



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
ENERGÍA – PROCESOS Y USO EFICIENTE DE ENERGÍA

**DINÁMICA DE UN CUBIT POLARITÓNICO
CON BAJO CONSUMO DE ENERGÍA**

T E S I S
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:
RICARDO RUIZ SÁNCHEZ

TUTOR PRINCIPAL:
DR. YURIY RUBO
INSTITUTO DE ENERGÍAS RENOVABLES, UNAM

TEMIXCO, MORELOS (MES EN QUE SE REALIZÓ EL EXAMEN) 2020

TEMIXCO, MORELOS, OCTUBRE, 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Raúl Mauricio Rechtman Schrenzel

Secretario: Dr. Marcelo Lozada y Cassou

1^{er}. Vocal: Dr. Yuriy Rubo

2^{do}. Vocal: Dra. María del Rocío Nava Lara

2^{do}. Vocal: Dr. Gennadiy Burlak

Lugar donde se realizó la tesis:

Instituto de Energías Renovables, UNAM, Temixco, Morelos

TUTOR DE TESIS:

Dr. Yuriy Rubo

FIRMA

Dedicado a

Alejandra de Jesús Pérez López
amor, sonrisas y comprensión.

Agradecimientos

Deseo agradecer primeramente a la vida por permitirme llegar a este momento importante de mi carrera, a mis padres Miguel y Beti, mis hermanos por todas sus demostraciones de cariño, comprensión y ayuda. A mi cuñada Karina por su aprecio y por darme una integrante más a la familia y desde luego que a la consentida de la familia Danna Michelle.

Al Dr. Yuriy Rubo le estoy infinitamente agradezco por aceptarme ser su estudiante, en darme la oportunidad de trabajar con él, por su apoyo, respaldo y confianza en todo momento. Por despertar en mi, el interés en temas muy interesantes como la “óptica moderna de nanoestructuras”. Por la confianza que en todo momento depositó en mí y por haber compartido sus ideas y conocimientos conmigo que en todo momento me sorprendían, además de su infinita paciencia que me tiene, por aclararme mis dudas ante ideas erróneas en el camino de la investigación y darme las herramientas necesarias para poder desarrollar el trabajo por buen camino. Por sus valiosos consejos en temas personales y ser un buen ejemplo a seguir.

Al Dr. Raúl Mauricio Rechtman Schrenzel, por permitirme ingresar a sus clases de oyente en “sistemas dinámicos” en el que aprendí temas muy importantes como técnicas numéricas que me fueron de utilidad. Por sus valiosas reuniones en su oficina para orientarme en mis dudas en el que aprendí muchos detalles importantes.

Al Dr. Gennadiy Burlak y al Dr. Sergio Cuevas García por estar al pendiente en el desarrollo de la investigación, dándome su apoyo en todo momento.

Al Dr. Marcelo Lozada y Cassou por sus valiosas observaciones y su pronta atención en la culminación de la tesis.

A la Dra. María del Rocío Nava Lara, por su amistad y su calidez, por la confianza y sus consejos personales, por apoyarme en todo momento en mi estancia en el IER.

Al CONACyT-SENER que me ha apoyado económicamente durante mis actividades académicas en mí estudio de doctorado. A mis compañeros y amigos de termociencias, en especial a Cornelio por su amistad. También a David Roberto, Aizailadema, Janette Alejandra, Jasael, Salvador, Juan, Manuel, Delmer, Leonardo y Geramain por lo momentos agradables que en muchas ocasiones pasamos. A Carlos Villalobos y a Alfredo por su amistad y apoyo que hicieron agradable estos años. A Ivis, Gualberto, Carlos Roman y Dalia por ser amigos que desde la distancia siempre están para apoyarme y escucharme. Agradezco totalmente al Instituto de Energías Renovables de la UNAM que me permitió cobijarme en sus instalaciones durante la estancia de trabajo y a la excelente maestra de yoga Laura en el que me ha ayudado en mi salud.

Publicación

La publicación producida durante este trabajo de investigación es:

R. Ruiz-Sánchez, R. Rechtman, and Y. G. Rubo. [Autonomous chaos of exciton-polariton condensates](#). *Physical Review B*, 101:155305, Apr. 2020.

Índice general

1. Introducción	3
1.1. Computación y energía	3
1.1.1. Computadoras electrónicas y su relación con la energía	3
1.1.2. Láseres, láseres solares renovables y computación óptica	11
1.1.3. Computación clásica y computación cuántica	15
1.2. Condensados de excitón-polaritones	21
1.2.1. Microcavidades y polaritones	21
1.2.2. Láseres polaritónicos	24
1.2.3. Organización de la tesis	25
2. Dinámica conservativa de dos condensados	26
2.1. Modelo de Hubbard	26
2.2. Hamiltoniano de Bose-Hubbard	27
2.3. Dinámica del dímero de Bose-Hubbard	28
2.4. Trayectorias, puntos fijos y rompimiento de simetría	32
3. Dímero de condensados polaritónicos	36
3.1. Trascendencia del dímero polaritónico	36
3.2. Modelo del dímero polaritónico	38
3.3. Atractores y Bifurcaciones	40
3.4. Estados fijos del láser y su estabilidad	48
3.4.1. Punto fijo antisimétrico	48
3.4.2. Condensados autoatrapados	50
3.4.3. Punto fijo simétrico	51
4. Exponentes de Lyapunov y multiestabilidad	53
4.1. Los exponentes de Lyapunov	53
4.2. Multiestabilidad del láser polaritónico	58

5. Espectro de emisión	64
5.1. Espectro de un láser polaritónico	64
5.2. Peine de frecuencias	66
5.3. Espectros en el régimen caótico	67
Conclusiones	74

Índice de figuras

1.1. ENIAC	4
1.2. Consola de operaciones de UNIVAC	5
1.3. Transistor	6
1.4. Microprocesador Intel 4004	6
1.5. Centros de datos y su consumo de energía	8
1.6. Emisiones anuales de dióxido de carbono (CO ₂)	10
1.7. Sistema láser Nd	14
1.8. Diseño de una computadora óptica digital	16
1.9. Experimento de criptografía cuántica	18
1.10. Cúbit de circuito superconductor	20
1.11. Cúbit de superflujo junto con elementos cercanos en el chip.	20
1.12. Diseño VCSEL que incorpora aberturas de óxido	23
1.13. Formación de polaritones	24
2.1. Trayectorias conservativas	35
3.1. El mapa de Poincaré	43
3.2. Ocupaciones de los condensados	45
3.3. Atractores en el espacio de espín	47
3.4. Resultados de los exponentes de Lyapunov para puntos fijos	52
4.1. Evolución transitoria del MLE	55
4.2. Resultados del MLE para $\gamma = 0.5, \varepsilon = 2.0$ variando α	57
4.3. Muestras de las dependencias del MLE	60
4.4. Espectro de los exponentes de Lyapunov	61
4.5. Coexistencia de atractores con condiciones iniciales aleatorias	62
4.6. Probabilidades de diferentes atractores	63
5.1. Evolución de las componentes de espín	68
5.2. Espectro de emisión para la dinámica caótica	69
5.3. Espectro de emisión para la dinámica caótica	71
5.4. Espectro de emisión para la dinámica de ciclo límite y caótica	72

5.5. Espectro de emisión para caos débil 73

Capítulo 1

Introducción

1.1. Computación y energía

1.1.1. Computadoras electrónicas y su relación con la energía

Las grandes revoluciones a través de la historia de la tecnología el ser humano ha usado diversos materiales y utilizado múltiples mecanismos de diseño, construcción y operación de máquinas que agilicen y automaticen la realización de cálculos. Ejemplo de esto son las computadoras y el procesamiento de información que todos conocemos, y que obedecen a los principios bien entendidos de la física clásica. La primera computadora electrónica llamada ENIAC (“Electronic Numerical Integrator and Computer”) fue desarrollada en la Universidad de Pennsylvania, EE. UU. Después del desarrollo de ENIAC, diseñaron EDVAC (“Electronic Discrete Variable Automatic Computer”) en 1951 y UNIVAC I (“UNIVersal Automatic Computer” I) en 1951, ver Fig.1.1 y Fíg.1.2. Esta última fue la primera computadora comercial [1]. El transistor es un elemento fundamental en los sistemas electrónicos modernos, y su invención revolucionó el campo de la electrónica, ver Fig.1.3. Era más pequeño, más barato y más confiable que los tubos de vacío existentes.

El transistor es un dispositivo electrónico de estado sólido de tres terminales. Puede controlar la corriente eléctrica o el voltaje entre dos de los terminales aplicando una corriente eléctrica o voltaje al tercer terminal. Estos circuitos lógicos pueden construirse de manera muy compacta en un chip de silicio con una densidad de un millón de transistores por centímetro cuadrado.

Un circuito integrado consiste en un conjunto de circuitos electrónicos en un pequeño chip de material semiconductor, y es mucho más pequeño que un circuito hecho de componentes independientes. Los circuitos integrados actuales son extremadamente compactos y pueden contener miles de millones de transistores y otros componentes electrónicos en un área pequeña.

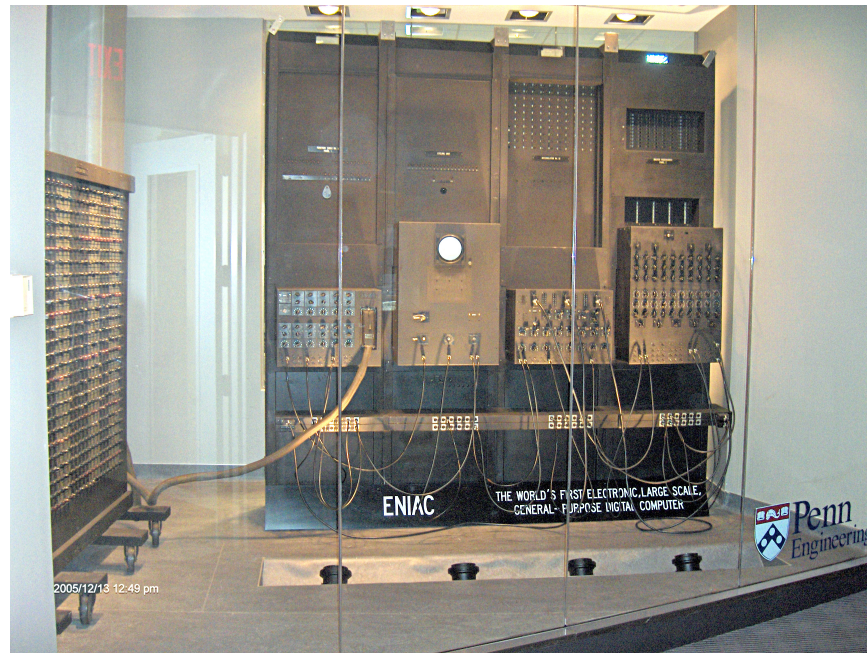


Figura 1.1: Muestra de dos piezas de ENIAC que se encuentran en exhibición en la Escuela de Ingeniería y Ciencias aplicadas de Moore. A la izquierda hay una tabla de funciones (para leer en la talba de datos). Hay cuatro paneles (a la izquierda), controlan la interfaz con la tabla de funciones y un acumulador que es la memoria para almacenar un número de 10 dígitos, que se puede agregar. Imagen tomada de [2].



Figura 1.2: Consola de operaciones de UNIVAC I, ubicado en el Museo de Ciencia, Boston, MA. Imagen tomada [3].

El microprocesador Intel 4004 de la Fig.1.4 fue el primer microprocesador, y fue lanzado en 1969. Fue el primer dispositivo semiconductor que proporcionó, a nivel de chip, las funciones de una computadora como hoy en día, incluida la unidad aritmética y lógica y la unidad de control [4, 5].

Desde la introducción de los microprocesadores, se han podido disminuir exponencialmente el tamaño de los transistores utilizados en los microprocesadores y aumentar la potencia de procesamiento. Un transistor, es simplemente, un “interruptor” que controla el flujo de electrones. Puede estar en un estado de encendido o apagado dependiendo de si hay corriente que fluye a través de él, y esto forma la base de todos los dispositivos informáticos de hoy en día. Por ejemplo, el transistor más pequeño que se ha creado es de 5 nm de longitud [6]. El desarrollo del microprocesador condujo a la cuarta generación de computadoras con miles de circuitos integrados colocados en un solo chip de silicio. Un solo chip ahora podría contener todos los componentes de una computadora desde la CPU y la memoria hasta los controles de entrada y salida. Podría caber en la palma de la mano, mientras que la primera generación de computadoras llenó toda una habitación.

Por otra parte, el consumo de energía en las computadoras es un problema grave y creciente en el mundo. La necesidad de mejorar el rendimiento energético está impulsando actualmente a la búsqueda de nuevas soluciones de hardware y nue-



Figura 1.3: Replica del transistor, se desarrolló en los Laboratorios Bell. Imagen tomada de Ref. [7].

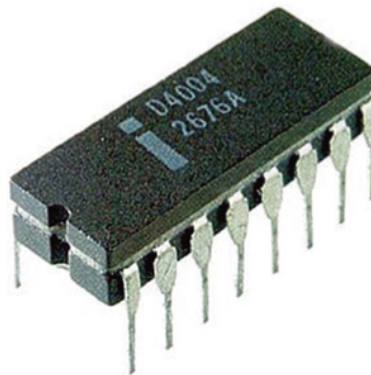


Figura 1.4: Microprocesador Intel 4004 funcionaba a una velocidad de reloj de 108 kHz y contenía 2300 transistores, imagen tomada de Ref. [7].

vos algoritmos de energía optimizada. El consumo de energía en la computadora resulta estar profundamente relacionado con la reversibilidad.

En la década de 1970, Bennett estudió la reversibilidad de la computadora. Mostró que las operaciones en una máquina de Turing, es decir, el cálculo puede expresarse mediante cálculo reversible. Lo que significa que el cálculo puede realizarse teóricamente sin consumir energía. En la década de 1980, investigó la computación desde el punto de vista de la termodinámica. Consideremos una puerta NAND, que toma como entrada dos bits y produce un solo bit como salida. Esta puerta es intrínsecamente irreversible porque, dada la salida de la puerta, la entrada no está determinada de forma exclusiva.

Otra forma de entender la irreversibilidad es pensar en términos de borrado de información. Si una puerta lógica es irreversible, parte de la información ingresada a la puerta se pierde de manera irrecuperable cuando la puerta funciona, es decir, parte de la información ha sido borrada por la puerta. Por el contrario, en un cálculo reversible, nunca se borra información, porque la entrada siempre se puede recuperar de la salida. Por lo tanto, decir que un cálculo es reversible es equivalente a decir que no se borra ninguna información durante el cálculo. La conexión entre el consumo de energía y la irreversibilidad en la computación, se basa en el principio de Landauer, afirmando que, para borrar la información, es necesario disipar energía.

Aunque las computadoras existentes están lejos del límite establecido por el principio de Landauer, sigue siendo un problema interesante comprender cuánto se puede reducir el consumo de energía. Aparte del interés intrínseco del problema, una razón práctica del interés se deriva de la ley de Moore: si la potencia de la computadora sigue aumentando, entonces la cantidad de energía disipada también debe aumentar, a menos que la energía disipada por operación caiga al menos tan rápido como la tasa de aumento de la potencia informática.

Si todos los cálculos se pudieran hacer de forma reversible, el principio de Landauer implicaría que no habría límite inferior en la cantidad de energía disipada por la computadora, ya que no se borran bits durante un cálculo reversible. Por supuesto, es posible que algún otro principio físico requiera que la energía se disipe durante el cálculo; Afortunadamente, este no es el caso. Pero, ¿Es posible realizar cálculos universales sin borrar ninguna información? la respuesta a esta pregunta debe ser sí, porque nuestra comprensión actual de las leyes de la física es que son fundamentalmente reversibles. Es decir, si conocemos el estado final de un sistema físico cerrado, entonces las leyes de la física nos permiten determinar el estado inicial del sistema [8].

La tecnología de nanofabriación, ha resultado en la capacidad de hacer transistores con miles de millones de ellos en chips. Sin embargo, una infraestructura informática a gran escala consume enormes cantidades de energía eléctrica como lo es, los centros de datos, ya que por debajo de ellos encontramos grandes tubos



Figura 1.5: (izquierdo) vemos la sala de servidores de Facebook en la ciudad de Lulea, Suecia. Los centros de datos ahora consumen alrededor del 3 por ciento del suministro mundial de electricidad. (derecho) Vemos parte de las instalaciones del centro de datos de Google en Taiwán, imágenes tomadas de [9].

en el que fluye agua ya que los transistores se calientan y se debe mantener el sistema frío usando la electricidad que mantiene una huella de carbono de esos centros de datos, ver Fig. 1.5, lo que lleva a costos operativos muy altos que superarán el costo de la infraestructura en unos pocos años. En el 2013, los centros de datos de EE. UU. Consumieron aproximadamente 91 mil millones de kilovatios-hora de electricidad, lo que equivale a la producción anual de 34 grandes centrales eléctricas de carbón (500 megavatios) [10]. En el 2015, se usaron 416.2 teravatios-hora de electricidad en los centros de datos del mundo, fue mucho mayor que el consumo total del Reino Unido.

La cantidad de energía consumida por los centros de datos del mundo, los repositorios de miles de millones de gigabytes de información, se triplicará en la próxima década, ejerciendo una enorme presión sobre los suministros de energía y dando un fuerte golpe a los esfuerzos para contener el calentamiento global, mencionan los expertos. cada actividad que se hace en Internet implica grandes cantidades de datos que deben almacenarse en algún lugar. Y a medida que el internet se acerca a las innovaciones como los autos sin conductor y los relojes de video de alta definición, la vasta red de centros de datos que han surgido en la última década se extenderá [9].

Se proyecta que el consumo anual de electricidad de los centros de datos aumentará en aproximadamente 140 mil millones de kilovatios-hora para el 2020, la producción anual equivalente de 50 plantas de energía, lo que costará a las empresas estadounidenses \$ 13 mil millones anuales en facturas de electricidad y emitirá

casi 100 millones de toneladas métricas de contaminación de carbono por año. En un centro de datos, el consumo de energía se debe principalmente a los servidores, dispositivos de red y sistemas de refrigeración [10].

En las Figs. 1.6 se presenta la perspectiva a largo plazo de las emisiones globales de CO₂ y las emisiones del año 2018 por país. Las emisiones globales aumentaron de 2 mil millones de toneladas de dióxido de carbono en 1900 a más de 36 mil millones de toneladas 115 años después. Mientras que los datos de 2014 a 2017 sugirieron que las emisiones anuales globales de CO₂ se habían estabilizado aproximadamente, los datos del Proyecto Global de Carbono reportaron un aumento anual adicional de 2.7 % y 0.6 % en 2018 y 2019, respectivamente. China es, por un margen significativo, el mayor emisor de Asia y del mundo: emite casi 10 mil millones de toneladas cada año, más de una cuarta parte de las emisiones globales. América del Norte, dominada por los EE. UU. Es el segundo mayor emisor regional con un 18 % de las emisiones globales. Le sigue de cerca Europa con el 17 %. Aquí hemos agrupado a los 28 países de la Unión Europea, ya que generalmente negocian y establecen objetivos como un organismo colectivo. África y Sudamérica son emisores bastante pequeños: representan entre el 3 y el 4 % de las emisiones globales cada uno.

Si bien las crecientes emisiones de CO₂ tienen claras consecuencias ambientales negativas, también es cierto que históricamente han sido un subproducto de mejoras positivas en las condiciones de vida humana. Pero también es cierto que reducir las emisiones de CO₂ es importante para proteger las condiciones de vida de las generaciones futuras. Esta perspectiva, que debemos considerar tanto las implicaciones ambientales y de bienestar humano de las emisiones, es importante si queremos construir un futuro que sea sostenible y que proporcione altos estándares de vida para todos.

Muchos de los emisores más grandes del mundo hoy están en Asia. Sin embargo, el rápido aumento de las emisiones en Asia solo se ha producido en las últimas décadas. Esto también ha sido un subproducto de mejoras masivas en los niveles de vida: desde 1950, la esperanza de vida en Asia ha aumentado de 41 a 74 años; ha visto una caída dramática en la pobreza extrema; y por primera vez la mayoría de su población recibió educación formal.

Si bien todos los países deben trabajar colectivamente, la acción de los principales emisores será esencial. China, los EE. UU. Y los 28 países de la UE representan más de la mitad de las emisiones globales. Sin el compromiso de estos mayores emisores, el mundo no estará cerca de cumplir sus objetivos globales [11].

Señala un estudio centrado en Japón que sugiere que sus centros de datos consumirían todo su suministro de electricidad para el 2030 si el crecimiento continúa a la tasa actual. A menos que haya algún tipo de avance que cambie el juego en el almacenamiento de datos, como el desarrollo de una alternativa muy superior al silicio, el uso mundial de Internet tendrá que ser racionado significativamente.

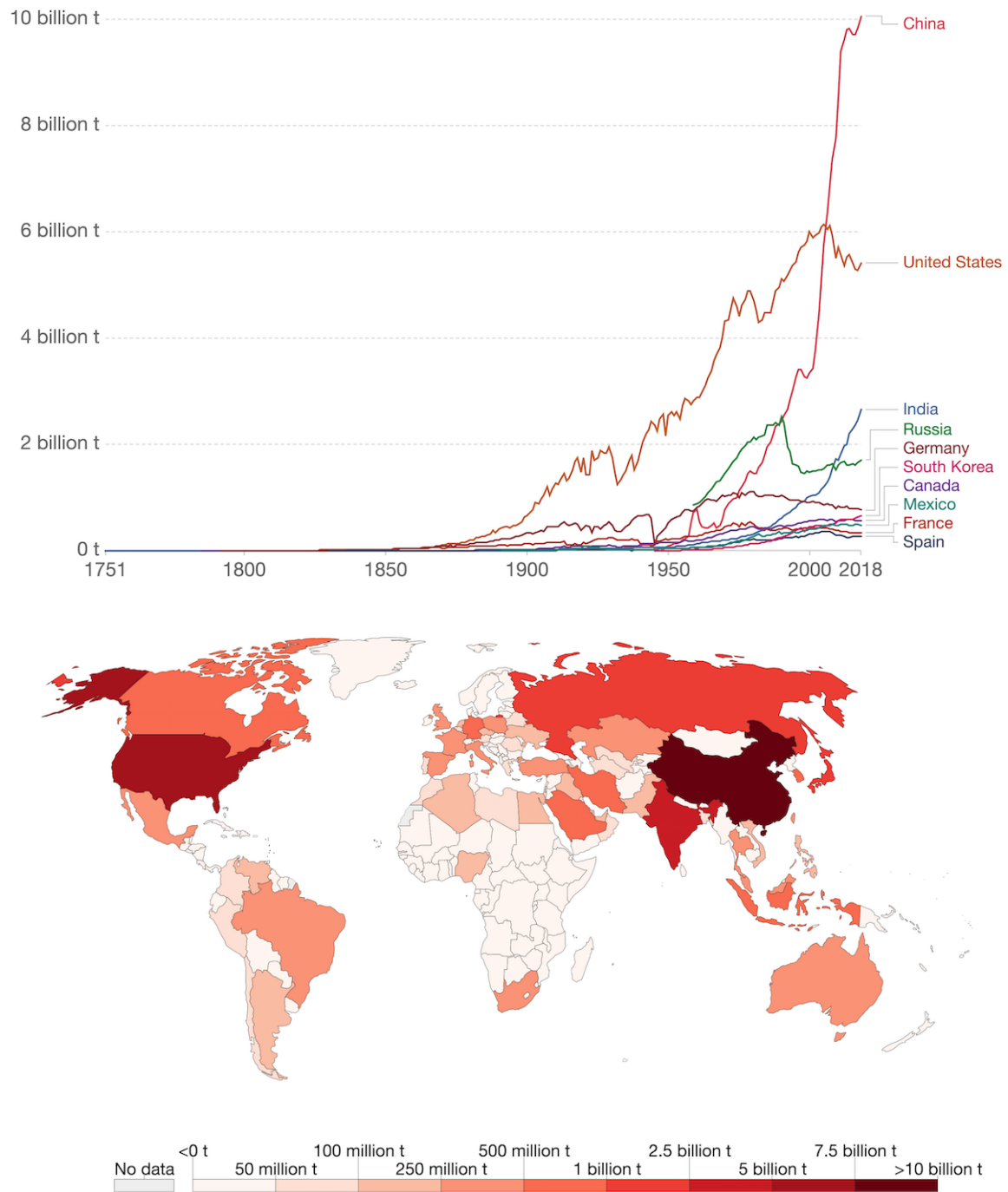


Figura 1.6: (arriba) Emisiones totales anuales de CO₂, por región mundial, medidas en toneladas. (abajo) Mapa de emisiones de dióxido de carbono (CO₂), en el 2018 [11].

Algunas compañías de Internet, como Facebook, Google y Apple, están liderando esfuerzos para ser más responsables con el medio ambiente. Las medidas que se están tomando incluyen centros de datos de viviendas en climas fríos, que reducen drásticamente la energía necesaria para enfriar las instalaciones, con un suministro listo de energía renovable [9].

Por otro lado, la reunión anual del foro económico mundial en Davos-Klosters en Suiza, involucra a los principales líderes del mundo en actividades de colaboración con objetivos de desarrollo sostenible, realizando discusiones sobre la tecnología y la gobernanza comercial. En la reunión del 2019, se reunieron para discutir como la computación cuántica puede ayudar a abordar desafíos globales como lo destacan los objetivos de desarrollo sostenible y el clima en particular. Los expertos estuvieron de acuerdo en que el mundo debería dedicar más recursos, incluso en educación, al desarrollo de la poderosa capacidad de computación cuántica que podría ayudar a abordar el cambio climático. Mencionan los expertos que se conoce concretamente cómo usar computadoras cuánticas completas para muchas tareas importantes en la ciencia y la tecnología. Una de esas tareas es la simulación de moléculas para determinar sus propiedades, interacciones y reacciones con otras moléculas, también conocida como en química, la esencia misma del mundo material en el que vivimos.

Hasta la fecha, no se ha encontrado una manera de simular moléculas complejas grandes: con computadoras convencionales, nunca se podrá, porque el problema es que crece exponencialmente con el tamaño o la complejidad de las moléculas que se simulan. Esta escala exponencial rápidamente hace que una computadora tradicional sea inútil: simular una molécula con solo 70 átomos tomaría más tiempo que la vida útil del universo (13 mil millones de años). En este foro discutieron unos de los temas como ¿Un catalizador cuántico puede hacer frente al cambio climático? Un área de importancia práctica y urgente donde la simulación cuántica podría ser enormemente valiosa es cumplir con la ODS (Objetivos de Desarrollo Sostenible), no solo en salud, energía, industria, innovación e infraestructura, sino también en la acción climática.

1.1.2. Láseres, láseres solares renovables y computación óptica

Tan pronto como se inventó una fuente de luz coherente, el láser, en 1960 [12] el procesamiento óptico de la información se expandió rápidamente y todos los inventos principales del campo se realizaron antes de 1970 [13, 14]. La radiación de los láseres es diferente de la luz óptica convencional porque, al igual que la radiación de microondas, es aproximadamente monocromática. Aunque cada láser tiene su propia distribución espectral fina y propiedades de ruido, se considera que los campos eléctricos y magnéticos de los láseres tienen variaciones precisas de fase y amplitud en la aproximación de primer orden. La diferencia es clara en

la distribución de fotones en el flujo. Mientras en la radiación térmica esta distribución tiene estadística geométrica, en el láser es la estadística de Poisson.

El láser tiene dos componentes principales: un mecanismo de “bombeo” para excitar un medio y obtener el medio con inversión y con “ganancia” óptica, y un “resonador”, responsable de seleccionar la longitud de onda del láser. La tipo de “bombeo” puede ser eléctrica como una batería en un diodo láser, o puede ser otra fuente óptica. El medio puede ser un cristal sólido o gas, bien preparado para ser excitado y emitir fotones. El bombeo es la fuente de energía para el láser y puede tomar muchas formas diferentes. Puede ser una fuente de luz incoherente, como en muchos láseres de estado sólido pulsado, puede ser eléctrica, como en los láseres de descarga de gas o en los láseres de semiconductores, puede ser energía química, o la energía de la luz del Sol.

Para crear un láser de alta potencia de salida, se tiene que ajustar las principales cualidades que caracterizan un haz láser: la colimación del haz y la selectividad de frecuencia. Una peculiaridad sorprendente de los láseres semiconductores es su tamaño. El láser consiste en un pequeño cristal simple con un tamaño de aproximadamente 0.1 mm, con dos mitades de diferentes propiedades físicas. La región “n” está impregnada de impurezas etiquetadas como “donantes”, porque tienden a producir un exceso de electrones que le dan a esta parte del cristal propiedades metálicas simples. La región “p” está impregnada de impurezas etiquetadas como “aceptores”, que tienden a atrapar electrones, sin dejar electrones en la banda de conducción. Eso produce huecos en la banda de valencia. El grosor de la unión en sí es del orden de μm . Cuanto más corta sea la cavidad, menos seleccionará una frecuencia particular y menores serán sus propiedades de dispersión por la colisiones de portadores de carga..

La ganancia del láser de unión puede ser muy alta. Los láseres de diodo (también llamados láseres de inyección) están hechos de arseniuro de galio (GaAs), el índice de refracción de GaAs es muy alto (3.34), las facetas no revestidas tienen una reflectividad del 30 %, lo cual es suficiente para el láser. La radiación se emite a lo largo de una línea que marca la unión entre el lado dopado p y el lado dopado n del semiconductor.

La mayoría de las fuentes de luz se expandirán a través del espacio, que generalmente es una característica deseada. El resonador es el cuerpo principal del láser, y define el tamaño del haz. En ese cuerpo, los ingenieros láser utilizan varios componentes para ajustar la longitud de onda, la amplitud o, en el caso de los láseres pulsados, la longitud y la forma del pulso [15].

Los láseres de umbral bajo a menudo exhiben confiabilidad mejorada y ancho de banda de modulación mejorado. En estas aplicaciones de alta velocidad, los transmisores láser generalmente están diseñados para ser controlados directamente por circuitos lógicos electrónicos amortiguados, y el bajo consumo de energía es esencial para la implementación de bus de datos paralelos de alta velocidad que

suelen tener entre 64 y 128 bits de ancho en las computadoras modernas [16]. Otra área que se está estudiando intensamente es el uso de interconexiones ópticas para formar un plano posterior de la computadora, a fin de reducir la cantidad y el tamaño de los cables eléctricos.

