



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

(k,l)-núcleos exteriores en digráficas

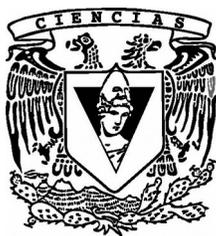
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

Jorge Fernando Ibarra Corona



**DIRECTOR DE TESIS:
Mat. Laura Pastrana Ramírez
Ciudad Universitaria, CD. MX., 2020**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos del Alumno

Apellido paterno: Ibarra
Apellido materno: Corona
Nombre(s): Jorge Fernando
Teléfono: 0445535525582
Universidad: Universidad Nacional Autónoma
de México
Facultad: Facultad de Ciencias
Número de cuenta: 307195762

Datos del tutor

Grado: Mat.
Apellido paterno: Pastrana
Apellido materno: Ramírez
Nombre(s): Laura

Datos del sidnodal 1

Grado: Dra.
Apellido paterno: Galeana
Apellido materno: Sánchez
Nombre(s): Hortensia

Datos del sinodal 2

Gado: M. en C.
Apellido paterno: Tecpa
Apellido Materno: Galván
Nombre(s): Gerardo Miguel

Datos del sinodal 3

Grado: Mat.
Apellido paterno: Pastrana
Apellido materno: Ramírez
Nombre(s): Laura

Datos del sinodal 4

Grado: Dra.
Apellido paterno: Sánchez
Apellido materno: López
Nombre(s): María del Rocío

Datos del sinodal 5

Grado: M. en C.
Apellido paterno: Benítez
Apellido materno: Bobadilla
Nombre(s): Germán

Datos de la tesis

Título: (k, l) -núcleos exteriores en digráficas
Número de páginas: 130 p.
Año: 2019

Índice general

Introducción	4
1. Preliminares	9
1.1. Gráficas	9
1.1.1. Subgráficas	11
1.1.2. Caminos	12
1.1.3. Tipos de gráficas	14
1.1.4. Independencia y dominación	16
1.2. Digráficas	18
1.2.1. Subdigráficas	21
1.2.2. Tipos de digráficas	22
1.2.3. Caminos en digráficas	23
1.2.4. Independencia y dominación	26
1.2.5. Resultados	27
2. Núcleos	33
2.1. Núcleos y primeros resultados	33
2.2. Ciclos y núcleos	41
2.3. Simétricas y transitivas	48
2.4. La función de Grundy	48
3. (k,l)-núcleos exteriores	53
3.1. Conjuntos k -independientes exteriores	53
3.2. Conjuntos l -absorbentes exteriores	56
3.3. (k,l) -núcleos exteriores	59
3.3.1. Digráficas completas, simétricas y transitivas	68
3.3.2. Ciclos y (k,l) -núcleos exteriores	94
3.4. La k -función de Grundy	108
4. k-núcleos exteriores y k-función de Grundy en la digráfica de líneas	117
4.1. k -núcleos exteriores y la digráfica de líneas	118
4.1.1. La función f	118
4.1.2. La función g	124

4.1.3.	Teorema de igualdad de k -núcleos exteriores	131
4.2.	k -función de Grundy y $L(D)$	132
4.2.1.	La función f para k -funciones de Grundy	132
4.2.2.	La función g para k -funciones de Grundy	138
4.2.3.	Teorema de igualdad para k -funciones de Grundy	144

Introducción

Existen múltiples tipos de juegos que se estudian en matemáticas, un ejemplo, es el juego tipo Nim. En el cual dos jugadores quitan o mueven objetos de distintos montones y donde al menos un montón sufre un cambio en cada turno. El juego en el que nos centraremos es con un solo montón de cerillos, un jugador puede quitar 1 o 2 por turno, este gana si retira los últimos cerillos, dejando así, sin jugada al rival.

Podemos modelar este juego a través de una digráfica D , donde cada vértice en D es un estado del juego y la flecha (a, b) está en D si y solo si el estado b tiene uno o dos cerillos menos que el estado a . Por ejemplo, si empezamos con 11 cerillos la digráfica de la figura 1 nos muestra las posibilidades por turno.

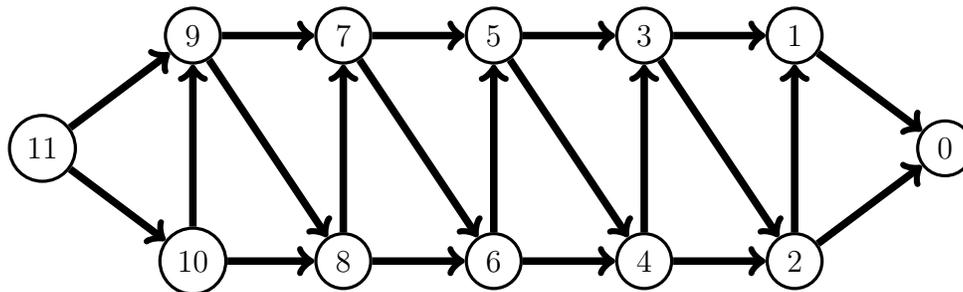


Figura 1: Representación del juego tipo Nim

¿Es posible desarrollar una estrategia ganadora para alguno de los dos jugadores? Con estrategia ganadora nos referimos a la estrategia mediante la cual uno de los jugadores, asegura ganar todas las partidas, siempre que los dos jugadores realicen movimientos lógicos intentando ganar la partida. Para este juego, si la hay para el primer jugador. Si el primer jugador quiere ganar tiene que ubicarse en el estado 0, esto implica que el segundo jugador debe de estar en los estados 1 ó 2. Por lo que, el primer jugador debe llegar al estado 3 (figura 2), para que esto suceda el segundo jugador tendría que dejar 4 ó 5 cerillos. Esto implica que el primer jugador debe de jugar de tal manera que queden 6 cerillos, esto pasa si y solo si el segundo jugador está en los estados 7 ó 8. Para que esto suceda el primer jugador debe llegar al estado 9, lo cual puede lograr al retirar dos cerillos en su primera jugada (figura 3).

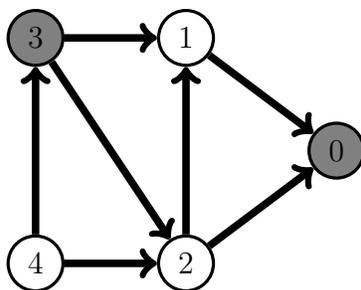


Figura 2: Estrategia ganadora

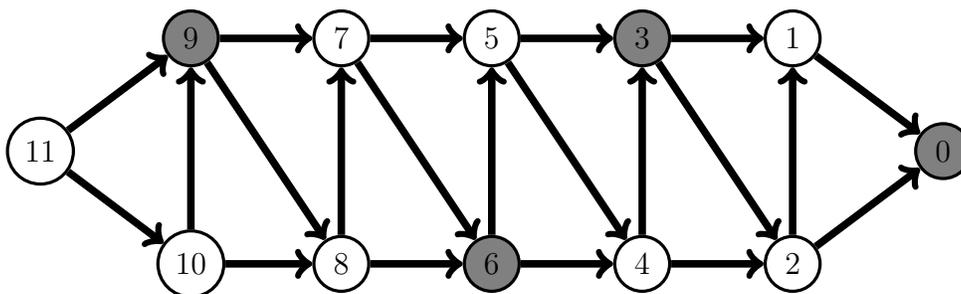


Figura 3: Modelo de posibles tiros en el juego

Observemos que en el conjunto de estados en el que jugó el jugador uno; $\{0, 3, 6, 9\}$, todo par de vértices correspondientes a estos estados no tienen flechas entre ellos, a esta propiedad en digráficas se le llama independencia (figura 4).

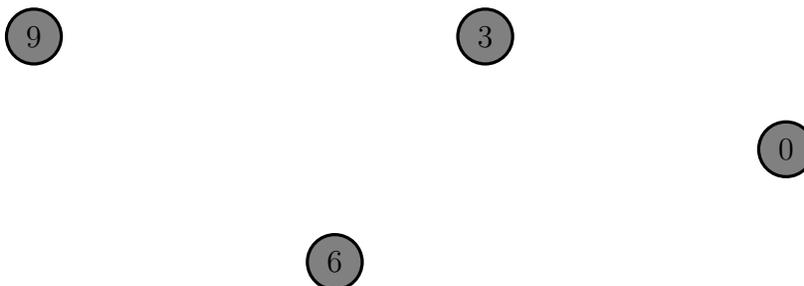


Figura 4: Conjunto independiente y absorbente del modelo

Otra observación que podemos hacer es que los vértices de los estados que no pertenecen al conjunto de la estrategia ganadora, tienen una flecha hacia alguno de los vértices de este conjunto, a esta propiedad en digráficas se le llama absorbencia.

A un conjunto independiente y absorbente le llamamos núcleo, el conjunto de los estados de la estrategia ganadora es un núcleo. El origen de los núcleos se encuentra en la teoría de juegos y la economía, viene del concepto de solución. Este fue introducido por Neumann y Morgenstern en 1944 en el documento *“The Theory of Games and Economic Behavior”*

[23], para juegos cooperativos. Berge lo aplica a la teoría de digráficas y da una definición equivalente [3]; núcleo. Este, ha llamado la atención, ya que algunos problemas en economía [25], como computación [9] y algoritmos [1] pueden ser modelados usando una digráfica y la solución puede hallarse al encontrar el núcleo de ésta. El desarrollo de condiciones para saber cuando una digráfica tiene núcleo, ha pasado por varias etapas, ya que como se ve en [9], no es un problema fácil. Neumann y Morgenstern en [25] demuestran que toda digráfica sin ciclos tiene un núcleo, este teorema se vio refinado al demostrar que toda digráfica sin ciclos impares tiene núcleo (Richardson, [24]). También se estudian algunas familias de digráficas que tienen núcleo; como las simétricas y las completas. Más investigaciones sobre estos se pueden ver en [19], [22] y [23].

La finalidad de la tesis es estudiar una generalización de los núcleos; los (k, l) -núcleos exteriores; presentados por Mostafa Blidia y Amina Ramoul en el artículo “*A new generalization of kernels in digraphs*” [7]. Sea D una digráfica, decimos que $S \subseteq V(D)$ es un conjunto k -independiente exterior si para cualquier $v \in S$, $\delta_{D[S]}^+(v) < k$. $S \subseteq V(D)$ es un conjunto l -absorbente exterior si para cualquier $v \in V(D) \setminus S$, v tiene al menos l vecinos exteriores en S ; es decir, $|N_S^+(v)| \geq l$. Un (k, l) -núcleo exterior es un conjunto de vértices de D k -independiente exterior y l -absorbente exterior en D .

En el primer capítulo damos los fundamentos necesarios para este trabajo. Se verán los conceptos de independencia, dominación y absorbencia, tanto en gráficas como en digráficas, así como el primer acercamiento al concepto de núcleo.

En el segundo capítulo presentamos una reseña histórica sobre la teoría de núcleos, demostrando algunos resultados clásicos.

En el tercer capítulo desarrollamos los resultados que aparecen en el artículo “*A new generalization of kernels in digraphs*” [7], donde M. Blidia y A. Ramoul generalizan los teoremas clásicos de núcleos, vistos en el capítulo dos, para los (k, l) -núcleos exteriores.

En la teoría de digráficas es común que se estudien propiedades mediante la aplicación de transformaciones u operaciones a una digráfica, una de las más naturales es la que asocia las flechas de una digráfica a los vértices de una nueva digráfica, la cual recibe el nombre de digráfica de líneas. En el cuarto capítulo, demostramos que si D es una digráfica y $L(D)$ su digráfica de líneas, entonces el número de k -núcleos exteriores de D es igual al número de k -núcleos exteriores de $L(D)$, con esto se generaliza el resultado de Matúš Harminec en [21]: el número de núcleos de D es igual al número de núcleos de $L(D)$.

También demostraremos que si D es una digráfica y $L(D)$ su digráfica de líneas, entonces el número de k -funciones de Grundy de D es igual al número de k -funciones de Grundy de $L(D)$, generalizando el resultado visto por H. Galeana Sánchez, L. Pastrana Ramírez y A. Rincón Mejía en [20]: si D es una digráfica, $L(D)$ su digráfica de líneas y el grado de todo vértice es mayor o igual que uno, entonces el número de funciones de Grundy de D es igual al número de funciones de Grundy de $L(D)$.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan las definiciones y los resultados necesarios para esta tesis.

1.1. Gráficas

Definición 1.1.1. *Gráfica*

Una gráfica G es una pareja ordenada $(V(G), A(G))$ tal que:

- $V(G)$ es un conjunto de objetos, finito y no vacío,
- $A(G)$ es un conjunto de parejas no ordenadas de distintos elementos de $V(G)$.

A los elementos de $V(G)$ los llamamos vértices de G y a los de $A(G)$, aristas de G .

Definición 1.1.2. *Orden*

Al cardinal de $V(G)$ lo llamamos el orden de G y lo denotamos con la letra p .

Definición 1.1.3. *Tamaño*

Al cardinal de $A(G)$ lo llamamos el tamaño de G y lo denotamos con la letra q .

Definición 1.1.4. *Adyacencia*

Sea G una gráfica decimos que dos vértices u y v son adyacentes si $a = \{v, u\}$ y a es una arista de G . Decimos también que u y v son extremos de a .

Las gráficas tienen una representación geométrica en el plano, en donde a cada vértice le corresponde un punto y a cada arista un segmento de línea, que une a los puntos correspondientes a sus extremos. Por ejemplo, la gráfica G con el conjunto de vértices:

$$V(G) = \{A, B, C, D, E, F, H, I\}$$

y con el conjunto de aristas:

$$A(G) = \{\{A, C\}, \{B, F\}, \{B, H\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{E, F\}\},$$

tiene su representación geométrica en la figura 1.1.

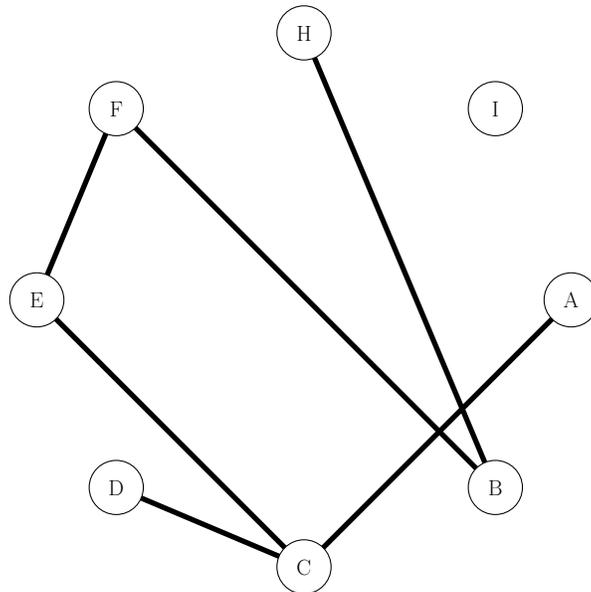


Figura 1.1: Ejemplo de la gráfica G

Definición 1.1.5. *Vecindad.*

Sean G una gráfica y v un vértice de G , al conjunto de todos los vértices de G , que son adyacentes a v lo llamamos vecindad de v y lo denotamos como $N(v)$. Al conjunto $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ lo llamamos vecindad cerrada de v .

El orden de la gráfica de la figura 1.1 es 8 y su tamaño es 6, además podemos notar que el vértice C es adyacente a los vértices A, D y E , lo que implica que $N(C) = \{A, D, E\}$. Sea G una gráfica, haremos una convención, si $a = \{u, v\}$ es una arista de G , entonces la denotamos como uv .

Definición 1.1.6. *Grado*

Sean G una gráfica y v es un vértice de G , el grado de v , que denotamos por $\delta(v)$, es el número de vecinos que tiene v ; es decir, el cardinal de $N(v)$.

En la figura 1.2 podemos observar que $N(E) = \{A, C\}$, lo que implica que $\delta(E) = 2$.

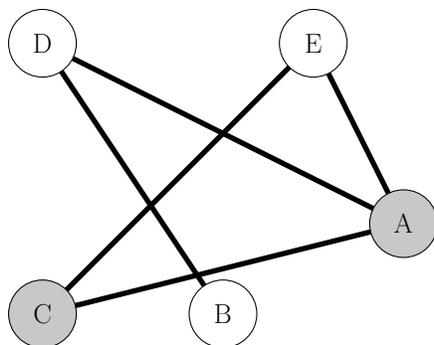


Figura 1.2: La vecindad del vértice E es $\{A, C\}$, por lo que $\delta(E) = 2$.

1.1.1. Subgráficas

Definición 1.1.7. *Subgráfica, subgráfica inducida y subgráfica generadora.*

Dadas dos gráficas G' y G , decimos que G' es una subgráfica de G si $V(G')$ es un subconjunto de $V(G)$ y $A(G')$ es un subconjunto de $A(G)$. Se denota como $G' \subseteq G$.

Sean G una gráfica y S un subconjunto de $V(G)$, una subgráfica G' de G es una subgráfica inducida por el conjunto S , si $V(G') = S$ y $A(G')$ es máximo por contención. Se denota como $G[S]$.

Sea G una gráfica, una subgráfica G' de G es una subgráfica generadora si $V(G') = V(G)$.

En las figuras 1.3 y 1.4 podemos observar ejemplos de las definiciones anteriores.

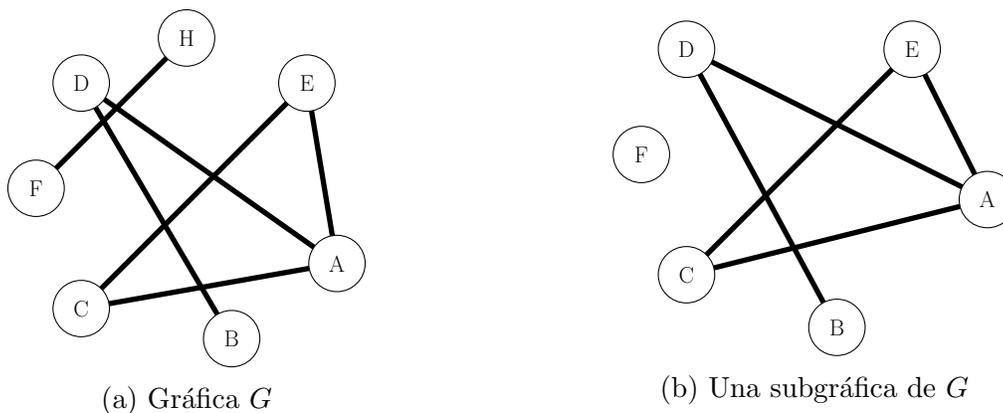


Figura 1.3: Subgráfica de una gráfica G

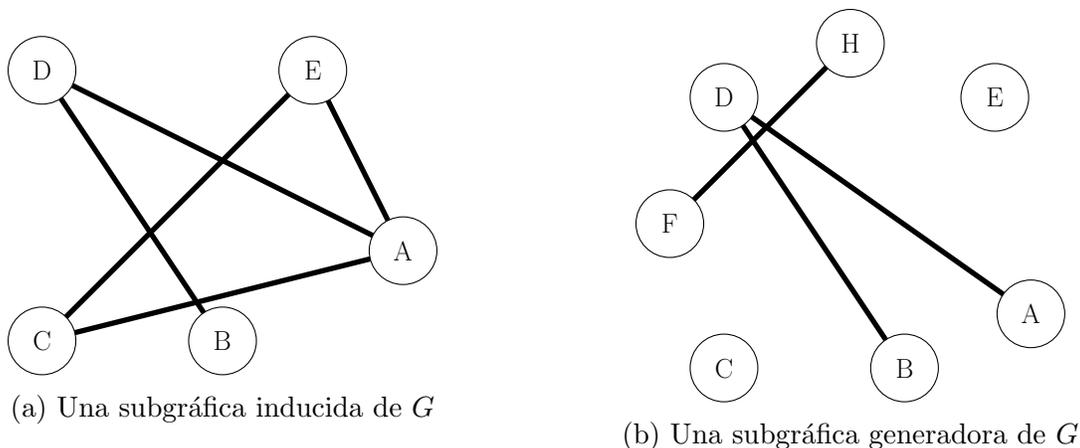


Figura 1.4: Ejemplos de subgráficas de la gráfica G de la figura 1.3a

Sean G una gráfica y a en $A(G)$, diremos que $G - a$ es una subgráfica de G , tal que $V(G - a) = V(G)$ y $A(G - a) = A(G) \setminus \{a\}$. Sea $S \subseteq A(G)$, diremos que $G - S$ es una subgráfica de G , tal que $V(G - S) = V(G)$ y $A(G - S) = A(G) \setminus S$.

Sean G una gráfica y v en $V(G)$, diremos que $G - v$ es una subgráfica de G , tal que $V(G - v) = V(G) \setminus \{v\}$ y $A(G - v) = A(G[V(G) \setminus \{v\}])$. Sea $S \subseteq A(G)$, diremos que $G - S$ es una subgráfica de G , tal que $V(G - S) = V(G) \setminus S$ y $A(G - S) = A(G[A(G) \setminus S])$.

1.1.2. Caminos

Definición 1.1.8. *Camino, longitud, camino cerrado, ciclo y trayectoria*

Sea G una gráfica, un camino $C = (v_0, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k)$ en G es una sucesión de vértices, de manera que para cada i en $\{0, \dots, k-1\}$, v_i es adyacente a v_{i+1} . Decimos que C es un camino de v_0 a v_k o un v_0v_k -camino, el vértice v_0 es el vértice inicial y v_k es el vértice final de C . Sean $C = (v_0, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k)$ un camino y $\{v_i, v_j\}$ un subconjunto de $V(C)$, con $i < j$, el camino $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j)$ lo denotamos por (v_i, C, v_j) . Sea $C = (v_0, v_2, \dots, v_k)$ un camino, definimos la longitud de C como k y la denotamos por $l(C)$. Un camino con vértice inicial y final iguales es un camino cerrado. Un ciclo es un camino cerrado que no repite vértices, salvo el primero y el último, con longitud mayor o igual a 3. Un camino que no repite vértices es una trayectoria. La trayectoria con n vértices se denota por P_n .

En la gráfica G de la figura 1.5 tenemos lo siguiente:

- (E, A, D, A, C, F) un camino de longitud 5,
- (E, C, F, H, E) un ciclo de longitud 4,
- (A, E, H, F, C) una trayectoria de longitud 4.

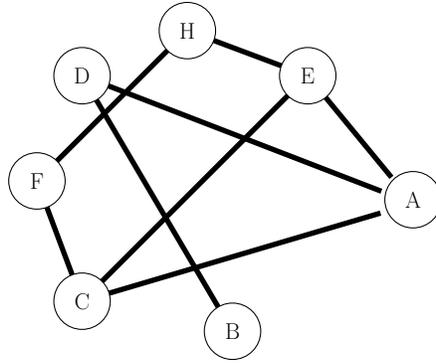


Figura 1.5: Gráfica G

Definición 1.1.9. *Gráfica Conexa*

Una gráfica es conexa si para todo u y v vértices de G existe un xy -camino (ver figura 1.6). En otro caso diremos que es no conexa.

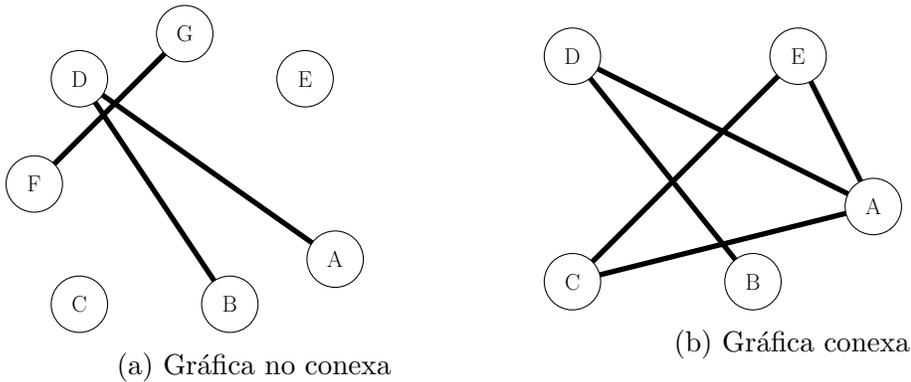


Figura 1.6: Una gráfica no conexa y una gráfica conexa

Definición 1.1.10. *Distancia*

Sea G una gráfica, la distancia entre dos vértices u y v de G la denotamos como $d(u, v)$, y la definimos como:

$$d(u, v) = \min\{l(T) \mid T \text{ es una } uv\text{-trayectoria}\}.$$

Si la uv -trayectoria no existe, entonces $d(u, v) = \infty$.

Definición 1.1.11. *Diámetro de una gráfica, excentricidad de un vértice, radio de una gráfica y centro de una gráfica.*

Sea G una gráfica, el diámetro de G , lo denotamos por $diám(G)$ y lo definimos como:

$$diám(G) = \max\{d(u, v) \mid \{u, v\} \subseteq V(G)\}.$$

Sea G una gráfica, la excentricidad de un vértice u , la denotamos por $e(u)$ y la definimos como:

$$e(u) = \text{máx}\{d(u, v) \mid v \in V(G)\}.$$

Sea G una gráfica, el radio de G , lo denotamos por $r(G)$ y lo definimos como:

$$r(G) = \text{mín}\{e(u) \mid u \in V(G)\}.$$

Sea G una gráfica, el centro de G es el conjunto de vértices cuya excentricidad es igual al radio de G .

Ejemplos de cada una de las definiciones anteriores los podemos encontrar en la gráfica G de la figura 1.7.

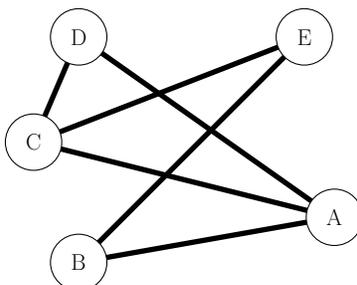


Figura 1.7: $\text{diám}(G) = 2$ y $r(G) = 2$

La excentricidad de cualquier vértice en la gráfica de la figura 1.7 es 2, por eso el centro de dicha gráfica es $V(G)$.

1.1.3. Tipos de gráficas

Definición 1.1.12. *Gráfica regular y completa*

Sea k en \mathbb{N} , una gráfica G es k -regular si para todo u vértice de G , $\delta_G(u) = k$.

Una gráfica G es completa si para todo par de vértices u y v de G , con $u \neq v$, existe $\{x, y\}$ en $A(G)$. La denotamos por K_p , donde p es el orden de la gráfica (ver figura 1.8).

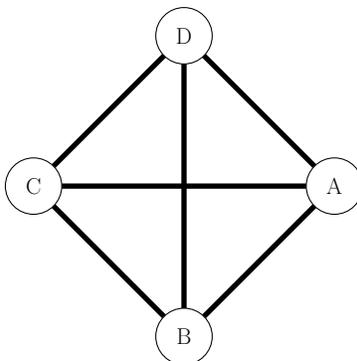


Figura 1.8: Gráfica completa de orden 4, K_4

Definición 1.1.13. *Árbol y árbol con raíz*

Una gráfica G es un árbol si es conexa y sin ciclos (ver figura 1.9).

Un árbol con raíz, es un árbol en el cual un vértice ha sido designado como la raíz.

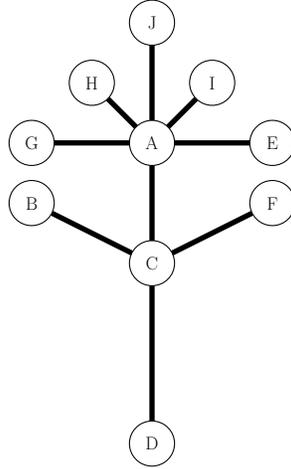


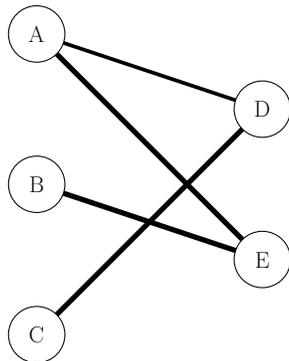
Figura 1.9: Ejemplo de un árbol

Definición 1.1.14. *Bipartita*

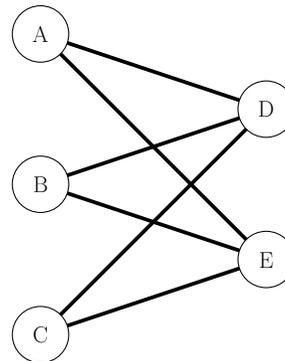
Una gráfica G es bipartita si:

1. $V(G) = X \cup Y$, con $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ y $X \cap Y = \emptyset$; es decir, $\{X, Y\}$ es una partición de $V(G)$.
2. Para todo $\{x_1, x_2\} \subseteq X$ tenemos que $x_1x_2 \notin A(G)$ y para todo $\{y_1, y_2\} \subseteq Y$ se cumple que $y_1y_2 \notin A(G)$ (ver figura 1.10a).

Cuando para todo $x \in X$ y para todo $y \in Y$, $xy \in A(G)$, decimos que G es una gráfica bipartita completa, la denotamos por $K_{n,m}$, donde n y m son los cardinales de X y Y , respectivamente (ver figura 1.10b).



(a) Gráfica bipartita



(b) $K_{3,2}$

Figura 1.10: Ejemplos de gráficas bipartitas

Definición 1.1.15. *Estrella*

Una estrella es una gráfica bipartita completa tal que alguno de los cardinales de la partición, X o Y es igual a uno.

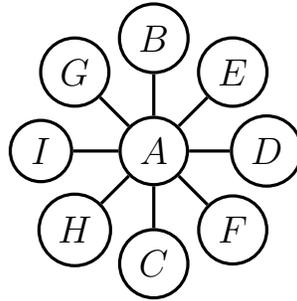


Figura 1.11: La gráfica $K_{1,8}$ es una estrella

Definición 1.1.16. *Isomorfismo de gráficas*

Un isomorfismo entre dos gráficas G y H es una biyección f entre los conjuntos de sus vértices, $f : V(G) \rightarrow V(H)$, que preserva la relación de adyacencia; es decir, cualquier par de vértices u y v de G son adyacentes en G si y solo si lo son sus imágenes, $f(u)$ y $f(v)$, en H .

1.1.4. Independencia y dominación

Aquí tendremos el primer acercamiento a los conceptos centrales que trabajaremos en la tesis.

Definición 1.1.17. *Conjunto dominante*

Sean G una gráfica y S un subconjunto de $V(G)$, S es un conjunto dominante si para todo v en $V(G) \setminus S$ existe $w \in S$ tal que $vw \in A(G)$ (ver figura 1.12).

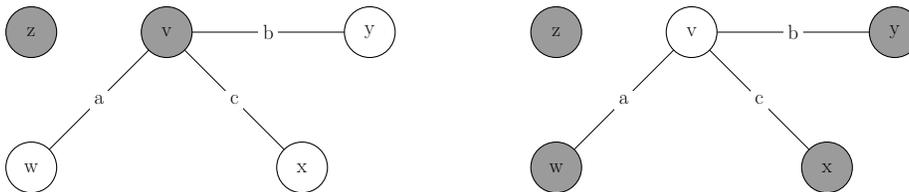


Figura 1.12: Conjuntos dominantes (en gris) de una misma gráfica

Debido a que $V(G)$ es un conjunto dominante en G , una pregunta natural es ¿Qué tan pequeño es un conjunto dominante en G ? Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 1.1.18. *Número de dominación.*

El número de dominación de define como $\min\{|S| : S \text{ es un conjunto dominante en } G\}$ y se denota por $\gamma(G)$.

Todo conjunto dominante debe tener al menos un vértice y $V(G)$ es un conjunto dominante, por lo que $1 \leq \gamma(G) \leq p$.

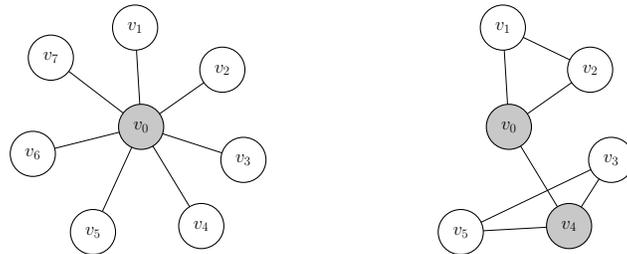


Figura 1.13: En gris conjuntos dominantes mínimos

Definición 1.1.19. *Conjunto independiente*

Sean G una gráfica y S un subconjunto de $V(G)$, decimos que S es un conjunto independiente si $A(G[S]) = \emptyset$ (ver figura 1.14).

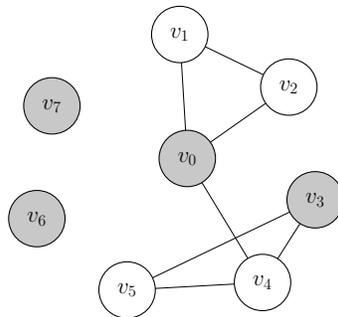


Figura 1.14: En gris un conjunto independiente

Debido a que un conjunto de un solo vértice es un conjunto independiente en G , una pregunta natural es ¿Que tan grande es un conjunto independiente en G ? Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 1.1.20. *Número de independencia.*

El número de independencia se define como $\max\{|S| : S \text{ es un conjunto independiente en } G\}$ y se denota por $\alpha(G)$. El conjunto independiente de la figura 1.14 es máximo.

1.2. Digráficas

En esta sección daremos la definición de digráfica y de algunos conceptos para este trabajo.

Definición 1.2.1. *Digráfica*

Una digráfica D es una pareja ordenada $(V(D), F(D))$ tal que:

- $V(D)$ es un conjunto de objetos, finito y no vacío,
- $F(D)$ es un conjunto de parejas ordenadas de distintos elementos de $V(D)$.

A los elementos de $V(D)$ les llamamos vértices y a los elementos de $F(D)$ flechas de D .

Definición 1.2.2. *Vértice final y vértice inicial.*

Sean D una digráfica y $a = (v, u)$ en las flechas de D , decimos que v es vértice inicial de a y que u es vértice final de a .

Definición 1.2.3. *Orden y tamaño*

Al cardinal de $V(D)$ lo llamamos el orden de D y lo denotamos con la letra p .

Al cardinal de $F(D)$ lo llamamos el tamaño de D y lo denotamos con la letra q .

Igual que las gráficas, las digráficas tienen una representación geométrica en el plano, solo que las flechas se representan con una flecha, que empieza en el punto correspondiente al vértice inicial y acaba en el punto correspondiente al vértice final.

Por ejemplo, la digráfica D con el conjunto de vértices

$$V(D) = \{A, B, C, I, E, F, G, H\},$$

y con el conjunto de flechas:

$$F(D) = \{(B, F), (C, A), (C, E), (I, C), (F, E), (G, B), (G, C), (G, I)\},$$

tiene su representación geométrica en la figura 1.15. El orden de D es $|V(D)| = 8$ y su tamaño es $|F(D)| = 8$.

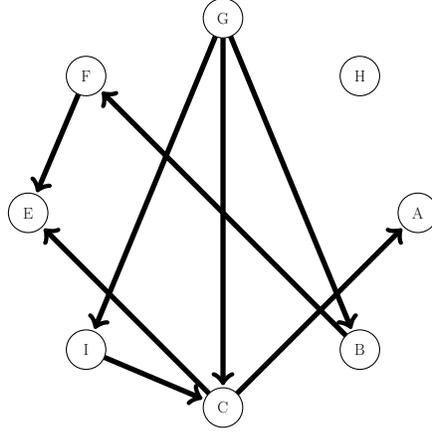


Figura 1.15: Representación geométrica de la digráfica D

Definición 1.2.4. *Adyacencia*

Sea D una digráfica decimos que dos vértices u y v son adyacentes si:

$$(v, u) \in F(D) \text{ o } (u, v) \in F(D).$$

Definición 1.2.5. *Vecino exterior y vecino interior*

Sea D una digráfica, si $a = (v, u)$ pertenece a las flechas de D , entonces decimos que u y v son vecinos, que u es vecino exterior de v y que v es vecino interior de u .

Definición 1.2.6. *Vecindad exterior, vecindad interior y vecindad*

Sean D una digráfica, y v en $V(D)$, al conjunto de todos los vecinos exteriores de v lo llamamos vecindad exterior de v y lo denotamos como $N^+(v)$. Al conjunto $N^+(v) \cup \{v\}$ lo llamamos vecindad exterior cerrada de v y lo denotamos por $N^+[v]$.

Al conjunto de todos los vecinos interiores de v lo llamamos vecindad interior de v y lo denotamos como $N^-(v)$. Al conjunto $N^-(v) \cup \{v\}$ lo llamamos vecindad interior cerrada de v y lo denotamos por $N^-[v]$.

La vecindad de v es el conjunto $N^+(v) \cup N^-(v)$ y la denotamos por $N(v)$. El conjunto $N(v) \cup \{v\}$ es la vecindad cerrada de v y lo denotamos por $N[v]$.

Definición 1.2.7. *Exgrado e ingrado*

Sean D una digráfica y v en $V(D)$ el grado exterior o exgrado de v , es el número $|N^+(v)|$ y lo denotamos por $\delta^+(v)$. El grado interior o ingrado de v es el número $|N^-(v)|$ y lo denotamos por $\delta^-(v)$.

Definición 1.2.8. *Exgrado mínimo, ingrado mínimo y grado mínimo de D*

Sea D una digráfica, el exgrado mínimo de D se define como $\min\{\delta^+(x) \mid x \in V(D)\}$ y lo denotamos por $\delta^+(D)$. El ingrado mínimo de D se define como $\min\{\delta^-(x) \mid x \in V(D)\}$ y lo denotamos por $\delta^-(D)$. El grado mínimo de D es el número que se obtiene al sumar el ingrado mínimo y el exgrado mínimo de D y lo denotamos como $\delta(D)$.

Definición 1.2.9. *Exgrado máximo, ingrado máximo y grado máximo de D*

Sea D una digráfica, el exgrado máximo de D se define como $\max\{\delta^+(x) \mid x \in V(D)\}$, lo denotamos por $\Delta^+(D)$. El ingrado máximo de D se define como $\max\{\delta^-(x) \mid x \in V(D)\}$ y lo denotamos por $\Delta^-(D)$. El grado máximo de D es el número que se obtiene al sumar el exgrado máximo y el ingrado máximo de D y lo denotamos por $\Delta(D)$.

La digráfica de la figura 1.16 nos servirá para ver cada una de las definiciones de las vecindades del vértice C .

- $N^-(C) = \{B_1, B_2, B_3\}$, vértices en gris claro. Además $\delta^-(C) = 3$,
- $N^+(C) = \{D_1, D_2, D_3\}$, vértices en gris oscuro. Además $\delta^+(C) = 3$,
- $N(C) = \{B_1, B_2, B_3, D_1, D_2, D_3\}$.

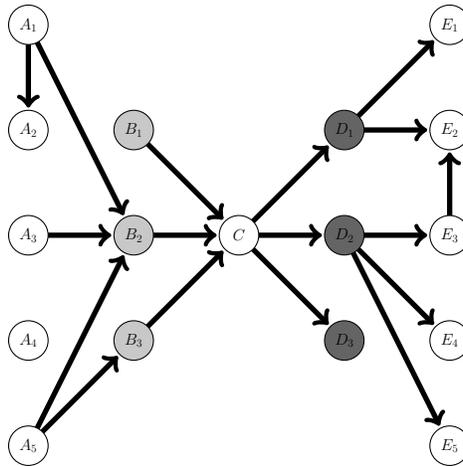


Figura 1.16: Ejemplos de vecindades

Sean D una digráfica y S un subconjunto de $V(D)$, la vecindad exterior de S es $\bigcup_{u \in S} N_D^+(u)$ y la denotamos por $N_D^+(S)$. La vecindad exterior cerrada de S es $N_D^+(S) \cup S$ y la denotamos por $N_D^+[S]$. La vecindad interior de S es $\bigcup_{u \in S} N_D^-(u)$, que denotamos como $N_D^-(S)$. La vecindad interior cerrada de S es $N_D^-(S) \cup S$ y la denotamos por $N_D^-[S]$.

Hay subconjuntos de vértices y sus vecindades que pueden tener elementos en común, por ejemplo, para el conjunto $S' = \{B_2, C, D_2\}$, en la digráfica D de la figura 1.16 tenemos:

- $N^-(S') \cap S' = \{C, B_2\}$, con $N^-(S') = \{A_1, A_3, A_5, B_1, B_2, B_3, C\}$,

- $N^+(S') \cap S' = \{C, D_2\}$, con $N^+(S') = \{C, D_1, D_2, D_3, E_3, E_4, E_5\}$,
- $S' \subset N(S')$, con $N(S') = \{A_1, A_3, A_5, B_1, B_2, B_3, C, D_1, D_2, D_3, E_3, E_4, E_5\}$ ver figura 1.17.

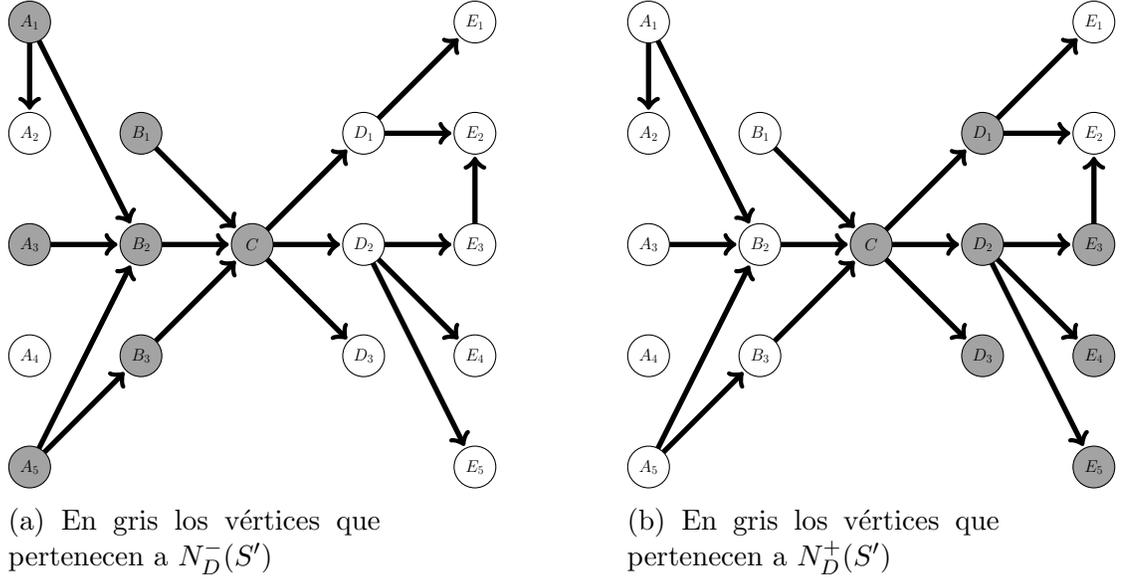


Figura 1.17: Ejemplos de vecindades para conjuntos

1.2.1. Subdigráficas

Definición 1.2.10. *Subdigráfica y subdigráfica inducida*

Dadas dos digráficas D' y D , se dice que D' es una subdigráfica de D si, $V(D') \subseteq V(D)$ y $F(D') \subseteq F(D)$. La denotamos por $D' \subseteq D$.

Sean D una digráfica y S un subconjunto de $V(D)$. La subdigráfica inducida por el conjunto S , a la que denotamos como $D[S]$, es la subdigráfica que tiene $V(D[S]) = S$ y para u en S y v en S se tiene que $(u, v) \in F(D[S])$ si y solo si $(u, v) \in F(D)$ (ver figura 1.18).

Sean D una digráfica y a en $F(D)$, diremos que $D - a$ es la subdigráfica de D , tal que $V(D - a) = V(D)$ y $F(D - a) = F(D) \setminus \{a\}$. Sea S un subconjunto de $F(D)$, diremos que $D - S$ es la subdigráfica de D , tal que $V(D - S) = V(D)$ y $F(D - S) = F(D) \setminus S$.

Sean D una digráfica y v en $V(D)$, diremos que $D - v$ es la subdigráfica de D , tal que $V(D - v) = V(D) \setminus \{v\}$ y $F(D - v) = F(D[V(D) \setminus \{v\}])$. Sea S un subconjunto de $V(D)$, diremos que $D - S$ es la subdigráfica de D , tal que $V(D - S) = V(D) \setminus S$ y $F(D - S) = F(D[F(D) \setminus S])$.

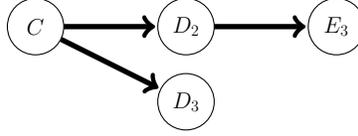


Figura 1.18: Ejemplo de subdigráfica inducida por $S = \{C, D_2, D_3, E_3\}$ en la digráfica D de la figura 1.16.

Definición 1.2.11. *Subdigráfica generadora*

Sean D una digráfica y D' una subdigráfica de D . D' es una subdigráfica generadora de D si $V(D') = V(D)$.

Definición 1.2.12. *Orientación y gráfica subyacente*

Para cada gráfica $G = (V(G), A(G))$, llamamos orientación de G a cualquier digráfica D con el mismo conjunto de vértices que G y tal que dos vértices son adyacentes en G si y solo si existe al menos una flecha entre ellos en D .

Sea D una digráfica, a D le asociamos una gráfica, llamada la gráfica subyacente de D , la cual denotamos por $UG(D)$ y la definimos de la siguiente manera:

- $V(UG(D)) = V(D)$ y,
- uv es una arista de la gráfica $UG(D)$ si y solo si (u, v) o (v, u) es una flecha de D .

A lo largo de esta tesis, cualquier digráfica D debe ser vista como una orientación de su gráfica subyacente.

1.2.2. Tipos de digráficas

Definición 1.2.13. *Flecha simétrica y flecha asimétrica*

Sean D una digráfica y (u, v) en $F(D)$. Decimos que (u, v) es simétrica si $(v, u) \in F(D)$. (u, v) es asimétrica si $(v, u) \notin F(D)$ (ver figura 1.19).



Figura 1.19: Flecha simétrica y flecha asimétrica

Definición 1.2.14. *Asim(D) y Sim(D)*

La parte asimétrica de D , que denotamos como $Asim(D)$, es la subdigráfica generadora de D tal que $F(Asim(D)) = \{(u, v) \in F(D) \mid (u, v) \text{ es asimétrica}\}$. La parte simétrica de D , $Sim(D)$, es la subdigráfica generadora de D tal que $F(Sim(D)) = \{(u, v) \in F(D) \mid (u, v) \text{ es simétrica}\}$ (ver figura 1.20).

Definición 1.2.15. *Digráfica asimétrica y digráfica simétrica*

Sea D una digráfica, si $F(\text{Asim}(D)) = F(D)$, entonces decimos que D es asimétrica. Si $F(\text{Asim}(D)) = \emptyset$, entonces decimos que D es simétrica.

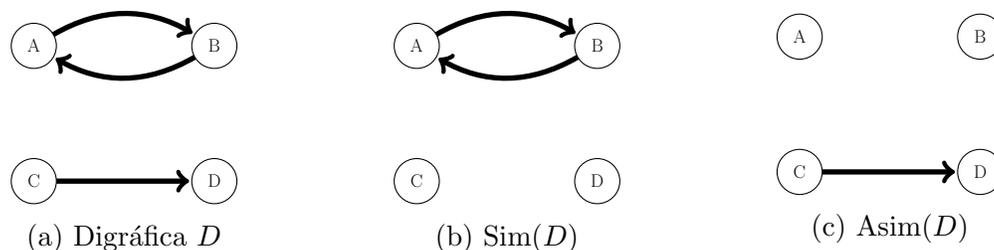


Figura 1.20: Partes simétrica y asimétrica de una digráfica

Definición 1.2.16. *Digráfica transitiva*

Sean D una digráfica, u, v y w diferentes vértices de D . Decimos de D es una digráfica transitiva si cada que $(u, v) \in F(D)$ y $(v, w) \in F(D)$, entonces $(u, w) \in F(D)$.

Definición 1.2.17. *Digráfica regular y completa*

Sean D una digráfica, u y k en \mathbb{N} , decimos que D es k -regular si $\delta_+(u) = k$ y $\delta_-(k) = k$.

Sean D una digráfica, u y v dos vértices distintos de D . Diremos que D es completa si existen las flechas (v, u) y (u, v) en las flechas de D , la denotamos por K_p si tiene orden p .

Definición 1.2.18. *Digráfica semicompleta y torneo*

Una digráfica D es llamada semicompleta si para cada subconjunto $\{u, v\}$ de $V(D)$, con $u \neq v$, $(u, v) \in F(D)$ o $(v, u) \in F(D)$. Un torneo es una digráfica asimétrica y semicompleta.

Definición 1.2.19. *Bipartita*

Una digráfica D es bipartita si:

1. $V(D) = X \cup Y$, con $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ y $X \cap Y = \emptyset$; es decir, $\{X, Y\}$ es una partición de $V(D)$.
2. Para todo subconjunto $\{x_1, x_2\}$ de X tenemos que $(x_1, x_2) \notin F(D)$ y para todo subconjunto $\{y_1, y_2\}$ de Y se cumple $(y_1, y_2) \notin F(D)$.

Cuando para todo x en X y para todo y en Y , $(x, y) \in F(D)$ y $(y, x) \in F(D)$, decimos que D es una digráfica bipartita completa, la denotamos por $K_{n,m}$, donde n y m son los cardinales de X y Y , respectivamente.

1.2.3. Caminos en digráficas

Definición 1.2.20. *Camino dirigido*

Sea D una digráfica, un camino dirigido $C = (v_0, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k)$ en D es una sucesión de vértices, de manera que para $0 \leq i < k$, v_i es vecino interior de v_{i+1} . C es un camino dirigido de v_0 a v_k o un v_0v_k -camino dirigido, el vértice v_0 es el vértice inicial de C y v_k es el vértice final de C , ver figura 1.22. Un camino dirigido con vértice inicial y final iguales es un camino dirigido cerrado.

Si $C_1 = (v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k)$, $C_2 = (u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, u_k)$ son caminos dirigidos y $v_k = u_0$, denotamos por $C_1 \cup C_2$ al camino dirigido $(v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k = u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, u_k)$.

Definición 1.2.21. *Longitud de un camino dirigido*

Sea $C = (v_0, v_2, \dots, v_k)$ un camino dirigido. Definimos la longitud de C como el número k y la denotamos por $l(C)$.

Definición 1.2.22. *Trayectoria dirigida*

Sea D una digráfica, P es una trayectoria dirigida, si es un camino dirigido y no repite vértices. A la trayectoria dirigida con p vértices la denotamos por P_p (ver figura 1.21).

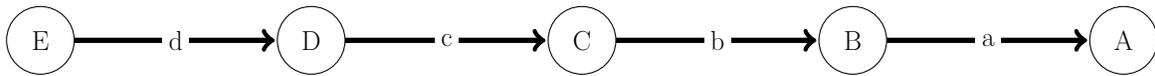


Figura 1.21: Ejemplo de trayectoria dirigida

Para efectos de esta tesis escribiremos caminos, trayectorias y ciclos en lugar de caminos dirigidos, trayectorias dirigidas y ciclos dirigidos.

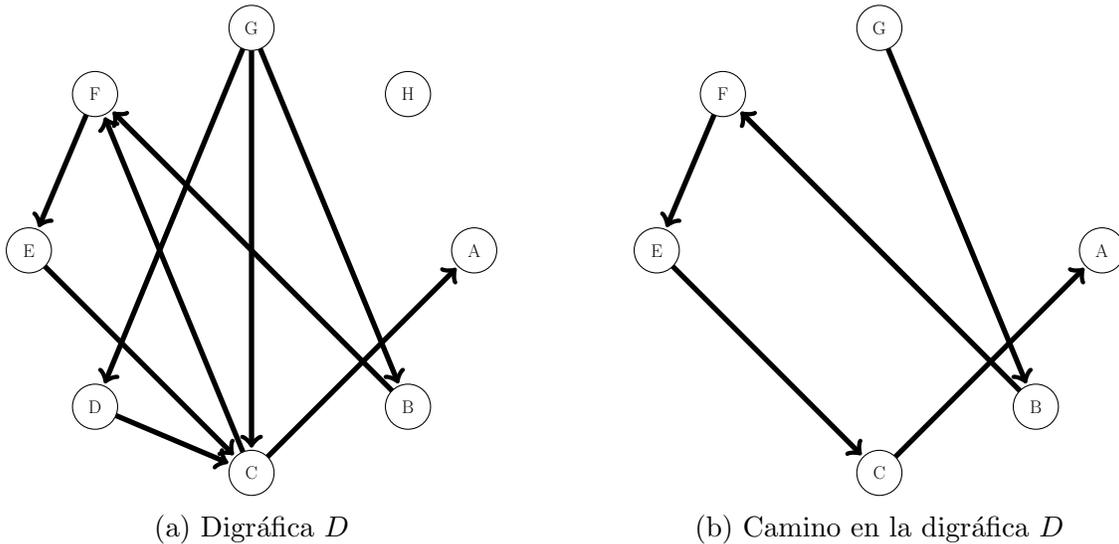


Figura 1.22: (G, B, F, E, C, A) es un GA -camino. Su longitud es 5.

