UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Un teorema de Gelfand-Naimark no conmutativo

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Niels Hansen Wacher Casas

TUTOR

Dr. Francisco Javier Torres Ayala

Ciudad de México 2020

1. Datos del alumno
   Apellido paterno
   Apellido materno
   Nombre(s)
   Teléfono
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Carrera
   Número de cuenta
2. Datos del tutor
   Grado
   Nombre(s)
   Apellido paterno
   Apellido materno
3. Datos del sinodal 1
   Grado
   Nombre(s)
   Apellido paterno
   Apellido materno
4. Datos del sinodal 2
   Grado
   Nombre(s)
   Apellido paterno
   Apellido materno
5. Datos del sinodal 3
   Grado
   Nombre(s)
   Apellido paterno
   Apellido materno
6. Datos del sinodal 4
   Grado
   Nombre(s)
   Apellido paterno
   Apellido materno
7. Datos del trabajo escrito
   Título
   Número de páginas
   Año

1. Datos del alumno
   Wacher
   Casas
   Niels Hansen
   55 35 14 90 66
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   412006069
2. Datos del tutor
   Dr
   Francisco Javier
   Torres
   Ayala
3. Datos del sinodal 1
   Dr
   Octavio
   Arizmendi
   Echegaray
4. Datos del sinodal 2
   Dra
   Carmen
   Martínez Adame
   Isais
5. Datos del sinodal 3
   Dra
   María de los Ángeles
   Sandoval
   Romero
6. Datos del sinodal 4
   Dr
   Mario Alberto
   Diaz
   Torres
7. Datos del trabajo escrito
   Un teorema de Gelfand-Naimark no conmutativo
   76 p
   2020

Esta tesis fue apoyada por Conacyt a través del proyecto CB 2017-2018/A1-S-9764 Matrices Aleatorias y Probabilidad No Conmutativa.

Agradezco a mi tutor, su dedicación y apoyo constante me permitieron descubrir y disfrutar nuevamente de las matemáticas y sin él este trabajo no hubiera sido posible. Agradezco a mis sinodales por haber leído con detalle este trabajo y por los consejos y comentarios que me brindaron. Finalmente, agradezco a mi familia por el apoyo incondicional que me han dado todos estos años.

Índice general

Introducción

Uno de los resultados fundamentales en la teoría de álgebras C* conmutativas se debe a Gelfand y Naimark [Dou98, Teorema 4.29]. Este resultado indica que toda álgebra C* conmutativa con uno es isomorfa al espacio de funciones continuas sobre un espacio topológico compacto, lo cual permite relacionar a dichas álgebras, que se definen como objetos abstractos por medio de axiomas, con espacios de funciones concretos. En este trabajo se desarrollará un resultado análogo para el caso de álgebras C* no conmutativas con uno finitamente generadas basado en los primeros tres capítulos del artículo "A non-commutative Gelfand-Naimark theorem" de Kruszynski y Woronowicz [KW82].

Comenzará por desarrollar algunos de los fundamentos de la teoría de operadores, álgebras de Banach y álgebras C*, entre ellos la transformada de Gelfand, el Teorema del Mapeo Espectral, el Teorema de Gelfand-Naimark para álgebras conmutativas y concluye con dos pruebas del Teorema de Gelfand-Kolmogorov [Gel39], [Dug87, Cap. XIII.6], una considerando a los espacios de funciones continuas sobre espacios topológicos compactos como anillos y otra utilizando la estructura de álgebra C*. Este último teorema extiende el resultado de Gelfand y Naimark y su importancia radica en que permite relacionar funciones continuas entre espacios topológicos compactos con homomorfismos entre sus respectivas álgebras de funciones continuas, y de manera análoga vincula homomorfismos de álgebras C* con funciones continuas entre los espacios topológicos asociados a dichas álgebras. En otras palabras afirma que las categorías de espacios topológicos Hausdorff y compactos y de álgebras C* conmutativas con unidad son equivalentes.

En el segundo capítulo se tratará con representaciones de álgebras y funcionales lineales positivas para poder construir la representación de Gelfand-Naimark-Segal y con ello la representación universal de álgebras C*. Ésta permite representar de manera fiel a álgebras C*abstractas como álgebras de operadores acotados sobre algún espacio de Hilbert. Se dará la definición y algunas de las propiedades de la integral directa de espacios de Hilbert como análogo de la suma directa.

Una vez establecidas las herramientas anteriores se podrán desarrollar los conceptos de dominio compacto y función de operadores continua como análogos no conmutativos de los espacios topológicos compactos y funciones continuas; se probará que toda álgebra C* no conmutativa con uno y finitamente generada es isomorfa a un álgebra de funciones de operadores continuas sobre un dominio compacto y que todo homomorfismo entre álgebras de este tipo está relacionado con un morfismo entre los respectivos dominios compactos. Se compararán algunas de las propiedades de espacios topológicos compactos y funciones continuas con propiedades de dominios compactos y funciones de operadorse continuas, en particular se verá que la imagen de un espacio topológico compacto bajo una función continua es compacto, pero la imagen de un dominio compacto bajo una función de operadores continuas no necesariamente lo es.

Para concluir se presentará el estudio del producto libre de dos álgebras C* con unidad y del álgebra C* universal generada por un conjunto finito de símbolos como casos en los que puede resultar útil o intuitivo la aplicación de las técnicas anteriormente desarrolladas.

Capítulo 1

El Teorema de Gelfand-Kolmogorov

1.1. Álgebras de Banach

Definición 1.1. Un álgebra de Banach $\mathfrak{B}$ es un álgebra sobre $\mathbb{C}$ con identidad 1 y con una norma que satisface:

1. $(\mathfrak{B}, \| \ \|)$ es un espacio métrico completo,
2. $\|1\| = 1$,
3. $\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|$ para $a, b \in \mathfrak{B}$.

Dado un espacio topológico (X, τ) Hausdorff y compacto se denota por $C(X)$ al espacio de funciones continuas de X en $\mathbb{C}$. En este espacio es posible definir la norma del supremo

$$\|f\|_\infty = sup\{|f(x)| : x \in X\},$$

de modo que $(X, \| \ \|_\infty)$ es un espacio métrico completo. Si se definen la suma y producto de funciones, así como el producto por elementos del campo de forma puntual, entonces $C(X)$ es el primer ejemplo que tenemos de un álgebra de Banach.

Proposición 1.2. *Si a es un elemento del álgebra de Banach $\mathfrak{B}$ y $\|1-a\| < 1$, entonces a es invertible y*

$$\|a^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|1-a\|}.$$

Demostración. Sea $a \in \mathfrak{B}$ tal que $\|1-a\| < 1$. Definimos $\eta = \|1-a\|$, nótese que si N, M son números naturales tales que $M \leq N$

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=0}^{N} (1-a)^n - \sum_{n=0}^{M} (1-a)^n \right\| = \left\| \sum_{n=M+1}^{N} (1-a)^n \right\| &\leq \sum_{n=M+1}^{N} \|(1-a)^n\|, \\
&\leq \sum_{n=M+1}^{N} \|1-a\|^n = \sum_{n=M+1}^{N} \eta^n, \\
&= \frac{\eta^{M+1}}{1-\eta}.
\end{aligned}$$

Obsérvese que ésto implica que la sucesión de sumas parciales correspondiente a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (1-a)^n$ es de Cauchy, como el espacio es completo la serie converge.

Sea $b = \sum_{n=0}^{\infty}(1-a)^n$, afirmamos que $b = a^{-1}$. En efecto:

$$\begin{aligned} ab =& [1-(1-a)]b = [1-(1-a)]\sum_{n=0}^{\infty}(1-a)^n, \\ =& \lim_{N\to\infty}[1-(1-a)]\sum_{n=0}^{N}(1-a)^n, \\ =& \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}(1-a)^n - \sum_{n=0}^{N}(1-a)^{n+1}\right), \\ =& \lim_{N\to\infty} 1-(1-a)^{N+1}, \\ =& 1. \end{aligned}$$

Finalmente, veamos que se da la desigualdad propuesta:

$$\|b\| = \left\|\sum_{n=0}^{\infty}(1-a)^n\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\|(1-a)^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\|1-a\|^n = \frac{1}{1-\|1-a\|}.$$

□

Corolario 1.2.1. *Sea $G \subseteq \mathfrak{B}$ el conjunto de elementos invertibles en el álgebra de Banach. Entonces G es un conjunto abierto en $\mathfrak{B}$.*

Demostración. Sea a un elemento de G y b en $\mathfrak{B}$ tal que $\|a-b\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$. Entonces

$$\left\|1-a^{-1}b\right\| = \left\|a^{-1}(a-b)\right\| \leq \left\|a^{-1}\right\| \|a-b\| < 1.$$

Por 1.2 $a^{-1}b$ es invertible. Basta notar que $b = a(a^{-1}b)$, por lo que $b \in G$. Además $b^{-1} = (a^{-1}b)^{-1}a^{-1}$. □

Corolario 1.2.2. *La función $a \to a^{-1}$ definida de G en G es continua.*

Demostración. Sea $a \in G$. Si b es tal que $\|a-b\| < \frac{1}{2}\left\|a^{-1}\right\|$ entonces $\left\|1-a^{-1}b\right\| < \frac{1}{2}$. Por 1.2 $a^{-1}b$ y b son elementos invertibles. Nótese que

$$\begin{aligned} \left\|b^{-1}\right\| \leq& \left\|b^{-1}a\right\| \left\|a^{-1}\right\|, \\ =& \left\|(a^{-1}b)^{-1}\right\| \left\|a^{-1}\right\|, \\ \leq& \frac{1}{1-\|1-a^{-1}b\|}\left\|a^{-1}\right\|, \\ <& \frac{1}{1-1/2}\left\|a^{-1}\right\|, \\ =& 2\left\|a^{-1}\right\|. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \left\|a^{-1}-b^{-1}\right\| =& \left\|a^{-1}(a-b)b^{-1}\right\|, \\ \leq& \left\|a^{-1}\right\| \|a-b\| \left\|b^{-1}\right\|, \\ <& 2\left\|a^{-1}\right\|^2 \|a-b\|. \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$ y $\delta < \min\left\{\frac{\varepsilon}{2\|a^{-1}\|^2}, \frac{1}{2}\left\|a^{-1}\right\|\right\}$. Si $\|a-b\| < \delta$, entonces $\left\|a^{-1}-b^{-1}\right\| < \varepsilon$. Concluimos que el tomar inversos es una función continua, y que G es un grupo topológico. □

Observación 1.3. *Sea $\mathfrak{B}$ un álgebra de Banach y a un elemento en ella. Observe que la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{1}{n!}a^n\right\|$ es absolutamente convergente y por lo tanto está bien definida. Sea N un número natural, entonces:*

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\left\|\frac{1}{n!}a^n\right\| &\leq \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}\left\|a^n\right\|,\\ &\leq \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}\|a\|^n,\\ &\leq \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}\|a\|^n,\\ &=e^{\|a\|}\end{aligned}$$

Definición 1.4. Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Banach, entonces la función exponencial en $\mathfrak{B}$, denotada por exp, está definida como

$$\exp a = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}a^n.$$

Lema 1.5. *Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Banach y a y b son elementos del álgebra que conmutan, entonces* $\exp(a+b)=\exp(a)\exp(b)$.

Demostración. Sean a,b elementos del álgebra. Entonces:

$$\begin{aligned}\exp(a+b) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(a+b)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k},\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a^kb^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}a^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b^n,\\ &= \exp a\cdot\exp b.\end{aligned}$$

□

Definición 1.6. Sea $\mathfrak{B}$ un álgebra de Banach. Se dice que que una funcional lineal ϕ en $\mathfrak{B}$ es multiplicativa si cumple las siguientes propiedades:

1. $\phi(ab)=\phi(a)\phi(b)$ para cada a,b en $\mathfrak{B}$ y
2. $\phi(1)=1$

Se denotará por $M_{\mathfrak{B}}$ al conjunto de funcionales multiplicativas en $\mathfrak{B}$ y se usará M cuando no quede duda sobre el álgebra que se utiliza.

Proposición 1.7. *Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Banach y ϕ es un elemento de M, entonces* $\|\phi\|=1$.

Demostración. Sea $\phi\in M$, definimos $K=\ker\phi=\{a\in\mathfrak{B}:\phi(a)=0\}$. Notemos que si $a\in\mathfrak{B}$, entonces $\phi(a-\phi(a)\cdot 1)=0$, por ello cada elemento a del álgebra se puede escribir de la forma $\lambda+\tilde{a}$, con $\lambda\in\mathbb{C}$ y $\tilde{a}\in K$, donde $\lambda=\phi(a)$ y $\tilde{a}=a-\phi(a)\cdot 1$. Entonces:

$$\begin{aligned}\|\phi\| &=\sup_{a\neq 0}\frac{|\phi(a)|}{\|a\|} = \sup_{\tilde{a}\in K,\lambda\neq 0}\frac{|\phi(\lambda+\tilde{a})|}{\|\lambda+\tilde{a}\|},\\ &= \sup_{\tilde{a}\in K,\lambda\neq 0}\frac{\phi(\lambda)}{\|\lambda+\tilde{a}\|} = \sup_{c\in K}\frac{1}{\|1+c\|}.\end{aligned}$$

Como $0 \in K$, entonces $\|\phi\| \leq 1$, sin embargo nótese también que si $\|1+c\| < 1$ por la Proposición 1.2 c es un elemento invertible del álgebra, lo cual contradice que $c \in K$. Por lo tanto $\|\phi\| = 1$. □

Dada un álgebra de Banach $\mathfrak{B}$ denotaremos por $\mathfrak{B}^*$ al espacio dual a $\mathfrak{B}$, es decir al espacio vectorial de todas las funcionales lineales de $\mathfrak{B}$ en $\mathbb{C}$. Usaremos la notación $\mathfrak{B}_1^*$ para hablar de la bola unitaria en $\mathfrak{B}^*$.

Proposición 1.8. *Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Banach, entonces M es un subconjunto compacto de $\mathfrak{B}_1^*$ en la topología débil-*.*

Demostración. El Teorema de Alaoglu afirma que $\mathfrak{B}_1^*$ es compacto en la topología débil-*, por lo que basta comprobar que $M \subseteq \mathfrak{B}^*$ es un subconjunto cerrado. Sea $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una red de funcionales multiplicativas en M que converge a alguna funcional ϕ en $\mathfrak{B}_1^*$. Será suficiente mostrar que ϕ es multiplicativa y que $\phi(1) = 1$.

$$\phi(1) = \lim_{\alpha\in I} \phi_\alpha(1) = \lim_{\alpha\in I} 1 = 1.$$

Por otro lado, si a, b son elementos del álgebra, entonces

$$\begin{aligned}\phi(ab) &= \lim_{\alpha\in I} \phi_\alpha(ab) = \lim_{\alpha\in I} \phi_\alpha(a)\phi_\alpha(b),\\ &= \lim_{\alpha\in I} \phi_\alpha(a) \lim_{\alpha\in I} \phi_\alpha(b) = \phi(a)\phi(b).\end{aligned}$$

Por lo tanto M es compacto en la topología débil-*. □

Definición 1.9. Sea $\mathfrak{B}$ un álgebra de Banach tal que $M \neq \emptyset$, entonces la transformada de Gelfand es la función $\Gamma : \mathfrak{B} \to C(M)$ dada por $\Gamma(a) = \hat{a}|M$, es decir, $\Gamma(a)(\phi) = \phi(a)$ para cada ϕ en M.

Teorema 1.10 (Propiedades elementales de la transformada de Gelfand)**.** *Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Banach y Γ es la transformada de Gelfand en $\mathfrak{B}$, entonces:*

1. *Γ es un homomorfismo de álgebras y*

2. *$\|\Gamma a\|_\infty \leq \|a\|$ para cada a en $\mathfrak{B}$.*

Demostración. Sean $a, b \in \mathfrak{B}$, $k \in \mathbb{C}$, y $\phi \in M$, entonces:

$$\begin{aligned}\Gamma(ka+b)(\phi) &= (\widehat{ka+b})(\phi) = \phi(ka+b) = k\phi(a) + \phi(b) = k\Gamma(a) + \Gamma(b),\\ \Gamma(ab)(\phi) &= \widehat{ab}(\phi) = \phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = \Gamma(a)\Gamma(b).\end{aligned}$$

Con ésto queda demostrado que Γ es un homomorfismo de álgebras.

Tomemos ahora $a \in \mathfrak{B}$ y observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\|\Gamma a\|_\infty &= \|\hat{a}|M\|_\infty = \sup\Big\{ |\hat{a}(\phi)| : \phi \in M \Big\},\\ &= \sup\{|\phi(a)| : \phi \in M\},\\ &\leq \sup\{|\phi(a)| : \phi \in \mathfrak{B}_1^*\},\\ &= \|\hat{a}\|_\infty = \|a\|.\end{aligned}$$

□

Definición 1.11. Dada un álgebra de Banach $\mathfrak{B}$ y a un elemento en ella se define el espectro de a como el conjunto

$$\sigma_{\mathfrak{B}}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda \text{ no es invertible en } \mathfrak{B}\},$$

el resolvente de a como el conjunto

$$\rho_{\mathfrak{B}}(a) = \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathfrak{B}}(a),$$

y al radio espectral de a como

$$r_{\mathfrak{B}}(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\mathfrak{B}}(a)\}.$$

Se preferirá la notación $\sigma(a), \rho(a)$ y $r(a)$ cuando no exista duda sobre el álgebra subyacente.

Teorema 1.12. *Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Banach y a es un elemento de $\mathfrak{B}$, entonces $\sigma(a)$ es no vacío.*

Demostración. Definimos $F : \rho(a) \to \mathfrak{B}$ como $F(\lambda) = (a-\lambda)^{-1}$. Veremos que F es analítica en $\rho(a)$ y acotada en infinito. Sea $\lambda_0 \in \rho(a)$:

$$\begin{aligned}
F'(\lambda_0) &= \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{(a-\lambda)^{-1} - (a-\lambda_0)^{-1}}{\lambda - \lambda_0}, \\
&= \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{(a-\lambda)^{-1}[(a-\lambda_0) - (a-\lambda)](a-\lambda_0)^{-1}}{\lambda - \lambda_0}, \\
&= \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{(a-\lambda)^{-1}[\lambda - \lambda_0](a-\lambda_0)^{-1}}{\lambda - \lambda_0}, \\
&= \lim_{\lambda \to \lambda_0} (a-\lambda_0)^{-1}(a-\lambda)^{-1}, \\
&= (a-\lambda_0)^{-2},
\end{aligned}$$

la última igualdad se obtiene de la continuidad de tomar inversos. Si $\phi \in \mathfrak{B}^*$, entonces la función $\phi(F)$ es una función compleja y analítica en $\rho(a)$. Además, si λ es un número complejo y $|\lambda| > \|a\|$ la Proposición 1.2 asegura que $1 - \frac{a}{\lambda}$ es invertible en $\mathfrak{B}$ y que

$$\left\|(1 - \frac{a}{\lambda})^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \left\|1 - (1 - \frac{a}{\lambda})\right\|}.$$

Si tomamos el límite cuando λ tiende hacia infinito podemos observar lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \to \infty} \|F(\lambda)\| = \lim_{\lambda \to \infty} \left\|(a-\lambda)^{-1}\right\| &= \lim_{\lambda \to \infty} \left\|\frac{1}{\lambda}(\frac{a}{\lambda} - 1)^{-1}\right\|, \\
&\leq \limsup_{\lambda \to \infty} \left\|\frac{1}{\lambda}\right\| \left\|(\frac{a}{\lambda} - 1)^{-1}\right\|, \\
&\leq \limsup_{|\lambda| \to \infty} \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \left\|\frac{a}{\lambda}\right\|}, \\
&= 0,
\end{aligned}$$

lo cual verifica que la función es acotada en infinito.

Supongamos ahora que $\sigma(a) = \emptyset$. Así $\phi(F)$ es una función entera y acotada, por el Teorema de Liouville debe ser constante. Dado que el límite anterior converge a 0, entonces además $\phi(F) \equiv 0$. Sea λ un número complejo, entonces para cada $\phi \in \mathfrak{B}^*$ se tiene que $\phi(F(\lambda)) = 0$, de ésto se sigue que $F(\lambda) = 0$, lo cual es una contradicción ya que $F(\lambda) = (a-\lambda)^{-1}$ y $a - \lambda$ es invertible. Concluimos que $\sigma(a)$ es no vacío. □

Teorema 1.13 (Gelfand-Mazur)**.** *Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Banach y es un álgebra de división, entonces existe un único isomorfismo isométrico de $\mathfrak{B}$ en $\mathbb{C}$.*

Demostración. Sea a un elemento en $\mathfrak{B}$, el Teorema 1.12 garantiza que $\sigma(a) \neq \emptyset$. Si tomamos $\lambda_a \in \sigma(a)$ se observa que $a - \lambda_a \cdot 1$ no es invertible. Dado que el álgebra es de división ésto garantiza que $a - \lambda_a \cdot 1 = 0$, y por lo tanto $a = \lambda_a \cdot 1$. Por otro lado, si λ es un número complejo tal que $\lambda \cdot 1 - \lambda_a \cdot 1 \neq 0$, entonces $a - \lambda \cdot 1 = \lambda_a \cdot 1 - \lambda \cdot 1 \neq 0$. Así $a - \lambda \cdot 1$ es invertible y podemos asegurar que $\sigma(a) = \{\lambda_a\}$.

Definimos $\psi : \mathfrak{B} \to \mathbb{C}$ como $\psi(a) = \lambda_a$. Veamos que éste es un isomorfismo isométrico. Sean $a, b \in \mathfrak{B}$, entonces $|\phi(a) - \phi(b)| = |\lambda_a - \lambda_b| = \|\lambda_a \cdot 1 - \lambda_b \cdot 1\| = \|a - b\|$, lo cual muestra que es isometría. Además, para cada $a, b \in \mathfrak{B}$ y cada $k \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\phi(k \cdot a) =& \lambda_{k \cdot a} = (k \cdot a) = k(a) = k \cdot \lambda_a = k \cdot \phi(a), \\
\phi(a + b) =& \lambda_{a+b} = a + b = \lambda_a + \lambda_b = \phi(a) + \phi(b), \\
\phi(ab) =& \lambda_{ab} = ab = \lambda_a \lambda_b = \phi(a)\phi(b).
\end{aligned}$$

Concluimos que ϕ es un isomorfismo isométrico.

Sea $\phi' : \mathfrak{B} \to \mathbb{C}$ algún isomorfismo isométrico, si $a \in \mathfrak{B}$ entonces $\phi'(a) \in \sigma(a)$. Por lo tanto $\phi'(a) = \phi(a)$ para cada $a \in \mathfrak{B}$ y $\phi' = \phi$. □

Lema 1.14 (Álgebras cociente)**.** *Sea $\mathfrak{B}$ un álgebra de Banach y $\mathfrak{M}$ un ideal bilateral cerrado en $\mathfrak{B}$. Entonces la norma definida por*

$$\|[a]\| = \inf_{b \in \mathfrak{M}} \|a + b\| = \inf_{c \in [a]} \|c\|$$

dota de estructura de álgebra de Banach a $\mathfrak{B}/\mathfrak{M}$.

Demostración. Dado que $\mathfrak{M}$ es un ideal bilateral, $\mathfrak{B}/\mathfrak{M}$ es un álgebra. Además, como $\mathfrak{M}$ es cerrado, la norma definida anteriormente induce una métrica completa en el cociente. Basta probar que $\|[1]\| = 1$ y que $\|[a][b]\| \leq \|[a]\| \, \|[b]\|$ para cada a, b en $\mathfrak{B}$.

Por un lado $0 \in \mathfrak{M}$, por lo que $1 \in [1]$ y $\|[1]\| \leq 1$. Supongamos que existe un elemento b en $\mathfrak{B}$ tal que $\|1 - b\| < 1$, entonces por 1.2 $1 - b$ es un elemento invertible en $\mathfrak{B}$. Por lo tanto $b \notin \mathfrak{M}$ y $\|[1]\| = 1$

Sean $a, b \in \mathfrak{B}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|[a][b]\| = \|[ab]\| &= \inf_{c \in \mathfrak{M}} \|ab - c\|, \\
&\leq \inf_{c_1, c_2 \in \mathfrak{M}} \|(a - c_1)(b - c_2)\| \leq \inf_{c_1, c_2 \in \mathfrak{M}} \|a - c_1\| \, \|b - c_2\|, \\
&\leq \inf_{c_1 \in \mathfrak{M}} \|a - c_1\| \inf_{c_2 \in \mathfrak{M}} \|b - c_2\|, \\
&= \|[a]\| \, \|[b]\|.
\end{aligned}$$

□

Lema 1.15. *Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Banach conmutativa, entonces M está en correspondencia uno a uno con el conjunto de ideales bilaterales maximales en $\mathfrak{B}$. Debido a esta correspondencia, a M también se le denomina como el espacio de ideales maximales.*

Demostración. Sea $\phi \in M$ y denotamos por $\mathfrak{K} = \ker\phi$. $\mathfrak{K}$ es un ideal bilateral de $\mathfrak{B}$. Si $a \notin \mathfrak{K}$, entonces $\phi(a) \neq 0$, por lo que $1 = \left(1 - \frac{a}{\phi(a)}\right) + \frac{a}{\phi(a)}$. Además $\left(1 - \frac{a}{\phi(a)}\right) \in \mathfrak{K}$, ya que $\phi\left(1 - \frac{a}{\phi(a)}\right) = \phi(1) - 1 = 0$. Si se considera el ideal generado por $\mathfrak{K}$ y a, dicho ideal necesariamente coincide con $\mathfrak{B}$ y concluimos que $\mathfrak{K}$ es maximal.

Por otro lado, si $\mathfrak{M}$ es un ideal maximal propio de $\mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{M}$ no tiene unidades. Por 1.2 para cada $a \in \mathfrak{M}$ observamos que $\|1 - a\| \geq 1$. En particular $1 \notin \overline{\mathfrak{M}}$, además $\overline{\mathfrak{M}}$ es un ideal bilateral y $\mathfrak{M} \subseteq \overline{\mathfrak{M}}$. Por la maximalidad de $\mathfrak{M}$ respecto a la contención concluimos que $\mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{M}}$ y por lo tanto es cerrado. Puesto que $\mathfrak{B}$ es un anillo, el cociente es un campo. Ahora, como $\mathfrak{M}$ es cerrado ${}^{\mathfrak{B}}\!/_{\mathfrak{M}}$ es un álgebra de Banach. 1.13 garantiza que existe un único isomorfismo isométrico $\psi : {}^{\mathfrak{B}}\!/_{\mathfrak{M}} \to \mathbb{C}$

Sea $\pi : \mathfrak{B} \to {}^{\mathfrak{B}}\!/_{\mathfrak{M}}$ la proyección natural, entonces $\psi\pi : \mathfrak{B} \to \mathbb{C}$ es una funcional multiplicativa distinta de cero. Afirmamos que $\ker\psi\pi = \mathfrak{M}$. Supongamos que $a \in \mathfrak{M}$, entonces $\pi(a) = [0]$ y como ψ es isomorfismo $\psi([0]) = 0$, por lo tanto $a \in \ker\psi\phi$ y $\mathfrak{M} \subseteq \ker\psi\pi$. Recordemos que $\ker\psi\pi$ es un ideal bilateral de $\mathfrak{B}$, por la maximalidad de $\mathfrak{M}$ necesariamente $\ker\psi\pi = \mathfrak{M}$.

Finalmente se probará que la correspondencia es unívoca. Sean $\phi_1, \phi_2 \in M$ tales que $\ker\phi_1 = \mathfrak{M} = \ker\phi_2$, entonces para cada a en $\mathfrak{B}$:

$$\begin{aligned}\phi_1(a) - \phi_2(a) =& \Big((a - \phi_1(a)) - (a - \phi_2(a)\Big) \in \mathfrak{M},\\ \phi_1(a) - \phi_2(a) =& \phi_1\Big(\phi_1(a) - \phi_2(a)\Big) = 0,\end{aligned}$$

por lo tanto $\phi_1 = \phi_2$.

□

Proposición 1.16. *Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Banach conmutativa y a está en $\mathfrak{B}$, entonces a es invertible en $\mathfrak{B}$ si y sólo si $\Gamma(a)$ es invertible en $C(M)$*

Demostración. Por 1.10 Γ es un homomorfismo de álgebras, entonces si a es invertible en $\mathfrak{B}$ se observa que $\Gamma(a^{-1})\Gamma(a) = \Gamma(a^{-1}a) = \Gamma(1) = 1$. Dado que el álgebra es conmutativa basta probar que existe un inverso derecho o un inverso izquierdo. Concluimos que Γa es invertible en $C(M)$ y $\Gamma(a^{-1}) = (\Gamma a)^{-1}$.

Supongamos que a es un elemento no invertible en $\mathfrak{B}$. Se define $\mathfrak{M}_0 = \{ba : b \in \mathfrak{B}\}$. $\mathfrak{M}_0$ es un ideal, y dado que el álgebra es conmutativa el ideal es bilateral. El Lema de Zorn garantiza que existe un ideal maximal bilateral $\mathfrak{M}$ tal que $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}$. Por 1.15 existe $\phi \in M$ tal que $\ker\phi = \mathfrak{M}$. Basta notar que $a \in \mathfrak{M}$, entonces $\Gamma a(\phi) = \phi(a) = 0$, por lo tanto Γa no es invertible en $C(M)$. □

Los resultados anteriores se pueden recopilar por medio del siguiente teorema.

Teorema 1.17 (Gelfand)**.** *Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Banach conmutativa, M el espacio de ideales maximales y $\Gamma : \mathfrak{B} \to C(M)$ es la transformada de Gelfand, entonces:*

1. *M es distinto del vacío,*
2. *Γ es un homomorfismo de álgebras,*
3. *$\|\Gamma a\|_\infty \leq \|a\|$ para cada a en $\mathfrak{B}$ y*
4. *a es invertible en $\mathfrak{B}$ si y sólo si $\Gamma(a)$ es invertible en $C(M)$.*

Corolario 1.17.1. *Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Banach conmutativa y a es un elemento del álgebra, entonces $\sigma(a) = \mathrm{ran}\Gamma a$ y $r(a) = \|\Gamma a\|_\infty$*

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda \notin \sigma(a)$, así $a-\lambda$ es invertible. Por 1.17 $\Gamma(a-\lambda)$ es invertible en $C(M)$, es decir, para cada $\phi \in C(M)$

$$\Gamma(a-\lambda)(\phi) = \phi(a-\lambda) = \phi(a) - \lambda \neq 0,$$

entonces para cada $\phi \in C(M)$ se tiene que $\Gamma a(\phi) = \phi(a) \neq \lambda$ y por lo tanto $\lambda \notin \mathrm{ran}\Gamma a$ y $\mathrm{ran}\Gamma a \subseteq \sigma(a)$. Nótese que si ahora partimos del supuesto $\lambda \notin \mathrm{ran}\Gamma a$, entonces los argumentos anteriores son válidos al seguirlos en el orden opuesto. Por lo tanto $\sigma(a) = \mathrm{ran}\Gamma a$.

