



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**INTRODUCCIÓN A LA HOMOLOGÍA DE
KHOVANOV**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO**

P R E S E N T A:

ALFREDO EDUARDO FLORES SERRANO



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. MARIO EUDAVE MUÑOZ
CIUDAD DE MÉXICO, 2020**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno

Apellido paterno
Apellido materno
Nombre(s)
Teléfono
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Carrera
Número de cuenta

2. Datos del tutor

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

3. Datos de sinodal 1

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

4. Datos de sinodal 2

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

5. Datos de sinodal 3

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

6. Datos de sinodal 4

Grado
Nombre(s)
Apellido paterno
Apellido materno

7. Datos de trabajo escrito.

Título
Número de páginas
Año

1. Datos del alumno

Flores
Serrano
Alfredo Eduardo
5567748704
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
311286683

2. Datos del tutor

Dr
Mario
Eudave
Muñoz

3. Datos de sinodal 1

Dr
Max
Neumann
Coto

4. Datos de sinodal 2

Dr
Omar
Antolín
Camarena

5. Datos de sinodal 3

Dr
Vinicio Antonio
Gómez
Gutiérrez

6. Datos de sinodal 4

M en C
Ernesto Alejandro
Vázquez
Navarro

7. Datos de trabajo escrito.

Introducción a la Homología de Khovanov
118
2020



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
Secretaría General
División de Estudios Profesionales

Votos Aprobatorios

LIC. IVONNE RAMÍREZ WENCE
Directora General
Dirección General de Administración Escolar
Presente

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

Introducción a la Homología de Khovanov

realizado por **Alfredo Eduardo Flores Serrano** con número de cuenta **311286683** quien ha decidido titularse mediante la opción de tesis en la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Propietario Dr. Max Neumann Coto

Propietario Dr. Omar Antolín Camarena

Propietario Tutor Dr. Mario Eudave Muñoz

Suplente Dr. Vinicio Antonio Gómez Gutiérrez

Suplente M. en C. Ernesto Alejandro Vázquez Navarro

Atentamente

"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., A 11 DE NOVIEMBRE DE 2019

JEFE DE LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS PROFESIONALES

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

Agradecimientos

Quiero comenzar agradeciendo a mis padres por todo su apoyo y por brindarme todo lo que estuvo en sus manos para que yo pudiera llegar hasta aquí.

Gracias a mi tutor, Mario, por su apoyo y su paciencia, además por presentarme el fascinante mundo de la Teoría de Nudos.

A mis sinodales por sus amables correcciones, observaciones y sugerencias.

Agradezco a la UNAM por toda la formación recibida, en particular a la Facultad de Ciencias y al Instituto de Matemáticas.

Finalmente, agradezco al Proyecto PAPIIT IN101317 por una beca recibida durante la realización de esta tesis.

Preámbulo

El presente texto busca ser una introducción al artículo *A categorification of Jones Polynomial* de M. Khovanov [10].

En el primer capítulo se presentan algunas definiciones y resultados básicos de la *Teoría de Nudos y Enlaces*, en particular se definen *diagramas de enlaces* e *invariantes de enlaces*.

El segundo capítulo estudiamos un invariante conocido como *polinomio de Jones*, este es descrito de forma combinatoria por L. Kauffman en [9]. Khovanov define una variación “escalada” de dicho invariante. Mostramos que ambas descripciones coinciden salvo por un cambio de variable.

A partir de la versión escalada del polinomio de Jones, Khovanov construye un complejo de cocadenas de *espacios vectoriales graduados* cuya *característica de Euler* nos devuelve el polinomio de Jones. Esta construcción fue simplificada por Bar-Natan en [3].

El capítulo 3 describe dicha construcción y muestra que además el complejo de cocadenas está bien definido para cada diagrama, salvo isomorfismo. Como ejemplo se calculan las homología de tres diagramas de enlaces distintos.

Khovanov mostró además que la homología de dicho complejo de cocadenas no depende del diagrama de enlace elegido e induce un invariante de enlaces. En el capítulo 4 se demuestra este resultado siguiendo el bosquejo descrito por Bar-Natan.

El capítulo 5 muestra algunas propiedades de la homología de Khovanov que permiten simplificar los cálculos en algunos casos. En particular se demuestra la existencia de una *sucesión exacta larga* descrita por P. Turner en [17] que relaciona las homología de ciertos diagramas mediante la cual se calculan de forma sencilla la homología de Khovanov de los diagramas del capítulo 3.

Se incluye además un atajo computacional descrito por Khovanov que permite simplificar el cálculo de la homología de muchos enlaces, como es el caso de los *enlaces toroidales* $T_{2,k}$.

Como un ejemplo final calculamos la homología del *nudo figura-ocho* usando dicho atajo.

Finalizamos mencionando algunas de las líneas de investigación que han surgido acerca de este invariante.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Conceptos Básicos	1
1.2. Movidas de Reidemeister	4
1.3. Enlaces orientados	5
2. Polinomio de Jones	9
2.1. Corchete de Kauffman	9
2.2. Corchete escalado	15
3. Homología de Khovanov	21
3.1. Definiciones previas	21
3.2. Espacios vectoriales graduados	23
3.3. (Co)homología	27
3.4. Corchete de Khovanov	30
4. Invarianza de la Homología de Khovanov	59
4.1. Movidas de Tipo I	61
4.2. Movidas de Tipo II	64
4.3. Movidas de Tipo III	71
5. Propiedades de la Homología de Khovanov	77
5.1. Aplicación al número de cruces	80
5.2. Una sucesión exacta para la Homología de Khovanov	83
5.3. Un atajo computacional	90
5.4. Relación con el polinomio de Jones	102
6. Comentarios finales	105

Capítulo 1

Introducción

Cuando hablamos de un nudo generalmente pensamos en una cuerda que se enreda moviendo sus extremos.

Aunque estos son objetos que aparecen de manera natural en muchas actividades, no podemos *a priori* distinguirlos topológicamente dado que se pueden desenredar revirtiendo los movimientos hasta llegar a la cuerda de la cual partimos.

Sin embargo si unimos los extremos de uno de estos nudos no siempre es posible deformarlo mediante deformaciones simples, sin cortes ni movimientos sobrenaturales como hacer que un fragmento de la cuerda atraviese a otro, o que algun fragmento se colapse a un solo punto.

En este trabajo nos concentraremos en esta última concepción de nudos y en cómo saber si dos nudos son distintos.

1.1. Conceptos Básicos

Definición. Un **homeomorfismo** es una función continua, biyectiva y con inversa continua.

Definición. Un **nudo** K es un encaje de S^1 en \mathbb{R}^3 , esto es, una función $K : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que restringida a su imagen es un homeomorfismo.

Equivalentemente, un nudo es una función continua $K : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ inyectiva en $[0, 1)$ tal que $f(0) = f(1)$.

Ejemplos:

- El nudo trivial $\bigcirc : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$\bigcirc(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) = (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), 0).$$

- El nudo trébol $T : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(t) = (\operatorname{sen}(2\pi t) + 2\operatorname{sen}(4\pi t), \cos(2\pi t) - 2\cos(4\pi t), \operatorname{sen}(6\pi t)).$$

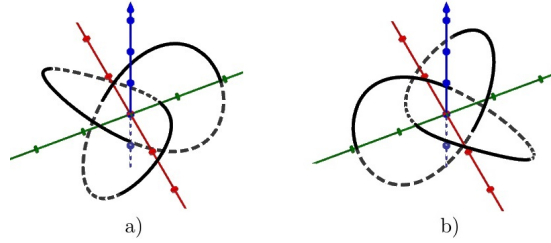


Figura 1.1: (a) Trébol de mano izquierda. (b) Trébol de mano derecha.

Identificaremos el encaje con su imagen en \mathbb{R}^3 . Así podemos ver a un enlace como una colección finita de curvas simples cerradas contenidas en \mathbb{R}^3 . Esta interpretación es más amable pues nos permite considerar a K como un subconjunto de \mathbb{R}^3 sin distinguir entre las distintas parametrizaciones que se le puedan dar.

Aclaración: Hay dos nudos conocidos como tréboles. El nudo T descrito en el ejemplo anterior es a veces referido como “trébol de mano derecha”. Mientras que al resultado de reflejar T sobre un plano en \mathbb{R}^3 es llamado “trébol de mano izquierda”. Ambos nudos se ilustran en la Figura 1.1.

Siguiendo a [10] y [3], cada que mencionemos al nudo trébol nos referiremos al nudo trébol de mano derecha.

Definición. Sea $n \in \mathbb{N}$. Un **enlace** de n componentes es $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ donde los K_i son nudos tales que $\forall i \neq j K_i \cap K_j = \emptyset$.

Dos enlaces $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ son equivalentes si existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que preserve la orientación tal que $h[L_1] = L_2$.

Así un nudo resulta ser un enlace de 1 componente.

Definición. Un **invariante de enlaces** es una función que a cada enlace le asocia un objeto, de manera que si dos enlaces son equivalentes entonces tienen el mismo objeto asociado.

Estas definiciones, aunque son precisas, tienen un inconveniente: existen enlaces que son demasiado complicados.

En este trabajo estudiaremos invariantes que en general no se pueden definir para cualquier tipo de enlaces, así que nos restringiremos a una clase particular.

Definición. Un enlace es **poligonal** si es la unión de un número finito de segmentos de recta. Diremos que un enlace es **manso** si es equivalente a un enlace poligonal.

A los enlaces que no son mansos se les conoce como **salvajes**.

Un ejemplo de nudo salvaje es el mostrado en la Figura 1.2.

Definición. Un **pseudodiagrama** de un enlace $L \subseteq \mathbb{R}^3$ es la imagen de L bajo $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow P$ la proyección ortogonal sobre un plano P .

Diremos que una proyección es regular si se cumplen simultáneamente

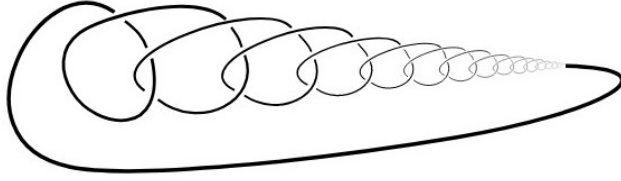
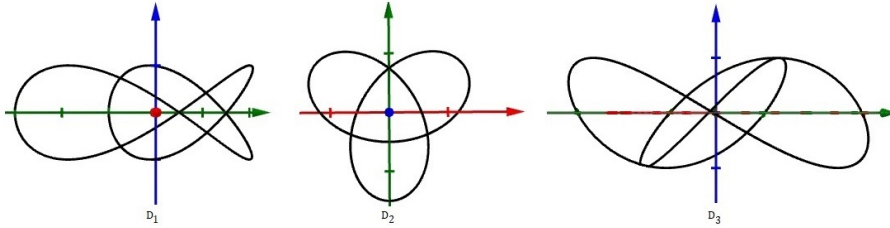


Figura 1.2: Nudo salvaje.

- $\forall p \in P$ se tiene que $|\pi^{-1}(p) \cap L| \in \{0, 1, 2\}$
- $|\{p \in P : |\pi^{-1}(p) \cap L| = 2\}| < \infty$
- Si $|\pi^{-1}(p) \cap L| = 2$ entonces p es una intersección transversal de $\pi[L]$.

Un pseudodiagrama de un enlace es regular si la proyección que lo define es regular. A los puntos $p \in D$ tales que $|\pi^{-1}(p)| = 2$ les llamamos cruces. Si L es un enlace poligonal se suele pedir además que ningún cruce sea la proyección de un vértice de L .

Figura 1.3: Distintos pseudodiagramas del nudo trébol. D_1 y D_2 son regulares, D_3 no lo es.

Proposición 1.1.1. Para cada enlace manceo existe una proyección sobre algún plano tal que el pseudodiagrama resultante es regular.

La demostración de este resultado se puede encontrar en [5].

A partir de este momento, cada vez que digamos enlace nos referiremos a un enlace manceo y trabajaremos solo con pseudodiagramas regulares.

Sin pérdida de generalidad supondremos que el plano sobre el que proyectamos es $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ y que $\pi((x, y, z)) = (x, y)$.

Definición. Sea D pseudodiagrama de un enlace L . Sea $p \in D$ un cruce y $A = (x, y, z_1), B = (x, y, z_2) \in L$ tales que $\pi(A) = \pi(B) = p$, decimos que A **pasa por arriba** de B si $z_1 > z_2$.

Un diagrama de un enlace es un pseudodiagrama en el que en cada cruce se indique cual segmento contiene al punto que pasa por arriba, como se muestra en la Figura 1.4.

Debe entenderse que el segmento que pasa por abajo se ha pintado en un vecindad muy pequeña alrededor del cruce usando el color del fondo (en este caso blanco). No debe interpretarse como si dicha vecindad hubiese sido eliminada.

Identificando a P con \mathbb{R}^2 convendremos en que todos los diagramas de enlaces están contenidos en \mathbb{R}^2 .



Figura 1.4: El segmento a contiene al punto que pasa por arriba.

1.2. Movidas de Reidemeister

Definición. Una **movida** R_0 es un homeomorfismo de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 que preserva la orientación.

Sea D diagrama de un enlace. Diremos que un diagrama D' **se obtiene de D mediante una movida** R_1, R_2 o R_3 respectivamente si existe un disco tal que en su interior se cambie el diagrama como se muestra en la Figura 1.5 y fuera del disco el diagrama quede intacto.

Llamamos a R_0, R_1, R_2 y R_3 movidas de Reidemeister.

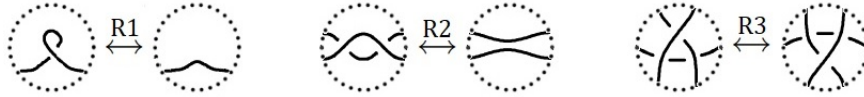


Figura 1.5: Movidas de Reidemeister.

Para las movidas R_0 hay que tener en cuenta que la vecindad del segmento que pasa por abajo del cruce sigue estando presente y por lo tanto no hay un “hueco” que permita separar cada arco del resto del diagrama o que permita pasar otros arcos a través de él.

Definición. Dos diagramas son **R-equivalentes** si uno de ellos se puede obtener del otro mediante una sucesión finita de movidas de Reidemeister.

Teorema 1.2.1 (Reidemeister). *Sean D_1 y D_2 diagramas de los enlaces mansos L_1 y L_2 , respectivamente. D_1 y D_2 son R-equivalentes si y solo si L_1 y L_2 son equivalentes.*

La demostración se puede encontrar en [15].

Corolario 1.2.2. Sea $\mathcal{D} = \{\text{Diagramas}\}$, $\mathcal{L} = \{\text{Enlaces}\}$ y X una clase.

Si $f : \mathcal{D} \rightarrow X$ cumple que $f(D) = f(D')$ para cualesquiera D, D' diagramas R-equivalentes, entonces $F : \mathcal{L} \rightarrow X$ dada por $F(L) = f(D)$ tal que D es diagrama de L está bien definida y es un invariante de enlaces.

El teorema de Reidemeister es de gran importancia pues permite estudiar enlaces mansos en \mathbb{R}^3 a través de sus diagramas en \mathbb{R}^2 convirtiendo así un problema topológico en uno combinatorio. Su corolario además nos permite definir invariantes de nudos a partir de los diagramas.

1.3. Enlaces orientados

Definición. Un **enlace orientado** es aquel al que a cada componente se le asigna una dirección para recorrerlo.

Representaremos la orientación de un enlace mediante flechas que indiquen la dirección de cada una de sus componentes. Representamos un nudo orientado con un diagrama en el cual las curvas son marcadas con una flecha que indique la orientación, como en la Figura 1.6.

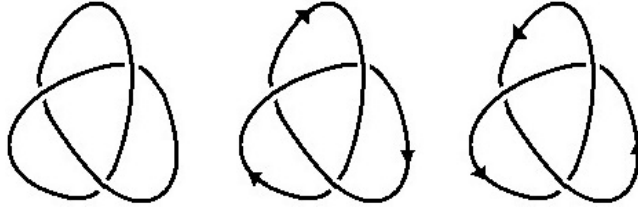


Figura 1.6: Nudo trébol y sus orientaciones.

Extendemos la equivalencia de enlaces a equivalencia de enlaces orientados pidiendo que las orientaciones dadas se empalmen. Además cada orientación sobre enlaces induce una orientación en los diagramas.

Es inmediato del Teorema de Reidemeister que si L_1 y L_2 son enlaces orientados con diagramas orientados D_1 y D_2 respectivamente, entonces L_1 y L_2 son equivalentes si y solo si D_1 se puede obtener de D_2 mediante una sucesión finita de movidas orientadas de Reidemeister, como las que se muestran en la Figura 1.7.

De la misma manera, si una función definida sobre los diagramas orientados se preserva bajo movidas orientadas de Reidemeister entonces induce un invariante de enlaces orientados.

Para cada cruce de un diagrama de enlace orientado asignaremos un signo usando la regla de la mano derecha como se muestra en la Figura 1.8.

Un análisis más detallado de las movidas orientadas de Reidemeister, así como un subconjunto generador de movidas más pequeño, puede consultarse en [14].

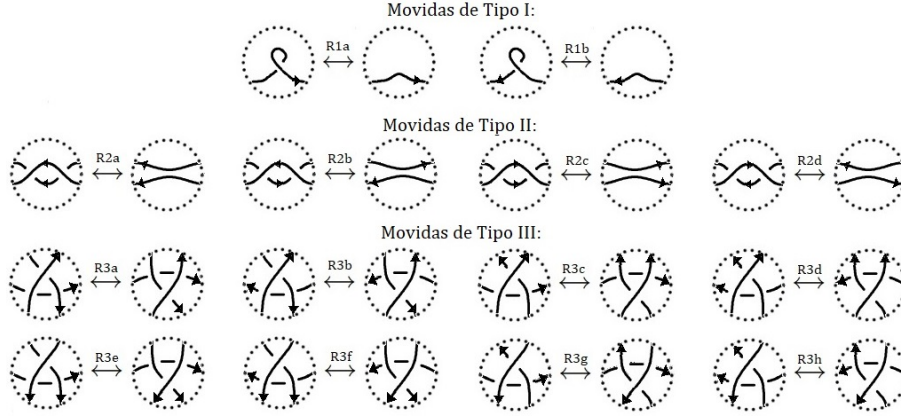


Figura 1.7: Movidas orientadas de Reidemeister.



Figura 1.8: Cruce negativo (-1) y positivo (+1).

Definición. Sea D un diagrama orientado. Se define:

- $x(D) = |\{\text{cruces negativos}\}|$
- $y(D) = |\{\text{cruces positivos}\}|$
- $w(D) = y(D) - x(D)$.

A $w(D)$ se le llama **número de retorcimiento**, conocido popularmente por su nombre en inglés **writhe**.

Convención: Con el fin de simplificar la notación, a partir de este momento cada que hagamos movidas de Reidemeister suprimiremos los discos puntuados y consideraremos en cada proposición diagramas de enlaces que difieren solo en los cruces que se indiquen.

Proposición 1.3.1.

$$\begin{aligned}
 x \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \right) &= x \left(\frown \right) & y \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \right) &= y \left(\frown \right) + 1 \\
 x \left(\begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \end{array} \right) &= x \left(\smile \right) + 1 & y \left(\begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \end{array} \right) &= y \left(\smile \right) \\
 x \left(\begin{array}{c} \nearrow \nearrow \\ \searrow \searrow \end{array} \right) &= x \left(\begin{array}{c} \searrow \searrow \\ \nearrow \nearrow \end{array} \right) + 1 & y \left(\begin{array}{c} \nearrow \nearrow \\ \searrow \searrow \end{array} \right) &= y \left(\begin{array}{c} \searrow \searrow \\ \nearrow \nearrow \end{array} \right) + 1 \\
 x \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \searrow \nearrow \end{array} \right) &= x \left(\begin{array}{c} \searrow \nearrow \\ \nearrow \searrow \end{array} \right) & y \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \searrow \nearrow \end{array} \right) &= y \left(\begin{array}{c} \searrow \nearrow \\ \nearrow \searrow \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Demostración. Se puede verificar que sin importar la orientación dada:

1. El cruce indicado en \nearrow es positivo y el cruce en \searrow es negativo.
2. En $\nearrow \searrow$ un cruce es positivo y el otro negativo.
3. Las movidas de Tipo III preservan el número de cruces positivos y el número de cruces negativos.

□

Corolario 1.3.2.

$$\begin{aligned}
 w \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \right) &= w \left(\frown \right) + 1 \\
 w \left(\begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \end{array} \right) &= w \left(\smile \right) - 1 \\
 w \left(\begin{array}{c} \nearrow \nearrow \\ \searrow \searrow \end{array} \right) &= w \left(\begin{array}{c} \searrow \searrow \\ \nearrow \nearrow \end{array} \right) \\
 w \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \searrow \nearrow \end{array} \right) &= w \left(\begin{array}{c} \searrow \nearrow \\ \nearrow \searrow \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Capítulo 2

Polinomio de Jones

En [8] Jones define para cada diagrama de un enlace el polinomio de Laurent con variable $t^{1/2}$ obtenido mediante las siguientes reglas recursivas:

$$V(O) = 1, \quad t^{-1}V(\mathcal{L}_+) - tV(\mathcal{L}_-) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V(\mathcal{L}_0).$$

Donde $\mathcal{L}_-, \mathcal{L}_+$ y \mathcal{L}_0 son los diagramas tales que existe un cruce y un disco alrededor de dicho cruce tal que $\mathcal{L}_-, \mathcal{L}_+$, y \mathcal{L}_0 son idénticos fuera del disco y dentro del disco difieren como lo muestra la siguiente Figura 2.1.



Figura 2.1: De izquierda a derecha se muestran los enlaces $\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-$ y \mathcal{L}_0 .

Jones probó que V estaba bien definido y que si D y D' son diagramas orientados equivalentes entonces $V(D) = V(D')$.

Así, la función

$$\mathcal{V} : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$$

dada por $\mathcal{V}(L) = V(D)$ tal que D es diagrama orientado de L , está bien definida y es un invariante de enlaces orientados.

Al polinomio $\mathcal{V}(L)$ se le conoce como polinomio de Jones.

Posteriormente Kauffman describió una mejor manera de calcular dicho invariante [9].

2.1. Corchete de Kauffman

Definición. El **corchete de Kauffman** es el polinomio con variables conmutativas A, B, d obtenido a partir de un diagrama de enlace no orientado mediante las siguientes reglas de recursión:

- Si D y D' difieren por una movida R_0 entonces $\langle D \rangle = \langle D' \rangle$.
- $\langle \bigcirc \rangle = 1$
- $\langle \bigcirc \sqcup L \rangle = d \langle L \rangle$ para $L \neq \emptyset$.
- $\langle \times \rangle = A \langle \smile \rangle + B \langle \frown \rangle$.

Definición. Decimos que \smile y \frown (son los **suavizados de tipo 0 y de tipo 1** del cruce \times respectivamente.

Mientras que \smile y \frown son los suavizados de tipo 0 y de tipo 1 del cruce \times . Sea D un diagrama con al menos un cruce. Un **estado** de D es el resultado de realizar un suavizado de tipo 0 o uno de tipo 1 en cada cruce del diagrama. Si un diagrama no tiene cruces, convendremos que él es su único estado.

Observación: Cada estado de un enlace es una colección de curvas simples cerradas encajadas en \mathbb{R}^2 ajenas entre sí.

Proposición 2.1.1. Sea D un diagrama de enlace y $\mathcal{S}(D)$ el conjunto de todos sus estados.

Si en $S \in \mathcal{S}(D)$ se realizaron i suavizados de tipo 0 y j suavizados de tipo 1, entonces se define $\langle D, S \rangle = A^i B^j$. Sea $\|S\|$ el número de componentes conexas del estado S .

$$\text{Así } \langle D \rangle = \sum_{S \in \mathcal{S}(D)} \langle D, S \rangle d^{\|S\|-1}.$$

Demostración. Como estamos trabajando con diagramas regulares, cada diagrama tiene una cantidad finita de cruces. Así daremos una demostración por inducción sobre el número de cruces.

Si D tiene 0 cruces, entonces D es una colección finita de curvas simples cerradas y ajenas entre sí. Si D tiene m componentes entonces $\langle D \rangle = d^m = A^0 B^0 d^m$.

Supóngase válido para diagramas de n cruces. Sea D un diagrama de $n+1$ cruces. Tomemos un cruce fijo \times . Sean D_0 y D_1 los diagramas resultantes de aplicar un suavizado de tipo 0 y de tipo 1, respectivamente, en dicho cruce.

Si $\mathcal{S}(D)$, $\mathcal{S}(D_0)$ y $\mathcal{S}(D_1)$ representan al conjunto de estados de D , D_0 y D_1 respectivamente. Entonces $\mathcal{S}(D) = \mathcal{S}(D_0) \cup \mathcal{S}(D_1)$.

Además

$$\forall S \in \mathcal{S}(D_0) \langle D, S \rangle = A \langle D_0, S \rangle.$$

$$\forall S \in \mathcal{S}(D_1) \langle D, S \rangle = B \langle D_1, S \rangle.$$

Como D_0 y D_1 tienen n cruces:

$$\langle D_0 \rangle = \sum_{S \in \mathcal{S}(D_0)} \langle D_0, S \rangle d^{\|S\|-1}$$

y

$$\langle D_1 \rangle = \sum_{S \in \mathcal{S}(D_1)} \langle D_1, S \rangle d^{\|S\|-1}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sum_{S \in \mathcal{S}(D)} \langle D, S \rangle d^{\|S\|-1} &= \sum_{S \in \mathcal{S}(D_0)} \langle D, S \rangle d^{\|S\|-1} + \sum_{S \in \mathcal{S}(D_1)} \langle D, S \rangle d^{\|S\|-1} \\
&= A \sum_{S \in \mathcal{S}(D_0)} \langle D_0, S \rangle d^{\|S\|-1} + B \sum_{S \in \mathcal{S}(D_1)} \langle D_1, S \rangle d^{\|S\|-1} \\
&= A \langle D_0 \rangle + B \langle D_1 \rangle = \langle D \rangle.
\end{aligned}$$

□

Corolario 2.1.2. El corchete de Kauffman no depende del orden en el que se apliquen las reglas recursivas y por lo tanto está bien definido.

Lema 2.1.3. Si $B = A^{-1}$ y $d = -A^2 - A^{-2}$ entonces $\langle \text{diagrama 1} \rangle = \langle \text{diagrama 2} \rangle$.

Demostración. Aplicando las reglas que definen al corchete de Kauffman se obtiene que

$$\begin{aligned}
\langle \text{diagrama 1} \rangle &= A \langle \text{diagrama 2} \rangle + B \langle \text{diagrama 3} \rangle \\
&= A \left(A \langle \text{diagrama 4} \rangle + B \langle \text{diagrama 5} \rangle \right) + B \left(A \langle \text{diagrama 6} \rangle + B \langle \text{diagrama 7} \rangle \right) \\
&= A^2 \langle \text{diagrama 8} \rangle + ABd \langle \text{diagrama 9} \rangle + AB \langle \text{diagrama 10} \rangle + B^2 \langle \text{diagrama 11} \rangle \\
&= AB \langle \text{diagrama 12} \rangle + (A^2 + B^2 + ABd) \langle \text{diagrama 13} \rangle.
\end{aligned}$$

Así si $B = A^{-1}$ y $d = -A^2 - A^{-2}$ entonces $AB = 1$ y $A^2 + B^2 + ABd = 0$. □

Lema 2.1.4. Si el corchete de Kauffman se preserva bajo movidas R_2 entonces también se preserva bajo movidas R_3 .

Demostración.

$$\begin{aligned}
\langle \text{diagrama 1} \rangle &= A \langle \text{diagrama 2} \rangle + B \langle \text{diagrama 3} \rangle \\
&= A \langle \text{diagrama 4} \rangle + B \langle \text{diagrama 5} \rangle \\
&= \langle \text{diagrama 6} \rangle.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.1.5. Si $B = A^{-1}$ y $d = -A^2 - A^{-2}$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle \text{diagrama 1} \rangle &= -A^3 \langle \text{diagrama 2} \rangle \\
\langle \text{diagrama 3} \rangle &= -A^{-3} \langle \text{diagrama 4} \rangle.
\end{aligned}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \end{array} \right\rangle &= A \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ \text{---} \end{array} \right\rangle \\ &= A(-A^2 - A^{-2}) \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\rangle \\ &= -A^3 \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ \text{---} \end{array} \right\rangle &= A \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\rangle \\ &= A \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\rangle + A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\rangle \\ &= -A^{-3} \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\rangle. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.1.6. *Sea $\langle \rangle$ el corchete de Kauffman con $B = A^{-1}$ y $d = -A^2 - A^{-2}$.*

La función $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ dada por

$$f(D) = (-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle$$

donde $w(D)$ es el número definido en 1.3 induce un invariante de enlaces orientados.

Demostración. En virtud del Corolario 1.3.2 y los Lemas 2.1.3 y 2.1.4, si D y D' difieren en movidas de Reidemeister de Tipo II y Tipo III entonces $f(D) = f(D')$.

Por otra parte, usando 1.3.2 y el Lema 2.1.4 obtenemos

$$\begin{aligned} f \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \end{array} \right) &= (-A)^{-3w \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \end{array} \right)} \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \end{array} \right\rangle = (-A)^{-3(w(\cap)+1)} (-A^3) \langle \cap \rangle \\ &= -A^{-3w(\cap)} (-A^{-3}) (-A^3) \langle \cap \rangle = f(\cap) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ \text{---} \end{array} \right) &= (-A)^{-3w \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ \text{---} \end{array} \right)} \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ \text{---} \end{array} \right\rangle = (-A)^{-3(w(\cap)-1)} (-A)^{-3} \langle \cap \rangle \\ &= -A^{-3w(\cap)} (-A^3) (-A^{-3}) \langle \cap \rangle = f(\cap). \end{aligned}$$

□

Definición. Sea L un enlace orientado y D un diagrama orientado de L . Definimos $F(L) = f(D)$.

Teorema 2.1.7 (Kauffman). *Para todo L enlace orientado*

$$\mathcal{V}(L) = F(L)|_{A=t^{1/4}}.$$

Demostración. Sea L un enlace orientado y D un diagrama orientado de L .

Como \mathcal{V} y F son invariantes de enlaces orientados, basta ver que $V(D) = f(D)$.

Por definición se tiene que $V(\bigcirc) = 1 = f(\bigcirc)$.

Sean $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_+$ y \mathcal{L}_- como en la Figura 2.1.

Es claro que

$$\begin{aligned} w(\mathcal{L}_+) &= w(\mathcal{L}_0) + 1 \\ w(\mathcal{L}_-) &= w(\mathcal{L}_0) - 1. \end{aligned}$$

Además, por definición

$$\begin{aligned} \langle \nearrow \searrow \rangle &= A \langle \smile \rangle + A^{-1} \langle \rangle \langle \rangle &\Rightarrow & A \langle \nearrow \searrow \rangle = A^2 \langle \smile \rangle + \langle \rangle \langle \rangle \\ \langle \swarrow \nwarrow \rangle &= A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \smile \rangle &\Rightarrow & A^{-1} \langle \swarrow \nwarrow \rangle = \langle \rangle \langle \rangle + A^{-2} \langle \smile \rangle \\ \Rightarrow A^{-1} \langle \swarrow \nwarrow \rangle - A \langle \nearrow \searrow \rangle &= \langle \rangle \langle \rangle + A^{-2} \langle \smile \rangle - (A^2 \langle \smile \rangle + \langle \rangle \langle \rangle) = (A^{-2} - A^2) \langle \smile \rangle. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} (A^{-2} - A^2)f(\mathcal{L}_0) &= (A^{-2} - A^2)(-A)^{-3w(\mathcal{L}_0)} \langle \smile \rangle \\ &= (-A)^{-3w(\mathcal{L}_0)} (A^{-2} - A^2) \langle \smile \rangle \\ &= (-A)^{-3w(\mathcal{L}_0)} \left(A^{-1} \langle \swarrow \nwarrow \rangle - A \langle \nearrow \searrow \rangle \right) \\ &= (-A)^{-3w(\mathcal{L}_0)} \left(-(-A)^{-1} \langle \swarrow \nwarrow \rangle + (-A) \langle \nearrow \searrow \rangle \right) \\ &= -(-A)^{-3w(\mathcal{L}_0)-1} \langle \swarrow \nwarrow \rangle + (-A)^{-3w(\mathcal{L}_0)+1} \langle \nearrow \searrow \rangle \\ &= -(-A)^{-3(w(\mathcal{L}_0)-1)-4} \langle \swarrow \nwarrow \rangle + (-A)^{-3(w(\mathcal{L}_0)+1)+4} \langle \nearrow \searrow \rangle \\ &= -(-A)^{-3(w(\mathcal{L}_-)-4)} \langle \swarrow \nwarrow \rangle + (-A)^{-3w(\mathcal{L}_+)+4} \langle \nearrow \searrow \rangle \\ &= -(-A)^{-4} (-A)^{-3w(\mathcal{L}_-)} \langle \swarrow \nwarrow \rangle + (-A)^4 (-A)^{-3w(\mathcal{L}_+)} \langle \nearrow \searrow \rangle \\ &= -A^{-4} f(\mathcal{L}_-) + A^4 f(\mathcal{L}_+). \end{aligned}$$

Y sustituyendo $A = t^{-1/4}$ obtenemos $(t^{1/2} - t^{-1/2})f(\mathcal{L}_0) = -t f(\mathcal{L}_-) + t^{-1} f(\mathcal{L}_+)$ la cual es la regla recursiva que define a V . \square

La proposición 2.1.1 nos brinda un método para calcular corchete de Kauffman de un diagrama a partir de los corchetes de sus estados.

Notación de estados: Supongamos que un diagrama D tiene n cruces. Enumerando cada cruce de 1 a n podemos identificar a cada estado con un

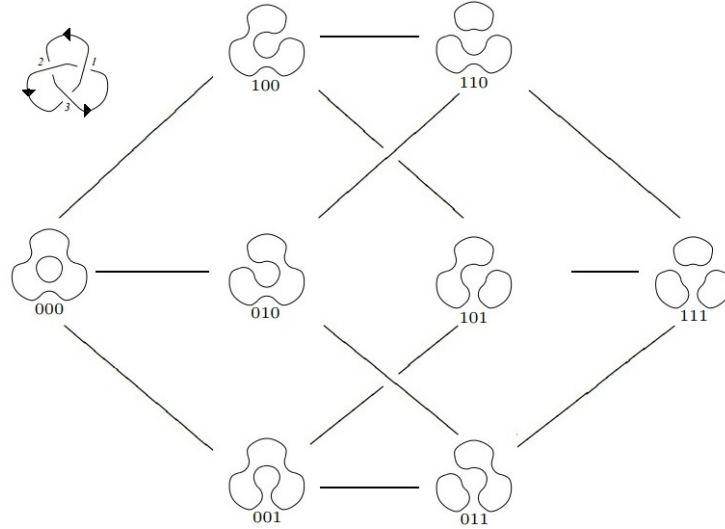


Figura 2.2: Diagrama de un trébol orientado y su cubo de estados.

$\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$ que indica que en el i -ésimo cruce se realizó un suavizado de tipo a_i .

Para simplificar la notación en ocasiones escribiremos $a_1 \dots a_n$ en lugar de (a_1, \dots, a_n) .

