar que estos electrones son libres. A partir de esto, el modelo describe a los electrones en el material como osciladores amortiguados por las colisiones y forzados por un campo eléctrico. Suponiendo que el campo magnético está en la dirección x , la ecuación de movimiento es [14]

$$m\ddot{\vec{x}} + m\gamma\dot{\vec{x}} = -e\vec{E}, \quad (2.6)$$

donde γ es el inverso del tiempo promedio entre colisiones, m es la masa del electrón y \vec{E} es el campo eléctrico aplicado. Podemos resolver esta ecuación si suponemos que se tiene un campo eléctrico dependiente del tiempo $\vec{E} = E_0 e^{-i\omega t} \hat{e}_x$ y que la solución tiene la misma dependencia temporal, es decir $\vec{x} = x_0 e^{-i\omega t} \hat{e}_x$. Al sustituir estas condiciones en la ecuación (2.6) obtenemos

$$-\omega^2 x_0 e^{-i\omega t} - i\omega\gamma x_0 e^{-i\omega t} = \frac{-eE_0 e^{-i\omega t}}{m}, \quad (2.7)$$

por lo que

$$(-\omega^2 - i\omega\gamma)\vec{x} = \frac{-e}{m}\vec{E}, \quad (2.8)$$

y

$$\vec{x} = \frac{e}{m(\omega^2 + i\omega\gamma)}\vec{E}. \quad (2.9)$$

A partir de este desplazamiento tenemos que se genera un momento dipolar $\vec{p} = -e\vec{x}$, por lo que, si tenemos una distribución homogénea de N átomos por unidad de volumen, la polarización estaría dada por

$$\vec{P} = N\vec{p} = -Ne\vec{x}, \quad (2.10)$$

de donde, en el caso que nos interesa la polarización está dada por

$$\vec{P} = -\frac{Ne^2\vec{E}}{m(\omega^2 + i\gamma\omega)}. \quad (2.11)$$

Ahora, recordando la ecuación (2.1), podemos llegar a la relación

$$\chi = -\frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{(\omega^2 + i\gamma\omega)}. \quad (2.12)$$

Finalmente, como $\epsilon = 1 + \chi$ y definiendo la frecuencia de plasma ω_p a través de $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}$ podemos escribir esto como

$$\epsilon_D(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} \quad (2.13)$$

obteniendo así, la función dieléctrica del modelo de Drude.

En la tabla 2.1 se muestran los parámetros de Drude para el oro y la plata [15].

	ω_p (s^{-1})	γ (s^{-1})
Au	12.993×10^{15}	27.953×10^{12}
Ag	14.583×10^{15}	34.639×10^{12}

Tabla 2.1: Parámetros del modelo de Drude para oro (Au) y plata (Ag) [15].

A partir de estos parámetros podemos calcular la función dieléctrica como función de la frecuencia, en las figuras 2.1 y 2.2 se muestra la parte real y la parte imaginaria, respectivamente.

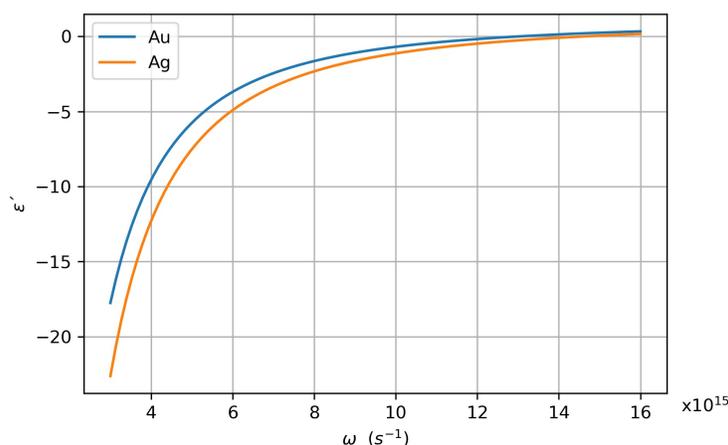


Figura 2.1: Parte real de la función dieléctrica para oro y plata calculada utilizando el modelo de Drude.

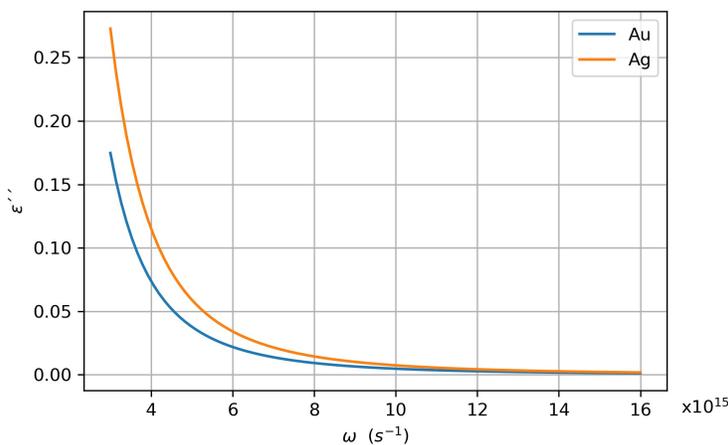


Figura 2.2: Parte imaginaria de la función dieléctrica para oro y plata calculada utilizando el modelo de Drude.

2.2. Drude-Lorentz

El modelo de Lorentz pretende describir la interacción de la radiación electromagnética con materiales dieléctricos. En este modelo los electrones dentro del material son tratados como osciladores armónicos amortiguados forzados por un campo electromagnético, debido a que en los materiales dieléctricos los electrones no viajan libres, sino que se encuentran ligados al material formando corrientes de polarización. De tal forma que la ecuación de movimiento de este modelo sería

$$m(\ddot{\vec{x}} + \gamma\dot{\vec{x}} + \omega_0^2\vec{x}) = -eE, \quad (2.14)$$

donde ω_0 es la frecuencia natural del material debido a las vibraciones de la red. Notemos que si $\omega_0 = 0$ recuperamos la expresión para el modelo de Drude.

Podemos resolver esta ecuación de manera análoga a como se hizo para el modelo de Drude, obteniendo (Nota: utilizaremos $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}$ como en [16], aunque no se trata de una frecuencia de plasma como en el caso de Drude)

$$\epsilon_{Lorentz}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - \omega_0)^2 + i\gamma\omega}. \quad (2.15)$$

De manera similar, si conocemos los parámetros para el modelo, podemos calcular la función dieléctrica como función de la frecuencia, como se muestra en 2.3 y 2.4, para $\omega_p^2/\omega_0^2 = 2$ y $\omega_0/\gamma = 3$.

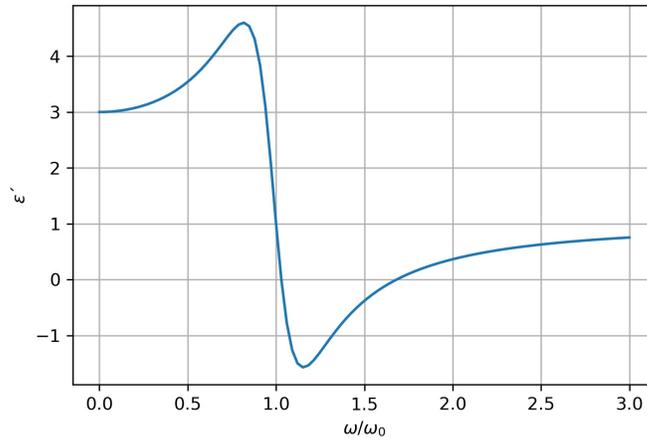


Figura 2.3: Parte real de la función dieléctrica en el modelo de Drude-Lorentz para los parámetros $\omega_p^2/\omega_0^2 = 2$ y $\omega_0/\gamma = 3$.

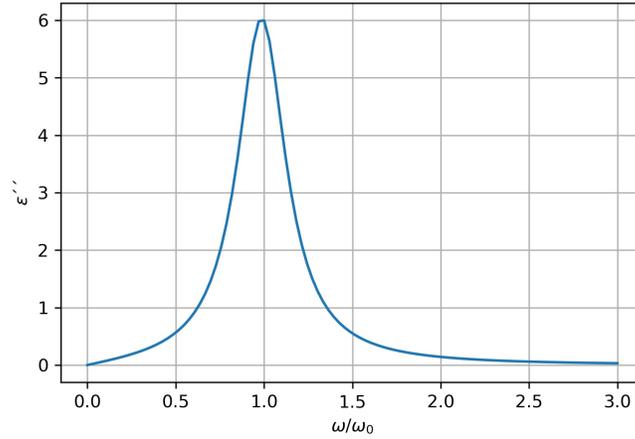


Figura 2.4: Parte imaginaria de la función dieléctrica en el modelo de Drude-Lorentz para los parámetros $\omega_p^2/\omega_0^2 = 2$ y $\omega_0/\gamma = 3$.

2.3. Función dieléctrica por vibraciones en el cristal

En un material cristalino tenemos fonones, los cuales podemos pensar como osciladores armónicos simples cuantizados debido a las vibraciones de la red. En el caso de cristales con más de un átomo en la celda primitiva podemos clasificarlos de dos formas: acústicos y ópticos.

En el caso de los fonones ópticos tenemos que interactúan con la radiación electromagnética, en particular, una onda electromagnética que oscila desplazará los iones positivos en una dirección del campo y los negativos en sentido opuesto, haciendo que el cristal vibre.

Dado que los fonones podemos considerarlos osciladores armónicos simples y tenemos que interactúan con el campo eléctrico a través de la carga en los iones, podemos escribir la ecuación de movimiento en términos de \vec{u} , el desplazamiento respecto a la posición de equilibrio, como [17]

$$M\ddot{\vec{u}} = -M\omega_T^2\vec{u} + Q\vec{E}, \quad (2.16)$$

donde M es la masa del fonón, Q la carga del ion y ω_T es la frecuencia natural del sistema, ω_T también se conoce como la frecuencia de resonancia transversal, más adelante discutiremos por qué lleva este nombre.

Ahora, consideremos que el campo eléctrico tiene la forma

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}, \quad (2.17)$$

entonces

$$\vec{u} = \frac{Q}{M(\omega_T^2 - \omega^2)} \vec{E}. \quad (2.18)$$

Al tener partículas cargadas en movimiento se genera una polarización. Considerando una distribución homogénea de N partículas y siguiendo el razonamiento de la sección 2.1.1. podemos llegar a

$$\varepsilon_p(\omega) = 1 + \frac{NQ^2}{\varepsilon_0 M} \frac{1}{\omega_T^2 - \omega^2}, \quad (2.19)$$

Si consideramos que no tenemos cargas libres entonces debe cumplirse que

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0. \quad (2.20)$$

Lo que implica que

$$\varepsilon_p(\vec{k} \cdot \vec{E}_0) = 0. \quad (2.21)$$

La ecuación anterior se cumple si $\varepsilon_p = 0$ o $\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$, discutamos cada uno de estos casos.

Primero, si $\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$, descartando la solución trivial donde $E_0 = 0$, entonces tenemos que el campo eléctrico es perpendicular a la dirección de desplazamiento. En este caso, la ecuación (2.19) describe la respuesta dieléctrica del sistema, donde podemos notar que ε_p diverge cuando $\omega \rightarrow \omega_T$, es por esto que ω_T recibe el nombre de frecuencia de resonancia transversal.

En el otro caso tenemos que $\varepsilon_p = 0$. Llamemos frecuencia longitudinal (ω_L) a la frecuencia tal que esto pasa, es decir $\varepsilon_p(\omega_L) = 0$. Esta frecuencia recibe este nombre ya que cuando los fonones oscilan en ésta generan un campo eléctrico longitudinal a partir de la polarización inducida por las mismas oscilaciones. Sustituyendo ω_L en la ecuación (2.19) tenemos

$$0 = 1 + \frac{NQ^2}{\varepsilon_0 M} \frac{1}{\omega_T^2 - \omega_L^2}, \quad (2.22)$$

y despejando

$$\omega_L^2 - \omega_T^2 = \frac{NQ^2}{\varepsilon_0 M}, \quad (2.23)$$

por lo que podemos reescribir la ecuación (2.18) como

$$\epsilon_p = 1 + \frac{\omega_L^2 - \omega_T^2}{\omega_T^2 - \omega^2}, \quad (2.24)$$

obteniendo así una ecuación de la función dieléctrica debido a fonones ópticos que cumple con las condiciones requeridas.

2.4. Magnetoplasmones

Para encontrar la función dieléctrica de un metal en presencia de un campo magnético externo constante, partamos de la ecuación de Drude. Considerando además la fuerza de Lorentz por un campo magnético \vec{B} , esto es [17]

$$m\ddot{\vec{r}} + m\gamma\dot{\vec{r}} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (2.25)$$

donde $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$, por lo que en notación tensorial se ve de la forma

$$m\ddot{x}_i + m\gamma\dot{x}_i = -e(E_i + \epsilon_{ijk}v_j B_k), \quad (2.26)$$

donde ϵ_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita.

Para resolver esta ecuación de nuevo proponemos una solución para un campo eléctrico $\vec{E} = E_0 e^{-i\omega t} \hat{e}_x$, entonces

$$-\omega^2 m x_i - i\omega m \gamma x_i = -e(E_i + \epsilon_{ijk}(-i\omega x_j) B_k). \quad (2.27)$$

De donde podemos llegar a la relación entre la posición y el campo

$$m(-\omega^2 x_i - i\omega \gamma x_i + \frac{i e \omega}{m} \epsilon_{ijk} x_j B_k) = -e E_i. \quad (2.28)$$

La cual en su forma matricial es

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 - i\gamma\omega & i\omega \frac{e}{m} B_k & -i\omega \frac{e}{m} B_j \\ -i\omega \frac{e}{m} B_k & -\omega^2 - i\gamma\omega & i\omega \frac{e}{m} B_i \\ i\omega \frac{e}{m} B_j & -i\omega \frac{e}{m} B_i & -\omega^2 - i\gamma\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \end{pmatrix} = -e/m \begin{pmatrix} E_i \\ E_j \\ E_k \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Si llamamos \hat{T} a la matriz que acompaña al vector de posición en el lado izquierdo de la igualdad podemos resumir la ecuación de la siguiente forma

$$\hat{T}\vec{r} = \frac{-e}{m}\vec{E}. \quad (2.30)$$

De tal forma que para el caso donde $\vec{B} = (0, 0, B)$ podemos invertir la matriz \hat{T} y escribir el vector posición de la siguiente forma

$$\vec{r} = \frac{-e}{m} \hat{T}^{-1} \vec{E}, \quad (2.31)$$

con

$$\hat{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{i\gamma+\omega}{\omega((\gamma-i\omega)^2+\omega_c^2)} & \frac{i\omega_c}{\omega((\gamma-i\omega)^2+\omega_c^2)} & 0 \\ -\frac{i\omega_c}{\omega((\gamma-i\omega)^2+\omega_c^2)} & \frac{i\gamma+\omega}{\omega((\gamma-i\omega)^2+\omega_c^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{\gamma\omega-i\omega^2} \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

donde

$$\omega_c = \frac{eB}{m}, \quad (2.33)$$

es la frecuencia de ciclotrón.