Definición 1.2.23. *Ciclo dirigido*

Un ciclo dirigido γ es un camino dirigido que no repite vértices, salvo el primero y el último, tal que $l(\gamma) \geq 2$ (ver figura 1.23).

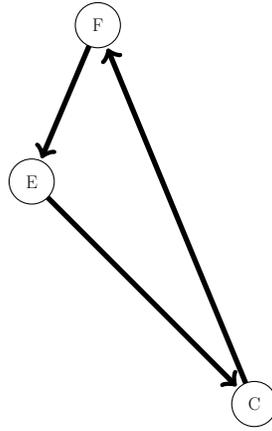


Figura 1.23: Ejemplo de ciclo dirigido (C, E, F, C)

Definición 1.2.24. *Distancia*

Sea D una digráfica, a la distancia entre los vértices u y v la denotamos como $d(u, v)$ y la definimos como:

$$d(u, v) = \text{mín} \{ l(T) \mid T \text{ es una } uv\text{-trayectoria} \}.$$

Si no existe la uv -trayectoria, entonces $d(u, v) = \infty$. Hay que notar que la distancia no es simétrica; por ejemplo, en la digráfica $V(D) = \{A, B\}$ y $F(D) = \{(A, B)\}$ la distancia de A a B es uno, mientras que la distancia de B a A es infinita.

Definición 1.2.25. *Digráfica débilmente conexa*

Una digráfica D es débilmente conexa si $UG(D)$ es conexa.

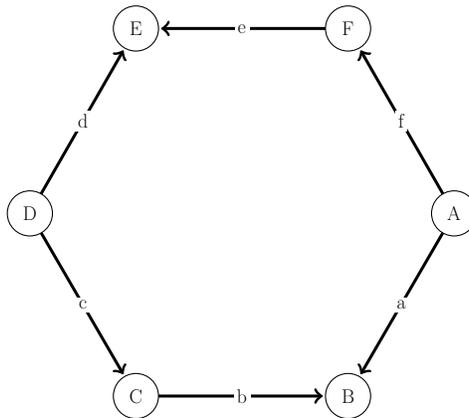


Figura 1.24: Una digráfica débilmente conexa

Definición 1.2.26. *Digráfica unilateralmente conexa y digráfica fuertemente conexa*

Una digráfica D es unilateralmente conexa si para todo subconjunto $\{u, v\}$ de $V(D)$ existe una uv -trayectoria o una vu -trayectoria. D es fuertemente conexa si para cualquier par de vértices existe la uv -trayectoria y una vu -trayectoria.

Definición 1.2.27. *Componente fuertemente conexa*

Sea D una digráfica, si D_1 es una subdigráfica inducida, fuertemente conexa y máxima por contención, entonces decimos que D_1 es una componente fuertemente conexa de D .

Definición 1.2.28. *Digráfica de condensación*

Sea D una digráfica, a D le asociamos una digráfica llamada la digráfica de condensación de D , la cual denotamos por $SC(D)$ y la definimos de la siguiente manera:

- $V(SC(D)) = \{C \mid C \text{ es una componente fuertemente conexa}\}$ y,
- la flecha (C_i, C_j) pertenece a $F(SC(D))$ si y solo si existe una flecha de $V(C_i)$ hacia algún vértice de $V(C_j)$ en D , con C_i y C_j componentes fuertemente conexas distintas de D .

1.2.4. Independencia y dominación

Definición 1.2.29. *Conjunto independiente*

Sean D una digráfica y S un subconjunto de $V(D)$, decimos que S es un conjunto independiente si para cualesquiera v en S y u en S , se tiene que (u, v) y (v, u) no pertenecen a $F(D)$.

Notemos que en una digráfica D no vacía, un subconjunto de $V(D)$ con solo un vértice, siempre es un conjunto independiente.

Definición 1.2.30. *Número de independencia de una digráfica*

El número de independencia de una digráfica D se define como $\max\{|S| \mid S \text{ es un conjunto independiente}\}$ y lo denotamos por $\alpha(D)$. Observemos que los vértices de grado cero están en todo conjunto independiente máximo.

Definición 1.2.31. *Conjunto dominante*

Sean D una digráfica y S un subconjunto de $V(D)$, decimos que S es un conjunto dominante si para cualquier v en $V(D) \setminus S$, existe u en S tal que $(u, v) \in S$.

En una digráfica D , el conjunto $V(D)$ siempre es un conjunto dominante.

Definición 1.2.32. *Número de dominación de una digráfica*

El número de dominación de una digráfica D se define como $\min\{|S| \mid S \text{ es un conjunto dominante en } D\}$ y lo denotamos por $\beta(D)$.

Definición 1.2.33. *Conjunto absorbente*

Sean D una digráfica y S un subconjunto de $V(D)$, decimos que S es un conjunto absorbente si para cualquier v en $V(D) \setminus S$, existe u en S tal que $(v, u) \in S$.

Al igual que la dominación, el conjunto $V(D)$ siempre es un conjunto absorbente para cualquier digráfica D .

Definición 1.2.34. *Número de absorbencia de una digráfica*

El número de absorbencia de una digráfica D se define como $\min\{|S| \mid S \text{ es un conjunto absorbente en } D\}$ y lo denotamos por $\gamma(D)$.

1.2.5. Resultados

Lema 1.2.1. *Sea D una digráfica. Si $\delta^+(D) \geq 1$, entonces D contiene un ciclo.*

Demostración. Sean D una digráfica con $\delta^+(D) \geq 1$ y $T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ una trayectoria de longitud máxima en D . Como $\delta^+(D) \geq 1$ existe $x \in V(D)$ tal que $(x_n, x) \in F(D)$, si suponemos que $x \notin V(T)$, entonces $T' = T \cup (x_n, x)$ es una trayectoria con una longitud mayor a la longitud de T , lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $x \in V(T)$; es decir, $x = x_i$ para alguna i . Así, D contiene el ciclo $C = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, x = x_i)$. \square

Lema 1.2.2. *Sean D una digráfica, v, u en $V(D)$, con $v \neq u$. Todo uv -camino de longitud mayor o igual a 2 en D contiene una uv -trayectoria.*

Demostración. Sean D una digráfica, v y u en $V(D)$, con $v \neq u$ y C un uv -camino, con $l(C) \geq 2$. Demostraremos que existe una uv -trayectoria T , tal que $V(T) \subseteq V(C)$, por inducción sobre $l(C)$.

Base de inducción.

Si C es de longitud 1 ó 2 y como $u \neq v$, entonces C es una trayectoria, digamos $C = (u, v)$ o $C = (u, v_1, v)$. Por lo tanto, $T = C$ es una uv -trayectoria tal que $V(T) \subseteq V(C)$.

Si C es de longitud 3 y como $u \neq v$, entonces

- Si $C = (u, v_1, v_2, v)$.

En este caso $T = (u, v_1, v_2, v)$ es una uv -trayectoria contenida en C .

- Si $C = (u, v_1, u, v)$ ó $C = (u, v, v_2, v)$

Para estos casos $T = (u, v)$ es una uv -trayectoria contenida en C .

Por lo que si C es un uv -camino de longitud 1,2 ó 3, entonces C contiene una uv -trayectoria.

Hipótesis de inducción.

Supondremos que si C' es un uv -camino de longitud mayor o igual a 3 y menor que n , entonces C' contiene una uv -trayectoria T' tal que $V(T') \subseteq V(C')$.

Paso inductivo.

Sea $C = (u = v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = v)$ un camino de longitud n . Si $v_i \neq v_j$ para cada i en $\{0, \dots, n\}$ y cada $j \neq i$ en $\{0, \dots, n\}$, entonces $T = C$ es una uv -trayectoria.

Si $v_i = v_j$ para algún i en $\{0, \dots, n\}$ y algún j en $\{0, \dots, n\}$, con $i \neq j$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i < j$. Sea $C' = (u = v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, v_i = v_j, v_{j+1}, \dots, v_{n-1}, v_n = v)$, como $v_i \neq v_j$, entonces existe v_{i+1} tal que $(v_i, v_{i+1}) \in A(D)$. Como $(v_i, v_{i+1}) \in A(C)$, $(v_i, v_{i+1}) \notin A(C')$ y $C' \subset C$, tenemos que $l(C') < n$. Si $l(C') < 3$, por base de inducción, C' tiene uv -trayectoria, digamos T' . Si $3 < l(C') < n$, por hipótesis de inducción, C' tiene uv -trayectoria digamos T' . En cualquier caso $V(T') \subseteq V(C') \subseteq V(C)$. Por lo tanto C contiene una uv -trayectoria. □

Lema 1.2.3. *Sea D una digráfica. Todo camino cerrado de longitud impar mayor o igual a 3 en D contiene un ciclo de longitud impar.*

Demostración. Sean D una digráfica y C un camino cerrado de longitud impar en D , haremos la demostración por inducción sobre la longitud del camino.

Base de inducción.

Si C es de longitud 3, entonces C es un ciclo de longitud impar.

Hipótesis de inducción.

Supondremos que si C es un camino cerrado de longitud impar mayor o igual a 3 y menor que n , entonces C contiene un ciclo de longitud impar.

Paso inductivo.

Sea C un ciclo de longitud n mayor a 3 tal que:

$$C = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = v_0), \text{ con } n \text{ impar.}$$

Si $v_i \neq v_j$ para todo $i \neq j$, con i y j en $\{0, \dots, n\}$, entonces C es un ciclo de longitud impar.

Si existen i y j en $\{0, \dots, n\}$, tales que $i \neq j$ y $v_i = v_j$, sin pérdida de generalidad supongamos que $i < j$, entonces podemos construir dos caminos cerrados C_1 y C_2 como sigue:

$$C_1 = (v_0, \dots, v_{i-1}, v_i = v_j, v_{j+1}, \dots, v_n),$$

$$C_2 = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j = v_i)$$

Observemos que $l(C) = l(C_1) + l(C_2)$ y que alguna longitud de los caminos C_1 ó C_2 es impar, ya que la longitud de C es impar.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que C_1 es el camino de longitud impar. Como $l(C_1) < l(C)$, por hipótesis de inducción C_1 contiene un ciclo de longitud impar, por lo tanto, C contiene un ciclo de longitud impar. □

Lema 1.2.4. *Sea D una digráfica. D es fuertemente conexa si y solo si existe un camino cerrado que pasa por todos los vértices de D .*

Demostración. Sean D una digráfica fuertemente conexa.

\Rightarrow) Sea $C = (v_0, \dots, v_n = v_0)$ un camino cerrado que pasa por la mayor cantidad de vértices de D , si pasa por todos ya acabamos. Supongamos que existe $v \in V(D)$ tal que $v \notin V(C)$. Como D es fuertemente conexa existen:

$$C_0 = (v, \dots, v_0) \text{ y}$$

$$C_n = (v_n = v_0, \dots, v),$$

dos caminos en D . Por lo tanto, $C_0 \cup C \cup C_n$ es un camino cerrado que tiene más vértices que C , lo cual es una contradicción, por lo que $V(C) = V(D)$.

\Leftarrow) Sean $C = (v_0, \dots, v_n = v_0)$ un camino cerrado que pasa por todos los vértices, v_i y v_j vértices de D , con $i < j$. Demostraremos que existen la $v_i v_j$ -trayectoria y la $v_j v_i$ -trayectoria. Como C es un camino cerrado existe un $v_j v_i$ -camino y un $v_i v_j$ -camino, por el lema 1.2.2, existe la $v_i v_j$ -trayectoria y la $v_j v_i$ -trayectoria. □

Proposición 1.2.1. *Si D es una digráfica transitiva y fuertemente conexa, entonces es completa.*

Demostración. Sean D una digráfica transitiva y fuertemente conexa, x y y vértices de D , por demostrar que $(x, y) \in F(D)$. Como D es fuertemente conexa, se tiene la xy -trayectoria, digamos $T = (x, v_1, \dots, v_n, y)$. Dado que D es transitiva, $(x, v_1) \in F(D)$ y $(v_1, v_2) \in F(D)$, entonces $(x, v_2) \in F(D)$. Como D es transitiva, $(x, v_2) \in F(D)$ y $(v_2, v_3) \in F(D)$, entonces $(x, v_3) \in F(D)$. Siguiendo este procedimiento llegamos a que $(x, v_n) \in F(D)$. Puesto que D es transitiva, $(x, v_n) \in F(D)$ y $(v_n, y) \in F(D)$, entonces $(x, y) \in F(D)$. Por lo tanto, para cualquier par de vértices x y y de D , existe la (x, y) flecha en $F(D)$, es decir, D es completa. □

Teorema 1.2.1. *Sea D una digráfica. Si D es fuertemente conexa y no tiene ciclos de longitud impar, entonces D es bipartita.*

Demostración. Sea D una digráfica sin ciclos de longitud impar y fuertemente conexa. Por el teorema 1.2.4, D tiene un camino cerrado que pasa por todos sus vértices, digamos $C = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$.

Si $l(C)$ es impar, el teorema 1.2.3 implica que D tiene un ciclo de longitud impar, lo cual es una contradicción, así C tiene longitud n , con n par.

Demostraremos que $V(D)$ se puede partir en dos conjuntos ajenos e independientes. Sean:

$$A = \{v_i \in V(D) \mid i = 2k, \text{ con } k \text{ en } \{0, \dots, \frac{n}{2}\}\}$$

$$B = \{v_i \in V(D) \mid i = 2k + 1, \text{ con } k \text{ en } \{0, \dots, \frac{n}{2} - 1\}\}.$$

- Por definición de C , A y de D se tiene que $V(D) = V(C) = A \cup B$, $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$.
- Demostraremos que A y B son ajenos. Supongamos que $A \cap B \neq \emptyset$; es decir, existe v tal que $v = v_i = v_j$, con $i = 2r$ y $j = 2s + 1$, sin pérdida de generalidad supongamos que $i < j$, entonces:

$$C' = (v = v_i, v_{i+1} \dots, v_j = v),$$

es un camino cerrado de longitud impar. Pero como ya vimos, todos los caminos cerrados tienen que ser de longitud par, así que esto es una contradicción. Por lo tanto, $A \cap B = \emptyset$.

- Demostraremos que $(v_r, v_s) \notin F(D)$ para cualquier subconjunto $\{v_r, v_s\}$ de A o cualquier subconjunto $\{v_r, v_s\}$ de B , para concluir que D es una digráfica bipartita.

Sea $\{v_r, v_s\}$ un subconjunto de A , por demostrar que $(v_r, v_s) \notin F(D)$. Por contradicción, supongamos que $(v_r, v_s) \in F(D)$. Tenemos dos casos, a saber $r < s$ y $s < r$.

Caso 1) Si $r < s$, entonces el camino $C' = (v_r, v_{r+1}, \dots, v_s, v_r)$ es un camino cerrado de longitud impar, lo cual es una contradicción.

Caso 2) Si $s < r$, entonces el camino $C' = (v_r, v_{r+1}, \dots, v_n = v_0, v_1, \dots, v_s, v_r)$ es un camino cerrado de longitud impar, lo cual es una contradicción.

Así, para cualquier subconjunto $\{v_r, v_s\}$ de A , con $r \neq s$, se tiene que $(v_r, v_s) \notin F(D)$. De manera análoga se demuestra que B es un conjunto independiente en D . Por lo tanto, D es una digráfica bipartita.

□

Lema 1.2.5. *Sea D una digráfica. $SC(D)$ es una digráfica acíclica.*

Demostración. Sean D una digráfica y $SC(D)$ su digráfica de condensación, por demostrar que $SC(D)$ es acíclica. Por contradicción, supongamos que existe un ciclo en $SC(D)$, digamos (C_1, C_2, \dots, C_k) .

Afirmamos que $D[\bigcup_{i=1}^k V(C_i)]$ es una subdigráfica fuertemente conexa de D . Sean x en $V(C_i)$ y y en $V(C_j)$, con $\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, k\}$.

Caso 1) Si $i = j$, tenemos que como C_i es una componente fuertemente conexa, entonces existe la xy -trayectoria y la yx -trayectoria.

Caso 2) Si $i \neq j$, sin pérdida de generalidad supongamos que $i < j$.

Como $(C_r, C_{r+1}) \in F(SC(D))$, para cada r en $\{1, \dots, k\}$, se sigue de la definición de digráfica de condensación que existen x_r en $V(C_r)$ y y_{r+1} en $V(C_{r+1})$ tales que $(x_r, y_{r+1}) \in F(D)$, donde diremos que $y_{k+1} = y_1$ y $C_{k+1} = C_1$. Por otro lado, como cada C_r es fuertemente conexa, entonces existe una $y_r x_r$ -trayectoria en C_r , digamos T_r .

Como $x \in V(C_i)$ y C_i es fuertemente conexa, entonces existe una $y_i x$ -trayectoria en C_i , digamos P , y existe una $x x_i$ -trayectoria en C_i , digamos Q . Análogamente, existe una $y_j y$ -trayectoria en C_j , digamos R , y existe una $y x_j$ -trayectoria en C_j , digamos S . Por lo tanto:

$$Q \cup (x_i, y_{i+1}) \cup T_{i+1} \cup (x_{i+1}, y_{i+2}) \cup \dots \cup (x_{j-1}, y_j) \cup R$$

$$S \cup (x_j, y_{j+1}) \cup T_{j+1} \cup \dots \cup (x_{k-1}, y_k) \cup T_k \cup (x_k, y_{k+1} = y_1) \cup T_1 \cup (x_1, y_2) \cup \dots \cup (x_{i-1}, y_i) \cup P.$$

Por lo tanto, existe la xy -trayectoria y la yx -trayectoria en $D[\bigcup_{i=1}^k V(C_i)]$.

Así, $D[\bigcup_{i=1}^k V(C_i)]$ es una subdigráfica fuertemente conexa de D que contiene propiamente a cada C_r , lo cual es una contradicción. Concluimos que $SC(D)$ no puede tener ciclos. □

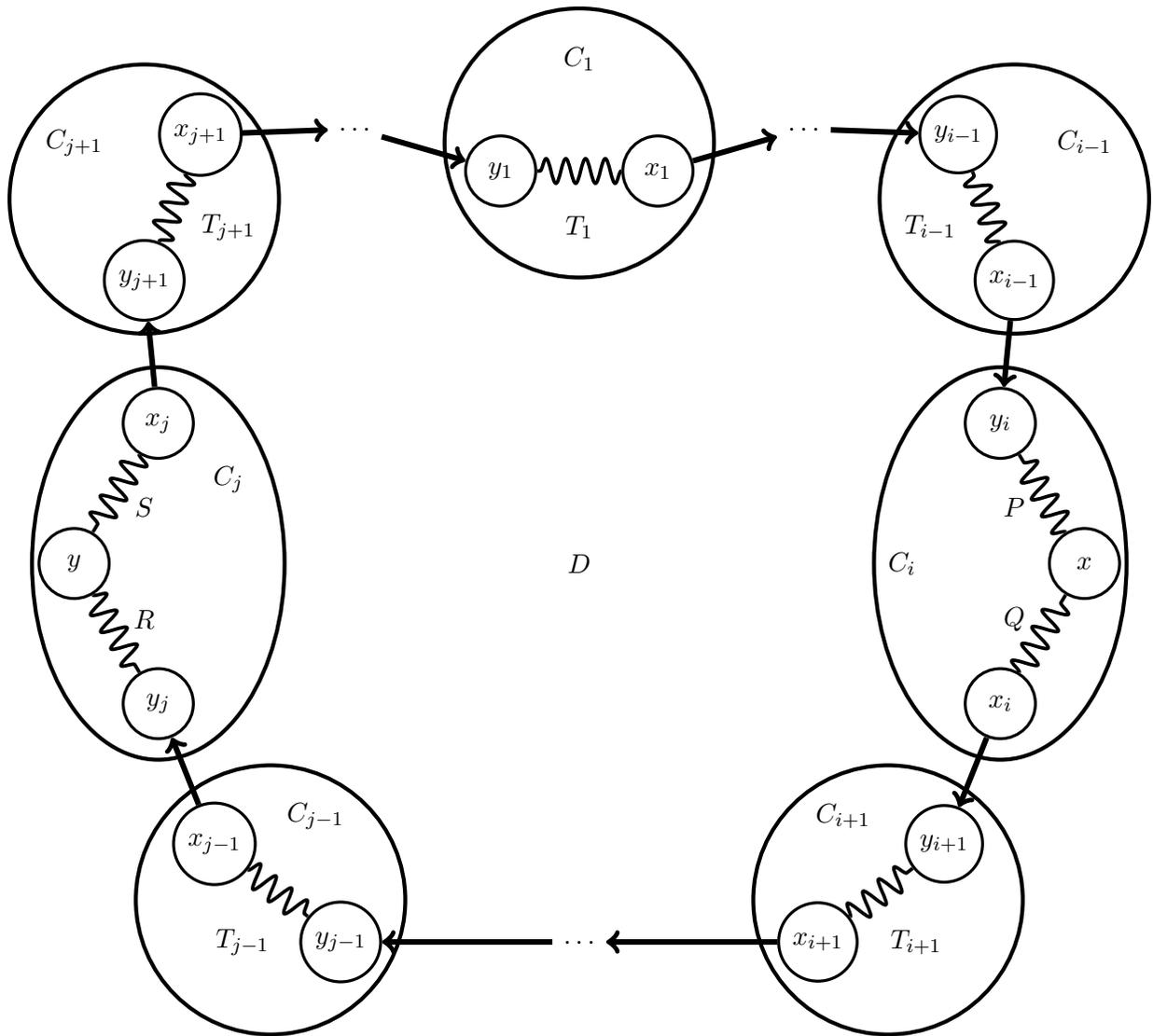


Figura 1.25: Trayectorias de D

Capítulo 2

Núcleos

En este capítulo presentamos una reseña histórica sobre la teoría de núcleos, demostrando algunos resultados clásicos.

2.1. Núcleos y primeros resultados

Comenzaremos esta sección con una breve introducción histórica sobre la vida de Neumann y Morgenstern.

La colaboración entre el economista Morgenstern y el matemático von Neumann condujo al nacimiento del concepto de solución como una generalización para resolver juegos cooperativos.

John von Neumann nació en Budapest en el año 1903, parte de una familia judía, desde chico dio muestras de su genialidad, tenía una muy buena memoria, por influencia de su padre estudió ingeniería química en la ETH de Zurich. En 1929 von Neumann fue a la Universidad de Princeton. Los años posteriores intercalaba su estancia entre Alemania y Estados Unidos, pero en 1933 los nazis llegaron al poder, esto causó que los judíos fueran expulsados de sus puestos entre ellos von Neumann, afortunadamente el ya tenía una estancia en Estados Unidos, además el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton lo eligió como profesor, facilitándole la estadía.

Fue en Princeton donde Neumann y Morgenstern empezaron a trabajar en conjunto, pero ¿qué llevó a Oskar Morgenstern docente en la universidad de Viena a vivir en Estados Unidos? Mientras visitaba la Universidad de Princeton en 1938, Adolf Hitler anexó Austria a Alemania, debido a esto Morgenstern decidió vivir en Estados Unidos y terminó dando clases en la misma universidad que von Neumann. Juntos escribieron el libro “La teoría de juegos y el comportamiento económico”, es reconocido como el primer libro sobre teoría de juegos [25].

Por su parte Claude Berge, nacido en París en 1926, tomó el concepto de solución, el cual

fue introducido por Neumann y Morgenstern en su libro “La teoría de juegos y el comportamiento económico”, y lo llevo al ámbito de las digráficas, forjando el concepto actual de núcleo.

El concepto de núcleo en digráficas ha traído mucha atención ya que algunos problemas pueden ser modelados por medio de digráficas, como ejemplo tenemos los juegos tipo Nim, donde al ubicar el núcleo podemos encontrar una estrategia para ganar, en juegos cooperativos de n jugadores y en general en muchas relaciones binarias para reducción de costos. Comprobar si una digráfica tiene un núcleo y determinarlo es un problema difícil, Chvátal mostró en [9] que decidir si una gráfica posee un núcleo es un problema NP completo. Con este panorama se han buscado y conseguido resultados para familias especiales de digráficas.

Comenzaremos este capítulo con el concepto de solución planteado por Morgenstern y von Neumann. En los juegos cooperativos se intenta hacer que los jugadores reciban más si pertenecen a una alianza de jugadores que si van individualmente, entonces diremos que los jugadores están actuando con eficacia si se forman en alianzas, a esta alianza se le llama la gran coalición. El juego no permite que un jugador reciba menos si está en una alianza que si va por su cuenta, esta claro que un jugador no iría a una alianza si le aporta menos, a esta condición se le llama racionalidad individual. Una ganancia que cumple con estas dos condiciones se le llama imputación. Ahora trabajaremos con las imputaciones para ver que le conviene más a la coalición, estableceremos un orden en un conjunto, el conjunto I de las imputaciones, las imputaciones serán asociadas a los elementos del conjunto y la relación $>$ tiene las siguientes reglas:

- $a > b$ si la coalición tiene un número grande de jugadores que prefieren b ; es decir, b domina a .
- Si $a > b$, entonces $b \not> a$.

Es en el conjunto I donde se desarrolló la definición de solución. Sea S un subconjunto de I , decimos que S es una solución de la relación $>$ si:

- Para todo $\{a, b\} \subset S$ tenemos que $a \not> b$ ni $b \not> a$.
- Para todo $i \in I \setminus S$ existe $s \in S$ tal que $i > s$.

La mayoría de las relaciones binarias pueden representarse con una digráfica, donde los elementos de la relación son los vértices y la flecha (a, b) existe si y solo si la relación “ $>$ ” cumple que $a > b$.

Por ejemplo, la relación $<$ en el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ donde:

$$\leq = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\},$$

tiene como representación geométrica a la digráfica de la figura 2.1:

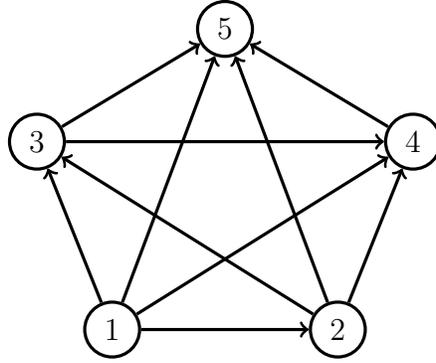


Figura 2.1: Digráfica con los primeros 5 naturales y la relación $<$

La solución a este problema para una coalición de una persona es bastante más fácil que para una coalición de más personas. La razón de esto es que en una coalición de una persona las decisiones generan una digráfica que posee la siguiente propiedad:

Si una persona X prefiere una ganancia a sobre otra ganancia b y prefiere b sobre una tercera ganancia c , entonces la persona X prefiere a sobre c . Esta propiedad hace que la digráfica asociada sea transitiva.

En el caso de coaliciones más grandes, un grupo de personas puede tener distintas facciones que prefieran distintas ganancias. Por ejemplo, en la digráfica D de la figura 2.2, podemos ver que la coalición de jugadores $\{j_1, j_2, j_3\}$, ganarán de tres posibles formas. De esta forma se ha creado una digráfica no transitiva en su conjunto de imputaciones.

$Ju \backslash Opc$	a	b	c
j_1	100	81	100
j_2	100	100	81
j_3	81	100	100

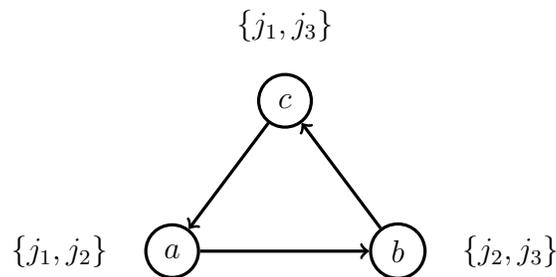


Figura 2.2: Digráfica D no transitiva

Como la digráfica generada por una coalición grande no tiene propiedades fuertes, asegurar que tenga solución es más difícil.

¿Cuál es la respuesta al problema planteado? ¿Qué decisiones son importantes para la coalición? Un conjunto de decisiones, ninguna con más ganancia que la otra, es una solución, al conjunto de decisiones con estas características se le llama conjunto de soluciones.

A esta altura ya se puede vislumbrar que la primera condición de la solución traducida a digráficas es la **independencia** y que la segunda condición es la **dominación**.

Notemos que en una digráfica D , un subconjunto de $V(D)$ con solo un vértice, siempre es un conjunto independiente, en vista de eso se intentará siempre buscar el conjunto máximo por contención.

También pondremos atención en que el ingrado máximo de la subdigráfica inducida por un conjunto independiente es cero. Además notemos que los vértices de ingrado cero en la digráfica (pozo) están en todo conjunto independiente máximo.

Hay que decir que puede haber conjuntos que sean independientes y máximos por contención, pero con un número de vértices muy inferior al número de independencia. Por ejemplo, en la digráfica D de la figura 2.3 el número de independencia es 10, sin embargo tiene un conjunto independiente máximo por contención de 3 elementos: $\{v_1, v_2, v_3\}$.

En una digráfica D , el conjunto $V(D)$ siempre es un conjunto dominante, en vista de eso se buscará el conjunto dominante mínimo por contención.

Para la dominación tenemos conjuntos de vértices que pueden ser mínimos por contención y no ser mínimos por cardinalidad. Tomemos, por ejemplo, la digráfica D de la figura 2.3, esta tiene un conjunto dominante mínimo por contención de 10 elementos; a saber el conjunto: $\{v_0, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}\}$. Sin embargo, tiene un conjunto dominante mínimo por contención de 3 elementos: $\{v_1, v_2, v_3\}$.

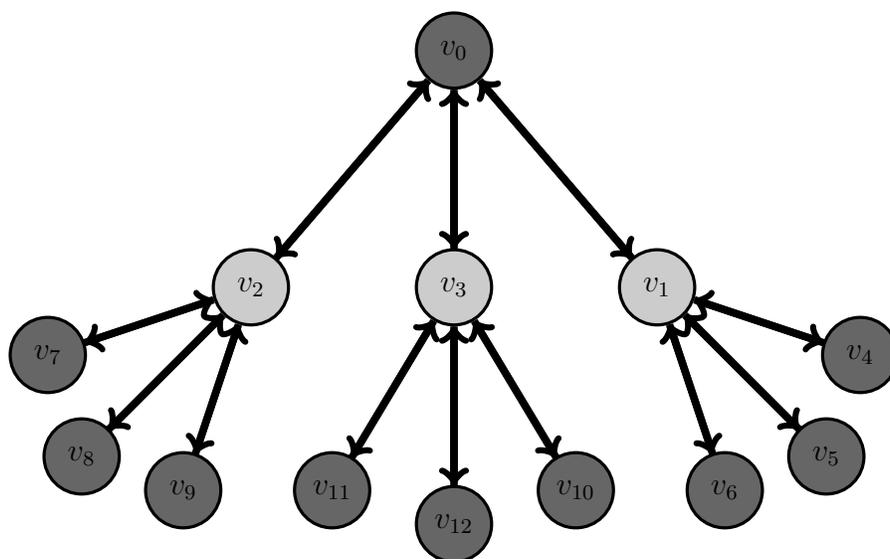


Figura 2.3: El conjunto independiente máximo por contención en gris claro y el conjunto máximo por cardinalidad en gris obscuro

Pero, ¿qué es distinto entre una solución y un núcleo? El ajuste que hizo Claude Berge tiene que ver con la dirección de las flechas en la dominación, a decir verdad por la propiedad

dual que es la **absorción**.

Sean D una digráfica y S un subconjunto de $V(D)$, si S es un conjunto independiente y absorbente, entonces S es un **núcleo**.

Veamos si todas las digráficas tienen núcleo, iniciemos con las digráficas de orden 1, 2 y 3.

- Digráfica de orden 1.

Como K_1 es la única digráfica de orden 1, supongamos que $V(K_1) = \{v_0\}$; luego K_1 tiene núcleo $S = \{v_0\}$.

- Digráficas de orden 2.

Sea D una digráfica de orden dos y supongamos que $V(D) = \{v_0, v_1\}$. En la figura 2.4 podemos observar a todas las digráficas de orden dos. En la tabla de la figura 2.4, para cada caso, se muestra el núcleo de la digráfica.

Figura	Núcleo
2.4a	$S = \{v_0, v_1\}$
2.4b	$S = \{v_1\}$
2.4c	$\{v_1\}$ y $\{v_0\}$

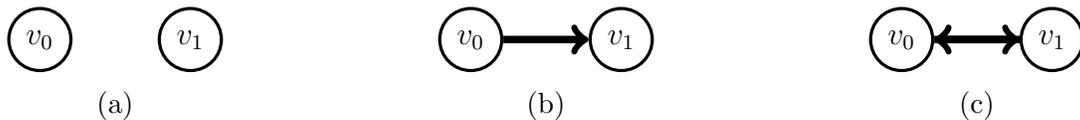


Figura 2.4: Digráficas de orden igual a 2

- Digráficas de orden 3 (excepuando el ciclo C_3):

Sea D una digráfica de orden tres y supongamos que $V(D) = \{v_0, v_1, v_2\}$. En la figura 2.5 podemos observar a todas las digráficas de orden tres. En la tabla de la figura 2.5, para cada caso, se muestra el núcleo de la digráfica.

Figura	Núcleo	Figura	Núcleo	Figura	Núcleo
2.5a	$S = \{v_1, v_2, v_3\}$	2.5b	$S = \{v_1, v_2\}$	2.5c	$S = \{v_1, v_2\}$
2.5d	$S = \{v_0, v_2\}$	2.5e	$S = \{v_0\}$	2.5f	$S = \{v_1, v_2\}$
2.5g	$S = \{v_0\}$	2.5h	$S = \{v_1, v_2\}$	2.5i	$S = \{v_2\}$
2.5j	$S = \{v_2\}$	2.5k	$S = \{v_2\}$	2.5l	$S = \{v_2\}$
2.5m	$S = \{v_2\}$	2.5n	$S = \{v_2\}$	2.5ñ	$S = \{v_2\}$.

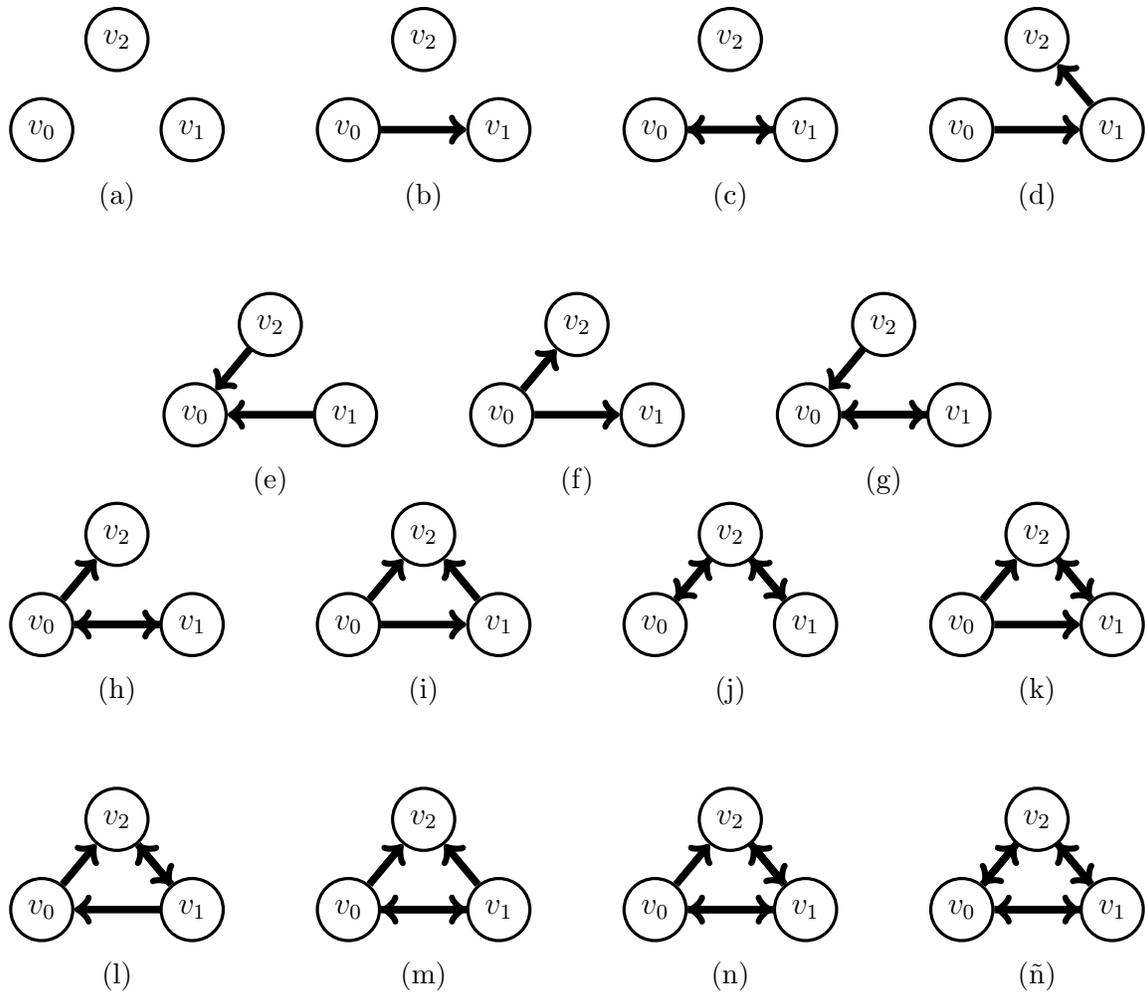


Figura 2.5: Digráficas de orden igual a tres, excepto el ciclo asimétrico de longitud 3

Vemos que, por ser C_3 una digráfica semicompleta, los únicos conjuntos independientes son $\{v_0\}$, $\{v_1\}$ y $\{v_2\}$ y no absorben a v_2 , v_0 y v_1 , respectivamente (ver figura 2.6). Por lo tanto, de las 16 digráficas no isomorfas de orden tres que existen, C_3 es la única digráfica sin núcleo.

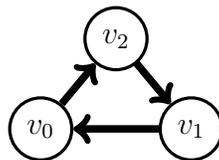


Figura 2.6: C_3

Como no toda digráfica tiene núcleo, las investigaciones se centran en buscar condiciones suficientes para que una digráfica tenga núcleo.

Definición 2.1.1. *Función característica.*

Sean A y X conjuntos, tales que $A \subseteq X$. La función característica de A es la función $\varphi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ con regla de correspondencia

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

El siguiente resultado da una condición necesaria y suficiente para que un conjunto sea un núcleo, al describirlo a través de su función característica.

Teorema 2.1.1. *Sean D una digráfica y S es un subconjunto de $V(D)$. S es un núcleo de D si y solo si la función característica de S cumple que*

$$\varphi_S(x) = 1 - \max_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y).$$

Para cada x en $V(D)$.

Demostración. Sean D una digráfica y S un subconjunto de $V(D)$.

\Rightarrow) Supongamos que S es un núcleo de D .

Sea x un elemento de $V(D)$, por demostrar que $\varphi_S(x) = 1 - \max_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)$. Tenemos dos

casos sobre x :

Caso 1) $x \in S$.

En este caso $\varphi_S(x) = 1$. Como S es un conjunto independiente, entonces $y \notin S$ para cada y en $N_D^+(x)$, lo que implica que $\varphi_S(y) = 0$ para cada y en $N_D^+(x)$. Por lo tanto, $\max_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y) = 0$, lo que implica que:

$$\varphi_S(x) = 1 = 1 - 0 = 1 - \max_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y).$$

Caso 2) $x \in V(D) \setminus S$.

En este caso $\varphi_S(x) = 0$. Como S es un conjunto absorbente, existe v en S tal que $(x, v) \in F(D)$. Así, $v \in N_D^+(x)$ y $\varphi_S(v) = 1$, lo que implica que $\max_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y) = 1$.

Por lo tanto,

$$\varphi_S(x) = 0 = 1 - 1 = 1 - \max_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y).$$

En cualquier caso, $\varphi_S(x) = 1 - \max_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)$.

\Leftarrow) Supongamos que $\varphi_S(x) = 1 - \max_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)$ para cada x en $V(D)$. Demostraremos que S es un conjunto independiente y absorbente.

- Por demostrar que S es un conjunto independiente en D .

Por contradicción, supongamos que S no es un conjunto independiente; es decir, existen x y w en S tales que x es adyacente a w . Sin pérdida de generalidad, supongamos que $(x, w) \in F(D)$, entonces $w \in N_D^+(x) \cap S$. Por lo tanto, $\varphi_S(w) = 1$, lo que implica que $\max_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y) = 1$. Por lo que:

$$1 = \varphi_S(x) = 1 - \max_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y) = 1 - 1 = 0,$$

lo cual es no es posible. Así, S es un conjunto independiente en D .

- Por demostrar que S es un conjunto absorbente en D .

Sea x un elemento de $V(D) \setminus S$, como $\varphi_S(x) = 0 = 1 - \max_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)$, entonces $\max_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y) = 1$, por lo que existe y en $N_D^+(x) \cap S$. Por lo tanto, S es un conjunto absorbente.

Como S es un conjunto independiente y absorbente en D , S es un núcleo de D . □

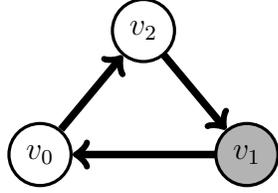
Para la independencia se busca un conjunto máximo, para un conjunto absorbente se busca el mínimo, entonces ¿un núcleo será un conjunto independiente máximo o un absorbente mínimo por contención? La respuesta la da el siguiente lema.

Lema 2.1.1. *Sean D una digráfica y $S \subseteq V(D)$. Si S es un núcleo de D , entonces S es un conjunto independiente máximo por contención y absorbente mínimo por contención.*

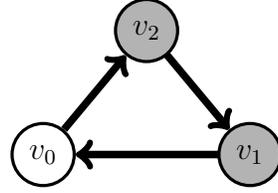
Demostración. Sean D una digráfica y S un núcleo de D . Demostraremos que S es un conjunto absorbente mínimo por contención. Por contradicción, supongamos que S no es absorbente mínimo por contención, entonces existe un conjunto absorbente de D , digamos A , tal que $A \subset S$. Entonces para x en $S \setminus A$, como A es absorbente, existe y en A tal que $(x, y) \in F(D)$, lo cual es una contradicción ya que S es independiente en D .

Ahora demostraremos que S es un conjunto independiente máximo por contención. Por contradicción, supongamos que S no es independiente máximo por contención, entonces existe un conjunto independiente de D , digamos I , tal que $S \subset I$. Consideremos x en $I \setminus S$, como I es un conjunto independiente, entonces no existe una flecha de x hacia S . Por lo tanto, S no es absorbente, lo cual es una contradicción porque S es núcleo de D . Por lo tanto, S es un conjunto independiente máximo por contención. □

Del lema anterior se derivan un par de preguntas. Sea D una digráfica, si un conjunto S es independiente máximo por contención de D ¿será núcleo? Si un conjunto es absorbente mínimo por contención de D ¿será núcleo? La respuestas a estas preguntas se muestran en la figura 2.7.



(a) El conjunto $S = \{v_1\}$ es un conjunto independiente máximo por contención y no es absorbente



(b) El conjunto $S' = \{v_1, v_2\}$ es un conjunto absorbente mínimo por contención y no es independiente

Figura 2.7: Independiente máximo por contención y absorbente mínimo por contención

Definición 2.1.2. Digráfica núcleo perfecta

Decimos que una digráfica D es núcleo perfecta si toda subdigráfica inducida de D tiene núcleo.

2.2. Ciclos y núcleos

Continuando con el estudio de los núcleos se observó, que si le pedimos ciertas condiciones a los ciclos de una digráfica, es posible que esta tenga núcleo. En esta sección veremos algunos resultados relacionados con esta idea.

Como vimos en la introducción, en 1944 J. von Neumann y O. Morgenstern demostraron que si una digráfica D no tiene ciclos, esta tiene un núcleo [25].

Teorema 2.2.1. *Toda digráfica sin ciclos tiene núcleo.*

Demostración. Sea D una digráfica sin ciclos. El corolario 1.2.5 nos asegura que existe x en $V(D)$ tal que $\delta^+(x) = 0$, por lo que el conjunto $N_0 = \{x \in V(D) \mid \delta^+(x) = 0\}$ es distinto del vacío. Además, por definición de N_0 , N_0 es un conjunto independiente. Sea $D_1 = D[V(D) \setminus (N_0 \cup N^-(N_0))]$. Tenemos dos casos sobre D_1 :

Caso 1) $V(D_1) = \emptyset$.

En este caso N_0 es un conjunto absorbente, y por lo tanto, N_0 es un núcleo de D .

Caso 2) Si $V(D_1) \neq \emptyset$.

En este caso N_0 no es un conjunto absorbente.

Por otro lado, D_1 es acíclica ya que D lo es, por lo que

$$N_1 = \{x \in V(D_1) \mid \delta_{D_1}^+(x) = 0\} \neq \emptyset.$$

Sea

$$D_2 = D[V(D_1) \setminus (N_1 \cup N_{D_1}^-(N_1))].$$

Ahora hay dos subcasos sobre D_2 :

Caso 2.1) $V(D_2) = \emptyset$

En este subcaso afirmamos que $N_0 \cup N_1$ es un núcleo de D . Por definición de N_0 , no existen las flechas de N_0 hacia N_1 y como todos los vértices que absorbía N_0 fueron eliminados en D_1 , tampoco existen flechas de N_1 hacia N_0 . Por lo tanto, $N_0 \cup N_1$ es un conjunto independiente.

Como $V(D_2)$ es vacío, tenemos que $V(D) \setminus (N_0 \cup N_1) = N^-(N_0 \cup N_1)$. Por lo tanto, $N_0 \cup N_1$ es un conjunto absorbente.

Caso 2.2) $V(D_2) \neq \emptyset$

En este subcaso N_0 no es un conjunto absorbente.

Como $D_2 \subseteq D$, entonces D_2 es acíclica, por lo que:

$$N_2 = \{x \in V(D_2) \mid \delta_{D_2}^+(x) = 0\} \neq \emptyset.$$

Sea

$$D_3 = D[V(D_2) \setminus (N_2 \cup N_{D_2}^-(N_2))],$$

⋮

$$N_i = \{x \in V(D_i) \mid \delta_{D_i}^+(x) = 0\} \neq \emptyset,$$

$$D_{i+1} = D[V(D_i) \setminus (N_i \cup N_{D_i}^-(N_i))].$$

Continuando con este procedimiento obtenemos en cada paso una digráfica $D_i = D[V(D_{i-1}) \setminus (N_{i-1} \cup N_{D_{i-1}}^-(N_{i-1}))]$ con menos vértices. Como D es finita, agotamos a la digráfica; es decir, $V(D_n) = \emptyset$ para algún n en \mathbb{N} . Afirmamos que $\bigcup_{i=0}^{n-1} N_i$ es un núcleo de D .

(1) $\bigcup_{i=0}^{n-1} N_i$ es un conjunto independiente en D .

Sean u y v en $\bigcup_{i=0}^{n-1} N_i$. Demostraremos que no hay flechas entre u y v en D . Tenemos dos casos sobre u y v .

Caso 1.1) Si u y v pertenecen a N_i para alguna i en $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

Por construcción, $\Delta^+(D_i[N_i]) = 0$, por lo tanto, no puede haber flechas entre v y u en D .

Caso 1.2) Si u pertenece a N_i , con i en $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, v pertenece a N_j , con j en $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, y $j \neq i$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i < j$.

Por construcción

$$N_j \subset V(D_j) \subseteq V(D_{i+1}) \quad \text{y} \quad V(D_{i+1}) \subset V(D) \setminus (N_i \cup N^-(N_i)),$$

por lo que, se concluye que no hay $N_j N_i$ -flechas en D .

Demostraremos que no hay $N_i N_j$ -flechas en D , lo haremos por contradicción.

Supongamos que existe x en N_i y una $x N_j$ -flecha en D , entonces $\delta_{D_i}^+(x) \neq 0$.

Por lo tanto, $x \notin N_i$, lo cual es una contradicción. Así, $\bigcup_{i=0}^{n-1} N_i$ es un conjunto independiente en D .

(2) $\bigcup_{i=0}^{n-1} N_i$ es un conjunto absorbente en D .

Sea x en $V(D) \setminus (\bigcup_{i=0}^{n-1} N_i)$, por construcción $V(D) = \bigcup_{i=0}^{n-1} (N_i \cup N_{D_i}^-(N_i))$. Por lo que $x \in \bigcup_{i=0}^{n-1} N_{D_i}^-(N_i)$, por lo tanto para algún j en $\{0, 1, \dots, n-1\}$, $x \in N_{D_j}^-(N_j)$. Es decir, $\bigcup_{i=0}^{n-1} N_i$ es un conjunto absorbente en D .

De (1) y (2) obtenemos que $\bigcup_{i=0}^{n-1} N_i$ es un núcleo de D . □

En la sección anterior vimos que C_3 no tiene núcleo, esto no sucede con todos los ciclos, por ejemplo, el ciclo $C_4 = (v_0, v_1, v_2, v_3, v_0)$ (figura 2.8) tiene dos núcleos $N_1 = \{v_0, v_2\}$ y $N_2 = \{v_1, v_3\}$.

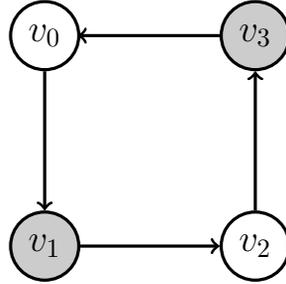


Figura 2.8: Son núcleo de la digráfica los conjuntos $N_1 = \{v_0, v_2\}$ y $N_2 = \{v_1, v_3\}$

En los siguientes resultados damos el preámbulo para demostrar que si una digráfica no tiene ciclos de longitud impar, entonces tiene núcleo (Richardson [24]). La demostración que vamos a presentar, se debe a Víctor Neumann Lara [23], utiliza seminúcleos y fue hecha en 1971, es una prueba más corta que la de Richardson.

Definición 2.2.1. *Seminúcleo.*

Sean D una digráfica y S un subconjunto de $V(D)$, decimos que S es un seminúcleo de D , si S es un conjunto independiente y para cada flecha (s, x) en $F(D)$ tal que $s \in S$ y $x \in V(D) \setminus S$ existe (x, s') en $F(D)$ tal que $s' \in S$.

Observemos que para cualquier digráfica el conjunto vacío es un seminúcleo. Por otro lado, si S es un seminúcleo, entonces $N_D^+(S)$ es un subconjunto de $N_D^-(S)$ y todo seminúcleo está contenido en un seminúcleo máximo por contención. Sea S un seminúcleo, si existe $x \in V(D) \setminus N_D^-[S]$, entonces $S \cup \{x\}$ es un seminúcleo que contiene propiamente a S . Esta idea inspira el siguiente teorema.

Teorema 2.2.2. *Sean D una digráfica, S un seminúcleo de D , $B = \{v \in V(D) \mid v \notin N^-[S]\}$ y S' un seminúcleo de $D[B]$. Entonces $S \cup S'$ es un seminúcleo de D .*

Demostración. Sean D una digráfica, S un seminúcleo de D , $B = \{v \in V(D) \mid v \notin N^-[S]\}$ y S' seminúcleo de $D[B]$.