Enumeremos a los estados $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \{0,1\}^n}$.

Sea k_α el número de componentes conexas de S_α y $|\alpha| = \sum_{i=1}^n a_i$.

Notemos que $|\alpha|$ es el número de suavizados de tipo 1, por lo que $n - |\alpha|$ es el número de suavizados de tipo 0.

Usando la proposición 2.1.1 obtenemos que

$$\langle D \rangle = \sum_{\alpha \in \{0,1\}^n} A^{n-2|\alpha|} (-A^2 - A^{-2})^{k_\alpha - 1}. \quad (2.1)$$

Obsérvese que dicha expresión no depende del orden en el que se enumeraron los cruces.

Definición. Dado D diagrama orientado y $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \{0,1\}^n}$ sus estados. El **cubo de estados** de D es la gráfica cuyos vértices son los estados S_α y cuyas aristas unen S_α y S_β si y sólo si α y β difieren en exactamente una entrada.

Ejemplo: En la Figura 2.2 Se muestra un diagrama de T , el nudo trébol, y su cubo de estados. Usando la ecuación (2.1) tenemos

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= A^3(-A^2 - A^{-2}) + 3A + 3A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) + A^{-3}(-A^2 - A^{-2})^2 \\ &= -A^5 - A + 3A - 3A - 3A^{-3} + A^{-3}(A^4 + 2 + A^{-4}) \\ &= -A^5 - A - 3A^{-3} + A + 2A^{-3} + A^{-7} \\ &= A^{-7} - A^{-3} - A^5. \end{aligned}$$

Además $w(T) = 3$, por lo que

$$\begin{aligned} f(T) &= (-A)^{-9}(A^{-7} - A^{-3} - A^5) = -A^{-16} + A^{-12} + A^{-4} \\ V(T) &= -t^4 + t^3 + t. \end{aligned}$$

Corolario 2.1.8. El nudo trébol y el trivial no son equivalentes.

2.2. Corchete escalado

Definición. Para cada diagrama D se define su **corchete escalado** como el polinomio de Laurent con variable q dado por las siguientes reglas recursivas:

- Si D y D' difieren en una movida R_0 entonces $K(D) = K(D')$
- $K(\emptyset) = 1$
- $K(\bigcirc \sqcup L) = (q + q^{-1})K(L)$
- $K(\begin{smallmatrix} \diagdown \\ \diagup \end{smallmatrix}) = K(\begin{smallmatrix} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{smallmatrix}) - qK(\begin{smallmatrix} \rangle \\ \langle \end{smallmatrix})$.

Proposición 2.2.1. Sea D diagrama de enlace y $\mathcal{S}(D)$ el conjunto de todos sus estados.

Si en $S \in \mathcal{S}(D)$ se realizaron j suavizados de tipo 1, entonces se define $\langle D, S \rangle_K = (-q)^j$. Sea $\|S\|$ el número de componentes conexas del estado S .

Así

$$K(D) = \sum_{S \in \mathcal{S}(D)} \langle D, S \rangle_K (q + q^{-1})^{\|S\|}.$$

Demostración. Por inducción sobre el número de cruces:

Si D tiene 0 cruces, entonces D es la unión ajena de m curvas simples cerradas. Por lo que $K(D) = (q + q^{-1})^m = (-q)^0 (q + q^{-1})^m$.

Supóngase válido para diagramas de n cruces. Sea D un diagrama de $n + 1$ cruces. Tomemos un cruce fijo $\begin{smallmatrix} \diagdown \\ \diagup \end{smallmatrix}$. Sean D_0 y D_1 los diagramas resultantes de aplicar un suavizado de tipo 0 y de tipo 1, respectivamente, en dicho cruce.

Así

$$\mathcal{S}(D) = \mathcal{S}(D_0) \cup \mathcal{S}(D_1).$$

Además

$$\begin{aligned} \forall S \in \mathcal{S}(D_0) \quad \langle D, S \rangle_K &= \langle D_0, S \rangle_K. \\ \forall S \in \mathcal{S}(D_1) \quad \langle D, S \rangle_K &= -q \langle D_1, S \rangle_K. \end{aligned}$$

Como D_0 y D_1 tienen n cruces:

$$\begin{aligned} K(D_0) &= \sum_{S \in \mathcal{S}(D_0)} \langle D_0, S \rangle_K (q + q^{-1})^{\|S\|} \text{ y} \\ K(D_1) &= \sum_{S \in \mathcal{S}(D_1)} \langle D_1, S \rangle_K (q + q^{-1})^{\|S\|}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sum_{S \in \mathcal{S}(D)} \langle D, S \rangle_K (q + q^{-1})^{\|S\|} &= \sum_{S \in \mathcal{S}(D_0)} \langle D, S \rangle_K (q + q^{-1})^{\|S\|} \\
&\quad + \sum_{S \in \mathcal{S}(D_1)} \langle D, S \rangle_K (q + q^{-1})^{\|S\|} \\
&= \sum_{S \in \mathcal{S}(D_0)} \langle D_0, S \rangle_K (q + q^{-1})^{\|S\|} \\
&\quad - q \sum_{S \in \mathcal{S}(D_1)} \langle D_1, S \rangle_K (q + q^{-1})^{\|S\|} \\
&= K(D_0) - qK(D_1) = K(D).
\end{aligned}$$

□

Corolario 2.2.2. El corchete escalado está bien definido para todo diagrama de enlace.

Lema 2.2.3.

$$\begin{aligned}
K \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} \right) &= q^{-1} K \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right). \\
K \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array} \right) &= -q^2 K \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right). \\
K \left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} \right) &= -q K \left(\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array} \right). \\
K \left(\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array} \right) &= K \left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
K \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \text{---} \\ \diagdown \text{---} \end{array} \right) &= K \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) - qK \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \\
&= (q + q^{-1})K \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) - qK \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \\
&= q^{-1}K \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right). \\
K \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \text{---} \\ \diagup \text{---} \end{array} \right) &= K \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) - qK \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \\
&= K \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) - q(q + q^{-1})K \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \\
&= -q^2K \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right). \\
K \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \text{---} \\ \diagup \text{---} \end{array} \right) &= K \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) - qK \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \\
&= K \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) - qK \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) - q \left(K \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) - qK \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \right) \\
&= K \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) - q(q + q^{-1})K \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) - qK \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) + q^2K \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \\
&= -qK \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right). \\
K \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \text{---} \\ \diagdown \text{---} \end{array} \right) &= K \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) - qK \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \\
&= K \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) + q^2K \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \\
&= K \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) - qK \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \\
&= K \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right).
\end{aligned}$$

□

Definición. Sea D un diagrama orientado.

Sean $x(D)$ y $y(D)$ el número de cruces negativos y positivos respectivamente. Definimos

$$\begin{aligned}
\widehat{J}(D) &= (-1)^{x(D)} q^{y(D)-2x(D)} K(D) \\
J(D) &= \frac{(-1)^{x(D)} q^{y(D)-2x(D)} K(D)}{q + q^{-1}}.
\end{aligned}$$

Teorema 2.2.4. $\widehat{J} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ es un invariante de enlaces orientados.

Demostración. Usando la proposición 1.3.1 y el Lema 2.2.3

$$\begin{aligned}
\widehat{J}(\circlearrowleft) &= (-1)^{x(\circlearrowleft)} q^{y(\circlearrowleft) - 2x(\circlearrowleft)} K(\circlearrowleft) \\
&= (-1)^{x(\curvearrowright)} q^{y(\curvearrowright) + 1 - 2x(\curvearrowright)} q^{-1} K(\curvearrowright) \\
&= (-1)^{x(\curvearrowright)} q^{y(\curvearrowright) - 2x(\curvearrowright)} K(\curvearrowright) \\
&= \widehat{J}(\curvearrowright).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{J}(\circlearrowright) &= (-1)^{x(\circlearrowright)} q^{y(\circlearrowright) - 2x(\circlearrowright)} K(\circlearrowright) \\
&= (-1)^{x(\curvearrowleft) + 1} q^{y(\curvearrowleft) - 2(x(\curvearrowleft) + 1)} (-q^2) K(\curvearrowleft) \\
&= (-1)^{x(\curvearrowleft)} q^{y(\curvearrowleft) - 2x(\curvearrowleft)} K(\curvearrowleft) \\
&= \widehat{J}(\curvearrowleft).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{J}(\circlearrowleft \circlearrowright) &= (-1)^{x(\circlearrowleft \circlearrowright)} q^{y(\circlearrowleft \circlearrowright) - 2x(\circlearrowleft \circlearrowright)} K(\circlearrowleft \circlearrowright) \\
&= (-1)^{x(\curvearrowright) + 1} q^{y(\curvearrowright) + 1 - 2x(\curvearrowright) - 2} (-q) K(\curvearrowright) \\
&= (-1)^{x(\curvearrowright)} q^{y(\curvearrowright) - 2x(\curvearrowright)} K(\curvearrowright) \\
&= \widehat{J}(\curvearrowright).
\end{aligned}$$

Además, como w y K se preservan bajo movidas de Tipo III

$$\widehat{J}\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) = \widehat{J}\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right).$$

□

Como $K(D)$ es un múltiplo de $q + q^{-1}$ para todo diagrama no vacío tenemos el siguiente

Corolario 2.2.5. $J : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ es un invariante de enlaces orientados.

Teorema 2.2.6 (Khovanov). $V(D) = J(D)|_{q=t^{1/2}}$.

Demostración. Por definición se tiene que $V(\circ) = 1 = J(\circ)$.

Sean \mathcal{L}_0 , \mathcal{L}_+ y \mathcal{L}_- como en la Figura 2.1.

Sea $\gamma = (-1)^{x(\mathcal{L}_0)} q^{y(\mathcal{L}_0) - 2x(\mathcal{L}_0)}$. Observemos que

$$\begin{aligned}
x(\mathcal{L}_-) &= x(\mathcal{L}_0) + 1 = x(\mathcal{L}_+) + 1 \\
y(\mathcal{L}_+) &= y(\mathcal{L}_0) + 1 = y(\mathcal{L}_-) + 1.
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
\widehat{J}(\mathcal{L}_-) &= (-1)^{x(\mathcal{L}_-)} q^{y(\mathcal{L}_-) - 2x(\mathcal{L}_-)} K(\mathcal{L}_-) \\
&= (-1)^{x(\mathcal{L}_0) + 1} q^{y(\mathcal{L}_0) - 2(x(\mathcal{L}_0) + 1)} K(\mathcal{L}_-) \\
&= -q^{-2} \gamma K(\mathcal{L}_-)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow -q^2 \widehat{J}(\mathcal{L}_-) = \gamma K(\mathcal{L}_-).$$

Análogamente

$$\begin{aligned} \widehat{J}(\mathcal{L}_+) &= (-1)^{x(\mathcal{L}_+)} q^{y(\mathcal{L}_+) - 2x(\mathcal{L}_+)} K(\mathcal{L}_+) \\ &= (-1)^{x(\mathcal{L}_0)} q^{y(\mathcal{L}_0) + 1 - 2(x(\mathcal{L}_0))} K(\mathcal{L}_+) \\ &= q\gamma K(\mathcal{L}_+). \end{aligned}$$

De donde se obtiene que $q^{-2} \widehat{J}(\mathcal{L}_+) = q^{-1} \gamma K(\mathcal{L}_+)$.

Por lo que

$$q^{-2} \widehat{J}(\mathcal{L}_+) - q^2 \widehat{J}(\mathcal{L}_-) = \gamma(K(\mathcal{L}_-) + q^{-1}K(\mathcal{L}_+)). \quad (2.2)$$

Por otra parte, la definición nos dice que

$$\begin{aligned} K(\mathcal{L}_-) &= K \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right) - qK(\mathcal{L}_0) \text{ y} \\ K(\mathcal{L}_+) &= K(\mathcal{L}_0) - qK \left(\begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \end{array} \right). \end{aligned}$$

Por lo que

$$(K(\mathcal{L}_-) + q^{-1}K(\mathcal{L}_+)) = (q^{-1} - q)K(\mathcal{L}_0). \quad (2.3)$$

De las ecuaciones (2.2) y (2.3), obtenemos

$$q^{-2} \widehat{J}(\mathcal{L}_+) - q^2 \widehat{J}(\mathcal{L}_-) = (q^{-1} - q)\gamma K(\mathcal{L}_0) = (q^{-1} - q)\widehat{J}(\mathcal{L}_0).$$

Dividiendo entre $(q + q^{-1})$ resulta

$$q^{-2} J(\mathcal{L}_+) - q^2 J(\mathcal{L}_-) = (q^{-1} - q)J(\mathcal{L}_0).$$

Finalmente, tomando $q = -t^{1/2}$, concluimos que

$$t^{-1} J(\mathcal{L}_+) - t J(\mathcal{L}_-) = (-t^{-1/2} + t^{1/2})J(\mathcal{L}_0).$$

Así J evaluado en $q = -t^{1/2}$ cumple la definición recursiva de V . Por lo tanto $J(D)|_{q=-t^{1/2}} = V(D)$ para cualquier diagrama orientado D . \square

Sea D un diagrama orientado y con n cruces y S_α sus estados. Por la proposición 2.2.1 usando la notación de estados, tenemos que

$$\begin{aligned} K(D) &= \sum_{\alpha \in \{0,1\}^n} (-q)^{|\alpha|} (q + q^{-1})^{k_\alpha} \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{|\alpha|=i} q^i (q + q^{-1})^{k_\alpha}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Capítulo 3

Homología de Khovanov

En [10] Khovanov obtuvo un nuevo invariante a partir del proceso de *categorificación* del polinomio de Jones. Dicho proceso consiste en tomar la construcción a partir de los corchetes y reemplazar estados por *espacios vectoriales graduados*, polinomios por *dimensiones graduadas* y aristas del cubo de estados por funciones lineales que induzcan una *homología* de la cual se pueda recuperar el polinomio de Jones.

En ese mismo artículo Khovanov probó que la homología resultante es un invariante de enlaces orientados. Posteriormente Bar-Natan [3] simplificó la construcción dada por Khovanov y mostró que la Homología de Khovanov es más fuerte que el polinomio de Jones, esto es que existen enlaces con homología distinta pero con el mismo polinomio de Jones.

3.1. Definiciones previas

Definición. Sea A un conjunto y K un campo. El K -espacio vectorial libre con base A es el conjunto

$$K(A) = \{f : A \rightarrow K \mid \text{tal que } f(x) = 0 \text{ excepto para un número finito de } x \in A\}$$

Con las operaciones

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in A$
- $(cf)(x) = cf(x) \quad \forall c \in K, \forall x \in A.$

Es sencillo verificar que con estas operaciones $K(A)$ es un K -espacio vectorial.

Definición. Sea A un conjunto y K un campo. Para cada $a \in A$ se define la función $e_a : A \rightarrow K$ mediante la siguiente regla de correspondencia

$$e_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq a \\ 1 & \text{si } x = a \end{cases} \quad (3.1)$$

Proposición 3.1.1. Para cada $f \in K(A)$ existen únicos $c_a \in K$ tales que

$$f = \sum_{a \in A} c_a e_a.$$

Además $c_a = 0_K$ excepto para una cantidad finita de a 's.

Demostración. Sea $f \in K(A)$. Para cada $a \in A$ definamos $c_a = f(a)$

Por hipótesis $c_a \neq 0_K$ solo para una cantidad finita de a 's. Por lo que para todo $x \in X$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{a \in A} c_a e_a \right) (x) &= \sum_{a \in A} (c_a e_a)(x) = \sum_{a \in A} f(a) e_a(x) \\ &= f(x) e_x(x) + \sum_{a \in A \setminus \{x\}} f(a) e_a(x) = f(x) 1_K + 0_K. \end{aligned}$$

Además si $f = \sum_{a \in A} c'_a e_a$ entonces $\forall x \in A$ se cumple que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{a \in A} (c_a e_a)(x) = c_x e_x(x) = c_x \\ f(x) &= \sum_{a \in A} (c'_a e_a)(x) = c'_x e_x(x) = c'_x. \end{aligned}$$

□

Por la proposición anterior concluimos que $\{e_a\}_{a \in A}$ es base de $K(A)$.

Identificando a cada x con e_x podemos ver a $K(A)$ como el conjunto de combinaciones lineales formales de elementos de A con coeficientes en K .

Definición. Sean V y W K -espacios vectoriales. Considérese el K -espacio vectorial libre sobre $V \times W$ y $\{e_{(v,w)} | v \in V, w \in W\}$ la base definida como en (3.1).

Sea R el subespacio vectorial de $K(V \times W)$ generado por todos los elementos de la forma

- $e_{(v_1+v_2,w)} - e_{(v_1,w)} - e_{(v_2,w)}$
- $e_{(v,w_1+w_2)} - e_{(v,w_1)} - e_{(v,w_2)}$
- $ce_{(v,w)} - e_{(cv,w)}$
- $ce_{(v,w)} - e_{(v,cw)}$

con $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$, $c \in K$.

El **producto tensorial** de V y W es el espacio vectorial cociente

$$V \otimes W = K(V \times W)/R.$$

Denotaremos por $v \otimes w$ a la clase de $e_{(v,w)}$ en el cociente. Bajo esta notación se cumple que

- $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$
- $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$
- $c(v \otimes w) = (cv) \otimes w = v \otimes (cw)$.

Proposición 3.1.2. Sea K campo y U, V y W K -espacios vectoriales.

- $(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$
- $V \otimes U \cong U \otimes V$
- $V \otimes K \cong V \cong K \otimes V$.

Proposición 3.1.3. Si V y W son espacios vectoriales de dimensión finita sobre K entonces $\dim_K(V \otimes W) = \dim_K(V)\dim_K(W)$.

Más aún, si $\gamma = \{v_1, \dots, v_n\}$ es base de V y $\delta = \{w_1, \dots, w_m\}$ es base de W entonces $\{v_i \otimes w_j | i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}\}$ es base de $V \otimes W$.

Tanto la demostración de la proposición 3.1.2 como la de la proposición 3.1.3 pueden hallarse en [6].

En ocasiones escribiremos $\bigotimes_{i=1}^n V_i$ en vez de $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$.

Para cada $k \in \{1, \dots, n\}$ diremos que V_k es el k -ésimo factor tensorial de $\bigotimes_{i=1}^n V_i$.

Si además $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que $V_i = V_j = V$ entonces escribiremos $V^{\otimes n}$ para referirnos a $\bigotimes_{i=1}^n V_i$.

3.2. Espacios vectoriales graduados

Definición. Sea K un campo y W un espacio vectorial. Una **graduación** para W es una colección ordenada de K -subespacios vectoriales de W , $(W_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, tal que $W = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$.

Un **K -espacio vectorial graduado** es un K -espacio vectorial W con una graduación $(W_j)_{j \in \mathbb{Z}}$.

Para cada $j \in \mathbb{Z}$ diremos que W_j es la j -ésima **componente homogénea** de W .

Ejemplo: Sea $W = \mathbb{R}[X]$ el espacio vectorial real de polinomios con coeficientes reales. Para $j \in \mathbb{Z}$ se define

$$W_j = \begin{cases} \langle X^j \rangle & \text{si } j > 0 \\ \langle 1 \rangle & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{si } j < 0 \end{cases}$$

Así $(W_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ es una graduación de $\mathbb{R}[X]$.

Definición. Sea W un K -espacio vectorial graduado y $(W_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ su graduación. Se define la **K -dimensión graduada** de W como la serie de potencias

$$qdim_K(W) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j \dim_K(W_j).$$

Ejemplo: Si a $\mathbb{R}[X]$ le damos la graduación del ejemplo anterior entonces

$$qdim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[X]) = \sum_{j=0}^{\infty} q^j.$$

A partir de este momento en cada proposición, teorema, definición o corolario trabajaremos con un mismo campo K y obviaremos los subíndices y prefijos que lo indican.

Definición. Sea $l \in \mathbb{Z}$. Para espacios vectoriales graduados se define el **operador de cambio de grado** $\cdot\{l\}$ de la siguiente forma

Si $W = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$ entonces $W\{l\}_j = W_{j-l}$.

Es decir, la j -ésima componente homogénea de $W\{l\}$ es la $(j-l)$ -ésima componente homogénea de W .

Equivalentemente, la j -ésima componente homogénea de W es la $(j+l)$ componente homogénea de $W\{l\}$.

Proposición 3.2.1. $qdim(W\{l\}) = q^l qdim(W)$.

Demostración. Sea $k = j - l$

$$\begin{aligned} qdim(W\{l\}) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j dim(W\{l\}_j) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j dim(W_{j-l}) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{k+l} dim(W_k) = q^l \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^k dim(W_k) \\ &= q^l qdim(W). \end{aligned}$$

□

Definición. Sean W_1, \dots, W_n espacios vectoriales graduados con sus respectivas graduaciones $(W_{1j})_{j \in \mathbb{Z}}, \dots, (W_{nj})_{j \in \mathbb{Z}}$. La graduación inducida a $\bigoplus_{i=1}^n W_i$ y a $\bigotimes_{i=1}^n W_i$ está respectivamente dada para cada $j \in \mathbb{Z}$ como

$$\begin{aligned} \left(\bigoplus_{i=1}^n W_i \right)_j &= \bigoplus_{i=1}^n W_{i_j} \\ \left(\bigotimes_{i=1}^n W_i \right)_j &= \bigoplus_{\sum_{i=1}^n k_i = j} (W_{1_{k_1}} \otimes \dots \otimes W_{n_{k_n}}). \end{aligned}$$

Ejemplo: Sea \mathbb{V} el \mathbb{Q} -espacio vectorial libre con base $\{1, X\}$ con la graduación:

$$\mathbb{V}_j = \begin{cases} \langle X \rangle & \text{si } j = -1 \\ \langle 1 \rangle & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así la graduación inducida de $\mathbb{V} \oplus \mathbb{V}$ es

$$\begin{aligned} (\mathbb{V} \oplus \mathbb{V})_{-1} &= \langle X \rangle \oplus \langle X \rangle \\ (\mathbb{V} \oplus \mathbb{V})_1 &= \langle 1 \rangle \oplus \langle 1 \rangle \\ (\mathbb{V} \oplus \mathbb{V})_j &= 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}. \end{aligned}$$

Y la graduación inducida de $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$ es

$$\begin{aligned} (\mathbb{V} \otimes \mathbb{V})_{-2} &= \langle X \otimes X \rangle \\ (\mathbb{V} \otimes \mathbb{V})_0 &= \langle X \otimes 1 \rangle \oplus \langle 1 \otimes X \rangle \\ (\mathbb{V} \otimes \mathbb{V})_2 &= \langle 1 \otimes 1 \rangle \\ (\mathbb{V} \otimes \mathbb{V})_j &= 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z} \setminus \{-2, 0, 2\}. \end{aligned}$$

A partir de aquí consideraremos siempre la graduación inducida para sumas directas y productos tensoriales de espacios vectoriales graduados.

Proposición 3.2.2. Si V y W son espacios vectoriales graduados de dimensión finita entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{qdim}(V \oplus W) &= \mathbf{qdim}(V) + \mathbf{qdim}(W) \\ \mathbf{qdim}(V \otimes W) &= \mathbf{qdim}(V)\mathbf{qdim}(W). \end{aligned}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \mathbf{qdim}(V \oplus W) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j \dim(V_j \oplus W_j) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j (\dim(V_j) + \dim(W_j)) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j \dim(V_j) + \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j \dim(W_j) = \mathbf{qdim}(V) + \mathbf{qdim}(W). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{qdim}(V \otimes W) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j \dim \left(\bigoplus_{m+k=j} V_m \otimes W_k \right) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j \left(\sum_{m+k=j} \dim(V_m \otimes W_k) \right) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j \left(\sum_{m+k=j} \dim(V_m) \dim(W_k) \right) \\ &= \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} q^n \dim(V_n) \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} q^n \dim(W_n) \right) = \mathbf{qdim}(V)\mathbf{qdim}(W). \end{aligned}$$

□

Corolario 3.2.3. Si W_1, \dots, W_n son espacios vectoriales graduados de dimensión finita entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{qdim} \left(\bigoplus_{i=1}^n W_i \right) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{qdim}(W_i) \\ \mathbf{qdim} \left(\bigotimes_{i=1}^n W_i \right) &= \prod_{i=1}^n \mathbf{qdim}(W_i). \end{aligned}$$

Ejemplo: Sea \mathbb{V} el \mathbb{Q} -espacio vectorial libre con base $\{1, X\}$ con la graduación

$$\mathbb{V}_j = \begin{cases} \langle X \rangle & si & j = -1 \\ \langle 1 \rangle & si & j = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\text{Así } \mathbf{qdim}(\mathbb{V}) = q + q^{-1}.$$

Definición. Sea V el \mathbb{Q} -espacio vectorial libre con base $\{1, X\}$ con la graduación del ejemplo anterior.

Sea D un diagrama orientado con n cruces y $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \{0,1\}^n}$ sus estados. Siguiendo la notación de estados, se define el **espacio vectorial graduado asociado al estado** S_α como

$$V_\alpha = V^{\otimes k_\alpha} \{|\alpha|\}$$

con su graduación inducida, recordando que k_α es el número de componentes del estado S_α y que $|\alpha|$ es el número de suavizados de tipo 1 realizados para llegar a S_α .

Para ser más precisos, cada círculo que conforma al estado S_α estará asociado biunívocamente a un factor tensorial de V_α .

Si le brindamos un orden a los círculos de S_α entonces se entenderá que el i -ésimo círculo de S_α corresponde al i -ésimo factor tensorial de V_α .

Proposición 3.2.4. $qdim(V_\alpha) = q^{|\alpha|}(q + q^{-1})^{k_\alpha}$.

Demostración.

$$\begin{aligned} qdim(V_\alpha) &= qdim(V^{\otimes k_\alpha} \{|\alpha|\}) \\ &= q^{|\alpha|} qdim(V^{\otimes k_\alpha}) && \text{(proposición 3.2.1)} \\ &= q^{|\alpha|} qdim(V \otimes \dots \otimes V) && \leftarrow k_\alpha\text{-veces} \\ &= q^{|\alpha|} (q + q^{-1})^{k_\alpha} && \text{(Corolario 3.2.3)}. \end{aligned}$$

□

Definición. Sea D diagrama orientado con n cruces, $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \{0,1\}^n}$ sus estados y V_α el espacio vectorial graduado asociado al estado S_α . Sea $i \in \{0, \dots, n\}$. El i -ésimo corchete de Khovanov de D es

$$[[D]]^i = \bigoplus_{|\alpha|=i} V_\alpha.$$

Convendremos en definir $[[D]]^i = 0$ para $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \dots, n\}$.

Corolario 3.2.5. Sea D diagrama orientado, $K(D)$ su corchete escalado.

$$K(D) = \sum_{i=0}^n (-1)^i qdim ([[D]]^i).$$

Demostración.

$$qdim ([[D]]^i) = qdim \left(\bigoplus_{|\alpha|=i} V_\alpha \right) = \sum_{|\alpha|=i} qdim(V_\alpha).$$

Mientras que por la Ecuación (2.4) y la proposición 3.2.4 tenemos

$$K(D) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{|\alpha|=i} \mathbf{qdim}(V_\alpha).$$

□

3.3. (Co)homología

Definición. Sea $C = (C^i, \delta^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ sucesión de espacios vectoriales C^i y funciones lineales $\delta^i : C^i \rightarrow C^{i+1}$. Diremos que C es un **complejo de cocadenas** si para toda $i \in \mathbb{Z}$ se cumple que $\text{im}(\delta^{i-1}) \subseteq \ker(\delta^i)$.

Cabe señalar que los superíndices solo cumplen la función de indexar. Para evitar confusiones, en caso de tener una función biyectiva denotaremos a su inversa como $(f)^{-1}$. En los demás casos el significado de los superíndices se podrá deducir del contexto.

Definición. Diremos que un complejo de cocadenas $C = (C^i, \delta^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es **finito** si $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $C^i = 0$ para $|i| > N$.

Proposición 3.3.1. $C = (C^i, \delta^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es un complejo de cocadenas si y sólo si $\forall i \in \mathbb{Z}$ se cumple que $\delta^i \circ \delta^{i-1} = 0$.

Demostración. Sea $i \in \mathbb{Z}$.

Supongamos que C es un complejo de cocadenas. Así, $\text{im}(\delta^{i-1}) \subseteq \ker(\delta^i)$.

Si $x \in C^{i-1}$ entonces $\delta^{i-1}(x) \in \text{im}(\delta^{i-1}) \subseteq \ker(\delta^i)$

$$\Rightarrow 0 = \delta^i(\delta^{i-1}(x)) = (\delta^i \circ \delta^{i-1})(x)$$

Supongáse ahora que $\delta^i \circ \delta^{i-1} = 0$

Sea $y \in \text{im}(\delta^{i-1})$. Así $\exists x \in C^{i-1}$ tal que $y = \delta^{i-1}(x)$

$$\Rightarrow \delta^i(y) = \delta^i(\delta^{i-1}(x)) = (\delta^i \circ \delta^{i-1})(x) = 0$$

$$\Rightarrow y \in \ker(\delta^i). \quad \square$$

Definición. Si C es un complejo de cocadenas entonces se define la **i -ésima cohomología** de C como el espacio vectorial

$$H^i(C) = \frac{\ker(\delta^i)}{\text{im}(\delta^{i-1})}.$$

Definimos la **cohomología** de C como la sucesión

$$H(C) = (H^i(C))_{i \in \mathbb{Z}}.$$

Definición. Sean $V = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ y $W = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$ espacios vectoriales graduados. Una función lineal $f : V \rightarrow W$ es un morfismo homogéneo de grado $k \in \mathbb{Z}$ si para toda $j \in \mathbb{Z}$ se cumple que $f(V_j) \subseteq W_{j+k}$.

Ejemplos:

1. Si $V = W$ y $V_j = W_j$ para toda $j \in \mathbb{Z}$ entonces $Id : V \rightarrow V$ es un morfismo homogéneo de grado 0.
2. Para toda $k \in \mathbb{Z}$ se cumple que la función constante 0 es un morfismo homogéneo de grado k .
3. El operador derivada $d : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ es un morfismo homogéneo de grado -1 .

Proposición 3.3.2. Si $f : V \rightarrow W$ es un morfismo homogéneo de grado k entonces $f : V\{l\} \rightarrow W\{m\}$ es un morfismo homogéneo de grado $k + m - l$.

Demostración. Tomando $V = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ y $W = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$ es inmediato que

$$f(V\{l\}_j) = f(V_{j-l}) \subseteq W_{j-l+k} = W_{j-l+k+m-m} = (W\{m\})_{j-l+k+m}.$$

□

Definición. Sea $C = (C^i, \delta^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ complejo de cocadenas. Supongamos que cada C^i posee una graduación $(C_j^i)_{j \in \mathbb{Z}}$ y cada $\delta^i : C^{i-1} \rightarrow C^i$ es un morfismo homogéneo de grado cero. Sean $d_j^i = \delta|_{C_j^i}$.

Definimos la graduación de la i -ésima cohomología como

$$(H^i(C))_j = \ker(\delta_j^i) / \text{im}(\delta_j^{i-1}).$$

Notación: Para simplificar la notación escribiremos $H_j^i(C)$ en vez de $(H^i(C))_j$.

Definición. Bajo los supuestos de la definición anterior, se define la **característica de Euler** de la cohomología de C como

$$\chi(H(C)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \text{qdim}(H^i(C)).$$

Los siguientes dos lemas son resultados ampliamente conocidos del álgebra lineal, sus respectivas demostraciones pueden consultarse en [6].

Lema 3.3.3. Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y W es subespacio vectorial de V entonces

$$\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W).$$

Lema 3.3.4 (Teorema de Rango-Nulidad). Si V y W son espacios vectoriales de dimensión finita y $f : V \rightarrow W$ es función lineal entonces

$$\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{im}(f)).$$

Usaremos dichos lemas para probar el siguiente

Teorema 3.3.5. *Sea $C = (C^i, \delta^i)$ un complejo de cocadenas finito con C^i espacios vectoriales graduados y con δ^i morfismos homogéneos de grado 0 para toda $i \in \mathbb{Z}$. Si todos los C^i tienen dimensión finita entonces*

$$\chi(H(C)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \mathbf{qdim}(C^i) \quad (3.2)$$

Demostración. Sea $d_j^i = d^i|_{C_j^i}$.

Dado que C es finito existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $|i| > N$ entonces $C^i = 0$. Así

$$\begin{aligned} \chi(H(C)) &= \sum_{i=-N}^{i=N} (-1)^i \mathbf{qdim}(H^i(C)) \\ &= \sum_{i=-N}^{i=N} \left((-1)^i \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j \dim(H_j^i(C)) \right) \\ &= \sum_{i=-N}^{i=N} \left((-1)^i \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j \dim(\ker(d_j^i)/\text{im}(d_j^{i-1})) \right) \\ &= \sum_{i=-N}^{i=N} \left((-1)^i \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j (\dim(\ker(d_j^i)) - \dim(\text{im}(d_j^{i-1}))) \right) \\ &= \sum_{i=-N}^{i=N} \left((-1)^i \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j \dim(\ker(d_j^i)) + (-1)^{i-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j \dim(\text{im}(d_j^{i-1})) \right) \\ &= (-1)^{-N} \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j \dim(\ker(d_j^{-N})) + (-1)^{-N-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j \dim(\text{im}(d_j^{-N-1})) \\ &\quad + (-1)^{-N+1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j \dim(\ker(d_j^{-N+1})) + (-1)^{-N} \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j \dim(\text{im}(d_j^{-N})) \\ &\quad + \dots + (-1)^{N-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j \dim(\ker(d_j^{N-1})) + (-1)^{N-2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j \dim(\text{im}(d_j^{N-2})) \\ &\quad + (-1)^N \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j \dim(\ker(d_j^N)) + (-1)^{N-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j \dim(\text{im}(d_j^{N-1})). \end{aligned}$$

Nótese que

$$\begin{aligned} \dim(\text{im}(d_j^{-N-1})) &= 0 \\ \dim(\ker d_j^N) &= \dim(C_j^N). \end{aligned}$$

Sustituyendo y reordenando términos obtenemos

$$\begin{aligned} \chi(H(C)) &= (-1)^{-N} \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j (\dim(\ker(d_j^{-N})) + \dim(\text{im}(d_j^{-N}))) \\ &\quad + (-1)^{-N+1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j (\dim(\ker(d_j^{-N+1})) + \dim(\text{im}(d_j^{-N+1}))) \\ &\quad + \dots + (-1)^{N-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j (\dim(\ker(d_j^{N-1})) + \dim(\text{im}(d_j^{N-1}))) \\ &\quad + (-1)^N \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j \dim(C_j^N). \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando el Teorema de Rango-Nulidad, concluimos que

$$\begin{aligned} \chi(H(C)) &= (-1)^{-N} \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j \dim(C_j^{-N}) + \dots + (-1)^N \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^j \dim(C_j^N) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \mathbf{qdim}(C_j^i). \end{aligned}$$

□

3.4. Corchete de Khovanov

Nótese que $\{\llbracket D \rrbracket^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión de espacios vectoriales graduados de dimensión finita tal que $\llbracket D \rrbracket^i \neq 0$ solo para una cantidad finita de i 's.