A partir la ecuación (2.31) y utilizando las definiciones dadas en la sección 2.1.1 en sus formas tensoriales, podemos encontrar una relación de la función dieléctrica para este caso, dada por

$$\hat{\epsilon} = \hat{I} + \omega_p^2 \hat{T}^{-1} \quad (2.34)$$

llegando así a que el tensor de la función dieléctrica es de la forma

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\omega_p^2(i\gamma+\omega)}{\omega(-(i\gamma+\omega)^2+\omega_c^2)} & \frac{\omega_p^2 i\omega_c}{\omega(-(i\gamma+\omega)^2+\omega_c^2)} & 0 \\ -\frac{\omega_p^2 i\omega_c}{\omega(-(i\gamma+\omega)^2+\omega_c^2)} & 1 + \frac{\omega_p^2(i\gamma+\omega)}{\omega(-(i\gamma+\omega)^2+\omega_c^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2+i\gamma\omega} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Notemos que si $B = 0$ entonces $\omega_c = 0$ y recuperamos el modelo de Drude.

Capítulo 3

Esparcimiento y absorción para partículas esféricas

En este capítulo, describiremos qué es lo que sucede con la luz al interactuar con un objeto en un medio no absorbente, haciendo énfasis en los sistemas que nos interesan estudiar, sistemas esféricos.

Supongamos que se tiene una partícula arbitraria en un medio no absorbente y hacemos incidir luz sobre ella. En primera instancia, podría interesarnos qué pasa con el sistema energéticamente, cuánta luz se dispersa o cuánta luz se absorbe por la partícula. Para esto, resulta útil utilizar el vector de Poynting (\vec{S}), ya que, como sabemos, éste determina el flujo de energía electromagnética.

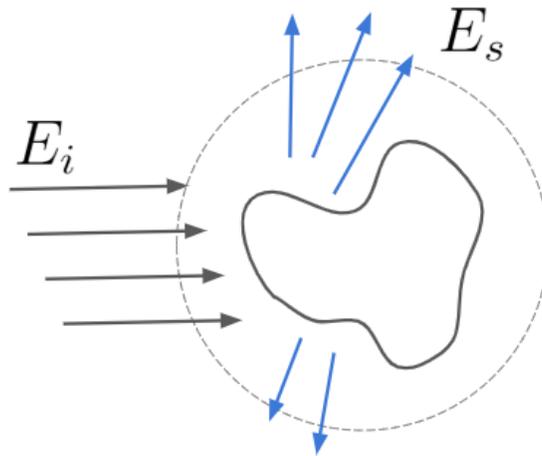


Figura 3.1: Esquema de una partícula arbitraria sobre la cual incide un campo electromagnético, E_i representa el campo incidente y E_s el campo esparcido.

Si encerramos la partícula en una esfera de radio r , podemos medir cuanta energía

se absorbe si medimos cuanta de la energía atraviesa la esfera en la que encerramos nuestra partícula. En particular, podemos calcular la tasa neta de energía electromagnética (potencia) que cruza la superficie A de la esfera como [18]

$$\mathcal{P}_a = - \int_A \vec{S} \cdot \hat{e}_r dA. \quad (3.1)$$

donde

$$\vec{S} = \vec{S}_i + \vec{S}_s + \vec{S}_{ext}, \quad (3.2)$$

con

$$\vec{S}_i = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}_i \times \vec{H}_i^*), \quad (3.3)$$

$$\vec{S}_s = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}_s \times \vec{H}_s^*), \quad (3.4)$$

y

$$\vec{S}_{ext} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}_s \times \vec{H}_i^* + \vec{E}_i \times \vec{H}_s^*), \quad (3.5)$$

donde \vec{S}_i, \vec{E}_i y \vec{H}_i corresponden al vector de Poynting, campo eléctrico y campo magnético inducido de la onda incidente y \vec{S}_s, \vec{E}_s y \vec{H}_s a los respectivos para la onda esparcida. Finalmente \vec{S}_{ext} corresponde al término de interacción entre la onda incidente y la onda esparcida.

Notemos que si $\mathcal{P}_a > 0$ entonces se está absorbiendo energía dentro de la esfera, sin embargo, como estamos dentro de un medio no absorbente, la absorción es completamente debida a la partícula. Considerando la ecuación (3.1) y los términos que componen a \vec{S} (3.2), podemos distinguir 3 términos

$$\mathcal{P}_a = \mathcal{P}_i - \mathcal{P}_s + \mathcal{P}_{ext}, \quad (3.6)$$

donde

$$\mathcal{P}_i = - \int_A \vec{S}_i \cdot \hat{e}_r dA, \quad (3.7)$$

$$\mathcal{P}_s = - \int_A \vec{S}_s \cdot \hat{e}_r dA \quad (3.8)$$

y

$$\mathcal{P}_{ext} = - \int_A \vec{S}_{ext} \cdot \hat{e}_r dA \quad (3.9)$$

$\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_s$ y \mathcal{P}_{ext} corresponden a la potencia de la onda incidente, de la onda esparcida y a la de extinción respectivamente. La extinción se refiere a los mecanismos por los cuales las partículas atenúan el haz incidente y ésta puede depender de muchos

factores como el tamaño de las partículas, la composición química, la geometría, entre otros. En un medio no absorbente, el flujo debido a la onda incidente es nulo, ya que para cualquier punto de salida hay otro de entrada que lo compensa, de tal forma que

$$\mathcal{P}_{ext} = \mathcal{P}_a + \mathcal{P}_s, \quad (3.10)$$

es decir, la tasa de extinción se reduce a la suma de las tasas de absorción y de esparcimiento.

En el caso donde tenemos un campo eléctrico incidente de la forma $\vec{E}_i = E\hat{e}_x$, con $E = E_0 e^{ikz - i\omega t}$, donde k es la magnitud del vector de onda y ω es la frecuencia del campo entonces podemos encontrar al campo de inducción magnética a través de la relación

$$\vec{H}_i = \frac{k}{\omega\mu} \hat{k} \times \vec{E}_i \quad (3.11)$$

donde \hat{k} es la dirección del vector de onda y μ es la permeabilidad magnética del material.

Además, ya que el medio es no absorbente, podemos elegir una r lo suficientemente grande para que nos encontremos en la región de campo lejano donde el campo eléctrico tiene la forma de una onda esférica con magnitud inversamente proporcional a r que podemos escribir como

$$\vec{E}_s \sim \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{-ikr} \vec{X}, \quad (3.12)$$

donde \vec{X} es el vector de amplitud de esparcimiento, el cual está determinado por los componentes de la matriz de esparcimiento. Un desarrollo completo de \vec{X} y la matriz de esparcimiento podemos encontrarlo en [18].

Ahora, si queremos reescribir la ecuación (3.12) en términos de nuestra perturbación inicial E , el campo eléctrico y el campo de inducción magnética toman la forma

$$\vec{E}_s \sim \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikr} \vec{X} E, \quad (3.13)$$

y

$$\vec{H}_s \sim \frac{k}{\omega\mu} \hat{e}_r \times \vec{E}_s. \quad (3.14)$$

Ya que conocemos los campos incidentes y esparcidos, podemos calcular la potencia de extinción utilizando las ecuaciones (3.5) y (3.9) y haciendo los cálculos necesarios. Llegamos así a

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ext} = \frac{-k}{2\omega\mu} |E|^2 \text{Re} \left\{ \frac{e^{-ikr}}{ikr} \int_A e^{ikz} \hat{e}_x \cdot \vec{X}^* dA - \frac{e^{-ikr}}{ikr} \int_A e^{ikz} \cos(\theta) \hat{e}_x \cdot \vec{X} dA \right. \\ \left. + \frac{e^{-ikr}}{ikr} \int_A e^{ikz} \sin(\theta) \cos(\phi) \hat{e}_z \cdot \vec{X} dA \right\}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Finalmente podemos resolver estas integrales por partes y si tomamos el límite cuando $kr \rightarrow \infty$, entonces

$$\mathcal{P}_{ext} = I_i \frac{4\pi}{k^2} \text{Re} \{ (\vec{X} \cdot \hat{e}_x)_{\theta=0} \}, \quad (3.16)$$

donde I_i es la irradiancia incidente. La ecuación anterior es una forma particular del teorema óptico, este nos dice que la extinción depende únicamente del esparcimiento en la dirección $\theta = 0$.

La fracción de \mathcal{P}_{ext} sobre I_i es una cantidad con dimensiones de área y es conocida como la sección transversal de extinción (C_{ext})

$$C_{ext} = \frac{4\pi}{k^2} \text{Re} \{ (\vec{X} \cdot \hat{e}_x)_{\theta=0} \}. \quad (3.17)$$

Podemos obtener la sección transversal de esparcimiento, procediendo de manera análoga, llegando a

$$C_{sca} = \int_{4\pi} \frac{|\vec{X}|^2}{k^2} d\Omega. \quad (3.18)$$

3.1. Aproximación dipolar

Ahora, en lugar de una partícula con geometría arbitraria, supongamos que tenemos una esfera de permitividad ε_1 y de radio a colocada en un medio de permitividad ε_m donde existe un campo eléctrico $\vec{E}_o = E_o \hat{e}_z$.

En particular, estamos interesados en el caso donde $ka \ll 1$, es decir cuando la longitud de onda es mucho más grande que el radio de la esfera (límite cuasiestático). Partiremos de la ecuación de Laplace, a pesar de que ésta tiene validez solo cerca de la esfera, nos permitirá establecer un símil con un dipolo eléctrico ideal y de esta forma calcular el campo lejano.

Podemos resolver la ecuación de Laplace tomando en cuenta la simetría de la esfera y las condiciones de frontera entre los medios, de donde obtenemos que el potencial para $r > a$ es

$$\Phi(r, \theta) = -E_o r \cos(\theta) + a^3 E_o \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_m}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_m} \frac{\cos(\theta)}{r^2}. \quad (3.19)$$

Notemos que si comparamos este potencial con el potencial debido a un dipolo ideal, el potencial obtenido sería la suma del campo inicial más el de un dipolo con un momento dipolar

$$\vec{p} = 4\pi\varepsilon_m a^3 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_m}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_m} \vec{E}_o. \quad (3.20)$$

Recordemos que el momento dipolar y el campo eléctrico siguen la relación

$$\vec{p} = \varepsilon_m \alpha \vec{E}_o, \quad (3.21)$$

donde α es la polarizabilidad. Al comparar las dos ecuaciones anteriores, podemos concluir que la polarizabilidad de la esfera está dada por

$$\alpha = 4\pi a^3 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_m}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_m}. \quad (3.22)$$

Por lo anterior, aproximaremos a la esfera como un dipolo ideal iluminado por una onda plana, que oscila con la frecuencia del campo aplicado, donde el dipolo radia generando un campo \vec{E}_s [19]

$$\vec{E}_s = \frac{e^{ikr}}{-ikr} \frac{ik^3}{4\pi\varepsilon_m} \hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times p), \quad (3.23)$$

el cual, si queremos reescribirlo como en la ecuación (3.4) nos lleva a que

$$\vec{X} = \frac{ik^3}{4\pi} \alpha \hat{e}_r \times (\hat{e}_r \times \hat{e}_x). \quad (3.24)$$

Podemos sustituir esto en las expresiones obtenidas para C_{ext} y C_{sca} , ecuaciones (3.16) y (3.17), llegando a que [18]

$$C_{ext} = k \text{Im}\{\alpha\}, \quad (3.25)$$

y

$$C_{sca} = \frac{k^4}{6\pi} |\alpha|^2. \quad (3.26)$$

Esto nos permite reescribir la sección transversal de extinción y esparcimiento en función de parámetros del sistema, como el tamaño, el medio en el que se encuentra y la función dieléctrica, obteniendo las siguientes expresiones

$$C_{ext} = (\pi a^2) 4x \operatorname{Im} \left\{ \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_m}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_m} \right\}, \quad (3.27)$$

y

$$C_{sca} = (\pi a^2) \frac{8}{3} x^4 \left| \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_m}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_m} \right|^2, \quad (3.28)$$

donde a x se le conoce como el parámetro de tamaño y está dado por

$$x = \frac{2\pi a \sqrt{\varepsilon_m}}{\lambda}.$$

Tanto la sección transversal de extinción, como la de esparcimiento tienen unidades de área, por lo que en muchos casos se opta por utilizar la eficiencia de extinción, o esparcimiento, respectivamente, las cuales podemos obtener al dividir la sección transversal entre el área de la sombra geométrica de la partícula, en el caso de una esfera

$$Q_{ext} = \frac{C_{ext}}{\pi a^2}, \quad Q_{sca} = \frac{C_{sca}}{\pi a^2}. \quad (3.29)$$

Al obtener una expresión que depende de la función dieléctrica podemos modelar esferas de distintos materiales de acuerdo a los modelos descritos en el capítulo anterior.

Es posible extender la expansión a otros multipolos, como el cuadrupolar [20]. El uso de estas aproximaciones dependerá del tamaño de la partícula comparado con la longitud de onda. Lo anterior representa una solución aproximada del problema, sin embargo existe una solución completa del problema, la cual presentamos a continuación.

3.2. Solución de Mie

Generalmente, se le conoce como **Solución de Mie** a las soluciones de las ecuaciones de Maxwell propuestas por Gustav Mie en 1908, para una esfera de radio e índice de refracción arbitrarios. En esta sección desarrollaremos, sin entrar en mucho detalle, la propuesta de Mie.

Si construimos una función vectorial \vec{M} definida por un función escalar ψ y un vector arbitrario \vec{c} de la siguiente forma

$$\vec{M} = \nabla \times (\vec{c}\psi), \quad (3.30)$$

de inmediato obtenemos que para \vec{M} se cumple que

$$\nabla \cdot \vec{M} = 0, \quad (3.31)$$

y no solo esto, sino que también se tiene que

$$\nabla^2 \vec{M} + k^2 M = \nabla \times [c(\nabla^2 \psi + k^2 \psi)]. \quad (3.32)$$

De tal forma que si

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0, \quad (3.33)$$

ya $k = \omega/c$, es decir ψ es una solución de la ecuación de Helmholtz para una onda monocromática, entonces \vec{M} es una solución para la ecuación de Helmholtz vectorial.