- Primero demostraremos que $S \cup S'$ es un conjunto independiente.
Como S y S' son conjuntos independientes, solo falta demostrar que no existen SS' -flechas ni $S'S$ -flechas. Sean s en S y s' en S' ; puesto que $S' \subseteq B$, entonces $(s', s) \notin F(D)$. Por otro lado, si suponemos que (s, s') pertenece a $F(D)$, como S es un seminúcleo, entonces $s' \in N^-(S) \cap B$, lo cual es una contradicción, ya que $N^-(S) \cap B = \emptyset$. Por lo tanto, $S \cup S'$ es un conjunto independiente.
- Ahora mostraremos que si x pertenece a $N^+(S \cup S')$, entonces $x \in N^-(S \cup S')$. Sea x en $N^+(S \cup S')$, tenemos dos casos sobre x :

Caso 1) x pertenece a $N^+(S)$.

Como S es un seminúcleo de D , entonces $x \in N^-(S)$, lo que implica que $x \in N^-(S \cup S')$ (porque $N^-(S) \subseteq N^-(S \cup S')$).

Caso 2) x pertenece a $N^+(S')$.

Si $x \in V(D) \setminus (S \cup B)$, entonces por definición de B existe una xS -flecha, lo que implica que existe una $x(S \cup S')$ -flecha. Si $x \in (B \setminus S')$, entonces como S' es un seminúcleo de $D[B]$, se tiene que $x \in N^-(S')$, lo que implica que $x \in N^-(S \cup S')$.

En cualquier caso, si $x \in N^+(S \cup S')$, entonces $x \in N^-(S \cup S')$. Por lo tanto, $S \cup S'$ es un seminúcleo de D . □

Teorema 2.2.3. *Sean D una digráfica, S un seminúcleo de D , $B = \{v \in V(D) \mid v \notin N^-[S]\}$ y S' un núcleo de $D[B]$, entonces $S \cup S'$ es un núcleo de D .*

Demostración. Sean D una digráfica, S un seminúcleo de D , $B = \{v \in V(D) \mid v \notin N^-[S]\}$ y S' un núcleo de $D[B]$. Por el teorema 2.2.2, $S \cup S'$ es un conjunto independiente. Ahora demostraremos que si x pertenece a $V(D) \setminus (S \cup S')$, entonces $x \in N^-(S \cup S')$. Sea x en $V(D) \setminus (S \cup S')$, como $V(D) = S \cup S' \cup (B \setminus S') \cup (V(D) \setminus (S \cup B))$, entonces tenemos dos casos sobre x :

Caso 1) $x \in (B \setminus S')$.

Como S' es núcleo de $D[B]$, entonces existe una xS' -flecha en D , lo que implica que existe una $x(S \cup S')$ -flecha en D .

Caso 2) $x \in (V(D) \setminus (S \cup B))$.

En este caso se sigue de la definición de B que existe la xS -flecha en D , lo que implica que existe una $x(S \cup S')$ -flecha en D .

En cualquier caso, si $x \in V(D) \setminus (S \cup S')$, entonces $x \in N^-(S \cup S')$.

Por lo tanto, $S \cup S'$ es un núcleo de D . □

Teorema 2.2.4. *Si D es una digráfica tal que todas sus subdigráficas inducidas tienen un seminúcleo distinto del vacío, entonces D tiene núcleo.*

Demostración. Sean D una digráfica, S un seminúcleo de D máximo por contención y

$$B = \{v \in V(D) \mid v \notin N^-[S]\}.$$

Si $B = \emptyset$, entonces S es un conjunto independiente y absorbente. Por lo tanto, S es un núcleo de D .

Si $B \neq \emptyset$, entonces por hipótesis $D[B]$ tiene un seminúcleo no vacío, S' . Por el teorema 2.2.2, $S \cup S'$ es un seminúcleo de D . Lo cual no es posible, ya que S es un seminúcleo máximo por contención.

Por lo tanto, $B = \emptyset$, lo que implica que D tiene núcleo. □

Teorema 2.2.5. *Sea D una digráfica. Si D no tiene ciclos de longitud impar, entonces D tiene un seminúcleo no vacío.*

Demostración. Sea D una digráfica sin ciclos de longitud impar. Tenemos dos casos sobre D :

Caso 1) D es fuertemente conexa.

Como D no tiene ciclos impares, por el teorema 1.2.1, D es bipartita. Sea $P = \{X, Y\}$ una bipartición de $V(D)$. Luego, como D es fuertemente conexa todo vértice de D tiene exgrado mayor o igual a 1, por lo que X y Y son conjuntos absorbentes. Así, tanto X como Y son núcleos de D . Por lo tanto, en particular, X es un seminúcleo de D .

Caso 2) D no es fuertemente conexa.

Consideremos $SC(D)$, la digráfica de condensación de D . Sabemos por el lema 1.2.5, que existe una componente C_1 , tal que $\delta_{SC(D)}^+(C_1) = 0$. Como C_1 es una componente fuertemente conexa y sin ciclos impares, C_1 tiene un seminúcleo no vacío S (por el caso 1). Como $\delta_{SC(D)}^+(C_1) = 0$, S es un seminúcleo distinto del vacío de D .

□

El siguiente teorema fue demostrado por Richardson.

Teorema 2.2.6. *Sea D una digráfica. Si D no tiene ciclos de longitud impar, entonces D es núcleo perfecta.*

Demostración. Sea D una digráfica sin ciclos de longitud impar. Como, toda subdigráfica inducida H de D no tiene ciclos de longitud impar (porque D no los tiene), entonces H tiene un seminúcleo distinto del vacío (por el teorema 2.2.5).

Por lo tanto, por el teorema 2.2.4, D tiene núcleo.

Por otro lado, como toda subdigráfica inducida G de D no tiene ciclos de longitud impar, entonces G tiene núcleo, por lo demostrado para D anteriormente. Por lo tanto, D es núcleo perfecta.

□

El siguiente teorema fue dado por P. Duchet en 1980 [10], en él se da otra condición para los ciclos.

Teorema 2.2.7. *Si D es una digráfica en la cual todo ciclo tiene al menos una flecha simétrica, entonces D es núcleo perfecta.*

Demostración. Puesto que toda subdigráfica inducida de D cumple con que todos sus ciclos tienen al menos una flecha simétrica, entonces basta probar que D tiene núcleo. Demostraremos que D tiene núcleo por inducción sobre el número de vértices.

Base de inducción.

Para p en $\{1, 2, 3\}$, en la sección 2.1 demostramos que las digráficas que cumplen con la hipótesis tienen núcleo.

Hipótesis de inducción.

Si D' es una digráfica de orden p' , con $p' < p$, y todos sus ciclos tienen una flecha simétrica, entonces D' tiene núcleo.

Paso inductivo.

Sea D una digráfica con p vértices, tal que todo ciclo de D tiene una flecha simétrica.

Como $Asym(D)$ es acíclica, existe un vértice v_0 en $V(D)$ tal que $\delta_{Asym(D)}^-(v_0) = 0$. Consideremos a $D' = D - v_0$, esta digráfica tiene orden menor a p y todos sus ciclos tienen al menos una flecha simétrica, por hipótesis de inducción D' tiene al menos un núcleo, digamos S' .

Como D' es una subdigráfica inducida de D , entonces S' es independiente en D . Por lo tanto, tenemos dos casos sobre v_0 y S' :

Caso 1) Existe la v_0S' -flecha en D .

Como S' absorbe a todo vértice de $V(D') \setminus S'$ y existe la v_0S' -flecha en D , entonces S' es un conjunto absorbente en D .

Por lo tanto, S' es un núcleo de D .

Caso 2) No existe la v_0S' -flecha en D .

Notemos que por elección de v_0 si existe alguna $S'v_0$ -flecha, entonces tiene que ser simétrica. Por lo tanto, en este caso no existen flechas entre S' y v_0 . Así, $S = S' \cup \{v_0\}$ es un conjunto independiente en D .

Como S' absorbe a $V(D') \setminus S'$ y $V(D) = V(D') \cup \{v_0\}$, entonces S es un conjunto absorbente de D .

Por lo tanto, S es un núcleo de D . Así, D es núcleo perfecta.

□

En 1990 C. Berge y P. Duchet [3], dieron una condición necesaria y suficiente para la existencia de núcleos en una clase especial de digráficas.

Teorema 2.2.8. *Sea D una digráfica semicompleta. Todo ciclo de D tiene al menos una flecha simétrica si y solo si D es núcleo perfecta.*

Demostración. Sea D una digráfica semicompleta.

\Rightarrow) Como todo ciclo de D tiene al menos una flecha simétrica, por el teorema 2.2.7, D es núcleo perfecta.

\Leftarrow) Si D es núcleo perfecta, entonces demostraremos que todo ciclo de D tiene al menos una flecha simétrica.

Consideremos $C = (v_1, \dots, v_n, v_1)$ un ciclo de D y $D[C]$. Como D es semicompleta, $D[C]$ también es semicompleta. Ya que D es núcleo perfecta, $D[C]$ tiene núcleo, digamos $\{v_k\}$. Esto implica $(v_i, v_k) \in F(D)$ para todo i en $\{1, \dots, k-1, k+1, \dots, n\} \pmod{n}$, en particular $(v_{k+1}, v_k) \in F(D)$. Como C es un ciclo, la flecha $(v_k, v_{k+1}) \in F(D) \pmod{n}$. Por lo que, C tiene una flecha simétrica. Por lo tanto, todo ciclo de D tiene una flecha simétrica.

□

2.3. Simétricas y transitivas

En esta sección demostraremos que las digráficas simétricas, completas y transitivas son núcleo perfectas.

Proposición 2.3.1. *Si D es una digráfica simétrica, entonces D es núcleo perfecta.*

Demostración. Sea S un conjunto independiente máximo por contención de D , veremos que S es un conjunto absorbente. Por contradicción, supongamos que S no es absorbente; es decir, existe x en $V(D) \setminus S$ tal que para todo y en S , $(x, y) \notin F(D)$. Notemos que por ser D una digráfica simétrica si $(x, y) \notin F(D)$, entonces $(y, x) \notin F(D)$, por lo tanto, $S' = S \cup \{x\}$ es un conjunto independiente de D tal que $S \subset S'$, lo cual es una contradicción a la elección de S . Por lo tanto, S es un núcleo de D .

Como toda subdigráfica inducida de D es simétrica, entonces, por lo demostrado para D , se concluye que D es núcleo perfecta. \square

Corolario 2.3.1. *Si D es una digráfica completa, entonces D es núcleo perfecta.*

Demostración. Como D es simétrica, entonces D es núcleo perfecta. \square

Proposición 2.3.2. *Si D es una digráfica transitiva, entonces D es núcleo perfecta.*

Demostración. Sea D una digráfica transitiva. Si D no tiene ciclos, entonces por el teorema 2.2.1, D tiene núcleo. Si D tiene ciclos, consideremos $C = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_1)$ un ciclo de D . Como D es transitiva y $\{(x_1, x_2), (x_2, x_3)\} \subseteq F(D)$, entonces $(x_1, x_3) \in F(D)$. Como D es transitiva y $\{(x_1, x_3), (x_3, x_4)\} \subseteq F(D)$, entonces $(x_1, x_4) \in F(D)$. Continuando con este razonamiento, llegamos a que $(x_1, x_n) \in F(D)$. Por lo que, todo ciclo en una digráfica transitiva tiene una flecha simétrica, por lo tanto, por el teorema 2.2.7, D tiene núcleo. Como toda subdigráfica inducida de D es transitiva, entonces D es núcleo perfecta. \square

2.4. La función de Grundy

En esta sección definiremos función de Grundy y veremos la relación que tiene con los núcleos.

Definición 2.4.1. *Función de Grundy*

Sean D una digráfica y $g(x)$ una función con $g : V(D) \rightarrow \mathbb{N}$. Diremos que g es una función de Grundy para la digráfica D si g cumple con las siguientes propiedades:

1. Si $g(x) = i$, entonces para toda $0 \leq j < i$ existe $y \in N^+(x)$, tal que $g(y) = j$.
2. Si $g(x) = i$, entonces para todo $y \in N^+(x)$, $g(y) \neq i$.

En la digráfica D de la figura 2.9 podemos observar los valores de la función de Grundy g . Los vértices v_4 y v_3 tienen exgrado 0, por lo que $g(v_3) = 0 = g(v_4)$. El vértice v_2 tiene dos vecinos exteriores de valor cero, por lo tanto $g(v_2) = 1$. El vértice v_1 tiene vecinos exteriores con los valores 0 y 1, por lo que $g(v_1) = 2$. Finalmente, como v_0 tiene vecinos exteriores con los valores 0, 1 y 2, $g(v_0) = 3$.

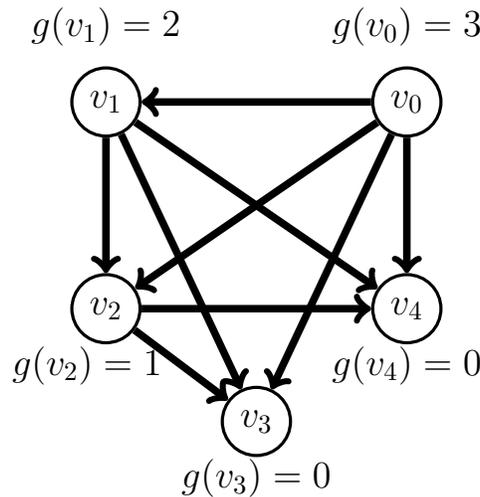


Figura 2.9: Digráfica D y una función de Grundy de D

Notemos que $\{v_3, v_4\}$ es un núcleo y a los vértices de este conjunto se les asignó el valor cero, esto motiva el siguiente teorema.

Teorema 2.4.1. *Si D es una digráfica con función de Grundy g , entonces D tiene núcleo, más aún $N = \{x \in V(D) \mid g(x) = 0\}$ es el núcleo de D .*

Demostración. Sean D una digráfica, $g(x)$ una función de Grundy de D y

$$S = \{x \in V(D) \mid g(x) = 0\},$$

tenemos que demostrar que S es un conjunto independiente y absorbente.

1. Por demostrar que S es un conjunto independiente.

Sea $\{x, y\}$ un subconjunto de S , con $x \neq y$. Como $g(x) = 0 = g(y)$, tenemos que $x \notin N^+(y)$ y $y \notin N^+(x)$ (por la segunda condición de función de Grundy). Por lo tanto, S es un conjunto independiente.

2. Por demostrar que S es un conjunto absorbente.

Sea x en $V(D) \setminus S$; como $x \notin S$, entonces $g(x) = i > 0$. Por la condición (1) de función

de Grundy, se tiene que para toda $0 \leq j < i$ existe y en $N^+(x)$ tal que $g(y) = j$, en particular para $j = 0$, por lo que existe y en $N^+(x)$ tal que $g(y) = 0$. Por lo tanto, S es un conjunto absorbente.

Por lo tanto, S es un núcleo de D . □

En el teorema anterior vimos que si D tiene función de Grundy entonces D tiene núcleo; ¿Será suficiente pedir que una digráfica tenga un núcleo para que tenga una función de Grundy? La respuesta la podemos ver en la digráfica D de la figura 2.10, D tiene núcleo, $\{v_3\}$, pero no tiene función de Grundy.

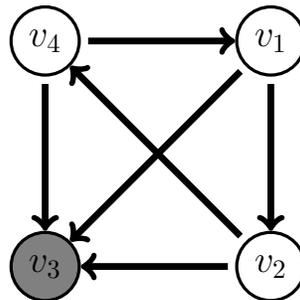


Figura 2.10: El conjunto $\{v_3\}$ es un núcleo de la digráfica D

Observemos que el vértice v_3 es de exgrado cero, solo se le puede asignar el valor cero para alguna posible función de Grundy. Tomemos a v_1 , ya que tiene un vecino exterior con valor cero y otro sin asignar tiene dos opciones; $g(v_1) = 1$ ó $g(v_1) > 1$:

- Si $g(v_1) = 1$, entonces $g(v_4) = 2$. Por lo que, $g(v_2) = 1$. Lo cual no es posible, ya que $g(v_1) = 1$ (ver figura 2.11a).
- Si $g(v_1) > 1$, entonces $g(v_4) = 1$. Por lo que, $g(v_2) = 2$. Por lo tanto, $g(v_1) = 1$. Lo cual no es posible (ver figura 2.11b).

Por lo tanto, no es posible asignarle una función de Grundy a D .

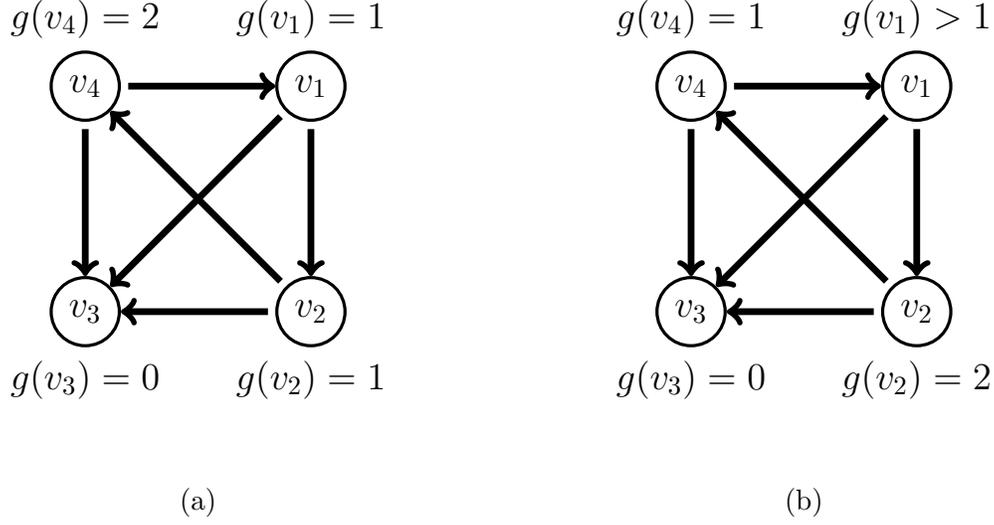


Figura 2.11: D no tiene función de Grundy

El siguiente teorema muestra una condición relacionada con los núcleos que permite a una digráfica tener una función de Grundy.

Teorema 2.4.2. *Si D es una digráfica núcleo perfecta, entonces D tiene función de Grundy.*

Demostración. Sea D una digráfica tal que toda subdigráfica inducida tiene núcleo. Definimos los siguientes conjuntos y subdigráficas de D :

$$N_0 \text{ el núcleo de } D = D_0 \text{ y } D_1 = D_0 \setminus N_0$$

$$N_1 \text{ el núcleo de } D_1 \text{ y } D_2 = D_1 \setminus N_1$$

\vdots

$$N_i \text{ el núcleo de } D_i \text{ y } D_{i+1} = D_i \setminus N_i.$$

Como D es finita, entonces existe una r en la cual N_r es vacío. Observemos que los conjuntos N_i son una partición de $V(D)$. Sea $g(x)$ una función definida de la siguiente manera:

$$g : V(D) \longrightarrow \mathbb{N}, g(x) = j \text{ si y solo si } x \in N_j.$$

Demostraremos que g es una función de Grundy para D .

1. Sea x en $V(D)$ tal que $g(x) = i$, esto implica que $x \in N_i$. Demostraremos que para toda $0 \leq j < i$ existe $y \in N^+(x)$ tal que $g(y) = j$.
Notemos que $N_i \subseteq D_j$ para toda $0 \leq j < i$. Como N_j es núcleo de D_j , existe y en N_j tal que $y \in N^+(x)$, además $G(y) = j$.

2. Sea x en $V(D)$ tal que $g(x) = i$. Demostraremos que para todo y en $N^+(x)$, $g(y) \neq i$.
 Sea x en N_i ; como N_i es independiente, entonces $N(x) \cap N_i = \emptyset$, por lo que en particular ningún y en $N^+(x)$, cumple que $g(y) = i$.

Por lo tanto, $g(x)$ es una función de Grundy. □

Corolario 2.4.1. *Si D es una digráfica simétrica, entonces D tiene función de Grundy.*

Demostración. Sea D una digráfica simétrica, por la proposición 2.3.1, D es núcleo perfecta y por el teorema 2.4.2, D tiene función de Grundy. □

Corolario 2.4.2. *Si D es una digráfica transitiva, entonces D tiene función de Grundy.*

Demostración. Sea D una digráfica transitiva, por la proposición 2.3.2, D es núcleo perfecta y por el teorema 2.4.2, D tiene función de Grundy. □

Corolario 2.4.3. *Si D es una digráfica sin ciclos, entonces D tiene función de Grundy.*

Demostración. Sea D una digráfica sin ciclos, por el teorema 2.2.1, D es núcleo perfecta y por el teorema 2.4.2, D tiene función de Grundy. □

Corolario 2.4.4. *Si D es una digráfica sin ciclos de longitud impar, entonces D tiene función de Grundy.*

Demostración. Sea D una digráfica sin ciclos de longitud impar, por el teorema 2.2.6, D es núcleo perfecta y por el teorema 2.4.2, D tiene función de Grundy. □

Corolario 2.4.5. *Si D es una digráfica en la cual todo ciclo tiene al menos una flecha simétrica, entonces D tiene función de Grundy.*

Demostración. Sea D una digráfica en la cual todo ciclo tiene al menos una flecha simétrica, por el teorema 2.2.7, D es núcleo perfecta y por el teorema 2.4.2, D tiene función de Grundy. □

Capítulo 3

(k, l) -núcleos exteriores

Después del desarrollo de la teoría de núcleos vinieron generalizaciones de este concepto, por ejemplo; núcleos por trayectorias monocromáticas, introducido por Hortensia Galeana Sánchez en [18] y (k, l) -núcleos definido por M. Kwásnik en [22].

En 2016 aparece una nueva generalización; los (k, l) -núcleos exteriores, presentados por Mostafa Blidia y Amina Ramoul en el artículo “*A new generalization of kernels in digraphs*” [7].

En este capítulo desarrollaremos con detalle el artículo anterior.

3.1. Conjuntos k -independientes exteriores

En esta sección definiremos los conjuntos k -independientes exteriores y daremos algunas propiedades de estos.

Definición 3.1.1. *Conjunto k -independiente exterior*

Sean D una digráfica y S subconjunto de $V(D)$, decimos que S es un conjunto **k -independiente exterior de D** , si para todo x en S se cumple que $\delta_{D[S]}^+(x) < k$, con k un entero mayor que cero; es decir, $|N_{D[S]}^+(x) \cap S| < k$.

En la digráfica D de la figura 3.1a se tiene que el conjunto $S = \{v_1, v_2\}$ es un conjunto 2-independiente exterior de D , pues el $\delta_{D[S]}^+(v_1) = 0 < 2$ y el $\delta_{D[S]}^+(v_2) = 1 < 2$. En cambio, el conjunto $S' = \{v_1, v_3, v_4\}$ mostrado en la figura 3.1b no es un conjunto 2-independiente exterior de D , ya que $\delta_{D[S']}^+(v_1) = 2$.



(a) En gris un subconjunto de vértices 2-independiente exterior de D

(b) En gris un subconjunto de vértices que no es 2-independiente exterior de D

Figura 3.1: Ejemplos

Notemos que si S es un subconjunto k -independiente exterior de D , entonces el exgrado máximo de la subdigráfica $D[S]$ es a lo más $k - 1$. Si $k > \Delta^+(D)$, entonces $V(D)$ es un conjunto k -independiente exterior para la digráfica D , así que pediremos que $k \leq \Delta^+(D)$ (ver figura 3.2).

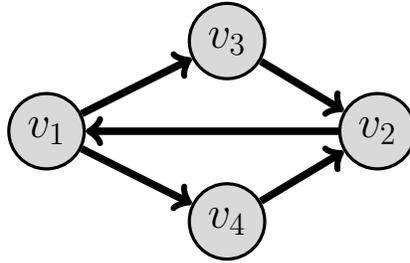


Figura 3.2: El conjunto $V(D)$ es 3-independiente exterior de D , ya que $\Delta^+(D) = 2$.

Cuando $k=1$, el concepto de k -independencia exterior coincide con el de independencia; es decir, si S es un subconjunto 1-independiente exterior de D , por definición todo vértice x de S cumple que $|N_{D[S]}^+(x) \cap S| < 1$, por lo que $|N_{D[S]}^+(x) \cap S| = 0$, que es la definición de independencia (ver figura 3.3).

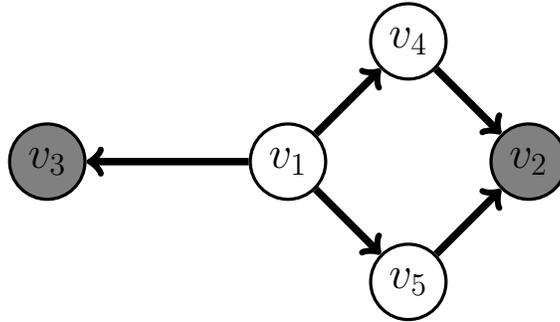


Figura 3.3: El conjunto $\{v_2, v_3\}$ de vértices en D que es 1-independiente exterior en D

Al igual que en los conjuntos independientes, un subconjunto de $V(D)$ con un solo vértice también es k -independiente exterior para cualquier k (ver figura 3.4). Por lo que, se busca encontrar el conjunto k -independiente exterior máximo.

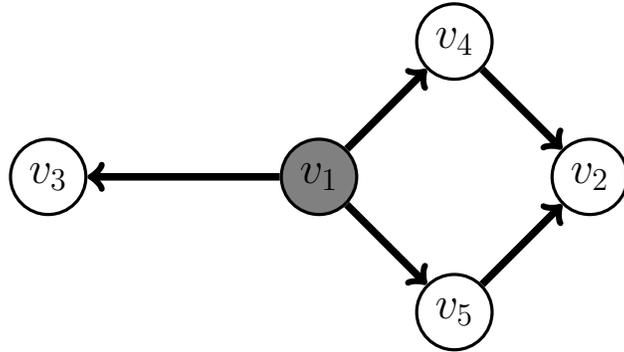


Figura 3.4: Un vértice es k -independiente exterior de D , para cualquier k

Definición 3.1.2. *Número de k -independencia exterior de una digráfica D*

El número de k -independencia exterior de una digráfica D es el

$$\text{máx}\{|S| \mid S \text{ es un conjunto } k\text{-independiente exterior de } D\},$$

lo denotaremos por $\alpha_k(D)$ ó α_k si la digráfica es evidente. Un conjunto S de vértices de D que es k -independiente y de cardinalidad máxima le llamamos $\alpha_k(G)$ – conjunto ó α_k -conjunto si la digráfica es evidente

En la digráfica D de la figura 3.5 tenemos a $S = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ un conjunto 2-independiente exterior de D , si agregamos a v_1 al conjunto S , el conjunto $S' = S \cup \{v_1\}$ tendría un vértice de exgrado 3. Por lo tanto, el $\alpha_k(D) = 4$.

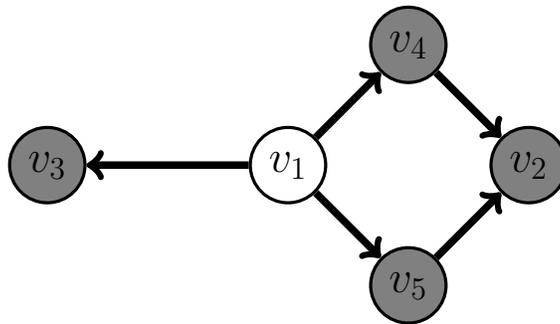


Figura 3.5: Un conjunto 2-independiente exterior máximo

Con esta nueva definición, la k -independencia exterior no necesariamente implica la k' -independencia exterior para $k' < k$. Lo que si se vale, para $k' > k$, es que los conjuntos k -independientes exteriores son k' -independientes exteriores. Esto da lugar al siguiente lema.

Lema 3.1.1. Sean D una digráfica, S un subconjunto k -independiente exterior de D , $\{k, k'\}$ un subconjunto de \mathbb{N} y $k \leq k'$, entonces S es un conjunto k' -independiente exterior de D .

Demostración. Sean D una digráfica, S un subconjunto k -independiente exterior de D y $\{k, k'\}$ un subconjunto de \mathbb{N} tal que $k \leq k'$, por demostrar que S es k' -independiente exterior; es decir, cumple que para todo x en S , $|N_{D[S]}^+(x) \cap S| < k'$. Como S un subconjunto k -independiente exterior de D , tenemos que $|N_{D[S]}^+(x) \cap S| < k$ lo que implica que $|N_{D[S]}^+(x) \cap S| < k < k'$. Por lo que, S es un conjunto k' -independiente exterior de D . \square

Notemos que no necesariamente todos los vértices de exgrado menor a k están en todo conjunto independiente exterior máximo por contención o cardinalidad.

Por ejemplo, en la digráfica D de la figura 3.6, el conjunto $S = \{v_1, v_2\}$ es un conjunto 1-independiente exterior de D , al cual no le podemos agregar el vértice v_0 ($\delta_D^+(v_0) = 0$), porque dejaría de ser 1-independiente exterior, por lo tanto S es un conjunto 1-independiente exterior máximo por contención de D y v_0 un vértice de exgrado menor que k el cual no está en S .

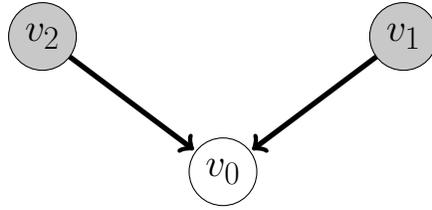


Figura 3.6: Digráfica con un conjunto 1-independiente exterior máximo por contención y cardinalidad, que no tiene al vértice con exgrado cero.

Corolario 3.1.1. Sea D una digráfica. Si $\{k, k'\}$ es un subconjunto de \mathbb{N} con $k \leq k'$, entonces $\alpha_k(D) \leq \alpha_{k'}(D)$.

Demostración. Sean D una digráfica, $\{k, k'\}$ subconjunto de \mathbb{N} con $k \leq k'$, S un α_k -conjunto. Del lema 3.1.1, tenemos que S también es un conjunto k' -independiente exterior, por lo que, $|S| \leq \alpha_{k'}$. Por lo tanto, $\alpha_k = |S| \leq \alpha_{k'}$. \square

3.2. Conjuntos l -absorbentes exteriores

En esta sección definiremos los conjuntos l -absorbentes exteriores y daremos algunas propiedades de estos.

Definición 3.2.1. *Conjunto l -absorbente exterior*

Sean D una digráfica y S subconjunto de $V(D)$. Decimos que S es un conjunto l -absorbente exterior de D si para todo x en $V(D) \setminus S$ se tiene que $|N_D^+(x) \cap S| \geq l$; es decir,

x tiene al menos l -vecinos exteriores en S .

En la digráfica D de la figura 3.7, tenemos el conjunto $S = \{v_0, v_1, v_2, v_5\}$ en gris. Observemos que $V(D) \setminus S = \{v_3, v_4\}$. Como $|N_D^+(v_3) \cap S| = |\{v_1, v_5\}| = 2$ y $|N_D^+(v_4) \cap S| = |\{v_0, v_1, v_5\}| = 3$, S es un conjunto 2-absorbente exterior de D . Notemos que también es 1-absorbente exterior de D .

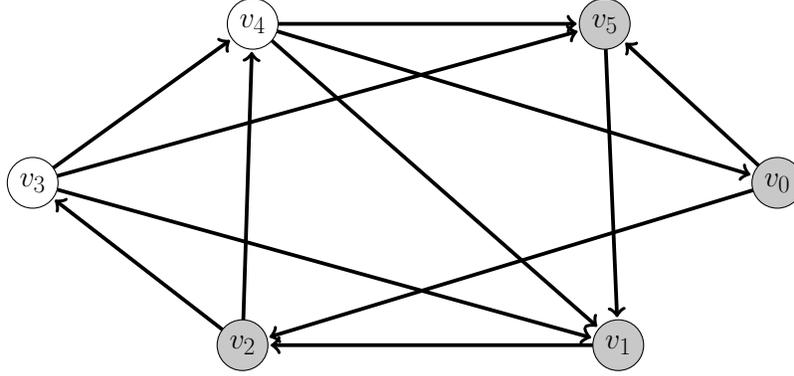


Figura 3.7: Los vértices en gris forman un conjunto 2-absorbente exterior de D . Notemos que también es 1-absorbente exterior de D .

Cuando $k=1$, si S es un subconjunto 1-absorbente exterior de una digráfica D , entonces S es un conjunto absorbente de D , ya que para todo v en $V(D) \setminus S$, existe (v, x) en $F(D)$, con $x \in S$.

Notemos que una digráfica D siempre tiene un conjunto l -absorbente exterior a saber, $V(D)$. En vista de lo anterior iremos analizando los conjuntos l -absorbentes exteriores mínimos por cardinalidad.

Definición 3.2.2. *Número de l -absorbencia exterior de una digráfica D*

El número de l absorbencia exterior de una digráfica D es el

$$\text{mín}\{|S| \mid S \text{ es un conjunto } l\text{-absorbente exterior de } D\}$$

y lo denotamos por $\gamma_l(D)$ ó γ_l cuando la digráfica es evidente. Un conjunto S de vértices de D que es l -absorbente y de cardinalidad mínima le llamamos $\gamma_l(D)$ – *conjunto* ó γ_l -conjunto si la digráfica es evidente

En la digráfica D de la figura 3.8 mostramos al conjunto $S = \{v_0, v_1, v_2\}$ en gris, el cual es un conjunto 2-absorbente exterior de D . Como $\Delta^-(D) = 4$, entonces no existe un conjunto 2-absorbente exterior de cardinalidad 1. Como no hay dos vértices de ingrado 4, entonces no hay un subconjunto de $V(D)$ de 2 vértices que sea 2-absorbente exterior. Por lo tanto, $\gamma_l(D) = 3$.

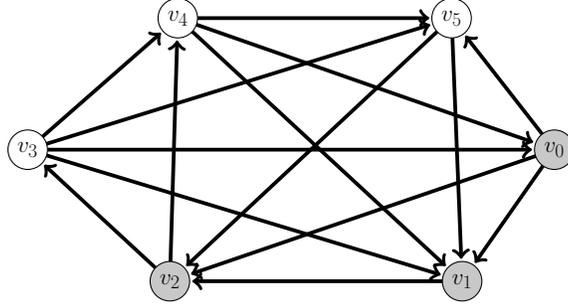


Figura 3.8: Los vértices grises forman un conjunto 2-absorbente exterior de D

En el capítulo 2 vimos que los vértices de exgrado 0 pertenecen siempre a cualquier conjunto absorbente. Esta idea se conserva para los vértices de exgrado menor a l para los conjuntos l -absorbentes exteriores. Esto se resume, en las siguientes dos observaciones.

Observación 3.2.1. Sean D una digráfica y S un subconjunto l -absorbente exterior de D . Si v es un vértice en $V(D)$ tal que $\delta^+(v) < l$, entonces $v \in S$.

Demostración. Sean D una digráfica, S un subconjunto l -absorbente exterior de D y v en $V(D)$ tal que $\delta^+(v) < l$. Por demostrar que $v \in S$, lo haremos por contradicción. Supongamos que $v \notin S$, entonces $v \in V(D) \setminus S$, por lo que por definición de conjunto l -absorbente exterior tenemos que $|N_D^+(v) \cap S| \geq l$, esto implica que $|N_D^+(v)| \geq l$, lo cual es una contradicción pues $N_D^+(v) < l$. Así, $v \in S$. \square

Observación 3.2.2. Sea D una digráfica. Si $l > \Delta^+(D)$, entonces el único conjunto l -absorbente exterior de D es $V(D)$.

Demostración. Sean D una digráfica y l en $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, tal que $l > \Delta^+(D)$. Como para todo v en $V(D)$, $|N_D^+(v) \cap V(D)| = |N_D^+(v)| < l$, entonces $V(D)$ es un conjunto l -absorbente exterior de D . \square

Por lo tanto de la observación 3.2.2, se pedirá siempre que $l \leq \Delta^+(D)$. Por otro lado, tenemos que el conjunto que consiste de los vértices grises en la digráfica D de la figura 3.9 es un conjunto 3-absorbente exterior de D . También es 1 y 2-absorbente exterior. De este ejemplo, se deduce el siguiente lema.

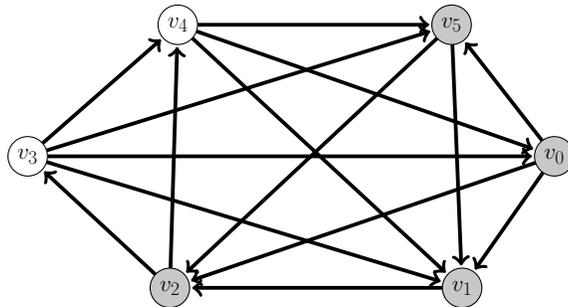


Figura 3.9: Los vértices den gris forman un conjunto 3-absorbente exterior de D

Lema 3.2.1. Sean D una digráfica, l en \mathbb{N} y S un subconjunto l -absorbente exterior de D . Si $l' \leq l$, para algún l' en \mathbb{N} , entonces S es un conjunto l' -absorbente exterior de D .

Demostración. Sean D una digráfica, $\{l, l'\}$ un subconjunto de \mathbb{N} , y con $l' \leq l$ y S un subconjunto l -absorbente exterior de D . Entonces, para toda x en $V(D) \setminus S$ se tiene que $|N_D^-(x) \cap S| \geq l$, luego $l > l'$, implica que $|N_D^-(x) \cap S| \geq l'$, que es la definición de l' -absorbente exterior. \square

Sea D una digráfica. Si $l' > l$, entonces no necesariamente se da que un conjunto l -absorbente exterior de D sea l' -absorbente exterior de D . En la digráfica D de la figura 3.10 el conjunto S es 2-absorbente exterior de D y no es 3-absorbente exterior de D , porque v_0 solo tiene dos vecinos exteriores en S .

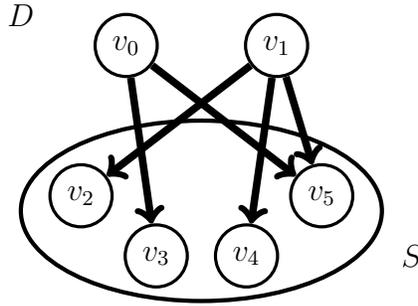


Figura 3.10: En la digráfica el conjunto S es 2-absorbente exterior de D y no es 3-absorbente exterior de D

Corolario 3.2.1. Sea D una digráfica. Si $\{l, l'\}$ es un subconjunto de \mathbb{N} , con $l' \leq l$, entonces $\gamma_{l'}(D) \leq \gamma_l(D)$.

Demostración. Sean D una digráfica, $\{l, l'\}$ es un subconjunto de \mathbb{N} , con $l' \leq l$, y S un $\gamma_l(D)$ -conjunto. Del lema 3.2.1 tenemos que S también es un conjunto l' -independiente exterior de D , por lo que $\gamma_{l'} \leq |S|$. Por lo tanto, $\gamma_{l'} \leq |S| = \gamma_l$. \square

3.3. (k, l) -núcleos exteriores

Ahora llego el momento de introducir el personaje principal de esta tesis; los (k, l) -núcleos exteriores.

Definición 3.3.1. Conjunto (k, l) -núcleo exterior

Sean D una digráfica y S un subconjunto de $V(D)$, si S es un conjunto k -independiente exterior de D y un conjunto l -absorbente exterior de D , entonces decimos que S es un (k, l) -núcleo exterior de D . Si $k = l$, entonces S recibe el nombre de k -núcleo exterior de D .

En la digráfica D de la figura 3.11, el conjunto $S = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ es 2-absorbente exterior de D y 3-independiente exterior de D . Por lo tanto, es un $(3, 2)$ -núcleo exterior de D .

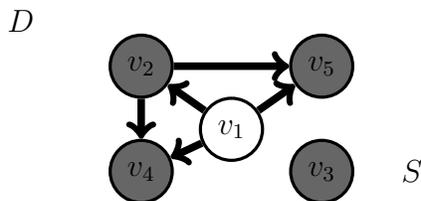


Figura 3.11: Un $(3, 2)$ -núcleo exterior de D

Respecto a los (k, l) -núcleos exteriores podemos hacernos dos preguntas ¿todas las digráficas tienen k -núcleo exterior? Si la respuesta a la pregunta anterior es negativa, entonces ¿Cuál es la primer digráfica, con respecto al orden, que no tiene algún k -núcleo exterior?

En el capítulo 2 demostramos que las digráficas de orden menor o igual a 2 tienen núcleo, por lo que tienen un 1-núcleo exterior. De las de orden 3 observamos que solo el ciclo de longitud 3 no tiene núcleo, por lo que no tiene 1-núcleo exterior.

Como sabemos, si $\Delta^+(D) < k$, entonces $V(D)$ es un conjunto k -independiente exterior y k -absorbente exterior, por eso las digráficas con exgrado máximo menor o igual a 1 y orden menor o igual a 3, exceptuando el ciclo de longitud 3, tienen k -núcleo exterior para cualquier $k \geq 2$. Demostraremos que las digráficas de orden 3 con exgrado máximo igual a 2 tienen 2-núcleo exterior.

En la figura 3.12 mostramos todas las digráficas de orden tres con exgrado máximo igual a 2. Los vértices de color gris forman un 2-núcleo exterior.

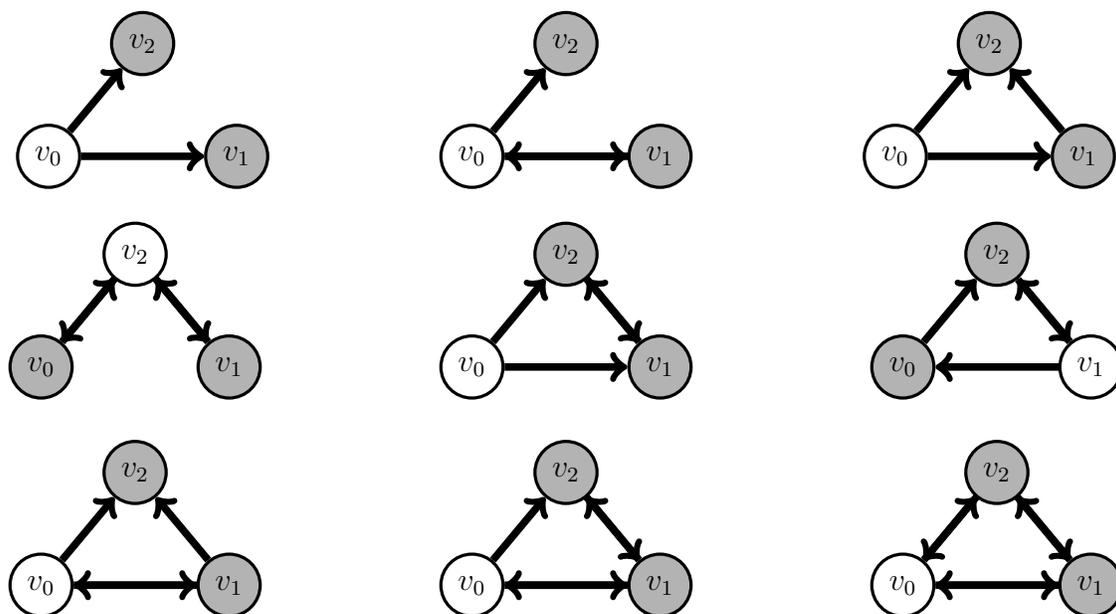


Figura 3.12: 2-núcleo exterior para digráficas de orden igual a tres y exgrado máximo igual a 2

Si siguiendo la idea de los lemas 3.1.1 y 3.2.1, tenemos este nuevo lema para los (k, l) -núcleos exteriores.

Lema 3.3.1. Sean D una digráfica y $\{k, k', l, l'\}$ un subconjunto de \mathbb{N} , tal que $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$, $l' \leq l$ y $k \leq k' \leq \Delta^+(D)$. Si D admite un (k, l) -núcleo exterior, entonces D admite un (k', l') -núcleo exterior.

Demostración. Sean D una digráfica y S un (k, l) -núcleo exterior de D . Como S es un conjunto k -independiente exterior de D y $k \leq k'$, por el lema 3.1.1, S es un conjunto k' -independiente exterior de D . Como S es un conjunto l -absorbente exterior de D y tenemos que $l' \leq l$, por el lema 3.2.1 S es un conjunto l' -absorbente exterior. Por lo tanto, S es un (k', l') -núcleo exterior de D . \square

El lema 3.3.1 tiene como hipótesis $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$, $l' \leq l$ y $k \leq k' \leq \Delta^+(D)$ ¿Que pasaría si $l \leq l'$ ó $k' \leq k$? En los siguientes ejemplos, veremos que aunque D tenga un (k, l) -núcleo exterior D no necesariamente tiene un (k', l') -núcleo exterior, para $l \leq l'$ ó $k' \leq k$.

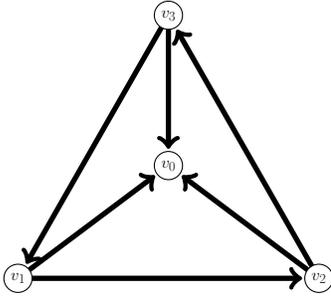


Figura 3.13: Digráfica con un 1-núcleo exterior y sin un 2-núcleo exterior

La digráfica D de la figura 3.13 tiene un 1-núcleo exterior, a saber $S = \{v_0\}$, ya que es 1-independiente exterior y como cumple que para todo v_i en $V(D) \setminus S$ se tiene la flecha (v_i, v_0) para i en $\{1, 2, 3\}$, entonces S es 1-absorbente exterior.

Observemos que D no tiene un 2-núcleo exterior. Como $\delta^+(v_0) = 0$, $v_0 \in S$ para todo S conjunto 2-absorbente exterior de D . Veamos que v_i y v_0 , para $i \in \{1, 2, 3\}$, no forman un conjunto 2-absorbente exterior en D : $\{v_0, v_1\}$ no 2-absorbe exteriormente a v_2 , $\{v_0, v_2\}$ no 2-absorbe exteriormente a v_1 y $\{v_0, v_3\}$ no 2-absorbe exteriormente a v_3 .

Observemos que un subconjunto de 3 o más vértices que contenga a v_0 , no es un 2-núcleo exterior, la subdigráfica inducida por estos contiene al torneo transitivo de 3 vértices, en el cual uno de los vértices tiene exgrado 2, por lo tanto, dichos conjuntos no son 2-independientes exteriores de D . Por lo tanto, D tiene un $(1, 1)$ -núcleo exterior y un $(2, 1)$ -núcleo exterior, pero D no tiene un $(2, 2)$ -núcleo exterior.

La digráfica D de la figura 3.14 es un torneo, tenemos que los conjuntos 1-independientes exteriores máximos de D tienen solamente un vértice. Por otro lado, $\Delta^-(D) = 2$ y su orden es 4, por lo que ningún conjunto de un vértice sería 1-absorbente exterior. Sin embargo, el conjunto $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ es 2-independiente exterior de D , porque $\Delta^+(D[S]) = 1$. S es un conjunto 2-absorbente exterior de D , ya que $V(D) \setminus S = \{v_0\}$ y $|N^+(v_0) \cap S| = 3 \geq 2$. Por lo tanto, S es un 2-núcleo exterior de D , que además es un $(2, 3)$ -núcleo exterior.

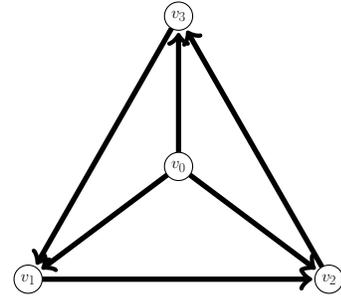


Figura 3.14: Digráfica sin un 1-núcleo exterior y con un 2-núcleo exterior

Ahora daremos un ejemplo de una digráfica D que no tiene un 1-núcleo exterior, ni un 2-núcleo exterior. Consideremos la digráfica D de la figura 3.15, por ser torneo los conjuntos 1-independientes exteriores máximos tienen solamente un vértice. Observemos que D tiene orden 5 y todos los vértices de D tienen ingrado igual a 2, por lo que ningún conjunto 1-independiente exterior es 1-absorbente exterior.

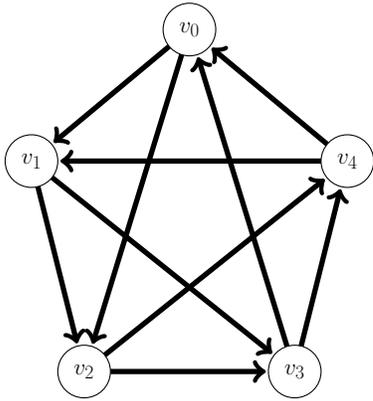


Figura 3.15: Digráfica sin un 1-núcleo exterior y sin un 2-núcleo exterior

Caso 1) $\{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}\} \subseteq S$ con $i \in \{1, 2, 3, 4\} \pmod{5}$.

En este caso $D[S]$ contiene al torneo transitivo de 3 vértices, donde v_{i+1} es tal que $\delta_{D[S]}^+(v_{i+1}) = 2$. Por lo tanto, S no es 2-independiente exterior.

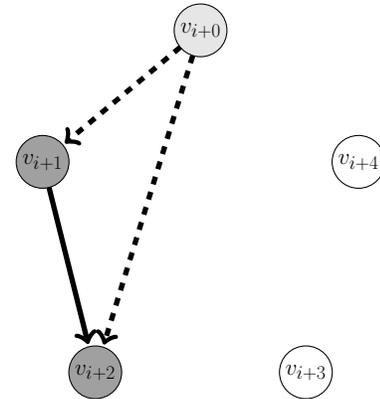


Figura 3.16: Caso 1

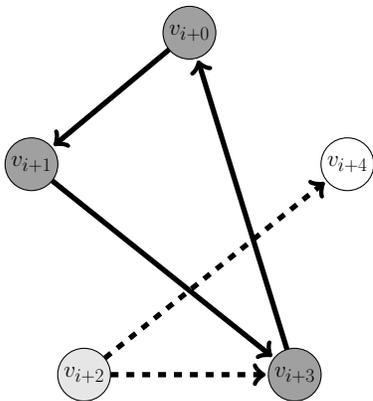


Figura 3.17: Caso 2

Como $\Delta^-(D) = 2$ y el orden de D es 5, entonces si S es un subconjunto de $V(D)$ tal que $|S| = 2$, entonces S no es un conjunto 2-absorbente exterior de D .

Ahora veamos que los conjuntos de 3 o más vértices no son 2-núcleos exteriores. Todos los casos a analizar se pueden reducir a dos:

Caso 2) $\{v_i, v_{i+1}, v_{i+3}\} = S$ con $i \in \{1, 2, 3, 4\} \pmod{5}$.

En este caso S no 2-absorbe exteriormente a $v_{i+2} \pmod{5}$ pues sus únicos dos vecinos exteriores son v_{i+3} y $v_{i+4} \pmod{5}$.

Por lo tanto, D no tiene un 2-núcleo exterior.

En el capítulo 2 se definió la función característica y se demostró el teorema 2.1.1, que relaciona la función característica y los núcleos. Para los k -núcleos exteriores tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.3.1. Sean D una digáfica y k un entero, tal que $2 \leq k$. Un subconjunto S de $V(D)$ es un k -núcleo exterior si y solo si su función característica φ_S satisface lo siguiente:

$$\varphi_S(x) = 1 - \text{mín} \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor, 1 \right\}, \text{ para todo } x \text{ en } V(D).$$

Demostración. Sean D una digráfica y k un entero, tal que $2 \leq k$.

\Rightarrow) Sean S un k -núcleo exterior de D y x en $V(D)$, tenemos dos casos sobre x respecto a S .

Caso 1) $x \in S$.

En este caso $\varphi_S(x) = 1$. Por otro lado, como S es un conjunto k -independiente exterior, $|N_D^+(x) \cap S| < k$, por lo que hay a lo más $k - 1$ vecinos exteriores de x con imagen igual a 1, respecto a Φ_S . Entonces $\left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor = 0$, por lo que

$$1 - \text{mín} \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor, 1 \right\} = 1 = \varphi_S(x).$$

Caso 2) Si $x \notin S$.

