



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

Fórmula para series de Euler-Chow de sumas directas de haces proyectivos

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

ELADIO ESCOBEDO TRUJILLO

TUTOR:

Dr. E. Javier Elizondo Huerta
Instituto de Matemáticas

Ciudad Universitaria, Ciudad de México. Noviembre 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Dedicado a
mis padres*

Agradecimientos

Agradezco el apoyo del proyecto PAPIIT IN102418.

Resumen

Las variedades de Chow han sido de gran interés para los matemáticos durante que se definieron. Sin embargo, no se sabe mucho sobre ellas. El trabajo de H. Blain Lawson ha conseguido un progreso en el tema y ha tenido varias implicaciones en el área. Pero muchos otros detalles de estas variedades son aún desconocidos.

En este trabajo estamos interesados en calcular las que han sido llamadas las *series de Euler-Chow*. Originalmente, estas series aparecieron como una manera de calcular la característica de Euler, pero después comenzó a haber un interés en sus propiedades que mostraron que éstas pueden tener un rol mucho más importante del que se creía. El primer ejemplo fue dado por Blaine Lawson y S.S.T. Yau (ver [LY87]). En este caso la serie fue una serie formal de potencias cuyos coeficientes eran las características de Euler de las variedades de Chow en el n espacio proyectivo.

En el mismo sentido, las series fueron formalizadas y calculadas para todas las dimensiones de variedades tóricas proyectivas simpliciales en un artículo en Compositio de Elizondo (ver [Eli94]). La racionalidad de las series fue probada y calculada directamente del abanico asociado a la variedad tórica.

En el artículo de Elizondo y Lima-Filho (see [EL98]), se observa que si el grupo de Picard de una variedad proyectiva es isomorfo a los números enteros entonces las series son las series de Hilbert. De cierto modo esta la generaliza. Hay otra observación interesante hecha que comienza mostrando que las series de alguna forma generalizan otras series de interés en geometría algebraica.

Elizondo y K. Kimura ([EK12]) dan la versión motivica: en lugar de tomar la característica de Euler como coeficientes de las series, ellos toman el motivo puro de las variedades de Chow. Estas series generalizan, para dimensión cero, las series Zeta de Weil y otras series importantes que fueron estudiadas, como la estudiada por Kapranov.

En este trabajo se muestran como resultados nuevos el cálculo de las series para superficies regladas y rollos racionales normales. Como damos una función generadora explícita para las series, estamos calculando la característica

de Euler de las variedades de Chow de estas variedades. Ésta es la primera vez que las series son calculadas en codimensión uno donde el grupo de Picard no es discreto. Como sea, el cálculo muestra que las series tienen un buen comportamiento, las fórmulas que se obtienen son bastante naturales si se comparan con los casos previos, como los de las superficies de Hirzebruch.

Primero, daremos una definición para las series de Euler-Chow. Sea X una variedad proyectiva, y sea M el monoide homológico algebraico en $H_{2p}(X, \mathcal{Z})$. Sea $C_\lambda(X)$ la variedad de Chow de todos los ciclos efectivos con clase de homología λ . Definimos la serie homológica de Euler-Chow como:

$$E_p(X) = \sum_{\lambda \in M} \chi(C_\lambda(X)) \cdot t^\lambda \quad (1)$$

Tenemos que $E_p(X)$ es una función de M a \mathcal{Z} , enviando λ a $\chi(C_\lambda)$, en otros trabajos esto da un anillo monoidal $\mathcal{Z}[M] := \mathcal{Z}^M$.

Las superficies regladas y los rollos racionales normales se definen como la proyectivización de cierto haz vectorial. Nosotros deseamos expresar la serie del espacio total en términos de las series de Euler-Chow de los haces involucrados. Para hacerlo, se necesita escribir la definición de la serie en un modo más general y definir productos de series en diferentes anillos. Esto se hace en el capítulo 3 siguiendo el artículo de Elizondo y Lima-Filho [EL98]. Podemos decir que esta es la versión algebraica de la versión homológica de la serie definida arriba en (1). La versión algebraica de la serie toma la suma sobre las componentes conexas por trayectorias del monoide de p -ciclos efectivos sobre X . En este trabajo las series de Euler-Chow serán la versión algebraica que aparece en la definición 2.0.13.

La sección 3.1 está dedicada a calcular y probar el siguiente teorema.

Teorema 0.0.1. *Sea X una superficie reglada sobre una curva C , entonces sus series de Euler-Chow están dadas por:*

$$E_0(X) = \left(\frac{1}{1-t} \right)^{\chi(X)} = \left(\frac{1}{1-t} \right)^{4-4g},$$

$$E_1(X) = \left(\frac{1}{1-t_0} \right)^{2-2g} \left(\frac{1}{1-t_1} \right) \left(\frac{1}{1-t_0^{-e}t_1} \right),$$

$$E_2(X) = \frac{1}{1-t}.$$

La sección 3.2 está dedicada a probar una fórmula que expresa las series de Euler-Chow de la proyectivización de una suma finita de haces vectoriales sobre una variedad en términos de las series de Euler-Chow de productos de

estos haces vectoriales y las series de Euler-Chow de cada haz vectorial. La terminología y detalles técnicos son dados ahí. El teorema principal es:

Teorema 0.0.2. *Sean E_1, E_2 y E_3 haces vectoriales sobre una variedad proyectiva compleja W , de rangos e_1, e_2 y e_3 , respectivamente, con $2 \leq p \leq e_1 + e_2 + e_3 - 1$. Entonces la p -ésima serie de Euler-Chow de $\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3)$ está dada por:*

$$E_p(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3)) = \Psi_{p\#} \left(\begin{array}{l} E_{p-2}(\mathbb{P}(E_1) \times_W \mathbb{P}(E_2) \times_W \mathbb{P}(E_3)) \odot E_{p-1}(\mathbb{P}(E_1) \times_W \mathbb{P}(E_2)) \\ \odot E_{p-1}(\mathbb{P}(E_1) \times_W \mathbb{P}(E_3)) \odot E_{p-1}(\mathbb{P}(E_2) \times_W \mathbb{P}(E_3)) \\ \odot E_p(\mathbb{P}(E_1)) \odot E_p(\mathbb{P}(E_2)) \odot E_p(\mathbb{P}(E_3)) \end{array} \right).$$

Donde el producto \odot está definido en la definición 2.0.6. La generalización de este teorema para una suma finita se sigue directamente y lo escribimos abajo en el teorema 3.2.3 en la página 37.

La sección 3.2.1 está dedicada a calcular las series de Euler-Chow para rollos racionales normales. Nuestro resultado principal es el corolario en la página 39. Al final calculamos un ejemplo explícito.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| Resumen | V |
| 1. Conocimientos previos | 1 |
| 1.1. Grassmannianas complejas | 1 |
| 1.1.1. Coordenadas afines | 2 |
| 1.1.2. Coordenadas de Stiefel | 2 |
| 1.1.3. Coordenadas de Plücker | 3 |
| 1.1.4. Relaciones de Plücker | 5 |
| 1.1.5. El anillo de coordenadas de la Grassmanniana | 7 |
| 1.2. Hipersuperficies asociadas | 8 |
| 1.2.1. Hipersuperficies en Grassmannianas | 8 |
| 1.2.2. Hipersuperficies asociadas y formas de Chow | 10 |
| 1.2.3. Recuperando X de $\mathcal{Z}(X)$ | 12 |
| 1.3. Variedades de Chow | 13 |
| 1.3.1. Definiciones y principales propiedades | 13 |
| 1.4. Ejemplos de variedades de Chow | 15 |
| 1.5. Cero ciclos | 17 |
| 1.6. Superficies regladas | 19 |
| 2. Series de Euler-Chow | 21 |
| 3. Resultados | 29 |
| 3.1. Series de Euler-Chow de superficies regladas | 29 |
| 3.1.1. Superficies regladas descomponibles | 29 |
| 3.1.2. Superficies regladas no descomponibles | 31 |
| 3.2. Fórmulas para haces proyectivos | 33 |
| 3.2.1. Fórmula para series de Euler-Chow de rollos racionales normales | 38 |
| A. Superficies regladas | 41 |

Capítulo 1

Conocimientos previos

1.1. Grassmannianas complejas

La variedad de Grassmann (o Grassmanniana) $G(k, n)$ es el conjunto de todos los subespacios vectoriales de dimensión k en \mathbb{C}^n , donde \mathbb{C} es el campo de números complejos. Para $k = 1$, se trata del espacio proyectivo \mathbb{P}^{n-1} . Como los subespacios vectoriales en \mathbb{C}^n corresponden a subespacios proyectivos en \mathbb{P}^{n-1} , tenemos que $G(k, n)$ parametriza los subespacios proyectivos de dimensión $k - 1$ en \mathbb{P}^{n-1} . También se puede comenzar con un espacio vectorial de dimensión finita V y construir la Grassmanniana $G(k, V)$ de subespacios vectoriales de dimensión k en V .

El primer ejemplo de una Grassmanniana distinta a los espacios proyectivos es $G(2, 4)$, la variedad de todas las rectas en el espacio proyectivo \mathbb{P}^3 . Es fácil ver que una recta en el 3-espacio depende de 4 parámetros. Por ejemplo, se puede elegir algún 2-plano fijo y asociar a una recta genérica su punto de intersección con éste (2 parámetros) y la dirección en el punto de intersección (otros 2 parámetros). Así $G(2, 4)$ es una variedad 4-dimensional.

A continuación se verán de forma resumida los tipos de coordenadas que se usan para representar los puntos de una Grassmanniana. Para los puntos en el espacio proyectivo \mathbb{P}^{n-1} , hay dos tipos de coordenadas:

1. las coordenadas afines (x_1, \dots, x_{n-1}) en una carta afín $\mathbb{C}^{n-1} \subset \mathbb{P}^{n-1}$;
2. las coordenadas homogéneas $(x_1 : \dots : x_n)$ definidas salvo un múltiplo constante no nulo en común.

En las Grassmannianas estos dos tipos de coordenadas se generalizan en tres tipos: las coordenadas afines, las coordenadas de Stiefel y las coordenadas de Plücker. Las coordenadas de Stiefel y las de Plücker son dos diferentes análogos a las coordenadas homogéneas en el espacio proyectivo.

1.1.1. Coordenadas afines

Elegimos una descomposición de \mathbb{C}^n en suma directa, $\mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^{n-k}$, de subespacios coordenados. Sea $A : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^{n-k}$ una transformación lineal. Entonces su gráfica es un subespacio de dimensión k en \mathbb{C}^n . El conjunto U de subespacios que se pueden obtener de esta forma es un subconjunto abierto, de la Grassmanniana, isomorfo al espacio afín $\text{Hom}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^{n-k})$. Así todo punto de U se puede determinar por una matriz $\|a_{ij}\|$ de $k \times (n-k)$. Eligiendo varias descomposiciones de \mathbb{C}^n , podemos cubrir $G(k, n)$ con espacios afines. Es fácil ver que las funciones de transición entre estas cartas afines tienen funciones racionales como componentes. Así hemos definido una estructura de variedad algebraica sobre $G(k, n)$. La dimensión de $G(k, n)$ coincide con la dimensión del espacio de matrices de $k \times (n-k)$, es decir, es igual a $k(n-k)$. En un espacio proyectivo se obtienen las coordenadas afines usuales en $\mathbb{C}^{n-1} \subset \mathbb{P}^{n-1}$.

Ejemplo 1.1.1. Considérese la Grassmanniana $G(2, 4)$ como la variedad de rectas en \mathbb{P}^3 y sean (x, y, z) las coordenadas afines en $\mathbb{C}^3 \subset \mathbb{P}^3$. Usando coordenadas afines en $G(2, 4)$ se puede describir una recta en \mathbb{C}^3 por dos ecuaciones, $y = a_{11}x + a_{12}$ y $z = a_{21}x + a_{22}$.

1.1.2. Coordenadas de Stiefel

Sea $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base de un subespacio vectorial $L \subset \mathbb{C}^n$ de dimensión k . Considérese la matriz de $k \times n$ formada por las coordenadas de los vectores v_i como filas:

$$M = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & \cdots & v_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{k1} & \cdots & \cdots & v_{kn} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Ésta es una matriz de rango total k . Dada una matriz M de $k \times n$ de rango total, se le puede asociar el subespacio $L(M)$ generado por las filas de M . Las entradas de la matriz v_{ij} son llamadas las *coordenadas de Stiefel* de L .

Para el caso $k = 1$, obtenemos la representación de puntos de \mathbb{P}^{n-1} usando coordenadas homogéneas. Al igual que las coordenadas homogéneas, las coordenadas de Stiefel no son únicas. De hecho, podemos cambiar M por gM donde g es una matriz no degenerada de $k \times k$ (el análogo de un factor constante no nulo para coordenadas homogéneas usuales). Esto nos llevará a otra elección de base en L . Sea $S(k, n)$ la *variedad de Stiefel* de todas las matrices complejas de $k \times n$ de rango total. Entonces la Grassmanniana $G(k, n)$ es el cociente

$$G(k, n) = S(k, n)/GL(k), \quad (1.2)$$

generalizando así la representación del espacio proyectivo \mathbb{P}^{n-1} como el cociente $(\mathbb{C}^n - \{0\})/\mathbb{C}^*$. Aquí $\mathbb{C}^n - \{0\}$ es $S(n, 1)$ y \mathbb{C}^* es $GL(1)$.

La relación entre las coordenadas de Stiefel y las coordenadas afines es la siguiente. Sea $M \subset S(k, n)$ y sea g la matriz de $k \times k$ formada por las primeras k columnas de M . Si g es no degenerada entonces podemos transformar M por la acción de $GL(k)$ a la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1,n-k} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2,n-k} \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{k1} & \cdots & \cdots & a_{k,n-k} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

donde $\|a_{ij}\|$ es una matriz de $k \times (n - k)$. Esta última matriz será la matriz de coordenadas afines del subespacio $L(M)$.

1.1.3. Coordenadas de Plücker

Las coordenadas de Plücker de $G(k, n)$ dan otro análogo de las coordenadas homogéneas de un espacio proyectivo. Éstas están definidas salvo factor escalar común no nulo. Para construirlas, consideramos el encaje clásico de Plücker

$$G(k, n) \hookrightarrow \mathbb{P} \left(\bigwedge^k \mathbb{C}^n \right),$$

el cual envía un subespacio $L \subset \mathbb{C}^n$ al subespacio uno-dimensional $\bigwedge^k L \subset \bigwedge^k \mathbb{C}^n$. Esto da un encaje proyectivo explícito de $G(k, n)$ la cual, hasta ahora, se ha construido sólo como una variedad algebraica “abstracta”.

Las coordenadas x_1, \dots, x_n en \mathbb{C}^n inducen las coordenadas en $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ denotadas por p_{i_1, \dots, i_k} , $i_1 < \dots < i_k$ y llamadas las coordenadas de Plücker. Así, todo subespacio $L \subset \mathbb{C}^n$ de dimensión k tiene una colección de coordenadas de Plücker $p_{i_1, \dots, i_k}(L)$ definidas de forma única salvo múltiplo común no cero. El número de coordenadas de Plücker es $\binom{n}{k}$ que es mayor a la dimensión de la Grassmanniana. Esto significa que, en contraste al caso de las coordenadas homogéneas en el espacio proyectivo, las coordenadas de Plücker en $G(k, n)$ *no son independientes*, es decir, están sujetas a ciertas relaciones.

La relación entre las coordenadas de Plücker y las de Stiefel es la siguiente. Sea L un subespacio vectorial de dimensión k en \mathbb{C}^n dado por su matriz $\|v_{ij}\|$ de $k \times n$ de coordenadas de Stiefel. Por definición, la coordenada de

Plücker $p_{i_1, \dots, i_k}(L)$ es el menor máximo de $\|v_{ij}\|$ formado por las columnas i_1, i_2, \dots, i_k . Si reemplazamos $\|v_{ij}\|$ por $\|w_{ij}\| = g\|v_{ij}\|$ con $g \in GL(k)$ entonces cada menor máximo de $\|w_{ij}\|$ se obtiene del menor correspondiente en $\|v_{ij}\|$ multiplicándolo por el escalar $\det(g)$.

Supóngase que M tiene la forma (1.3). Entonces el menor $p_{i_1, \dots, i_k}(M)$ es igual (salvo un signo) a un menor adecuado de la matriz “chica” $A = \|a_{ij}\|$. Más precisamente, sea $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ el conjunto de columnas de nuestro menor de M . Este conjunto se descompone en una unión disjunta $I = J \cup K$ donde $J = \{i_1, \dots, i_l\}$ es el conjunto de columnas de I que están en la matriz unitaria en 1.3 (es decir, $J = I \cap \{1, \dots, k\}$) y K es el conjunto de las demás columnas. Hacemos $s(J) = (i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \dots + (i_l - l)$. Con esta notación tenemos el siguiente resultado inmediato.

Proposición 1.1.2. *El menor $p_{i_1, \dots, i_k}(M)$ de una matriz M de la forma 1.3 es igual a $(-1)^{s(J)}$ veces el menor de la matriz $A = \|a_{ij}\|$ dado por el conjunto de filas $\{1, \dots, k\} - J$ y el conjunto de columnas K (el menor vacío se define como igual a 1).*

En otras palabras, la colección de todas las coordenadas de Plücker da, cuando se escriben en términos de las coordenadas afines, la colección de todos los menores (de todos los tamaños, incluyendo el menor vacío) de una matriz de $k \times (n - k)$ indeterminada.

Sean V y V^* espacios vectoriales duales de dimensión n . Entonces $G(k, V)$ se identifica naturalmente con $G(n - k, V^*)$. La identificación toma un subespacio vectorial $L \in G(k, n)$ a su complemento ortogonal $L^\perp \in G(n - k, V^*)$. Así podemos ver a $G(k, V)$, también, como la variedad de subespacios vectoriales de *codimensión* k en \mathbb{C}^n . En correspondencia, tenemos otra forma de asociar las coordenadas de Plücker a puntos de $G(k, n)$. Denotamos estas nuevas coordenadas con $q_{j_1, \dots, j_{n-k}}$. Si un subespacio L está dado por $(n - k)$ ecuaciones lineales $f_1 = 0, \dots, f_{n-k} = 0$ y $f_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_j f_{ij}x_j$ entonces $q_{j_1, \dots, j_{n-k}}$ es el menor máximo de la matriz

$$\begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & \cdots & f_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n-k,1} & \cdots & \cdots & f_{n-k,n} \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

correspondiente a las columnas con números j_1, \dots, j_{n-k} . Por cálculos elementales con determinantes, vemos que

$$q_{j_1, \dots, j_{n-k}} = (-1)^{s(i_1, \dots, i_k)} p_{i_1, \dots, i_k},$$

donde i_1, \dots, i_k son todos los elementos del complemento de $\{j_1, \dots, j_{n-k}\}$ tomados en orden creciente y $s(i_1, \dots, i_k)$ es el signo de la permutación

$(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k})$. Así los dos conjuntos de coordenadas de Plücker de $G(k, n)$ son esencialmente equivalentes.

1.1.4. Relaciones de Plücker

Como se mencionó, el número de coordenadas de Plücker p_{i_1, \dots, i_k} es mayor a la dimensión de $G(k, n)$, por lo que estas están sujetas a ciertas relaciones. Estas relaciones son llamadas *las relaciones de Plücker*. Para escribirlas, es conveniente suponer que p_{i_1, \dots, i_k} está definida por una sucesión (i_1, \dots, i_k) de enteros distintos entre 1 y n de forma que la transposición de cualquier dos índices cambia el signo de p_{i_1, \dots, i_k} (así efectivamente tenemos el mismo número de coordenadas). Con esta notación las relaciones son las siguientes.