Por otro lado, podemos construir una función \vec{N} a partir de \vec{M} :

$$\vec{N} = \frac{\nabla \times \vec{M}}{k}, \quad (3.34)$$

tal que \vec{M} y \vec{N} cumplen con las condiciones necesarias de un campo electromagnético. De esta forma, redujimos el problema de solucionar las ecuaciones de Maxwell a solucionar la ecuación de onda escalar para ψ , lo cual no es ninguna trivialidad.

En el caso de esferas, lo natural es tratar el problema en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , donde podemos hallar una base de soluciones de la ecuación de Helmholtz dada por

$$\psi_{omn} = \sin(m\phi) P_n^m(\cos \theta) z_n(kr), \quad (3.35)$$

$$\psi_{emn} = \cos(m\phi) P_n^m(\cos \theta) z_n(kr), \quad (3.36)$$

donde P_n^m son los polinomios de Legendre, y z_n son las funciones esféricas de Bessel. Dado que forman una base completa, cualquier función que cumpla la ecuación de onda escalar puede ser escrita como una serie de las funciones (3.26) y (3.27). Y por lo tanto, también podemos escribir a los armónicos vectoriales M_{emn} , M_{omn} , N_{emn} , y N_{omn} , a partir de las relaciones descritas anteriormente.

Como los armónicos vectoriales forman una base, podemos escribir al campo dentro de la esfera (\vec{E}_1), al campo incidente (\vec{E}_i) y al campo esparcido (\vec{E}_s) como una serie de estos, por ejemplo

$$\vec{E}_i = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} (B_{emn} M_{enm} + B_{omn} M_{onm} + A_{emn} N_{enm} + A_{omn} M_{onm}) \quad (3.37)$$

donde B_{enm} , B_{onm} , A_{enm} y A_{onm} son los coeficientes de la expansión, los cuales podemos calcular mediante las relaciones de ortogonalidad de las funciones. Se puede mostrar que $B_{enm} = A_{onm} = 0$ para todo n y m , y que para los coeficientes restantes los únicos distintos de cero se tienen cuando $m = 1$ [18].

Por otro lado, ya que el campo debe ser finito en el origen, únicamente tomaremos las funciones de Bessel $j_n(kr)$ para construir las funciones generadoras ψ_{omn} y ψ_{emn} , ya que las y_n divergen en el origen. Con lo anterior, podemos escribir el campo incidente como

$$\vec{E}_i = \sum_{n=1}^{\infty} E_n (M_{o1n}^{(1)} - iN_{e1n}^{(1)}) \quad (3.38)$$

donde $E_n = E_o(i^n \frac{2n+1}{n(n+1)})$ y el superíndice (1) en los armónicos vectoriales indica que únicamente los estamos generando con las funciones esféricas de Bessel que no divergen en el origen.

Al imponer las condiciones de frontera

$$(\vec{E}_i + \vec{E}_s - \vec{E}_1) \times \hat{e}_r = (\vec{H}_i + \vec{H}_s - \vec{H}_1) \times \hat{e}_r = 0 \quad (3.39)$$

dada la ortogonalidad de los armónicos vectoriales y la forma del campo incidente \vec{E}_i , entonces el campo esparcido y el campo dentro de la esfera tendrán formas similares

$$\vec{E}_s = \sum_{n=1}^{\infty} E_n (ia_n N_{e1n}^{(3)} - b_n M_{o1n}^{(3)}), \quad (3.40)$$

$$\vec{E}_i = \sum_{n=1}^{\infty} E_n (ic_n N_{e1n}^{(1)} - d_n M_{o1n}^{(1)}). \quad (3.41)$$

donde el superíndice (3) indica que los armónicos vectoriales fueron generados a partir de las funciones esféricas de Hankel $h_n(kr)$, de las cuales únicamente tomaremos las que representan una onda saliente.

Ya que para cada n tenemos cuatro coeficientes que no conocemos, requerimos cuatro ecuaciones independientes, que podemos obtener de las condiciones de frontera ($r = a$) en términos de los componentes

$$\begin{aligned} \vec{E}_{i\theta} + \vec{E}_{s\theta} &= \vec{E}_{1\theta} & \vec{E}_{i\phi} + \vec{E}_{s\phi} &= \vec{E}_{1\phi} \\ \vec{H}_{i\theta} + \vec{H}_{s\theta} &= \vec{H}_{1\theta} & \vec{H}_{i\phi} + \vec{H}_{s\phi} &= \vec{H}_{1\phi} \end{aligned} \quad (3.42)$$

de esta forma, y recordando que las funciones de Riccati-Bessel están dadas por

$$\phi_n(\rho) = \rho j_n(\rho), \quad \xi_n(\rho) = \rho h_n(\rho), \quad (3.43)$$

podemos llegar a que los coeficientes para el campo esparcido son

$$a_n = \frac{\hat{m}\psi_n(\hat{m}x)\psi'_n(x) - \psi_n(x)\psi'_n(\hat{m}x)}{\hat{m}\psi_n(\hat{m}x)\xi'_n(x) - \xi_n(x)\psi'_n(\hat{m}x)}, \quad (3.44)$$

y

$$b_n = \frac{\psi_n(\hat{m}x)\psi'_n(x) + \hat{m}\psi_n(x)\psi'_n(\hat{m}x)}{\psi_n(\hat{m}x)\xi'_n(x) - \hat{m}\xi_n(x)\psi'_n(\hat{m}x)}, \quad (3.45)$$

donde $x = ka$ es el parámetro de tamaño y $\hat{m} = N_i/N_m$ es el índice de refracción relativo entre la esfera y el medio, y la notación primada se refiere a la derivada respecto al argumento encerrado en paréntesis.

Esto permite escribir las eficiencias de extinción y esparcimiento en función de los coeficientes de las expansiones (a_n y b_n):

$$C_{sca} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(|a_n|^2 + |b_n|^2), \quad (3.46)$$

y

$$C_{ext} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)\text{Re}\{a_n + b_n\}. \quad (3.47)$$

En la figura 3.2 comparamos las eficiencias calculadas utilizando la solución de Mie y la aproximación dipolar, para los cálculos a partir de la solución de Mie se utilizó un programa escrito por I. Rojas en Mathematica.

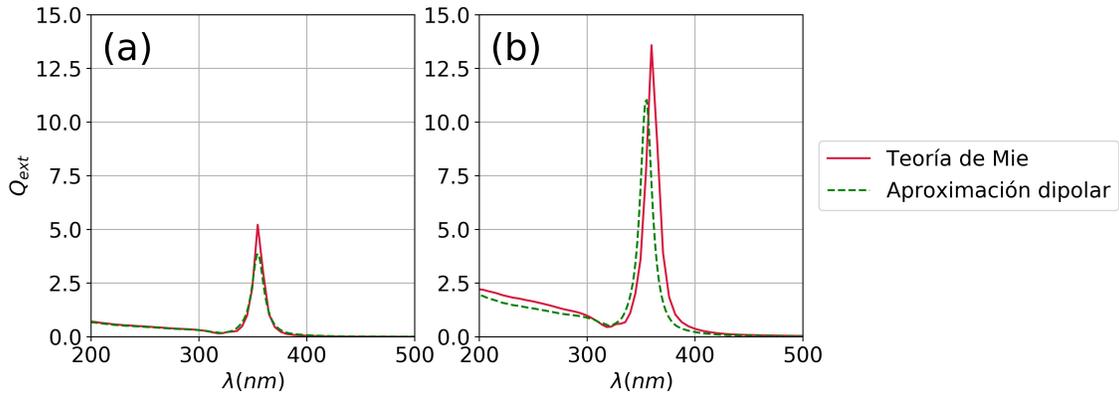


Figura 3.2: (a) Eficiencia de extinción para una esfera de plata de $7nm$ de radio bajo la aproximación dipolar y utilizando el formalismo de Mie. (b) Eficiencia de extinción para una esfera de plata de $20nm$ de radio bajo la aproximación dipolar y utilizando el formalismo de Mie. En ambos casos se utilizaron los datos de [23].

Podemos notar que conforme aumentamos el tamaño de la esfera, de 7nm a 20nm, observamos una mayor discrepancia entre la solución de Mie y la aproximación dipolar, esto debido a que estamos fuera del límite de validez de la aproximación dipolar donde $|\hat{m}x| \ll 1$.

Capítulo 4

Esfera anisotrópica

Como se mencionó en el capítulo 2, la función dieléctrica de los materiales puede ser representada utilizando un tensor. Para un medio isotrópico este tensor tendría la forma de una matriz diagonal cuyos términos distintos de cero son todos iguales, lo cual nos diría que el medio responde a los campos eléctricos de la misma manera sin importar la dirección en la que se apliquen estos. Sin embargo, éste no es el caso para todos los medios. A diferencia de los medios isotrópicos existen materiales cuya respuesta depende de la dirección del campo eléctrico aplicado.

El objetivo de este capítulo es presentar una forma de abordar este problema a partir del sistema de ejes principales, y aplicarla al material que nos interesa, anti-moniuro de Indio dopado negativamente (n-InSb).

4.1. Ejes principales

Comencemos escribiendo la ecuación 2.2 en su forma matricial, ésta es

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

De esta forma, si quisiéramos resolver la ecuación de Laplace para una esfera de radio a con esta función dieléctrica, bajo estas condiciones tendríamos que resolver un sistema de ecuaciones de 3×3 para poder encontrar los potenciales a partir de las condiciones de frontera. Tomando como ejes coordenados a los ejes principales del tensor, diagonalizamos la matriz, entonces la relación se simplifica a

$$\begin{pmatrix} D'_x \\ D'_y \\ D'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon'_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon'_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon'_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \\ E'_z \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

De esta forma si aplicamos campos eléctricos constantes y paralelos a estas direcciones principales recuperaríamos el problema de una esfera bajo un campo eléctrico constante en cada dirección. La solución de este problema la discutimos en el capítulo anterior, permitiéndonos obtener una expresión para la polarizabilidad, que en este caso podríamos reescribir como

$$\alpha'_i = 4\pi a^3 \frac{\varepsilon'_i - \varepsilon_m}{\varepsilon'_i + 2\varepsilon_m}, \quad (4.3)$$

donde i indica cada una de las direcciones de los ejes principales del tensor de función dieléctrica y ε_m es la función dieléctrica del medio. Esto nos permitiría construir el tensor de polarizabilidad en el sistema de ejes principales.

Ahora, lo que queremos es calcular las eficiencias de absorción para un campo \vec{E}_0 arbitrario. Primero, notemos que podemos reescribir este campo en sus componentes respecto al sistema de ejes principales, de tal forma que

$$\vec{p}' = \varepsilon_m \{ \alpha'_x E'_{0x} e'_x + \alpha'_y E'_{0y} e'_y + \alpha'_z E'_{0z} e'_z \}, \quad (4.4)$$

donde $\{e'_x, e'_y, e'_z\}$ son los vectores base del sistema coordinado de ejes principales y la notación primada hace referencia a que nos encontramos en el sistema de ejes principales.

Esto lo podemos reescribir como una ecuación tensorial de la forma:

$$\vec{p}' = \varepsilon_m \hat{\alpha}' \vec{E}'_0. \quad (4.5)$$

Ahora recordemos que para cambiar entre sistemas coordinados contamos con la matriz de cambio de coordenadas Q , de tal forma que para una matriz A cualquiera su representación en el sistema de ejes principales se puede escribir como

$$A' = QAQ^{-1} \quad (4.6)$$

Por lo que esta relación también debe cumplirse para la polarizabilidad, es decir, podemos escribir la ecuación 4.5 como

$$\vec{p}' = \varepsilon_m \hat{\alpha}' \vec{E}'_0, \quad (4.7)$$

donde

$$\hat{\alpha} = Q^{-1} \hat{\alpha}' Q, \quad (4.8)$$

por lo que, si conocemos $\hat{\alpha}'$ y la matriz de cambio de base entonces podemos escribir las eficiencias de esparcimiento y absorción en términos de éstas. Por ejemplo, si tenemos luz polarizada en x entonces

$$C_{abs,x} = kIm\{\alpha'_1 a_{11}^2 + \alpha'_2 a_{12}^2 + \alpha'_3 a_{13}^2\}, \quad (4.9)$$

y

$$C_{sca,x} = \frac{k^4}{6\pi} (|\alpha'_1|^2 a_{11}^2 + |\alpha'_2|^2 a_{12}^2 + |\alpha'_3|^2 a_{13}^2), \quad (4.10)$$

donde $a_{ij} = e_i \cdot e'_j$ para $i, j = x, y, z$, son las proyecciones sobre el sistema de ejes coordenados. [24]

4.2. Campo magnético

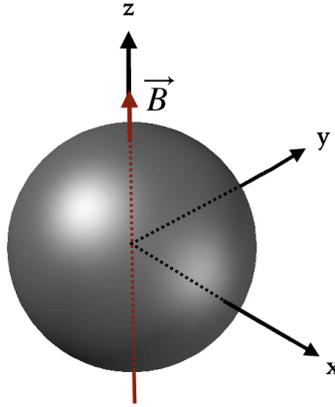


Figura 4.1: Esquema de una esfera sobre la que actúa un campo magnético \vec{B} donde $\vec{B} = B\hat{z}$.

Para el caso de semiconductores dopados, como es el caso del n-InSb, el modelo de función dieléctrica que utilizaremos es una combinación del modelo de Drude-Lorentz, el de fonones ópticos y el de campos magnéticos. Si nos encontramos en el caso donde el campo magnético (B) se encuentra sobre el eje z entonces el tensor dieléctrico tiene la forma [26]

$$\hat{\varepsilon}(B) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -i\varepsilon_2 & 0 \\ i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

donde

$$\varepsilon_1(B) = \varepsilon_\infty \left(1 + \frac{\omega_L^2 - \omega_T^2}{\omega_T^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} + \frac{\omega_p^2(\omega + i\gamma)}{\omega(\omega_c^2 - (\omega + i\gamma)^2)} \right), \quad (4.12)$$

$$\varepsilon_2(B) = -\varepsilon_\infty \left(\frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega(\omega_c^2 - (\omega + i\gamma)^2)} \right), \quad (4.13)$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_\infty \left(1 + \frac{\omega_L^2 - \omega_T^2}{\omega_T^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)} \right). \quad (4.14)$$

donde ε_∞ es la función dieléctrica del material a altas frecuencias. Esta constante se introduce para corregir las ecuaciones deducidas en el capítulo 2, ya que para estas consideramos únicamente un electrón en el vacío, mientras que ε_∞ considera la nube electrónica en el material [25].

Ahora, recordando la definición de $\omega_c = eB/m^*$, donde m^* es la masa efectiva, podemos observar varias cosas. Primero, tenemos un tensor dieléctrico que depende del campo magnético externo B , más aún si $B = 0$, entonces

- $\varepsilon_1(0) = \varepsilon_3$,
- $\varepsilon_2(0) = 0$.