Los láseres tienen una amplia variedad de aplicaciones. Estas aplicaciones involucran una diversidad de áreas, por ejemplo: telecomunicaciones, discos ópticos, computación óptica, pantalla y láseres solares renovables [17]. La conversión de la luz solar en luz láser mediante bombeo solar directo tiene una importancia cada vez mayor porque la banda ancha, temporalmente constante, la luz solar se convierte en luz láser, que puede ser una fuente de radiación de banda estrecha, colimada, pulsada rápidamente, con la posibilidad de obtener alto brillo e intensidad. Entre las aplicaciones potenciales de los láseres solares renovables están la tierra, el océano y la detección atmosférica; detectar, iluminar y rastrear objetos duros en el espacio. El primer láser de estado sólido bombeado por energía solar fue informado por Young en 1966 [18].

Los láseres de bombeo solar (SPL) se pueden utilizar para impulsar reacciones que almacenan energía solar en forma química [19], o realizar una conversión eficiente de la longitud de onda, aumentando potencialmente la eficiencia de las celdas solares más allá del límite de unión única [20]. La tecnología de fabricación de materiales láser recientemente desarrollada sobre una base cerámica ha abierto nuevas oportunidades de creación de potentes láseres de bombeo solar. La tecnología no solo es más fácil, sino que tampoco limita la forma y el tamaño de los elementos activos. Uno de los materiales láser eficaces para la transformación directa de la radiación solar en el láser es Nd: YAG con una potencia total de hasta 1 MW de un flujo solar [21].

En la Fig. 1.7 se muestra el sistema láser Nd: YAG del modo TEM₀₀ ("Transverse electromagnetic") con bombeo solar, está compuesto por la lente Fresnel de 1 m de diámetro de la primera etapa, el cabezal láser y su resonador óptico asimétrico asociado, todos montados en un seguidor solar de dos ejes. Eso sigue automáticamente el movimiento del sol. El seguidor solar de dos ejes es suministrado por "Shandong Huayi Sunlight Solar Energy Industry". La lente Fresnel es suministrada por "Shandong Yuying Optical Instruments". La lente Fresnel tiene una longitud focal de 1.3 m. La eficiencia de transmisión medida es del 76%. La energía solar concentrada en el punto focal promediada durante 2 minutos es de 590 W para una irradiancia solar de 890 W/m². Los ajustes mecánicos en direcciones X – Y – Z permiten una fácil alineación en la zona focal. Los ajustes angulares gruesos también son muy útiles para lograr la máxima potencia de salida del láser [22].

Se estudiaron y construyeron componentes ópticos novedosos, como láseres emisores de superficie de cavidad vertical ("Vertical cavity surface emitting laser", VCSEL) o dispositivos simétricos de efecto electro-óptico ("Symmetric self-

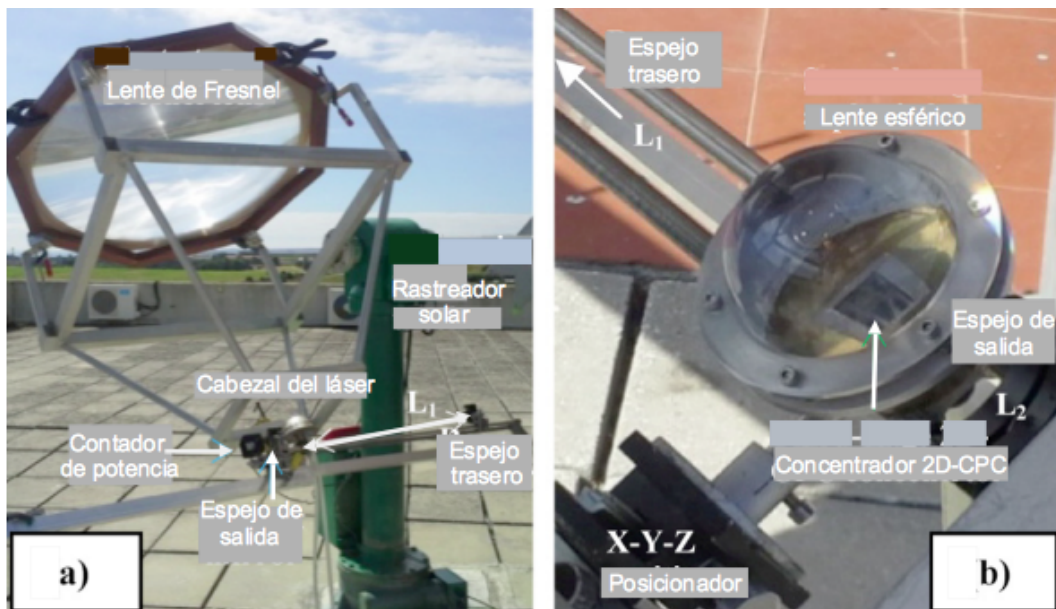


Figura 1.7: a) Modo láser Nd: YAG del modo TEM_{00} : YAG del modo TEM_{00} con bomba solar (b) El cabezal láser. El concentrador 2D-CPC de tercera etapa tiene una abertura de entrada rectangular, L_1 y L_2 representan las longitudes donde se fija el espejo trasero y espejo de salida [22].

electrooptic effect device”, S-SEED) [23]. Ha habido muchos ejemplos de técnicas que procesan información en forma de distribuciones de intensidad de luz en una forma paralela para el desempeño de operaciones matemáticas. Llamamos a estas aplicaciones computación óptica analógica. Otros enfoques implican el uso de componentes ópticos como puertas, interruptores y “flip-flops” en una arquitectura que procesa datos en formato digital y que funciona de manera similar a una computadora electrónica. Llamamos a estos enfoques computación óptica digital. Se propusieron varias computadoras ópticas digitales, por ejemplo, Guilfoyle, Stone y Zeise construyeron una computadora óptica digital totalmente programable (DOC II) de 32 bits diseñada para operar en un entorno UNIX con microcódigo RISC, (ver Fig.1.8) [24].

La computación óptica análoga se ha desarrollado durante años. Las técnicas están bien establecidas y la tecnología tiene aplicaciones en áreas como el reconocimiento de patrones y el procesamiento de imágenes. La computación óptica digital aún se encuentra en una etapa temprana de desarrollo. Las computadoras ópticas digitales ofrecerían ventajas sobre la computación electrónica. La informática óptica podría, en principio, ser muy rápida. Los electrones deben viajar a lo largo de los conductores, mientras que los fotones no. Cualquier transmisión de una señal electrónica a lo largo de un cable implica cargar los condensadores, que depende de la longitud del cable. Las señales ópticas no requieren la capacitancia y, por lo tanto, pueden tener un ancho de banda mayor. Debido a que los fotones no necesitan ser guiados por conductores, es posible establecer un nivel de interconexión que no sería posible con los circuitos electrónicos.

Una computadora óptica digital requeriría componentes ópticos para realizar las funciones de los interruptores, puertas y elementos de memoria que controlan el flujo de electrones en una computadora electrónica. Las funciones de las compuertas e interruptores pueden ser proporcionadas por moduladores ópticos, que han tomado muchas formas. La computación óptica digital ofrece las ventajas potenciales de la interconexión global, el paralelismo masivo en el procesamiento, la energía de conmutación extremadamente baja y la velocidad muy alta [17].

1.1.3. Computación clásica y computación cuántica

Una computadora clásica manipula e interpreta bits en un resultado computacional útil. Un bit representa una unidad fundamental de información, tomando valores 0 o 1. Las computadoras se han vuelto compactas y rápidas, pero el progreso en esta dirección es limitado. Es difícil imaginar que el tamaño de un transistor u otro elemento sea menor de 10^{-8} cm (el diámetro del átomo de hidrógeno) o que la frecuencia del reloj sea mayor de 10^{15} Hz (la frecuencia de las transiciones atómicas). Las computadoras clásicas no pueden resolver problemas como la factorización de un número entero grande en un tiempo razonable corto. Los números

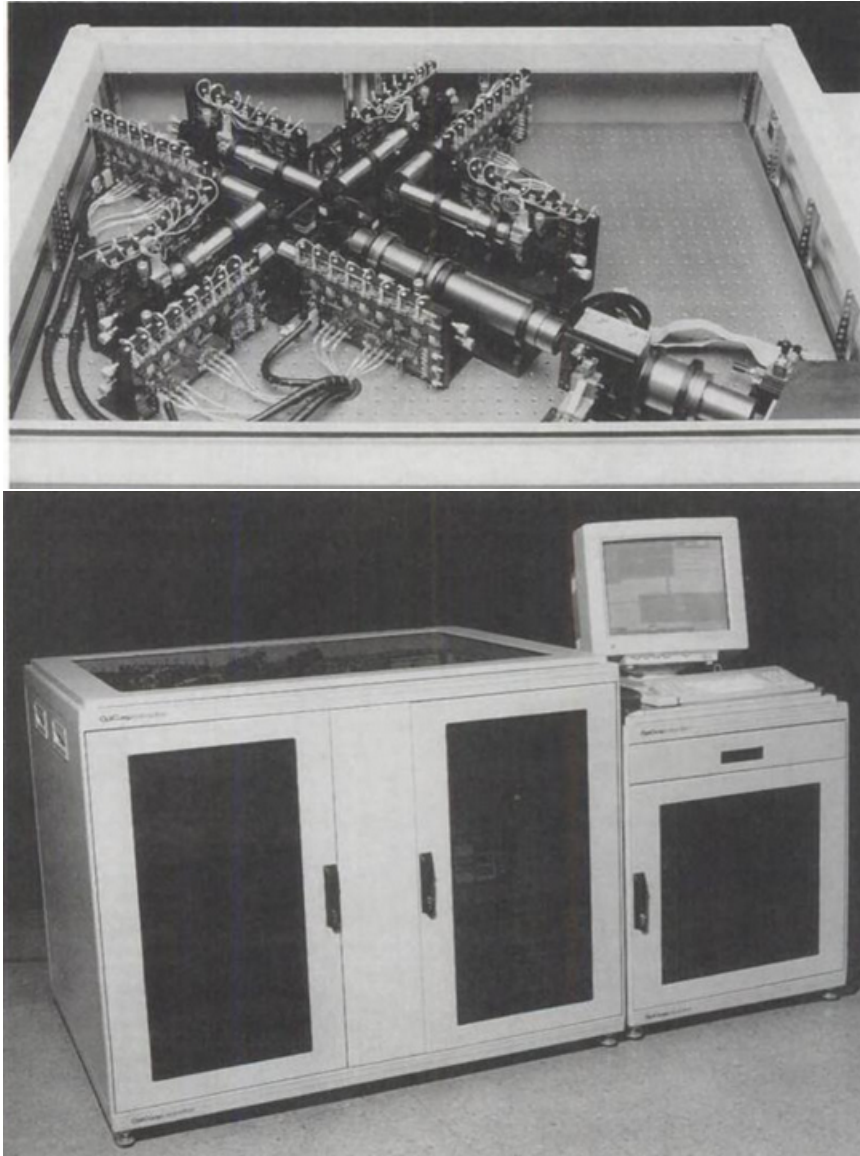


Figura 1.8: Diseño de una computadora óptica digital (DOC), co-procesador acústico-óptico (vista superior y parte superior izquierda del host). Imagen tomada de Ref. [25].

primos de dígitos grandes que se utilizan para enviar mensajes en forma codificada, problemas de búsqueda en bases de datos, logaritmos discretos son otros ejemplos difíciles de resolver [26, 27].

La luz es principalmente un fenómeno undulatorio. Sin embargo, bajo ciertas condiciones, como baja intensidad o en presencia de ciertos materiales ópticos no lineales, la luz comienza a comportarse de manera diferente, del cual se tiene que aplicar una teoría cuántica de la luz. Uno de los grados de libertad más populares para el procesamiento cuántico de información con luz es su polarización[1, 28].

Los orígenes de la computación cuántica se basa en las ideas presentadas por Feynman en su conferencia realizada en el MIT en 1981 [29]. Feynman ejemplificó la polarización de fotones discutida en la paradoja de EPR [30] como sistemas de dos estados. La polarización del sistema de dos fotones se puede formalizar como el estado entrelazado en la mecánica cuántica. Aquí, la probabilidad de los estados de cada fotón no puede calcularse localmente. Para dos fotones en el estado entrelazado, la medición de un fotón puede determinar el resultado de la medición del otro fotón. Feynman mencionó que aunque las leyes naturales son reversibles, la regla para las computadoras no lo es. La computación cuántica es irreversible porque involucra el proceso de medición.

Hay dos tipos de reversibilidad, es decir, reversibilidad física y reversibilidad lógica. El proceso físicamente reversible es el proceso que no aumenta la entropía. El proceso lógicamente reversible es el proceso que puede construir las entradas a partir de las salidas. El primer ejemplo es una simulación de tiempo. Feynman asumió que el tiempo es discreto. A medida que la computadora pasa de un estado a otro como en los autómatas celulares, afirmó que el tiempo no se simula en absoluto, se imita por medio de la noción de transición de estados en la computadora. Pero señaló que la física clásica es local, causal y reversible y, por lo tanto, adaptable a la simulación por computadora.

La perspectiva de Feynman era que si es posible realizar una máquina basada en los elementos de la mecánica cuántica entonces será capaz de simular probabilísticamente un sistema cuántico arbitrario. Insistió en que los sistemas cuánticos no pueden describirse por medio de computadoras clásicas. La afirmación revela que no podemos representar los resultados de las máquinas cuánticas con un dispositivo universal clásico debido al llamado problema de la variable oculta que aborda que un sistema físico no puede describir completamente la naturaleza. Si tratamos de poner las ecuaciones cuánticas en una forma lo más cercana posible a las ecuaciones clásicas, no podemos simular las ecuaciones cuánticas de la manera normal porque hay demasiadas variables [1]. Feynman dio ideas básicas de computadoras cuánticas, pero no presentó un modelo computacional concreto.

Una computadora cuántica no será necesariamente más grande o más pequeña que una computadora ordinaria. Más bien, será un tipo diferente de computadora, diseñada para controlar ondas mecánicas cuánticas coherentes para diferentes

aplicaciones. Un aspecto crítico y universal de las diversas implementaciones de las computadoras cuánticas es el requisito de “caja cerrada” la operación interna de una computadora cuántica, mientras está bajo el control del programador, debe estar fuera de contacto con el resto del universo. Pequeñas cantidades de intercambio de información dentro y fuera de la caja pueden perturbar las frágiles ondas mecánicas cuánticas de las que depende la computadora cuántica, causando el proceso destructivo conocido como decoherencia. Desafortunadamente, ningún sistema está completamente libre de decoherencia, pero un desarrollo crítico en la teoría de la computadora cuántica es la capacidad de corregir pequeñas cantidades a través de varias técnicas bajo el nombre de corrección de errores cuánticos (QEC). En las QEC, la entropía introducida desde el mundo exterior se elimina de la computadora a través de procesos discretos de medición y reinicialización de cúbits, de la misma manera que la información digital actual protege contra las fuentes de ruido problemáticas para la tecnología analógica [31].



Figura 1.9: Experimento de criptografía cuántica de fibra óptica. Las dos cajas en primer plano contienen el interferómetro de Alice y el interferómetro de Bob (izquierda y derecha). Los fotones emergen del interferómetro de Alice, y se transportan a través de puentes de fibra a la red de fibra subterránea y de regreso al interferómetro de Bob, imagen tomada de [32].

La carrera mundial para realizar la primera computadora cuántica universal representa un gran desafío de ingeniería con un enorme potencial para resolver problemas del mundo real, en el que se podrán realizar ciertas tareas computacionales exponencialmente más rápido que los dispositivos que operan bajo las leyes de la física clásica. La unidad fundamental de información en las computadoras

cuánticas se llama cúbit, veamos los siguientes ejemplos de cúbits en las Figs. 1.10 y 1.11. Podemos definir un cúbit como un sistema cuántico bidimensional, lo que significa que el espacio del estado del sistema es un espacio de Hilbert complejo bidimensional [28]. Los estados computacionales se representan como $|0\rangle$ y $|1\rangle$ (similar al 0 y 1 del bit en computación digital clásica). En otras palabras, el estado de un cúbit es un vector en un espacio vectorial, o un vector de espín en el espacio tridimensional. Geométricamente, podemos interpretar como la condición de que el estado del cúbit se normalice a la longitud 1.

Mientras un bit clásico es como una moneda con solo dos estados, cara o cruz, un cúbit puede existir en un continuo de estados entre $|0\rangle$ y $|1\rangle$ hasta que se observe. Recordando nuevamente que cuando se mide un cúbit, solo da 0 o 1 como resultado de la medición probabilística. Su existencia y comportamiento ampliamente validados por experimentos en que se pueden usar muchos sistemas físicos diferentes para realizar cúbits. Para tener una idea concreta de cómo se puede realizar un cúbit, puede ser útil mencionar algunas de las formas en que esta realización puede ocurrir: dos polarizaciones diferentes de un fotón como la alineación de un espín nuclear en un campo magnético uniforme; dos estados de un electrón en órbita alrededor de un solo átomo [8].

Un sistema de cúbits debe ser escalable, es decir, un sistema que permita incrementar el número de unidades fundamentales de un dispositivo, ya que se requieren aproximadamente 10^6 cúbits para la construcción de una computadora cuántica [8, 33, 34]. Para que un sistema sea escalable, estos recursos “clásicos” también deben ser escalables, lo que se vincula con problemas complejos de ingeniería y la infraestructura disponible para tecnologías a gran escala. En la computación cuántica adiabática, uno define la respuesta a un problema computacional como el estado fundamental de una red compleja de interacciones entre cúbits, y luego uno adiabáticamente evoluciona esos cúbits a ese estado fundamental activando lentamente las interacciones.

A parte de cúbits basados en circuitos superconductores, numerosas investigaciones ponen como candidato prometedor para la realización física de una computadora cuántica teniendo como esquema de cálculo cuántico totalmente óptico, usando cúbits de espines de excitón-polaritones (o polaritones, en corto) atrapados en microcavidad. Hoy en día, los polaritones representan una herramienta indispensable para la investigación de fenómenos cuánticos coherentes y no-lineales que ocurren en la interfaz en el campo de materia de varias áreas de la física como materia condensada, óptica cuántica y atómica [37, 38, 39, 40].

La principal ventaja de utilizar excitón-polaritones para fines de procesamiento de información cuántica proviene de sus propiedades de conmutación rápida (el tiempo de conmutación típico de unos pocos picosegundos), respuesta no-lineal relativamente fuerte, baja potencia para realizar operaciones lógicas [41]. Sin embargo, debido a la naturaleza abierta y fuera del equilibrio de los condensados de

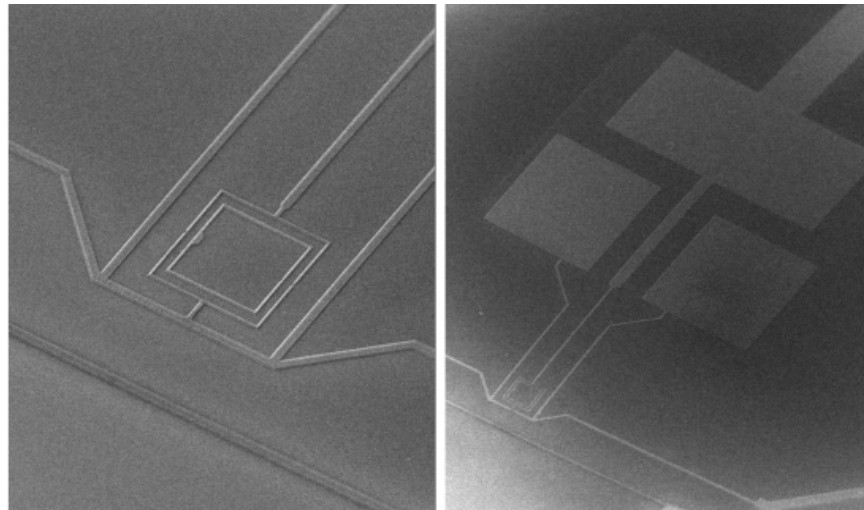


Figura 1.10: Imagen usando SEM (microscopio electrónico de barrido) de un cúbit de un circuito superconductor. La muestra de película delgada de aluminio (espesor $\sim 0.1\mu\text{m}$) se fabrica en un sustrato de silicio oxidado térmicamente con litografía de haz de electrones estándar y posterior evaporación de aluminio. El cúbit es el bucle cuadrado interno encerrado por el SQUID detector cuántico que se ve claramente en la vista de primer plano a la izquierda. En la foto de la derecha, las placas cuadradas en la parte superior de la imagen son las placas superiores de los condensadores en chip separados por una capa aislante de óxido de aluminio de la placa inferior más grande, imagen tomada de [35].

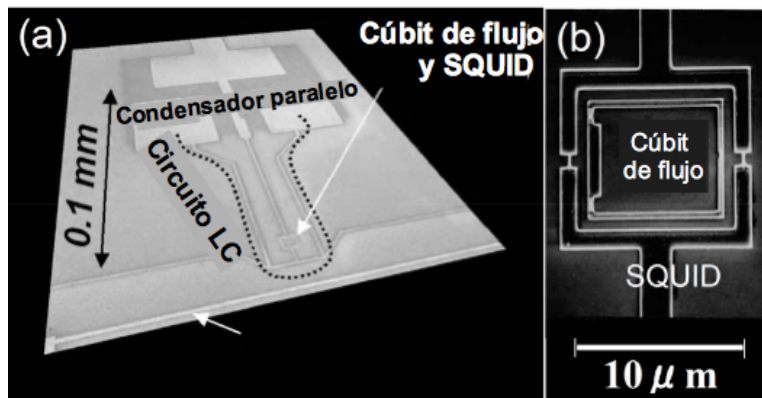


Figura 1.11: a) Imagen de SEM de un cúbit de superflujo junto con elementos cercanos en el chip. El tamaño del circuito LC hecho de condensador paralelo e inductancia del cable es del orden de 0.1 mm de largo, b) Vista de primer plano de la parte central del dispositivo. Un qubit de superflujo con un dc-SQUID; Un detector cuántico del estado cúbit, imagen tomado de [36].

polaritones, no pueden servir directamente como cúbits, aún no es posible obtener un número fijo de partículas al generar un estado del polariton [42]. En todos los casos, los condensados polaritónicos es una herramienta alternativa para construir la computadora cuántica. Comparada con los circuitos superconductores tiene los beneficios de una baja energía de operación [43] y posibilidad del escalamiento fácil.

1.2. Condensados de excitón-polaritones

1.2.1. Microcavidades y polaritones

Una microcavidad (MC) óptica es un dispositivo que recolecta luz en una región del orden de su longitud de onda. Idealmente, esta debería confinar la luz de una sola frecuencia y durante un tiempo infinito, sin embargo no es así, la luz allí confinada tiene un ancho de línea en su frecuencia y existe escape de luz hacia el entorno. La propiedad fundamental de las microcavidades es confinar luz en espacios (volumen) muy pequeños, esta característica se vuelve significativa en el desarrollo de dispositivos. Para producir una MC de buena calidad, es necesario confinar luz sin pérdidas con frecuencias resonantes en valores precisos. La medida de confinamiento óptico se denomina factor de calidad. En otras palabras, el factor de calidad es una medida de eficiencia para un resonador que está definido como la relación entre la frecuencia del fotón almacenado y la tasa de su escape desde la microcavidad. En el caso de polaritones, la frecuencia de fotones coincide (o es cercana) a la frecuencia de excitones en pozos cuánticos adentro de MC. El factor de calidad juega un papel muy importante, a consecuencia que el régimen de acoplamiento fuerte es posible si el acoplamiento entre los fotones y los excitones, dado por la frecuencia de Rabi, es mayor que la tasa de pérdidas. De lo contrario, denominan el régimen del acoplamiento débil.

En las últimas dos décadas el desarrollo de las microcavidades ópticas semiconductoras (MCs), ha tenido un fuerte impacto para el estudio de la interacción de la luz con materia. En el acoplamiento débil en las microcavidades ocurre un fenómeno llamado el efecto Purcell, en el que se amplifica la emisión de la región activa en el modo de la cavidad. Por otro lado, el acoplamiento fuerte da origen a un curioso fenómeno como la formación de nuevas cuasi-partículas, polaritones, que son parcialmente la luz y parcialmente materia. La manera de confinar la luz se da en dos formas distintas, una es por resonancia entre dos espejos de alta reflectividad llamados reflectores distribuidos de Bragg y otra por interferencia constructiva, uno de los tipos de cavidades es Fabry-Perot en el que utilizan reflexiones múltiples para confinar la luz por medio de interferencia constructiva, usando defectos en su estructura periódica de los cristales fotónicos y usando procesos de interferencia logran confinar la luz de una a tres dimensiones. Una

situación diferente es cuando se usan capas múltiples de muchos pares de índice de refracción alternativo para hacer espejos de cavidad. La estructura completa tiene un espaciador de cavidad adicional entre los espejos de Bragg y el conjunto puede considerarse una cavidad de cristal fotónico unidimensional con un defecto central.

Las microcavidades de tipo pilar activo más comunes son los llamados láseres emisores de superficie de cavidad vertical (VCSEL) ver Fíg. 1.13, forman la base de una industria enorme y próspera debido a su facilidad de fabricación a gran escala y de dispositivos en forma de oblea. Estos VCSEL normalmente usan una combinación de grabado de pilares y un mayor control lateral de la inyección de corriente eléctrica al oxidar progresivamente una capa de AlAs incorporada que forma un anillo aislante de AlO_x .

En general, no es posible hacer microcavidades extremadamente pequeñas debido a que la difracción juega un papel cada vez mayor a escalas pequeñas y las superficies planas tienen que estar conectadas por esquinas que actúan como fugas para la luz difractante. Las primeras microcavidades exitosas basadas en GaN se lograron en el 2007, lo que permitió a Christopoulos y colaboradores mostrar un fuerte acoplamiento a temperatura ambiente, y a Baumberg en el 2008 producir condensación de polaritones cuando se bombea con fuentes UV pulsadas.

Un excitón es un estado ligado entre un electrón y un hueco en semiconductores, formado por la interacción de Coulomb entre ellos. En un proceso de excitación óptica es posible formar un excitón. Cuando un fotón se absorbe con la energía cercana a la brecha de energía, un electrón en la parte superior de la banda de valencia se excitará hacia la banda de conducción y dejará una vacante cargada positivamente, que llamamos hueco en la banda de valencia. Ahora este electrón cargado negativamente y el hueco cargado positivamente formarán un par de hueco-electrón debido a la atracción de Coulomb. Esta interacción de Coulomb reducirá la energía del par electrón-hueco. Dando como resultado, que la energía del excitón es menor que la brecha de energía y coincide con la energía de fotón incidente.

Los excitones de semiconductores de bulto tienen tiempos de vida finitos, generalmente del orden de nanosegundos. Pero en los pozos cuánticos, que son heteroestructuras formadas cuando una capa de un semiconductor está rodeada por dos capas de semiconductores con una banda prohibida mayor, los tiempos de vida pueden ser más elevados. Los electrones y huecos en el pozo cuántico se confinan en la dirección de la hetero-estructura, definida típicamente por z , mientras que para las direcciones x e y se pueden mover libremente. Debido a esta conducta, los estados serán discretos en dirección z , mientras que en las otras dos coordenadas serán continuos. Esto quiere decir que en la microcavidad, tal la luz como los excitones se confinan a lo largo de z , limitando la dinámica de fotones y excitones en un plano dimensional.

A mediados de la década de 1950, los teóricos entendieron que el acoplamiento

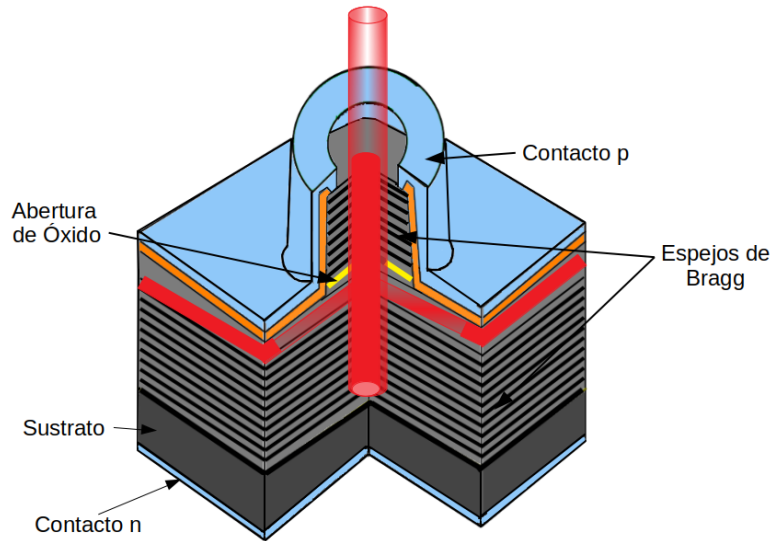


Figura 1.12: Diseño VCSEL que incorpora aberturas de óxido.

de la luz influye fuertemente en las propiedades físicas de los excitones y su espectro energético. El físico ucraniano Pekar 1957 fue el primero en describir estos cambios en el espectro de energía del excitón debido al acoplamiento de la luz en términos de ondas adicionales que aparecen en el cristal (actualmente llamados polaritones). Posteriormente, en 1966 Agranovich y Dubovskii dieron la primera descripción teórica del excitón-polaritón en estructuras 2D. Uno de los grandes intereses en el desarrollo de las MC es que permite llevar a cabo estudios fundamentales de la interacción de luz-materia en geometrías donde los estados electrónicos y el campo electromagnético se confinan a lo largo de una dirección. Esto se lleva a cabo colocando pozos cuánticos en la microcavidad de semiconductores, lo que genera fuertes interacciones entre los excitones de los pozos cuánticos y los fotones de la microcavidad.

Si la interacción es lo suficientemente fuerte como para que la velocidad de intercambio de energía sea más rápida que la velocidad de desintegración de los fotones de la cavidad y de los excitones de los pozos cuánticos, estos generan nuevos estados propios, dando como resultado una superposición de estados entre el fotón y el excitón dando origen a una cuasi-partícula conocida como polaritón. Hay diferentes tipos de polaritones, dependiendo del tipo de excitación en el sólido. Puede ser un fonón óptico, un plasmón, o un excitón. Los polaritones pueden formar estados coherentes, o condensados, en microcavidades semiconductoras, lo que permite desarrollar láseres de polaritones, fabricados por primera vez en el año 2000 [44].