Entonces $\varphi_S(x) = 0$. Luego, como S es un conjunto k -absorbente exterior, $|N_D^+(x) \cap S| \geq k$, por lo que hay al menos k vecinos exteriores de x con imagen igual 1, respecto a Φ_S . Entonces $\left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor \geq 1$, por lo que

$$1 - \text{mín} \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor, 1 \right\} = 0 = \varphi_S(x).$$

Por lo tanto, $\varphi_S(x) = 1 - \text{mín} \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor, 1 \right\}$ para todo x en $V(D)$.

\Leftarrow) Sean S un subconjunto de $V(D)$ y φ_S su función característica que satisface:

$$\varphi_S(x) = 1 - \text{mín} \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor, 1 \right\}, \text{ para todo } x \text{ en } V(D).$$

Demostremos que S es un conjunto k -independiente exterior en D y k -absorbente exterior de D . Primero demostraremos que S es un conjunto k -independiente exterior. Sea x en S .

Entonces $1 = \varphi_S(x) = 1 - \min \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor, 1 \right\}$, lo que implica que $\left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor = 0$.

Por lo tanto, $\frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} < 1$, donde se sigue que $\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y) < k$; es decir, hay a lo más $k-1$ vecinos exteriores de x que pertenecen a S . Por lo tanto, S es un conjunto k -independiente exterior.

Ahora demostraremos que S es un conjunto k -absorbente exterior en D . Sea x en $V(D) \setminus S$.

Entonces $0 = \varphi_S(x) = 1 - \min \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor, 1 \right\}$, lo que implica que

$\min \left\{ \left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor, 1 \right\} = 1$. Así $\left\lfloor \frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \right\rfloor \geq 1$. Por lo tanto, $\frac{\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y)}{k} \geq 1$, lo que implica que

$$\sum_{y \in N_D^+(x)} \varphi_S(y) \geq k;$$

es decir, hay al menos k vecinos exteriores de x que pertenecen a S . Por lo tanto, S es un conjunto k -absorbente exterior.

Por lo tanto, S es un conjunto k -independiente exterior y k -absorbente exterior, es decir, S es k -núcleo exterior de D . □

En el capítulo 2 se demostró que todo núcleo es un conjunto independiente máximo y un conjunto absorbente mínimo, para (k', l') -núcleos exteriores tenemos el siguiente resultado.

Lema 3.3.2. *Sean D una digráfica y $\{k, l\}$ un subconjunto de \mathbb{N} tal que $1 \leq k \leq l \leq \Delta^+(D)$. Si S es un (k, l) -núcleo exterior de D , entonces S es un conjunto k -independiente exterior máximo por contención de D y un conjunto l -absorbente exterior mínimo por contención de D .*

Demostración. Sea S un (k, l) -núcleo exterior de D :

1) S es un conjunto k -independiente exterior máximo por contención de D .

Lo demostraremos por contradicción, supongamos que existe un subconjunto I de $V(D)$ tal que I es un conjunto k -independiente exterior con $S \subset I$. Sea $v \in I \setminus S$, como S es l -absorbente exterior de D , $l \leq |N_D^+(v) \cap S|$, además $|N_D^+(v) \cap S| \leq |N_D^+(v) \cap I|$, por lo tanto,

$$k - 1 < k \leq l \leq |N_D^+(v) \cap S| \leq |N_D^+(v) \cap I|,$$

esto implica que $k - 1 < k \leq \delta_{D[I]}^+(v)$, por lo que, I no es un conjunto k -independiente exterior, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, S es un conjunto k -independiente exterior

máximo por contención de D .

2) S es un conjunto l -absorbente exterior mínimo por contención de D .

Lo demostraremos por contradicción, supongamos que existe un conjunto l -absorbente exterior de D , digamos E , tal que $E \subset S$. Sea v en $S \setminus E$; como E es un conjunto l -absorbente exterior, $k - 1 < k \leq l \leq |N^+(v) \cap E|$, lo que implica que $k - 1 < \delta_{D[S]}^+(v)$. Por lo tanto, S no es k -independiente exterior en D , lo cual es una contradicción. Por lo que, S es un conjunto l -absorbente exterior mínimo por contención de D . \square

El lema anterior solo contempla cuando $1 \leq k \leq l \leq \Delta^+(D)$, pero qué pasa si $1 \leq l < k \leq \Delta^+(D)$. En este caso veremos unos ejemplos donde D tiene un (k, l) -núcleo exterior S , el cual no necesariamente es un conjunto k -independiente exterior máximo por contención de D ó l -absorbente exterior mínimo por contención de D .

En la digráfica D de la figura 3.18, el conjunto $S = \{v_2, v_3, v_4\}$ marcado en gris obscuro es 2-absorbente exterior, porque $|N_D^+(v_1) \cap S| = |\{v_2, v_3\}| \geq 2$ y $|N_D^+(v_0) \cap S| = |\{v_2, v_3, v_4\}| \geq 2$. Además, S es un conjunto independiente, lo que implica que es 3-independiente exterior. Por lo que S es un $(3, 2)$ -núcleo exterior de D . Observemos que el conjunto $S' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es 3-independiente exterior y $S \subset S'$.

Por otro lado, tenemos que el conjunto $S' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es un $(3, 2)$ -núcleo exterior; pero $S = \{v_2, v_3, v_4\}$ es 2-absorbente exterior y $S \subset S'$.

Por lo tanto, cuando $1 \leq l < k \leq \Delta^+(D)$ hay (k, l) -núcleos exteriores contenidos en otros (k, l) -núcleos exteriores.

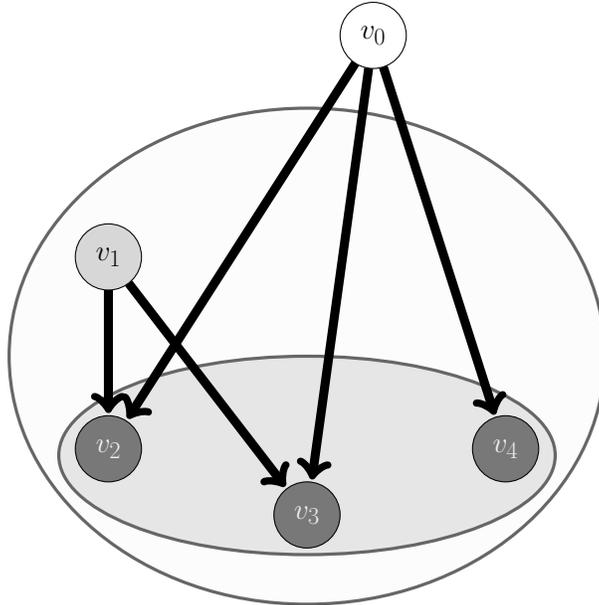


Figura 3.18: $S' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $S = \{v_2, v_3, v_4\}$ son $(3, 2)$ -núcleos exteriores, con $S \subseteq S'$

Al inicio de esta sección vimos un par de ejemplos de digráficas que no tienen k -núcleos

exteriores, para $k = 1$ y $k = 2$. En la siguiente observación damos una familia de digráficas que no tienen k -núcleo exterior para cualquier $k > 0$.

Observación 3.3.1. Sean k en \mathbb{N}^+ y $p = 2k + 1$. Si D es una digráfica k -regular de orden p , sin flechas simétricas, entonces D no tiene k -núcleo exterior.

Demostración. Sea D una digráfica k -regular de orden $2k + 1$, haremos la demostración por contradicción. Supongamos que la digráfica tiene un k -núcleo exterior, contaremos las flechas que hay tanto en el k -núcleo exterior como en el resto de la digráfica, para así llegar a la contradicción. Supongamos que D tiene un k -núcleo exterior S . Consideremos $B = V(D) \setminus S$. Como $\Delta^+(D) = k$ y S es un conjunto k -independiente exterior, entonces $B \neq \emptyset$. Por otro lado, puesto que S es un conjunto k -absorbente exterior y $B \neq \emptyset$, tenemos que $|S| \geq k$. A la cardinalidad de S le llamaremos m , por lo que $m \geq k$. Dado que D tiene $2k + 1$ vértices, la cardinalidad de B es $2k + 1 - m$ y la denotaremos por t . Como S es un conjunto k -absorbente exterior y D es k -regular, entonces B es un conjunto independiente de D , por lo que para cualquier x en B , $N_D^+(x) \subseteq S$ y $N_D^-(x) \subseteq S$.

El conjunto de flechas de D se puede ver de la siguiente forma:

$$F(D) = F(D[S]) \cup F(D[B]) \cup B_S \cup S_B$$

$$\text{donde } B_S = \{(v, u) \mid v \in B \text{ y } u \in S\},$$

$$S_B = \{(v, u) \mid v \in S \text{ y } u \in B\}.$$

Afirmamos que

$$|S_B| = |B_S| = kt.$$

Como D es k -regular, $F(D[B]) = \emptyset$ y $|B| = t$, entonces $|B_S| = kt$ y $|S_B| = kt$. Por lo tanto, la cantidad de flechas que hay en S son:

$$|F(D[S])| = |F(D)| - |F(D[B])| - |B_S| - |S_B| = 2k^2 + k - 0 - kt - kt. \quad (3.1)$$

Consideremos dos casos sobre $|B|$.

Caso 1) $|B| = t = 1$.

En este caso, $m = 2k$; luego, sustituyendo t en la ecuación 3.1 tenemos:

$$|F(D[S])| = 2k^2 + k - 2k = 2k^2 - k.$$

Por otro lado, para que S sea un conjunto k -independiente exterior tiene que cumplir que el número de flechas en $D[S]$ sea a lo más:

$$(k - 1)(2k) = 2k^2 - 2k,$$

pero $2k^2 - 2k < 2k^2 - k$, lo que implica que este caso no es posible.

Caso 2) $2 \leq t = |B|$.

En este caso, a lo más hay $2k - 1$ vértices en S . Consideremos v_0 un vértice de B , observemos que $|N_D^+(v_0) \cap S| = k$ y $|N_D^-(v_0) \cap S| = k$. Como $|S| \leq 2k - 1$, entonces existe al menos un vértice s en S tal que $s \in N_D^+(v_0) \cap N_D^-(v_0)$, lo cual no es posible ya que no hay flechas simétricas, ver figura 3.19.

□

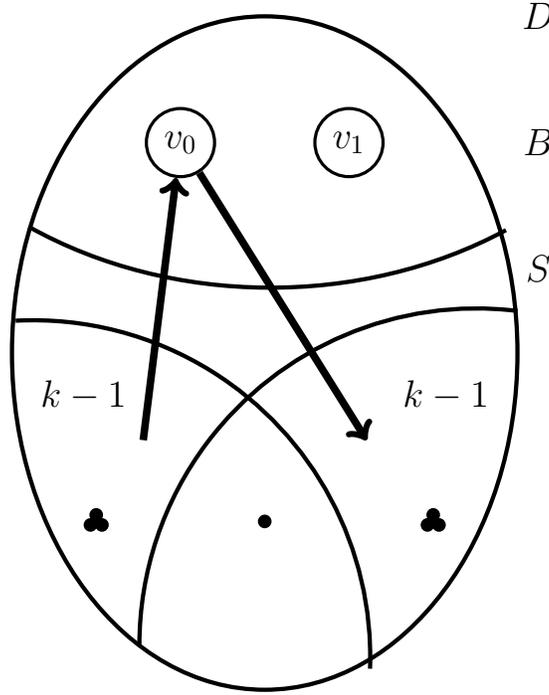


Figura 3.19: Caso 2) $2 \leq |B|$

Utilizaremos la siguiente definición para mostrar ejemplos de existencia de esta clase de digráficas.

Definición 3.3.2. *Digráfica circulante*

Sean D una digráfica, con $p \geq 2$, $V(D) = \{v_0, \dots, v_{p-1}\}$ y J un subconjunto de $\{1, 2, \dots, p-1\}$. Si

$$A(D) = \{(v_i, v_{i+j}) \pmod{p} \mid 0 \leq i \leq p-1 \text{ y } j \in J\},$$

entonces decimos que D es una digráfica circulante, al conjunto J le llamamos conjunto de saltos. A D la denotamos como $\vec{C}_p(J)$.

Sean k en \mathbb{N}^+ y $p = 2k + 1$, $\vec{C}_p(J)$ es una digráfica k -regular de orden p , sin flechas simétricas, entonces por la observación 3.3.1 $\vec{C}_p(J)$ no tiene k -núcleo exterior. Por lo que existe una familia infinita de digráficas que no tiene k -núcleo exterior.

3.3.1. Digráficas completas, simétricas y transitivas

En el capítulo dos vimos resultados de núcleos para digráficas especiales; las digráficas completas, simétricas y transitivas, en esta sección trabajaremos con las mismas digráficas. Empezaremos con las definiciones de los conceptos de k -independencia y l -absorbencia para gráficas.

Sean G una gráfica, S un subconjunto de $V(G)$ y k en $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, decimos que S es un conjunto **k -independiente de G** , si para todo x en S se cumple que $\delta_{G[S]}(x) < k$.

Definición 3.3.3. *Número de k -independencia de una gráfica G y $\alpha_k(G)$ -conjunto*

El número de k -independencia de una gráfica G se define como

$$\text{máx}\{|S| \mid S \text{ es un conjunto } k\text{-independiente de } G\},$$

lo denotaremos por $\alpha_k(G)$ ó α_k si la gráfica es evidente. Un subconjunto S de vértices de G que es k -independiente y de cardinalidad máxima le llamamos $\alpha_k(G)$ -conjunto ó α_k -conjunto si la gráfica es evidente.

Definición 3.3.4. *Conjunto l -absorbente*

Sean G una gráfica y S un subconjunto de $V(G)$ y l en $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, decimos que S es un conjunto l -absorbente de G , si para todo $x \in V(G) \setminus S$ se tiene que $|N_G(x) \cap S| \geq l$; es decir, x tiene al menos l vecinos en S .

Definición 3.3.5. *Número de l -absorbencia de una gráfica G y $\gamma_l(G)$ -conjunto*

El número de l absorbencia de una gráfica G es el

$$\text{mín}\{|S| \mid S \text{ es un conjunto } l\text{-absorbente de } G\}$$

y lo denotamos por $\gamma_l(G)$ ó γ_l cuando la gráfica es evidente. Un subconjunto S de vértices de G que es l -absorbente y de cardinalidad mínima le llamamos $\gamma_l(G)$ -conjunto ó γ_l -conjunto si la gráfica es evidente.

Definición 3.3.6. *(k, l) -núcleo*

Sean G una digráfica y S un subconjunto de $V(G)$ y $\{k, l\}$ un subconjunto de \mathbb{N} , si S es un conjunto k -independiente y un conjunto l -absorbente de G , entonces decimos que S es un (k, l) -núcleo de G . Si $k = l$, entonces S recibe el nombre de k -núcleo de G .

Ahora demostraremos un lema que permitirá trasladar algunos resultados de digráficas a gráficas.

Lema 3.3.3. Sean G una gráfica y D la orientación de G donde todas las flechas son simétricas.

1. S es un conjunto k -independiente exterior de D si y solo si S es un conjunto k -independiente de G . Además, $\alpha_k(D) = \alpha_k(G)$.
2. S es un conjunto l -absorbente exterior de D si y solo si S es un conjunto l -absorbente de G . Además, $\gamma_l(D) = \gamma_l(G)$

Demostración. Sea G una gráfica y D un orientación de G con todas sus flechas simétricas. Observemos que $|N_D(x)^+ \cap S| = |N_G(x) \cap S|$, para todo v en $V(G) = V(D)$.

1. S es un conjunto k -independiente exterior de D si y solo si S es un conjunto k -independiente de G . Además, $\alpha_k(D) = \alpha_k(G)$.
 - Sea S un conjunto k -independiente exterior de D . Como S es un subconjunto de $V(D)$, por definición de orientación, para todo x en S tal que $|N_D^+(x) \cap S| < k$, también $|N_G(x) \cap S| < k$. Por lo tanto, S es k -independiente en G . Esto muestra que todo conjunto k -independiente exterior de D también es un conjunto k -independiente de G , lo que implica que $\alpha_k(D) \leq \alpha_k(G)$.
 - Sea S un conjunto k -independiente de G . Como S es un subconjunto de $V(G)$, entonces para todo x en S se tiene que $|N_G(x) \cap S| < k$. Debido a que D es una orientación de G y es simétrica, para todo x en $V(D)$ tenemos que $N_D^+(x) = N_G(x)$, por lo que, $|N_D^+(x) \cap S| < k$. Por lo tanto, S es un conjunto k -independiente exterior en D . Esto muestra que todo conjunto k -independiente de G también es un conjunto k -independiente exterior de D , lo que implica que $\alpha_k(G) \leq \alpha_k(D)$.

Por lo tanto, $\alpha_k(G) = \alpha_k(D)$.

2. S es un conjunto l -absorbente exterior de D si y solo si S es un conjunto l -absorbente de G . Además, $\gamma_l(D) = \gamma_l(G)$
 - Sea S un conjunto l -absorbente exterior de D . Como S es un subconjunto de $V(D)$, por definición de orientación, para todo x en $V(D) \setminus S$ tal que $|N_D(x)^+ \cap S| \geq l$, tenemos que $|N_G(x) \cap S| \geq l$. Por lo tanto, S es l -absorbente en G . Esto muestra que todo conjunto l -absorbente exterior de D es un conjunto l -absorbente de G , lo que implica que $\gamma_l(D) \geq \gamma_l(G)$.
 - Sea S un conjunto l -absorbente de G . Como S es un subconjunto de $V(G)$, entonces para todo x en S , tenemos que $|N_G(x) \cap S| \geq l$. Debido a que D es una orientación de G y es simétrica, tenemos que $N_D^+(x) = N_G(x)$, por lo que, $|N_D^+(x) \cap S| \geq l$. Por lo tanto, S es un conjunto l -absorbente exterior en D . Esto muestra que todo conjunto l -absorbente de G también es un conjunto l -absorbente exterior de D , lo que implica que $\gamma_l(G) \leq \gamma_l(D)$.

Por lo tanto, $\gamma_l(G) = \gamma_l(D)$.

□

Corolario 3.3.1. Sean G una gráfica, S un subconjunto de $V(G)$ y $\{k, l\}$ un subconjunto de \mathbb{N} , tal que $1 \leq l \leq k \leq \Delta(G)$.

1. Si S es un conjunto k -independiente de G , k' es un elemento de \mathbb{N} y $k \leq k'$, entonces S es un conjunto k' -independiente de G .
2. Si k' es un elemento de \mathbb{N} y $k \leq k'$, entonces $\alpha_k(G) \leq \alpha_{k'}(G)$.
3. Si S es un conjunto l -absorbente de G , l' es un elemento de \mathbb{N} y $l' \leq l$, entonces S es un conjunto l' -absorbente de G .
4. Si l' es un elemento de \mathbb{N} y $l' \leq l$, entonces $\gamma_{l'}(G) \leq \gamma_l(G)$.
5. Si $\{k', l'\}$ es un subconjunto de \mathbb{N} , tal que $l' \leq l$, $k \leq k' \leq \Delta(G)$ y G admite un (k, l) -núcleo, entonces G admite un (k', l') -núcleo.
6. Si S es un (k, l) -núcleo de G , entonces S es un conjunto k -independiente máximo por contención de G y un conjunto l -absorbente mínimo por contención de G .

Demostración. Sean G una gráfica, S un subconjunto de $V(G)$, $\{k, l\}$ un subconjunto de \mathbb{N} , tal que $1 \leq l \leq k \leq \Delta(G)$ y D una orientación de G donde todas las flechas son simétricas.

Notemos que como D es una orientación de G donde todas las flechas son simétricas, tenemos que $\Delta^+(D) = \Delta(G)$, lo que implica que, $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$.

1. Si S es un conjunto k -independiente de G , k' es un elemento de \mathbb{N} y $k \leq k'$, por el lema 3.3.3, S es un conjunto k -independiente exterior de D . Por el lema 3.1.1, S es un conjunto k' -independiente exterior de D , y por el lema 3.3.3 S es un conjunto k' -independiente de G .
2. El corolario 3.1.1, nos garantiza que

$$\alpha_k(D) \leq \alpha_{k'}(D),$$

por el lema 3.3.3

$$\alpha_k(G) = \alpha_k(D) \leq \alpha_{k'}(D) = \alpha_{k'}(G).$$

Por lo tanto, $\alpha_k(G) \leq \alpha_{k'}(G)$.

3. Si S es un conjunto l -absorbente de G , l' es un elemento de \mathbb{N} y $l' \leq l$, por el lema 3.3.3, S es un conjunto l -absorbente exterior de D . Por el lema 3.2.1, S es un conjunto l' -absorbente exterior de D , y por el lema 3.3.3 S es un conjunto l' -absorbente de G .

4. El corolario 3.2.1, nos garantiza que

$$\gamma_{l'}(D) \leq \gamma_l(D),$$

por el lema 3.3.3

$$\gamma_{l'}(G) = \gamma_{l'}(D) \leq \gamma_l(D) = \gamma_l(G).$$

Por lo tanto, $\gamma_{l'}(G) \leq \gamma_l(G)$.

5. Si S es un un (k, l) -núcleo de G , por el lema 3.3.3, S es un (k, l) -núcleo exterior de D . Por el lema 3.3.1, S es un (k', l') -núcleo exterior de D . Por el lema 3.3.3, S es un (k', l') -núcleo de G .
6. Si S es un un (k, l) -núcleo de G por el lema 3.3.3, S es un (k, l) -núcleo exterior de D . Por el lema 3.3.2 S es un conjunto k -independiente exterior máximo por contención de D y un conjunto l -absorbente exterior mínimo por contención de D , por el lema 3.3.3, S es un conjunto k -independiente máximo por contención de G y un conjunto l -absorbente mínimo por contención de G (porque $V(G) = V(D)$).

□

Primero definiremos y trabajaremos con unos árboles especiales que nos ayudarán a demostrar los resultados de esta sección.

Definición 3.3.7. \mathcal{N}_l^k árbol y vértice especial

Sean T un árbol, k y l enteros tales que $1 \leq k < l \leq \Delta(T)$. T es un \mathcal{N}_l^k árbol si T no es trivial y contiene un vértice w de grado al menos $l - 1$, tal que para cada vértice x en $V(T) \setminus \{w\}$:

$$\delta_T(x) \leq k.$$

Llamaremos vértice especial de T a w .

Definición 3.3.8. \mathcal{N}_l^k árbol exacto, \mathcal{N}_l^k árbol débil y \mathcal{N}_l^k árbol débil exacto

Sea T un árbol,

- T es un \mathcal{N}_l^k árbol exacto, si T es un \mathcal{N}_l^k árbol con vértice especial w y $\delta_T(w) = l - 1$.
- T es un \mathcal{N}_l^k árbol débil, si T es un \mathcal{N}_l^k árbol con vértice especial w y $\delta_T(x) \leq k - 1$ para cada $x \in V(T) \setminus N[w]$.
- T es un \mathcal{N}_l^k árbol débil exacto, si T es un \mathcal{N}_l^k árbol con vértice especial w , un \mathcal{N}_l^k árbol débil y un \mathcal{N}_l^k árbol exacto.

Ahora daremos ejemplos de un \mathcal{N}_l^k árbol, un \mathcal{N}_l^k árbol que no puede ser \mathcal{N}_l^k árbol débil y un árbol que no puede ser un \mathcal{N}_l^k árbol.

En la figura 3.20 podemos ver un árbol T con grado máximo igual a 6. Si tomamos l y k que cumplan $1 \leq k < l \leq \Delta(T)$, entonces v_1 es vértice especial (porque $\delta_T(v_i) = 1$ y $1 \leq k$, con i en $\{2, \dots, 7\}$).

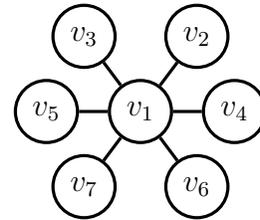


Figura 3.20: Un \mathcal{N}_l^k árbol

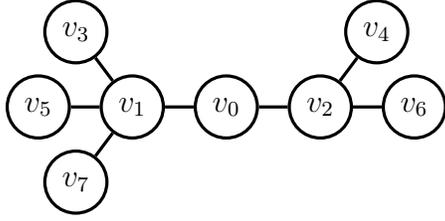


Figura 3.21: Un \mathcal{N}_4 árbol, que no es débil y no es un \mathcal{N}_l^k árbol para $k \leq 3$

Para $l = 4$ y $k = 3$, en la figura 3.22 tenemos un árbol T que no es un \mathcal{N}_l^k árbol. Como un vértice especial en T tiene grado al menos $l - 1 = 3$, entonces los únicos candidatos son v_1 y v_2 . Como $\delta_T(v_2) = 4$ y $k = 3$, entonces v_1 no puede ser un vértice especial lo que implica que T no es un \mathcal{N}_l^k árbol. El caso de v_2 es simétrico. Así, hemos encontrado un árbol que no está en ninguna de las familias \mathcal{N}_l^k .

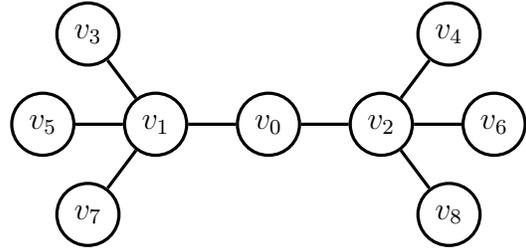


Figura 3.22: Árbol que no es un \mathcal{N}_l^k árbol

Lema 3.3.4. Sean $\{k, l\}$ un subconjunto de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, tal que $k < l$, T_0 un \mathcal{N}_l^k árbol, con vértice especial w , T' un árbol y v un vértice de T' . Si T es el árbol que se obtiene de T_0 y T' agregando una arista entre w y v , entonces:

1. $\gamma_l(T') \leq \gamma_l(T) - (|V(T_0)| - 1)$. Se da la igualdad cuando $\delta_{T_0}(w) \geq l$ o $\delta_{T'}(v) \leq l - 1$.

2. $\alpha_k(T) \leq \alpha_k(T') + (|V(T_0)| - 1)$.

Demostración. Sean T' un árbol y v uno de sus vértices, T_0 un \mathcal{N}_l^k árbol, con vértice especial w , y T un árbol que se obtiene de T_0 y T' agregando una arista entre w y v (ver figura 3.23). Notemos que por construcción de T se tiene que $l \leq \Delta(T)$

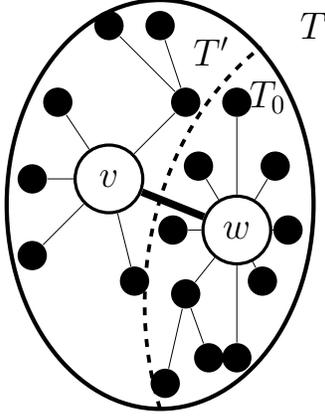


Figura 3.23: Árbol T

1. Por demostrar que $\gamma_l(T') \leq \gamma_l(T) - (|V(T_0)| - 1)$.

Sea S un $\gamma_l(T)$ -conjunto. Recordemos que w es el vértice especial de T_0 , es decir, para toda x en $V(T_0) \setminus \{w\}$ tenemos que, $\delta_{T_0}(x) \leq k$ (ver figura 3.24). Puesto que para toda x en $V(T_0) \setminus \{w\}$, $\delta_T(x) = \delta_{T_0}(x)$ y $k < l$, entonces x debe estar en todo $\gamma_l(T)$ -conjunto, por lo que:

$$(V(T_0) \setminus \{w\}) \subseteq S.$$

Así, $S \setminus (V(T_0) \setminus \{w\})$ es un conjunto l -absorbente de T' . Por lo tanto, $\gamma_l(T') \leq \gamma_l(T) - (|V(T_0)| - 1)$.

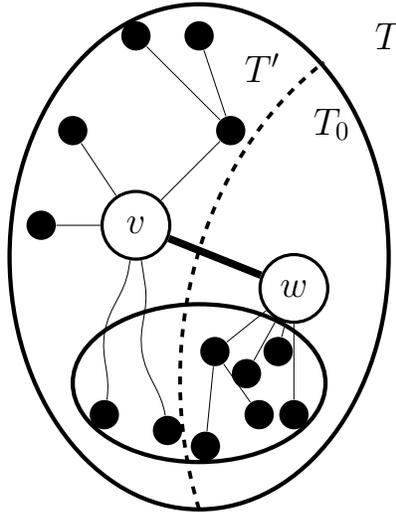


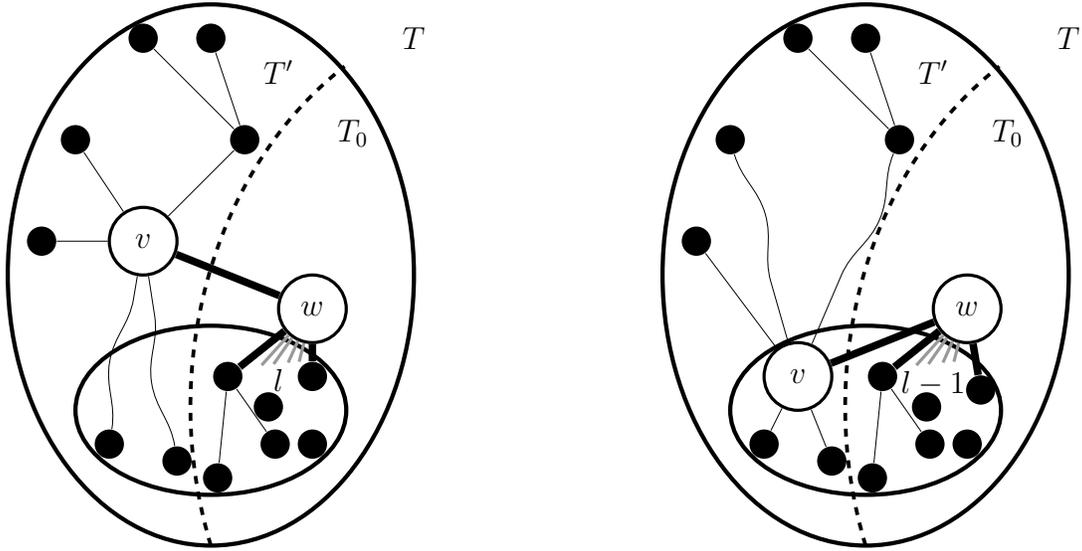
Figura 3.24: $x \in S$ para todo x en $V(T_0) \setminus \{w\}$

- Por demostrar que $\gamma_l(T') = \gamma_l(T) - (|V(T_0)| - 1)$, cuando $\delta_{T_0}(w) \geq l$ o $\delta_{T'}(v) \leq l - 1$.

Si $\delta_{T_0}(w) \geq l$, entonces $(V(T_0) \setminus \{w\})$ l -absorbe a w en T_0 . Notemos que si S' es un $\gamma_l(T')$ -conjunto en T' , entonces $S' \cup (V(T_0) \setminus \{w\})$ es un conjunto l -absorbente en T , lo que implica que $\gamma_l(T) \leq |S' \cup (V(T_0) \setminus \{w\})| = |S'| + |(V(T_0) \setminus \{w\})| = \gamma_l(T') + (|V(T_0)| - 1)$ (ver figura 3.25a).

Cuando $\delta_{T'}(v) \leq l - 1$, notemos que si S' es un $\gamma_l(T')$ -conjunto en T' , entonces $v \in S'$ (ver figura 3.25b). Por lo tanto, $S' \cup (V(T_0) \setminus \{w\})$ es un conjunto l -absorbente de T (porque S' es l -absorbente en T' y $vw \in A(T)$), de modo que $\gamma_l(T) \leq |S' \cup (V(T_0) \setminus \{w\})| = |S'| + |(V(T_0) \setminus \{w\})| = \gamma_l(T') + (|V(T_0)| - 1)$.

Por lo tanto, $\gamma_l(T') = \gamma_l(T) - (|V(T_0)| - 1)$.



(a) Si $\delta_{T_0}(w) \geq l$ S es l -absorbente de T_0

(b) Si $\delta_{T'}(v) \leq l - 1$, entonces $v \in S$

Figura 3.25: Casos en los que se presenta la igualdad

2. Por demostrar que $\alpha_k(T) \leq \alpha_k(T') + (|V(T_0)| - 1)$.

Sean S un $\gamma_k(T)$ -conjunto de T , $S_1 = V(T_0) \cap S$ y $S_2 = V(T') \cap S$. Como S_2 es un conjunto k -independiente de T' , entonces $|S_2| \leq \alpha_k(T')$. Por otro lado, como $\delta_T(w) \geq l - 1$ y $k \leq l - 1$, entonces $V(T_0)$ no es un conjunto k -independiente de T_0 , lo que implica que todo conjunto k -independiente de T_0 es menor o igual que $|V(T_0)| - 1$; en particular, $|S_1| \leq |V(T_0)| - 1$. Puesto que $|S| = \alpha_k(T)$, se tiene que:

$$\alpha_k(T) = |S| = |S_1| + |S_2| \leq \alpha_k(T') + |S_1| \leq \alpha_k(T') + (|V(T_0)| - 1).$$

□

Sean T_0 , T' y T como en las hipótesis del lema anterior. Supongamos que T_0 es un \mathcal{N}_l^k árbol débil. Si unimos un conjunto k -independiente en T' al conjunto $V(T_0) \setminus \{w\}$, entonces obtenemos un conjunto k -independiente en T . Esta afirmación se demuestra en la siguiente observación.

Observación 3.3.2. Sean $\{k, l\}$ un subconjunto de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, tal que $k < l$, T_0 un \mathcal{N}_l^k árbol débil, con vértice especial w , T' un árbol, I' un conjunto k -independiente de T' y v un vértice de T' . Si T es el árbol, que se obtiene de T_0 y T' agregando una arista entre w y v , e $I = I' \cup V(T_0) \setminus \{w\}$, entonces I es un conjunto k -independiente de T .

Demostración. Sean $\{k, l\}$ un subconjunto de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, tal que $k < l$, T_0 un \mathcal{N}_l^k árbol, con vértice especial w , T' un árbol, I' un conjunto k -independiente de T' y v un vértice de T' . Sea T el árbol que se obtiene de T_0 y T' agregando una arista entre w y v . Si $I = I' \cup V(T_0) \setminus \{w\}$, entonces I es un conjunto k -independiente de T .

En efecto, como $\delta_T(x) = \delta_{T'}(x)$ ó $\delta_T(x) = \delta_{T_0}(x)$ para todo x en $V(T) \setminus \{v, w\}$ y w no pertenece a I , entonces $N_{T'}(v) \cap I = N_T(v) \cap I$. Por lo que, para todo x en I , $|N_T(v) \cap I| = |N_{T'}(v) \cap I| < k$ (porque I' es k -independiente de T') ó $|N_{T_0}(x) \setminus \{w\}| = |N_T(x) \cap I| < k$ (porque T_0 es un \mathcal{N}_l^k árbol débil). Por lo tanto, I es un conjunto k -independiente de T . \square

Teorema 3.3.2. Si T es un árbol y k un entero positivo con $k \geq 2$, entonces $\gamma_k(T) \geq \alpha_{k-1}(T)$.

Demostración. Sean T un árbol y k un entero positivo con $k \geq 2$. Si $\Delta(T) < k$, entonces $\gamma_k(T) = p \geq \alpha_{k-1}(T)$.

Por lo que supondremos que $\Delta(T) \geq k$. Consideremos

$$B(T) = \{v \in V(T) \mid \delta_T(v) \geq k\},$$

como $\Delta(T) \geq k$, entonces $|B(T)| \geq 1$. Aplicaremos inducción sobre el número de elementos de $B(T)$. Supongamos que $|B(T)| = n$.

Base de inducción.

Si $n = 1$, entonces existe un único v en $V(T)$ tal que $\delta(v) \geq k$. Por lo tanto, $V(T) \setminus \{v\}$ es un conjunto k -absorbente, lo que implica que $\gamma_k(T) = p - 1$ (Porque para cada u en $V(T) \setminus \{v\}$ se tiene que $\delta(u) \leq k - 1$).

Por otro lado, como $\delta_T(v) \geq k$, entonces $V(T)$ no puede ser un conjunto $k - 1$ -independiente. Por lo tanto, $\alpha_{k-1}(T) \leq p - 1$, así $\gamma_k(T) \geq \alpha_{k-1}(T)$.

Hipótesis de inducción.

Supongamos que si T' es un árbol con $|B(T')| < n$ y $k \geq 2$, entonces $\gamma_k(T') \geq \alpha_{k-1}(T')$.

Paso inductivo.

Sean T un árbol tal que $n \geq 2$, $\{r, w, x\}$ un subconjunto de $V(T)$ tal que $d_T(r, x) = \text{diám}(T)$, P una rx -trayectoria tal que $\text{diám}(T) = l(P)$. Afirmamos que r es una hoja. Por contradicción, supongamos que $\delta_T(r) \geq 2$, entonces existe un h en $V(T)$ tal que h es adyacente a r y $h \notin V(P)$. Por lo tanto, $d(h, x) > d(r, x)$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\delta_T(r) = 1$.

Consideremos a w en $B(T)$ tal que $d(r, w) = \max_{v \in B(T)} d(r, v)$. Notemos que como $\delta_T(w) \geq k$, entonces $r \neq w$.

Veamos a T como un árbol con raíz r y definamos las siguientes subgráficas:

$$T_w = T[\{v \in V(T) | w \text{ pertenece a la } rv\text{-trayectoria en } T\}] \\ \text{y } T' = T - V(T_w).$$

Notemos que si $v \in T_w$, entonces $d_T(r, v) \geq d_T(r, w)$ porque las trayectorias entre todo par de vértices en T son únicas y w pertenece a la rv -trayectoria en T . También observemos que si P' es una rv -trayectoria que contiene a w en T y z es un vértice que pertenece a (w, P', v) , entonces $z \in \{v \in V(T) | w \text{ pertenece a la } rv\text{-trayectoria en } T\}$, porque w pertenece a (r, P', z) .

Afirmamos que T_w y T' son árboles. Como T_w y T' son subgráficas de una gráfica acíclica, entonces éstas son acíclicas. Por lo tanto, solo falta demostrar que son conexas.

- T_w es conexas.

Sean v y u vértices en $V(T_w) \setminus \{w\}$. Luego, de la definición de T_w se tiene que existen la rv -trayectoria P_v y la ru -trayectoria P_u en T , tales que $w \in V(P_u)$ y $w \in V(P_v)$. Así, como (w, P_v, v) es una wv -trayectoria en T_w , entonces existe la wv -trayectoria en T_w . Por otro lado, como (w, P_u, u) es una wu -trayectoria en T_w , tenemos que existe la wu -trayectoria en T_w . Solo falta probar que existe una trayectoria de w hacia cualquier vértice de $V(T_w) \setminus \{w\}$. Tomemos z en $V(T_w) \setminus \{w\}$, por definición de T_w , existe P' una rz -trayectoria en T , tal que w pertenece a los vértices de P' . Por lo tanto, (w, P', z) es una wz -trayectoria en T_w . Por lo tanto, T_w es conexas.

- T' es conexas.

Sean v y u vértices en $V(T')$. Como T es conexas, entonces existen la rv -trayectoria P_v y la ru -trayectoria P_u . Puesto que $\{u, v\} \cap \{v \in V(T) | w \text{ pertenece a la } rv\text{-trayectoria en } T\} = \emptyset$, entonces $w \notin V(P_u)$ y $w \notin V(P_v)$. Por lo tanto, P_u y P_v son únicas en T , entonces existen $V(P_u) \cap \{v \in V(T) | w \text{ pertenece a la } rv\text{-trayectoria en } T\} = \emptyset$ y $V(P_v) \cap \{v \in V(T) | w \text{ pertenece a la } rv\text{-trayectoria en } T\} = \emptyset$. Por lo tanto, Los P_u y P_v son trayectorias de T' , lo que implica que existen la vr -trayectoria en T' y la ru -trayectoria en T' . Así, existe la vu -trayectoria en T' . Por lo tanto, T' es conexas.

Como $B(T')$ tiene menos vértices que $B(T)$ y puede ser que $B(T')$ sea vacío, tenemos los siguientes casos:

Caso 1) $|B(T')| = 0$.

En este caso, $\Delta(T') \leq k - 1$, lo que implica que $\gamma_k(T') = |V(T')|$, por lo que:

$$\alpha_{k-1}(T') \leq \gamma_k(T').$$

Caso 2) $1 \leq |B(T')|$.

En este caso, como $|B(T')| \leq |B(T)| - 1$ lo que nos permite aplicar la hipótesis de inducción en $B(T')$, por lo tanto:

$$\alpha_{k-1}(T') \leq \gamma_k(T').$$

En ambos casos hemos demostrado que $\alpha_{k-1}(T') \leq \gamma_k(T')$.

Como T_w es un \mathcal{N}_k^{k-1} árbol, entonces por el lema 3.3.4 (parte 2) tenemos que:

$$\alpha_{k-1}(T) \leq \alpha_{k-1}(T') + (|V(T_w)| - 1),$$

y por el lema 3.3.4 (parte 1) tenemos que:

$$\gamma_k(T') \leq \gamma_k(T) - (|V(T_w)| - 1), \text{ lo que implica } \gamma_k(T') + (|V(T_w)| - 1) \leq \gamma_k(T).$$

Por lo tanto,

$$\alpha_{k-1}(T) \leq \alpha_{k-1}(T') + (|V(T_w)| - 1) \leq \gamma_k(T') + (|V(T_w)| - 1) \leq \gamma_k(T);$$

$$\text{es decir, } \alpha_{k-1}(T) \leq \gamma_k(T).$$

□

La siguiente observación nos ayudará a establecer dos construcciones que serán de utilidad para caracterizar los árboles T que contienen un conjunto de vértices que es k -independiente y l -absorbente para cada k y l , con $1 \leq k < l \leq \Delta(T)$.

Observación 3.3.3. Sean k y l dos enteros tales que $1 \leq k < l$.

1. Existe T un árbol con $l \leq \Delta(T)$ tal que T es un árbol débil con vértice especial w y $\delta_T(w) = l$.
2. Existe T un árbol con $l \leq \Delta(T)$ tal que T es un árbol débil exacto.

Demostración. Sean k y l dos enteros tales que $1 \leq k < l$.

1. La gráfica bipartita completa $K_{1,l}$ tiene un vértice w , tal que $\delta_{K_{1,l}}(w) = l$, además para todo v en $V(K_{1,l}) \setminus \{w\}$ se tiene que $\delta_{K_{1,l}}(v) = 1 \leq k$. Por otro lado, como $V(K_{1,l}) \setminus N[w] = \emptyset$, se cumple que $\delta_{K_{1,l}}(v) \leq k - 1$ para todo v en $V(K_{1,l}) \setminus N[w]$.

2. La gráfica bipartita completa $K_{1,l-1}$ tiene un vértice w , tal que $\delta_{K_{1,l-1}}(w) = l$, además para todo v en $V(K_{1,l-1}) \setminus \{w\}$ se tiene que $\delta_{K_{1,l-1}}(v) = 1 \leq k$. Por otro lado, como $V(K_{1,l-1}) \setminus N[w] = \emptyset$, se cumple $\delta_{K_{1,l-1}}(v) \leq k - 1$ para todo v en $V(K_{1,l-1}) \setminus N[w]$.

□

Para caracterizar los árboles T que contienen un conjunto de vértices que es k -independiente y l -absorbente para cada k y l , con $1 \leq k < l \leq \Delta(T)$, definimos a la familia \mathcal{A}_l^k que consiste de los árboles T que se obtienen a partir de una sucesión T_1, T_2, \dots, T_m de árboles, donde T_1 es un \mathcal{N}_l^k árbol débil con vértice especial w de grado al menos l , $T = T_m$ y si $m \geq 2$, entonces T_{i+1} se obtiene recursivamente de T_i al operarlo con un \mathcal{N}_l^k árbol débil bajo la operación \mathcal{T}_1 ó al operarlo con un \mathcal{N}_l^k -árbol débil exacto bajo la operación \mathcal{T}_2 , las cuales definimos a continuación, donde $W(T_1) = V(T_1) \setminus \{w\}$.

- Operación \mathcal{T}_1 : Elegir un \mathcal{N}_l^k árbol débil con vértice especial v de grado al menos l , digamos T_0 , y lo unimos con un árbol arbitrario, digamos T_i , agregando una arista desde v a cualquier vértice de T_i . Si T_{i+1} es el árbol obtenido de esta operación, definimos $W(T_{i+1}) = W(T_i) \cup (V(T_0) \setminus \{v\})$.
- Operación \mathcal{T}_2 : Elegir un \mathcal{N}_l^k árbol débil exacto con vértice especial v , digamos T_0 , y lo unimos con un árbol arbitrario, digamos T_i , agregando una arista desde v a cualquier vértice del conjunto $W(T_i)$. Si T_{i+1} es el árbol obtenido de esta operación, definimos $W(T_{i+1}) = W(T_i) \cup (V(T_0) \setminus \{v\})$.

Observemos que los árboles T_1 y T_0 siempre existen debido a la observación 3.3.3, independientemente de la operación que se aplique.

Por ejemplo, en las figuras 3.26 y 3.27a tenemos dos \mathcal{N}_3^2 árboles débiles, al aplicar \mathcal{T}_1 , obtenemos un posible árbol, T_2 (ver figura 3.27b). Además, $W(T_2) = W(T_1) \cup (V(T_0) \setminus \{v_2\}) = \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$.

Por otro lado al operar con \mathcal{T}_1 a os árboles de las figuras 3.26 y 3.28a que son \mathcal{N}_3^2 árbol débil y \mathcal{N}_3^2 árbol débil exacto respectivamente, obtenemos otro posible árbol, T_2 (ver figura 3.28b). Además, $W(T_2) = W(T_1) \cup (V(T_0) \setminus \{v_2\}) = \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_9\}$.

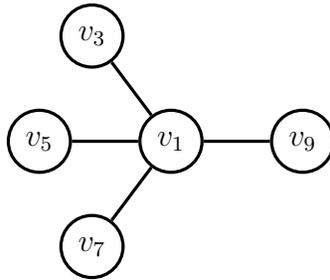
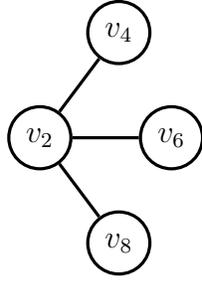
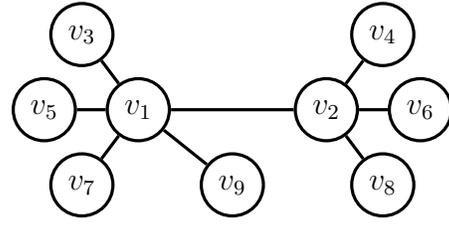


Figura 3.26: T_1 un \mathcal{N}_3^2 árbol débil con vértice especial v_1 , $W(T_1) = \{v_3, v_5, v_7, v_9\}$

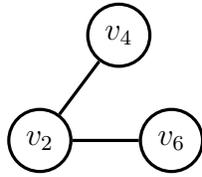


(a) T_0 un \mathcal{N}_3^2 árbol débil con vértice especial v_2

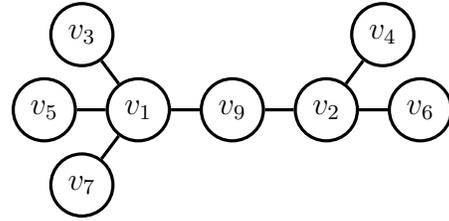


(b) $\mathcal{T}_1(T_1, T_0) = T_2$

Figura 3.27: T_0 y $\mathcal{T}_1(T_1, T_0)$



(a) T_0 un \mathcal{N}_3^2 árbol débil exacto con vértice especial v_2



(b) $\mathcal{T}_2(T_1, T_0) = T_2$

Figura 3.28: T_0 y $\mathcal{T}_2(T_1, T_0)$

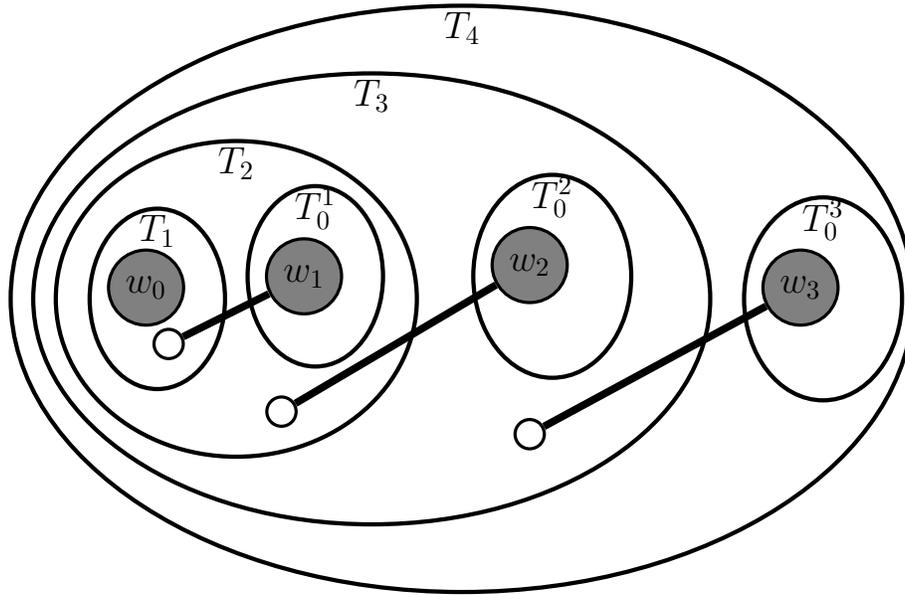


Figura 3.29: Como se ve T_4 al aplicarle cuatro veces las operaciones

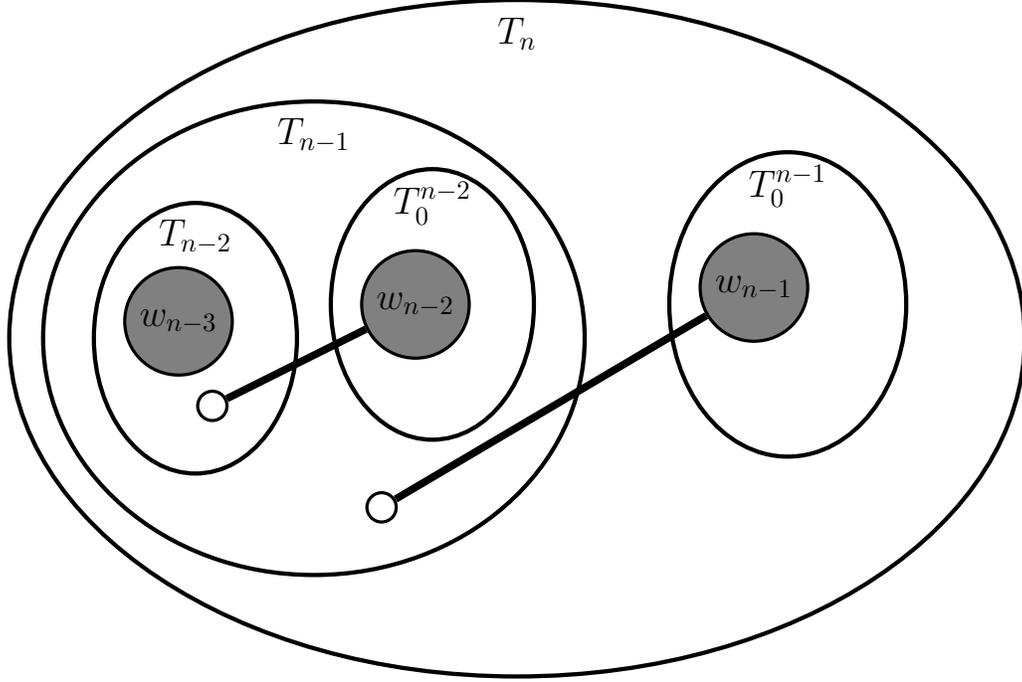


Figura 3.30: T_n al aplicarle varias veces las operaciones

Teorema 3.3.3. Sean T un árbol, y $\{l, k\} \subseteq \mathbb{N}$ con $1 \leq k < l \leq \Delta(T)$. Si $T \in \mathcal{A}_l^k$, entonces $W(T)$ es el único $\alpha_k(T)$ -conjunto y el único $\gamma_l(T)$ -conjunto.