Por lo tanto, nos encontramos en el caso donde el tensor dieléctrico está dado por una matriz diagonal donde todas sus entradas distintas de cero son iguales, en otras palabras, recuperamos el caso isotrópico.

A partir de este razonamiento, podemos observar que la anisotropía en el tensor dieléctrico está dada únicamente por la presencia del campo magnético externo. Procederemos a resolver este problema siguiendo el razonamiento descrito en la sección anterior. Entonces, diagonalizando el tensor de función dieléctrica, obtenemos los eigenvalores

$$\varepsilon'_1 = \varepsilon_\infty \left(1 + \frac{\omega_L^2 - \omega_T^2}{\omega_T^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma + \omega_c)} \right), \quad (4.15)$$

$$\varepsilon'_2 = \varepsilon_\infty \left(1 + \frac{\omega_L^2 - \omega_T^2}{\omega_T^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma - \omega_c)} \right), \quad (4.16)$$

$$\varepsilon'_3 = \varepsilon_\infty \left(1 + \frac{\omega_L^2 - \omega_T^2}{\omega_T^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)} \right), \quad (4.17)$$

con eigenvectores respectivos

$$e'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x + ie_y), \quad (4.18)$$

$$e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x - ie_y), \quad (4.19)$$

y

$$e'_3 = e_z, \quad (4.20)$$

donde e_x , e_y y e_z son los vectores canónicos que generan \mathbb{R}^3 . Observemos que e'_1 y e'_2 , a pesar de ser complejos, tienen sentido físico ya que representan el sistema donde la luz está polarizada circularmente a la izquierda y a la derecha, respectivamente.

Con lo anterior, podemos reescribir el tensor dieléctrico en el sistema de ejes principales como

$$\hat{\varepsilon}'(B) = \begin{pmatrix} \varepsilon'_1(B) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon'_2(B) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon'_3 \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Antes de proceder con el cálculo de la polarizabilidad discutamos un poco sobre el tensor dieléctrico en el sistema de ejes principales.

Primero, notemos que en el caso en el que no existe un campo magnético externo, es decir, que $B = 0$ recuperamos el caso isotrópico, esto es

$$\hat{\varepsilon}'(0) = \hat{\varepsilon}(0) = \varepsilon_3 \hat{\delta}_{ij}. \quad (4.22)$$

Lo anterior es congruente con la intuición física, ya que al tener un sistema isotrópico, en este caso por la ausencia de un campo magnético externo, el tensor de función dieléctrica en el sistema de ejes principales debe coincidir con el tensor de función dieléctrica en el sistema inicial.

Por otra parte, notemos que las componentes ε'_1 y ε'_2 son similares entre ellas. De hecho, salvo el signo que acompaña a ω_c , son iguales. Estos componentes podemos analizarlos de la siguiente forma

$$\varepsilon'_1 = \varepsilon_\infty \left(1 + \underbrace{\frac{\omega_L^2 - \omega_T^2}{\omega_T^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega}}_{\text{fonones ópticos y vibraciones}} - \underbrace{\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma + \omega_c)}}_{\text{Drude} + \omega_c} \right)$$

El término subrayado como *fonones ópticos y vibraciones* corresponde a la función dieléctrica que tenemos en un sistema donde los fonones ópticos en la red se encuentran amortiguados por Γ . Notemos que este término se conserva sin cambios en la diagonal al pasar del sistema inicial al sistema de ejes principales.

Por otro lado, el término etiquetado con *Drude + ω_c* podemos identificarlo como la función dieléctrica que se obtiene en el modelo de Drude, salvo que en este caso tenemos a la frecuencia de ciclotrón $\pm\omega_c$, en el denominador de tal forma que aquí se encuentra la dependencia del campo magnético. Esto ya que estamos considerando que el campo magnético afecta únicamente a los electrones cuasilibres del material descritos por el modelo de Drude.

En resumen, pudimos notar que el tensor dieléctrico en el sistema de ejes principales cumple con lo esperado y establecimos la dependencia del campo magnético para las entradas del mismo.

Ahora, siguiendo el razonamiento expuesto en la sección anterior podemos calcular el tensor de polarizabilidad en el sistema de ejes principales, el cual de igual manera será un tensor diagonal cuyos elementos de la diagonal serán de la forma

$$\hat{\alpha}'_i = 4\pi a^3 \frac{\varepsilon'_i - \varepsilon_m}{\varepsilon'_i + 2\varepsilon_m}. \quad (4.23)$$

Consideremos el caso donde tenemos luz linealmente polarizada en x. Dado el cambio de coordenadas, es fácil ver que

$$e_x = \frac{1}{\sqrt{2}}e'_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e'_2. \quad (4.24)$$

Por lo que, al proyectar sobre el sistema de ejes principales, siguiendo las ecuaciones (4.9) y (4.10) tenemos que las eficiencias de extinción y absorción se reducen a

$$C_{abs,x} = k\text{Im}\left\{\frac{\alpha'_1}{2} + \frac{\alpha'_2}{2}\right\}, \quad (4.25)$$

$$C_{sca,x} = \frac{k^4}{6\pi} \left(\frac{|\alpha'_1|^2}{2} + \frac{|\alpha'_2|^2}{2} \right). \quad (4.26)$$

A pesar de que están calculadas a partir de los componentes de la polarizabilidad sobre los ejes principales, es importante mencionar que en (4.25) y (4.26) nos encontramos en el sistema coordenado original.

Capítulo 5

Esfera de n-InSb

En este capítulo estudiaremos una esfera de n-InSb de radio $a = 20$ nm, la cual es experimentalmente obtenible (incluso hasta $a < 10$ nm en soluciones coloidales [27]), suspendida en agua en presencia de un campo magnético externo constante B . Nos enfocaremos en la forma en que la esfera absorbe y esparce la radiación que incide sobre ella, partiendo de las ecuaciones discutidas en el capítulo 4.

Los parámetros que se utilizaran en el modelo son los que presentan Abraham *et al* en [26], y se encuentran en la siguiente tabla.

ε_∞	15.7
ω_L	$3.62 \times 10^{13} rad/s$
ω_T	$3.39 \times 10^{13} rad/s$
Γ	$5.65 \times 10^{11} rad/s$
γ	$3.39 \times 10^{12} rad/s$
m^*/m_e	0.022
ω_p^\dagger	$3.14 \times 10^{13} rad/s$

Tabla 5.1: Parámetros del n-InSb [26].

[†] ω_p depende del dopaje, sin embargo, éste no se especifica en [26].

5.1. Función dieléctrica

Como se mencionó en el capítulo anterior para un semiconductor dopado por portadores de carga la función dieléctrica toma la forma de un tensor, el cual no es, por lo general, un tensor diagonal, como se muestra en la ecuación (4.11). Sin embargo, al hacer el cambio de coordenadas al sistema de ejes principales, obtenemos una matriz diagonal con entradas

ε'_1 , ε'_2 y ε'_3 , las cuales se encuentran explícitas en las ecuaciones (4.16), (4.17) y (4.18), respectivamente.

A partir de las ecuaciones mencionadas, se realizó un programa computacional, que permite calcular las entradas de la matriz como función de la frecuencia, y del campo magnético. Como primer paso, se comprobó que éstas cumplieran con lo observado en la sección 4, en particular que

$$\varepsilon_3 = \varepsilon'_1(0) = \varepsilon'_2(0). \quad (5.1)$$

Es decir, que la función dieléctrica en ausencia de un campo magnético permanece isotrópica y que la función que sigue es ε_3 . Al poner esta condición en el programa ($B = 0$) se calculó la función dieléctrica como función de la frecuencia y se obtuvieron las figuras 5.1 (parte real) y 5.2 (parte imaginaria).

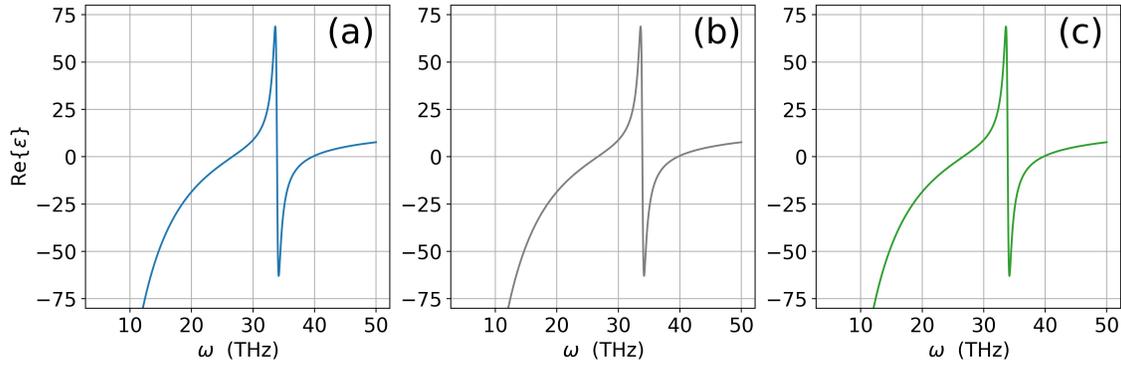


Figura 5.1: Parte real de las componentes del tensor de función dieléctrica en el sistema de ejes principales en ausencia de campo magnético donde (a) ε'_1 , (b) ε'_3 y (c) ε'_2 .

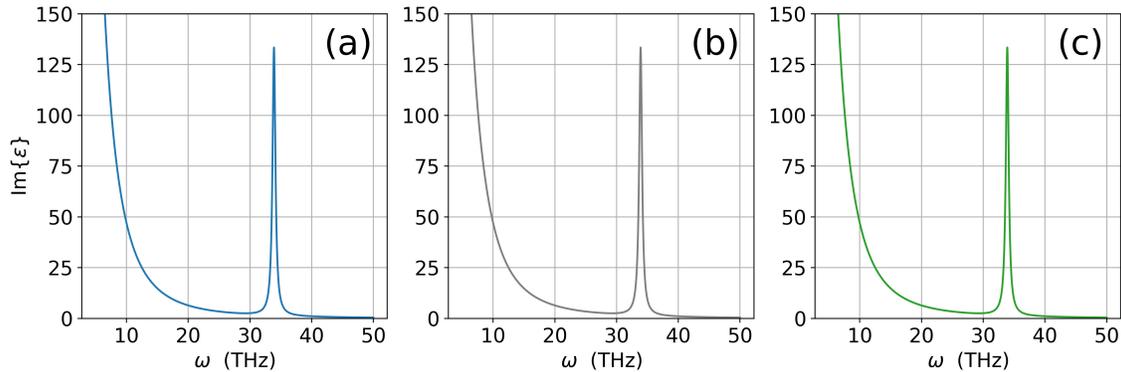


Figura 5.2: Parte imaginaria de las componentes del tensor de función dieléctrica en el sistema de ejes principales en ausencia de campo magnético donde (a) ε'_1 , (b) ε'_3 y (c) ε'_2 .

De esta forma podemos observar que los componentes del tensor de función dieléctrica

coinciden, tanto en la parte imaginaria como real, en ausencia de un campo magnético. Además también podemos observar el comportamiento clásico de la función dieléctrica de un semiconductor, con una resonancia debido a las vibraciones y la divergencia a bajas frecuencias debido al término de Drude.

Por otro lado, sabemos que los componentes de la diagonal cambian en presencia de un campo magnético externo, a excepción de ε'_3 que no tiene dependencia en el campo magnético. Por lo cual, en presencia de un campo magnético, no se espera la misma respuesta que en el caso donde $B = 0$. En las figuras 5.3 y 5.4 podemos observar las curvas correspondientes a ε'_1 y ε'_2 , bajo un campo magnético externo $B = 1T$, tanto en su parte real como imaginaria, comparados con ε'_3 , la cual ya vimos que es equivalente a $B = 0$.

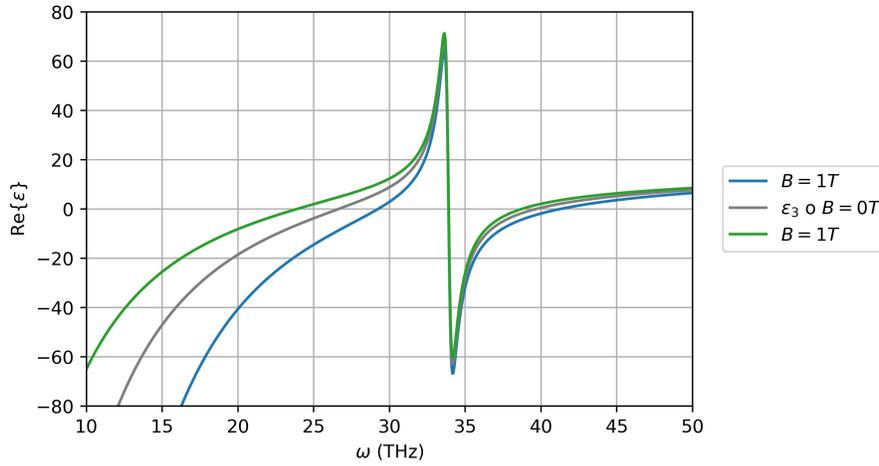


Figura 5.3: Parte real de los componentes del tensor de función dieléctrica ε'_1 (azul) y ε'_2 (verde) bajo un campo magnético externo $B = 1T$, se comparan con ε_3 que no depende del campo magnético.

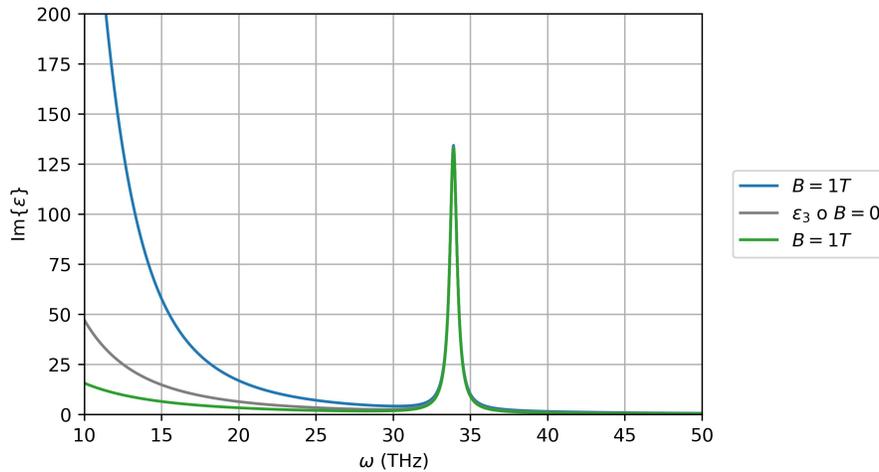


Figura 5.4: Parte imaginaria de los componentes del tensor de función dieléctrica ϵ'_1 (azul) y ϵ'_2 (verde) bajo un campo magnético externo $B = 1T$, se comparan con ϵ_3 que no depende del campo magnético.