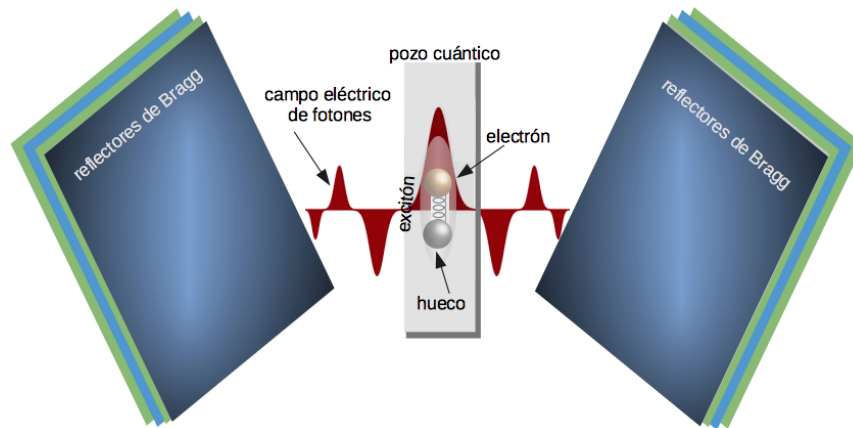


Figura 1.13: Representación gráfica de la formación de polaritones usando espejos, en el que se reflejan fotones que excitan los electrones.

1.2.2. Láseres polaritónicos

Cuando se crean en una cavidad óptica con espejos que reflejen fotones para que vuelvan a excitar otros electrones del material, se producirá un “gas” de excitones estables y coherentes (todos los fotones serán “similares”). En esta microcavidad semiconductor el número de excitones crecerá. Estos excitones se acoplan con los fotones formando excitón-polaritones. Los polaritones en microcavidad se comportan como bosones si su densidad no es demasiado grande [45]. Los fotones en 3D tienen masa en reposo nula, pero el confinamiento de fotones en una microcavidad les proporciona una masa por movimiento en el plano xy finita pero pequeña. Como resultado, los polaritones también tienen una masa chica, del orden de 10^{-4} respecto a la masa del electrón libre. Eso permite obtener los condensados de polaritones en las temperaturas ambientales. El tiempo de vida de polaritones en microcavidad es comúnmente alrededor de los picosegundos. La polarización de un condensado polaritónico permite las energías de conmutación por debajo de 0.5 fJ. [43]. Una consecuencia importante de la formación del condensado polaritónico es la emisión de un haz de luz coherente afuera de la microcavidad, que representa un nuevo tipo del efecto láser, un láser polaritónico. El término láser implica que la emisión estimulada de fotones compite con la absorción y que la emisión espontánea supera las pérdidas radiativas de la cavidad.

La condensación de Bose-Einstein (BEC) de un gas de polaritones fue demostrado por la primera vez en 2006 [46]. Este resultado es sin duda el más importante hallazgo para el campo de polaritones y la descripción teórica de la condensación polaritónica fuera del equilibrio se ha convertido en un tema importante del estudio. Más sobre el desarrollo de física y ingeniería de los condensados polaritónicos, y su importancia para la computación óptica, escribimos en el sub-capítulo 3.1.

1.2.3. Organización de la tesis

Se estructura la tesis es de la siguiente manera. En el capítulo 2 presentamos la dinámica conservativa de dos condensados polaritónicos, con el objetivo particular de introducir el modelo del dímero de Bose-Hubbard conservativo, y presentamos los resultados analíticos sobre las trayectorias y puntos fijos que representan posibles condensados coherentes. En el capítulo 3, se presenta el planteamiento del problema, usando como base el modelo realístico del cúbit polaritónico. También mostramos los diferentes estados fijos de láser y su estabilidad además las bifurcaciones presentes en el sistema de condensados polaritónicos con bombeo no-resonante. Además, la presencia del dominio caótico se estudia en función de la interacción polariton-polariton y el acoplamiento de Josephson entre los dos condensados que forman el cúbit. En el capítulo 4, comprobamos la formación de caos y atractores extraños en el espacio de parámetros de orden en el sistema de dos condensados de excitón-polaritones acoplados, siendo de utilidad el cálculo de los exponentes de Lyapunov. Describimos además el fenómeno importante de multiestabilidad de la condensación polaritónica. En el capítulo 5, estudiamos el espectro de emisión de la luz desde el cúbit polaritónico. Finalmente, en el último capítulo presentamos las conclusiones del trabajo.

Capítulo 2

Dinámica conservativa de dos condensados

En este capítulo presentamos el modelo de Hubbard, con la finalidad de llegar a la descripción del dímero de condensados de excitón-polaritones (polaritones), usando técnicas de sistemas de muchas partículas idénticas. Consideramos el caso de la dinámica conservativa de dos condensados y obtenemos las soluciones analíticas, que nos permitan identificar los estados fijos y las bifurcaciones importantes de este sistema.

2.1. Modelo de Hubbard

Durante mucho tiempo, se ha buscado construir modelos simples que caractericen el estado fundamental de los sistemas en materia condensada para predecir el comportamiento de sistemas reales utilizando modelos matemáticos, rescatando los grados de libertad relevantes en el régimen de interés. A lo largo de los años, algunos de estos modelos simplificados han cobrado mayor importancia que otros, mostrando ser apropiados para describir las propiedades físicas que caracterizan el estado fundamental. Algunos de los modelos más famosos y más estudiados hasta la fecha son por ejemplo: el modelo de Ising, el modelo de Hubbard, el modelo de Bose-Hubbard, el modelo de Heisenberg, la teoría del líquido de Fermi, el modelo de Sommerfeld de los metales. El modelo de Hubbard fue introducido por Hubbard, Gutzwiller y Kanamori [47, 48, 49]. El modelo de Hubbard es un modelo simplificado para los electrones en un sólido. Estos electrones están en una red, haciendo saltos a vecinos cercanos, con interacción entre los electrones en el mismo sitio, representado una repulsión de muy corto alcance. La amplitud para que las partículas pasen entre diferentes sitios de la red decae exponencialmente con la distancia, por lo que se considera que los electrones brincan únicamente sobre los

vecinos más cercanos.

A pesar de su aparente simplicidad, este modelo puede describir diversos fenómenos como la transición metal-aislante, anti-ferromagnetismo, ferrimagnetismo, ferromagnetismo y superconductividad. Es posible también describir varias clases de universalidad para diferentes sistemas fuertemente interactuantes mediante el estudio del modelo de Hubbard. En consecuencia, se recurre a un Hamiltoniano efectivo idóneo para describir las características de un fluido electrónico [49].

2.2. Hamiltoniano de Bose-Hubbard

El modelo de Hubbard tradicional, que describimos en la sección anterior, es un sistema conformado por fermiones. Pero es de nuestro interés los sistemas conformados por bosones. La física de los átomos ultrafríos en redes ópticas está muy bien descrita en términos del modelo de Bose-Hubbard (BH). Así como el Hamiltoniano de Hubbard modela a los electrones en movimiento a través de un cristal, el Hamiltoniano de Bose-Hubbard describe a los bosones bajo las mismas condiciones que los electrones, sin las restricciones que siguen para las partículas de espín semientero. En particular, muchos bosones pueden ocupar el mismo sitio. A partir de esto, es posible obtener las energías del estado base del sistema bosónico para estudiar las transiciones de fase que pueden ocurrir. Este modelo se han utilizado para describir sistemas de estado sólido como el comportamiento crítico del ^4He , la uniones de Josephson y los átomos en redes ópticas.

El modelo de Bose-Hubbard captura las correlaciones que surgen en el caso de interacciones fuertes entre partículas bosónicas. Tomando solo interacciones locales en el sitio, el Hamiltoniano de Bose-Hubbard está dado por

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{BH}} = -\frac{\varepsilon}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} (\hat{\psi}_i^\dagger \hat{\psi}_j + \hat{\psi}_j^\dagger \hat{\psi}_i) + \frac{\alpha}{4} \sum_i \hat{\psi}_i^{\dagger 2} \hat{\psi}_i^2, \quad (2.1)$$

donde $\hat{\psi}_i^\dagger$ y $\hat{\psi}_i$ son los operadores de creación y aniquilación bosónicos en el sitio i , y la suma en el primer término corre sobre los sitios de red más cercanos $\langle i, j \rangle$. En lo que sigue, vamos a denotar $\hat{n}_i = \hat{\psi}_i^\dagger \hat{\psi}_i$ como el operador que mide el número de partículas. El Hamiltoniano (2.1) describe los dos procesos más básicos de baja energía que ocurren en el sistema. La primera parte del Hamiltoniano captura los saltos coherentes o tunelización con la amplitud ε en los sitios vecinos de la red, el cual indica una medida de la energía cinética del sistema. Debido a las estadísticas bosónicas, la presencia de otras partículas en la red puede mejorar las tasas efectivas de los saltos. El segundo término del Hamiltoniano describe la interacción local, repulsiva o atractiva, entre partículas que residen en el mismo sitio de red, la cual es proporcional al parámetro α . El conmutador de los operadores bosónicos $\hat{\psi}$

y $\hat{\psi}^\dagger$ está dado por

$$[\hat{\psi}_i, \hat{\psi}_j^\dagger] = \hat{\psi}_i \hat{\psi}_j^\dagger - \hat{\psi}_j^\dagger \hat{\psi}_i = \delta_{ij}, \quad [\hat{\psi}_i, \hat{\psi}_j] = [\hat{\psi}_i^\dagger, \hat{\psi}_j^\dagger] = 0. \quad (2.2)$$

2.3. Dinámica del dímero de Bose-Hubbard

Un sistema oportuno para el estudio de la coherencia es un condensado de Bose-Einstein en una trampa óptica de doble pozo, conocida como “dímero BEC” o “la unión de Josephson bosónico”, es idóneo en el análisis teórico y realizable en experimentos actuales. La realización experimental de la condensación de Bose-Einstein utilizando gases alcalinos atómicos ha proporcionado los medios para estudiar el túnel macroscópico en sistemas con parámetros de interacción ajustables [50, 51]. Desde la perspectiva teórica, el modelo del dímero de Bose-Hubbard, también conocido como dímero discreto de captura automática o el Hamiltoniano de Josephson [52]. Se ha dedicado en una serie de artículos a las propiedades del dímero cuántico [53, 54, 55]. Este sistema describe la dinámica de los bosones que fluctúan entre dos sitios. El número de bosones se conserva, junto con la conservación de la energía [52, 56], y por esta razón el sistema es integrable. Sus aplicaciones van desde la simulación de fenómenos de estado sólido [57, 58] hasta el procesamiento de información cuántica [59], pero para aprovechar su potencial requiere una comprensión profunda de la coherencia cuántica.

El dímero de condensados de excitón-polaritones puede ser creado con una alta precisión, que permite modificar la barrera potencial entre los sitios y el parámetro de saltos ε , como el parámetro de interacción α [60]. Con un alto poder de excitación, las ocupaciones de los condensados son grandes y uno puede adoptar la descripción clásica del problema, en el que se espera que la dinámica del sistema sea cercana a la conservativa. Para este sistema, el parámetro ε es típicamente de diez a cien μeV y $\alpha > 0$.

Una perspectiva interesante con estos sistemas fotónicos disipados impulsados es la posibilidad de realizar estados entrelazados [61]. Se sabe que el entrelazamiento es un recurso clave para las nuevas tecnologías, como la computación y la comunicación cuántica [8]. Un ejemplo de dicha estructura acoplada es el dímero polaritónico. Este sistema consta de dos modos no-lineales acoplados y ha sido objeto de varios estudios teóricos [40, 62, 63, 64]. Es uno de los sistemas más simples en el que, la física es el resultado de una interacción entre saltos e interacción. Los trabajos teóricos realizados han demostrado el potencial del dímero de Bose-Hubbard para la realización de un estado enredado [64, 65, 66].

El Hamiltoniano del dímero de Bose-Hubbard está dado por

$$\mathcal{H} = -\frac{\varepsilon}{2}(\hat{\psi}_{+1}^\dagger \hat{\psi}_{-1} + \hat{\psi}_{-1}^\dagger \hat{\psi}_{+1}) + \frac{\alpha_1}{4}(\hat{\psi}_{+1}^{\dagger 2} \hat{\psi}_{+1}^2 + \hat{\psi}_{-1}^{\dagger 2} \hat{\psi}_{-1}^2) + \frac{\alpha_2}{2} \hat{\psi}_{+1}^\dagger \hat{\psi}_{-1}^\dagger \hat{\psi}_{+1} \hat{\psi}_{-1}, \quad (2.3)$$

aquí usamos los índices ± 1 para enumerar dos sitios, con los operadores de creación y aniquilación de bosones $\hat{\psi}_{\pm 1}^\dagger$ y $\hat{\psi}_{\pm 1}$. Este índice ± 1 también puede indicar la polarización de polaritones en el mismo sitio. En este caso, la polarización circular izquierda corresponde al índice -1 y a la polarización circular derecha corresponde al índice $+1$. El parámetro ε define la tasa de conversión entre dos sitios o el efecto de Josephson entre los estados ± 1 . Finalmente, los parámetros $\alpha_{1,2}$ definen la interacción de bosones en el mismo sitio (α_1) y entre sitios opuestos (α_2). Los parámetros introducidos tienen dimensionalidad de energía y haciendo $\hbar = 1$ tenemos unidades de frecuencia.

Usando la representación de Heisenberg, podemos escribir la evolución de los operadores como

$$i \frac{d\hat{\psi}_{\pm 1}}{dt} = [\hat{\psi}_{\pm 1}, \mathcal{H}] = -\frac{\varepsilon}{2} \hat{\psi}_{\mp 1} + \frac{1}{2} (\alpha_1 \hat{n}_{\pm 1} + \alpha_2 \hat{n}_{\mp 1}) \hat{\psi}_{\pm 1}, \quad (2.4)$$

en donde usamos el operador del número de partículas $\hat{n}_{\pm 1} = \hat{\psi}_{\pm 1}^\dagger \hat{\psi}_{\pm 1}$. Tomado el adjunto obtenemos también

$$-i \frac{d\hat{\psi}_{\pm 1}^\dagger}{dt} = -[\hat{\psi}_{\pm 1}^\dagger, \mathcal{H}] = -\frac{\varepsilon}{2} \hat{\psi}_{\mp 1}^\dagger + \frac{1}{2} \hat{\psi}_{\pm 1}^\dagger (\alpha_1 \hat{n}_{\pm 1} + \alpha_2 \hat{n}_{\mp 1}). \quad (2.5)$$

En el caso del dímero bosónico es conveniente introducir el espín. El operador de espín se define como

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \hat{\Psi}^\dagger \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\Psi} \quad (2.6)$$

donde usamos el espinor $\hat{\Psi} = (\hat{\psi}_{+1}, \hat{\psi}_{-1})^\top$, y $\boldsymbol{\sigma}$ es el vector de Pauli, cuyas componentes son las matrices

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Con la finalidad de encontrar las componentes de $\hat{\mathbf{S}}$, usamos la Ec. (2.6) y obtene-

mos

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2}(\hat{\psi}_{-1}^\dagger \hat{\psi}_{+1} + \hat{\psi}_{+1}^\dagger \hat{\psi}_{-1}), \quad (2.8a)$$

$$\hat{S}_y = \frac{i}{2}(\hat{\psi}_{-1}^\dagger \hat{\psi}_{+1} - \hat{\psi}_{+1}^\dagger \hat{\psi}_{-1}), \quad (2.8b)$$

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2}(\hat{\psi}_{+1}^\dagger \hat{\psi}_{+1} - \hat{\psi}_{-1}^\dagger \hat{\psi}_{-1}), \quad (2.8c)$$

$$\hat{S} = \frac{1}{2}(\hat{\psi}_{+1}^\dagger \hat{\psi}_{+1} + \hat{\psi}_{-1}^\dagger \hat{\psi}_{-1}). \quad (2.8d)$$

Las componentes dados por las Ecs. (2.8) satisfacen las relaciones de conmutación ordinarias de las componentes de espín: $[\hat{S}, \hat{S}_{x,y,z}] = 0$, $[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hat{S}_z$ (y las permutaciones cíclicas de este último). Estas relaciones de conmutación son consecuencia de las relaciones de conmutación de (2.2). De la definición (2.8d) observemos que el operador de la longitud del espín es la mitad del operador del número total de bosones. Escribiendo el valor propio de \hat{S} como S , tenemos el número total de bosones $N = 2S$, que es una constante. Notemos también que a partir de las Ecs. (2.8a-c) obtenemos $\hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 = \hat{S}(\hat{S} + 1) \equiv S(S + 1)$.

Ahora podemos reescribir el Hamiltoniano (2.3) como función de las componentes de espín. Usando las relaciones

$$\begin{aligned} (\hat{S} + \hat{S}_z)^2 &= \hat{\psi}_{+1}^\dagger (\hat{\psi}_{+1}^\dagger \hat{\psi}_{+1} + 1) \hat{\psi}_{+1} = \hat{\psi}_{+1}^{\dagger 2} \hat{\psi}_{+1}^2 + \hat{\psi}_{+1}^\dagger \hat{\psi}_{+1}, \\ (\hat{S} - \hat{S}_z)^2 &= \hat{\psi}_{-1}^{\dagger 2} \hat{\psi}_{-1}^2 + \hat{\psi}_{-1}^\dagger \hat{\psi}_{-1}, \\ (\hat{S} + \hat{S}_z)(\hat{S} - \hat{S}_z) &= \hat{\psi}_{+1}^\dagger \hat{\psi}_{-1}^\dagger \hat{\psi}_{+1} \hat{\psi}_{-1} = \hat{S}^2 - \hat{S}_z^2, \\ \hat{\psi}_{+1}^{\dagger 2} \hat{\psi}_{+1}^2 + \hat{\psi}_{-1}^{\dagger 2} \hat{\psi}_{-1}^2 &= 2(\hat{S}^2 + \hat{S}_z^2 - \hat{S}), \end{aligned}$$

obtenemos

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_s, \quad (2.9a)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \frac{\alpha_1}{2}(\hat{S}^2 - \hat{S}) + \frac{\alpha_2}{2}\hat{S}^2, \quad (2.9b)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_s = -\varepsilon\hat{S}_x + \frac{\alpha}{2}\hat{S}_z^2, \quad (2.9c)$$

donde $\alpha = (\alpha_1 - \alpha_2)$. Siendo que $\hat{\mathcal{H}}_0$ es una constante $[(\alpha_1 + \alpha_2)S^2 - \alpha_1 S]/2$, esta parte del Hamiltoniano no nos va interesar en el lo que sigue. El segundo término del Hamiltoniano (2.9c) es también conocido como el modelo de Lipkin-Meshkov-Glick (LMG) [67]. Hay que mencionar que el modelo LMG a resultado bastante interesante para el estudio del correlación ordenada fuera del tiempo (OTOC), que es una cantidad clave en las definiciones del caos cuántico de muchos cuerpos [68, 69].

Aplicando de nuevo las ecuaciones de Heisenberg y las relaciones de conmutación para las componentes de espín obtenemos

$$\frac{d\hat{S}_x}{dt} = i[\hat{\mathcal{H}}, \hat{S}_x] = -\frac{\alpha}{2}(\hat{S}_z\hat{S}_y + \hat{S}_y\hat{S}_z), \quad (2.10a)$$

$$\frac{d\hat{S}_y}{dt} = i[\hat{\mathcal{H}}, \hat{S}_y] = \varepsilon\hat{S}_z + \frac{\alpha}{2}(\hat{S}_z\hat{S}_x + \hat{S}_x\hat{S}_z), \quad (2.10b)$$

$$\frac{d\hat{S}_z}{dt} = i[\hat{\mathcal{H}}, \hat{S}_z] = -\varepsilon\hat{S}_y. \quad (2.10c)$$

Ahora vamos a considerar *el límite clásico*, que corresponde en un número grande de bosones, $S \gg 1$. En este límite, simplemente sustituimos los diferentes operadores que aparecen arriba por números. En particular, los números complejos $\psi_{\pm 1}$, que sustituyen los operadores de aniquilación, definen las componentes del parámetro de orden (la función de onda del condensado) $\Psi = (\psi_{+1}, \psi_{-1})^T$, denotado como un espinor. Estos están regidos por las ecuaciones

$$i\frac{d\psi_{\pm 1}}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2}\psi_{\mp 1} + \frac{1}{2}[\alpha_1|\psi_{\pm 1}|^2 + \alpha_2|\psi_{\mp 1}|^2]\psi_{\pm}. \quad (2.11)$$

El espín en el caso clásico se transforma en un vector real \mathbf{S} de tres dimensiones con las componentes y longitud dados por

$$S_x = \frac{1}{2}(\psi_{+1}^*\psi_{-1} + \psi_{-1}^*\psi_{+1}), \quad S_y = \frac{i}{2}(\psi_{-1}^*\psi_{+1} - \psi_{+1}^*\psi_{-1}), \quad (2.12a)$$

$$S_z = \frac{1}{2}(|\psi_{+1}|^2 - |\psi_{-1}|^2), \quad S = \frac{1}{2}(|\psi_{+1}|^2 + |\psi_{-1}|^2). \quad (2.12b)$$

Observamos que en el límite clásico tenemos la relación ordinaria $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$.

Se puede establecer la dinámica del espín del sistema desde las ecuaciones cuánticas (2.10), como basándose en la ecuación de Landau-Lifshitz clásica

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \left[\frac{d\mathcal{H}_s}{d\mathbf{S}} \times \mathbf{S} \right], \quad (2.13)$$

usando el Hamiltoniano LMG del espín (2.9c). Estas ecuaciones son

$$\dot{S}_x = -\alpha S_z S_y, \quad (2.14a)$$

$$\dot{S}_y = \varepsilon S_z + \alpha S_z S_x, \quad (2.14b)$$

$$\dot{S}_z = -\varepsilon S_y, \quad (2.14c)$$

en donde el punto arriba de la letra indica la derivativa sobre el tiempo.

Una vez que encontramos las soluciones de las Ecs. (2.14), podemos calcular la evolución del parámetro de orden. Tomando en cuenta que las ocupaciones de los condensados son $n_{\pm 1} = |\psi_{\pm 1}|^2 = S \pm S_z$, escribimos

$$\psi_{\pm 1} = \sqrt{n_{\pm 1}} e^{i\theta_{\pm 1}}, \quad (2.15)$$

en donde las fases $\theta_{\pm 1}$ evolucionan de acuerdo con las ecuaciones

$$\dot{\theta}_{\pm 1} = -\frac{1}{2} \left[(\alpha_1 n_{\pm 1} + \alpha_2 n_{\mp 1}) - \frac{\varepsilon S_x}{n_{\pm 1}} \right]. \quad (2.16)$$

Esta última expresión se puede obtener diferenciando $\theta_{\pm 1} = (1/2i) \ln(\psi_{\pm 1}/\psi_{\pm 1}^*)$.

2.4. Trayectorias, puntos fijos y rompimiento de simetría

Como la longitud del espín S es una integral de movimiento, es conveniente trabajar con el vector unitario $\mathbf{s} = \mathbf{S}/S$. También definimos el parámetro de interacción adimensional $\beta = \alpha S/\varepsilon$ y el tiempo adimensional $\tau = \varepsilon t$. Con estos parámetros y a partir de las Ecs. (2.14) obtenemos

$$\frac{ds_x}{d\tau} = -\beta s_z s_y, \quad (2.17a)$$

$$\frac{ds_y}{d\tau} = s_z + \beta s_z s_x, \quad (2.17b)$$

$$\frac{ds_z}{d\tau} = -s_y. \quad (2.17c)$$

Sustituyendo (2.17c) en (2.17a) vemos que $\frac{d}{d\tau}(s_x - \frac{1}{2}\beta s_z^2) = 0$, por lo que $s_x = \frac{1}{2}\beta s_z^2 - c$, donde c es una constante que corresponde a la energía del espín en unidades de εS . Elevando al cuadrado la Ec. (2.17b) y usando la expresión anterior para s_x , obtenemos

$$\left(\frac{ds_z}{d\tau} \right)^2 = s_y^2 = 1 - s_z^2 - s_x^2 = -\frac{\beta^2}{4} s_z^4 - (1 - c\beta) s_z^2 + (1 - c^2). \quad (2.18)$$

Esta ecuación diferencial no-lineal se parece a la ecuación para el coseno elíptico de Jacobi. Efectivamente, para $\text{cn}(u, k^2)$, donde k^2 es el módulo elíptico, tenemos la ecuación [70]

$$\left(\frac{d \text{cn}(u, k^2)}{du} \right)^2 = -k^2 \text{cn}^4(u, k^2) - (1 - 2k^2) \text{cn}^2(u, k^2) + (1 - k^2), \quad (2.19)$$

en donde los terminos del lado derecho tienen los mismos signos como los términos en la Ec. (2.18). Por eso buscaremos la solución de la Ec. (2.18) como $s_z = A \operatorname{cn}(\omega\tau, k^2)$. Al sustituir s_z en la Ec. (2.18) y comparando los terminos con la misma potencia de cn encontramos que

$$\frac{A^2\beta^2}{4\omega^2} = k^2, \quad (2.20a)$$

$$\frac{1 - c\beta}{\omega^2} = 1 - 2k^2, \quad (2.20b)$$

$$\frac{1 - c^2}{A^2\omega^2} = 1 - k^2. \quad (2.20c)$$

De las Ecs. (2.20), tenemos tres ecuaciones con tres incognitas (A^2 , ω^2 y k^2). Para resolver este sistema de ecuaciones, primero con la Ec. (2.20b) encontramos el módulo elíptico:

$$k^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{(1 - c\beta)}{\omega^2} \right], \quad 1 - k^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{(1 - c\beta)}{\omega^2} \right]. \quad (2.21)$$

Ahora multiplicando k^2 por $(1 - k^2)$ y usamos la primera expresión de la Ec. (2.21), y por otro lado las Ecs. (2.20a) y (2.20c), obtenemos

$$k^2(1 - k^2) = \frac{1}{4} \left[1 - \frac{(1 - c\beta)^2}{\omega^4} \right] = \frac{\beta^2(1 - c^2)}{4\omega^4}, \quad (2.22)$$

de donde obtenemos $\omega^4 = 1 - 2c\beta + \beta^2$. Después la Ec. (2.20a) nos permite obtener la amplitud A . Enlistamos los resultados encontrados

$$A^2 = \frac{2(1 - c^2)}{(1 - c\beta) + \sqrt{1 - 2c\beta + \beta^2}}, \quad (2.23a)$$

$$\omega = \sqrt[4]{1 - 2c\beta + \beta^2}, \quad (2.23b)$$

$$2k^2 = 1 - \frac{(1 - c\beta)}{\sqrt{1 - 2c\beta + \beta^2}}, \quad (2.23c)$$

y escribimos las soluciones finales para las componentes del espin,

$$s_z = A \operatorname{cn}(\omega\tau, k^2), \quad s_y = A\omega \operatorname{sn}(\omega\tau, k^2) \operatorname{dn}(\omega\tau, k^2), \quad s_x = \frac{\beta}{2}s_z^2 - c, \quad (2.24)$$

en donde para obtener s_y usamos la propiedad que $d(\operatorname{cn}(u, k^2))/du = -\operatorname{sn}(u, k^2)\operatorname{dn}(u, k^2)$.

Las relaciones (2.24) definen trayectorias en la esfera de Stokes, definida por $s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = 1$. Diferentes trayectorias están etiquetadas por la constante c . El

rango de valores permitidos de la constante c , que define la energía del espín, depende de la fuerza de interacción. Este rango puede ser encontrado de la condición $\omega^4 \geq 0$, en el que, s_z tiene un valor real. Para $|\beta| \leq 1$, el rango de esta constante es $-1 \leq c \leq 1$ y todas las trayectorias circulan alrededor del eje s_x , preservando la simetría de paridad del sistema ($z \leftrightarrow -z$). La precesión del espín ocurre en la dirección en contra de las manecillas del reloj, si miramos a lo largo del eje s_x , en el que eso corresponde para $A > 0$. Para $|\beta| \leq 1$ existen solo dos punto fijos, F_s y F_a , que conservan la simetría:

$$s_x = \pm 1, \quad s_y = s_z = 0, \quad (2.25)$$

en donde el signo $+$ corresponde a F_s , y el signo $-$ corresponde a F_a . En el estado F_s la diferencia de fase de dos condensados es 0 y estos están sincronizados. En el estado F_a la diferencia de fases de dos condensados es π y los condensados son anti-sincronizados. Los dos puntos fijos y las trayectorias para la interacción débil se muestran en la Fig. 2.1(a,b).

Sin embargo, para una interacción lo suficientemente fuerte, es decir cuando $|\beta| > 1$, aparecen soluciones de ruptura de simetría. En este caso, el rango de la constante c es $-1 \leq c \leq (1 + \beta^2)/2\beta$ para la interacción repulsiva ($\beta > 0$), o $(1 + \beta^2)/2\beta \leq c \leq 1$ para la interacción atractiva ($\beta < 0$). También observamos que para $|\beta| > 1$ la dinámica del espín se caracteriza por cuatro puntos fijos. A parte de $F_{s,a}$ aparecen dos puntos con simetría rota, F_{\pm} con

$$s_x = -\frac{1}{\beta}, \quad s_y = 0, \quad s_z = \pm \frac{1}{\beta} \sqrt{\beta^2 - 1}, \quad (2.26)$$

respectivamente. Una característica importante de los estados con simetría rota es que ellos corresponden a diferentes ocupaciones de los condensados. Tenemos $n_{+1} > n_{-1}$ para F_+ y $n_{+1} < n_{-1}$ para F_- (y las trayectorias cercanas). Los puntos fijos y las trayectorias para interacción fuerte están mostrados en la Fig. 2.1(c,d). Para obtener las trayectoria cercanas a F_+ hay que tomar $A > 0$, y las trayectorias cercanas de F_- corresponden a $A < 0$.

Para el análisis del comportamiento de dos condensados polaritónicos es importante tener en cuenta que $\beta = \alpha S / \varepsilon$ es proporcional al número total de partículas $N = 2S$, y este número se modifica por el bombeo del sistema. Para los bombeos pequeños, el láser polaritónico está formado en el estado F_a o en el estado π [71]. Con el aumento del bombeo crece el parámetro β y para $\beta > 1$ podemos esperar que este estado del condensado vuelva ser inestable, por que como se ve de las Figs. 2.1(c,d), el punto F_a se convierte en punto de silla. Como resultado, el condensado puede ser formado en los estados F_{\pm} con el rompimiento de simetría. Pero para comprobar este escenario es importante incorporar el bombeo y disipación en el modelo, que es el objetivo de los siguientes capítulos.