Demostración. Sean T en \mathcal{A}_l^k y $\{l, k\}$ un subconjunto de \mathbb{N} , con $1 \leq k < l \leq \Delta(T)$. T se obtiene a partir de una sucesión de árboles T_1, T_2, \dots, T_n con $n \geq 1$, donde T_1 es un \mathcal{N}_l^k árbol débil con vértice especial w de grado al menos l , $T = T_n$ si $2 \leq n$, entonces T_{i+1} se puede obtener de T_i aplicando las operaciones \mathcal{T}_1 ó \mathcal{T}_2 . Procederemos por inducción sobre el número de operaciones n .

Base de inducción.

Si $n = 1$, entonces $T = T_1$ es un \mathcal{N}_l^k árbol débil con vértice especial w de grado al menos l . Por definición $W(T) = V(T) \setminus \{w\}$.

- $W(T)$ es un $\gamma_l(T)$ -conjunto.

Como T es un \mathcal{N}_l^k árbol débil con vértice especial w , tal que $\delta_T(w) \geq l$, entonces $V(T) \setminus \{w\}$ es l -absorbente, por lo que, $\gamma_l(T) \leq p - 1$. Además, como todo vértice v distinto de w cumple que $\delta_T(v) \leq k$ y $k < l$, se tiene que no existen conjuntos l -absorbentes con menos de $p - 1$ vértices; es decir, $p - 1 \leq \gamma_l(T)$. Por lo tanto, $W(T)$ es un $\gamma_l(T)$ -conjunto.

- $W(T)$ es el único $\gamma_l(T)$ -conjunto.

Demostremos esto por contradicción. Supongamos que existe S un $\gamma_l(T)$ -conjunto distinto de $W(T)$. Como S es un $\gamma_l(T)$ -conjunto, entonces $|S| = p - 1$ y dado que es distinto de $W(T)$, se tiene que $V(T) \setminus S = \{v\}$ y $v \neq w$. Como T es un \mathcal{N}_l^k árbol débil, $\delta_T(v) \leq k < l$, lo que implica que S no es un conjunto l -absorbente de T , lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $W(T)$ es el único $\gamma_l(T)$ -conjunto.

- $W(T)$ es un $\alpha_k(T)$ -conjunto.

Demostremos que $W(T)$ es un conjunto k -independiente; es decir, que para todo v en $W(T)$, $|N(v)_T \cap W(T)| < k$. Sea v en $W(T)$, tenemos dos casos sobre v :

Caso 1) v pertenece a $N_T(w)$

Como T es un \mathcal{N}_l^k árbol, todo vértice distinto de w cumple que $\delta_T(v) \leq k$. Por otro lado, puesto que $w \notin W(T)$, entonces $|N_T(v) \cap W(T)| = \delta_T(v) - 1 \leq k - 1$.

Caso 2) v no pertenece a $N_T(w)$

Como T es un \mathcal{N}_l^k árbol débil, todo vértice en $V(T) \setminus N[w]$ cumple que $\delta_T(w) \leq k - 1$. Por lo que $|N_T(v) \cap W(T)| \leq k - 1$.

Por lo tanto, $W(T)$ es un conjunto k -independiente de T , lo que implica que $\alpha_k(T) \geq p - 1$.

Como T es un \mathcal{N}_l^k árbol con vértice especial w , $\delta_T(w) \geq l$ y $k < l$, entonces $V(T)$ no es un conjunto k -independiente de T . Por lo tanto, $\alpha_k(T) \leq p - 1$. Así, $W(T)$ es un $\alpha_k(T)$ -conjunto.

- $W(T)$ es el único $\alpha_k(T)$ -conjunto.

Demostremos esto por contradicción. Supongamos que existe S un $\alpha_k(T)$ -conjunto distinto de $W(T)$. Como S es un $\alpha_k(T)$ -conjunto, entonces $|S| = p - 1$ y dado que es distinto de $W(T)$, se tiene que $V(T) \setminus S = \{v\}$ y $v \neq w$. Como $\delta_T(w) \geq l$, $w \in S$ y $k < l$, entonces $|N(w) \cap S| \geq l - 1 \geq k$, lo que implica que S no es un conjunto k -independiente de T , lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $W(T)$ es el único $\alpha_k(T)$ -conjunto.

Hipótesis de inducción.

Supongamos que si $n \geq 2$ y T' un árbol que puede ser construido a partir de una serie de a lo más $n - 1$ operaciones, entonces $W(T')$ es el único $\alpha_k(T')$ -conjunto y el único $\gamma_l(T')$ -conjunto de T' .

Paso inductivo.

Sean $T = T_n$, $T' = T_{n-1}$, T_0 el \mathcal{N}_l^k árbol débil (o débil exacto) con vértice especial w de grado al menos l (o grado $l - 1$), tal que T_n se obtiene de T_{n-1} y T_0 al unir w a un vértice

de T' , donde

$$W(T) = W(T') \cup (V(T_0) \setminus \{w\}).$$

Como T' es un árbol que puede ser construido a partir de una serie de a lo más $n - 1$ operaciones, se deduce de la hipótesis de inducción que $W(T')$ es el único $\alpha_k(T')$ -conjunto y el único $\gamma_l(T')$ -conjunto, entonces tenemos dos casos:

Caso 1) T se obtiene de T' con la operación \mathcal{T}_1 .

- Por demostrar que, $W(T)$ es un $\alpha_k(T)$ -conjunto.
Por la observación 3.3.2, todo conjunto k -independiente de T' le podemos agregar el conjunto $V(T_0) \setminus \{w\}$ para obtener un conjunto k -independiente de T . Como $W(T')$ es un conjunto k -independiente de T' , más aún $|W(T')| = \alpha_k(T')$, tenemos que $W(T)$ es un conjunto k -independiente de T , lo que implica que

$$\alpha_k(T) \geq \alpha_k(T') + (|V(T_0)| - 1).$$

Por el lema 3.3.4 (parte 2) tenemos:

$$\alpha_k(T) \leq \alpha_k(T') + (|V(T_0)| - 1),$$

por lo que $W(T)$ es un $\alpha_k(T)$ -conjunto (por que $|W(T)| = \alpha_k(T') + (|V(T_0)| - 1)$).

- Por demostrar que $W(T)$ es un $\gamma_l(T)$ -conjunto.
Sea x en $V(T) \setminus W(T)$, tenemos dos casos sobre x :

Caso a) $x \in V(T') \setminus W(T')$.

Por hipótesis de inducción $W(T')$ es l -absorbente en T' , por lo que $|N_{T'}(x) \cap W(T')| \geq l$. Por construcción $W(T') \subseteq W(T)$ y $N_{T'}(x) \subseteq N_T(x)$ lo que implica $|N_{T'}(x) \cap W(T')| \leq |N_T(x) \cap W(T)|$. Por lo tanto, $|N_T(x) \cap W(T)| \geq l$

Caso b) $x = w$.

Por elección de T_0 , $\delta_{T_0}(w) \geq l$, luego por definición $V(T_0) \setminus \{w\} \subseteq W(T)$, por lo que $|N_T(w) \cap W(T)| \geq l$.

Por lo tanto, el conjunto $W(T') \cup (V(T_0) \setminus \{w\})$ es l -absorbente en T , lo que implica que

$$\gamma_l(T) \leq \gamma_l(T') + (|V(T_0)| - 1).$$

Por el lema 3.3.4 (parte 1) tenemos que

$$\gamma_l(T) \geq \gamma_l(T') + (|V(T_0)| - 1),$$

por lo que, $W(T)$ es un $\gamma_l(T)$ -conjunto (por que $|W(T)| = \gamma_l(T') + (|V(T_0)| - 1)$).

- Por demostrar que $W(T)$ es el único $\alpha_k(T)$ -conjunto de T .

Para demostrar que $W(T)$ es el único $\alpha_k(T)$ -conjunto de T primero mostraremos que todo $\alpha_k(T)$ -conjunto debe contener a $V(T_0) \setminus \{w\}$ y que si S es un $\alpha_k(T)$ -conjunto y $S' = V(T') \cap S$, entonces $S' = W(T')$.

Afirmación 3.3.1. $V(T_0) \setminus \{w\}$ esta contenido en todo $\alpha_k(T)$ -conjunto.

Demostración. Demostraremos por contradicción que todo $\alpha_k(T)$ -conjunto debe contener a $V(T_0) \setminus \{w\}$. Sea S un $\alpha_k(T)$ -conjunto distinto a $W(T)$. Tenemos dos casos sobre w . Solo recordemos que $\delta_{T_0}(x) = \delta_T(x)$ si x pertenece a $V(T_0)$ y $x \neq w$ y que T_0 es un \mathcal{N}_l^k árbol débil.

Caso a) w pertenece a S .

Por construcción, $k < l \leq \delta_{T_0}(w) < \delta_T(w)$. Como S es un $\alpha_k(T)$ -conjunto, entonces existen al menos z_1 y z_2 en $N_{T_0}(w)$ tales que $z_1 \notin S$ y $z_2 \notin S$. Por otro lado, como T_0 es un \mathcal{N}_l^k árbol débil, tenemos que $\delta_{T_0}(z_i) < k$ ó $\delta_{T_0 - \{w\}}(z_i) < k$, por lo que $(S \setminus \{w\}) \cup \{z_1, z_2\}$ es un conjunto k -independiente con más elementos que S , esto es una contradicción ya que S es un $\alpha_k(T)$ -conjunto. Este caso no es posible.

Caso b) w no pertenece a S .

En este caso existe z en $V(T_0) \setminus \{w\}$ tal que $z \notin S$ (por que $V(T_0) \setminus \{w\} \not\subseteq S$). Hay dos casos sobre z .

Caso b. 1) z pertenece a $N_{T_0}(w)$.

Como $\delta_{T_0}(z) \leq k$, tenemos que $|N_T(z) \cap S| \leq k$. Dado que $w \notin S$, entonces $|N_T(z) \cap S| < k$, por lo que $S \cup \{z\}$ es un conjunto k -independiente con más elementos que S , esto es una contradicción ya que S es un $\alpha_k(T)$ -conjunto. Este caso no es posible.

Caso b. 2) z no pertenece a $N_{T_0}(w)$.

En este caso como T_0 es un \mathcal{N}_l^k árbol débil, entonces $|N_T(z) \cap S| < k$. Por lo que, $S \cup \{z\}$ es un conjunto k -independiente con más elementos que S , esto es una contradicción ya que S es un $\alpha_k(T)$ -conjunto. Este caso no es posible.

Como suponer que existe un $\alpha_k(T)$ -conjunto que no contiene a $V(T_0) \setminus \{w\}$ nos lleva a contradicción, concluimos que todo $\alpha_k(T)$ -conjunto debe contener a $V(T_0) \setminus \{w\}$.

□

Ahora demostraremos que $W(T')$ es el único $\alpha_k(T')$ -conjunto de T' para concluir que $W(T)$ es el único $\alpha_k(T)$ -conjunto de T .

Afirmación 3.3.2. *Si S es un $\alpha_k(T)$ -conjunto y $S' = V(T') \cap S$, entonces $S' = W(T')$.*

Demostración. Demostraremos que si S es un $\alpha_k(T)$ -conjunto y $S' = V(T') \cap S$, entonces $S' = W(T')$.

Por la afirmación anterior $V(T_0) \setminus \{w\} \subseteq S$, por lo que $S = V(T_0) \setminus \{w\} \cup S'$. Con el fin de llegar a una contradicción supondremos que $S' \neq W(T')$. Como $W(T')$ es el único $\alpha_k(T')$ -conjunto y S es un conjunto k -independiente de T' , entonces S' no es un $\alpha_k(T')$ -conjunto. Por lo tanto, $W(T') \cup (V(T_0) \setminus \{w\})$ es un $\alpha_k(T)$ -conjunto con más elementos que S , lo cual es una contradicción pues S es un $\alpha_k(T)$ -conjunto. Suponer que $S' \neq W(T')$ nos lleva a contradicción. Por lo tanto, $S' = W(T')$.

□

Sea S un $\alpha_k(T)$ -conjunto, tenemos que $S = (S \cap V(T')) \cup (S \cap V(T_0))$. Pero por la afirmación 3.3.1, $S \cap V(T_0) = V(T_0) \setminus \{w\}$. La afirmación 3.3.2, implica que $S \cap V(T') = W(T')$. Por lo tanto $S = W(T') \cup (V(T_0) \setminus \{w\})$, es decir $S = W(T)$, lo que implica que $W(T)$ es el único $\alpha_k(T)$ -conjunto.

- Por demostrar que $W(T)$ es el único $\gamma_l(T)$ -conjunto de T .
Lo haremos por contradicción, supongamos que $W(T)$ no es el único $\gamma_l(T)$ -conjunto, entonces existe S un $\gamma_l(T)$ -conjunto distinto a $W(T)$.

Afirmación 3.3.3. $w \in S$.

Supongamos que $w \notin S$ y consideremos x en $V(T') \setminus S$, como $|N_{T'}(x) \cap S'| = |N_{T'}(x) \cap S| \geq l$ (por que S es l -absorbente en T), entonces $S \setminus (V(T_0) \setminus \{w\})$ es un $\gamma_l(T')$ -conjunto distinto de $W(T')$, lo cual es una contradicción ya que $W(T')$ es único en T' . Por lo tanto, $w \in S$.

Afirmación 3.3.4. $V(T_0) \subseteq S$

Demostraremos esto por contradicción. Supongamos que existe un vértice v en $V(T_0) \setminus \{w\}$, tal que $v \notin S$. Como T_0 es un \mathcal{N}_l^k árbol, entonces $\delta_{T_0}(v) \leq k$, por construcción $\delta_T(v) \leq k < l$. Concluimos que $|N_T(v) \cap S| < l$, entonces S no es un conjunto l -absorbente, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $V(T_0) \subseteq S$.

Notemos que $|W(T)| + 1 = |W(T') \cup V(T_0)| > |S \cup V(T_0)| = |S|$, por lo que $S \cap V(T') \neq W(T')$. Sea v en $V(T')$, tal que $vw \in A(T)$. Observemos que v no está en S . Si $v \in S$, como $V(T_0) \subset S$ y $\delta_{T_0}(w) \geq l - 1$, entonces $S \setminus \{w\}$ en un

conjunto l -absorbente con menos vértices que S , lo cual es una contradicción.

Afirmación 3.3.5. *El vértice v en $V(T) \setminus S$, es tal que $|N_T(v) \cap (V(T') \cap S)| = l - 1$.*

Por contradicción, supongamos que no, entonces tenemos dos casos sobre v :

- $|N_T(v) \cap (V(T') \cap S)| < l - 1$. En este caso S no es un $\gamma_l(T)$ -conjunto, lo cual es una contradicción.
- $|N_T(v) \cap (V(T') \cap S)| > l - 1$.

Por construcción de T , todo vértice x en $V(T')$ distinto de v cumple que $|N_T(x) \cap (V(T') \cap S)| \geq l$. Dado que v cumple que $|N_T(v) \cap (V(T') \cap S)| > l - 1$, entonces $S \cap V(T')$ es un conjunto l -absorbente de cardinalidad menor a la de $W(T')$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto,

$$|N_T(v) \cap (V(T') \cap S)| = l - 1.$$

Como S es un $\gamma_l(T)$ -conjunto y el único vecino de T_0 que lo une con T' es w , entonces $S' = \{v\} \cup S \setminus \{w\}$ es un conjunto l -absorbente de T' y como $W(T')$ es el único conjunto l -absorbente de T' , se tiene que $S' \cap V(T') = W(T')$, por lo que $\delta_{T'[W(T')]}(v) = l - 1 \geq k$, lo que contradice que $W(T')$ es un $\alpha_k(T')$ -conjunto. Así, $W(T)$ es el único $\gamma_l(T)$ -conjunto.

Caso 2) T se obtiene de T' con la operación \mathcal{T}_2 .

La demostración procede de manera análoga al caso anterior.

- Por demostrar que, $W(T)$ es un $\alpha_k(T)$ -conjunto.
Por la observación 3.3.2, todo conjunto k -independiente de T' le podemos agregar el conjunto $V(T_0) \setminus \{w\}$ para obtener un conjunto k -independiente de T . Como $W(T')$ es un conjunto k -independiente de T' , más aún $|W(T')| = \alpha_k(T')$, tenemos que $W(T)$ es un conjunto k -independiente de T , lo que implica que

$$\alpha_k(T) \geq \alpha_k(T') + (|V(T_0)| - 1).$$

Por el lema 3.3.4 (parte 2) tenemos:

$$\alpha_k(T) \leq \alpha_k(T') + (|V(T_0)| - 1),$$

por lo que $W(T)$ es un $\alpha_k(T)$ -conjunto (por que $|W(T)| = \alpha_k(T') + (|V(T_0)| - 1)$).

- Por demostrar que $W(T)$ es un $\gamma_l(T)$ -conjunto.
Sea x en $V(T) \setminus W(T)$, tenemos dos casos sobre x :

Caso a) $x \in V(T') \setminus W(T')$.

Por hipótesis de inducción $W(T')$ es l -absorbente en T' , por lo que $|N_{T'}(x) \cap W(T')| \geq l$. Por construcción $W(T') \subseteq W(T)$ y $N_{T'}(x) \subseteq N_T(x)$ lo que implica $|N_{T'}(x) \cap W(T')| \leq |N_T(x) \cap W(T)|$. Por lo tanto, $|N_T(x) \cap W(T)| \geq l$

Caso b) $x = w$.

Por elección de T_0 , $|N_{T_0}(w) \cup \{v\}| = l$, luego por definición $(V(T_0) \setminus \{w\}) \cup \{v\} \subseteq W(T)$, por lo que $|N_T(w) \cap W(T)| \geq l$.

Por lo tanto, el conjunto $W(T') \cup (V(T_0) \setminus \{w\})$ es l -absorbente en T , lo que implica que

$$\gamma_l(T) \leq \gamma_l(T') + (|V(T_0)| - 1).$$

Por el lema 3.3.4 (parte 1) tenemos que

$$\gamma_l(T) \geq \gamma_l(T') + (|V(T_0)| - 1),$$

por lo que, $W(T)$ es un $\gamma_l(T)$ -conjunto (por que $|W(T)| = |\gamma_l(T') + (|V(T_0)| - 1)|$).

Como en particular T_0 es un \mathcal{N}_l^k árbol débil, T tiene un único $\gamma(T)$ -conjunto y un único $\alpha_k(T)$ -conjunto.

Por lo tanto, $W(T)$ es el único $\gamma(T)$ -conjunto y el único $\alpha_k(T)$ -conjunto de T .

□

Teorema 3.3.4. *Si G es una gráfica, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, S un subconjunto de $V(G)$ k -independiente y se cumple que $k|S| - |A(G[S])|$ es máximo, entonces S es un conjunto k -absorbente de G .*

Demostración. Sean k un entero mayor que cero y S un subconjunto de $V(G)$ k -independiente tal que $k|S| - |A(G[S])|$ es máximo. Haremos la demostración por contradicción, supongamos que S no es un conjunto k -absorbente de G , entonces existe un vértice v en $V(G) \setminus S$, tal que $|N_G(v) \cap S| < k$, definimos $B = N_G(v) \cap S$ y $A = \{b \in B \mid \delta_{G[S]}(b) = k - 1\}$. Si A es vacío, entonces $S \cup \{v\}$ es un conjunto k -independiente. Analicemos el número $k|S \cup \{v\}| - |A(G[S \cup \{v\}])|$; como $|N_G(v) \cap S| < k$, entonces $A(G[S \cup \{v\}])$ tiene a lo sumo $k - 1$ aristas más que $A(G[S])$, lo que implica que $|A(G[S])| \geq |A(G[S \cup \{v\}])| - (k - 1)$, es decir, $|A(G[S])| + (k - 1) \geq |A(G[S \cup \{v\}])|$. Al multiplicar por -1 esta última desigualdad obtenemos,

$$-|A(G[S])| - (k - 1) \leq -|A(G[S \cup \{v\}])|.$$

Por otro lado, $k|S| < k|S| + k = k|S \cup \{v\}|$. Así, de lo anterior obtenemos

$$k|S| + k - |A(G[S])| - (k - 1) \leq k|S \cup \{v\}| - |A(G[S \cup \{v\}])|.$$

Por lo tanto, como

$$k|S| - |A(G[S])| < k|S| + k - |A(G[S])| - (k - 1),$$

entonces

$$k|S| - |A(G[S])| < k|S \cup \{v\}| - |A(G[S \cup \{v\}])|,$$

lo cual no es posible ya que $k|S| - |A(G[S])|$ es máximo, por lo tanto, $A \neq \emptyset$.

Sean I un subconjunto independiente máximo en $G[A]$ y $C = (S - I) \cup \{v\}$. Tenemos que $\emptyset \subseteq I \subseteq A \subseteq B \subseteq S$ y $\emptyset \subseteq A \setminus I \subseteq B \setminus I \subseteq C$. Demostraremos que C es un conjunto k -independiente, mostrando que los grados de cada vértice en C son menores a k . Como $C = \{v\} \cup (S \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \setminus I)$, tenemos cuatro casos.

Sea x en C

Caso1) $x = v$.

Como $|N_G(v) \cap S| < k$ y $B = N_G(v) \cap S$, entonces $\delta_{G[C]}(v) \leq |B| < k$.

Caso2) x en $S \setminus B$.

Como S es k -independiente, entonces $\delta_{G[C]}(x) < k$. Por otro lado, en este caso x no es adyacente a v , por lo que $\delta_{G[C]}(x) \leq \delta_{G[S]}(x)$. Por lo tanto, $\delta_{G[C]}(x) < k$.

Caso3) x en $B \setminus A$.

En este caso, por definición de A , x tiene grado a lo más $k - 2$ en $G[S]$, por lo tanto $\delta_{G[C]}(x) \leq \delta_{G[S \cup \{v\}]}(x) \leq \delta_{G[S]}(x) + 1 \leq k - 2 + 1 < k$.

Caso4) x en $A \setminus I$.

Como I es independiente máximo en A , x tiene al menos un vecino en I , entonces $\delta_{G[C]}(x) \leq \delta_{G[S \cup \{v\}]}(x) - 1 = k - 1$.

Por otro lado, de la definición de C tenemos que $|C| = |S| - |I| + 1$ y que

$$|A(G[C])| = |A(G[S])| - \underbrace{(k-1)|I|}_{\text{Porque } I \text{ solo tiene vértices de grado } k-1} + \underbrace{|B| - |I|}_{\text{Porque } v \text{ es adyacente a todo vértice de } B \text{ pero le quitamos } I} = |A(G[S])| - k|I| + |B|.$$

Por lo tanto, C es un conjunto k -independiente y cumple que $k|C| - |A(G[C])| =$

$$k(|S| - |I| + 1) - (|A(G[S])| - k|I| + |B|) = k|S| - k|I| + k - |A(G[S])| + k|I| - |B| =$$

$$k|S| - |A(G[S])| + k - |B| \underset{\text{Porque } |B| < k}{\geq} k|S| - |A(G[S])| + 1 > k|S| - |A(G[S])|,$$

lo cual es una contradicción, porque $k|S| - |A(G[S])|$ es máximo. Por lo tanto, S es un conjunto k -absorbente. \square

Corolario 3.3.2. Si G es una gráfica, entonces $\gamma_k(G) \leq \alpha_k(G)$.

Demostración. Sea S un conjunto k -independiente de G tal que $k|S| - |A(G[S])|$ es máximo. Por el teorema anterior S es un conjunto k -absorbente, por definición de α_k y γ_k :

$$\gamma_k(G) \leq |S| \leq \alpha_k(G).$$

□

El siguiente corolario es motivado por el corolario 3.3.2 y el lema 3.3.3.

Corolario 3.3.3. *Si D es una digráfica simétrica y k y l son números enteros con $1 \leq l \leq k \leq \Delta(D)$, entonces $\gamma_k(D) \leq \alpha_k(D)$.*

Demostración. Sean D una digráfica simétrica, k y l números enteros, con $1 \leq l \leq k \leq \Delta(D)$. Para la gráfica $UG(D) = G$ se sigue del corolario 3.3.2 que $\gamma_k(G) \leq \alpha_k(G)$. Por el lema 3.3.3, $\gamma_k(G) = \gamma_k(D)$ y $\alpha_k(G) = \alpha_k(D)$. Por lo tanto, $\gamma_k(D) = \gamma_k(G) \leq \alpha_k(G) = \alpha_k(D)$. □

Cuando $l = k$, con $1 \leq k \leq \Delta(G)$ y la gráfica G tiene un (k, l) -núcleo, por el lema 3.2.1, para cada número entero l' tal que $l' < l$, G tiene un (k, l') -núcleo. Para $l > k$, un subconjunto de D que sea k -independiente y l -absorbente puede no existir. Por ejemplo, las gráficas K_3 y K_4 no tienen subconjuntos de vértices que sean 1-independientes y 2-absorbentes.

Teorema 3.3.5. *Si D es una digráfica simétrica y k y l son enteros positivos, con $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$, entonces D es (k, l) -núcleo exterior perfecta.*

Demostración. Sean D una gráfica simétrica, k y l enteros positivos, con $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$. Consideremos $UG(D)$ la gráfica subyacente de D . Por el teorema 3.3.4 existe un conjunto S , que es k -absorbente y k -independiente en $UG(D)$. Como todas las flechas de D son simétricas, entonces el conjunto S es k -independiente exterior de D y k -absorbente exterior de D . Por el lema 3.2.1, S es un (k, l) -núcleo exterior. Como las subdigráficas inducidas de D son simétricas, entonces D es (k, l) -núcleo exterior perfecta. □

Corolario 3.3.4. *Sean D una digráfica completa y k y l enteros positivos menores que $\Delta^+(D)$. D es (k, l) -núcleo exterior perfecta si y solo si $l \leq k$.*

Demostración. Sean D una digráfica completa y k y l dos enteros positivos menores que $\Delta^+(D)$.

⇐) Como D es completa, D es simétrica. Dado que $l \leq k$, por el teorema 3.3.5, D tiene un (k, l) -núcleo exterior. Ya que toda subdigráfica inducida de D es simétrica, entonces D es (k, l) -núcleo exterior perfecta.

⇒) Demostraremos por contradicción que si D es (k, l) -núcleo exterior perfecta, entonces $l \leq k$, es decir, supongamos que D es (k, l) -núcleo exterior perfecta y que $l > k$. Observemos que como D es una digráfica completa, cualquier subconjunto k -independiente exterior de D tiene un número de vértices menor o igual que k . Como D es (k, l) -núcleo exterior perfecta, D tiene un (k, l) -núcleo exterior, digamos S . Si $|S| = |V(D)|$, entonces $l > k > \Delta^+(S) = \Delta^+(D)$, lo cual es una contradicción.

Por otro lado, si $|S| < |V(D)|$, entonces existe x en $V(D) \setminus S$, tal que $|N_D^+(x) \cap S| \leq |S|$ y $|S| \leq k < l$, lo que implica que S no es un conjunto l -absorbente exterior, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $l \leq k$. \square

Como para $l > k$ existe una digráfica simétrica que no tiene un (k, l) -núcleo exterior, una pregunta interesantante sería ¿qué clase de digráficas simétricas tienen (k, l) -núcleo exterior si $k < l$? A continuación daremos una caracterización de una clase especial de las digráficas simétricas tienen (k, l) -núcleo exterior si $k < l$.

Teorema 3.3.6. *Sean T un árbol de orden p y k y l dos enteros positivos, con $1 \leq k < l \leq \Delta(T)$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $\gamma_l(T) = \alpha_k(T)$,
2. $T \in \mathcal{A}_l^k$,
3. T tiene un único $\alpha_k(T)$ -conjunto, que también es un $\gamma_l(T)$ -conjunto.

Demostración. Para demostrar el teorema tomaremos el siguiente camino: primero (1) implica (2), después (2) implica (3) y por último (3) implica (1).

- Probaremos que 1 implica 2; es decir, que si $\gamma_l(T) = \alpha_k(T)$, entonces $T \in \mathcal{A}_l^k$.

Sea $\{l, k\}$ un subconjunto de \mathbb{N}^+ con $1 \leq k < l$ y T un árbol tal que $\gamma_l(T) = \alpha_k(T)$. Como $\gamma_l(T) = \alpha_k(T)$ y $1 \leq k < l \leq \Delta(T)$ podemos estar seguros de que el conjunto:

$$B(T) = \{x \in V(T) \mid \delta_T(x) \geq l\}$$

es no vacío. Para llegar al resultado procederemos por inducción sobre el número de vértices de $B(T)$.

Base de inducción.

Como $|B(T)| = 1$, consideremos v en $B(T)$. Dado que v es el único vértice de T que cumple $\delta_T(v) \geq l$, se tiene que $V(T) \setminus \{v\}$ es el único $\gamma_l(T)$ -conjunto, lo que implica que $\gamma_l(T) = p - 1$. Como $\gamma_l(T) = \alpha_k(T)$, entonces todo vértice distinto de v tiene grado a lo más k . Por lo tanto, T es un \mathcal{N}_l^k árbol débil con vértice especial v , es decir, $T \in \mathcal{A}_l^k$.

Hipótesis de inducción.

Supongamos que para todo árbol T' tal que $|B(T')| \leq |B(T)|$ y $\gamma_l(T') = \alpha_k(T')$, cumple que $T' \in \mathcal{A}_l^k$.

Paso inductivo.

Sean T un árbol, tal que $\gamma_l(T) = \alpha_k(T)$, $|B(T)| \geq 2$, $\{r, x\}$ un subconjunto de $V(T)$ tal que $d_T(r, x) = \text{diám}(T)$ y P una rx -trayectoria tal que $\text{diám}(T) = l(P)$. Notemos que $\delta_T(r) = 1$ y $\delta_T(x) = 1$, la demostración de esto se encuentra dentro de la prueba del teorema 3.3.2.

Consideremos a w en $B(T)$ tal que $d(r, w) = \max_{v \in B(T)} d(r, v)$. Notemos que como $\delta_T(w) \geq l$ y $l > 1$, entonces $r \neq w$.

Veamos a T como un árbol con raíz r y definamos las siguientes subgráficas:

$$T_w = T[\{v \in V(T) | w \text{ pertenece a la } rv\text{-trayectoria en } T\}]$$

$$\text{y } T' = T - V(T_w).$$

En el teorema 3.3.2, mostramos que T_w y T' definidos de esta manera, son árboles. Además, por construcción T_w es un \mathcal{N}_l^{l-1} árbol exacto con vértice especial w . Sea u el vértice anterior a w en la rw -trayectoria

Mostraremos que $B(T')$ no es vacío, lo haremos por contradicción. Supongamos que $B(T') = \emptyset$, dado que $|B(T)| \geq 2$ y los únicos vértices que cambiaron de grado son u y w en T' y T_w , respectivamente, entonces $\delta_{T'}(w) = l$, $\delta_{T'}(u) = l$ y $B(T) = \{u, w\}$. Como $k < l$, tenemos que w y u no pueden pertenecer al mismo tiempo a un $\alpha_k(T)$ -conjunto, lo que implica que $\alpha_k(T) < p - 1$. Por otro lado, $V(T) \setminus \{w\}$ es un $\gamma_l(T)$ -conjunto, así $\gamma_l(T) = |V(T)| - 1$ (porque $B(T) = \{u, w\}$ y w es adyacente a u). Por lo tanto, $\gamma_l(T) \neq \alpha_k(T)$, lo cual no es posible. Concluimos que $B(T') \neq \emptyset$.

Puesto que T' es subgráfica de T y $w \notin V(T')$, entonces $|B(T')| < |B(T)|$. Para poder aplicar la hipótesis de inducción al árbol T' necesitamos demostrar que $\gamma_l(T') = \alpha_k(T')$, que es lo que haremos a continuación. Por el lema 3.3.4, sabemos que $\gamma_l(T) = \gamma_l(T') + (|V(T_w)| - 1)$. Por otro lado, sea S un $\alpha_k(T)$ -conjunto. Notemos que $S \cap V(T')$ y $S \cap V(T_w)$ son conjuntos k -independientes, porque son subconjuntos de S . Puesto que $\delta_{T_w}(w) \geq k$, se tiene que $|S \cap V(T_w)| \leq (|V(T_w)| - 1)$. Concluimos que

$$\alpha_k(T) = |S| = |S \cap V(T')| + |S \cap V(T_w)| \leq \alpha_k(T') + (|V(T_w)| - 1).$$

Supongamos que $\alpha_k(T) < \alpha_k(T') + (|V(T_w)| - 1)$, entonces

$$\gamma_l(T') + |V(T_w)| - 1 = \gamma_l(T) = \alpha_k(T) < \alpha_k(T') + (|V(T_w)| - 1),$$

lo que implica que

$$\gamma_l(T') + (|V(T_w)| - 1) < \alpha_k(T') + (|V(T_w)| - 1)$$

lo que lleva a que $\gamma_l(T') < \alpha_k(T')$, que es una contradicción al teorema 3.3.2. Por lo tanto, $\alpha_k(T) = \alpha_k(T') + |V(T_w)| - 1$.

Puesto que $\gamma_l(T) = \gamma_l(T') + |V(T_w)| - 1$, $\alpha_k(T) = \alpha_k(T') + |V(T_w)| - 1$ y por hipótesis $\gamma_l(T) = \alpha_k(T)$, tenemos que $\gamma_l(T') = \alpha_k(T')$. Por lo tanto, aplicando la hipótesis inductiva a T' , tenemos que $T' \in \mathcal{A}_l^k$.

Ahora demostraremos que T_w es un \mathcal{N}_l^k árbol débil ó débil exacto, dependiendo de $\delta_{T_w}(w)$.

Recordemos que $|S \cap V(T_w)| \leq (|V(T_w)| - 1)$ y $|S \cap V(T')| \leq \alpha_k(T')$ (anteriormente vimos que $S \cap V(T')$ es un conjunto k -independiente de T'). Como $\alpha_k(T) = \alpha_k(T') + |V(T_w)| - 1$ (lo cual acabamos de demostrar), pero $\alpha_k(T) = |S| = |S \cap V(T')| + |S \cap V(T_w)|$, entonces $|S \cap V(T')| + |S \cap V(T_w)| = \alpha_k(T') + |V(T_w)| - 1$.

Ahora, afirmamos que $|S \cap V(T_w)| = (|V(T_w)| - 1)$, por contradicción supongamos que $|S \cap V(T_w)| < (|V(T_w)| - 1)$, así

$$\alpha_k(T) = |S \cap V(T')| + |S \cap V(T_w)| \leq \alpha_k(T') + |S \cap V(T_w)| < \alpha_k(T') + |V(T_w)| - 1 = \alpha_k(T),$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $|V(T_w)| - 1 = |S \cap V(T_w)|$.

Dado que $S \cap V(T_w)$ es un conjunto k -independiente en T_w y $\delta_{T_w}(w) \geq k$, entonces para todo $x \in V(T_w) \setminus N[w]$ se tiene que $\delta_{T_w}(x) \leq k - 1$.

Afirmamos que para todo x en $N_T(w) \cap V(T_w)$, se tiene que $\delta_{T_w}(x) \leq k$. Supongamos por contradicción que existe x en $N_{T_w}(w)$ tal que $\delta_{T_w}(x) > k$. Como $|V(T_w)| - 1 = |S \cap V(T_w)|$, entonces $x \notin S \cap V(T_w)$ (porque $S \cap V(T_w)$ es k -independiente en T_w) y $w \in S$. Puesto que $w \in S$, tenemos que $|N_T(w) \cap S| \leq k - 1$ porque S es un conjunto k -independiente en T . Recordemos que $|N_T(w)| \geq l$ (porque $w \in B(T)$), $l > k$ y u es el vértice anterior a w en la rw -trayectoria. Así

$$k < k + 1 \leq l \leq |N_T(w)| = |N_T(w) \cap S| + |\{u, x\}| \leq k - 1 + 2 = k + 1.$$

Por lo tanto, $l = k + 1$, lo que implica que $\delta_T(x) \geq l$ (porque $\delta_{T_w}(x) > k$) por lo que $x \in B(T)$. Ya que $d(r, x) > d(r, w)$ y $x \in B(T)$, esto es una contradicción por la elección de w . Concluimos que para todo y en $N_T(w) \cap V(T_w)$, se tiene que $\delta_{T_w}(y) \leq k$.

Así, hemos demostrado que T_w es un \mathcal{N}_l^k árbol débil (además es exacto si $\delta_{T_w}(w) = l - 1$) con vértice especial w de grado al menos $l - 1$.

Como $T' \in \mathcal{A}_l^k$ y T_w es un \mathcal{N}_l^k árbol débil, demostraremos que T se obtuvo de T' y T_w con las operaciones \mathcal{T}_1 o \mathcal{T}_2 :

- Caso 1) Si $\delta_T(w) \geq l$, entonces T_w es un \mathcal{N}_l^k árbol débil con vértice especial w , así que T es obtenido de T' y T_w usando la operación \mathcal{T}_1 .
- Caso 2) Si $\delta_T(w) = l - 1$, entonces T_w es un \mathcal{N}_l^k árbol débil exacto con vértice especial w , así que T es obtenido de T' y T_w usando la operación \mathcal{T}_2 .

Por lo tanto, $T \in \mathcal{A}_l^k$.

- Ahora demostraremos que 2 implica 3; es decir, que si $T \in \mathcal{A}_l^k$, entonces T tiene un único $\alpha_k(T)$ -conjunto, que también es un $\gamma_l(T)$ -conjunto.

Si $T \in \mathcal{A}_l^k$, entonces por el teorema 3.3.3, $W(T)$ es el único $\alpha_k(T)$ -conjunto, que también es un $\gamma_l(T)$ -conjunto.

- Por último demostraremos que 3 implica 1; es decir, que si T tiene un único $\alpha_k(T)$ -conjunto, que también es un $\gamma_l(T)$ -conjunto, entonces $\gamma_l(T) = \alpha_k(T)$.

Sea S el único $\alpha_k(T)$ -conjunto, que también es un $\gamma_l(T)$ -conjunto. Por lo tanto, $\gamma_l(T) = |S| = \alpha_k(T)$.

□

Corolario 3.3.5. Sean T un árbol y $\{k, l\}$ un subconjunto de \mathbb{N} tal que $1 \leq k < l \leq \Delta(T)$. T tiene un conjunto que es k -independiente y l -absorbente si y solo si $T \in \mathcal{A}_l^k$.

Demostración. Sean T un árbol y $\{k, l\}$ un subconjunto de \mathbb{N} tal que $1 \leq k < l \leq \Delta(T)$

(\Rightarrow) Sea S un subconjunto de $V(T)$ que es k -independiente y l -absorbente, por definición tenemos que $|S| \leq \alpha_k(T)$ y $\gamma_l(T) \leq |S|$. Por lo que,

$$\gamma_l(T) \leq \alpha_k(T) \quad (3.2)$$

Por otro lado como $2 \leq k + 1$, por el teorema 3.3.2 se tiene que $\alpha_{k+1} - 1(T) \leq \gamma_l(T)$, es decir,

$$\alpha_k(T) \leq \gamma_{k+1}(T) \quad (3.3)$$

Dado que $k + 1 \leq l$ se sigue del corolario 3.3.1(4) que

$$\gamma_{k+1}(T) \leq \gamma_k(T) \quad (3.4)$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (3.2), (3.3) y (3.4) se tiene que $\gamma_l(T) = \alpha_k(T)$. Por el teorema 3.3.6, se concluye que $T \in \mathcal{A}_l^k$.

(\Leftarrow) Se sigue de (2) implica (3) del teorema 3.3.6. □

Corolario 3.3.6. Sea T un árbol no trivial. Para cualquier $\{l, k\}$ subconjunto de \mathbb{N} , con $1 \leq l \leq \Delta(T)$ y $1 \leq k \leq \Delta(T)$, T tiene un conjunto que es k -independiente y l -absorbente si y solo si $T \in \mathcal{A}_{\Delta(T)}^1$.

Demostración. Sea T un árbol no trivial. Si $|V(T)| = 2$, como T tiene dos conjuntos que son $\alpha_1(T)$ -conjuntos y también $\gamma_{\Delta(T)}(T)$ -conjuntos, entonces tenemos que $|V(T)| \geq 3$ (ya que $\Delta(T) = 1$). Así, $\Delta(T) \geq 2$.

(\Leftarrow) Como $T \in \mathcal{A}_{\Delta(T)}^1$ y $1 < \Delta(T)$, entonces por el teorema 3.3.6 se tiene que T posee un único $\alpha_1(T)$ -conjunto el cual es un $\gamma_{\Delta(T)}(T)$ -conjunto, digamos S . Sean k y l en \mathbb{N} , tales que $1 \leq l \leq \Delta(T)$ y $1 \leq k \leq \Delta(T)$. Como S es 1-independiente y $1 \leq k$ entonces por corolario 3.3.1(1), se tiene que S es k -independiente.

Como S es $\Delta(T)$ -absorbente y $l \leq \Delta(T)$ entonces por corolario 3.3.1(3), se tiene que S es l -absorbente.

(\Rightarrow) De la hipótesis se sigue que en particular T tiene un conjunto que es 1-independiente y $\Delta(T)$ -absorbente. Como $1 < \Delta(T)$, entonces del corolario 3.3.5 se concluye que $T \in \mathcal{A}_1^{\Delta(T)}$. \square

El siguiente teorema nos da una familia de árboles dirigidos simétricos, a la que denotamos por \overleftrightarrow{T} , que admiten un (k, l) -núcleo exterior para $1 \leq k < l \leq \Delta(T)$.

Teorema 3.3.7. Sean \overleftrightarrow{T} un árbol simétrico y $\{k, l\} \subseteq \mathbb{N}$, con $1 \leq k < l \leq \Delta^+(\overleftrightarrow{T})$. \overleftrightarrow{T} tiene un único (k, l) -núcleo exterior si y solo si $\Delta(UG(\overleftrightarrow{T})) \leq k - 1$ ó $UG(\overleftrightarrow{T}) \in \mathcal{A}_l^k$.

Demostración. Sean \overleftrightarrow{T} un árbol simétrico, $T = UG(\overleftrightarrow{T})$ y $\{k, l\} \subseteq \mathbb{N}$ con $1 \leq k < l \leq \Delta^+(\overleftrightarrow{T})$.

Por el lema 3.3.3, \overleftrightarrow{T} tiene un único (k, l) -núcleo exterior si y solo si T tiene un único (k, l) -núcleo. Por el teorema 3.3.6, T tiene un único (k, l) -núcleo si y solo si $T \in \mathcal{A}_l^k$, como $T = UG(\overleftrightarrow{T})$, entonces $UG(\overleftrightarrow{T}) \in \mathcal{A}_l^k$. Por lo que T tiene un único (k, l) -núcleo si y solo si $T \in \mathcal{A}_l^k$. \square

Con este teorema concluimos la parte de digráficas simétricas. Siguiendo el desarrollo del capítulo 2 pondremos atención a las digráficas transitivas, con el siguiente teorema sabremos si este tipo de digráficas tienen un (k, l) -núcleo exterior.

Teorema 3.3.8. Si D es una digráfica transitiva y k y l son dos enteros positivos con $1 \leq l \leq k \leq \Delta(D)$, entonces D es una digráfica (k, l) -núcleo exterior perfecta.

Demostración. Primero veamos que si D es transitiva, entonces D tiene un k -núcleo exterior. Si D es fuertemente conexa, se sigue de la proposición 1.2.1 que D es completa; luego del corolario 3.3.4 concluimos que D tiene k -núcleo exterior. Así que suponemos a D no fuertemente conexa. La prueba se hará por inducción sobre el número de vértices de D .

Base de inducción.

Si D' tiene orden p , con $1 \leq p \leq 2$, en la sección 3.3, demostramos que D tiene un k -núcleo exterior.

Hipótesis de inducción.

Si D' es una digráfica transitiva, con orden $p < n$ y k y l enteros positivos con $1 \leq l \leq k \leq \Delta(D)$, entonces D' tiene un k -núcleo exterior.

Paso inductivo.

Sean D una digráfica transitiva y k y l dos enteros positivos con $1 \leq l \leq k \leq \Delta(D)$, y $p = n$. Por demostrar que D tiene un k -núcleo exterior.

Consideremos la digráfica de componentes fuertemente conexas, $SC(D)$, la cual es acíclica (por el lema 1.2.5). Luego por el lema 1.2.5, existe una componente C_1 en D tal que $\delta_{SC(D)}^-(C_1) = 0$. Ahora consideremos $D' = D[V(D) \setminus V(C_1)]$, como D' satisface las condiciones de la hipótesis de inducción, tenemos que D' tiene un (k, l) -núcleo exterior, digamos S' . Por otro lado, sabemos que C_1 es fuertemente conexa y transitiva, se sigue de la parte inicial de la demostración que C_1 es completa, lo cual implica que tiene un (k, l) -núcleo exterior, digamos S_C (corolario 3.3.4). A partir de esto tenemos dos casos:

Caso 1) Existe $x \in C_1$, tal que $|N_D^+(x) \cap S'| \geq k$.

Como C_1 es completa y D es transitiva, entonces S' es un k -núcleo exterior de D .

Caso 2) No existe $x \in C_1$, tal que $|N_D^+(x) \cap S'| \geq k$.

En este caso para todo x en C_1 se tiene que $|N_D^+(x) \cap S'| < k$. De lo anterior y como $S_C \subseteq V(C_1)$, concluimos que para todo x en S_C se tiene que $|N_D^+(x) \cap S'| < k$. Por otro lado, como $\delta_{SC(D)}^-(C_1) = 0$, entonces para todo x en $V(D')$ se cumple que $|N_D^+(x) \cap V(C_1)| = 0$. Como $S' \subseteq V(D')$ obtenemos que para todo x en S' se tiene que $|N_D^+(x) \cap S_C| < k$. Por último, como S' y S_C son conjuntos k -independientes exteriores, entonces el conjunto $S = S' \cup S_C$ es k -independiente exterior. Ahora como S' es un conjunto k -absorbente exterior de D' , S_C es un conjunto k -absorbente exterior de C_1 y $V(D) \setminus S = (V(C_1) \setminus S_C) \cup (V(D') \setminus S')$, entonces S es un conjunto k -absorbente exterior de D .

Por lo tanto, S es un k -núcleo exterior de D . Por el lema 3.3.1, D tiene un (k, l) -núcleo exterior y como toda subdigráfica inducida de D es transitiva, entonces D es (k, l) -núcleo exterior perfecta. \square

3.3.2. Ciclos y (k, l) -núcleos exteriores

En esta sección demostraremos que los teoremas 2.2.1 y 2.2.6 se generalizan a los (k, l) -núcleos exteriores.

Teorema 3.3.9. *Sean D una digráfica y k y l dos enteros positivos. Si D no tiene ciclos y $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$, entonces D es una digráfica (k, l) -núcleo exterior perfecta.*

Demostración. Sean D una digráfica sin ciclos y k y l dos enteros positivos, con $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$. Primero demostraremos por inducción sobre el orden de D , que D

tiene un k -núcleo exterior.

Base de inducción.

En la sección 3.3 demostramos que todas las digráficas sin ciclos con orden p , tal que $1 \leq p \leq 3$, tienen k -núcleo exterior.

Hipótesis de inducción.

Si D' es una digráfica sin ciclos, con orden n' , tal que $n' < n$, y k es un entero positivo con $1 \leq k \leq \Delta^+(D)$, entonces D' tiene un k -núcleo exterior.

Paso inductivo.

Sean D una digráfica acíclica con orden n y k un entero positivo con $1 \leq k \leq \Delta^+(D)$. Como D es acíclica, por el corolario 1.2.5, existe un vértice x tal que $\delta_D^-(x) = 0$. Definimos a $D' = D[V(D) \setminus \{x\}]$. Si $\Delta^+(D') < k$, como $N_D^-(x) = \emptyset$ y $k \leq \Delta^+(D)$, se sigue que $\delta_D^+(x) \geq k$, lo que implica que $V(D')$ es un k -núcleo exterior de D . Si $k \leq \Delta^+(D')$, como toda subdigráfica inducida de D es acíclica, entonces D' cumple las condiciones de la hipótesis de inducción, por lo tanto, D' tiene un k -núcleo exterior, digamos S' . S' puede k -absorber exteriormente al vértice x o no, por lo que tenemos dos casos:

Caso 1) $|N_D^+(x) \cap S'| \geq k$.

En este caso S' absorbe exteriormente a x . Por lo tanto, S' es un k -núcleo exterior de D .

Caso 2) $|N_D^+(x) \cap S'| < k$.

Como $N_D^-(x) = \emptyset$, entonces $S' \cup \{x\}$ es un conjunto k -independiente exterior y k -absorbente exterior de D .

Por lo tanto, D tiene un k -núcleo exterior.

Por el lema 3.3.1, si D tiene un k -núcleo exterior, entonces D tiene un (k, l) -núcleo exterior. Como toda subdigráfica inducida de D es acíclica, entonces D es (k, l) -núcleo exterior perfecta. □

En el capítulo 2, demostramos que si D es una digráfica en la cual todo ciclo tiene una flecha simétrica, entonces D es núcleo perfecta. Desafortunadamente esto no ocurre para los k -núcleos exteriores, el siguiente teorema nos dará una familia de digráficas, la cual no tiene k -núcleo exterior, a pesar de que cada ciclo tiene una flecha simétricas.

Teorema 3.3.10. *Para cada entero positivo k , con $k \geq 2$, existe una digráfica D tal que todo ciclo de D tiene al menos una flecha simétrica y no tiene un k -núcleo exterior.*

Demostración. Para $k \geq 2$ nos fijamos en la digráfica D de la figura 3.31, donde K_{k-1} es la digráfica completa de orden $k-1$, $V(D) = V(K_{k-1}) \cup \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y se tienen las siguientes relaciones:

- El vértice v_1 es un vecino interior y exterior de los vértices de K_{k-1} y las flechas (v_1, v_2) y (v_1, v_3) pertenecen a $F(D)$.
- Los vértices v_2 y v_3 son vecinos interiores de los vértices de K_{k-1} .
- El vértice v_4 es un vecino exterior de los vértices de K_{k-1} , v_2 y v_3 .

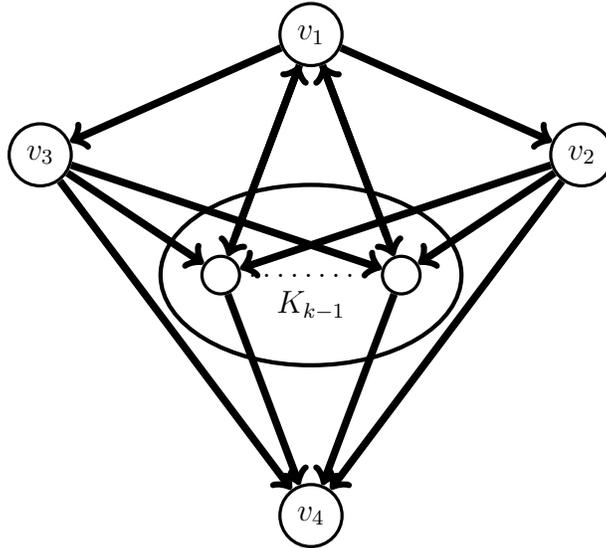


Figura 3.31: Una digráfica D tal que todo ciclo tiene una flecha simétrica

Primero observemos que todos los ciclos de D tienen al menos una flecha simétrica; como K_{k-1} es completa, entonces todo ciclo de D , con dos o más vértices en K_{k-1} , tiene al menos una flecha simétrica. Ahora supongamos que hay un ciclo que solo tiene un vértice en K_{k-1} , digamos x , los únicos ciclos de esta forma son: (v_1, v_2, x) y (v_1, v_3, x) , en los cuales está la flecha simétrica (v_1, x) . Además, la digráfica inducida por los vértices v_1, v_2, v_3 y v_4 es acíclica.

Demostraremos por contradicción que D no tiene un k -núcleo exterior. Supongamos que D tiene un k -núcleo exterior S . Como S debe ser un conjunto k -absorbente exterior, entonces v_4 y al menos $|V(K_{k-1})| - 1$ de los vértices de K_{k-1} están en S . Ahora tenemos dos casos, $V(K_{k-1}) \subseteq S$ ó $V(K_{k-1}) \not\subseteq S$:

Caso 1) $V(K_{k-1}) \subseteq S$.