Para demostrar la segunda afirmación basta observar lo siguiente:

$$\begin{aligned} r(a) &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}, \\ &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{ran}\Gamma a\}, \\ &= \|\Gamma a\|_\infty. \end{aligned}$$

□

Corolario 1.17.2 (Teorema del Mapeo Espectral)**.** *Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Banach, a es un elemento de $\mathfrak{B}$ y ϕ es una función entera en $\mathbb{C}$, entonces*

$$\sigma(\phi(a)) = \phi(\sigma(a)) = \{\phi(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Demostración. Sea $\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ la representación de ϕ por medio de su serie de Taylor, como ϕ es entera la serie converge en todo $\mathbb{C}$. Entonces $\phi(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a^n$ converge a algún elemento de $\mathfrak{B}$. Sea $\mathfrak{B}_o$ la subálgebra cerrada generada por

$$\{1, a, (a-\lambda)^{-1}, (\phi(a)-\mu)^{-1} : \lambda \in \rho_{\mathfrak{B}}(a), \mu \in \rho_{\mathfrak{B}}(\phi(a))\}.$$

Se observa que $\mathfrak{B}_0$ es conmutativa y afirmamos que se cumplen las igualdades:

1. $\sigma_{\mathfrak{B}_o}(a) = \sigma_{\mathfrak{B}}(a)$,
2. $\sigma_{\mathfrak{B}_o}(\phi(a)) = \sigma_{\mathfrak{B}}(\phi(a))$.

Primero notamos que $\mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{B}$ y por lo tanto $\sigma_{\mathfrak{B}}(a) \subseteq \sigma_{\mathfrak{B}_o}(a)$. Sea $\lambda \in \sigma_{\mathfrak{B}_o}(a)$, entonces $a-\lambda$ no es invertible en $\mathfrak{B}_o$, luego $\lambda \notin \rho_{\mathfrak{B}}(a)$ y por lo tanto $\lambda \in \sigma_{\mathfrak{B}}(a)$, es decir, $\sigma_{\mathfrak{B}_o}(a) = \sigma_{\mathfrak{B}}(a)$. Por medio de un argumento análogo se prueba que $\sigma_{\mathfrak{B}_o}(\phi(a)) = \sigma_{\mathfrak{B}}(\phi(a))$. Este resultado nos permite utilizar la notación $\sigma(a), \sigma(\phi(a))$ y $r(a), r(\phi(a))$ sin crear confusión respecto al álgebra subyacente.

Consideremos la transformada de Gelfand y el Corolario 1.17.1. Por continuidad de Γ se tiene que $\Gamma(\phi(a)) = \phi(\Gamma a)$, entonces:

$$\begin{aligned} \sigma(\phi(a)) &= \mathrm{ran}\Gamma(\phi(a)) = \mathrm{ran}\phi(\Gamma a), \\ &= \phi(\mathrm{ran}\Gamma a) = \phi(\sigma(a)) \end{aligned}$$

□

Teorema 1.18 (Fórmula del radio espectral)**.** *Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Banach y a es un elemento del álgebra, entonces $r_{\mathfrak{B}}(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}$*

Demostración. Sea $\mathfrak{B}_0$ la subálgebra cerrada de $\mathfrak{B}$ generada por $\{1, a, (a^n - \lambda)^{-1} : \lambda \in \rho_{\mathfrak{B}}(a^n), n \in \mathbb{Z}^+\}$, entonces $\mathfrak{B}_0$ es un álgebra de Banach conmutativa. Afirmamos que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ $\sigma_{\mathfrak{B}_o}(a^n) = \sigma_{\mathfrak{B}}(a^n)$. Dado que $\mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{B}$ entonces $\sigma_{\mathfrak{B}}(a^n) \subseteq \sigma_{\mathfrak{B}_o}(a^n)$. Sea $\lambda \in \sigma_{\mathfrak{B}_o}(a^n)$, entonces $a^n - \lambda$ no es invertible en $\mathfrak{B}_0$, y por la manera en que se definió $\mathfrak{B}_0$ observamos que $\lambda \neq \rho_{\mathfrak{B}}(a^n)$. Por lo tanto $\lambda \in \sigma_{\mathfrak{B}}(a^n)$ y $\sigma_{\mathfrak{B}_o}(a^n) = \sigma_{\mathfrak{B}}(a^n)$.

Definimos $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como $\varphi(z) = z^n$. Dado que φ es una función entera en $\mathbb{C}$, por el Corolario1.17.2 se tiene que $\sigma_{\mathfrak{B}_o}(a^n) = \sigma_{\mathfrak{B}_o}(a)^n$, y por lo tanto $\sigma_{\mathfrak{B}}(a^n) = \sigma_{\mathfrak{B}}(a)^n$. Por definición del radio espectral, el Teorema 1.17 y el Corolario 1.17.1 tenemos que $r_{\mathfrak{B}}(a)^n = r_{\mathfrak{B}}(a^n) = \|\Gamma a^n\|_\infty \leq \|a^n\|$. Entonces $r_{\mathfrak{B}}(a) \leq \|a^n\|^{1/n}$ y $r_{\mathfrak{B}}(a) \leq \liminf_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}$.

Definimos la siguiente función, llamada la Transformada de Cauchy, por medio de una serie de potencias:

$$G(\lambda) = -\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^n}.$$

Si $\|a\| < |\lambda|$ entonces la serie converge absolutamente y por lo tanto converge y es analítica. En tal caso $G(\lambda)$ converge a $(a-\lambda)^{-1}$. Si $\phi \in \mathfrak{B}^*$ entonces $-\sum_{n=0}^{\infty} \phi(\lambda^{1-n} a^n)$ es analítica si $|\lambda| > r_{\mathfrak{B}}(a)$, ya que $-\sum_{n=0}^{\infty} \phi(\lambda^{1-n} a^n) = \phi((a-\lambda)^{-1})$. Lo anterior implica que para cada ϕ en $\mathfrak{B}^*$, $\lim_{n\to\infty} \phi(\lambda^{1-n} a^n) = 0$. Como $|\phi(a)|$ es acotado, entonces $\sup\{\|\phi\|\} < \infty$. Por lo tanto existe $M_\lambda > 0$ tal que $\left\|\lambda^{1-n} a^n\right\| \leq M_\lambda$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} &= \inf_{n\to\infty} \sup_{n\leq m} \{\|a^n\|^{1/n}\}, \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} M_\lambda^{1/n} |\lambda|^{1/n}, \\
&= |\lambda|.
\end{aligned}$$

Así $r_{\mathfrak{B}}(a) \leq \liminf_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} \leq r_{\mathfrak{B}}(a)$, con lo que se verifica que el límite existe y que $r_{\mathfrak{B}}(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}$. □

1.2. Álgebras C*

Definición 1.19. Si $\mathfrak{A}$ es un álgebra de Banach, una involución en $\mathfrak{A}$ es una función $a \to a^*$ que satisface:

1. $a^{**} = a$ para cada a en $\mathfrak{A}$,
2. $(\alpha b + \beta a)^* = \overline{\alpha} b^* + \overline{\beta} a^*$ para α, β en $\mathbb{C}$ y a, b en $\mathfrak{A}$, y
3. $(ba)^* = a^* b^*$ para a, b en $\mathfrak{A}$.

Adicionalmente, si $\|a^* a\| = \|a\|^2$ para todo a e n $\mathfrak{A}$, entonces diremos que $\mathfrak{A}$ es un álgebra C*.

Nótese que al considerar el álgebra de Banach de funciones continuas $C(X)$ sobre un espacio topológico (X, τ) Hausdorff y compacto $f^*(x) = \overline{f(x)}$ define una involución, por lo que $C(X)$ es un álgebra C*.

Definición 1.20. Sea $\mathfrak{A}$ un álgebra C* y a un elemento en $\mathfrak{A}$, entonces:

1. a es normal si $a^* a = a a^*$,

2. a es autoadjunto o hermitiano si $a = a^*$ y

3. a es unitario si $a^*a = 1 = aa^*$.

Teorema 1.21. *Un elemento autoadjunto de un álgebra* C^* *tiene espectro real.*

Demostración. Observe que, si a es un elemento del álgebra C^* entonces $\|a\| = \|a^*\|$, es decir, la involución es una isometría. Para probar ésto consideraremos dos casos, $a = 0$ y $a \neq 0$.

- Si $a = 0$, entonces para cada número complejo α se tiene la igualdad $a = \alpha a$. Entonces $a^* = \overline{\alpha} a^*$. Por lo tanto $a^* = 0$ y $\|a\| = \|a^*\|$.
- Si $a \neq 0$, entonces $\|a\|^2 = \|a^*a\| \leq \|a^*\| \, \|a\|$. Como $a \neq 0$ entonces $\|a\| \neq 0$ y se puede cancelar de ambos lados de la equación para obtener que $\|a\| \leq \|a^*\|$. Si utilizamos el hecho de que $a^{**} = a$ y aplicamos el procedimiento anterior partiendo de $\|a^*\|^2$, entonces obtendremos que $\|a^*\| \leq \|a\|$ y podemos concluir que $\|a\| = \|a^*\|$

Sea b un elemento autoadjunto de $\mathfrak{A}$ y sea $c = \exp(\imath b)$, entonces por definición de la exponencial $c = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\imath b)^n$. Así:

$$\begin{aligned}
c^* &= (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\imath b)^n)^*, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}((\imath b)^n)^*, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}((\imath b)^*)^n, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\bar{\imath} b^*)^n, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-\imath b)^n, \\
&= \exp(-\imath b)
\end{aligned}$$

Observe que $\imath b$ y $-\imath b$ conmutan, entonces por 1.5

$$\exp(\imath b)\exp(-\imath b) = \exp(\imath b - \imath b) = \exp(0) = 1.$$

Por lo tanto $c^*c = 1 = cc^*$ y c es un operador unitario. Además, como $1 = \|c^*c\| = \|c\|^2$, entonces $\|c\| = 1 = \|c^*\|$. La función exponencial compleja es entera en $\mathbb{C}$, entonces por el Teorema del Mapeo Espectral 1.17.2

$$\sigma(c) = \sigma(\exp(\imath b)) = \exp(\imath \sigma(b)).$$

A continuación veremos que $\sigma(c) \subseteq \mathbb{S}^1$. Primero, por 1.18

$$r(c) = \lim_{n\to\infty} \|c^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty} \sup(\|c\|^n)^{\frac{1}{n}} = 1,$$

así $\sigma(c) \subseteq \mathbb{D}$. Como c es invertible 0 no es un elemento del espectro de c. Sea λ un número complejo distinto de cero tal que $|\lambda| < 1$, entonces $\left|\frac{1}{\lambda}\right| > 1$ y

$$(c - \lambda 1) = -\lambda c(c^{-1} - \frac{1}{\lambda}1).$$

Dado que $\|c^{-1}\| = 1$, se tiene que $r(c^{-1}) \leq 1$ y que $(c^{-1} - \frac{1}{\lambda}1)$ es invertible. Como consecuencia de ello $(c - \lambda 1)$ también lo es.

Finalmente, por 1.12 $\sigma(b)$ es no vacío. Sea $\lambda \in \sigma(b)$, entonces existen números reales x, y tales que $\lambda = x + \imath y$ y $\exp(\imath\lambda) \in \mathbb{S}^1$. Ésto significa que:

$$\left|e^{\imath\lambda}\right| = \left|e^{-y}e^{\imath x}\right| = \left|e^{-y}\right| = 1,$$

por lo que $y = 0$ y concluimos que λ es real. □

Lema 1.22. *Sea X un espacio topológico Hausdorff y compacto. Entonces los ideales maximales de $C(X)$ son de la forma $\mathfrak{I}_x = \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$ para $x \in X$.*

Demostración. Veamos primero que $\mathfrak{I}_x$ es un ideal. Sean $f, g \in \mathfrak{I}_x$ y $h \in C(X)$, entonces:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) = f(x) + g(x) =& 0, \\ -f(x) =& 0, \\ hf(x) = h(x)f(x) =& 0, \end{aligned}$$

y por lo tanto $\mathfrak{I}_x$ es ideal.

Supongamos que $\mathfrak{J}$ es un ideal tal que $\mathfrak{I}_x \subsetneq \mathfrak{J}$ y tomemos f en $\mathfrak{J}$ tal que $f(x) \neq 0$. Definimos $g = \frac{1}{f(x)}f$. Se sigue que $g \in \mathfrak{J}$ y que $(1-g)(x) = 1 - \frac{f(x)}{f(x)} = 0$. Por lo tanto $1 - g \in \mathfrak{J}$ y $1 = (1-g) + g \in \mathfrak{J}$. Se sigue que $\mathfrak{J} = C(X)$ y concluimos que $\mathfrak{I}_x$ es un ideal maximal.

A continuación se verá que todos los ideales maximales son de esta forma. Sea $\mathfrak{J}$ un ideal en $C(X)$ y suponga que no está contenido en ninguno de los ideales de la forma $\mathfrak{I}_x$. Esto significa que para cada x en X existe un elemento f_x de $\mathfrak{J}$ tal que $f(x) \neq 0$. Como cada f_x es continua, entonces existe una vecindad U_x de x tal que $0 \notin f_x(U_x)$. El conjunto $\mathfrak{U} = \{U_x : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X, y como X es compacto se puede extraer una subcubierta finita, es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, ..., x_n \in X$ tales que $\{U_{x_i} : i \in \{1, ..., n\}\}$ es una subcubierta finita de X. Finalmente definimos $g = \sum_{i=1}^{n} \bar{f}_{x_i} f_{x_i}$ y notamos que para cada x en X $g(x) > 0$. Por lo tanto g tiene inverso multiplicativo, dado por $g^{-1}(x) = \frac{1}{g(x)}$. Como $\mathfrak{J}$ es ideal entonces $g^{-1}g = 1 \in \mathfrak{J}$. Se concluye que $\mathfrak{J} = C(X)$. □

Teorema 1.23 (Gelfand-Naimark)**.** *Si $\mathfrak{A}$ es un álgebra* C**conmutativa y M el espacio de ideales maximales de $\mathfrak{A}$, entonces la transformada de Gelfand es un isomorfismo isométrico* de $\mathfrak{A}$ en $C(M)$.*

Demostración. Sea a un elemento de $\mathfrak{A}$. Definimos $b_0 = \frac{1}{2}(a + a^*)$ y $b_1 = \frac{1}{2\imath}(a - a^*)$. Notamos que ambos son elementos autoadjuntos y que

$$\begin{aligned} a =& b_0 + \imath b_1, \\ a^* =& b_0^* - \imath b_1^*, \\ =& b_0 - \imath b_1. \end{aligned}$$

Como b_0 y b_1 son elementos autoadjuntos el Teorema 1.21 indica que los espectros de ambos deben ser reales. Por 1.17.1 $\sigma(f) = \operatorname{ran}\Gamma f$, así Γb_0 y Γb_1 son funciones con valores reales, por lo que

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma a} =& \overline{\Gamma(b_0 + \imath b_1)} = \overline{\Gamma b_0} + \overline{\imath \Gamma b_1}, \\ =& \Gamma b_0 - \imath \Gamma b_1 = \Gamma(b_0 - \imath b_1), \\ =& \Gamma a^*, \end{aligned}$$

entonces Γ es un homeomorfismo*. Para mostrar que es una isometría se utilizará la definición de involución en un álgebra C*, 1.17.1 y la fórmula del radio espectral 1.18. Veamos primero que $\|a^*a\| = \left\|(a^*a)^{2^k}\right\|^{1/2^k}$ para todo entero positivo k. Por inducción sobre k:

- $k = 1$ Definimos $c_0 = a^*a$, nótese que c_0 es autoadjunto, entonces $c_0^*c_0 = (a^*aa^*a) = (a^*a)^2$. Por otro lado $\left\|c_0^*c_0\right\| = \|c_0\|^2$, así $\left\|(a^*a)^2\right\| = \|a^*a\|^2$ y en consecuencia $\left\|(a^*a)^2\right\|^{1/2} = \|a^*a\|$

- Supongamos que la afirmación es cierta para algún entero positivo k y veamos que también es cierta para $k+1$. Definimos $c_1 = (a^*a)^{2^k}$, entonces

$$\begin{aligned}
\left\|(a^*a)^{2^{k+1}}\right\|^{1/2^{k+1}} &= \left\|(a^*a)^{2\cdot 2^k}\right\|^{1/2^{k+1}}, \\
&=(\left\|(c_1^*c_1)^2\right\|^{1/2})^{1/2^k}, \\
&= \|c_1^*c_1\|^{1/2^k}, \\
&= \left\|(a^*a)^{2^k}\right\|^{1/2^k}, \\
&= \|a^*a\|.
\end{aligned}$$

Con este resultado podemos afirmar que:

$$\begin{aligned}
\|a\|^2 = \|a^*a\| = &\left\|(a^*a)^{2^k}\right\|^{1/2^k}, \\
&= \lim_{k\to\infty} \left\|(a^*a)^{2^k}\right\|^{1/2^k}, \\
&= r(a^*a), \\
&= \|\Gamma(a^*a)\|_\infty, \\
&= \|\Gamma a^*\Gamma a\|_\infty, \\
&= \left\|\overline{\Gamma a}\Gamma a\right\|_\infty, \\
&= \left\||\Gamma a|^2\right\|_\infty, \\
&= \|\Gamma a\|_\infty^2,
\end{aligned}$$

por lo tanto Γ es un encaje isométrico, y en particular inyectivo.

Ahora, como es isometría, ranΓ es cerrado en $C(M)$, y como Γ es homomorfismo, entonces $1_{c(M)} = \Gamma 1_{\mathfrak{A}}$. Finalmente ran$\Gamma$ separa puntos de M, ya que si ϕ y ψ son funcionales lineales multiplicativas distintas, entonces existe a en $\mathfrak{A}_1$ tal que

$$\Gamma a(\phi) = \phi(a) \neq \psi(a) = \Gamma a(\psi).$$

Con ésto se concluye que ranΓ es una subálgebra cerrada, que no se anula y que separa puntos, y por el Teorema de Stone-Weierstrass ran$\Gamma = C(M)$. Por lo tanto Γ es un isomofismo isométrico* de $\mathfrak{A}$ en $C(M)$ □

Lema 1.24. *Sean X y Y espacios topológicos Hausdorff y compactos. Si $h : X \to Y$ es una función continua, entonces existe un homomorfismo de álgebras* C* $T : C(Y) \to C(X)$ *dado por* $Tf = f \circ h$.

Demostración. Sean $f,g \in C(Y)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Dado que h y f son funciones continuas la composición es una función continua, además h tiene por dominio a X y f tiene codominio en $\mathbb{C}$, por lo que T está bien definida. Observe que

$$T(\alpha f+g)(x)=[(\alpha f+g)\circ h](x)=(\alpha f+g)(h(x))=\alpha f(h(x))+g(h(x))=(\alpha Tf+Tg)(x),$$
$$T(fg)(x)=[(fg)\circ h](x)=(fg)(h(x))=f(h(x))g(h(x))=(TfTg)(x),$$
$$Tf^*(x)=[f^*\circ h](x)=f^*(h(x))=\overline{f(h(x))}=(Tf)^*(x).$$

De esta manera T es un homomorfismo de álgebras C*. □

Lema 1.25. *Considérese al álgebra* C* $C(X)$ *y a* M*, el espacio de ideales maximales. Entonces toda funcional lineal multiplicativa* ϕ *en* M *es una evaluación, es decir, para cada* ϕ *en* M *existe un elemento* x *en* X *tal que* $\phi(f)=f(x)$ *para cada* f *en* $C(X)$

Demostración. Sean ϕ una funcional lineal multiplicativa, entonces por los Lemas 1.15 y 1.22 $\ker\phi=\mathfrak{I}_{x_0}$ para algún $x_0 \in X$. Se afirma que $\phi(f)=f(x_{x_0})$ para cada $f \in C(X)$. Sea $f \in C(X)$, luego $f(x_0)=\alpha$ para algún número complejo α, entonces $(f-\alpha I)\in\mathfrak{I}_{x_0}$, es decir, $\phi(f-\alpha I)=0$, luego $\phi(f)=\alpha=f(x_0)$. □

A partir de ahora se denotará por ϕ_x a la funcional que evalúa a las funciones en x, es decir $\phi_x(f)=f(x)$

Teorema 1.26 (Gelfand-Kolmogorov)**.** *Sean* X *y* Y *espacios topológicos Hausdorff y compactos. Los espacios* X *y* Y *son homeomorfos si y sólo si* $C(X)$ *y* $C(Y)$ *son isomorfas como álgebras* C*.

Demostración. Supongamos que $h:X\to Y$ es un homeomorfismo. Por el Lema 1.24 $T: C(Y)\to C(X)$ dado por $Tf=f\circ h$ es un homomorfismo de álgebras C*. De forma análoga se define el homomorfismo $T':C(X)\to C(Y)$ como $T'f'=f'\circ h^{-1}$. Obsérvese que:

$$T'Tf=T'(f\circ h)=(f\circ h)\circ h^{-1}=f\circ(h\circ h^{-1})=Id_{C(Y)},$$
$$TT'f'=T(f'\circ h^{-1})=(f'\circ h^{-1})\circ h=f'\circ(h^{-1}\circ h)=Id_{C(X)},$$

por lo tanto $T'=T^{-1}$ y T es un isomorfismo. Nótese también que:

$$\begin{aligned}\|Tf\|_\infty &= sup\{|Tf(x)|:x\in X\},\\ &= sup\{|f(h(x))|:x\in X\},\\ &= sup\{|f(y)|:y\in Y\},\\ &= \|f\|_\infty .\end{aligned}$$

Con ésto se concluye que T es un isomorfismo isométrico* entre $C(Y)$ y $C(X)$.

Suponga ahora que $T:C(Y)\to C(X)$ es un isomorfismo isométrico*. Definimos $\widetilde{T}:M_{C(X)}\to M_{C(Y)}$ por $\widetilde{T}\phi=\phi\circ T$. Ya que T es isomorfismo de álgebras, en particular es una función lineal multiplicativa, por lo que $\widetilde{T}$ está bien definida. Afirmamos que $\widetilde{T}$ es homeomorfismo. Primero vamos a probar que $\widetilde{T}$ es una biyección. Como $C(X)$ y $C(Y)$ son álgebras C* conmutativas y T es isomorfismo, entonces preserva ideales maximales bilaterales de $C(X)$ y $C(Y)$, como el Lema 1.22 caracteriza a estos ideales, dado y en Y existe un único x en X tal que $T\ \mathfrak{I}_y=\mathfrak{I}_x$, además el Lema 1.15 garantiza la correspondencia uno a uno entre ideales de $C(Y)$ y funcionales multiplicativas, y 1.25 indica que toda funcional multiplicativa es una evaluación. De esta manera tenemos que si ϕ es la funcional ϕ_x, es decir $\phi_x(f) = f(x)$ y $\ker\phi = \mathfrak{I}_x$, entonces

$$\begin{aligned}\widetilde{T}\phi =& \widetilde{T}\phi_x,\\ =&\phi_x \circ T,\\ =&\psi_y,\end{aligned}$$

donde ψ_y es la funcional lineal multiplicativa en $M_{C(Y)}$ tal que $\ker\psi_y = \mathfrak{J}_y$ y $T\ \mathfrak{J}_y = \mathfrak{I}_x$, de aquí concluimos que $\widetilde{T}$ es biyectiva.

Ahora vamos a probar que $\widetilde{T}$ es continua. Sabemos que tanto $M_{C(X)}$ como $M_{C(Y)}$ son compactos y Hausdorff, y tienen la topología debil inducida por $C_{M_{C(X)}}$ y $C_{M_{C(Y)}}$. Veamos que $\widehat{f}\circ\widetilde{T}$ es continua para cada $\widehat{f}$ en $C_{M_{C(Y)}}$. En efecto, si $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una red en $M_{C(X)}$ que converge a ϕ y escribimos $\phi_\alpha \circ T = \psi_\alpha$, entonces

$$\begin{aligned}(\widehat{f}\circ\widetilde{T})\phi_\alpha =& \widehat{f}(\phi_\alpha\circ T),\\ =&\widehat{f}(\psi_\alpha),\\ =&\psi_\alpha(f).\end{aligned}$$

Por 1.23 T es un isomorfismo isométrico*, entonces $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una red en $M_{C(Y)}$ que converge a $\psi = \phi\circ T$, por lo tanto

$$\lim_{\alpha\in\Lambda}(\widehat{f}\circ\widetilde{T})\phi_\alpha = \lim_{\alpha\in\Lambda}\psi_\alpha(f) = \psi(f) = (\widehat{f}\circ\widetilde{T})\phi,$$

y $\widehat{f}\circ\widetilde{T}$ es continua. Como $M_{C(X)}$ está equipado con la topología débil, entonces ésta es condición suficiente para probar que $\widetilde{T}$ es continua.

Finalmente, como es biyección continua entre un espacio compacto y uno Hausdorff, $\widetilde{T}$ es homeomorfismo.

Definimos $\mu_X : X \to M_{C(X)}$ como $\mu_X(x) = \phi_x$, nuevamente por los Lemas 1.15 y 1.22 μ_X es una función biyectiva entre espacios Hausdorff y compactos. Considérese a $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, una red en X convergente a algún punto x, entonces se tiene que para cada f en $C(X)$

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\in\Lambda}\mu_X(x_\alpha)(f) =& \lim_{\alpha\in\Lambda}\phi_{x_\alpha}(f),\\ =&\lim_{\alpha\in\Lambda}f(x_\alpha),\\ =&f(x).\end{aligned}$$

Por lo tanto μ_X es continua y en consecuencia es un homeomorfismo. Si se define $\mu_Y : Y \to M_{C(Y)}$ de manera similar, entonces también es un homeomorfismo y la función $\lambda : X \to Y$ definida por medio de la composición $\lambda = \mu_Y^{-1}\circ\widetilde{T}\circ\mu_X$ es el homeomorfismo requerido entre X y Y.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\mu_X"] & Y \\ M_{C(X)} \arrow[r, "\widetilde{T}"] & M_{C(Y)} \arrow[u, "\mu_Y^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

$\square$

Lema 1.27. *Sean X y Y espacios topológicos Haussdorf y compactos. Si $T : C(Y) \to C(X)$ es un isomorfismo de anillos, entonces X y Y son homeomorfos.*

Demostración. Como se notó anteriormente, los ideales maximales bilaterales de $C(X)$ y $C(Y)$ son de la forma $\mathfrak{I}_x$ y $\mathfrak{I}_y$, los subconjuntos de funciones continuas que se anulan en x y en y respectivamente. Si T es un isomorfismo, entonces induce una correspondencia biunívoca entre los ideales maximales de cada uno de los anillos de funciones continuas. Definimos $h : X \to Y$ de tal manera que $\mathfrak{I}_x = T\mathfrak{I}_{h(x)}$, es decir para cada $x \in X$, $h(x)$ es el único $y \in Y$ tal que $T\mathfrak{I}_y = \mathfrak{I}_x$, por lo que h es biyectiva. Observemos que si $f \in C(Y)$, entonces para cada $x \in X$ se tiene que $Tf(x) = f(h(x))$, es decir $Tf = f \circ h$. Como X y Y tienen la topología débil inducida por $C(X)$ y $C(Y)$ respectivamente, entonces la función $h : X \to Y$ es continua si y sólo si para cualquier función $f \in C(Y)$ la composición $f \circ h$ es continua, lo cual es inmediato de que T sea un isomorfismo entre los anillos de funciones continuas.

Se tiene que h es una función continua y biyectiva entre un espacio compacto y un Haus-dorff, por lo que es homeomorfismo y es testigo de que X y Y sean homeomorfos. □

Capítulo 2

Construcción GNS

Definición 2.1. Un operador V en un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ es una isometría parcial si $\|Vf\| = \|f\|$ para cada f ortogonal al kernel de V, si además el kernel de V es $\{0\}$ entonces V es una isometría. El espacio inicial de una isometría es el subespacio cerrado ortogonal al kernel.

Definición 2.2. Sea S un subconjunto de un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$. Denotaremos por $[S]$ al subespacio cerrado generado por los elementos de S.

2.1. Representaciones y Funcionales lineales Positivas

Definición 2.3. Sea $\mathfrak{A}$ un álgebra de Banach involutiva. Una representación de $\mathfrak{A}$ es un homomorfismo* π de $\mathfrak{A}$ en el álgebra C* de operadores acotados en un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$, $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$. Decimos que $\mathscr{H}$ es el espacio de representación de π. Para especificar el espacio de representación junto con una representación escribiremos $\{\pi, \mathscr{H}\}$ o $\pi_{\mathscr{H}}$. Diremos que dos representaciones $\{\pi_1, \mathscr{H}_1\}$ y $\{\pi_2, \mathscr{H}_2\}$ son unitariamente equivalentes si existe una isometría sobreyectiva U de $\mathscr{H}_1$ en $\mathscr{H}_2$ tal que $U\pi_1(x)U^* = \pi_2(x)$ para cada x en $\mathfrak{A}$. Ésto lo denotaremos por $\{\pi_1, \mathscr{H}_1\} \cong \{\pi_2, \mathscr{H}_2\}$ o $\pi_1 \cong \pi_2$. Finalmente, si $\pi(x) \neq 0$ para cada elemento distinto de cero en $\mathfrak{A}$, entonces diremos que π es fiel o efectiva.

Proposición 2.4. *Sea $\{\pi, \mathscr{H}\}$ una representación de un álgebra de Banach involutiva $\mathfrak{A}$. Los siguientes son equivalentes:*

1. *El subespacio cerrado $[\pi(\mathfrak{A})\mathscr{H}]$ generado por $\pi(a)\xi$, $a \in \mathfrak{A}, \xi \in \mathscr{H}$ coincide con el espacio $\mathscr{H}$.*

2. *Para cada elemento ξ distinto de 0 en el espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ existe un elemento a del álgebra tal que $\pi(a)\xi \neq 0$.*

Demostración. Partamos del primer enunciado y supongamos que $\pi(a)\xi = 0$ para todo $a \in \mathfrak{A}$. Para cada $\eta \in \mathscr{H}$ tenemos:

$$\langle \pi(a)\eta, \xi \rangle = \langle \eta, \pi(a)^*\xi \rangle = \langle \eta, \pi(a^*)\xi \rangle = 0.$$

Por lo tanto ξ es ortogonal a $[\pi(\mathfrak{A})\mathscr{H}]$, y dada la hipótesis ésto significa que $\xi = 0$.

