



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Efecto magnetoelectrico de un condensador
semiesférico rodeado por un aislante topológico

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Daniel González Velázquez

TUTOR

Dr. Luis Fernando Urrutia Ríos

Ciudad Universitaria, CDMX, 2020





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno:

González

Velázquez

Daniel

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

313200360

2. Datos del tutor:

Dr.

Luis Fernando

Urrutia

Ríos

3. Datos del sinodal 1:

Dr.

Manuel

Torres

Labansat

4. Datos del sinodal 2:

Dr.

Julio Javier

Martinell

Benito

5. Datos del sinodal 3:

Dr.

Juan Carlos

D'Olivo

Saez

6. Datos del sinodal 4:

Dr.

Ángel

Sánchez

Cecilio

7. Datos del trabajo escrito:

Efecto magnetoeléctrico de un condensador
semiesférico rodeado por un aislante topológico

79 pp

2020

Agradecimientos

A Luis Urrutia por estar siempre dispuesto a resolver mis dudas y guiarme por el espléndido sendero de la física teórica.

A Zamna Valle por el amor infinito y los poemas de nubes.

A mis padres Ernesto González y Eugenia Velázquez Stone por su paciencia, por su cariño y por no obligarme a estudiar una carrera más lucrativa.

A mis familiares y amigos —también los efímeros— por compartir conmigo fracciones de sus vidas y sus ideas.

A ciertos profesores y profesoras de la Facultad de Ciencias que me dieron la oportunidad de reconocer mis flaquezas y me otorgaron la inspiración necesaria para amar mi trabajo.

Al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM por la beca otorgada para la realización del proyecto “Acoplamiento de invariantes topológicos en teorías de norma y gravitación” DGAPA-UNAM-IN103319.

“One day, I’ll find the right words, and they will be simple.”

—Jack Kerouac, *The Dharma Bums*

Índice

Resumen	1
1 Introducción	3
1.1 Descripción física	6
1.2 Ecs. de Maxwell y condiciones de borde	9
1.3 Estructura del trabajo	10
2 Planteamiento del problema	13
2.1 Determinación del sistema de ecuaciones	15
2.2 Solución a primer orden	21
3 Casos límite	23
3.1 Caso $\varepsilon = 1, \tilde{\alpha} = 0$	23
3.2 Caso $r_1 = r_2$	25
3.2.1 Densidades de corriente inducidas por la PME	25
3.3 Caso $r_1 = a$	26
3.4 Caso $r_2 \rightarrow \infty$	28
3.4.1 Relación entre los casos $r_1 = a$ y $r_2 \rightarrow \infty$	28
3.5 Caso $r_1 = a$ y $r_2 \rightarrow \infty$	32
4 Posibilidades experimentales	35
4.1 Configuración óptima en $\theta = 0$	36
4.2 Configuración óptima en $\theta = \pi/2$	38
4.3 Configuración óptima en $\theta = \pi/4$	41
4.4 Observaciones	42
4.5 Flujo magnético a través de un SQUID	43
5 Conclusiones	49
Apéndices	53
A Electromagnetismo en formalismo 4-vectorial	53
B Algunos modelos microscópicos	55
C Dos formas de calcular la conductividad de Hall	57
D Sistemas de unidades	62
E Códigos de <i>Mathematica</i>	67
Bibliografía	75

Resumen

Se estudió un sistema constituido por dos placas semiesféricas perfectamente conductoras sujetas a una diferencia de potencial y rodeadas por un cascarón esférico formado por un aislante topológico. Las ecuaciones que describen un sistema de este tipo corresponden a una modificación de las ecuaciones de Maxwell que incluye el efecto magnetoelectrico, en el que campos eléctricos dan lugar a campos magnéticos y viceversa, incluso en el caso estático. Se resolvió el problema, haciendo énfasis en el cálculo del campo magnético, usando potenciales escalares en la aproximación en la que el acoplamiento magnetoelectrico es del orden de la constante de estructura fina. Además, se estudiaron algunos casos límite que exploran las posibilidades geométricas del sistema con el objeto de determinar las configuraciones más favorables para la producción y medición del campo magnético. Finalmente, se calcularon las magnitudes de los campos magnéticos producidos, concluyendo que, en aquéllas configuraciones favorables, éstos son detectables mediante métodos de magnetometría actuales.