Teorema 1.1.3. *1. Para cualquier dos sucesiones $1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n$ y $1 \leq j_1 < \dots < j_{k+1} \leq n$, las coordenadas de Plücker de $G(k, n)$ satisfacen la relación*

$$\sum_{a=1}^{k+1} (-1)^a p_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, j_a} p_{j_1, j_2, \dots, \hat{j}_a, \dots, j_{k+1}} = 0 \quad (1.5)$$

(aquí el símbolo \hat{j}_a significa que el índice j_a se ha omitido). Todo vector $(p_{i_1, \dots, i_k}) \in \bigwedge^k \mathbb{C}^n$ que cumple tales relaciones es un vector de las coordenadas de Plücker de algún subespacio vectorial $L \in G(k, n)$.

2. Además, el ideal graduado de todos los polinomios en p_{i_1, \dots, i_k} que se anulan en la imagen de $G(k, n)$ está generado por el lado izquierdo de las relaciones de Plücker.

Ejemplo 1.1.4. La Grassmanniana $G(2, 4)$, que parametriza rectas en \mathbb{P}^3 , tiene dimensión 4, y está encajada por el encaje de Plücker en \mathbb{P}^5 . Hay seis coordenadas de Plücker p_{ij} , $1 \leq i < j \leq 4$ sujetas a una relación

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Así que $G(2, 4)$ es una cuádrica en \mathbb{P}^5 . En términos de la matriz de coordenadas afines $A = \|a_{ij}\|$, $i, j = 1, 2$, las coordenadas de Plücker son los siguientes polinomios en las a_{ij} :

$$p_{12} = 1, \quad p_{34} = \det(A), \quad p_{13} = a_{21}, \quad p_{24} = -a_{12}, \quad p_{14} = a_{22}, \quad p_{23} = -a_{11}.$$

La relación de Plücker es la identidad $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Nótese que, en general, la primera parte del Teorema 1.1.3 se puede ver, tras pasar a coordenadas afines, como probar las condiciones necesarias y suficientes para que la colección de los Δ_{IJ} , definidos para todos los pares de subconjuntos $I \subset \{1, \dots, k\}$, $J \subset \{1, \dots, n-k\}$, $\#(I) = \#(J)$, estén representados por menores de una matriz de $k \times (n-k)$. Las entradas de esta matriz se pueden dar por menores de 1×1 , Δ_{ij} , en la colección. Así, una solución obvia requerirá que cada Δ_{IJ} sea igual al determinante de la matriz de Δ_{ij} , $i \in I$, $j \in J$. Estas ecuaciones no son cuadráticas. La posibilidad de reemplazarlas por un sistema de ecuaciones cuadráticas viene de considerar no sólo menores de 1×1 y de $k \times k$, sino de todos los tamaños.

Finalizamos la discusión de las relaciones de Plücker describiéndolas en una forma más invariante. Denótese $V = \mathbb{C}^n$ y sean e_1, \dots, e_n la base estándar de V . Una colección (p_{i_1, \dots, i_k}) representa un punto L de $G(k, n)$ si y sólo si el k -vector

$$R = \sum_{i_1 < \dots < i_k} p_{i_1, \dots, i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \in \bigwedge^k V$$

es *descomponible*, i.e., tiene la forma $R = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$, $v_i \in V$ (en cuyo caso, las v_i forman una base de L). Por lo que el problema de encontrar las relaciones entre los p_{i_1, \dots, i_k} es equivalente a encontrar condiciones para que un k -vector R sea descomponible.

Consideramos, para cualquier forma lineal $l \in V^*$, el operador de contracción

$$i_l : \bigwedge^j V \rightarrow \bigwedge^{j-1} V \quad (1.6)$$

Claramente $i_{l_1} i_{l_2} = -i_{l_2} i_{l_1}$ para cualesquiera $i_{l_1}, i_{l_2} \in V^*$. Para todo $\Omega \in \bigwedge^p V^*$, definimos el operador $i_\Omega : \bigwedge^j V \rightarrow \bigwedge^{j-p} V$ de contracción con Ω , haciendo

$$i_{l_1 \wedge \dots \wedge l_p} = i_{l_1} \circ \dots \circ i_{l_p} \quad (1.7)$$

para un $\Omega = l_1 \wedge \dots \wedge l_p$ descomponible, y extendiendo por linealidad a todo Ω . En particular, si $p = j$ entonces, para $R \in \bigwedge^j V$, el elemento $i_\Omega R$ es un número denotado por $\langle \Omega, R \rangle$. Este es el par canónico entre $\bigwedge^j V^*$ y $\bigwedge^j V$. Ahora, una versión libre de coordenadas de las relaciones de Plücker es la siguiente.

Teorema 1.1.5. *Un k -vector $R \in \bigwedge^k V$ es descomponible si y sólo si, para cualquier $\Omega \in \bigwedge^{k-1} V^*$ se tiene*

$$(i_\Omega R) \wedge R = 0 \text{ en } \bigwedge^{k+1} V. \quad (1.8)$$

Es inmediato ver la equivalencia de la primera parte del teorema 1.1.3 y el 1.1.5. De aquí, la elección de i_1, \dots, i_{k-1} en el teorema 1.1.3 nos lleva a una elección de Ω en la forma $e'_{i_1} \wedge \dots \wedge e'_{i_{k-1}}$ donde $e'_i \in V^*$ son elementos de la base dual a $\{e_1, \dots, e_n\}$. Una elección de j_1, \dots, j_{k+1} da una elección de una función coordenada sobre $\bigwedge^{k+1} V$ correspondiente al vector base $e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{k+1}}$. Evaluando esta coordenada de $(i_\Omega R) \wedge R$ para $R = (p_{j_1, \dots, j_k}) \in \bigwedge^k V$, obtenemos el lado izquierdo de 1.5.

1.1.5. El anillo de coordenadas de la Grassmanniana

Sea $\mathcal{B} = \bigoplus_d \mathcal{B}_d$ el anillo de coordenadas homogéneas de $G(k, n)$ en el encaje de Plücker. En otras palabras, \mathcal{B} es el cociente del anillo de polinomios $\mathbb{C}[p_{i_1, \dots, i_k}]$ por el ideal generado por las relaciones (1.5), y \mathcal{B}_d es la parte homogénea de grado d . Los generadores p_{i_1, \dots, i_k} de \mathcal{B} son algunas veces denotados $[i_1, \dots, i_k]$ y son llamados *brackets*. Así todo elemento de \mathcal{B} se puede representar como un *polinomio bracket*, i.e., un polinomio en $[i_1, \dots, i_k]$. Una representación tal es, de hecho, no única por las relaciones de Plücker. Sea $\tilde{G}(k, n) \subset \bigwedge^k \mathbb{C}^n$ el cono sobre la Grassmanniana en el encaje de Plücker que consiste en los k -vectores que son descomponibles; que es, ellos tienen la forma $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$. Cualquier elemento de \mathcal{B} se puede considerar como una función regular sobre $\tilde{G}(k, n)$.

Hemos definido el anillo \mathcal{B} y sus componentes homogéneos \mathcal{B}_d usando el encaje de Plücker (y de aquí las coordenadas de Plücker). Los otros dos tipos de coordenadas dan dos descripciones diferentes de \mathcal{B} y \mathcal{B}_d .

La siguiente caracterización de \mathcal{B}_d en términos de las coordenadas de Stiefel y afines siguen de (2) y de la proposición (1.1.2). Esto algunas veces se denomina *el primer teorema fundamental de teoría invariante*.

Proposición 1.1.6. 1. *El espacio \mathcal{B}_d está naturalmente identificado con el espacio de polinomios f en las entradas de una matriz de $(k \times n)$ indeterminada $M = \|v_{ij}\|$ de coordenadas de Stiefel que satisfacen la condición*

$$f(gM) = \det(g)^d f(M) \quad (1.9)$$

para toda matriz $g \in GL(k)$. La multiplicación en el anillo \mathcal{B} corresponde a la multiplicación usual de polinomios.

2. *El espacio \mathcal{B}_d está naturalmente identificado con el espacio de polinomios en las entradas de una matriz de $k \times (n - k)$ indeterminada (de coordenadas afines) $A = \|a_{ij}\|$ generadas por d -tuplas de productos de menores de A de todos los tamaños (incluyendo el menor vacío 1).*

El grupo $GL(n)$ actúa sobre la Grassmanniana $G(k, n)$ y de aquí sobre su anillo de coordenadas \mathcal{B} . Se sabe, [FH91], que la representación de $GL(n)$ en cada \mathcal{B}_d es irreducible. Bajo la parametrización usual de representaciones polinomiales irreducibles de $GL(n)$ por diagramas de Young, esta representación corresponde al diagrama con k filas de longitud d .

1.2. Hipersuperficies asociadas

La Grassmanniana $G(k, n)$ se puede ver como la variedad que parametriza subespacios proyectivos $(k-1)$ -dimensionales en \mathbb{P}^{n-1} , i.e., las subvariedades $(k-1)$ -dimensionales de grado 1. En esta sección se discutirá el problema de construir variedades de un grado mayor que parametrizan subvariedades $(k-1)$ -dimensionales en \mathbb{P}^{n-1} . La aproximación a este problema, iniciada por Cayley [Ca5] y llevada en el caso general por Chow y van der Waerden [C-vdW], comienza de la observación que para subvariedades de codimensión 1, el problema se resuelve fácilmente; si $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ es una hipersuperficie de grado d , entonces se puede considerar su ecuación, que es un polinomio homogéneo de grado d , definido de forma única salvo un factor constante. En otras palabras, el espacio de hipersuperficies de grado d se puede identificar con el espacio proyectivo que es la proyectivización del espacio de polinomios homogéneos de grado d .

La correspondencia uno a uno entre hipersuperficies y sus ecuaciones se cumple no sólo para espacios proyectivos, pero esencialmente para toda variedad con un entindimiento propio de lo que es una “ecuación”. La idea ahora es asociar a toda subvariedad irreducible X en \mathbb{P}^{n-1} una hipersuperficie $\mathcal{Z}(X)$ en una cierta Grassmanniana de la cual X se puede recobrar.

Comenzamos con una discusión de hipersuperficies en Grassmannianas y sus ecuaciones.

1.2.1. Hipersuperficies en Grassmannianas

Dada una hipersuperficie en un espacio proyectivo, su grado se puede definir como el número de puntos donde interseca a una recta genérica. El análogo de rectas en $G(k, n)$ está dado por la siguiente familia de encajes \mathbb{P}^1 . Sea $N \subset M \subset \mathbb{P}^{n-1}$ una bandera formada por subespacios proyectivos $(k-2)$ -dimensionales y k -dimensionales. Todos los subespacios proyectivos $(k-1)$ -dimensionales que contienen a N y contenidos en M forman una familia unidimensional (*pencil*) $\mathbb{P}_{NM} \cong \mathbb{P}^1$. Definimos el *grado* de una hipersuperficie $Z \subset G(k, n)$ como el número de intersección de Z con un pencil genérico de la forma \mathbb{P}_{NM} .

En general, no es verdad que una hipersuperficie en una variedad proyectiva se puede dar por la anulaci3n de un elemento de su anillo de coordenadas (toma la variedad en cuesti3n para ser la curva plana y la hipersuperficie para ser un punto). Como sea, este es el caso para Grassmannianas.

Sea $\mathcal{B} = \bigoplus \mathcal{B}_d$ el anillo de coordenadas de $G(k, n)$ en el encaje de Pl3cker.

Proposici3n 1.2.1. 1. *El anillo \mathcal{B} es factorial, i.e., cada $f \in \mathcal{B}$ tiene una descomposici3n en factores irreducibles que son 3nicos salvo m3ltiplos constantes y permutaciones de estos factores.*

2. *Sea Z una hipersuperficie irreducible en $G(k, n)$ de grado d . Entonces hay un elemento $f \in \mathcal{B}_d$ definido salvo un factor constante tal que Z est1 dado por la ecuaci3n $f = 0$.*

Demostraci3n. La factorialidad de \mathcal{B} se sigue de la proposici3n 1.1.6 y de la factorialidad del anillo de polinomios $\mathbb{C}[v_{ij}]$. De aqu3, todo factor de un polinomio de \mathcal{B} debe estar en \mathcal{B} . De forma similar, si Z es una hipersuperficie en $G(k, n)$, la levantamos a una hipersuperficie \tilde{Z} en el espacio de matrices y tomamos el polinomio irreducible $f(v_{ij})$ que define a \tilde{Z} .

Como antes, denotamos por M la matriz de las variables v_{ij} . Como \tilde{Z} es $GL(k)$ -invariante, el polinomio $f(gM)$ para toda $g \in GL(k)$ es un m3ltiplo escalar no cero de $f(M)$, i.e., $f(gM) = \chi(g)f(M)$. La funci3n $\chi(g)$ es multiplicativa: $\chi(g_1g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2)$, i.e., esto es un caracter de $GL(k)$. Cualquier funci3n tal es una potencia del determinante: $\chi(g) = \det(g)^{d'}$ para alguna d' . Por la proposici3n 1.1.6, f define un elemento irreducible de $\mathcal{B}_{d'}$.

Falta probar que d' coincide con d , el grado de Z definido arriba. Para hacer esto, n3tese que la igualdad $f(gM) = \det(g)^{d'}f(M)$ significa que f es una secci3n de la gavilla invertible $\mathcal{O}_{G(k,n)}(d')$ (restringido del espacio proyectivo del encaje de Pl3cker). Afirmamos que la restricci3n de cualquier $\mathcal{O}_{G(k,n)}(l)$ a cualquier pencil $\mathbb{P}_{NM} \cong \mathbb{P}^1 \subset G(k, n)$ es isomorfo a $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(l)$. Esto implicar1 que $d' = d = \deg Z$ pues la secci3n f de $\mathcal{O}_{G(k,n)}(d')$ tendr1 exactamente d' ceros en \mathbb{P}_{NM} . Para justificar nuestra afirmaci3n, es suficiente considerar el caso $l = 1$, pues $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(l + l') \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(l) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(l')$, y de forma similar para $\mathcal{O}_{G(k,n)}(l + l')$. Para tratar el caso $l = 1$, basta con tomar una secci3n no nula $\varphi \in H^0(G(k, n), \mathcal{O}(1))$ y mostrar que tiene exactamente un cero sobre un pencil gen3rico \mathbb{P}_{NM} . Tomamos φ como un s3lo bracket en \mathcal{B} , digamos $[1, \dots, k]$. La hipersuperficie correspondiente consta de subespacios proyectivos $(k - 1)$ -dimensionales que intersecan la expansi3n proyectiva de los vectores base e_{k+1}, \dots, e_n . Un pencil gen3rico P_{NM} contiene precisamente un subespacio proyectivo $(k - 1)$ -dimensional que pertenece a esta hipersuperficie. Esto completa la demostraci3n. \square

1.2.2. Hipersuperficies asociadas y formas de Chow

Sea $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ una subvariedad irreducible de dimensión $k-1$ y grado d . Considérese el conjunto $\mathcal{Z}(X)$ de todos los subespacios proyectivos, L , $(n-k-1)$ -dimensionales en \mathbb{P}^{n-1} que intersecan a X . Éste es una subvariedad en la Grassmanniana $G(n-k, n)$ que parametriza todos los subespacios proyectivos $(n-k-1)$ -dimensionales en \mathbb{P}^n .

Proposición 1.2.2. *La subvariedad $\mathcal{Z}(X)$ es una hipersuperficie irreducible de grado d en $G(n-k, n)$.*

Demostración. La variedad $\mathcal{Z}(X)$ está incluida en el diagrama (fibración doble)

$$\mathcal{Z}(X) \xleftarrow{q} B(X) \xrightarrow{p} X \quad (1.10)$$

donde $B(X)$ es la variedad de pares (x, L) tales que $x \in X$, $L \in G(n-k, n)$ y $x \in L$. Las proyecciones q y p están dadas por olvidar a x o a L . Por razones de dimensión, un subespacio proyectivo genérico $(n-k-1)$ -dimensional que interseca a X , lo hace en un sólo punto. Por lo tanto q es un morfismo birracional. La proyección p es una fibración Grassmanniana: la fibra de p en $x \in X$ es isomorfa a la Grassmanniana $G(n-k-1, n-1)$. Así, si X es irreducible entonces también lo es $B(X)$ y de aquí $\mathcal{Z}(X)$. Además se tiene

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{Z}(X) = \dim B(X) &= (n-k-1)k + (k-1) = k(n-k) - 1 \\ &= \dim G(n-k, n) - 1. \end{aligned}$$

Para encontrar el grado de $\mathcal{Z}(X) \subset G(n-k, n)$, debemos, de acuerdo a la definición, elegir una bandera genérica $N \subset M \subset \mathbb{P}^{n-1}$ de subespacios proyectivos tales que $\dim N = n-k-2$, $\dim M = n-k$, y contar el número de subespacios $(n-k-1)$ -dimensionales $L \in \mathcal{Z}(X)$ que cumplen $N \subset L \subset M$. Pero como $\deg(X) = d$, la intersección $M \cap X$ constará genéricamente de d puntos, digamos, x_1, \dots, x_d . Los subespacios $L \in \mathcal{Z}(X)$ que contienen a N y que están contenidos en M serán expansiones proyectivas de N y x_i . Entonces su número es igual a d , como se requiere. Esto prueba la proposición. \square

Llamaremos a $\mathcal{Z}(X)$ la *hipersuperficie asociada* de X .

Sea $\mathcal{B} = \bigoplus \mathcal{B}_m$ el anillo de coordenadas de la Grassmanniana $G(n-k, n)$. Por la proposición 1.1.2, $\mathcal{Z}(X)$ está definida como los ceros de algún elemento $R_X \in \mathcal{B}_d$ que es único salvo por un factor constante. Este elemento será llamado la *forma de Chow* de X . Eligiendo alguna base en \mathcal{B}_d , asociamos a X la colección de coordenadas de R_X en esta base, definidas salvo un factor constante común. Estas coordenadas serán llamadas las *coordenadas de Chow*

de X . Veremos que X puede recuperarse de sus coordenadas de Chow, esto es, del vector R_X .

Los tres tipos de coordenadas sobre Grassmannianas dan tres formas diferentes de escribir los elementos del anillo de coordenadas, en particular, la forma de Chow de una subvariedad.

La aproximación con las coordenadas de Plücker lleva a escribir R_X como un polinomio bracket. Las coordenadas de Plücker en $G(n-k, n)$ están etiquetadas por subconjuntos de $n-k$ elementos de $\{1, \dots, n\}$ y denotados por brackets $[i_1, \dots, i_{n-k}]$. Algunas veces es útil usar las coordenadas de Plücker duales $[j_1, \dots, j_k]$, donde $\{j_1, \dots, j_k\}$ son el complemento de $[i_1, \dots, i_{n-k}]$ en $\{1, \dots, n\}$.