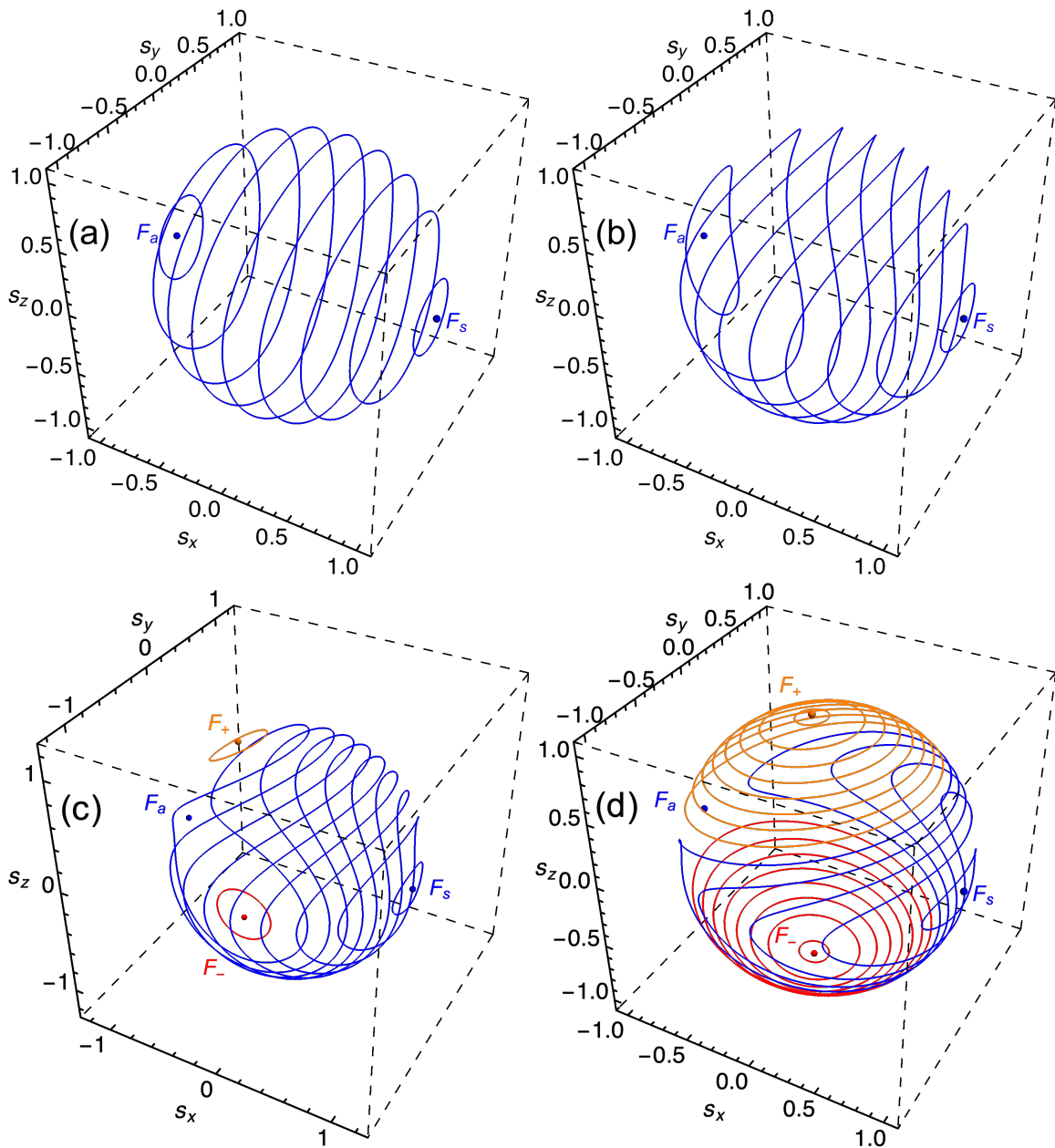


Figura 2.1: Trayectorias de espín de dos condensados en el caso conservativo. Los parámetros son (a) $\beta = 0.25$ y (b) 0.9 con la constante c va de -0.96 a 0.96 con paso de 0.24 , que van del punto fijo F_s al punto fijo F_a (puntos azules); (c) $\beta = 2$ y la constante c va de -0.96 a 1.2 con paso de 0.24 ; (d) $\beta = 9$ y la constante c va de 0.9 a 4.5 con paso de 0.45 . En los últimos dos casos aparecen las trayectorias con simetría rota indicados por colores rojo y naranja, con dos puntos fijos F_{\pm} adicionales.

Capítulo 3

Dímero de condensados polaritónicos

En este capítulo escribimos el modelo realista del dímero de condensados polaritónicos alimentados de manera no-resonante por dos depósitos independientes. Mostramos los atractores y bifurcaciones en este modelo. Estudiamos los estados fijos de láser, al igual que los estados que preservan la simetría entre condensados como los estados que rompen la simetría y analizamos la estabilidad de los puntos fijos.

3.1. Trascendencia del dímero polaritónico

La formación espontánea de polarización ha sido una de las características importantes de la condensación del excitón-polariton (polaritónico) y del láser en las microcavidades semiconductoras desde su descubrimiento en el 2006 [46, 72, 73, 74]. Típicamente, muy por encima del umbral de condensación, el condensado se obtiene con polarización lineal. Este efecto se interpretó como un resultado de minimización de la energía del condensado [75, 76]. Además, observaron que la polarización lineal está anclada a un eje X cristalográfico, que puede relacionarse nuevamente con la presencia de la división de energía entre polarizaciones lineales X e Y de los modos de la luz en la microcavidad [46, 77]. No es sorprendente que para un sistema disipativo como el condensado de polaritones, estos argumentos simplistas relacionados con la energía resultaran ser bastante limitados. El comportamiento de polarización observado experimentalmente es en general más complejo, especialmente en la proximidad del umbral de la condensación, y depende de la forma en que se excita el sistema y de la dinámica rápida de polarización (o del pseudoespín) de los polaritones en la cavidad [78, 79, 80, 81, 82]. La formación del condensado polaritónico fuera del equilibrio, o de un láser polaritónico, no se rige únicamente por la relajación de la energía, sino por el equilibrio total de las tasas de recolección y descomposición de los diferentes estados de polaritones

junto con las interacciones polaritón-polaritón.

Las propiedades de polarización no-triviales de la condensación de polaritones se hicieron especialmente evidentes para los condensados separados espacialmente de las reservas de polaritones incoherentes, como, por ejemplo, los condensados polaritónicos atrapados dentro de las barreras potenciales creadas por los depósitos [83, 84]. Se demostró [85] que el condensado atrapado sufre bifurcación en un estado polarizado casi circularmente, estable en un amplio rango de bombeo. La formación de polarización circular es incluso más espectacular que la lineal: la simetría de paridad se rompe espontáneamente, contrariamente a la asimetría XY explícita de polarización lineal del sistema. Para el bombeo linealmente polarizado, la polarización circular del estado del condensado se elige al azar y puede ser manipulada por campos eléctricos extremadamente débiles [43]. El estado de polarización es aún más complejo para el bombeo polarizado elípticamente, en los dominios de inversión de polarización e histéresis del estado del condensado en función de la intensidad del bombeo [86, 87]. Las propiedades del condensado polaritónico con el grado de libertad de polarización son similares a las propiedades de un par de condensados separados por una barrera, pero con polarización fija de ambos (dímero o díada). Los estados enlazantes y antienlazantes del dímero son equivalentes a los estados polarizados linealmente X e Y , respectivamente, mientras que el acoplamiento de Josephson entre ellos es equivalente a la presencia de la división de energías entre X e Y . Para un acoplamiento de Josephson lo suficientemente fuerte, se espera la sincronización del dímero [88, 89, 90, 91, 92], ya sea en el estado enlazante (con la diferencia de fase 0 entre los centros de condensación) o en el estado antienlazante (con la diferencia de fase π).

Por otro lado, incluso para un par sin disipación, o el dímero de Bose-Hubbard, es posible la ruptura de la simetría y formación de los estados autoatrapados [93, 94]. En estas soluciones autoatrapadas, las ocupaciones de dos condensados difieren fuertemente, y son análogas al fuerte grado de polarización circular en la polarización del condensado individual. Curiosamente, cuando el acoplamiento disipativo (o radiativo) entre los condensados está presente junto con el acoplamiento de Josephson habitual, dos puntos fijos de ruptura de la simetría pueden ser estables, mientras que dos que conservan la simetría no lo están, manifestando el régimen de láser débil [95]. En este régimen, la diferencia de fases entre los condensados no es trivial, es decir no es igual a 0, ni a π . Cuando los cuatro puntos fijos del dímero del condensado de polaritones se vuelven inestables, el sistema puede exhibir una dinámica de ciclo límite estable, lo que resulta en la emisión del peine de frecuencias desde la microcavidad [96, 97]. La dinámica periódica en el tiempo (referida en ocasiones como un cristal en tiempo) también puede aparecer en un dímero con la excitación coherente [62, 98, 99].

El dímero bajo excitación no-resonante puede, en principio, puede exhibir dinámica caótica, ya que está descrito por el sistema autónomo de tres ecuaciones no li-

neales, el mismo número que para los sistemas clásicos de Lorenz [100] y Rössler [101]. La ruta de Feigenbaum hacia el caos a través de la duplicación del período de las órbitas de ciclos límites se ha predicho para guías de ondas ópticas acopladas activamente [102]. Este caso puede considerarse como un modelo simplista para el dímero de condensado polaritónico. Aplicado a los condensados de polaritones, se espera este comportamiento caótico con la disminución del bombeo, de modo que tenga lugar en ocupaciones bajas de los condensados, muy por debajo del umbral. Dado que este efecto precede a la formación del condensado, difícilmente puede ser experimentalmente relevante. También se demostró que el caos no autónomo de los condensados excitados coherente puede ocurrir en grandes ocupaciones de condensados [103, 104]. Sin embargo, los condensados polaritónicos excitados en resonancia no son lo suficientemente estables debido a la desestabilización de láser excitante por retro-reflexión y la necesidad de un ajuste fino de la frecuencia de excitación.

La comprensión del escenario completo de las bifurcaciones en el dímero polaritónico es importante, ya que el dímero es un elemento clave de las redes de condensados polaritónicos, que se discutieron activamente recientemente para fines de las computadoras y simuladores polaritónicos [60, 105, 106, 107]. La presencia de la dinámica caótica del dímero polaritónico hace que este sistema sea muy prometedor para aplicaciones basadas en el caos, incluida la sincronización del caos [108]. En comparación con los otros sistemas ópticos que exhiben un caos determinista, en particular, el caos de polarización en el láser emisor de superficie de cavidad vertical (“vertical-cavity surface-emitting laser”, VCSEL) [109, 110, 111, 112], el dímero del condensado polaritónico tiene varios beneficios, ya que los parámetros importantes del sistema que controlan la dinámica caótica, la constante de acoplamiento de Josephson y las no-linealidades, se controlan fácilmente en experimentos.

3.2. Modelo del dímero polaritónico

Consideramos dos condensados polaritónicos, descritos por los parámetros de orden Ψ_{+1} y Ψ_{-1} , que obedecen a las ecuaciones de Gross-Pitaevskii con bombeo y disipación,

$$\frac{d\Psi_{\pm 1}}{dt} = \frac{1}{2}(rN_{\pm 1} - \Gamma)\Psi_{\pm 1} - \frac{1}{2}(\gamma - i\varepsilon)\Psi_{\mp 1} - \frac{i}{2} \left[g_1|\Psi_{\pm 1}|^2 + g_2|\Psi_{\mp 1}|^2 \right] \Psi_{\pm 1}, \quad (3.1)$$

acopladas a las ecuaciones para las densidades $N_{\pm 1}$ de dos reservorios de polaritones excitadas en forma no-resonante

$$\frac{dN_{\pm 1}}{dt} = P - \left[\Gamma_R + r|\Psi_{\pm 1}|^2 \right] N_{\pm 1}. \quad (3.2)$$

En estas expresiones, Γ y Γ_R son las tasas de disipación de polaritones y reservorios, respectivamente, r define la tasa de captura de los polaritones en los condensados, y P es la tasa de bombeo no-resonante externo. El último parámetro es el mismo para ambas reservas, de modo que el sistema de Ecs. (3.1) y (3.2) tiene la simetría de paridad.

Existe el acoplamiento coherente (Josephson) de dos condensados, definido por el parámetro ε y el acoplamiento disipativo entre ellos, dado por el parámetro γ . Mientras que el primero define la división de energías entre el estado enlazante F_s y el estado antienlazante F_a , la presencia de este último implica diferentes tiempos de vida de estos estados. A continuación, consideramos el caso típico de condensación de excitón-polaritones cuando el estado antienlazante F_a vive más tiempo debido a la interferencia destructiva de las ondas de luz emitidas desde dos centros de la condensación en la microcavidad [95]. Esta diferencia de vida en microcavidades rayadas puede ser bastante sustancial [113].

Los parámetros g_1 y g_2 definen la interacción de polaritones en los mismos centros y en los centros opuestos, respectivamente. En nuestro modelo, omitimos la interacción de polaritones con las partículas del reservorio. Además de evitar la sobrecarga del modelo con parámetros adicionales, tenemos la intención de considerar el caso de condensados atrapados, que se separan espacialmente de los reservorios. Este caso permite estudiar la dinámica de los condensados libres, que no experimentan el ruido de los reservorios (ver, por ejemplo, Ref. [114] para un ejemplo del esquema de excitación de un par de condensados de este tipo).

Introducimos los parámetros de orden escalados $\psi_{\pm 1} = (r/\Gamma_R)\Psi_{\pm 1}$, las ocupaciones de los reservorios $\tilde{N}_{\pm 1} = rN_{\pm 1}$, las constantes de interacción $\alpha_{1,2} = (\Gamma_R/r)g_{1,2}$, y el bombeo externo $p = rP/\Gamma_R$. Obtenemos

$$\Gamma_R^{-1} \frac{d\tilde{N}_{\pm 1}}{dt} = p - (1 + n_{\pm 1})\tilde{N}_{\pm 1}, \quad (3.3)$$

donde $n_{\pm 1} = |\psi_{\pm 1}|^2$ son las ocupaciones escaladas de los condensados. En lo que sigue, utilizamos la aproximación adiabática, comúnmente usada para los sistemas de condensados polaritónicos [115, 116], que se pueden aplicar en el límite de la disipación rápida de los reservorios, $\Gamma_R \gg \Gamma$. En este caso, el lado derecho de la ecuación Eq. (3.3) se establece en cero, y las ocupaciones del yacimiento son $\tilde{N}_{\pm 1} = p/(1 + n_{\pm 1})$. Los parámetros de orden luego evolucionan de acuerdo a las ecuaciones

$$\frac{d\psi_{\pm 1}}{dt} = \frac{1}{2} \left[\frac{p}{(1 + n_{\pm 1})} - \Gamma \right] \psi_{\pm 1} - \frac{1}{2}(\gamma - i\varepsilon)\psi_{\mp 1} - \frac{i}{2} \left[\alpha_1 |\psi_{\pm 1}|^2 + \alpha_2 |\psi_{\mp 1}|^2 \right] \psi_{\pm 1}. \quad (3.4)$$

Es conveniente escribir $\psi_{\pm 1} = \sqrt{n_{\pm 1}} e^{i(\Phi \mp \phi)}$, porque la ecuación para la fase total Φ está separada de las ecuaciones para $n_{\pm 1}$ y para la fase relativa 2ϕ . Las

últimas variables definen el vector de espín tridimensional \mathbf{S} con las componentes y la longitud

$$S_x = \sqrt{n_{+1}n_{-1}} \cos(2\phi), \quad S_y = \sqrt{n_{+1}n_{-1}} \sin(2\phi), \quad (3.5a)$$

$$S_z = \frac{1}{2}(n_{+1} - n_{-1}), \quad S = \frac{1}{2}(n_{+1} + n_{-1}). \quad (3.5b)$$

Estas ecuaciones son equivalentes a las definiciones que escribimos en el capítulo 2 (ve las expresiones (2.24)). Ahora con las Ecs. (3.4) y (3.5) se puede encontrar que las componentes de espín satisfacen las ecuaciones

$$\dot{S}_x = V_x(\mathbf{S}) = [u(\mathbf{S}) - \Gamma]S_x - \gamma S - \alpha S_z S_y, \quad (3.6a)$$

$$\dot{S}_y = V_y(\mathbf{S}) = [u(\mathbf{S}) - \Gamma]S_y + \varepsilon S_z + \alpha S_z S_x, \quad (3.6b)$$

$$\dot{S}_z = V_z(\mathbf{S}) = [u(\mathbf{S}) - \Gamma]S_z + v(\mathbf{S})S - \varepsilon S_y, \quad (3.6c)$$

donde $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, $u(\mathbf{S})$ y $v(\mathbf{S})$ están definidos por

$$u(\mathbf{S}) = \frac{(1+S)p}{(1+S)^2 - S_z^2}, \quad v(\mathbf{S}) = -\frac{S_z p}{(1+S)^2 - S_z^2}. \quad (3.7)$$

De estas ecuaciones se desprende que el valor absoluto del espín se obtenga usando $S\dot{S} = S_x\dot{S}_x + S_y\dot{S}_y + S_z\dot{S}_z$ y evolucione como

$$\dot{S} = [u(\mathbf{S}) - \Gamma]S + v(\mathbf{S})S_z - \gamma S_x. \quad (3.8)$$

Las Ecs. (3.4) y/o (3.6) son las principales ecuaciones estudiadas en este trabajo.

Notemos que una vez que se establece la evolución de $\mathbf{S}(t)$, se puede encontrar la fase total del condensado mediante la integración de la ecuación

$$\dot{\Phi} = -\Omega(\mathbf{S}) = -\frac{1}{2} \left[(\alpha_1 + \alpha_2)S - \frac{(\varepsilon S S_x + \gamma S_z S_y)}{(S_x^2 + S_y^2)} \right]. \quad (3.9)$$

En las siguientes secciones, elegimos las unidades de tiempo estableciendo por $\Gamma = 1$. Además, recordamos que usamos las unidades de $\hbar = 1$. Así medimos todos los parámetros $\gamma, \varepsilon, \alpha_{1,2}$ en las unidades de Γ , y el tiempo en las unidades de Γ^{-1} .

3.3. Atractores y Bifurcaciones

Para caracterizar un sistema dinámico, contamos con variables dinámicas, que son las tres componentes del espín en nuestro caso, y los parámetros constantes.

Hay varios parámetros en nuestro caso, pero lo más importante es el parámetro del bombeo p . Experimentalmente este parámetro se puede cambiar adiabáticamente, aumentando o disminuyéndolo.

El espacio de los estados del espín es \mathbb{R}^3 en nuestro caso, y contendrá cada uno de los estados concretos del sistema en un instante de tiempo dado. En el que cada punto es un instante del estado, y la línea descrita por esa sucesión de puntos en tiempo, se denomina trayectoria. Dicha trayectoria es arrastrada hacia una región del espacio de estados llamado atractor. Una característica importante del espacio de estados consiste en la contracción de volúmenes. En contraste con el sistema no-disipativo, que consideramos en el capítulo anterior, en el caso realístico, gracias a la disipación el volumen de un conjunto de puntos disminuye con el tiempo. Todos los puntos que se encuentran en un volumen dado se mueven hacia un volumen cada vez más reducido del espacio de estados. Después del *tiempo transitorio* los puntos caen en un atractor. Y la estructura de un atractor no depende de las condiciones iniciales. Esta manera de definir es buena para un atractor estable. Es decir la pequeña perturbación de la trayectoria fuera del conjunto atractor regresa a este conjunto con el tiempo.

Definimos también atractores inestables, referidos también como repulsores. En este caso, la trayectoria no perturbada sí reside en el atractor, pero una pequeña perturbación mueve la trayectoria fuera del atractor inestable. En el que las soluciones permanecerán en el atractor de manera indefinida si no se produce una alteración del sistema. Por otro lado, los repulsores representan estados de equilibrio dinámico inestable. Cuando el sistema cae en uno de estos repulsores permanecerá en él, de manera indefinida en ausencia de ninguna perturbación que lo aleje mínimamente de él, ya que estos repulsores son equilibrios dinámicos. Sin embargo, a diferencia de los atractores, los repulsores son inestables, en la medida de que cualquier mínima perturbación que desvíe o aleje al sistema de este repulsor hará que el sistema nunca vuelva de manera natural a él.

La cuenca de atracción de un atractor es el conjunto de condiciones iniciales cuyas soluciones dan lugar a un conjunto de trayectorias que convergen hacia este atractor. Así, una trayectoria que se inicie dentro de la cuenca de atracción será atraída hacia el atractor y una vez dentro del atractor, no podrá salir de esa región del espacio de estados. Por lo tanto, el comportamiento cualitativo a largo plazo de un sistema dinámico puede ser fundamentalmente diferente dependiendo de la condición inicial. Los diferentes estados de equilibrio estables a los cuales converge un sistema dinámico, o diferentes atractores pueden ser: el punto fijo, periódico o de ciclo límite (LC), movimiento en un toro y el atractor extraño.

Existe una clara evidencia de presencia de la coexistencia de atractores, que fue reportada por Arecchi y colaboradores por primera vez en un circuito electrónico [117]. El fenómeno de la multiestabilidad se ha identificado en diferentes clases de sistemas, tales como sistemas débilmente disipativos, sistemas acoplados, sistemas

paramétricamente excitados, y sistemas estocásticos [118]. En sistemas dinámicos disipativos, la multiestabilidad significa la coexistencia de diferentes estados estables finales posibles para un conjunto de parámetros dados. El estado final al cual el sistema convergerá, depende crucialmente de las condiciones iniciales, es decir, la dinámica a largo plazo correspondiente a uno de los atractores es definida por la condición inicial. Experimentos y modelos teóricos revelan la presencia de diferentes rutas para lograr la multiestabilidad en diferentes clases. La aparición de una multitud de atractores depende en general de los parámetros más importantes que caracterizan a una clase de sistema particular, tal como, la fuerza de la disipación, el tipo y la fuerza de acoplamiento, la amplitud y la frecuencia del parámetro de perturbación.

La estructura cualitativa del flujo de un sistema dinámico no lineal puede cambiar si se modifican los parámetros del mismo. En particular, pueden aparecer nuevos puntos de equilibrio u órbitas cerradas, o bien, desaparecer los que ya existen, o alterar sus propiedades de estabilidad. Un sistema donde esto ocurre recibe el nombre de sistema estructuralmente inestable, o que una bifurcación ha ocurrido para ciertos valores de los parámetros. Los diagramas de bifurcaciones clasifican de manera condensada todos los comportamientos posibles de un sistema y las transiciones entre ellos cuando cambian los parámetros del sistema. Las bifurcaciones generalmente están relacionadas con el cambio de estabilidad de los atractores existentes o la generación y la aniquilación de estas soluciones asintóticas. Las bifurcaciones también se clasifican según el número de parámetros que uno debe cambiar para lograr la estabilidad estructural de una bifurcación dada. Nuestra tarea va ser estudiar las bifurcación en un láser polaritónico, descrito por las Ecs. (3.4) y/o (3.6), principalmente como función del parámetro de bombeo p .

En nuestro modelo de estudio, distinguimos una categoría de bifurcaciones dependiendo de cómo un atractor pierde su estabilidad en un punto de bifurcación. Para fijar estas ideas consideramos la magnitud de la componente de espín $S_z = S_c$. En las bifurcaciones supercríticas, un atractor pierde su estabilidad al cruzarse con un atractor estable que solo existe en valores supercríticos de la componente ($S_z > S_c$). Sin embargo, en las bifurcaciones subcríticas, un atractor pierde su estabilidad al chocar con el camino inestable de una estructura que existe también en los valores subcríticos de la componente ($S_z < S_c$).

Las consecuencias de la naturaleza supercrítica o subcrítica de un tipo de bifurcación son bastante importantes en la dinámica del sistema. La principal diferencia radica en el hecho de que en una bifurcación supercrítica el cambio cualitativo en la dinámica del sistema se produce a través de una transición suave, es decir, el atractor recién originado crece continuamente desde el punto de bifurcación, mientras que en una bifurcación subcrítica tan pronto como el atractor original pierde su estabilidad, el sistema experimenta un salto repentino a un atractor distante. Como propiedad relacionada, tenemos que al invertir la componente de espín S_z

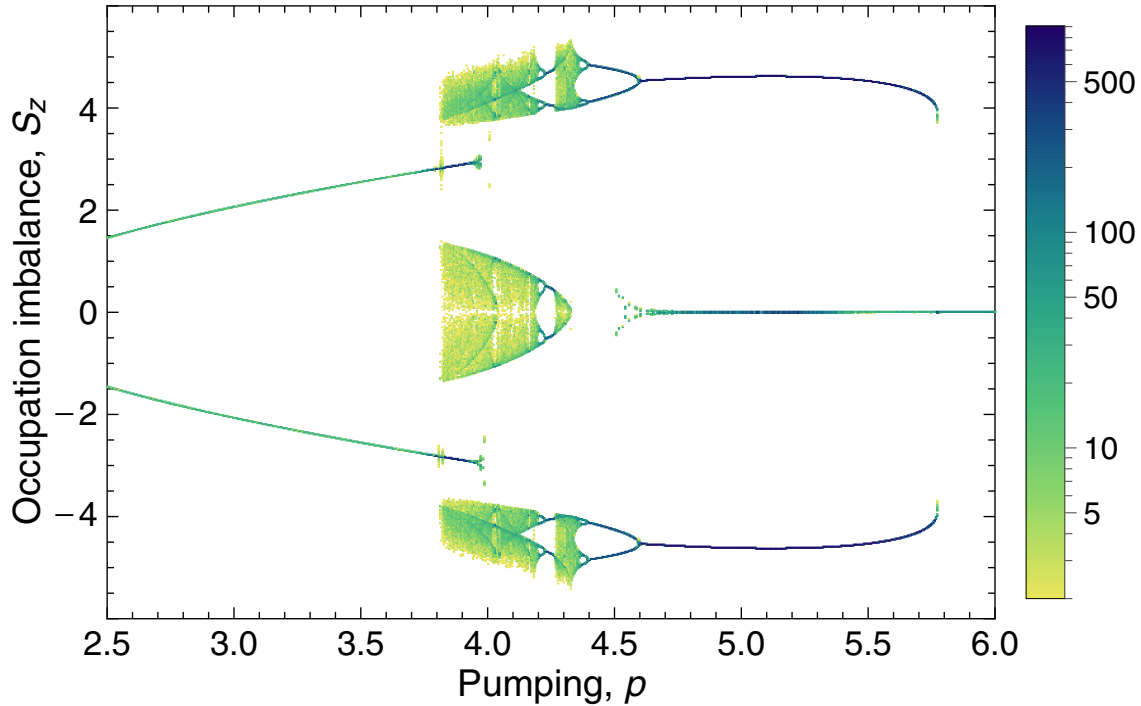


Figura 3.1: El mapa de Poincaré muestra el desbalance de dos ocupaciones de condensados, S_z , en los puntos de retorno de la trayectoria del espín (puntos cuando $dS_z/dt = 0$). La gráfica se obtuvo mediante la recopilación de los puntos de retorno para 8 trayectorias con condiciones iniciales aleatorias en la etapa final de evolución entre $t = 400$ y $t = 500$, y para los parámetros $\gamma = 0.5$, $\varepsilon = 2$, $\alpha = 0.75$. Todos los parámetros están en las unidades de la tasa de disipación Γ .

alrededor del punto de bifurcación subcrítica, el sistema no salta necesariamente para operar nuevamente en el atractor original, y por lo tanto genera un ciclo de histéresis que podría ser interesante para algunas aplicaciones.

Para el bombeo p muy pequeño, mucho menor de que la tasa de disipación en el sistema, los condensados se quedan vacíos. Formalmente el sistema está formado en el punto fijo trivial $\mathbf{S} = 0$. Hay que mencionar que diferentes estados en el sistema tienen diferentes tasas de disipación. El estado con la tasa de disipación más baja es el estado antisimétrico $\psi_a = (\psi_{+1} - \psi_{-})/\sqrt{2}$ y su tasa de disipación es $\Gamma - \gamma$. Entonces el umbral del efecto láser es $p_0 = \Gamma - \gamma$. Eso es el punto de una bifurcación supercrítica, en donde el punto fijo trivial se convierte en inestable y produce un punto fijo estable F_a con una ocupación de los condensados finito, que crece linealmente con el incremento del bombeo $p - p_0$. Es importante indicar, que en nuestro caso el punto fijo trivial es una singularidad esencial de las ecuaciones.

Como explicamos en el capítulo anterior, se espera una bifurcación con el incre-

mento del bombeo. Efectivamente, el punto F_a pierde su estabilidad con una bifurcación tipo tenedor en el bombeo crítico $p_1 > p_0$. Esta bifurcación puede ser tanto supercrítica como subcrítica, pero por los valores del acoplamiento de Josephson grande, que presentan interés experimental, es de carácter supercrítico (los detalles de esta bifurcación presentamos más adelante). Como resultado aparecen dos puntos fijos con simetría rota F_{\pm} , estables en un rango de valores p superiores a p_1 .

La secuencia típica de bifurcaciones que sufre el condensado polaritónico con el bombeo $p > p_1$ se ilustra en la Fig. (3.1). Esta figura representa una especie de mapeo de Poincaré y muestra la colección de valores de S_z en los puntos de retorno, es decir, los puntos donde $dS_z/dt = 0$, en función de la fuerza de bombeo p . Para cualquier bombeo dado, los puntos se han reunido a partir de ocho trayectorias obtenidas de las Ecs. (3.6) con condiciones iniciales aleatorias en la etapa final de la evolución.

Para los valores de los parámetros dados en la figura, este punto F_a se vuelve inestable en $p_1 \simeq 1.98$, y para los pequeños valores de bombeo que se muestran en la Fig. (3.1) se pueden ver dos puntos fijos estables que rompen la simetría entre los centros de condensación F_{\pm} . También, referimos estos puntos como condensados autoatrapados. En este caso, las trayectorias terminan aleatoriamente en una de ellas. Estos condensados autoatrapados se vuelven inestables a $p_2 \simeq 4.00$. Antes de este valor de bombeo, se puede apreciar la presencia de otro atractor con trayectoria no cerrada, y por eso tenemos una bifurcación subcrítica. En el dominio de p de 3.8 a 4.2 hay un comportamiento caótico aparente, que reaparece en la región estrecha alrededor de $p = 4.3$. En los valores más altos de bombeo hay un movimiento de ciclo límite (LC) del espín, que coexiste con el punto fijo simétrico F_s , estable en $p > p_3 = 4.5$. El diagrama sugiere que el atractor caótico aparece a partir de la dinámica de LC con la duplicación del periodo con el bombeo decreciente.