Como podemos notar, la respuesta dieléctrica del material cambia. Para frecuencias mayores a la resonancia debido a los fonones en la red, no se observa un cambio significativo, mientras que en el caso de las frecuencias menores, notamos que ϵ'_1 diverge más rápidamente que el caso isotrópico, mientras que ϵ'_2 diverge más lentamente.

Si queremos observar si este cambio ocurre de manera continua o existe algún valor del campo magnético a partir del cual el sistema cambia abruptamente, podemos tomar valores para el campo magnético entre $0-1T$. En las figuras 5.5 y 5.6 podemos observar las distintas curvas obtenidas a partir de esto.

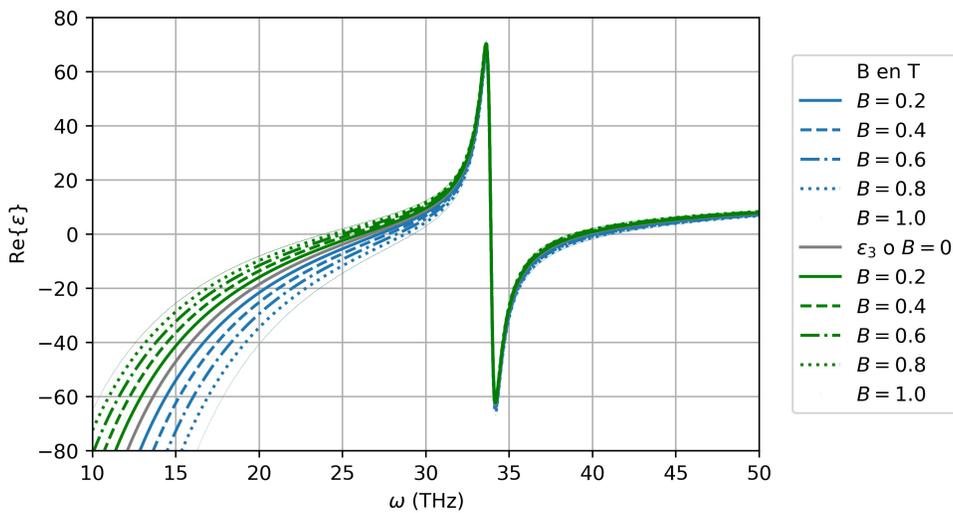


Figura 5.5: Parte real de los componentes del tensor de función dieléctrica ϵ'_1 (azul) y ϵ'_2 (verde) para distintos valores del campo magnético externo B , se comparan con ϵ_3 .

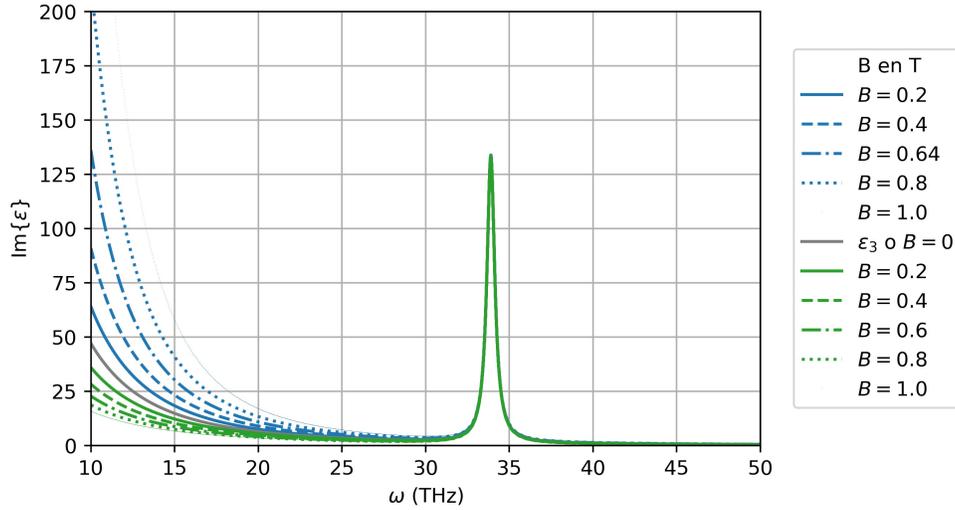


Figura 5.6: Parte imaginaria de los componentes del tensor de función dieléctrica ϵ'_1 (azul) y ϵ'_2 (verde) para distintos valores del campo magnético externo B , se comparan con ϵ_3 .

En estas figuras 5.6 y 5.5, podemos observar que el comportamiento del tensor de función dieléctrica es continuo ante cambios en la intensidad del campo magnético externo, dado lo anterior, podemos continuar con los cálculos en esta región del campo magnético sabiendo que la función dieléctrica conservara un comportamiento suave.

5.2. Polarizabilidad

Como se discutió en los capítulos anteriores, la polarizabilidad juega un papel importante al momento de determinar las eficiencias de esparcimiento y absorción de una esfera. Al igual que la función dieléctrica, en el sistema que estamos estudiando, tiene la forma de un tensor, y no solo esto, si no que es un tensor diagonal cuando nos encontramos en el sistema coordenado de ejes principales.

Los cálculos que se presentan a continuación corresponden a las entradas de este tensor ($\alpha'_1(B)$, $\alpha'_2(B)$ y α'_3) donde al igual que en el caso de la función dieléctrica, las primeras dos de estas entradas dependen directamente el campo magnético, mientras que la tercera es independiente. De manera similar, se presenta la polarizabilidad tanto real (Figura 5.7) como la imaginaria (Figura 5.8), calculada para una esfera de $20nm$ de radio.

Lo que podemos observar en estas gráficas es que al cambiar la función dieléctrica debido al campo magnético, la polarizabilidad presenta un cambio en la posición de las resonancias, tanto en la parte real como en la imaginaria, donde es importante remarcar que la resonancia correspondiente a la contribución electrónica de la función dieléctrica presenta un cambio mayor en la frecuencia de resonancia.

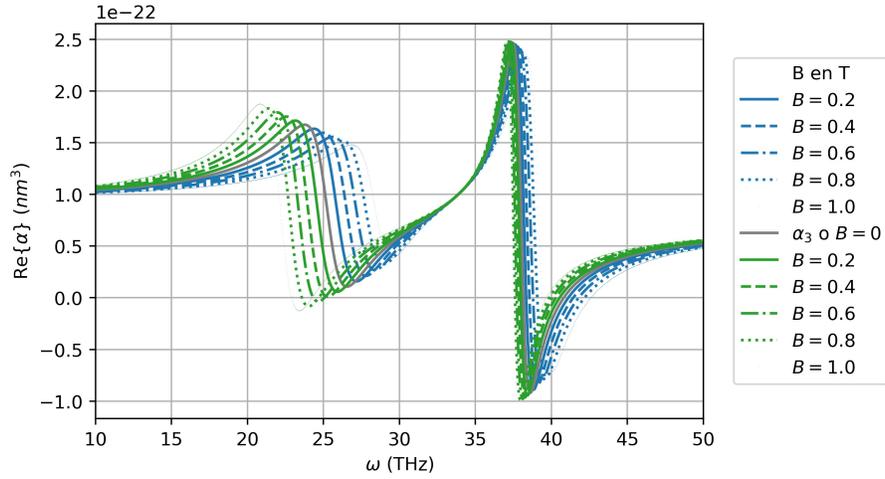


Figura 5.7: Parte real de los componentes del tensor de polarizabilidad α'_1 (azul) y α'_2 (verde) para una esfera de 20nm de radio a distintos valores del campo magnético externo B , se comparan con α_3 que no depende del campo magnético.

Tanto la extinción como el esparcimiento se encuentran relacionados con la parte imaginaria y la norma de las entradas del tensor de polarización, por lo que resulta natural pensar que el cambio en las frecuencias de resonancias se vera reflejado de igual manera al momento de calcular las eficiencias.

5.3. Eficiencias de absorción y esparcimiento

Los cálculos siguientes se harán dentro de la aproximación dipolar, esto debido a que las eficiencias dependen de el parámetro de tamaño (x) y sus potencias. Recordemos que este parámetro en un medio con función dieléctrica ε_m está dado por

$$x = \frac{2\pi a \sqrt{\varepsilon_m}}{\lambda}. \quad (5.2)$$

Con esto, y dado el rango de frecuencias en el que estamos trabajando, podemos calcular la magnitud de este parámetro en distintas potencias. En la figura 5.9 podemos observar la magnitud de x y x^2 considerando una esfera de 50 nm de radio, como podemos notar la magnitud de x es lo suficientemente pequeña para que la magnitud de x^2 sea prácticamente cero. Por esta razón, nos quedaremos únicamente dentro de la aproximación dipolar, ya que, debido a la escala de las partículas y la longitud de onda, es una buena aproximación.

Una vez discutido lo anterior, y ya que tenemos la polarizabilidad del material, podemos calcular la eficiencia de absorción y esparcimiento en la aproximación dipolar como función de la frecuencia y del campo magnético. Como primer acercamiento, podemos calcular ambas en el caso en el que $B=0$, de tal forma que podamos observar su comportamiento inicial y usar este de referencia. Los valores calculados se presentan en la figura 5.10 y 5.11, para el

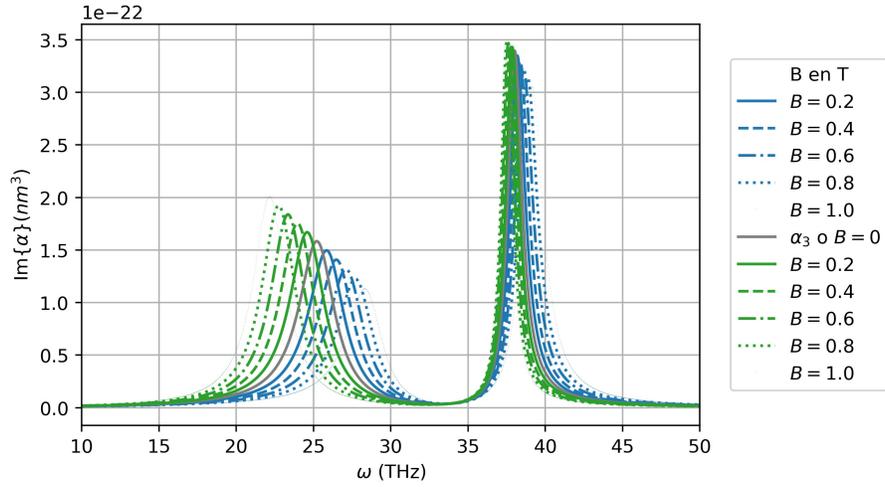


Figura 5.8: Parte imaginaria de los componentes del tensor de polarizabilidad α'_1 (azul) y α'_2 (verde) para una esfera de 20nm de radio a distintos valores del campo magnético externo B , se comparan con α_3 que no depende del campo magnético.

esparcimiento y la absorción respectivamente.

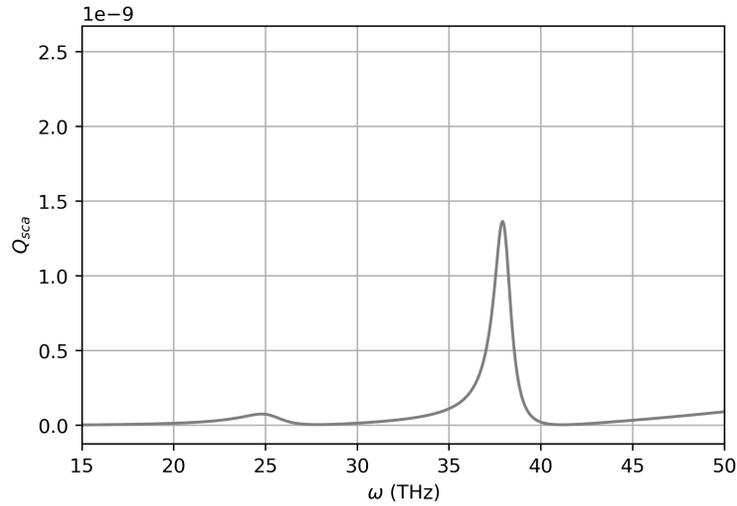


Figura 5.10: Eficiencia de esparcimiento (Q_{sca}) para una esfera de n-InSb de 20nm de radio en ausencia de un campo magnético externo ($B = 0$).

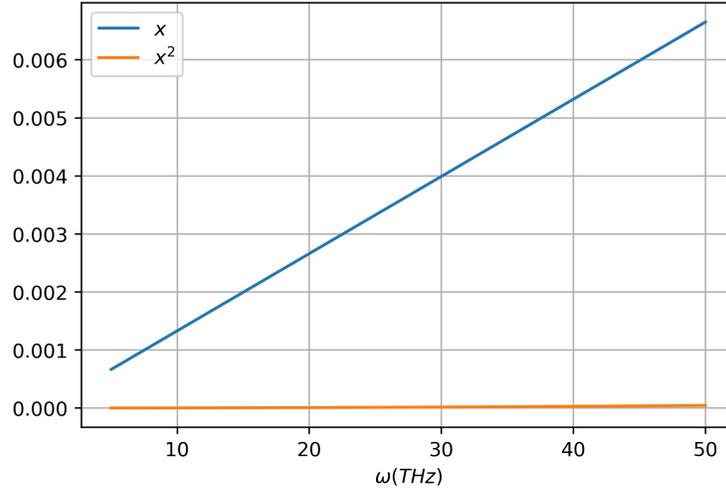


Figura 5.9: Magnitud del parámetro de tamaño x y su cuadrado x^2 calculado para una esfera de 50 nm.

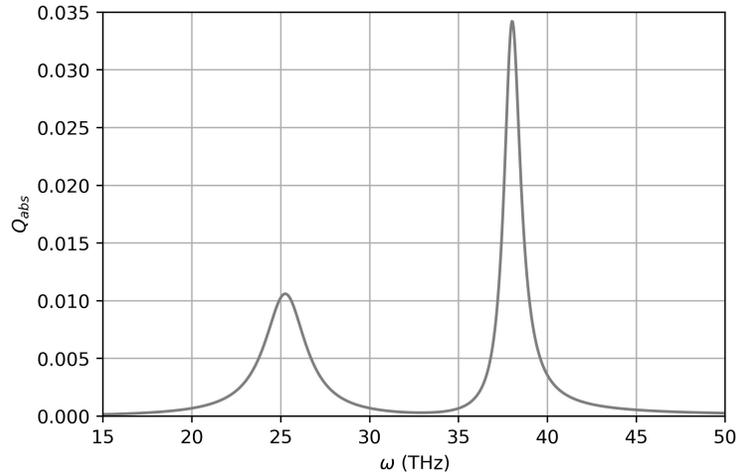


Figura 5.11: Eficiencia de absorción (Q_{sca}) para una esfera de n-InSb de 20nm de radio en ausencia de un campo magnético externo ($B = 0$).