Las coordenadas de Stiefel representan un subespacio $(n-k)$ -dimensional en \mathbb{C}^n como el conjunto de ceros de k funcionales lineales $l_1(x), \dots, l_k(x)$, donde $l_i(x) = \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j$. El espacio de k -tuplas de funcionales lineales tales puede verse como el espacio $Mat(k, n)$ de matrices $\|c_{ij}\|$. El subconjunto abierto $S(k, n) \subset Mat(k, n)$, que consiste de matrices de rango completo, es fibrado sobre la Grassmanniana $G(n-k, n)$, ver la fórmula 2 arriba. Considérese el levantamiento de la hipersuperficie asociada $\mathcal{Z}(X)$ a $S(k, n)$ y su cerradura $\tilde{\mathcal{Z}}(X)$ en el espacio afín $Mat(k, n)$. Así, $\tilde{\mathcal{Z}}(X)$ es la subvariedad de (f_1, \dots, f_k) tales que

$$X \cap \{f_1 = \dots = f_k = 0\} \neq \emptyset. \quad (1.11)$$

Como $\mathcal{Z}(X)$ es una hipersuperficie, se sigue que $\tilde{\mathcal{Z}}(X)$ es también una hipersuperficie. El polinomio que define a $\tilde{\mathcal{Z}}(X)$ es un polinomio homogéneo $\tilde{R}_X(f_1, \dots, f_k)$. Llamamos a \tilde{R}_X el X -resultante pues sus ceros expresan la compatibilidad del sistema A.0.4. Es claro que \tilde{R}_X es sólo otra forma de escribir la forma de Chow R_X . Más precisamente, \tilde{R}_X es el polinomio en c_{ij} que corresponde a $R_X \in \mathcal{B}_d$ bajo el isomorfismo de la proposición 1.1.6. Así, para obtener \tilde{R}_X , necesitamos reemplazar cada bracket $[j_1, \dots, j_k]$ en la representación bracket (dual) de R_X por un polinomio $\det \|c_{ij\nu}\|$, $i, \nu = 1, \dots, k$. El X -resultante \tilde{R}_X tiene la ventaja de ser un polinomio explícito en las variables c_{ij} , y no sólo un elemento de algún espacio vectorial “abstracto”.

Para escribir la forma de Chow (o X -resultante) en términos de coordenadas afines, asumimos que la matriz de coeficientes $\|c_{ij}\|$ de un sistema de formas lineales f_1, \dots, f_k que definen un subespacio, tiene la forma 1.3. En otras palabras, fijamos $c_{ij} = \delta_{ij}$ para $1 \leq i, j \leq k$. De esta forma asociamos a una subvariedad X un polinomio no homogéneo en las entradas de una matriz indeterminada de $k \times (n-k)$.

Ahora se darán algunos ejemplos de hipersuperficies asociadas y formas de Chow.

Ejemplo 1.2.3. 1. Sea X una curva en \mathbb{P}^3 . Su hipersuperficie asociada es la variedad de todas las rectas que intersecan a X .

2. Cuando X es una hipersuperficie en \mathbb{P}^{n-1} , la Grassmanniana $G(n-k, n)$ coincide con \mathbb{P}^{n-1} y la hipersuperficie asociada $\mathcal{Z}(X)$ coincide con X .
3. Cuando X es un punto p , entonces $G(n-k, n)$ es el espacio proyectivo dual $(\mathbb{P}^{n-1})^*$ y $\mathcal{Z}(X)$ es el hiperplano dual a p .
4. Cuando X es un subespacio proyectivo, la variedad $\mathcal{Z}(X)$ es conocida como el *divisor de Schubert* en $G(n-k, n)$. Podemos suponer (después de un cambio lineal de coordenadas) que las ecuaciones lineales de X son $x_1 = 0, \dots, x_{n-k} = 0$ donde x_1, \dots, x_n son las funciones coordenadas de \mathbb{P}^{n-1} . Entonces la variedad asociada está dada por los ceros del bracket (coordenada de Plücker) $[1, \dots, n-k] \in \mathcal{B}_1$.

Ejemplo 1.2.4. Sea X el subespacio proyectivo $\mathbb{P}^{k-1} = \mathbb{P}(\mathbb{C}^k)$, encajado en $\mathbb{P}(S^d \mathbb{C}^k) = \mathbb{P}^{n-1}$ por el encaje de Veronese. Aquí $n = \binom{k+d-1}{d}$ es el número de todos los monomios en k variables de grado d . Una forma lineal sobre \mathbb{P}^{n-1} cuando se restringe a \mathbb{P}^{k-1} da un polinomio homogéneo de grado d . Así, el X -resultante \tilde{R}_X es una función de coeficientes de k polinomios indeterminados $f_1(t), \dots, f_k(t)$ de grado d , donde $t = (t_1, \dots, t_k)$. Los ceros de \tilde{R}_X son los puntos en que los polinomios f_i tienen un cero común no trivial. Por lo tanto \tilde{R}_X coincide con el resultante clásico de k polinomios homogéneos de grado d en k variables. Esto explica la terminología.

1.2.3. Recuperando X de $\mathcal{Z}(X)$

Proposición 1.2.5. *Una subvariedad irreducible $(k-1)$ -dimensional $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ está determinada de forma única por su hipersuperficie asociada $\mathcal{Z}(X)$. Más precisamente, un punto $p \in \mathbb{P}^{n-1}$ está en X si y sólo si todo plano $(n-k-1)$ -dimensional que contiene a p pertenece a $\mathcal{Z}(X)$.*

La demostración es obvia.

Como en el caso de variedades proyectivas duales, la variedad X es recuperada como una especie de “variedad cáustica” de $\mathcal{Z}(X)$. La proposición de arriba aclara que X puede recuperarse de su forma de Chow o, equivalentemente, de los coeficientes del X -resultante $\tilde{R}_X(f_1, \dots, f_k)$. Esto se puede hacer explícitamente como sigue. Sea $x \in \mathbb{P}^{n-1}$ un punto y sea $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ un vector cuya proyectivización es x . Representaremos los hiperplanos que pasan por x como las proyectivizaciones de los complementos ortogonales

$$\mathbf{x}_S^\perp = \{\mathbf{y} : S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}$$

donde $S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es una forma semi-simétrica sobre \mathbb{C}^n . Denotaremos la forma lineal $\mathbf{y} \mapsto S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ con $i_{\mathbf{x}}S$.

Corolario 1.2.6. *Sea $X^{k-1} \subset \mathbb{P}^{n-1}$ una subvariedad irreducible y $\tilde{R}_X(f_1, \dots, f_k)$ el X -resultante. Ahora consideremos k formas semi-simétricas indeterminadas $S_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \dots, S_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ definidas por $S_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j,r} s_{jr}^{(i)} x_j y_r$, donde $\|s_{jr}^{(i)}\|$ para cada i es una matriz semi-simétrica de variables independientes. Para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, considérese el siguiente polinomio en coeficientes $(s_{jr}^{(i)})$ de todas las formas S_i :*

$$P(\mathbf{x}, (s_{jr}^{(i)})) = \tilde{R}_X(i_{\mathbf{x}}(S_1), \dots, i_{\mathbf{x}}(S_k)).$$

Entonces los coeficientes de P (con respecto a las variables $s_{jr}^{(i)}$) son polinomios en \mathbf{x} que forman un sistema de ecuaciones para la variedad X . En otras palabras, los ceros de estos polinomios definen a X como conjunto.

Este corolario (gracias a Chow y van der Waerden) da un sistema canónico de ecuaciones para cada variedad irreducible X de grado d . Todas estas ecuaciones tienen grado d , con un número usualmente más grande que la codimensión de X . F. Catanese [Cat] mostró que, para X suave, este sistema canónico de ecuaciones define X no sólo como conjunto, sino como esquema. En otras palabras, el *subesquema* en \mathbb{P}^{n-1} , definido por estas ecuaciones, coincide con X (considerado como esquema en una forma estándar). Algebraicamente, esto significa que el ideal homogéneo en $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, formado por los polinomios que se anulan sobre X , coincide con el ideal homogéneo generado por las ecuaciones canónicas salvo por un número finito de componentes graduadas.

1.3. Variedades de Chow

1.3.1. Definiciones y principales propiedades

La variedad Grassmanniana $G(k, n)$ parametriza subespacios proyectivos $(k-1)$ -dimensionales en \mathbb{P}^{n-1} . Los subespacios proyectivos son sólo subvariedades algebraicas de grado 1. Es natural buscar espacios que parametrizen subvariedades de un grado dado $d \geq 1$. Aquí, en cualquier caso, se encuentra un nuevo fenómeno. A saber, una variedad irreducible se puede degenerar en una reducible (por ejemplo, una curva se puede degenerar en una colección de rectas). Además, considerese una variedad reducible, digamos, una unión de

dos rectas distintas. Una variedad tal se puede degenerar en una sólo recta, lo que aparentemente tiene un grado menor. De hecho, en estos casos es natural contar la recta límite con multiplicidad 2. Para tomar en cuenta todas estas posibilidades, se necesita la noción de ciclo algebraico.

Ciclos algebraicos

Un ciclo algebraico $(k-1)$ -dimensional en \mathbb{P}^{n-1} es una combinación lineal finita $X = \sum m_i X_i$, cuyos coeficientes son enteros no negativos, y las X_i son subvariedades cerradas irreducibles $(k-1)$ -dimensionales en \mathbb{P}^{n-1} . El grado de un ciclo X tal se define como $\deg(X) = \sum m_i \deg(X_i)$.

Sea $\mathcal{C}_{k-1,d}(\mathbb{P}^{n-1})$ el conjunto de todos los ciclos algebraicos $(k-1)$ -dimensionales en \mathbb{P}^{n-1} de grado d . En [GKZ94] se utiliza la notación $G(k, d, n)$ sugiriendo una analogía con las Grassmannianas. De hecho, $\mathcal{C}_{k-1,1}(\mathbb{P}^{n-1})$ ($G(k, 1, n)$) coincide con la Grassmanniana $G(k, n)$ pues cualquier ciclo algebraico de grado 1 es dado siempre por un subespacio proyectivo con multiplicidad 1. Se quiere dar una estructura de variedad algebraica a $\mathcal{C}_{k-1,d}(\mathbb{P}^{n-1})$, generalizando el caso de las Grassmannianas. De los tres tipos de coordenadas que existen para las Grassmannianas, sólo uno se extiende al caso general de $\mathcal{C}_{k-1,d}(\mathbb{P}^{n-1})$, a saber las coordenadas de Plücker. Esto se hace como sigue.

Recuérdese que, para cualquier subvariedad $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ irreducible $(k-1)$ -dimensional, se definió su forma de Chow (o X -resultante) R_X . Ésta es un polinomio $R_X(f_1, \dots, f_k)$, con coeficientes de k formas lineales indeterminadas sobre \mathbb{C}^n , que se anula donde el subespacio proyectivo $\{f_1 = \dots = f_k = 0\}$ de \mathbb{P}^{n-1} interseca a X . El polinomio R_X tiene una propiedad de homogeneidad obvia: si $g = (g_{ij})$ es una matriz en $GL(k)$, se tiene que

$$\begin{aligned} R_X(g_{11}f_1 + \dots + g_{1k}f_k, \dots, g_{k1}f_1 + \dots + g_{kk}f_k) \\ = \det(g)^d R_X(f_1, \dots, f_k) \end{aligned} \quad (1.12)$$

donde $d = \deg X$. El espacio de polinomios con esta propiedad es denotado por \mathcal{B}_d .

Sea $X = \sum m_i X_i$ un ciclo algebraico $(k-1)$ -dimensional en \mathbb{P}^{n-1} de grado d . Se define la forma de Chow de X como

$$R_X = \prod R_{X_i}^{m_i} \in \mathcal{B}_d.$$

Las coordenadas del vector R_X son llamadas *coordenadas de Chow* de X . El resultado principal es un teorema de Chow y van der Waerden.

Teorema 1.3.1. *La aplicación $X \mapsto R_X$ define un encaje de $\mathcal{C}_{k-1,d}(\mathbb{P}^{n-1})$ en el espacio proyectivo $\mathbb{P}(\mathcal{B}_d)$ como una variedad algebraica cerrada.*

La variedad $\mathcal{C}_{k-1,d}(\mathbb{P}^{n-1})$ con la estructura algebraica definida por el encaje de arriba es llamada el encaje de Chow. Para una demostración de este teorema ver [GKZ94], p. 126.

1.4. Ejemplos de variedades de Chow

Ejemplo 1.4.1. 1. La variedad de Chow $\mathcal{C}_{k-1,1}(\mathbb{P}^{n-1})$ es la Grassmanniana $G(k, n)$ y su encaje de Chow coincide con el encaje de Plücker.

2. Considerese la variedad de Chow $\mathcal{C}_{n-2,d}(\mathbb{P}^{n-1})$, que parametriza ciclos de grado d y codimensión 1 en \mathbb{P}^{n-1} , que son hipersuperficies. Se vio en el Ejemplo 1.2.3 que la forma de Chow de una hipersuperficie irreducible es sólo su ecuación, la cual es un polinomio homogéneo irreducible de grado d en n variables. Los ciclos algebraicos de codimensión 1 corresponden a todos los polinomios homogéneos no nulos, irreducibles o no, de grado d . Por lo tanto, la variedad de Chow $\mathcal{C}_{n-2,d}(\mathbb{P}^{n-1})$ es el espacio proyectivo de tales polinomios, i. e.

$$\mathcal{C}_{n-2,d}(\mathbb{P}^{n-1}) = \mathbb{P}^{N-1} \text{ donde } N = \binom{n+d-1}{d}.$$

Ejemplo 1.4.2. Considerese $\mathcal{C}_{1,2}(\mathbb{P}^3)$. Así se están considerando curvas de grado 2 en \mathbb{P}^3 . Hay dos casos, una curva irreducible o dos rectas. Una curva de grado 2 debe ser una cuádrica plana, por Bézout. Esto implica que $\mathcal{C}_{1,2}(\mathbb{P}^3)$ tiene dos componentes irreducibles C y D que corresponden a cuádricas planas y a pares de rectas. $C \cap D$ consta de pares de rectas coplanas. Ahora, $\dim D = 8$ pues una recta en \mathbb{P}^3 depende de cuatro parámetros. Lo que es interesante es que en variedades de Chow $\dim C = 8$. Esto es fácil de ver pues un plano necesita tres parámetros, y una cuádrica en un plano necesita cinco parámetros.

Ejemplo 1.4.3. Este ejemplo es $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$ que parametriza ciclos 1-dimensionales en \mathbb{P}^3 de grado 3. Las curvas posibles para estos ciclos son:

1. una curva irreducible de grado 3; aquí hay dos posibles elecciones (ver [Har75b], IV.6), una curva torcida o una cúbica plana;
2. una recta y una cuádrica plana;
3. tres rectas.

Una cúbica torcida es una curva que puede modificarse por una transformación proyectiva de \mathbb{P}^3 a la curva estándar de Veronese dada en coordenadas homogéneas por

$$\{(x_0^3 : x_0^2x_1 : x_0x_1^2 : x_1^3) | (x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1\}. \quad (1.13)$$

Si se denota con C_1, C_2, C_3, C_4 a las subvariedades de $\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3)$ que parametrizan curvas torcidas, cúbicas planas, una recta y una cuádrlica plana, y tres rectas, entonces se tiene que

$$\mathcal{C}_{1,3}(\mathbb{P}^3) = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4.$$

La dimensión de C_4 es 12, pues una recta depende de cuatro parámetros. La dimensión de C_3 es también 12; ver el ejemplo anterior. La dimensión de C_1 es también 12. Para ver esto, obsérvese que todas las cúbicas torcidas son imágenes de una cúbica torcida particular, ver ecuación 1.13, bajo transformaciones proyectivas. El estabilizador de la curva en 1.13 es el grupo $PGL(2)$ de transformaciones proyectivas de \mathbb{P}^1 encajadas en $PGL(4)$ vía la aplicación

$$GL(2) = GL(\mathbb{C}^2) \hookrightarrow GL(4) = GL(S^3\mathbb{C}^2)$$

por la correspondencia

$$g \mapsto S^3g$$

donde $S^3\mathbb{C}^2$ es el espacio de todos los polinomios homogéneos de grado d en dos variables. De aquí, $C_1 = PGL(4)/PGL(2)$, y su dimensión es igual a $15 - 3 = 12$.

Para C_2 , la dimensión es dada por el número de parámetros que definen un plano, el cual es tres, más la dimensión del espacio de cúbicas en un plano, la cual es nueve, por lo tanto, $\dim C_2 = 12$.

Se está tentado a conjeturar que todas las componentes de la variedad $\mathcal{C}_{1,d}(\mathbb{P}^3)$ tienen dimensión $4d$. Pero, está este ejemplo.

Ejemplo 1.4.4. Considérese la variedad de Chow $\mathcal{C}_{1,4}(\mathbb{P}^3)$ de ciclos 1-dimensionales en \mathbb{P}^3 de grado 4. Esta variedad tiene varias componentes que corresponden a las posibilidades en que puede ocurrir un ciclo de grado 4:

1. una curva irreducible de grado 4;
2. una cúbica y una recta;
3. dos curvas cuádrlicas;

4. una curva cuádrica y dos rectas;
5. cuatro rectas.

De los ejemplos previos es razonablemente claro que todas las componentes en los casos 2 – 5 tienen dimensión 16. Así, sólo queda concentrarse en la primera componente, que se denominará C . Esta variedad también tiene componentes irreducibles, curvas irreducibles de grado 4 que pueden escribirse de tres formas distintas (ver [Har75b], IV.6), a saber:

1. una cuártica plana;
2. una curva racional de grado 4;
3. una curva elíptica espacial de grado 4.

La última es la intersección de dos superficies cuádricas. Sean C_1, C_2, C_3 las componentes correspondientes a 1, 2, 3. C_2 y C_3 tienen dimensión 16. Como sea, el número de parámetros que definen un plano es tres, más la dimensión del espacio de cuárticas en un plano dado, que es 14. Por lo tanto $\dim C_1 = 17$.

Eisenbud y Harris han calculado la dimensión de la variedad de Chow de curvas [EH92]. Un estudiante de Harris, Pablo Azcue, calculó en su tesis doctoral la dimensión de variedades de Chow en dimensiones mayores. En ambos casos hay un número reducido de variedades de Chow (de grado chico) que no pueden ser consideradas por sus cálculos.

1.5. Cero ciclos

Un 0-ciclo positivo de grado d es sólo una colección no ordenada $\{x_1, \dots, x_d\}$ de d puntos (no necesariamente distintos) en \mathbb{P}^{n-1} . De modo que el conjunto $\mathcal{C}_{0,d}(\mathbb{P}^{n-1})$ es identificado con $Sym^d(\mathbb{P}^{n-1})$, el producto simétrico de d copias de \mathbb{P}^{n-1} . Entonces comenzamos con una comparación de las dimensiones de $\mathcal{C}_{0,d}(\mathbb{P}^{n-1})$ y $Sym^d(\mathbb{P}^{n-1})$.

Supóngase que nuestro espacio proyectivo \mathbb{P}^{n-1} es $\mathbb{P}(V)$ donde V es un espacio vectorial n -dimensional. La forma de Chow de un punto $x \in \mathbb{P}(V)$ es la funcional lineal l_x en V^* dada por el producto escalar con x :

$$l_x(\xi) = (x, \xi).$$

Si $X = \sum m_i x_i$ es un 0-ciclo positivo en $\mathbb{P}(V)$ entonces, por nuestra convención, la forma de Chow R_X es el polinomio $\xi \mapsto \prod l_{x_i}^{m_i}(\xi)$. Se ha llegado a lo siguiente.