También podemos ilustrar la forma que guardan las soluciones de las Ecs. (3.4) usando las ocupaciones de los condensados $n_{+1} = |\psi_{+1}|^2$ y $n_{-1} = |\psi_{-1}|^2$. Mostramos las ocupaciones en la Fig. 3.2(a-c), en el que notamos diferentes transiciones de las soluciones respecto al parámetro de bombeo y para $\alpha = 0.75$ que se muestra en la Fig. 3.1. En la Fig. 3.2(a) vemos que la ocupación de n_{+1} (línea negra) es mucho mayor que la ocupación del estado n_{-1} (línea azul). Es decir si tenemos una cierta cantidad de bosones, la mayor parte estará en ψ_{+1} y este estado es el estado F_+ . La razón física de auto-atrapación es la diferencia sustancial de los potenciales químicos de los estados $+1$ y -1 es este caso. El estado con la ocupación grande tiene el potencial químico más grande gracias a la repulsión de los bosones (en equilibrio, el potencial químico está dado por el producto del parámetro α_1 y el número de bosones en el estado). Este desbalance sustancial de los potenciales químicos, cuando es mayor el acoplamiento de Josephson, no permite que bosones se muevan del estado ψ_{+1} al estado ψ_{-1} por la conservación de energía libre, que resulta en auto-atrapación.

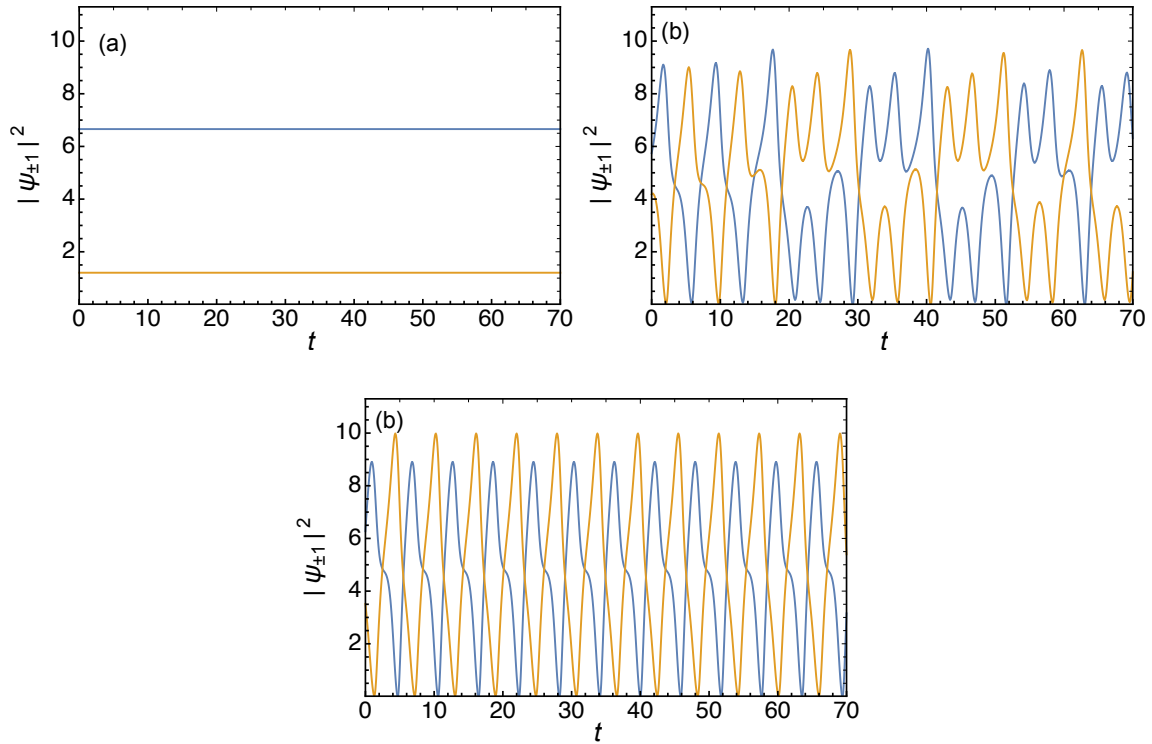


Figura 3.2: Resultados de las ocupaciones de los condensados $n_{+1} = |\psi_{+1}|^2$ y $n_{-1} = |\psi_{-1}|^2$, para $\gamma = 0.5$, $\varepsilon = 2$, $\alpha = 0.75$ y para distintos valores de bombeo: (a) $p = 3.7$, (b) $p = 4.0$, (c) $p = 4.5$. La línea negra representa a $|\psi_{+1}|^2$ y la línea azul a $|\psi_{-1}|^2$. La parte en rojo representa el número promedio de partículas (igual a la longitud del espín S).

En la Fig. 3.2(b) podemos ver el comportamiento parecido a caos en el que apreciamos oscilaciones aleatorias de las ocupaciones de los condensados. En la Fig. 3.2(c) notamos cambios periódicos, que es una indicación de un atractor tipo ciclo límite (LC). La línea roja en estas figuras representa la ocupación promedio de dos condensados, y es importante indicar que la ocupación total del sistema es fijo en los caso (b) y (c).

Mostramos los atractores en el espacio de espín 3D en en las Figs. 3.3. Cuando no hay evolución temporal de las componentes de espín y ellos pertenecen constantes tenemos el atractor tipo punto fijo. Los dos puntos fijos repulsivos F_{\pm} indicamos con puntos rojos en estas figuras. De otro lado, con los mismos parámetros existen otros atractores en el sistema. Puede ser un atractor tipo ciclo límite, cuando el espín hace un movimiento periódico (una precesión deformada) y se obtiene una trayectoria cerrada (vea Figs. 3.3(b,d)), o un atractor parecido a caos (vea Figs. 3.3(a,c)) con una trayectoria aparentemente no cerrada.

Para comprobar lo dicho anterior sobre el escenario de bifurcaciones de un cúbit polaritónico, y especialmente para proporcionar la prueba directa de la formación de caos, es necesario estudiar la estabilidad del sistema y comportamiento de las exponentes de Lyapunov. Nosotros iniciamos con el estudio de la estabilidad de los puntos fijos en la siguiente sección.

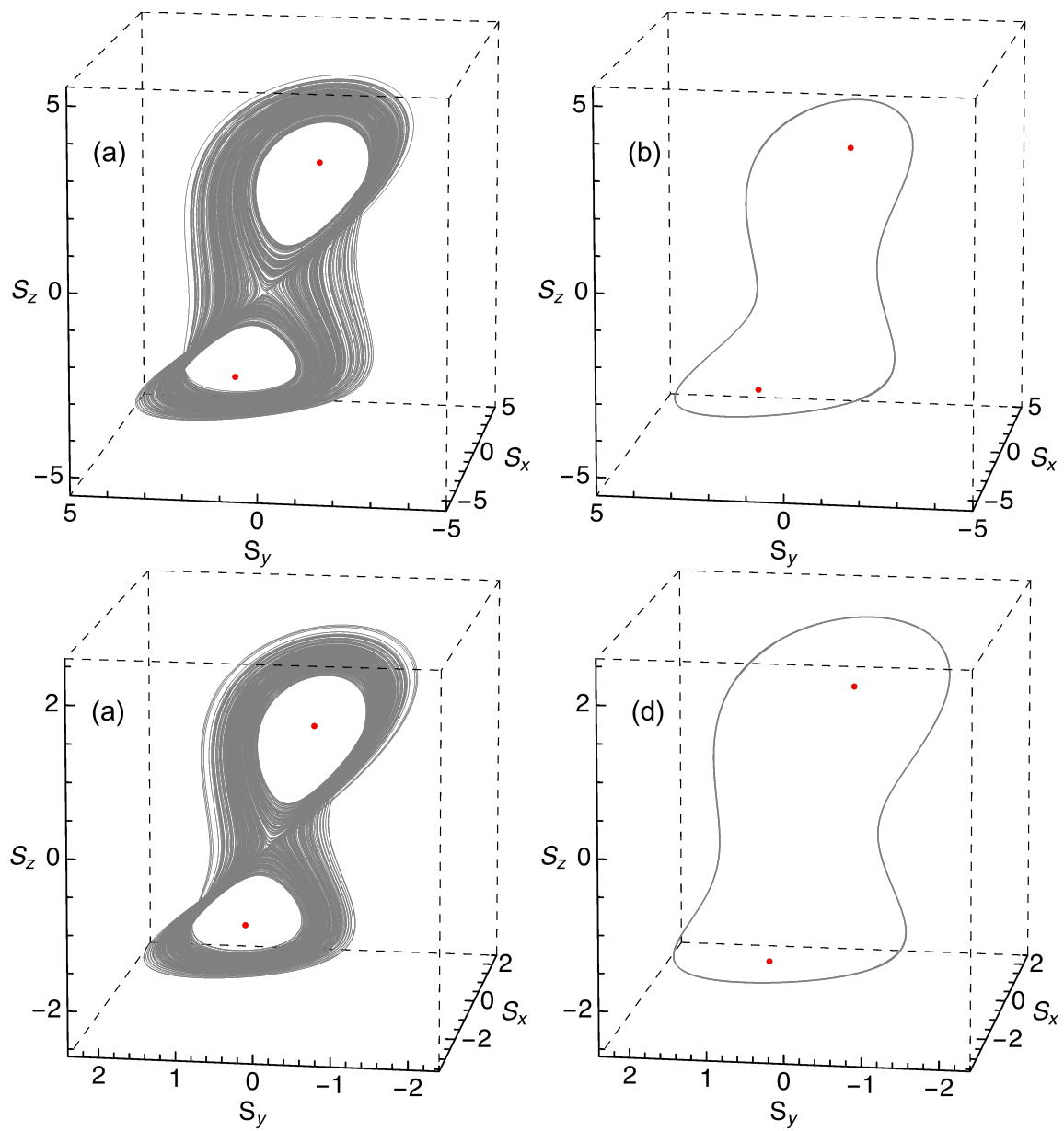


Figura 3.3: Atractores del sistema de Ecs. (3.6) para $\gamma = 0.5$, $\varepsilon = 2$. Los otros parámetros son (a) $p = 4$, (b) $p = 4.5$ con $\alpha = 0.75$, y (c) $p = 2.24$, (d) $p = 3$ con $\alpha = 1.5$. Los puntos de color rojo representan los puntos fijos F_{\pm} .

3.4. Estados fijos del láser y su estabilidad

Las Ecs. (3.6) poseen al menos cuatro puntos fijos importantes, dos que conservan la simetría entre condensados, y dos que rompen esta simetría. (Cuando el acoplamiento de Josephson es pequeño pueden aparecer más puntos fijos que rompen la simetría). Los puntos fijos del láser están dados por raíces no triviales del sistema algebraico de ecuaciones $\mathbf{V}(\mathbf{S}) = 0$, donde $V_{x,y,z}(\mathbf{S})$ están definidos en las Ecs. (3.6). Observamos que los parámetros de orden correspondientes $\psi_{\pm 1}$ no están fijos en el tiempo, sino que evolucionan de manera proporcional a $\exp\{-i\Omega(\mathbf{S})t\}$, de modo que estas soluciones describen el láser de modo único usual del sistema con la frecuencia fija $\Omega(\mathbf{S})$. En nuestro modelo, esta frecuencia se cuenta a partir de la frecuencia de un polaritón aislado en un centro de condensación. Hay dos puntos fijos que conservan la simetría, F_s y F_a , que dan ocupaciones iguales de dos centros y corresponden al parámetro de orden simétrico y antisimétrico, respectivamente. Y hay dos puntos fijos de ruptura de simetría, F_+ y F_- , con desigualdades de los centros de condensación, $S_z > 0$ y $S_z < 0$, respectivamente. Estas soluciones de puntos fijos se describen en esta sección en el orden de sus apariencias al aumentar el bombeo p .

La estabilidad de un punto fijo se puede estudiar a partir la matriz Jacobiana $J_{ij} = \partial V_i / \partial S_j$ con $i, j = x, y, z$. Definimos los exponentes de Lyapunov de un punto fijo como los tres eigenvalores $\lambda_{1,2,3}$ de la matriz Jacobiana calculada en este punto. Para un punto fijo estable esta definición corresponde a la definición general de los exponentes de Lyapunov [119]. Como son raíces de una ecuación cúbica, podemos tener dos casos: o los tres exponentes son números reales, o hay un exponente dado por un número real y los otros dos son complejo conjugados uno del otro. Dibujando los resultados, siempre tomamos la parte real, por que esta parte indica la estabilidad del punto. Para el punto estable los tres deben ser negativos. Si la parte real de un exponente de Lyapunov es positiva, eso significa la inestabilidad del punto fijo (el punto repulsor). Hay que mencionar que en nuestro sistema disipativo el valor promedio $\bar{\lambda} = (1/3)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = \text{Tr}(J) < 0$ en todos los puntos del espacio de espín \mathbf{S} , que significa el fenómeno de la contracción del volumen en el transcurso de la evolución temporal.

3.4.1. Punto fijo antisimétrico

La solución de F_a aparece en el umbral de bombeo $p_0 = \Gamma - \gamma$ desde la solución trivial $S = 0$, que se vuelve inestable para $p > p_0$. El estado antisimétrico está definido por

$$F_a : \quad S_x = -S_a, \quad S_y = S_z = 0. \quad (3.10)$$

Usando esta definición en las Ecs. (3.6) con $\dot{S} = 0$, obtenemos que la ocupación de los condensados S_a crece linealmente con el bombeo,

$$S_a = \frac{p}{p_0} - 1, \quad p_0 = \Gamma - \gamma. \quad (3.11)$$

Para el bombeo p ligeramente por encima del punto p_0 , F_a es el único atractor estable del sistema. Sin embargo, este atractor pierde estabilidad con respecto a las fluctuaciones del vector de espín en el plano yz en el espín crítico S_1 , que corresponde al bombeo crítico $p_1 = (1 + S_1)p_0$.

Demostremos eso con el análisis de estabilidad lineal estándar. Consideramos pequeñas fluctuaciones x, y, z de las componentes de espín cerca del punto F_a . Es decir, escribimos $S_x = -S_a + x$, $S_y = y$, $S_z = z$ y $S = \sqrt{(x - S_a)^2 + y^2 + z^2} \simeq S_a - x$, y linealizamos las Ecs. (3.6) con respecto a las perturbaciones. En el resultado obtenemos

$$\dot{x} = -\frac{S_a p}{(1 + S_a)^2} x, \quad (3.12a)$$

$$\dot{y} = -\gamma y + (\varepsilon - \alpha S_a) z, \quad (3.12b)$$

$$\dot{z} = -\varepsilon y - \left[\gamma + \frac{S_a p}{(1 + S_a)^2} \right] z. \quad (3.12c)$$

Observamos que las fluctuaciones de la componente S_x del espín son separados de las otras dos componentes y el condensados es siempre estable con respecto a estas fluctuaciones, con el exponente de Lyapunov correspondiente

$$\lambda_{a1} = -\frac{S_a p}{(1 + S_a)^2} = -\frac{p_0(p - p_0)}{p}. \quad (3.13)$$

Este exponente es siempre negativo en la región supercrítica $p > p_0$, que significa que el condensado F_a es estable con respecto a las fluctuaciones del número de polaritones, con la diferencia de fase π en el dímero. Los efectos de la fluctuación de fase del dímero están escritos en las otras dos ecuaciones. Sustituyendo $y(t) = B e^{\lambda t}$ y $z(t) = C e^{\lambda t}$ obtenemos dos ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} -(\gamma + \lambda_{a2,3})B + (\varepsilon - \alpha S_a)C &= 0, \\ -\varepsilon B - (\gamma + \lambda_{a2,3} - \lambda_{a1})C &= 0, \end{aligned}$$

y calculando el determinante podemos encontrar los otros exponentes de Lyapunov

$$\lambda_{a2,3} = -\gamma + \frac{1}{2}\lambda_{a1} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\lambda_{a1}^2 - \varepsilon(\varepsilon + \alpha S_a)}. \quad (3.14)$$

En la Fig. 3.4, se muestra los resultados de $\lambda_{a1,2,3}$ de F_a con líneas continuas gruesas color magenta.

El siguiente punto de bifurcación p_1 y la ocupación crítica $S_1 = (p_1/p_0) - 1$ corresponde a situación cuando una de estas exponentes es igual a cero, o, equivalente, el producto $\lambda_{a2}\lambda_{a3} = 0$. Así obtenemos la ecuación

$$\gamma^2 + \varepsilon^2 + \frac{\gamma(\Gamma - \gamma)S_1}{1 + S_1} = \alpha\varepsilon S_1, \quad (3.15)$$

que define S_1 como su raíz positiva. Observemos que la parte derecha de esta ecuación crece linealmente con S_1 y la parte izquierda está saturada en un valor grande para S_1 , vemos que el punto de bifurcación p_1 siempre existe, y el condensado F_a es inestable para valores supercríticos $p > p_1$.

3.4.2. Condensados autoatrapados

Hay una bifurcación de horquilla supercrítica en $p = p_1$, el punto F_a se vuelve inestable y dos puntos fijos estables F_{\pm} se dividen continuamente para $p > p_1$. La simetría entre los centros se rompe para los nuevos puntos, y F_- se puede obtener de F_+ aplicando las operaciones $S_x \rightarrow S_x$, $S_y \rightarrow -S_y$ y $S_z \rightarrow -S_z$, que dejan las Ecs. (3.6) sin cambios. Se tiene en cuenta que la ocupación total de dos centros está definida por S , mientras que S_z define el desequilibrio de ocupación, véase la Ec. (3.5b). El grado de desequilibrio $|S_z|/S$ crece monotónicamente con la fuerza de bombeo arriba de p_1 . Como ejemplo podemos ver los puntos F_{\pm} en el espacio de trayectorias de la Fig. 3.3 (los puntos de color rojo). Los puntos F_{\pm} corresponden a formación de condensados autoatrapados, a donde la mayor parte de polaritones ocupa uno o otro centro de condensación.

En las inmediaciones del punto de bifurcación $|S_z|/S \propto \sqrt{p - p_1}$. Las soluciones F_{\pm} son estables hasta un bombeo crítico p_2 . La valor de p_2 se puede encontrar a partir del análisis de los exponentes de Lyapunov, que, en este caso, coinciden con los valores propios de la matriz Jacobiana $\partial V_i / \partial S_j$ con $i, j = x, y, z$, calculadola en F_{\pm} . En la Fig. 3.4, se muestra con líneas continuas delgadas paralelas color rojo los tres exponentes de Lyapunov. Los valores propios de la matriz Jacobiana son uno real y siempre negativo, y los otros dos son complejo-conjugados entre sí para los valores de p elevados (línea roja más cercana a cero en la Fig. 3.4). Es la parte real de este par de exponentes complejos conjugados de Lyapunov que cruza cero en p_2 , lo que indica el comportamiento oscilatorio del nuevo atractor emergente.

3.4.3. Punto fijo simétrico

El punto fijo F_s se divide del punto fijo trivial $S = 0$ en $p = p'_0 = \Gamma + \gamma$, en el que se tiene que

$$F_s : \quad S_x = S_s, \quad S_y = S_z = 0, \quad (3.16)$$

y el análisis de este condensado se puede hacer de manera similar al punto F_a . La ocupación de este punto láser crece linealmente con el bombeo, $1 + S = p/(\Gamma + \gamma)$

$$S_a = \frac{p}{p'_0} - 1, \quad p'_0 = \Gamma + \gamma. \quad (3.17)$$

De nuevo tomamos pequeñas fluctuaciones x, y, z de las componentes del espín cerca del punto F_s , haciendo $S_x = S_s + x, S_y = y, S_z = z$ y $S = \sqrt{(x + S_0)^2 + y^2 + z^2} \simeq S_s + x$, y linealizamos las Ecs. (3.6) con respecto a las fluctuaciones. La solución muestra que el condensado es estable con respecto a las fluctuaciones en la dirección x , que están separadas de las fluctuaciones en el plano yz . El exponente de Lyapunov para la dirección x del espín es

$$\lambda_{s1} = -\frac{S_s p}{(1 + S_s)^2} = -\frac{p'_0(p - p'_0)}{p}. \quad (3.18)$$

y los otros dos exponentes de Lyapunov para las fluctuaciones transversales yz son

$$\lambda_{s2,3} = \gamma + \frac{1}{2}\lambda_{s1} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\lambda_{s1}^2 - \varepsilon(\varepsilon + \alpha S_s)}. \quad (3.19)$$

En la Fig. 3.4, se muestra los resultados con unas líneas de trazos color azul, en el que tenemos tres exponentes de Lyapunov. Para un resultado tenemos solo valores reales negativos, mientras los otros dos son números complejo-conjugados entre si, cuando la división de Josephson ε y la constante de interacción α no son demasiado pequeñas. En este caso, la raíz cuadrada de la la Ec. (3.19) es imaginaria, y la parte real es $\gamma + \frac{1}{2}\lambda_{s1}$. Como resultado el condensado F_s se estabiliza en $|\lambda_{s1}| = 2\gamma$ que da el valor de bombeo de la bifurcación $p_3 = (\Gamma + \gamma)^2/(\Gamma - \gamma)$. Para pequeños valores de ε y α , la raíz cuadrada en (3.19) puede ser real y esto cambia el punto de estabilización a valores más altos de bombeo.

Para confirmar la presencia de caos autónomo en el condensado polaritónico descrito por el sistema (3.6), estudiamos los exponentes de Lyapunov dinámicos de otros atractores en el siguiente capítulo.

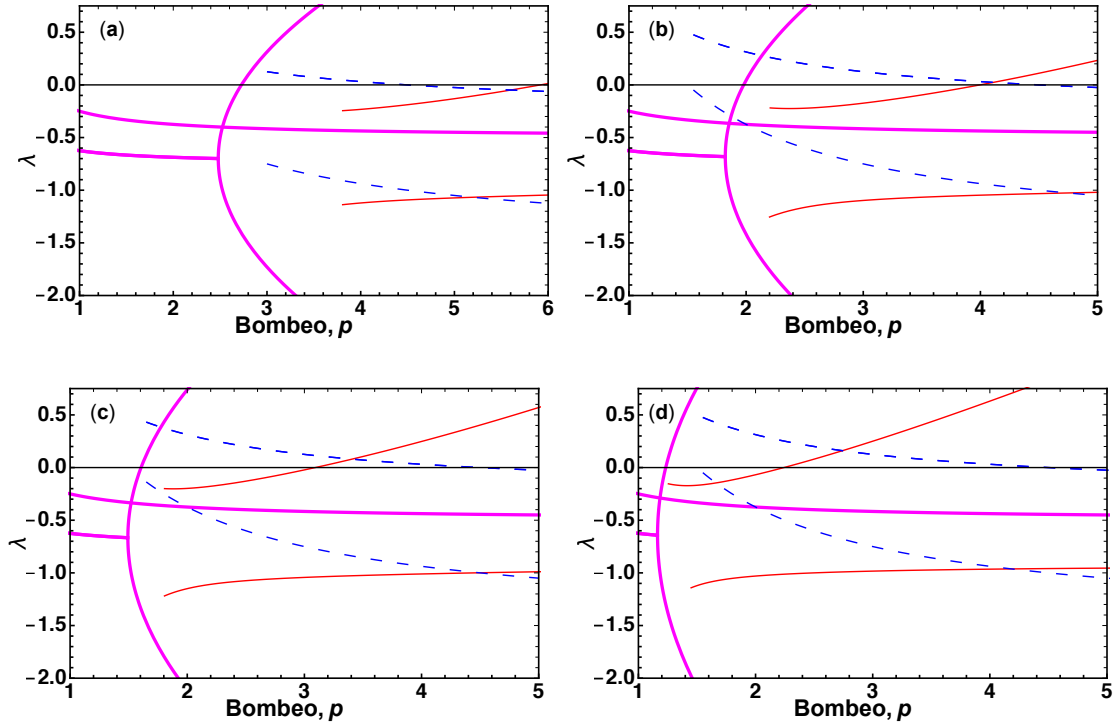


Figura 3.4: Resultados del exponentes de Lyapunov para puntos fijos para $\gamma = 0.5, \varepsilon = 2$ y para: (a) $\alpha = 0.5$, (b) $\alpha = 0.75$, (c) $\alpha = 1$ y (d) $\alpha = 1.5$. El exponente de Lyapunov para: los puntos fijos que rompen la simetría F_{\pm} se muestra con una línea color rojo continua, el punto fijo simétrico F_s se muestra con una línea azul discontinua y el punto fijo F_a se muestra con una línea gruesa color Magenta.

Capítulo 4

Exponentes de Lyapunov y multiestabilidad

En este capítulo, estudiamos los exponentes de Lyapunov para la dinámica de espín del dímero polaritónico. Demostramos que la dinámica tiene una extrema sensibilidad a las condiciones iniciales y la multiestabilidad del sistema está presente. Además, la formación de un exponente de Lyapunov positivo indica la presencia del atractor caótico. La dinámica caótica aparece en los números de ocupación intermedios y también puede extenderse a un régimen de bombeo alto, donde el atractor extraño puede coexistir con los estados fijos del láser polaritónico.

4.1. Los exponentes de Lyapunov

La caracterización principal de los sistemas caóticos está basada en los exponentes de Lyapunov dinámicos. Estos exponentes están relacionados con otras características importantes de los atractores extraños, como, por ejemplo, la entropía de Kolmogorov-Sinai y la dimensión fractal. Los exponentes de Lyapunov miden la tasa promedio de la divergencia o convergencia de dos trayectorias con condiciones iniciales cercanas, y además proporcionan un criterio simple de determinar si el comportamiento del sistema es caótico. Los exponentes de Lyapunov dan medidas cuantitativas de la sensibilidad de respuesta de un sistema dinámico a pequeños cambios en las condiciones iniciales. El número de exponentes de Lyapunov es igual a la dimensión del espacio de estados del sistema, que es tres en nuestro caso. El conjunto de exponentes de Lyapunov, también conocido como el espectro de exponentes de Lyapunov, se caracteriza por la deformación del espacio de estados, y si al menos uno de ellos es positivo, es un indicador directo de caos. El exponente de Lyapunov que nos interesa es el más grande de la parte real, debido a que mide la tasa de producción de información o la tasa de crecimiento a la que

se expande el espacio de espín y con la que se separan las trayectorias. Este exponente no solo muestra si el sistema experimenta caos, sino que también muestra el nivel de caos dentro del sistema [120, 121].

Para realizar el cálculo partimos de las ecuaciones de la dinámica del espín (3.6). Cuando consideramos un atractor más complejo que un punto fijo, los exponentes de Lyapunov dinámicos corresponden a un promedio de los eigenvalores de la matriz Jacobiana sobre todos los puntos de espacio que pertenecen al atractor. Pero este promedio es ponderado, por que el espín pasa diferentes puntos con diferente velocidad. Nosotros adoptamos una discretización uniforme en el tiempo sobre la trayectoria, y aplicamos las definiciones y métodos de las referencias [119, 121, 122, 123, 124]. Para el cálculo de este capítulo implementamos además el método de cuarto orden Runge-Kutta en las ecuaciones (3.6).

Después de una evolución transitoria desde condiciones iniciales aleatorias, para asegurar que la trayectoria resida en un atractor (vea los detalles más adelante sobre los tiempos típicos de esta evolución), obtenemos un mapa discreto para el vector de espín,

$$\mathbf{S}_{k+1} = \mathbf{M}(\mathbf{S}_k) \cdot \mathbf{S}_k, \quad \mathbf{M}(\mathbf{S}_k) = \mathbf{I} + \Delta t \mathbf{J}(\mathbf{S}_k), \quad (4.1)$$

donde $k = 0, 1, 2, \dots, N$ define la discretización de la trayectoria de espín de 0 a $t_{\max} = N\Delta t$, con un pequeño paso de tiempo Δt y una gran cantidad de pasos N ; \mathbf{I} y \mathbf{J} son la matriz unitaria y la matriz Jacobiana, respectivamente. Este último está definido por los elementos de matriz $\partial V_i / \partial S_j$ con $i, j = x, y, z$ y los componentes del vector de flujo $\mathbf{V}(\mathbf{S})$ están definidos en las Ecs. (3.6).

Primero, encontramos la parte real máxima λ_m de los tres exponentes de Lyapunov, o, el exponente máximo de Lyapunov (MLE), que da una medida de la tasa promedio de divergencia (cuando $\lambda_m > 0$) o convergencia (cuando $\lambda_m < 0$) de órbitas cercanas en el espacio de espín. Para encontrar los exponentes de Lyapunov, usamos el mapeo de las Ecs. (4.1) que estudian la evolución del vector de una pequeña perturbación \mathbf{s}_k , renormalizándolo en cada paso. En el que podemos obtener como posibles soluciones, el valor $\lambda_m < 0$ indica la trayectoria que termina en un punto fijo, $\lambda_m = 0$ caracteriza un ciclo límite (los otros dos exponentes siempre tienen la parte real negativa en nuestro caso), mientras que $\lambda_m > 0$ es la prueba directa del caos determinista y la presencia de una trayectoria que reside en la variedad del atractor extraño [125].