Supongamos ahora la segunda afirmación. Sea ξ un elemento de $\mathscr{H}$ ortogonal a $[\pi(\mathfrak{A})\mathscr{H}]$. Para cada a en el álgebra tenemos que:

$$0 = \langle \xi, \pi(a^*a)\xi \rangle = \langle \xi, \pi(a^*)\pi(a)\xi \rangle = \langle \pi(a)\xi, \pi(a)\xi \rangle = \|\pi(a)\xi\|^2,$$

necesariamente $\pi(a)\xi = 0$ y por hipótesis $\xi = 0$, es decir $[\pi(\mathfrak{A})\mathscr{H}]$ coincide con $\mathscr{H}$. $\square$

Definición 2.5. Se dice que una representación $\{\pi, \mathscr{H}\}$ de $\mathfrak{A}$ es propia o no degenerada si satisface alguno de los enunciados de la Proposición 2.4. Si no es el caso, diremos que el subespacio cerrado $[\pi(\mathfrak{A})\mathscr{H}]$ es el espacio esencial de π y lo denotaremos por $\mathscr{H}(\pi)$.

A partir de ahora asumiremos que las representaciones son propias, excepto cuando se indique lo contrario de manera explícita.

Definición 2.6. Diremos que una funcional lineal ω en un álgebra de Banach involutiva $\mathfrak{A}$ es positiva si $\omega(x^*x) \geq 0$ para cada x en $\mathfrak{A}$. Si ésta tiene norma igual a 1 diremos que es un estado. En el caso en que $\omega(x^*x) \neq 0$ para todo $x \in \mathfrak{A}$ distinto de cero, se dirá que ω es fiel o efectiva.

Generalmente, si ω es una funcional lineal definida en un álgebra de Banach involutiva $\mathfrak{A}$, la funcional adjunta ω^* de ω está definida por

$$\omega^*(x) = \overline{\omega(x^*)}, \quad x \in \mathfrak{A}.$$

Si $\omega = \omega^*$ diremos que ω es autoadjunta o hermitiana. Si tenemos un par de funcionales lineales hermitianas ω, γ escribiremos $\omega \geq \gamma$ si $\omega - \gamma$ es positiva.

Sea $\{\pi, \mathscr{H}\}$ una representación de $\mathfrak{A}$. Dado un par de elementos de $\mathscr{H}$, ξ, η, definimos la funcional $\omega(\pi; \xi, \eta)$ en $\mathfrak{A}$ como

$$\omega(\pi; \xi, \eta)(x) = \langle \pi(x)\xi, \eta \rangle, \quad x \in \mathfrak{A}.$$

Nótese que

$$\begin{aligned}
\omega(\pi; \xi, \eta)^*(x) =& \overline{\omega(\pi; \xi, \eta)(x^*)}, \\
=& \overline{\langle \pi(x^*)\xi, \eta \rangle}, \\
=& \overline{\langle \xi, \pi(x)\eta \rangle}, \\
=& \langle \pi(x)\eta, \xi \rangle, \\
=& \omega(\pi; \eta, \xi)(x).
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
\omega(\pi; \xi, \xi)(x^*x) =& \langle \pi(x^*x)\xi, \xi \rangle, \\
=& \langle \pi(x)^*\pi(x)\xi, \xi \rangle, \\
=& \langle \pi(x)\xi, \pi(x)\xi \rangle, \\
\geq& 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\omega(\pi; \xi, \eta)^* = \omega(\pi; \eta, \xi)$ y $\omega(\pi; \xi, \xi) \geq 0$. Usaremos $\omega(\pi; \xi)$ para abreviar a la funcional lineal positiva $\omega(\pi; \xi, \xi)$.

Proposición 2.7. *Si ω es una funcional lineal positiva en un álgebra de Banach involutiva $\mathfrak{A}$, entonces para cada $x, y \in \mathfrak{A}$*

$$\omega(y^*x) = \overline{\omega(x^*y)}$$

$$|\omega(y^*x)|^2 \leq \omega(x^*x)\omega(y^*y)$$

Demostración. Para probar la primera igualdad considérese la identidad de polarización:

$$4y^*x = \sum_{n=0}^{3} \imath^n (x+\imath^n y)^*(x+\imath^n y),$$

así, se observa que

$$\begin{aligned}
4\overline{\omega(x^*y)} &= \overline{\sum_{n=0}^{3} \imath^n \omega((y+\imath^n x)^*(y+\imath^n x))},\\
&= \sum_{n=0}^{3} (-\imath)^n \omega((y+\imath^n x)^*(y+\imath^n x)),\\
&= \sum_{n=0}^{3} (-\imath)^n \omega((-\imath)^n((-\imath)^n y+x)^* \imath^n((-\imath)^n y+x)),\\
&= \sum_{n=0}^{3} (-\imath)^n \omega(((-\imath)^n y+x)^*((-\imath)^n y+x)).
\end{aligned}$$

Para concluir basta desarrollar la suma anterior y observar que al desarrollar $4\omega(y^*x)$ por medio de su identidad de polarización el primer y penúltimo término son iguales, y que el segundo y el cuarto se intercambian:

$$\begin{aligned}
4\overline{\omega(x^*y)} =&\omega((x+y)^*(x+y)) - \imath\omega((x-\imath y)^*(x-\imath y)))\\
&-\omega((x-y)^*(x-y)) + \imath\omega((x+\imath y)^*(x+\imath y)),\\
4\omega(y^*x) =&\omega((x+y)^*(x+y)) + \imath\omega((x+\imath y)^*(x+\imath y)),\\
&-\imath\omega((x-\imath y)^*(x-\imath y)) - \omega((x-y)^*(x-y)).
\end{aligned}$$

Para probar la segunda desigualdad podemos ignorar el caso en que $\omega(y^*x) = 0$, pues la proposición es trivialmente verdadera. Notemos que $\omega((\lambda x - \mu y)^*(\lambda x - \mu y)) \geq 0$, pues la funcional es positiva. Además, al desarrollar esta expresión obtenemos

$$\begin{aligned}
\omega((\lambda x - \mu y)^*(\lambda x - \mu y)) =&\omega(\overline{\lambda}\lambda x^*x - \overline{\lambda}\mu x^*y - \lambda\overline{\mu}y^*x + \overline{\mu}\mu y^*y),\\
=&|\lambda|^2\,\omega(x^*x) - 2\Re\lambda\overline{\mu}\omega(y^*x) + |\mu|^2\,\omega(y^*y).
\end{aligned}$$

Sustituimos $\mu = e^{\imath\theta}\mu'$ para algún valor de $\theta \in [0,2\pi)$ de tal manera que $\lambda\overline{\mu}\omega(y^*x) = \left|\lambda\overline{\mu'}\omega(y^*x)\right|$, así

$$0 \leq |\lambda|^2\,\omega(x^*x) - 2|\lambda|\left|\overline{\mu'}\omega(y^*x)\right| + \left|\mu'\right|^2\omega(y^*y).$$

Finalmente tomamos $\mu' = \frac{|\omega(y^*x)|}{\omega(y^*x)}$ y $\lambda \in \mathbb{R}^+$, y notamos que ésta es la ecuación de una parábola en el plano que abre hacia arriba y que intersecta al eje λ a lo más en un punto, por lo tanto su discriminante es menor o igual que 0:

$$\begin{aligned}
\left(-2\left|\frac{|\omega(y^*x)|}{\omega(y^*x)}\omega(y^*x)\right|\right)^2 - 4\left|\mu'\right|^2\omega(x^*x)\omega(y^*y) =&4\,|\omega(y^*x)|^2 - 4\omega(x^*x)\omega(y^*y),\\
\leq&0,
\end{aligned}$$

así concluimos que $|\omega(y^*x)| \leq \omega(x^*x)\omega(y^*y)$. □

Lema 2.8. *Si ω es una funcional lineal positiva en $\mathfrak{A}$, entonces el conjunto $N_\omega = \{x \in \mathfrak{A} : \omega(x^*x) = 0\}$ es un ideal izquierdo.*

Demostración. Tomemos $x, y \in N_\omega$, entonces por 2.7 tenemos

$$\begin{aligned} 0 \leq \omega((x+y)^*(x+y)) =& \omega(x^*x + x^*y + y^*x + y^*y), \\ =& \omega(x^*x) + \omega(x^*y) + \omega(y^*x) + \omega(y^*y), \\ =& 2\Re\omega(x^*y), \\ \leq& 2\left|\omega(x^*y)\right|, \\ \leq& 2\omega(x^*x)^{1/2}\omega(y^*y)^{1/2} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $x + y \in N_\omega$.

Si a es un elemento del álgebra $\mathfrak{A}$

$$\begin{aligned} \omega((ax)^*ax) =& \omega(x^*(a^*ax)), \\ \leq& \omega(x^*x)\omega((a^*ax)^*(a^*ax)), \\ =& 0, \end{aligned}$$

de manera que $ax \in \mathfrak{A}$.

Finalmente, si λ es un número complejo se tiene que

$$\omega((\lambda x)^*(\lambda x)) = \omega(\overline{\lambda}\lambda x^*x) = |\lambda|^2\,\omega(x^*x) = 0,$$

por lo que N_ω es un ideal izquierdo. □

Definición 2.9. Llamamos kernel izquierdo de ω al ideal izquierdo N_ω. Podemos definir de manera análoga el kernel derecho de ω.

Observación 2.10. *Sea $(X, \langle\_,\_\rangle)$ un espacio vectorial con producto interior. Se puede considerar a S, el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy sobre X, y definir la relación de equivalencia sobre éste de manera que $(x_n) \sim (y_x)$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\|_{\langle\_,\_\rangle} = 0$. Finalmente se define el producto interior en $S/\sim$ como*

$$\langle[(x_n)], [(y_n)]\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle.$$

El espacio $(S/\sim, \langle\_,\_\rangle)$ construido de ésta manera es un espacio de Hilbert en el cual $(X, \langle\_,\_\rangle)$ se encaja de forma densa por medio de una isometría.

Observación 2.11. *Supongamos que ω es una funcional lineal positiva definida en un álgebra de Banach involutiva $\mathfrak{A}$. Para cada elemento x de $\mathfrak{A}$ denotemos por $\eta_\omega(x)$ a la clase lateral de x en el espacio cociente ${}^{\mathfrak{A}}/_{N_\omega}$, $x + N_\omega$. A dicho espacio se le puede equipar con un producto interior definido por*

$$\langle\eta_\omega(x), \eta_\omega(y)\rangle = \omega(y^*x), \quad x, y \in \mathfrak{A}.$$

Sea $\mathscr{H}_\omega$ el espacio de Hilbert que resulta de completar ${}^{\mathfrak{A}}/_{N_\omega}$ por medio del proceso descrito en 2.10. Se verá que el operador definido en ${}^{\mathfrak{A}}/_{N_\omega}$ dado por $\eta_\omega(x) \mapsto \eta_\omega(ax)$ para cada a en $\mathfrak{A}$ se puede extender a un operador acotado $\pi_\omega(a)$ en el espacio de Hilbert $\mathscr{H}_\omega$, y que la función $\pi_\omega : a \in \mathfrak{A} \to \pi_\omega(a) \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}_\omega)$ es una representación de $\mathfrak{A}$.

Lema 2.12. *Sea $\mathfrak{A}$ un álgebra de Banach con unidad. Si a es un elemento de $\mathfrak{A}$ tal que $\mathrm{r}(1-a) < 1$, entonces existe un elemento b del álgebra tal que $b^2 = a$. Más aún, si $\mathfrak{A}$ es un álgebra de Banach involutiva y si a es hermitiano, entonces b se puede escoger de manera que también sea autoadjunto.*

Demostración. Sea $\lambda \in \sigma(a)$, entonces $a-\lambda$ no es invertible, por lo tanto

$$\begin{aligned} a-\lambda =&(a-1)-(\lambda-1),\\ =&-[(1-a)-(1-\lambda)]. \end{aligned}$$

Así $1-\lambda \in \sigma(1-a)$ y por hipótesis $r(1-a)<1$, es decir, $|\lambda-1|<1$. Por lo tanto $\sigma(a) \subseteq D = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda-1|<1\}$. Consideremos la función $\sqrt{\lambda}$ definida en en los reales positivos. Dicha función se puede escribir por medio de su serie de Taylor alrededor de 1 como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(\lambda-1)^n$. Nótese que las derivadas de orden n están dadas por $f^{(n)}(1) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(1-2k)}{2^n}$ para $n \geq 1$ y que el radio de convergencia de la serie es de 1. Sea $f(\lambda)$ la continuación analítica de la función $\sqrt{\lambda}$ del intervalo abierto $(0,1)$ al disco D y definimos $f(a)=b$. De [Tak02, Prop 2.7] se tiene que $a=b^2$. Dado que $f(\lambda)$ se escribe com o una serie de Taylor alrededor de 1 con coeficientes reales y converge en el disco D, $b=f(a)$ es autoadjunto si a lo es. □

Lema 2.13. *Si $\mathfrak{A}$ es un álgebra de Banach involutiva con unidad, entonces toda funcional lineal positiva ω en $\mathfrak{A}$ es continua y $\|\omega\| = \omega(1)$.*

Demostración. Sea x_0 un elemento autoadjunto de $\mathfrak{A}$ tal que $\|x_0\|<1$, entonces $1-x_0$ también es autoadjunto. Ya que $r(1-(1-x_0)) = r(x_0)$, de la fórmula del radio espectral se tiene que $r(x_0)<1$, y por 2.12 existe $y \in \mathfrak{A}$ autoadjunto tal que $1-x_0 = y^*y$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \omega(1)-\omega(x_0) =&\omega(1-x_0) = \omega(y^*y) \geq 0,\\ \omega(1) \geq&\omega(x_0). \end{aligned}$$

Sea x en $\mathfrak{A}$ tal que $\|x\|<1$, entonces $\|x^*x\| \leq \|x^*\|\,\|x\| = \|x\|^2 < 1$. Como ω es positiva, x^*x es autoadjunto y cumple las mismas propiedades que x_0

$$|\omega(x)|^2 = |\omega(1x)|^2 \leq \omega(1)\omega(x^*x) \leq \omega(1)^2. \tag{2.1}$$

Nótese que para cada $x \in \mathfrak{A}$, si $x \neq 0$ entonces $\left\|\frac{1}{2\|x\|}x\right\| < 1$, por la ecuación 2.1 $\left|\omega\left(\frac{x}{2\|x\|}\right)\right| \leq \omega(1)$, por lo que se puede afirmar que

$$|\omega(x)| \leq 2\omega(1)\,\|x\|.$$

Concluimos que ω es continua.

Como $\|1\|=1$ entonces $\|\omega\| \geq \omega(1)$ y por continuidad de ω y de la ecuación 2.1 se tiene que para cada x tal que $\|x\| \leq 1$, $|\omega(x)| \leq \omega(1)$, por lo tanto obtenemos $\|\omega\| = \omega(1)$. □

Observación 2.14. *Si $\mathfrak{A}$ es un álgebra de Banach involutiva sin unidad, entonces se puede encajar a $\mathfrak{A}$ como ideal en un álgebra de Banach involutiva con unidad $\mathfrak{A}_1$ de la siguiente forma. Se define el espacio $\mathfrak{A}_1$ como la suma directa $\mathfrak{A} \oplus \mathbb{C}$ y se le da estructura de álgebra de Banach por medio de*

$$\begin{aligned} (x,\lambda)(y,\mu) =&(xy+\mu x+\lambda y, \lambda\mu),\\ (x,\lambda)^* =&(x^*,\overline{\lambda}),\\ \|(x,\lambda)\| =&\|x\|+|\lambda|. \end{aligned}$$

La función $x \in \mathfrak{A} \to (x,0) \in \mathfrak{A}_1$ es un encaje isométrico, la imagen de $\mathfrak{A}$ es un ideal de $\mathfrak{A}_1$, y $(0,1)$ es la identidad de $\mathfrak{A}_1$.*

En el caso en que $\mathfrak{A}$ sea un álgebra C^* es necesario definir $\|(x,\lambda)\| = \sup\{\|xy+\lambda y\| : y \in \mathfrak{A}, \|y\|=1\}$ para que $\mathfrak{A}_1$ sea también un álgebra C^*.

Lema 2.15. *Sea $\mathfrak{A}$ un álgebra de Banach involutiva y ω una funcional lineal positiva en $\mathfrak{A}$. Para cada $a \in \mathfrak{A}$ definimos $\omega_a(x) = \omega(axa^*), x \in \mathfrak{A}$. Entonces ω_a es una funcional lineal positiva y $\|\omega_a\| \leq \omega(aa^*)$.*

Demostración. Si $\mathfrak{A}$ no tiene unidad consideramos $\mathfrak{A}_1$ como se construyó en 2.14. Notemos que si $a \in \mathfrak{A}$ y $x_0 \in \mathfrak{A}_1$ podemos identificar a con $(a,0)$ y reescribir x_0 como (x,λ) para algún $x \in \mathfrak{A}, \lambda \in \mathbb{C}$, de esta forma

$$\begin{aligned} ax_0a^* =&(a,0)(x,\lambda)(a^*,0), \\ =&(ax+\lambda a,0)(a^*,0), \\ =&((ax+\lambda a)a^*,0), \\ =&(ax+\lambda a)a^*, \end{aligned}$$

es decir, el conjugar un elemento de $\mathfrak{A}_1$ con alguno de $\mathfrak{A}$ resulta en un elemento de $\mathfrak{A}$. Se observa también que si $a,x,y \in \mathfrak{A}$ y $k,\lambda,\mu \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} (a,0)((x,\lambda)+(y,\mu))(a^*,0) =&(a,0)(x+y,\lambda+\mu)(a^*,0), \\ =&((a(x+y)+(\lambda+\mu)a)a^*,0), \\ =&((ax+\lambda a+ay+\mu a)a^*,0), \\ =&[(a,0)(x,\lambda)(a^*,0)]+[(a,0)(y,\mu)(a^*,0)], \\ (a,0)(kx,k\lambda)(a^*,0) =&((a(kx)+\lambda ka)a^*,0), \\ =&k(a,0)(x,\lambda)(a^*,0). \end{aligned}$$

Con estas observaciones podemos extender la funcional lineal ω_a en $\mathfrak{A}$ en una funcional $\widetilde{\omega}_a(x) = \omega(axa^*)$ definida en $\mathfrak{A}_1$. Si $x \in \mathfrak{A}_1$, entonces $\widetilde{\omega}_a(x^*x) = \omega(ax^*xa^*) = \omega((xa^*)^*(xa^*)) \geq 0$ para cada $x \in \mathfrak{A}_1$. Por lo tanto $\widetilde{\omega}_a$ es una funcional lineal positiva en $\mathfrak{A}_1$. Por el Lema 2.13 es continua y $\|\widetilde{\omega}_a\| = \widetilde{\omega}_a(1) = \omega(aa^*)$. Finalmente $\|\omega_a\| \leq \|\widetilde{\omega}_a\| = \omega(aa^*)$. □

Teorema 2.16. *Sea $\mathfrak{A}$ un álgebra de Banach involutiva con unidad. Dada una funcional lineal positiva ω en $\mathfrak{A}$ existe una única representación, salvo por equivalencia unitaria, $\{\pi_\omega, \mathscr{H}_\omega\}$ de $\mathfrak{A}$ y un vector ξ_ω tal que:*

1. $[\pi_\omega(\mathfrak{A})\xi_\omega] = \mathscr{H}_\omega$,
2. $\omega(x) = \langle \pi_\omega(x)\xi_\omega, \xi_\omega \rangle$ *para cada* $x \in \mathfrak{A}$

Demostración. Se probará primero la unicidad y luego la existencia.

Sean $\{\pi_\omega, \mathscr{H}_\omega, \xi_\omega\}$ y $\{\pi'_\omega, \mathscr{H}'_\omega, \xi'_\omega\}$ dos representaciones que cumplan las condiciones establecidas anteriormente. Definimos $U_0 : \pi'_\omega(\mathfrak{A})\xi'_\omega \to \pi_\omega(\mathfrak{A})\xi_\omega$ como $U_0\pi'_\omega(x)\xi'_\omega = \pi_\omega(x)\xi_\omega$ para $x \in \mathfrak{A}$, entonces si $x,y \in \mathfrak{A}$

$$\begin{aligned} \left\langle U_0\pi'_\omega(x)\xi'_\omega, U_0\pi'_\omega(y)\xi'_\omega \right\rangle =& \langle \pi_\omega(x)\xi_\omega, \pi_\omega(y)\xi_\omega \rangle, \\ =& \langle \pi_\omega(y)^*\pi_\omega(x)\xi_\omega, \xi_\omega \rangle, \\ =& \langle \pi_\omega(y^*x)\xi_\omega, \xi_\omega \rangle, \\ =& \omega(y^*x), \\ =& \left\langle \pi'_\omega(y^*x)\xi'_\omega, \xi'_\omega \right\rangle, \\ =& \left\langle \pi'_\omega(x)\xi'_\omega, \pi'_\omega(y)\xi'_\omega \right\rangle. \end{aligned}$$

Esto implica que U_0 está bien definida, además se observa que U_0 preserva el producto interior, por lo tanto también preserva la norma y es isometría de $\pi'_\omega(\mathfrak{A})\xi'_\omega$ sobre $\pi_\omega(\mathfrak{A})\xi_\omega$. Como $\pi'_\omega(\mathfrak{A})\xi'_\omega$ y $\pi_\omega(\mathfrak{A})\xi_\omega$ son densos en $\mathscr{H}'_\omega$ y $\mathscr{H}_\omega$ respectivamente, entonces U_0 se extiende de manera continua a una isometría U de $\mathscr{H}'_\omega$ sobre $\mathscr{H}_\omega$.

Sean $x,y \in \mathfrak{A}$, entonces

$$\begin{aligned}\pi_\omega(x)U_0\pi'_\omega(y)\xi'_\omega &= \pi_\omega(x)\pi_\omega(y)\xi_\omega,\\ &= \pi_\omega(xy)\xi_\omega,\\ &= U_0\pi'_\omega(xy)\xi'_\omega,\\ &= U_0\pi'_\omega(x)\pi'_\omega(y)\xi'_\omega.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $x \in \mathfrak{A}$ $\pi_\omega(x)U = U\pi'_\omega(x)$, es decir $U^*\pi_\omega(x)U = \pi'_\omega(x)$ y las representaciones son unitariamente equivalentes.

Para probar la existencia de una representación con las dos condiciones requeridas empecemos por considerar N_ω, el kernel izquierdo de la funcional lineal dada. Sea $\mathscr{H}_\omega$ la completación del espacio $\mathfrak{A}/N_\omega$ respecto al producto interior definido por $\langle \eta_\omega(x), \eta_\omega(y)\rangle = \omega(y^*x)$. Para cada $a,x \in \mathfrak{A}$ definimos

$$\pi^0_\omega(a)\eta_\omega(x) = \eta_\omega(ax),$$

ésto está bien definido porque N_ω es un ideal izquierdo. Por 2.15, para cada $a,x,y \in \mathfrak{A}$

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \pi^0_\omega(a)\eta_\omega(x), \pi^0_\omega(a)\eta_\omega(x)\right\rangle\right| &= \left\|\pi^0_\omega(a)\eta_\omega(x)\right\|^2,\\ &= \|\eta_\omega(ax)\|^2,\\ &= |\omega(x^*(a^*a)x)|^2,\\ &= |\omega_{x^*}(a^*a)|^2,\\ &\le \|\omega_{x^*}\|^2\|a^*a\|^2,\\ &\le |\omega(x^*x)|^2\|a\|^2,\\ &\le \|a\|^2\|\eta_\omega(x)\|^2,\end{aligned}$$

por lo que el operador $\pi^0_\omega(a)$ en $\mathfrak{A}/N_\omega$ es acotado y se puede extender a un operador acotado $\pi_\omega(a)$ en $\mathscr{H}_\omega$. Aún es necesario probar que π_ω es una representación, veamos que es un homomorfismo*. Sean $a,b,x,y \in \mathfrak{A}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

- $$\begin{aligned}\pi^0_\omega(a+b)\eta_\omega(x) &= \eta_\omega((a+b)x) = \eta_\omega(ax+bx),\\ &= \eta_\omega(ax)+\eta_\omega(bx) = \pi^0_\omega(a)\eta_\omega(x)+\pi^0_\omega(b)\eta_\omega(x),\\ &= (\pi^0_\omega(a)+\pi^0_\omega(b))\eta_\omega(x).\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\pi^0_\omega(\lambda a)\eta_\omega(x) &= \eta_\omega(\lambda ax) = \lambda\eta_\omega(ax),\\ &= \lambda\pi^0_\omega(a)\eta_\omega(x).\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\pi^0_\omega(ab)\eta_\omega(x) &= \eta_\omega((ab)x) = \pi^0_\omega(a)\eta_\omega(bx),\\ &= \pi^0_\omega(a)\eta_\omega(bx) = \pi^0_\omega(a)\pi^0_\omega(b)\eta_\omega(x).\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\left\langle \pi^0_\omega(a)\eta_\omega(x), \eta_\omega(y)\right\rangle &= \langle \eta_\omega(ax), \eta_\omega(y)\rangle = \omega(y^*ax),\\ &= \omega((a^*y)^*x) = \langle \eta_\omega(x), \eta_\omega((a^*y)^*)\rangle,\\ &= \left\langle \eta_\omega(x), \pi^0_\omega(a^*)\eta_\omega(y)\right\rangle = \left\langle \eta_\omega(x), \pi^0_\omega(a)^*\eta_\omega(y)\right\rangle\end{aligned}$$.

Por lo tanto π_ω es una representación de $\mathfrak{A}$ en $\mathscr{H}_\omega$.

Finalmente definimos $\xi_\omega = \eta_\omega(1)$, entonces

$$\begin{aligned}\pi_\omega(\mathfrak{A})\xi_\omega =& \pi_\omega(\mathfrak{A})\eta_\omega(1),\\ =&\eta_\omega(\mathfrak{A}),\\ =&{}^{\mathfrak{A}}\!/\!_{N_\omega},\end{aligned}$$

y debido a que $\mathscr{H}_\omega = \overline{{}^{\mathfrak{A}}\!/\!_{N_\omega}}$, se tiene que $[\pi_\omega(\mathfrak{A})\xi_\omega] = \mathscr{H}_\omega$. Además

$$\begin{aligned}\langle \pi_\omega(x)\xi_\omega, \xi_\omega\rangle =& \langle \pi_\omega(x)\eta_\omega(1), \eta_\omega(1)\rangle,\\ =&\langle \eta_\omega(x), \eta_\omega(1)\rangle,\\ =&\omega(1^*x),\\ =&\omega(x).\end{aligned}$$

□

2.2. Integrales Directas

A partir de ahora tomaremos separabilidad como hipótesis adicional para los espacios de Hilbert con los que se trabaje.

Definición 2.17. Sea X un espacio σ-compacto, localmente compacto, y con la σ-álgebra de Borel asociada a dicha topología. Sea μ la completación de una medida de Borel en X, y $\{\mathscr{H}_p\}$ una famila de espacios de Hilbert separables indizada por los puntos p de X. Diremos que un espacio de Hilbert separable $\mathscr{H}$ es la integral directa de $\{\mathscr{H}_p\}$ sobre (X,μ), y lo denotamos por $\mathscr{H} = \int_X \oplus \mathscr{H}_p d\mu(p)$, cuando a cada $x \in \mathscr{H}$ le corresponde una función en X, $p \to x(p)$ tal que $x(p) \in \mathscr{H}_p$ para cada $p \in X$ y

1. Para cada $x,y \in \mathscr{H}$ la función $p \to \langle x(p), y(p)\rangle$ es integrable respecto a μ y $\langle x,y\rangle = \int_X \langle x(p), y(p)\rangle\, d\mu(p)$
2. Si $u_p \in \mathscr{H}_p$ para cada $p \in X$ y la función $p \to \langle u_p, y(p)\rangle$ es integrable para cada $y \in \mathscr{H}$, entonces existe $u \in \mathscr{H}$ tal que $u(p) = u_p$ casi dondequiera respecto a μ.

Diremos que $\int_X \oplus \mathscr{H}_p d\mu(p)$ y $p \to x(p)$ son las descomposiciones de $\mathscr{H}$ y x respectivamente.

Dado que la anterior no es una definición constructiva, resulta pertinente preguntarse si es posible construir un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ que resulte ser la integral directa de una colección de espacios de Hilbert indizados por un espacio de medida X. Las siguientes definiciones nos permiten contestar la pregunta de manera afirmativa.

Definición 2.18. Sea X un espacio de Borel y μ una medida positiva en X. Un campo medible de espacios de Hilbert sobre X es un par $\mathscr{E} = ((\mathscr{H}(p))_{p\in X}, \Gamma)$, en el que $(\mathscr{H}(p))_{p\in X}$ es una familia de espacios de Hilbert indizados por X, y Γ es un conjunto de campos vectoriales que satisfacen las siguientes condiciones:

1. Γ es un subespacio vectorial de $\prod_{p\in X} \mathscr{H}(p)$.
2. Existe una sucesión $(x_0, x_1, \ldots)$ de elementos de Γ tales que, para cada $p \in X$ $\{x_n(p)\}_n \in \mathbb{N}$ es una sucesión total en $\mathscr{H}(p)$.

3. Para cada $x \in \Gamma$ la función $p \to \|x(p)\|$ es medible respecto a μ.

4. Sea x un campo vectorial. Si para cada $y \in \Gamma$ la función $p \to \langle x(p), y(p)\rangle$ es medible, entonces $x \in \Gamma$.

Bajo estas condiciones llamamos campos medibles de $\mathscr{E}$ a los elementos de Γ. Si $x \in \Gamma$ y $y \in \Gamma$, entonces la función $p \to \langle x(p), y(p)\rangle$ es medible.

Definición 2.19. Se dice que un campo vectorial x es cuadrado integrable si $x \in \Gamma$ y $\int_X \|x(p)\|^2 \, d\mu(p) < \infty$. Las propiedades de una norma nos permiten afirmar que si x, y son cuadrado integrables y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces también lo son $x + y$ y λx. Se define $\langle x, y\rangle = \int_X \langle x(p), y(p)\rangle \, d\mu(p)$. Por medio de las desigualdades de Cauchy-Schwarz y de Hölder observamos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
|\langle x(p), y(p)\rangle| &\leq \|x(p)\| \, \|y(p)\|, \\
\left| \int_X \langle x(p), y(p)\rangle \, d\mu(p) \right| &\leq \int_X |\langle x(p), y(p)\rangle| \, d\mu(p), \\
&\leq \left(\int_X \|x(p)\|^2 \, d\mu(p) \right)^{1/2} \left(\int_X \|y(p)\|^2 \, d\mu(p) \right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

Así, el conjunto de campos vectoriales medibles y cuadrado integrables constituye un espacio de Hilbert.

El espacio definido de esta forma coincide con la primera definición dada para la integral directa de una familia de espacios de Hilbert.

Observación 2.20. *Sean $\alpha \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathscr{H}$, entonces existe $z \in \mathscr{H}$ tal que $\alpha x(p) + y(p) = z(p)$ c.d. Basta notar que la función $p \to \langle \alpha x(p) + y(p), y'(p)\rangle$ es integrable para cualquier $y' \in \mathscr{H}$. Por 2.17(2) existe $z \in \mathscr{H}$ tal que $\alpha x(p) + y(p) = z(p)$ casi dondequiera. Análogamente, si $x, y \in \mathscr{H}$ son tales que $x(p) = y(p)$ casi dondequiera entonces*

$$
\begin{aligned}
\|x - y\|^2 &= \langle x - y, x - y\rangle, \\
&= \int_X \langle x(p) - y(p), x(p) - y(p)\rangle \, d\mu(p), \\
&= \int_X \|x(p) - y(p)\|^2 \, d\mu(p), \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

por lo tanto $x = y$.