Proposición 1.5.1. *La variedad de Chow $\mathcal{C}_{0,d}(\mathbb{P}^{n-1})$ de 0-ciclos positivos en \mathbb{P}^{n-1} de grado d es la proyectivización del espacio de polinomios homogéneos de grado d en n variables que son producto de formas lineales.*

El conjunto Y de polinomios descomponibles (en factores lineales) de grado d fue usado varias veces a lo largo de la demostración del teorema de Chow-van der Waerden. Nótese que este conjunto tiene, como su análogo “alternante”, al conjunto de polivectores de $\bigwedge^d \mathbb{C}^n$ que son descomponibles en productos wedge de d vectores. La proyectivización del conjunto de polivectores descomponibles es, como se vio en la Sección 1.4, nada más que la Grassmanniana $G(d, n)$ en su encaje de Plücker. Entonces la variedad de 0-ciclos es el análogo “simétrico” de la Grassmanniana.

Ahora se recordará la definición de producto simétrico. Sea X una variedad algebraica cuasi-proyectiva. El producto simétrico $Sym^d(X)$ es el cociente del producto cartesiano X^d por la acción del grupo simétrico S_d permutando los factores. Una definición más precisa es la siguiente.

Supóngase primero que X es una variedad afín y R es su anillo coordenado. Entonces $R^{\otimes d} = R \otimes \cdots \otimes R$ es el anillo coordenado de X^d . El anillo coordenado de $Sym^d(X)$ es, por definición, el subanillo de S_d -invariantes en $R^{\otimes d}$. En otras palabras, éste es el anillo de funciones regulares $f(x_1, \dots, x_d)$, de d variables $x_i \in X$, que son simétricas, i. e. invariantes bajo cualquier permutación de las x_i .

Si X es una variedad cuasi-proyectiva arbitraria, no necesariamente afín, entonces el producto simétrico $Sym^d(X)$ está definido por pegar variedades afines $Sym^d(U)$ para varios subconjuntos abiertos afines $U \subset X$.

Se sigue de estas definiciones que se tiene un morfismo regular de variedades algebraicas

$$\gamma : Sym^d(\mathbb{P}^{n-1}) \rightarrow \mathcal{C}_{0,d}(\mathbb{P}^{n-1}), \quad \{x_1, \dots, x_d\} \mapsto \sum x_i, \quad (1.14)$$

el cual es una biyección de conjuntos. Nótese que esto no implica automáticamente que γ es un isomorfismo de variedades algebraicas: el morfismo de la recta afín \mathbb{A}^1 a la cúbica $y^2 = x^3$, dado por $x(t) = t^2, y(t) = t^3$, es biyectivo pero no es un isomorfismo, pues la cúbica es singular en $(0, 0)$. Entonces el siguiente hecho requiere de una demostración.

Teorema 1.5.2. *El morfismo $\gamma : Sym^d(\mathbb{P}^{n-1}) \rightarrow \mathcal{C}_{0,d}(\mathbb{P}^{n-1})$ es un isomorfismo de variedades algebraicas (sobre el campo de los números complejos).*

Es importante notar que sobre un campo de característica finita el enunciado no es cierto [Nee91].

Finalmente, se presentan dos resultados más.

Teorema 1.5.3. *El producto simétrico $Sym^d(\mathbb{P}^1) = \mathcal{C}_{0,d}(\mathbb{P}^1)$ es isomorfo a \mathbb{P}^d .*

Teorema 1.5.4. *Para toda d y n , la variedad $Sym^d(\mathbb{P}^{n-1}) = \mathcal{C}_{0,d}(\mathbb{P}^{n-1})$ es racional, i.e. es birracionalmente isomorfa al espacio proyectivo $\mathbb{P}^{d(n-1)}$.*

1.6. Superficies regladas

En esta sección se definirá lo que es una superficie reglada y se enunciarán los resultados necesarios para los cálculos que se realizarán en la última sección. Para profundizar en las superficies regladas se agrega el Anexo A.

Definición 1.6.1. Una superficie geoméricamente reglada, o sólo superficie reglada, es una superficie X junto con un morfismo suprayectivo $\pi : X \rightarrow C$ a una curva (no singular) C , tal que cada fibra $X_y := \pi^{-1}(y)$ es isomorfa a \mathbb{P}^1 para todo punto $y \in C$, y tal que π admite una sección (i.e., un morfismo $\sigma : C \rightarrow X$ tal que $\pi \circ \sigma = id_C$).

Ejemplo 1.6.2. Si C es una curva, entonces $C \times \mathbb{P}^1$ con su primera proyección es una superficie reglada. En particular, la superficie cuadrática en \mathbb{P}^3 es una superficie reglada en dos formas distintas. Cuando se hable de una superficie reglada se supondrá que los datos π y C se conocen.

Proposición 1.6.3. *Si $X \rightarrow C$ es una superficie reglada entonces existe una gavilla \mathcal{E} localmente libre de rango 2 sobre C tal que $X \cong \mathbb{P}(\mathcal{E})$ sobre C . Recíprocamente, todo $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ tal es una superficie reglada sobre C .*

Si \mathcal{E} y \mathcal{E}' son dos gavillas localmente libres de rango 2 sobre C entonces $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ y $\mathbb{P}(\mathcal{E}')$ son isomorfos como superficies regladas sobre C si y sólo si existe una gavilla invertible \mathcal{L} sobre C tal que $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}$.

Proposición 1.6.4. *Sean $\pi : X \rightarrow C$ una superficie reglada, $C_0 \subseteq X$ una sección y f una fibra. Entonces*

$$\text{Pic } X \cong \mathbb{Z} \oplus \pi^* \text{Pic } C,$$

donde \mathbb{Z} es generado por C_0 . También

$$\text{Num } X \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

generados por C_0 y f , y cumpliendo $C_0 \cdot f = 1$, $f^2 = 0$.

Proposición 1.6.5. *Si $\pi : X \rightarrow C$ es una superficie reglada es posible escribir $X \cong \mathbb{P}(\mathcal{E})$, donde \mathcal{E} es una gavilla localmente libre sobre C con la propiedad $H^0(\mathcal{E}) \neq 0$, pero para toda gavilla invertible \mathcal{L} sobre C con $\deg \mathcal{L} < 0$ se tiene $H^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}) = 0$. En este caso el entero $e = -\deg \mathcal{E}$ es un invariante de X . Además en este caso existe una sección $\sigma_0 : C \rightarrow X$ con imagen C_0 , tal que $\mathcal{L}(C_0) = \mathcal{O}_X(1)$.*

Notación 1.6.6. Se usará la siguiente notación. Sean C una curva de género g , y $\pi : X \rightarrow C$ una superficie reglada sobre C . Escribimos $X \cong \mathbb{P}(\mathcal{E})$, donde \mathcal{E} satisface las condiciones de la proposición 1.6.5, en cuyo caso decimos que \mathcal{E} está normalizada. Esto no necesariamente determina a \mathcal{E} de forma única, pero si determina $\deg \mathcal{E}$. Sea \mathbf{e} el divisor sobre C correspondiente a la gavilla invertible $\bigwedge^2 \mathcal{E}$, y denotamos $e = -\deg \mathbf{e}$. Fijamos una sección C_0 de X con $\mathcal{L}(C_0) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$. Si \mathbf{b} es un divisor sobre C , entonces denotamos al divisor $\pi^*\mathbf{b}$ sobre X por $\mathbf{b}f$, por abuso de notación. Así todo elemento de $\text{Pic } X$ puede ser escrito como $aC_0 + \mathbf{b}f$ con $a \in \mathbb{Z}$ y $\mathbf{b} \in \text{Pic } C$. Todo elemento de $\text{Num } X$ puede ser escrito como $aC_0 + bf$ con $a, b \in \mathbb{Z}$.

Proposición 1.6.7. *Si D es cualquier sección de X , la cual corresponde a una aplicación suprayectiva $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0$, y si $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{d})$ sobre C , entonces $\deg \mathbf{d} = C_0.D$, y*

$$D \sim C_0 + (\mathbf{d} + \mathbf{e})f.$$

En particular, tenemos $C_0^2 = \deg \mathbf{e} = -e$.

Teorema 1.6.8. *Sea X una superficie reglada sobre la curva C de género g , determinada por una gavilla localmente libre normalizada \mathcal{E} .*

1. *Si \mathcal{E} se descompone (i.e., es suma directa de dos gavillas invertibles) entonces $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}$ para alguna \mathcal{L} con $\deg \mathcal{L} \leq 0$. Por lo tanto $e \geq 0$. Todos los valores de $e \geq 0$ son posibles.*
2. *Si \mathcal{E} es indescomponible, entonces $-2g \leq e \leq 2g - 2$.*

Además de los resultados para superficies regladas, se obtendrán también resultados para rollos normales racionales, los cuales son, en cierta forma, una generalización de las superficies regladas descomponibles.

Definición 1.6.9. Un rollo normal racional es una variedad proyectiva de la forma $\mathbb{P}(\mathbf{e}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{e}_n)$, donde cada \mathbf{e}_i es un haz lineal sobre \mathbb{P}^1 .

Capítulo 2

Series de Euler-Chow

El uso de invariantes topológicos en espacios moduli ha jugado un rol vital en varias ramas de las matemáticas y física matemática en las últimas tres décadas. Algunos ejemplos de esto incluye la teoría gauge, la teoría de instantones, varios espacios moduli de haces vectoriales, espacios moduli de curvas y sus compactificaciones, variedades de Chow y esquemas de Hilbert.

En esta sección se estudia una clase de invariantes para variedades proyectivas obtenidos de las características de Euler de sus variedades de Chow. Se verá que un bello y elegante carácter se puede codificar en funciones fáciles de generar a partir de estas características de Euler.

Ejemplos básicos

En esta subsección se sigue [EL98]. Como motivación, se comenzará con algunos casos particulares que están bien estudiados en la literatura. Sea X una variedad proyectiva conexa y denotese con $SP(X)$ a la unión disjunta $\coprod_{d \geq 0} SP_d(X)$ de todos los productos simétricos de X , con la topología de la unión disjunta, donde $SP_0(X)$ es un único punto. Se puede definir una función $E_0(X) : \mathbb{Z}_+ = \pi_0(SP(X)) \rightarrow \mathbb{Z}$ que envía d a la característica (topológica) de Euler $\chi(SP_d(X))$ del producto simétrico de d copias de X . Esto es a lo que se le llama la *0-ésima función de Euler-Chow* de X . La misma información puede codificarse en una serie formal de potencias $E_0(X) = \sum_{d \geq 0} \chi(SP_d(X))t^d$, y un resultado de Macdonald [Mac62] muestra que $E_0(X)$ está dada por la función racional $E_0(X) = (1/(1-t))^{\chi(X)}$.

Otro ejemplo familiar se obtiene en el caso de divisores. Dada una variedad proyectiva n -dimensional X , denótese con $Div_+(X)$ al espacio de divisores

efectivos de X y supongase que $Pic^0(X) = \{0\}$. Considerese la función $E : Pic(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ que envía $L \in Pic(X)$ a $\dim H^0(X, \mathcal{O}(L))$. Obsérvese que:

1. dado $L \in Pic(X)$, entonces $E(L) \neq 0$ si y sólo si $L = \mathcal{O}(D)$ para algún divisor efectivo D ;
2. bajo la hipótesis dada, equivalencia algebraica y lineal coinciden, y dos divisores efectivos D y D' son algebraicamente equivalentes si y sólo si están en el mismo sistema lineal.

La última observación implica que $Div_+(X)$ puede escribirse como $Div_+(X) = \coprod_{\alpha \in \mathcal{A}_{n-1}^{\geq}} Div_+(X)_\alpha$, donde \mathcal{A}_{n-1}^{\geq} es el monoide de clases de equivalencia algebraica de divisores efectivos (ver [Ful98, Section 12]), y $Div_+(X)_\alpha$ es el sistema lineal asociado a $\alpha \in \mathcal{A}_{n-1}^{\geq}(X)$. La primera observación muestra que los únicos datos relevantes a E están dados por $\mathcal{A}_{n-1}^{\geq}(X) \subset Pic(X)$. Por lo tanto, se puede restringir E y definir la $(n-1)$ -ésima función de Euler-Chow de X como la función $E_{n-1}(X) : \mathcal{A}_{n-1}^{\geq}(X) \rightarrow \mathbb{Z}_+$ que envía $\alpha \in \mathcal{A}_{n-1}^{\geq}(X)$ a la característica de Euler $\chi(Div_+(X)_\alpha) = \dim H^0(X, \mathcal{O}(L_\alpha))$, donde L_α es el haz lineal asociado a α .

Ejemplo 2.0.1. Un caso aún más restrictivo se obtiene cuando $Pic(X) \simeq \mathbb{Z}$, y $\mathcal{A}_{n-1}^{\geq} \simeq \mathbb{Z}_+$ es generado por la clase de un haz lineal muy amplio L . Entonces la $(n-1)$ -ésima función de Euler-Chow $E_{n-1}(X) = \sum_{d \geq 0} \dim H^0(X, \mathcal{O}(L^{\otimes n}))t^n$ es sólo la *función de Hilbert* asociada al encaje proyectivo de X inducido por L . Ésta es una vez más una función racional.

Definiciones preliminares

Se comenzará con un monoide abeliano M , cuya multiplicación se denotará por $*_M : M \times M \rightarrow M$. Cuando no haya lugar a confusión se usará una notación aditiva $+$: $M \times M \rightarrow M$ sin subíndices. Se dice que M tiene *multiplicación finita* si $*_M$ tiene fibras finitas. Ejemplos típicos son los monoides finitamente generados, como los enteros no negativos \mathbb{Z}_+ con la adición.

Definición 2.0.2. Dado un monoide con multiplicación finita M , y un anillo conmutativo S , denotese por S^M al conjunto de todas las funciones de M a S . Si f y f' son elementos en S^M , sea $f + f' \in S^M$ definida por adición punto a punto, i.e. $(f + f')(m) = f(m) + f'(m)$. Se define el producto $f * f' \in S^M$ como la “convolución”

$$(f * f')(m) = \sum_{a *_M b = m} f(a)f'(b).$$

Es fácil ver que S^M es un anillo conmutativo con unidad, bajo estas operaciones.

Observación 2.0.3. El anillo S^M puede definirse con la completación $S[[M]]$ del álgebra de monoide $S[M]$ en su ideal de aumentación. Por lo tanto, los elementos de S^M pueden escribirse como una serie formal de potencias $f = \sum_{m \in M} s_m \cdot t^m$, sobre variables t^m y coeficientes en S . De esta forma la multiplicación está dada por la relación $t^m t^{m'} = t^{m+m'}$ para elementos $m, m' \in M$.

Definición 2.0.4. Dado un morfismo monoidal $\Psi : M \rightarrow N$, $f \in S^M$ y $g \in S^N$, se definen $\Psi^\# g \in S^M$ y $\Psi_\# f \in S^N$ por

$$(\Psi^\# g)(m) = g(\Psi(m))$$

y

$$(\Psi_\# f)(n) = \sum_{m \in \Psi^{-1}(n)} f(m)$$

si Ψ tiene fibras finitas.

Proposición 2.0.5. Sean M y N monoides con multiplicación finita, y sea $\Psi : M \rightarrow N$ un morfismo de monoides. Entonces

1. La aplicación pull-back $\Psi^\# : S^N \rightarrow S^M$ es un homomorfismo de S -módulos.
2. Si Ψ tiene fibras finitas entonces la aplicación push-forward $\Psi_\# : S^M \rightarrow S^N$ es un morfismo de S -álgebras.
3. Todo homomorfismo de anillos $\Psi : S \rightarrow S'$ induce un homomorfismo de anillos $\Psi_* : S^M \rightarrow S'^M$.

La última operación que se necesita presentar es el siguiente *producto exterior*.

Definición 2.0.6. Dados monoides M y N , y un anillo conmutativo S , se puede definir una aplicación $\odot : S^M \otimes_S S^N \rightarrow S^{M \times N}$. Esta aplicación envía $f \otimes g$ a la función $f \odot g \in S^{M \times N}$ que asigna a (m, n) el elemento $f(m)g(n) \in S$.

Proposición 2.0.7. La operación \odot es bilineal y asociativa. En otras palabras, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
(S^M \otimes_S S^N) \otimes_S S^P & \xrightarrow{\cong} & S^M \otimes_S (S^N \otimes_S S^P) \\
\downarrow \circledast 1 & & \downarrow 1 \circledast \\
S^{M \times N} \otimes_S S^P & & S^M \otimes_S S^{N \times P} \\
\searrow \circledast & & \swarrow \circledast \\
& S^{M \times N \times P} &
\end{array}$$

Definición de las series de Euler-Chow

Sea X una variedad algebraica proyectiva sobre \mathbb{C} , y sea p un entero no negativo tal que $0 \leq p \leq \dim X$. El *monoide de Chow* $\mathcal{C}_p(X)$ de p -ciclos efectivos en X es el monoide libre generado por las subvariedades irreducibles p -dimensionales de X . Es bien sabido que $\mathcal{C}_p(X)$ puede escribirse como una unión disjunta numerable de variedades algebraicas proyectivas $\mathcal{C}_{p,\alpha}(X)$, las también llamadas *variedades de Chow*. Se resumen, en los siguientes enunciados, algunas propiedades básicas de los monoides y variedades de Chow que pueden encontrarse en Hoyt [Hoy66], Friedlander [Fri91], y Friedlander y Mazur [FM91]. Para un estudio reciente y bibliografía extensa sobre el tema, se sugiere al lector a Lawson [Law95].

Propiedades 2.0.8. *Sea X una variedad proyectiva, y fijese $0 \leq p \leq \dim X$.*

1. *La topología de unión disjunta en $\mathcal{C}_p(X)$ inducida por la topología clásica en las variedades de Chow es independiente del encaje proyectivo de X , ver [Hoy66].*
2. *La restricción de la adición de monoide a productos de variedades de Chow es una aplicación algebraica [Fri91].*
3. *Una aplicación algebraica $f : X \rightarrow Y$ entre variedades proyectivas (de aquí una aplicación propia) induce un morfismo natural de monoides $f_* : \mathcal{C}_p(X) \rightarrow \mathcal{C}_p(Y)$ que es una aplicación algebraica continua cuando se restringe a una variedad de Chow, ver [Fri91]. Ésta es la aplicación push-forward propio.*
4. *Una aplicación plana $f : X \rightarrow Y$ de dimensión relativa k induce un morfismo natural de monoides $f^* : \mathcal{C}_p(Y) \rightarrow \mathcal{C}_{p+k}(X)$ que es una aplicación algebraica continua cuando se restringe a una variedad de Chow, ver [Fri91]. Ésta es la aplicación pull-back plano.*

Observación 2.0.9. Como se trabaja sobre \mathbb{C} , puede definirse una *aplicación algebraica continua* como una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ entre

variedades que induce una aplicación algebraica $f^\nu : X^\nu \rightarrow Y^\nu$ entre sus normalizaciones débiles, ver [FM91]. Alternativamente, se pueden definir *variedades de Chow* como la normalización débil de aquellas que se consideran aquí, como en Kollár [Kol96]. Esto no altera su topología, pero transforma las variedades de Chow en un funtor en la categoría de variedades proyectivas y morfismos algebraicos. Esta aproximación puede usarse en este texto, sin alterar los resultados.

- Definición 2.0.10.** 1. Se denota con $\Pi_p(X)$, al monoide $\pi_0(\mathcal{C}_p(X))$ de componentes por trayectorias de $\mathcal{C}_p(X)$. Éste es el monoide de “clases de equivalencia algebraica efectiva” de p -ciclos efectivos en X . Se usa la notación $a \sim_{alg^+} b$ para expresar que dos ciclos efectivos, a y b , son equivalentes algebraica y efectivamente.
2. El grupo de todos los p -ciclos algebraicos en X módulo equivalencia algebraica se denota $\mathcal{A}_p(X)$, y al submonoide de $\mathcal{A}_p(X)$ generado por las clases de ciclos con coeficientes no negativos se le denota con $\mathcal{A}_p^\geq(X)$, ver [Ful98, Section 12]. Se usa la notación $a \sim_{alg} b$ para expresar que dos ciclos a, b son equivalentes algebraicamente.
3. Sea $c : \mathcal{C}_p(X) \rightarrow H_{2p}(X, \mathbb{Z})$ la aplicación de ciclo en homología singular, ver [Ful98, Section 19]. La imagen de c se denota con $M_p(X)$.