Si v_1 pertenece a S , entonces el exgrado de cualquier vértice de la subdigráfica $D[K_{k-1} \cup \{v_1\}]$ es igual a k , por lo que S no sería un conjunto k -independiente exterior. Por lo tanto, v_1 no pertenece a S . Por otro lado, como

$$|N^+(v_2) \cap S| = |N^+(v_3) \cap S| = k,$$

entonces S k -absorbe exteriormente a los vértices v_2 y v_3 , así que v_2 y v_3 no pertenecen a S . Por lo tanto, como $v_1 \notin S$ y $|N^+(v_1) \cap S| < k$, entonces S no es un conjunto k -absorbente exterior, lo cual es una contradicción.

Caso 2) $V(K_{k-1}) \not\subseteq S$.

Como $\delta_D^+(v_2) = k$ y uno de sus vecinos no está en S , entonces v_2 pertenece a S , lo mismo sucede con v_3 . Como

$$|N^+(v_1) \cap S| \geq k,$$

entonces $v_1 \notin S$. Sea x el vértice en K_{k-1} , tal que $x \notin S$; como $\delta_D^+(x) = k$, para que S k -absorba exteriormente a x es necesario que v_1 pertenezca a S lo cual ya vimos que no puede suceder. Como $v_1 \notin S$, $x \notin S$ y $|N^+(x) \cap S| < k$, implica que S no es un conjunto k -absorbente exterior, lo cual es una contradicción.

En cualquiera de los dos casos llegamos a una contradicción, por lo que D no tiene un k -núcleo exterior. \square

Así como hay digráficas que tienen flechas simétricas en todos sus ciclos y no tienen k -núcleo exterior, también existe una familia de digráficas que tienen flechas simétricas en todos sus ciclos y tienen k -núcleo exterior, a saber las digráficas semicompletas, esto lo demostramos en el siguiente resultado.

Teorema 3.3.11. *Sean D una digráfica semicompleta. D es (k, l) -núcleo exterior perfecta para cualquier subconjunto $\{k, l\}$ de \mathbb{N} , tal que $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$, si y solo si todo ciclo en D tiene al menos una flecha simétrica.*

Demostración. Sean D una digráfica semicompleta.

(\Rightarrow) Por demostrar que si D es una digráfica (k, l) -núcleo exterior perfecta para cualquier subconjunto $\{k, l\}$ de \mathbb{N} , tal que $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$, entonces todo ciclo de D tiene al menos una flecha simétrica.

Como D es (k, l) -núcleo exterior perfecta para cualquier subconjunto $\{k, l\}$ de \mathbb{N} , tal que con $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$, en particular es 1-núcleo exterior perfecta o núcleo perfecta. Ya que D es semicompleta y núcleo perfecta, por el teorema 2.2.8, todo ciclo en D tiene al menos una flecha simétrica.

(\Leftarrow) Por demostrar que si todo ciclo en D tiene al menos una flecha simétrica, entonces D es (k, l) -núcleo exterior perfecta para cualquier subconjunto $\{k, l\}$ de \mathbb{N} , tal que $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$

Observemos que

- Como $k \leq \Delta^+(D)$, entonces $k + 1 \leq |V(D)|$.
- Por la definición de k -núcleo exterior, todo k -núcleo exterior tiene al menos k vértices.
- Si S' es un subconjunto de $V(D)$, entonces como $Asim(D[S'])$ es acíclica y $D[S']$ es semicompleta, tenemos que existe un vértice $x \in S'$ tal que $\delta_{D[S']}^+(x) = |S'| - 1$.

Si S es un k -núcleo exterior de D , como S es un subconjunto de $V(D)$, por la observación anterior dentro del conjunto S existe un vértice $x \in S$ tal que $\delta_{D[S]}^+ = |S| - 1 \geq k - 1$. Por otro lado, como S es un k -núcleo exterior de D para todo $y \in V(D) \setminus S$, se cumple que $|N_D^+(y)| \geq k$.

Ahora demostraremos que D tiene un k -núcleo exterior, esta prueba se hará por inducción sobre el número de vértices de D .

Base de inducción.

En la sección 3.3 demostramos que toda digráfica semicompleta D' , tal que todo ciclo de D' tiene una flecha simétrica, con orden $1 \leq p \leq 3$, tiene un k -núcleo exterior.

Hipótesis de inducción.

Si D' es una digráfica semicompleta de orden $n' < n$, tal que todo ciclo en D' tiene al menos una flecha simétrica, y k es un entero positivo tal que $1 \leq k \leq \Delta^+(D')$, entonces D' tiene un k -núcleo exterior.

Paso inductivo.

Sean D una digráfica semicompleta de orden n , tal que todo ciclo en D tiene al menos una flecha simétrica, x un vértice de ingrado cero en $Asim(D)$ y $D' = D[V(D) \setminus \{x\}]$. Como todo ciclo de D' tiene al menos una flecha simétrica, por hipótesis de inducción D' tiene un k -núcleo exterior, digamos S' . Por elección de x , tenemos que $\delta_D^+(x) = |V(D')|$, más aún $N_D^+(x) = V(D')$. Dado que $k \leq |S'|$, concluimos que S' k -absorbe exteriormente a x . Por lo tanto, S' es un k -núcleo exterior de D .

Este procedimiento se puede hacer para cada k en $\{1, \dots, \delta^+(D)\}$, por el lema 3.3.1, si D tiene un k -núcleo exterior, entonces D tiene un (k, l) -núcleo exterior, para cada $l \leq k$. Por lo tanto, D tiene (k, l) -núcleo exterior para cualquier $\{k, l\} \subseteq \mathbb{N}$. Como las subdigráficas inducidas de D son semicompletas y todos sus ciclos tienen al menos una flecha simétrica, entonces D es (k, l) -núcleo exterior perfecta. □

En el caso de los núcleos tenemos que si una digráfica no tiene ciclos de longitud impar, entonces la digráfica es núcleo perfecta; afortunadamente este resultado también se conserva para los (k, l) -núcleos exteriores, pero para demostrarlo haremos uso del siguiente teorema para digráficas bipartitas.

Primero veremos un ejemplo de como se construye un k -núcleo exterior en una digráfica bipartita. Sea $D = (V(D), F(D))$, donde $V(D) = X \cup Y$, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ y $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, ver figura 3.32.

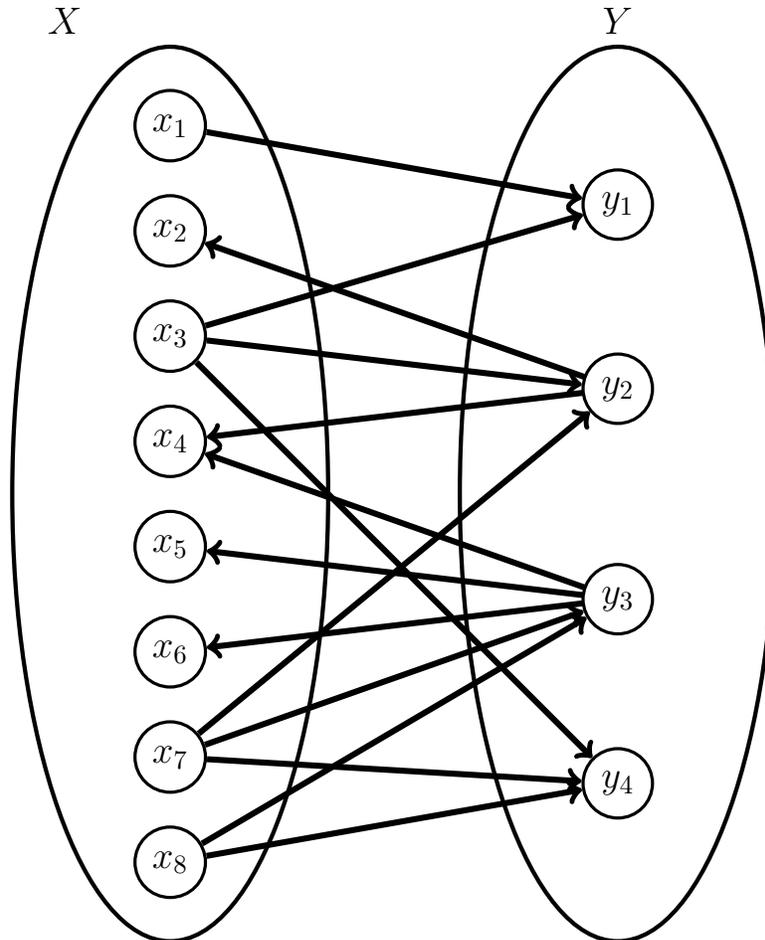


Figura 3.32: Digráfica bipartita D

Para este caso, encontraremos un 3-núcleo exterior, para ello iremos construimos conjuntos 3-independientes exteriores, y retiramos los vértices que estos conjuntos 3-absorben exteriormente:

$$X_1(0) = \{x \in X \mid |N_D^+(x) \cap Y| < 3\} = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_8\},$$

$$Y_1(0) = \{y \in Y \mid |N_D^+(y) \cap X| < 3\} = \{y_1, y_2, y_4\},$$

$$X_2(0) = \{x \in X \setminus X_1(0) \mid |N_D^+(x) \cap Y_1(0)| \geq 3\} = \{x_3\},$$

$$Y_2(0) = \left\{ y \in Y \setminus Y_1(0) \mid |N_D^+(y) \cap X_1(0)| \geq 3 \right\} = \{y_3\},$$

$$X_1(1) = \left\{ x \in X \setminus (X_1(0) \cup X_2(0)) \mid |N_D^+(x) \cap Y \setminus Y_2(0)| < 3 \right\} = \{x_7\},$$

$$Y_1(1) = \left\{ y \in Y \setminus (Y_1(0) \cup Y_2(0)) \mid |N_D^+(y) \cap X \setminus X_2(0)| < 3 \right\} = \emptyset,$$

$$X_2(1) = \left\{ x \in X \setminus (X_1(0) \cup X_2(0) \cup X_1(1)) \mid |N_D^+(x) \cap (Y_1(0) \cup Y_1(1))| \geq 3 \right\} = \emptyset,$$

$$Y_2(1) = \left\{ y \in Y \setminus (Y_1(0) \cup Y_2(0) \cup Y_1(1)) \mid |N_D^+(y) \cap (X_1(0) \cup X_1(1))| \geq 3 \right\} = \emptyset$$

Notemos que todos los vértices han quedado en algún conjunto. Afirmamos que $S = X_1(0) \cup Y_1(0) \cup X_1(1) = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, y_1, y_2, y_4\}$ es un 3-núcleo exterior de D .

- Por demostrar que S es un conjunto 3-absorbente exterior de D . Como $V(D) \setminus S = \{x_3, y_3\}$, entonces:
 - $|N_D^+(x_3) \cap S| = |\{y_1, y_2, y_4\}| = 3$ y
 - $|N_D^+(y_3) \cap S| = |\{x_4, x_5, x_6\}| = 3$.

Por lo tanto, S es un conjunto 3-absorbente exterior de D .

- Por demostrar que S es un conjunto 3-independiente exterior de D .
 - $|N_D^+(x_i) \cap S| \leq 2$, con i en $\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y
 - $|N_D^+(y_i) \cap S| \leq 2$, con i en $\{1, 2, 4\}$.

Por lo tanto, S es un conjunto 3-independiente exterior de D .

Concluimos que S es un k -núcleo exterior de D . Con esta idea demostramos el siguiente teorema.

Teorema 3.3.12. *Si D es una digráfica bipartita y k y l son enteros con $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$, entonces D es (k, l) -núcleo exterior perfecta.*

Demostración. Sean D una digráfica bipartita, X, Y las clases de $V(D)$, k y l dos enteros con $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$, definimos los siguientes conjuntos:

$$X_1(0) = \left\{ x \in X \mid |N_D^+(x) \cap Y| < k \right\},$$

$$\begin{aligned}
Y_1(0) &= \left\{ y \in Y \mid |N_D^+(y) \cap X| < k \right\}, \\
X_2(0) &= \left\{ x \in X \setminus X_1(0) \mid |N_D^+(x) \cap Y_1(0)| \geq k \right\}, \\
Y_2(0) &= \left\{ y \in Y \setminus Y_1(0) \mid |N_D^+(y) \cap X_1(0)| \geq k \right\}, \\
X_1(1) &= \left\{ x \in X \setminus (X_1(0) \cup X_2(0)) \mid |N_D^+(x) \cap Y \setminus Y_2(0)| < k \right\}, \\
Y_1(1) &= \left\{ y \in Y \setminus (Y_1(0) \cup Y_2(0)) \mid |N_D^+(y) \cap X \setminus X_2(0)| < k \right\}, \\
X_2(1) &= \left\{ x \in X \setminus (X_1(0) \cup X_2(0) \cup X_1(1)) \mid |N_D^+(x) \cap (Y_1(0) \cup Y_1(1))| \geq k \right\}, \\
Y_2(1) &= \left\{ y \in Y \setminus (Y_1(0) \cup Y_2(0) \cup Y_1(1)) \mid |N_D^+(y) \cap (X_1(0) \cup X_1(1))| \geq k \right\}, \\
&\vdots \\
X_1(m) &= \left\{ x \in X \setminus \bigcup_{i=0}^{m-1} (X_1(i) \cup X_2(i)) \mid |N_D^+(x) \cap (Y \setminus \bigcup_{i=0}^{m-1} Y_2(i))| < k \right\}, \\
Y_1(m) &= \left\{ y \in Y \setminus \bigcup_{i=0}^{m-1} (Y_1(i) \cup Y_2(i)) \mid |N_D^+(y) \cap (X \setminus \bigcup_{i=0}^{m-1} X_2(i))| < k \right\}, \\
X_2(m) &= \left\{ x \in X \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{m-1} (X_1(i) \cup X_2(i)) \cup X_1(m) \right) \mid |N_D^+(x) \cap \left(\bigcup_{i=0}^m Y_1(i) \right)| \geq k \right\}, \\
Y_2(m) &= \left\{ y \in Y \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{m-1} (Y_1(i) \cup Y_2(i)) \cup Y_1(m) \right) \mid |N_D^+(y) \cap \left(\bigcup_{i=0}^m X_1(i) \right)| \geq k \right\}.
\end{aligned}$$

Las figuras 3.33, 3.34, 3.35 y 3.36, ejemplifican la construcción de los conjuntos $X_1(0)$, $X_2(0)$, $Y_1(0)$ y $Y_2(0)$.

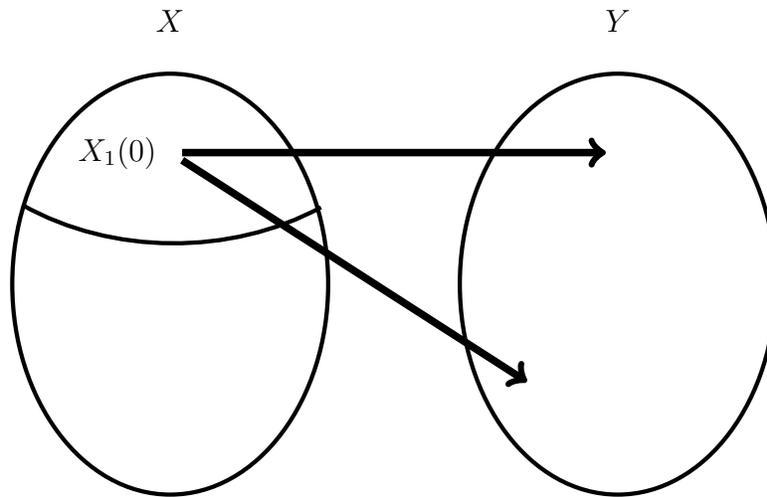


Figura 3.33: $X_1(0)$

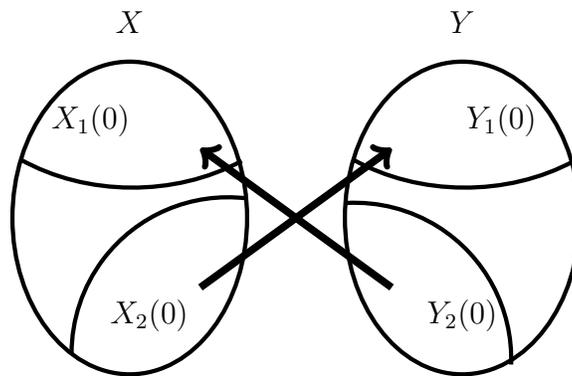


Figura 3.34: $X_2(0)$

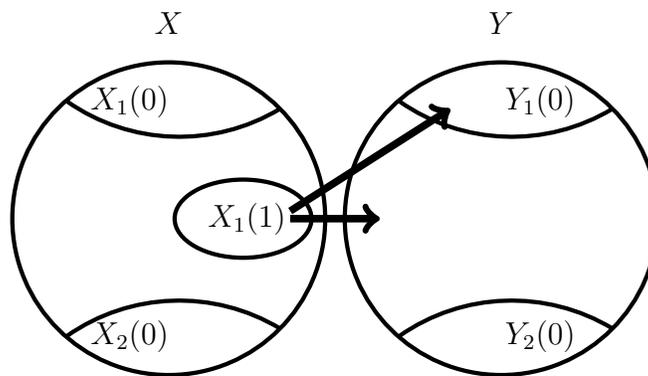


Figura 3.35: $X_1(1)$

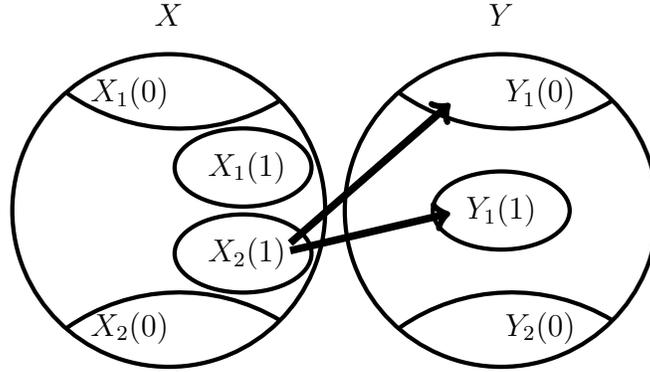


Figura 3.36: Construyendo a $X_2(1)$

Como los vértices de la digráfica D son un número finito y en cada paso

$$\left| \bigcup_{i=0}^n (X_1(i) \cup X_2(i) \cup Y_1(i) \cup Y_2(i)) \right| < \left| \bigcup_{i=0}^{n+1} (X_1(i) \cup X_2(i) \cup Y_1(i) \cup Y_2(i)) \right|,$$

entonces para algún $m \in \mathbb{N}$, $V(D) = \bigcup_{i=0}^m (X_1(i) \cup X_2(i) \cup Y_1(i) \cup Y_2(i))$. Ahora sea r el entero más pequeño tal que $X_1(r+1) = X_2(r+1) = \emptyset$ y s el entero más pequeño tal que $Y_1(s+1) = Y_2(s+1) = \emptyset$. Afirmamos que el conjunto $S = \bigcup_{i=0}^r X_1(i) \cup \bigcup_{j=1}^s Y_1(j)$ es un k -núcleo exterior de D .

- Demostraremos que S es un conjunto k -independiente exterior de D ; es decir, si $x \in S$, entonces $|N_{D[S]}^+(x)| < k$. Como D es bipartita entonces los conjuntos $\bigcup_{i=0}^r X_1(i)$ y $\bigcup_{j=1}^s Y_1(j)$ son independientes. Solo hay flechas entre $X_1(i)$ y $Y_1(j)$ con i en $\{0, 1, \dots, r\}$ y j en $\{0, 1, \dots, s\}$. Sea $x \in S$, por construcción de S tenemos dos casos; si x pertenece a $\bigcup_{i=0}^r X_1(i)$ ó x pertenece a $\bigcup_{i=0}^s Y_1(i)$.

Caso 1) Si x pertenece a $\bigcup_{i=0}^r X_1(i)$, entonces existe un r' en $\{0, 1, \dots, r\}$ tal que $x \in X_1(r')$, esto implica que

$$|N_D^+(x) \cap (Y \setminus \bigcup_{j=0}^{s-1} Y_2(j))| < k.$$

Por construcción

$$\bigcup_{j=0}^s Y_1(j) \subseteq Y \setminus \bigcup_{j=0}^{s-1} Y_2(j).$$

Por lo tanto, $|N_{D[S]}^+(x)| < k$.

Caso 2) Si x pertenece a $\bigcup_{i=0}^s Y_1(i)$, entonces existe un s' en $\{0, 1, \dots, s\}$ tal que $x \in Y_1(s')$, esto implica que

$$|N_D^+(x) \cap (X \setminus \bigcup_{j=0}^{s-1} X_2(j))| < k.$$

Por construcción

$$\bigcup_{j=0}^r X_1(j) \subseteq X \setminus \bigcup_{j=0}^{r-1} X_2(j).$$

Por lo tanto, $|N_{D[S]}^+(x)| < k$.

Concluimos que S es un conjunto k -independiente exterior de D .

- Ahora demostraremos que S es un conjunto k -absorbente exterior de D ; es decir, si $v \in V(D) \setminus S$, entonces $|N_D^+(v) \cap (\bigcup_{j=0}^r X_1(j))| \geq k$. Sea $v \in V(D) \setminus S$, por construcción de S , tenemos que

$$V(D) \setminus S = (\bigcup_{j=0}^r X_2(j) \cup \bigcup_{j=0}^s Y_2(j)).$$

Esto implica los siguientes casos; v pertenece a $\bigcup_{i=0}^r X_2(i)$ ó a $\bigcup_{i=0}^s Y_2(i)$:

Caso 1) Si v pertenece a $\bigcup_{i=0}^r X_2(i)$, entonces existe un r' en $\{0, 1, \dots, r\}$ tal que $v \in X_2(r')$, por construcción

$$|N_D^+(v) \cap (\bigcup_{j=0}^s Y_1(j))| \geq k.$$

Caso 2) Si v pertenece a $\bigcup_{i=0}^s Y_2(i)$, entonces existe un s' en $\{0, 1, \dots, s\}$ tal que $v \in Y_2(s')$, esto implica:

$$|N_D^+(v) \cap (\bigcup_{j=0}^r X_1(j))| \geq k.$$

Por lo tanto, S es un conjunto k -absorbente exterior de D .

Como S es un conjunto k -absorbente exterior y k -independiente exterior, entonces D tiene un k -núcleo exterior. Por el lema 3.3.1, si D tiene un k -núcleo exterior, entonces D tiene un (k, l) -núcleo exterior, para $1 \leq l \leq k$. Como toda subdigráfica de D es bipartita, entonces D es (k, l) -núcleo exterior perfecta. \square

Ahora estamos en condiciones de demostrar el teorema 2.2.6 (Richardson) visto en el capítulo dos.

Teorema 3.3.13. *Si D es una digráfica sin ciclos de longitud impar y k y l son enteros positivos con $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$, entonces D es una digráfica (k, l) -núcleo exterior perfecta.*

Demostración. Sean D una digráfica sin ciclos de longitud impar y k y l enteros positivos con $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D)$. Primero demostraremos por inducción sobre el número de vértices de D que D tiene un k -núcleo exterior.

Base de inducción.

Si D' tiene orden $1 \leq p \leq 3$, en la sección 3.3 demostramos que todas las digráficas que no tienen ciclos de longitud impar de estos órdenes tienen k -núcleo exterior.

Hipótesis de inducción.

Supongamos que D' tiene orden n' , con $n' < n$. Si D' no tiene ciclos de longitud impar y $1 \leq l \leq k \leq \Delta^+(D')$, entonces D tiene un k -núcleo exterior.

Paso inductivo.

Sea D una digráfica de orden n . Consideremos $SC(D)$ la digráfica de componentes fuertemente conexas, por el lema 1.2.5, esta digráfica es acíclica y por el lema 1.2.5, existe una componente fuertemente conexa inicial C_1 en D . Por el teorema 1.2.1, todas las componentes fuertemente conexas y sin ciclos de longitud impar, son bipartitas. Consideremos $D' = V(D) \setminus C_1$, como D' tiene orden menor a n y no tiene ciclos de longitud impar, entonces por hipótesis de inducción D' tiene un k -núcleo exterior S' . Construiremos el k -núcleo exterior de la digráfica D como sigue:

Sean $D_1 = \{x \in V(D) \mid |N_D^+(x) \cap S'| \geq k\}$ y $C'_1 = D[C_1 \setminus D_1]$. Como C_1 es bipartita, entonces C'_1 es bipartita, con X y Y las clases de C'_1 . Para demostrar que C'_1 tiene un k -núcleo exterior, usaremos un procedimiento similar al teorema 3.3.12. Definimos los siguientes subconjuntos de X y Y :

$$X_1(0), X_2(0), X_1(1), X_2(1), \dots, X_1(m), X_2(m) \text{ de } X$$

y

$$Y_1(0), Y_2(0), Y_1(1), Y_2(1), \dots, Y_1(m), Y_2(m) \text{ de } Y$$

como siguen:

$$X_1(0) = \left\{ x \in X \mid |N_D^+(x) \cap (Y \cup S')| < k \right\},$$

$$Y_1(0) = \left\{ y \in Y \mid |N_D^+(y) \cap (X \cup S')| < k \right\},$$

$$X_2(0) = \left\{ x \in X \setminus X_1(0) \mid |N_D^+(x) \cap (Y_1(0) \cup S')| \geq k \right\},$$

$$Y_2(0) = \left\{ y \in Y \setminus Y_1(0) \mid |N_D^+(y) \cap (X_1(0) \cup S')| \geq k \right\},$$

$$X_1(1) = \left\{ x \in X \setminus (X_1(0) \cup X_2(0)) \mid |N_D^+(x) \cap (Y \cup S') \setminus Y_2(0)| < k \right\},$$

$$Y_1(1) = \left\{ y \in Y \setminus (Y_1(0) \cup Y_2(0)) \mid |N_D^+(y) \cap (X \cup S') \setminus X_2(0)| < k \right\},$$

$$X_2(1) = \left\{ x \in X \setminus (X_1(0) \cup X_2(0) \cup X_1(1)) \mid |N_D^+(x) \cap (Y_1(0) \cup Y_1(1) \cup S')| \geq k \right\},$$

$$Y_2(1) = \left\{ y \in Y \setminus (Y_1(0) \cup Y_2(0) \cup Y_1(1)) \mid |N_D^+(y) \cap (X_1(0) \cup X_1(1) \cup S')| \geq k \right\},$$

⋮

$$X_1(m) = \left\{ x \in X \setminus \bigcup_{i=0}^{m-1} (X_1(i) \cup X_2(i)) \mid |N_D^+(x) \cap (Y \setminus (S' \cup \bigcup_{i=0}^{m-1} Y_2(i)))| < k \right\},$$

$$Y_1(m) = \left\{ y \in Y \setminus \bigcup_{i=0}^{m-1} (Y_1(i) \cup Y_2(i)) \mid |N_D^+(y) \cap (X \setminus (S' \cup \bigcup_{i=0}^{m-1} X_2(i)))| < k \right\},$$

$$X_2(m) = \left\{ x \in X \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{m-1} (X_1(i) \cup X_2(i)) \cup X_1(m) \right) \mid |N_D^+(x) \cap (S' \cup \bigcup_{i=0}^m Y_1(i))| \geq k \right\},$$

$$Y_2(m) = \left\{ y \in Y \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{m-1} (Y_1(i) \cup Y_2(i)) \cup Y_1(m) \right) \mid |N_D^+(y) \cap (S' \cup \bigcup_{i=0}^m X_1(i))| \geq k \right\}.$$

Como la subdigráfica $D[C'_1]$ es finita y en cada paso se cumple que

$$\left| \bigcup_{i=0}^n (X_1(i) \cup X_2(i) \cup Y_1(i) \cup Y_2(i)) \right| < \left| \bigcup_{i=0}^{n+1} (X_1(i) \cup X_2(i) \cup Y_1(i) \cup Y_2(i)) \right|,$$

entonces para algún $m \in \mathbb{N}$, tenemos lo siguiente

$$V(C'_1) = \bigcup_{i=0}^m (X_1(i) \cup X_2(i) \cup Y_1(i) \cup Y_2(i)).$$

Definimos a $S = S' \cup (\bigcup_{i=0}^r X_1(i) \cup \bigcup_{j=1}^s Y_1(j))$, con r el entero más pequeño tal que $Y_1(r+1) = Y_2(r+1) = \emptyset$ y s el entero más pequeño tal que $X_1(s+1) = X_2(s+1) = \emptyset$. Afirmamos que S es un k -núcleo exterior de D .

- Por demostrar que S es un conjunto k -independiente exterior de D ; es decir, si $v \in S$, entonces $|N_{D[S]}^+(v)| < k$. Sea $v \in S$, por construcción de S , hay tres casos; $v \in S'$,

$$v \in \bigcup_{i=0}^m X_1(i) \text{ ó } v \in \bigcup_{i=0}^m Y_1(i):$$

Caso 1) Si v está en S' implica que $|N_{S'}^+(v)| < k$ y como C_1 es una componente inicial, entonces $|N_{D[S]}^+(v)| < k$.

Caso 2) Si v está en $\bigcup_{i=0}^m X_1(i)$, entonces existe un r' en $\{0, 1, \dots, r\}$ tal que $v \in X_1(r')$, esto implica que

$$|N_D^+(v) \cap ((Y \cup S') \setminus \bigcup_{j=0}^{s-1} Y_2(j))| < k.$$

Por construcción

$$\bigcup_{j=0}^s Y_1(j) \subseteq Y \setminus \bigcup_{j=0}^{s-1} Y_2(j).$$

Por lo que, $|N_{D[S]}^+(v)| < k$.

Caso 3) Si v está en $\bigcup_{i=0}^m Y_1(i)$, entonces existe un s' en $\{0, 1, \dots, s\}$ tal que $v \in Y_1(s')$, esto implica que

$$|N_D^+(v) \cap ((X \cup S') \setminus \bigcup_{j=0}^{s-1} X_2(j))| < k.$$

Por construcción

$$\bigcup_{j=0}^r X_1(j) \subseteq X \setminus \bigcup_{j=0}^{r-1} X_2(j).$$

Por lo que, $|N_{D[S]}^+(v)| < k$.

En cualquier caso, $|N_{D[S]}^+(v)| < k$. Por lo tanto, S es un conjunto k -independiente exterior de D .

- Por demostrar que S es un conjunto k -absorbente exterior de D ; es decir, si $v \in V(D) \setminus S$, entonces $|N_D^+(v) \cap S| \geq k$. Sea $v \in V(D) \setminus S$, notemos que $C_1' \setminus S = (\bigcup_{j=0}^r X_2(j) \cup \bigcup_{j=0}^s Y_2(j))$, por lo que tenemos 4 casos:

Caso 1) Si $v \in D'$.

entonces como $S' \subseteq S$, entonces S ya k -absorbe exteriormente a v .

Caso 2) Si $v \in D_1$.

Por definición de D_1 , S ya k -absorbe exteriormente a v .

Caso 3) Si v pertenece a $\bigcup_{i=0}^r X_2(i)$, entonces existe un r' en $\{0, 1, \dots, r\}$ tal que $v \in X_2(r')$, esto implica que

$$|N_D^+(v) \cap (S' \cup \bigcup_{j=0}^s Y_1(j))| \geq k.$$

Caso 4) Si v pertenece a $\bigcup_{i=0}^s Y_2(i)$, entonces existe un s' en $\{0, 1, \dots, s\}$ tal que $v \in X_2(s')$, esto implica que

$$|N_D^+(v) \cap (S' \cup \bigcup_{j=0}^r X_1(j))| \geq k.$$

Por lo tanto, S es un conjunto k -absorbente exterior de D .

Como S es un conjunto k -absorbente exterior y k -independiente exterior, entonces S es un k -núcleo exterior de D . Por el lema 3.3.1, si D tiene un k -núcleo exterior, entonces D tiene un (k, l) -núcleo exterior, para $1 \leq l \leq k$. Como toda subdigráfica inducida de D no tiene ciclos dirigidos de longitud impar, entonces D es (k, l) -núcleo exterior perfecta. \square

3.4. La k -función de Grundy

En el capítulo 2 vimos la definición de función de Grundy introducida por Berge. En esta parte de la tesis, si k es un entero positivo, presentamos el concepto de k -función de Grundy y su relación con los k -núcleos exteriores.

Definición 3.4.1. *k*-función de Grundy

Sean D una digráfica y k un entero positivo. Una función $g : V(D) \rightarrow \mathbb{N}$ es una k -función de Grundy si satisface las siguientes condiciones:

1) Si x es un vértice de D y $g(x) = l$, con $l > 0$, entonces para cada j en $\{0, \dots, l - 1\}$, existen al menos k vértices en $N_D^+(x)$, digamos y_1, \dots, y_k , tales que $g(y_i) = j$ para todo i en $\{1, \dots, k\}$.

2) Si x es un vértice de D y $g(x) = l$, entonces existen a lo más $k - 1$ vértices en $N_D^+(x)$ cuya imagen es l .

Para ejemplificar el concepto anterior construiremos una 2-función de Grundy en la digráfica D de la figura 3.37a. Observemos que si asignamos el valor 0 a todos los vértices que tienen exgrado menor a 2, cumplen la condición 2 de la 2-función de Grundy (ver figura 3.37a). Después los vértices que ya tienen 2 vecinos con valor 0 se les asigna el valor 1, pues cumplen con las condiciones 1 y 2 de la 2-función de Grundy (ver figura 3.37b), el vértice con valor aún sin asignar tiene valor cero porque solo tiene un vecino exterior que tiene valor 0. En la digráfica de la figura 3.38, se muestra la 2-función de Grundy.

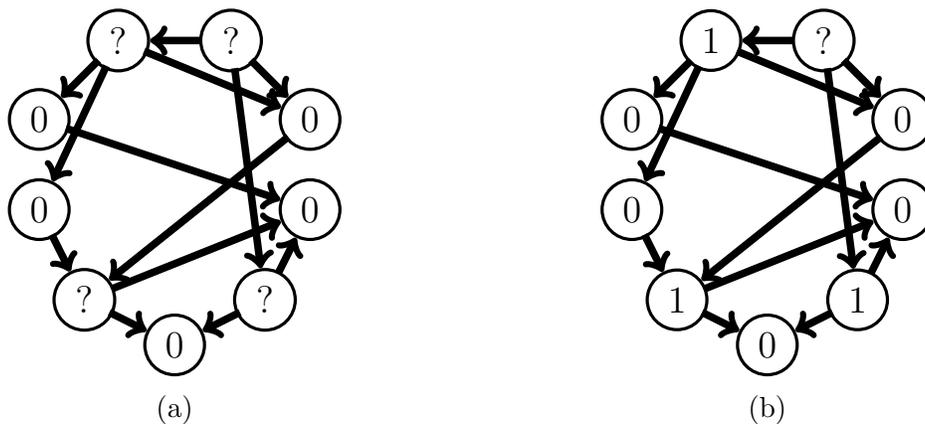


Figura 3.37: Construcción de una 2 -función de Grundy

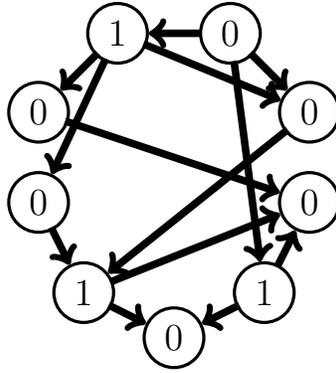


Figura 3.38: Digráfica D con una 2 -función de Grundy

Notemos que dada una digráfica esta no necesariamente tiene una única k -función de Grundy. Podemos ver en las figuras 3.39a y 3.39b dos 2-funciones de Grundy distintas para la misma digráfica.

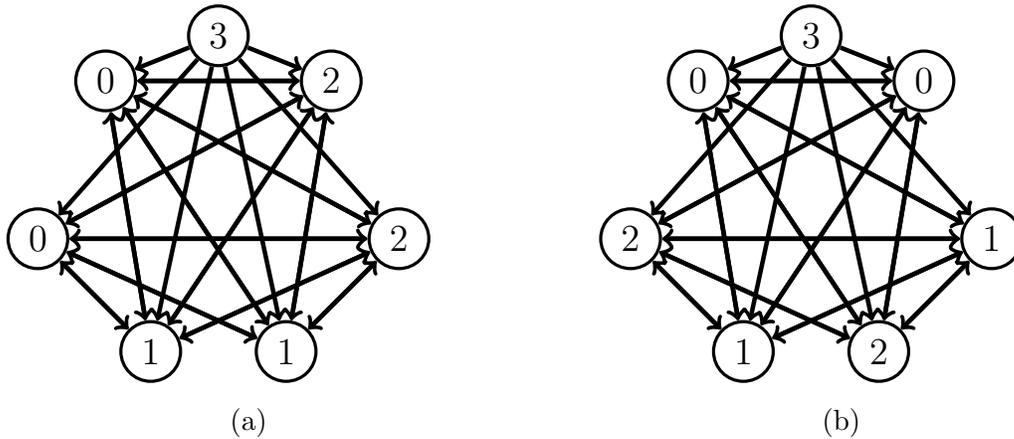


Figura 3.39: Digráfica con dos 2-funciones de Grundy

Al igual que con la función de Grundy, vista en el capítulo 2, podemos observar en las digráficas de las figuras 3.38, 3.39a y 3.39b que el conjunto de los vértices que toman el valor cero en las k -funciones de Grundy es un k -núcleo exterior, esto motiva el siguiente teorema.

Teorema 3.4.1. Sean D una digráfica y k un entero mayor a cero. Si D tiene una k -función de Grundy, entonces D tiene un k -núcleo exterior. Más aún, si g es una k -función de Grundy, entonces el conjunto $S = \{x \in V(D) \mid g(x) = 0\}$ es un k -núcleo exterior.

Demostración. Sean D una digráfica, k un entero mayor a cero, g una k -función de Grundy de D y $S = \{x \in V(D) \mid g(x) = 0\}$. Por demostrar que S es un k -núcleo exterior. Sea y en $V(D)$, dependiendo si y esta en S o no, tenemos dos casos:

Caso 1) $y \in S$.

En este caso $g(y) = 0$. Por la condición 2 de la definición 3.4.1, existen a lo más $k - 1$ vértices en $N_D^+(y)$ tales que la k -función de Grundy vale 0, lo que implica que $|N_D^+(y) \cap S| < k$. Por lo tanto, S es un conjunto k -independiente exterior.

Caso 2) $y \notin S$.

En este caso $g(y) = l > 0$. Por la condición 1 de la definición 3.4.1 para cada j en $\{0, \dots, l - 1\}$, existen al menos k vértices en $N_D^+(y)$ cuyo valor bajo g es j . En particular para $j = 0$, implica que $|N_D^+(y) \cap S| \geq k$. Por lo tanto, S es un conjunto k -absorbente exterior.

Concluimos que S es un k -núcleo exterior de D . □

La pregunta natural después de este teorema es: para una digráfica, ¿es suficiente tener k -núcleo exterior para que tenga k -función de Grundy? veamos el siguiente ejemplo para ilustrarnos.

En la digráfica D de la figura 3.40, podemos fijarnos en los conjuntos $V_1 = \{x_5, x_6\}$, $V_2 = \{x_4\}$ y $\{x_1, x_2, x_3\}$. El conjunto V_1 es un 2-núcleo exterior de D , que además es único.

Ahora demostraremos que D no tiene una 2-función Grundy y lo mostraremos por contradicción. Notemos que si D tiene una 2-función de Grundy, digamos g , entonces para todo vértice x en $V(D)$, $g(x) < 3$, porque $\delta_D^+(x) \leq 5$. Por otro lado, los vértices del conjunto V_1 deben tener valor cero, ya que no tienen vecinos exteriores. El vértice del conjunto V_2 solo puede tener valor 1. Ahora, solo falta por asignar un valor a los vértices x_1, x_2 y x_3 . Sin pérdida de generalidad tomemos el vértice x_1 , como los vértices x_5 y x_6 son vecinos exteriores de x_1 y tienen valor cero, entonces x_1 solo puede tomar valores superiores a cero. Veremos los casos:

- Si x_1 tiene el valor 1, entonces el vértice x_2 toma valor 2. Tenemos dos casos con el valor de x_3 :
 - Si x_3 toma el valor 1, entonces x_1 tiene a los vecinos x_4 y x_3 con valor 1, lo que contradice la condición 2 de la definición 3.4.1. Así, x_3 no puede tomar el valor 1.
 - Si x_3 toma el valor 2, entonces x_3 tiene solo un vecino con valor 1, lo que contradice la condición 1 de la definición 3.4.1. Así, x_3 no puede tomar el valor 2.

Por lo tanto, x_1 no puede tomar el valor 1.

- Si x_1 tiene el valor 2, entonces el vértice x_3 tiene valor 1. Tenemos dos casos con el valor de x_2 :
 - Si x_2 toma el valor 1, entonces x_3 tiene a los vecinos x_2 y x_4 con valor 1, lo que contradice la condición 2 de la definición 3.4.1. Así que x_2 no puede tomar el valor 1.

- Si x_2 toma el valor 2, entonces x_2 tiene solo un vecino con valor 1, lo que contradice la condición 1 de la definición 3.4.1. Así que x_2 no puede tomar el valor 2.

Por lo tanto x_1 , no puede tomar el valor 2.

Al vértice x_1 no le podemos asignar un valor que cumpla con las condiciones 1 y 2 de la definición 3.4.1. Por lo que, D no tiene 2-función de Grundy, a pesar de tener un 2-núcleo exterior.

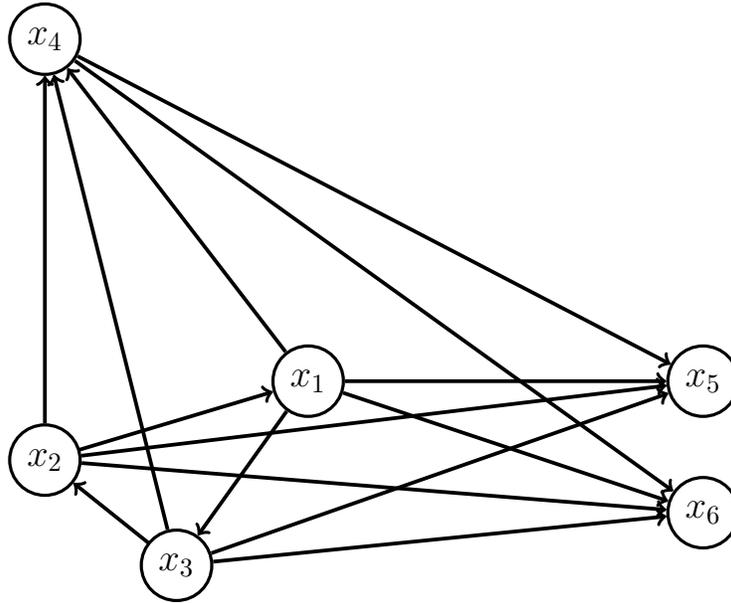


Figura 3.40: Digráfica con un 2-núcleo exterior y sin 2-función de Grundy

El regreso del teorema 3.4.1 lamentablemente no es válido; es decir, existen digráficas sin k -función de Grundy y con k -núcleo exterior. Con base en lo anterior generamos ejemplos de digráficas que tienen k -núcleo exterior, pero que no tienen k -función de Grundy.

Teorema 3.4.2. *Para cada entero mayor o igual a 2 existe una digráfica que tiene k -núcleo exterior y no tiene k -función de Grundy.*

Demostración. Sean k un entero mayor o igual a 2, V_1 un conjunto tal que $|V_1| = k$, V_2 un conjunto tal que $|V_2| = k - 1$ y $V_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$, donde V_1 , V_2 y V_3 son ajenos dos a dos. Consideremos además $A_1 = \{(x, y) \in V_2 \times V_2 \mid x \neq y\}$, $A_2 = \{(x_1, x_3), (x_3, x_2), (x_2, x_1)\}$, $A_3 = (V_2 \cup V_3) \times V_1$, $A_4 = V_3 \times V_2$. Sea D la digráfica, tal que $V(D) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ y $F(D) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, como se muestra en la figura 3.41.

$D[V_2]$ es completa de orden $k - 1$.

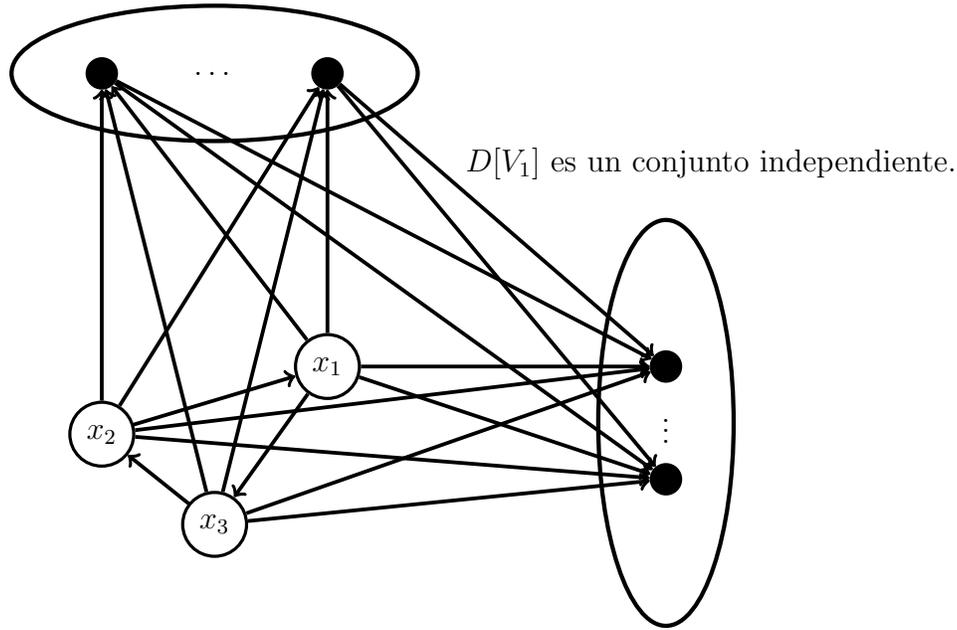


Figura 3.41: Digráfica con un k -núcleo exterior y sin k -función de Grundy

Ya que el conjunto V_1 es 1-independiente exterior, por el lema 3.1.1 es un conjunto k -independiente exterior. Por construcción de D , para toda x en $V(D) \setminus V_1$, cumple $N_D^+(x) \cap V_1 = V_1$ en particular $|N_D^+(x) \cap V_1| = k$. Por lo tanto, V_1 es un k -núcleo exterior de D .

Demostremos por contradicción que D no tiene k -función de Grundy. Supongamos que D tiene una k -función de Grundy, digamos g .

Como para todo v en V_1 , $\delta^+(v) = 0$, los vértices del conjunto V_1 tienen que tener el valor cero. Dado que para todo y en V_2 , $|N_D^+(y) \cap V_1| = k$ y para todo z en $N_D^+(y) \cap V_1$ cumple que $g(z) = 0$, entonces por la condición 1 de la definición 3.4.1, los vértices del conjunto V_2 solo pueden tener el valor mayor o igual a 1. Además como $|N^+(y)_D \setminus V_1| = k - 2$, entonces solo puede valor 1. Ahora solo falta asignar valor a los vértices x_1 , x_2 y x_3 . Sin pérdida de generalidad, tomemos el vértice x_1 , como los k vértices del conjunto V_1 son vecinos exteriores de x_1 y tienen valor cero, entonces x_1 solo puede tomar valores mayores a cero. Veamos los siguientes casos:

Caso 1) Si $g(x_1) = 1$, entonces x_2 tiene k vecinos con valor 1 y k vecinos con valor 0, por lo que $g(x_2) = 2$. Mostraremos que no podemos asignarle un valor a x_3 (ver figura 3.42).

Caso 1.a) Si $g(x_3) = 1$, entonces $g(x_1)$ no cumple la condición 2 de la definición 3.4.1.

Caso 1.b) Si $g(x_3) \geq 2$, entonces por la condición 1 de la definición 3.4.1 deben existir k vecinos exteriores de x_3 con el valor 1, pero solo tiene $k - 1$ vecinos exteriores con el valor 1, por lo que no le podemos asignar valores mayores o iguales a 2.

Por lo tanto, $g(x_1) \neq 1$.

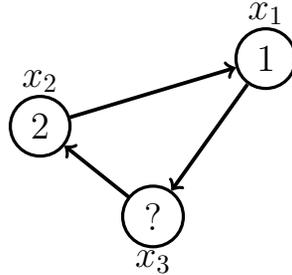


Figura 3.42: Caso 1

Caso 2) Si $g(x_1) = 2$ y por la condición 1) de la definición 3.4.1, entonces $g(x_3) = 1$. En este caso mostraremos que no podemos asignarle un valor a x_2 . (ver figura 3.43)

Caso 2.a) Si $g(x_2) = 1$, entonces $g(x_3)$ no cumple la condición 2 de la definición 3.4.1.

Caso 2.b) Si $g(x_2) = 2$, entonces por la condición 1 de la definición 3.4.1 deben existir k vecinos exteriores de x_2 con valor 1, pero solo tiene $k - 1$ vecinos exteriores con valor 1, por lo que, no le podemos asignar ese valor, así $g(x_2) \neq 2$.

Por lo tanto, $g(x_1) \neq 2$.

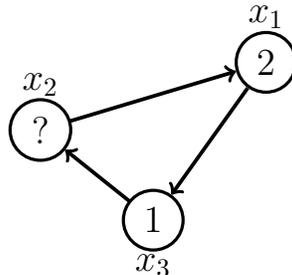


Figura 3.43: Caso 2

Como $\delta^+(x_1) = 2k$, entonces $g(x_1) < 3$. Por lo tanto, D no tiene una k -función de Grundy. \square

Pero, ¿existe alguna condición para que una digráfica D con k -núcleo exterior tenga k -función de Grundy?

Veremos que la condición de ser k -núcleo exterior perfecta es suficiente para que una digráfica tenga k -función de Grundy.

Teorema 3.4.3. *Si una digráfica D es k -núcleo exterior perfecta, entonces D admite una k -función de Grundy.*

Demostración. Como D es una digráfica k -núcleo exterior perfecta, entonces D tiene un k -núcleo exterior, digamos $N(0)$. Observemos que como D es k -núcleo exterior perfecta, entonces toda subdigráfica inducida de D admite un k -núcleo exterior. A partir de esta observación definimos los siguientes conjuntos:

$N(0)$ es un k -núcleo exterior de D ,

$N(1)$ es un k -núcleo exterior de $D[V(D) \setminus N(0)]$,

$N(2)$ es un k -núcleo exterior de $D[V(D) \setminus (N(0) \cup N(1))]$,

$N(3)$ es un k -núcleo exterior de $D[V(D) \setminus \bigcup_{j=0}^2 N(j)]$,

\vdots

$N(i)$ es un k -núcleo exterior de $D[V(D) \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} N(j)]$.

Como D es finita y $|\bigcup_{j=0}^{i-1} N(i)| \leq |\bigcup_{j=0}^{i-1} N(j)|$ para $\{i, j\} \subseteq \mathbb{N}$ con $i \leq j$, entonces existe un menor entero, digamos m , tal que $\bigcup_{j=0}^m N(j) = V(D)$.

Definimos la relación g de $V(D)$ en \mathbb{N} como $(v, i) \in g$ si y solo si $v \in N(i)$. Demostraremos que g es una k -función de Grundy de D .

- Por demostrar que g es función.

Sean v_1 y v_2 en $V(D)$, tales que $(v_1, i) \in g$, $(v_2, j) \in g$ y $v_1 = v_2$, por demostrar que $i = j$. Lo haremos por contradicción, supongamos, sin pérdida de generalidad, que $j < i$. Por construcción, $v_1 \in N(i)$ y $N(i) \subseteq D[V(D) \setminus \bigcup_{t=0}^{i-1} N(t)]$, por lo que v_1 no pertenece a $\bigcup_{t=0}^{i-1} N(t)$, en particular $v_1 \notin N(j)$ lo cual no es posible pues $v_1 = v_2$ y $v_2 \in N(j)$.