Lema 2.21. *Si $\{x_\alpha\}$ genera a $\mathscr{H}$ y definimos $\mathscr{H}_p^0$ como el subespacio cerrado de $\mathscr{H}_p$ generado por $\{x_\alpha(p)\}$, entonces $\mathscr{H}_p^0 = \mathscr{H}_p$ c.d.*

Demostración. Denotamos por $X_0 = \{p \in X : \mathscr{H}_p^0 \neq \mathscr{H}_p\}$ y para cada $p \in X$ definimos u_p como un vector unitatrio en $\mathscr{H}_p^{0\perp}$ si $p \in X_0$ y 0 en otro caso. Entonces, para cada α y cada $p \in X$ $\langle u_p, x_\alpha(p)\rangle = 0$. Sea $y \in \mathscr{H}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de combinaciones lineales de elementos en $\{x_\alpha\}$ tal que $\|y - y_n\| \to 0$. Si $y_i = \beta_1 x_{\alpha_1} + \ldots + \beta_n x_{\alpha_n}$ entonces existe un conjunto nulo $N_i \subseteq X$ tal que $y_i(p) = \beta_1 x_{\alpha_1}(p) + \ldots + \beta_n x_{\alpha_n}(p)$ para todo $p \in X \setminus N_i$, así $\langle u_p, y_i(p)\rangle = 0$ si $p \notin N_i$. Recordemos que la convergencia en L_p implica convergencia en medida, y por el

Teorema de Riesz-Weyl la convergencia en medida implica convergencia puntual c.d. para alguna subsucesión. Dado que

$$\|y-y_n\|^2 = \int_X \|y(p)-y_n(p)\|^2 d\mu(p) \to 0,$$

existe una subsucesión (y_{n_k}) tal que $\|y(p)-y_{n_k}(p)\| \to 0$ para todo p fuera de algún conjunto nulo N. Si $p \notin \bigcup_{i=0}^{\infty} N_i \cup N$ entonces $\langle u_p, y(p)\rangle = 0$. En particular, la función $p \to \langle u_p, y(p)\rangle$ es integrable para cada $y \in \mathscr{H}$ y por Definición 2.17 (2) existe $u \in \mathscr{H}$ tal que $u(p) = u_p$ casi dondequiera. Como u_p es unitario para $p \in X_0$, entonces necesariamente X_0 debe ser un conjunto nulo. □

Lema 2.22. *Sea $(\mathscr{V}, \|\|)$ un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_i\}$ un subconjunto numerable que genere a $\mathscr{V}$. Supongamos que para cualquier subconjunto de cardinalidad n, $\{x_1,\ldots,x_n\} \subseteq \{x_i\}$, y $m \in \mathbb{Z}^+$ existen números complejos $r_1,\ldots,r_n$ tales que al menos uno de ellos es 1 y $\|r_1x_1+\ldots+r_nx_n\| < m^{-1}$, entonces $dim(\mathscr{V}) < n$.*

Demostración. Supongamos que $dim(\mathscr{V}) \geq n$ Sean $\{x_1,\ldots,x_n\} \subseteq x_i$ linealmente independientes. La dimensión del espacio generado por este subconjunto es n, por lo que es isomorfo a $\mathbb{C}^n$, y en particular su norma es equivalente a la norma 1 de dicho espacio vectorial. Sea $m \in \mathbb{Z}^+$ y $r_1,\ldots,r_n \in \mathbb{C}$ y $r_h = 1$ con $1 \leq h \leq n$ que satisfagan la hipótesis del enunciado. Por equivalencia de las normas existe $c > 0$ tal que

$$c \leq c(|r_1|+\ldots+|r_h|+\ldots+|r_n|) \leq \|r_1x_1+\ldots+r_nx_n\| < m^{-1},$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $dim(\mathscr{V}) < n$. □

Observación 2.23. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \{p \in X : \mathscr{H}_p$ es de dimensión $n\}$ es un conjunto medible.*

Demostración. Empecemos por fijar $n \in \mathbb{Z}^+$. Sea $\{x_i\}$ una base ortonormal de $\mathscr{H}$ y denotemos por $r_1, r_2, \ldots$ a los racionales Gaussianos de manera tal que $r_1 = 1$. Tomamos $j_1,\ldots,j_n,k_1,\ldots,k_n,m \in \mathbb{Z}^+$ y definimos $j = \{j_1,\ldots,j_n\}, k = \{k_1,\ldots,k_n\}$. Sea $X_{j,k,m} = \{p \in X : \left\|r_{j_1}x_{k_1}+\ldots+r_{j_n}x_{k_n}\right\| < m^{-1}\}$ de manera que $r_{j_h} = 1$ para alguna $1 \leq h \leq n$ y $k_1,\ldots,k_n$ todos distintos. Por 2.21 existe $X_0 \subseteq X$ nulo tal que si $p \notin X_0$ entonces $\{x_i(p)\}$ genera a $\mathscr{H}_p$.

Por 2.22 si denotamos por $D_n = \bigcap_{k,m}\bigcup_j X_{j,k,m}$ entonces éste es un conjunto medible y para $p \in D_n$, $\mathscr{H}_p$ tiene dimensión estrictamente menor que n. Finalmente notemos que $\{p \in X : \mathscr{H}_p$ tiene dimensión $n\} = D_{n+1} \setminus D_n$, y por lo tanto también es medible. □

Definición 2.24. Si $\mathscr{H}$ es la integral directa de $\{H_p\}$ sobre (X,μ) diremos que un operador $T \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ es descomponible si existe una función en X, $p \to T(p)$ tal que $T(p) \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}_p)$, y para cada $x \in X$, $T(p)x(p) = (Tx)(p)$ casi dondequiera. Adicionalmente, si $f : X \to \mathbb{C}$ y $T(p) = f(p)1_p$ diremos que T es diagonalizable.

Lema 2.25. *Si T es un operador en $\mathscr{H}$, la integral directa de $\{\mathscr{H}_p\}$ y $p \to T(p)$, $p \to T'(p)$ son descomposiciones de T, entonces $T(p) = T'(p)$ casi dondequiera. Adicionalmente, si $S(p) = T(p)$ casi dondequiera, entonces $T = S$.*

Demostración. Sea $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ un generador numerable para $\mathscr{H}$, por el Lema 2.21 existe un conjuto nulo $N_0 \subseteq X$ tal que si $p \in X \setminus N_0$ entonces $\{x_i(p)\}$ genera a $\mathscr{H}_p$. Además, para cada $i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ existe un conjunto nulo $N_i \subseteq X$ tal que si $p \notin N_i$ entonces $T(p)x_i(p) = (Tx_i)(p)$. Definimos $N = \bigcup_{i=0}^{\infty} N_i$, de esta forma si $p \in X \setminus N$ entonces $T(p) = T'(p)$.

De manera similar, si T y S son operadores descomponibles y $T(p) = S(p)$ casi dondequiera, entonces para cada $x, y \in \mathscr{H}$

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle &= \int_X \langle (Tx)(p), y(p)\rangle \, d\mu(p),\\ &= \int_X \langle T(p)x(p), y(p)\rangle \, d\mu(p),\\ &= \int_X \langle S(p)x(p), y(p)\rangle \, d\mu(p),\\ &= \langle Sx, y\rangle\,,\end{aligned}$$

por lo tanto $S = T$. □

Observación 2.26. *Si f es una función medible y acotada en X, entonces la función $p \to \langle f(p)x(p), y(p)\rangle$ es integrable para todo $x, y \in \mathscr{H}$. Por 2.17(2) existe $z \in \mathscr{H}$ tal que $f(p)x(p) = z(p)$ c.d. Si definimos $M_f x = z$ entonces tenemos que M_f es un operador diagonalizable y su descomposición es $p \to f(p)1_p$. Las siguientes proposiciones nos permitirán ver que si H es un operador diagonalizable, entonces es de la forma M_f para alguna función f medible y esencialmente acotada.*

Proposición 2.27. *Si $\mathscr{H}$ es la integral directa de $\{\mathscr{H}_p\}$ sobre (X, μ), $\alpha \in \mathbb{C}$ y T_1, T_2 son operadores descomponibles en $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$, entonces $\alpha T_1 + T_2, T_1T_2, T_1^*$, y 1 son descomponibles y cumplen las siguientes propiedades c.d.*

1. $(\alpha T_1 + T_2)(p) = \alpha T_1(p) + T_2(p)$,
2. $(T_1T_2)(p) = T_1(p)T_2(p)$,
3. $T_1^*(p) = T_1(p)^*$,
4. $1(p) = 1_p$,
5. *Si además T_1, T_2 son autoadjuntos y $T_1(p) \le T_2(p)$ c.d. entonces $T_1 \le T_2$.*

Demostración. Dado $x \in \mathscr{H}$ definimos $(\alpha T_1 + T_2)(p) = \alpha T_1(p) + T_2(p)$, entonces

$$\begin{aligned}(\alpha T_1 + T_2)(p)x(p) =& \alpha T_1(p)x(p) + T_2(p)x(p),\\ =&(\alpha T_1 x)(p) + (T_2x)(x),\\ =& ((\alpha T_1 + T_2)x)\,(p),\end{aligned}$$

para p casi dondequiera por 2.24 y 2.20.

Definimos $(T_1T_2)(p)$ como $T_1(p)T_2(p)$, entonces

$$\begin{aligned}(T_1T_2)(p)x(p) =& T_1(p)(T_2(p)x(p)),\\ =& T_1(p)(T_2x(p)),\\ =& ((T_1T_2x)(p))\,.\end{aligned}$$

Tomamos $T_1^*(p) = T_1(p)^*$, luego para p casi dondequiera

$$\begin{aligned}\langle T_1^*(p)x(p), y(p)\rangle &= \langle x(p), T_1(p)y(p)\rangle\,,\\ &= \langle x(p), (T_1y)(p)\rangle\,.\end{aligned}$$

Por 2.17(2) $\langle x(p),(T_1y)(p)\rangle$ es integrable, y además existe $z\in\mathscr{H}$ tal que $T_1^*x(p)=z(p)$ c.d. Para cada $y\in\mathscr{H}$

$$\begin{aligned}\langle T_1^*x-z,y\rangle &= \langle x,T_1y\rangle - \langle z,y\rangle\,,\\ &=\int_X \langle x(p),T_1(p)y(p)\rangle\,d\mu(p)-\int_x \langle z(p),y(p)\rangle\,d\mu(p),\\ &=\int_X \langle x(p),T_1(p)y(p)\rangle\,d\mu(p)-\int_x \langle T_1(p)x(p),y(p)\rangle\,d\mu(p),\\ &=0.\end{aligned}$$

Por lo tanto $T_1^*x-z=0$, es decir, $(T_1^*x)(p)=z(p)=T_1(p)^*x(p)$ casi dondequiera y T_1^* es descomponible con descomposición $p\to T_1^*(p)$.

Definimos $1(p)=1_p$, entonces para p c.d.

$$1(p)x(p)=1_px(p)=x(p)=(1x)(p),$$

por lo que la descomposición de 1 es $p\to 1_p$.

Finalmente, si $T_1(p)\le T_2(p)$ casi dondequiera y $x\in\mathscr{H}$

$$\begin{aligned}\langle T_1x,x\rangle &= \int_X \langle (T_1x)(p),x(p)\rangle\,d\mu(p),\\ &=\int_X \langle T_1(p)x(p),x(p)\rangle\,d\mu(p),\\ &\le\int_x \langle T_2(p)x(p),x(p)\rangle\,d\mu(p),\\ &=\langle T_2x,x\rangle\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto $T_1\le T_2$. □

Observación 2.28. *Si f es la función característica de un conjunto medible X_0, entonces M_f es una proyección, a saber, la proyección diagonalizable correspondiente a X_0*

Lema 2.29. *Sea $K\ge 0$ y $a\in\mathbb{R}$ tal que $a\ge 0$. Entonces $K\le a1$ si y sólo si $\|K\|\le a$.*

Demostración. Nótese que si $K\ge 0$, entonces $\|K\|=\sup_{\|x\|=1}\langle Kx,x\rangle$.

Dado que K es positivo tiene un único operador raíz cuadrada y éste también es positivo, por lo tanto

$$\begin{aligned}\|K\| &= \left\|K^{1/2}K^{1/2}\right\|,\\ &=\left\|K^{1/2}\right\|^2,\\ &=\sup_{\|x\|=1}\left\|K^{1/2}x\right\|^2,\\ &=\sup_{\|x\|=1}\left\langle K^{1/2}x,K^{1/2}x\right\rangle,\\ &=\sup_{\|x\|=1}\left\langle K^{1/2}K^{1/2}x,x\right\rangle,\\ &=\sup_{\|x\|=1}\langle Kx,x\rangle\,.\end{aligned}$$

Además, si $\|x\| = 1$, entonces:

$$\langle a1x, x\rangle = a\langle x, x\rangle = a\|x\|^2 = a.$$

Por lo tanto, si suponemos que $K \leq a1$, entonces $\|K\| = \sup_{\|x\|=1}\langle Kx, x\rangle \leq \sup_{\|x\|=1}\langle a1x, x\rangle = a$, es decir $\|K\| \leq a$.

Por otro lado, si $\|K\| \leq a$, entonces $\|K\|1 \leq a1$. Utilizamos nuevamente el hecho de que los operadores positivos tienen un único operador raíz cuadrada y observamos que para cada $x \in \mathscr{H}$

$$\begin{aligned}
\langle Kx, x\rangle &= \left\langle K^{1/2}K^{1/2}x, x\right\rangle, \\
&= \left\langle K^{1/2}x, K^{1/2}x\right\rangle, \\
&= \left\|K^{1/2}x\right\|^2, \\
&\leq \left\|K^{1/2}\right\|^2\|x\|^2, \\
&= \left\langle \left\|K^{1/2}\right\|x, \left\|K^{1/2}\right\|x\right\rangle, \\
&= \left\langle \left\|K^{1/2}\right\|^2 x, x\right\rangle, \\
&= \langle \|K\|x, x\rangle, \\
&\leq \langle ax, x\rangle,
\end{aligned}$$

por lo tanto $K \leq a1$. □

Proposición 2.30. *Sea $\mathscr{H}$ la integral directa de $\{\mathscr{H}_p\}$ sobre (X, μ).*

- *Si A_1, A_2 son operadores autoadjuntos y descomponibles en $\mathscr{H}$ tales que $A_1 \leq A_2$, entonces $A_1(p) \leq A_2(p)$ casi dondequiera.*

- *Si T es descomponible, entonces $p \to \|T(p)\|$ es una función medible esencialmente acotada con cota esencial $\|T\|$.*

Demostración. Por el primer inciso de 2.27 $A_2 - A_1$ es un operador positivo descomponible con descomposición $A_2(p) - A_1(p)$. Tomando $H = A_2 - A_1$ bastará mostrar que si $0 \leq H$ y H es descomponible, entonces $0 \leq H(p)$ casi dondequiera.

Tomemos un subconjunto denso numerable de $\mathscr{H}$. Definimos $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ como el conjunto de combinaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{Q}$ de dicho conjunto denso, de manera que $\overline{\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}} = \mathscr{H}$. Por el Lema 2.21 $\{x_i(p)\}_{i\in\mathbb{N}}$ genera a $\mathscr{H}_p$ c.d., es decir, existe un conjunto nulo $N \subseteq X$ tal que para todo p fuera de N $\overline{\{x_i(p)\}} = \mathscr{H}_p$, en particular $\{x_i(p)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es denso en $\mathscr{H}_p$.

Si $0 \leq H$, entonces $0 \leq \langle Hx_k, x_k\rangle = \int_X \langle H(p)x_k(p), x_k(p)\rangle\, d\mu(p)$ para cada $x_k \in \{x_i\}_{i\in N}$. Supongamos que $\langle H(p)x_k(p), x_k(p)\rangle < \alpha < 0$, para algún conjunto $X_0 \subseteq X$ de medida finita y positiva. Si f es la función característica de X_0, entonces la función $p \to \langle f(p)x_k(p), y(p)\rangle$ es integrable para cada $y \in \mathscr{H}$, por lo que existe $z \in \mathscr{H}$ tal que $z(p) = f(p)x_k(p)$ casi dondequiera. En este caso

$$\begin{aligned}
\langle Hz, z\rangle &= \int_X \langle H(p)f(p)x_k(p), f(p)x_k(p)\rangle\, d\mu(p), \\
&= \int_{X_0} \langle H(p)x_k(p), x_k(p)\rangle\, d\mu(p), \\
&< 0,
\end{aligned}$$

lo cual contradice que $0 \leq H$. Por lo tanto existe $M_k \subseteq X$ nulo tal que si $p \notin M_k$ entonces $0 \leq \langle H(p)x_k(p), x_k(p)\rangle$. Sea $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ y $p \notin M \cup N$, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ se observa que $0 \leq \langle H(p)x_K(p), x_k(p)\rangle$. Como $\{x_i(p)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es denso en $\mathscr{H}_p$, se concluye que $0 \leq H(p)$ para todo $p \in X \setminus M \cup N$.

Para probar la segunda parte de la proposición tomemos un operador T descomponible. Por 2.27 T^* y T^*T son operadores descomponibles con descomposición $T^*(p)$ y $T^*(p)T(p)$ respectivamente. Tenemos la identidad $\|T(p)\|^2 = \|T^*(p)T(p)\|$; puesto que la raíz cuadrada es una función medible en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, para probar que $p \to \|T(p)\|$ es medible y esencialmente acotada con cota $\|T\|$ será suficiente tomar $H = T^*T$ y probar que si H es positivo y descomponible en $\mathscr{H}$, entonces la función $g : X \to [0, \infty)$, dada por $g(p) = \|H(p)\|$, es medible, esencialmente acotada y con cota esencial igual a $\|H\|$.

Se probará que la función g es medible. Consideremos un conjunto denso numerable en $\mathscr{H}$, denotemos por $\{x_i\}_{i\in N}$ al conjunto de combinaciones lineales racionales de éste, y por N al conjunto nulo fuera del cual $\overline{\{x_i(p)\}_{i\in\mathbb{N}}} = \mathscr{H}_p$. La σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es generada por los intervalos de la forma $(r,s]$ con $r,s \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$, por ello basta probar que $g^{-1}((r,s]) = \{p \in X \setminus N : \|H(p)\| \leq s, \|H(p)\| \nleq r\}$ es un conjunto medible. Para cada racional $s > 0$ definimos el conjunto $X_s = \{p \in X : H(p) \leq s1_p \text{ y } x \notin N\}$. Por el Lema 2.29 tenemos que

$$g^{-1}((r,s]) = \{p : H(p) \leq s1_p, H(p) \nleq r1_p\},$$

es decir, $g^{-1}((r,s]) = X_s \setminus X_r$. Finalmente notemos que el conjunto X_s también está dado por

$$X_s = \bigcap_{i=0}^{\infty} \{p : \langle H(p)x_i(p), x_i(p)\rangle \leq s\,\|x_i(p)\|^2,\ p \notin N\}.$$

Así, tanto X_s como $g^{-1}((r,s])$ son medibles.

Veamos que g está acotada casi dondequiera por $\|H\|$. Usando el Lema 2.29 con $a = \|H\|$ se tiene que $0 \leq H \leq \|H\| \cdot 1$. La primera parte de esta prueba nos permite afirmar que $0 \leq H(p) \leq \|H\| \cdot 1_p$ casi dondequiera, por lo tanto g es esencialmente acotada con cota a lo más $\|H\|$. Por otro lado, supongamos que $a \in \mathbb{R}^+$ es tal que $0 \leq H(p) \leq a1(p)$ casi dondequiera, entonces por la Proposición 2.27 $H \leq a1$ y por el Lema 2.29 concluimos que $\|H\| \leq a$, y con ello que la cota esencial de g es $\|H\|$.

$\square$

Capítulo 3

Un Teorema de Gelfand-Naimark no conmutativo

En esta sección retomaremos como hipótesis el que todo espacio de Hilbert sea separable. Adicionalmente haremos las siguientes suposiciones: las álgebras C* tienen unidad, una representación es un homomorfismo* unitario en $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$, y la topología asociada a un conjunto de operadores es la topología inducida por la norma.

3.1. Dominios compactos

El concepto de funciones de operadores se puede entender de dos formas distintas. En primer lugar como una función que toma como argumento y produce operadores en un determinado espacio de Hilbert. La segunda interpretación es una abstracción del concepto de función de la primera, independiente del espacio de Hilbert concreto sobre el cual actúan los operadores en cuestión.

Será importante preguntarse sobre las restricciones que se tienen que imponer sobre un conjunto para que pueda ser considerado dominio de tales funciones. Empezaremos por suponer que debe ser un subconjunto del conjunto de operadores acotados $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$. Cuando se consideren funciones de varias variables los dominios de éstas serán subconjuntos de $\mathfrak{B}(\mathscr{H})^N$.

Definición 3.1. Diremos que un dominio es una familia $\{D(\mathscr{H}) : \mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert$\}$, en la que para cada espacio de Hilbert $\mathscr{H}$, $D(\mathscr{H}) \subseteq \mathfrak{B}(\mathscr{H})^N$. Esta familia será denotada por D.

Definición 3.2. Utilizaremos la siguiente notación. Sea $N \in \mathbb{Z}^+$. Dados $a^1,...,a^N \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ denotaremos por $a = (a^1,...,a^N) \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})^N$.

Si $\mathscr{H} = \int_\Lambda^\oplus \mathscr{H}(\lambda)d\mu(\lambda)$, escribiremos $a = \int_\Lambda^\oplus a(\lambda)d\mu(\lambda)$ si y sólo si $\{a^k(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ es un campo medible de operadores acotados y $a^k = \int_\Lambda^\oplus a^k(\lambda)d\mu(\lambda)$ para todo $k = 1,...,N$. Si Λ es contable y μ es la medida de conteo, entonces escribiremos $\bigoplus_{r\in\Lambda}\mathscr{H}(r)$ y $\bigoplus_{r\in\Lambda}a(r)$ en lugar de utilizar la notación de integral.

Si ϕ es una operación definida en $a^1,...,a^N$, entonces $\phi(a) = (\phi(a^1),...,\phi(a^N))$. En particular, si $a \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})^N$ y U es un operador unitario entre espacios de Hilbert $\mathscr{H}$ y $\mathscr{K}$, entonces $UaU^* = (Ua^1U^*,...,Ua^NU^*) \in \mathfrak{B}(K)^N$. De manera análoga, si π es una representación de un álgebra C* $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ y $a^1,...,a^N \in \mathfrak{A}$, entonces $\pi(a) = (\pi(a^1),...,\pi(a^N)) \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}_\pi)^N$, donde $\mathscr{H}_\pi$ es el espacio de representación de π.

Finalmente, si $a \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})^N$, entonces denotamos por C$^*(a)$ al álgebra C* generada en $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ por $a^1,...,a^N$.

Definición 3.3. La familia D de conjuntos $D(\mathscr{H}) \subseteq \mathfrak{B}(\mathscr{H})^N$ es llamada dominio compacto de dimensión N si para cualquier espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ se satisfacen las siguientes condiciones:

1. Para cada $a \in D(\mathscr{H})$ y cada representación $\pi : \mathrm{C}^*(a) \to \mathfrak{B}(\mathscr{K})$, $\pi(a) \in D(\mathscr{K})$.
2. Si dado $a \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})^N$ existe una familia de representaciones de $\mathrm{C}^*(a)$, $\{\pi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, tal que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \ker \pi_\lambda = \{0\}$ y $\pi_\lambda(a) \in D(\mathscr{H}_\lambda)$ para cada $\lambda \in \Lambda$, entonces $a \in D(\mathscr{H})$.
3. Existe $M > 0$, independiente de $\mathscr{H}$, tal que $\sup_{a\in D(\mathscr{H})} \left\|a^i\right\| \leq M$.

Definición 3.4. Si $\{\pi_\lambda\}_{i\in\lambda}$ es una familia de representaciones tal que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \ker \pi_\lambda = \{0\}$, entonces diremos que es una familia fiel o separadora.

Definición 3.5. Utilizaremos el álgebra* libre generada por N generadores $X^1, X^2, ..., X^N$. Esta álgebra se denotará por P_N. Cualquier elemento $w \in P_N$ es de la forma:

$$w = \sum w_{i_1...i_M} X^{\varepsilon_{i_1}} X^{\varepsilon_{i_2}} ... X^{\varepsilon_{i_M}}, \tag{3.1}$$

en donde $X^{\varepsilon_{i_k}}$ denota a algún X^j o X^{j^*} con $1 \leq j \leq N$, con posibles repeticiones, $w_{i_1...i_M}$ representan coeficientes complejos y la suma contiene únicamente una cantidad finita de sumandos.

Sea $w \in P_N$ y $a \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})^N$. Si en la expresión de w reemplazamos X^i por a^i para $i \in \{1, ..., N\}$ obtenemos un operador que actúa en $\mathscr{H}$. Este operador será denotado por $w(a)$. Por ejemplo, si w está dado por (3.1), entonces $w(a) = \sum w_{i_1...i_M} a^{\varepsilon_{i_1}} a^{\varepsilon_{i_2}} ... a^{\varepsilon_{i_M}}$.

Proposición 3.6. *Sea D un dominio compacto de dimensión N y sea Λ un conjunto contable. Entonces para cada familia $a_\lambda \in D(\mathscr{H}_\lambda), \lambda \in \Lambda$, tenemos que $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \in D(\oplus_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{H}_\lambda)$.*

Demostración. Por la condición 3) de 3.3, existe $M \geq 0$, independiente de $\mathscr{H}$, tal que $\sup_{a\in D(\mathscr{H})} \left\|a^j\right\| \leq M$, en particular $\sup_{\lambda\in\Lambda} \left\|a^i_\lambda\right\| \leq M$. Por la definición de norma en la suma directa de espacios de Hilbert, para cada $1 \leq i \leq N$, $a^i = \oplus_{\lambda\in\Lambda} a^i_\lambda \in \mathfrak{B}(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{H}_\lambda)$ y $a = \oplus_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = (\oplus a^1_\lambda, \oplus a^2_\lambda, ..., \oplus a^N_\lambda)$ por lo tanto $\oplus_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \in \mathfrak{B}(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{H}_\lambda)^N$.

Sea $x \in \mathrm{C}^*(a)$, por la densidad de $\{p(a) : p \in P_N\}$ en $\mathrm{C}^*(a)$, entonces existe una sucesión de polinomios $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq P_N$ tal que $\lim_{k\to\infty} p_k(a) = x$. Recordemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, $p_k(a)$ es un polinomio como el descrito en (3.1) al sustituir X^{ε_i} por a^{ε_i}, es decir

$$\begin{aligned}
p_k(a) &= \sum w_{i_1...i_{M_k}} a^{\varepsilon_{i_1}} ... a^{\varepsilon_{i_{M_k}}}, \\
&= \sum w_{i_1...i_{M_k}} \oplus_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda^{\varepsilon_{i_1}} ... \oplus_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda^{\varepsilon_{i_{M_k}}}, \\
&= \sum w_{i_1...i_{M_k}} \oplus_{\lambda\in\Lambda} (a_\lambda^{\varepsilon_{i_1}} ... a_\lambda^{\varepsilon_{i_{M_k}}}), \\
&= \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \left(\sum w_{i_1...i_{M_k}} a_\lambda^{\varepsilon_{i_1}} ... a_\lambda^{\varepsilon_{i_{M_k}}} \right).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
x &= \lim_{k\to\infty} p_k(a), \\
&= \lim_{k\to\infty} \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \left(\sum w_{i_1...i_{M_k}} a_\lambda^{\varepsilon_{i_1}} ... a_\lambda^{\varepsilon_{i_{M_k}}} \right), \\
&= \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \lim_{k\to\infty} \left(\sum w_{i_1...i_{M_k}} a_j^{\varepsilon_{i_1}} ... a_\lambda^{\varepsilon_{i_{M_k}}} \right),
\end{aligned}$$

por lo que x es de la forma $\oplus_{\lambda\in\Lambda}x_\lambda$ con $x_\lambda \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}_\lambda)$ Denotemos por $\pi_\lambda(x)$ a la λ-ésima componente de x, es decir, $\pi_\lambda(x) = x_\lambda$. Con ello tenemos una familia de representaciones $\pi_\lambda : \mathfrak{B}(\bigoplus_{l\in\Lambda}\mathscr{H}_l) \to \mathscr{H}_\lambda$ tal que $y \in \ker\pi_\lambda$ si y sólo si $y_\lambda = 0$, por lo tanto $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\ker\pi_\lambda = \{0\}$, es decir, $\{\pi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una familia fiel de representaciones de $\mathrm{C}^*(a)$. Notemos que $\pi_\lambda(a) = a_\lambda \in D(\mathscr{H})_\lambda$, por lo que al usar la condición 2) de la Definición 3.3 tenemos que $a \in D(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{H}_\lambda)$. $\square$

Observación 3.7. *Si $a \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})^N$, entonces la función $w \in P_N \mapsto w(a) \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ es una representación del álgebra* P_N. *Asímismo se tiene que $X^i(a) = a^i$ para $i \in \{1,\dots,N\}$.*

Lema 3.8. *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, $a \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})^N$ y $\{\pi_i\}_{i\in\Lambda}$ una familia fiel de representaciones de $\mathrm{C}^*(a)$, entonces $\|x\| = \sup_{i\in\Lambda}\|\pi_i(x)\|$ para cada $x \in \mathrm{C}^*(a)$.*

Demostración. Como cada π_i es representación, entonces $\|\pi_i(x)\| \le \|x\|$, por lo tanto $\sup_{i\in\Lambda}\|\pi_i(x)\| \le \|x\|$. Supongamos ahora que existe $x \in \mathrm{C}^*(a)$ y $\alpha > 0$ tal que $\sup_{i\in\Lambda}\|\pi_i(x)\| < \alpha \le \|x\|$. Definimos $y = x^*x \in \mathrm{C}^*(a)$ y tenemos que

$$\|\pi_i(y)\| = \|\pi_i(x^*x)\| = \|\pi_i(x)^*\pi_i(x)\| = \|\pi_i(x)\|^2 < \alpha^2 \le \|x\|^2 = \|y\|.$$

Nótese que $y = x^*x$ es autoadjunto, así $\sigma(y) \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, además por la fórmula del radio espectral, $r(y) = \text{lím}_{n\to\infty}\|y^n\|^{1/n}$. Al ser y autoadjunto $\|y\|^2 = \left\|y^2\right\|$, de manera inductiva se demuestra que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $\left\|y^{2^n}\right\| = \|y\|^{2^n}$ y en consecuencia $r(y) = \text{lím}_{n\to\infty}\left\|y^{2^n}\right\|^{1/2^n} = \text{lím}_{n\to\infty}\|y\| = \|y\|$, así $r(y) = \|y\|$.