El siguiente resultado explica la relación entre los monoides anteriores.

- Proposición 2.0.11.** 1. *El grupo de Grothendieck asociado al monoide $\Pi_p(X)$ es $\mathcal{A}_p(X)$. En particular, hay un morfismo natural de monoides $\iota_p : \Pi_p(X) \rightarrow \mathcal{A}_p(X)$ que satisface la propiedad universal de que todo morfismo de monoides $f : \Pi_p(X) \rightarrow G$, de $\Pi_p(X)$ en un grupo G , se factoriza a través de $\mathcal{A}_p(X)$.*
2. *La imagen de ι_p es $\mathcal{A}_p^\geq(X)$, y la imagen de $\mathcal{A}_p^\geq(X)$ bajo la aplicación de ciclo es $M_p(X)$.*
3. *La aplicación monoidal suprayectiva $\bar{\iota}_p : \Pi_p(X) \rightarrow \mathcal{A}_p^\geq(X)$ inducida por ι_p es un isomorfismo si y sólo si $\Pi_p(X)$ tiene ley de cancelación.*
4. *Tanto $\bar{\iota}_p : \Pi_p(X) \rightarrow \mathcal{A}_p^\geq(X)$ como $c_p : \mathcal{A}_p^\geq(X) \rightarrow M_p(X)$ son morfismos monoidales finitos.*

Demostración. La primera afirmación es probada en [Fri91], y se sigue de argumentos estándar, e.g. en Samuel [Sam71]. La segunda afirmación se sigue de las definiciones y de la propiedad universal recién descrita. La tercera afirmación se sigue del hecho elemental de que la aplicación universal de

un monoide abeliano en su grupo de completación es inyectivo si y sólo si el monoide tiene ley de cancelación. Para demostrar la última afirmación, considerese un encaje proyectivo de X . Los ciclos con soporte en X y con un grado fijo d en el espacio proyectivo ambiente forman una variedad proyectiva, la cual es entonces una unión finita de componentes de $\mathcal{C}_p(X)$. La afirmación ahora se sigue fácilmente de estas observaciones. \square

El siguiente resultado se encuentra en [Eli94].

Proposición 2.0.12. *Dada una variedad algebraica proyectiva compleja X y $0 \leq p \leq \dim X$, todos los monoides $\mathcal{C}_p(X)$, $\Pi_p(X)$, $\mathcal{A}_p^{\geq}(X)$ y $M_p(X)$ tienen multiplicación finita.*

Demostración. Se tienen morfismos de monoides suprayectivos:

$$\mathcal{C}_p(X) \xrightarrow{\pi_p} \Pi_p(X) \xrightarrow{\iota_p} \mathcal{A}_p^{\geq}(X) \xrightarrow{c_p} M_p(X), \quad (2.1)$$

tales que cuando un encaje proyectivo $j : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ se elige, se obtiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{C}_p(X) & \longrightarrow & \Pi_p(X) & \longrightarrow & \mathcal{A}_p^{\geq}(X) & \longrightarrow & M_p(X) \\ \downarrow j_* & & \downarrow j_* & & \downarrow j_* & & \downarrow j_* \\ \mathcal{C}_p(\mathbb{P}^n) & \longrightarrow & \Pi_p(\mathbb{P}^n) & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{A}_p^{\geq}(\mathbb{P}^n) & \xrightarrow{\simeq} & M_p(\mathbb{P}^n) \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & \mathbb{Z}_+ & & \mathbb{Z}_+ & & \mathbb{Z}_+ \end{array}$$

donde la flecha vertical más a la izquierda es una inclusión cerrada. Recuerdese que $\mathcal{C}_p(\mathbb{P}^n) = \coprod_{d \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{C}_{p,d}(\mathbb{P}^n)$ donde $\mathcal{C}_{p,d}(\mathbb{P}^n)$ es una variedad (de Chow) algebraica conexa. Además, $j(\mathcal{C}_p(X)) \cap \mathcal{C}_{p,d}(\mathbb{P}^n)$ es una subvariedad para toda d . Se sigue que $\Pi_p(X)$, $\mathcal{A}_p^{\geq}(X)$ y $M_p(X)$ son todos discretos, y que $\mathcal{C}_p(X)$ tiene multiplicación finita, pues es libre. Ahora, no es difícil demostrar que $\Pi_p(X)$, $\mathcal{A}_p^{\geq}(X)$ y $M_p(X)$ también tienen multiplicación finita. \square

Definición 2.0.13. La p -ésima función (algebraica) de Euler-Chow de X es la función

$$\begin{aligned} E_p(X) : \Pi_p(X) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \alpha &\mapsto \chi(\mathcal{C}_{p,\alpha}(X)), \end{aligned} \quad (2.2)$$

que envía $\alpha \in \Pi_p(X)$ a la característica de Euler topológica de $\mathcal{C}_{p,\alpha}(X)$ (en la topología clásica).

Siguiendo la Observación 2.0.3 se asocia una variable t^α a cada $\alpha \in \Pi_p(X)$ y se expresa la p -ésima función de Euler-Chow como una serie formal de potencias

$$E_p(X) = \sum_{\alpha \in \Pi_p(X)} \chi(\mathcal{C}_{p,\alpha}(X)) t^\alpha. \quad (2.3)$$

Ejemplo 2.0.14. 1. Si X es una variedad conexa, entonces $\mathcal{C}_0(X) = \coprod_{d \in \mathbb{Z}_+} SP_d(X)$, donde $SP_d(X)$ es el producto simétrico de d copias de X . Por lo tanto, la 0-ésima función de Euler-Chow está dada por

$$E_0(X) = \sum_{d \geq 0} \chi(SP_d(X)) t^d = \left(\frac{1}{1-t} \right)^{\chi(X)},$$

de acuerdo a la fórmula de MacDonal [Mac62].

2. Para $X = \mathbb{P}^n$, se tiene $\Pi_p(\mathbb{P}^n) \simeq \mathbb{Z}_+$, con el isomorfismo dado por el grado de los ciclos. En este caso, la p -ésima función de Euler-Chow fue calculada en [LY87]:

$$E_p(\mathbb{P}^n) = \sum_{d \geq 0} \chi(\mathcal{C}_{p,d}(\mathbb{P}^n)) t^d = \left(\frac{1}{1-t} \right)^{\binom{n+1}{p+1}}.$$

3. Supongase que X es una variedad n -dimensional tal que $Pic(X) \simeq \mathbb{Z}$, generado por un haz lineal muy amplio L . Entonces, se vió en el Ejemplo 2.0.1 que $\Pi_{n-1}(X) \simeq \mathbb{Z}_+$ y que $E_{n-1}(X)$ es precisamente la función de Hilbert para el encaje proyectivo de X inducido por L .

Capítulo 3

Resultados

3.1. Series de Euler-Chow de superficies regladas

3.1.1. Superficies regladas descomponibles

Uno de los principales resultados de [EL98] es el Teorema 5,1, que se cita a continuación:

Teorema 3.1.1. *Sean E_1 y E_2 haces algebraicos vectoriales sobre una variedad proyectiva conexa W , de rangos e_1 y e_2 , respectivamente, y sea $1 \leq p \leq e_1 + e_2 - 1$. Entonces la p -ésima función de Euler-Chow de $\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2)$ está dada por*

$$E_p(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2)) = \Psi_{p\#}(E_{p-1}(\mathbb{P}(E_1) \times_W \mathbb{P}(E_2)) \odot E_p(\mathbb{P}(E_1)) \odot E_p(\mathbb{P}(E_2))). \quad (3.1)$$

Basados en este resultado a continuación calcularemos las series de Euler-Chow de las superficies regladas descomponibles. En el caso donde la curva base de la superficie reglada no es una curva racional se tendrán los primeros ejemplos de esta serie calculada para una variedad que no cumple $\text{Pic}^0(X) = \{0\}$.

Teorema 3.1.2. *Sea X una superficie reglada descomponible, sobre una curva C con género g , entonces sus series de Euler-Chow están dadas por las siguientes fórmulas:*

$$E_0(X) = \left(\frac{1}{1-t} \right)^{\chi(X)} = \left(\frac{1}{1-t} \right)^{4-4g},$$

$$E_1(X) = \left(\frac{1}{1-t_0} \right)^{2-2g} \left(\frac{1}{1-t_1} \right) \left(\frac{1}{1-t_0^{-e}t_1} \right),$$

$$E_2(X) = \left(\frac{1}{1-t} \right).$$

Demostración. Sea $\pi : X \cong \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow C$ una superficie reglada tal que \mathcal{E} se descompone en suma directa de gavillas invertibles sobre C . Por [Har77, V, 2.12 (a)] $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}$ para alguna \mathcal{L} con $\deg \mathcal{L} \leq 0$. Además $e = -\deg \mathcal{L} \geq 0$. Como \mathcal{O}_C es el haz lineal trivial sobre C estamos en el caso de [EL98, 5.1]:

$$\mathbb{P}(\mathcal{O}_C) \cong \mathbb{P}(\mathcal{L}) \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_C) \times_C \mathbb{P}(\mathcal{L}) \cong C.$$

Por [EL98, Corollary 5.7]:

$$\Psi_1 : \Pi_0(C) \times \Pi_1(C) \times \Pi_1(C) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{P}(\mathcal{L} \oplus \mathcal{O}_C)) \cong \Pi_0(C) \times \Pi_1(C)$$

está dado por $\Psi(\alpha, \beta, \gamma) = (\xi \cap \gamma + \alpha, \beta + \gamma)$, donde $\xi = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L})}(1)) = c_1(\mathcal{L}(C_0)) = C_0$.

Como $\gamma \in \Pi_1(C)$ y C es una variedad de dimensión uno, entonces $\gamma = c[C] = c[C_0]$. Por lo que tenemos $\xi \cap \gamma = C_0 \cdot nC_0 = -ne$.

De aquí obtenemos que $\Psi_1(a, b[C], c[C]) = (a - ce, (b+c)[C])$, por lo que podemos identificar Ψ_1 con $(a, b, c) \mapsto (a - ce, b + c)$.

Dado que $H_2(\mathbb{P}(\mathcal{E})) \cong \mathbb{Z}^2$, podemos asociar variables t_0, t_1 a cada uno de sus generadores, e identificamos a $(\alpha_0, \alpha_1) \in \Pi_1(\mathbb{P}(\mathcal{E}))$ con $t_0^{\alpha_0} t_1^{\alpha_1}$. De aquí obtenemos que:

$$\begin{aligned} E_1(\mathbb{P}(\mathcal{L} \oplus \mathcal{O}_C)) &= \sum_{\alpha_0, \alpha_1} E_1(\mathbb{P}(\mathcal{L} \oplus \mathcal{O}_C))(\alpha_0, \alpha_1) t_0^{\alpha_0} t_1^{\alpha_1} \\ &= \sum_{\alpha_0, \alpha_1} \Psi_{1\#}(E_0(\mathbb{P}(\mathcal{L})) \odot E_1(\mathbb{P}(\mathcal{L})) \odot E_1(C))(\alpha_0, \alpha_1) t_0^{\alpha_0} t_1^{\alpha_1} \\ &= \sum_{\alpha_0, \alpha_1} \left(\sum_{(a,b,c) \in \Psi_1^{-1}} (E_0(C)(a) \cdot E_1(C)(b) \cdot E_1(C)(c)) \right) t_0^{\alpha_0} t_1^{\alpha_1} \\ &= \sum_{\alpha_0, \alpha_1} \left(\sum_{\substack{a-ce=\alpha_0 \\ b+c=\alpha_1}} (E_0(C)(a) \cdot E_1(C)(b) \cdot E_1(C)(c)) \right) t_0^{a-ce} t_1^{b+c} \\ &= \left(\sum_{a \geq 0} E_0(C)(a) \cdot t_0^a \right) \left(\sum_{b \geq 0} E_1(C)(b) \cdot t_1^b \right) \left(\sum_{c \geq 0} E_1(C)(c) \cdot (t_0^{-e} t_1)^c \right). \end{aligned}$$

De esto se llega a:

$$E_1(\mathbb{P}(\mathcal{L} \oplus \mathcal{O}_C)) = \left(\frac{1}{1-t_0} \right)^{2-2g} \left(\frac{1}{1-t_1} \right) \left(\frac{1}{1-t_0^{-e}t_1} \right)$$

Además se tiene:

$$E_0(\mathbb{P}(\mathcal{L} \oplus \mathcal{O}_C)) = \left(\frac{1}{1-t} \right)^{\chi(\mathbb{P}(\mathcal{L} \oplus \mathcal{O}_C))} = \left(\frac{1}{1-t} \right)^{4-4g},$$

$$E_2(\mathbb{P}(\mathcal{L} \oplus \mathcal{O}_C)) = \frac{1}{1-t}.$$

□

3.1.2. Superficies regladas no descomponibles

Teorema 3.1.3. *Sea X una superficie reglada, sobre una curva C con género g , entonces sus series de Euler-Chow están dadas por las siguientes fórmulas:*

$$E_0(X) = \left(\frac{1}{1-t} \right)^{4-4g},$$

$$E_1(X) = \left(\frac{1}{1-t_0} \right)^{2-2g} \left(\frac{1}{1-t_1} \right) \left(\frac{1}{1-t_0^{-e}t_1} \right),$$

$$E_2(X) = \frac{1}{1-t}.$$

Demostración.

Como $\chi(X) = 4 - 4g$, donde g es el género de la curva C , entonces se tiene:

$$E_0(X) = \left(\frac{1}{1-t} \right)^{\chi(X)} = \left(\frac{1}{1-t} \right)^{4-4g}.$$

También se tiene, debido a la dimensión de X , que:

$$E_2(X) = \frac{1}{1-t}.$$

Así que sólo falta demostrar la fórmula para $E_1(X)$.

Como X es una superficie reglada sobre C , existe $\pi : X \rightarrow C$ tal que para toda $y \in C$ la fibra $X_y := \pi^{-1}(y)$ es isomorfa a \mathbb{P}^1 .

Sea C_0 la sección de mínima autointersección, $C_0^2 = -e$, y sea C_1 alguna otra sección. Tomemos para cada $y \in C$ el isomorfismo $f_y : X_y \rightarrow \mathbb{P}^1$ tal que

$f_y^{-1}(0 : 1) = C_1 \cap X_y$ y $f_y^{-1}(1 : 0) = C_0 \cap X_y$ (a menos que $C_0 \cap X_y = C_1 \cap X_y$, en cuyo caso sólo se pide la condición para el punto $(1 : 0)$).

Definimos una acción de \mathbb{C}^* en X de la siguiente forma: para $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, definimos $\lambda \cdot x = f_y^{-1}(\lambda \cdot f_y(x))$, donde $y = \pi(x)$ y $\lambda \cdot f_y(x)$ denota la acción de \mathbb{C}^* en \mathbb{P}^1 : $\lambda(a : b) = (a : \lambda b)$.

Los puntos fijos de X bajo la acción son:

$$X^{\mathbb{C}^*} = C_0 \cup C_1 \cup \{p_1, \dots, p_r\} \text{ donde } r = |C_0 \cap C_1|.$$

Esta acción induce una acción algebraica continua en $\mathcal{C}_1(X)$. Ahora nos interesa identificar su conjunto de puntos fijos.

Considerese el mapeo

$$\phi_1 : \mathcal{C}_0(C) \times \mathcal{C}_1(C) \times \mathcal{C}_1(C) \rightarrow \mathcal{C}_1(X)$$

definido como $\phi_p(a, b, c) = \pi^*(a) + \sigma_0^*b + \sigma_1^*c$, donde σ_0 y σ_1 son las secciones correspondientes a C_0 y C_1 , respectivamente.

Queremos probar que ϕ_1 es un homeomorfismo en el conjunto de puntos fijos $\mathcal{C}_1(X)^{\mathbb{C}^*}$.

Las subvariedades irreducibles invariantes de dimensión 1 son C_0 , C_1 (todos sus puntos son fijos bajo la acción) y las fibras de π (todos sus puntos generales están en la misma órbita bajo la acción). De esto es claro que ϕ_1 es inyectiva, y además suprayectiva en $\mathcal{C}_1(X)$.

Nótese que para cada $\alpha \in \Pi_1(X)$, el conjunto de puntos fijos $\mathcal{C}_{1,\alpha}(X)^{\mathbb{C}^*}$ es un subconjunto algebraico de $\mathcal{C}_{1,\alpha}(X)$ (no necesariamente conexo), y de aquí puede escribirse como una unión disjunta de variedades proyectivas. Entonces por [EL98][Lemma 5.4] se concluye que ϕ_1 es un homeomorfismo en su imagen.

Como la característica de Euler de una variedad con la acción de un toro algebraico es igual a la de su conjunto de puntos fijos [LY87], se tiene que

$$\chi(\mathcal{C}_{1,\alpha}(X)) = \chi(\mathcal{C}_{1,\alpha}(X)^{\mathbb{C}^*}).$$

Por otro lado, si Ψ_1 es el morfismo inducido por ϕ_1 entre los monoides de componentes conexas, entonces:

$$\mathcal{C}_{1,\alpha}(X)^{\mathbb{C}^*} = \coprod_{(a,b,c) \in \Psi_1^{-1}(\alpha)} \mathcal{C}_{0,a}(C) \times \mathcal{C}_{1,b}(C) \times \mathcal{C}_{1,c}(C),$$

de donde

$$\chi(\mathcal{C}_{1,\alpha}(X)) = \sum_{(a,b,c) \in \Psi_1^{-1}(\alpha)} \chi(\mathcal{C}_{0,a}(C)) \cdot \chi(\mathcal{C}_{1,b}(C)) \cdot \chi(\mathcal{C}_{1,c}(C)).$$

Por lo tanto

$$E_1(X) = \Psi_{1\#}(E_0(C) \odot E_1(C) \odot E_1(C)).$$

Además se tiene el siguiente isomorfismo:

$$\begin{aligned} A(X) &\rightarrow^{\simeq} A(\mathbb{P}(\mathcal{L}(\mathbf{e}) \oplus \mathcal{O}_C)) \\ nC_0 + \pi^*b &\mapsto nC'_0 + \pi'^*b \end{aligned}$$

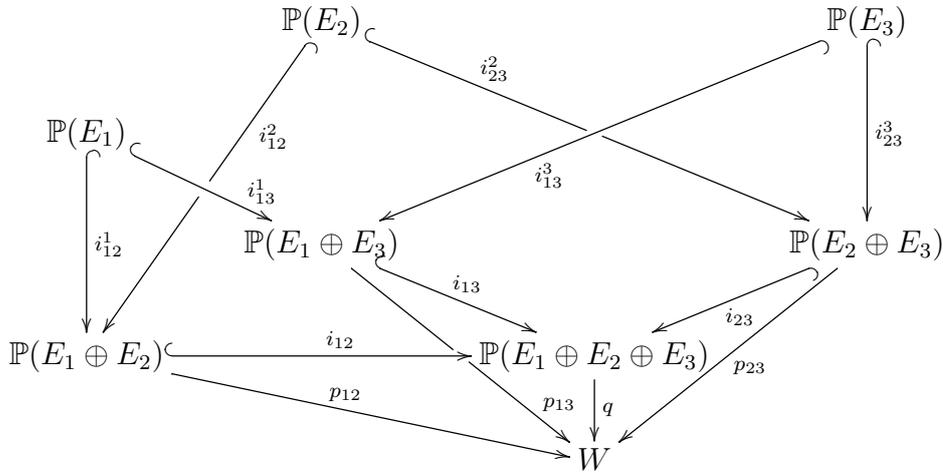
el cual se restringe a la parte efectiva y a sus componentes conexas por trayectorias. Por lo que, utilizando los resultados obtenidos para superficies regladas descomponibles, se obtiene:

$$E_1(X) = \left(\frac{1}{1-t_0} \right)^{2-2g} \left(\frac{1}{1-t_1} \right) \left(\frac{1}{1-t_0^{-e}t_1} \right).$$

□

3.2. Fórmulas para haces proyectivos

Ahora demostraremos una generalización del Teorema 5,1 de [EL98] para el caso de un haz proyectivo que se puede descomponer como el haz de una suma directa de tres sumandos.