Como estamos interesados en dos trayectorias cercanas, generamos una pequeña desviación aleatoria en el espacio de espín $\mathbf{s}_0 \equiv \mathbf{s}_0^{(i)}$ del espín inicial \mathbf{S}_0 . Este último se encuentra después de la ejecución inicial de las ecuaciones (3.6) durante un tiempo prolongado transitorio para llegar a un atractor. En el primer paso, la desviación cambia a $\mathbf{s}_1^{(f)} = \mathbf{M}(\mathbf{S}_0) \cdot \mathbf{s}_0$. El vector final se renormaliza a la longitud de la desviación inicial $s_0 = |\mathbf{s}_0|$. Luego obtenemos la desviación en el segundo

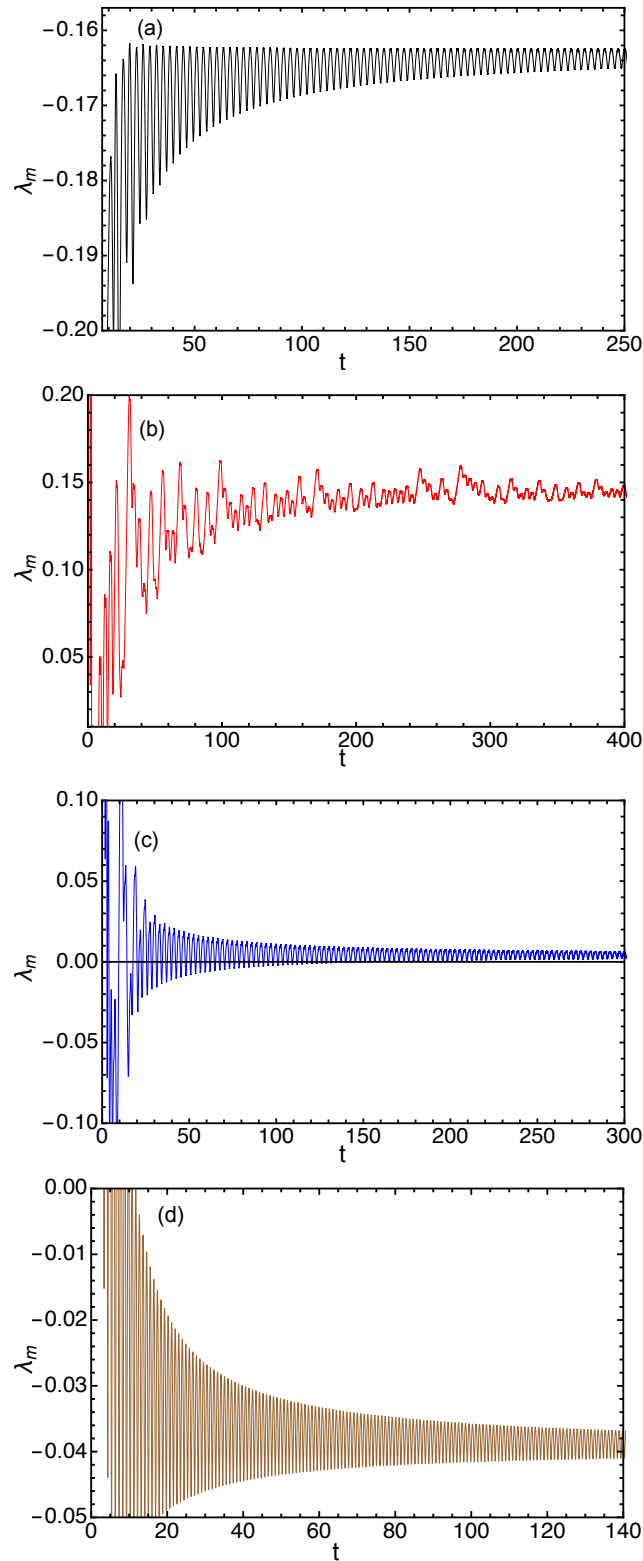


Figura 4.1: Evolución transitoria del MLE para $\alpha = 1.5$, $\varepsilon = 2$ y para distintas zonas de bombeo: (a) $p = 1.55$ se obtiene un punto fijo con simetría rota, (b) $p = 2.25$ terminando en un atractor caótico, (c) $p = 2.77$ para el ciclo límite y (d) $p = 5.45$, resultando en punto fijo simétrico. El incremento de tiempo en la integración numérica es $\Delta t = 10^{-3}$. Los resultados son obtenidos sin corrida transitoria inicial.

paso, y así sucesivamente. El paso k -ésimo produce

$$\mathbf{s}_k^{(f)} = \mathbf{M}(\mathbf{S}_{k-1}) \cdot \mathbf{s}_{k-1}^{(i)}, \quad \mathbf{s}_k^{(i)} = s_0 \frac{\mathbf{s}_k^{(f)}}{|\mathbf{s}_k^{(f)}|}, \quad (4.2)$$

Finalmente, el máximo exponente de Lyapunov se calcula como

$$\lambda_m = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=1}^N \ln \frac{|\mathbf{s}_k^{(f)}|}{|\mathbf{s}_{k-1}^{(i)}|}. \quad (4.3)$$

Para mostrar la convergencia de los resultados y encontrar los tiempos típicos transitorios para llegar al punto inicial \mathbf{S}_0 , que reside en un atractor, mostramos primero la evolución λ_m desde una condición inicial aleatoria. La Fig.(4.1) muestra MLE como función de tiempo con una condición inicial aleatoria y para diferentes valores de bombeo p . Observemos en la Fig.4.1(b,c) (los casos de caos y ciclo límite) que necesitamos un tiempo mayor de convergencia debido a las fluctuaciones que se generan a comparación de los puntos fijos. Para nuestros cálculos dejamos un tiempo transiente de $500\Gamma^{-1}$, que es suficiente para cualquier valor del bombeo.

Los resultados para MLE (4.3), ya con el paso transiente para definir el punto inicial \mathbf{S}_0 en un atractor, se muestran en las Figs. 4.2(a-d) para diferentes valores de la constante de interacción α . Estas figuras también muestran el MLE para dos atractores de punto fijo relevantes, F_{\pm} y F_s . Para un punto fijo, calculamos λ_m como la parte real máxima de los valores propios de la matriz Jacobiana en este punto. Uno puede apreciar en las Figs. 4.2(a-d) el escenario general de bifurcaciones en el sistema. Los puntos fijos de ruptura de simetría F_{\pm} son estables para un bombeo p bajo, mientras que el punto fijo simétrico F_s es estable para un bombeo alto. En el dominio del bombeo intermedio, están presentes atractores extraños con $\lambda_m > 0$ o los ciclos límites con $\lambda_m = 0$. Dado que las condiciones iniciales son aleatorias, el sistema elige aleatoriamente un atractor en el caso cuando varios atractores estables están presentes. Esto da como resultado en la dispersión de puntos en las Figs. 4.2(a-d). La prueba de caos es más evidente como podemos apreciar en los recuadros insertados en estas figuras, que solo contienen los resultados con $\lambda_m \geq 0$.

Para polaritones que interactúan débilmente, es decir para pequeños α 's, tanto F_{\pm} como F_s pueden ser estables, el atractor extraño puede coexistir con ambos, ver Fig. 4.2(a). La otra característica importante es la posibilidad de coexistencia del punto fijo simétrico estable y el ciclo límite, ver Fig. 4.2(b,c), donde el atractor LC estable puede extenderse a valores bastante altos de bombeo p . Estos resultados sugieren que, cuando el bombeo disminuye desde un valor alto, el punto fijo F_s se transforma en el ciclo límite por la bifurcación de Hopf. Esta bifurcación puede ser continua (supercrítica), como en la Fig. 4.2(d), o discontinua (subcrítica), como

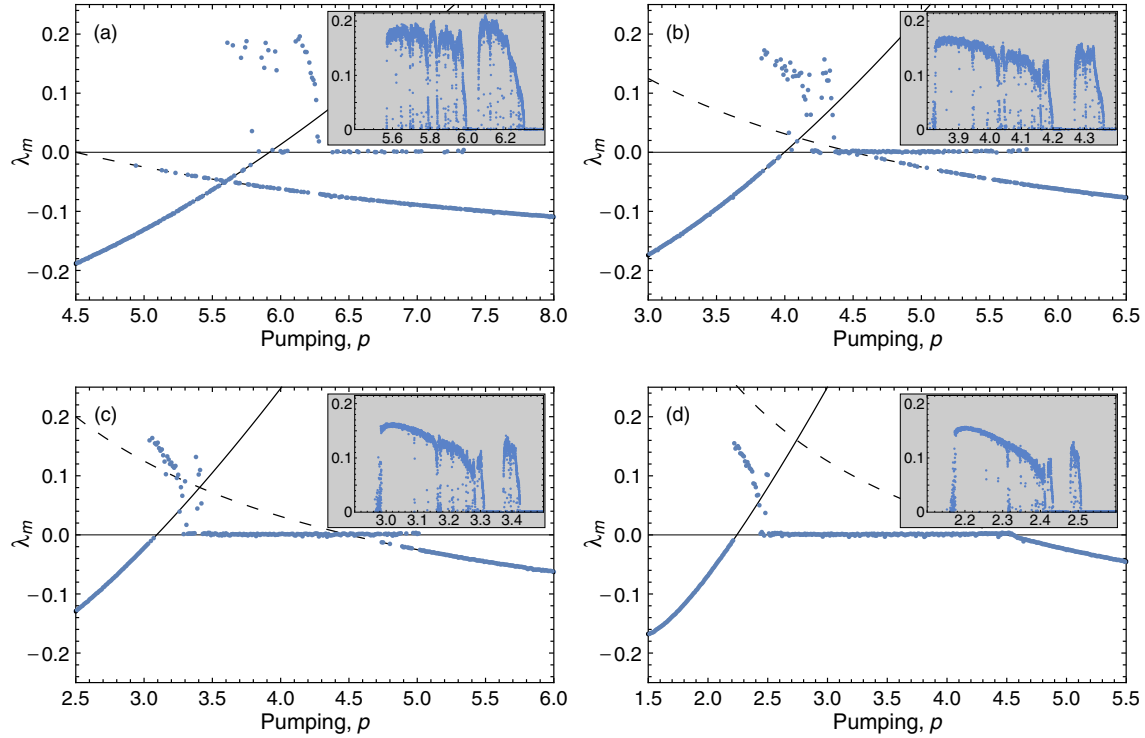


Figura 4.2: El máximo exponente de Lyapunov (puntos azules) para $\gamma = 0.5$, $\varepsilon = 2$, y para: (a) $\alpha = 0.5$, (b) $\alpha = 0.75$, (c) $\alpha = 1$ y (d) $\alpha = 1.5$. El MLE para los puntos fijos F_{\pm} se muestra con una línea negra continua, y el MLE para el punto fijo simétrico F_s se muestra con una línea negra discontinua. El incremento de tiempo en la integración numérica usando Runge-Kutta es $\Delta t = 10^{-4}$ y el número de pasos es $N = 6 \times 10^6$. El bombeo p sube en 0.01. Los recuadros agregados en las figuras demuestran más detalles en el dominio caótico. Para eso disminuimos el paso del bombeo (10^{-4}) y recolectamos solo puntos con $\lambda_m \geq 0$.

en la Fig. 4.2(a-c). Los casos subcríticas dan como resultado la coexistencia de atractores estables y la posibilidad de histéresis con el encendido y apagado del bombeo.

La dependencia del dominio caótico de los parametros está mostrados en Fig. 4.3(a-d). En las Figs. 4.3(a,b), podemos observar que para pequeños valores del acoplamiento disipativo γ también podemos esperar un comportamiento caótico, pero es necesario tener altos valores de la interacción entre polaritones. Vemos que el dominio caótico (la parte roja, caracterizado por los valores positivos de λ_m) se traslada hacia un bombeo más bajo para el aumento de α , obteniendo así, un ligero comportamiento caótico. Al aumentar un poco el valor del acoplamiento disipativo encontramos un comportamiento caótico para pequeños valores de α . Por

consiguiente, en las Figs. 4.3(c,d) al aumentar aún más el acoplamiento disipativo el comportamiento caótico del sistema de polaritones es más desarrollado, y depende tanto de la fuerza α de interacción entre polaritones como del valor del acoplamiento de Josephson entre los condensados ε . El dominio caótico, se desplaza hacia un bombeo más bajo con un aumento de α y hacia un bombeo más alto con un aumento de ε . En estas imágenes de densidad de colores es posible visualizar las diferentes transiciones que van teniendo respecto a la dependencia de cada parámetro pasando por un atractor estable, seguido de la parte inestable terminando en un ciclo límite (parte amarillo oscuro de Figs. 4.3(c,d)).

Durante la evolución descrita por (4.2), la pequeña perturbación del espín se orienta en la dirección del crecimiento más rápido. Se puede utilizar el procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt para establecer otras dos direcciones ortogonales para el crecimiento intermedio y el más lento. De esta manera, es posible calcular las partes reales de los tres exponentes de Lyapunov (ver Ref. [122] para más detalles). En la Fig. 4.4 mostramos el resultado de estos cálculos para el mismo caso que en la Fig. 4.2(d), cuando no hay coexistencia de varios atractores estables. Al contrario del caso conocido del sistema de Lorenz [100], donde la suma de tres exponentes es una constante [126], para nuestro sistema no lo es. Sin embargo, la suma de los exponentes de Lyapunov es una función de parámetros que varía lentamente, y la aparición de un atractor caótico también se manifiesta. En la Fig. 4.4 se aprecia la caída adicional del valor del exponente más pequeño.

4.2. Multiestabilidad del láser polaritónico

El análisis presentado en la sección anterior muestra que puede haber coexistencia de varios atractores estables en el escenario típico de la condensación de polaritones en las proximidades del umbral. Tanto los puntos fijos que rompen la simetría como el atractor extraño están presentes en la Fig. 3.1 justo debajo del bombeo crítico $p_2 \simeq 4.0$. La coexistencia de varios atractores estables, incluidos los puntos fijos, los ciclos límite y/o los atractores caóticos, se observa en las Figs. 4.2(a-c). Estos atractores corresponden a condensados de polaritones con diferentes propiedades, y la posibilidad de conmutación entre ellos manifiesta la multiestabilidad de la condensación y del láser polaritónico. En las condiciones de multiestabilidad, la formación de uno u otro atractor (condensado) depende de las condiciones iniciales y de la manera de prender el bombeo. Por ejemplo, consideramos el caso cuando el bombeo se prende en una manera abrupta. En este caso, el condensado es inicialmente vacío y crece desde una pequeña fluctuación del espín (desde una “semilla”). Sin embargo, la orientación de este pequeño vector de espín puede ser aleatoria, y eso resulta en la posibilidad de la formación de hasta cuatro diferentes condensados (atractores), como se muestra en la la Fig. 4.5. En el

espacio de espín, para condiciones iniciales cercanas a cero, encontramos cuatro trayectorias completamente distintas efectuando así una intensa sensibilidad a las condiciones iniciales, obteniéndose cuatro atractores: un punto fijo F_s , dos puntos fijos F_{\pm} y el atractor caótico.

La variedad de condiciones iniciales que conducen a un atractor particular define la cuenca de atracción de este estado final. Cuando las condiciones iniciales son arbitrarias, las probabilidades de realización de diferentes condensados vienen dadas por los volúmenes normalizados de las correspondientes cuencas de atracción. Se pueden calcular inicializando aleatoriamente el sistema en un cierto volumen del espacio de espín. Figs. 4.6(a,b) presentan los resultados de la probabilidades de diferentes atractores, iniciando el espín en un volumen grande (a) o desde una pequeña semilla (b). Ambas Figuras demuestran resultados cualitativamente similares. El crecimiento de la probabilidad del punto fijo simétrico F_s es continuo y uniforme, y la presencia de este atractor no es relevante para la siguiente discusión. Los otros tres atractores estables: láser de punto fijo con rompimiento de simetría F_{\pm} , el régimen del ciclo límite (LC) y el caos autónomo (CA), compiten claramente entre sí.

Las Figs. 4.6(a,b) sugieren que el punto fijo F_{\pm} pierde estabilidad y se convierte en dinámica caótica mediante bifurcación subcrítica, de modo que F_{\pm} es estable y CA coexisten en el estrecho rango de potencias de bombeo p , desde $p'_2 \simeq 5.6$ hasta $p_2 \simeq 5.9$. El escenario anterior se confirma al estudiar un cambio adiabático de bombeo en este dominio, que produce un comportamiento de histéresis característico. Para estudiar este efecto, se puede agregar ruido blanco débil al lado derecho de las Ecs. 3.6. Cuando el bombeo es inferior a p'_2 y el condensado se forma en uno de los puntos fijos de ruptura de simetría, permanece en este estado con un aumento lento del bombeo hasta p_2 , donde este punto se vuelve inestable y se forma una dinámica caótica. Esta transición se acompaña en un crecimiento drástico de la ocupación promedio del sistema en aproximadamente un 20%. (Hay que señalar que la ocupación fluctúa sustancialmente en el régimen caótico.) Cuando el bombeo disminuye adiabáticamente desde $p > p_2$, el CA persiste hasta $p'_2 < p_2$, donde la dinámica caótica se transforma primero en un ciclo límite y luego en uno de los puntos F_{\pm} por la bifurcación de Hopf. Los puntos fijos F_+ y F_- aparecen con la misma probabilidad en este caso, y la bifurcación también va acompañada de una caída en la ocupación promedio del sistema.

Este estudio de histéresis arroja más luz sobre la naturaleza del caos en el dímero polaritónico. Cada punto fijo autoatrapado F_{\pm} produce LC por la bifurcación de Hopf, con un ciclo límite que reside en el subespacio de espín $S_z < 0$, y el otro que reside en el subespacio $S_z > 0$. Cuando las trayectorias LC aumenta de tamaño, su fusión da lugar a la dinámica caótica.

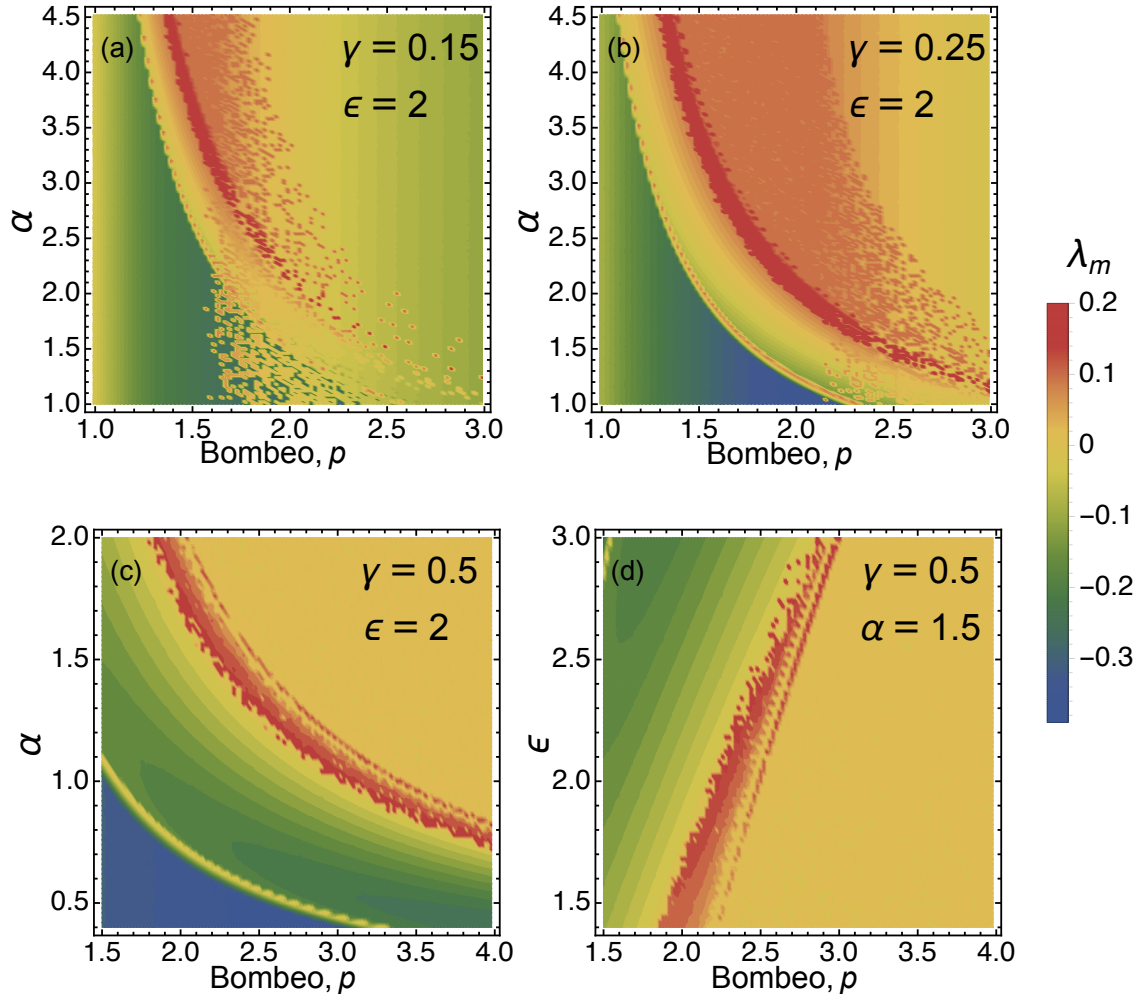


Figura 4.3: Dependencias del máximo exponente de Lyapunov del bombeo y de la constante de interacción (a-c), y del bombeo y de la constante del acoplamiento de Josephson (d). Los otros parámetros están indicados en las figuras. Los resultados se obtienen con el incremento de tiempo en la integración numérica usando Runge-Kutta es $\Delta t = 10^{-4}$ y el tiempo total de evolución $t_{\max} = 600$.

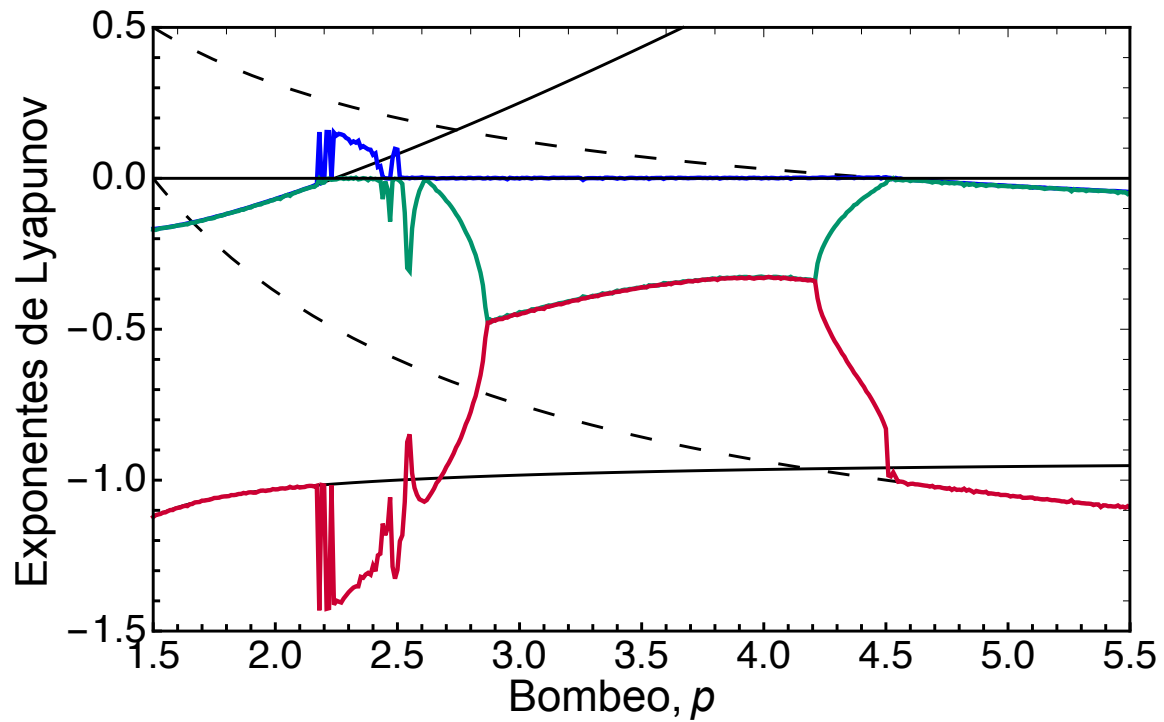


Figura 4.4: Muestra de los tres exponentes de Lyapunov (líneas gruesas), calculados para $\gamma = 0.5$, $\varepsilon = 2$ y $\alpha = 1.5$. Las líneas finas muestran los exponentes de Lyapunov para los puntos fijos, F_{\pm} (sólido) y F_s (discontinuo). El incremento de tiempo en la integración numérica usando Runge-Kutta es $\Delta t = 10^{-4}$. El tiempo total de integración después de la evolución transitoria inicial es $t_{\max} = 700$.

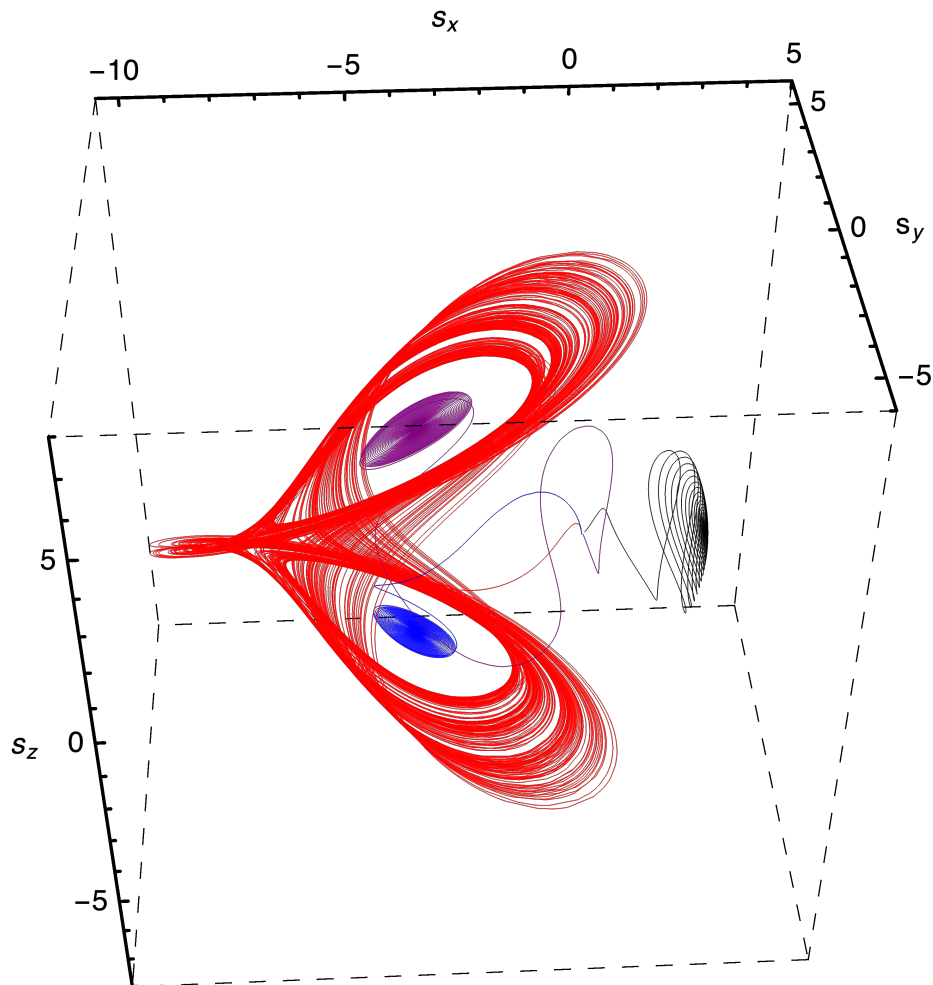


Figura 4.5: Coexistencia de atractores y diferentes trayectorias de espín con condiciones iniciales aleatorias cercanas a cero. Un valor de bombeo de $p = 5.78$, puede resultar en un atractor de: punto fijo simétrico F_s (la trayectoria negra), puntos fijos con simetría rota F_{\pm} (las trayectorias azul y morada), y el atractor caótico (la trayectoria roja). Los parámetros son $\gamma = 0.5$, $\varepsilon = 2$ y $\alpha = 0.5$.

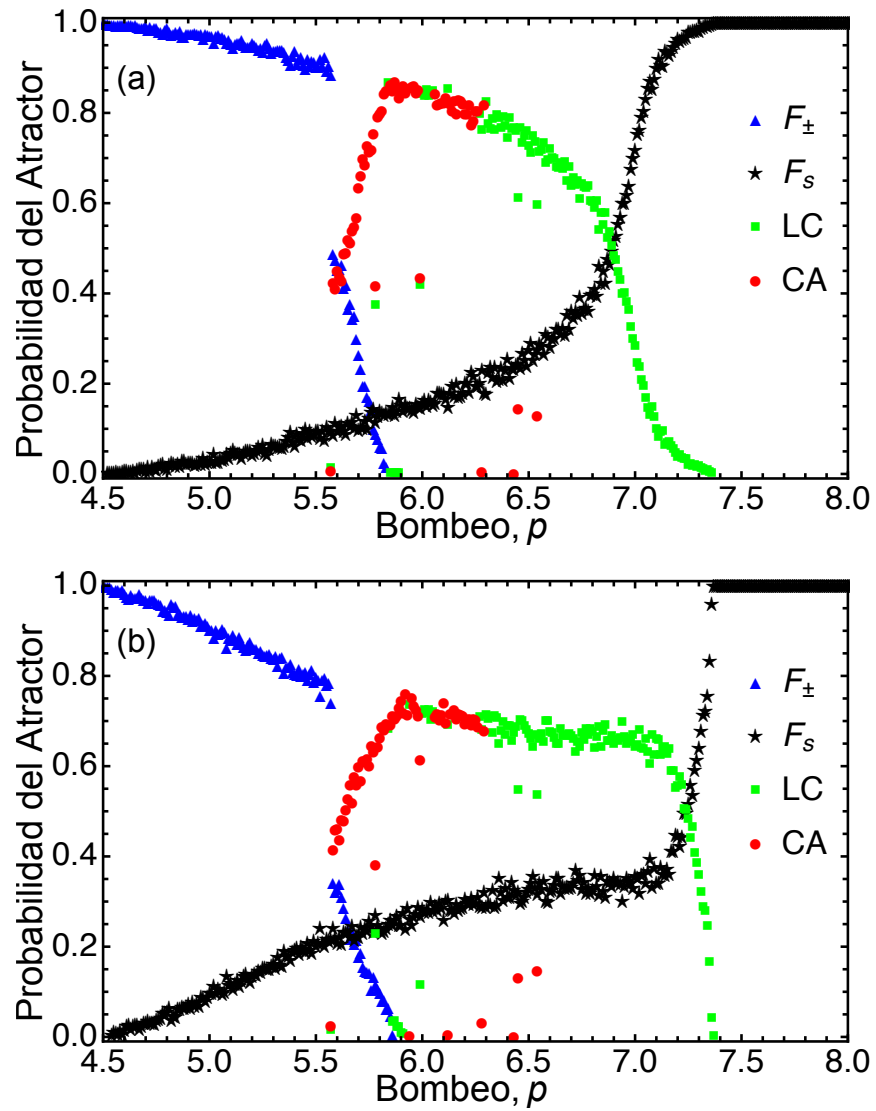


Figura 4.6: Las probabilidades de diferentes atractores como función de bombeo, calculadas para 1000 corridas a partir de condiciones iniciales aleatorias (a) dentro de un cubo grande en el espacio de espín $-20 \leq S_{x,y,z} \leq 20$, y (b) desde una semilla inicial pequeña adentro del cubo $-0.2 \leq S_{x,y,z} \leq 0.2$. Los parámetros son $\gamma = 0.5$, $\varepsilon = 2$ y $\alpha = 0.5$.

Capítulo 5

Espectro de emisión

En este capítulo estudiamos el espectro de emisión de la luz desde el dímero polaritónico. En particular, vemos las modificaciones del espectro como resultado de la dinámica caótica de los condensados.