Notemos que para cada $i \in \Lambda$, $\pi_i(y)$ es autoadjunto, de manera que el resultado anterior se puede extender y $r(\pi_i(y)) = \|\pi_i(y)\|$, por lo tanto $\sigma(\pi_i(y)) \subsetneq \sigma(y)$.

Si denotamos por $\mathfrak{A}_y$ y $\mathfrak{A}_{\pi_i(y)}$ a las álgebras C^* generadas por y y $\pi_i(y)$, respectivamente, entonces el Teorema Espectral [Dou98, Teo 4.30] garantiza que las álgebras anteriores son isomorfas a $C(\sigma(y))$ y a $C(\sigma(\pi_i(y)))$, respectivamente. En cada caso el isomorfismo está dado por $\varphi \mapsto \varphi(y)$ y $\varphi \mapsto \varphi(\pi_i(y))$ donde φ es una función continua. Considérese $\psi \in C(\sigma(y))$ definida como

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \le \alpha^2 \\ t - \alpha^2 & \text{si } t > \alpha^2. \end{cases}$$

Nótese que $\psi_{\restriction\sigma(\pi_i(y))} \equiv 0$, por lo tanto el Teorema Espectral dice que $\psi(\pi_i(y)) = 0$. Recordemos que $\sigma(y)$ es compacto y no vacío [Dou98, Prop 2.28, Teo 2.29], y por el Teorema de Stone-Weierstrass el conjunto de polinomios en una variable es denso en éste. Si γ es un polinomio, entonces se cumple que $\pi_i(\gamma(y)) = \gamma(\pi_i(y))$. Por la continuidad de las representaciones y la densidad de los polinomios se tiene que la igualdad anterior es verdadera para funciones continuas arbitrarias definidas sobre el espectro, en particular $\pi_i(\psi(y)) = \psi(\pi_i(y))$. Por lo tanto $\psi(y) \in \ker\pi_i$ para cada $i \in \Lambda$ y al ser $\{\pi_i\}_{i\in\Lambda}$ una familia fiel de representaciones se sigue que $\psi(y) \in C(\sigma(y))$ es cero, una contradicción pues ψ no se anula en todo $\sigma(y)$. Se concluye que $\|x\| = \sup_{i\in\Lambda}\|\pi_i(x)\|$ para todo $x \in \mathrm{C}^*(a)$. $\square$

Proposición 3.9. *Sea φ una función en P_N que toma valores reales no negativos, es decir, $\varphi : P_N \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Dado un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ definimos*

$$D_\varphi(\mathscr{H}) = \{a \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})^N : \|w(a)\| \le \varphi(w),\ \forall w \in P_N\}.$$

Entonces $D_\varphi = \{D_\varphi(\mathscr{H}) : \mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert$\}$ es un dominio compacto.

Demostración. Sea $a \in D_\varphi(\mathscr{H})$ y $\pi : \mathrm{C}^*(a) \to \mathfrak{B}(\mathscr{K})$ una representación. Si $w \in P_N$ es de la forma (3.1) tenemos que

$$\begin{aligned}
\|w(\pi(a))\| &= \left\|\sum w_{i_1 \dots i_M} \pi(a^{\varepsilon_{i_1}}) \dots \pi(a^{\varepsilon_{i_M}})\right\| \\
&= \left\|\pi(\sum w_{i_1 \dots i_M} a^{\varepsilon_{i_1}} \dots a^{\varepsilon_{i_M}})\right\|, \\
&= \|\pi(w(a))\|, \\
&\leq \|w(a)\|, \\
&\leq \varphi(w).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\pi(a) \in D_\varphi(\mathscr{K})$ y se satisface la primera condición de 3.3.

Para probar la segunda condición de la definición tomemos $a \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})^N$ y $\{\pi_i\}_{i \in \Lambda}$ una familia fiel de representaciones de $\mathrm{C}^*(a)$. Por el Lema 3.8, $\|x\| = \sup_{i \in \Lambda} \|\pi_i(x)\|$ para cada $x \in \mathrm{C}^*(a)$. Si $\mathscr{H}_i$ es el espacio de representación de π_i y $\pi_i(a) \in D_\varphi(\mathscr{H}_i)$ para cada $i \in \Lambda$, entonces $\|w(\pi_i(a))\| \leq \varphi(w)$ para todo $w \in P_N$ e $i \in \Lambda$, además

$$\|w(a)\| = \sup_{i \in \Lambda} \|\pi_i(w(a))\| = \sup_{i \in \Lambda} \|w(\pi_i(a))\| \leq \varphi(w),$$

para cada $w \in P_N$. Ello significa que $a \in D_\varphi(\mathscr{H})$ y se satisface la condición 2) de la definición.

Finalmente, basta ver que se satisface la tercera condición. Sea $a \in D_\varphi(\mathscr{H})$ y $M = \max\{\varphi(X^1), \dots, \varphi(X^N)\}$, como $X^i(a) = a^i$, entonces $\left\|a^i\right\| = \left\|X^i(a)\right\| \leq \varphi(X^i) \leq M$. $\square$

Proposición 3.10. *Sean $\mathscr{H}$ y $\mathscr{K}$ espacios de Hilbert, $a \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})^N$ y $b \in \mathfrak{B}(\mathscr{K})^N$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *Para cada $w \in P_N$, $\|w(a)\| \geq \|w(b)\|$.*
2. *Existe una representación $\pi : \mathrm{C}^*(a) \to \mathfrak{B}(\mathscr{K})$ tal que $\pi(a) = b$.*
3. *Para cada D, dominio compacto de dimensión N, si $a \in D(\mathscr{H})$, entonces $b \in D(\mathscr{K})$.*

Demostración. Notemos que la implicación 2) $\Rightarrow$ 3) es consecuencia directa de la primera condición de 3.3, es decir, si $a \in D(\mathscr{H})$ y $\pi : \mathrm{C}^*(a) \to \mathfrak{B}(\mathscr{K})$ es una representación, entonces $\pi(a) = b \in D(\mathscr{K})$.

Veamos la implicación 3) $\Rightarrow$ 1). Supongamos que 1) es falso, entonces existe $w_0 \in P_N$ tal que $\|w_0(a)\| < \|w_0(b)\|$. Definimos $\varphi : P_N \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ como $\varphi(w) = \|w(a)\|$ y consideremos el dominio compacto D_φ inducido por φ como en 3.9. Naturalmente $a \in D_\varphi(\mathscr{H})$ y $b \notin D_\varphi(\mathscr{K})$, lo cual es una negación de 3).

Sea ${\mathrm{C}^*}_0(a)$ el álgebra* generada por $a^1, \dots, a^N$. ${\mathrm{C}^*}_0(a)$ es densa en $\mathrm{C}^*(a)$ y los elementos $x \in {\mathrm{C}^*}_0(a)$ son de la forma $w(a)$ para algún $w \in P_N$, es decir, son polinomios en $a^1, a^{1^*} \dots, a^N, a^{N^*}$. Para $x \in {\mathrm{C}^*}_0(a)$ definimos

$$\pi_0(x) = w(b),$$

donde $w \in P_N$ y satisface $w(a) = x$. Si $w_1, w_2 \in P_N$ son tales que $w_1(a) = w_2(a)$, entonces $(w_1 - w_2)(a) = 0$. Así $0 = \|(w_1 - w_2)(a)\| \geq \|(w_1 - w_2)(b)\| \geq 0$. Por lo tanto $w_1(b) = w_2(b)$ y se muestra que la función π_0 está bien definida. Veamos ahora que π_0 es una representación de ${\mathrm{C}^*}_0(a)$. Sean $x, y \in {\mathrm{C}^*}_0(a)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces existen $w_1, w_2 \in P_N$ tales que $w_1(a) = x$ y $w_2(a) = y$, así

$$\begin{aligned}
\alpha x + y &= \alpha w_1(a) + w_2(a) = (\alpha w_1 + w_2)(a), \\
\pi_0(\alpha x + y) &= (\alpha w_1 + w_2)(b) = \alpha w_1(b) + w_2(b) = \alpha \pi_0(x) + \pi_0(y).
\end{aligned}$$

De manera similar,

$$\begin{aligned}\pi_0(xy) =& w_1(b)w_2(b) = \pi_0(x)\pi_0(y),\\ \pi_0(1) =& 1(a) = 1.\end{aligned}$$

Lo anterior se debe a que $w \in P_N \mapsto w(a) \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ es una representación. Por el enunciado 1), $\|w(a)\| \geq \|w(b)\|$ para todo $w \in P_N$, por lo que si $x = w(a)$, entonces $\pi_0(x) = w(b)$, $\|x\| \geq \|\pi_0(x)\|$ y π_0 es continua.

Sea $\pi : \mathrm{C}^*(a) \to \mathfrak{B}(\mathscr{K})$ la extensión continua de π_0 a $\mathrm{C}^*(a)$, entonces π es una representación de $\mathrm{C}^*(a)$ y debido a que $X^i(a) = a^i$ y a la definición de π_0 se tiene que

$$\pi(a^i) = \pi_0(a^i) = \pi_0(X^i(a)) = X^i(b) = b^i.$$

Para terminar basta recordar que $\pi(a) = (\pi(a^1), ..., \pi(a^N)) = (b^1, ..., b^N) = b$. □

Definición 3.11. Diremos que b está subordinado a a si se satisface alguno de los enunciados de 3.10 y se denotará por $a \gg b$.

Observación 3.12. *La representación dada en 2) de la Proposición 3.10 es única, ya que en un álgebra con generadores $a^1, ..., a^N$ una representación π queda completamente determinada por $\pi(a^1), ..., \pi(a^N)$.*

A continuación veremos que todo dominio compacto D tiene algún elemento a maximal respecto a $\gg$.

Teorema 3.13. *Sea D un dominio compacto. Entonces existe un espacio de Hilbert $\mathscr{K}$ y $b \in D(\mathscr{K})$ tal que $b \gg a$ para cada espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ y $a \in D(\mathscr{H})$.*

Demostración. Sea P_N^0 el subconjunto de P_N compuesto por los polinomios de la forma

$$\sum w_{i_1...i_M} X^{\varepsilon_{i_1}} ... X^{\varepsilon_{i_M}},$$

con coeficientes racionales Gaussianos. De esta forma P_N^0 es numerable. Por la condición 3) de 3.3 se tiene que para cada $w \in P_N^0$

$$\varphi_D(w) = \sup\{\|w(a)\| : a \in D(\mathscr{H}),\ \mathscr{H} \text{ es un espacio de Hilbert}\},$$

es finito. Para ello basta notar que $\left\|X^i(a)\right\| = \left\|a^i\right\| \leq M$ y podemos suponer que $M \geq 1$, por lo que si $w = \sum w_{i_1...i_{M'}} X^{\varepsilon_{i_1}} ... X^{\varepsilon_{i_{M'}}}$, $\tilde{N}$ es el número de sumandos, $\tilde{M}'$ el grado del polinomio y $\tilde{w}$ el máximo de los módulos de los coeficientes de w, entonces

$$\begin{aligned}\|w(a)\| =& \left\|\sum w_{i_1...i_{M'}} a^{\varepsilon_{i_1}} ... a^{\varepsilon_{i_{M'}}}\right\|,\\ \leq& \sum \left|w_{i_1...i_{M'}}\right| \left\|a^{\varepsilon_{i_1}}\right\| ... \left\|a^{\varepsilon_{i_{M'}}}\right\|,\\ \leq& \sum \left|w_{i_1...i_{M'}}\right| M...M,\\ \leq& \sum \left|w_{i_1...i_{M'}}\right| M^{\tilde{M}'},\\ \leq& \tilde{N}\tilde{w}M^{\tilde{M}'}.\end{aligned}$$

Dado que $\varphi_D(w)$ es un supremo y es finito, entonces para cada $w \in P_N^0$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ existe un espacio de Hilbert $\mathscr{K}_{n,w}$ y $b_{n,w} \in D(\mathscr{K})_{n,w}$ tal que $\|w(b_{n,w})\| \geq \varphi_D(w) - 1/n$. Sean $\mathscr{K} = \bigoplus_{\substack{n\in\mathbb{Z}^+,\\ w\in P_N^0}} \mathscr{K}_{n,w}$ y $b = \oplus_{\substack{n\in\mathbb{Z}^+,\\ w\in P_N^0}} b_{n,w}$. Por la Proposición 3.6 $b \in D(\bigoplus_{\substack{n\in\mathbb{Z}^+,\\ w\in P_N^0}} \mathscr{K}_{n,w}) = D(\mathscr{K})$.

Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $a \in D(\mathscr{H})$. Notemos que $\left\|X^i(b)\right\| = \left\|b^i\right\| = \sup_{\substack{n\in\mathbb{Z}^+,\\ w\in P_N^0}} \left\|b^i_{n,w}\right\|$, así que para cada $w \in P_N^0$ y $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\|w(b)\| \geq \|w(b_{n,w})\| \geq \varphi_D(w) - 1/n \geq \|w(a)\| - 1/n.$$

Al tomar el límite cuando $n \to \infty$ tenemos que $\|w(b)\| \geq \|w(a)\|$. Nótese que P_N^0 es denso en P_N bajo la norma dada por $\|\sum w_{i_1\ldots i_M} X^{\varepsilon_{i_1}} \ldots X^{\varepsilon_{i_M}}\| = \sum |w_{i_1\ldots i_M}|$. Por la densidad de P_N^0 y la continuidad de la norma tenemos que la desigualdad se preserva para todo $w \in P_N$. $\square$

Observación 3.14. *Sea D un dominio compacto de dimensión N y b un elemento maximal de D, entonces por la Proposición 3.10 y el Teorema 3.13* $D(\mathscr{H}) = \{a \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})^N : b \gg a\}$. *Análogamente, si* $\mathscr{K}$ *es un espacio de Hilbert y* $b \in \mathfrak{B}(\mathscr{K})^N$, *entonces por la Proposición 3.9* $D(\mathscr{K}) = \{a \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})^N : b \gg a\}$ *define un dominio compacto, para ello es suficiente definir* $\varphi(w) = \|w(b)\|$ *y considerar el dominio* D_φ.

Proposición 3.15. *Si D es un dominio compacto, entonces para cada espacio de Hilbert* $\mathscr{H}$, $D(\mathscr{H})$ *es cerrado en la topología uniforme, es decir, la topología de* $\mathfrak{B}(\mathscr{H})^N$ *inducida por la norma* $\|a\| = \text{máx}\left\|a^i\right\|$.

Demostración. Suponga que $a_n \in D(\mathscr{H})$, $b \in \mathfrak{B}(\mathscr{K})^N$ es el elemento $\ll$-maximal, $a_n \ll b$, $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})^N$. Por la Proposición 3.9 $a \ll b$. Dado que $D(\mathscr{H}) = \{c \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}) : c \ll b\}$, entonces $a \in D(\mathscr{H})$ y por lo tanto es cerrado en $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$. $\square$

3.2. Álgebras de funciones de operadores continuas

El trabajo realizado anteriormente nos permitirá formalizar la noción de función de operadores.

Definición 3.16. Sea D un dominio compacto. Una familia $F = \{F_{\mathscr{H}} : \mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert$\}$ de funciones $F_{\mathscr{H}} : D(\mathscr{H}) \to \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ es llamada una función de operadores continua si para cada espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ se satisfacen las siguientes dos condiciones:

1. Para cada $a \in D(\mathscr{H})$ se tiene que $F_{\mathscr{H}}(a) \in \mathrm{C}^*(a)$.

2. Si $a \in D(\mathscr{H})$ y $\pi : \mathrm{C}^*(a) \to \mathfrak{B}(\mathscr{K})$ es una representación, entonces $F_{\mathscr{K}}(\pi(a)) = \pi(F_{\mathscr{H}}(a))$.

Lema 3.17. *Sea* $N \in \mathbb{N}$ *y* $p \in P_N$, *entonces para cada dominio compacto D, de dimensión N, p induce una función de operadores continua, con familia* $F = \{F_{\mathscr{H}} : \mathscr{H}$ *es espacio de Hilbert*$\}$ *dada por* $F_{\mathscr{H}}(a) = p(a)$. *En particular, para cada* $i \in \{1,\ldots,N\}$, X^i *es una función de operadores continua.*

Demostración. Primero se probará que las funciones coordenada X^i son funciones de operadores continuas, posteriormente el resultado se extenderá a polinomios. Sea $i \in \{1,..,N\}$, D un dominio compacto de dimensión N, $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, $a \in D(\mathscr{H})$, y $\pi : \mathrm{C}^*(a) \to \mathfrak{B}(\mathscr{K})$ una representación, entonces

1. $X^i(a) = a^i \in \mathrm{C}^*(a)$.

2. $\pi(X^i(a)) = \pi(a^i) = X^i(\pi(a^1),\ldots,\pi(a^N)) = X^i(\pi(a))$.

En general, si $p \in P_N$ es de la forma $p = \sum w_{i_1 \dots i_M} X^{\varepsilon_{i_1}} X^{\varepsilon_{i_2}} \dots X^{\varepsilon_{i_M}}$, entonces

$$p(a) = \sum w_{i_1 \dots i_M} a^{\varepsilon_{i_1}} a^{\varepsilon_{i_2}} \dots a^{\varepsilon_{i_M}} \in \mathrm{C}^*(a),$$

y

$$\begin{aligned} \pi(p(a)) =& \pi\left(\sum w_{i_1 \dots i_M} a^{\varepsilon_{i_1}} a^{\varepsilon_{i_2}} \dots a^{\varepsilon_{i_M}}\right), \\ =& \sum w_{i_1 \dots i_M} \pi\left(a^{\varepsilon_{i_1}}\right) \pi\left(a^{\varepsilon_{i_2}}\right) \dots \pi\left(a^{\varepsilon_{i_M}}\right), \\ =& \sum w_{i_1 \dots i_M} \pi(a)^{\varepsilon_{i_1}} \pi(a)^{\varepsilon_{i_2}} \dots \pi(a)^{\varepsilon_{i_M}}, \\ =& p(\pi(a)). \end{aligned}$$

□

En lo que siga se omitirá el uso de $\mathscr{H}$ como subíndice cuando ésto no genere confusión.

Mostraremos un resultado análogo a la correspondencia entre álgebras C* conmutativas con 1 y espacios topológicos compactos presentado en el primer capítulo. Trabajaremos con álgebras C* no conmutativas y reemplazaremos a espacios topológicos compactos y funciones continuas por dominios compactos y funciones de operadores continuas, respectivamente. Para ello se demostrará que el conjunto de todas las funciones de operadores continuas sobre un dominio dado, dotadas con una estructura algebráica y topológica específica es un álgebra C*. Ésta es finitamente generada, y además resultará verdadero que toda álgebra C* finitamente generada es de éste tipo. Finalmente veremos que para un álgebra C* finitamente generada el dominio compacto asociado a ella es único, salvo por homeomorfismo.

Teorema 3.18. *Sea D un dominio compacto y F una función de operadores continua en D. Entonces existe una constante $M > 0$ tal que $\|F(a)\| \leq M$ para cada espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ y para cada $a \in D(\mathscr{H})$.*

Demostración. Por 3.13 existe un espacio de Hilbert $\mathscr{K}$ y $b \in D(\mathscr{K})$ tal que b es maximal respecto a $\gg$. Sea $M = \|F(b)\|$. Por 3.10 para cada espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ y cada $a \in D(\mathscr{H})$ existe una repersentación $\pi : \mathrm{C}^*(a) \to \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ tal que $\pi(b) = a$. Por la segunda propiedad de la Definición 3.16

$$\|F(a)\| = \|F(\pi(b))\| = \|\pi(F(b))\| \leq \|F(b)\| \leq M. \tag{3.2}$$

□

Definición 3.19. Sea D un dominio compacto. Denotaremos por $C(D)$ a la familia de todas las funciones de operadores continuas definidas en D.

Definición 3.20. Dotamos de estructura algebraica a $C(D)$ de la siguiente manera. Para cada $F, G \in C(D)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathscr{H}$ espacio de Hilbert y $a \in D(\mathscr{H})$:

$$\begin{aligned} (F+G)_{\mathscr{H}}(a) =& F_{\mathscr{H}}(a) + G_{\mathscr{H}}(a), \\ (\lambda F)_{\mathscr{H}}(a) =& \lambda F_{\mathscr{H}}(a), \\ (FG)_{\mathscr{H}}(a) =& F_{\mathscr{H}}(a) G_{\mathscr{H}}(a), \\ (F^*)_{\mathscr{H}}(a) =& (F_{\mathscr{H}}(a))^*. \end{aligned}$$

Asimismo, si $F \in C(D)$ definimos

$$\|F\| = \sup\{\|F_{\mathscr{H}}(a)\| : \mathscr{H} \text{ es espacio de Hilbert}, a \in D(\mathscr{H})\}.$$

Observación 3.21. *$F+G, \lambda F, FG, F^* \in C(D)$. Asimismo, por 3.18 $\|F\|$ es finito.*

Teorema 3.22. *Para cada dominio compacto D, el conjunto $C(D)$ dotado con la estructura algebráica y la norma definidas en 3.20 es un álgebra* C^*.

Demostración. Sean $\lambda \in \mathbb{C}$, $F, G \in C(D)$, $\mathscr{H}, \mathscr{K}$ espacios de Hilbert, $a \in D(\mathscr{H})$ y $\pi : \mathrm{C}^*(a) \to \mathfrak{B}(\mathscr{K})$ una representación. Entonces $F(a), G(a) \in \mathrm{C}^*(a)$, por lo que $F(a)+G(a), \lambda F(a), F(a)G(a)$, $(F(a))^* \in \mathrm{C}^*(a)$. Con ello se satisface la primera condición de la definición 3.16.

Como π es representación, entonces

$$\begin{aligned}
\pi((F+G)(a)) =& \pi(F(a)+G(a)) = \pi(F(a)) + \pi(G(a)),\\
=& F(\pi(a)) + G(\pi(a)) = (F+G)(\pi(a)),\\
\pi((\lambda F)(a)) =& \pi(\lambda F(a)) = \lambda \pi(F(a)),\\
=& \lambda F(\pi(a)) = (\lambda F)(\pi(a)),\\
\pi((F)^*(a)) =& \pi((F(a))^*) = (\pi(F(a))^*,\\
=& (F(\pi(a)))^* = (F)^*(\pi(a)).
\end{aligned}$$

Las propiedades algebráicas de la involución respecto a la suma, producto y producto por escalares son consecuencia inmediata de que estas operaciones se hayan definido de manera puntual en un álgebra involutiva.

Para demostrar que $\| \ \|$ es una norma observamos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\|F+G\| =& \sup\{\|(F+G)(a)\| : \mathscr{H} \text{ es espacio de Hilbert}, a \in D(\mathscr{H})\},\\
\leq& \sup\{\|F(a)\| + \|G(a)\| : \mathscr{H} \text{ es espacio de Hilbert}, a \in D(\mathscr{H})\},\\
\leq& \sup\{\|F(a)\| : \mathscr{H} \text{ es espacio de Hilbert}, a \in D(\mathscr{H})\}\\
& + \sup\{\|G(a)\| : \mathscr{H} \text{ es espacio de Hilbert}, a \in D(\mathscr{H})\},\\
=& \|F\| + \|G\|,\\
\|\lambda F\| =& \sup\{\|\lambda F(a)\| : \mathscr{H} \text{ es espacio de Hilbert}, a \in D(\mathscr{H})\},\\
=& |\lambda| \sup\{\|F(a)\| : \mathscr{H} \text{ es espacio de Hilbert}, a \in D(\mathscr{H})\},\\
=& |\lambda| \, \|F\|,\\
\text{Si } \|F\| =& 0, \text{ entonces } \|F(a)\| = 0 \text{ para cada espacio de Hilbert } \mathscr{H} \text{ y cada } a \in D(\mathscr{H}),\\
& \text{por lo tanto } F = 0.
\end{aligned}$$

Para probar que es un álgebra C^* también será necesario mostrar que se satisface la identidad C^*:

$$\begin{aligned}
\|FF^*\| =& \sup\{\|(FF^*)(a)\| : \mathscr{H} \text{ es espacio de Hilbert}, a \in D(\mathscr{H})\},\\
=& \sup\{\|F(a)\|^2 : \mathscr{H} \text{ es espacio de Hilbert}, a \in D(\mathscr{H})\},\\
=& \|F\|^2.
\end{aligned}$$

Finalmente demostramos que $C(D)$ es completo respecto a esta norma. Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $C(D)$. Por la definición de dicha norma $(F_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy para cada espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ y cada $a \in D(\mathscr{H})$. Como $\mathrm{C}^*(a)$ es completo, esta sucesión es convergente. Definimos $F(a) = \lim_{n\to\infty} F_n(a)$ y afirmamos que $F \in C(D)$:

- Por construcción de F, $F(a) \in \mathrm{C}^*(a)$

- Si π es una representación, entonces

$$\begin{aligned}\pi(F(a)) =&\pi(\lim_{n\to\infty} F_n(a)) = \lim_{n\to\infty}(\pi(F_n(a))),\\ =&\lim_{n\to\infty} F_n(\pi(a)) = F(\pi(a)).\end{aligned}$$

Por lo tanto $F \in C(D)$.

□

Para comprender mejor la estructura de $C(D)$ probaremos que esta álgebra C* es isomorfa a $C^*(b)$, con b elemento $\gg$-maximal de D.

Proposición 3.23. *Sea D un dominio compacto y b un elemento maximal respecto a $\gg$ de D. Entonces la función*

$$\begin{aligned}\varphi :&C(D) \to C^*(b),\\ &F \mapsto F(b)\end{aligned}$$

es un isomorfismo de álgebras C* *de $C(D)$ en $C^*(b)$.*

Demostración. Dado que la estructura algebráica en $C(D)$ está definida de manera puntual 3.20, φ es homomorfismo de álgebras C*. Además, si $F(b) = 0$, entonces por (3.2) $0 \le \|F(a)\| \le \|F(b)\| = 0$, es decir, $F(a) = 0$ para cada $a \in D$. Por lo tanto $F \equiv 0$ y φ es inyectiva. Será necesario probar que φ es sobreyectiva para concluir la demostración.

Sea $x \in C^*(b)$. Por la Proposición 3.10 para cada espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ y cada $a \in D(\mathscr{H})$ existe una única representación $\pi_a : C^*(b) \to \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ tal que $\pi_a(b) = a$. Definimos $F(a) = \pi_a(x)$. Veamos que $F \in C(D)$. Recordemos que ${C^*}_0(b) = \{p(b) : p \in P_N\}$ es densa en $C^*(b)$ y que la representación π_a es una función continua. De esta manera, si $p \in P_N$, entonces

$$\pi_a(p(b)) = p(\pi(b)) = p(a) \in C^*(a).$$

Por lo tanto $\pi_a : C^*(b) \to C^*(a)$ y $F(a) = \pi_a(x) \in C^*(a)$. Sea ρ una representación de $C^*(a)$ que actúe en un espacio de Hilbert $\mathscr{H}_\rho$, entonces $\rho(a) \in D(\mathscr{H}_\rho)$ y $\rho(a) = \rho(\pi_a(b)) = (\rho \circ \pi_a)(b)$. Por unicidad de la representación, $\rho \circ \pi_a = \pi_{\rho(a)}$ lo cual significa que

$$F(\rho(a)) = \pi_{\rho(a)}(x) = (\rho \circ \pi_a)(x) = \rho(\pi_a(x)) = \rho(F(a)).$$

Nótese también que π_b es la identidad ya que $\pi_b(b) = b = 1(b)$ y la representación es única. Así $F(b) = \pi_b(x) = x$, es decir, $\varphi(F) = x$. Por lo tanto φ es sobreyectiva, y en consecuencia $C(D)$ y $C^*(b)$ son isomorfas. □

El teorema clásico de Stone-Weierstrass asegura que si K es un compacto $K \subseteq \mathbb{C}^N$, el álgebra C* $C(K)$ está generada por las funciones coordenadas. En el caso de dominios compactos uno puede considerar a las funciones coordenadas X^i dadas por $X^i(a) = a^i$, $i = 1,\dots,N$ con N la dimensión del dominio D, $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $a \in D(\mathscr{H})$. La prueba de que $X^1,\dots,X^N \in C(D)$ se sigue inmediatamente de la Definición 3.16 y de la notación $\pi(a) = (\pi(a^1),\dots,\pi(a^N))$.

Teorema 3.24. *Para cada dominio compacto D de dimensión N, $C(D)$ es generada por las funciones coordenadas $X^1,\dots,X^N$.*

Demostración. Tomemos al isomorfismo φ definido en 3.23. Por 3.17 los polinomios $p \in P_N$ son funciones de operadores continuas. Asímismo, recordemos que $b^1,\dots,b^N$ generan a $C^*(b)$ y que $\varphi(X^i) = b^i$ para cada $i = 1,..,N$. Por lo tanto $X^1,\dots,X^N$ generan a $C(D)$. □

Corolario 3.24.1. *Para cada dominio compacto D de dimensión N, $C(D)$ es finitamente generada.*

Teorema 3.25. *Si F es una función de operadores continua, entonces para cada espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ la función $F_{\mathscr{H}} : D(\mathscr{H}) \to \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ es continua respecto a la topología inducida por la norma uniforme.*

Demostración. Sea $F \in C(D)$. Por 3.24 $F = \lim_{n\to\infty} F_n$, donde cada F_n es un polinomio en $X^1, X^{1^*}, ..., X^N, X^{N^*}$. Primero notamos que para cada espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ e $1 \leq i \leq N$, las funciones X^i y X^{i^*} son continuas: si $a, b \in D(\mathscr{H})$, entonces

$$\left\|X^i(a) - X^i(b)\right\| = \left\|a^i - b^i\right\| \leq \sup_{1\leq j\leq N} \left\|a^j - b^j\right\| = \|a - b\|,$$
$$\left\|X^{i^*}(a) - X^{i^*}(b)\right\| = \left\|a^{i^*} - b^{i^*}\right\| = \left\|a^i - b^i\right\| \leq \|a - b\|.$$

Las operaciones en $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ son continuas, por lo que cada F_n es una función continua de $D(\mathscr{H})$ en $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$. La convergencia en norma en $C(D)$ implica convergencia uniforme de funciones de $D(\mathscr{H})$ en $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$. Como el límite uniforme de funciones continuas es una función continua, entonces $F : D(\mathscr{H}) \to \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ es una función continua, con lo cual concluimos la prueba del teorema.

□

Definición 3.26. Sea D un dominio compacto de dimensión N y $M \in \mathbb{Z}^+$. Consideremos $S^1, ..., S^M \in C(D)$ y $S = (S^1, ..., S^M)$. Dado un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ y $a \in D(\mathscr{H})$ definimos $S_{\mathscr{H}}(a) = (S^1_{\mathscr{H}}(a), ..., S^M_{\mathscr{H}}(a)) \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})^M$.