Sean E_1, E_2 y E_3 haces vectoriales sobre una variedad proyectiva compleja W . Se tienen las siguientes aplicaciones:

$$\begin{array}{llll}
i_k : & \mathbb{P}(E_k) & \rightarrow & \mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3) & (k = 1, 2, 3) \\
i_{kl} : & \mathbb{P}(E_k \oplus E_l) & \rightarrow & \mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3) & (k < l, k, l = 1, 2, 3) \\
p_k : & \mathbb{P}(E_k) & \rightarrow & W & (k = 1, 2, 3) \\
p_{kl} : & \mathbb{P}(E_k \oplus E_l) & \rightarrow & W & (k < l, k, l = 1, 2, 3) \\
q : & \mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3) & \rightarrow & W \\
t_{klp} : & \mathcal{C}_{p-1}(\mathbb{P}(E_k) \times_W \mathbb{P}(E_l)) & \rightarrow & \mathcal{C}_p(\mathbb{P}(E_k \oplus E_l)) & (k < l, k, l = 1, 2, 3) \\
t_p : & \mathcal{C}_{p-2}(\mathbb{P}(E_1) \times_W \mathbb{P}(E_2) \times_W \mathbb{P}(E_3)) & \rightarrow & \mathcal{C}_p(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3))
\end{array}$$

donde los p 's y q 's son proyecciones de los haces proyectivos indicados, y las i 's son las inclusiones canónicas.

Con éstos se tienen los siguientes morfismos de monoides con multiplicación finita:

$$\begin{array}{llll}
i_{kp} : & \Pi_p(\mathbb{P}(E_k)) & \rightarrow & \Pi_p(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3)) & (k = 1, 2, 3) \\
& & & \text{(inducido por } i_k) \\
i_{klp} : & \Pi_p(\mathbb{P}(E_k \oplus E_l)) & \rightarrow & \Pi_p(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3)) & (k < l, k, l = 1, 2, 3) \\
& & & \text{(inducido por } i_{kl}) \\
\varphi_{klp} : & \Pi_{p-1}(\mathbb{P}(E_k) \times_W \mathbb{P}(E_l)) & \rightarrow & \Pi_p(\mathbb{P}(E_k \oplus E_l)) & (k < l, k, l = 1, 2, 3) \\
& & & \text{(inducido por } t_{kl}) \\
\varphi_p : & \Pi_{p-2}(\mathbb{P}(E_1) \times_W \mathbb{P}(E_2) \times_W \mathbb{P}(E_3)) & \rightarrow & \Pi_p(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3)) \\
& & & \text{(inducido por } t_p)
\end{array}$$

Éstos inducen un morfismo

$$\Psi_p : \left\{ \begin{array}{l} \Pi_{p-2}(\mathbb{P}(E_1) \times_W \mathbb{P}(E_2) \times_W \mathbb{P}(E_3)) \times \Pi_{p-1}(\mathbb{P}(E_1) \times_W \mathbb{P}(E_2)) \\ \times \Pi_{p-1}(\mathbb{P}(E_1) \times_W \mathbb{P}(E_3)) \times \Pi_{p-1}(\mathbb{P}(E_2) \times_W \mathbb{P}(E_3)) \\ \times \Pi_p(\mathbb{P}(E_1)) \times \Pi_p(\mathbb{P}(E_2)) \times \Pi_p(\mathbb{P}(E_3)) \end{array} \right\} \rightarrow \Pi_p(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3))$$

Enviando (a, b, c, d, e, f, g) a $\Psi(a, b, c, d, e, f, g) = \varphi_p(a) + i_{12p} \circ \varphi_{12p}(b) + i_{13p} \circ \varphi_{13p}(c) + i_{23p} \circ \varphi_{23p}(d) + i_{1p}(e) + i_{2p}(f) + i_{3p}(g)$.

Definamos las aplicaciones t_{klp} y t_p . Denótese con L_1, L_2 y L_3 a los haces lineales tautológicos $\mathcal{O}_{E_1}(-1), \mathcal{O}_{E_2}(-1)$ y $\mathcal{O}_{E_3}(-1)$ sobre $\mathbb{P}(E_1), \mathbb{P}(E_2)$ y $\mathbb{P}(E_3)$, respectivamente, y sean π_1, π_2 y π_3 las respectivas proyecciones de $\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3)$. El \mathbb{P}^2 -haz $\pi : \mathbb{P}(\pi_1^*(L_1) \oplus \pi_2^*(L_2) \oplus \pi_3^*(L_3)) \rightarrow \mathbb{P}(E_1) \times_W \mathbb{P}(E_2) \times_W \mathbb{P}(E_3)$ es precisamente el blow-up de $\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3)$ en $\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2) \cup \mathbb{P}(E_1 \oplus E_3) \cup \mathbb{P}(E_2 \oplus E_3)$, al cual denotamos por Q para acortar. Sea $b : Q \rightarrow \mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3)$ la aplicación de blow-up.

Como π es una aplicación plana de dimensión relativa 2, y b es una aplicación propia, se tienen dos homomorfismos algebraicos continuos dados por el pull-back plano

$$\pi^* : \mathcal{C}_{p-2}(\mathbb{P}(E_1) \times_W \mathbb{P}(E_2) \times_W \mathbb{P}(E_3)) \rightarrow \mathcal{C}_p(Q)$$

y el push-forward propio

$$b_* : \mathcal{C}_p(Q) \rightarrow \mathcal{C}_p(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3)).$$

De igual forma, para $k < l$, $k, l = 1, 2, 3$, denotese por π_k^{kl} y π_l^{kl} a las respectivas proyecciones de $\mathbb{P}(E_k) \times_W \mathbb{P}(E_l)$ en $\mathbb{P}(E_k)$ y $\mathbb{P}(E_l)$. El \mathbb{P}^1 -haz $\pi_{kl} : \mathbb{P}(\pi_k^{kl*}(L_k) \oplus \pi_l^{kl*}(L_l)) \rightarrow \mathbb{P}(E_k \times_W \mathbb{P}(E_l))$ es precisamente el blow-up de $\mathbb{P}(E_k \oplus E_l)$ en $\mathbb{P}(E_k) \amalg \mathbb{P}(E_l)$, al cual se denotará por Q_{kl} . Sea $b_{kl} : Q_{kl} \rightarrow \mathbb{P}(E_k \oplus E_l)$ la aplicación de blow-up.

Como π_{kl} es una aplicación plana de dimensión relativa 1, y b_{kl} es una aplicación propia, se tienen dos homomorfismos algebraicos continuos, dados por el pull-back plano

$$\pi_{kl}^* : \mathcal{C}_{p-1}(\mathbb{P}(E_k) \times_W \mathbb{P}(E_l)) \rightarrow \mathcal{C}_p(Q_{kl})$$

y el push-forward propio

$$b_{kl*} : \mathcal{C}_p(Q_{kl}) \rightarrow \mathcal{C}_p(\mathbb{P}(E_k \oplus E_l)).$$

Definición 3.2.1. Las aplicaciones t_p y t_{klp} se definen como las composiciones $t_p = b_* \circ \pi^*$ y $t_{klp} = b_{kl*} \circ \pi_{kl}^*$.

Teorema 3.2.2. Sean E_1, E_2 y E_3 haces vectoriales sobre una variedad proyectiva compleja W , de rangos e_1, e_2 y e_3 , respectivamente, y sea $2 \leq p \leq e_1 + e_2 + e_3 - 1$. Entonces la p -ésima función de Euler-Chow de $\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3)$ está dada por

$$E_p(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3)) = \Psi_{p\#} \left(\begin{array}{c} E_{p-2}(\mathbb{P}(E_1) \times_W \mathbb{P}(E_2) \times_W \mathbb{P}(E_3)) \odot E_{p-1}(\mathbb{P}(E_1) \times_W \mathbb{P}(E_2)) \\ \odot E_{p-1}(\mathbb{P}(E_1) \times_W \mathbb{P}(E_3)) \odot E_{p-1}(\mathbb{P}(E_2) \times_W \mathbb{P}(E_3)) \\ \odot E_p(\mathbb{P}(E_1)) \odot E_p(\mathbb{P}(E_2)) \odot E_p(\mathbb{P}(E_3)) \end{array} \right).$$

Demostración. Considerese la acción de $(\mathbb{C}^*)^2$ sobre $\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3)$ dada por multiplicar cada escalar sobre dos de los factores de $E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$, cuyo conjunto de puntos fijos $\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3)^{(\mathbb{C}^*)^2}$ consta de $\mathbb{P}(E_1) \amalg \mathbb{P}(E_2) \amalg \mathbb{P}(E_3)$. Esta acción induce una acción algebraica continua sobre $\mathcal{C}_p(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3))$; nuestro siguiente paso será identificar su conjunto de puntos fijos. Considerese la aplicación

$$\psi_p : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}_{p-2}(\mathbb{P}(E_1) \times_W \mathbb{P}(E_2) \times_W \mathbb{P}(E_3)) \times \mathcal{C}_{p-1}(\mathbb{P}(E_1) \times_W \mathbb{P}(E_2)) \\ \times \mathcal{C}_{p-1}(\mathbb{P}(E_1) \times_W \mathbb{P}(E_3)) \times \mathcal{C}_{p-1}(\mathbb{P}(E_2) \times_W \mathbb{P}(E_3)) \\ \times \mathcal{C}_p(\mathbb{P}(E_1)) \times \mathcal{C}_p(\mathbb{P}(E_2)) \times \mathcal{C}_p(\mathbb{P}(E_3)) \end{array} \right\} \rightarrow \mathcal{C}_p(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3))$$

definida como $\psi(a, b, c, d, e, f, g) = t_p(a) + i_{12p} \circ t_{12p}(b) + i_{13p} \circ t_{13p}(c) + i_{23p} \circ t_{23p}(d) + i_{1*}(e) + i_{2*}(f) + i_{3*}(g)$.

Se demostrará que ψ_p es un homeomorfismo en el conjunto de puntos fijos $(\mathcal{C}_p(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3)))^{(\mathbb{C}^*)^2}$. Si un elemento $\sigma = \sum_i n_i V_i \in \mathcal{C}_p(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3))$ es fijo bajo la acción, entonces cada una de sus componentes irreducibles debe ser invariante bajo la acción. Además, una subvariedad irreducible invariante $V \subset \mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3)$ puede ser de tres tipos:

1. Aquellas cuyos puntos generales son fijos bajo la acción (y por tanto todos los puntos de V son fijos);
2. Aquellas cuyos puntos generales tienen órbitas no triviales de dimensión 1;
3. Aquellas cuyos puntos generales tienen órbitas no triviales de dimensión 2.

Los monoides de Chow $\mathcal{C}_p(X)$ de una variedad X son generados libremente por las subvariedades irreducibles p -dimensionales de X . Dados ciclos $\sigma_k \in \mathcal{C}_p(\mathbb{P}(E_k))$, $k = 1, 2, 3$, el soporte de i_{k*} está contenido en $\mathbb{P}(E_k)$, por lo que las imágenes de $\mathcal{C}_p(E_1)$, $\mathcal{C}_p(E_2)$ y $\mathcal{C}_p(E_3)$ bajo i_1, i_2 e i_3 son libremente generadas por subconjuntos disjuntos del conjunto de generadores de $\mathcal{C}_p(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3))$, que son variedades del primer tipo.

Por otro lado, el soporte de i_{kl*} está contenido en $\mathbb{P}(E_k \oplus E_l)$, $k, l = 1, 2, 3$, $k \leq l$, por lo que la imagen de $\mathbb{P}(E_k \oplus E_l)$ es libremente generada por subconjuntos disjuntos del conjunto de generadores de $\mathcal{C}_p(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3))$, y dado que la acción restringida a $\mathbb{P}(E_k \oplus E_l)$ coincide con la acción de \mathbb{C}^* , los elementos de ese conjunto de generadores son del tipo 1 y 2 ([EL98]). Dado que las variedades irreducibles del tipo 1 que están contenidas en la imagen de i_{kl*} coinciden con algunas de las mencionadas en el párrafo anterior sólo falta ver cómo son las del tipo 2. Éstas son de la forma $i_{kl*} \circ t_{klp}(Z)$ para alguna variedad $(p-1)$ -dimensional de $\mathbb{P}(E_k) \times_W \mathbb{P}(E_l)$ por ([EL98]).

Ahora, dada una subvariedad $p-2$ -dimensional Z de $\mathbb{P}(E_1) \times_W \mathbb{P}(E_2) \times_W \mathbb{P}(E_3)$, su imagen inversa $\pi^{-1}(Z)$ es una subvariedad p -dimensional de Q , cuyos puntos fuera del divisor excepcional de la aplicación de blow-up b , tienen órbitas de dimensión 2. Como b es una aplicación birracional $(\mathbb{C}^*)^2$ -equivariante, la imagen $b(\pi^{-1}(Z))$ es una subvariedad irreducible de $\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3)$ del tercer tipo.

De ésto se obtiene que las imágenes de $i_{i*}, i_{2*}, i_{3*}, i_{12*} \circ t_{12}, i_{13*} \circ t_{13p}, i_{23*} \circ t_{23p}, t_p$ son generadas libremente por subconjuntos disjuntos de los generadores de $(\mathcal{C}_p(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3)))^{(\mathbb{C}^*)^2}$, por lo que ψ_p es inyectiva.

Para probar la suprayectividad, sólo se necesita mostrar que toda subvariedad irreducible e invariante $V \subset \mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3)$ del tercer tipo,

es de la forma $b(\pi^{-1}(Z))$ para alguna subvariedad $(p-2)$ -dimensional de $\mathbb{P}(E_1) \times_W \mathbb{P}(E_2) \times_W \mathbb{P}(E_3)$; pues el resto de casos se siguen de ([EL98]).

Sea $\tilde{V} \subset Q$ la transformada propia de V bajo b , y sea $Z = \pi(\tilde{V}) \subset \mathbb{P}(E_1) \times_W \mathbb{P}(E_2) \times_W \mathbb{P}(E_3)$. Como los puntos generales de V tienen órbitas de dimensión 2, entonces también los puntos generales de \tilde{V} , y esto muestra que la fibra general de $\pi_{\tilde{V}} : \tilde{V} \rightarrow Z$ tiene dimensión 2. En particular, $\tilde{V} = \pi^{-1}(Z)$ y, como $\pi|_{\tilde{V}}$ es un haz proyectivo, y b envía \tilde{V} birracionalmente a V , se concluye que $t_p(Z) = b_* \circ \pi^*(Z) = V$.

Los argumentos anteriores muestran que ψ_p es una biyección algebraica continua de su dominio en el conjunto de puntos fijos $(\mathcal{C}_p(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3)))^{(\mathbb{C}^*)^2}$. Notese que para cada $\alpha \in \prod_p (\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3))$ el conjunto de puntos fijos $(\mathcal{C}_{p,\alpha}(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3)))^{(\mathbb{C}^*)^2}$ es un subconjunto algebraico de $(\mathcal{C}_{p,\alpha}(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3)))$ (no necesariamente conexo), por lo que se puede escribir también como una unión numerable disjunta de variedades proyectivas. Entonces se usa el lema 5.4 ([EL98]) para concluir que ψ_p es un homeomorfismo en su imagen.

Es un hecho general que la característica de Euler de una variedad con una acción del toro algebraico es igual que la de su conjunto de puntos fijos; ver Lawson and Yau ([LY87]). Por lo tanto, dado $\alpha \in \prod_p ((\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3)))$, se sigue que:

$$\chi(\mathcal{C}_{p,\alpha}(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3))) = \chi\left(\mathcal{C}_{p,\alpha}(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3))^{(\mathbb{C}^*)^2}\right).$$

Por otro lado, si Ψ_p es el morfismo inducido por ψ_p entre los monoides de componentes conexas entonces:

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3))^{(\mathbb{C}^*)^2} = \prod_{(a,b,c,d,e,f,g) \in \Psi_p^{-1}(\alpha)} \left(\begin{array}{l} \mathcal{C}_{p-2,a}(\mathbb{P}(E_1) \times_W \mathbb{P}(E_2) \times_W \mathbb{P}(E_3)) \times \mathcal{C}_{p-1,b}(\mathbb{P}(E_1) \times_W \mathbb{P}(E_2)) \\ \times \mathcal{C}_{p-1,c}(\mathbb{P}(E_1) \times_W \mathbb{P}(E_3)) \times \mathcal{C}_{p-1,d}(\mathbb{P}(E_2) \times_W \mathbb{P}(E_3)) \\ \times \mathcal{C}_{p,e}(\mathbb{P}(E_1)) \times \mathcal{C}_{p,f}(\mathbb{P}(E_2)) \times \mathcal{C}_{p,g}(\mathbb{P}(E_3)) \end{array} \right)$$

pues ψ_p es un homeomorfismo en su imagen. Por lo que aplicando en ambos lados la característica de Euler y usando las definiciones adecuadas se concluye el teorema. \square

Mediante un procedimiento similar el teorema se puede ampliar.

Teorema 3.2.3. Sean E_i , $i = 1, \dots, n$ haces vectoriales sobre una variedad proyectiva compleja W , de rangos e_i , respectivamente, y sea $n-1 \leq p \leq$

$e_1 + e_2 + e_3 - 1$. Entonces la p -ésima función de Euler-Chow de $\mathbb{P}(\bigoplus_{i=1}^n E_i)$ está dada por

$$E_p(\mathbb{P}(\bigoplus_{i=1}^n E_i)) = \Psi_{p\#}(E_{p-n+1}(\times_{i=1}^n \mathbb{P}(E_i)) \odot \left(\odot_{i=1}^n E_{p-n+2}(\times_{j=1, i}^n \mathbb{P}(E_j)) \right) \odot \cdots \odot (\odot_{i=1}^n E_p(\mathbb{P}(E_i))).$$

3.2.1. Fórmula para series de Euler-Chow de rollos racionales normales

Sean E_1, E_3 haces lineales sobre una variedad proyectiva W , y sean $E_2 = \mathbb{1}$ el haz líneal trivial. En este caso:

$$\begin{aligned} W &= \mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(E_3) \\ &= \mathbb{P}(E_1) \times_W \mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(E_1) \times_W \mathbb{P}(E_3) = \mathbb{P}(E_2) \times_W \mathbb{P}(E_3) \\ &= \mathbb{P}(E_1) \times_W \mathbb{P}(E_2) \times_W \mathbb{P}(E_3), \end{aligned}$$

y las inclusiones $i_k : \mathbb{P}(E_k) \rightarrow \mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3)$, $k = 1, 2, 3$, son secciones del haz proyectivo $\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3)$ sobre W .