Si se definen $d^i : \llbracket D \rrbracket^i \rightarrow \llbracket D \rrbracket^{i+1}$ morfismos homogéneos de grado 0 tales que $\llbracket D \rrbracket = (\llbracket D \rrbracket^i, d^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ sea un complejo de cocadenas entonces por el Teorema 3.3.5 y el Corolario 3.2.5

$$\chi(H(\llbracket D \rrbracket)) = K(D).$$

Mediante un adecuado cambio de grado obtendremos un complejo de cocadenas $\mathcal{C}(D)$ tal que $\chi(H(\mathcal{C}(D))) = \widehat{J}(D)$.

Dicho complejo de cocadenas fue originalmente desarrollado por Khovanov [10] y simplificado posteriormente por Bar-Natan [3]. Este capítulo se basa en la descripción dada por Bar-Natan.

Sea D un diagrama de enlace con n cruces. Considérese el cubo de estados de D . Para cada estado fijemos un orden para los círculos que lo conforman. Sean S_α y S_β dos vértices adyacentes. Así α y β difieren solo en una entrada por lo que sin pérdida de generalidad

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1 \dots a_{i-1} 0 a_{i+1} \dots a_n \\ \beta &= a_1 \dots a_{i-1} 1 a_{i+1} \dots a_n. \end{aligned}$$

Sea $\xi = (S_\alpha, S_\beta)$ con $|\alpha| + 1 = |\beta|$. Representamos ξ mediante una flecha $S_\alpha \xrightarrow{\xi} S_\beta$.

También nos referiremos a ξ como $\xi = a_1 \dots a_{i-1} * a_{i+1} \dots a_n$.

Nótese que S_α y S_β solo difieren en las componentes que se obtuvieron al realizar un suavizado en el i -ésimo cruce, por lo que pueden pasar los siguientes casos

$$S_\alpha = \text{---} \curvearrowright \text{---} \rightarrow \text{---} \circ \circ \text{---} = S_\beta$$

$$S_\alpha = \text{---} \circ \circ \text{---} \rightarrow \text{---} \curvearrowright \text{---} = S_\beta$$

donde se entiende que las componentes que no se representan son idénticas.

Definición. Sea \mathbb{V} el \mathbb{Q} -espacio vectorial libre con base $\{1, X\}$. Se definen las funciones

$$\begin{array}{ll} \Delta : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} & m : \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \\ 1 \mapsto 1 \otimes X + X \otimes 1 & 1 \otimes 1 \mapsto 1 \\ X \mapsto X \otimes X & 1 \otimes X \mapsto X \\ & X \otimes 1 \mapsto X \\ & X \otimes X \mapsto 0 \end{array}$$

extendidas linealmente.

Es inmediato de la definición que

1. $m : \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ es suprayectiva.
2. $\ker(m) = \langle 1 \otimes X - X \otimes 1 \rangle + \langle X \otimes X \rangle$.
3. $\Delta : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$ es inyectiva.
4. $\text{im}(\Delta) = \langle 1 \otimes X + X \otimes 1 \rangle + \langle X \otimes X \rangle$.

Proposición 3.4.1. : Δ y m son morfismos homogéneos de grado -1 .

Demostración.

$$\begin{aligned} m((\mathbb{V} \otimes \mathbb{V})_2) &= \langle 1 \rangle = \mathbb{V}_1 \\ m((\mathbb{V} \otimes \mathbb{V})_0) &= \langle X \rangle = \mathbb{V}_{-1} \\ m((\mathbb{V} \otimes \mathbb{V})_i) &= 0 = \mathbb{V}_{i-1} \quad \forall i \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 2\} \\ \Delta(\mathbb{V}_{-1}) &= \langle X \otimes X \rangle = (\mathbb{V} \otimes \mathbb{V})_{-2} \\ \Delta(\mathbb{V}_1) &= \langle 1 \otimes X + X \otimes 1 \rangle \subseteq (\mathbb{V} \otimes \mathbb{V})_0 \\ \Delta(\mathbb{V}_i) &= 0 = (\mathbb{V} \otimes \mathbb{V})_{i-1} \quad \forall i \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}. \end{aligned}$$

□

Corolario 3.4.2. Para cada $l \in \mathbb{Z}$, $\Delta : \mathbb{V}\{l\} \rightarrow (\mathbb{V} \otimes \mathbb{V})\{l+1\}$ y $m : (\mathbb{V} \otimes \mathbb{V})\{l\} \rightarrow \mathbb{V}\{l+1\}$ son morfismos homogéneos de grado 0.

Esta es consecuencia directa de la proposición 3.3.2.

Definición. Sean $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ espacios vectoriales. Sean $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ funciones lineales. Se define el **producto tensorial de las funciones** $\{f_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ como

$$(f_1 \otimes \dots \otimes f_n) : X_1 \otimes \dots \otimes X_n \rightarrow Y_1 \otimes \dots \otimes Y_n$$

$$x_1 \otimes \dots \otimes x_n \mapsto f_1(x_1) \otimes \dots \otimes f_n(x_n).$$

Proposición 3.4.3. Bajo los supuestos de la definición anterior se tiene que $f_1 \otimes \dots \otimes f_n$ es una función lineal bien definida.

La demostración de esta proposición se puede consultar en [6].

Definición. Sean S_α y S_β vértices adyacentes del cubo de estados de un diagrama de enlace con $|\alpha| + 1 = |\beta|$. Sea $\xi = (S_\alpha, S_\beta)$. Se define $d_\xi : \mathbb{V}^{k_\alpha} \rightarrow \mathbb{V}^{k_\beta}$ como el producto tensorial de la identidad en todos los factores tensoriales asociados a las componentes de S_α que son idénticas a las de S_β y la función m ó Δ en los factores restantes según el caso:

$$\left(\begin{array}{c} \text{---} \circ \circ \text{---} \\ \rightarrow \\ \text{---} \circ \circ \text{---} \end{array} \right) \Rightarrow (\Delta : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{V})$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{---} \circ \circ \text{---} \\ \rightarrow \\ \text{---} \circ \circ \text{---} \end{array} \right) \Rightarrow (m : \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}).$$

Para ser más precisos, recordando que hay una correspondencia entre los círculos de ambos estados con sus correspondientes factores tensoriales entonces al pasar de S_α a S_β puede pasar alguno de los siguientes casos.

Caso 1: El j -ésimo círculo de S_α se parte para formar el k -ésimo y el l -ésimo círculo de S_β mientras que el resto de círculos de S_α se mantiene igual, cambiando solo el orden mediante una permutación σ .

Denotemos por $\mathbb{V}_{(i)}$ al i -ésimo factor tensorial.

Sea d'_ξ el producto tensorial de $\Delta : \mathbb{V}_{(j)} \rightarrow \mathbb{V}_{(k)} \otimes \mathbb{V}_{(l)}$ e $Id : \mathbb{V}_{(i)} \rightarrow \mathbb{V}_{(\sigma(i))}$ para cada $i \neq j$.

Sea $Perm_\xi$ el isomorfismo que permuta los factores tensoriales de \mathbb{V}^{k_β} para que coincidan con el orden dado a los círculos de S_β .

Así $d_\xi = Perm_\xi \circ d'_\xi$.

Esto se ilustra en el siguiente diagrama

$$\left. \begin{array}{ccc} \mathbb{V}_{(1)} & \xrightarrow{Id} & \mathbb{V}_{(\sigma(1))} \\ \otimes & & \otimes \\ \vdots & & \vdots \\ \otimes & & \otimes \\ \mathbb{V}_{(j)} & \xrightarrow{\Delta} & \mathbb{V}_{(k)} \otimes \mathbb{V}_{(l)} \\ \otimes & & \otimes \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbb{V}_{(k_\alpha)} & \xrightarrow{Id} & \mathbb{V}_{(\sigma(k_\alpha))} \end{array} \right\} \xrightarrow{Perm_\xi} \mathbb{V}_\beta.$$

Es esta caso decimos que d_ξ es un morfismo de tipo Δ .

Caso 2: El k -ésimo y el l -ésimo círculo de S_α se fusionan en el j -ésimo círculo de S_β mientras que el resto de círculos de S_α se mantiene igual, cambiando solo el orden mediante una permutación τ .

De forma similar al caso anterior, sea d'_ξ el producto tensorial de $m : \mathbb{V}_{(k)} \otimes \mathbb{V}_{(l)} \rightarrow \mathbb{V}_{(j)}$ e $Id : \mathbb{V}_{(i)} \rightarrow \mathbb{V}_{(\tau(i))}$ para cada $i \neq j$.

Sea $Perm_1$ una permutación sobre los factores de \mathbb{V}^{k_α} de manera que $\mathbb{V}_{(k)}$ y $\mathbb{V}_{(l)}$ sean consecutivos. Sea $Perm_2$ la permutación que se debe hacer sobre los factores tensoriales del codominio de d'_ξ para que coincidan con los de \mathbb{V}^{k_β} .

Así $d_\xi = Perm_2 \circ d'_\xi \circ Perm_1$.

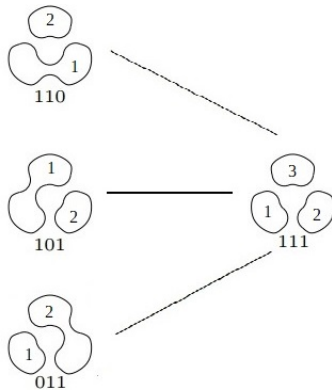
El diagrama queda de la siguiente manera:

$$\mathbb{V}_\alpha \xrightarrow{Perm_1} \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{V}_{(1)} & \xrightarrow{Id} & \mathbb{V}_{(\sigma(1))} \\ \otimes & & \otimes \\ \vdots & & \vdots \\ \otimes & & \otimes \\ \mathbb{V}_{(k)} \otimes \mathbb{V}_{(l)} & \xrightarrow{m} & \mathbb{V}_{(j)} \\ \otimes & & \otimes \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbb{V}_{(k_\alpha)} & \xrightarrow{Id} & \mathbb{V}_{(\sigma(k_\alpha))} \end{array} \right) \xrightarrow{Perm_2} \mathbb{V}_\beta$$

Nótese que hay libertad para elegir $Perm_1$ sin embargo $Perm_2$ está condicionada a dicha elección. Al final sólo importa el orden en las componentes conexas de S_α y S_β . Cualquier cambio en la permutación $Perm_1$ se verá reflejado en un cambio en $Perm_2$.

Diremos en este caso que d_ξ es un morfismo de tipo m .

Por ejemplo, a partir de la Figura 2.2 le damos un orden a los círculos de cada estado. Nos concentramos en una parte del cubo de estados.



Notamos que al pasar del estado 110 al 111 el primer círculo de 110 se divide

en el primer y segundo círculo de 111 mientras que el segundo círculo de 110 se mantiene idéntico y ocupa el tercer lugar en el orden de 111. Por lo que $d'_{11*} = \Delta \otimes Id$.

Como el orden del codominio de d'_{11*} coincide con el de 111 entonces $Perm_{11*} = Id$.

Por lo tanto $d_{11*}(u \otimes v) = \Delta(u) \otimes v$ para todo $u \otimes v \in V_{110}$.

De la misma forma vemos que $d_{*11}(u \otimes v) = (Id \otimes \Delta)(u \otimes v) = u \otimes \Delta(v)$

Finalmente, la primera componente de 101 se parte en la primera y la tercera componente de 111 mientras que la segunda componente de 101 se mantiene idéntica y corresponde a la segunda componente de 111.

Vemos que $d'_{1*1}(u \otimes v) = (\Delta \otimes Id)(u \otimes v) = \Delta(u) \otimes v$ sin embargo el orden en los factores tensoriales de V_{111} no coincide con el del codominio de d'_{1*1} . En este caso es fácil ver que $Perm_{1*1}(u \otimes v \otimes w) = (u \otimes w \otimes v)$.

Por lo tanto la función d_{1*1} queda determinada por

- $d_{1*1}(X \otimes X) = X \otimes X \otimes X$
- $d_{1*1}(X \otimes 1) = X \otimes 1 \otimes X$
- $d_{1*1}(1 \otimes X) = 1 \otimes X \otimes X + X \otimes X \otimes 1$
- $d_{1*1}(1 \otimes 1) = 1 \otimes 1 \otimes X + X \otimes 1 \otimes 1$.

Proposición 3.4.4. Sean U, V, W y Z espacios vectoriales graduados.

Si $f : U \rightarrow W$ es un morfismo homogéneo de grado k y $g : V \rightarrow Z$ es un morfismo homogéneo de grado l entonces $f \otimes g$ es un morfismo homogéneo de grado $k + l$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
 (f \otimes g)((U \otimes V)_j) &= (f \otimes g) \left(\bigoplus_{a+b=j} (U_a \otimes V_b) \right) \\
 &\subseteq \sum_{a+b=j} f(U_a) \otimes g(V_b) \\
 &\subseteq \sum_{a+b=j} W_{a+k} \otimes Z_{b+l} \\
 &= \bigoplus_{a'+b'=j+k+l} W_{a'} \otimes Z_{b'} \\
 &= (W \otimes Z)_{j+k+l}.
 \end{aligned}$$

□

Corolario 3.4.5. Cada $d_\xi : \mathbb{V}_\alpha \rightarrow \mathbb{V}_\beta$ es un morfismo homogéneo de grado 0.

Demostración. Recordemos que $\mathbb{V}_\alpha = \mathbb{V}^{k_\alpha} \{|\alpha|\}$, $\mathbb{V}_\beta = \mathbb{V}^{k_\beta} \{|\beta|\}$ y $|\beta| = |\alpha| + 1$.

Puesto que $Id : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ es morfismo homogéneo de grado 0 y tanto $\Delta : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$ como $m : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$ son morfismos homogéneos de grado -1 , entonces por la proposición anterior $d_\xi : \mathbb{V}^{\otimes k_\alpha} \rightarrow \mathbb{V}^{\otimes k_\beta}$ es un morfismo homogéneo de grado -1 .

De la proposición 3.3.2 concluimos que $d_\xi : \mathbb{V}^{\otimes k_\alpha}\{|\alpha|\} \rightarrow \mathbb{V}^{\otimes k_\beta}\{|\beta|\}$ es un morfismo homogéneo de grado $-1 + |\beta| - |\alpha| = 0$. \square

Definición. Sean U, V, W y Z espacios vectoriales y $f_1 : U \rightarrow V$, $f_2 : U \rightarrow W$, $g_1 : V \rightarrow Z$ y $g_2 : W \rightarrow Z$, funciones lineales. Se dice que el cuadro

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g_2} & Z \\ f_2 \uparrow & & \uparrow g_1 \\ U & \xrightarrow{f_1} & V \end{array}$$

conmuta (o que es conmutativo) si $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$.

Se dice que dicho cuadro **anticonmuta** (o que es anticonmutativo) si $g_1 \circ f_1 = -g_2 \circ f_2$.

Lema 3.4.6. Sea C el resultado de tomar el cubo de estados de un diagrama de enlace y sustituir cada S_α por \mathbb{V}_α y cada flecha $S_\alpha \xrightarrow{\xi} S_\beta$ con d_ξ . Así todos los cuadros en C son conmutativos.

Demostración. Considérese el siguiente cuadro

$$\begin{array}{ccc} S_\gamma & \longrightarrow & S_\delta \\ \uparrow & & \uparrow \\ S_\alpha & \longrightarrow & S_\beta \end{array}$$

En cada flecha el número de componentes puede aumentar o disminuir 1. Por lo tanto si k_α y k_δ son el número de componentes de S_α y S_δ respectivamente, entonces

$$k_\delta \in \{k_\alpha - 2, k_\alpha, k_\alpha + 2\}.$$

Por lo que al sustituir estados por espacios vectoriales y flechas por morfismos obtenemos alguno de los siguientes casos:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} V_\gamma & \xrightarrow{\Delta_1} & V_\delta \\ m_1 \uparrow & 1 & \uparrow \Delta_2 \\ V_\alpha & \xrightarrow{m_2} & V_\beta \end{array} & \begin{array}{ccc} V_\gamma & \xrightarrow{\Delta_1} & V_\delta \\ m_1 \uparrow & 2 & \uparrow m_2 \\ V_\alpha & \xrightarrow{\Delta_2} & V_\beta \end{array} & \begin{array}{ccc} V_\gamma & \xrightarrow{m_1} & V_\delta \\ \Delta_1 \uparrow & 3 & \uparrow m_2 \\ V_\alpha & \xrightarrow{\Delta_2} & V_\beta \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 V_\gamma & \xrightarrow{m_2} & V_\delta \\
 m_1 \uparrow & & \uparrow m_4 \\
 & 4 & \\
 V_\alpha & \xrightarrow{m_3} & V_\beta
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 V_\gamma & \xrightarrow{\Delta_2} & V_\delta \\
 \Delta_1 \uparrow & & \uparrow \Delta_4 \\
 & 5 & \\
 V_\alpha & \xrightarrow{\Delta_3} & V_\beta
 \end{array}$$

donde en las flechas se omitieron los factores en los que se aplica la función identidad y se agregaron subíndices para diferenciarlas.

Caso 1: En este caso el cuadro puede quedar de las siguientes formas:

$$\begin{array}{ccc}
 S_\gamma = \text{⋈} & \longrightarrow & \text{⊙⊙} = S_\delta \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 S_\alpha = \text{⊙⊙} & \longrightarrow & S_\beta
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 S_\gamma = \text{⋈⋈} & \longrightarrow & \text{⋈⊙} = S_\delta \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 S_\alpha = \text{⊙⊙⋈} & \longrightarrow & S_\beta
 \end{array}$$

En ambos cuadros se necesitan al menos dos cambios en los tipos de suavizados para llegar de S_α a S_δ lo cual fuerza que $S_\beta = S_\gamma$ y la conmutatividad es trivial.

Caso 2.1: $\text{codominio}(m_1) \cap \text{dominio}(\Delta_1) \neq \emptyset$.

Aquí nuestro cuadro se ve de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc}
 S_\gamma = \text{⋈⋈} & \longrightarrow & \text{⋈⊙} = S_\delta \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 S_\alpha = \text{⊙⋈} & \longrightarrow & S_\beta
 \end{array}$$

Este cuadro solo se puede completar con $S_\beta = \text{⊙⊙⊙}$ Sustituyendo los espacios vectoriales asociados obtenemos sin pérdida de generalidad

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{V} & \xrightarrow{\Delta} & \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \\
 m \uparrow & & \uparrow m \otimes Id \\
 \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} & \xrightarrow{Id \otimes \Delta} & \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}
 \end{array}$$

Por linealidad, para probar que $(m \otimes Id) \circ (Id \otimes \Delta) = \Delta \circ m$ nos basta verificar que ambas funciones coinciden en una base.

En efecto, notamos que

$$\begin{aligned}
 (m \otimes Id) \circ (Id \otimes \Delta)(1 \otimes 1) &= (m \otimes Id)(1 \otimes \Delta(1)) \\
 &= (m \otimes Id)(1 \otimes 1 \otimes X + 1 \otimes X \otimes 1) \\
 &= m(1 \otimes 1) \otimes X + m(1 \otimes X) \otimes 1 \\
 &= 1 \otimes X + X \otimes 1 \\
 &= \Delta(1) = \Delta(m(1 \otimes 1))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (m \otimes Id) \circ (Id \otimes \Delta)(1 \otimes X) &= (m \otimes Id)(1 \otimes \Delta(X)) \\
 &= (m \otimes Id)(1 \otimes X \otimes X) \\
 &= m(1 \otimes X) \otimes X \\
 &= X \otimes X = \Delta(X) \\
 &= \Delta(m(1 \otimes X))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (m \otimes Id) \circ (Id \otimes \Delta)(X \otimes 1) &= (m \otimes Id)(X \otimes \Delta(1)) \\
 &= (m \otimes Id)(X \otimes 1 \otimes X + X \otimes X \otimes 1) \\
 &= m(X \otimes 1) \otimes X + m(X \otimes X) \otimes 1 \\
 &= X \otimes X + 0 \\
 &= \Delta(X) = \Delta(m(X \otimes 1))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (m \otimes Id) \circ (Id \otimes \Delta)(X \otimes X) &= (m \otimes Id)(X \otimes \Delta(X)) \\
 &= (m \otimes Id)(X \otimes X \otimes X) \\
 &= m(X \otimes X) \otimes X \\
 &= 0 = \Delta(0) = \Delta(m(X \otimes X)).
 \end{aligned}$$

Caso 2.2: $\text{codominio}(m_1) \cap \text{dominio}(\Delta_1) = \emptyset$.

Aquí el cuadro de estados es de la forma

$$\begin{array}{ccc}
 S_\gamma = \text{⌢⌢} & \longrightarrow & \text{⌢⊙⊙} = S_\delta \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 S_\alpha = \text{⊙⊙⌢} & \longrightarrow & S_\beta
 \end{array}$$

De nuevo, para llegar a de S_α a S_δ se requieren al menos dos cambios de tipo de suavizado. Por lo que el cuadro solo puede completarse con $S_\beta = \text{⊙⊙⊙⊙}$.

Así, sin pérdida de generalidad, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{V} \otimes \mathbb{V} & \xrightarrow{Id \otimes \Delta} & \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \\
\uparrow m \otimes Id & & \uparrow m \otimes Id \otimes Id \\
\mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} & \xrightarrow{Id \otimes Id \otimes \Delta} & \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}
\end{array}$$

$\forall u \otimes v \otimes w \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$ se cumple que

$$\begin{aligned}
(Id \otimes \Delta) \circ (m \otimes Id)(u \otimes v \otimes w) &= (Id \otimes \Delta)(m(u \otimes v) \otimes w) \\
&= m(u \otimes v) \otimes \Delta(w) \\
&= (m \otimes Id \otimes Id)(u \otimes v \otimes \Delta(w)) \\
&= (m \otimes Id \otimes Id) \circ (Id \otimes Id \otimes \Delta)(u \otimes v \otimes w).
\end{aligned}$$

Caso 3: Aquí el cuadro puede ser como uno de los siguientes

$$\begin{array}{ccc}
S_\gamma = \bigcirc \bigcirc \bigcirc & \longrightarrow & \bigcirc \text{---} \bigcirc = S_\delta \\
\uparrow & & \uparrow \\
S_\alpha = \text{---} \bigcirc \bigcirc & \longrightarrow & S_\beta
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
S_\gamma = \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc & \longrightarrow & \bigcirc \bigcirc \text{---} \bigcirc = S_\delta \\
\uparrow & & \uparrow \\
S_\alpha = \text{---} \bigcirc \bigcirc \bigcirc & \longrightarrow & S_\beta
\end{array}$$

Análogo al Caso 1, dado el número de cruces que hay que cambiar y el orden específico en el que se debe hacer esos cambios, resulta que $S_\beta = S_\gamma$ y la conmutatividad es trivial.

Caso 4.1: $\text{codominio}(m_1) \cap \text{dominio}(m_2) = \emptyset$.

El cuadro

$$\begin{array}{ccc}
S_\gamma = \bigcirc \bigcirc \text{---} \bigcirc & \longrightarrow & \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc = S_\delta \\
\uparrow & & \uparrow \\
S_\alpha = \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc & \longrightarrow & S_\beta
\end{array}$$

solo puede completarse con $S_\beta = S_\gamma$ o con $S_\beta = \text{---} \bigcirc \bigcirc \bigcirc$.

Si $S_\beta = S_\gamma$ ent la conmutatividad es trivial.

Si $S_\beta = \textcircled{\smile} \textcircled{\circ}$ entonces, sin pérdida de generalidad tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} & \xrightarrow{m \otimes Id} & \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \\ Id \otimes Id \otimes m \uparrow & & \uparrow Id \otimes m \\ \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} & \xrightarrow{m \otimes Id \otimes Id} & \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \end{array}$$

$$\forall u \otimes v \otimes w \otimes z \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}.$$

$$\begin{aligned} (m \otimes Id) \circ (Id \otimes Id \otimes m)(u \otimes v \otimes w \otimes z) &= (m \otimes Id)(u \otimes v \otimes m(w \otimes z)) \\ &= m(u \otimes v) \otimes m(w \otimes z) \\ &= (Id \otimes m)(m(u \otimes v) \otimes w \otimes z) \\ &= (Id \otimes m) \circ (m \otimes Id \otimes Id)(u \otimes v \otimes w \otimes z). \end{aligned}$$

Caso 4.2: $\text{codominio}(m_1) \cap \text{dominio}(m_2) \neq \emptyset$.

En este caso el cuadro es de la forma

$$\begin{array}{ccc} S_\gamma = \textcircled{\circ} \textcircled{\smile} & \longrightarrow & \textcircled{\smile} \textcircled{\circ} = S_\delta \\ \uparrow & & \uparrow \\ S_\alpha = \textcircled{\circ} \textcircled{\circ} \textcircled{\circ} & \longrightarrow & S_\beta \end{array}$$

que solo se puede completar de forma no trivial tomando $S_\beta = \textcircled{\smile} \textcircled{\circ}$ lo cual sin pérdida de generalidad induce el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} & \xrightarrow{m} & \mathbb{V} \\ Id \otimes m \uparrow & & \uparrow m \\ \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} & \xrightarrow{m \otimes Id} & \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \end{array}$$

Sabemos que $\Lambda = \{u \otimes v \otimes w \mid u, v, w \in \{1, X\}\}$ es base de $V \otimes V \otimes V$ por lo que basta ver que para cada $u \otimes v \otimes w \in \Lambda$ se cumple que

$$m(u \otimes m(v \otimes w)) = m(m(u \otimes v) \otimes w).$$

Subcaso 4.2.1: $u = 1$.

$$m(u \otimes m(v \otimes w)) = m(v \otimes w) = m(m(u \otimes v) \otimes w).$$

Subcaso 4.2.2: $v = 1$.

$$m(u \otimes m(v \otimes w)) = m(u \otimes w) = m(m(u \otimes v) \otimes w).$$

Subcaso 4.2.3: $w = 1$.

$$m(u \otimes m(v \otimes w)) = m(u \otimes v) = m(m(u \otimes v) \otimes w).$$

Subcaso 4.2.4: $u = v = w = X$.

$$m(u \otimes m(v \otimes w)) = m(u \otimes 0) = 0 = m(0 \otimes w) = m(m(u \otimes v) \otimes w).$$

Como $m \circ (Id \otimes m)(u \otimes v \otimes w)$ y $m \circ (m \otimes Id)(u \otimes v \otimes w)$ son funciones lineales que coinciden en una base entonces

$$m \circ (Id \otimes m)(u \otimes v \otimes w) = m \circ (m \otimes Id)(u \otimes v \otimes w).$$

Caso 5.1: $\text{codominio}(\Delta_1) \cap \text{dominio}(\Delta_2) = \emptyset$.

Aqui obtenemos un cuadro de la forma

$$\begin{array}{ccc} S_\gamma = \text{○○} \text{⋈} & \longrightarrow & \text{○○○○} = S_\delta \\ \uparrow & & \uparrow \\ S_\alpha = \text{⋈} \text{⋈} & \longrightarrow & S_\beta \end{array}$$

que solo se completa de forma no trivial tomando $S_\beta = \text{⋈} \text{○○}$ lo cual sin pérdida de generalidad induce el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} & \xrightarrow{Id \otimes Id \otimes \Delta} & \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \\ \Delta \otimes Id \uparrow & & \uparrow \Delta \otimes Id \otimes Id \\ \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} & \xrightarrow{Id \otimes \Delta} & \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \end{array}$$

Verificamos que $\forall u, v \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$.

$$\begin{aligned} (Id \otimes Id \otimes \Delta) \circ (\Delta \otimes Id)(u \otimes v) &= (Id \otimes Id \otimes \Delta)(\Delta(u) \otimes v) \\ &= \Delta(u) \otimes \Delta(v) \\ &= (\Delta \otimes Id \otimes Id)(u \otimes \Delta(v)) \\ &= (\Delta \otimes Id \otimes Id) \circ (Id \otimes \Delta)(u \otimes v). \end{aligned}$$

Caso 5.2: $\text{codominio}(\Delta_1) \cap \text{dominio}(\Delta_2) \neq \emptyset$.

Aqui obtenemos un cuadro de la forma

$$\begin{array}{ccc} S_\gamma = \text{⋈} \text{○} & \longrightarrow & \text{○○○} = S_\delta \\ \uparrow & & \uparrow \\ S_\alpha = \text{⋈} & \longrightarrow & S_\beta \end{array}$$

que solo se completa de forma no trivial tomando $S_\beta = \bigcirc \smile$ lo cual sin pérdida de generalidad induce el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} & \xrightarrow{\Delta \otimes Id} & \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \\ \Delta \uparrow & & \uparrow Id \otimes \Delta \\ \mathbb{V} & \xrightarrow{\Delta} & \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \end{array}$$

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes Id) \circ \Delta(1) &= (\Delta \otimes Id)(1 \otimes X + X \otimes 1) \\ &= \Delta(1) \otimes X + \Delta(X) \otimes 1 \\ &= (1 \otimes X + X \otimes 1) \otimes X + X \otimes X \otimes 1 \\ &= 1 \otimes X \otimes X + X \otimes 1 \otimes X + X \otimes X \otimes 1 \\ &= 1 \otimes X \otimes X + X \otimes (1 \otimes X + X \otimes 1) \\ &= 1 \otimes \Delta(X) + X \otimes \Delta(1) \\ &= (Id \otimes \Delta)(1 \otimes X + X \otimes 1) \\ &= (Id \otimes \Delta) \circ \Delta(1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes Id) \circ \Delta(X) &= (\Delta \otimes Id)(X \otimes X) \\ &= \Delta(X) \otimes X \\ &= X \otimes X \otimes X \\ &= X \otimes \Delta(X) \\ &= (Id \otimes \Delta)(X \otimes X) \\ &= (Id \otimes \Delta) \circ \Delta(X). \end{aligned}$$

□

Definición. Sea $\xi = a_1 \dots a_{i-1} * a_{i+1} \dots a_n$ flecha del cubo de estados.

$$(-1)^\xi = (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} a_j}.$$

Diremos que la flecha ξ es **par** si $(-1)^\xi = 1$ y diremos que es **impar** si $(-1)^\xi = -1$.

Nótese que $(-1)^\xi$ depende del orden asignado a los cruces del diagrama.

Lema 3.4.7. En un cubo de estados, cada cuadro posee un número impar de flechas impares.

Demostración. Considérese un cuadro en el cubo de estados

$$\begin{array}{ccc} S_\gamma & \xrightarrow{b} & S_\delta \\ a \uparrow & & \uparrow e \\ S_\alpha & \xrightarrow{c} & S_\beta \end{array}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\alpha &= w_1 0 w_2 0 w_3 & \beta &= w_1 1 w_2 0 w_3 \\ \gamma &= w_1 0 w_2 1 w_3 & \delta &= w_1 1 w_2 1 w_3.\end{aligned}$$

donde w_1, w_2 y w_3 son sucesiones finitas de ceros y unos.

De esta forma podemos escribir

$$\begin{aligned}a &= w_1 0 w_2 * w_3 & b &= w_1 * w_2 1 w_3 \\ c &= w_1 * w_2 0 w_3 & e &= w_1 1 w_2 * w_3.\end{aligned}$$

Supóngase que $|w_1| = m$ y $|w_2| = l$, esto es, en w_1 hay exactamente n entradas con valor 1 y en w_2 hay exactamente l . Así

$$\begin{aligned}(-1)^a &= (-1)^{|w_1|+|w_2|} = (-1)^{m+l} & (-1)^b &= (-1)^{|w_1|} = (-1)^m \\ (-1)^c &= (-1)^{|w_1|} = (-1)^m & (-1)^e &= (-1)^{|w_1|+1+|w_2|} = (-1)^{m+l+1}.\end{aligned}$$

Si m y l son pares entonces $m+l+1$ es impar. Por lo que la única flecha impar es e .

Si m y l con impares entonces $m+l$ es par y $m+l+1$ impar. Así las flechas impares son b, c y e .

Si m es par y l impar entonces $m+l$ es impar. En consecuencia la única flecha impar es a .

Si m es impar y l es par entonces $m+l$ es impar. De este modo, las flechas impares son a, b y c . \square

Definición. Sea D un diagrama orientado de n cruces. Para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$ se define $d^i : \llbracket D \rrbracket^i \rightarrow \llbracket D \rrbracket^{i+1}$ como

$$d^i = \sum_{|\xi|=i} (-1)^\xi d_\xi.$$

Convendremos en que $d^i = 0$ para toda $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \dots, n-1\}$.

Por construcción cada d^i es un morfismo homogéneo de grado 0.

Proposición 3.4.8. Bajo todas las definiciones anteriores se obtiene que $\llbracket D \rrbracket = (\llbracket D \rrbracket^i, d^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es un complejo de cocadenas.

Demostración. Sea $i \in \mathbb{Z}$.

Si $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \dots, n-1\}$ entonces es obvio que $d^{i+1} \circ d^i = 0$.

En otro caso, como d^i y d^{i+1} son funciones lineales se tiene que

$$d^{i+1} \circ d^i = \sum_{|\xi|=i+1} (-1)^\xi d_\xi \left(\sum_{|\xi'|=i} (-1)^{\xi'} d_{\xi'} \right) = \sum_{|\xi|=i+1, |\xi'|=i} (-1)^{\xi'} (-1)^\xi (d_\xi \circ d_{\xi'}). \quad (3.3)$$

Pero cada $d_\xi \circ d_{\xi'}$ corresponde a la mitad de un cuadro conmutativo en el cubo de estados. Este cuadro se completa con una $d_\zeta \circ d_{\zeta'}$ que también forma parte de la suma en la ecuación 3.3.

Tenemos así el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{d_\xi} & \\
 d'_\xi \uparrow & & \uparrow d_\zeta \\
 & \xrightarrow{d_{\zeta'}} &
 \end{array}$$

Dado que en dicho cuadro hay un número impar de flechas impares

$$(-1)^\xi d_\xi \circ (-1)^{\xi'} d_{\zeta'} = -(-1)^\zeta d_\zeta \circ (-1)^{\zeta'} d_{\zeta'}.$$

De este modo, al incluir los signos cada cuadro conmutativo se vuelve anticonmutativo.

Así $d^{i+1} \circ d^i$ es suma de funciones que se anulan por pares. Por lo tanto $d^{i+1} \circ d^i = 0$. \square

Corolario 3.4.9. Si es D un diagrama de enlace orientado entonces

$$\chi(H(\llbracket D \rrbracket)) = K(D).$$

Hay que notar que hasta ahora, el corchete de Khovanov depende de:

1. El orden fijado para los círculos de cada estado.
2. El orden de la suma directa sobre los estados de la misma altura.
3. El orden de los cruces del diagrama.

Para compensar esto introduciremos algunas nociones de álgebra homológica.

Definición. Sean $C = (C^n, d_C^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ y $D = (D^n, d_D^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ complejos de cocadenas. Un **morfismo de complejos de cocadenas** es una sucesión $f = (f^n : C^n \rightarrow D^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de funciones lineales tales que $\forall n \in \mathbb{Z}$ se cumple que $f^{n+1} \circ d_C^n = d_D^n \circ f^n$.

Esto es, tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & C^{n-1} & \xrightarrow{d_C^{n-1}} & C^n & \xrightarrow{d_C^n} & C^{n+1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow f^{n-1} & & \downarrow f^n & & \downarrow f^{n+1} & & \\
 \dots & \longrightarrow & D^{n-1} & \xrightarrow{d_D^{n-1}} & D^n & \xrightarrow{d_D^n} & D^{n+1} & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Abusando de la notación escribiremos $f : C \rightarrow D$

Definición. Un **isomorfismo de complejos de cocadenas** $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ es un morfismo de complejos de cocadenas tal que cada f^n es biyectiva.