Notemos que la longitud de onda de la radiación electromagnética ($\sim 10^{-4} - 10^{-3}m$) es varios ordenes de magnitud mayor que el radio de la partícula esférica ($10^{-9}m$). Por lo cual el esparcimiento, que es proporcional a $k^4 \propto 1/\lambda^4$, es prácticamente cero comparado con la extinción. En nuestro caso, es 8 ordenes de magnitud menor, por lo cual para este caso podríamos decir que

$$Q_{ext} \approx Q_{abs}.$$

Además de esto, al igual que en la polarizabilidad distinguimos dos resonancias, para las cuales, debido a los parámetros del sistema, la de menor frecuencia podemos asociarlas al

comportamiento electrónico y las de mayor frecuencia al fonónico y vibracional.

Una vez que calculamos las eficiencias para campo magnético $B = 0$, podemos proceder a calcular las eficiencias para distintos valores del campo. Al igual que en los cálculos anteriores mantendremos el valor de $B \in [0, 1T]$. Aunque la magnitud de la eficiencia de esparcimiento es mucho menor que la de extinción, se presentan ambos por completez.

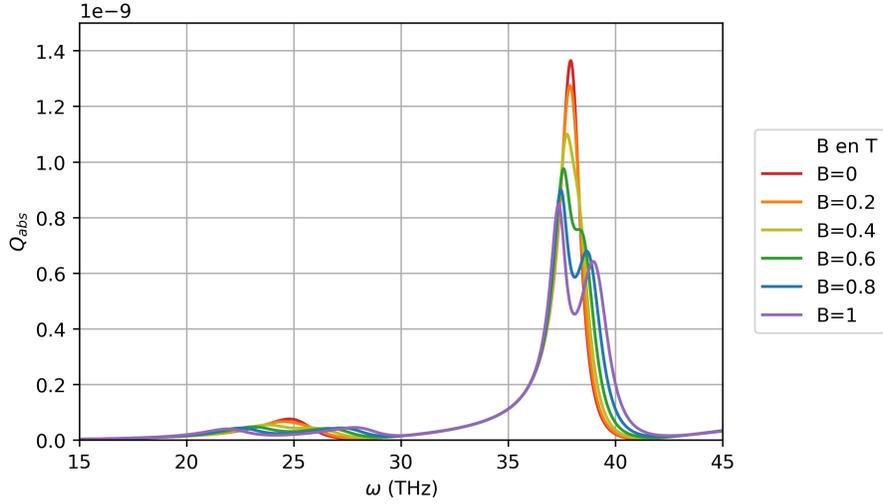


Figura 5.12: Eficiencia de esparcimiento (Q_{sca}) para una esfera de n-InSb de $20nm$ de radio a distintos valores de $B \in [0, 1T]$.

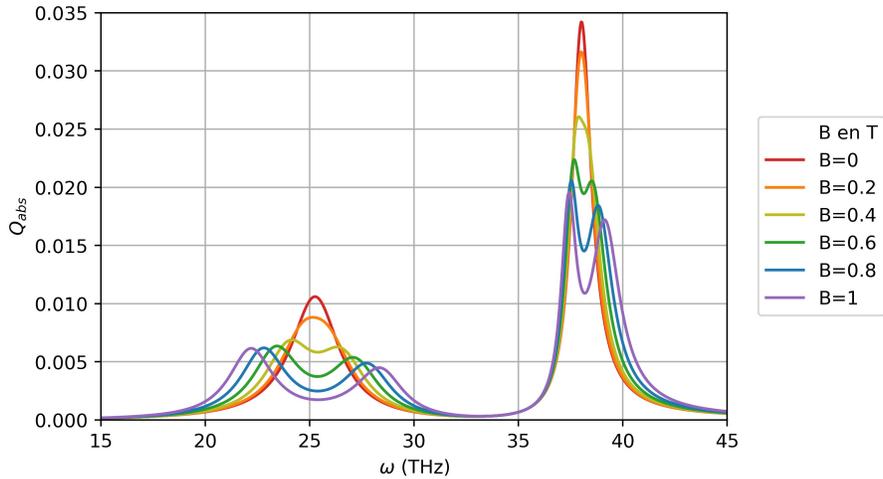


Figura 5.13: Eficiencia de absorción (Q_{abs}) para una esfera de n-InSb de $20nm$ de radio a distintos valores de $B \in [0, 1T]$.

Como esperábamos, el cambio de posición de las resonancias en la polarizabilidad indujo un cambio en las eficiencias de absorción y esparcimiento de la esfera. Sin embargo, a diferencia de la polarizabilidad, no tenemos precisamente un cambio en la posición de las

resonancias, lo que tenemos es que al aumentar la magnitud del campo magnético externo observamos una división de la resonancia en dos resonancias, donde una se recorre a menor frecuencia, mientras que la otra se corre a una mayor frecuencia.

Este fenómeno es similar a lo que ocurre con el efecto Zeeman donde, al aplicar un campo magnético externo, las líneas espectrales de un átomo se separan en múltiples líneas cercanas a éste. Sin embargo, es importante notar que para el efecto Zeeman normal el estado base ($B = 0$) no desaparece, solo se obtienen estados nuevos. Mientras que en nuestro caso, la resonancia inicial ($B = 0$) no se conserva en presencia de un campo magnético externo, debido a que la luz linealmente polarizada en x únicamente afecta las resonancias que dependen de B .

Para entender de mejor manera lo que sucede podemos estudiar el sistema desde distintos acercamientos. Como sabemos el sistema tiene tanto componentes electrónicas como asociadas a fonones y vibraciones, y por la forma en que dedujimos el tensor dieléctrico sabemos que la contribución debido al campo magnético está asociada a los electrones en el material. Sin embargo, como podemos ver en la figura 5.13 tanto la resonancia electrónica como la fonónica se ven afectadas bajo un campo magnético. Es por esta razón que en la siguiente sección estudiaremos por separado cada una de estas contribuciones.

5.4. Contribución electrónica y fonónica

Recordemos la expresión de la función dieléctrica que obtuvimos una vez que diagonalizamos la matriz

$$\varepsilon'_1 = \varepsilon_\infty \left(1 + \underbrace{\frac{\omega_L^2 - \omega_T^2}{\omega_T^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega}}_{\text{fonones ópticos y vibraciones}} - \underbrace{\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma + \omega_c)}}_{\text{Drude} + \omega_c} \right),$$

la forma en la que lo estudiaremos esta vez será repitiendo los cálculos para la eficiencia de absorción en una esfera de $20nm$ de n-InSb pero separándola en dos:

- **Contribución electrónica:** Quitando el término de fonones ópticos y vibraciones de la función dielectrica
- **Contribución fonónica:** Quitando el término de Drude, que también contiene la relación con el campo magnético.

Con lo anterior, podemos observar la relación entre estas contribuciones y la forma en que influyen en el sistema completo, al considerar ambas. La figura 5.14 muestra los resultados obtenidos en ausencia de campo magnético.

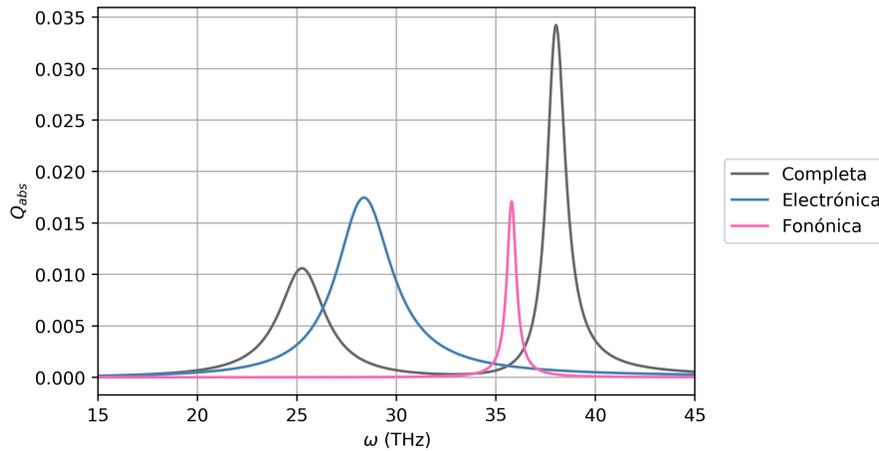


Figura 5.14: Eficiencia de absorción (Q_{abs}) para una esfera de n-InSb de $20nm$ de radio para $B = 0$, se compara la contribución electrónica y fonónica.

Como podemos observar, la respuesta del material no es simplemente la suma de las respuestas, es decir, existe una interacción entre ellas que da como resultado el comportamiento completo del sistema. Esto concuerda con que, a pesar de que la contribución fonónica no está directamente relacionada con el campo magnético externo, en la figura 5.13 observemos que la resonancia asociada a los fonones también sufre una separación.

En la figura 5.15 podemos observar los cálculos realizados para la eficiencia de absorción, ahora bajo un campo magnético externo $B = 0.6 T$.

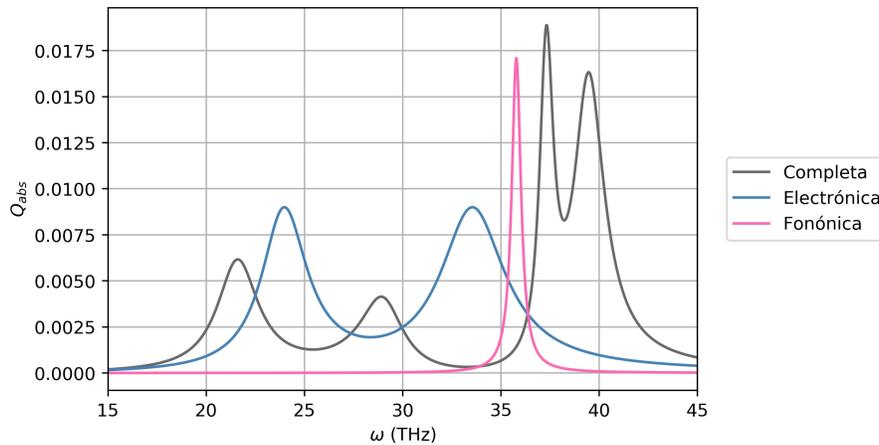


Figura 5.15: Eficiencia de absorción (Q_{abs}) para una esfera de n-InSb de $20nm$ de radio para $B = 0.6T$, se compara la contribución electrónica y fonónica.

Lo que podemos notar de manera inmediata, es que la contribución fonónica no sufre ningún cambio en presencia de un campo magnético externo, lo cual era completamente de esperarse dado la forma de ésta. Por otra parte, también podemos notar que la contribución

electrónica no es la misma por su cuenta que al tener la función completa, lo cual podemos ver tanto en la amplitud de las resonancias, como en la separación de las resonancias resultantes.

A partir de esto, y en concordancia con lo anterior, podemos concluir que la respuesta del material no es simplemente la suma de la respuesta electrónica con la respuesta fonónica, si no que existe una relación entre ellas que determina la respuesta completa del material.

5.5. Eigenvalores

Así como podemos estudiar el sistema separando las contribuciones electrónica y fonónica, ya que estamos resolviendo un problema en el sistema coordinado de ejes principales, también podemos estudiar este sistema separándolo en los eigenvalores del tensor de función dieléctrica.

Para esto, análogamente a lo que se hizo en la sección, repetiremos los cálculos conservando solo uno de los eigenvalores en cada caso. Es importante notar que dado que ε_3 no influye en el cálculo cuando tenemos luz polarizada en x , entonces solo lo tendremos las contribuciones debido a ε'_1 y ε'_2 , respectivamente.

Al igual que se hizo en las secciones anteriores, primero calculemos cuando no tenemos un campo magnético externo, esto se presenta en la figura 5.16.

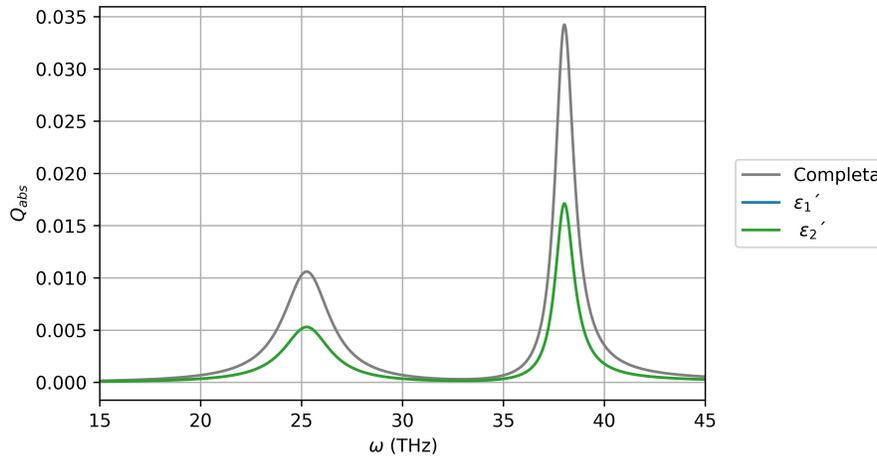


Figura 5.16: Eficiencia de absorción (Q_{abs}) para una esfera de n-InSb de $20nm$ de radio para $B = 0$, se compara la contribución de los eigenvalores ε'_1 y ε'_2 .

Recordemos que cuando $B = 0 \rightarrow \varepsilon'_1 = \varepsilon'_2$ por lo que tiene sentido que las curvas estén encimadas. Por otro lado, la altura de la curva de los eigenvalores es menor a la curva completa, esto debido a que para los eigenvalores estamos considerando la proyección del eje X en el sistema de ejes principales, la cual corresponde a $\frac{1}{2}$.