Sean $\xi = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3)}(1))$ y $\xi' = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_1 \oplus \mathbb{1})}(1))$. Se tiene el isomorfismo:

$$\begin{aligned} T : \mathcal{A}_{p-2}(W) \oplus \mathcal{A}_{p-1}(W) \oplus \mathcal{A}_p(W) &\rightarrow \mathcal{A}_p(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3)) \\ (\alpha, \mathbf{b}, \gamma) &\mapsto q^* \alpha + \xi \cap q^* \mathbf{b} + \xi^2 \cap q^* \gamma \\ &= q^* \alpha + i_{12*} p_{12}^* \mathbf{b} + \mathbf{i}_{1*} \mathbf{p}_1^* \gamma, \end{aligned} \tag{3.2}$$

pues

$$\begin{aligned} \xi^2 \cap q^* \gamma &= \xi \cap i_{12*} p_{12}^* \gamma = i_{12*} (\xi' \cap p_{12}^* \gamma) \\ &= i_{12}^* (i_{1*}' p_1^* \gamma) = i_{1*} p_1^* \gamma \end{aligned}$$

Así que este isomorfismo es igual a la composición

$$\mathcal{A}_{p-2}(W) \oplus \mathcal{A}_{p-1}(W) \oplus \mathcal{A}_p(W) \rightarrow \mathcal{A}_{p-2}(W) \oplus \mathcal{A}_p(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2)) \rightarrow \mathcal{A}_p(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3)).$$

Este isomorfismo se restringe a una inyección

$$T^{\geq} : \mathcal{A}_{p-2}^{\geq}(W) \oplus \mathcal{A}_{p-1}^{\geq}(W) \oplus \mathcal{A}_p^{\geq}(W) \rightarrow \mathcal{A}_p^{\geq}(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3)).$$

Lema 3.2.4. ■ La inyección T^{\geq} es un isomorfismo;

- Si $\Pi_*(W)$ son monoides con ley de cancelación para todo $*$, entonces también lo son $\Pi_*(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3))$. Equivalentemente, si las aplicaciones suprayectivas naturales $\Pi_p(W) \rightarrow \mathcal{A}_p^{\geq}(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3))$ son isomorfismos para toda p , entonces también lo son las aplicaciones suprayectivas $\Pi_p(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3)) \rightarrow \mathcal{A}_p^{\geq}(\mathbb{P}(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3))$.

Demostración.

- Todo p -ciclo efectivo a' es algebraica y efectivamente equivalente a un ciclo de la forma

$$q^*(a) + i_{12*}p_{12}^*(b) + i_{13*}p_{13}^*(c) + i_{23*}p_{23}^*(d) + i_{1*}(e) + i_{2*}(f) + i_{3*}(g)$$

con $a \in \mathcal{C}_{p-2}(W)$, $b, c, d \in \mathcal{C}_{p-1}(W)$, $e, f, g \in \mathcal{C}_p(W)$.

Se tiene que

$$\begin{aligned} i_{2*}(f) &= i_{12*} \circ i'_{2*} \\ &\equiv i_{12*}(i'_{1*}(f) + p_{12}^*(Z' \cap f)) \\ &= i_{12*} \circ i'_{1*}(f) + i_{12*} \circ p_{12}^*(Z' \cap f) \\ &= i_{1*}(f) + i_{12*}p_{12}^*(Z' \cap f). \end{aligned}$$

De forma análoga se tiene

$$i_{3*}(g) \equiv i_{1*}(g) + i_{12*}p_{12}^*(Z' \cap g).$$

Como E_1 está generado por sus secciones, se puede encontrar una sección $s : W \rightarrow E_1$ cuyo cero locus $Z \subset W$ intersecta propiamente a c . Sea $\tilde{s} : W \rightarrow \mathbb{P}(E_1 \oplus \mathbb{1} \oplus E_3)$ la composición $\iota \circ s$, donde $\iota : E_1 \rightarrow \mathbb{P}(E_1 \oplus \mathbb{1} \oplus E_3)$ es la inclusión abierta. Entonces, la cerradura de la órbita de \tilde{s}_*c contiene dos puntos fijos: $i_{12*} \circ p_{12}^*(c) + q^*(Z \cap c)$ y $i_{13*} \circ p_{13}^*(c)$. Análogamente para $i_{23*} \circ p_{23}^*(d)$.

Entonces

$$a' \equiv_{alg} q^*(a + Z \cap c + Z \cap d) + i_{12*} \circ p_{12}^*(b + c + d + Z' \cap f + Z' \cap g) + i_{1*}(e + f + g).$$

con lo que se demuestra la suprayectividad de T^{\geq} .

- La inyectividad se demuestra de forma análoga a lo que se hizo en ([EL98][Lemma 5.6]).

□

Corolario 3.2.5. *Bajo las mismas hipótesis, el homomorfismo*

$$\begin{aligned} \Psi_p : \quad & \begin{array}{c} \Pi_{p-2}(\mathbb{P}(E_1) \times_W \mathbb{P}(E_2) \times_W \mathbb{P}(E_3)) \times \\ \Pi_{p-1}(\mathbb{P}(E_1) \times_W \mathbb{P}(E_2)) \times \Pi_{p-1}(\mathbb{P}(E_1) \times_W \mathbb{P}(E_3)) \times \\ \Pi_{p-1}(\mathbb{P}(E_2) \times_W \mathbb{P}(E_3)) \times \\ \Pi_p(\mathbb{P}(E_1)) \times \Pi_p(\mathbb{P}(E_2)) \times \Pi_p(\mathbb{P}(E_3)) \end{array} & \rightarrow & \Pi_p(\mathbb{P}(E_1 \oplus \mathbb{1} \oplus E_3)) \\ & & \simeq & \Pi_{p-2}(W) \oplus \Pi_{p-1}(W) \oplus \Pi_p(W) \end{aligned}$$

envía (a, b, c, d, e, f, g) en $(a + \xi \cap c + \xi \cap d, b + c + d + \xi' \cap f + \xi' \cap g, e + f + g)$.

Ejemplo 3.2.6.

$$W = \mathbb{P}^1, \quad E_1 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(h) \text{ con } h \geq 0, \quad E_2 = E_3 = \mathbb{1}.$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} & \Psi_p(a[\mathbb{P}^{p-2}], b[\mathbb{P}^{p-1}], c[\mathbb{P}^{p-1}], d[\mathbb{P}^{p-1}], e[\mathbb{P}^p], f[\mathbb{P}^p], g[\mathbb{P}^p]) \\ = & ((a + h \cdot c + h \cdot d)[\mathbb{P}^{p-2}], (b + c + d + h \cdot f + h \cdot g)[\mathbb{P}^{p-1}], (e + f + g)[\mathbb{P}^p]) \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} & E_p(\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(h) \oplus \mathbb{1} \oplus \mathbb{1})) = \\ & \left(\frac{1}{1-t_0}\right)^{\binom{n+1}{p-1}} \left(\frac{1}{1-t_1}\right)^{\binom{n+1}{p}} \left(\frac{1}{1-t_2}\right)^{\binom{n+1}{p+1}} \left(\frac{1}{1-t_0-h t_1}\right)^{2\binom{n+1}{p}} \left(\frac{1}{1-t_1-h t_2}\right)^{2\binom{n+1}{p+1}} \end{aligned}$$

Apéndice A

Superficies regladas

Definición A.0.1. Una superficie geoméricamente reglada, o sólo superficie reglada, es una superficie X junto con un morfismo suprayectivo $\pi : X \rightarrow C$ a una curva (no singular) C , tal que cada fibra $X_y := \pi^{-1}(y)$ es isomorfa a \mathbb{P}^1 para todo punto $y \in C$, y tal que π admite una sección (*i.e.*, un morfismo $\sigma : C \rightarrow X$ tal que $\pi \circ \sigma = id_C$).

Ejemplo A.0.2. Si C es una curva, entonces $C \times \mathbb{P}^1$ con su primera proyección es una superficie reglada. En particular, la superficie cuadrática en \mathbb{P}^3 es una superficie reglada en dos formas distintas. Cuando se hable de una superficie reglada se supondrá que los datos π y C se conocen.

Lema A.0.3. Sean $\pi : X \rightarrow C$ una superficie reglada, D un divisor sobre X , y supongamos que $D \cdot f = n \geq 0$, donde f es una fibra de π . Entonces $\pi_* \mathcal{L}(D)$ es una gavilla localmente libre de rango $n+1$ sobre C . En particular, $\pi_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_C$.

Demostración. Primero veamos que cualquier dos fibras de π son divisores algebraicamente equivalentes sobre X , pues todas están parametrizadas por la curva C . Además son numéricamente equivalentes, por lo que $D \cdot f$ es independiente de la elección de la fibra.

Para cada $y \in Y$, sea $\mathcal{L}(D)_y$ la gavilla inducida por $\mathcal{L}(D)$ sobre la fibra $X_y := \pi^{-1}(y)$. Ésta es una gavilla invertible de grado n sobre $X_y \cong \mathbb{P}^1$, por lo que $H^0(\mathcal{L}(D)_y)$ tiene dimensión $n+1$. Esto es independiente de y , así que por el teorema de Grauert [Har77, III, 12.9] $\pi_* \mathcal{L}(D)$ es localmente libre de rango $n+1$. En el caso $D = 0$, $\pi_* \mathcal{O}_X$ es localmente libre de rango 1. Pero el teorema de Grauert nos dice además que la aplicación natural

$$\pi_* \mathcal{O}_X \otimes k(y) \rightarrow H^0(X_y, \mathcal{O}_{X_y})$$

es un isomorfismo para cada y . El lado derecho es canónicamente isomorfo a k . Por lo tanto, la imagen de la sección global 1 de \mathcal{O}_C vía el morfismo estructural $\mathcal{O}_C \rightarrow \pi_*\mathcal{O}_X$ genera el tallo en todo punto, mostrando que $\pi_*\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_C$. \square

Proposición A.0.4. *Si $X \rightarrow C$ es una superficie reglada entonces existe una gavilla \mathcal{E} localmente libre de rango 2 sobre C tal que $X \cong \mathbb{P}(\mathcal{E})$ sobre C . Recíprocamente, todo $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ tal es una superficie reglada sobre C .*

Si \mathcal{E} y \mathcal{E}' son dos gavillas localmente libres de rango 2 sobre C entonces $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ y $\mathbb{P}(\mathcal{E}')$ son isomorfos como superficies regladas sobre C si y sólo si existe una gavilla invertible \mathcal{L} sobre C tal que $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}$.

Demostración. Dada una superficie reglada $\pi : X \rightarrow C$ por definición existe una sección σ . Sea $D = \sigma(C)$. Entonces D es un divisor sobre X , y $D \cdot f = 1$ para cada fibra. Por el lema A.0.3, $\mathcal{E} = \pi_*\mathcal{L}(D)$ es una gavilla de rango 2 localmente libre sobre C . Además hay una aplicación natural $\pi^*\mathcal{E} = \pi^*\mathcal{L}(D) \rightarrow \mathcal{L}(D)$ sobre X . Esta aplicación es suprayectiva. De hecho, por el lema de Nakayama es suficiente verificar esto sobre cada fibra X_y . Pero $X_y \cong \mathbb{P}^1$ y $\mathcal{L}(D)_y$ es una gavilla invertible de grado 1, la cual está generada por sus secciones globales, y $\mathcal{E} \otimes k(y) \rightarrow H^0(\mathcal{L}(D)_y)$ es suprayectivo por el lema de Grauert.

Ahora usamos [Har77, II, 7.12], el cual muestra que la aplicación suprayectiva $\pi^*\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}(D) \rightarrow 0$ determina un morfismo $g : X \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ sobre C , con la propiedad de que $\mathcal{L}(D) \cong g^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$. Como $\mathcal{L}(D)$ es muy amplia sobre cada fibra, g es un isomorfismo sobre cada fibra, y entonces g es un isomorfismo. Recíprocamente, sea \mathcal{E} una gavilla de rango 2 localmente libre sobre C , sea $X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ y sea $\pi : X \rightarrow C$ la proyección. Entonces X es una superficie proyectiva no singular sobre k , y cada fibra de π es isomorfa a \mathbb{P}^1 . Para mostrar la existencia de una sección, sea $U \subseteq C$ un abierto sobre el cual \mathcal{E} es libre. Entonces $\pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{P}^1$, entonces podemos definir una sección $\sigma : U \rightarrow \pi^{-1}(U)$ por $y \mapsto y \times pt$. Entonces, como X es una variedad proyectiva, por [Har77, I, 6.8] existe una única extensión de σ a una aplicación de C a X , la cual es necesariamente una sección.

Para el último enunciado ver [Har77, II, Ex. 7.9]. \square

Observación A.0.5. Una superficie X es llamada birracionalmente reglada si es birracionalmente equivalente a $C \times \mathbb{P}^1$ para alguna curva C . (Esto incluye las superficies racionales, pues \mathbb{P}^2 es birracional a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.) De la proposición anterior se sigue que todas las superficies regladas son birracionalmente regladas.

Proposición A.0.6. Sean $\pi : X \rightarrow C$ una superficie reglada, $C_0 \subseteq X$ una sección y f una fibra. Entonces

$$\text{Pic } X \cong \mathbb{Z} \oplus \pi^* \text{Pic } C,$$

donde \mathbb{Z} es generado por C_0 . También

$$\text{Num } X \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

generados por C_0 y f , y cumpliendo $C_0.f = 1$, $f^2 = 0$.

Demostración. Claramente $C_0.f = 1$, porque C_0 y f se intersecan en un único punto, y de forma transversal. Se tiene $f^2 = 0$ porque dos fibras distintas no se intersecan.

Ahora si $D \in \text{Pic } X$, sea $n = D.f$, y sea $D' = D - nC_0$. Entonces $D'.f = 0$. Por lo tanto, por el lema A.0.3, $\pi_*\mathcal{L}(D')$ es una gavilla invertible sobre C , y claramente $\mathcal{L}(D') \cong \pi^*\pi_*\mathcal{L}(D')$. Como $\pi^* : \text{Pic } C \rightarrow \text{Pic } X$ es claramente inyectivo, vemos que $\text{Pic } X \cong \mathbb{Z} \oplus \pi^* \text{Pic } C$. Entonces, como cualquier dos fibras son numéricamente equivalentes, $\text{Num } X \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, generado por C_0 y f . \square

Lema A.0.7. Sea D un divisor sobre la superficie reglada X , y supongamos que $D.f \geq 0$. Entonces $R^i\pi_*\mathcal{L}(D) = 0$ para $i > 0$; y para toda i ,

$$H^i(X, \mathcal{L}(D)) \cong H^i(C, \pi_*\mathcal{L}(D)).$$

Demostración. Como $\mathcal{L}(D)_y$ es una gavilla invertible de grado $D.f \geq 0$ sobre $X_y \cong \mathbb{P}^1$, tenemos que $H^i(X_y, \mathcal{L}(D)_y) = 0$ para toda $i > 0$. Por lo tanto $R^i\pi_*\mathcal{L}(D) = 0$ para $i > 0$ [Har77, III, 12.9]. El segundo enunciado se sigue de [Har77, III, Ex. 8.1]. \square

Corolario A.0.8. Si el género de C es g entonces $p_a(X) = -g$, $p_g(X) = 0$, $q(X) = g$.

Demostración. El género aritmético p_a está definido por $1 + p_a = \chi(\mathcal{O}_X)$. Como $\pi_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_C$ por el lema A.0.3, tenemos $\dim H^0(X, \mathcal{O}_X) = 1$, $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = g$, $\dim H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ usando el lema A.0.7. Entonces $p_a = -g$. Por [Har77, III, 7.12.3], el género geométrico $p_g = \dim H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. La irregularidad $q = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = g$. \square

Proposición A.0.9. Sea \mathcal{E} una gavilla localmente libre de rango 2 sobre la curva C , y sea X la superficie reglada $\mathbb{P}(\mathcal{E})$. Sea $\mathcal{O}_X(1)$ la gavilla invertible $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$. Entonces hay una correspondencia uno a uno entre secciones $\sigma : C \rightarrow X$ y aplicaciones suprayectivas $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0$, donde \mathcal{L} es una gavilla invertible sobre C , dada por $\mathcal{L} = \sigma^*\mathcal{O}_X(1)$. Bajo esta correspondencia, si $\mathcal{N} = \ker(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L})$, entonces \mathcal{N} es una gavilla invertible sobre C , y $\mathcal{N} \cong \pi_*(\mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{L}(-D))$, donde $D = \sigma(C)$, y $\pi^*\mathcal{N} \cong \mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{L}(-D)$.

Demostración. La correspondencia entre secciones σ y aplicaciones supra-yectivas $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0$ está dada por [Har77, II, 7.12]. Dado σ , con $\sigma(C) = D$, se tiene la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{L}(-D) \rightarrow \mathcal{O}_X(1) \rightarrow \mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{O}_D \rightarrow 0.$$

Tomando π_* , tenemos

$$0 \rightarrow \pi_*(\mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{L}(-D)) \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0,$$

con 0 a la derecha porque $R^1\pi_*(\mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{L}(-D)) = 0$ por A.0.7. El término medio es \mathcal{E} por [Har77, II, 7.11], y el término de la derecha es \mathcal{L} , porque $\mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{O}_D$ es una gavilla sobre $D \cong C$, entonces σ^* y π_* tienen el mismo efecto. Concluimos que $\mathcal{N} \cong \pi_*(\mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{L}(-D))$. Como la gavilla $\mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{L}(-D)$ tiene grado 0 a lo largo de las fibras, vemos que es isomorfa a $\pi^*\mathcal{N}$ por A.0.6 y \mathcal{N} es invertible (A.0.3). □

Corolario A.0.10. *Toda gavilla \mathcal{E} localmente libre de rango 2 sobre una curva C es una extensión de gavillas invertibles.*

Demostración. Como $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ tiene una sección (A.0.4), se tiene una sucesión exacta $0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0$ donde \mathcal{N} y \mathcal{L} son gavillas invertibles. □

Proposición A.0.11. *Si $\pi : X \rightarrow C$ es una superficie reglada es posible escribir $X \cong \mathbb{P}(\mathcal{E})$, donde \mathcal{E} es una gavilla localmente libre sobre C con la propiedad $H^0(\mathcal{E}) \neq 0$ pero para toda gavilla invertible \mathcal{L} sobre C con $\deg \mathcal{L} < 0$ se tiene $H^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}) = 0$. En este caso el entero $e = -\deg \mathcal{E}$ es un invariante de X . Además en este caso existe una sección $\sigma_0 : C \rightarrow X$ con imagen C_0 , tal que $\mathcal{L}(C_0) = \mathcal{O}_X(1)$.*

Demostración. Se tiene que $X \cong \mathbb{P}(\mathcal{E}')$ para alguna gavilla \mathcal{E}' localmente libre sobre C (A.0.4). Entonces se reemplazará \mathcal{E}' por $\mathcal{E} = \mathcal{E}' \otimes \mathcal{M}$ para una gavilla \mathcal{M} invertible sobre C adecuada, de modo que se tenga $H^0(\mathcal{E}) \neq 0$ pero $H^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}) = 0$ para toda \mathcal{L} con $\deg \mathcal{L} < 0$. Una gavilla invertible de grado positivo sobre C es amplia [Har77, IV, 3.3], entonces es posible hacer $H^0(\mathcal{E}) \neq 0$ tomando $\deg \mathcal{M}$ lo suficientemente grande. Por otro lado, como \mathcal{E}' es una extensión de gavillas invertibles (A.0.10), y como una gavilla invertible de grado negativo puede no tener secciones globales, vemos que $H^0(\mathcal{E}) = 0$ para $\deg \mathcal{M}$ suficientemente negativo. Entonces se consigue el resultado si se toma \mathcal{M} con el menor grado tal que $H^0(\mathcal{E}' \otimes \mathcal{M}) \neq 0$. Como todas las posibles representaciones de X como $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ están dadas por las gavillas $\mathcal{E} = \mathcal{E}' \otimes \mathcal{M}$ (A.0.4) vemos que el entero $e = -\deg \mathcal{E}$ depende

sólo de X . (El grado de \mathcal{E} se define como el grado de la gavilla invertible $\bigwedge^2 \mathcal{E}$ [Har77, II, Ex. 6.12].)