* De esta investigación se produjo también el siguiente artículo:

Daniel G Velázquez and L F Urrutia, *The magnetoelectric effect due to a semispherical capacitor surrounded by a spherical topologically insulating shell*, Phys. Scr. **95** 095502 (2020).

DOI: <https://doi.org/10.1088/1402-4896/aba584>

Preprint: <https://arxiv.org/abs/2007.09779>

1. Introducción

El efecto magnetoeléctrico (ME) consiste ya sea en la generación de una magnetización debido a un campo eléctrico o en la producción de una polarización debido a un campo magnético. En 1959, Dzyaloshinskii predijo que el efecto ocurriría en Cr_2O_3 [1], y en 1960 Astrov lo confirmó experimentalmente [2]. Ambos autores le dan crédito a Landau y Lifshitz [3] por anticipar la existencia de esta propiedad en materiales antiferromagnéticos, de los cuales Cr_2O_3 es un ejemplo. Para una descripción detallada de los avances en este campo antes de 1959 véase la Ref. [4]. Tiempo después del descubrimiento, las primeras etapas de la investigación de la electrodinámica asociada al efecto ME se resumieron en la Ref. [5]. Una actualización reciente del resurgimiento de este estudio, incluyendo nuevos métodos para diseñar materiales magnetoeléctricos, nuevas técnicas experimentales y conceptos teóricos para comprender el comportamiento ME también se reporta en la Ref. [4].

Los materiales magnetoeléctricos, i. e. aquellos que exhiben el efecto ME, se pueden encontrar entre la clase de materiales ferroicos. Una fase ferroica se caracteriza por ser capaz de adoptar una alineación interna espontánea de alguna propiedad. Las dos clases relevantes para este trabajo son: (i) ferromagnetos, en los cuales los espines internos pueden modificarse por un campo magnético externo, y (ii) ferroeléctricos, en los que una manipulación similar de los momentos dipolares eléctricos puede lograrse al aplicar un campo eléctrico. Un multiferroico magnetoeléctrico combina esos dos ordenamientos ferroicos primarios en fases simples o compuestas, y es capaz de producir efectos ME más grandes. Sin embargo, los materiales magnetoeléctricos no necesariamente surgen de fases ferroicas, sino que pueden estar presentes en medios polarizables magnéticamente y/o eléctricamente [6, 7].

El efecto ME está caracterizado por la aparición del término $\alpha_{ij}E_iB_j$ en la expansión de la densidad de energía libre $F(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ del material, que requiere que las simetrías bajo paridad e inversión temporal se violen por separado en el cristal. De este modo, la polarización $P_i = -\partial F/\partial E_i$ y la magnetización $M_i = -\partial F/\partial B_i$ adquieren los términos adicionales $\alpha_{ij}B_j$ y $\alpha_{ij}E_j$, respectivamente. El tensor $\alpha_{ij} = \partial P_i/\partial B_j = \partial M_i/\partial E_j$, denominado

coeficiente magnetoeléctrico, es simétrico debido a la igualdad de las derivadas parciales mixtas, lo que da lugar a las relaciones de Maxwell en termodinámica [8, 9]. Consideraciones de simetría han jugado un papel fundamental en la identificación de sus propiedades magnetoeléctricas [10]. En general, el coeficiente α_{ij} es muy pequeño, por ejemplo, del orden de 4.13 ps m^{-1} para Cr_2O_3 (unidades del SI). Esta baja magnitud se ilustra vívidamente en la Ref.[4] al mostrar que la aplicación de un campo de 10^6 V cm^{-1} induciría una magnetización tras revertir uno de cada cinco de los 10^6 espines en esta red antiferromagnética. Acoplamientos más grandes, del orden de 735 ps m^{-1} , se han logrado en TbPO_4 y la búsqueda de acoplamientos magnetoeléctrico gigantes continua principalmente en multiferroicos compuestos [11]. Estos materiales ofrecen ventajas significativas, incluyendo mayor flexibilidad en el diseño de aplicaciones específicas, operación a temperatura ambiente y optimización de las propiedades de acoplamiento [12]. El primer material magnetoeléctrico compuesto fue creado del ferroeléctrico BaTiO_3 y el ferromagnético CoFe_2O_4 [4]. Estos materiales compuestos han mostrado acoplamientos más intensos que los multiferroicos monofásicos.