Observación 3.27. *Sea D un dominio compacto, $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, $a \in D(\mathscr{H})$, $S^1, ..., S^M \in C(D)$ y $\pi : \mathrm{C}^*(a) \to \mathfrak{B}(\mathscr{K})$ una representación. Entonces*

- $\mathrm{C}^*(S(a)) \subseteq \mathrm{C}^*(a)$,
- $\pi(S(a)) = S(\pi(a))$.

Demostración. Para probar el primer enunciado es necesario notar que, para cada $i \in \{1, ..., M\}$, $S^i(a) \in \mathrm{C}^*(a)$. Por lo tanto $\mathrm{C}^*(S(a)) \subseteq \mathrm{C}^*(a)$.

Si π es una representación, entonces

$$\begin{aligned}
\pi(S(a)) =& \pi(S^1(a), ..., S^M(a)), \\
=& (\pi(S^1(a)), ..., \pi(S^M(a))), \\
=& (S^1(\pi(a)), ..., S^M(\pi(a))), \\
=& S(\pi(a)).
\end{aligned}$$

□

Definición 3.28. Sean D_1 y D_2 dominios compactos de dimensión N_1 y N_2 respectivamente. Supongamos que $S \in C(D_1)^{N_1}$. Diremos que S es un morfismo de D_1 en D_2 si y sólo si para cada espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ y cada $a \in D_1(\mathscr{H})$ se tiene que $S(a) \in D_2(\mathscr{H})$. En tal caso lo denotaremos por $S : D_1 \to D_2$.

Definición 3.29. Si $S : D_1 \to D_2$ y $F \in C(D_2)$, entonces para cada espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ y cada $a \in D_1 H$ definimos $S^\#(F)(a) = F(S(a))$.

Observación 3.30. *Sean D_1 y D_2 dominios compactos, $S : D_1 \to D_2$, $F \in C(D_2)$, entonces $S^\#(F) \in C(D_1)$.*

Demostración. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $a \in D_1(\mathscr{H})$. Como S es morfismo, entonces $S(a) \in D_2(\mathscr{H})$. Por otro lado $F \in C(D_2)$, así $F(S(a)) \in \mathrm{C}^*(S(a)) \subseteq \mathrm{C}^*(a)$, con lo cual se satisface la primera condición de 3.16.

Si $\pi : \mathrm{C}^*(a) \to \mathfrak{B}(\mathscr{K})$ es una representación, entonces

$$\begin{aligned}
\pi(S^\#(F)(a)) =& \pi(F(S(a))), \\
=& F(\pi(S(a))), \\
=& F(S(\pi(a))), \\
=& S^\#(F)(\pi(a)).
\end{aligned}$$

□

Definición 3.31. Supongamos que D_1, D_2 y D_3 son dominios compactos de dimensión N_1, N_2 y N_3, respectivamente, y que $S : D_1 \to D_2$ y $R : D_2 \to D_3$. Definimos $R \circ S = (S^\#(R^1), \ldots, S^\#(R^{N_3}))$.

Observación 3.32. *Si $\mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert y $a \in D_1(\mathscr{H})$, entonces $R \circ S(a) = R(S(a))$.*

Demostración. Observe que

$$\begin{aligned}
(R \circ S)(a) =& (S^\#(R^1)(a), \ldots, S^\#(R^{N_3})(a)), \\
=& (R^1(S(a)), \ldots, R^{N_3}(S(a))), \\
=& R(S(a)).
\end{aligned}$$

□

Con ello $R \circ S$ es un morfismo de D_1 en D_3 y de esta forma podemos afirmar que los dominios compactos junto con sus morfismos constituyen una categoría. De manera análoga a la categoría de espacio topológicos compactos y funciones continuas, diremos que $S : D_1 \to D_2$ es un homeomorfismo si existe un morfismo $R : D_2 \to D_1$ tal que $S \circ R = Id$ y $R \circ S = Id$. En tal caso diremos que D_1 y D_2 son homeomorfos.

Observación 3.33. *Sean D_1 y D_2 dominios compactos y $S : D_1 \to D_2$ un morfismo. Entonces $S^\# : C(D_2) \to C(D_1)$ es un homomorfismo unitario de álgebras* C^*.

Demostración. Sean $F, G \in C(D_2)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $a \in D_1(\mathscr{H})$. Entonces

$$\begin{aligned}
S^\#(\lambda F + G)(a) =& (\lambda F + G)(S(a)), \\
=& \lambda F(S(a)) + G(S(a)), \\
=& \lambda S^\#(F)(a) + S^\#(G)(a), \\
=& (\lambda S^\#(F) + S^\#(G))(a). \\
S^\#(FG)(a) =& (FG)(S(a)), \\
=& F(S(a))G(S(a)), \\
=& S^\#(F)(a)S^\#(G)(a), \\
=& (S^\#(F)S^\#(G))(a). \\
S^\#(F^*)(a) =& F^*(S(a)), \\
=& (F(S(a)))^*, \\
=& (S^\#(F)(a))^*
\end{aligned}$$

Para probar que es un homomorfismo unitario recurrimos a la Proposición 3.23. Tenemos que $1_{C(D_2)}$ es la función de operadores continua tal que si $a \in D_2(\mathscr{H})$, entonces $1_{C(D_2)}(a) = 1 \in \mathrm{C}^*(a)$. Luego $S^\#(1_{C(D_2)})(a) = 1_{C(D_2)}(S(a)) = 1 \in \mathrm{C}^*(a)$. Por lo tanto $S^\#$ es homomorfismo unitario de álgebras C^*. □

Veremos que todo homomorfismo $\chi : C(D_2) \to C(D_1)$ es de la forma $S^\#$ para algún morfismo $S : D_1 \to D_2$.

Proposición 3.34. *Sean D_1 y D_2 dominios compactos y $\chi : C(D_2) \to C(D_1)$ un homomorfismo unitario de álgebras C^*. Entonces existe un único morfismo $S : D_1 \to D_2$ tal que $\chi = S^\#$.*

Demostración. Sea N_2 la dimensión de D_2 y $X^1,\dots,X^{N_2}$ las funciones coordenadas en el dominio D_2. Para cada $i \in \{1,\dots,N_2\}$ definimos $S^i = \chi(X^i) \in C(D_1)$ y $S = (S^1,\dots,S^{N_2})$. Mostraremos que S es un morfismo de D_1 en D_2, es decir, para cada espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ y cada $a \in D_1(\mathscr{H})$, $S(a) \in D_2(\mathscr{H})$.

Sea $b \in D_2(\mathscr{K})$ un elemento maximal respecto a $\gg$ de D_2 y sea φ el isomorfismo definido en la Proposición 3.23 . Si definimos $\varphi_a : C(D_1) \to \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ como $\varphi_a(F) = F(a)$, entonces por la proposición citada tenemos que φ_a es un homomorfismo unitario de álgebras C^*. Definimos ρ como la siguiente composición de homomorfismos unitarios:

$$\rho : \mathrm{C}^*(b) \xrightarrow{\varphi^{-1}} C(D_2) \xrightarrow{\chi} C(D_1) \xrightarrow{\varphi_a} \mathfrak{B}(\mathscr{H}).$$

En primer lugar ρ es una representación de $\mathrm{C}^*(b)$, además para cada $i \in \{1,\dots,N_2\}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\rho(b^i) =& (\varphi_a \circ \chi \circ \varphi^{-1})(b^i),\\ =& (\varphi_a \circ \chi)(X^i),\\ =& \varphi_a(S^i),\\ =& S^i(a).\end{aligned}$$

Como $b \in D_2(\mathscr{K})$ y ρ es representación, entonces $\rho(b) \in D_2(\mathscr{H})$. Por lo tanto $S(a) \in D_2(\mathscr{H})$ y S es un morfismo de D_1 en D_2.

Además, si $a \in D_1(\mathscr{H})$, entonces

$$\chi(X^i)(a) = S^i(a) = X^i(S(a)) = S^\#(X^i)(a),$$

es decir, $\chi(X^i) = S^\#(X^i)$ para cada $i \in \{1,\dots,N_2\}$. Por el Teorema 3.24 $C(D_2)$ es generada por $X^1,\dots,X^{N_2}$, así que χ está completamente determinado por los valores que toma en los generadores. En consecuencia, como $S^\#$ coincide con χ en cada uno de los generadores $\chi = S^\#$ y S es único. □

Teorema 3.35. *Sea $\mathfrak{A}$ un álgebra C^* con 1 finitamente generada. Entonces existe un dominio compacto D tal que $\mathfrak{A}$ es isomorfa a $C(D)$. El dominio está definido de manera única, salvo por homeomorfismo.*

Demostración. Por [Wil19, Cor 4.29] podemos asumir que $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}(\mathscr{K})$ para algún espacio de Hilbert separable $\mathscr{K}$. Sean $b^1,\dots,b^N \in \mathfrak{A}$ los generadores de $\mathfrak{A}$ y $b = (b^1,\dots,b^N)$. Para cada espacio de Hilbert definimos

$$D(\mathscr{H}) = \{a \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})^N : a \ll b\}.$$

Por 3.14 D es un dominio compacto, b es maximal en D, y por 3.23 $C(D)$ es isomorfa a $\mathrm{C}^*(b) = \mathfrak{A}$.

Supongamos que D_1 y D_2 son dominios compactos tales que $C(D_1)$ y $C(D_2)$ son isomorfas a $\mathfrak{A}$, entoces $C(D_1)$ y $C(D_2)$ son isomorfas entre si. Sea $\psi : C(D_2) \to C(D_1)$ un isomorfismo entre ellas. Por 3.34 existe un único morfismo $S : D_1 \to D_2$ tal que $S^\# = \psi$. Veamos que S es un homeomorfismo. Como ψ^{-1} también es isomorfismo, entonces existe $R : D_2 \to D_1$ tal que $R^\# = \psi^{-1}$ y $R \circ S : D_1 \to D_1$. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $a \in D_1(\mathscr{H})$, entonces

$$\begin{aligned} R\circ S(a) =&(S^\#(R^1)(a),...,S^\#(R^N)(a)),\\ =&(S^\#(\psi^{-1}(X^1))(a),...,S^\#(\psi^{-1}(X^N))(a)),\\ =&(\psi(\psi^{-1}(X^1))(a),...,\psi(\psi^{-1}(X^N))(a)),\\ =&(X^1(a),...,X^N(a)),\\ =&(a^1,...,a^N),\\ =&a. \end{aligned}$$

Así $R \circ S = Id$ y de manera análoga $S \circ R = Id$ y el teorema queda demostrado. □

Definición 3.36. Sea $\mathfrak{A}$ un álgebra y $a, b \in \mathfrak{A}$. Se define el conmutador de a y b como $[a,b] = ab - ba$. Dos elementos $a, b \in \mathfrak{A}$ conmutan si y sólo si $[a,b] = 0$.

Definición 3.37. Sea $U \subseteq \mathfrak{A}$. Se define el conmutador de U como $U' = \{a \in \mathfrak{A} : \forall v \in U\,(av = va)\} = \{a \in \mathfrak{A} : \forall v \in U\,([a,v] = 0)\}$.

Lema 3.38. *Sea $\mathfrak{A}$ un álgebra C^* y $\mathfrak{B}$ una subálgebra C^* de $\mathfrak{A}$. Supongamos que para cualesquiera representaciones de $\mathfrak{A}$, π, π', si $\pi_{\restriction\mathfrak{B}} = \pi'_{\restriction\mathfrak{B}}$, entonces $\pi = \pi'$. Entonces $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.*

Demostración. Notemos que dado un subespacio cerrado y un punto fuera de éste existe una funcional que separa al punto y al subespacio. Por lo tanto será suficiente probar que si $f \in \mathfrak{A}^*$, entonces si $f(b) = 0$ para cada $b \in \mathfrak{B}$ f también se anula en todo $\mathfrak{A}$. Sea $f \in A^*$ con tales características. Por [KR97a, Cor 4.3.7], f se escribe como combinación lineal de a lo más cuatro estados, a saber $f = \rho + \imath\sigma$, con ρ y σ funcionales hermitianas y $\rho = \rho^+ - \rho^-$, $\sigma = \sigma^+ - \sigma^-$, cada una de ellas una funcional positiva, en particular, cada una de ellas es un múltiplo escalar de un estado. De esta manera podemos expresar a f como combinación lineal de estados, $f = \sum_{i=1}^4 \lambda_i\omega_i$, con $\lambda_i \in \mathbb{C}$ y ω_i estado para $1 \leq i \leq 4$, de tal forma que $\lambda_1\omega_1 = \rho^+, \lambda_2\omega_2 = -\rho^-, \lambda_3\omega_3 = \imath\sigma^+, \lambda_4\omega_4 = -\imath\sigma^-$. Por el Teorema de representación de GNS, para cada uno de los estados existe una única representación cíclica $\{\pi_i, \mathscr{H}_i\}$ con vector cíclico ξ_i. Definimos $\mathscr{H} = \bigoplus_{i=1}^4 \mathscr{H}_i$ y $\pi = \bigoplus_{i=1}^4 \pi_i : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathscr{H})$. Entonces, para cada $a \in \mathfrak{A}$:

$$\begin{aligned} f(a) =& \sum_{i=1}^4 \lambda_i\omega_i(a),\\ =& \sum_{i=1}^4 \lambda_i \langle \pi_i(a)\xi_i, \xi_i\rangle . \end{aligned}$$

Sea $V \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ un operador unitario que conmute con $\pi(b)$ para cada $b \in \mathfrak{B}$. Para cada $a \in \mathfrak{A}$ definimos $\pi'(a) = V^*\pi(a)V$. Entonces π' es una representación de $\mathfrak{A}$ y $\pi_{\restriction\mathfrak{B}} = \pi'_{\restriction\mathfrak{B}}$. Por hipótesis $\pi = \pi'$, es decir, V conmuta con $\pi(a)$ para cada $a \in \mathfrak{A}$ y cada operador unitario $V \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ que conmute con todos los elementos de $\pi(\mathfrak{B})$. Notemos primero que $\pi(\mathfrak{B})'$ es un álgebra C^* y que sus elementos unitarios son exactamente aquellos elementos unitarios de

$\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ que conmutan con todos los elementos de $\pi(\mathfrak{B})$. Por el Teorema de Russo-Dye [Dav96, Teo I.8.4] la bola unitaria de un álgebra C^* unitaria es la cerradura del casco convexo del conjunto de los elementos unitarios del álgebra, de tal manera que para cada $a \in \mathfrak{A}$, $\pi(a)$ conmuta con todos los elementos de $\mathfrak{A}$, es decir, $\pi(\mathfrak{A}) \subseteq \pi(\mathfrak{B})''$. En virtud del Teorema del Doble Conmutador [Arv98, Teo 1.2.1] $\pi(\mathfrak{B})$ es denso en $\pi(\mathfrak{A})$, tanto en la topología de operadores fuerte, como en la débil. Por lo tanto, dado $a \in \mathfrak{A}$, existe una red $b_\alpha \in \mathfrak{B}$ tal que $\pi(a) = \text{w-lim}\,\pi(b_\alpha)$. En consecuencia

$$\begin{aligned} f(a) =& f(\text{w-lim}\, b_\alpha), \\ =& \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \langle \text{w-lim}\,\pi_i(b_\alpha)\xi_i, \xi_i \rangle, \\ =& \text{lím} \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \langle \pi_i(b_\alpha)\xi_i, \xi_i \rangle, \\ =& \text{lím}\, f(b_\alpha), \\ =& 0, \end{aligned}$$

con lo cual el lema queda demostrado. □

Teorema 3.39. *Sea D un dominio compacto de dimensión N y $S^1, \ldots, S^M \in C(D)$. Supongamos que para cualquier espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ y para cada $a_1, a_2 \in D(\mathscr{H})$ se tiene que $S(a_1) = S(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$. Para cada espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ definimos*

$$D_1(\mathscr{H}) = \{S(a) : a \in D(\mathscr{H})\}.$$

Además, si $c \in D_1(\mathscr{H})$ entonces definimos $R^k(c) = a^k$, donde a es el único elemento de $D(\mathscr{H})$ tal que $S(a) = c$. Entonces D_1 es un dominio compacto, $R^1, \ldots, R^N \in C(D_1)$ y $R = (R^1, \ldots, R^N)$ es un morfismo de D_1 en D. Este morfismo es el inverso de S.

Demostración. En 3.34 se observó que para cada espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ y cada $a \in D(\mathscr{H})$, $C^*(S(a)) \subseteq C^*(a)$. Sean π, π' representaciones de $C^*(a)$ que coincidan en $C^*(S(a))$. Entonces

$$S(\pi(a)) = \pi(S(a)) = \pi'(S(a)) = S(\pi'(a)).$$

Por inyectividad de S se tiene que $\pi = \pi'$, y por el Lema 3.38 $C^*(a) = C^*(S(a))$.

Veamos que D_1 es un dominio compacto. Sea b un elemento maximal de D. Para cada espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ y cada $a \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})^M$ los siguientes enunciados son equivalentes:

1. $a \in D_1(\mathscr{H})$.
2. Existe $x \ll b$ tal que $S(x) = a$.
3. Existe una representación $\pi : C^*(a) \to \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ tal que $S(\pi(b)) = a$.
4. Existe una representación $\pi : C^*(S(a)) \to \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ tal que $\pi(S(b)) = a$.
5. $a \ll S(b)$.

($1 \Leftrightarrow 2$) se sigue de la definición de D_1 y de 3.14. $a \in D_1(\mathscr{H})$ si y sólo si existe $x \in D(\mathscr{H})$ tal que $a = S(x)$, por otro lado $D(\mathscr{H}) = \{d \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})^N : d \ll b\}$. Por lo tanto, existe $x \ll b$ tal que $S(x) = a$. De manera similar, si $x \ll b$ y $S(x) = a$, entonces $x \in D(\mathscr{H})$ y $a \in D_1(\mathscr{H})$.

(2 $\Leftrightarrow$ 3) y (4 $\Leftrightarrow$ 5) se siguen de 3.10. $x \ll b$, si y sólo si existe una representación $\pi : \mathrm{C}^*(b) \to \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ tal que $\pi(b) = x$, por lo que $S(x) = S(\pi(b))$. Para concluir basta recordar que $\pi(S(x)) = S(\pi(x))$.

Para mostrar (3 $\Leftrightarrow$ 4) basta agregar que $\mathrm{C}^*(a) = \mathrm{C}^*(S(a))$, de forma que toda representación $\pi : \mathrm{C}^*(a) \to \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ es también una representación $\pi : \mathrm{C}^*(S(a)) \to \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ y viceversa.

Finalmente, de la equivalencia (1 $\Leftrightarrow$ 5) se muestra que $D_1(\mathscr{H}) = \{a \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})^M : a \ll S(b)\}$, con lo cual se prueba que D_1 es un dominio compacto.

A continuación demostraremos que D y D_1 son isomorfos. Supongamos que $c \in D_1(\mathscr{H})$, por definición existe $a \in D(\mathscr{H})$ tal que $c = S(a) = (S^1(a), \ldots, S^M(a))$. Para $1 \leq k \leq N$ definimos $R^k(c) = a^k$ y notamos que

$$R^k(c) = a^k \in \mathrm{C}^*(a) = \mathrm{C}^*(S(a)) = \mathrm{C}^*(c),$$

por lo tanto R^k satisface la primera condición de la definición de función de operador continua. Supongamos que π es una representación de $\mathrm{C}^*(c)$, entonces

$$\begin{aligned}
\pi(c) =& \pi(S(a)),\\
=& \pi(S^1(a), \ldots, S^M(a)),\\
=& (\pi(S^1(a)), \ldots, \pi(S^M(a))),\\
=& (S^1(\pi(a)), \ldots, S^M(\pi(a))),
\end{aligned}$$

por lo tanto $R^k(\pi(c)) = \pi(a^k) = \pi(R^k(c))$, con lo cual se satisface la segunda condición de la definición y se demuestra que $R^k \in C(D_1)$.

Para concluir, si $c \in D_1(\mathscr{H})$, entonces existe $a \in D(\mathscr{H})$ tal que $S(a) = c$ y $R(S(a)) = R(c) = (R^1(c), \ldots, R^N(c)) = (a^1, \ldots a^N) = a$. Por lo tanto R es un morfismo $R : D_1 \to D$ y es inverso de S.

□

Teorema 3.40. *1. Sea F una función de operadores continua definida en un dominio compacto de dimensión N, D, entonces la familia $D' = \{(a^1, a^2, \ldots, a^N, F(a^1, \ldots, a^N))\}$ es el dominio compacto de dimensión $N + 1$.*

2. Sea D' un dominio compacto de dimensión $N + 1$ tal que para cada espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ y cada $a \in \mathfrak{B}(H)^N$ existe a lo más un $b \in \mathfrak{B}(H)$ para el cual $(a^1, a^2, \ldots, a^N, b) \in D'(\mathscr{H})$. Si denotamos por $D(\mathscr{H})$ al conjunto de aquellos $a \in \mathfrak{B}(H)^N$ para los cuales el operador b existe y definimos $F_{\mathscr{H}}(a) = b$ se tiene que:

- *D es un dominio compacto de dimensión N.*
- *F es una función de operadores continua definida en D.*

Demostración. Empecemos por probar la primera afirmación, para ello definimos para cada espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ y $a \in D(\mathscr{H})$:

$$S^k(a) = \begin{cases} a^k & \text{si } 1 \leq k \leq N \\ F(a) & \text{si } k = N + 1. \end{cases} \quad \text{y } S = (S^1, \ldots, S^N, S^{N+1}).$$

Notemos que $S^k \in C(D)$ si $1 \leq k \leq N + 1$, las primeros N ya que corresponden a las coordenadas y la última por hipótesis. Asímismo, si $\mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert y $a, b \in D(\mathscr{H})$ son tales que $S(a) = S(b)$, entonces por definición de S tenemos que $a = b$. Basta notar que

S satisface las hipótesis de 3.39, $D'(\mathscr{H}) = \{S(a) : a \in D(\mathscr{H})\}$ y por dicho teorema podemos afirmar que D' es un dominio compacto.

Para probar la segunda parte tomemos un dominio compacto de dimensión $N+1$, D', que satisfaga las hipótesis de la proposición, y un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$. Para cada $a \in D'(\mathscr{H})$ definimos $S^k(a) = a^k$ si $1 \leq k \leq N$ y $S = (S^1, ..., S^N)$. Sean $a, b \in D'(\mathscr{H})$ tales que $S(a) = S(b)$, entonces $a^k = b^k$ si $1 \leq k \leq N$, y por hipótesis existe un único elemento $c \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ tal que $(a^1, ..., a^N, c) \in D'(\mathscr{H})$, a saber $a^{N+1} = c = b^{N+1}$. Por lo tanto $a = b$, se satisfacen las hipótesis del Teorema 3.39 y $D(\mathscr{H})$, que coincide con $\{S(a) : a \in D'(\mathscr{H})\}$, es un dominio compacto y $F \in C(D)$, ya que $F_{\mathscr{H}}(a) = R^{N+1}(a)$, donde R es el morfismo inverso de S.

□

Definición 3.41. La familia D de conjuntos $D(\mathscr{H}) \subseteq \mathscr{C}(\mathscr{H})^N$ es llamada dominio medible de dimensión N si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. Para cualesquiera espacios de Hilbert $\mathscr{H}, \mathscr{K}$, cualquier $a \in D(\mathscr{H})$ y cualquier operador unitario $U : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ se tiene que $UaU^* \in D(\mathscr{K})$.

2. Para cualquier espacio de medida (Λ, μ) y cualquier campo medible de espacios de Hilbert $\{\mathscr{H}(\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$
$$\int_{\Lambda}^{\oplus} a(\lambda) d\mu(\lambda) \in D\left(\int_{\Lambda}^{\oplus} \mathscr{H}(\lambda) d\mu(\lambda)\right)$$
si y sólo si $a(\lambda) \in D(\mathscr{H})(\lambda))$ casi dondequiera.

Teorema 3.42. *Todo dominio compacto es un dominio medible.*

Demostración. Empezaremos por mostrar que se satisface la primera condición de la definición. Sea D un dominio compacto de dimensión N, $\mathscr{H}, \mathscr{K}$ espacios de Hilbert y $a \in D(\mathscr{H})$. Sea $U : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ unitario y $w \in P_N$, entonces

$$\begin{aligned}
\|w(UaU^*)\| &= \sum w_{i_1 \dots i_M} (Ua^{\varepsilon_{i_1}} U^*)(Ua^{\varepsilon_{i_2}} U^*)...(Ua^{\varepsilon_{i_M}} U^*), \\
&= \left\| \sum w_{i_1 \dots i_M} U a^{\varepsilon_{i_1}} a^{\varepsilon_{i_2}} ... a^{\varepsilon_{i_M}} U^* \right\|, \\
&= \left\| U (\sum w_{i_1 \dots i_M} a^{\varepsilon_{i_1}} a^{\varepsilon_{i_2}} ... a^{\varepsilon_{i_M}}) U^* \right\|, \\
&\leq \|U\| \left\| (\sum w_{i_1 \dots i_M} a^{\varepsilon_{i_1}} a^{\varepsilon_{i_2}} ... a^{\varepsilon_{i_M}}) \right\| \|U^*\|, \\
&= \|w(a)\|,
\end{aligned}$$

de 3.10 tenemos que $UaU^* \ll a$ y al mismo tiempo $a \ll b$ para algún elemento maximal $b \in D$, así $UaU^* \ll b$ y $UaU^* \in D(\mathscr{K})$.

Para probar la segunda condición tomemos un espacio de medida (Λ, μ) y un campo medible de espacios de Hilbert $\{\mathscr{H}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Supongamos que $\{a^k(\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ son campos medibles de operadores acotados para $k \in \{1, ..., N\}$.

Sea $b \in \mathfrak{B}(\mathscr{K})^N$. Si $a(\lambda) \ll b$ casi dondequiera, entonces para dichos $\lambda \in \Lambda$ se tiene que $\|w(a(\lambda))\| \leq \|w(b)\|$ para cada $w \in P_N$, entonces

$$\begin{aligned}
\left\| w\left(\int_{\Lambda}^{\oplus} a(\lambda) d\mu(\lambda)\right) \right\| &= \left\| \int_{\Lambda}^{\oplus} w(a(\lambda)) d\mu(\lambda) \right\|, \\
&= \operatorname*{sup\,es}_{\lambda \in \Lambda} \|w(a(\lambda))\|, \\
&\leq \|w(b)\|,
\end{aligned}$$

con ello se asegura que $a = \int_\Lambda^\oplus a(\lambda)d\mu(\lambda) \ll b$ y en consecuencia $a \in D(\int_\Lambda^\oplus H_\lambda d\mu(\lambda))$.

Supongamos ahora que $\int_\Lambda^\oplus a(\lambda)d\mu(\lambda) \ll b$, entonces para todo $w \in P_N$ se tiene que

$$\begin{aligned}\sup_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{es}\,\|w(a(\lambda))\| &= \left\|\int_\Lambda^\oplus w(a(\lambda))d\mu(\lambda)\right\|,\\ &= \left\|w(\int_\Lambda^\oplus a(\lambda)d\mu(\lambda))\right\|,\\ &\leq \|w(b)\|.\end{aligned}$$

Lo anterior significa que para cada $w \in P_N$ existe un conjunto $\Lambda_w \subseteq \Lambda$ tal que $\mu(\Lambda_w) = 0$ y $\|w(a(\lambda))\| \leq \|w(b)\|$ si $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_w$. Definimos $\Lambda_0 = \bigcup_{w\in P_N^0} \Lambda_w$, dado que P_N^0 es numerable tenemos que $\mu(\Lambda_0) = 0$ y $\|w(a(\lambda))\| \leq \|w(b)\|$ si $w \in P_N^0, \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_0$. Por densidad de P_N^0 el resultado se extiende a todos los elementos de P_N. Con ello hemos demostrado que $\|w(a(\lambda))\| \leq \|w(b)\|$ casi dondequiera, es decir $a(\lambda) \ll b$ c.d.

Concluimos que

$$\int_\Lambda^\oplus a(\lambda)d\mu(\lambda) \ll b \quad \text{si y sólo si} \quad a(\lambda) \ll b \text{ casi dondequiera.}$$

Finalmente, recordamos que $D(\int_\Lambda^\oplus \mathscr{H}(\lambda)d\mu(\lambda)) = \{a \in \mathfrak{B}(\int_\Lambda^\oplus \mathscr{H}(\lambda)d\mu(\lambda))^N : a \ll b\}$, con lo cual $\int_\Lambda^\oplus a(\lambda)d\mu(\lambda) \in D(\int_\Lambda^\oplus \mathscr{H}(\lambda)d\mu(\lambda))$ y queda demostrada la segunda condición de la definición. □

Observación 3.43. *En general, la imagen de un dominio compacto bajo una función de operadores continua no es un dominio compacto.*

Demostración. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert. Definimos

$$\begin{aligned}D(\mathscr{H}) =& \{(U,V) \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})^2 : U,V \text{ son operadores unitarios y } UV = e^i VU\},\\ S(U,V) =& U, \text{ si } (U,V) \in D(\mathscr{H}).\end{aligned}$$

Afirmamos que D es un dominio compacto y $S \in C(D)$. Para probar la primera condición consideremos $a = (a^1,a^2) \in D(\mathscr{H})$ y π una representación de $\mathrm{C}^*(a)$ en $\mathfrak{B}(\mathscr{K})$, entonces

$$\pi(a^1)(a^2) = \pi(a^1a^2) = \pi(e^i a^2 a^1) = e^i \pi(a^1)\pi(a^2).$$

Recordemos que si $U \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ es unitario, entonces $\|U\| = 1$, así $\sup_{a\in D(\mathscr{H})}\left\|a^\lambda\right\| \leq 1$, con lo cual se satisface la tercera condición. Sea $a \in \mathfrak{B}(H)^2$ y $\{\pi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de representaciones de $\mathrm{C}^*(a)$ tal que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \ker\pi_\lambda = \{0\}$ y $\pi(a) \in D(\mathscr{H}_\lambda)$ para cada $\lambda \in \Lambda$, entonces $\pi_\lambda(a^1a^2 - e^i a^2 a^1) = 0$ para cada $\lambda \in \Lambda$ y se comprueba que $a \in D(\mathscr{H})$ y que éste es un dominio compacto. Basta notar que S es una función coordenada, por lo tanto $S \in C(D)$.

Dado un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ definimos

$$\begin{aligned}D_1(\mathscr{H}) =& \{S(U,V) : (U,V) \in D(\mathscr{H})\},\\ =& \{U \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}) : \text{existe } V \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}) \text{ tal que } (U,V) \in D(\mathscr{H})\},\end{aligned}$$

y afirmamos que éste no es un dominio compacto, para ello veremos que tampoco es un dominio medible.