5.1. Espectro de un láser polaritónico

Una importante característica del condensado polaritónico estudiado en los capítulos anteriores, es la emisión continua de la luz afuera de la microcavidad. Uno puede considerar esta emisión como resultado de desintegración de los polaritones del condensado y su transformación en los fotones libres afuera de microcavidad. Experimentalmente, el campo eléctrico de la luz emitida en el campo cercano (es decir, en la superficie de la microcavidad) es directamente proporcional al parámetro de orden $\psi_{\pm 1}(t)$. Entonces, el espectro de la luz emitida se puede calcular como la transformada de Fourier del parámetro de orden. En lo que sigue, vamos a considerar solo un miembro del par de condensados, por ejemplo, el condensado +1, y vamos omitir este índice para simplificar las notaciones.

Denotamos el tiempo de observación como T grande, usaremos la discretización del tiempo Δt y consideramos N valores discretos de tiempo,

$$t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, (N-1)\Delta t,$$

tal que $\Delta t = T/N$. Los valores discretos del parámetro de orden en estos momentos de tiempo son $\psi(t) \equiv \psi_t$. Definimos la transformación de Fourier discreta como

$$\tilde{\psi}_\omega = \frac{1}{N} \sum_t e^{i\omega t} \psi_t = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\omega t} \psi_t dt. \quad (5.1)$$

Considerando muy pequeños intervalos de Δt , o grandes valores de N , usaremos la sumatoria e integración en una forma intercambiable. Para la transformación de

Fourier rápida (“fast Fourier transform”, FFT) es importante de usar N como una potencia de 2.

Las N transformadas de Fourier $\tilde{\psi}_\omega$ corresponden a N frecuencias discretas

$$\omega = 0, \Delta\omega, 2\Delta\omega, \dots, (N-1)\Delta\omega,$$

en donde $\Delta\omega = 2\pi/T$. Es importante mencionar que las frecuencias grandes en esta serie son equivalentes a las frecuencias negativas: $\tilde{\psi}_{N\Delta\omega} \equiv \tilde{\psi}_0$, $\tilde{\psi}_{(N-1)\Delta\omega} \equiv \tilde{\psi}_{-\Delta\omega}$, $\tilde{\psi}_{(N-2)\Delta\omega} \equiv \tilde{\psi}_{-2\Delta\omega}$, etc. En nuestra definición, el espectro de potencias $I(\omega) = |\tilde{\psi}_\omega|^2$ es normalizado al número promedio de polaritones en el centro:

$$\sum_{\omega} |\tilde{\psi}_\omega|^2 = \frac{1}{\Delta\omega} \int I(\omega) d\omega = \frac{1}{T} \int_0^T |\psi_t|^2 dt = \bar{n}. \quad (5.2)$$

En el caso del condensado formado en un punto fijo, el espectro tiene la forma de una función delta centrada en la frecuencia del láser polaritónico $\Omega_0 \equiv \Omega(\mathbf{S})$, donde $\Omega(\mathbf{S})$ está definida por Ec. (3.9). En este caso, el parámetro de orden es simplemente $\psi_t = \sqrt{\bar{n}} e^{-i\Omega_0 t}$,

$$\tilde{\psi}_\omega = \frac{\sqrt{\bar{n}}}{T} \int_0^T e^{i(\omega - \Omega_0)t} dt = \frac{\bar{n}}{i(\omega - \Omega_0)T} \left[e^{i(\omega - \Omega_0)T} - 1 \right],$$

y el espectro es

$$I(\omega) = |\tilde{\psi}_\omega|^2 = \frac{4\bar{n}}{T^2(\omega - \Omega_0)^2} \sin^2 \left[\frac{(\omega - \Omega_0)T}{2} \right] = \bar{n}\Delta\omega \delta(\omega - \Omega_0).$$

Aquí usamos el límite de tiempos de medición T grandes y la representación de la función delta

$$2\pi\delta(\omega - \Omega_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{4}{T(\omega - \Omega_0)^2} \sin^2 \left[\frac{(\omega - \Omega_0)T}{2} \right].$$

Este resultado del espectro como un pico delta es aproximado. En el caso realístico el pico tiene un ancho finito. Para calcular este ancho es importante de incorporar un ruido pequeño en la parte derecha de las ecuaciones para el parámetro de orden (3.4), que resulta en un pico delgado Lorentziano. Nosotros no vamos incorporar este ruido, por que estamos interesados en los efectos del ruido propio, que aparece gracias a la dinámica caótica. Pero primero vamos considerar que pasa con este pico en el caso de formación de la dinámica del ciclo límite.

5.2. Peine de frecuencias

Como mostramos en los capítulos anteriores, a parte de los puntos fijos, pueden existir los atractores tipo ciclo límite (LC), que aparecen como resultado de la bifurcación de Hopf cuando los puntos fijos pierden su estabilidad. En el caso de LC el vector de espín hace un movimiento periódico con un periodo τ_{LC} : $\mathbf{S}(t + \tau_{LC}) = \mathbf{S}(t)$. Aunque el parámetro de orden no es una función periódica del tiempo, en el caso general podemos escribir $\psi(t) = e^{-i\Omega_0 t} \chi(t)$, en donde $\chi(t)$ si es una función periódica. Desarrollando esta función en la serie de Fourier obtenemos

$$\psi(t) = e^{-i\Omega_0 t} \chi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-i\Omega_n t}, \quad (5.3)$$

con los coeficientes complejos C_n y las frecuencias equidistantes

$$\Omega_n = \Omega_0 + \frac{2\pi n}{\tau_{LC}}. \quad (5.4)$$

Y se puede calcular la frecuencia base Ω_0 como $\Omega_0 = \text{Re} \left[\frac{1}{i\tau_{LC}} \ln \left(\frac{\psi(t)}{\psi(t+\tau_{LC})} \right) \right]$, cuyo valor no depende del punto inicial t . Tomando en cuenta que el logaritmo es una función multivalor, el armónico $n = 0$ se puede escoger en una forma arbitraria, y es cómodo fijar este valor al armónico con la amplitud más grande.

En una forma similar que para el caso de punto fijo, obtenemos una serie de picos delta, o un “peine de frecuencias” para el espectro,

$$I(\omega) = \Delta\omega \sum_n |C_n|^2 \delta(\omega - \Omega_n). \quad (5.5)$$

En la misma manera, en la presencia del amortiguamiento, los picos delta se convierten en Lorentzianos. Esta aproximación es válida mientras los anchos de los picos son mucho menor que la separación entre ellos $\Delta\Omega = 2\pi/\tau_{LC}$. La posibilidad de la emisión de un peine de frecuencias por los condensados polaritónicos fue discutida por la primera vez en Ref. [96]. En esta sección describimos el peine de frecuencias en nuestro modelo realístico del dímero polaritónico (3.4).

Típicamente, el peine de frecuencias adquiere pocos picos importantes. Como un ejemplo, consideramos el ciclo límite que ocurre entre dos dominios de caos, en el bombeo $p = 4.25$ para los parámetros $\alpha = 0.75$, $\varepsilon = 2.0$, y $\gamma = 0.5$, ver Fig. 3.1. Las frecuencias de los picos del peine y los valores de los coeficientes C_n correspondientes (amplitud y fase) están enlistados en la tabla 5.1. El comportamiento de las componentes de espín para este ciclo límite se puede ver en la Fig. 5.2. Se puede apreciar que el ciclo límite está reflejado en las oscilaciones de los números de polaritones entre dos centros de condensación, en tal manera que el espín oscila

dos veces en el hemisferio norte, después dos veces en el hemisferio sur, otras dos en el hemisferio norte, etc. El periodo del ciclo es $\tau_{LC} = 13.417$ que corresponde al separación entre picos $\Delta\Omega = 0.4683$.

Ω_n	$ C_n $	$\text{Arg}(C_n)$
-0.53965	0.02062	0.80025π
-0.07133	0.13084	-0.09008π
0.39698	0.183	0.77062π
0.86529	0.08067	-0.45523π
1.3336	0.29144	-0.765675π
1.80191	0.57397	-0.13222π
2.27022	0.36647	0.91752π
2.73853	0.4879	0.218143π
3.20684	1.91776	-0.01875π
3.67515	0.29836	-0.40611π
4.14346	0.33401	-0.08666π
4.61177	0.28282	-0.160045π
5.08008	0.16565	-0.47649π
5.5484	0.04510	-0.13835π

Cuadro 5.1: Tabla de valores de los parámetros de los armónicos del ciclo límite formado para el caso de $\gamma = 0.5$, $\alpha = 0.75$, $\varepsilon = 2$, y $p = 4.25$ (ver el texto).

5.3. Espectros en el régimen caótico

La dinámica caótica del dímero polaritónico conduce a varias características interesantes del espectro de emisión de la microcavidad. De lo contrario al condensado de los átomos fríos, los condensados polaritónicos pierden las partículas continuamente, y los polaritones que salen de la microcavidad se convierten en fotones libres. El flujo de los fotones forma el efecto de láser polaritónico. Las propiedades de láser, en particular, su coherencia, pueden ser observados directamente en un experimento y ellos reflejan la dinámica del condensado.

Aquí calculamos el espectro de potencia de emisión $I(\omega)$ utilizando la transformada de Fourier del parámetro de orden $\tilde{\psi}_{\pm 1}(\omega)$. Como la simetría entre dos centros de condensación no se rompe en el régimen caótico, $I(\omega) = |\tilde{\psi}_{\pm 1}(\omega)|^2$ es independiente del índice del sitio ± 1 . Veamos primero dos ejemplos del espectro de emisión para la dinámica caótica que se muestran en las Figs. 5.2(a,b). Es

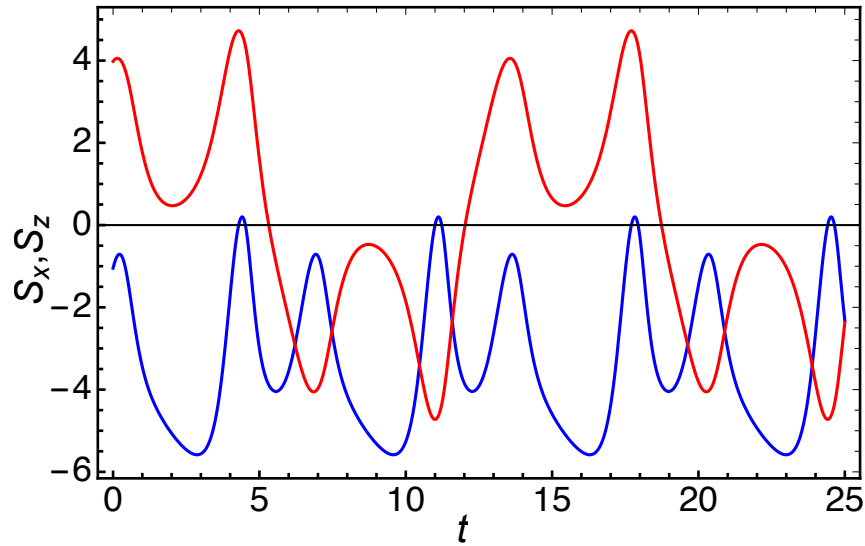


Figura 5.1: Evolución de las componentes de espín S_x (azul) y S_z (rojo) para el ciclo límite formado en el caso $\gamma = 0.5$, $\alpha = 0.75$, $\varepsilon = 2.0$, y $p = 4.25$.

interesante que la dinámica caótica no conduce a una emisión amplia parecida a luminescencia ordinaria. El espectro contiene unas pocas líneas estrechas pronunciadas que crecen en un pedestal relativamente liso.

Para resolver la estructura fina del espectro, el sistema de Ecs. (3.4) ha evolucionado dentro del atractor caótico durante mucho tiempo, $T = 10^5$, y la trayectoria se ha discretizado con $N = 2^{22}$ puntos para aplicar la transformada discreta de Fourier. El espectro mostrado en las Figs. 5.2(a,b) se han promediado adicionalmente sobre 800 condiciones iniciales aleatorias en el colector del atractor caótico. Vale la pena señalar que la frecuencia Ω definida por la Ec. (3.9) fluctúa notablemente en el régimen caótico y también contiene picos estrechos colocados al azar, que aparecen cuando el denominador en el segundo término en (3.9) se acerca a cero. Con el fin de resaltar las características básicas del espectro caótico, no hemos agregado ruido a las Ecs. (3.4), ni hemos incluido algún amortiguamiento fenomenológico. Además, normalmente el parámetro α_2 , que define la interacción entre diferentes condensados, es pequeño, y lo omitimos en este cálculo, poniendo $\alpha = \alpha_1$.

La característica principal de los espectros en las Figs. 5.2(a,b) es una línea central estrecha. La posición de esta línea tiene origen dinámico. Está por encima del corrimiento azul debido a la interacción entre polaritones. Por ejemplo, la ocupación promedio del sitio en el caso de la Fig. 5.2(a) es $\langle n_{\pm 1} \rangle \simeq 7.22$ y el corrimiento azul correspondiente es $\alpha \langle n_{\pm 1} \rangle / 2 = 1.8\Gamma$, mientras que la línea central se coloca en $\Omega_0 = 3.214\Gamma$. Es importante indicar también que la frecuencia de la línea central se desplaza sustancialmente en azul en comparación con la posición del láser desde el

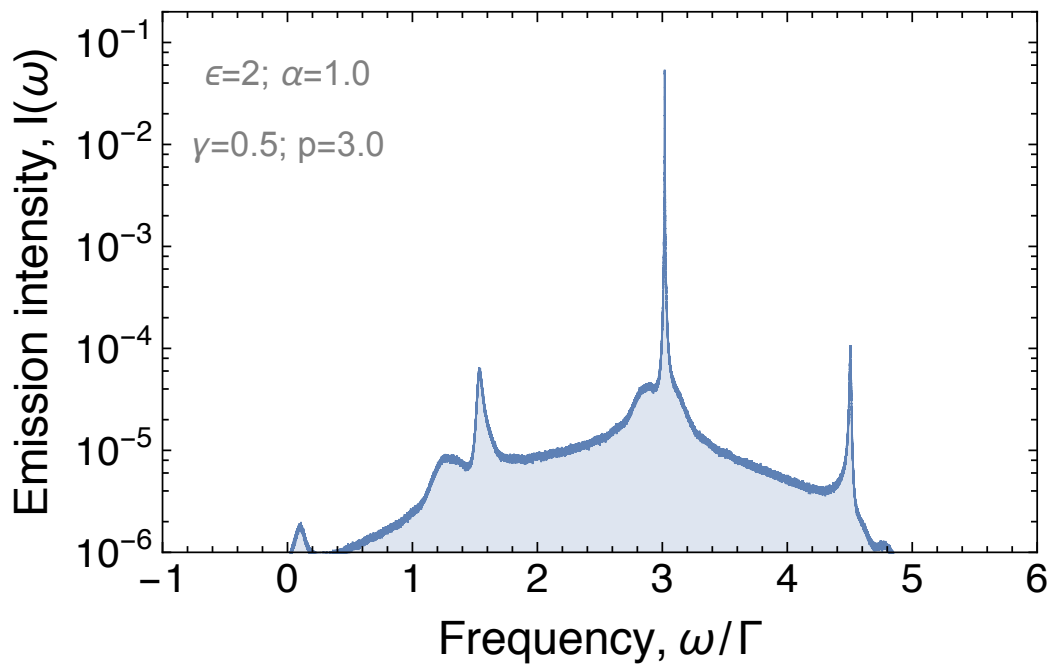
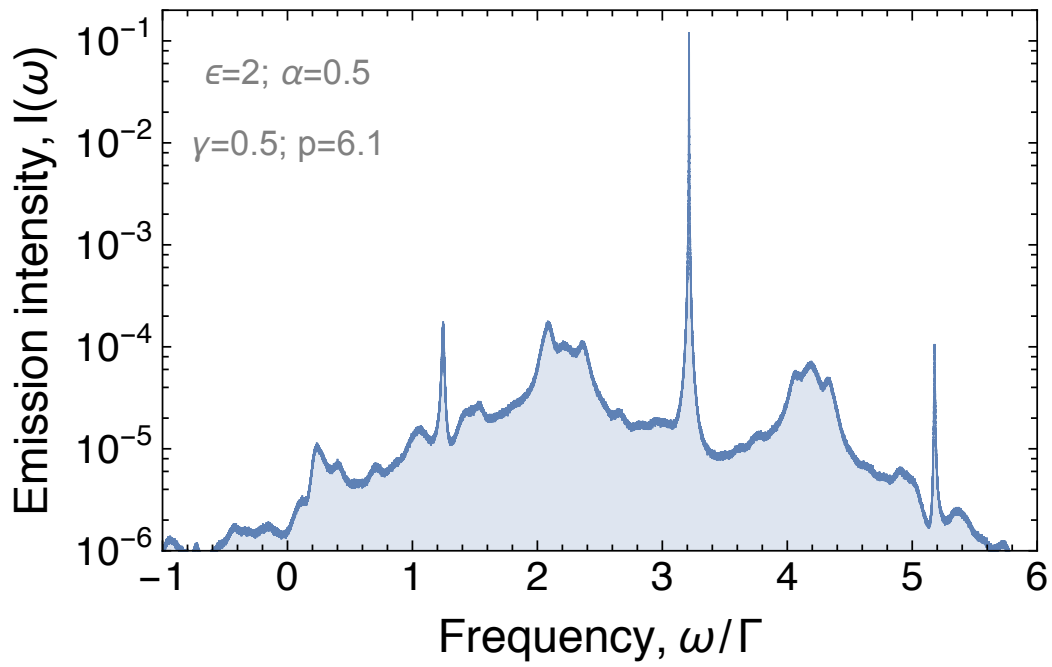


Figura 5.2: Espectro de emisión $I(\omega)$ para la dinámica caótica para $\epsilon = 2$, $\gamma = 0.5$, y la fuerza de interacción y bombeo son (a) $\alpha = 0.5$, $p = 6.1$, (b) $\alpha = 1.0$, $p = 3.0$. Los parámetros están en unidades de Γ .

condensado formado en el punto fijo simétrico F_s . El láser F_s tiene lugar con números de ocupación aproximadamente dos veces menores $n_s = [p/(\Gamma + \gamma)] - 1 \simeq 3.07$, y la línea de láser F_s se coloca en $\Omega_s = (\alpha n_s - \varepsilon)/2 = -0.233\Gamma$. La forma de la línea central está bien ajustada por el Lorentziano con el ancho completo a la mitad máxima 0.0017Γ . Dado que los valores típicos de la tasa de disipación son $\Gamma \sim 0.1 \text{ ps}^{-1}$, la línea es bastante estrecha y la emisión puede denominarse como *láser en el régimen caótico*.

La emisión desde el pedestal no es despreciable. En el caso de las Fig. 5.2(a), la cola izquierda, el pico central y en la cola derecha contribuyen aproximadamente con un 20%, 72% y 8% a la emisión total, respectivamente. Curiosamente, el espectro se parece parcialmente a la emisión deformada del ciclo límite. Los vecinos más cercanos al pico central son anchos y pueden verse como la superposición de tres picos cercanos, mientras que los vecinos más próximos siguen siendo estrechos pero débiles. Por otro lado, la Fig. 5.2(b), no se observan los picos intermedios.

El espectro de emisión del dímero polaritónico refleja además las modificaciones de la dinámica caótica a lo largo del incremento del bombeo. En la Fig. 3.1 observamos que el caos aparece en el transcurso de una bifurcación subcrítica desde los puntos fijos F_{\pm} (llamaremos este rango como el dominio 1), después el caos convierte en un ciclo límite, pero reaparece una otra vez en un rango de potencias del bombeo altos (el dominio 2). Los espectros de emisión en el dominio 1 están mostrados en las Figs. 5.3(a,b) y los espectros para el ciclo límite y el caos en el dominio 2 están mostrados en las Figs. 5.4(a,b).

Observamos que los espectros de emisión en el dominio 1 (Figs. 5.3(a,b)) están caracterizados por dos tiempos característicos. Un tiempo corto, que corresponde a la distancia grande entre los picos estrechos y un tiempo largo proporcional a la inversa distancia entre los picos intermedios gruesos. El primero es el tiempo típico de oscilaciones del espín auto-atrapados, es decir o en el hemisferio norte o en el hemisferio sur. Y el tiempo largo es el tiempo típico de los procesos del cambio del hemisferio de las oscilaciones.

En el espectro del ciclo límite, Figs. 5.4(a), existe obviamente el único tiempo característico, su periodo $\tau_{LC} \simeq 13.4$, que define la separación entre picos $\Delta\Omega = 2\pi/\tau_{LC} \simeq 0.47$. Es interesante, que cuando este ciclo límite se convierte en el caos, en el espectro de emisión mostrado en la Fig. 5.4(b) solo sobreviven los picos pares y los picos impares son completamente suprimidos.

Finalmente hay que indicar que el espectro en el caso de de caos débil es muy parecido a un ciclo límite, con unos cuantos picos importantes. Mostramos un ejemplo de este espectro en la Fig. 5.5. Ahí aparecen solo tres picos importantes y el pedestal es poco pronunciado.

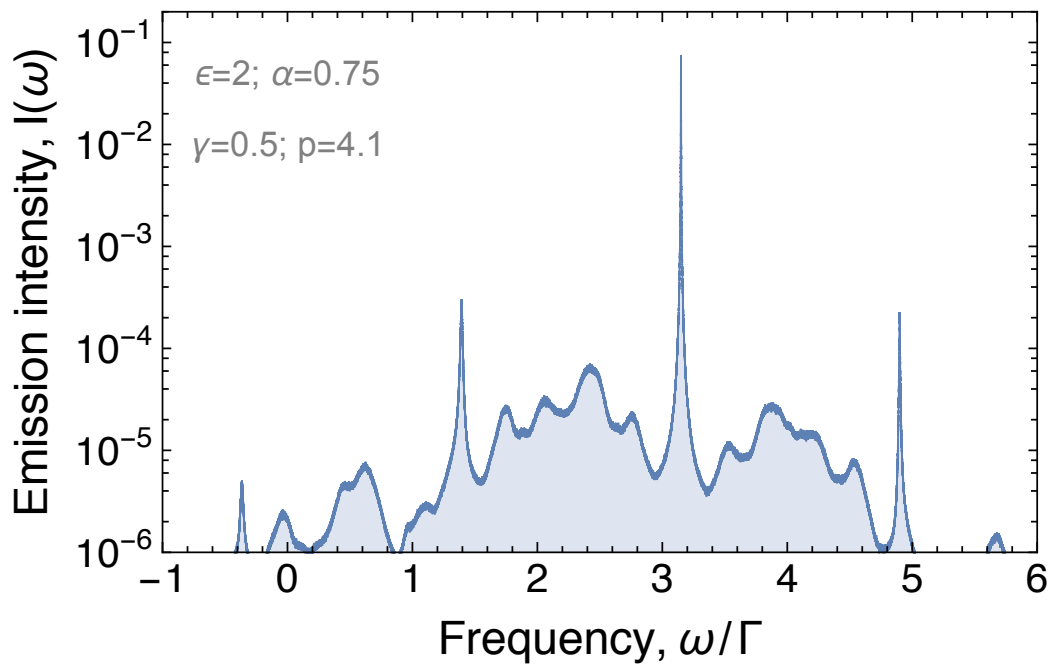
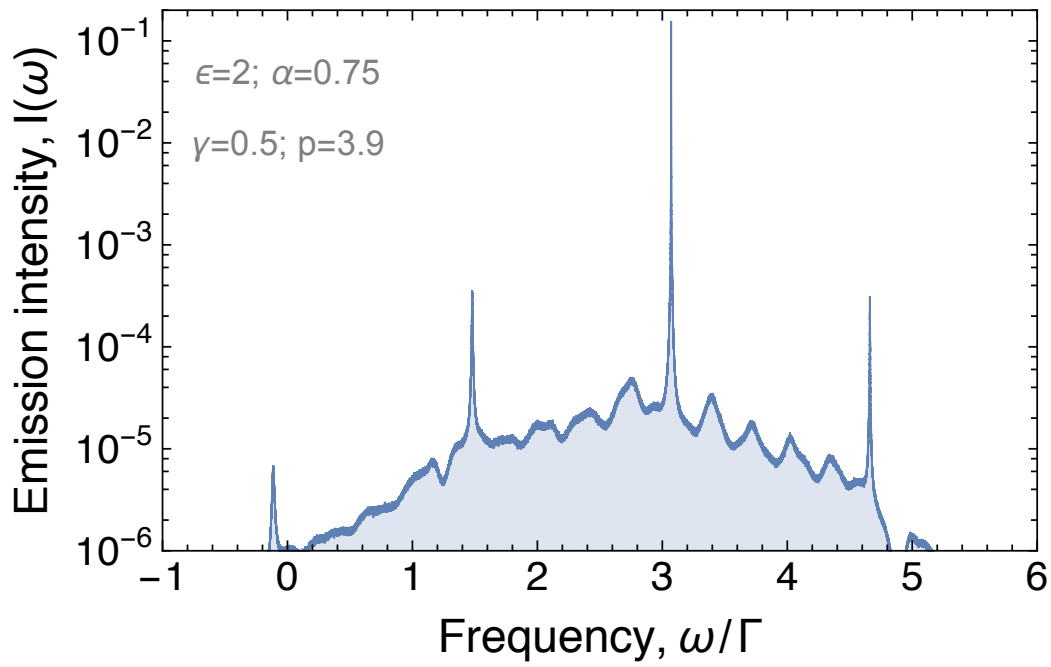


Figura 5.3: Espectro de emisión $I(\omega)$ para la dinámica caótica para $\gamma = 0.5$, $\alpha = 0.75$, y $\epsilon = 2$. Los valores de bombeo (a) $p = 3.9$, y (b) $p = 4.1$. Los parámetros están en unidades de Γ .

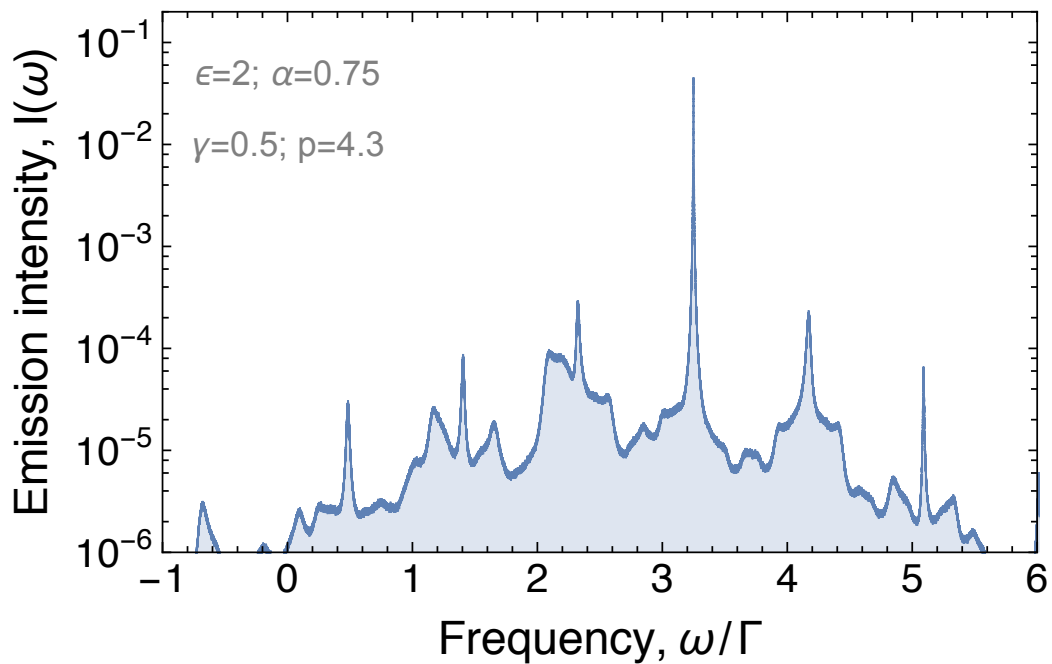
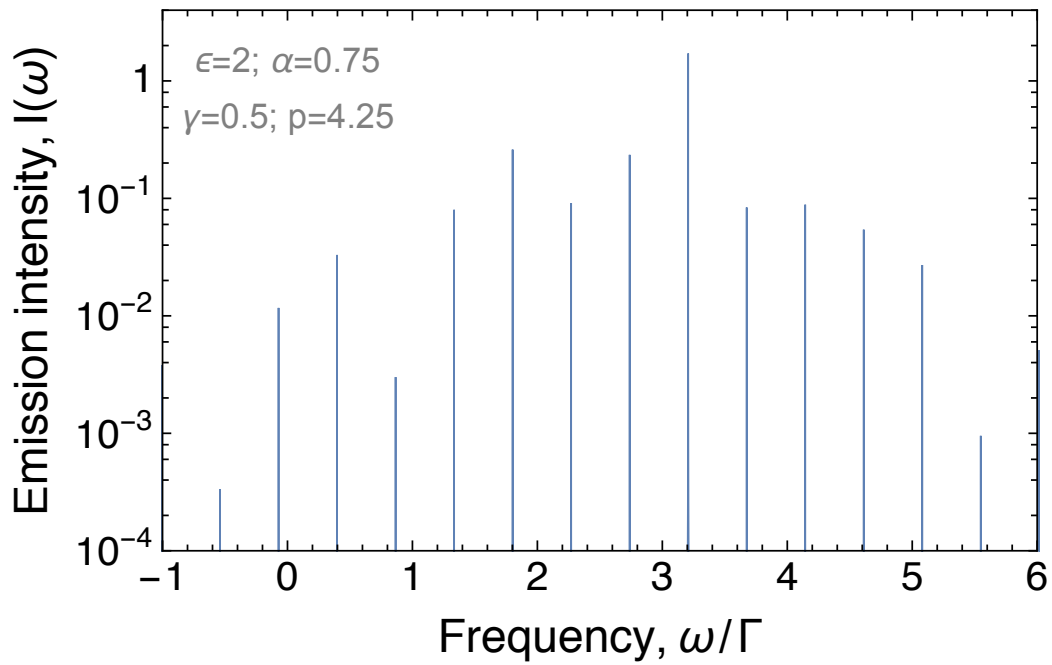


Figura 5.4: Espectro de emisión $I(\omega)$ para la dinámica de ciclo límite (a) y caótica (b). Los parámetros son $\gamma = 0.5$, $\alpha = 0.75$, $\epsilon = 2$. Y los valores de bombeo son (a) $p = 4.25$, y (b) $p = 4.3$. Los parámetros están en unidades de Γ .