Aunque se han logrado mejoras notables en las propiedades de los dispositivos a nanoescala empleando corrientes eléctricas para producir el campo magnético inducido por el efecto ME, se prevé una mayor reducción en la potencia de operación mediante el uso de fuentes de campo eléctrico (voltaje) que disminuyan en gran medida el calentamiento de Joule asociado a la corriente requerida para producir el campo magnético fuente [6, 13, 14]. Esto ha atraído mucha atención hacia la manipulación de campos eléctricos que dan lugar al efecto ME, que es un área nueva y emocionante de investigación con el potencial de impactar el almacenamiento magnético de datos, la espintrónica y los dispositivos magnéticos de alta frecuencia, lo que lleva a dispositivos más pequeños y más eficientes.

Se ha descubierto una nueva familia de materiales que también dan lugar al efecto ME. Éstos son los *aislantes topológicos* (ATs) tridimensionales invariantes bajo inversión temporal, que exhiben propiedades notables debidas a su peculiar estructura de bandas [15, 16]. Desde la perspectiva macroscópica efectiva, que corresponde al acercamiento considerado en este trabajo, pueden caracterizarse como aislantes en el bulto, pero conductores en las superficies debido a la presencia de corrientes de Hall cuantizadas. El reconocimiento de

los fenómenos topológicos en materia condensada se remonta a la Ref. [17], en la que se identificó la conductividad del efecto Hall cuántico (EHC) [18] con el primer número de Chern de la curvatura de Berry del espacio recíproco. Desde entonces, varias investigaciones [19–23] permitieron un entendimiento más profundo de estas fases topológicas, tanto teórica como experimentalmente. En particular, Bernevig [24] predijo la existencia de ATs en pozos cuánticos bidimensionales de HgTe, y pronto König lo confirmó experimentalmente [25]. En años subsecuentes, el fenómeno se generalizó a tres dimensiones, nuevamente comenzando con predicciones teóricas [26–31] seguidas por confirmaciones experimentales, particularmente de Hsieh en $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ [32].

Un efecto ME topológico universal se ha medido recientemente en ATs [33]. Se ha visto que cargas eléctricas cerca de la interfase entre dos ATs inducen monopolos magnéticos imagen [34–36]. Se ha estudiado la propagación de ondas electromagnéticas a través de la frontera entre ATs, hallando que aparece una rotación de Faraday no trivial [37, 38]. El desplazamiento de las líneas espectrales de iones hidrogenoides colocados frente a un AT plano, así como modificaciones del potencial Casimir Polder en la aproximación sin retardamiento se estudiaron en la Ref. [39]. La dinámica clásica de un átomo de hidrógeno de Rydberg cerca de un AT plano también ha sido investigada [40]. En este trabajo se considera el caso en el que el efecto ME se produce por ATs, lo cual se manifiesta a través de una contribución isotrópica al coeficiente ME, i. e. cuando $\alpha_{ij} = \Theta\delta_{ij}$.

En el régimen estático, la producción de campos magnéticos por fuentes eléctricas se ha explorado en las Refs. [34, 35] localizando cargas puntuales frente a un medio magnetoeléctrico plano semi-infinito. Sin embargo, las cargas puntuales son difíciles de manipular y es complicado fijarlas sobre superficies, como se ha señalado en la Ref. [35]. Dada la relevancia que ha adquirido el tema del control eléctrico del efecto ME, la primera motivación para este trabajo surge de la necesidad de tener dispositivos más manejables para lograr este objetivo en ATs. Ciertamente, el uso de fuentes macroscópicas sería un avance realista en esta dirección, junto con el empleo de condensadores (operados mediante diferencias de potencial entre sus placas) para producir un campo eléctrico que a su vez genera el campo magnético final mediante el efecto ME. En la Ref. [41] las cargas puntuales fueron reemplazadas por esferas metálicas de radio R de aproximadamente $0.4 - 2.0 \mu\text{m}$ a un potencial dado y ubicadas a distancias óptimas D del orden de μm , con $D > R$, frente a un AT