Finalmente, sea $s \in H^0(\mathcal{E})$ una sección no nula. Ésta determina una aplicación inyectiva $0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{E}$. Se demostrará que el cociente $\mathcal{L} = \mathcal{E}/\mathcal{O}_C$ es una gavilla invertible sobre C . Como C es una curva no singular, y \mathcal{L} tiene rango 1 en cualquier caso, es suficiente probar que \mathcal{L} es libre de torsión. Si no lo fuera, sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ la imagen inversa de la subgavilla de torsión de \mathcal{L} bajo la aplicación $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0$. En tal caso \mathcal{F} es libre de torsión de rango 1 sobre C , y por tanto invertible. Además, $\mathcal{O}_C \subsetneq \mathcal{F}$, entonces $\deg \mathcal{F} > 0$. Pero entonces, como $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$, se tiene $H^0(\mathcal{E} \otimes \check{\mathcal{F}}) \neq 0$, y $\deg \check{\mathcal{F}} < 0$, lo cual contradice la elección de \mathcal{E} .

Ahora, como \mathcal{L} es invertible, se obtiene una sección $\sigma_0 : C \rightarrow X$ por A.0.9. Sea C_0 su imagen. Entonces $\mathcal{N} = \mathcal{O}_C$ en la notación de A.0.9, y $\mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{L}(-C_0) \cong \mathcal{O}_X$, lo cual muestra que $\mathcal{L}(C_0) \cong \mathcal{O}_X(1)$. \square

Notación A.0.12. Para el resto de esta sección se usará la siguiente notación. Sean C una curva de género g , y $\pi : X \rightarrow C$ una superficie reglada sobre C . Escribimos $X \cong \mathbb{P}(\mathcal{E})$, donde \mathcal{E} satisface las condiciones de la proposición A.0.11, en cuyo caso decimos que \mathcal{E} está normalizada. Esto no necesariamente determina a \mathcal{E} de forma única, pero sí determina a $\deg \mathcal{E}$. Sea \mathbf{e} el divisor sobre C correspondiente a la gavilla invertible $\bigwedge^2 \mathcal{E}$, y denotamos $e = -\deg \mathbf{e}$. Fijamos una sección C_0 de X con $\mathcal{L}(C_0) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$. Si \mathbf{b} es un divisor sobre C , entonces denotamos al divisor $\pi^*\mathbf{b}$ sobre X por $\mathbf{b}f$, por abuso de notación. Así todo elemento de $\text{Pic } X$ puede ser escrito como $aC_0 + \mathbf{b}f$ con $a \in \mathbb{Z}$ y $\mathbf{b} \in \text{Pic } \mathbf{C}$. Todo elemento de $\text{Num } X$ puede ser escrito como $aC_0 + bf$ con $a, b \in \mathbb{Z}$.

Proposición A.0.13. *Si D es cualquier sección de X , la cual corresponde a una aplicación suprayectiva $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0$, y si $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{d})$ sobre C , entonces $\deg \mathbf{d} = C_0.D$, y*

$$D \sim C_0 + (\mathbf{d} - \mathbf{e})f.$$

En particular, tenemos $C_0^2 = \deg \mathbf{e} = -e$.

Demostración. Como $\mathcal{L} = \sigma^*(\mathcal{L}(C_0 \otimes \mathcal{O}_D))$, se tiene que $\deg \mathcal{L} = C_0.D$ por [Har77, V, 1.1 y 1.3]. Escribiendo

$$0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0,$$

se obtiene $\mathcal{L}(C_0 - D) \cong \pi^*\mathcal{N}$ por A.0.9 y la elección de C_0 (A.0.12). Pero $\mathcal{N} = \mathcal{L}(\mathbf{e} - \mathbf{d})$, por lo que tenemos $D \sim C_0 + (\mathbf{d} - \mathbf{e})f$ en $\text{Pic } X$. Finalmente, en el caso $D = C_0$, $\mathcal{N} = \mathcal{O}_C$, entonces $\mathbf{d} = \mathbf{e}$ y se tiene $C_0^2 = \deg \mathbf{e} = -e$. \square

Lema A.0.14. *El divisor canónico K_X de X está dado por*

$$K_X \sim -2C_0 + (K_C + \mathbf{e})f$$

donde K_C es el divisor canónico sobre C .

Demostración. Sea $K_X \sim aC_0 + \mathbf{b}f$. Usando la fórmula de adjunción [Har77, V, 1.5] para una fibra f , se tiene

$$-2 = f.(f + K + X) = a.$$

Ahora usemos la fórmula de adjunción para C_0 en su forma de gavillas invertibles [Har77, II, 8.20], la cual dice que

$$\omega_{C_0} \cong \omega_X \otimes \mathcal{L}(C_0) \otimes \mathcal{O}_{C_0} \cong \mathcal{L}(-C_0 + \mathbf{b}f) \otimes \mathcal{O}_{C_0}.$$

Identificando C_0 con C vía π , el enunciado correspondiente en divisores sobre C es $K_C = -\mathbf{e} + \mathbf{b}$, entonces $\mathbf{b} = \mathbf{e} + K_C$. \square

Corolario A.0.15. *Para la equivalencia numérica se tiene*

$$K_X \equiv -2C_0 + (2g - 2 - e)f$$

y además

$$K_X^2 = 8(1 - g)$$

Demostración. Tenemos $\deg K_C = 2g - 2$ [Har77, IV, 1.3.3] y $\deg \mathbf{e} = -e$. Entonces calculamos K_X^2 usando A.0.6 y A.0.13. \square

Ejemplo A.0.16. Para toda curva C , la superficie reglada $X = C \times \mathbb{P}^1$ corresponde a la gavilla localmente libre (normalizada) $\mathcal{E} = \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C$ sobre C . En este caso $e = 0$, y C_0 es cualquier fibra de la segunda proyección.

Ejemplo A.0.17. Si C es una curva de género ≥ 1 , y $\mathcal{E} = \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}$ donde $\deg \mathcal{L} = 0$ pero $\mathcal{L} \not\cong \mathcal{O}_C$, entonces hay dos opciones de \mathcal{E} normalizadas, las cuales son \mathcal{E} y $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^{-1}$. Se tiene $e = 0$, $\deg \mathbf{e} = 0$, pero \mathbf{e} está determinado sólo salvo signo. Hay exactamente dos opciones de C_0 , ambas con $C_0^2 = 0$.

Ejemplo A.0.18. Sobre cualquier curva C , sea $\mathcal{E} = \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}$ con $\deg \mathcal{L} < 0$. Entonces la gavilla \mathcal{E} normalizada es única, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{e})$ y \mathbf{e} es único. La sección C_0 es única, con $C_0^2 = -e < 0$. En este caso $e = -\deg \mathcal{L} > 0$.

Ejemplo A.0.19. Sea C una curva encajada en \mathbb{P}^n , de grado d . Sea X_0 el cono sobre C en \mathbb{P}^{n+1} , con vértice P_0 . Si se hace blow up en el punto P_0 , se obtendrá una superficie reglada X sobre C , del tipo A.0.18, con $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_C(-1)$.

En particular, $e = d$, y la imagen inversa de P_0 en X es la sección C_0 con $C_0^2 = -d$.

Primero se mostrará que \mathbb{P}^{n+1} con blow up en un punto es isomorfo a $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1))$ sobre \mathbb{P}^n . De hecho, \mathbb{P}^{n+1} tiene coordenadas x_0, \dots, x_{n+1} . Si se hace blow up en el punto $P_0 = (1, 0, \dots, 0)$, entonces se obtiene la variedad $V \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n+1}$ definida por las ecuaciones $x_i y_j = x_j y_i$ para $i, j = 1, 2, \dots, n+1$, donde y_1, \dots, y_{n+1} son las coordenadas de \mathbb{P}^n (ver [Har77, II, 7.12.1]). Por otro lado, si $\mathcal{E} = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$ sobre \mathbb{P}^n , entonces $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ está definido como $\text{Proj } S(\mathcal{E})$, donde $S(\mathcal{E})$ es el álgebra simétrica de \mathcal{E} . Como \mathcal{E} está generado por la sección global 1 de \mathcal{O} y y_1, \dots, y_{n+1} de $\mathcal{O}(1)$. Por lo tanto $S(\mathcal{E})$ es un cociente del álgebra de polinomios $\mathcal{O}[x_0, \dots, x_{n+1}]$ por la aplicación $x_0 \mapsto 1, x_i \mapsto y_i$ para $i = 1, \dots, n+1$. El kernel de esta aplicación es el ideal generado por $x_i y_j - x_j y_i$, $i = 1, \dots, n+1$. Por lo tanto $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ es isomorfo al subesquema de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n+1}$ definido por estas ecuaciones, el cual es la misma variedad $V \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n+1}$ definida arriba. La primera proyección hace ver a V como $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, y la segunda proyección hace ver a V como el blow up en un punto. Ahora sea Y una subvariedad de \mathbb{P}^n , y X_0 su cono en \mathbb{P}^{n+1} , con vértice P_0 . Si hacemos blow up en P_0 sobre X_0 , se obtiene una variedad X que es la transformada estricta de X_0 en V . Por otro lado, esta variedad X es claramente la imagen inversa de Y bajo la proyección $\pi : V \cong \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{P}^n$. De aquí que $X \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y(1))$. Tensorando con $\mathcal{O}_Y(1)$, se tiene la misma variedad, por lo que $X \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y(-1))$. En particular, si Y es una curva C no singular de grado d en \mathbb{P}^n , entonces $\mathcal{L} = \mathcal{O}_C(-1)$ tiene grado $-d$.

Ejemplo A.0.20. Como un caso especial, se tiene que \mathbb{P}^2 con blow up en un punto es isomorfo a la superficie reglada sobre \mathbb{P}^1 definida por $\mathcal{E} = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1)$, en el cual se tiene $e = 1$.

Teorema A.0.21. *Sea X una superficie reglada sobre la curva C de género g , determinada por una gavilla localmente libre normalizada \mathcal{E} .*

1. *Si \mathcal{E} se descompone (i.e., es suma directa de dos gavillas invertibles) entonces $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}$ para alguna \mathcal{L} con $\deg \mathcal{L} \leq 0$. Por lo tanto $e \geq 0$. Todos los valores de $e \geq 0$ son posibles.*
2. *Si \mathcal{E} es indescomponible, entonces $-2g \leq e \leq 2g - 2$.*

Demostración. Si \mathcal{E} se descompone, entonces $\mathcal{E} \cong \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ para dos gavillas invertibles \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 sobre C . Se debe cumplir $\deg \mathcal{L}_i \leq 0$ por la normalización (A.0.11) y además $H^0(\mathcal{L}_i) \neq 0$ para al menos una de ellas. Así que una de ellas es \mathcal{O}_C , por lo que se tiene $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}$ con $\deg \mathcal{L} \leq 0$. De los ejemplos se ve que todos los valores de $e \geq 0$ son posibles. Ahora supongamos que \mathcal{E}

no se descompone. Entonces, correspondiente a la sección C_0 , se tiene una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0$$

para alguna \mathcal{L} (A.0.11). Ésta debe ser una extensión no trivial, por lo que corresponde a un elemento no cero $\xi \in \text{Ext}^1(\mathcal{L}, \mathcal{O}_C) \cong H^1(C, L^\vee)$. En particular, $H^1(\mathcal{L}^\vee) \neq 0$, entonces se debe cumplir $\deg \mathcal{L}^\vee \leq 2g - 2$. Como $e = -\deg \mathcal{L}$, se tiene $e \leq 2g - 2$.

Por otro lado, se tiene que $H^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{M}) = 0$ para toda $\deg \mathcal{M} < 0$ por la normalización. En particular, tomando $\deg \mathcal{M} = -1$, se tiene

$$0 = H^0(\mathcal{E} \otimes \mathcal{M}) \rightarrow H^0(\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}) \rightarrow H^1(\mathcal{M}) \rightarrow \dots,$$

entonces se debe tener

$$\dim H^0(\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}) \leq \dim H^1(\mathcal{M}).$$

Como $\deg \mathcal{M} < 0$, $H^0(\mathcal{M}) = 0$, entonces por el teorema de Riemann-Roch, se tiene que $\dim H^1(\mathcal{M}) = g$. Por otro lado, también por el teorema de Riemann-Roch, se tiene

$$\dim H^0(\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}) \geq \deg \mathcal{L} - 1 + 1 - g.$$

Combinandolos se obtiene que $\deg \mathcal{L} \leq 2g$, y de aquí $e \geq -2g$. \square

Corolario A.0.22. *Si $g = 0$, entonces $e \geq 0$, y para cada $e \geq 0$ hay exactamente una superficie reglada racional con invariante e , dada por $\mathcal{E} = \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C(-e)$ sobre $C = \mathbb{P}^1$.*

Demostración. Si $g = 0$, el caso 2 de A.0.21 no puede ocurrir. De aquí $\mathcal{E} = \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{L}$. Pero las únicas gavillas invertibles sobre \mathbb{P}^1 son $\mathcal{O}(n)$ para $n \in \mathbb{Z}$. Entonces para cada $e \geq 0$ hay sólo una posibilidad. \square

Corolario A.0.23. *Toda gavilla \mathcal{E} localmente libre de rango 2 sobre \mathbb{P}^1 es descomponible.*

Demostración. Haciendo producto tensorial de \mathcal{E} con una gavilla invertible adecuada, \mathcal{E} es normalizado y es isomorfo a $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-e)$ por A.0.22. \square

Teorema A.0.24. *Si X es una superficie reglada sobre una curva elíptica C , correspondiente a una gavilla \mathcal{E} indescomponible, entonces $e = 0$ o -1 , y hay exactamente una superficie reglada sobre C para cada uno de estos valores de e .*

Demostración. Ver [Har77, V, §2]. \square

Bibliografía

- [Bia73] A. Bialynicki-Birula, *Some theorems on actions of algebraic groups*, Ann. of Math. (2) **98** (1973), 480–497.
- [Bou89] N. Bourbaki, *General topology*, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [Cat] Catanese, F. Chow varieties, Hilbert schemes and moduli spaces of surfaces of general type, *J. Alg. Geometry* **1** (1992) 561-596.
- [Ca5] Cayley, A. On a new analytical representation of curves in space, *Quarterly J. Pure and Appl. Math* **3** (1860) 225-236; Collected Papers, Vol. 4, Cambridge Univ. Press, 1889, p. 446-455.
- [C-vdW] Chow, W. L. y van der Waerden, B. L. Über zugeordnete Formen und algebraische Systeme von algebraischen Mannifaltigkeiten (Zur Algebraischen Geometrie IX), *Math. Ann.*, **113** (1937) 692-704.
- [EH92] Eisenbud, D. y Harris, J. The dimension of the Chow variety of curves, *Compositio Math.* **83** (1992) 291-310.
- [Eli94] E. J. Elizondo, *The Euler series of restricted Chow varieties*, Compositio Math. **94** (1994), no. 3, 297–310.
- [EH96] E. J. Elizondo and R. Hain, *Chow varieties of Abelian varieties*, Bol. Soc. Mat. Mex. **2** (1996), no. 3, 95–99.
- [EK12] E.-J. Elizondo and Shun-ichi Kimura, *Rationality of motivic Chow series modulo \mathcal{A}^1 -hotopy.*, Adv. Math. **230** (2012), no. 3, 876–893.
- [EL98] E. J. Elizondo and P. Lima-Filho, *Euler-Chow series and projective bundles formulas*, J. Algebraic Geometry **7** (1998), 695–729.
- [FM91] Friedlander, E. y Mazur, B. Filtrations on the homology of algebraic varieties, preprint (eleventh draft), 1991.

- [Fri91] E. Friedlander, *Algebraic cycles, Chow varieties and Lawson homology*, *Compositio Math.* **77** (1991), 55–93.
- [FL92] E. Friedlander and H. B. Lawson, Jr., *A theory of algebraic cocycles*, *Ann. of Math. (2)* **136** (1992), 361–428.
- [FM94a] E. Friedlander and B. Mazur, *Filtrations on the homology of algebraic varieties*, *Mem. Amer. Math. Soc.* **110** (1994), no. 529.
- [Ful84] W. Fulton, *Intersection theory*, 1st ed., Springer-Verlag, Heidelberg, 1984.
- [FH91] W. Fulton and J. Harris, *Representation theory, a first course*, 1st ed., *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [FM94b] W. Fulton and R. MacPherson, *A compactification of configuration spaces*, *Ann. of Math. (2)* **139** (1994), 183–225.
- [Ful97] W. Fulton, *Young tableaux*, *Student Texts*, vol. 35, London Mathematical Society, 1997.
- [Ful98] Fulton, W. *Introduction to Toric varieties*, *Annals of Mathematics Studies*, **131**, 1st edn., Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
- [GKZ94] Gelfand, I. M, Kapranov, M. M. y Zelevinsky, A. V. *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Birkhäuser, Boston, MA, 1994.
- [Har75b] Hartshorne, R. Equivalence relations on algebraic cycles and subvarieties of small codimension. In: *Algebraic Geometry, Arcata 1974, Proc. Symp. Pure Math.* **29**, pp. 129-164, American Mathematical Society, Providence, RI, 1975.
- [Har77] *Algebraic Geometry*, *Graduate Texts in Mathematics*, Springer Verlag, 1997.
- [Hoy66] W. Hoyt, *On the Chow bunches of different projective embeddings of a projective variety*, *Amer. J. Math.* **88** (1966), 273–278.
- [Kap93] M. M. Kapranov, *Chow quotients of Grassmannians I*, *Adv. Soviet Math.* **16** (1993), no. 2, 29–110, I. M. Gelfand Seminar.

- [KSZ91] *Quotients of toric varieties*, *Mathematische Annalen* **290** (1991), 643–655.
- [Kol96] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, vol. 32, Sprin-Verlag, Berlin, 1996.
- [LS75] A. T. Lascu and D. B. Scott, *An algebraic correspondence with applications to blowing up Chern classes*, *Ann. di Mat.* **102** (1975), 1–36.
- [LY87] H. B. Lawson, Jr. and Steve S. T. Yau, *Holomorphic symmetries*, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **20** (1987), 557–577.
- [Law95] H. B. Lawson, Jr., *Spaces of Algebraic Cycles*, *Surveys in Differential Geometry*, vol. 2, 137–213, *Surveys in Differential Geometry*, International Press, 1995, pp. 137–213.
- [Mac62] I. G. Macdonald, *The Poincaré polynomial of a symmetric product*, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **58** (1962), 563–568.
- [Mac79] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and hall polynomials*, Clarendon Press, Oxford, 1979.
- [Nee91] Neeman, A. 0-cycles in \mathbb{P}^n , *Adv. Math.* **89** (1991) 217–227.
- [Sam71] P. Samuel, *Seminaire sur l'équivalence rationnelle*, Paris-Orsay, 1971.