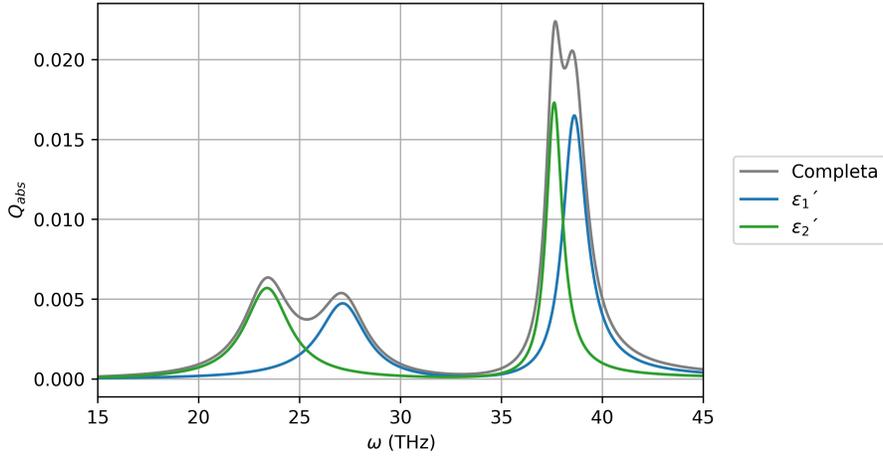


Figura 5.17: Eficiencia de absorción (Q_{abs}) para una esfera de n-InSb de $20nm$ de radio para $B = 0.6$ T, se compara la contribución de los eigenvalores ϵ_1' y ϵ_2' .

Ahora, cuando $B \neq 0$ sabemos que existe una separación en la respuesta del material, la cual depende directamente de la magnitud de B . En la figura 5.17 podemos observar como afecta individualmente a cada uno de los eigenvalores donde, contrario al caso de las contribuciones electrónicas y fonónicas, sí podemos recuperar el comportamiento completo del material sumando las respuestas de cada eigenvalor. Más aún, podemos asociar un eigenvalor a cada una de las resonancias resultantes.

5.6. Separación de las resonancias como función del campo magnético B

De manera similar a como se hace en el efecto Zeeman, podemos medir cuánto se separan las resonancias como función del campo magnético. esto lo podemos hacer encontrando los máximos locales en la curva de la eficiencia de absorción para distintos campos.

Como el campo magnético afecta de mayor manera a la resonancia electrónica nos centraremos en ésta. Por esa razón haremos un cambio de variable de tal forma que el cero quedé ahora en la frecuencia asociada al máximo cuando $B = 0$. Llamemos ω_0 a esta frecuencia entonces el cambio que tenemos en mente es $\omega' = \omega - \omega_0$, de tal forma que la eficiencia de absorción quedaría como en la figura 5.18.

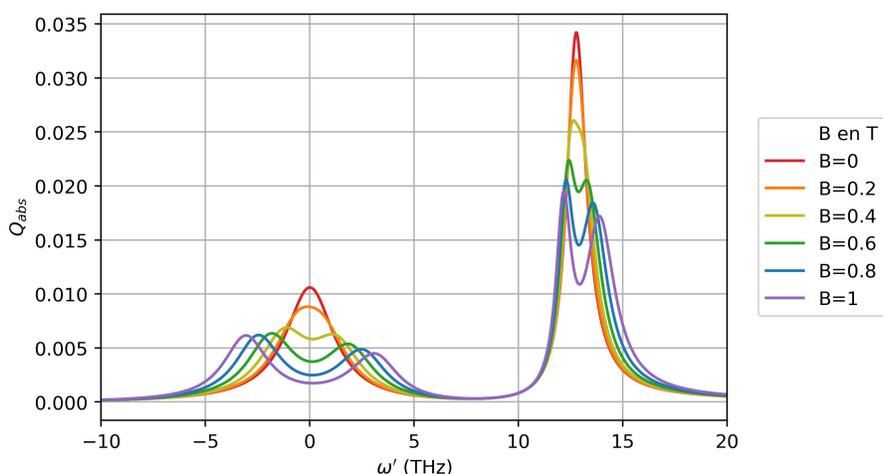


Figura 5.18: Eficiencia de absorción (Q_{abs}) para una esfera de n-InSb de $20nm$ de radio a distintos valores de $B \in [0, 1T]$, usando $\omega' = \omega - \omega_o$, la frecuencia recorrida.

Una vez hecho esto, podemos encontrar computacionalmente los máximos locales de las distintas curvas, y graficarlos como función del campo magnético, llamaremos ω_+ a la resonancia cuya frecuencia es mayor a ω_0 y ω_- a su análogo menor (Figura 5.19). Notemos que en 0.2 T aún no se observa una separación por lo cual comenzamos a calcular los máximos en 0.4 T.

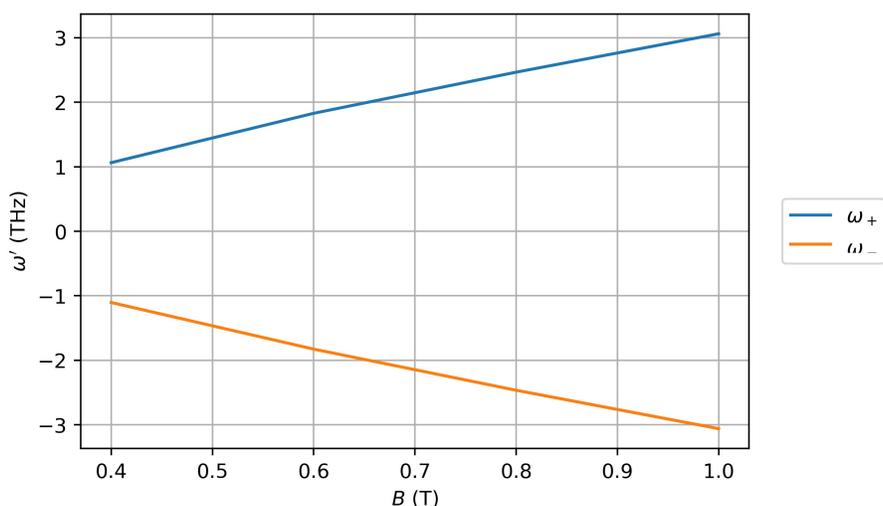


Figura 5.19: Separación de las frecuencias de resonancia de la eficiencia de absorción calculada encontrada a partir de los máximos locales encontrados para la resonancia electrónica.

La separación de la resonancia electrónica muestra un comportamiento prácticamente simétrico respecto a la resonancia a campo magnético $B = 0$. Sin embargo, el hecho de que solo observemos una separación a partir de campo $B = 0.4$ T parece contradictoria con

lo que habíamos observado anteriormente, en particular, con que teníamos un corrimiento continuo para el cual no se observaba un campo mínimo.

Esto se debe a que al sumar las contribuciones, debido a la cercanía de los máximos asociados a cada eigenvalor y al ancho de la resonancia, no podemos distinguir un máximo de otro. Sin embargo, si tomamos únicamente los máximos asociados a cada eigenvalor esperamos recuperar la separación continua que hemos descrito hasta el momento. (Fig 5.20).

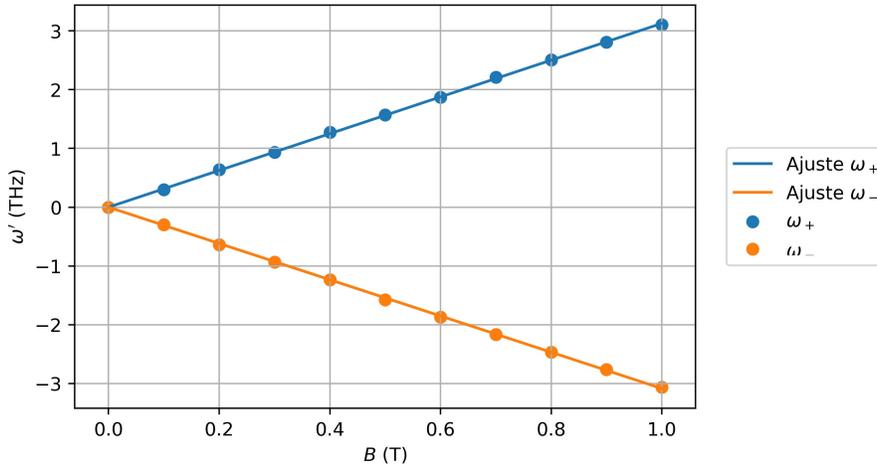


Figura 5.20: Separación de las frecuencias de resonancia de la eficiencia de absorción calculada a partir de los distintos eigenvalores para la resonancia electrónica.

En efecto, como esperábamos, la gráfica 5.20 muestra un comportamiento continuo y preserva la simetría que habíamos observado anteriormente. A partir de los ajustes lineales podemos llegar a las siguientes ecuaciones para la frecuencia de la resonancia en cada uno de los casos

$$\omega_+(B) = \omega_o + (3.13 \times 10^{12} \text{kg/C}) * B, \quad (5.3)$$

$$\omega_-(B) = \omega_o - (3.09 \times 10^{12} \text{kg/C}) * B. \quad (5.4)$$

La separación en las frecuencias es similar a la separación que ocurre en los niveles de energía observada en el efecto Zeeman, con la reserva de que ésta no es estrictamente simétrica. Sin embargo, recordemos que tenemos la interacción con los fonones y las vibraciones del material.

Una mejor manera de observar ésta similitud es graficar la eficiencia de absorción normalizada ($Q_{ext}(\omega)/Q_{ext}(\omega_0)$) para las frecuencias de resonancia a distintos valores de B (Figura 5.21). Construyendo así un diagrama parecido a los diagramas energéticos del efecto Zeeman.

5.6. Separación de las resonancias como función del campo magnético B

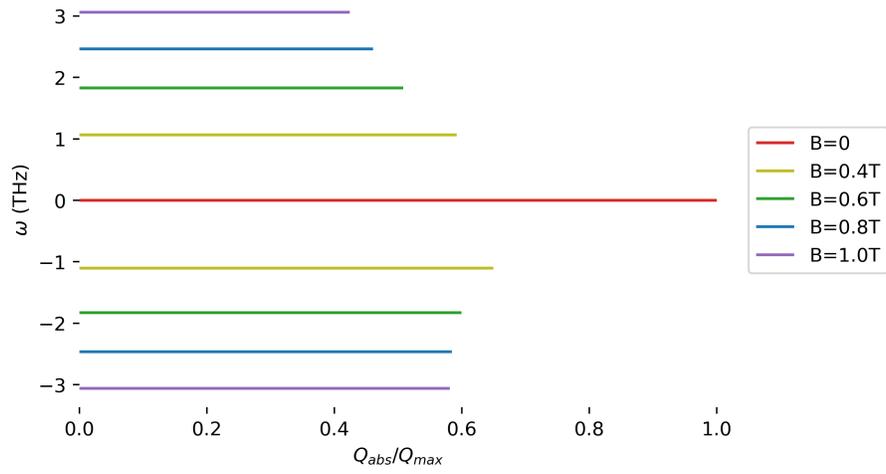


Figura 5.21: Eficiencia de absorción normalizada para las frecuencias de resonancia a distintos valores de $B \in [0, 1T]$

Capítulo 6

Cascarón de n-InSb

Los sistemas núcleo-cascarón (core-shell) han sido ampliamente estudiados debido a sus posibles aplicaciones, como en catálisis [28] y biosensores [29], entre otros. Para estudiarlos, dependiendo de su complejidad (simetría, tamaño, capas), se han utilizado diversas aproximaciones como la aproximación de dipolo discreto o teorías de medio efectivo .

En el caso de nanopartículas en el límite de longitud de onda larga, dado que el cascarón se puede ver como un objeto homogéneo con una función dieléctrica ε_{eff} , las teorías de medio efectivo resultan ser una buena aproximación.

Supongamos una esfera de radio r_s que contiene una esfera de radio r_c concéntrica (núcleo) (Figura 6.1). Además consideremos que el núcleo y el cascarón tienen funciones dieléctricas ε_c y ε_s respectivamente.

Si calculamos el volumen de la esfera total y la comparamos con la esfera interna llegaremos a que la fracción de volumen entre ellas está dada por

$$f = \left(\frac{r_c^3}{r_s^3} \right), \quad (6.1)$$

de tal forma que podemos obtener una función dieléctrica efectiva en términos de ε_s , ε_c y f [22]

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_s \frac{\varepsilon_c(2 + f) + \varepsilon_s(2 - 2f)}{\varepsilon_s(2 + f) + \varepsilon_c(1 - f)} \quad (6.2)$$

6.1. Cálculos y Resultados

Consideraremos un cascarón esférico de InSb en agua, cuyo núcleo también es de agua. Dados los parámetros de este sistema, en lugar de estudiarlo a través de la fracción de llenado, lo haremos considerando que tenemos un radio total fijo (r_s) y variaremos el radio de la esfera de agua contenida en el centro (r_c).

Ya que definimos nuestro sistema podemos proceder a calcular la eficiencia de absorción siguiendo el formalismo expuesto en la sección anterior y en el capítulo 4. Con esto, para un

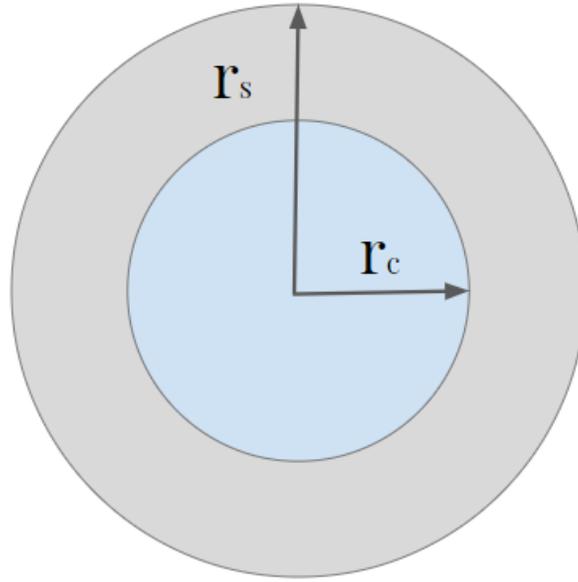


Figura 6.1: Esquema de un cascarón esférico de dos materiales, el radio total del cascarón es r_s que contiene una esfera concéntrica de radio r_c

cascarón con un radio total de 30 nm y variando el radio del núcleo en ausencia de campo magnético obtenemos la figura 6.2 .