plano semi-infinito. Incluso cuando se obtienen campos magnéticos medibles, las regiones óptimas para la medición están entre la esfera metálica y el medio plano, lo que dificulta la inserción de magnetómetros. Por lo tanto, una segunda motivación es la producción de un dispositivo compacto que facilite la inserción del magnetómetro en los puntos donde el campo magnético es máximo, acompañado del reemplazo de los medios semi-infinitos que producen el efecto ME. Otro aspecto importante de la propuesta es garantizar que el campo magnético producido sea medible de acuerdo con la sensibilidad de los magnetómetros actuales. Esto naturalmente conduce a una tercera motivación, que es el uso de tales dispositivos para determinar el coeficiente magnetoeléctrico de los ATs, o de otros materiales magnetoeléctricos, midiendo el campo magnético resultante. El dispositivo que proponemos consiste en un condensador formado por dos semiesferas metálicas huecas (o dos placas semiesféricas), cargadas por una diferencia de potencial y cubiertas con una película uniforme del material magnetoeléctrico, lo que constituye una nueva realización del efecto ME en ATs. Avances recientes en la fabricación de materiales magnetoeléctricos manipulables eléctricamente [13, 14] y los nuevos desarrollos en técnicas de recubrimiento para conductores [42], podrían dar viabilidad a esta configuración compacta, que resuelve muchos de los desafíos mencionados anteriormente. Se considera por primera vez, de acuerdo con lo que sabemos, un dipolo como la fuente del efecto ME estático, en lugar de las fuentes cargadas utilizadas en los casos anteriores. Una posibilidad interesante que surge es que el voltaje entre las placas puede hacerse dependiente del tiempo, dando así una motivación adicional al estudio de la radiación en la electrodinámica que describe la respuesta electromagnética de medios magnetoeléctricos. Los detalles del dispositivo propuesto se dan en la Sección 2.

1.1. Descripción física

El comportamiento de un aislante convencional está descrito por una permitividad ϵ y una permeabilidad μ . Un campo eléctrico induce una polarización, mientras que un campo magnético induce una magnetización [34]. Las ecuaciones que codifican la respuesta electromagnética de estos materiales pueden derivarse del lagrangiano $\mathcal{L}_{\text{em}} = (1/8\pi)(\epsilon\mathbf{E}^2 - (1/\mu)\mathbf{B}^2) - \rho\Phi + (1/c)\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}$ una vez que se han expresado los campos en

términos de los potenciales electromagnéticos \mathbf{A} , Φ . En esta expresión, ρ y \mathbf{J} son las densidades externas de carga y corriente, respectivamente, y c es la velocidad de la luz.

Una fase topológica en 3D es descrita satisfactoriamente al sumar

$$\mathcal{L}_\vartheta = \frac{\alpha}{4\pi^2} \vartheta \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \quad (1.1)$$

donde α es la constante de estructura fina. Al parámetro ϑ se le denomina *polarizabilidad magnetoeléctrica* (PME) [43]. La modificación que resulta de añadir este término a la densidad lagrangiana comprende precisamente la aparición del efecto ME. Como \mathcal{L}_{em} , el nuevo término es cuadrático en el campo electromagnético, contiene el mismo número de derivadas del potencial electromagnético y es invariante bajo rotaciones [34]. Mediante el tensor de Faraday $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ es posible escribir $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = (1/8)\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} F_{\mu\nu} = (1/2)\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu (A_\nu \partial_\rho A_\sigma)$, siendo $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ el símbolo de Levi-Civita, antisimétrico bajo el intercambio de cualquier par de índices, nulo cuando hay índices repetidos, y donde se adopta $\varepsilon^{0123} = +1$ (para una breve revisión del formalismo de 4-vectores en la electrodinámica véase el Apéndice A). De este modo, si ϑ es constante, el término \mathcal{L}_ϑ constituye una derivada total, por lo que no afecta las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, tiene consecuencias físicas en interfases, donde aparecen gradientes de ϑ [43].