Dos complejo de cocadenas C y D son **isomorfos** si existe un isomorfismo de complejos de cocadenas $f : C \rightarrow D$.

Proposición 3.4.10. Ser isomorfos es una relación de equivalencia sobre la clase de complejo de cocadenas.

Demostración. Sean $C = (C^n, d_C^n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $D = (D^n, d_D^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ y $E = (E^n, d_E^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ complejo de cocadenas. Es claro que $Id = (Id_{C_n})_{n \in \mathbb{Z}}$ es un isomorfismo de un complejo de cocadenas.

Sea $f : C \rightarrow D$ un isomorfismo de complejos de cocadenas. Si $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ entonces definamos $(f)^{-1} = ((f^n)^{-1})_{n \in \mathbb{Z}}$.

Como f es un isomorfismo de complejos de cocadenas tenemos que para toda $n \in \mathbb{Z}$ se cumple que

$$\begin{aligned} f^{n+1} \circ d_C^n &= d_D^n \circ f^n \Rightarrow d_C^n = (f^{n+1})^{-1} \circ d_D^n \circ f^n \\ &\Rightarrow d_C^n \circ (f^n)^{-1} = (f^{n+1})^{-1} \circ d_D^n. \end{aligned}$$

Por lo que $(f)^{-1} : D \rightarrow C$ es un isomorfismo de complejos de cocadenas.

Sean $f : C \rightarrow D$ y $g : D \rightarrow E$ isomorfismos de complejo de cocadenas. Si $f = (f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ y $g = (g^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ entonces denifimos $g \circ f = (g^n \circ f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} d_E^n \circ (g^n \circ f^n) &= (d_E^n \circ g^n) \circ f^n \\ &= (g^{n+1} \circ d_D^n) \circ f^n \\ &= g^{n+1} \circ (d_D^n \circ f^n) \\ &= g^{n+1} \circ (f^{n+1} \circ d_C^n) \\ &= (g^{n+1} \circ f^{n+1}) \circ d_C^n. \end{aligned}$$

Por lo tanto $g \circ f : C \rightarrow E$ es un isomorfismo de complejos de cocadenas. \square

Proposición 3.4.11. Para cada diagrama de enlace D su corchete de Khovanov está bien definido, salvo isomorfismo de complejos de cocadenas.

Para ser más precisos:

Si D es un diagrama de enlace y $[[D]]$ es el corchete de Khovanov obtenido al haber fijado un orden para los cruces de D , un orden para los círculos de cada estado y un orden para la suma directa de los estados a una misma altura y si $[[D]]'$ el el corchete de Khovanov resultado de cambiar alguno de dichos órdenes. Entonces existe un isomorfismo de complejos de cocadenas $[[D]] \rightarrow [[D]]'$.

Demostración. Caso 1: El orden en la suma directa es diferente mientras que los demás órdenes son idénticos.

Para cada $i \in \{0, \dots, n\}$ sea σ_i una permutación del conjunto $\{S_\alpha\}_{|\alpha|=i}$ de manera que

$$\begin{aligned} [[D]]^i &= \bigoplus_{|\alpha|=i} V_\alpha \\ [[D]]^{i'} &= \bigoplus_{|\alpha|=i} V_{\sigma(\alpha)}. \end{aligned}$$

Notemos que en el cubo de estados, el estado S_α es adyacente al S_β si y sólo si $S_{\sigma(\alpha)}$ es adyacente a $S_{\sigma(\beta)}$. Como las funciones d^i y $d^{i'}$ dependen, en

este caso, solo de las adyacencias entonces para cada $i \in \{0, \dots, n\}$ tenemos el siguiente cuadro conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \llbracket D \rrbracket^i & \xrightarrow{d^i} & \llbracket D \rrbracket^{i+1} \\ \sigma_i \downarrow & & \downarrow \sigma_{i+1} \\ \llbracket D \rrbracket^{i'} & \xrightarrow{d^{i'}} & \llbracket D \rrbracket^{i+1'} \end{array}$$

Sea $f^i = \sigma_i$ para $i \in \{0, \dots, n\}$ y sea $f^i = 0$ en otro caso. Es claro que $f = (f^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es el morfismo buscado.

Caso 2: El orden para los círculos de los estados cambia mientras que tanto el orden de la suma directa y el orden de los cruces se preserva.

Este es bastante parecido al caso anterior. Consideremos una flecha $\alpha \xrightarrow{\xi} \beta$ del cubo de estados. Sean S_α y S'_α los mismos estados pero con un orden distinto en sus componentes conexas. De la misma manera tomamos S_β y S'_β . Sean d_ξ y d'_ξ los morfismos correspondientes a dichos órdenes.

Tenemos permutaciones σ_α y σ_β que envían el orden de los factores tensoriales de S_α en S'_α y de S_β y S'_β respectivamente.

Sea $Perm : \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$ dada por $Perm(u \otimes v) = (v \otimes u)$.

Es claro que $Perm$ es un isomorfismo. Además cualquier permutación sobre los factores tensoriales de un producto tensorial se puede describir como composición de $Perm$ (multiplicado tensorialmente por Id, según sea necesario). Como además

$$\begin{aligned} m \circ Perm &= m \\ Perm \circ \Delta &= \Delta \end{aligned} \tag{3.4}$$

concluimos que el siguiente cuadro es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}_\alpha & \xrightarrow{d_\xi} & \mathbb{V}_\beta \\ \sigma_\alpha \downarrow & & \downarrow \sigma_\beta \\ \mathbb{V}'_\alpha & \xrightarrow{d'_\xi} & \mathbb{V}'_\beta \end{array}$$

Este resultado se extiende de manera natural a la suma directa tomando $f^i = \sum_{|\alpha|=i} \sigma_\alpha$ para cada $i \in \{0, \dots, n\}$ y $f^i = 0$ para $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \dots, n\}$ se obtiene el isomorfismo buscado $f = (f^i)_{i \in \mathbb{Z}}$.

Caso 3: Cambia el orden de los cruces del diagrama mientras que el orden de los círculos de cada estado y el orden de la suma directa se mantienen.

Sea σ la permutación sobre los cruces que envía un orden en otro. Cada estado S_α calculado a partir del primer orden de los cruces del diagrama corresponde de manera biunívoca a un estado $S_{\alpha'}$ calculado a partir del segundo

orden, de manera que cada flecha $\alpha \xrightarrow{\xi} \beta$ corresponde a una única flecha $\alpha' \xrightarrow{\xi'} \beta'$ la cual es el resultado de aplicar σ a $w_1 * w_2$. Esto se ilustra en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \alpha = w_1 0 w_2 & \xrightarrow{\xi = w_1 * w_2} & w_1 1 w_2 = \beta \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \alpha' = w_3 0 w_4 & \xrightarrow{\xi' = w_3 * w_4} & w_3 1 w_4 = \beta' \end{array}$$

donde w_1, w_2, w_3 y w_4 son sucesiones adecuadas de ceros y unos.

Al sustituir los vértices del cubo de estados por sus correspondientes espacios vectoriales asociados tenemos $\mathbb{V}_\alpha = \mathbb{V}'_\alpha$ y $\mathbb{V}_\beta = \mathbb{V}'_\beta$. Mientras que los morfismos quedan

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}_\alpha & \xrightarrow{(-1)^{|w_1|} d_\xi} & \mathbb{V}_\beta \\ \mathbb{V}_\alpha & \xrightarrow{(-1)^{|w_3|} d_\xi} & \mathbb{V}_\beta. \end{array}$$

Podemos describir a σ como composición de transposiciones. Además notemos que transponer una coordenada que tome el valor 0 no afectará al signo de la flecha mientras que cada vez que haya un número impar de transposiciones de $*$ con una coordenada que tome el valor 1 se cambiará el signo.

Buscamos números enteros a, b tales que el siguiente cuadro conmute

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}_\alpha & \xrightarrow{(-1)^{|w_1|} d_\xi} & \mathbb{V}_\beta \\ (-1)^a Id \downarrow & & \downarrow (-1)^b Id \\ \mathbb{V}_\alpha & \xrightarrow{(-1)^{|w_3|} d_\xi} & \mathbb{V}'_\beta \end{array}$$

Para esto nos bastaría que $|w_1| + b \equiv |w_3| + a \pmod{2}$.

Dicho de otro modo, queremos que $b - a \equiv |w_3| - |w_1| \pmod{2}$.

Notemos que $|w_3| - |w_1|$ indica el número de unos de ξ que “saltan” a $*$ bajo σ (módulo 2). Esto coincide con el número de transposiciones de $*$ con los unos de α (módulo 2).

Por lo tanto $b - a$ debe coincidir (módulo 2) con dicho número.

Para cada $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n$ definamos $A_\alpha = \{a_i | a_i = 1\}$.

Dado que $A_\beta = A_\alpha \cup \{a_i\}$ entonces $sign(\sigma|_{A_\beta}) - sign(\sigma|_{A_\alpha})$ indica, módulo 2 el número de transposiciones de a_i con el resto de unos.

Como en ξ se tiene que $a_i = *$ entonces $a = sign(\sigma|_{A_\alpha})$ y $b = sign(\sigma|_{A_\beta})$ son los números buscados.

Así si para cada $\alpha \in \{0, 1\}^n$ se define $f_\alpha = (-1)^{sign(\sigma|_{A_\alpha})} Id$ entonces el siguiente cuadro conmuta

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{V}_\alpha & \xrightarrow{(-1)^{|w_1|}d_\xi} & \mathbb{V}_\beta \\
f_\alpha \downarrow & & \downarrow f_\beta \\
\mathbb{V}_\alpha & \xrightarrow{(-1)^{|w_3|}d_\xi} & \mathbb{V}'_\beta
\end{array}$$

Finalmente tomando para cada $i \in \{0, \dots, n\}$

$$f^i = \sum_{|\alpha|=i} f_\alpha$$

obtenemos el isomorfismo buscado de $\llbracket D \rrbracket$ a $\llbracket D \rrbracket'$.

Finalmente, cualquier caso se obtiene mediante una sucesión finita de los anteriores. \square

Definición. Sea $s \in \mathbb{Z}$. Definimos el **operador de cambio de altura** $\cdot[s]$ de la siguiente manera:

Si $C = (C^i, \delta^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es un complejo de cocadenas entonces $C[s] = (C[s]^i = C^{i-s}, \delta[s]^i = \delta^{i-s})_{i \in \mathbb{Z}}$.

Esto se ilustra en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccccc}
C[-1] = \dots & \longrightarrow & C[-1]^{-2} & \xrightarrow{\delta[-1]^{-2}} & C[-1]^{-1} & \xrightarrow{\delta[-1]^{-1}} & C[-1]^0 & \longrightarrow & \dots \\
C = & & \dots & \xrightarrow{Id} & C^{-1} & \xrightarrow{\delta^{-1}} & C^0 & \xrightarrow{\delta^0} & C^1 & \longrightarrow & \dots \\
C[1] = & & \dots & \xrightarrow{Id} & C[1]^0 & \xrightarrow{\delta[1]^0} & C[1]^1 & \xrightarrow{\delta[1]^1} & C[1]^2 & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

Lema 3.4.12. Si $C = (C^i, \delta^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es un complejo de cocadenas finito tal que para cada $i \in \mathbb{Z}$ se tiene que C^i es un espacio vectorial graduado de dimensión finita y δ^i es un morfismo homogéneo de grado 0 entonces

$$\chi(H(C[s])) = (-1)^s \chi(H(C)).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\chi(H(C[s])) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \mathbf{qdim}(C[s]^i) \quad (\text{Teorema 3.3.5}) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^s (-1)^{i-s} \mathbf{qdim}(C^{i-s}) \\
&= (-1)^s \sum_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^j \mathbf{qdim}(C^j) \quad \text{tomando } j = i - s \\
&= (-1)^s \chi(H(C)).
\end{aligned}$$

\square

Definición. Sea $l \in \mathbb{N}$. Definimos el **operador de cambio de grado** $\cdot\{l\}$ de la siguiente forma:

Si $C = (C^i, \delta^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ un complejo de cocadenas, donde C^i es un espacio vectorial graduado para cada $i \in \mathbb{Z}$, entonces $C\{l\} = ((C^i)\{l\}, \delta^i)_{i \in \mathbb{Z}}$.

Lema 3.4.13. Si C es un complejo de cocadenas de espacios vectoriales graduados entonces

$$\chi(H(C\{l\})) = q^l \chi(H(C)).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \chi H(C\{l\}) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \mathbf{qdim}(C^i\{l\}) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i q^l \mathbf{qdim}(C^i) \quad \text{proposición 3.2.1} \\ &= q^l \chi(H(C)). \end{aligned}$$

□

Definición. Sea D un diagrama de enlace orientado. Se define el **(co)complejo de Khovanov** de D como

$$\mathcal{C}(D) = \llbracket D \rrbracket[-x(D)]\{y(D) - 2x(D)\}.$$

Se define la **(co)homología de Khovanov** de D como

$$\mathcal{H}(D) = H(\mathcal{C}(D)).$$

Cabe señalar que en [10] Khovanov emplea el término “complejo de cadenas” en lugar de “complejo de cocadenas”.

De igual manera en [3] Bar-Natan se refiere a la cohomología como “homología”.

Siendo formales, un complejo de cadenas es una sucesión $C = (C_i, \delta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ conformada por espacios vectoriales C_i y funciones lineales $\delta_i : C_i \rightarrow C_{i-1}$ tales que $\delta_i \circ \delta_{i+1} = 0$.

Mientras que dado un complejo de cadenas C se define la i -ésima homología de C como el espacio vectorial

$$H_i(C) = \frac{\ker(\delta^i)}{\text{im}(\delta^{i+1})}.$$

La homología de C es el espacio vectorial graduado

$$H(C) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} H_i(C).$$

La distinción entre homología y cohomología va más allá del orden en el que se indexan los espacios vectoriales, en realidad la cohomología posee una estructura algebraica más rica, véase [7] para más detalles.

Sin embargo, para los fines de esta tesis eso no será relevante. Nótese que si al indexar los espacios vectoriales de $\mathcal{C}(D)$ en vez de contar el número de suavizados de tipo 1 contamos los de tipo 0 entonces los índices darán lugar a un complejo de cadenas.

Siguiendo la definición de Khovanov (y su simplificación por parte de Bar-Natan) trabajaremos con complejos de cocadenas pero en ocasiones nos referiremos a ellos simplemente como complejos.

En la literatura es más común referirse a $\mathcal{H}(D)$ como homología de Khovanov, en lo que resta del texto nos uniremos a esa tradición.

Proposición 3.4.14.

$$\widehat{J}(D) = \chi(\mathcal{H}(D)).$$

Demostración. Como cada $d^i : \llbracket D \rrbracket^i \rightarrow \llbracket D \rrbracket^{i+1}$ es un morfismo homogéneo de grado 0, entonces por la proposición 3.3.2 se tiene que cada $d^i : \llbracket D \rrbracket^i \{y(D) - 2x(D)\} \rightarrow \llbracket D \rrbracket^{i+1} \{y(D) - 2x(D)\}$ también es morfismo homogéneo de grado 0. Además el grado no se ve afectado por el cambio de altura.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{H}(D)) &= \chi(H(\llbracket D \rrbracket[-x(D)]\{y(D) - 2x(D)\})) \\ &= (-1)^{-x(D)} \chi(H(\llbracket D \rrbracket\{y(D) - 2x(D)\})) \quad \text{Lema 3.4.12} \\ &= (-1)^{-x(D)} q^{y(D)-2x(D)} \chi(H(\llbracket D \rrbracket)) \quad \text{Lema 3.4.13} \\ &= (-1)^{-x(D)} q^{y(D)-2x(D)} K(D) \quad \text{Corolario 3.4.9} \\ &= \widehat{J}(D). \end{aligned}$$

□

Nótese que el cambio de altura $\cdot[x(D)]$ también nos da el mismo resultado, sin embargo el cambio de altura $\cdot[-x(D)]$ resulta más conveniente como veremos más adelante.

Las siguientes proposiciones son de gran utilidad a la hora de calcular la homología de Khovanov.

Proposición 3.4.15. Si V y W son espacios vectoriales graduados y $C = (C^i, d^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es un complejo de cocadenas tal que para cada $i \in \mathbb{Z}$ se tiene que C^i es un espacio vectorial graduado y d^i es un morfismo homogéneo de grado 0 entonces

1. $(V\{l\})\{m\} = V\{l+m\}$.
2. $(V \oplus W)\{l\} = V\{l\} \oplus W\{l\}$.
3. $H_j^i(C\{l\}) = H_{j-l}^i(C)$.
4. $H^i(C[s]) = H^{i-s}(C)$.

Demostración. Los primeros dos incisos son directos de la definición.

Para el tercer inciso:

$$\begin{aligned} H_j^i(C\{l\}) &= \ker(d^i : (C^i\{l\})_j \rightarrow (C^{i+1}\{l\})_j) / \text{im}(d^{i-1} : (C^{i-1}\{l\})_j \rightarrow (C^i\{l\})_j) \\ &= \ker(d^i : C_{j-l}^i \rightarrow C_{j-l}^{i+1}) / \text{im}(d^{i-1} : C_{j-l}^{i-1} \rightarrow C_{j-l}^i) \\ &= H_{j-l}^i(C). \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} H^i(C[s]) &= \ker(d[s]^i) / \text{im}(d[s]^i) \\ &= \ker(d^{i-s}) / \text{im}(d^{i-s}) \\ &= H^{i-s}(C). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1: Consideremos el diagrama sin cruces del nudo trivial. Es claro que la parte no trivial de $\mathcal{C}(\bigcirc)$ es

$$0 \rightarrow \llbracket \bigcirc \rrbracket^0 = \mathbb{V} \rightarrow 0.$$

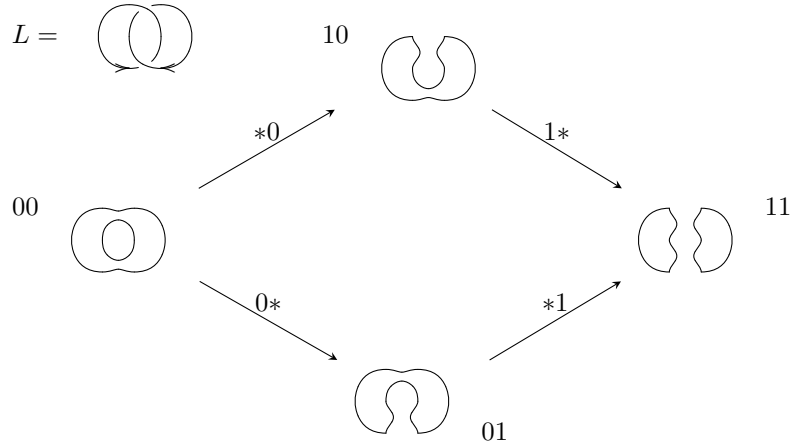
Por lo que las componentes homogéneas no triviales son

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{-1}^0(\bigcirc) &\cong \langle X \rangle \\ \mathcal{H}_1^0(\bigcirc) &\cong \langle 1 \rangle. \end{aligned}$$

En la siguiente tabla representamos a la homología de Khovanov. Cada columna indica la altura y cada renglón el grado.

	i	
j		0
1		$\langle 1 \rangle$
-1		$\langle X \rangle$

Ejemplo 2: A continuación mostramos un digrama de un enlace orientado L , conocido como enlace de Hopf, y su cubo de estados.



Sustituyendo los estados por sus espacios vectoriales asociados y las flechas por sus funciones correspondientes obtenemos el complejo de cocadenas $\llbracket L \rrbracket$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \mathbb{V}\{1\} & & & \\
 & & & \nearrow m & & & \\
 & & & \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} & & & \\
 & & & \searrow m & & & \\
 & & & \mathbb{V}\{1\} & & & \\
 & & & \nearrow \Delta & & & \\
 & & & (\mathbb{V} \otimes \mathbb{V})\{2\} & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & \llbracket L \rrbracket^0 & \xrightarrow{d^0} & \llbracket L \rrbracket^1 & \xrightarrow{d^1} & \llbracket L \rrbracket^2 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \llbracket L \rrbracket^0 &= \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} & \llbracket L \rrbracket^1 &= (\mathbb{V} \oplus \mathbb{V})\{1\} & \llbracket L \rrbracket^2 &= (\mathbb{V} \otimes \mathbb{V})\{2\} \\
 d^0(a \otimes b) &= (m(a \otimes b), m(a \otimes b)) \\
 d^1((a, b)) &= -\Delta(a) + \Delta(b).
 \end{aligned}$$

Como en el diagrama ambos cruces son negativos entonces $x(L) = 2$ y $y(L) = 0$, por lo que el complejo de cocadenas de Khovanov de L es

$$\mathcal{C}(L) = \llbracket L \rrbracket[-2]\{-4\}$$

de donde

$$\mathcal{C}(L)^{-2} = \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}\{-4\} \quad \mathcal{C}(L)^{-1} = \mathbb{V} \oplus \mathbb{V}\{-3\} \quad \mathcal{C}(L)^0 = \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}\{-2\}.$$

La (-2) -ésima homología de Khovanov de L es

$$\mathcal{H}^{-2}(L) = H^0(\llbracket L \rrbracket)\{-4\} = \ker(d^0) = \ker(m) = \langle 1 \otimes X - X \otimes 1, X \otimes X \rangle\{-4\}.$$

Así las componentes homogéneas de $\mathcal{H}^{-2}(L)$ distintas de 0 son

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{-4}^{-2}(L) &= \langle 1 \otimes X - X \otimes 1 \rangle \\
 \mathcal{H}_{-6}^{-2}(L) &= \langle X \otimes X \rangle.
 \end{aligned}$$

Para calcular la (-1) -ésima homología de Khovanov nótese que

$$\mathcal{H}^{-1}(L) = H^1(\llbracket L \rrbracket)\{-4\} = \ker(d^1)/\text{im}(d^0) = 0 \text{ pues } d^0 \text{ es suprayectiva.}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
 \ker(d^2) &= \mathcal{H}^0(L) = H^2(\llbracket L \rrbracket)\{-4\} = \ker(d^2)/\text{im}(d^1) \\
 \ker(d^2) &= (\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}) = \langle 1 \otimes X + X \otimes 1, X \otimes 1, X \otimes X, 1 \otimes 1 \rangle\{2\} \\
 \text{im}(d^1) &= \langle 1 \otimes X + X \otimes 1, X \otimes X \rangle\{2\}.
 \end{aligned}$$

Por lo que $H^2(\llbracket L \rrbracket)\{-4\} = \langle X \otimes 1, 1 \otimes 1 \rangle \{2\} \{-4\} = \langle X \otimes 1, 1 \otimes 1 \rangle \{-2\}$.

Así las componentes homogéneas de $\mathcal{H}^0(L)$ distintas de 0 son

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{-2}^0(L) &= \langle X \otimes 1 \rangle \\ \mathcal{H}_0^0(L) &= \langle 1 \otimes 1 \rangle.\end{aligned}$$

En la siguiente tabla mostramos la homología del diagrama anterior, entendienddo que tanto los renglones, las columnas y los recuadros vacíos corresponden al espacio vectorial trivial.

$i \backslash j$	-2	-1	0
0			$\langle 1 \otimes 1 \rangle$
-2			$\langle X \otimes 1 \rangle$
-4	$\langle 1 \otimes X - X \otimes 1 \rangle$		
-6	$\langle X \otimes X \rangle$		

Ejemplo 3: A partir de la Figura 2.2 podemos obtener el complejo de Khovanov del diagrama T del nudo trébol Así

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathbb{V}\{4\} & \xrightarrow{-\Delta} & \mathbb{V}^{\otimes 2}\{5\} & & \\
 & \nearrow m & \oplus & \searrow \Delta & \oplus & \searrow \Delta \otimes Id & \\
 \mathbb{V}^{\otimes 2}\{3\} & \xrightarrow{m} & \mathbb{V}\{4\} & & \mathbb{V}^{\otimes 2}\{5\} & \xrightarrow{-d_{1*1}} & \mathbb{V}^{\otimes 3}\{6\} \\
 & \searrow m & \oplus & \nearrow \Delta & \oplus & \nearrow Id \otimes \Delta & \\
 & & \mathbb{V}\{4\} & \xrightarrow{\Delta} & \mathbb{V}^{\otimes 2}\{5\} & & \\
 \downarrow & & \downarrow \Delta & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 \longrightarrow & \mathcal{C}(T)^0 & \xrightarrow{d^0} & \mathcal{C}(T)^1 & \xrightarrow{d^1} & \mathcal{C}(T)^2 & \xrightarrow{d^2} & \mathcal{C}(T)^3 & \longrightarrow 0
 \end{array}$$

$$d^0(a \otimes b) = (m(a \otimes b), m(a \otimes b), m(a \otimes b))$$

$$\begin{aligned}d^1((a, b, c)) &= (-\Delta(a) + \Delta(b), -\Delta(a) + \Delta(c), -\Delta(b) + \Delta(c)) \\ &= (\Delta(b - a), \Delta(c - a), \Delta(c - b))\end{aligned}$$

$$d^2(a \otimes b, c \otimes d, e \otimes f) = \Delta(a) \otimes b - d_{1*1}(c \otimes d) + e \otimes \Delta(f).$$

Donde

$$\begin{aligned}d_{1*1}(X \otimes X) &= X \otimes X \otimes X \\ d_{1*1}(X \otimes 1) &= X \otimes 1 \otimes X \\ d_{1*1}(1 \otimes X) &= 1 \otimes X \otimes X + X \otimes X \otimes 1 \\ d_{1*1}(1 \otimes 1) &= 1 \otimes 1 \otimes X + X \otimes 1 \otimes 1.\end{aligned}$$

Procedamos a calcular las homologías.

$$\mathcal{H}^0(T) = \ker(d^0) = \ker(m) = \langle 1 \otimes X - X \otimes 1, X \otimes X \rangle.$$

Considerando el cambio de grado obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_3^0(T) &= \langle 1 \otimes X - X \otimes 1 \rangle \\ \mathcal{H}_1^0(T) &= \langle X \otimes X \rangle.\end{aligned}$$

Como Δ es inyectiva tenemos que

$$(a, b, c) \in \ker(d^1) \Leftrightarrow a = b = c$$

Por lo que $\ker(d^1) = \langle (1, 1, 1), (X, X, X) \rangle$.

Pero vemos que $(1, 1, 1) = d^0(1 \otimes 1)$ y que $(X, X, X) = d^0(1 \otimes X)$.

Por lo tanto

$$H^1(T) = 0.$$

Debido a que $\dim(\mathcal{C}(T)^2) = 12$ y $\dim(\mathcal{C}(T)^3) = 8$ es un poco complicado calcular el resto de homología. Este proceso puede simplificarse usando que todos los d^i tienen grado cero.

Así definamos $d_j^i = d^i|_{\mathcal{C}(T)_j^i}$ y calculemos directamente

$$\mathcal{H}_j^i(T) = \frac{\ker(d_j^i)}{\text{im}(d_j^{i-1})}$$

Vemos que

$$\mathcal{C}(T)_1^0 = V^{\otimes 2}\{3\}_1 = V_{-2}^{\otimes 2} = \langle X \otimes X \rangle$$

Siguiendo el mismo procedimiento obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(T)_3^0 &= \langle 1 \otimes X, X \otimes 1 \rangle \\ \mathcal{C}(T)_5^0 &= \langle 1 \otimes 1 \rangle \\ \mathcal{C}(T)_3^1 &= \langle X \rangle \oplus \langle X \rangle \oplus \langle X \rangle \\ \mathcal{C}(T)_5^1 &= \langle 1 \rangle \oplus \langle 1 \rangle \oplus \langle 1 \rangle \\ \mathcal{C}(T)_3^2 &= \langle X \otimes X \rangle \oplus \langle X \otimes X \rangle \oplus \langle X \otimes X \rangle \\ \mathcal{C}(T)_5^2 &= \langle 1 \otimes X, X \otimes 1 \rangle \oplus \langle 1 \otimes X, X \otimes 1 \rangle \oplus \langle 1 \otimes X, X \otimes 1 \rangle \\ \mathcal{C}(T)_7^2 &= \langle 1 \otimes 1 \rangle \oplus \langle 1 \otimes 1 \rangle \oplus \langle 1 \otimes 1 \rangle \\ \mathcal{C}(T)_3^3 &= \langle X \otimes X \otimes X \rangle \\ \mathcal{C}(T)_5^3 &= \langle 1 \otimes X \otimes X, X \otimes 1 \otimes X, X \otimes X \otimes 1 \rangle \\ \mathcal{C}(T)_7^3 &= \langle 1 \otimes 1 \otimes X, 1 \otimes X \otimes 1, X \otimes 1 \otimes 1 \rangle \\ \mathcal{C}(T)_9^3 &= \langle 1 \otimes 1 \otimes 1 \rangle.\end{aligned}$$

Mientras que el resto de las componentes son 0.

Dichos espacios forman los siguientes complejo de cocadenas:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & C_1^0(T) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
0 & \longrightarrow & C_3^0(T) & \xrightarrow{d_3^0} & C_3^1(T) & \xrightarrow{d_3^1} & C_3^2(T) & \xrightarrow{d_3^2} & C_3^3(T) & \longrightarrow & 0 \\
0 & \longrightarrow & C_5^0(T) & \xrightarrow{d_5^0} & C_5^1(T) & \xrightarrow{d_5^1} & C_5^2(T) & \xrightarrow{d_5^2} & C_5^3(T) & \longrightarrow & 0 \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & C_7^2(T) & \xrightarrow{d_7^2} & C_7^3(T) & \longrightarrow & 0 \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & C_9^3(T) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Calculamos $\mathcal{H}_j^2(T)$.

Para $j = 3$:

$$\begin{aligned}
& \lambda_1(X \otimes X, 0, 0) + \lambda_2(0, X \otimes X, 0) + \lambda_3(0, 0, X \otimes X) \in \ker(d_3^2) \\
\Leftrightarrow & 0 = d^2(\lambda_1 X \otimes X, \lambda_2 X \otimes X, \lambda_3 X \otimes X) \\
& = \lambda_1 \Delta(X) \otimes X - \lambda_2 d_{1*1}(X \otimes X) + \lambda_3 X \otimes \Delta(X) \\
& = \lambda_1 X \otimes X \otimes X - \lambda_2 X \otimes X \otimes X + \lambda_3 X \otimes X \otimes X \\
& = (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)(X \otimes X \otimes X) \\
\Leftrightarrow & \lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_3.
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
\ker(d_3^2) &= \{\lambda_1(X \otimes X, 0, 0) + (\lambda_1 + \lambda_3)(0, X \otimes X, 0) + \lambda_3(0, 0, X \otimes X) \mid \lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{Q}\} \\
&= \{\lambda_1(X \otimes X, X \otimes X, 0) + \lambda_3(0, X \otimes X, X \otimes X) \mid \lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{Q}\} \\
&= \langle (X \otimes X, X \otimes X, 0), (0, X \otimes X, X \otimes X) \rangle.
\end{aligned}$$

Nótese que

$$\begin{aligned}
d^1(-X, 0, 0) &= (\Delta(X), \Delta(X), 0) = (X \otimes X, X \otimes X, 0) \\
d^1(0, 0, X) &= (0, \Delta(X), \Delta(X)) = (0, X \otimes X, X \otimes X).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{H}_3^2(T) = 0.$$

Para $j = 5$:

$$\begin{aligned}
& \lambda_1(1 \otimes X, 0, 0) + \lambda_2(X \otimes 1, 0, 0) + \lambda_3(0, 1 \otimes X, 0) + \lambda_4(0, X \otimes 1, 0) \\
& + \lambda_5(0, 0, 1 \otimes X) + \lambda_6(0, 0, X \otimes 1) \in \ker(d_5^2)
\end{aligned}$$

si y solo si

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 \Delta(1) \otimes X + \lambda_2 \Delta(X) \otimes 1 - \lambda_3 d_{1*1}(1 \otimes X) - \lambda_4 d_{1*1}(X \otimes 1) \\
& + \lambda_5(1 \otimes \Delta(X)) + \lambda_6(X \otimes \Delta(1)) = 0
\end{aligned}$$

si y solo si

$$\begin{aligned}
& \lambda_1(1 \otimes X \otimes X) + \lambda_1(X \otimes 1 \otimes X) + \lambda_2(X \otimes X \otimes 1) - \lambda_3(1 \otimes X \otimes X) - \lambda_3(X \otimes X \otimes 1) \\
& - \lambda_4(X \otimes 1 \otimes X) + \lambda_5(1 \otimes X \otimes X) + \lambda_6(X \otimes 1 \otimes X) + \lambda_6(X \otimes X \otimes 1) = 0
\end{aligned}$$

si y solo si

$$(\lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_5)1 \otimes X \otimes X + (\lambda_1 - \lambda_4 + \lambda_6)X \otimes 1 \otimes X + (\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_6)X \otimes X \otimes 1 = 0$$

si y solo si

$$\lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_5 = 0$$

$$\lambda_1 - \lambda_4 + \lambda_6 = 0$$

$$\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_6 = 0.$$

Aplicamos operaciones elementales sobre los renglones de la matriz asociada a dicho sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)r_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$ entonces λ_4, λ_5 y λ_6 pueden tomar cualquier valor en \mathbb{Q} mientras que

$$\lambda_1 = \lambda_4 - \lambda_6$$

$$\lambda_2 = \lambda_4 + \lambda_5 - 2\lambda_6$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 + \lambda_5 - \lambda_6.$$

Así

$$\begin{aligned} \ker(d_5^2) &= \{(\lambda_4 - \lambda_6)(1 \otimes X, 0, 0) + (\lambda_4 + \lambda_5 - 2\lambda_6)(X \otimes 1, 0, 0) \\ &\quad + (\lambda_4 + \lambda_5 - \lambda_6)(0, 1 \otimes X, 0) + \lambda_4(0, X \otimes 1, 0) \\ &\quad + \lambda_5(0, 0, 1 \otimes X) + \lambda_6(0, 0, X \otimes 1) \mid \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \in \mathbb{Q}\} \\ &= \{\lambda_4(1 \otimes X + X \otimes 1, 1 \otimes X + X \otimes 1, 0) + \lambda_5(X \otimes 1, 1 \otimes X, 1 \otimes X) \\ &\quad + \lambda_6(-1 \otimes X - 2X \otimes 1, -1 \otimes X, X \otimes 1) \mid \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \in \mathbb{Q}\}. \end{aligned}$$

Sean

$$u = (1 \otimes X + X \otimes 1, 1 \otimes X + X \otimes 1, 0)$$

$$v = (X \otimes 1, 1 \otimes X, 1 \otimes X)$$

$$w = (-1 \otimes X - 2X \otimes 1, -1 \otimes X, X \otimes 1).$$

Calculemos $\text{im}(d_5^1)$.

$$d^1(1, 0, 0) = (\Delta(-1), \Delta(-1), 0) = -(1 \otimes X + X \otimes 1, 1 \otimes X + X \otimes 1, 0)$$

$$d^1(0, 1, 0) = (\Delta(1), 0, \Delta(-1)) = (1 \otimes X + X \otimes 1, 0, -1 \otimes X - X \otimes 1)$$

$$d^1(0, 0, 1) = (0, \Delta(1), \Delta(1)) = (0, 1 \otimes X + X \otimes 1, 1 \otimes X + X \otimes 1).$$

Como $d^1(0, 1, 0) = d^1(0, 0, 1) - d^1(1, 0, 0)$ entonces

$$\begin{aligned} \text{im}(d_5^1) &= \langle (1 \otimes X + X \otimes 1, 1 \otimes X + X \otimes 1, 0), (0, 1 \otimes X + X \otimes 1, 1 \otimes X + X \otimes 1) \rangle \\ &= \langle u, w + u + v \rangle. \end{aligned}$$

Haciendo un cambio de base tenemos

$$\ker(d_5^2) = \langle u, v, w + u + v \rangle.$$

Por lo que

$$\mathcal{H}_5^2(T) \cong \langle v \rangle = \langle (X \otimes 1, 1 \otimes X, 1 \otimes X) \rangle.$$

Para $j = 7$:

$$\lambda_1(1 \otimes 1, 0, 0) + \lambda_2(0, 1 \otimes 1, 0) + \lambda_3(0, 0, 1 \otimes 1) \in \ker(d_7^2)$$

si y solo si

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 \Delta(1) \otimes 1 - \lambda_2 d_{1*1}(1 \otimes 1) + \lambda_3 1 \otimes \Delta(1) \\ &= \lambda_1 1 \otimes X \otimes 1 + \lambda_1 X \otimes 1 \otimes 1 - \lambda_2 1 \otimes 1 \otimes X - \lambda_2 X \otimes 1 \otimes 1 \\ &\quad + \lambda_3 1 \otimes 1 \otimes X + \lambda_3 1 \otimes X \otimes 1 \\ &= (\lambda_1 + \lambda_3) 1 \otimes X \otimes 1 + (\lambda_1 - \lambda_2) X \otimes 1 \otimes 1 + (\lambda_3 - \lambda_2) 1 \otimes 1 \otimes X \end{aligned}$$

si y solo si

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 - \lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

si y solo si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Por lo tanto

$$\mathcal{H}_7^2(T) = 0.$$

Finalmente calculemos $\mathcal{H}_j^3(T)$.