Sea $U \in D_1(\mathscr{H})$. Entonces $\emptyset \neq \sigma(U) \subseteq \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$. Como V es unitario, entonces $V^{-1}UV = e^i U$. Notemos que $V^{-1}UV - \lambda 1 = V^{-1}(U - \lambda 1)V$ para $\lambda \in \mathbb{C}$, por lo que $V^{-1}UV - \lambda 1$ es invertible si y sólo si $U - \lambda 1$ lo es y $\sigma(V^{-1}UV) = \sigma(U)$. Al usar este resultado y el cálculo funcional para funciones continuas tenemos que $\sigma(U) = e^i\sigma(U)$, es decir, el espectro es invariante bajo rotaciones de 1 radián. Recordemos que toda rotación de ángulo $[0,2\pi]$ se puede escribir de la forma $2\pi t$ con $t \in [0,1]$. Al tomar un punto $p \in \mathbb{S}^1$ la órbita de dicho punto bajo la acción del grupo de rotaciones generada por el ángulo $2\pi t$ será finita si $t \in \mathbb{Q}$ y densa en $\mathbb{S}^1$ si $t \in \mathbb{I}$. Dado que $\sigma(U)$ es compacto, necesariamente $\sigma(U) = \mathbb{S}^1$. Por otro lado, dado que U es normal, $C^*(U)$ es isomorfa a $C(\mathbb{S}^1)$. Por [Mur90, Teo 4.4.4] existe una medida positiva regular Boreliana, μ, tal que el álgebra de von Neumann generada por U es isomorfa a $L^\infty(\mathbb{S}^1,\mu)$. Por [Dou98, Cor 4.53] $C(\mathbb{S}^1)$ es w*-denso en $L^\infty(\mathbb{S}^1,\mu)$ de modo que $supp(\mu) = \mathbb{S}^1$, por lo tanto existe $B \subsetneq \mathbb{S}^1$ medible tal que $0 < \mu(B) < \mu(\mathbb{S}^1)$ y $L^\infty(\mathbb{S}^1,\mu) = \{f : supp(f) \subseteq B\} \oplus \{f : supp(f) \subseteq \mathbb{S}^1 \setminus B\}$. En consecuencia U se puede descomponer de la forma $U = U_1 \oplus U_2$ con $\sigma(U_1), \sigma(U_2) \subsetneq \mathbb{S}^1$, por lo que $U_1, U_2 \notin \mathbb{D}_1(\mathscr{H})$. Ésto significa que D_1 no satisface la segunda condición de la Definición 3.41, y por el Teorema 3.42 tampoco es compacto. $\square$

Capítulo 4

Ejemplos y aplicaciones

4.1. El producto libre $\mathbb{C}^2 * \mathbb{C}^2$

Definición 4.1. Sean $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ y $\mathfrak{D}$ álgebras C* y supongamos que existen homomorfismos* $\gamma_i : \mathfrak{D} \to \mathfrak{A}_i$. El pushout de $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{D}, \gamma_1, \gamma_2)$ es la única álgebra C* denotada por $\mathfrak{A}_1 *_{\mathfrak{D}} \mathfrak{A}_2$, junto con los homomorfismos $\iota_i : \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}_1 *_{\mathfrak{D}} \mathfrak{A}_2$ que satisfacen la ecuación $\iota_1 \circ \gamma_1 = \iota_2 \circ \gamma_2$ y la siguiente propiedad:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D} \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "\gamma_2"] & \mathfrak{A}_1 \arrow[d, "\iota_1"] \arrow[ddr, bend left, "\varphi_1"] & \\
\mathfrak{A}_2 \arrow[r, "\iota_2"] \arrow[drr, bend right, "\varphi_2"'] & \mathfrak{A}_1 *_D \mathfrak{A}_2 \arrow[dr, dashed, "\varphi"] & \\
& & \mathfrak{B}
\end{tikzcd}$$

En lo que sigue nos restringiremos al caso en que $\mathfrak{D} = \mathbb{C}$, las álgebras son unitarias y los homomorfismos* son unitarios. La notación utilizada será $\mathfrak{A}_1 * \mathfrak{A}_2$.

Proposición 4.2. *Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $D(\mathscr{H}) = \{(P,Q) \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})^2 : P^2 = P,\ Q^2 = Q,\ P^* = P,\ Q^* = Q\}$. Afirmamos que $D = \{D(\mathscr{H}) : \mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert$\}$ es un dominio compacto.*

Demostración. Veamos que se satisfacen las tres condiciones de la definición.

- Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $a = (P,Q) \in D(\mathscr{H})$. Si $\mathscr{K}$ es un espacio de Hilbert y $\pi : \mathrm{C}^*(a) \to \mathfrak{B}(\mathscr{K})$ una representación, entonces $\pi(P)^2 = \pi(P^2) = \pi(P)$ y $\pi(P)^* = \pi(P^*) = \pi(P)$. Se observa el mismo comportamiento al aplicar π a Q, por lo que $\pi(a) \in D(\mathscr{K})$.

- Sea $a = (R,S) \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})^2$ y $\{\pi_\lambda : \mathrm{C}^*(a) \to \mathfrak{B}(\mathscr{H}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de representaciones separadora y supongamos sin pérdida de generalidad que R no es una proyección, es decir, $R^2 - R \neq 0$ o $R^* - R \neq 0$. Entonces existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $\pi_\lambda(R)^2 \neq \pi_\lambda(R)$ o $\pi_\lambda(R)^* \neq \pi_\lambda(R)$, y en cualquiera de estos casos concluimos que $\pi_\lambda(a) \notin D(\mathscr{H}_\lambda)$.

- Para probar que se satisface la tercera condición basta recordar que si P es proyección, entonces $\|P\| \leq 1$, así $\sup_{a \in D(\mathscr{H})} \left\|a^i\right\| \leq 1 = M$ para cualquier espacio de Hilbert $\mathscr{H}$.

$\square$

Teorema 4.3. $\mathbb{C}^2 * \mathbb{C}^2 \cong C(D)$.

Demostración. Veamos que $C(D)$ satisface la propiedad universal. Es necesario empezar por definir $\gamma_i, \iota_i,\ i = 1,2$. Notemos que necesariamente $\gamma_i(z) = (z,z),\ i = 1,2,\ z \in \mathbb{C}$. Consideremos X^1, X^2, las funciones coordenada en D y recordemos que éstas generan a $C(D)$. Definimos

$$\begin{aligned} \iota_1((1,0)) =& X^1, \\ \iota_2((1,0)) =& X^2. \end{aligned}$$

Veamos que éstos están bien definidos. Sean $(x,y),(z,w) \in C^2$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Empezamos por descomponer $(x,y) = y(1,1) + (x-y)(1,0)$ y $(z,w) = w(1,1) + (z-w)(1,0)$, entonces:

$$\begin{aligned} \iota_i((x,y)+(z,w)) =& \iota_i((x+z,y+w)), \\ =&(y+w)1 + ((x+z)-(y+w))X^i, \\ =&y1 + (x-y)X^i + w1 + (z-w)X^i, \\ =&\iota_i((x,y)) + \iota_i(z,w). \\ \iota_i((x,y)(z,w)) =& \iota_i((xz,yw)), \\ =&(yw)1 + (xz-yw)X^i, \\ =&yw1 + (yz - yw + wx - wy)X^i + (xz - xw - yz + yw)(X^i)^2, \\ =&\left(y1 + (x-y)X^i\right)\left(w1 = (z-w)X^i\right), \\ =&\iota_i((x,y))\iota_i(z,w). \\ \iota_i((x,y)^*) =& \iota_i((\overline{x},\overline{y})), \\ =&\overline{y}1 + (\overline{x}-\overline{y})X^i, \\ =&\left(y1 + (x-y)X^i\right)^*, \\ =&\iota_i((x,y))^*. \end{aligned}$$

Así, los homomorfismos* ι_i están bien definidos. Además

$$\begin{aligned} \iota_1 \circ \gamma_1(z) =& \iota_1((z,z)), \\ =&z1, \\ =&\iota_2((z,z)), \\ =&\iota_2 \circ \gamma_2(z). \end{aligned}$$

Ahora veamos que son encajes, para ello tomamos $0 \neq (z,w) \in \mathbb{C}^2$. Usamos la misma descomposición que antes para obtener $\iota_1((z,w)) = w1 + (z-w)X^1$ y afirmamos que $w1 + (z-w)X^1 \not\equiv 0$. Si $z = w$ el resultado es inmediato. Supongamos que $z \neq w$ y recordemos que la identidad y 0 siempre son proyecciones, entonces $(w1 + (z-w)X^1)(P,Q) = w1 + (z-w)P$. Si $w = 0$ tomamos $P = 1$ y se tiene que $\iota_1((z,w)) = zP \neq 0$, si $w \neq 0$ tomamos $P = 0$ y $\iota_1((z,w)) = w1 \neq 0$. Por un proceso análogo se demuestra que ι_2 es encaje.

Para concluir es necesario probar que si $\mathfrak{A}$ es un álgebra C* y $\varphi_i : \mathbb{C}^2 \to \mathfrak{A},\ i = 1,2$ son homomorfismos*, entonces se factorizan de manera única por medio de un homomorfismo* $\varphi : C(D) \to \mathfrak{A}$. Sea $\varphi(X^1) = \varphi_1((1,0))$ y $\varphi(X^2) = \varphi_2((1,0))$, así $\varphi \circ \iota_i = \varphi_i$. Nuevamente, el que φ esté bien definido y su unicidad está garantizado por el hecho de que $\mathbb{C}^2$ y $C(D)$ son generadas por $(1,0)$ y $\{X^1, X^2\}$, respectivamente. En consecuencia $C(D)$ coincide con el producto libre $\mathbb{C}^2 * \mathbb{C}^2$. $\square$

Observación 4.4. *Si D es un dominio compacto y $\mathscr{H}$ es un espacio de de Hilbert, entonces es posible que $D(\mathscr{H}) = \emptyset$. Para notar lo anterior basta considerar el álgebra $\mathfrak{A} = M_n(\mathbb{C})$ para $n \geq 2$, D el dominio compacto asociado a ésta, y $\mathscr{H} = \mathbb{C}$. Dado que toda funcional multiplicativa en $\mathfrak{A}$ es 0 [Dou98, Ejercicio 2.5], no existen representaciones de álgebra unitaria $\rho : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathscr{H}) = \mathbb{C}$ y $D(\mathscr{H}) = \emptyset$.*

4.2. El producto libre de álgebras C*

Definición 4.5. Un espacio de Hilbert punteado es un par $(\mathscr{H}, \xi)$ en el cual $\mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ y $\xi \in \mathscr{H}$ es un vector unitario. Si $(\mathscr{H}, \xi)$ es un espacio de Hilbert punteado, entonces denotamos por $\mathscr{H}^\circ$ al complemento ortogonal del subespacio generado por ξ:

$$\mathscr{H}^\circ = \mathscr{H} \ominus \mathbb{C}\xi = \{h \in \mathscr{H} : \langle h, \xi \rangle = 0\}.$$

Si $\mathscr{H} = \mathbb{C}\xi \oplus \mathscr{H}^\circ$ denotaremos por h° a los elementos de $\mathscr{H}^\circ$, y por $P_\xi, \mathscr{P}_\xi^\perp : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ a las proyectiones ortogonales sobre $\mathbb{C}\xi$ y $\mathscr{H}^\circ$, respectivamente.

Definición 4.6. Sea $(\mathscr{H}_i, \xi_i)_{i \in I}$ una familia de espacios de Hilbert punteados. Su producto libre $*_{i \in I} \mathscr{H}_i = (\mathscr{H}, \xi)$ está dado por

$$\mathscr{H} = \mathbb{C}\xi \oplus \bigoplus_{n \geq 1} \left(\bigoplus_{i_1 \neq \ldots \neq i_n} \mathscr{H}_{i_1}^\circ \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}_{i_n}^\circ \right).$$

Lema 4.7. *Si $(\mathscr{H}_1, \xi_1)$ y $(\mathscr{H}_2, \xi_2)$ son espacios de Hilbert punteados y $(\mathscr{H}, \xi)$ es su producto libre, entonces existen encajes de $\mathfrak{B}(\mathscr{H}_\iota)$ en $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ para $\iota = 1, 2$.*

Demostración. Para ι fija definimos

$$\mathscr{H}(\iota) = \mathbb{C}\xi \oplus \bigoplus_{n \geq 1} \left(\bigoplus_{\substack{i_1 \neq \ldots \neq i_n \\ i_1 \neq \iota}} \mathscr{H}_{i_1}^\circ \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}_{i_n}^\circ \right),$$

y afirmamos que $\mathscr{H} \cong \mathscr{H}_\iota \otimes \mathscr{H}(\iota)$. Para demostrar dicha afirmación se exhibirá un isomorfismo $V_\iota : \mathscr{H} \to \mathscr{H}_\iota \otimes \mathscr{H}(\iota)$. Nótese que será suficiente definir V_ι en los tensores puros y en los elementos de la suma que determinan a $\mathscr{H}$, y mostrar que V_ι preserva el producto interior para garantizar que dicha definición se puede extender a todo el espacio. Supongamos que $h_{i_j}^\circ \in \mathscr{H}_{i_j}^\circ$ y que $i_1 \neq \ldots \neq i_n$

$$V_i(\xi) = \xi_i \otimes \xi,$$

$$V_i(h_{i_1}^\circ \otimes \ldots \otimes h_{i_n}^\circ) = \begin{cases} h_{i_1}^\circ \otimes \left(h_{i_2}^\circ \otimes \ldots \otimes h_{i_n}^\circ\right) & \text{si } bi_1 = \iota \text{ y } n \geq 2, \\ h_{i_1}^\circ \otimes \xi & \text{si } i_1 = \iota \text{ y } n = 1, \\ \xi_\iota \otimes \left(h_{i_1}^\circ \otimes \ldots \otimes h_{i_n}^\circ\right) & \text{si } i_1 \neq \iota. \end{cases}$$

En primer lugar veamos que V_ι está bien definido. Como los elementos de la forma $x = \lambda\xi +$

$\sum_{n\geq 1}\sum_{i_1\neq\ldots\neq i_n}(h^\circ_{i_1}\otimes\ldots\otimes h^\circ_{i_n})$ generan a $\mathscr{H}$ nos limitaremos a trabajar con éstos.

$$\begin{aligned}
V_\iota(x) =& V_\iota\left(\lambda\xi+\sum_{n\geq 1}\sum_{i_1\neq\ldots\neq i_n}(h^\circ_{i_1}\otimes\ldots\otimes h^\circ_{i_n})\right),\\
=&\lambda V_\iota(\xi)+\sum_{n\geq 1}\sum_{i_1\neq\ldots\neq i_n}V_\iota\left(h^\circ_{i_1}\otimes\ldots\otimes h^\circ_{i_n}\right),\\
=&\lambda(\xi_\iota\otimes\xi)+(h^\circ_\iota\otimes\xi)+\sum_{n\geq 2}\sum_{\substack{i_1\neq\ldots i_n\\ i_1=\iota}}h^\circ_{i_1}\otimes(h^\circ_{i_2}\otimes\ldots\otimes h^\circ_{i_n})+\sum_{n\geq 1}\sum_{\substack{i_1\neq\ldots i_n\\ i_1\neq\iota}}\xi_\iota\otimes(h^\circ_{i_1}\otimes\ldots\otimes h^\circ_{i_n}),\\
=&(\lambda\xi_\iota+h^\circ_\iota)\otimes\xi+(\xi^\circ_\iota+h^\circ_\iota)\otimes\sum_{n\geq 1}\sum_{\substack{i_1\neq\ldots\neq\imath_n\\ i_1\neq\iota}}(h^\circ_{i_1}\otimes\ldots\otimes h^\circ_{i_n}),
\end{aligned}$$

con lo cual se verifica que $V_\iota(x)\in\mathscr{H}_\iota\otimes\mathscr{H}(\iota)$. También se observa que V_ι preserva el producto interior, al tomar x como se hizo anteriormente y $y=\beta\xi+\sum_{n\geq 1}\sum_{i_1\neq\ldots\neq i_n}(g^\circ_{i_1}\otimes\ldots\otimes g^\circ_{i_n})$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle x,y\rangle =& \lambda\overline{\beta}+\sum_{n\geq 1}\sum_{i_1\neq\ldots\imath_n}\left\langle h^\circ_{i_1},g^\circ_{i_1}\right\rangle\ldots\left\langle h^\circ_{i_n},g^\circ_{i_n}\right\rangle,\\
=&\langle V_\iota(x),V_\iota(y)\rangle.
\end{aligned}$$

Dado que $\mathscr{H}_\iota$ se puede descomponer como $\mathbb{C}\xi_\iota\oplus\mathscr{H}_\iota^\circ$, los generadores de $\mathscr{H}_\iota\otimes\mathscr{H}(\iota)$ son de la forma $z=(\lambda\xi_\iota+h^\circ_\iota)\otimes\left(\beta\xi+\sum_{n\geq 1}\sum_{\substack{i_1\neq\ldots\neq i_n\\ i_1\neq\iota}}(h^\circ_{i_1}\ldots\otimes h^\circ_{i_n})\right)$, por lo que de manera a análoga la definición de V_ι construimos $W_\iota:\mathscr{H}_\iota\otimes\mathscr{H}(\iota)\to\mathscr{H}$ por medio de

$$\begin{aligned}
W_\iota(\xi_\iota\otimes\xi) =& \xi,\\
W_\iota(h^\circ_\iota\otimes\xi) =& h^\circ_\iota,\\
W_\iota(\xi_\iota\otimes(h^\circ_{i_1}\otimes\ldots\otimes h^\circ_{i_n})) =& h^\circ_{i_1}\otimes\ldots\otimes h^\circ_{i_n},\\
W_\iota(h^\circ_\iota\otimes(h^\circ_{i_1}\otimes\ldots\otimes h^\circ_{i_n})) =& h^\circ_\iota\otimes h^\circ_{i_1}\otimes\ldots\otimes h^\circ_{i_n}.
\end{aligned}$$

Se corrobora que W_ι y V_ι son inversos, por lo que V_ι es unitario. Finalmente definimos el encaje de $\mathfrak{B}(\mathscr{H}_\iota)$ en $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ como

$$T\mapsto\lambda_\iota(T)=V_\iota^{-1}(T\otimes 1_{\mathscr{H}(\iota)})V_\iota.$$

Nótese que λ_ι es una representación de $\mathfrak{B}(\mathscr{H}_i)$ en $\mathfrak{B}(*_{i\in I}\mathscr{H}_i)$. □

Definición 4.8. La representación λ_ι utilizada en 4.7 es conocida como la representación regular izquierda.

Teorema 4.9. *Sean $\mathfrak{A}_1$ y $\mathfrak{A}_2$ álgebras C^* con 1 y finitamente generadas tales que $\mathfrak{A}_1\cong C(D_1)$ y $\mathfrak{A}_2\cong C(D_2)$, donde D_1,D_2 son dominios compactos de dimensión N_1 y N_2 respectivamente. Entonces $\mathfrak{A}_1*\mathfrak{A}_2\cong C(D)$ con D dado de la siguiente manera:*

$$D(\mathscr{H})=\{(a^1,\ldots,a^{N_1+N_2})\in\mathfrak{B}(\mathscr{H})^{N_1+N_2}:(a^1,\ldots,a^{N_1})\in D_1(\mathscr{H}),\ (a^{N_1+1},\ldots,a^{N_1+N_2})\in D_2(\mathscr{H})\}$$

Demostración. En 4.4 se observó que si D es el dominio compacto asociado a un álgebra $\mathfrak{A}$, entonces es posible que para algún espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ su respectivo dominio compacto $D(\mathscr{H})$ sea vacío. Por ello es relevante destacar que gracias a 4.7 podemos asegurar que si $\mathscr{H}$ es tal que $a \in D(\mathscr{H})$, entonces para cualquier espacio de Hilbert $\mathscr{K}$ se tiene que $\lambda_{\mathscr{H}}(a) \in D(\mathscr{H} * \mathscr{K})$, ésto debido a que $\lambda_{\mathscr{H}}$ es encaje y $\|w(\lambda_{\mathscr{H}}(a))\| = \|\lambda_{\mathscr{H}}(w(a))\| = \|w(a)\|$ para cada $w \in P_N$. Como consecuencia de lo anterior, si $(a^1,\ldots,a^{N_1}) \in D_1(\mathscr{H}_1)$ y $(b^1,\ldots,b^{N_2}) \in D_2(\mathscr{H}_2)$ entonces $(\lambda_{\mathscr{H}_1}a^1,\ldots,\lambda_{\mathscr{H}_1}a^{N_1},\lambda_{\mathscr{H}_2}b^1,\ldots,\lambda_{\mathscr{H}_2}b^{N_2}) \in D(\mathscr{H}_1 * \mathscr{H}_2)$ y se garantiza que trabajamos con un objeto no trivial. Empecemos por demostrar que D es un dominio compacto. En efecto:

1. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, $a \in D(\mathscr{H})$ y $\pi : \mathrm{C}^*(a) \to \mathfrak{B}(\mathscr{H}_\pi)$ una representación de $\mathrm{C}^*(a)$. Definimos $a_1 = (a^1,\ldots,a^{N_1})$ y $a_2 = (a^{N_1+1},\ldots,a^{N_1+N_2})$. Notamos que $a_1 \in D_1(\mathscr{H})$ y $a_2 \in D_2(\mathscr{H})$, además tanto $\mathrm{C}^*(a_1)$ como $\mathrm{C}^*(a_2)$ son subálgebras de $\mathrm{C}^*(a)$, de esta manera π también es representación de éstas y se tiene que $\pi(a_1) \in D_1(\mathscr{H}_\pi)$ y $\pi(a_2) \in D_2(\mathscr{H}_\pi)$. Por lo tanto $\pi(a) \in D(\mathscr{H}_\pi)$

2. Sea $a \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ y $\{\pi_\lambda\}$ una familia fiel de representaciones de $\mathrm{C}^*(a)$ tal que $\pi_\lambda(a) \in D(\mathscr{H}_\lambda)$ para cada λ. Por la definición que se dió de D tenemos que $\pi_\lambda(a_1) \in D_1(\mathscr{H}_\lambda)$ y $\pi_\lambda(a_2) \in D_2(\mathscr{H}_\lambda)$, además $\{\pi_\lambda\}$ también es familia fiel para

   $\mathrm{C}^*(a_1)$ y para $\mathrm{C}^*(a_2)$, por lo tanto $a_1 \in D_1(\mathscr{H})$, $a_2 \in D_2(\mathscr{H})$ y en consecuencia $a \in D(\mathscr{H})$.

3. Como D_1 y D_2 son dominios compactos existen $M_1, M_2 \geq 0$ tales que

$$\sup_{b_1 \in D_1(\mathscr{H})} \left\|b_1^i\right\| \leq M_1,$$
$$\sup_{b_2 \in D_2(\mathscr{H})} \left\|b_1^i\right\| \leq M_2,$$

   para cualquier espacio de Hilbert $\mathscr{H}$. Sea $M = \max M_1, M_2$, entonces si $\mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert y $a \in D(\mathscr{H})$ se tiene que a es de la forma $a = (a^1,\ldots,a^{N_1},a^{N_1+1},\ldots,a^{N_1+N_2})$, con $(a^1,\ldots,a^{N_1}) \in D_1(\mathscr{H})$ y $(a^{N_1+1},\ldots,a^{N_1+N_2}) \in D_2(\mathscr{H})$. Se sigue que

$$\sup_{a \in D(\mathscr{H})} \left\|a^i\right\| \leq M,$$

   independientemente del espacio de Hilbert que se tome.

Para concluir la prueba es necesario mostrar que $C(D)$ satisface la propiedad universal. Los morfismos $\gamma_i, i = 1,2$ se definen como $\gamma_i(z) = z1_{\mathfrak{A}_i}$. Sean $Y^1,\ldots,Y^{N_1}$ y $Z^1,\ldots,Z^{N_2}$ las funciones coordenada que generan a $C(D_1)$ y a $C(D_2)$, respectivamente. Definimos $\iota'_{i=1,2} : C(D_i) \to C(D)$ como sigue

$$\begin{aligned} \iota'_1(Y^j) &= X^j && \text{si } 1 \geq j \geq N_1, \\ \iota'_2(Z^j) &= X^{N_1+j} && \text{si } 1 \geq j \geq N_2, \end{aligned}$$

donde $\{X^1,\ldots,X^{N_1},X^{N_1+1},\ldots,X^{N_1+N_2}\}$ son las funciones coordenadas sobre D y $\iota_i : \mathfrak{A}_i \to C(D)$ están dadas por $\iota_i = \iota'_i \circ F_i$, con $F_i : \mathfrak{A}_i \to C(D_i)$ isomorfismo. Como los conjuntos $\{Y^1,\ldots,Y^{N_1}\}$ y $\{Z^1,\ldots,Z^{N_2}\}$ generan a sus respectivas álgebras de funciones de operadores continuas, entonces basta definir una función en ellos para determinar un único homomorfismo de álgebras.

Así los homomorfismos ι_i' están bien definidos y en consecuencia los ι_i también lo están. Como cada F_i es isomorfismo será suficiente probar que cada ι_i' es encaje.

Se demostrará únicamente que ι_1' es encaje, la prueba para ι_2' es análoga. Empecemos por notar que a pesar de que las funciones coordenadas definidas en D_1 y D son distintas por tener dominios diferentes, éstas producen la misma imagen. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $a \in D(\mathscr{H})$, entonces al definir $a_1 \in D_1(\mathscr{H})$ como se hizo anteriormente se tiene que $Y^j(a_1) = a^j = \iota_1'(Y^j)(a) = X^j(a)$. Asimismo, si $a_1 \in D_1(\mathscr{H})$ basta tomar cualquier elemento $a_2 \in D_2(\mathscr{H})$ y definir $a \in D(\mathscr{H})$ como $a = (a_1^1, \ldots, a_1^{N_1}, a_2^1, \ldots, a_2^{N_2})$ y nuevamente se observa que $Y^j(a_1) = a^j = \iota_1'(Y^j)(a)$, por lo que $\left\|X^j\right\|_{C(D)} = \left\|\iota_1'(Y^j)\right\| = \left\|Y^j\right\|_{C(D_1)}$. Este argumento se puede extender a cualquier polinomio no conmutativo en las variables $Y^1, Y^{1*}, \ldots, Y^{N_1}, Y^{N_1*}$, de modo que ι_1' es isometría y por lo tanto encaje.

Considérese ahora un álgebra $\mathfrak{A}$ y homomorfismos $\varphi_i : \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}$, veamos que éstos se factorizan por medio de un único homomorfismo $\varphi : C(D) \to \mathfrak{A}$ de manera que $\varphi_i = \varphi \circ \iota_i$. En primer lugar notemos que los isomorfismos $F_i : \mathfrak{A}_i \to C(D_i)$ nos permiten relacionar de manera unívoca homomorfismos $\varphi_i : \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}$ con homomorfismos $\varphi_i' : C(D_i) \to \mathfrak{A}$ por medio de las composiciones

$$\begin{aligned} \varphi_i' &= \varphi_i \circ F_i^{-1}, \\ \varphi &= \varphi_i' \circ F_i. \end{aligned}$$

Asimismo, como $\iota_i = \iota_i' \circ F_i$, será suficiente probar que los homomorfismos φ_i' se factorizan de manera única como $\varphi_i' = \varphi \circ \iota_i'$. Recordemos que los homomorfismos quedan completamente determinados por los valores que toman en el conjunto de generadores, de manera que al definir

$$\varphi(X^i) = \begin{cases} \varphi_1' \circ \iota_1'^{-1}(X^i) = \varphi_1'(Y^i) & \text{si } 1 \leq i \leq N_1, \\ \varphi_2' \circ \iota_2'^{-1}(X^i) = \varphi_2'(Z^{i-N_1}) & \text{si } N_1 < i \leq N_1 + N_2, \end{cases}$$

este morfismo satisface la condición requerida y es único. Con ello hemos probado que el siguiente diagrama conmuta y por lo tanto $C(D) \cong \mathfrak{A}_1 * \mathfrak{A}_2$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "\gamma_2"'] & \mathfrak{A}_1 \arrow[r, "F_1", "\cong"'] \arrow[ddr, bend left, "\iota_1"] \arrow[dddrr, bend left=60, "\varphi_1"] & C(D_1) \arrow[dd, "\iota_1'"] \arrow[dddr, "\varphi_1'"] & \\
\mathfrak{A}_2 \arrow[d, "F_2"', "\cong"] \arrow[drr, bend left] \arrow[dddrrr, bend right=60, "\varphi_2"'] & & & \\
C(D_2) \arrow[rr, "\varphi_2", "\iota_2'"'] \arrow[drrr, "\varphi_2'"'] & & C(D) \arrow[dr, dashed, "\varphi"] & \\
& & & \mathfrak{A}
\end{tikzcd}
$$

□

4.3. El álgebra C* universal

Considérese un conjunto de símbolos $\{x_i\}_{i\in I}$ y un conjunto de relaciones R. Pensaremos que las relaciones son de la forma

$$\left\|p(x_{i_1},x_{i_1}^*,\ldots,x_{i_k},x_{i_k}^*)\right\| \leq \eta,$$

donde p es un polinomio en $2k$ variables no conmutativas con coeficientes complejos y $\eta \geq 0$. Si $\eta = 0$ éstas pueden reescribirse como relaciones algebráicas entre $x_{i_1},x_{i_1}^*,\ldots,x_{i_k},x_{i_k}^*$ y los escalares. Se imponen las siguientes condiciones a las relaciones:

1. Las relaciones son realizables, es decir, existe un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ y una función f del conjunto de generadores en $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ tal que

   $$\|p(f(x_{i_1}),f(x_{i_1})^*,\ldots,f(x_{i_k}),f(x_{i_k})^*)\|_{\mathfrak{B}(\mathscr{H})} \leq \eta,$$

   para cada relación en R.

2. Existen constantes $k_i \geq 0$ tales que si f y $\mathscr{H}$ son como en el inciso anterior, entonces $\|f(x_i)\|_{\mathfrak{B}(\mathscr{H})} \leq k_i$.

El Teorema A.11 garantiza que existe una única álgebra con 1, $\mathfrak{U}$, con elementos $\{x_i\}_{i\in I}$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $\mathfrak{U}$ es generada por $\{x_i\}_{i\in I}$.

2. Todas las relaciones de R se satisfacen en $\mathfrak{U}$.

3. Si $\mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert y $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ son tales que para cada relación p en R la relación se satisface al reemplazar cada ocurrencia de x_i por A_i, entonces existe una representación $\pi : \mathfrak{U} \to \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ que satisface $\pi(x_i) = A_i$ para toda i.

Teorema 4.10. *Sea $\mathfrak{U}$ el álgebra universal sobre un conjunto finito de generadores, $\{x_i\}_{i=1}^N$, y un conjunto de relaciones R. Para cada espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ definimos*

$$D(\mathscr{H}) = \{(a^1,\dots,a^N) \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})^N : \forall p \in R \ \left\|p(a^{i_1},\dots,a^{i_k})\right\| \leq \eta\}.$$

Afirmamos que $D = \{D(\mathscr{H}) : \mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert$\}$ es un dominio compacto y $C(D) \cong \mathfrak{U}$.