- Por demostrar la Condición 1. Si $g(x) = l$, con $l > 0$, entonces para cada j en \mathbb{N} , con $0 \leq j < l$, existen al menos k vértices en $N_D^+(x)$ cuya imagen es j .

Si $g(x) = l$, con $l > 0$, entonces por definición de g , $x \in N(l)$. Tomemos $j \in \mathbb{N}$, tal que $0 \leq j < l$. Por construcción, $N(l) \subseteq D[V(D) \setminus \bigcup_{t=0}^{l-1} N(t)]$. Como $N(j)$ es un conjunto k -absorbente exterior de $D[V(D) \setminus \bigcup_{t=0}^{l-1} N(t)]$, entonces x tiene al menos k vecinos exteriores en $N(j)$; es decir, para cada $j \in \mathbb{N}$, con $0 \leq j < l$, existen al menos k vértices en $N_D^+(x)$ cuya imagen es j .

- Por demostrar la Condición 2. Si $g(x) = l$, entonces existen a lo más $k - 1$ vértices en $N_D^+(x)$ cuya imagen es l .

Si $g(x) = l$, entonces por definición de g , $x \in N(l)$. Como $N(l)$ es un conjunto k -independiente exterior de $D[V(D) \setminus \bigcup_{j=0}^{l-1} N(j)]$, tenemos que $|N_D^+(x) \cap N(l)| \leq k - 1$. Por lo tanto, existen a lo más $k - 1$ vértices en $N_D^+(x)$ cuya imagen es l .

Por lo tanto, g es una k -función de Grundy de D . □

Corolario 3.4.1. Sean D una digráfica y k un entero, con $1 \leq k \leq \Delta^+(D)$. D es k -núcleo exterior perfecta si y solo si toda subdigráfica inducida D' de D admite una k -función de Grundy.

Demostración. Sea D una digráfica y k un entero mayor a 0.

\Rightarrow) Como cada subdigráfica inducida D' de D es k -núcleo exterior perfecta, entonces por el teorema 3.4.3, D' admite una k -función de Grundy. Por lo tanto, toda subdigráfica inducida D' de D admite una k -función de Grundy.

\Leftarrow) Como toda subdigráfica inducida de D tiene k -función de Grundy, por el teorema 3.4.1, se sigue que toda subdigráfica inducida de D tiene un k -núcleo exterior. Por lo tanto, D es k -núcleo exterior perfecta. □

Corolario 3.4.2. Si D es una digráfica simétrica y k es un entero, con $1 \leq k \leq \Delta^+(D)$, entonces D admite una k -función de Grundy.

Demostración. El resultado es consecuencia del teorema 3.3.5 y el corolario 3.4.1 □

Corolario 3.4.3. Si D es una digráfica transitiva y k es un entero, con $1 \leq k \leq \Delta^+(D)$, entonces D admite una k -función de Grundy.

Demostración. El teorema 3.3.8 y el corolario 3.4.1 conducen a este resultado. □

Corolario 3.4.4. Si D es una digráfica sin ciclos y k es un entero, con $1 \leq k \leq \Delta^+(D)$, entonces D admite una k -función de Grundy.

Demostración. El teorema 3.3.9 y el corolario 3.4.1 demuestran el corolario. □

Corolario 3.4.5. Si D es una digráfica sin ciclos de longitud impar y k un entero, con $1 \leq k \leq \Delta^+(D)$, entonces D admite una k -función de Grundy.

Demostración. El teorema 3.3.13 y el corolario 3.4.1 se deduce este resultado. □

Capítulo 4

k -núcleos exteriores y k -función de Grundy en la digráfica de líneas

En la teoría de digráficas se estudian propiedades mediante la aplicación de transformaciones u operaciones a una digráfica, algunas de las más naturales asocian las flechas de una digráfica a los vértices de una nueva digráfica. Nosotros estudiaremos una de dichas digráficas asociadas la cual recibe el nombre de digráfica de líneas y se define de la siguiente manera:

A una digráfica D , tal que $F(D) \neq \emptyset$, le asociamos una nueva digráfica, llamada **digráfica de líneas** de D , denotada por $L(D)$, que cumple:

- $V(L(D)) = F(D)$,
- $(a, b) \in F(L(D))$ si y solo si a y b son flechas de D tales que $a = (x, y)$ y $b = (y, z)$ para algún $\{x, y, z\} \subseteq V(D)$; es decir, el vértice final de a es el vértice inicial de b .

En la figura 4.1b se muestra la digráfica de líneas $L(D)$ de la digráfica D (figura 4.1a). Notemos que en este ejemplo, las flechas de $L(D)$ representan trayectorias de longitud 2 en D .

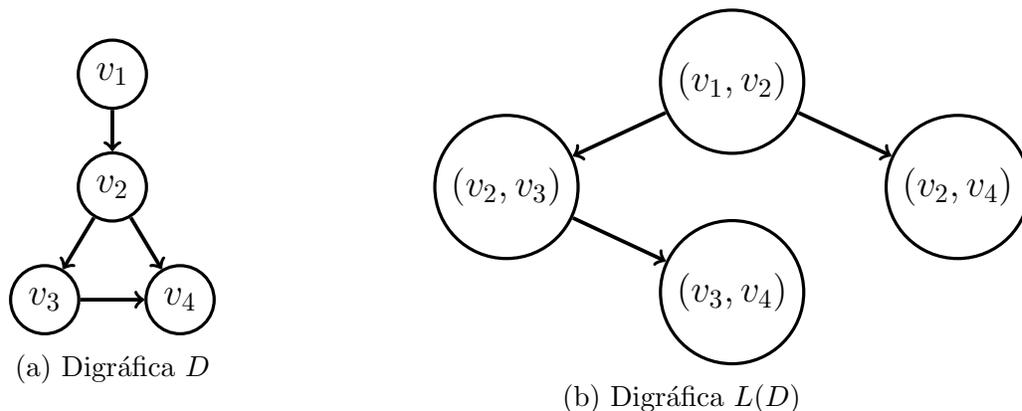


Figura 4.1: Digráfica de líneas

Es natural preguntarnos qué pasa con los k -núcleos exteriores a través de la digráfica de líneas. Una pregunta similar fue planteada por Matúš Harminc en 1982, en [21] encontró una forma de relacionar los núcleos de una digráfica y los núcleos de su digráfica de líneas. Él demostró que el número de núcleos de una digráfica es igual al número de núcleos de su digráfica de líneas, probando así que una digráfica D tiene núcleo si y solo si $L(D)$ tiene núcleo. En este capítulo generalizaremos este resultado al demostrar que el número de k -núcleos exteriores de D es igual al número de k -núcleos exteriores de $L(D)$.

Otra pregunta sería: ¿qué pasa con las k -funciones de Grundy a través de la digráfica de líneas? Una pregunta similar fue planteada en 1991 por H. Galeana Sánchez, L. Pastrana Ramírez y A. Rincón Mejía. En [20] encontraron una forma de relacionar las funciones de Grundy de una digráfica y las funciones de Grundy de su digráfica de líneas. Demostraron que si D es una digráfica tal que $\delta^-(D) \geq 1$, entonces el número de funciones de Grundy de D es igual al número de funciones de Grundy de $L(D)$. En esta sección generalizaremos este resultado al demostrar que si D es una digráfica, entonces el número de k -funciones de Grundy de D es igual al número de k -funciones de Grundy de $L(D)$.

4.1. k -núcleos exteriores y la digráfica de líneas

En esta sección demostraremos que si D es una digráfica y $L(D)$ su digráfica de líneas, entonces el número de k -núcleos exteriores de D es igual al número de k -núcleos exteriores de $L(D)$.

Como la demostración del teorema es extensa la veremos por partes, primero en la sección 4.1.1 demostraremos que el número de k -núcleos exteriores de una digráfica D es menor o igual al número de k -núcleos exteriores de su digráfica de líneas $L(D)$. En la sección 4.1.2 probaremos que el número de k -núcleos exteriores de la digráfica $L(D)$ es menor o igual al número de k -núcleos exteriores de su digráfica D , para así concluir en la sección 4.1.3 que el número de k -núcleos exteriores de D es igual al número de k -núcleos exteriores de $L(D)$.

4.1.1. La función f

En esta sección damos una función f que nos permitirá relacionar los k -núcleos exteriores de una digráfica D con los k -núcleos exteriores de $L(D)$.

Definimos la siguiente relación f de $\mathcal{P}(V(D))$ en $\mathcal{P}(F(D))$, donde $\mathcal{P}(V(D))$ es el conjunto potencia del conjunto $V(D)$ y $\mathcal{P}(F(D))$ es el conjunto potencia del conjunto $F(D)$, dada por: $(S, S') \in f$ si y solo si $S' = \{a \in F(D) \mid a = (u, v) \text{ y } v \in S\}$.

Lema 4.1.1.1. *Si D es una digráfica, entonces la relación f definida anteriormente es una función de $\mathcal{P}(V(D))$ en $\mathcal{P}(F(D))$.*

Demostración. Para demostrar que f es una función basta ver que si (S_1, S'_1) pertenece a f , (S_2, S'_2) pertenece a f y $S_1 = S_2$, entonces $S'_1 = S'_2$. Por contradicción, supongamos que

$S'_1 \neq S'_2$ y, sin pérdida de generalidad, asumiremos que existe $a \in S'_1$ tal que $a \notin S'_2$, con $a = (u, v)$. Por definición de f , $v \in S_1$ y como $S_1 = S_2$, entonces $v \in S_2$. Nuevamente por definición de f , $a \in S'_2$, lo cual no es posible. Lo que implica que $S'_1 = S'_2$. Por lo tanto, f es una función. \square

Por ejemplo, en la digráfica de la figura 4.2 si tomamos a los conjuntos $S_1 = \{v_1\}$, $S_2 = \{v_2\}$, $S_3 = \{v_3, v_4\}$ y $S_4 = \{v_5\}$ tenemos:

$$\begin{aligned} f(S_1) &= \{(v_6, v_1), (v_5, v_1)\}, \\ f(S_2) &= \{(v_1, v_2), (v_3, v_2), (v_5, v_2)\}, \\ f(S_3) &= \{(v_2, v_3), (v_5, v_3), (v_5, v_4)\}, \\ f(S_4) &= \emptyset. \end{aligned}$$

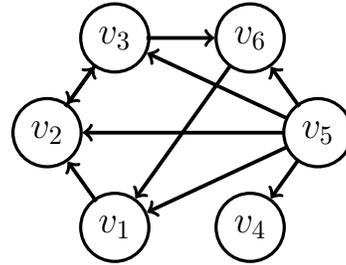


Figura 4.2: Digráfica D

Observación 4.1.1. Sea D una digráfica. Si S es subconjunto de $V(D)$, entonces $f(S)$ es un subconjunto de flechas de D y también es un conjunto de vértices de $L(D)$.

Demostración. Sean D una digráfica y S un subconjunto de $V(D)$. Por definición de f , $f(S)$ son las flechas que tienen su vértice final en S y por definición de $L(D)$ cualquier subconjunto de flechas de D es un subconjunto de vértices en $L(D)$. \square

De acuerdo con la observación anterior, si S es un subconjunto de $V(D)$, entonces usaremos la notación $f(S)_F$ cuando cuando queremos especificar que $f(S) \subseteq F(D)$ y usaremos la notación $f(S)_L$ cuando cuando queremos especificar que $f(S) \subseteq V(L(D))$.

Notemos que el conjunto $S = \{v_2, v_5, v_6\}$ de la digráfica D en la figura 4.3 es un conjunto 2-independiente exterior en D . Del mismo modo $f(S) = \{(v_1, v_2), (v_3, v_2), (v_3, v_6), (v_5, v_6)\}$ es un conjunto 2-independiente exterior de la digráfica $L(D)$ de la figura 4.4. Es natural preguntarnos ¿si tenemos un subconjunto de $V(D)$, digamos S , que es un conjunto k -independiente exterior en D , entonces $f(S)$ será un conjunto k -independiente exterior en $L(D)$? Esto es cierto y lo demostramos en el siguiente lema.

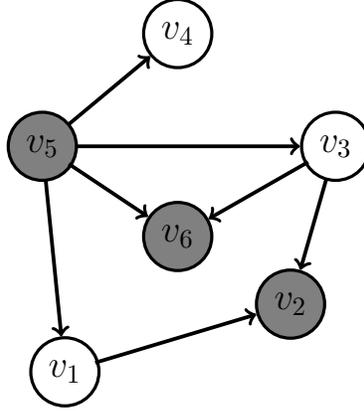


Figura 4.3: Digráfica D y en gris un conjunto 2-independiente exterior S

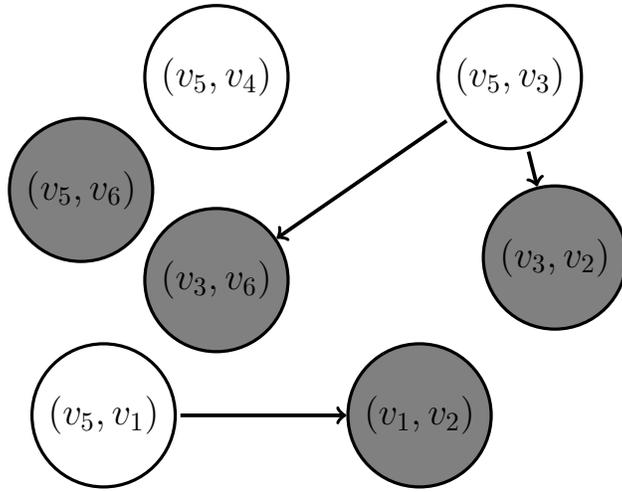


Figura 4.4: Digráfica $L(D)$ y en gris el conjunto 2-independiente exterior $f(S)_L$

Lema 4.1.1.2. Sean D una digráfica y k un entero mayor a cero. Si S es un subconjunto de $V(D)$ y es k -independiente exterior en D , entonces $f(S)_L$ es un conjunto k -independiente exterior en $L(D)$.

Demostración. Sean D una digráfica y S un conjunto k -independiente exterior en D , por demostrar que $f(S)_L$ es un conjunto k -independiente exterior de $L(D)$, es decir, para toda a en $f(S)_L$ se tiene que

$$|N_{L(D)}^+(a) \cap f(S)_L| < k.$$

Supongamos por contradicción que existe $a_0 = (x, y_0)$ en $f(S)_L$ tal que

$$|N_{L(D)}^+(a_0) \cap f(S)_L| \geq k.$$

Lo anterior implica que existe $\{a_1, \dots, a_k\} \subseteq N_{L(D)}^+(a_0) \cap f(S)_L$. Por definición de $L(D)$, tenemos que para cada i en $\{1, \dots, k\}$ existe $y_i \in V(D)$, tal que $a_i = (y_0, y_i) \in F(D)$. Por

lo tanto, $\{y_1, \dots, y_k\} \subseteq N_D^+(y_0)$. Por definición de f , $\{y_0, y_1, \dots, y_k\} \subseteq S$. Así $|N_D^+(y_0) \cap S| \geq |\{y_1, \dots, y_k\}| = k$, por lo que S no es un conjunto k -independiente exterior, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, para todo $a \in f(S)_L$ se tiene que $|N_{L(D)}^+(a) \cap f(S)_L| < k$, es decir, $f(S)_L$ es un conjunto k -independiente exterior en $L(D)$. □

Notemos que el conjunto $S = \{v_3, v_4, v_5\}$ en la digráfica D de la figura 4.5 es un conjunto 3-absorbente exterior en D y

$$f(S)_L = \{(v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_1, v_5), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_3)\}$$

es un conjunto 3-absorbente exterior en $L(D)$ (figura 4.6). Es natural preguntarnos ¿si tenemos un subconjunto de $V(D)$, digamos S , que es k -absorbente exterior en D , entonces $f(S)_L$ es un conjunto k -absorbente exterior en $L(D)$? Esto es cierto y lo demostramos en el siguiente lema.

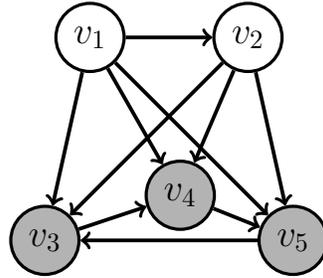


Figura 4.5: Digráfica D , en gris un conjunto 3-absorbente exterior

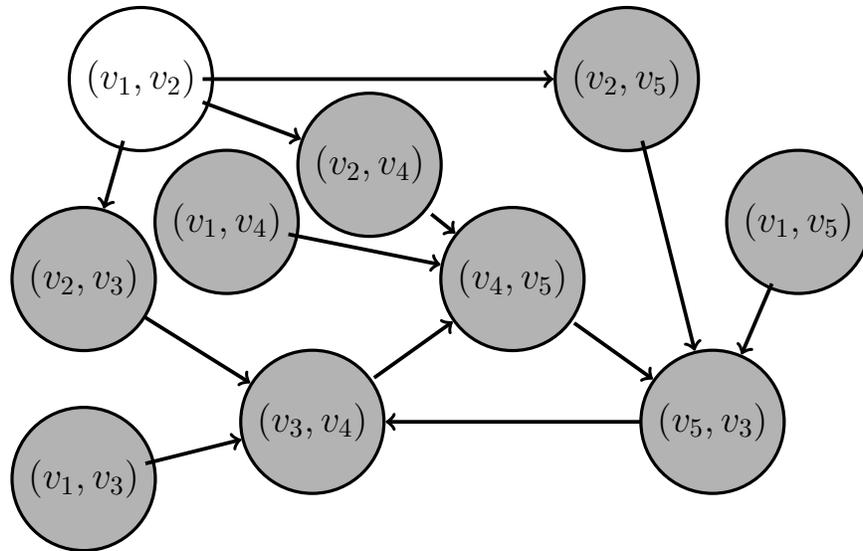


Figura 4.6: Digráfica $L(D)$, en gris un conjunto 3-absorbente exterior

Lema 4.1.1.3. Sean D una digráfica y k un entero mayor a cero. Si S es un subconjunto de $V(D)$ y es k -absorbente exterior en D , entonces $f(S)_L$ es un conjunto k -absorbente exterior en $L(D)$.

Demostración. Sean D una digráfica y S un conjunto k -absorbente exterior en D , por demostrar que $f(S)_L$ es un conjunto k -absorbente exterior de $L(D)$, es decir, para toda a en $V(L(D)) \setminus f(S)_L$ se tiene que $|N_{L(D)}^+(a) \cap f(S)_L| \geq k$. Supongamos que $a = (x, y)$ es un vértice en $V(L(D)) \setminus f(S)_L$, con x y y vértices de D . Como $a \notin f(S)_L$, por definición de f , $y \notin S$. Como S es un conjunto k -absorbente exterior en D , existen y_1, \dots, y_k en $N_D^+(y) \cap S$, lo que implica que para cada i en $\{1, \dots, k\}$, $a_i = (y, y_i)$ es una flecha en D . Por definición de $L(D)$, para cada i en $\{1, \dots, k\}$, (a, a_i) es una flecha en $L(D)$. Como cada $y_i \in S$, por definición de f , a_i pertenece a $f(S)_L$, por lo tanto,

$$|N_{L(D)}^+(a) \cap f(S)_L| \geq |\{a_1, \dots, a_k\}| = k.$$

Por lo que concluimos que $f(S)_L$ es un conjunto k -absorbente exterior en $L(D)$. □

Teorema 4.1.1.1. Sean D una digráfica y k un entero mayor a cero. Si S es un k -núcleo exterior en D , entonces $f(S)_L$ es un k -núcleo exterior en $L(D)$.

Demostración. Es inmediato de los lemas 4.1.1.3 y 4.1.1.2. □

Corolario 4.1.1.1. Sean D una digráfica y S un subconjunto de $V(D)$. Si S es un núcleo en D , entonces $f(S)_L$ es un núcleo en $L(D)$.

Demostración. Caso particular del teorema 4.1.1.1 cuando $k = 1$. □

Ahora demostraremos que el número de k -núcleos exteriores de D es menor o igual que el número de k -núcleos exteriores de $L(D)$.

Denotamos con \mathfrak{D} al conjunto de todos los k -núcleos exteriores de D y con \mathfrak{L} al conjunto de todos los k -núcleos exteriores de $L(D)$. Definimos $f' : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{L}$ la función restringida de f a los k -núcleos exteriores de D y $L(D)$.

Lema 4.1.1.4. Sean D una digráfica, $L(D)$ su digráfica de líneas y k un entero positivo. La función f' definida anteriormente es inyectiva.

Demostración. Hay que demostrar que si S_1 y S_2 son k -núcleos exteriores de D y $S_1 \neq S_2$, entonces $f'(S_1)_L \neq f'(S_2)_L$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que existe n_1 en S_1 tal que n_1 no pertenece a S_2 . Como S_2 es un conjunto k -absorbente exterior, implica que $|N_D^+(n_1) \cap S_2| \geq k$, es decir, existe un subconjunto de $N_D^+(n_1) \cap S_2$ con k elementos, digamos $S = \{v_1, \dots, v_k\}$.

Como S_1 es un conjunto k -independiente exterior, entonces $|N_D^+(n_1) \cap S_1| < k$. Por lo tanto, para alguna i en $\{1, \dots, k\}$, $v_i \in S_2$ y $v_i \notin S_1$. Como $v_i \in N_D^+(n_1)$, entonces $a = (n_1, v_i) \in F(D)$. Así $a \notin f(S_1)_L$ y $a \in f(S_2)_L$. Por lo tanto, $f'(S_1)_L \neq f'(S_2)_L$, es decir, f' es inyectiva. □

Teorema 4.1.1.2. Sean D una digráfica, $L(D)$ su digráfica de líneas y k un entero positivo. El número de k -núcleos exteriores de D es menor o igual que el número de k -núcleos exteriores de $L(D)$.

Demostración. Es consecuencia de los lemas 4.1.1.2, 4.1.1.3 y 4.1.1.4. □

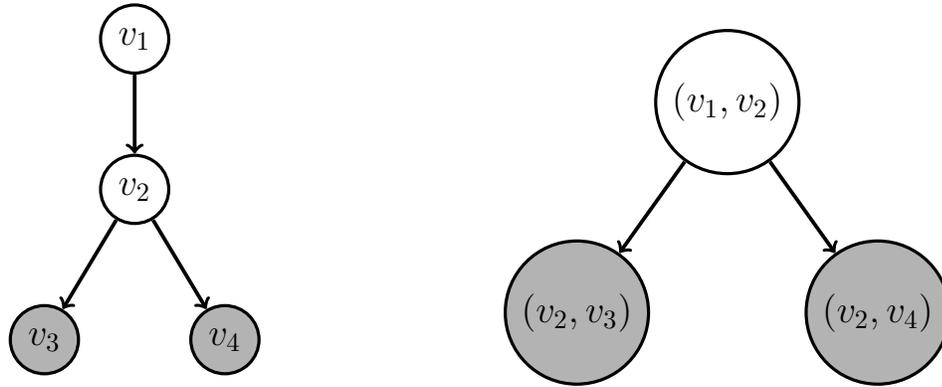
Corolario 4.1.1.2. Sean D una digráfica y $L(D)$ su digráfica de líneas. El número de núcleos de D es menor o igual que el número de núcleos de $L(D)$.

Demostración. Caso particular del teorema 4.1.1.2, cuando $k = 1$. □

Sean D una digráfica, $L(D)$ su digráfica de líneas y S un k -núcleo exterior de $L(D)$, podemos preguntarnos si al tomar los vértices finales de todo elemento de S , obtendremos un k -núcleo exterior en D . Veremos que esto no es necesariamente cierto. Por ejemplo, sean D la digráfica de la figura 4.7a y $L(D)$ su digráfica de líneas (figura 4.7b), consideremos a

$$S = \{(v_2, v_3), (v_2, v_4)\} \subseteq V(L(D)),$$

notemos que es un 2-núcleo exterior de $L(D)$. En D , al fijarnos en los vértices finales de los elementos de S , obtenemos el conjunto $\{v_3, v_4\}$ (figura 4.7a). Observemos que el vértice v_1 no es parte del conjunto $f^{-1}(S)$, pues al tener ingrado cero no puede ser vértice final de alguna flecha. El conjunto S no 2-absorbe exteriormente a v_1 . Por lo tanto, $f^{-1}(S)$ no es un 2-núcleo exterior en D . El problema son los vértices de ingrado cero y que no son k -absorbidos exteriormente por el conjunto $f^{-1}(S)$.



(a) Digráfica D , en gris $f^{-1}(S)$, un conjunto que no es 2-absorbente

(b) Digráfica $L(D)$, en gris S un 2-núcleo exterior

Figura 4.7: Ejemplo de un k -núcleo exterior de $L(D)$ cuya preimagen bajo f no es k -absorbente en D

Con este ejemplo queda claro que hay que tomar otra función que relacione los k -núcleos exteriores de $L(D)$ con los k -núcleos exteriores de D , para mostrar que el número de elementos en \mathfrak{L} es a lo más el número de elementos en \mathfrak{D} . En la siguiente sección veremos dicha función.

4.1.2. La función g

En esta sección definiremos una función que nos permitirá relacionar los k -núcleos exteriores de $L(D)$ con los k -núcleos exteriores de D .

Sean D una digráfica, $L(D)$ su digráfica de líneas, k un entero mayor a cero y S un subconjunto de $F(D)$. Definimos los conjuntos

$$Y_S = \{y \in V(D) \mid a = (x, y) \text{ con } a \in S\} \text{ y}$$

$$X_S = \{v \in V(D) \mid \delta^-(v) = 0 \text{ y } |N_D^+(v) \cap Y_S| < k\}.$$

Por ejemplo, en la digráfica D de la figura 4.8, para el subconjunto $S = \{(v_1, v_2), (v_1, v_6), (v_6, v_7)\}$ de $F(D)$ y $k = 2$, tenemos que $Y_S = \{v_2, v_6, v_7\}$. Como $\delta^-(v_5) = 0$ y $|N_D^+(v_5) \cap Y_S| = |\{v_6\} \cap \{v_2, v_6, v_7\}| < 2$, entonces $v_5 \in X_S$. Ahora para v_1 , tenemos que $\delta^-(v_1) = 0$ y $|N_D^+(v_1) \cap Y_S| = |\{v_2, v_6\} \cap \{v_2, v_6, v_7\}| = 2$ por lo tanto, $v_1 \notin X_S$. Así $X_S = \{v_5\}$ (figura 4.9a). Para este mismo conjunto S , cuando $k = 3$, tenemos que $Y_S = \{v_2, v_6, v_7\}$ y $X_S = \{v_1, v_5\}$ (figura 4.9b).

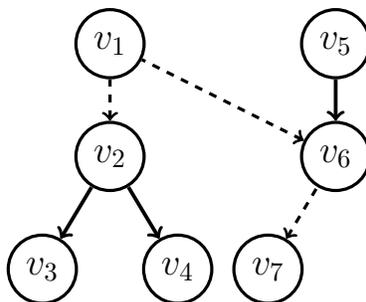
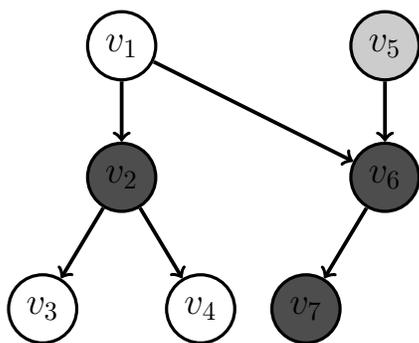
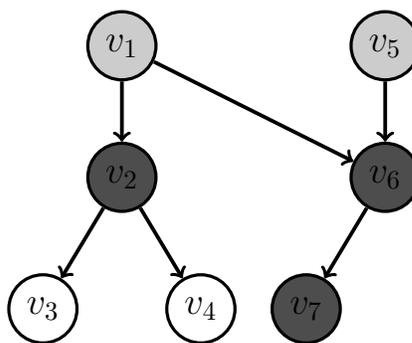


Figura 4.8: Digráfica D , en punteado un subconjunto S de flechas de D



(a) Digráfica D , para $k = 2$, en gris oscuro el conjunto Y_S y en gris claro el conjunto X_S



(b) Digráfica D , para $k = 3$, en gris oscuro el conjunto Y_S y en gris claro el conjunto X_S

Figura 4.9: Y_S y X_S para distintos valores de k

Observación 4.1.2. Sea D una digráfica. Si S es un subconjunto de $F(D)$, entonces $X_S \cap Y_S = \emptyset$.

Demostración. Sea $v \in Y_S$, por definición $\delta^-(v) \geq 1 > 0$, por lo que $v \notin X_S$. Por lo tanto, $X_S \cap Y_S = \emptyset$. \square

Sean D una digráfica, $L(D)$ su digráfica de líneas y S un subconjunto de $F(D)$, definimos a la relación g de $\mathcal{P}(F(D))$ en $\mathcal{P}(V(D))$, dada por : $(S, S') \in g$ si y solo si $S' = X_S \cup Y_S$.

Observación 4.1.3. Si D una digráfica y k un entero mayor a cero, entonces la relación g definida previamente es una función de $\mathcal{P}(F(D))$ en $\mathcal{P}(V(D))$.

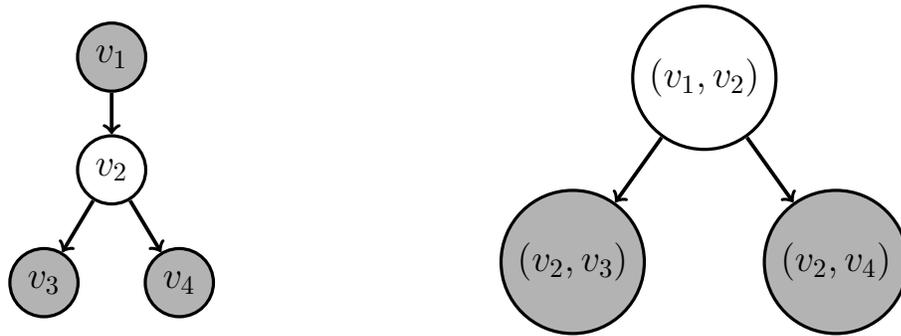
Demostración. Sean D una digráfica, k un entero mayor a cero y g definida como antes. Para mostrar que g es una función basta ver que si S_1 y S_2 son subconjuntos de $F(D)$, tales que $S_1 = S_2$, $(S_1, S'_1) \in g$ y $(S_2, S'_2) \in g$, entonces $S'_1 = S'_2$. Como $S'_1 = X_{S_1} \cup Y_{S_1}$ y $S'_2 = X_{S_2} \cup Y_{S_2}$ demostraremos que $Y_{S_1} = Y_{S_2}$ y $X_{S_1} = X_{S_2}$.

Si $v \in Y_{S_1}$, entonces existe $a \in F(D)$, tal que v es vértice final de a y $a \in S_1$, como $S_1 = S_2$, tenemos que $a \in S_2$, lo cual implica que $v \in Y_{S_2}$. Acabamos de demostrar que $Y_{S_1} \subseteq Y_{S_2}$. Análogamente se prueba que $Y_{S_2} \subseteq Y_{S_1}$. Por lo tanto, $Y_{S_1} = Y_{S_2}$.

Si $v \in X_{S_1}$, entonces $\delta^-(v) = 0$ y $|N_D^+(v) \cap Y_{S_1}| < k$. Como $Y_{S_1} = Y_{S_2}$, tenemos que $|N_D^+(v) \cap Y_{S_2}| < k$. Por lo tanto, $v \in X_{S_2}$, lo que implica que $X_{S_1} \subseteq X_{S_2}$. De manera análoga se demuestra que $X_{S_2} \subseteq X_{S_1}$.

Así $S'_1 = X_{S_1} \cup Y_{S_1} = X_{S_2} \cup Y_{S_2} = S'_2$. Por lo tanto, g es una función. \square

Sean D una digráfica y $L(D)$ su digráfica de líneas. Recordemos que si S es un subconjunto de $F(D)$, entonces S es un subconjunto de $V(L(D))$. En la figura 4.10 se muestra una digráfica D y su digráfica de líneas $L(D)$. Notemos que $S = \{(v_2, v_3), (v_2, v_4)\}$ es un conjunto 2-absorbente exterior de $L(D)$ y el conjunto $g(S) = Y_S \cup X_S = \{v_3, v_4, v_1\}$ es un conjunto 2-absorbente exterior en D . Con el ejemplo anterior es natural preguntarse ¿si $S \subseteq V(L(D))$ es un conjunto k -absorbente exterior en $L(D)$, entonces $g(S)$ es un conjunto k -absorbente exterior en D ? El siguiente lema contestará esta pregunta.



(a) Digráfica D , en gris $g(S)$, un conjunto 2-absorbente exterior

(b) Digráfica $L(D)$, en gris S , un conjunto 2-absorbente exterior

Figura 4.10: Los conjuntos S y $g(S)$ son 2-absorbentes exteriores de D y $L(D)$, respectivamente

Lema 4.1.2.1. Sean D una digráfica, $L(D)$ su digráfica de líneas y k un entero mayor a cero. Si S es un subconjunto de $V(L(D))$ y es k -absorbente exterior en $L(D)$, entonces $g(S)$ es un conjunto k -absorbente exterior en D .

Demostración. Sean D una digráfica, $L(D)$ su digráfica de líneas, k un entero mayor a cero y S es un subconjunto de $V(L(D))$ un conjunto k -absorbente exterior de $L(D)$. Consideremos v en $V(D) \setminus g(S)$ y demostraremos que $|N_D^+(v) \cap g(S)| \geq k$. Como $v \notin g(S)$, entonces $v \notin Y_S$ y $v \notin X_S$. En particular, como $v \notin X_S$, tenemos los siguientes dos casos:

Caso 1) $|N_D^+(v) \cap Y_S| \geq k$.

En este caso se sigue que $|N_D^+(v) \cap g(S)| \geq k$.

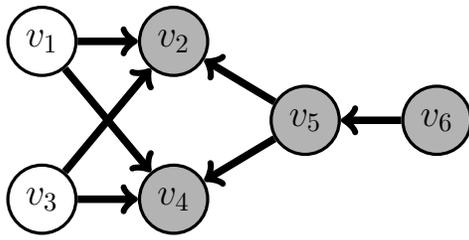
Caso 2) $\delta^-(v) > 0$.

En este caso existe $a \in F(D)$ tal que $a = (x, v)$. Como $v \notin Y_S$, entonces $a \notin S$ y dado que S es un conjunto k -absorbente exterior en $L(D)$, entonces existe $\{a_1, \dots, a_k\}$ subconjunto de $V(L(D)) \cap S$, tal que $a_i \in N_{L(D)}^+(a)$ para cada i en $\{1, \dots, k\}$. Por definición de $L(D)$, para cada i en $\{1, \dots, k\}$ existen $y_i \in V(D)$ tal que $a_i = (v, y_i) \in F(D)$. Se sigue que $y_i \in Y_S$, para cada i en $\{1, \dots, k\}$. Por lo cual, $|N_D^+(v) \cap g(S)| \geq |\{y_1, \dots, y_k\}| \geq k$.

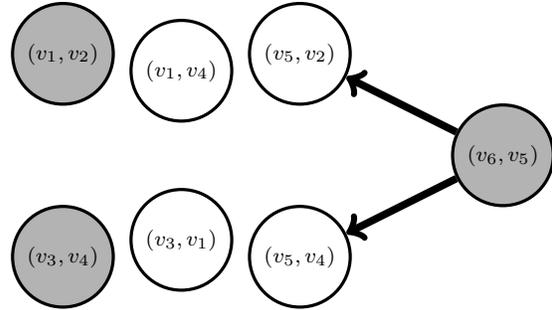
En cualquier caso, $|N_D^+(v) \cap g(S)| \geq k$. Por lo tanto, $g(S)$ es un conjunto k -absorbente exterior de D . \square

Hemos demostrado que g asocia conjuntos k -absorbentes exteriores en $L(D)$ a conjuntos k -absorbentes exteriores en D . ¿Pasa lo mismo con la k -independencia exterior? es decir, ¿si S es un conjunto k -independiente exterior en $L(D)$, entonces $g(S)$ es un conjunto k -independiente exterior en D ?

En la digráfica $L(D)$ de la figura 4.11b, tenemos marcado en gris el conjunto $S = \{(v_1, v_2), (v_3, v_4), (v_6, v_5)\}$ el cual es un conjunto 2-independiente exterior en $L(D)$. Podemos observar en la digráfica D mostrada en la figura 4.11a, que $g(S) = \{v_2, v_4, v_5, v_6\}$ no es un conjunto 2-independiente exterior en D , pues el vértice v_5 tiene 2 vecinos exteriores dentro del conjunto $g(S)$.



(a) Digráfica D en la cual $g(S)$ (coloreado en gris) no es un conjunto 2-independiente exterior



(b) Digráfica $L(D)$ en la cual S (coloreado en gris) es un conjunto 2-independiente exterior

Figura 4.11: Conjuntos en D y $L(D)$

Este ejemplo muestra que aunque S sea un conjunto k -independiente exterior en $L(D)$, $g(S)$ no necesariamente es k -independiente exterior en D . Podemos hacernos un par de preguntas más ¿qué podemos pedirle a S , para que $g(S)$ sea un conjunto k -independiente exterior en D ? ¿Si S es un k -núcleo exterior en $L(D)$, entonces $g(S)$ es un k -núcleo exterior en D ? El siguiente ejemplo nos acerca a las respuestas de estas preguntas.

En la digráfica $L(D)$ de la figura 4.13, tenemos marcado en gris el conjunto $S = \{(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_3, v_1), (v_3, v_2), (v_3, v_4)\}$, el cual es un 3-núcleo exterior en $L(D)$. Podemos observar en la digráfica D de la figura 4.12 que $g(S) = \{v_1, v_2, v_4\}$ es un 3-núcleo exterior en D .

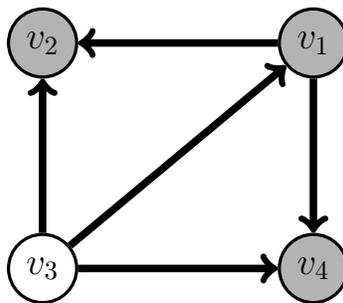


Figura 4.12: Digráfica D , en gris $g(S)$ es un 3-núcleo exterior

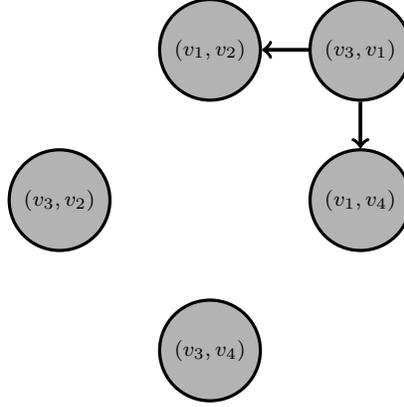


Figura 4.13: Digráfica $L(D)$, en gris S es un 3-núcleo exterior

Teorema 4.1.2.1. Sean D una digráfica, $L(D)$ su digráfica de líneas, S un subconjunto de $V(L(D))$ y k un entero mayor a cero. Si S es un k -núcleo exterior de $L(D)$, entonces $g(S)$ es un k -núcleo exterior de D .

Demostración. Sean D una digráfica, $L(D)$ su digráfica de líneas, k un entero mayor a cero y S un k -núcleo exterior de $L(D)$. Por demostrar que $g(S)$ es un conjunto k -absorbente exterior y un conjunto k -independiente exterior de D . Por el lema 4.1.2.1, $g(S)$ es un conjunto k -absorbente exterior de D , así que solo falta demostrar que $g(S)$ es un conjunto k -independiente exterior. Sea $v \in g(S)$, afirmamos que $|N_D^+(v) \cap g(S)| < k$. Como $v \in g(S)$ y $g(S) = X_S \cup Y_S$ tenemos dos casos:

Caso 1) $v \in X_S$.

En este caso, por definición de X_S , $|N_D^+(v) \cap Y_S| < k$. Por otro lado $N_D^+(v) \cap X_S = \emptyset$, pues todos los vértices en X_S tiene ingrado cero. Por lo tanto, podemos concluir que $|N_D^+(v) \cap g(S)| < k$.

Caso 2) $v \in Y_S$.

En este caso existen x en $V(D)$ y a en $F(D)$ tales que $a = (x, v)$ y $a \in S$. Supongamos por contradicción que $|N_D^+(v) \cap g(S)| \geq k$, lo cual implica que existen $\{y_1, \dots, y_k\} \subseteq N_D^+(v) \cap g(S)$ y $\{a_1, \dots, a_k\} \subseteq F(D)$, tal que $a_i = (v, y_i)$ para todo i en $\{1, \dots, k\}$. Como para toda $z \in X_S$, $\delta^-(z) = 0$, tenemos que $\{y_1, \dots, y_k\} \subseteq Y_S$.

Por otro lado, por definición de $L(D)$, $\{a_1, \dots, a_k\} \subseteq V(L(D))$. Por lo que tenemos dos casos, $a_i \in S$ para toda i en $\{1, \dots, k\}$, o existe alguna j en $\{1, \dots, k\}$, tal que $a_j \notin S$.

Caso 2.a) Si $a_i \in S$ para toda i en $\{1, \dots, k\}$, entonces por definición de $L(D)$, tenemos que $\{a_1, \dots, a_k\} \subseteq N_{L(D)}^+(a) \cap S$, por lo tanto, $|N_{L(D)}^+(a) \cap S| \geq |\{a_1, \dots, a_k\}| = k$. Esto contradice que S es un conjunto k -independiente exterior en $L(D)$ (ver figura 4.14).

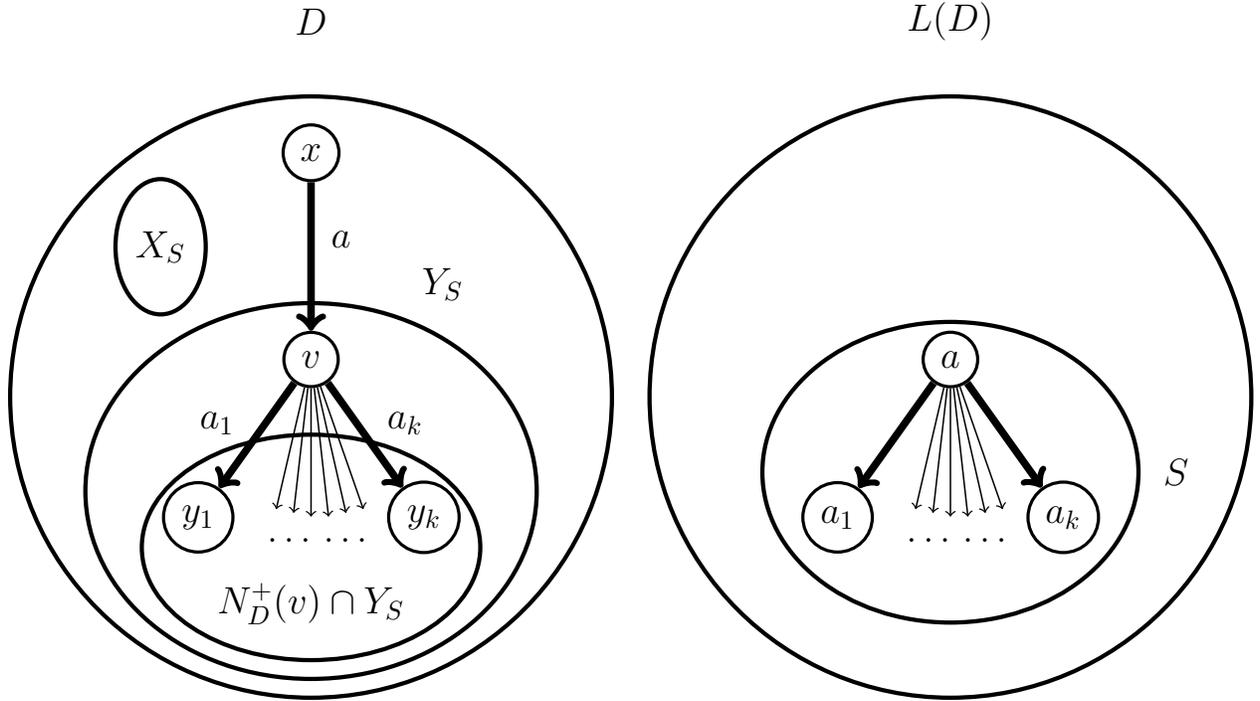


Figura 4.14: Caso 2.a

Caso 2.b) Si $a_j \notin S$ para alguna j en $\{1, \dots, k\}$, entonces como S es un conjunto k -absorbente exterior se tiene que existe $\{c_1, \dots, c_k\}$ subconjunto de $N_{L(D)}^+(a_j) \cap S$. Por definición de $L(D)$, el vértice final y_j de a_j es el vértice inicial de las flechas c_1, \dots, c_k en D (ver figura 4.15).

Por otro lado, como $y_j \in Y_S$, por definición de Y_S , existe $b = (r, y_j) \in F(D)$ tal que $b \in S$ en $L(D)$. Como en D el vértice final de a_j y b es y_j , por definición de $L(D)$ tenemos que $\{c_1, \dots, c_k\} \subseteq N_{L(D)}^+(b) \cap S = N_{L(D)}^+(a_j) \cap S$, por lo que $k \leq |N_{L(D)}^+(b) \cap S|$, esto contradice que S es un conjunto k -independiente exterior en $L(D)$.

Por los casos 1 y 2, tenemos que $g(S)$ es un conjunto k -independiente exterior en D .

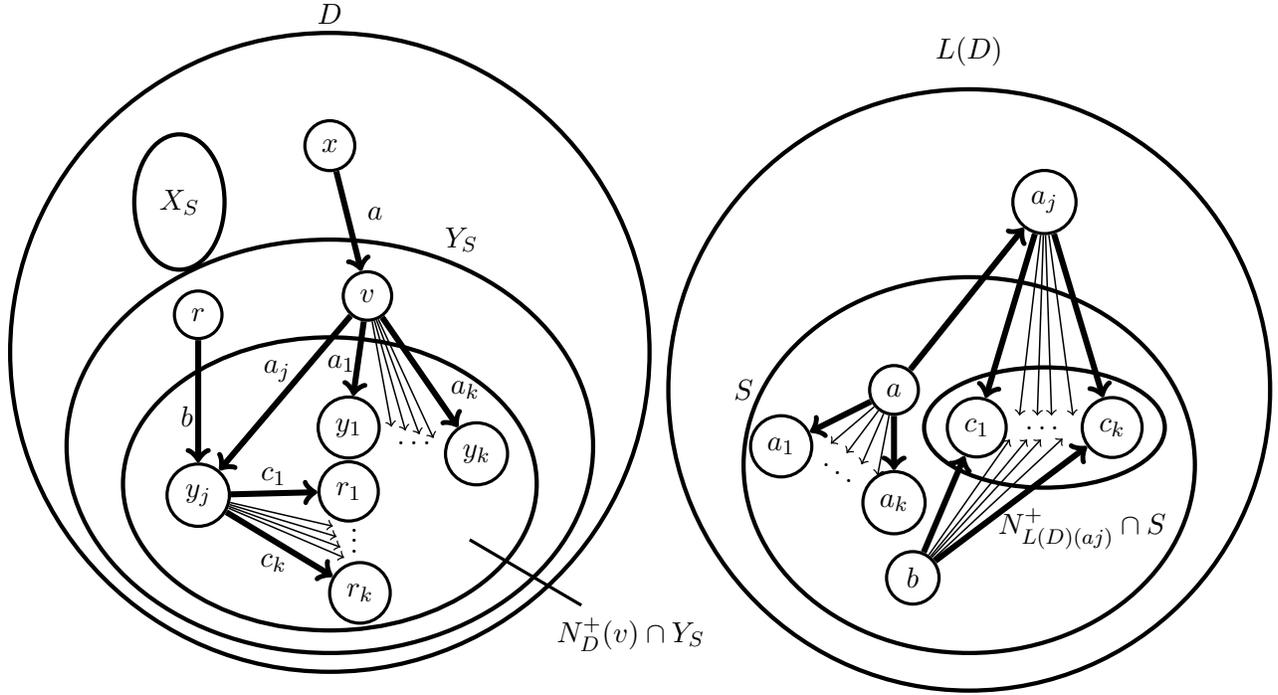


Figura 4.15: Caso 2.b

Concluimos que $g(S)$ es un conjunto k -independiente exterior y un conjunto k -absorbente exterior de D . Por lo tanto, $g(S)$ es un k -núcleo exterior de D . \square

Recordemos que denotamos con \mathfrak{D} al conjunto de todos los k -núcleos exteriores de D y con \mathfrak{L} al conjunto de todos los k -núcleos exteriores de $L(D)$. Definimos $g' : \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{D}$ como la función restringida de g a los k -núcleos exteriores de D y $L(D)$.

Lema 4.1.2.2. *Si D es una digráfica, $L(D)$ su digráfica de líneas y k un entero positivo, entonces la función g' es inyectiva.*

Demostración. Sean D una digráfica, $L(D)$ su digráfica de líneas, k un entero positivo y S_1 y S_2 k -núcleos exteriores de $L(D)$. Por demostrar que si $S_1 \neq S_2$, entonces $g'(S_1) \neq g'(S_2)$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que existe $a_0 = (x_0, y_0) \in S_1$ tal que $a_0 \notin S_2$. Como S_2 es un conjunto k -absorbente exterior en $L(D)$, existe un conjunto, digamos $S = \{a_1, \dots, a_k\}$, tal que S es subconjunto de $N_{L(D)}^+(a_0) \cap S_2$. Por definición de $L(D)$, para toda i en $\{1, \dots, k\}$ existe z_i en $V(D)$ tal que $a_i = (y_0, z_i) \in F(D)$. Además por definición de g' , $z_i \in g'(S_2)$.

Notemos que $z_i \in N_D^+(y_0)$, para toda i en $\{1, \dots, k\}$. Además, $y_0 \in g'(S_1)$ y como $g'(S_1)$ es un conjunto k -independiente exterior en D , implica que $z_i \notin g'(S_1)$ para alguna i en $\{1, \dots, k\}$ (ver figura 4.16). Así, existe $z_i \in g'(S_2)$ tal que $z_i \notin g'(S_1)$; es decir, $g'(S_1) \neq g'(S_2)$. Por lo tanto, g' es inyectiva. \square

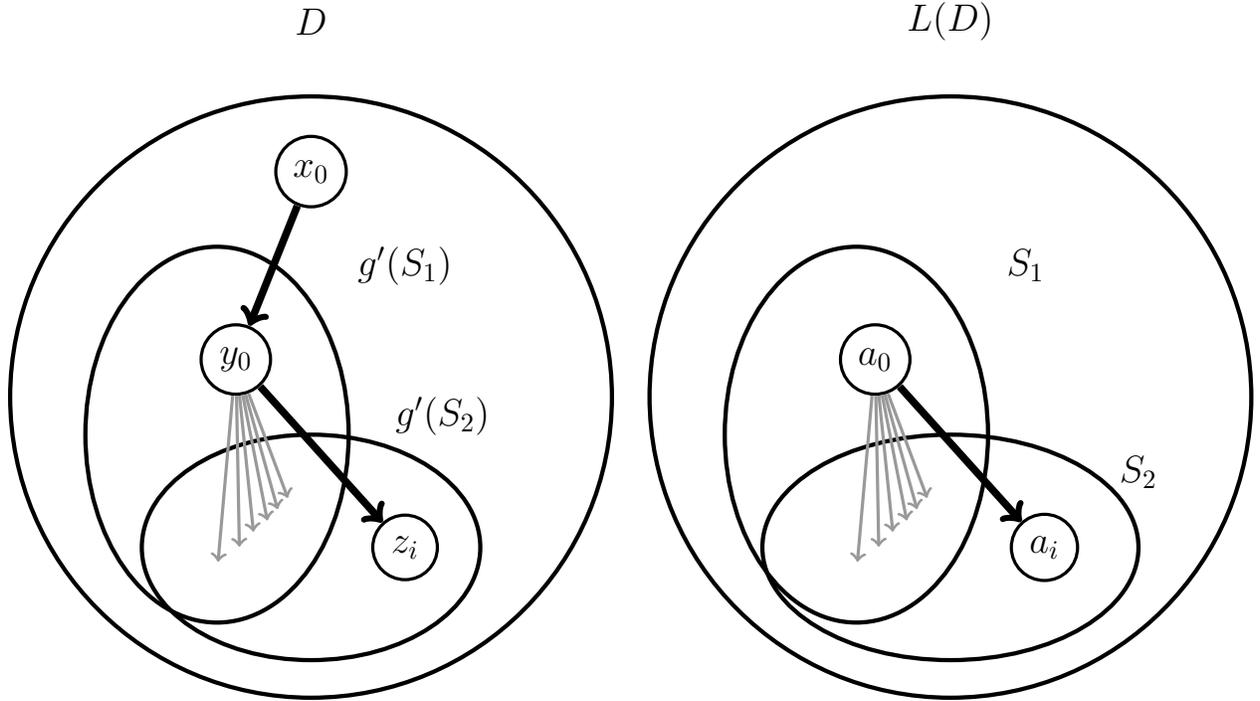


Figura 4.16: $g'(S_1)$ y $g'(S_2)$

Teorema 4.1.2.2. Sean D una digráfica, $L(D)$ su digráfica de líneas y k un entero positivo. El número de k -núcleos exteriores de $L(D)$ es menor o igual al número de k -núcleos exteriores de D .