Como $\mathcal{C}(T)^4 = 0$ entonces

$$\mathcal{H}_j^3(T) = \mathcal{C}(T)_j^3 / \text{im}(d_j^2).$$

Para $j = 3$:

$$\text{im}(d_3^2) = \langle X \otimes X \otimes X \rangle = \mathcal{C}(T)_3^3 \Rightarrow \mathcal{H}_3^3(T) = 0$$

Para $j = 5$:

Notemos que

$$\begin{aligned} d^2(X \otimes 1, 0, 0) &= X \otimes X \otimes 1 \\ d^2(0, -X \otimes 1, 0) &= X \otimes 1 \otimes X \\ d^2(0, 0, 1 \otimes X) &= 1 \otimes X \otimes X. \end{aligned}$$

$\Rightarrow im(d_5^2) = C(T)_5^3$. Por lo tanto

$$\mathcal{H}_5^3(T) = 0.$$

Para $j = 7$:

Sean

$$\begin{aligned} u &= 1 \otimes 1 \otimes X \\ v &= 1 \otimes X \otimes 1 \\ w &= X \otimes 1 \otimes 1. \end{aligned}$$

Vemos que

$$\begin{aligned} d^2(1 \otimes 1, 0, 0) &= 1 \otimes X \otimes 1 + X \otimes 1 \otimes 1 = v + w \\ d^2(0, 1 \otimes 1, 0) &= -1 \otimes 1 \otimes X - X \otimes 1 \otimes 1 = -u - w \\ d^2(0, 0, 1 \otimes 1) &= 1 \otimes 1 \otimes X + 1 \otimes X \otimes 1 = u + v. \end{aligned}$$

Además $C(T)_7^3 = \langle u, v, w \rangle = \langle u + v, v, v + w \rangle$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} im(d_7^2) &= \langle u + v, v + w, -u - w \rangle = \langle u + v, v + w, (u + v) + (v + w) - u - w \rangle \\ &= \langle u + v, v + w, 2v \rangle = \langle u + v, v + w, v \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{H}_7^3(T) = 0.$$

Finalmente como $\mathcal{C}(T)_9^2 = 0$ entonces

$$\mathcal{H}_9^3(T) \cong \langle 1 \otimes 1 \otimes 1 \rangle.$$

La tabla de dicho diagrama es la siguiente

$j \backslash i$	0	1	2	3
9				$\langle 1 \otimes 1 \otimes 1 \rangle$
7				
5			$\langle (X \otimes 1, 1 \otimes X, 1 \otimes X) \rangle$	
3	$\langle 1 \otimes X - X \otimes 1 \rangle$			
1	$\langle X \otimes X \rangle$			

Capítulo 4

Invarianza de la Homología de Khovanov

La meta de este capítulo será probar el siguiente

Teorema 4.0.1 (Teorema de Khovanov). *Sean D y D' diagramas de enlaces orientados que difieren por una sucesión de movidas orientadas de Reidemeister entonces $\mathcal{H}_j^i(D) = \mathcal{H}_j^i(D') \forall i, j \in \mathbb{Z}$.*

Para demostrar el Teorema de Khovanov analizaremos el corchete de Khovanov de un diagrama antes y después de aplicar cada tipo de movida orientada de Reidemeister, compararemos sus homología y encontraremos isomorfismos entre ellas, salvo que los espacios isomorfos no poseen los mismos índices i, j . Finalmente verificaremos que al aplicar los cambios de grado y altura empleados en la definición del complejo de Khovanov se ajustarán dichos índices para que coincidan.

Para esto primero veremos algunas definiciones y resultados ampliamente conocidos.

Definición. Una sucesión $(A^n, d^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de espacios vectoriales A^n y funciones lineales $d^n : A^n \rightarrow A^{n+1}$ es **exacta** si y solo si $\forall n \in \mathbb{Z}$ se cumple que $\ker(d^n) = \text{im}(d^{n-1})$.

Lema 4.0.2 (Teorema del Zig-Zag). Sean C, D y E complejo de cocadenas. Si $f : C \rightarrow D$ y $g : D \rightarrow E$ son morfismos de complejos de cocadenas tales que para cada $n \in \mathbb{Z}$ la sucesión

$$0 \rightarrow C^n \xrightarrow{f^n} D^n \xrightarrow{g^n} E^n \rightarrow 0$$

es exacta entonces existe una sucesión exacta

$$\dots \rightarrow H^{n-1}(E) \rightarrow H^n(C) \rightarrow H^n(D) \rightarrow H^n(E) \rightarrow H^{n+1}(C) \rightarrow \dots$$

La demostración de este lema puede hallarse en [13].

Corolario 4.0.3. Si C y D son complejos de cocadenas y $f : C \rightarrow D$ es un isomorfismo de complejos de cocadenas entonces $H^n(C) \cong H^n(D) \forall n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Tomando $E^n = 0$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ y g^n la función constante 0. Por el Teorema del Zig-Zag para cada $n \in \mathbb{Z}$ obtenemos una sucesión exacta $0 \rightarrow H^n(C) \rightarrow H^n(D) \rightarrow 0$, lo que implica que $H^n(C) \cong H^n(D)$. \square

Definición. Sea $C = (C^n, d_C^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un complejo de cocadenas. Un **subcomplejo** de C es un complejo de cocadenas $B = (B^n, d_B^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ donde para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que B^n es un subespacio vectorial de C^n tal que $d^n(B^n) \subseteq B^{n+1}$ y $d_B^n = d|_{B^n}$.

Por simplicidad, y mientras no haya riesgo de ambigüedad, escribiremos d^n para referirnos tanto a d_B^n como a d_C^n . También usaremos la notación $B \subseteq C$ para decir que B es un subcomplejo de cocadenas de C .

Definición. Sea C un complejo de cocadenas y $B \subseteq C$. Definimos el **complejo cociente** $(C/B)^n = C^n/B^n$ y $\delta^n : (C/B)^n \rightarrow (C/B)^{n+1}$ dada por $\delta(x + B^n) = d^n(x) + B^{n+1}$.

Es fácil ver que δ^n está bien definida para toda $n \in \mathbb{Z}$ pues

$$\begin{aligned} x + B^n = y + B^n &\Rightarrow x - y \in B^n \Rightarrow d^n(x) - d^n(y) \in B^{n+1} \\ &\Rightarrow d^n(x) + B^{n+1} = d^n(y) + B^{n+1}. \end{aligned}$$

Además $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\delta^{n+1} \circ \delta^n(x + B^n) = d^{n+1}(d^n(x) + B^{n+1}) = d^{n+1}(d^n(x)) + B^{n+2} = B^{n+2}$$

el cual es el neutro aditivo de C^{n+2}/B^{n+2} .

Por lo tanto $C/B = ((C/B)^n, \delta^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ es un complejo de cocadenas.

Lema 4.0.4. Sea C un complejo de cocadenas y $B \subseteq C$ un subcomplejo de cocadenas.

1. Si $H^n(B) = 0 \forall n \in \mathbb{Z}$ entonces $H^n(C) \cong H^n(C/B) \forall n \in \mathbb{Z}$.
2. Si $H^n(C/B) = 0 \forall n \in \mathbb{Z}$ entonces $H^n(C) \cong H^n(B) \forall n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ tomamos $i^n : B^n \rightarrow C^n$ la inclusión y $p^n : C^n \rightarrow C^n/B^n$ la proyección que a cada elemento de C^n lo envía a su clase en el cociente.

Así $i = (i^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ y $p = (p^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ son morfismos de complejo de cocadenas tales que para cada $n \in \mathbb{Z}$ la sucesión

$$0 \rightarrow B^n \xrightarrow{i^n} C^n \xrightarrow{p^n} C^n/B^n \rightarrow 0$$

es exacta.

Aplicando el Teorema del Zig-Zag existe una sucesión exacta

$$\dots \rightarrow H^{n-1}(C/B) \rightarrow H^n(B) \rightarrow H^n(C) \rightarrow H^n(C/B) \rightarrow H^{n+1}(B) \rightarrow \dots$$

1. Si $H^n(B) = 0 \forall n \in \mathbb{Z}$ entonces para cada $n \in \mathbb{Z}$ tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow H^n(C) \rightarrow H^n(C/B) \rightarrow 0$$

obteniendo un isomorfismo de $H^n(C)$ a $H^n(C/B)$.

2. Si $H^n(C/B) = 0 \forall n \in \mathbb{Z}$ entonces para cada $n \in \mathbb{Z}$ la sucesión exacta queda

$$0 \rightarrow H^n(B) \rightarrow H^n(C) \rightarrow 0$$

lo cual nos da un isomorfismo de $H^n(B)$ a $H^n(C)$.

□

4.1. Movidas de Tipo I

Sean

$$D = \curvearrowright \quad D_0 = \circlearrowleft \quad D_1 = \curvearrowright.$$

Los diagramas D_0 y D_1 corresponden, respectivamente, al suavizado de tipo 0 y de tipo 1 del cruce mostrado en \curvearrowright .

Supongamos además que dicho cruce sea el primero de D y que el orden en los cruces de D_0 y D_1 son coherentes con el orden de los cruces de C .

Sean $S(D)$, $S(D_0)$ y $S(D_1)$ los estados de D , D_0 y D_1 respectivamente.

Hay una correspondencia biunívoca entre $S(D)$ y $S(D_0) \sqcup S(D_1)$ dada de la siguiente forma:

Cada estado $\alpha' \in \{0, 1\}^{n-1}$ de D_0 corresponde al estado $0\alpha'$ de D mientras que cada $\alpha' \in \{0, 1\}^{n-1}$ de D_1 corresponde al estado $1\alpha'$ de D .

Supongamos además que se tiene el mismo orden en los círculos de los estados relacionados bajo dicha correspondencia.

Notése que para obtener estados idénticos el número de suavizados de tipo 1 realizados sobre D_1 debe ser 1 menos que el número de suavizados de tipo 1 realizados sobre D por lo tanto, bajo alguna permutación sobre la suma directa, podemos suponer que

$$[[D]]^i = [[D_0]]^i \oplus [[D_1]]^{i-1}\{1\}.$$

Convención: En general podríamos decir que $[[D]]^i \cong [[D_0]]^i \oplus [[D_1]]^{i-1}\{1\}$, la igualdad resulta de haber considerado los órdenes precisos. Esto es posible debido a la proposición 3.4.11.

A partir de ahora cada vez escribamos una ecuación que involucre corchetes de Khovanov convendremos en que se han elegido los órdenes favorables que propicien la igualdad.

Nombremos d^i , d_0^i y d_1^i a los morfismos de los corchetes $[[D]]^i$, $[[D_0]]^i$ y $[[D_1]]^i$ respectivamente.

Cada flecha ξ en el cubo de estados de D_0 aparece como 0ξ en el cubo de estados

de D y cada flecha ζ en el cubo de D_1 aparece como 1ζ en el cubo de D por lo que en d^i aparece d_0^i y $-d_1^{i-1}$.

El resto de flechas del cubo de D son aquellas que unen cada estado 0α con un único 1α para cada $\alpha \in \{0, 1\}^{n-1}$. Dicha flecha corresponde a una fusión, por lo que le asociamos a una función m .

Todo esto se resume en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{cccccccc}
 \dots & \xrightarrow{d^{i-2}} & \llbracket D \rrbracket^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & \llbracket D \rrbracket^i & \xrightarrow{d^i} & \llbracket D \rrbracket^{i+1} & \xrightarrow{d^{i+1}} & \dots \\
 & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
 \dots & \xrightarrow{d_0^{i-2}} & \llbracket D_0 \rrbracket^{i-1} & \xrightarrow{d_0^{i-1}} & \llbracket D_0 \rrbracket^i & \xrightarrow{d_0^i} & \llbracket D_0 \rrbracket^{i+1} & \xrightarrow{d_0^{i+1}} & \dots \\
 & \searrow m & \oplus & \searrow m & \oplus & \searrow m & \oplus & \searrow m & \\
 \dots & \xrightarrow{-d_1^{i-3}} & \llbracket D_1 \rrbracket^{i-2}\{1\} & \xrightarrow{-d_1^{i-2}} & \llbracket D_1 \rrbracket^{i-1}\{1\} & \xrightarrow{-d_1^{i-1}} & \llbracket D_1 \rrbracket^i\{1\} & \xrightarrow{-d_1^i} & \dots
 \end{array}$$

Dicho diagrama se puede a su vez codificar en el siguiente

$$\llbracket D_0 \rrbracket \xrightarrow{m} \llbracket D_1 \rrbracket[1]\{1\}$$

el cual no debe leerse como si m fuera un morfismo entre ambos complejo de cocadenas, sino que indica la presencia de un m conectando ambos complejo de cocadenas en cada altura.

A continuación emplearemos un razonamiento no dependerá de las graduaciones dadas así que por el momento vamos a obviarlas.

Como cada cuadro es anticonmutativo se cumple que

$$m \circ d_0^{i-1} = -(-d_1^{i-1} \circ m) = d_1^{i-1} \circ m. \quad (4.1)$$

Notemos que

$$\llbracket D_0 \rrbracket^i = \llbracket \bigcirc \rrbracket^i = \mathbb{V} \otimes \llbracket \frown \rrbracket^i.$$

Supongamos además que el círculo mostrado en \bigcirc es el primero en el orden de cada estado de D_0 .

Puesto que d_0^i actúa como la identidad en el primer factor tensorial mientras que en el resto de factores tensoriales coincide con el morfismo $\llbracket \frown \rrbracket^i \rightarrow \llbracket \frown \rrbracket^{i+1}$ al cual, con fines de simplificar la notación, también llamaremos d_0^i .

Sea $C = \llbracket D \rrbracket$.

Por lo anterior C es de la forma

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \xrightarrow{Id \otimes d_0^{i-2}} & \mathbb{V} \otimes \llbracket \frown \rrbracket^{i-1} & \xrightarrow{Id \otimes d_0^{i-1}} & \mathbb{V} \otimes \llbracket \frown \rrbracket^i & \xrightarrow{Id \otimes d_0^i} & \mathbb{V} \otimes \llbracket \frown \rrbracket^{i+1} & \xrightarrow{Id \otimes d_0^{i+1}} & \dots \\
& \searrow m & \oplus & \searrow m & \oplus & \searrow m & \oplus & \searrow m & \\
\dots & \xrightarrow{-d_1^{i-3}} & \llbracket D_1 \rrbracket^{i-2} & \xrightarrow{-d_1^{i-2}} & \llbracket D_1 \rrbracket^{i-1} & \xrightarrow{-d_1^{i-1}} & \llbracket D_1 \rrbracket^i & \xrightarrow{-d_1^i} & \dots
\end{array}$$

Bajo estas convenciones la Ecuación 4.1 se convierte en la siguiente

$$m \circ (Id \otimes d_0^{i-1}) = d_1^{i-1} \circ m. \quad (4.2)$$

Sea C' igual a:

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \xrightarrow{Id \otimes d_0^{i-2}} & \langle 1 \rangle \otimes \llbracket \frown \rrbracket^{i-1} & \xrightarrow{Id \otimes d_0^{i-1}} & \langle 1 \rangle \otimes \llbracket \frown \rrbracket^i & \xrightarrow{Id \otimes d_0^i} & \langle 1 \rangle \otimes \llbracket \frown \rrbracket^{i+1} & \xrightarrow{Id \otimes d_0^{i+1}} & \dots \\
& \searrow m & \oplus & \searrow m & \oplus & \searrow m & \oplus & \searrow m & \\
\dots & \xrightarrow{-d_1^{i-3}} & \llbracket D_1 \rrbracket^{i-2} & \xrightarrow{-d_1^{i-2}} & \llbracket D_1 \rrbracket^{i-1} & \xrightarrow{-d_1^{i-1}} & \llbracket D_1 \rrbracket^i & \xrightarrow{-d_1^i} & \dots
\end{array}$$

con las flechas restringidas apropiadamente.

Es claro que $C' \subseteq C$.

Notemos que en $m : \langle 1 \rangle \otimes \llbracket \frown \rrbracket^i \rightarrow \llbracket D_1 \rrbracket^i$ es un isomorfismo.

Mostraremos que $H^i(C') = 0$, para esto nos basta ver que

$$\ker(d^i|_{C'}) \subseteq \text{im}(d^{i-1}|_{C'}).$$

Sea $(1 \otimes u, v) \in \ker(d^i)$.

Así

$$0 = d^i(1 \otimes u, v) = (1 \otimes d_0^i(u), m(1 \otimes u) - d_1^{i-1}(v)) = (1 \otimes d_0^i(u), u - d_1^{i-1}(v)).$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
0 &= u - d_1^{i-1}(v) \\
&= m(1 \otimes u) - d_1^{i-1}(m(1 \otimes v)) \\
&= m(1 \otimes u) - (d_1^{i-1} \circ m)(1 \otimes v) \\
&= m(1 \otimes u) - m \circ (Id \otimes d_0^{i-1})(1 \otimes v) \quad \text{por la Ec. 4.2} \\
&= m(1 \otimes u) - m(1 \otimes d_0^{i-1}(v)) \\
&= m(1 \otimes u - 1 \otimes d_0^{i-1}(v)).
\end{aligned}$$

Como la restricción de m a C' es inyectiva concluimos que

$$1 \otimes u - 1 \otimes d_0^{i-1}(v) = 0 \Rightarrow 1 \otimes u = 1 \otimes d_0^{i-1}(v).$$

Mediante un cálculo directo verificamos que

$$\begin{aligned} d^{i-1}(1 \otimes v, 0) &= (1 \otimes d_0^{i-1}(v), v - d_1^{i-2}(0)) \\ &= (1 \otimes d_0^{i-1}(v), v) \\ &= (1 \otimes u, v). \end{aligned}$$

Por lo tanto $(1 \otimes u, v) \in \text{im}(d^{i-1})$.

Aplicando el Lema 4.0.4 concluimos que $H^i(C) = H^i(C/C') \ \forall i \in \mathbb{Z}$.

Se observa que C/C' es de la forma

$$\dots \rightarrow \langle X \rangle \otimes \llbracket \cap \rrbracket^{i-1} \xrightarrow{\text{Id} \otimes d_0^{i-1}} \langle X \rangle \otimes \llbracket \cap \rrbracket^i \xrightarrow{\text{Id} \otimes d_0^i} \langle X \rangle \otimes \llbracket \cap \rrbracket^{i+1} \rightarrow \dots$$

Por lo que si para cada $i \in \mathbb{Z}$ se define

$$\begin{aligned} f^i : \langle X \rangle \otimes \llbracket \cap \rrbracket^i &\rightarrow \llbracket \cap \rrbracket^i \\ X \otimes u &\mapsto u \end{aligned}$$

obtenemos un isomorfismo de cadenas $C/C' \rightarrow \llbracket \cap \rrbracket$.

Aplicando el corolario del Teorema del Zig-Zag tenemos que

$$H^i(C/C') \cong H^i(\llbracket \cap \rrbracket).$$

Por lo tanto $H^i(C) \cong H^i(\llbracket \cap \rrbracket)$.

Ahora volvamos a tomar en cuenta las graduaciones. Todos los morfismos empleados tienen grado 0 excepto por los f^i que tienen grado 1 por lo que para cada $j \in \mathbb{Z}$ tenemos un isomorfismo entre $H_j^i(C)$ y $H_{j+1}^i(\llbracket \cap \rrbracket)$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_j^i(\mathcal{S}) &= H_{j+2x(\mathcal{S})-y(\mathcal{S})}^{i+x(\mathcal{S})}(\mathcal{S})(C) \\ &= H_{j+2x(\cap)-y(\cap)-1}^{i+x(\cap)}(\cap)(C) \\ &= H_{j+2x(\cap)-y(\cap)}^{i+x(\cap)}(\llbracket \cap \rrbracket) \\ &= \mathcal{H}_j^i(\cap). \end{aligned}$$

4.2. Movidas de Tipo II

Sean

$$\begin{array}{ccc} D = \text{)}\text{)}\text{)} & D_{00} = \text{)}\text{)}\text{)} & D_{01} = \text{)}\text{)}\text{)} \\ D_{10} = \text{)}\text{)}\text{)} & D_{11} = \text{)}\text{)}\text{)} & \end{array}$$

Siguiendo el razonamiento anterior se cumple que

$$\llbracket D \rrbracket^i = \llbracket D_{00} \rrbracket^i \oplus (\llbracket D_{01} \rrbracket^{i-1} \{1\}) \oplus (\llbracket D_{10} \rrbracket^{i-1} \{1\}) \oplus (\llbracket D_{11} \rrbracket^{i-2} \{2\}).$$

Mientras que

$$d^i(u, v, w, z) = (d_{00}^i(u), \Delta(u) - d_{01}^{i-1}(v), d_{*0}^i(u) - d_{10}^{i-1}(w), m(v) - d_{1*}^{i-1}(w) + d_{11}^{i-2}(z))$$

donde d_{00}, d_{01}, d_{10} y d_{11} son las funciones que conforman a los complejo de cocadenas $\llbracket D_{00} \rrbracket, \llbracket D_{01} \rrbracket, \llbracket D_{10} \rrbracket$ y $\llbracket D_{11} \rrbracket$. Mientras que d_{*0} es la suma sobre todas las

$\alpha \in \{0, 1\}^{n-2}$ de las funciones que corresponden a las flechas $S_{00\alpha} \rightarrow S_{10\alpha}$ en el cubo de estados de D .

Sea $C = \llbracket D \rrbracket$.

C queda codificado por

$$\begin{array}{ccc} \llbracket D_{01} \rrbracket[1]\{1\} & \xrightarrow{m} & \llbracket D_{11} \rrbracket[2]\{2\} \\ \uparrow \Delta & & \uparrow -d_{1*} \\ \llbracket D_{00} \rrbracket & \xrightarrow{d_{*0}} & \llbracket D_{10} \rrbracket[1]\{1\} \end{array}$$

Para recuperar C a partir del cuadro anterior colocamos horizontalmente los complejo de cocadenas que lo conforman, realizamos sumas directas verticalmente y conectamos los distintos renglones mediante las funciones indicadas (agregando los signos necesarios).

Así obtenemos

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{d^{i-2}} & \llbracket D \rrbracket^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & \llbracket D \rrbracket^i & \xrightarrow{d^i} & \llbracket D \rrbracket^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \dots \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \dots & \longrightarrow & \llbracket D_{00} \rrbracket^{i-1} & \longrightarrow & \llbracket D_{00} \rrbracket^i & \longrightarrow & \llbracket D_{00} \rrbracket^{i+1} \longrightarrow \dots \\ & \searrow & \oplus & \searrow & \oplus & \searrow & \oplus \searrow \\ \dots & \longrightarrow & \llbracket D_{01} \rrbracket^{i-2}\{1\} & \longrightarrow & \llbracket D_{01} \rrbracket^{i-1}\{1\} & \longrightarrow & \llbracket D_{01} \rrbracket^i\{1\} \longrightarrow \dots \\ & \searrow & \oplus & \searrow & \oplus & \searrow & \oplus \searrow \\ \dots & \longrightarrow & \llbracket D_{10} \rrbracket^{i-2}\{1\} & \longrightarrow & \llbracket D_{10} \rrbracket^{i-1}\{1\} & \longrightarrow & \llbracket D_{10} \rrbracket^i\{1\} \longrightarrow \dots \\ & \searrow & \oplus & \searrow & \oplus & \searrow & \oplus \searrow \\ \dots & \longrightarrow & \llbracket D_{11} \rrbracket^{i-3}\{2\} & \longrightarrow & \llbracket D_{11} \rrbracket^{i-2}\{2\} & \longrightarrow & \llbracket D_{11} \rrbracket^{i-1}\{2\} \longrightarrow \dots \end{array}$$

Además siguiendo las convenciones usadas en la prueba de la movida de Tipo I

$$\begin{aligned} \llbracket D_{00} \rrbracket &= \llbracket D_{11} \rrbracket \\ \llbracket D_{01} \rrbracket^{i-1} &= \mathbb{V} \otimes \llbracket \cdot \rrbracket^{i-1} = \mathbb{V} \otimes \llbracket D_{00} \rrbracket^{i-1} \\ d_{01}^{i-1} &= Id \otimes d_{11}^{i-1}. \end{aligned}$$

Así

$$C^i = \llbracket D_{00} \rrbracket^i \oplus (\mathbb{V} \otimes \llbracket D_{00} \rrbracket)^{i-1} \{1\} \oplus \llbracket D_{10} \rrbracket^{i-1} \{1\} \oplus \llbracket D_{00} \rrbracket^{i-2} \{2\}.$$

Sea $\mathbb{V} \otimes \llbracket D_{00} \rrbracket = (\mathbb{V} \otimes \llbracket D_{00} \rrbracket^i, Id \otimes d_{00}^i)_{i \in \mathbb{Z}}$.

Podemos describir a C como

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{V} \otimes \llbracket D_{00} \rrbracket)[1]\{1\} & \xrightarrow{m} & \llbracket D_{00} \rrbracket[2]\{2\} \\ \Delta \uparrow & & \uparrow -d_{1*} \\ \llbracket D_{00} \rrbracket & \xrightarrow{d_{*0}} & \llbracket D_{10} \rrbracket[1]\{1\} \end{array}$$

Sea C' igual a

$$\begin{array}{ccc} (\langle 1 \rangle \otimes \llbracket D_{00} \rrbracket)[1]\{1\} & \xrightarrow{m} & \llbracket D_{00} \rrbracket[2]\{2\} \\ \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \xrightarrow{\quad} & 0 \end{array}$$

Es decir

$$(C')^i = 0 \oplus (\langle 1 \rangle \otimes \llbracket D_{00} \rrbracket)^{i-1} \{1\} \oplus 0 \oplus \llbracket D_{00} \rrbracket^{i-2} \{2\}.$$

Mientras que las funciones en (C') son las de C restringidas apropiadamente.

Es obvio que $C' \subseteq C$. Además, siguiendo el razonamiento usado en las Movidas de Tipo I, $H^i(C') = 0 \forall i \in \mathbb{Z}$.

Aplicando el Lema 4.0.4 concluimos que $H^i(C) \cong H^i(C/C')$.

El cociente C/C' queda dado por

$$\begin{array}{ccc} (\langle X \rangle \otimes \llbracket D_{00} \rrbracket)[1]\{1\} & \longrightarrow & 0 \\ \bar{\Delta} \uparrow & & \uparrow \\ \llbracket D_{00} \rrbracket & \xrightarrow{d_{*0}} & \llbracket D_{10} \rrbracket[1]\{1\} \end{array}$$

Aquí $\bar{\Delta}$ representa la composición de

$$\llbracket D_{00} \rrbracket^i \xrightarrow{\Delta} \mathbb{V} \otimes \llbracket D_{00} \rrbracket^{i-1} \xrightarrow{\rho} (\mathbb{V} \otimes \llbracket D_{00} \rrbracket^{i-1}) / (\langle 1 \rangle \otimes \llbracket D_{00} \rrbracket^{i-1}) \xrightarrow{h} \langle X \rangle \otimes \llbracket D_{00} \rrbracket^{i-1}$$

donde ρ es la proyección canónica en el cociente y h es el isomorfismo dado por

$$h(X \otimes v + \langle 1 \rangle \otimes \llbracket D_{00} \rrbracket^{i-1}) = X \otimes v.$$

Δ a su vez actúa como Id en todos los factores tensoriales de $[[D_{00}]]^{i-1}$ excepto en uno en el cual actuará $\bar{\Delta}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}(X) &= h(\rho(\Delta(X))) = h(\rho(X \otimes X)) = h(X \otimes X + \langle 1 \rangle \otimes [[D_{00}]]^{i-1}) = X \otimes X \\ \bar{\Delta}(1) &= h(\rho(\Delta(1))) = h(\rho(1 \otimes X + X \otimes 1)) = h(1 \otimes X + X \otimes 1 + \langle 1 \rangle \otimes [[D_{00}]]^{i-1}) \\ &= h(X \otimes 1 + \langle 1 \rangle \otimes [[D_{00}]]^{i-1}) = X \otimes 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\bar{\Delta}$ es un isomorfismo en cada altura.

Notemos que $[[\sphericalangle]]$ aparece dentro de C pero con signo opuesto y desplazado en grado y altura. A continuación buscaremos subcomplejos convenientes y realizaremos cocientes hasta llegar a un complejo de cocadenas B que sea isomorfo a $[[\sphericalangle]][1]\{1\}$ y que cumpla $H_j^i(B) \cong H_j^i(C/C')$.

Esto implicaría que $H_j^i(C) \cong H_j^i(B) \cong H_{j+1}^{i+1}([[\sphericalangle]])$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_j^i(\sphericalangle \sphericalangle) &= H_{j+2x(\sphericalangle \sphericalangle)-y(\sphericalangle \sphericalangle)}^{i+x(\sphericalangle \sphericalangle)}(C) \\ &= H_{j+2x(\sphericalangle)+2-y(\sphericalangle)-1}^{i+x(\sphericalangle)+1}(C) \\ &\cong H_{j+2x(\sphericalangle)-y(\sphericalangle)}^{i+x(\sphericalangle)}([[\sphericalangle]]) \\ &= \mathcal{H}_j^i(\sphericalangle).\end{aligned}$$

Para llegar al complejo de cocadenas B existen dos métodos, uno de ellos es muy sencillo, el otro a pesar de ser más elaborado nos servirá en la prueba de la invarianza bajo movidas de tipo III así que lo llamaremos método útil.

Con fines de simplificar la notación suprimiremos los símbolos que indican cambios de grado.

Método sencillo

Sea $C'' \subseteq C/C'$ dado por

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & [[D_{10}]] [1] \{1\} \end{array}$$

Notamos que $(C/C'')/C''$ queda de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccc} (\langle X \rangle \otimes [[D_{00}]] [1] \{1\}) & \longrightarrow & 0 \\ \bar{\Delta} \uparrow & & \uparrow \\ [[D_{00}]] & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Como Δ es un isomorfismo, se cumple que $H_j^i((C/C')/C'') = 0$ para toda $i \in \mathbb{Z}$ por lo que aplicando el Lemma 4.0.4 concluimos que $H^i(C'') \cong H^i(C/C')$. Dado que todos los morfismos empleados tienen grado 0 concluimos que $H_j^i(C'') \cong H_j^i(C/C')$.

Por lo tanto $B = C''$ es el subcomplejo de cocadenas buscado.

Método útil

Para simplificar la notación llamaremos d^i al morfismo inducido en el cociente C/C' . Dicho complejo se ve de la siguiente forma

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \xrightarrow{d^{i-2}} & (C/C')^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & (C/C')^i & \xrightarrow{d^i} & (C/C')^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \dots \\
 & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 \dots & \xrightarrow{d_{00}^{i-2}} & \llbracket D_{00} \rrbracket^{i-1} & \xrightarrow{d_{00}^{i-1}} & \llbracket D_{00} \rrbracket^i & \xrightarrow{d_{00}^i} & \llbracket D_{00} \rrbracket^{i+1} \xrightarrow{d_{00}^{i+1}} \dots \\
 & \searrow \overline{\Delta} & \oplus & \searrow \overline{\Delta} & \oplus & \searrow \overline{\Delta} & \oplus \searrow \overline{\Delta} \\
 \dots & \xrightarrow{-Id \otimes d_{00}^{i-3}} & \langle X \rangle \otimes \llbracket D_{00} \rrbracket^{i-2} & \xrightarrow{-Id \otimes d_{00}^{i-3}} & \langle X \rangle \otimes \llbracket D_{00} \rrbracket^{i-1} & \xrightarrow{-Id \otimes d_{00}^{i-3}} & \langle X \rangle \otimes \llbracket D_{00} \rrbracket^i \xrightarrow{-Id \otimes d_{00}^{i-3}} \dots \\
 & \searrow d_{*0}^{i-2} & \oplus & \searrow d_{*0}^{i-1} & \oplus & \searrow d_{*0}^i & \oplus \searrow d_{*0}^{i+1} \\
 \dots & \xrightarrow{-d_{10}^{i-3}} & \llbracket D_{10} \rrbracket^{i-2} & \xrightarrow{-d_{10}^{i-2}} & \llbracket D_{10} \rrbracket^{i-1} & \xrightarrow{-d_{10}^{i-1}} & \llbracket D_{10} \rrbracket^i \xrightarrow{-d_{10}^i} \dots \\
 & & \oplus & & \oplus & & \oplus \\
 \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Como los cuadros son anticonmutativos se cumple que

$$d_{*0}^i \circ d_{00}^{i-1} = d_{10}^{i-1} \circ d_{*0}^{i-1}. \quad (4.3)$$

Sea $\tau = d_{*0} \circ \overline{\Delta}^{-1}$.

Siendo más precisos, para cada $i \in \mathbb{Z}$ tomamos $\tau^i = d_{*0}^i \circ (\overline{\Delta})^{-1}$. Dicha función queda dada por

$$\begin{aligned}
 \tau^i : \langle X \rangle \otimes \llbracket D_{00} \rrbracket^i &\rightarrow \llbracket D_{10} \rrbracket^i \\
 X \otimes v &\mapsto d_{*0}^i(v)
 \end{aligned}$$

Sea $A^i = \{(v, \tau^{i-1}(v)) \mid v \in \langle X \rangle \otimes \llbracket D_{00} \rrbracket^{i-1}\}$.

Definamos $(C''')^i = \llbracket D_{00} \rrbracket^i \oplus A^i \oplus 0$.