Demostración. Empecemos por mostrar que D es un dominio compacto. En primer lugar, el hecho de que el conjunto R sea realizable garantiza que $D(\mathscr{H}) \neq \emptyset$ para algún espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ y en consecuencia trabajamos con objetos no triviales.

1. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert y $a \in D(\mathscr{H})$. Sea $\pi : \mathrm{C}^*(a) \to \mathfrak{B}(\mathscr{K})$ una representación. Si $p \in R$, entonces $\pi(p(a)) = p(\pi(a))$, donde $p(a)$ consiste en reemplazar cada ocurrencia de x_i en p por su correspondiente a^i. Además, como π es representación $\|\pi(p(a))\| \leq \|p(a)\| \leq \eta$. Por lo tanto $\pi(a) \in D(\mathscr{K})$.

2. Sea $a \in \mathfrak{B}(\mathscr{H})^N$ y $\{\pi_\lambda\}$ una familia fiel de representaciones de $\mathrm{C}^*(a)$ tal que $\pi_\lambda(a) \in D(\mathscr{H}_\lambda)$ para cada λ. De esta manera se tiene que para cada λ, $\|p(\pi_\lambda(a)\|_{\mathfrak{B}(\mathscr{H}_\lambda)} \leq \eta$. Como la familia $\{\pi_\lambda\}$ es fiel su suma directa induce

   una representación fiel de $\mathrm{C}^*(a)$ que cumple que $\|x\| = \|\bigoplus \pi_\lambda(x)\| = \sup_\lambda \|\pi_\lambda(x)\|$ para cada $x \in \mathrm{C}^*(a)$. En particular $\|p(a)\| \leq \eta$, por lo que $a \in D(\mathscr{H})$.

3. Sea $M = \text{máx}\, k_1,\dots,k_N$. Entonces para cada espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ y $a \in D(\mathscr{H})$, $\left\|a^i\right\| \leq k_i \leq M$ y
$$\sup_{a\in D(\mathscr{H})} \left\|a^i\right\| \leq M.$$

Con ello corroboramos que D es un dominio compacto. Por unicidad del álgebra universal bastará probar que $C(D)$ satisface las tres propiedades descritas anteriormente.

1. Notemos primero que si $\mathscr{H}$ es un espacio de Hilbert y $a \in D(\mathscr{H})$, entonces es lo mismo reemplazar las ocurrencias de x_i por a^i que reemplazar las ocurrencias de x_i por X^i, lo cual nos da un polinomio en variables no conmutativas $\{X^{i_1},\dots,X^{i_k}\}$, y luego reemplazar cada ocurrencia de X^i con a^i. Recordemos que los polinomios como el anterior son funciones de operadores continuas y esa es la regla bajo la cual se evalúan. Como $C(D)$ es generada por $\{X^i\}_{i=1}^N$ y para cada $F \in C(D)$ $\|F\| = \sup\{\|F(a)\| : a \in D(\mathscr{H}),\ \mathscr{H}$ es espacio de Hilbert$\}$ se verifica la primera propiedad.

2. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert, por definición de $D(\mathscr{H})$ todas las relaciones de R se satisfacen en éste, y por el argumento dado en el inciso anterior todas las relaciones de R se satisfacen en $C(D)$, pues consisten en sustituir x_i por X^i y hacer la evaluación en $a \in D(\mathscr{H})$.

3. Para concluir recordemos que existe un espacio de Hilbert $\mathscr{K}$ y $b \in D(\mathscr{K})$ tal que b es maximal bajo la relación $\gg$ y $C(D) \overset{\varphi}{\cong} \mathrm{C}^*(b)$. Entonces para cada espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ y $a \in D(\mathscr{H})$ existe una representación $\pi : \mathrm{C}^*(b) \to \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ tal que $\pi(b) = a$. Basta definir una nueva representación por medio de $\pi' = \pi \circ \varphi : C(D) \to \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ y notar que si $a \in D(\mathscr{H})$, entonces a satisface todas las relaciones de R. Por lo tanto $\pi'(X^i) = a^i$ para toda i y destacamos el hecho de que ésta última representación no es otra que evaluar a cada una de las funciones de operadores continuas en a.

Por lo tanto $C(D) \cong \mathfrak{U}$. $\square$

Conclusiones

La versión no conmutativa del Teorema de Gelfand-Naimark brinda algunas herramientas útiles para el estudio de álgebras no conmutativas finitamente generadas. En primer lugar, la definición de dominios compactos y funciones de operadores continuas van más allá de usar nueva nomenclatura. Comparten varias de las propiedades que tienen los espacios compactos y las funciones continuas, los dominios compactos son cerrados y el equivalente a la gráfica de una función de operadores continua también es un dominio compacto. A pesar de que la representación universal de álgebras C^* garantiza la existencia de dichas álgebras como objetos concretos, las relaciones entre operadores acotados y espacios de Hilbert, y entre espacios topológicos compactos y funciones continuas son de carácter distinto, en primer lugar porque el espacio de Hilbert sobre el que actúan dichos operadores no determina por completo al álgebra. El lenguaje y las herramientas dadas por los dominios compactos y funciones de operadores continuas permiten definir de manera única el dominio compacto a partir del álgebra y viceversa, y resultados como el Teorema de Stone-Weierstrass se deducen de forma natural. Finalmente, los ejemplos y resultados que se presentan en el último capítulo muestran que estas herramientas son particularmente útiles al momento de estudiar álgebras universales cuando están determinadas por una cantidad finita de generadores y las relaciones entre éstos se definen de manera explícita. Las álgebras C^* universales comúnmente tienen una estructura complicada y son consideradas como objetos patológicos [Bla85, p. 254] y el hecho de que los dominios determinen y estén determinados por todas las posibles representaciones del álgebra nos da la posibilidad de analizar a dicha álgebra por partes o estratos asociados a distintos espacios de Hilbert 3.10.

Este trabajo también tiene algunas limitaciones. En primer lugar se restringe al estudio de álgebras finitamente generadas con uno y es evidente que esto se debe al uso de polinomios en n en variables no conmutativas. En segundo lugar es de notar que calcular el dominio compacto de un álgebra en particular puede ser muy complicado, y dado que es equivalente a calcular o conocer todas las posibles representaciones en general representa la misma dificultad que expresar al álgebra de manera concreta por medio de su representación universal. Este problema se encontró al momento de intentar demostrar que $\mathbb{C}^2 * \mathbb{C}^2 \cong \{f : [0,1] \to M_2(\mathbb{C}) : f \text{ es continua y } f(0), f(1) \text{ son diagonales}\}$, no se logró calcular el dominio compacto asociado a la segunda álgebra y todo intento de prueba requirió utilizar el isomorfismo dado por una prueba ya existente.

Existen distintas líneas de trabajo mediante las cuales se podrían extender estos resultados. La limitación a álgebras finitamente generadas se puede intentar abordar desde el enfoque de las funciones no conmutativas [KV14, Cáp. 1] y reemplazar el uso de polinomios no conmutativos por funciones racionales o series de potencias formales con las restricciones que tengan que imponerse sobre éstas y sobre los dominios. La siguiente tabla es tomada de [Kha09, p.7] y presenta algunas de las equivalencias entre espacios topológicos y álgebras C^*:

Espacios topológicos	Álgebras
compacto	unitaria
compactación de un punto	unitización
subespacio cerrado	ideal cerrado

Se sabe que los ideales maximales bilaterales de los espacios de la forma $C(X)$ para X Hausdorff y compacto son los subconjuntos de funciones que se anulan en un punto y es de ahí que se puede concluir que las álgebras C* conmutativas y sin uno son isomorfas a $C_0(Y)$ para Y un espacio topológico Hausdorff y localmente compacto. Ésto nos permite preguntarnos si existe algún análogo topológico a los ideales maximales bilaterales, cuando éstos existan, y finalmente si puede formularse un teorema semejante para álgebras no conmutativas sin unidad.

Apéndice A

Topología, Integrales Directas y el Álgebra Universal

A.1. Topología

Definición A.1 (Topología débil)**.** Dado un espacio topológico Hausdorff (X, τ), una familia de espacios topológicos $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, y una familia de funciones $\{f_\alpha : X \to X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ la topología débil en X es la más gruesa de las topologías que hace continuas a todas las funciones de la familia $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. Dado que X equipado con la topología discreta hace que todas las funciones de la familia dada sean continuas, la topología débil siempre existe y se puede expresar como la intersección de todas las topologías que hacen continua a la familia de funciones. [Eng89, Proposición 1.4.8]

Lema A.2. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico Hausdorff y compacto, entonces X tiene la topología débil inducida por $C(X)$.*

Demostración. Denotemos por $\tau_{\text{débil}}$ a la topología débil inducida por $C(X)$. Como la topología con la que está equipado originalmente X hace continuas a todas las funciones de $C(X)$, entonces $\tau_{\text{débil}} \subseteq \tau_X$. Sea U un abierto en τ_X y x un punto en dicho abierto, entonces $X \setminus U$ es un cerrado al cual x no pertenece. Como X es Hausdorff y compacto, entonces es normal, por lo tanto existe una función continua $f : X \to \mathbb{C}$ tal que $f(x) = 0$, $f(X \setminus U) = 1$ y $\text{Img} f = [0, 1]$. Entonces $x \in f^{-1}([0, 1/4) \subseteq U$, como $f^{-1}([0, 1/4))$ es un abierto de la topología débil, se concluye que $\tau_X = \tau_{\text{débil}}$. $\square$

Lema A.3. *Sea (Y, τ_Y) un espacio topológico con la topología débil inducida por una familia de espacios topológicos (Z_i, τ_{Z_i}) y de funciones $f_i : Y \to Z_i$ para algún conjunto de índices I. Si X es un espacio topológico y $f : X \to Y$, entonces la función f es continua si y sólo si $f_i \circ f$ es continua para cada $i \in I$. [Eng89, Proposición 1.4.9]*

Demostración. Si f es continua, entonces cada $f_i \circ f$ es continua por ser composición de funciones continuas. Por otro lado, como τ_Y es la topología débil, entonces está generada por la subbase $S = \{f_i^{-1}(U_i) : i \in I,\ U_i \in \tau_{Z_i}\}$ y basta probar que la imagen inversa de cada elemento de S bajo f es un elemento τ_X. Sea $U \in S$, entonces $U = f_i^{-1}(U_i)$ para algún $i \in I$ y $U_i \in \tau_{Z_i}$, así

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(f_i^{-1}(U_i)) = (f_i \circ f)^{-1}(U_i).$$

Como la composición es continua, entonces $f^{-1}(U)$ es un abierto y por lo tanto la función f es continua. $\square$

A.2. Integral Directa

Se puede consultar [KR97b, Capítulo 14] y [Dix82, Apéndice A] para obtener más información respecto a integrales directas.

Definición A.4. Sea (X,μ) un espacio de medida y $\mathscr{E} = ((\mathscr{H}(p))_{p\in X},\Gamma)$ un campo medible de espacios de Hilbert. Para cada $p \in X$ sea $a(p)$ un operador lineal en un espacio de Hilbert $\mathscr{H}(p)$, es decir, $a(p) \in \mathscr{L}(\mathscr{H}(p))$. Diremos que $\{a(p)\}_{p\in X}$ es un campo medible de operadores si para cualquier $x \in \Gamma$ $p \to a(p)x(p)$ es un campo medible de vectores.

Las siguientes definiciones son tomadas de [Wor79, p. 176]

Definición A.5. Sea $a \in \mathscr{C}(\mathscr{H})$. Definimos el operador acotado $q_a = a(a^*a+1)^{-1/2}$. El elemento a está completamente determinado por el operador q_a y $a = q_a(1-q_a^*q_a)^{-1/2}$.

Definición A.6. Sea (X,μ) un espacio de medida y $\{\mathscr{H}(p)\}_{p\in X}$ un campo medible de espacios de Hilbert. Diremos que un campo de operadores cerrados

$$p \in X \to a(p) \in \mathscr{C}(\mathscr{H})(p)$$

es medible si $p \in X \to q_{a(p)} \in \mathfrak{B}(\mathscr{H}(p))$ es un campo medible de operadores acotados.

En este caso existe un único operador cerrado $a \in \mathscr{C}\left(\int_X^{\oplus} H(p)d\mu(p)\right)$ tal que

$$q_a = \int_X^{\oplus} q_{a(p)}d\mu(p).$$

El operador a se llama la integral directa del campo $p \to a(p)$ y se denota por $a = \int_X^{\oplus} a(p)d\mu(p)$.

A.3. Álgebras C* Universales

En lo que sigue consideraremos pares de la forma (G,R), en los cuales $G = \{x_i\}_{i\in I}$ es un conjunto de símbolos o generadores y R un conjunto de relaciones entre los generadores de G de la forma

$$\left\|p(x_{i_1},x_{i_1}^*,\ldots,x_{i_n},x_{i_n}^*)\right\| \leq \eta,$$

con p una relación de tipo polinomial en $2n$ variables no conmutativas y coeficientes en $\mathbb{C}$, $x_{i_1},\ldots,x_{i_n} \in G$ y $\eta \geq 0$.

Definición A.7. Una representación de (G,R) es un conjunto de operadores $\{y_i\}_{i\in I}$ sobre un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ que satisfacen

$$\left\|p(y_{i_1},y_{i_1}^*,\ldots,y_{i_n},y_{i_n}^*)\right\|_{\mathscr{H}} \leq \eta,$$

cada vez que $\left\|p(x_{i_1},x_{i_1}^*,\ldots,x_{i_n},x_{i_n}^*)\right\| \leq \eta \in R$. Ésto induce de manera implícita una función $f : \{x_i\} \to \mathfrak{B}(\mathscr{H})$ dada por $f(x_i) = y_i$ que se extiende de manera única a un homomorfismo* ρ del álgebra* libre generada por G en $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$. Sin crear ambigüedad podremos usar el mismo símbolo ρ para denotar una representación, ya sea en el contexto de una familia de operadores $\{y_i\}$ que satisfacen la propiedad anterior, o como el homomorfismo* inducido por esta familia. De la misma manera, si π es un homomorfismo* del álgebra* libre generada por (G,R), entonces π induce una representación ρ de (G,R).

Definición A.8. Diremos que el conjunto R de relaciones es realizable si existe una representación ρ de (G,R).

Definición A.9. Un conjunto (G,R) es admisible si

1. R es realizable.

2. Si $\{y_i^\beta\}_{i\in I}$ es una representación de (G,R) para cada $\beta\in\mathbb{N}$, entonces $\oplus_\beta y_i^\beta \in \mathfrak{B}(\bigoplus_\beta \mathscr{H}_\beta)$ para cada i y $\{\oplus_\beta y_i^\beta\}_{i\in I}$ es una representación de (G,R).

Lema A.10. *Un conjunto (G,R) es admisible si y sólo si (G,R) es realizable y para cada $i\in I$ existe una constante $k_i\geq 0$ tal que $\|y_i\| = \|\rho(x_i)\|\leq k_i$ para toda representación ρ de (G,R).*

Demostración. Supongamos que para alguna $i\in I$ el conjunto $\{\|\rho(x_i)\| : \rho \text{ es una representación}\}$ es no acotado, entonces para cada $n\in\mathbb{N}$ existe una representación ρ_n tal que $\|\rho_n(x_i)\|\geq n$ y en consecuencia $\oplus_n\rho_n(x_i)\notin\mathfrak{B}(\bigoplus_n \mathscr{H}_{\rho_n})$, es decir, (G,R) no es realizable.

Por otro lado, si existen constantes k_i tales que para cada representación ρ de (G,R) se verifica que $\rho(x_i)\leq k_i$, entonces al tomar una familia de representaciones ρ_β de (G,R) se tiene que $\sup_\beta \left\|\rho_\beta(x_i)\right\|\leq k_i$ para cada $i\in I$ y en consecuencia $\oplus\rho_\beta(x_i)\in\mathfrak{B}(\bigoplus\mathscr{H}_\beta)$ y $\left\|p(\oplus\rho_\beta x_{i_1},\oplus\rho x_{i_1}{}^*,\ldots,\oplus\rho_\beta x_{i_n},\oplus\rho x_{i_n}{}^*)\right\| = \sup_\beta\left\|p(\rho_\beta x_{i_1},\rho x_{i_1}{}^*,\ldots,\rho_\beta x_{i_n},\rho x_{i_n}{}^*)\right\|\leq\eta$, por lo que (G,R) es admisible. □

Teorema A.11. *Sean $G=\{x_i\}$ un conjunto de generadores y R un conjunto de relaciones sobre G como las descritas anteriormente tales que (G,R) es un conjunto admisible, entonces existe un álgebra* C* *unitaria $\mathfrak{U}$ tal que*

- *$\mathfrak{U}$ es generada por $\{x_i\}$,*

- *Toda relación de R se satisface en $\mathfrak{U}$,*

- *Si $\{a_i\}\subseteq\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ para algún espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ es tal que todas las relaciones $p\in R$ se satisfacen al sustituir cada ocurrencia de x_i por a_i, entonces existe una representación unitaria $\pi:\mathfrak{U}\to\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ tal que $\pi(x_i)=a_i$ para cada i.*

Esta álgebra es conocida como el álgebra universal de (G,R) o el álgebra universal generada por (G,R), se denota por $\mathrm{C}^*(G,R)$ *y es única salvo por isomorfismos.*

Demostración. Sea $\mathfrak{A}$ el álgebra* unitaria generada por G. Para $a\in\mathfrak{A}$ definimos

$$\|a\| = \sup_\rho\{\|\rho(a)\|\}$$

con ρ representaciones de (G,R). Dado que (G,R) es admisible, entonces el supremo se toma sobre un conjunto no vacío y dado que $\|\rho(x_i)\|\leq k_i$ para cada $i\in I$ y cada representación de (G,R), entonces tenemos que $\|a\|$ es finito para cada $a\in\mathfrak{A}$. Con ello $\|\cdot\|$ es una seminorma sobre $\mathfrak{A}$. Dado que toda representación ρ de (G,R) es un homomorfismo* de $\mathfrak{A}$ con codominio $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ para algún espacio de Hilbert $\mathscr{H}$, se sigue que para cada $a,b\in\mathfrak{A}$

$$\|a^*a\| = \|a\|^2,$$
$$\|ab\|\leq\|a\|\,\|b\|,$$

y para cada relación de R

$$\begin{aligned}\left\|p(x_{i_1},x_{i_1}^*,\ldots,x_{i_n},x_{i_n}^*)\right\| &= \sup_{\rho}\left\|\rho\left(p(x_{i_1},x_{i_1}^*,\ldots,x_{i_n},x_{i_n}^*)\right)\right\|,\\ &= \sup_{\rho}\left\|p(\rho x_{i_1},\rho x_{i_1}^*,\ldots,\rho x_{i_n},\rho x_{i_n}^*)\right\| \leq \eta.\end{aligned}$$

Definimos $N = \{a \in \mathfrak{A} : \|a\| = 0\}$, notamos que N es un ideal bilateral. Al definir

$$\|a+N\| = \inf_{x\in N}\{\|a-x\|\}$$

para cada una de las clases laterales $a+N \in {}^{\mathfrak{A}}\!/_{N}$ obtenemos un álgebra involutiva normada. Será suficiente construir $\mathfrak{U}$ como la completación de ${}^{\mathfrak{A}}\!/_{N}$ y notamos que los elementos de la forma $\{x_i+N : i\in I\}$ son densos en $\mathfrak{U}$, además para cada relación de R se tiene que

$$\begin{aligned}\|p(x_{i_1}+N,x_{i_1}+N^*,\ldots,x_{i_n}+N,x_{i_n}+N^*)\| &= \left\|p(x_{i_1},x_{i_1}^*,\ldots,x_{i_n},x_{i_n}^*)+N\right\|,\\ &\leq \left\|p(x_{i_1},x_{i_1}^*,\ldots,x_{i_n},x_{i_n}^*)\right\| \leq \eta\end{aligned}$$

Veamos que se satisface la tercera condición. Sea $\{a_i\}$ una familia de operadores en $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ para algún espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ tal que se satisfacen todas las relaciones de R al sustituir cada una de las ocurrencias de x_i por a_i para cada $i\in I$. Notemos que ésto es una representación de (G,R) y por lo tanto está en correspondencia con un homomorfismo* $\rho : \mathfrak{A}\to\mathfrak{B}(\mathscr{H})$. Por definición de la seminorma $\|\cdot\|$ se tiene que $\|\rho(a)\| \leq \|a\|$ y en particular $\rho(N) = 0$, por lo que podemos factorizar ρ a través de ${}^{\mathfrak{A}}\!/_{N}$ para obtener un nuevo homomorfismo* $\tilde{\rho} : {}^{\mathfrak{A}}\!/_{N} \to \mathfrak{B}(\mathscr{H})$. Por densidad de ${}^{\mathfrak{A}}\!/_{N}$ en $\mathfrak{U}$ podemos extender a $\tilde{\rho}$ de manera continua a un homomorfismo* definido en $\mathfrak{U}$, al cual también denotaremos por $\tilde{\rho}$, y concluimos que $\tilde{\rho}(x_i+N) = \rho(x_i) = a_i$ para cada $i\in I$.

Veamos que $\mathfrak{U}$ es única salvo por isomorfismos. Supongamos que $\mathfrak{V}$ es un álgebra C* unitaria con generadores $\{v_i\}_{i\in I}$ que satisface las tres condiciones del teorema. Definimos un homomorfismo* $\varphi : \ \to \mathfrak{V}$ dado por $\varphi(x_i) = v_i$ para cada i. Sea $\mathfrak{V}'$ la imagen de $\mathfrak{A}$ bajo φ, así $\mathfrak{V}'$ es densa en $\mathfrak{V}$. Dado que toda álgebra C* unitaria es isométricamente isomorfa a una subálgebra de $\mathfrak{B}(\mathscr{H}_0)$ para algún espacio de Hilbert $\mathscr{H}_0$ consideremos la representación fiel $\rho_0 : \mathfrak{V}\to\mathfrak{B}(\mathscr{H}_0)$ que induce este isomorfismo. En primer lugar notamos que la familia de operadores $\{\rho_0(v_i)\}_{i\in I}$ satisface todas las relaciones de R, así que por la definición de la seminorma en $\mathfrak{A}$ se tiene que para cada $a\in\mathfrak{A}$

$$\|\varphi(a)\| = \|\rho_0(\varphi(a))\|_{\mathscr{H}_0} \leq \|a\|. \tag{A.1}$$

Por lo tanto φ se anula en N y se factoriza a través del homomorfismo*

$$\tilde{\varphi} : {}^{\mathfrak{A}}\!/_{N} \to \mathfrak{V}' \text{ tal que } \tilde{\varphi}(a+N) = \varphi(a) \text{ para cada } a\in\mathfrak{A}.$$

Nótese que de A.1 también se deduce que

$$\|\tilde{\varphi}(a+N)\| = \inf_{x\in N}\|\varphi(a-x)\| \leq \inf_{x\in N}\|a-x\| = \|a+N\|,$$

por lo que $\tilde{\varphi}$ es continua. Probaremos que $\tilde{\varphi}$ es una isometría. Sea $\rho_1 : \mathfrak{U}\to\mathfrak{B}(\mathscr{H}_1)$ representación fiel de $\mathfrak{U}$, es decir, un isomorfismo* isométrico entre $\mathfrak{U}$ y una subálgebra C* cerrada de $\mathfrak{B}(\mathscr{H}_1)$. Como se satisfacen las relaciones de R al reemplazar x_i por $\rho_1(x_i)$ para cada i, entonces existe una representación $\pi : \mathfrak{V}\to\mathfrak{B}(\mathscr{H}_1)$ tal que $\pi(v_i) = \rho_1(x_i+N)$ para toda i. Como $v_i = \tilde{\varphi}(x_i + N)$, entonces $\pi(\tilde{\varphi}(x_i + N)) = \rho_1(x_i + N)$ para cada i. Por lo tanto $\rho_1(a+N) = \pi(\tilde{\varphi}(a+N))$ y

$$\|a+N\| = \|\rho_1(a+N)\| = \|\pi(\tilde{\varphi}(a+n))\| \leq \|\tilde{\varphi}(a+N)\|$$

para cada $a \in \mathfrak{A}$. Por lo tanto $\tilde{\varphi}$ es una isometría y por densidad de $\mathfrak{A}/N$ en $\mathfrak{U}$ y de $\mathfrak{V}'$ en $\mathfrak{V}$ se extiende de manera continua a un isomorfismo* isométrico de $\mathfrak{U}$ en $\mathfrak{V}$ □

Observación A.12. *La prueba anterior también es válida si se trabaja con álgebras* C* *sin necesidad de imponer como hipótesis que sean unitarias, en este contexto basta agregar la identidad como símbolo adicional al conjunto de generadores, así como las relaciones de la forma* $1x - x = 0$ *y* $x1 - x = 0$ *y* $1^* - 1 = 0$ *para cada generador x para obtener el álgebra* C* *universal unitaria.*

A.3.1. Ejemplos

[Bla06, Cap. II Secc. 8.3] y [Bla85] presentan algunos ejemplos y observaciones:

1. Toda álgebra C* $\mathfrak{A}$ es el álgebra universal generada por $G = \mathfrak{A}$ y R el conjunto de todas las relaciones algebráicas entre sus elementos.

2. No existe el álgebra universal generada por un único elemento autoadjunto, ésto debido a que un elemento autoadjunto puede tener norma arbitrariamente grande, sin embargo se puede definir el álgebra universal generada por un elemento autoadjunto de norma 1. Por el cálculo funcional para funciones continuas se observa que el álgebra unitaria generada de esta forma es isomorfa a $C([-1,1])$, y si no se pide que sea unitaria es isomorfa a $C_0([-1,1])$. De manera análoga, el álgebra universal generada por un elemento autoadjunto de norma 1 es isomorfa a $C([0,1])$ o a $C_0([0,1])$, dependiendo de la condición de unitariedad.

3. Si $G = \{u\}$ y $R = \{u^*u - 1 = 0, uu^* - 1 = 0\}$ entonces $\mathrm{C}^*(G,R)$ es el álgebra generada por un unitario y por el cálculo funcional para funciones continuas $\mathrm{C}^*(G,R) \cong \mathrm{C}^*(\mathbb{S}^1)$.

4. Si $\theta \in [0,1]$ se define el álgebra de rotación, $\mathfrak{A}_\theta$, como el álgebra generada por dos unitarios $G = \{u,v\}$ y la relación adicional $vu - e^{2\pi\imath\theta}uv$. Es particularmente relevante el caso en que θ es irracional. Esta álgebra se puede generalizar al caso en que esté dada por una cantidad finita de elementos unitarios $\{u_1, \ldots, u_n\}$ y relaciones entre ellos de la forma $u_j u_i - e^2\pi\imath\theta_{ij} = 0$ con $\theta_{ij} \in [0,1]$. Se conoce como el toro no conmutativo.

5. Si $\{\mathfrak{A}_i\}$ es una familia de álgebras C*, entonces su producto libre es el álgebra universal generada por copias de cada $\mathfrak{A}_i$ sin imponer relaciones adicionales entre generadores provenientes álgebras distintas.

Bibliografía

[Arv98] William Arveson. *An Invitation to C*-Algebras*. Corr. 2nd print. Graduate Texts in Mathematics 39. New York: Springer, 1998. 106 págs. ISBN: 978-0-387-90176-3.

[Bla06] Bruce Blackadar. *Operator Algebras: Theory of C*-Algebras and von Neumann Algebras*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Operator Algebras and Non-Commutative Geometry. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. ISBN: 978-3-540-28486-4. URL: `https://www.springer.com/us/book/9783540284864` (visitado 23-05-2019).

[Bla85] Bruce Blackadar. "Shape theory for C*-algebras". En: *Mathematica Scandinavica* (1985), págs. 249-275.

[Dav96] Kenneth R. Davidson. *C*-Algebras by Example*. Fields Institute Monographs 6. Providence, R.I: American Mathematical Society, 1996. 309 págs. ISBN: 978-0-8218-0599-2.

[Dix82] Jacques Dixmier. C*-*Algebras*. Rev. ed. North-Holland Mathematical Library 15. Amsterdam: North-Holland Publ. Co, 1982. 513 págs. ISBN: 978-0-444-86391-1.

[Dou98] Ronald G. Douglas. *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*. 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics 179. New York: Springer, 1998. 194 págs. ISBN: 978-0-387-98377-6.

[Dug87] James Dugundji. *Topology*. 10. print. Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics. Boston,Mass.: Allyn and Bacon, 1987. 447 págs. ISBN: 978-0-205-00271-9.

[Eng89] Ryszard Engelking. *General Topology*. Rev. and completed ed. Sigma Series in Pure Mathematics 6. OCLC: 20464424. Berlin: Heldermann, 1989. 529 págs. ISBN: 978-3-88538-006-1.

[Gel39] Israel Gelfand. "On rings of continuous functions on topological spaces". En: *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. Vol. 22. 1939, págs. 11-15.

[Kha09] Masoud Khalkhali. *Basic noncommutative geometry*. European mathematical society, 2009.

[KR97a] Richard Kadison y John Ringrose. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Volume I*. Vol. 15. Graduate Studies in Mathematics. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 22 de ago. de 1997. ISBN: 978-0-8218-0819-1. DOI: `10.1090/gsm/015`. URL: `http://www.ams.org/gsm/015` (visitado 23-05-2019).

[KR97b] Richard Kadison y John Ringrose. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Volume II*. Vol. 16. Graduate Studies in Mathematics. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 22 de ago. de 1997. ISBN: 978-0-8218-0820-7 978-1-4704-2073-4. DOI: `10.1090/gsm/016`. URL: `http://www.ams.org/gsm/016` (visitado 23-05-2019).

[KV14] Dmitry S Kaliuzhnyi-Verbovetskyi y Victor Vinnikov. *Foundations of free noncommutative function theory*. Vol. 199. American Mathematical Soc., 2014.

[KW82] Pawel Kruszynski y Stanislaw Woronowicz. "A Non-Commutative Gelfand-Naimark Theorem". En: *Journal of Operator Theory* (1 de ene. de 1982).

[Mur90] Gerard J. Murphy. *C*-Algebras and Operator Theory*. Boston: Academic Press, 1990. 286 págs. ISBN: 978-0-12-511360-1.

[Tak02] M. Takesaki. *Theory of Operator Algebras I*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Theory of Operator Algebras. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2002. ISBN: 978-3-540-42248-8. URL: `https://www.springer.com/br/book/9783540422488` (visitado 07-08-2019).

[Wil19] Dana P Williams. "A (Very) Short Course on C^*-Algebras". En: (21 de ago. de 2019), pág. 157. URL: `https://math.dartmouth.edu/~dana/bookspapers/cstar.pdf` (visitado 30-10-2019).

[Wor79] Stanislaw Woronowicz. "Operator Systems and Their Applications to the Tomita-Takesaki Theory". En: *Journal of Operator Theory* 2.2 (1979), págs. 169-209. ISSN: 0379-4024. JSTOR: 24713841.