Demostración. Es consecuencia del lema 4.1.2.2 y el teorema 4.1.2.1. □

Corolario 4.1.2.1. Sean D una digráfica y $L(D)$ su digráfica de líneas. El número de núcleos de $L(D)$ es menor o igual al número de núcleos de D .

Demostración. Caso particular del teorema 4.1.2.2, cuando $k = 1$. □

4.1.3. Teorema de igualdad de k -núcleos exteriores

Sin más preámbulo, presentamos el teorema resultado de las secciones 4.1.1 y 4.1.2.

Teorema 4.1.1. Sean D una digráfica, $L(D)$ su digráfica de líneas y k un entero positivo. El número de k -núcleos exteriores de $L(D)$ es igual al número de k -núcleos exteriores de D .

Demostración. Del teorema 4.1.1.2 tenemos que $|\mathfrak{D}| \leq |\mathfrak{L}|$ y del teorema 4.1.2.2 tenemos que $|\mathfrak{L}| \leq |\mathfrak{D}|$. Por lo tanto, $|\mathfrak{D}| = |\mathfrak{L}|$. □

Como consecuencia del teorema 4.1.1, para $k = 1$, tenemos el resultado de Matúš Harminc.

Corolario 4.1.1. Sean D una digráfica y $L(D)$ su digráfica de líneas. El número de núcleos de $L(D)$ es igual al número de núcleos de D .

4.2. k -función de Grundy y $L(D)$

En esta sección generalizaremos el teorema: si D es una digráfica tal que $\delta^-(D) \geq 1$, entonces el número de funciones de Grundy de D es igual al número de funciones de Grundy de $L(D)$. Para ello demostraremos que si D es una digráfica y k es un entero positivo, entonces el número de k -funciones de Grundy de D es igual al número de k -funciones de Grundy de $L(D)$.

Daremos unas definiciones y unos lemas que ayudan a demostrar el resultado mencionado anteriormente. Como la demostración es extensa, la dividiremos en tres secciones. En la sección 4.2.1 mostraremos una forma de asociar k -funciones de Grundy de D con k -funciones de Grundy de $L(D)$, se demostrará con este hecho, que el número de k -funciones de Grundy de D es menor o igual al número de k -funciones de Grundy de $L(D)$. En la sección 4.2.2 exhibiremos una forma de asociar k -funciones de Grundy de $L(D)$ a k -funciones de Grundy de D , demostrando que el número de k -funciones de Grundy de $L(D)$ es menor o igual al número de k -funciones de Grundy de D . En la última sección de este apartado, tendremos el teorema de igualdad y como consecuencia el teorema de H. Galeana Sánchez, L. Pastrana Ramírez y A. Rincón Mejía [20].

4.2.1. La función f para k -funciones de Grundy

En la figura 4.17a tenemos una 2-función de Grundy f^1 para una digráfica D y en 4.17b tenemos otra 2-función de Grundy f^2 para la misma digráfica. Notemos que para los vértices en la vecindad exterior de v_0 , a saber v_5 y v_6 , las funciones valen lo mismo; es decir, $f^1(v_5) = f^2(v_5) = 0$ y $f^1(v_6) = f^2(v_6) = 0$. Notemos también que $f^1(v_0) = f^2(v_0) = 1$, es cierto que, ¿si D es una digráfica, x_0 un vértice en $V(D)$ y f^1 y f^2 k -funciones de Grundy tales que para todo y en $N_D^+(x_0)$, $f^1(y) = f^2(y)$, entonces $f^1(x_0) = f^2(x_0)$? Esto sí se cumple y se demuestra en el siguiente lema.

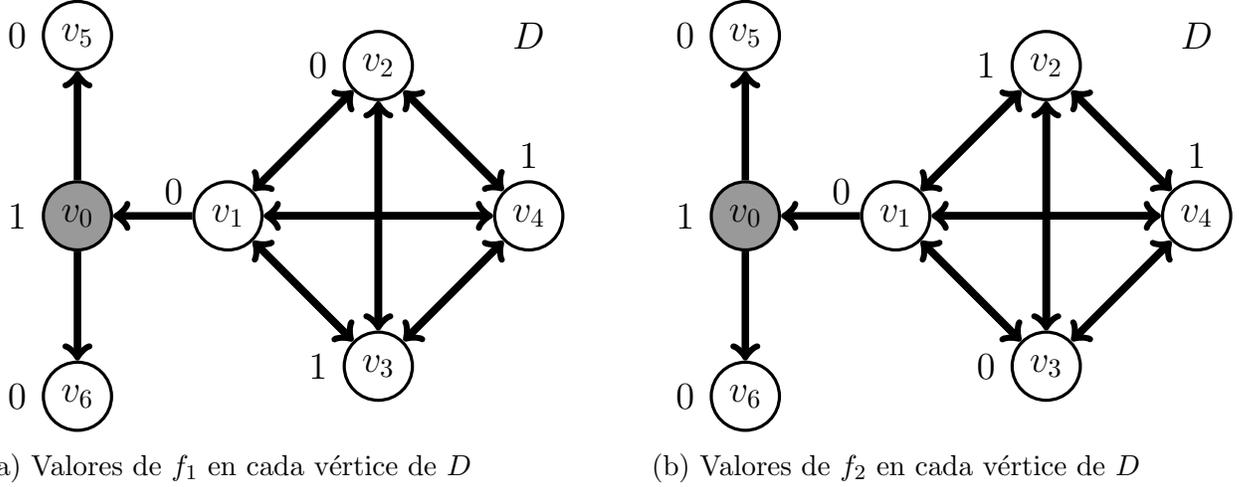


Figura 4.17: f_1 y f_2 dos k -funciones de Grundy para la misma digráfica D

Lema 4.2.1.1. Sean D una digráfica y x_0 un vértice en $V(D)$. Si f^1 y f^2 son k -funciones de Grundy tales que para todo y en $N_D^+(x_0)$, $f^1(y) = f^2(y)$, entonces $f^1(x_0) = f^2(x_0)$.

Demostración. Sean D una digráfica, x_0 un vértice en $V(D)$ y f^1 y f^2 k -funciones de Grundy tales que para todo $y \in N_D^+(x_0)$, $f^1(y) = f^2(y)$, demostraremos que $f^1(x_0) = f^2(x_0)$, lo cual haremos por contradicción. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $f^1(x_0) = l < l + 1 \leq f^2(x_0)$, con l un entero positivo. Como f^2 es una k -función de Grundy, existen al menos k vértices y_1, \dots, y_k en $N_D^+(x_0)$ tales que $f^2(y_i) = l$, para todo i en $\{1, \dots, k\}$. Por hipótesis, para todo $y \in N_D^+(x_0)$, $f^1(y) = f^2(y)$; es decir, hay k vecinos exteriores de x_0 que toman el valor l bajo f^1 . Lo cual es una contradicción, ya que por definición de k -función de Grundy (la condición 2 de la definición 3.2.1), a lo más $k - 1$ vértices en $N_D^+(x_0)$ pueden cumplir que $f^1(y_i) = l$. Por lo tanto, $f^1(x_0) = f^2(x_0)$. □

Sean D una digráfica, $L(D)$ su digráfica de líneas y f una k -función de Grundy de D , denotamos por f_L a la siguiente función:

$$f_L : V(L(D)) \longrightarrow \mathbb{N},$$

si $a \in V(L(D)) = F(D)$ con $a = (x_1, x_2)$ y $\{x_1, x_2\} \subseteq V(D)$, entonces $f_L(a) = f(x_2)$.

Por ejemplo, en la digráfica D de la figura 4.18, mostramos una 2-función de Grundy f dada por $f(v_1) = 0$, $f(v_2) = 0$, $f(v_3) = 1$, $f(v_4) = 1$, donde a los vértices del conjunto con valor 0 les asignamos el color gris y a los vértices que toman el valor 1 el color blanco.

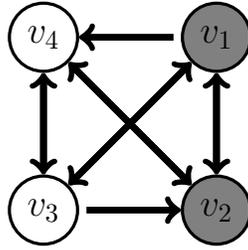


Figura 4.18: Digráfica D

En la figura 4.19 tenemos la digráfica de líneas de D (figura 4.18). De acuerdo a la 2-función de Grundy f podemos describir a f_L , los valores asociados a los vértices de $L(D)$ son:

$$f_L((v_1, v_2)) = 0, f_L((v_1, v_3)) = 1, f_L((v_1, v_4)) = 1, f_L((v_2, v_1)) = 0, f_L((v_2, v_4)) = 1,$$

$$f_L((v_3, v_1)) = 0, f_L((v_3, v_2)) = 0, f_L((v_3, v_4)) = 1, f_L((v_4, v_2)) = 0, f_L((v_4, v_3)) = 1.$$

En la figura 4.19, para identificar los vértices del conjunto $V(L(D))$ que bajo f_L toman valor 0, les asignamos el color gris y a los vértices que toman el valor 1 bajo f_L , el color blanco.

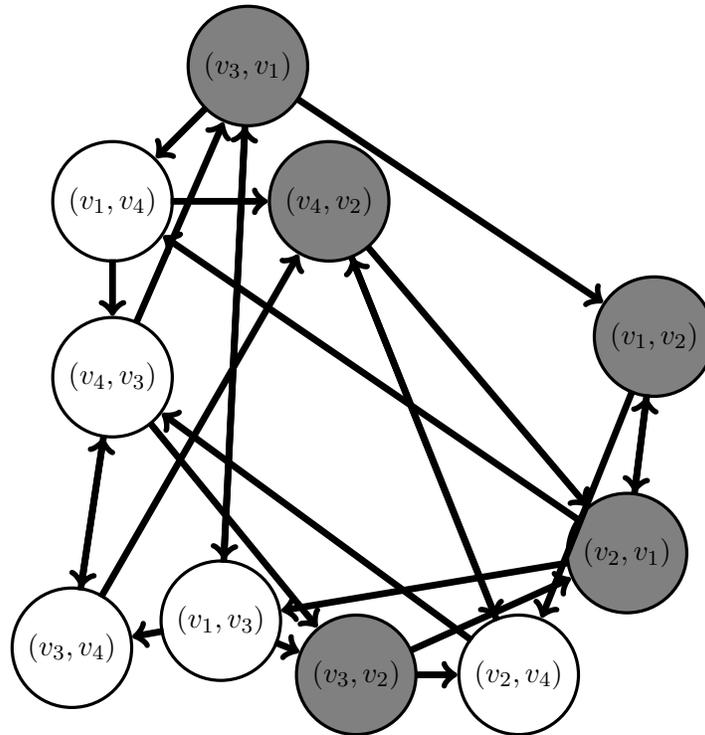


Figura 4.19: Digráfica $L(D)$

Lema 4.2.1.2. Sean D una digráfica, $L(D)$ su digráfica de líneas y f una k -función de Grundy de D . f_L es una k -función de Grundy de $L(D)$.

Demostración. Sean D una digráfica, $L(D)$ su digráfica de líneas, f una k -función de Grundy de D y f_L definida anteriormente. Por demostrar que f_L es una k -función de Grundy de $L(D)$. Consideremos a $a_0 \in V(L(D))$ tal que $f_L(a_0) = l$, con l un entero no negativo. Por definición de $L(D)$, existe $\{x_0, y_0\}$ subconjunto de $V(D)$ tal que $a_0 = (x_0, y_0) \in F(D)$, mostraremos que f_L cumple la primera y segunda condición de k -función de Grundy.

Condición 1) Si $f_L(a_0) = l > 0$, entonces para cada j en $\{0, \dots, l-1\}$, existen al menos k vértices en $N_{L(D)}^+(a_0)$, digamos $\{a_1, \dots, a_k\}$ con $f_L(a_i) = j$, para cada i en $\{1, \dots, k\}$.

Como $f(y_0) = f_L(a_0)$ y f es una k -función de Grundy de D , para cada j en $\{0, \dots, l-1\}$ existen al menos k vértices y_1, \dots, y_k en $N_D^+(y_0)$, con $f(y_i) = j$ para toda i en $\{1, \dots, k\}$. Denotemos con a_i a la flecha (y_0, y_i) para cada i en $\{1, \dots, k\}$.

Por definición de $L(D)$, $a_i = (y_0, y_i) \in N_{L(D)}^+(a_0)$ para toda $1 \leq i \leq k$. Por definición de f_L , $f_L(a_i) = j$. Por lo tanto, para cada j en $\{0, \dots, l-1\}$, existen a_1, \dots, a_k en $N_{L(D)}^+(a_0)$ con $f_L(a_i) = j$, para todo i en $\{1, \dots, k\}$. Por lo que, f_L cumple la condición 1.

Condición 2) Si $f_L(a_0) = l$, entonces existen a lo más $k-1$ vértices en $N_{L(D)}^+(a_0)$ que toman el valor l bajo la función f_L .

Haremos la demostración por contradicción. Supongamos que existen vértices a_1, \dots, a_k en $N_{L(D)}^+(a_0)$, tales que $f_L(a_i) = l$ para todo i en $\{1, \dots, k\}$. Como para toda i en $\{1, \dots, k\}$, $a_i \in N_{L(D)}^+(a_0)$, por definición de $L(D)$, en la digráfica D el vértice final de a_0 , que es y_0 , es el vértice inicial de a_i , es decir, a_i es de la forma (y_0, y_i) para algún y_i en $V(D)$. Por definición de f_L , para todo i en $\{1, \dots, k\}$, tenemos que $f(y_i) = l$. Por lo tanto, existen y_1, \dots, y_k en $N_D^+(y_0)$, con $f(y_i) = l$ y $f(y_0) = l$, lo que es una contradicción ya que f es una k -función de Grundy. Por lo que f_L cumple la condición 2.

Como f_L cumple las condiciones 1 y 2, f_L es una k -función de Grundy de $L(D)$. □

Lema 4.2.1.3. Sean D una digráfica, $L(D)$ su digráfica de líneas y f^1 y f^2 dos k -funciones de Grundy de D . Si $f^1 \neq f^2$, entonces f_L^1 y f_L^2 son dos k -funciones de Grundy distintas de $L(D)$.

Demostración. Sean D una digráfica, $L(D)$ su digráfica de líneas, f^1 y f^2 k -funciones de Grundy en D y f_L^1 y f_L^2 las respectivas k -funciones de Grundy en $L(D)$, demostraremos que si $f_L^1 = f_L^2$, entonces $f^1 = f^2$.

Sea x en $V(D)$, tenemos dos casos, que el ingrado de x sea mayor que 0 o el ingrado de x es 0.

Caso 1) Si el ingrado de x es mayor que 0, entonces existe $a = (z, x)$ en $F(D)$ para algún z en $V(D)$. Por hipótesis $f_L^1(a) = f_L^2(a)$, por definición de f_L y $L(D)$; $f^1(x) = f^2(x)$, y por lo tanto, $f^1(x) = f^2(x)$ para todo vértice x de ingrado distinto de cero.

Caso 2) Si el ingrado de x es 0, entonces para toda y en $N_D^+(x)$, $\delta_D^-(y) \geq 0$. El caso 1, implica que $f^1(y) = f^2(y)$, para toda $y \in N_D^+(x)$. Por el lema 4.2.1.1, tenemos que $f^1(x) = f^2(x)$.

Por lo tanto, $f^1 = f^2$. Concluimos que si f^1 y f^2 son dos k -funciones de Grundy de D tales que $f^1 \neq f^2$, entonces f_L^1 y f_L^2 son dos k -funciones de Grundy distintas de $L(D)$. \square

La digráfica D de la figura 4.20 no tiene 2-función de Grundy que tenga un conjunto de vértices de 3 o 4 elementos con valor cero, por que cualquier conjunto de tres vértices no es 2-independiente exterior, lo que va en contra de la condición 2. No hay 2-función de Grundy que tenga un conjunto de 1 elemento con valor cero, ya que cualquier conjunto de 1 vértice no es 2-absorbente exterior, lo que va en contra de la condición 1. Para saber cuántas 2-funciones de Grundy hay solo basta fijarnos en los conjuntos de dos elementos, y cuáles de ellos no son un 2-núcleo exterior y, por lo tanto, no podrían cumplir las condiciones 1 o 2 para el valor cero. Los conjuntos $\{v_1, v_3\}$, $\{v_3, v_4\}$ y $\{v_1, v_2\}$ no son 2-absorbentes exteriores.

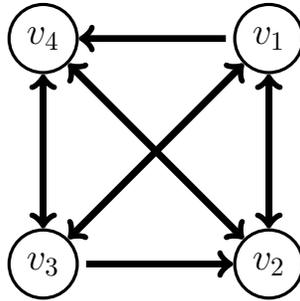


Figura 4.20: Digráfica D

$$f^1(v_1) = 1, f^1(v_2) = 0, f^1(v_3) = 1, f^1(v_4) = 0,$$

$$f^2(v_1) = 0, f^2(v_2) = 1, f^2(v_3) = 1, f^2(v_4) = 0,$$

$$f^3(v_1) = 1, f^3(v_2) = 0, f^3(v_3) = 0, f^3(v_4) = 1.$$

Veamos cómo las funciones f_L^1 , f_L^2 y f_L^3 asociadas a las 2-funciones de Grundy de D anteriormente señaladas, son distintas 2-funciones de Grundy de $L(D)$:

a	$f_L^1(a)$	$f_L^2(a)$	$f_L^3(a)$
(v_1, v_2)	0	1	0
(v_1, v_3)	1	1	0
(v_1, v_4)	0	0	1
(v_2, v_1)	1	0	1
(v_2, v_4)	0	0	1
(v_3, v_1)	1	0	1
(v_3, v_2)	0	1	0
(v_3, v_4)	0	0	1
(v_4, v_2)	0	1	0
(v_4, v_3)	1	1	0

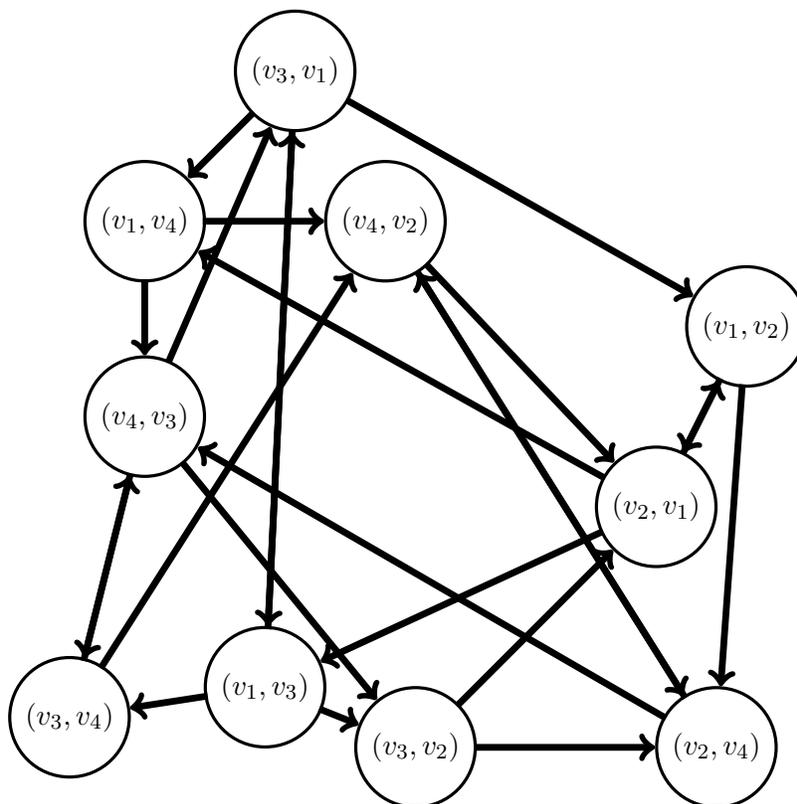


Figura 4.21: Digráfica $L(D)$

Teorema 4.2.1.1. Sean D una digráfica y $L(D)$ su digráfica de líneas, el número de k -funciones de Grundy de D es menor o igual al número de k -funciones de Grundy de $L(D)$.

Demostración. Es consecuencia de los lemas 4.2.1.2 y 4.2.1.3. □

4.2.2. La función g para k -funciones de Grundy

En esta sección damos una nueva función g_D , que nos permitirá relacionar las k -funciones de Grundy de $L(D)$ con las k -funciones de Grundy de D . Primero veamos los siguientes resultados y definiciones.

Observación 4.2.1. Sean D una digráfica, $L(D)$ su digráfica de líneas, g una k -función de Grundy de $L(D)$, $\{x, y_1, y_2\}$ subconjunto de $V(D)$ y $\{a_1, a_2\}$ subconjunto de $F(D)$. Si $a_1 = (y_1, x)$ y $a_2 = (y_2, x)$, entonces $g(a_1) = g(a_2)$.

Demostración. Sean D una digráfica, $L(D)$ su digráfica de líneas, g una k -función de Grundy de $L(D)$, $\{x, y_1, y_2\}$ subconjunto de $V(D)$ y $\{a_1, a_2\}$ subconjunto de $F(D)$, tales que $a_1 = (y_1, x)$ y $a_2 = (y_2, x)$. Como x es vértice final de a_1 y a_2 , por definición de $L(D)$:

$$N_{L(D)}^+(a_1) = \{a \in F(D) \mid a = (x, y) \text{ para algún } y \in V(D)\} = N_{L(D)}^+(a_2).$$

Consideremos $g_1 = g$ y $g_2 = g$. Como $g_1(z) = g_2(z)$ para todo z en $N_{L(D)}^+(a_1) = N_{L(D)}^+(a_2)$ y g es k -función de Grundy, por el lema 4.2.1.1, tenemos que $g(a_1) = g(a_2)$. \square

A continuación, construiremos una relación de los vértices de una digráfica en los naturales, a partir de una k -función de Grundy de su digráfica de líneas. Demostraremos que dicha relación es una k -función de Grundy para la digráfica original.

Sean D una digráfica, $L(D)$ su digráfica de líneas, g una k -función de Grundy de $L(D)$ y $Y = \{x \in V(D) \mid \delta_D^-(x) > 0\}$, denotamos por h_D a la relación de Y en \mathbb{N} dada por $(x, g(a)) \in h_D$ si y solo si $a = (z, x)$ para algún z en $V(D)$.

Demostraremos que h_D es una función. Sea x en Y tal que $(x, g(a_1)) \in h_D$ y $(x, g(a_2)) \in h_D$, por definición de h_D se sigue que $a_1 = (y_1, x)$ y $a_2 = (y_2, x)$ para algún $\{y_1, y_2\}$ subconjunto de $V(D)$, por la observación 4.2.1, $g(a_1) = g(a_2)$. Por lo tanto, h_D es una función.

Con h_D tenemos asignado un valor para los vértices de D con ingrado mayor a cero. Ahora veamos qué valor le asignaremos a los de ingrado igual a cero para obtener una k -función de Grundy en D . Para cada vértice v tal que $\delta^-(v) = 0$ y para cada entero positivo l , definimos el siguiente conjunto:

$$\mathfrak{N}_D^l(v) = \{y \in N_D^+(v) \mid h_D(y) = l\},$$

el cual está bien definido ya que el ingrado de cualquier vecino exterior de v , digamos y , es mayor o igual que 1, por lo que $h_D(y) = l$ con l en \mathbb{N} .

Dados estos conjuntos podemos encontrar el valor mínimo de l , tal que $\mathfrak{N}_D^l(v)$ no k -absorbe exteriormente a v en D ; es decir,

$$Ch_D(v) = \text{mín}\{l \in \mathbb{N} \mid |\mathfrak{N}_D^l(v)| < k\}.$$

Ejemplo 4.2.2.1.

Por ejemplo, consideremos la digráfica D (figura 4.22), su digráfica de líneas $L(D)$ y g una 2-función de Grundy para $L(D)$ (figura 4.23). Los valores de g se encuentran en la esquina inferior izquierda de la figura 4.23.

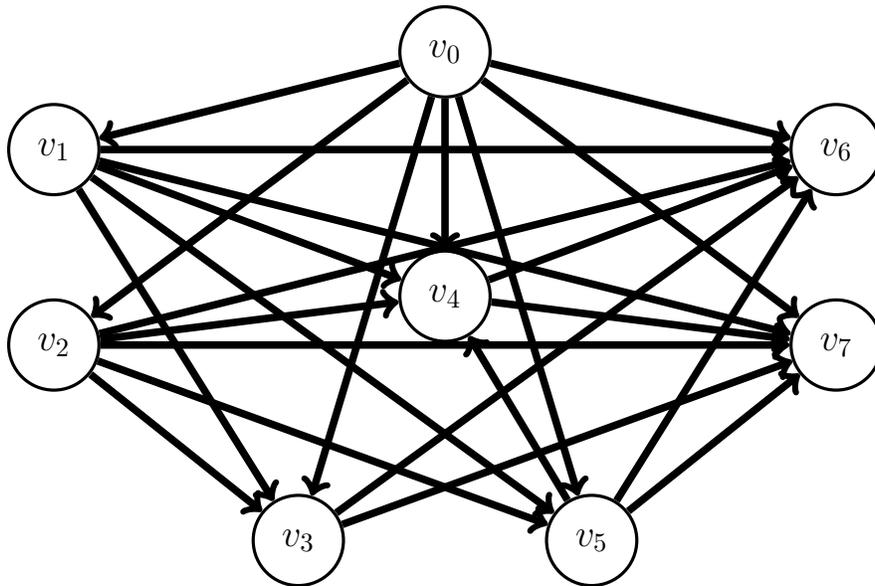


Figura 4.22: Digráfica D

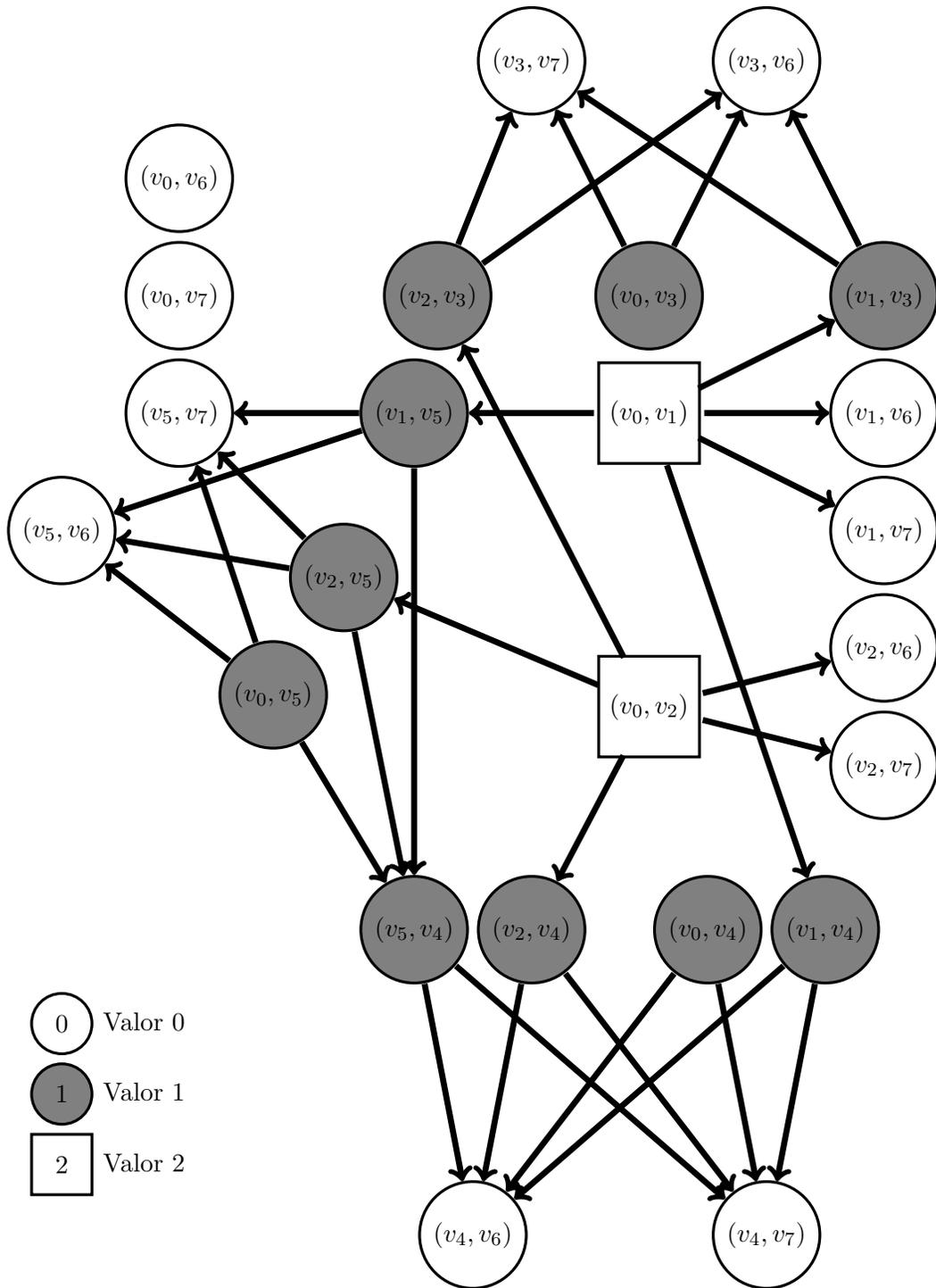


Figura 4.23: 2-función de Grundy en $L(D)$

La asignación de valores en D , para los vértices de ingrado mayor a cero es (figura 4.24):

$$h_D(v_1) = g((v_0, v_1)) = 2, \quad h_D(v_2) = g((v_0, v_2)) = 2, \quad h_D(v_3) = g((v_0, v_3)) = 1,$$

$$h_D(v_4) = g((v_0, v_4)) = 1, \quad h_D(v_5) = g((v_0, v_5)) = 1, \quad h_D(v_6) = g((v_0, v_6)) = 0, \\ h_D(v_7) = g((v_0, v_7)) = 0.$$

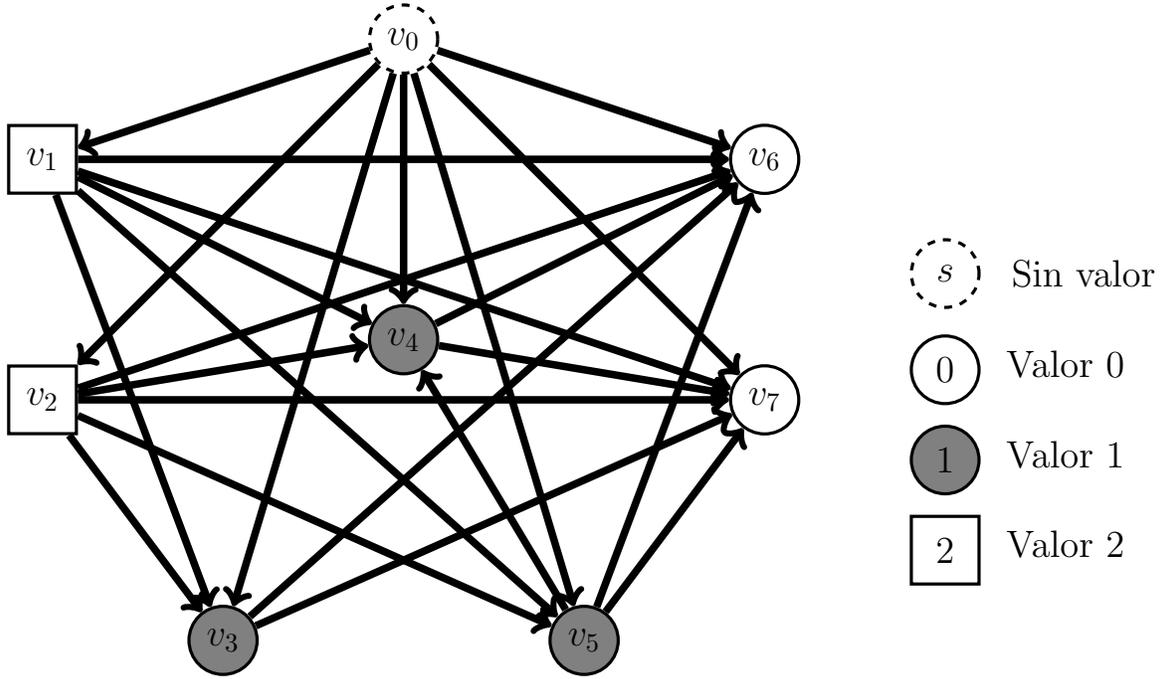


Figura 4.24: Valores de h_D en D

Como $\delta_D^-(v_0) = 0$, calculemos $Ch(v)$, para esto encontremos los conjuntos $\mathfrak{N}_D^l(v)$ con $l \in \mathbb{N}$. Notemos que el valor j , para $j \geq 3$ no aparece en la 2-función de Grundy de $L(D)$, por lo que, $\mathfrak{N}_D^j(v_0) = \emptyset$ (4.25).

$$\mathfrak{N}_D^0(v_0) = \{y \in N_D^+(v) \mid h_D(y) = 0\} = \{v_6, v_7\},$$

$$\mathfrak{N}_D^1(v_0) = \{y \in N_D^+(v) \mid h_D(y) = 1\} = \{v_3, v_4, v_5\},$$

$$\mathfrak{N}_D^2(v_0) = \{y \in N_D^+(v) \mid h_D(y) = 2\} = \{v_2, v_1\},$$

$$\mathfrak{N}_D^3(v_0) = \{y \in N_D^+(v) \mid h_D(y) = 3\} = \emptyset,$$

$$\mathfrak{N}_D^4(v_0) = \{y \in N_D^+(v) \mid h_D(y) = 4\} = \emptyset.$$

Procedemos a calcular $Ch(v_0)$, como $|\mathfrak{N}_D^0(v_0)| = 2$, $|\mathfrak{N}_D^1(v_0)| = 3$, $|\mathfrak{N}_D^2(v_0)| = 2$, $|\mathfrak{N}_D^3(v_0)| = 0$ y $k = 2$, tenemos que:

$$Ch(v_0) = \min\{l \in \mathbb{N} \mid |\mathfrak{N}_D^l(v)| < 2\} = \min\{3, 4, \dots\} = 3.$$

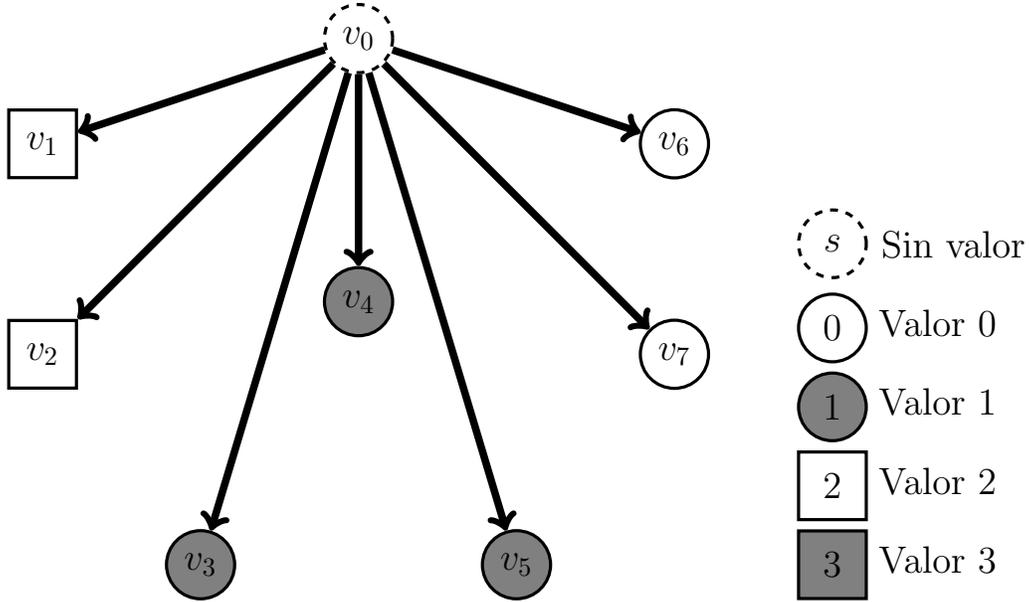


Figura 4.25: Vecindad de v_0

Retomando la idea de esta sección, para poder asociar las k -funciones de Grundy de $L(D)$ con las k -funciones de Grundy de D , definimos los siguientes conjuntos:

$$Y = \{v \in V(D) \mid \delta_D^-(v) > 0\},$$

$$X = \{v \in V(D) \mid \delta^-(v) = 0\}.$$

Ahora ya podemos definir la relación g_D

$$g_D : V(D) \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$g_D(v) = \begin{cases} h_D(v) & \text{si } v \in Y \\ Ch_D(v) & \text{si } v \in X \end{cases}$$

Notemos que como h_D es una función de Y en \mathbb{N} , Ch_D es una función de X en \mathbb{N} y $Y \cap X = \emptyset$, entonces g_D es una función. Con base en el ejemplo 4.2.2.1, mostramos en la digráfica D de la figura 4.26, la función g_D .

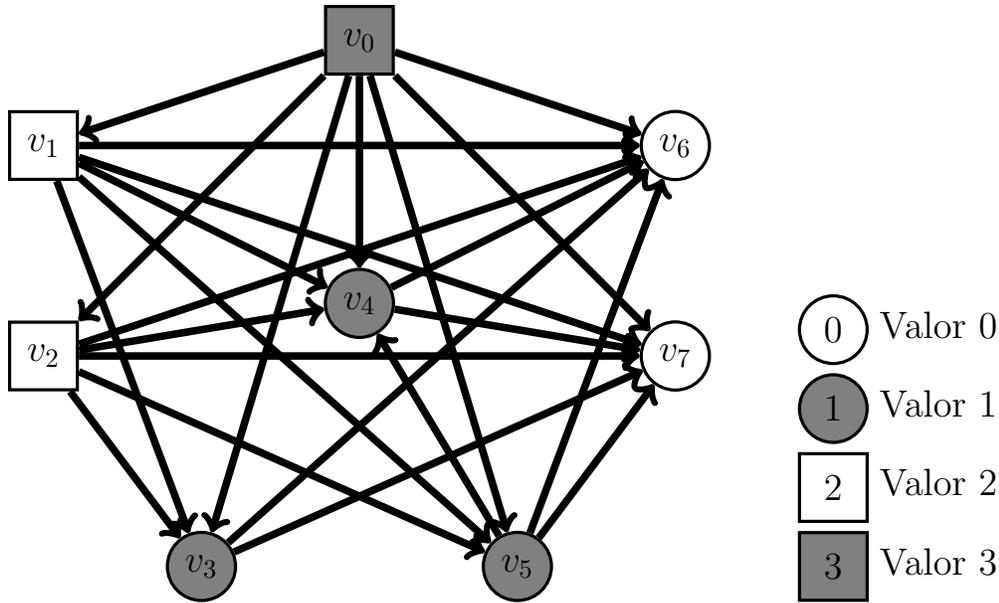


Figura 4.26: Valores de los vértices en D bajo g_D

Lema 4.2.2.1. Si D es una digráfica, $L(D)$ su digráfica de líneas y g una k -función de Grundy de $L(D)$, entonces g_D es una k -función de Grundy de D .

Demostración. Sean D una digráfica, $L(D)$ su digráfica de líneas y g una k -función de Grundy de $L(D)$. Tenemos que demostrar que g_D cumple la primera y la segunda condición de la definición de k -función de Grundy.

- Condición 1 de k -función de Grundy. Por demostrar que si $g_D(x) = l > 0$, entonces para cada j en \mathbb{N} , con $0 \leq j < l$ existen al menos k vértices y_1, \dots, y_k en $N_D^+(x)$ tales que $g_D(y_i) = j$ para todo i en $\{1, \dots, k\}$.

Sea $x \in V(D)$ tal que $g_D(x) = l$, con $0 < l$. Tenemos dos posibles casos para x , a saber $x \in Y$ y $x \in X$.

Caso 1) Si $x \in X$, entonces por definición de g_D , $g_D(x) = Ch_D(x) = l$, como $l = \min\{t \in \mathbb{N} \mid |\mathfrak{N}_D^t(v)| < k\}$, por lo que para todo $0 \leq j < l$, tenemos que $|\mathfrak{N}_D^j(v)| \geq k$.

Caso 2) Si $x \in Y$, entonces existe $a = (z, x)$ en $F(D)$, para algún z en $V(D)$. Por definición de g_D , tenemos que $g(a) = l$ en $L(D)$. Como g es una k -función de Grundy de $L(D)$, existe un subconjunto de $N_{L(D)}^+(a)$ con al menos k vértices, digamos $\{a_1^j, \dots, a_k^j\}$, tal que $g(a_i^j) = j$, para toda j en $\{0, \dots, l-1\}$ y para toda i en $\{1, \dots, k\}$.

Por definición de $L(D)$, para todo i en $\{1, \dots, k\}$ y cada j en $\{0, \dots, l-1\}$, $a_i^j = (x, y_i^j)$ para algún y_i^j en $V(D)$. Por definición de g_D , $g_D(y_i^j) = g(a_i^j) = j$.

Así para cada j en $\{0, \dots, l-1\}$ y para todo i en $\{1, \dots, k\}$ existen y_1^j, \dots, y_k^j en $N_D^+(x)$ con $g_D(y_i^j) = j$.

De lo anterior concluimos que g_D cumple la primera condición de k -función de Grundy.

Antes de demostrar la condición 2, observemos que los vértices de X no son vecinos exteriores de algún vértice de D .

- Condición 2 de k -función de Grundy. Si $g_D(x) = l$, entonces existen a lo más $k-1$ vértices en $N_D^+(x)$ cuya imagen bajo g_D es exactamente l .

Sea x en $V(D)$, con $g_D(x) = l$. Tenemos dos casos sobre x , a saber $x \in Y$ y $x \in X$.

Caso 1) Si $x \in X$, entonces por definición de g_D ; $g_D(x) = Ch_D(x) = l$. Como $l = \min\{j \in \mathbb{N} \mid |\mathfrak{N}_D^j(v)| < k\}$, entonces existen a lo más $k-1$ vértices en $N_D^+(x)$ cuya imagen bajo g_D es exactamente l .

Caso 2) Si $x \in Y$, entonces la demostración la haremos por contradicción. Supongamos que existen y_1, \dots, y_k en $N_D^+(x)$, con $g_D(y_i) = l$, para toda i en $\{1, \dots, k\}$. Como $x \in Y$, existe $a = (z, x) \in F(D)$. Por definición de $L(D)$, para toda i en $\{1, \dots, k\}$ existe y_i en $V(D)$ tal que $a_i = (x, y_i)$. Notemos que $a_i \in N_{L(D)}^+(a)$ con i en $\{1, \dots, k\}$. Por definición de g_D , tenemos que $g(a) = l$ y $g(a_i) = l$ para cada i en $\{1, \dots, k\}$, lo cual es una contradicción, ya que g es una k -función de Grundy.

De lo anterior tenemos que g_D cumple la segunda condición de k -función de Grundy.

Por lo tanto, g_D es una k -función de Grundy de D . □

Lema 4.2.2.2. Sean D una digráfica, $L(D)$ su digráfica de líneas g^1 y g^2 dos k -funciones de Grundy de $L(D)$. Si $g^1 \neq g^2$, entonces $g_D^1 \neq g_D^2$.

Demostración. Supondremos que $g_D^1 = g_D^2$ y demostraremos que $g^1 = g^2$. Sea $a = (x, y)$ en $V(L(D))$, como $g_D^1 = g_D^2$, entonces $g_D^1(y) = g_D^2(y)$ en D y por definición de g_D^1 y g_D^2 , $g^1(a) = g^2(a)$ en $L(D)$. □

Teorema 4.2.2.1. Sean D una digráfica y $L(D)$ su digráfica de líneas, el número de k -funciones de Grundy $L(D)$ es menor o igual al número de k -funciones de Grundy de D .

Demostración. Es consecuencia de los lemas 4.2.2.1 y 4.2.2.2. □

4.2.3. Teorema de igualdad para k -funciones de Grundy

Finalmente tenemos los resultados necesarios para demostrar el teorema de igualdad.

Teorema 4.2.3.1. Sean D una digráfica y $L(D)$ su digráfica de líneas, el número de k -funciones de Grundy de D es igual al número de k -funciones de Grundy de $L(D)$.

Demostración. Por el teorema 4.2.1.1, el número de k -funciones de Grundy de D es menor o igual al número de k -funciones de Grundy de $L(D)$.

Por el teorema 4.2.2.1 el número de k -funciones de Grundy de $L(D)$ es menor o igual al número de k -funciones de Grundy de D . Por lo tanto, el número de k funciones de Grundy D es igual al número de k -funciones de Grundy de $L(D)$. □

Como consecuencia del teorema 4.2.3.1, para $k = 1$, tenemos el resultado de Hortensia Galeana Sánchez, Laura Pastrana Ramírez y Hugo Rincón Mejía [20], sin la hipótesis $\delta_D^-(v) > 0$ para todo vértice de D .

Corolario 4.2.3.1. *Sean D una digráfica $L(D)$ su digráfica de líneas. El número de funciones de Grundy D es igual al número de funciones de Grundy de $L(D)$.*

Demostración. Consecuencia del teorema 4.2.3.1, cuando $k = 1$. □

Conclusiones

A lo largo de esta tesis estudiamos una generalización del concepto de núcleo; a saber, los k -núcleos exteriores. Desarrollamos con detalle el artículo de Mostafa Blidia y Amina Ramoul [7], en el cual se presentan los primeros teoremas para los k -núcleos exteriores, extendiendo algunos de los resultados clásicos de núcleos, los cuales fueron vistos en el capítulo dos. Por ejemplo; toda digráfica bipartita tiene un k -núcleo exterior, toda digráfica sin ciclos tiene un k -núcleo exterior, toda digráfica sin ciclos impares tiene un k -núcleo exterior, toda digráfica transitiva tiene un k -núcleo exterior y toda digráfica con k -función de Grundy tiene un k -núcleo exterior.

Por último, con base en los artículos de Matúš Harminc [21] y Hortensia Galeana Sánchez, Laura Pastrana Ramírez y Hugo Rincón Mejía [20], generamos nuevos resultados con respecto a la digráfica de líneas de una digráfica:

1. Si D es una digráfica, entonces el número de k -núcleos exteriores de $L(D)$ es igual al número de k -núcleos exteriores de D .
2. Si D es una digráfica, entonces el número de k -funciones de Grundy de $L(D)$ es igual al número de k -funciones de Grundy de D .
3. Mostramos que en el teorema: “Si D es una digráfica en la que todo vértice tiene ingrado mayor a 0, entonces el número de funciones de Grundy de $L(D)$ es igual al número de funciones de Grundy de D ” presentado por H. Galeana Sánchez, L. Pastrana-Ramírez, H. A. Rincón-Mejía [20], es posible omitir la hipótesis del ingrado mayor a 0 y el resultado sigue siendo verdadero.

Por último, con base en el trabajo realizado proponemos los siguientes problemas y temas que pueden servir para investigaciones futuras.

- Si D es una digráfica y tiene un k -núcleo exterior, ¿qué operaciones conservan los k -núcleos exteriores de D ?
- Dado el concepto de seminúcleo, ¿cómo podríamos definir un k -seminúcleo exterior?
- ¿Podríamos combinar la independencia por trayectorias y la k -independencia exterior, así como la absorbencia por trayectorias y la k -absorbencia exterior?

- Si D tiene una coloración en sus flechas, ¿qué podemos decir de la k -independencia exterior por trayectorias monocromáticas y la k -absorbencia exterior por trayectorias monocromáticas?
- Encontrar algunas aplicaciones explícitas de los k -núcleos exteriores y las k -funciones de Grundy.

Bibliografía

- [1] J.Bang-Jensen, G.Gutin, Digraphs: Theory Algorithms and Applications, Springer-Verlag, London, (2000).
- [2] C. Berge, Graphs, North Holland, (1985).
- [3] C. Berge, P. Duchet, Recent problems and results about kernels in directed graphs, Discrete Math. 86 (1990), 27-31.
- [4] M. Blidia, A parity digraph has a kernel, Combinatorica 6 (1) (1986) 23-27.
- [5] M. Blidia, M. Chellali, L. Volkmann, Some bounds on p -domination numbers in trees, Discrete Math. 306 (2006), 2031-2037.
- [6] M. Blidia, A. Ramoul, Note on trees with a subset which is both j -independent and p -dominating, (submitted for publication).
- [7] M. Blidia, A. Ramoul, A new generalization of kernels in digraphs, Discrete Applied Mathematics, 217 (2017), 673-684.
- [8] M. Chellali, O. Favaron, A. Hansberg, L. Volkmann, k -domination and k -independence in graphs: a survey, Graphs Combin. 281 (2012), 1-55.
- [9] V. Chvátal, On the computational complexity of finding a kernel, Report CRM 300, Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, (1973).
- [10] P. Duchet, Graphes Noyau-Parfaits, Ann. Discrete Math. 9 (1980), 93-101.
- [11] P. Duchet, A sufficient condition for a digraph to be kernel-perfect, J. Graph Theory 11 (1) (1987), 81-85.
- [12] P. Duchet, H. Meyniel, A note on kernel-critical graphs, Discrete Math. 33 (1981), 103-105.
- [13] P. Duchet, H. Meyniel, Une généralisation du théorème de Richardson sur l'existence de noyaux dans les graphes orientés, Discrete Math. 43 (1983), 21-27.
- [14] O. Favaron, On a conjecture of Fink and Jacobson concerning k -domination and k -dependence, J. Combin. Theory Ser. B 39 (1985), 101-102.

- [15] J.F. Fink, M.S. Jacobson, On n -domination, n -dependence and forbidden subgraphs, in: Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science, Wiley, New York, (1985), 301-311.
- [16] J.F. Fink, M.S. Jacobson, n -domination in graphs, in: Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science, John Wiley and Sons, New York, (1985), 283-300.
- [17] A.S. Fraenkel, Planar Kernel and Grundy with $d \leq 3$, $d_{out} \leq 2$, $d_{in} \leq 2$, are NP-complete, Discrete Appl. Math. 3 (1981), 257-262.
- [18] H. Galeana-Sánchez, Kernels in edge-coloured digraphs, Discrete Math. 184 (1998) 87-99.
- [19] H. Galeana-Sánchez, V. Neumann-Lara, On kernels and semikernels of digraphs, Discrete Math. 48 (1984), 67-76.
- [20] H. Galeana-Sánchez, L. Pastrana-Ramírez, H. A. Rincón-Mejía, Semikernels, quasi kernels and Grundy functions in the line digraph, SIAM J. Discrete Math. Vol. 4, No. 1 (1991), 80-83.
- [21] M. Harminc, Solutions and kernels of a directed graph, Math. Slovaca, 32 (1982), 263-267.
- [22] M. Kwásnik, On (k, l) -kernels on graphs and their products (Doctoral dissertation), Technical University of Wrocław, Wrocław, 1980.
- [23] V. Neumann-Lara, Seminúcleos en una digráfica, Anales del Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México, México, 11 (1971), 55-62.
- [24] M. Richardson, Extension theorems for solutions of irreflexive relations, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 39 (1953), 649-652.
- [25] J. Von Neumann, O. Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, Princeton, (1944).