Para ver que $C''' \subseteq C/C'$ debemos verificar que la restricción de d^i a C''' está bien definida. Esto es, dado $(u, X \otimes v, \tau^{i-1}(X \otimes v), 0) \in (C''')^i$ hay que probar que $d^i(u, X \otimes v, \tau^{i-1}(X \otimes v), 0) \in (C''')^{i+1}$.

En efecto

$$\begin{aligned}
 d^i(u, X \otimes v, \tau^{i-1}(X \otimes v), 0) &= (d_{00}^i(u), \overline{\Delta}(u) - X \otimes d_{00}^{i-1}(v), d_{*0}^i(u) - d_{10}^{i-1}(\tau^{i-1}(X \otimes v)), 0) \\
 &= (d_{00}^i(u), X \otimes u - X \otimes d_{00}^{i-1}(v), d_{*0}^i(u) - d_{10}^{i-1}(d_{*0}^{i-1}(v)), 0).
 \end{aligned}$$

Sea $\beta = X \otimes u - X \otimes d_{00}^{i-1}(v)$. Es claro que $\beta \in \langle X \rangle \otimes \llbracket D_{00} \rrbracket^i$.
Además

$$\begin{aligned} \tau^i(\beta) &= \tau^i(X \otimes u - X \otimes d_{00}^{i-1}(v)) \\ &= \tau^i(X \otimes u) - \tau^i(X \otimes d_{00}^{i-1}(v)) \\ &= d_{*0}^i(u) - d_{*0}^i(d_{00}^{i-1}(v)) \\ &= d_{*0}^i(u) - d_{10}^{i-1}(d_{*0}^{i-1}(v)) \end{aligned} \quad \text{Ecuación (4.3).}$$

Por lo tanto

$$d^i(u, X \otimes v, \tau^{i-1}(X \otimes v), 0) = (d_{00}^i(u), \beta, \tau^i(\beta), 0) \in (C''')^{i+1}.$$

Ahora mostraremos que $H^i(C''') = 0$ para toda $i \in \mathbb{Z}$.

Sea $(u, X \otimes v, \tau^{i-1}(X \otimes v), 0) \in \ker(d^i)$.

Esto implica que

$$\begin{aligned} 0 &= X \otimes u - X \otimes d_{00}^{i-1}(v) \Rightarrow 0 = X \otimes (u - d_{00}^{i-1}(v)) \\ &\Rightarrow 0 = u - d_{00}^{i-1}(v) \Rightarrow u = d_{00}^{i-1}(v). \end{aligned}$$

Como $v \in \llbracket D_{00} \rrbracket^{i-1}$ entonces $(v, 0, 0, 0) \in (C''')^{i-1}$ y

$$\begin{aligned} d^{i-1}(v, 0, 0, 0) &= (d_{00}^{i-1}(v), \overline{\Delta}(v), d_{*0}^{i-1}(v), 0) \\ &= (u, X \otimes v, \tau^{i-1}(X \otimes v), 0). \end{aligned}$$

Así $\ker(d^i) \subseteq \text{im}(d^{i-1})$. Por lo tanto $H^i(C''') = 0$.

Aplicando el Lema 4.0.4 concluimos que $H^i(C/C') = H^i((C/C')/C''')$.

Sea $C'''' = (C/C')/C'''$.

Notemos que

$$(\beta, 0) + A^i = (\beta, 0) - (\beta, \tau(\beta)) + A^i = (0, -\tau(\beta)) + A^i.$$

O sea que en el cociente la clase de $(\beta, 0)$ coincide con la de $(0, -\tau(\beta))$.
Abusando de la notación diremos que en el cociente $\beta = -\tau(\beta)$ y lo representamos gráficamente de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccc} \beta \in \langle X \rangle \otimes \llbracket D_{01} \rrbracket & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & \searrow^{\beta = -\tau(\beta)} & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \gamma \in \llbracket D_{10} \rrbracket \end{array}$$

Una descripción explícita de C'''' es la siguiente

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \longrightarrow & (C''''')^i & \longrightarrow & (C''''')^{i+1} & \longrightarrow & \dots \\
& & = & & = & & \\
\dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\
& & \oplus & & \oplus & & \\
\dots & \longrightarrow & \frac{(\langle X \rangle \otimes \mathbb{[D_{00}]}^{i-1}) \oplus \mathbb{[D_{10}]}^{i-1}}{A^i} & \xrightarrow{\delta^i} & \frac{(\langle X \rangle \otimes \mathbb{[D_{00}]}^i) \oplus \mathbb{[D_{10}]}^i}{A^{i+1}} & \longrightarrow & \dots \\
& & \oplus & & \oplus & & \\
\dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

donde δ^i es la función inducida por $(-Id \otimes d_{00}^{i-1}, -d_{10}^{i-1})$ en el cociente. Por lo tanto si se define $B^i = \frac{(\langle X \rangle \otimes \mathbb{[D_{00}]}^{i-1}) \oplus \mathbb{[D_{10}]}^{i-1}}{A^i}$ entonces claramente el complejo $B = (B^i, \delta^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es isomorfo a C''''' .

Sea $(\beta, \gamma) \in (\langle X \rangle \otimes \mathbb{[D_{00}]}^{i-1}) \oplus \mathbb{[D_{10}]}^{i-1}$. Tomando $\gamma' = \gamma - \tau(\beta)$ obtenemos

$$(\beta, \gamma) + A^i = (\beta, \gamma) - (\beta, \tau(\beta)) + A^i = (0, \gamma - \tau(\beta)) + A^i = (0, \gamma') + A^i.$$

Además si $(\beta, \gamma) + A^i = (0, \gamma'') + A^i$ para algún $\gamma'' \in \mathbb{[D_{00}]}^{i-1}$ entonces

$$(0, \gamma') + A^i = (0, \gamma'') + A^i \Rightarrow (0, \gamma' - \gamma'') \in A^i \Rightarrow \gamma' - \gamma'' = \tau(0) = 0 \Rightarrow \gamma' = \gamma''.$$

Por lo tanto, para toda $(\beta, \gamma) \in (\langle X \rangle \otimes \mathbb{[D_{00}]}^{i-1}) \oplus \mathbb{[D_{10}]}^{i-1}$ existe una única $\gamma' \in \mathbb{[D_{10}]}^{i-1}$ tal que la clase de (β, γ) en B^i coincide con la clase de $(0, \gamma')$.

De esta forma se tiene que

$$\delta^i((\beta, \gamma) + A^i) = \delta^i((0, \gamma') + A^i) = (0, -d_{10}^{i-1}(\gamma')) + A^{i+1}. \quad (4.4)$$

Sea $f^i : B^i \rightarrow \mathbb{[D_{10}]}^{i-1}$ dada por

$$f^i((\beta, \gamma) + A^i) = (-1)^i \gamma' = (-1)^i (\gamma - \tau(\beta)).$$

Nótese que f^i es lineal pues τ es lineal y por lo tanto

$$\begin{aligned}
f^i((\beta_1, \gamma_1) + A^i + c((\beta_2, \gamma_2) + A^i)) &= f^i((\beta_1 + c\beta_2, \gamma_1 + c\gamma_2) + A^i) \\
&= (-1)^i (\gamma_1 + c\gamma_2 - \tau(\beta_1 + c\beta_2)) \\
&= (-1)^i (\gamma_1 - \tau(\beta_1) + c\gamma_2 - c\tau(\beta_2)) \\
&= (-1)^i (\gamma_1 - \tau(\beta_1)) + c(-1)^i (\gamma_2 - \tau(\beta_2)) \\
&= f^i((\beta_1, \gamma_1) + A^i) + cf^i((\beta_2, \gamma_2) + A^i).
\end{aligned}$$

Es claro que f es suprayectiva puesto que para cada $\gamma \in \mathbb{[D_{10}]}^{i-1}$ se cumple que $f^i((0, (-1)^i \gamma) + A^i) = \gamma$.

Además f es inyectiva ya que si $0 = f^i((\beta, \gamma) + A^i) = (-1)^i (\gamma - \tau(\beta))$ entonces $\gamma = \tau(\beta)$ y por lo tanto $(\beta, \gamma) \in A^i$.

Adicionalmente se tiene que

$$\begin{aligned}
d_{10}^{i-1} \circ f^i ((\beta, \gamma) + A^i) &= d_{10}^{i-1} \circ f^i ((0, \gamma') + A^i) \\
&= d_{10}^{i-1} ((-1)^i \gamma') \\
&= (-1)^i d_{10}^{i-1} (\gamma') \\
&= (-1)^{i+1} (-d_{10}^{i-1} (\gamma')) \\
&= f^{i+1} ((0, -d_{10}^{i-1} (\gamma')) + A^{i+1}) \\
&= f^{i+1} \circ \delta^i ((\beta, \gamma') + A^{i+1}) \quad \text{Por la Ec. (4.4)}.
\end{aligned}$$

Es decir, para cada $i \in \mathbb{Z}$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
B^i & \xrightarrow{\delta^i} & B^{i+1} \\
f^i \downarrow & & \downarrow f^{i+1} \\
\llbracket D_{10} \rrbracket^{i-1} & \xrightarrow{d_{10}^{i-1}} & \llbracket D_{10} \rrbracket^{i-1}
\end{array}$$

Así $f = (f^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ es un isomorfismo de complejos de cocadenas. Reconsiderando las graduaciones, obtenemos que cada $f^i : B^i \rightarrow \llbracket D_{10} \rrbracket^{i-1} \{1\}$ es de grado 0. Por lo que $H_j^i(B) \cong H_{j-1}^{i-1}(\llbracket D_{10} \rrbracket)$ concluyendo con esta parte de la demostración.

Como resumen podemos decir que las movidas de tipo II desplazan la homología del corchete, pero al realizar los cambios de altura y de grado empleados en la definición del complejo de cocadenas de Khovanov notamos que dichos desplazamientos se compensan. Es por esta razón que se prefirió elegir el desplazamiento $\cdot[-x(D)]$ en vez de $\cdot[x(D)]$

4.3. Movidas de Tipo III

Puesto que tanto $x(D)$ como $y(D)$ se preservan bajo movidas de Tipo III, entonces en lo que resta de la prueba obviaremos los cambios de grado.

Sean D_1 y D_2 diagramas de enlaces que difieren solo por una movida de tipo III y que poseen un orden en los cruces tal que aquellos cruces involucrados en la movida sean los primeros tres en el siguiente orden indicado

$$D_1 = \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array} \quad D_2 = \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array}$$

Supondemos que el resto de cruces de D_1 están ordenados de forma idéntica a los de D_2 .

Para cada $(a_1, a_2, a_3) \in \{0, 1\}^3$ sea $D_{1, a_1 a_2 a_3}$ el diagrama obtenido al realizar un suavizado de tipo a_i en el i -ésimo cruce de D_1 .

Análogamente se define $D_{2, a_1 a_2 a_3}$.

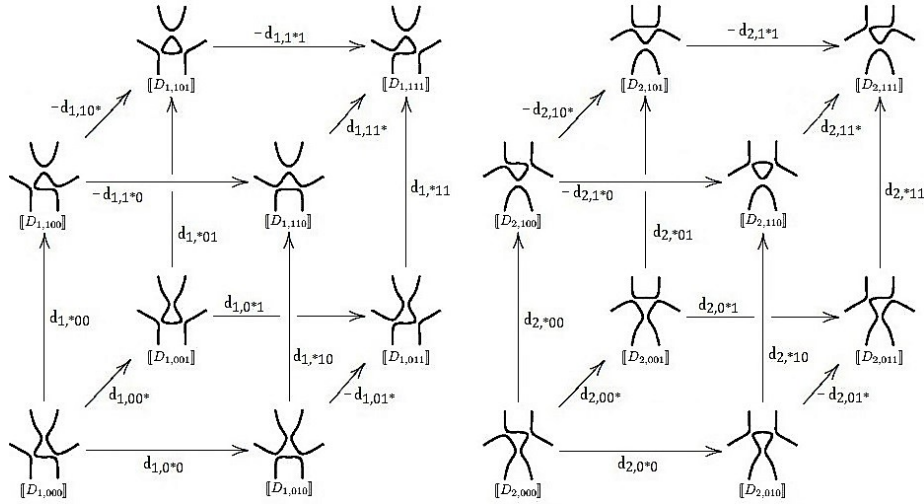


Figura 4.1: A la izquierda se muestra $[D_1]$ y a la derecha $[D_2]$.

Sean $C_1 = [D_1]$ y $C_2 = [D_2]$.

Siguiendo las convenciones empleadas con anterioridad tenemos que C_1 y C_2 quedan codificados en la Figura 4.1 donde por simplicidad se han omitido los cambios de grado y altura en cada vértice. Puede corroborarse que dicha omisión no será importante.

Obsérvese que en la Figura 4.1 las tapas inferiores de ambos cubos son idénticas, mientras que las tapas superiores corresponden a los corchetes de los diagramas



los cuales difieren por dos movidas de tipo II.

La estrategia para mostrar que C_1 y C_2 son isomorfos será aplicar un método análogo al de la prueba de la invarianza bajo movidas de Tipo II para obtener dos complejo de cocadenas que tengan la misma homología que C_1 y C_2 , respectivamente, y que sean isomorfos entre sí.

Notemos que $d_{1,*01} = -d_{1,10*}$ y $d_{2,*10} = -d_{2,1*0}$. Estas funciones actúan como Id excepto en un factor en el que actúan como Δ . En breve, las llamaremos Δ_1 y Δ_2 . Sin pérdida de generalidad C_1 y C_2 pueden ser escritos de la siguiente forma

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 & \mathbb{V} \otimes \llbracket D_{1,001} \rrbracket & \xrightarrow{m} & \llbracket D_{1,001} \rrbracket \\
 \Delta_1 \nearrow & \uparrow & \nearrow & \uparrow \\
 \llbracket D_{1,001} \rrbracket & \xrightarrow{\quad} & \llbracket D_{1,110} \rrbracket & \\
 \uparrow & \Delta_1 \downarrow & \uparrow & \uparrow \\
 & \llbracket D_{1,001} \rrbracket & \xrightarrow{\quad} & \llbracket D_{1,011} \rrbracket \\
 \uparrow & \nearrow & \nearrow & \uparrow \\
 \llbracket D_{1,000} \rrbracket & \xrightarrow{\quad} & \llbracket D_{1,010} \rrbracket &
 \end{array} & &
 \begin{array}{ccc}
 \llbracket D_{1,110} \rrbracket & \xrightarrow{\quad} & \llbracket D_{1,010} \rrbracket \\
 \uparrow & \Delta_2 \uparrow & \nearrow & \uparrow \\
 \llbracket D_{1,010} \rrbracket & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{V} \otimes \llbracket D_{1,010} \rrbracket & \\
 \uparrow & \Delta_2 \downarrow & \uparrow & \uparrow \\
 & \llbracket D_{1,001} \rrbracket & \xrightarrow{\quad} & \llbracket D_{1,011} \rrbracket \\
 \uparrow & \nearrow & \nearrow & \uparrow \\
 \llbracket D_{1,000} \rrbracket & \xrightarrow{\quad} & \llbracket D_{1,010} \rrbracket &
 \end{array} \\
 C_1 & & C_2
 \end{array}$$

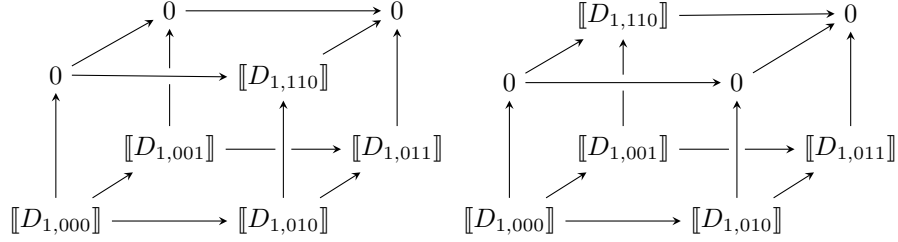
Consideremos los siguientes subcomplejos

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 \langle 1 \rangle \otimes \llbracket D_{1,001} \rrbracket & \xrightarrow{m} & \llbracket D_{1,001} \rrbracket \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 0 & \xrightarrow{\quad} & 0 \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 0 & \xrightarrow{\quad} & 0
 \end{array} & &
 \begin{array}{ccc}
 0 & \xrightarrow{\quad} & \llbracket D_{1,010} \rrbracket \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 0 & \xrightarrow{\quad} & \langle 1 \rangle \otimes \llbracket D_{1,010} \rrbracket \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 0 & \xrightarrow{\quad} & 0
 \end{array} \\
 C'_1 & & C'_2
 \end{array}$$

De forma análoga a la prueba de la invarianza bajo movidas de Tipo II obtenemos que $H^i(C'_1) = 0 = H^i(C'_2)$ para toda $i \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto $H^i(C_1) \cong H^i(C_1/C'_1)$ y $H^i(C_2) \cong H^i(C_2/C'_2)$. Dichos cocientes quedan

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 \langle X \rangle \otimes \llbracket D_{1,001} \rrbracket & \xrightarrow{\quad} & 0 \\
 \overline{\Delta}_1 \nearrow & \uparrow & \nearrow \\
 \llbracket D_{1,001} \rrbracket & \xrightarrow{\quad} & \llbracket D_{1,110} \rrbracket \\
 \uparrow & \overline{\Delta}_1 \downarrow & \uparrow \\
 & \llbracket D_{1,001} \rrbracket & \xrightarrow{\quad} & \llbracket D_{1,011} \rrbracket \\
 \uparrow & \nearrow & \nearrow & \uparrow \\
 \llbracket D_{1,000} \rrbracket & \xrightarrow{\quad} & \llbracket D_{1,010} \rrbracket &
 \end{array} & &
 \begin{array}{ccc}
 \llbracket D_{1,110} \rrbracket & \xrightarrow{\quad} & 0 \\
 \uparrow & \overline{\Delta}_2 \uparrow & \nearrow & \uparrow \\
 \llbracket D_{1,010} \rrbracket & \xrightarrow{\quad} & \langle X \rangle \otimes \llbracket D_{1,010} \rrbracket & \\
 \uparrow & \overline{\Delta}_2 \downarrow & \uparrow & \uparrow \\
 & \llbracket D_{1,001} \rrbracket & \xrightarrow{\quad} & \llbracket D_{1,011} \rrbracket \\
 \uparrow & \nearrow & \nearrow & \uparrow \\
 \llbracket D_{1,000} \rrbracket & \xrightarrow{\quad} & \llbracket D_{1,010} \rrbracket &
 \end{array} \\
 C_1/C'_1 & & C_2/C'_2
 \end{array}$$

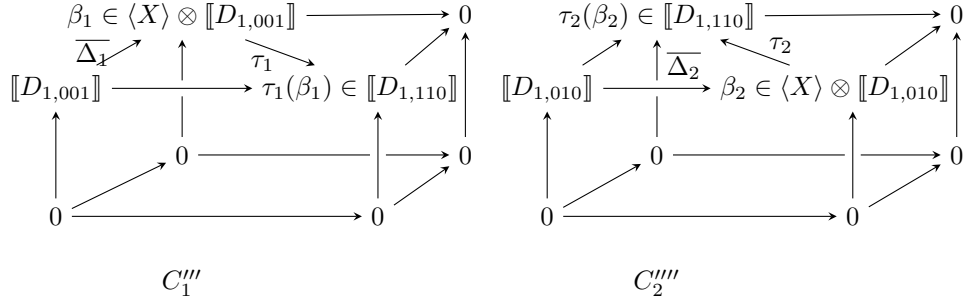
Ahora seguiremos tomando subcomplejos y cocientes análogos a alguno de los dos métodos empleados en la invarianza de movidas de Tipo II. Un intento ingenuo es tratar de emular el Método sencillo para llegar a



Sin embargo esto no será posible debido a que las funciones verticales no tienen por que coincidir y por lo tanto, en general, los complejos no serán isomorfos. La razón principal por la que este método falla es que estos cubos no son subcomplejos de C_1/C'_1 y C_2/C'_2 respectivamente.

Prosigamos emulando el Método útil.

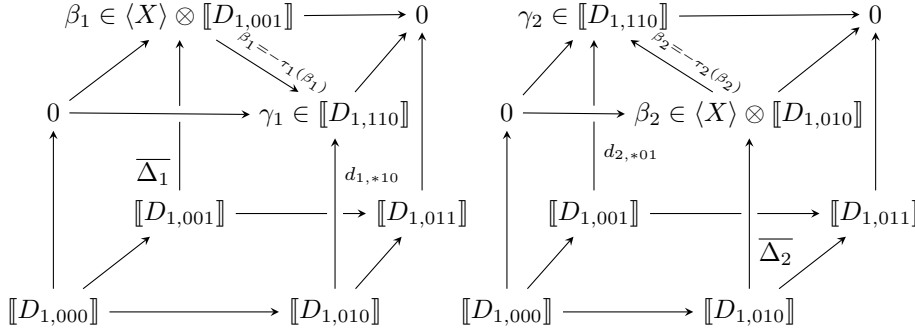
Sean $\tau_1 = -d_{1,1*0} \circ (\overline{\Delta_1})^{-1}$ y $\tau_2 = -d_{2,10*} \circ (\overline{\Delta_2})^{-1}$. Consideremos los siguientes subcomplejos.



Puesto que para toda $i \in \mathbb{Z}$ se tiene que $H^i(C_1''') = 0 = H^i(C_2''')$ entonces $\forall i \in \mathbb{Z}$ obtenemos

$$H^i(C_1/C'_1) = H^i((C_1/C'_1)/C_1''') H^i(C_1/C'_1) = H^i((C_1/C'_1)/C_1''').$$

Al realizar los correspondientes cocientes obtenemos los siguientes cubos.



Bajo el cociente cada $(\beta_1, \gamma_1) \in (\langle X \rangle \otimes [[D_{1,001}]] \oplus [[D_{1,110}]])$ se identifica con un único $(0, \gamma'_1)$.

De la misma forma cada $(\gamma_2, \beta_2) \in (\langle X \rangle \otimes [[D_{1,001}]] \oplus [[D_{1,110}]])$ se identifica con un único $(\gamma'_2, 0)$.

Sea Υ la función que actúa como la identidad en la tapa inferior del cubo y que envía la clase de $(0, \gamma)$ en el primer cubo a la clase de $(\gamma, 0)$ en el segundo. Es claro que Υ es lineal y biyectiva. Para mostrar que Υ es un isomorfismo de complejos de cocadenas falta ver que conmuta con las funciones de ambos cubos. Para esto solo será necesario verificar que conmuta con las funciones que conectan las tapas inferiores con las superiores.

Sea $(u, v) \in [[D_{1,001}]] \oplus [[D_{1,010}]]$. Debemos demostrar que

$$\Upsilon([(\overline{\Delta_1}(u), d_{1,*10}(v))]) = [(d_{2,*01}(\Upsilon(u)), \overline{\Delta_2}(\Upsilon(v)))] \quad (4.5)$$

donde los símbolos $[]$ indican su clase en el respectivo cociente.

Primero notemos que

$$\begin{aligned} \Upsilon([(\overline{\Delta_1}(u), d_{1,*10}(v))]) &= \Upsilon([(0, d_{1,*10}(v) - \tau_1(\overline{\Delta_1}(u)))]]) \\ &= \Upsilon([(0, d_{1,*10}(v) + d_{1,1*0}(u))]) \\ &= [(d_{1,*10}(v) + d_{1,1*0}(u), 0)] \\ [(d_{2,*01}(\Upsilon(u)), \overline{\Delta_2}(\Upsilon(v)))] &= [(d_{2,*01}(u), \overline{\Delta_2}(v))] \\ &= [(d_{2,*01}(u) - \tau_2(\overline{\Delta_2}(v)), 0)] \\ &= [(d_{2,*01}(u) + d_{2,10*}(v), 0)]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Además, observando la Figura 4.1 notamos que

$$\begin{aligned} d_{1,*10} &= d_{2,10*} \\ d_{1,1*0} &= d_{2,*01}. \end{aligned}$$

De donde obtenemos de inmediato que

$$d_{1,*10}(v) + d_{1,1*0}(u) = d_{2,*01}(u) + d_{2,10*}(v).$$

Así Υ es un isomorfismo de complejos de cocadenas.

De esta manera concluimos la demostración del Teorema de Khovanov. Nótese que, siendo estrictos, el invariante no es el espacio vectorial $\mathcal{H}_j^i(D)$ sino su clase de isomorfismo.

De esta manera, si L y T denotan respectivamente a los diagramas del enlace de Hopf y del nudo trébol empleados al final del capítulo 3 entonces las clases de isomorfismo de sus homologías de Khovanov quedan resumidas en las siguientes tablas:

$j \backslash i$	-2	-1	0
0			\mathbb{Q}
-2			\mathbb{Q}
-4	\mathbb{Q}		
-6	\mathbb{Q}		

 $\mathcal{H}_j^i(L)$

$j \backslash i$	0	1	2	3
9				\mathbb{Q}
7				
5			\mathbb{Q}	
3	\mathbb{Q}			
1	\mathbb{Q}			

 $\mathcal{H}_j^i(T)$.

Capítulo 5

Propiedades de la Homología de Khovanov

Definición. Sea L un enlace y D un diagrama regular de L . Se define la i -ésima homología de Khovanov de L como

$$\mathcal{H}^i(L) = \mathcal{H}^i(D).$$

Sea D un diagrama con n cruces. Por construcción es inmediato que

$$\begin{aligned} \max\{i \in \mathbb{Z} \mid \llbracket D \rrbracket^i \neq 0\} &= n \\ \min\{i \in \mathbb{Z} \mid \llbracket D \rrbracket^i \neq 0\} &= 0. \end{aligned}$$

Así las $i \in \mathbb{Z}$ tales que $\mathcal{H}_j^i(D) \neq 0$ se encuentran dentro del intervalo

$$[-x(D), n - x(D)].$$

Sea $k_D = \max\{k_\alpha \mid \alpha \in \{0, 1\}^n\}$, es decir, k_D es el máximo número de componentes conexas tomado sobre todos los estados de D .

Dado que todos V_α están generados por productos tensoriales de 1 y X , entonces $\max\{j \in \mathbb{Z} \mid \exists i \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } \llbracket D \rrbracket_j^i \neq 0\} = k_D$ y se alcanza en los espacios generados por $1 \otimes \dots \otimes 1$. Mientras que $\min\{j \in \mathbb{Z} \mid \exists i \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } \llbracket D \rrbracket_j^i \neq 0\} = -k_D$ y se alcanza por $X \otimes \dots \otimes X$.

Por lo tanto las $j \in \mathbb{Z}$ tales que $\mathcal{H}_j^i(D) \neq 0$ están contenidas en

$$[-k_D + y(D) - 2x(D), k_D + y(D) - 2x(D)].$$

Proposición 5.0.1. Sea D un diagrama de enlace de n componentes. Si $j \equiv n + 1 \pmod{2}$ entonces $\mathcal{C}_j^i(D) = 0$.

Demostración. Para cada estado α , las j -ésimas componentes homogéneas no triviales de \mathbb{V}^{k_α} corresponderán a $j \equiv k_\alpha$.

Ahora consideremos una flecha $S_\alpha \rightarrow S_\beta$ del cubo de estados de L .

Primero notemos que $k_\alpha \equiv k_\beta + 1 \pmod{2}$; es decir, paridad del número de

factores tensoriales alterna en cada altura.

Además $|\beta| = |\alpha| + 1$ por lo que al realizar el cambio de altura empleado en el corchete de Khovanov resulta que todas las $j \in \mathbb{Z}$ tales que $[[D]]_j^i \neq 0$ tienen la misma paridad.

Finalmente, para calcular el complejo de Khovanov realizamos el mismo cambio de grado sobre todos los $[[D]]^i$ concluimos que todas las $j \in \mathbb{Z}$ tales que $\mathcal{C}_j^i(D) \neq 0$ para alguna $i \in \mathbb{Z}$ están en la misma paridad y ésta queda determinada por cualquier estado de D .

Sea D' un diagrama de enlace idéntico a D excepto por un cruce en el cual el segmento que pasa por arriba en D pase por abajo en D' . Sin pérdida de generalidad este cambio de cruce luce de la siguiente manera

$$\times \rightarrow \times$$

Cada estado de D está relacionado de manera biunívoca con un estado de D' por lo que aplicando lo anterior tenemos que las $j \in \mathbb{Z}$ tales que $\mathcal{C}_j^i(D) \neq 0$ tienen la misma paridad que las que cumplen que $\mathcal{C}_j^i(D') \neq 0$.

Haciendo este procedimiento para una sucesión finita de cambios de cruces podemos llegar a un diagrama \mathfrak{D} equivalente mediante movidas de Reidemeister a la unión de n círculos ajenos contenidos en \mathbb{R}^2 y tal que las componentes homogéneas no triviales de $\mathcal{C}^i(\mathfrak{D})$ tengan la misma paridad que las de $\mathcal{C}^i(D)$. Como $\mathcal{H}_j^i(\mathfrak{D})$ es isomorfo a un subespacio de $\mathcal{C}_j^i(\mathfrak{D})$ tenemos que la paridad de las componentes homogéneas no triviales de $\mathcal{H}_j^i(\mathfrak{D})$ coincide con la de $\mathcal{H}_j^i(D)$.

Por el teorema de invarianza de la homología de Khovanov

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_j^i(\mathfrak{D}) &\cong \mathcal{H}_j^i(\bigcirc \dots \bigcirc) \leftarrow n \text{ círculos} \\ &= \begin{cases} (\mathbb{V}^{\otimes n})_j & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Para concluir, supongamos por reducción al absurdo que existe una $j \in \mathbb{Z}$ tal que $j \equiv n + 1 \pmod{2}$ y $\mathcal{C}_j^i(D) \neq 0$ para alguna $i \in \mathbb{Z}$.

Dado que todas las j -ésimas componentes homogéneas no triviales de $\mathcal{C}_j^i(D)$ están en la misma paridad obtenemos que $\mathcal{C}_j^i(D) = 0$ para toda $i \in \mathbb{Z}$ y toda $j \in \mathbb{Z}$ con la misma paridad que n . Por lo que $\mathcal{C}_j^i(\mathfrak{D}) = 0$ para $j \equiv n \pmod{2}$.

Así $\mathcal{H}_j^i(\mathfrak{D}) = 0$ para toda j con la misma paridad que n lo cual es una contradicción a (5.1). \square

Corolario 5.0.2. Sea L un enlace de n componentes. Si $j \equiv n + 1 \pmod{2}$ entonces $\mathcal{H}_j^i(L) = 0$.

Definición. Si K es un nudo orientado entonces representaremos con \overline{K} al mismo nudo pero con la orientación opuesta.

Proposición 5.0.3. Para toda $i, j \in \mathbb{Z}$ se cumple que $\mathcal{H}_j^i(K) = \mathcal{H}_j^i(\overline{K})$.

Demostración. Esto es resultado de que el corchete de Khovanov es independiente de la orientación del nudo y de que en un nudo el signo de cada cruce se preserva al cambiar la orientación. \square

Definición. Sea L un enlace orientado con al menos 2 componentes y K componente de L . Para D un diagrama orientado de L tomemos

- $x(K, L - K)$ el número de cruces negativos en D que corresponden a cruces entre la proyección de K y de $L - K$.
- $y(K, L - K)$ el número de cruces positivos en D que corresponden a cruces entre la proyección de K y de $L - K$.

Se define el **número de enlace** de K y $L - K$ como

$$lk(K, L - K) = \frac{y(K, L - K) - x(K, L - K)}{2}.$$

Proposición 5.0.4. $lk(K, L - K)$ no depende del diagrama.

Demostración. Basta ver que $lk(K, L - K)$ se preserva bajo movidas orientadas de Reidemeister.

Primero observamos que las movidas de Reidemeister preservan las componentes.

Ahora, como consideramos solamente cruces que provienen de la proyección de componentes distintas entonces no será necesario considerar las movidas de tipo I.

Para las movida de tipo II, solo es necesario considerar aquellas que involucren un arco de K y uno de $L - K$. Sin importar la orientación, al realizar una movida de tipo II se pierden (o se ganan) dos cruces, uno de los cuales es positivo mientras el otro es negativo. Así la diferencia entre número de cruces negativos y positivos se preserva.

Como las movidas de tipo III preservan el número y signo de los cruces, estas no afectan a lk . \square

Proposición 5.0.5. Sea L un enlace orientado con al menos dos componentes. Sea K una componente de L . Sea $L' = (L - K) \cup (\overline{K})$, es decir, L' resulta al cambiar la orientación de exactamente una componente de L .

Sea $l = lk(K, L - K)$.

Para cada $i, j \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$\mathcal{H}_j^i(L') = \mathcal{H}_{j+6l}^{i+2l}(L).$$

Demostración. Sea D diagrama orientado de L . Sea D' el resultado de cambiar la dirección de los arcos en D correspondientes a la proyección de K . Así D' es diagrama orientado de L' .

Como el corchete de Khovanov no depende de la orientación del enlace

$$[[D]]_j^i = [[D']]_j^i.$$

Además los signos de los cruces entre la proyección de K y la de $L - K$ cambian de signo mientras que el resto de cruces lo mantienen. Así

$$\begin{aligned}x(D') &= x(D) - x(K, L - K) + y(K, L - K) = x(D) + 2l \\y(D') &= y(D) + x(K, L - K) - y(K, L - K) = y(D) - 2l.\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_j^i(L') &= \llbracket D' \rrbracket_{j+2x(D')-y(D')}^{i+x(D')} \\&= \llbracket D \rrbracket_{j+2x(D)+4l-y(D)+2l}^{i+x(D)+2l} \\&= \mathcal{C}_{j+6l}^{i+2l}(L).\end{aligned}$$

Como además las funciones entre los complejos son iguales, entonces

$$\mathcal{H}_j^i(L') = \mathcal{H}_{j+6l}^{i+2l}(L).$$

□

Ejemplo:

Sean



La componente a la que le cambiamos la orientación tiene número de enlace $l = -1$ con la otra componente. Usando la proposición anterior tenemos que

$$\mathcal{H}_j^i(L') = \mathcal{H}_{j-6}^{i-2}(L).$$

Usando los cálculos previos de la homología de Khovanov de L , concluimos que las componentes homogéneas no triviales de la homología de Khovanov son

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_2^0(L') &\cong \mathbb{Q} & \mathcal{H}_4^2(L') &\cong \mathbb{Q} \\ \mathcal{H}_0^0(L') &\cong \mathbb{Q} & \mathcal{H}_6^2(L') &\cong \mathbb{Q}.\end{aligned}$$

5.1. Aplicación al número de cruces

Definición. El **número de cruces de un enlace** L es el mínimo número de cruces tomado sobre todos los diagramas de L . Lo denotaremos $c(L)$.

Es claro que el número de cruces es un invariante de enlaces.

En general resulta difícil calcular $c(L)$ puesto que hay que demostrar que no existe un diagrama de dicho enlace con menos cruces.

Denotemos por S_0 al estado un diagrama D que resultan de aplicar en todos los cruces un suavizado de tipo 0.

De forma parecida denotamos S_1 al estado en el que en todos los cruces se hizo un suavizado de tipo 1.

Definición. Un diagrama D de n cruces es **+adecuado** si para cada $\alpha \in \{0, 1\}^n$ tal que $|\alpha| = n - 1$ se cumple que el estado S_α posee una componente menos que $S_{\bar{1}}$.

Definición. Un diagrama D de n cruces es **-adecuado** si para cada $\alpha \in \{0, 1\}^n$ tal que $|\alpha| = 1$ se cumple que el estado S_α posee una componente menos que $S_{\bar{0}}$.