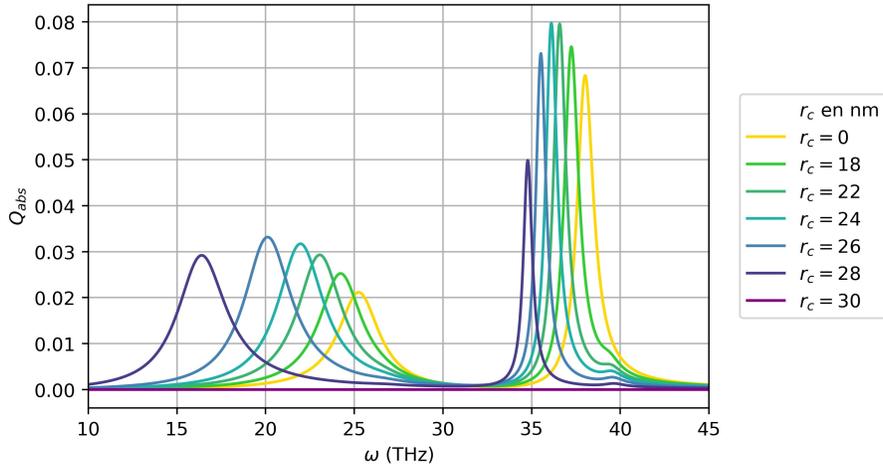


Figura 6.2: Eficiencia de absorción (Q_{abs}) para un cascarón esférico de n-InSb de 30 nm de radio variando el radio del núcleo (r_c) en ausencia de un campo magnético externo. ($B = 0$)

Al variar el radio del núcleo observamos un cambio en la frecuencia de resonancia y no solo esto, sino que la eficiencia del material aumenta hasta cierto radio, a partir del cual comienza a disminuir. Además es importante notar que los casos límites son congruentes, es

decir cuando $r_c = 0$ no tenemos un núcleo de agua y por lo mismo, la respuesta es la de una esfera sólida de InSb. Mientras que en el caso en que el $r_c = r_T$ tenemos una esfera de agua en agua, por lo cual no observamos alguna respuesta.

Ahora, si tenemos un campo magnético constante, también podemos observar como cambia la eficiencia de absorción al variar el radio del núcleo (figura 6.3).

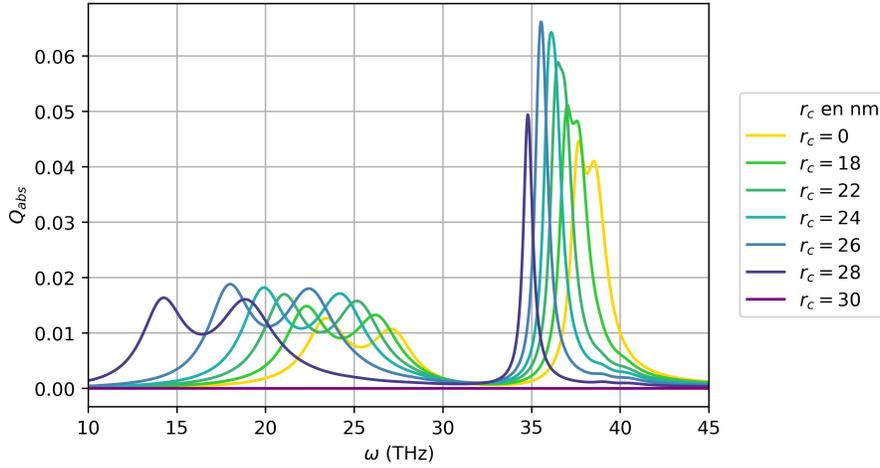


Figura 6.3: Eficiencia de absorción (Q_{abs}) para un cascarón esférico de n-InSb de 30 nm de radio variando el radio del núcleo (r_c) en presencia de un campo magnético externo. ($B = 0.6T$)

Podemos notar que a pesar de aún observar la separación de las frecuencias de resonancia debido al campo, estas ya no conservan su posición al variar la fracción de llenado. Lo cual era de esperarse debido al comportamiento descrito en la figura 6.2, y que de manera similar a esta, también tenemos un aumento para ciertos radios.

Por último, al igual que lo hicimos para el caso de una esfera, podemos calcular la eficiencia variando la magnitud del campo magnético externo, en este caso manteniendo constante el radio del núcleo.

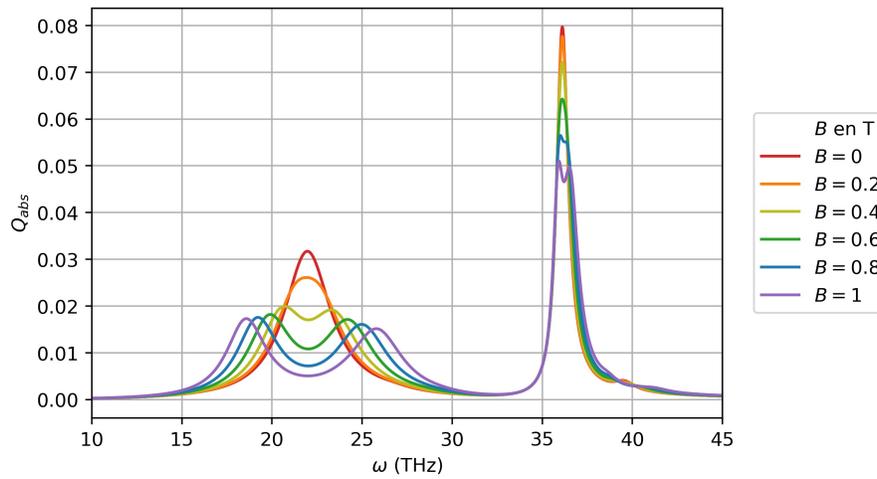


Figura 6.4: Eficiencia de absorción (Q_{abs}) para un cascarón esférico de n-InSb de 30 nm de radio con un nucleo de agua de 24nm de radio en presencia de un campo magnético externo. ($B \in [0, 1T]$)

Obtenemos una gráfica similar a la que se tenía en el caso de una esfera sólida, notando que para este caso las frecuencias de resonancia se encuentran recorridas.

Dado que el comportamiento general de este sistema es similar al que se tenía para una esfera sólida, se puede realizar un análisis análogo al de eigenvalores, frecuencia de separación en función de B y los demás realizados en el capítulo 5 para una esfera sólida.

Capítulo 7

Conclusiones y comentarios finales

En este trabajo se presentó el estudio de nanopartículas de n-InSb en el rango de frecuencias de THz bajo la influencia de un campo magnético externo constante. En particular se estudió la eficiencia de absorción de estas partículas. Debido al rango de frecuencias y al tamaño de las partículas fue posible permanecer dentro de la aproximación dipolar para esferas pequeñas comparadas con la longitud de onda. Por otra parte, dado que el tensor de función dieléctrica del n-InSb es anisotrópico se recurrió al estudio de las nanoesferas a partir del sistema de ejes principales. Esto nos permitió construir el tensor de polarizabilidad y a partir de éste poder calcular las eficiencias correspondientes al proyectar sobre los ejes principales. Además utilizando la polarizabilidad para esferas anidadas pudimos extender los resultados a cascarones de n-InSb.

En ausencia de campo magnético se observó la curva de eficiencia de extinción esperada para un semiconductor, donde podemos distinguir la resonancia electrónica con la asociada a los fonones ópticos y las vibraciones de la red. Sin embargo, en presencia de un campo magnético la respuesta del material cambió, se observó una separación de la resonancia a campo cero, tanto en el caso de la resonancia electrónica como en la fonónica.

Por esta razón se decidió calcular la eficiencia de extinción considerando únicamente los efectos debido a los electrones en la función dieléctrica, así como únicamente el de fonones y vibraciones. Lo que se observó es que únicamente se presenta una separación debido al campo magnético en el caso donde estamos considerando la contribución electrónica. Sin embargo, los modos fonónicos se encuentran acoplados con los electrónicos, por lo que al considerar la función dieléctrica completa observamos la separación para ambas contribuciones.

Posteriormente, se calculó la eficiencia de extinción para cada uno de los eigenvalores del tensor de función dieléctrica. A partir de estos cálculos pudimos observar que la respuesta del material estaba compuesta por la suma de la respuesta de los eigenvalores por separado. Además se logró determinar que la separación de la resonancia se debe a que cada eigenvalor tiene una respuesta diferente al campo magnético externo. En concreto, al aumentar

la intensidad del campo, la resonancia asociada a uno se desplaza a una frecuencia mayor, mientras que la otra resonancia es desplazada a una frecuencia menor.

Esto nos permitió estudiar a mayor detalle la respuesta como función del campo magnético. En particular, se estudió la relación de las frecuencias de resonancia con el campo magnético externo. Se obtuvo que la separación en las frecuencias era lineal y, prácticamente, simétrica respecto a la frecuencia en ausencia de campo magnético. Esto resulta análogo a lo que sucede en el caso del efecto Zeeman, donde las energías debido al campo simétrico están dadas por los eigenvalores del Hamiltoniano y son simétricas respecto a la energía del estado base.

Finalmente, se calculó la eficiencia de extinción para cascarones de InSb con un núcleo esférico de agua de radio variable. Para un radio constante de la inclusión, al variar el campo magnético, se observó la separación de la resonancia de la misma forma que en la esfera. Sin embargo, es importante notar que al modificar el radio de la inclusión también ocurrió un cambio en la frecuencia de resonancia, lo cual es un mecanismo independiente al campo magnético.

Con todo lo anterior, podemos concluir que el n-InSb resulta ser un material con un gran potencial para el estudio de la respuesta magnetoplasmónica en el rango de THz al no requerir campos magnéticos altos ($< 1T$) para poder observar los efectos en la respuesta del material. Además nos permite tener un mecanismo accesible para sintonizar la frecuencia del material a conveniencia. Por otro lado, el estudio de sistemas más complejos, como los nanocascarones, nos permite observar otros mecanismos mediante los cuales también podemos controlar la respuesta plasmónica de los materiales.

Bibliografía

- [1] Chochol, J., Postava, K., Čada, M., & Pištora, J. (2017). Experimental demonstration of magnetoplasmon polariton at InSb (InAs)/dielectric interface for terahertz sensor application. *Scientific reports*, 7(1), 1-8.
- [2] Yatsui, T., Kouroggi, M., & Ohtsu, M. (2001). Plasmon waveguide for optical far/near-field conversion. *Applied Physics Letters*, 79(27), 4583-4585.
- [3] Mallidi, S., Larson, T., Tam, J., Joshi, P. P., Karpouk, A., Sokolov, K., & Emelianov, S. (2009). Multiwavelength photoacoustic imaging and plasmon resonance coupling of gold nanoparticles for selective detection of cancer. *Nano letters*, 9(8), 2825-2831.
- [4] You, Y., Gonçalves, P. A. D., Shen, L., Wubs, M., Deng, X., & Xiao, S. (2019). Magnetoplasmons in monolayer black phosphorus structures. *Optics letters*, 44(3), 554-557.
- [5] Tonouchi, M. (2007). Cutting-edge terahertz technology. *Nature photonics*, 1(2), 97.
- [6] Chochol, J., Postava, K., Čada, M., Vanwolleghem, M., Halagačka, L., Lampin, J. F., & Pištora, J. (2016). Magneto-optical properties of InSb for terahertz applications. *AIP Advances*, 6(11), 115021.
- [7] Sokolik, A. A., & Lozovik, Y. E. (2019). Edge magnetoplasmons in graphene: Effects of gate screening and dissipation. *Physical Review B*, 100(12), 125409.
- [8] Yan, H., Li, Z., Li, X., Zhu, W., Avouris, P., & Xia, F. (2012). Infrared spectroscopy of tunable Dirac terahertz magneto-plasmons in graphene. *Nano letters*, 12(7), 3766-3771.
- [9] Zhang, Y. M., Ren, G. J., & Yao, J. Q. (2015). Surface-enhanced Raman scattering effects of gold and InSb nanoparticles at THz frequencies. *Optics Communications*, 341, 173-177.
- [10] Keyes, R. J., Zwerdling, S., Foner, S., Kolm, H. H., & Lax, B. (1956). Infrared cyclotron resonance in Bi, InSb, and InAs with high pulsed magnetic fields. *Physical Review*, 104(6), 1804.
- [11] Palik, E. D., Picus, G. S., Teitler, S., & Wallis, R. F. (1961). Infrared cyclotron resonance in InSb. *Physical Review*, 122(2), 475.

-
- [12] Griffiths, D. J. (1962). *Introduction to electrodynamics*. New Jersey: Prentice Hall.
- [13] Kuzmany, H. (2009). *Solid-state spectroscopy: an introduction*. Springer Science & Business Media.
- [14] Ashcroft, N. W., Mermin, N. D., & Wei, D. (2016). *Solid State Physics*. Cengage Learning Asia Pte Limited.
- [15] Blaber, M. G., Arnold, M. D., & Ford, M. J. (2009). "Search for the ideal plasmonic nanoshell: the effects of surface scattering and alternatives to gold and silver." *The Journal of Physical Chemistry C*, 113(8), 3041-3045.
- [16] Moliton, A. (2007). *Basic electromagnetism and materials*. Springer Science & Business Media.
- [17] Yu, P. Y., & Cardona, M. (1996). *Fundamentals of semiconductors: physics and materials properties*. Springer.
- [18] Bohren, C. F., & Huffman, D. R. (2008). *Absorption and scattering of light by small particles*. John Wiley & Sons.
- [19] JA, S. (1941). *Electromagnetic theory*. McGraw-Hill Book Company, New York.
- [20] Kelly, K. L., Coronado, E., Zhao, L. L., & Schatz, G. C. (2003). The optical properties of metal nanoparticles: the influence of size, shape, and dielectric environment. *The Journal of Physical Chemistry B* 107, (3), 668-677.
- [21] Markel, V. A. (2016). Introduction to the Maxwell Garnett approximation: tutorial. *JOSA A*, 33(7), 1244-1256.
- [22] Diaz-HR, R., Esquivel-Sirvent, R., & Noguez, C. (2016). Plasmonic Response of Nested Nanoparticles with Arbitrary Geometry. *The Journal of Physical Chemistry C*, 120(4), 2349-2354.
- [23] Johnson, P. B., & Christy, R. W. (1972). *Optical constants of the noble metals*. Physical review B, 6(12), 4370.
- [24] Hulst, H. C., & van de Hulst, H. C. (1981). *Light scattering by small particles*. Courier Corporation.
- [25] Dressel, M., & Grüner, G. (2002). *Electrodynamics of solids: optical properties of electrons in matter*.
- [26] Abraham Ekeroth, R. M., Ben-Abdallah, P., Cuevas, J. C., & García-Martín, A. (2018). Anisotropic thermal magnetoresistance for an active control of radiative heat transfer. *ACS photonics*, 5(3), 705-710.

- [27] Liu, W., Chang, A. Y., Schaller, R. D., & Talapin, D. V. (2012). Colloidal insb nanocrystals. *Journal of the American Chemical Society*, 134(50), 20258-20261.
- [28] Gawande, M. B., Goswami, A., Asefa, T., Guo, H., Biradar, A. V., Peng, D. L., ... & Varma, R. S. (2015). Core-shell nanoparticles: synthesis and applications in catalysis and electrocatalysis. *Chemical Society Reviews*, 44(21), 7540-7590.
- [29] Anker, J. N., Hall, W. P., Lyandres, O., Shah, N. C., Zhao, J., & Van Duyne, R. P. (2010). Biosensing with plasmonic nanosensors. In *Nanoscience and Technology: A Collection of Reviews from Nature Journals* (pp. 308-319).