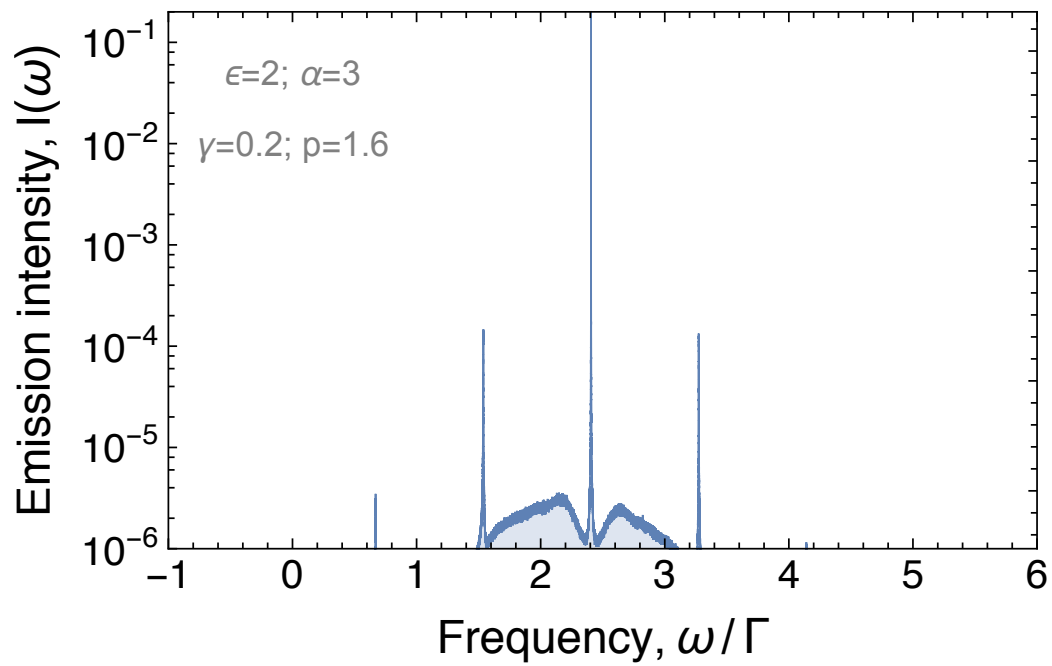


Figura 5.5: Espectro de emisión $I(\omega)$ para el caos débil en el qubit polaritónico. Los parámetros en las unidades de Γ están indicados en la figura.

Conclusiones

En este trabajo de tesis demostramos la formación de caos y atractores extraños en la dinámica de dos condensados de excitón-polaritón acoplados: un cúbit polaritónico. Encontramos que el láser polaritónico en el sistema de dos condensados excitados en una forma no-resonante exhibe varias bifurcaciones no-triviales en las proximidades del umbral.

Primero, surgen *los estados auto-atrapados* que se caracterizan por una simetría de paridad rota y resultan en diferentes ocupaciones de dos condensados. El rompimiento de simetría y auto-atrapamiento de polaritones son posibles cuando los condensados que forman el cúbit se acoplan tanto de forma coherente como disipativo.

El láser con simetría rota se vuelve ser inestable con el aumento del bombeo y los estados auto-atrapados convierten en *los ciclos límites* por la bifurcación de Hopf. También, obtenemos que la mezcla de diferentes ciclos límites resulta en *la dinámica caótica del láser*. Las bifurcaciones pueden ser tanto supercríticas como subcríticas, y en el último caso está presente *la multiestabilidad del láser polaritónico*. Confirmamos la presencia de caos calculando el máximo exponente de Lyapunov. Adicionalmente, calcular los tres exponentes de Lyapunov (el espectro de Lyapunov) para un modelo realista de un cúbit de un dímero de polaritón.

Posteriormente, la dinámica caótica del sistema se convierte de nuevo en un movimiento de ciclo límite. A un bombeo más alto, aparece el condensado sincronizado simétrico, que se forma mediante una otra bifurcación de Hopf.

El espectro de frecuencia de la luz emitida desde la microcavidad en el régimen caótico del condensado de polaritones se caracteriza por unas pocas líneas estrechas y sustancialmente desplazadas al azul con respecto al pico de láser polaritónico ordinario. Estos líneas crecen a partir de un pedestal estructurado. El espectro refleja la presencia de dos tiempos característicos de la dinámica del cúbit.

Bibliografía

- [1] S. Akama. *Elements of Quantum Computing*. Springer International Publishing, Switzerland, 2015.
- [2] *ENIAC, Wikipedia*, 2020.
- [3] Wikidata. *Q1044055*, 2019.
- [4] G. R. Wilson. *High Voltage Integrated Circuit Transistor*, Feb. 1971. Patent.
- [5] R. W. Kelsall, I. W. Hamley, and M. Geoghegan. *Nanoscale Science and Technology*. John Wiley & Sons, Chichester, England, 2005.
- [6] C. Qiu, Z. Zhang, M. Xiao, Y. Yang, D. Zhong, and L.-M. Peng. *Scaling carbon nanotube complementary transistors to 5-nm gate lengths*. *Science*, 355(6322):271–276, Jan. 2017.
- [7] G. O'Regan. *Introduction to the History of Computing: A Computing History Primer*. Undergraduate Topics in Computer Science. Springer International Publishing, 2016.
- [8] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, Cambridge, New York, 2010.
- [9] T. Bawden. *Global warming: Data centres to consume three times as much energy in next decade, experts warn*, Jan. 2016.
- [10] K. Keith Pearlson and V. Kaushik. *Integrated solar power plant in Data Center*. In *2015 2nd International Conference on Computing for Sustainable Global Development (INDIACom)*, pages 1670–1672, March 2015.
- [11] H. Ritchie and M. Roser. *CO₂ and Greenhouse Gas Emissions*. Our World in Data, 2017.
- [12] H. Menown, B. Newton, and C. V. Neale. *Laser arrangements*, Feb. 1985. Patent.

- [13] T. H. Maiman. *Stimulated Optical Radiation in Ruby*. Nature, 187(4736):493–494, Aug. 1960.
- [14] T. H. Maiman. *Optical and Microwave-Optical Experiments in Ruby*. Phys. Rev. Lett., 4:564–566, June 1960.
- [15] J.-C. Diels and L. Arissian. *Lasers: The Power and Precision of Light*. Wiley, 2011.
- [16] E. Kapon. *Semiconductor Lasers I: Fundamentals*. Optics and Photonics. Elsevier Science, San Diego, 1999.
- [17] J. F. Ready. *Industrial Applications of Lasers*. Elsevier Science, San Diego, second edition, 1997.
- [18] C. G. Young. *A Sun-Pumped cw One-Watt Laser*. Appl. Opt., 5(6):993–997, June 1966.
- [19] T. Yabe, B. Bagheri, T. Ohkubo, S. Uchida, K. Yoshida, T. Funatsu, T. Oishi, K. Daito, M. Ishioka, N. Yasunaga, Y. Sato, C. Baasandash, Y. Okamoto, and K. Yanagitani. *100 W-class solar pumped laser for sustainable magnesium-hydrogen energy cycle*. Journal of Applied Physics, 104(8):083104, 2008.
- [20] W. Shockley and H. J. Queisser. *Detailed Balance Limit of Efficiency of p-n Junction Solar Cells*. Journal of Applied Physics, 32(3):510–519, 1961.
- [21] S. A. Bakhramov, S. D. Payziyev, S. I. Klychev, A. K. Kasimov, and A. A. Abdurakhmanov. *Laser on the big solar concentrator*. In *Proceedings of CAOL 2005. Second International Conference on Advanced Optoelectronics and Lasers, 2005.*, volume 1, pages 109–111, 2005.
- [22] D. Liang and J. Almeida. *Solar-Pumped TEM₀₀ Mode Nd:YAG laser*. Opt. Express, 21(21):25107–25112, Oct. 2013.
- [23] F. B. McCormick, F. A. P. Tooley, T. J. Cloonan, J. L. Brubaker, A. L. Lentine, R. L. Morrison, S. J. Hinterlong, M. J. Herron, S. L. Walker, and J. M. Sasian. *Experimental investigation of a free-space optical switching network by using symmetric self-electro-optic-effect devices*. Appl. Opt., 31(26):5431–5446, Sep. 1992.
- [24] P. Guilfoyle, R. Stone, and F. F. Zeise. *Digital optical interconnects for photonic computing*. In R. T. Chen and J. A. Neff, editors, *Optoelectronic Interconnects II*, volume 2153, pages 37–47. International Society for Optics and Photonics, SPIE, 1994.
- [25] S. S. Jha. *Perspectives in Optoelectronics*. World Scientific, 1995.

- [26] A. Datta, A. Shaji, and C. M. Caves. *Quantum Discord and the Power of One Qubit*. Phys. Rev. Lett., 100:050502, Feb. 2008.
- [27] A. Ferraro, L. Aolita, D. Cavalcanti, F. M. Cucchietti, and A. Acín. *Almost all quantum states have nonclassical correlations*. Phys. Rev. A, 81:052318, May 2010.
- [28] P. Kok and B. W. Lovett. *Introduction to Optical Quantum Information Processing*. Cambridge University Press, Cambridge New York, 2010.
- [29] R. P. Feynman. *Simulating physics with computers*. International Journal of Theoretical Physics, 21(6):467–488, June 1982.
- [30] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?* Phys. Rev., 47:777–780, May 1935.
- [31] T. Ladd, Jelezko, F., R. Laflamme, Y. Nakamura, C. Monroe, and J. L. O’Brien. *Quantum computers*. Nature, 464(7285):45–53, Mar. 2010.
- [32] R. J. Hughes, G. L. Morgan, and C. G. Peterson. *Quantum key distribution over a 48 km optical fibre network*. Journal of Modern Optics, 47:533–547, 2000.
- [33] G. Burkard and D. Loss. *Cancellation of Spin-Orbit Effects in Quantum Gates Based on the Exchange Coupling in Quantum Dots*. Phys. Rev. Lett., 88:047903, Jan. 2002.
- [34] B. Koiller, X. Hu, R. B. Capaz, A. S. Martins, and S. Das Sarma. *Silicon-based spin and charge quantum computation*. Anais da Academia Brasileira de Ciências, 77:201–222, June 2005.
- [35] M. Nakahara, S. Kanemitsu, M. M. Salomaa, and S. Takagi. *Physical Realizations of Quantum Computing*. World Scientific, 2006.
- [36] K. Semba, S. Saito, T. Meno, J. Johansson, and H. Takayanagi. *Coherent Control of Coupled Superconducting Macroscopic Quantum Systems*. AIP Conference Proceedings, 850(1):939–940, 2006.
- [37] S. Puri, N. Kim, E. Abe, and Y. Yamamoto. *Towards All Optical, Universal Quantum Computation using Trapped Electron Spins and Cavity Polariton Resonance*, 2012.
- [38] T. Espinosa-Ortega and T. C. H. Liew. *Complete architecture of integrated photonic circuits based on and not logic gates of exciton polaritons in semiconductor microcavities*. Phys. Rev. B, 87:195305, May 2013.

- [39] M. J. Hartmann, F. G. S. L. Brandão, and M. B. Plenio. *Strongly interacting polaritons in coupled arrays of cavities*. Nature Physics, 2(12):849–855, Dec. 2006.
- [40] D. Read, Y. G. Rubo, and A. V. Kavokin. *Josephson coupling of Bose-Einstein condensates of exciton-polaritons in semiconductor microcavities*. Phys. Rev. B, 81:235315, June 2010.
- [41] D. Ballarini, M. De Giorgi, E. Cancellieri, R. Houdré, E. Giacobino, R. Cingolani, A. Bramati, G. Gigli, and D. Sanvitto. *All-optical polariton transistor*. Nature Communications, 4(1):1778, Apr. 2013.
- [42] S. Demirchyan, I. Chestnov, A. Alodjants, M. Glazov, and A. V. Kavokin. *Qubits Based on Polariton Rabi Oscillators*. Phys. Rev. Lett., 112:196403, May 2014.
- [43] A. Dreismann, H. Ohadi, Y. del Valle-Inclan Redondo, R. Balili, Y. G. Rubo, S. I. Tsintzos, G. Deligeorgis, Z. Hatzopoulos, P. G. Savvidis, and J. J. Baumberg. *A sub-femtojoule electrical spin-switch based on optically trapped polariton condensates*. Nature Materials, 15:1074–1078, Aug. 2016.
- [44] A. V. Kavokin, J. J. Baumberg, G. Malpuech, and F. P. Laussy. *Microcavities*. Series on Semiconductor Science and Technology. Oxford University Press, second edition, 2017.
- [45] P. Savvidis, J. Baumberg, R. Stevenson, M. Skolnick, D. Whittaker, and J. S. Roberts. *Angle-Resonant Stimulated Polariton Amplifier*. Phys. Rev. Lett., 84:1547–1550, Feb. 2000.
- [46] J. Kasprzak, M. Richard, S. Kundermann, A. Baas, P. Jeambrun, J. M. J. Keeling, F. M. Marchetti, M. H. Szymańska, R. André, J. L. Staehli, V. Savona, P. B. Littlewood, B. Deveaud, and L. S. Dang. *Bose-Einstein condensation of exciton polaritons*. Nature, 443(7110):409–414, Sep. 2006.
- [47] J. Hubbard and B. H. Flowers. *Electron correlations in narrow energy bands*. Proc. R. Soc. Lond. A, 276(1365):238–257, 1963.
- [48] M. C. Gutzwiller. *Effect of Correlation on the Ferromagnetism of Transition Metals*. Phys. Rev. Lett., 10:159–162, Nov. 1963.
- [49] P. Coleman. *Introduction to Many-Body Physics*. Cambridge University Press, Cambridge UK, 2015.
- [50] H. Hennig, D. Witthaut, and D. K. Campbell. *Global phase space of coherence and entanglement in a double-well Bose-Einstein condensate*. Phys. Rev. A, 86:051604, Nov. 2012.

- [51] A. J. Leggett. *Bose-Einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts*. Rev. Mod. Phys., 73:307–356, Apr. 2001.
- [52] V. Enol'skii, M. Salerno, N. Kostov, and A. C. Scott. *Alternate quantizations of the discrete self-trapping dimer*. Physica Scripta, 43(3):229–235, Mar. 1991.
- [53] L. Bernstein, J. C. Eilbeck, and A. C. Scott. *The quantum theory of local modes in a coupled system of nonlinear oscillators*. Nonlinearity, 3(2):293–323, May 1990.
- [54] L. J. Bernstein. *Quantizing a self-trapping transition*. Physica D: Nonlinear Phenomena, 68(1):174–179, Sep. 1993.
- [55] G. Kalosakas and A. R. Bishop. *Small-tunneling-amplitude boson-Hubbard dimer: Stationary states*. Phys. Rev. A, 65:043616, Apr. 2002.
- [56] V. Enol'skii, V. Kuznetsov, and M. Salerno. *On the quantum inverse scattering method for the DST dimer*. Physica D: Nonlinear Phenomena, 68(1):138–152, 1993.
- [57] S. Trotzky, P. Cheinet, S. Fölling, M. Feld, U. Schnorrberger, A. M. Rey, A. Polkovnikov, E. A. Demler, M. D. Lukin, and I. Bloch. *Time-Resolved Observation and Control of Superexchange Interactions with Ultracold Atoms in Optical Lattice*. Science, 319(5861):295–299, 2008.
- [58] W. Bakr, J. Gillen, A. Peng, S. Fölling, and M. Greiner. *A quantum gas microscope for detecting single atoms in a Hubbard-regime optical lattice*. Nature, 462(7269):74–77, Nov. 2009.
- [59] D. Jaksch, H.-J. Briegel, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller. *Entanglement of Atoms via Cold Controlled Collisions*. Phys. Rev. Lett., 82:1975–1978, Mar. 1999.
- [60] H. Ohadi, A. J. Ramsay, H. Sigurdsson, Y. del Valle-Inclan Redondo, S. I. Tsintzos, Z. Hatzopoulos, T. C. H. Liew, I. A. Shelykh, Y. G. Rubo, P. G. Savvidis, and J. J. Baumberg. *Spin Order and Phase Transitions in Chains of Polariton Condensates*. Phys. Rev. Lett., 119:067401, Aug. 2017.
- [61] T. Liew and V. Savona. *Multimode entanglement in coupled cavity arrays*. New Journal of Physics, 15(2):025015, Feb. 2013.
- [62] D. Sarchi, I. Carusotto, M. Wouters, and V. Savona. *Coherent dynamics and parametric instabilities of microcavity polaritons in double-well systems*. Phys. Rev. B, 77:125324, Mar. 2008.

- [63] T. C. H. Liew and V. Savona. *Single Photons from Coupled Quantum Modes*. Phys. Rev. Lett., 104:183601, May 2010.
- [64] W. Casteels and C. Ciuti. *Quantum entanglement in the spatial-symmetry-breaking phase transition of a driven-dissipative Bose-Hubbard dimer*. Phys. Rev. A, 95:013812, Jan. 2017.
- [65] M. K. Olsen, C. V. Chianca, and K. Dechoum. *Quantum correlations in pumped and damped Bose-Hubbard dimers*. Phys. Rev. A, 94:043604, Oct. 2016.
- [66] T. C. H. Liew and Y. G. Rubo. *Quantum exciton-polariton networks through inverse four-wave mixing*. Phys. Rev. B, 97:041302, Jan. 2018.
- [67] H. J. Lipkin, N. Meshkov, and A. J. Glick. *Validity of many-body approximation methods for a solvable model: (I). Exact solutions and perturbation theory*. Nuclear Physics, 62(2):188–198, Feb. 1965.
- [68] T. Xu, T. Scaffidi, and X. Cao. *Does Scrambling Equal Chaos?* Phys. Rev. Lett., 124:140602, Apr. 2020.
- [69] S. Pilatowsky-Cameo, J. Chávez-Carlos, M. A. Bastarrachea-Magnani, P. Stránský, S. Lerma-Hernández, L. F. Santos, and J. G. Hirsh. *Positive quantum Lyapunov exponents in experimental systems with a regular classical limit*. Phys. Rev. E, 101:010202, Jan. 2020.
- [70] W. A. Schwalm. *Lectures on Selected Topics in Mathematical Physics: Elliptic Functions and Elliptic Integrals*. IOP Concise Physics. Morgan & Claypool Publishers, San Rafael CA, 2015.
- [71] C. W. Lai, N. Y. Kim, S. Utsunomiya, G. Roumpos, H. Deng, M. D. Fraser, T. Byrnes, P. Recher, N. Kumada, T. Fujisawa, and Y. Yamamoto. *Coherent zero-state and π -state in an exciton-polariton condensate array*. Nature (London), 450(7169):529–532, Nov. 2007.
- [72] R. Balili, V. Hartwell, D. Snoke, L. Pfeiffer, and K. West. *Bose-Einstein Condensation of Microcavity Polaritons in a Trap*. Science, 316(5827):1007–1010, May 2007.
- [73] J. J. Baumberg, A. V. Kavokin, S. Christopoulos, A. J. D. Grundy, R. Butté, G. Christmann, D. D. Solnyshkov, G. Malpuech, G. Baldassarri Höger von Högersthal, E. Feltin, J.-F. Carlin, and N. Grandjean. *Spontaneous Polarization Buildup in a Room-Temperature Polariton Laser*. Phys. Rev. Lett., 101:136409, Sep. 2008.

- [74] J. Levrat, R. Butté, T. Christian, M. Glauser, E. Feltin, J.-F. Carlin, N. Grandjean, D. Read, A. V. Kavokin, and Y. G. Rubo. *Pinning and Depinning of the Polarization of Exciton-Polariton Condensates at Room Temperature*. Phys. Rev. Lett., 104:166402, Apr. 2010.
- [75] F. P. Laussy, I. A. Shelykh, G. Malpuech, and A. Kavokin. *Effects of Bose-Einstein condensation of exciton polaritons in microcavities on the polarization of emitted light*. Phys. Rev. B, 73:035315, Jan. 2006.
- [76] I. A. Shelykh, Y. G. Rubo, G. Malpuech, D. D. Solnyshkov, and A. Kavokin. *Polarization and Propagation of Polariton Condensates*. Phys. Rev. Lett., 97:066402, Aug. 2006.
- [77] J. Kasprzak, R. André, L. S. Dang, I. A. Shelykh, A. V. Kavokin, Y. G. Rubo, K. V. Kavokin, and G. Malpuech. *Build up and pinning of linear polarization in the Bose condensates of exciton polaritons*. Phys. Rev. B, 75:045326, Jan. 2007.
- [78] M. D. Martín, L. Viña, J. K. Son, and E. E. Mendez. *Spin dynamics of cavity polaritons*. Solid State Communications, 117(4):267–271, Jan. 2001.
- [79] M. D. Martín, G. Aichmayr, L. Viña, and R. André. *Polarization Control of the Nonlinear Emission of Semiconductor Microcavities*. Phys. Rev. Lett., 89:077402, July 2002.
- [80] P. G. Lagoudakis, P. G. Savvidis, J. J. Baumberg, D. M. Whittaker, P. R. Eastham, M. S. Skolnick, and J. S. Roberts. *Stimulated spin dynamics of polaritons in semiconductor microcavities*. Phys. Rev. B, 65:161310, Apr. 2002.
- [81] G. Roumpos, C.-W. Lai, T. C. H. Liew, Y. G. Rubo, A. V. Kavokin, and Y. Yamamoto. *Signature of the microcavity exciton-polariton relaxation mechanism in the polarization of emitted light*. Phys. Rev. B, 79:195310, May 2009.
- [82] R. Cerna, Y. Léger, T. K. Paraïso, M. Wouters, F. Morier-Genoud, M. T. Portella-Oberli, and B. Deveaud. *Ultrafast tristable spin memory of a coherent polariton gas*. Nature Communications, 4:2008, June 2013.
- [83] A. Askitopoulos, H. Ohadi, A. V. Kavokin, Z. Hatzopoulos, P. G. Savvidis, and P. G. Lagoudakis. *Polariton condensation in an optically induced two-dimensional potential*. Phys. Rev. B, 88:041308, July 2013.
- [84] P. Cristofolini, A. Dreismann, G. Christmann, G. Franchetti, N. G. Berloff, P. Tsotsis, Z. Hatzopoulos, P. G. Savvidis, and J. J. Baumberg. *Optical Superfluid Phase Transitions and Trapping of Polariton Condensates*. Phys. Rev. Lett., 110:186403, May 2013.

- [85] H. Ohadi, A. Dreismann, Y. G. Rubo, F. Pinski, Y. del Valle-Inclan Redondo, S. I. Tsintzos, Z. Hatzopoulos, P. G. Savvidis, and J. J. Baumberg. *Spontaneous Spin Bifurcations and Ferromagnetic Phase Transitions in a Spinor Exciton-Polariton Condensate*. Phys. Rev. X, 5:031002, July 2015.
- [86] L. Pickup, K. Kalinin, A. Askitopoulos, Z. Hatzopoulos, P. G. Savvidis, N. G. Berloff, and P. G. Lagoudakis. *Optical Bistability under Nonresonant Excitation in Spinor Polariton Condensates*. Phys. Rev. Lett., 120:225301, May 2018.
- [87] Y. del Valle-Inclan Redondo, H. Sigurdsson, H. Ohadi, I. A. Shelykh, Y. G. Rubo, Z. Hatzopoulos, P. G. Savvidis, and J. J. Baumberg. *Observation of inversion, hysteresis, and collapse of spin in optically trapped polariton condensates*. Phys. Rev. B, 99:165311, Apr. 2019.
- [88] M. Wouters. *Synchronized and desynchronized phases of coupled nonequilibrium exciton-polariton condensates*. Phys. Rev. B, 77:121302, Mar. 2008.
- [89] P. R. Eastham. *Mode locking and mode competition in a nonequilibrium solid-state condensate*. Phys. Rev. B, 78:035319, July 2008.
- [90] N. S. Voronova and Y. E. Lozovik. *Internal Josephson phenomena in a coupled two-component Bose condensate*. Superlattices and Microstructures, 87:12–18, Nov. 2015.
- [91] A. Rahmani and F. P. Laussy. *Polaritonic Rabi and Josephson Oscillations*. Scientific Reports, 6:28930, July 2016. Article.
- [92] H. Saito and R. Kanamoto. *Self-rotation and synchronization in exciton-polariton condensates*. Phys. Rev. B, 94:165306, Oct. 2016.
- [93] T. Zibold, E. Nicklas, C. Gross, and M. K. Oberthaler. *Classical Bifurcation at the Transition from Rabi to Josephson Dynamics*. Phys. Rev. Lett., 105:204101, Nov. 2010.
- [94] F. Bello and P. R. Eastham. *Localization and self-trapping in driven-dissipative polariton condensates*. Phys. Rev. B, 95:245312, June 2017.
- [95] I. L. Aleiner, B. L. Altshuler, and Y. G. Rubo. *Radiative coupling and weak lasing of exciton-polariton condensates*. Phys. Rev. B, 85:121301, Mar. 2012.
- [96] K. Rayanov, B. L. Altshuler, Y. G. Rubo, and S. Flach. *Frequency Combs with Weakly Lasing Exciton-Polariton Condensates*. Phys. Rev. Lett., 114:193901, May 2015.

- [97] S. Khan and H. E. Türeci. *Frequency Combs in a Lumped-Element Josephson-Junction Circuit*. Phys. Rev. Lett., 120:153601, Apr. 2018.
- [98] C. Lledó, T. K. Mavrogordatos, and M. H. Szymańska. *Driven Bose-Hubbard dimer under nonlocal dissipation: A bistable time crystal*. Phys. Rev. B, 100:054303, Aug. 2019.
- [99] K. Seibold, R. Rota, and V. Savona. *Dissipative time crystal in an asymmetric nonlinear photonic dimer*. Physical Review A, 101(3), Mar. 2020.
- [100] E. N. Lorenz. *Deterministic Nonperiodic Flow*. Journal of the Atmospheric Sciences, 20(2):130–141, Mar. 1963.
- [101] O. E. Rössler. *An equation for continuous chaos*. Physics Letters A, 57(5):397–398, 1976.
- [102] N. V. Alexeeva, I. V. Barashenkov, K. Rayanov, and S. Flach. *Actively coupled optical waveguides*. Phys. Rev. A, 89:013848, Jan. 2014.
- [103] D. D. Solnyshkov, R. Johne, I. A. Shelykh, and G. Malpuech. *Chaotic Josephson oscillations of exciton-polaritons and their applications*. Phys. Rev. B, 80:235303, Dec. 2009.
- [104] S. S. Gavrilov. *Towards spin turbulence of light: Spontaneous disorder and chaos in cavity-polariton systems*. Phys. Rev. B, 94:195310, Nov. 2016.
- [105] N. G. Berloff, M. Silva, K. Kalinin, A. Askitopoulos, J. D. Töpfer, P. Cilibrizzi, W. Langbein, and P. G. Lagoudakis. *Realizing the classical XY Hamiltonian in polariton simulators*. Nature Materials, 16:1120, Sep. 2017.
- [106] P. G. Lagoudakis and N. G. Berloff. *A polariton graph simulator*. New Journal of Physics, 19(12):125008, Dec. 2017.
- [107] K. P. Kalinin and N. G. Berloff. *Simulating Ising and n-State Planar Potts Models and External Fields with Nonequilibrium Condensates*. Phys. Rev. Lett., 121:235302, Dec. 2018.
- [108] S. H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Westview Press, Boulder, CO, second edition, 2015.
- [109] M. Sciamanna and K. Panajotov. *Route to polarization switching induced by optical injection in vertical-cavity surface-emitting lasers*. Phys. Rev. A, 73:023811, Feb. 2006.

- [110] M. Sciamanna, K. Panajotov, I. Gatara, H. Thienpont, A. Valle, M. Arizaleta, and A. Uchida. *Chaotic polarization dynamics and chaos synchronization in VCSELS*. In *2009 IEEE/LEOS Winter Topicals Meeting Series*, pages 116–117, Jan 2009.
- [111] T. R. Raddo, K. Panajotov, B.-H. V. Borges, and M. Virte. *Strain induced polarization chaos in a solitary VCSEL*. *Scientific Reports*, 7(1):14032, Oct. 2017.
- [112] M. Virte and F. Ferranti. *Chaos in Solitary VCSELS: Exploring the Parameter Space With Advanced Sampling*. *J. Lightwave Technol.*, 36(9):1601–1607, May 2018.
- [113] S. Kim, Y. G. Rubo, T. C. H. Liew, S. Brodbeck, C. Schneider, S. Höfling, and H. Deng. *Emergence of microfrequency comb via limit cycles in dissipatively coupled condensates*. *Phys. Rev. B*, 101:085302, Feb. 2020.
- [114] H. Ohadi, Y. del Valle-Inclan Redondo, A. Dreismann, Y. G. Rubo, F. Pinsker, S. I. Tsintzos, Z. Hatzopoulos, P. G. Savvidis, and J. J. Baumberg. *Tunable Magnetic Alignment between Trapped Exciton-Polariton Condensates*. *Phys. Rev. Lett.*, 116:106403, Mar. 2016.
- [115] M. O. Borgh, J. Keeling, and N. G. Berloff. *Spatial pattern formation and polarization dynamics of a nonequilibrium spinor polariton condensate*. *Phys. Rev. B*, 81:235302, June 2010.
- [116] T. C. H. Liew, O. A. Egorov, M. Matuszewski, O. Kyriienko, X. Ma, and E. A. Ostrovskaya. *Instability-induced formation and nonequilibrium dynamics of phase defects in polariton condensates*. *Phys. Rev. B*, 91:085413, Feb. 2015.
- [117] F. T. Arecchi, R. Badii, and A. Politi. *Generalized multistability and noise-induced jumps in a nonlinear dynamical system*. *Phys. Rev. A*, 32:402–408, July 1985.
- [118] U. Feudel. *Complex Dynamics in Multistable Systems*. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 18(6):1607–1626, 2008.
- [119] A. Politi. *Lyapunov exponent*. *Scholarpedia*, 8(3):2722, 2013.
- [120] T. S. Parker and L. Chua. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer New York, 2011.
- [121] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano. *Determining Lyapunov exponents from a time series*. *Physica D*, 16(3):285–317, July 1985.

- [122] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, and J. M. Strelcyn. *Lyapunov Characteristic Exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems: a method for computing all of them. Part 1: Theory*. Meccanica, 15:9–20, Mar. 1980.
- [123] E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, New York, 2 edition, 2002.
- [124] R. M. May. *Simple mathematical models with very complicated dynamics*. Nature, 261(5560):459–467, June 1976.
- [125] P. C. Müller. *Calculation of Lyapunov exponents for dynamic systems with discontinuities*. Chaos, Solitons & Fractals, 5:1671–1681, Sep. 1995.
- [126] J. Frøyland and K. H. Alfsen. *Lyapunov-exponent spectra for the Lorenz model*. Phys. Rev. A, 29:2928–2931, May 1984.