Definición. Un diagrama D es **adecuado** si es +adecuado y -adecuado.

Proposición 5.1.1. Sea D un diagrama de n cruces. Así:

1. $H^0(\llbracket D \rrbracket) \neq 0$ si y solo si D es -adecuado.
2. $H^{n-1}(\llbracket D \rrbracket) \neq 0$ si y solo si D es +adecuado.

Demostración. El cubo de estados de D se ve de la siguiente forma

$$\begin{array}{ccc}
 \llbracket D \rrbracket^0 & \xrightarrow{d^0} & \xrightarrow{d^{n-1}} \llbracket D \rrbracket^n \\
 = & & = \\
 S_{\bar{0}} & \begin{array}{c} \nearrow \dots \searrow \\ \vdots \\ \searrow \dots \nearrow \end{array} & S_{\bar{1}}
 \end{array}$$

Nótese que D es -adecuado si y solo si todas las flechas que salen de $S_{\bar{0}}$ son de tipo m . De forma parecida D es +adecuado si y solo si todas las flechas que llegan a $S_{\bar{1}}$ son de tipo Δ . Además

$$\begin{aligned}
 H^0(\llbracket D \rrbracket) &= \ker(d^0) \\
 H^{n-1}(\llbracket D \rrbracket) &= \llbracket D \rrbracket^n / \text{im}(d^{n-1}).
 \end{aligned}$$

Así

1. $v \in \ker(d^0) \setminus \{0\}$ si y solo si $v \in \ker(d_\xi) \setminus \{0\}$ para toda flecha ξ que salga de $S_{\bar{0}}$ si y solo si todas las flechas que salen de $S_{\bar{0}}$ son de tipo m .
2. Sea $v \in \llbracket D \rrbracket^{n-1}$. La clase de v en $\llbracket D \rrbracket^{n-1} / \text{im}(d^{n-1})$ es no trivial si y solo si $v \notin \text{im}(d_x)$ para alguna flecha ξ que llega a $S_{\bar{1}}$ si y solo si todas las flechas que llegan a $S_{\bar{1}}$ son de tipo Δ .

□

Definición. La **longitud homológica** de un enlace L se define como

$$hl(K) = \max\{i \in \mathbb{Z} | \mathcal{H}^i(L) \neq 0\} - \min\{i \in \mathbb{Z} | \mathcal{H}^i(L) \neq 0\}.$$

Nótese que $hl(K) = \max\{i \in \mathbb{Z} | H^i(\llbracket L \rrbracket) \neq 0\} - \min\{i \in \mathbb{Z} | H^i(\llbracket L \rrbracket) \neq 0\}$.

Proposición 5.1.2. Para cualquier enlace orientado L se cumple que $hl(L) \leq c(L)$.

Demostración. Sea L un enlace orientado y D un diagrama de L con exactamente $c(L)$ cruces. Por construcción $\llbracket D \rrbracket^i = 0$ para $i < 0$ y para $i > c(L)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{máx}\{i \in \mathbb{Z} \mid H^i(\llbracket L \rrbracket) \neq 0\} &\leq c(L) \\ \text{mín}\{i \in \mathbb{Z} \mid H^i(\llbracket L \rrbracket) \neq 0\} &\geq 0. \end{aligned}$$

□

Corolario 5.1.3. Si D un diagrama adecuado con n cruces de un enlace orientado L entonces $c(L) = n$.

Demostración. Por definición $c(L) \leq n$. Además, por la proposición 5.1.1 sabemos que $n \leq hl(L)$.

Usando la proposición 5.1.2 obtenemos $hl(L) \leq c(L)$.

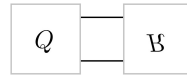
Así $n \leq c(L)$ y por lo tanto $n = c(L)$. □

Definición. Sea D un diagrama de un enlace. Un cruce p de D es **reducible** si se ve de alguna de las siguientes maneras



donde Q y R son abiertos ajenos cuya unión contiene al resto de D .

Es claro que si un diagrama de un enlace L posee un cruce reducible entonces podemos torcer a L y posteriormente proyectarlo para obtener un diagrama de la forma



Definición. Las **regiones** de un diagrama de enlace son las componentes conexas del complemento del pseudodiagrama en \mathbb{R}^2 .

Nótese que las regiones de un diagrama son abiertos arcoconexos de \mathbb{R}^2 .

Localmente cada cruce forma un cuadrante, como el pseudodiagrama es una curva cerrada es imposible que una misma región ocupe dos cuadrantes que compartan un segmento del diagrama como parte de su frontera.

Por lo tanto si una misma región ocupa dos cuadrantes, estos deben ser opuestos por el cruce. Esto sucede si el cruce es reducible.

Más aún, si una región ocupa dos cuadrantes opuestos por un cruce p entonces p es reducible dado que podemos encontrar una curva simple cerrada \mathcal{C} que pasa por el cruce y tal que $\mathcal{C} \setminus \{p\}$ se quede contenido en dicha región. El complemento de \mathcal{C} dará los abiertos Q y R requeridos en la definición de cruce reducible.

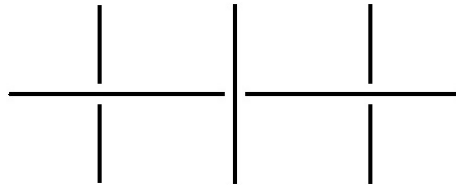
Definición. Un diagrama de enlace es **reducido** si no posee cruces reducibles.

5.2. UNA SUCESIÓN EXACTA PARA LA HOMOLOGÍA DE KHOVANOV 83

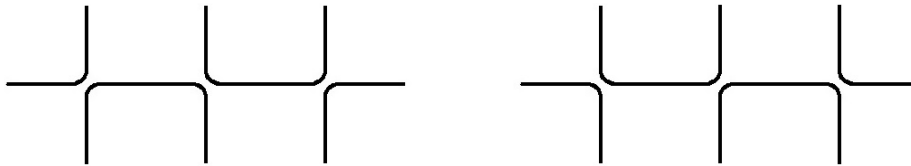
Definición. Un diagrama es **alternante** si al recorrer cada componente en alguna de sus orientaciones al pasar por cada cruce se irá alternando segmentos por arriba y segmentos por abajo.

Proposición 5.1.4. Si un diagrama es reducido y alternante entonces es adecuado.

Demostración. Esquemáticamente un enlace alternante se ve de la forma



Si a todos los cruces les realizamos el mismo tipo de suavizado entonces obtendremos alguno de los siguientes, dependiendo del tipo de suavizado aplicado.



Por lo que hay una correspondencia biunívoca entre las componentes de los estados S_0 y S_1 y las regiones del diagrama.

Como además el diagrama es reducido entonces en cada cruce inciden 4 regiones diferentes. Así que cambiar el tipo de suavizado en algún cruce ocurrirá una fusión y por lo tanto disminuirá en 1 el número de componentes conexas de dicho estado. \square

Corolario 5.1.5. Si un enlace L posee un diagrama D reducido y alternante con n cruces entonces $c(L) = n$

5.2. Una sucesión exacta para la Homología de Khovanov

Consideremos un enlace con $n \in \mathbb{Z}^+$ cruces. Fijémonos en un cruce \times y en los enlaces que resultan de aplicar un suavizado de tipo 0 o uno de tipo 1.

Como resultado de la definición del corchete de Khovanov es inmediato que para toda $i \in \mathbb{Z}$ se cumple

$$\mathbb{N}^i = \mathbb{N}^i \oplus \left(\mathbb{D} \mathbb{D}^{i-1} \{1\} \right).$$

Si nombramos d^i, d_0^i y d_1^i a los morfismos de los corchetes $\llbracket \rceil_j^i, \llbracket \smile_j^i$ y $\mathbb{D} \llbracket \rceil_j^i$ respectivamente entonces tenemos una descomposición de d^i de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc}
 \llbracket \rceil_j^i & \xrightarrow{d^i} & \llbracket \rceil_j^{i+1} \\
 \parallel & & \parallel \\
 \llbracket \smile_j^i & \xrightarrow{d_0^i} & \llbracket \smile_j^{i+1} \\
 \oplus & \searrow^{d^{i'}} & \oplus \\
 \mathbb{D} \llbracket \rceil_{j-1}^{i-1} & \xrightarrow{d_1^{i-1}} & \mathbb{D} \llbracket \rceil_{j-1}^i
 \end{array}$$

donde $d^{i'}$ es una restricción adecuada de d^i .

Para simplificar la notación consideremos $\mathbb{D} \llbracket \rceil_{j-1}^{i-1} \xrightarrow{\iota} \llbracket \rceil_j^i$ la inclusión natural y $\llbracket \rceil_j^{i+1} \xrightarrow{p} \llbracket \smile_j^{i+1}$ la proyección natural sobre $\llbracket \smile_j^{i+1}$.

Claramente ι es inyectiva y p es suprayectiva. Además el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & \mathbb{D} \llbracket \rceil_{j-1}^{i-2} & \xrightarrow{d_1^{i-2}} & \mathbb{D} \llbracket \rceil_{j-1}^{i-1} & \xrightarrow{d_1^{i-1}} & \mathbb{D} \llbracket \rceil_{j-1}^i & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow \iota & & \downarrow \iota & & \downarrow \iota & & \\
 \dots & \longrightarrow & \llbracket \rceil_j^{i-1} & \xrightarrow{d^{i-1}} & \llbracket \rceil_j^i & \xrightarrow{d^i} & \llbracket \rceil_j^{i+1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow p & & \downarrow p & & \downarrow p & & \\
 \dots & \longrightarrow & \llbracket \smile_j^{i-1} & \xrightarrow{d_0^{i-1}} & \llbracket \smile_j^i & \xrightarrow{d_0^i} & \llbracket \smile_j^{i+1} & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Por lo que ι y p inducen un morfismo de complejos de cocadenas tal que para cada $i, j \in \mathbb{Z}$ la sucesión

$$0 \rightarrow \mathbb{D} \llbracket \rceil_{j-1}^{i-1} \xrightarrow{\iota} \llbracket \rceil_j^i \xrightarrow{p} \llbracket \smile_j^i \rightarrow 0 \quad (5.2)$$

es exacta.

Notemos que sin importar la orientación dada se cumple que

$$n = x(\searrow) + y(\swarrow)$$

$$n - 1 = x(\smile) + y(\frown) = x(\circlearrowleft) + y(\circlearrowright).$$

De donde obtenemos que

$$-y(\searrow) = x(\searrow) - n \quad (5.3)$$

5.2. UNA SUCESIÓN EXACTA PARA LA HOMOLOGÍA DE KHOVANOV85

$$-n + 1 = -x(\smile) - y(\smile) = -x(\circ) - y(\circ). \quad (5.4)$$

Démosle una orientación a \searrow .

Fijémonos en dicho cruce. Tenemos dos posibilidades.

Caso 1: Si el cruce es negativo entonces sin pérdida de generalidad se ve de la forma \nearrow .

En este caso se induce una orientación a \searrow (mientras que \smile no posee una orientación coherente con la de \nearrow así que le daremos una orientación cualquiera.

Sustituyendo en (5.2) se obtiene que la siguiente sucesión es exacta

$$0 \rightarrow \left[\searrow \right]_{j-1+2x(\searrow)-y(\searrow)}^{i-1+x(\searrow)} \rightarrow \mathcal{C}_j^i(\searrow) \rightarrow \left[\smile \right]_{j+2x(\searrow)-y(\searrow)}^{i+x(\searrow)} \rightarrow 0.$$

Es claro que

$$\begin{aligned} x(\searrow) &= x(\searrow) + 1 \\ y(\searrow) &= y(\searrow). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Así

$$\left[\searrow \right]_{j-1+2x(\searrow)-y(\searrow)}^{i-1+x(\searrow)} = \left[\searrow \right]_{j-1+2(x(\searrow)+1)-y(\searrow)}^{i-1+x(\searrow)+1} = \mathcal{C}_{j+1}^i(\searrow).$$

Tomando $c = x(\smile) - x(\searrow)$ notamos que

$$\begin{aligned}
 \left[\left[\right] \right]_{j+2x(\nearrow\nwarrow)-y(\nearrow\nwarrow)}^{i+x(\nearrow\nwarrow)} &= \left[\left[\right] \right]_{j+2x(\searrow\nwarrow)+x(\nearrow\nwarrow)+x(\searrow)}^{i-x(\searrow)+x(\nearrow\nwarrow)+x(\searrow)} \\
 &= \left[\left[\right] \right]_{j+3x(\searrow\nwarrow)-n+1-1}^{i-c+x(\searrow)} \\
 &= \left[\left[\right] \right]_{j+3x(\searrow\nwarrow)-x(\searrow)-y(\searrow)-1}^{i-c+x(\searrow)} \\
 &= \left[\left[\right] \right]_{j-3x(\searrow)+3x(\nearrow\nwarrow)+2x(\searrow)-y(\searrow)-1}^{i-c+x(\searrow)} \\
 &= \left[\left[\right] \right]_{j-3c-1+2x(\searrow)-y(\searrow)}^{i-c+x(\searrow)} \\
 &= \mathcal{C}_{j-3c-1}^{i-c}(\searrow).
 \end{aligned}$$

Así para cada $i, j \in \mathbb{Z}$ se tiene una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_{j+1}^i(\searrow\nwarrow) \rightarrow \mathcal{C}_j^i(\nearrow\nwarrow) \rightarrow \mathcal{C}_{j-3c-1}^{i-c}(\searrow) \rightarrow 0.$$

Aplicando el Lema del Zig-Zag obtenemos para cada $j \in \mathbb{Z}$ una sucesión exacta

$$\dots \rightarrow \mathcal{H}_{j+1}^i(\searrow\nwarrow) \rightarrow \mathcal{H}_j^i(\nearrow\nwarrow) \rightarrow \mathcal{H}_{j-3c-1}^{i-c}(\searrow) \rightarrow \mathcal{H}_{j+1}^{i+1}(\searrow\nwarrow) \rightarrow \dots$$

Caso 2: El cruce representado es positivo. Sin pérdida de generalidad se ve de la forma $\nearrow\nwarrow$

En este caso se induce una orientación a \searrow mientras que \searrow no posee una orientación coherente con la de $\nearrow\nwarrow$ así que le daremos una orientación cualquiera. Sustituyendo en (5.2) obtenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \left[\left[\right] \right]_{j-1+2x(\searrow\nwarrow)-y(\searrow\nwarrow)}^{i-1+x(\searrow\nwarrow)} \rightarrow \mathcal{C}_j^i(\nearrow\nwarrow) \rightarrow \left[\left[\right] \right]_{j+2x(\searrow\nwarrow)-y(\searrow\nwarrow)}^{i+x(\searrow\nwarrow)} \rightarrow 0.$$

Es claro que

$$\begin{aligned}
 x(\searrow\nwarrow) &= x(\searrow) \\
 y(\searrow\nwarrow) &= y(\searrow) + 1.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

5.2. UNA SUCESIÓN EXACTA PARA LA HOMOLOGÍA DE KHOVANOV87

Así

$$\left[\left[\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right]_{j+2x(\searrow \swarrow)_{-y(\searrow \swarrow)}}^{i+x(\searrow \swarrow)} = \left[\left[\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right]_{j+2x(\curvearrowright)_{-y(\curvearrowright)}_{-1}}^{i+x(\curvearrowright)} = \mathcal{C}_{j-1}^i(\curvearrowright).$$

Ahora, sea $c = x(\curvearrowright)_{-1} - x(\searrow \swarrow)$.

Vemos que

$$\begin{aligned} \left[\left[\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right]_{j-1+2x(\searrow \swarrow)_{-y(\searrow \swarrow)}}^{i-1+x(\searrow \swarrow)} &= \left[\left[\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right]_{j-1+3x(\searrow \swarrow)_{-x(\searrow \swarrow)_{-y(\searrow \swarrow)}}}^{i-1-x(\curvearrowright)_{+x(\searrow \swarrow)_{+x(\curvearrowright)}}} \\ &= \left[\left[\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right]_{j-1+3x(\searrow \swarrow)_{-n}}^{i-1-c+x(\curvearrowright)} \\ &= \left[\left[\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right]_{j-2+3x(\searrow \swarrow)_{-n+1}}^{i-1-c+x(\curvearrowright)} \\ &= \left[\left[\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right]_{j-2+3x(\searrow \swarrow)_{-x(\curvearrowright)_{-y(\curvearrowright)}}}^{i-1-c+x(\curvearrowright)} \\ &= \left[\left[\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right]_{j-2+3x(\searrow \swarrow)_{-3x(\curvearrowright)_{+2x(\curvearrowright)_{-y(\curvearrowright)}}}^{i-1-c+x(\curvearrowright)} \\ &= \left[\left[\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right]_{j-2-3c+2x(\curvearrowright)_{-y(\curvearrowright)}}^{i-1-c+x(\curvearrowright)} \\ &= \mathcal{C}_{j-2-3c}^{i-1-c}(\curvearrowright). \end{aligned}$$

Así para cada $i, j \in \mathbb{Z}$ se tiene una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_{j-2-3c}^{i-1-c}(\curvearrowright) \rightarrow \mathcal{C}_j^i(\searrow \swarrow) \rightarrow \mathcal{C}_{j-1}^i(\curvearrowright) \rightarrow 0.$$

Aplicando el Lema del Zig-Zag obtenemos para cada $j \in \mathbb{Z}$ una sucesión exacta

$$\dots \rightarrow \mathcal{H}_{j-2-3c}^{i-1-c}(\curvearrowright) \rightarrow \mathcal{H}_j^i(\searrow \swarrow) \rightarrow \mathcal{H}_{j-1}^i(\curvearrowright) \rightarrow \mathcal{H}_{j-2-3c}^{i-c}(\curvearrowright) \rightarrow \dots$$

Ejemplos:

1. Para el enlace de Hopf, sean



Sea $c = x(L_0) - x(L) = -2$. Por el Teorema anterior, para cada $j \in \mathbb{Z}$ existe una sucesión exacta

$$\dots \rightarrow \mathcal{H}_{j+5}^{i+1}(L_0) \rightarrow \mathcal{H}_{j+1}^i(L_1) \rightarrow \mathcal{H}_j^i(L) \rightarrow \mathcal{H}_{j+5}^{i+2}(L_0) \rightarrow \dots \quad (5.7)$$

Como L_0 y L_1 son diagramas del nudo trivial, entonces

$$\mathcal{H}_j^i(L_0) \cong \mathcal{H}_j^i(L_1) \cong \mathcal{H}_j^i(\bigcirc) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } i = 0 \text{ y } j \in \{-1, 1\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así:

a) Si $j = 0$ entonces sustituyendo en la sucesión 5.7 obtenemos

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_1^i(\bigcirc) \rightarrow \mathcal{H}_0^i(L) \rightarrow 0.$$

Por lo tanto

$$\mathcal{H}_0^i(L) \cong \mathcal{H}_1^i(\bigcirc) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

b) Si $j = -2$ entonces sustituyendo en la sucesión 5.7 obtenemos

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_{-1}^i(\bigcirc) \rightarrow \mathcal{H}_{-2}^i(L) \rightarrow 0.$$

Por lo tanto

$$\mathcal{H}_{-2}^i(L) \cong \mathcal{H}_{-1}^i(\bigcirc) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

c) Para $j = -4$ tenemos:

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_{-4}^i(L) \rightarrow \mathcal{H}_1^{i+2}(\bigcirc) \rightarrow 0.$$

Por lo tanto

$$\mathcal{H}_{-4}^i(L) \cong \mathcal{H}_1^{i+2}(\bigcirc) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } i = -2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

d) Para $j = -6$ tenemos:

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_{-6}^i(L) \rightarrow \mathcal{H}_{-1}^{i+2}(\bigcirc) \rightarrow 0.$$

Por lo tanto

$$\mathcal{H}_{-6}^i(L) \cong \mathcal{H}_{-1}^{i+2}(\bigcirc) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } i = -2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

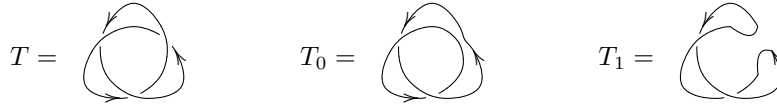
5.2. UNA SUCESIÓN EXACTA PARA LA HOMOLOGÍA DE KHOVANOV 89

e) Finalmente, para cualquier $j \in \mathbb{Z} \setminus \{-6, -4, -2, 0\}$ obtenemos

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_j^i(L) \rightarrow 0.$$

Así que el resto de homologías son triviales.

2. Para el nudo trébol. Sean



Sea $c = x(T_1) - x(T) = 2$.

Así para cada $j \in \mathbb{Z}$ tenemos una sucesión exacta

$$\dots \rightarrow \mathcal{H}_{j-8}^{i-3}(T_1) \rightarrow \mathcal{H}_j^i(T) \rightarrow \mathcal{H}_{j-1}^i(T_0) \rightarrow \mathcal{H}_{j-8}^{i-2}(T_1) \rightarrow \dots$$

Como $C(T)^i = 0$ para $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2, 3\}$ entonces

$$\mathcal{H}^i(T) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2, 3\}.$$

Por lo que solo es necesario analizar esta parte de la sucesión

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_{j-8}^{-3}(T_1) \rightarrow \mathcal{H}_j^0(T) \rightarrow \mathcal{H}_{j-1}^0(T_0) \rightarrow \mathcal{H}_{j-8}^{-2}(T_1) \rightarrow \mathcal{H}_j^1(T) \rightarrow \mathcal{H}_{j-1}^1(T_0) \\ & \rightarrow \mathcal{H}_{j-8}^{-1}(T_1) \rightarrow \mathcal{H}_j^2(T) \rightarrow \mathcal{H}_{j-1}^2(T_0) \rightarrow \mathcal{H}_{j-8}^0(T_1) \rightarrow \mathcal{H}_j^3(T) \rightarrow \mathcal{H}_{j-1}^3(T_0) \end{aligned}$$

Notemos que T_1 es equivalente al nudo trivial y que T_0 es equivalente a cambiar la orientación de una componente del enlace de Hopf.

Además $C(T)_j^i = 0$ para $j < 1$ y para $j > 9$, por lo que las j -ésimas componentes homogéneas no triviales de la homología están en $\{1, \dots, 9\}$. Como además T es un enlace de una componente, las homologías no triviales se encuentran en grados impares.

a) Si $j = 1$ entonces tenemos

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{H}_1^0(T) \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{H}_1^1(T) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{H}_1^2(T) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{H}_1^3(T) \rightarrow 0. \\ \Rightarrow \mathcal{H}_1^0(T) \cong \mathbb{Q} \quad \mathcal{H}_1^2(T) = 0 \\ \mathcal{H}_1^1(T) = 0 \quad \mathcal{H}_1^3(T) = 0. \end{aligned}$$

b) Para $j = 3$:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{H}_3^0(T) \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{H}_3^1(T) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{H}_3^2(T) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{H}_3^3(T) \rightarrow 0 \\ \Rightarrow \mathcal{H}_3^0(T) \cong \mathbb{Q} \quad \mathcal{H}_3^2(T) = 0 \\ \mathcal{H}_3^1(T) = 0 \quad \mathcal{H}_3^3(T) = 0. \end{aligned}$$

c) Para $j = 5$:

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow \mathcal{H}_5^0(T) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{H}_5^1(T) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{H}_5^2(T) \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{H}_5^3(T) \rightarrow 0 \\
 \Rightarrow \mathcal{H}_5^0(T) = 0 \quad \mathcal{H}_5^2(T) \cong \mathbb{Q} \\
 \mathcal{H}_5^1(T) = 0 \quad \mathcal{H}_5^3(T) = 0.
 \end{aligned}$$

d) Para $j = 7$:

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow \mathcal{H}_7^0(T) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{H}_7^1(T) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{H}_7^2(T) \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{H}_7^3(T) \rightarrow 0 \\
 \Rightarrow \mathcal{H}_7^0(T) = \mathcal{H}_7^1(T) = 0.
 \end{aligned}$$

Faltando por determinar $\mathcal{H}_7^2(T)$ y $\mathcal{H}_7^3(T)$.

e) Para $j = 9$:

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow \mathcal{H}_9^0(T) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{H}_9^1(T) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{H}_9^2(T) \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{H}_9^3(T) \rightarrow 0. \\
 \Rightarrow \mathcal{H}_9^0(T) = 0 \quad \mathcal{H}_9^2(T) = 0 \\
 \mathcal{H}_9^1(T) = 0 \quad \mathcal{H}_9^3(T) \cong \mathbb{Q}.
 \end{aligned}$$

5.3. Un atajo computacional

Como puede intuirse, calcular $\mathcal{H}(L)$ resulta muy complicado dado que el número de estados de un diagrama de enlace crece exponencialmente en función del número de cruces. Además la dimensión del espacio vectorial asociado a cada estado crece exponencialmente en función de su número de componentes conexas.

A pesar de eso, en algunos casos pueden hallarse atajos que permitan calcular la homología de maneras más eficientes.

Consideremos el complejo $C = \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right]$.

Este se ve la forma

$$\begin{array}{ccc}
 \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] [1]\{1\} \xrightarrow{-d} \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] [2]\{2\} & & \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] [1]\{1\} \xrightarrow{-d} \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] [2]\{2\} \\
 m_u \uparrow & & m_u \uparrow \\
 \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \xrightarrow{m_l} \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] [1]\{1\} & \cong & \mathbb{V} \otimes \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \xrightarrow{m_l} \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] [1]\{1\} \\
 & & \uparrow d
 \end{array}$$

donde m_u indica que el círculo indicado se fusiona “hacia arriba” mientras que m_l indica que se fusiona “hacia abajo”.

Tomemos

$$C' = \begin{array}{ccc} \beta & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow \\ 1 \otimes \alpha & \longrightarrow & \beta \end{array} \subseteq \begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right] [1]\{1\} & \longrightarrow & \left[\begin{array}{c} \rangle \langle \\ \cup \end{array} \right] [2]\{2\} \\ m_u \uparrow & & \uparrow d \\ \mathbb{V} \otimes \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right] & \xrightarrow{m_l} & \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right] [1]\{1\} \end{array}$$

Notemos primero que, sin pérdida de generalidad, $d^i : C^i \rightarrow C^{i+1}$ está dado de la siguiente forma

$$\begin{array}{ccc} C^i & \xrightarrow{d^i} & C^{i+1} \\ \parallel & & \parallel \\ \mathbb{V} \otimes \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^i & \xrightarrow{Id \otimes d_{00}^i} & \mathbb{V} \otimes \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^{i+1} \\ \oplus & \searrow m & \oplus \\ \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^{i-1} \{1\} & \xrightarrow{-d_{01}^{i-1}} & \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^i \{1\} \\ \oplus & \searrow m & \oplus \\ \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^{i-1} \{1\} & \xrightarrow{-d_{10}^{i-1}} & \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^i \{1\} \\ \oplus & \searrow m & \oplus \\ \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^{i-2} \{2\} & \xrightarrow{d_{11}^{i-2}} & \left[\begin{array}{c} \rangle \langle \\ \cup \end{array} \right]^{i-1} \{2\} \end{array}$$

de manera que $d_{01} = d_{10}$ y $d_{*1} = d_{1*}$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} d^i(1 \otimes \alpha, \beta, \beta, 0) &= (1 \otimes d_{00}^i(\alpha), \alpha - d_{01}^{i-1}(\beta), \alpha - d_{10}^{i-1}(\beta), d_{*1}^{i-1}(\beta) - d_{1*}^{i-1}(\beta)) \\ &= (1 \otimes d_{00}^i(\alpha), \alpha - d_{01}^{i-1}(\beta), \alpha - d_{01}^{i-1}(\beta), 0) \in (C')^{i+1}. \end{aligned}$$

Lo que nos dice que C' es, en efecto, un subcomplejo de C .

Además si $(1 \otimes \alpha, \beta, \beta, 0) \in \ker(d^i)$ entonces por la ecuación anterior tenemos que $\alpha = d_{01}^{i-1}(\beta)$ por lo que

$$d^{i-1}(1 \otimes \beta, 0, 0, 0) = (1 \otimes d_{01}^{i-1}(\beta), \beta, \beta, 0) = (1 \otimes \alpha, \beta, \beta, 0).$$

Lo que implica que $(1 \otimes \alpha, \beta, \beta, 0) \in \text{im}(d^{i-1})$. Por lo tanto C' es acíclica.

De forma análoga al procedimiento empleado en la prueba de la invarianza de la Homología de Khovanov bajo movidas de tipo II (método útil), definiendo $A^i = \{(\beta, \beta) | \beta \in \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^{i-1}\}$ obtenemos un isomorfismo

$$\begin{aligned} \left(\left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^{i-1} \oplus \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^{i-1} \right) / A^i &\rightarrow \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^{i-1} \\ (\beta, \gamma) + A^i &\mapsto \beta - \gamma. \end{aligned}$$

Bajo este isomorfismo vemos que, al tomar el cociente, las funciones

$$\mathbb{V} \otimes \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^i \xrightarrow{(m_u, m_l)} \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^i \{1\} \oplus \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^i \{1\}$$

se transforman en

$$\langle X \rangle \otimes \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^i \xrightarrow{m_u - m_l} \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^i \{1\}.$$

Además es claro que la homología de

$$\dots \rightarrow \langle X \rangle \otimes \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^i \xrightarrow{Id \otimes d_{00}^i} \langle X \rangle \otimes \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^{i+1} \rightarrow \dots$$

coincide con la de

$$\dots \rightarrow \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^i \{-1\} \xrightarrow{d_{00}^i} \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^{i+1} \{-1\} \rightarrow \dots$$

Sea $v : \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^i \rightarrow \langle X \rangle \otimes \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^i$ dada por $v(\beta) = X \otimes \beta$.

Sean $l_X = m_l \circ v$ y $u_X = m_u \circ v$.

Es inmediato que el complejo de cocadenas C/C' es isomorfo a

$$\left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right] \{-1\} \xrightarrow{u_X - l_X} \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right] [1]\{1\} \xrightarrow{d} \left[\begin{array}{c} \rangle \\ \langle \end{array} \right] [2]\{2\}.$$

En general tenemos el siguiente

Teorema 5.3.1. *Si un diagrama contiene una región con $k \geq 2$ medios giros de la forma*

$$\left. \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \vdots \\ \curvearrowleft \end{array} \right\} k \text{ cruces}$$

entonces su homología coincide con la de

$$\dots \xrightarrow{\partial^{k-3}} \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right] [k-2]\{k-3\} \xrightarrow{\partial^{k-2}} \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right] [k-1]\{k-1\} \xrightarrow{\partial^{k-1}} \left[\begin{array}{c} \rangle \\ \langle \end{array} \right] [k]\{k\}$$

donde

$$\begin{aligned} \partial^{k-1} &= d \\ \partial^{k-i} &= u_X - (-1)^i l_X \text{ para } i \in \{2, \dots, k\}. \end{aligned}$$

Demostración. Por inducción.

El caso para $k = 2$ ya ha sido realizado.

Supongamos que el resultado es válido para n cruces.

Consideremos

$$\left. \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \vdots \\ \curvearrowleft \end{array} \right\} n + 1 \text{ cruces.}$$

Es claro que

$$\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{array} \right] [1]\{1\}.$$

Aplicando la hipótesis de inducción obtenemos que dicho complejo de cocadenas tiene la misma homología que

$$\begin{array}{ccccc} \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] [1]\{2-n\} & \xrightarrow{-(u_X - (-1)^n l_X)} & \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] [2]\{4-n\} & \xrightarrow{-(u_X - (-1)^{n-1} l_X)} & \dots \\ \uparrow m_u & & \uparrow m_u & & \\ \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \{1-n\} & \xrightarrow{u_X - (-1)^n l_X} & \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] [1]\{3-n\} & \xrightarrow{u_X - (-1)^{n-1} l_X} & \dots \end{array} \quad (5.8)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{-(u_X + l_X)} & \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] [n-1]\{n-2\} & \xrightarrow{-(u_X - l_X)} & \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] [n]\{n\} & \xrightarrow{-d} & \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] [n+1]\{n+1\} \\ \uparrow m_u & & \uparrow m_u & & \uparrow m_u & & \uparrow d \\ \dots & \xrightarrow{u_X + l_X} & \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] [n-2]\{n-3\} & \xrightarrow{u_X - l_X} & \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] [n-1]\{n-1\} & \xrightarrow{m_l} & \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] [n]\{n\} \end{array}$$

Siguiendo un proceso análogo al caso $k = 2$ obtenemos que el siguiente subcomplejo es acíclico.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \beta & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 1 \otimes \alpha & \longrightarrow & \beta \end{array}$$

De manera que el complejo de cocadenas (5.8) tiene la misma homología que la del cociente que se ve de la siguiente forma.

$$\begin{array}{ccccc} \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] [1]\{2-n\} & \xrightarrow{-(u_X - (-1)^n l_X)} & \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] [2]\{4-n\} & \xrightarrow{-(u_X - (-1)^{n-1} l_X)} & \dots \\ \uparrow m_u & & \uparrow m_u & & \\ \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \{1-n\} & \xrightarrow{u_X - (-1)^n l_X} & \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] [1]\{3-n\} & \xrightarrow{u_X - (-1)^{n-1} l_X} & \dots \end{array} \quad (5.9)$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \xrightarrow{-(u_X+l_X)} & \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right] [n-1]\{n-2\} & \xrightarrow{-(u_X-l_X)} & \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right] [n]\{n\} & \xrightarrow{d} & \left[\begin{array}{c} \rangle \\ \rangle \end{array} \right] [n+1]\{n+1\} \\
 \uparrow m_u & & \uparrow m_u & & \uparrow m_u - m_l & & \uparrow \\
 \dots & \xrightarrow{u_X+l_X} & \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right] [n-2]\{n-3\} & \xrightarrow{u_X-l_X} & \langle X \rangle \otimes \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right] [n-1]\{n-1\} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Consideremos ahora

$$\begin{array}{cccccccc}
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \beta & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & 1 \otimes \alpha & \longrightarrow & X \otimes \beta & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Explícitamente, suprimiendo los espacios 0 fuera del penúltimo recuadro así como los desplazamientos de grado, tenemos lo siguiente.

$$\begin{array}{ccccc}
 \langle 1 \rangle \otimes \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^{i-n+1} & \longrightarrow & \langle 1 \rangle \otimes \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^{i-n+2} & \longrightarrow & \langle 1 \rangle \otimes \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^{i-n+3} \\
 \oplus & \searrow m & \oplus & \searrow m & \oplus \\
 \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^{i-n} & \longrightarrow & \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^{i-n+1} & \longrightarrow & \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^{i-n+2} \\
 \oplus & \searrow u_X-l_X & \oplus & \searrow u_X-l_X & \oplus \\
 \langle X \rangle \otimes \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^{i-n} & \longrightarrow & \langle X \rangle \otimes \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^{i-n+1} & \longrightarrow & \langle X \rangle \otimes \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^{i-n+2} \\
 \oplus & \searrow -(u_X-l_X) & \oplus & \searrow -(u_X-l_X) & \oplus \\
 \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^{i-n-1} & \longrightarrow & \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^{i-n} & \longrightarrow & \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^{i-n+1} \\
 \oplus & \searrow m_u - m_l & \oplus & \searrow m_u - m_l & \oplus
 \end{array} \tag{5.10}$$

Denotemos $d_0^i : \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^i \rightarrow \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right]^{i+1}$.

Nótese que

$$\begin{aligned}
 u_X - l_X : \langle 1 \rangle \otimes \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right] &\rightarrow \langle X \rangle \otimes \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right] \\
 1 \otimes 1 &\mapsto X \otimes 1 \\
 1 \otimes X &\mapsto X \otimes X
 \end{aligned}$$

Además por definición

$$(m_u - m_l)(X \otimes \beta) = (u_X - l_X)(\beta).$$

Usando todo lo anterior concluimos que en (5.10) el morfismo está dado por

$$\begin{aligned}
d^i(1 \otimes \alpha, \beta, X \otimes \beta, 0) &= (1 \otimes d_0^{i-n+2}(\alpha), m(1 \otimes \alpha) - d_0^{i-n+1}(\beta), \\
&\quad (u_X - l_X)(1 \otimes \alpha) - X \otimes d_0^{i-n+1}(\beta), \\
&\quad -(u_X - l_X)(\beta) + (m_u - m_l)(X \otimes \beta)) \\
&= (1 \otimes d_0^{i-n+2}(\alpha), \alpha - d_0^{i-n+1}(\beta), X \otimes \alpha - X \otimes d_0^{i-n+1}(\beta), 0) \\
&= (1 \otimes d_0^{i-n+2}(\alpha), \alpha - d_0^{i-n+1}(\beta), X \otimes (\alpha - d_0^{i-n+1}(\beta)), 0).
\end{aligned}$$

de manera que (5.10) es en efecto un subcomplejo de (5.9).

Además si $(1 \otimes \alpha, \beta, X \otimes \beta, 0) \in \ker(d^i)$ entonces $\alpha = d_0^{i-n+1}(\beta)$.

Por lo que

$$\begin{aligned}
d^{i-1}(\beta, 0, 0, 0) &= (1 \otimes d_0^{i-n+1}(\beta), \beta - d_0^{i-n}(0), X \otimes (\beta - d_0^{i-n}(0)), 0) \\
&= (1 \otimes \alpha, \beta, X \otimes \beta, 0).
\end{aligned}$$

Concluimos así que (5.10) es acíclico, por lo que (5.9) tiene la misma homología que su cociente por (5.10), el cual queda de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccccc}
\left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right] [1]\{2-n\} & \xrightarrow{-(u_X - (-1)^n l_X)} & \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right] [2]\{4-n\} & \xrightarrow{-(u_X - (-1)^{n-1} l_X)} & \dots \\
\uparrow m_u & & \uparrow m_u & & \\
\left[\begin{array}{c} \cup \\ \circ \end{array} \right] \{1-n\} & \xrightarrow{u_X - (-1)^n l_X} & \left[\begin{array}{c} \cup \\ \circ \end{array} \right] [1]\{3-n\} & \xrightarrow{u_X - (-1)^{n-1} l_X} & \dots
\end{array}
\tag{5.11}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \xrightarrow{-(u_X + l_X)} & \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right] [n-1]\{n-2\} & \xrightarrow{-(u_X - l_X)} & \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right] [n]\{n\} & \xrightarrow{-d} & \left[\begin{array}{c} \rangle \\ \rangle \end{array} \right] [n+1]\{n+1\} \\
\uparrow m_u & & \uparrow m_u & \searrow \beta = X \otimes \beta & \uparrow m_u - m_l & & \uparrow \\
\dots & \xrightarrow{u_X + l_X} & \langle X \rangle \otimes \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right] [n-2]\{n-3\} & \xrightarrow{-m_l} & \langle X \rangle \otimes \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right] [n-1]\{n-1\} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Este complejo es a su vez isomorfo al siguiente.

$$\begin{array}{ccccc}
\left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right] [1]\{2-n\} & \xrightarrow{-(u_X - (-1)^n l_X)} & \left[\begin{array}{c} \cup \\ \cup \end{array} \right] [2]\{4-n\} & \xrightarrow{-(u_X - (-1)^{n-1} l_X)} & \dots \\
\uparrow m_u & & \uparrow m_u & & \\
\left[\begin{array}{c} \cup \\ \circ \end{array} \right] \{1-n\} & \xrightarrow{u_X - (-1)^n l_X} & \left[\begin{array}{c} \cup \\ \circ \end{array} \right] [1]\{3-n\} & \xrightarrow{u_X - (-1)^{n-1} l_X} & \dots
\end{array}
\tag{5.12}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \xrightarrow{-(u_X+l_X)} & \llbracket \cup \rrbracket [n-1]\{n-2\} & \xrightarrow{u_X-l_X} & \llbracket \cup \rrbracket [n]\{n\} & \xrightarrow{d} & \llbracket \rangle \rangle \rrbracket [n+1]\{n+1\} \\
 \uparrow m_u & & \uparrow m_u + m_l & & \uparrow & & \uparrow \\
 \dots & \xrightarrow{u_X+l_X} & \langle X \rangle \otimes \llbracket \cup \rrbracket [n-2]\{n-3\} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Continuamos siguiendo un proceso análogo para cada recuadro hasta llegar a

$$\begin{array}{ccccccc}
 \llbracket \cup \rrbracket [1]\{2-n\} & \xrightarrow{u_X-(-1)^n l_X} & \llbracket \cup \rrbracket [2]\{4-n\} & \xrightarrow{u_X-(-1)^{n-1} l_X} & \dots \\
 \uparrow m_u + (-1)^n m_l & & \uparrow & & \\
 \langle X \rangle \otimes \llbracket \cup \rrbracket \{1-n\} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

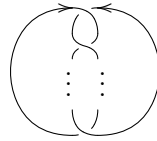
$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \xrightarrow{u_X+l_X} & \llbracket \cup \rrbracket [n-1]\{n-2\} & \xrightarrow{u_X-l_X} & \llbracket \cup \rrbracket [n]\{n\} & \xrightarrow{-d} & \llbracket \rangle \rangle \rrbracket [n+1]\{n+1\} \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Finalmente, este último es claramente isomorfo a

$$\begin{array}{ccccccc}
 \llbracket \cup \rrbracket \{1-(n+1)\} & \xrightarrow{u_X-(-1)^{n+1} l_X} & \llbracket \cup \rrbracket [1]\{3-(n+1)\} & \xrightarrow{u_X-(-1)^n l_X} & \dots \\
 \dots & \xrightarrow{u_X+l_X} & \llbracket \cup \rrbracket [n-1]\{(n+1)-3\} & \xrightarrow{u_X-l_X} & \llbracket \cup \rrbracket [n]\{n\} & \xrightarrow{d} & \llbracket \rangle \rangle \rrbracket [n+1]\{n+1\}.
 \end{array}$$

□

Como resultado inmediato del teorema anterior podemos calcular para cada $k \geq 2$ la homología del enlace toroidal $T_{2,k}$ ilustrado con el siguiente diagrama de k cruces:



Dado que ∞ tiene una sola componente se tiene que

$$\begin{aligned}
 u_X = l_X : \mathbb{V} &\rightarrow \mathbb{V} \\
 1 &\mapsto X \\
 X &\mapsto 0
 \end{aligned}$$

Aplicando la proposición (5.3.1) obtenemos que $\llbracket T_{2,k} \rrbracket$ tiene la misma homología que

$$\begin{aligned} & \llbracket \mathbb{O} \rrbracket \{1-k\} \xrightarrow{u_X - (-1)^k u_X} \llbracket \mathbb{O} \rrbracket [1] \{3-k\} \xrightarrow{u_X - (-1)^{k-1} u_X} \dots \\ & \dots \xrightarrow{2u_X} \llbracket \mathbb{O} \rrbracket [k-2] \{k-3\} \xrightarrow{0} \llbracket \mathbb{O} \rrbracket [k-1] \{k-1\} \xrightarrow{\Delta} \llbracket \mathbb{O} \mathbb{O} \rrbracket [k] \{k\} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Como cada uno de los corchetes involucrados son no-triviales solo en la altura cero, (5.13) es isomorfo al complejo de cocadenas

$$0 \rightarrow \mathbb{V}\{1-k\} \xrightarrow{\partial^0} \mathbb{V}\{3-k\} \xrightarrow{\partial^1} \dots \xrightarrow{2u_X} \mathbb{V}\{k-3\} \xrightarrow{0} \mathbb{V}\{k-1\} \xrightarrow{\Delta} \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}\{k\} \rightarrow 0.$$

De esta forma

$$H^0(\llbracket T_{2,k} \rrbracket) = \ker(u_X - (-1)^k u_X) \cong \begin{cases} \mathbb{V}\{1-k\} & \text{si } k \equiv 0 \pmod{2} \\ \langle X \rangle \{1-k\} & \text{si } k \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

Lo que implica que

$$\begin{aligned} H_{-k}^0 & \cong \langle X \rangle \\ H_{-k+2}^0(\llbracket T_{2,k} \rrbracket) & \cong \begin{cases} \langle 1 \rangle & \text{si } k \equiv 0 \pmod{2} \\ 0 & \text{si } k \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora, para $i \in \{1, \dots, k-2\}$:

$$H^i(\llbracket T_{2,k} \rrbracket) = \frac{\ker(\partial^i)}{\text{im}(\partial^{i-1})} = \frac{\ker(\partial^{k-(k-i)})}{\text{im}(\partial^{k-(k-i+1)})}$$

$$H^i(\llbracket T_{2,k} \rrbracket) = \frac{\ker(u_X - (-1)^{k-i} u_X)}{\text{im}(u_X - (-1)^{k-i+1} u_X)} \cong \begin{cases} (\mathbb{V}/\langle 2X \rangle) \{1-k+2i\} & \text{si } k-i \equiv 0 \pmod{2} \\ \langle X \rangle \{1-k+2i\} & \text{si } k-i \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

Así

$$\begin{aligned} H_{-k+2i}^i(\llbracket T_{2,k} \rrbracket) & \cong \begin{cases} 0 & \text{si } i \equiv k \pmod{2} \\ \langle X \rangle & \text{si } i \equiv k-1 \pmod{2} \end{cases} \\ H_{-k+2i+2}^i(\llbracket T_{2,k} \rrbracket) & \cong \begin{cases} \langle 1 \rangle & \text{si } i \equiv k \pmod{2} \\ 0 & \text{si } i \equiv k-1 \pmod{2} \end{cases}. \end{aligned}$$

Como Δ es inyectiva tenemos que

$$H^{k-1}(\llbracket T_{2,k} \rrbracket) = \frac{\ker(\Delta)}{\text{im}(0)} = 0.$$

Además

$$H^k(\llbracket T_{2,k} \rrbracket) = \frac{\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}}{\text{im}(\Delta)} \cong \langle 1 \otimes 1, X \otimes 1 \rangle \{k\}.$$

De donde obtenemos

$$\begin{aligned} H_k^k(\llbracket T_{2,k} \rrbracket) & = \langle X \otimes 1 \rangle \\ H_{k+2}^k(\llbracket T_{2,k} \rrbracket) & = \langle 1 \otimes 1 \rangle. \end{aligned}$$

Finalmente, recordando que para todo diagrama D se tiene que $\mathcal{H}_{j-2x(D)+y(D)}^{i-x(D)} = H_j^i(\llbracket D \rrbracket)$ y notando que $x(T_{2,k}) = k$ y que $y(T_{2,k}) = 0$ obtenemos que las componentes no-triviales de la homología de Khovanov de $T_{2,k}$ están dadas por

$$\mathcal{H}_{-3k}^{-k}(T_{2,k}) \cong \mathbb{Q}$$

$$\mathcal{H}_{-3k+2}^{-k}(T_{2,k}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } k \equiv 0 \pmod{2} \\ 0 & \text{si } k \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

$$\mathcal{H}_{-3k+2i}^{-k+i}(T_{2,k}) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } i \equiv k \pmod{2} \\ \mathbb{Q} & \text{si } i \equiv k-1 \pmod{2} \end{cases} \quad \text{si } 1 \leq i \leq k-2$$

$$\mathcal{H}_{-3k+2(i+1)}^{-k+i}(T_{2,k}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } i \equiv k \pmod{2} \\ 0 & \text{si } i \equiv k-1 \pmod{2} \end{cases} \quad \text{si } 1 \leq i \leq k-2$$

$$\mathcal{H}_{-k}^0(T_{2,k}) \cong \mathcal{H}_{2-k}^0(T_{2,k}) \cong \mathbb{Q}.$$

Como caso particular, tomando $k = 2$ tenemos que las componentes no triviales de $\mathcal{H}(T_{2,2})$ están dadas por

$$\mathcal{H}_{-6}^{-2}(T_{2,2}) \cong \mathcal{H}_{-4}^{-2}(T_{2,2}) \cong \mathcal{H}_{-2}^{-2}(T_{2,2}) \cong \mathcal{H}_0^0(T_{2,2}) \cong \mathbb{Q}.$$

Nótese que $T_{2,2}$ es igual al enlace de Hopf y que efectivamente los espacios obtenidos son isomorfos a los previamente calculados.

De la misma forma, para $k = 3$ obtenemos que las componentes de $\mathcal{H}(T_{2,3})$ distintas de 0 son

$$\mathcal{H}_{-9}^{-3}(T_{2,3}) \cong \mathcal{H}_{-5}^{-2}(T_{2,3}) \cong \mathcal{H}_{-3}^0(T_{2,3}) \cong \mathcal{H}_{-1}^0(T_{2,3}) \cong \mathbb{Q}.$$

Definición. Sea D un diagrama, el **reflejado** de D , denotado $D^!$, es el diagrama que resulta al cambiar en D cada cruce de manera que un segmento pasa por arriba en D si y solo si pasa por abajo en $D^!$.

Por ejemplo en la siguiente figura se muestra un diagrama T del nudo trébol y su reflejado.



Teorema 5.3.2. Si D es un diagrama de nudo entonces

$$\mathcal{H}_j^i(D) \cong \mathcal{H}_{-j}^{-i}(D^!) \quad \forall i, j \in \mathbb{Z}.$$

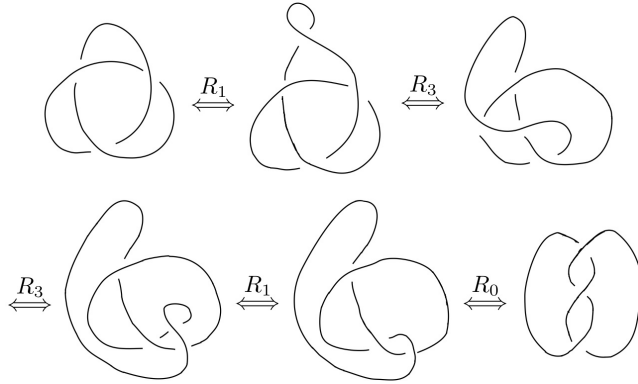


Figura 5.1: Movidas de Reidemeister de T a $T_{2,3}$.

La prueba de este teorema fue brindada por Khovanov en [10].

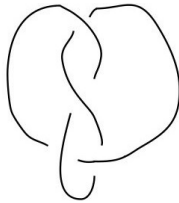
La figura 5.1 muestra que T es equivalente al reflejado de $T_{2,3}$. Empleando el teorema anterior y el resultado 5.3 concluimos que las componentes no triviales de $\mathcal{H}_j^i(T)$ son

$$\mathcal{H}_9^3(T_{2,3}) \cong \mathcal{H}_5^2(T_{2,3}) \cong \mathcal{H}_3^0(T_{2,3}) \cong \mathcal{H}_1^0(T_{2,3}) \cong \mathbb{Q}$$

corroborando que estas coinciden, salvo isomorfismo, con las calculadas anteriormente.

Otro ejemplo concreto en donde se puede aplicar el atajo es el siguiente.

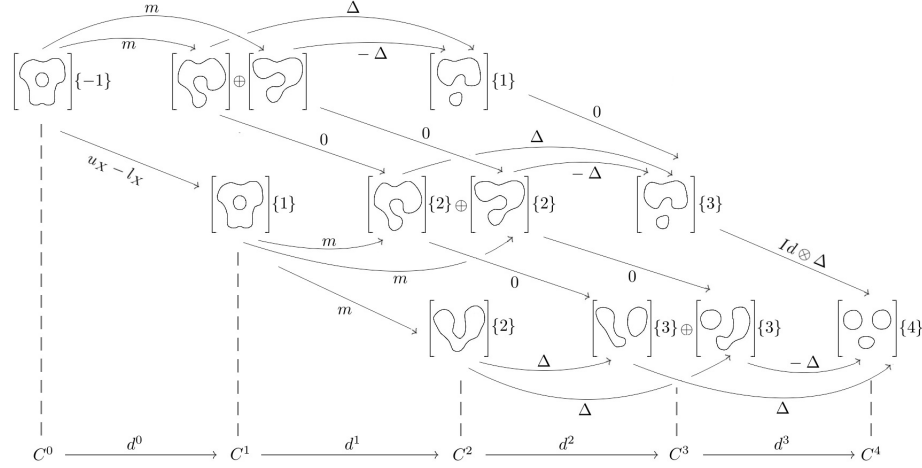
Consideremos el siguiente diagrama del nudo figura-ocho, denotado 4_1 en la tabla de nudos de Rolfsen [16].



Aplicando el Teorema 5.3.1 obtenemos que $[[4_1]]$ tiene la misma homología que el complejo

$$\left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right]_{\{-1\}} \xrightarrow{u_X - l_X} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} \right]_{[1]\{1\}} \longrightarrow \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \end{array} \right]_{[2]\{2\}}$$

Desarrollando el complejo de cocadenas anterior como se muestra en la Figura 5.2 corroboramos que el complejo C está dado por los espacios


 Figura 5.2: Cocomplejo con la misma homología que $\llbracket 4_1 \rrbracket$.

$$\begin{aligned}
 C^0 &= (V \otimes V)\{-1\} \\
 C^1 &= V \oplus V \oplus (V \otimes V)\{1\} \\
 C^2 &= (V \otimes V)\{1\} \oplus V\{2\} \oplus V\{2\} \oplus V \\
 C^3 &= (V \otimes V)\{3\} \oplus (V \otimes V)\{3\} \oplus (V \otimes V)\{3\} \\
 C^4 &= (V \otimes V \otimes V)\{4\}
 \end{aligned}$$

y las funciones lineales $d^i : C^i \rightarrow C^{i+1}$ dadas por

$$\begin{aligned}
 d^0(u \otimes v) &= (m(u \otimes v), m(u \otimes v), m(u \otimes v), (u_X - l_X)(u \otimes v)) \\
 d^1(u, v, w \otimes z) &= (\Delta(u) - \Delta(v), m(w \otimes z), m(w \otimes z), m(w \otimes z)) \\
 &= (\Delta(u - v), m(w \otimes z), m(w \otimes z), m(w \otimes z)) \\
 d^2(u \otimes v, w, z, r) &= (\Delta(w) - \Delta(z), -\Delta(w) + \Delta(r), -\Delta(z) + \Delta(r)) \\
 &= (\Delta(w - z), \Delta(r - w), \Delta(r - z)) \\
 d^3(u \otimes v, w \otimes z, r \otimes s) &= \Delta(u \otimes v) + \Delta(w \otimes z) - \Delta(r \otimes s) \\
 &= \Delta(u \otimes v + w \otimes z - r \otimes s)
 \end{aligned}$$

con $u, v, w, z, r, s \in \{0, 1, X\}$ y extendidas linealmente.

Vemos que

$$H_j^i(C) \cong \mathcal{H}_j^i(\llbracket 4_1 \rrbracket) = \mathcal{H}_{j-2x(4_1)+y(4_1)}^{i-x(4_1)}(4_1) = \mathcal{H}_{j-2}^{i-2}(4_1).$$

Nótese además que $u \otimes v \in \ker(d^0)$ si y solo si $u \otimes v \in \ker(m) \cap \ker(u_X - l_X)$, de donde se sigue que

$$\ker(d^0) = \langle X \otimes X \rangle\{-1\}.$$

Así, $H_{-3}^0(C) \cong \langle X \otimes X \rangle$ y por lo tanto

$$\mathcal{H}_{-3}^{-2}(4_1) \cong \mathbb{Q}.$$

Por otra parte

$$(u, v, w \otimes z) \in \ker(d^1) \Leftrightarrow u = v \text{ y } w \otimes z \in \ker(m).$$

Así

$$\begin{aligned} \ker(d^1) &= \langle (1, 1, 0), (X, X, 0), (0, 0, 1 \otimes X - X \otimes 1), (0, 0, X \otimes X) \rangle \\ &= \langle (1, 1, X \otimes 1 - 1 \otimes X), (X, X, 0), (0, 0, 1 \otimes X - X \otimes 1), (0, 0, X \otimes X) \rangle \\ &= \langle (1, 1, X \otimes 1 - 1 \otimes X), (X, X, -X \otimes X), (0, 0, 1 \otimes X - X \otimes 1), (0, 0, X \otimes X) \rangle. \end{aligned}$$

Mientras que

$$\begin{aligned} d^0(1 \otimes 1) &= (1, 1, X \otimes 1 - 1 \otimes X) \\ d^0(1 \otimes X) &= (X, X, X \otimes X) \\ d^0(X \otimes 1) &= (X, X, -X \otimes X) \\ d^0(X \otimes X) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{im}(d^0) &= \langle (1, 1, X \otimes 1 - 1 \otimes X), (X, X, X \otimes X), (X, X, -X \otimes X) \rangle \\ &= \langle (1, 1, X \otimes 1 - 1 \otimes X), (0, 0, 2X \otimes X), (X, X, -X \otimes X) \rangle \\ &= \langle (1, 1, X \otimes 1 - 1 \otimes X), (0, 0, X \otimes X), (X, X, -X \otimes X) \rangle. \end{aligned}$$

Por lo que

$$H_1^1(C) \cong \langle (0, 0, 1 \otimes X - X \otimes 1) \rangle.$$

Concluyendo que

$$\mathcal{H}_1^{-1}(4_1) \cong \mathbb{Q}.$$

Para calcular $H^2(C)$ notamos que

$$(u \otimes v, w, z, r) \in \ker(d^2) \Leftrightarrow w = z = r.$$

De modo que

$$\begin{aligned} \ker(d^2) &= \langle (1 \otimes 1, 0, 0, 0), (1 \otimes X, 0, 0, 0), (X \otimes 1, 0, 0, 0), \\ &\quad (X \otimes X, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (0, X, X, X) \rangle \\ &= \langle (1 \otimes 1, 0, 0, 0), (1 \otimes X + X \otimes 1, 0, 0, 0), (X \otimes 1, 0, 0, 0), \\ &\quad (X \otimes X, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (0, X, X, X) \rangle. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} d^1(1, 0, 0) &= (1 \otimes X + X \otimes 1, 0, 0, 0) \\ d^1(X, 0, 0) &= (X \otimes X, 0, 0, 0) \\ d^1(0, 1, 0) &= -d^1(1, 0, 0) \\ d^1(0, X, 0) &= -d^1(X, 0, 0) \\ d^1(0, 0, 1 \otimes 1) &= (0, 1, 1, 1) \\ d^1(0, 0, 1 \otimes X) &= (0, X, X, X) \\ d^1(0, 0, X \otimes 1) &= d^1(0, 0, 1 \otimes X) \\ d^1(0, 0, X \otimes X) &= (0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

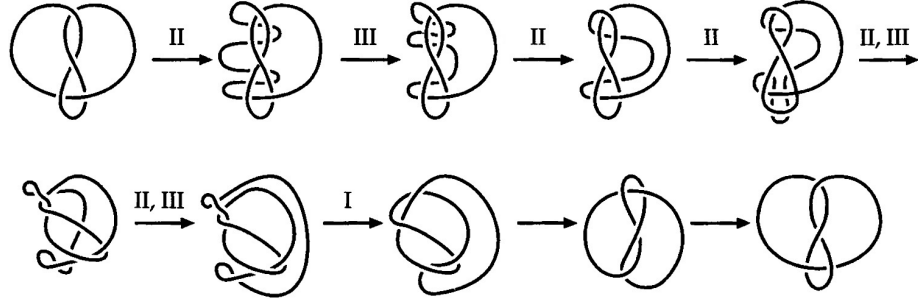


Figura 5.3: El nudo figura-ocho es equivalente a su reflejado. Imagen obtenida de [1].

Lo que implica que

$$im(d^1) = \langle (1 \otimes X + X \otimes 1, 0, 0, 0), (X \otimes X, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (0, X, X, X) \rangle.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} H_3^2(C) &\cong \langle (1 \otimes 1, 0, 0, 0) \rangle \\ H_1^2(C) &\cong \langle (X \otimes 1, 0, 0, 0) \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{H}_1^0(4_1) \cong \mathcal{H}_{-1}^0(4_1) \cong \mathbb{Q}.$$

Finalmente, la Figura 5.3 muestra que 4_1 es equivalente a $4_1^!$, de donde concluimos que el resto de las homología no triviales de 4_1 son

$$\mathcal{H}_5^2(4_1) \cong \mathcal{H}_1^1(4_1) \cong \mathbb{Q}.$$

5.4. Relación con el polinomio de Jones

Definición. Sea L un enlace. El **polinomio de Poincaré** de L es

$$Kh(L) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} r^i q^{dim}(\mathcal{H}^i(L)) = \sum_{i, j \in \mathbb{Z}} r^i q^j dim(\mathcal{H}^i(L)).$$

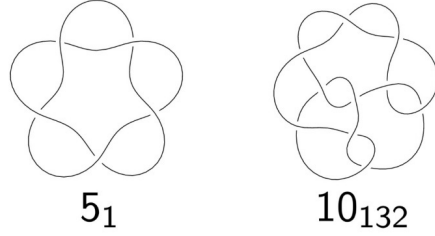
Es claro que el polinomio de Poincaré define un invariante de enlaces $Kh : \{\text{Enlaces orientados}\} \rightarrow \mathbb{Z}[r, r^{-1}, q, q^{-1}]$ tal que para todo enlace L se cumple

$$Kh(L)|_{r=-1} = \widehat{J}(L).$$

Así si L_1 y L_2 son enlaces tales que $Kh(L_1) = Kh(L_2)$ entonces $J(L_1) = J(L_2)$.

Cabe destacar que Bar-Nathan ha desarrollado un paquete para Wolfram Mathematica llamado *KnotTheory*, el cual permite, entre otras cosas, calcular Kh . El paquete se encuentra disponible para su descarga en [4].

Consideremos los nudos 5_1 y 10_{132} de la tabla de nudos de Rolfsen [16].



Usando *KnotTheory*' se puede corroborar que

$$\begin{aligned} Kh(5_1) &= r^{-5}q^{-15} + r^{-4}q^{-11} + r^{-3}q^{-11} + r^{-2}q^{-7} + q^{-5} + q^{-3} \\ Kh(10_{132}) &= r^{-7}q^{-15} + r^{-6}q^{-11} + r^{-5}q^{-11} + r^{-4}q^{-9} + r^{-4}q^{-7} \\ &\quad + r^{-3}q^{-9} + r^{-3}q^{-5} + 2r^{-2}q^{-5} + r^{-1}q^{-1} + q^{-3} + q^{-1}. \end{aligned}$$

Evaluando en $r = -1$ obtenemos

$$\begin{aligned} \widehat{J}(5_1) &= -q^{-15} + q^{-11} - q^{-11} + q^{-7} + q^{-5} + q^{-3} \\ &= -q^{-15} + q^{-7} + q^{-5} + q^{-3} \\ \widehat{J}(10_{132}) &= -q^{-15} + q^{-11} - q^{-11} + q^{-9} + q^{-7} \\ &\quad - q^{-9} - q^{-5} + 2q^{-5} - q^{-1} + q^{-3} + q^{-1} \\ &= -q^{-15} + q^{-7} + q^{-5} + q^{-3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\widehat{J}(5_1) = \widehat{J}(10_{132})$ pero $Kh(5_1) \neq Kh(10_{132})$. Es por esto que se dice que la Homología de Khovanov es un invariante más fuerte que el polinomio de Jones.

Sea D un diagrama de enlace orientado. Sea p un punto en D que no sea cruce. Sea $\widetilde{\mathcal{C}}(D, p)$ el subcomplejo de $\mathcal{C}(D)$ obtenido al restringir a $\langle X \rangle$ el factor tensorial asociado a la componente conexas del estado que contiene al punto p . Este es, en efecto, un subcomplejo dado que $m(X \otimes 1) = m(1 \otimes X) = X$ y $\Delta(X) = X \otimes X$.

Ejemplo: Para el diagrama sin cruces del nudo trivial, tomando cualquier punto p en él, notamos que $\widetilde{\mathcal{C}}_{-1}^0(D, p) = \langle X \rangle$ mientras que $\widetilde{\mathcal{C}}_j^i(D, p) = 0$ para cualquier $(i, j) \neq (0, -1)$.

Por la ecuación (3.2) obtenemos que

$$\chi(H(\widetilde{\mathcal{C}}(D, p))) = \mathbf{qdim}(\langle X \rangle) = q^{-1}.$$

Aplicando un cambio de grado $\cdot\{1\}$ resulta en

$$\chi(H(\widetilde{\mathcal{C}}(D, p)\{1\})) = q^0 = 1.$$

Definición. La homología reducida de Khovanov de D basada en p es $\widetilde{\mathcal{H}}(D, p) = H(\widetilde{\mathcal{C}}(D, p)\{1\})$.

En general dicha homología depende de punto elegido. Sin embargo, si D es un diagrama de un nudo y p, p' son puntos en D que no son cruces, entonces $\tilde{\mathcal{H}}_j^i(D, p) \cong \tilde{\mathcal{H}}_j^i(D, p')$.

Así para cada diagrama de nudo D se define $\tilde{\mathcal{H}}_j^i(D) = \tilde{\mathcal{H}}_j^i(D, p)$ tal que $p \in D$ no es un cruce.

Además si K es un nudo y D, D' son diagramas de K entonces $\tilde{\mathcal{H}}_j^i(D) \cong \tilde{\mathcal{H}}_j^i(D')$. Por lo que la homología reducida de Khovanov es un invariante de nudos, el cual no solo es más sencillo de calcular, comparado con la homología de Khovanov, sino que además se tiene el siguiente

Teorema 5.4.1 (Kronheimer-Mrowka). *Un nudo K es equivalente al nudo trivial si y solo si $\tilde{\mathcal{H}}_j^i(K) \cong \tilde{\mathcal{H}}_j^i(\bigcirc)$.*

Dicho teorema fue presentado en [11].

El problema de saber si existe un nudo K no trivial tal que $J(K) = J(\bigcirc)$ continua abierto.

Capítulo 6

Comentarios finales

Se dice que un invariante f detecta a un enlace L si para todo enlace L' tal que $f(L) = f(L')$ se tiene que L' es equivalente a L .

Como mencionamos al final del capítulo anterior, la homología (reducida) de Khovanov detecta al nudo trivial.

En fechas recientes J.A. Baldwin y S. Sivek han anunciado que además detecta al nudo trébol y a su reflejado [2].

Y. Xie y B. Zhang han encontrado una familia infinita de enlaces que son detectados por la homología de Khovanov, dentro de esta familia se encuentra el enlace de Hopf [19].

Sin embargo, L. Watson ha construido una familia infinita de enlaces no equivalentes con la misma homología de Khovanov [18].

Un problema abierto es mostrar condiciones necesarias y suficientes para que dos enlaces tengan la misma homología de Khovanov.

Las implementaciones computacionales han brindado además un amplio número de conjeturas respecto al comportamiento de $Kh(L)$.

Algunos atajos computacionales han sido hallados para simplificar el cálculo de Kh para algunos enlaces específicos [12].

La construcción del complejo de Khovanov sugiere la existencia de otros complejos cuyas homología sean invariantes y por lo tanto su característica de Euler también lo sea, sin importar si esta coincide con el polinomio de Jones.

Como menciona P. Turner en [17] cualquier complejo asociado a \bigcirc que cumpla estas características debe estar conformado por un único espacio vectorial V en la altura 0. Mientras que el complejo de $\bigcirc\bigcirc$ debe tener como únicos espacios no triviales a $V \otimes V$ en la altura 0 y a V en la altura 1.

Para que la característica de Euler sea invariante se requiere entonces que

$$\dim(V) = \dim(V \otimes V) - \dim(V)$$

Dado que $\dim(V \otimes V) = (\dim(V))^2$, de la ecuación anterior se obtiene

$$(\dim(V))^2 - 2\dim(V) = 0.$$

Para que la construcción no sea trivial es necesario que V no sea el espacio vectorial trivial y por lo tanto $\dim(V) \neq 0$.

Concluyendo que $\dim(V) = 2$.

Dado que $\langle \bigcirc \rangle = 1$ no es posible replicar una construcción análoga a la de Khovanov para obtener un complejo cuya característica de Euler sea el corchete de Kauffman y es por esto que se trabaja a partir del corchete escalado.

Bibliografía

- [1] Adams, A. (2004). *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*. American Mathematical Society.
- [2] Baldwin, J. A. y Sivek, S. (2018). *Khovanov homology detects the trefoils*. eprint arXiv:1801.07634.
- [3] Bar-Natan, D. (2002). *On Khovanov's categorification of the Jones polynomial*. Algebraic & Geometric Topology. Vol. 2, No. 1 337-370.
- [4] Bar-Nathan, D., et al. *The Mathematica Package KnotTheory* Disponible en http://katlas.org/wiki/The_Mathematica_Package_KnotTheory%60
- [5] Crowell, R. H. y Fox, R. H. (1963). *Introduction to Knot Theory*. Springer-Verlag New York.
- [6] Curtis, C. W. (1984). *Linear Algebra. An Introductory Approach*. Springer-Verlag New York.
- [7] Hatcher, A. (2002). *Algebraic Topology*. Cambridge University Press.
- [8] Jones, V. F. R. (1985). *A polynomial invariant for links via Von Neumann Algebras*. Bulletin of American Mathematical Society 12, 103-111.
- [9] Kauffman, L. H. (1987). *State models and Jones Polynomial*. Topology 26. No. 3, 395-407.
- [10] Khovanov, M. (2000). *A categorification of the Jones polynomial*. Duke Math. J. 101, no. 3, 359-426.
- [11] Kronheimer, P. B. y Mrowka, T. (2011). *Khovanov homology is an unknot-detector*. Publications mathématiques de l'IHÉS.
- [12] Kwun, Y. C., Nizami, A. R., Mumir, M. e Iqbal, Z. (2018). *Khovanov Homology of Three-Strand Braid Links*. Simetry. Vol. 10. 720.
- [13] Munkres, J. R. *Elements of Algebraic Topology*. CRC Press (1996).
- [14] Polyak, M. (2010). *Minimal generating sets of Reidemeister moves*. Quantum Topology 1, 399-411.

- [15] Prasolov, V. V. y Sossinsky, A. B. (1997). *Knots, Links and 3-Manifolds. An Introduction to The New Invariants in Low-Dimensional Topology*. Translation of Mathematical Monographs. Vol 154. American Mathematical Society.
- [16] Rolfsen, D. (1976). *Knots and Links*. Publish or Perish, Mathematics Lecture Series 7, Wilmington.
- [17] Turner, P. (2017). *Five lectures on Khovanov's homology*. Journal of Knot Theory and its Ramifications. Vol. 26, No. 03.
- [18] Watson, L. (2007). *Knots with identical Khovanov homology*. Algebraic & Geometric Topology. Vol. 7, No. 3 1389-1407.
- [19] Xie, Y. y Zhang, B. (2019). *Classification of links with Khovanov homology of minimal rank*. eprint arXiv:1909.10032.