Se define la acción total como $S = 1/(\alpha c) \int d^4x (\mathcal{L}_{em} + \mathcal{L}_\vartheta)$ en el sistema CGS, en el que los campos eléctrico y magnético tienen las mismas unidades de carga sobre distancia cuadrada. Cabe aclarar que $dx^0 = cdt$, de forma que

$$S = \frac{1}{\alpha} \int d^3x dt (\mathcal{L}_{em} + \mathcal{L}_\vartheta). \quad (1.2)$$

Suponiendo condiciones periódicas en una variedad sin bordes, se obtiene

$$\frac{S_\vartheta}{\hbar} = \frac{\vartheta}{32\pi^2} \int d^4x \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \frac{1}{\hbar c} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \equiv \vartheta C_2, \quad (1.3)$$

donde el entero C_2 es el segundo número de Chern de la variedad. La constante de normalización $1/\alpha$ en la ecuación (1.2) se añade precisamente para que C_2 sea un número entero proporcional a S_ϑ/\hbar en la expresión (1.3). Este factor de normalización no afecta las ecuaciones de movimiento.

Recordando que el objeto físicamente relevante es $e^{iS_\vartheta/\hbar}$, vemos que la electrodinámica es invariante bajo la transformación $\vartheta \rightarrow \vartheta + 2\pi n$ [36]. Por otro lado, la simetría bajo

inversión temporal modifica $\vartheta \rightarrow -\vartheta$ y, por tanto, la invariancia es consistente con $\vartheta = 0$ y $\vartheta = \pi$ (módulo 2π) [43], que son los únicos valores que satisfacen $e^{i\vartheta C_2} = e^{-i\vartheta C_2}$. Esto da lugar a la clasificación \mathbb{Z}_2 de los aislantes: $\vartheta = 0$ (aislante normal) y $\vartheta = \pi$ (fase topológica) [29].

Para detectar el efecto ME es necesario colocar dos medios adyacentes con distintos valores ϑ_1 y ϑ_2 , de manera que $\partial\vartheta \neq 0$ en la interfase. Microscópicamente, el origen de este fenómeno en materiales topológicos es el efecto Hall cuántico [44], que se manifiesta cuando se rompe la simetría bajo inversión temporal en la superficie, por ejemplo, mediante un recubrimiento magnético [45, 46]. Esto origina el coeficiente no trivial $\vartheta = (2n+1)\pi$, que está relacionado con una conductividad semi-cuantizada en la superficie del material $\sigma = (n + 1/2)e^2/(2\pi\hbar) = \vartheta e^2/(2\pi\hbar)$ [34]. En general, la conductividad adquiere la forma $\sigma = e^2\nu/(2\pi\hbar)$, donde ν puede tomar valores enteros y racionales muy específicos. El segundo caso corresponde al EHC fraccionario, que resulta del surgimiento de cuasipartículas denominadas aniones, que no son ni bosones ni fermiones [47]. En el Apéndice B se muestra el estudio de la respuesta microscópica de los aislantes topológicos y en el Apéndice C se presentan dos formas de calcular la conductividad de Hall σ para sistemas bidimensionales.

Un aspecto interesante del efecto ME en aislantes topológicos es que una carga eléctrica cerca de su superficie puede generar no sólo una carga eléctrica imagen, sino también un monopolo magnético imagen, debido a las corrientes superficiales resultantes del efecto Hall cuántico [34, 44]. Es importante señalar que las ecuaciones que surgen de considerar la densidad lagrangiana \mathcal{L}_ϑ describen distintos fenómenos físicos, y no sólo la respuesta electromagnética de los aislantes topológicos. Por ejemplo, la electrodinámica de metamateriales ($\vartheta \in \mathbb{C}$) [48, 49] y la respuesta de semimetales de Weyl ($\vartheta(\mathbf{x}, t) = 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} - 2b_0t$) [48, 50, 51]. El término \mathcal{L}_ϑ describe también la interacción del hipotético campo axiónico con el campo electromagnético en física de partículas elementales [31, 44]. Los axiones permanecen como buenos candidatos de la materia oscura [52]. En el contexto que es de interés para esta investigación, ϑ es una propiedad del medio como lo son la permitividad y permeabilidad.

1.2. Ecs. de Maxwell y condiciones de borde

En medios materiales, los fenómenos electromagnéticos son descritos por las ecuaciones de Maxwell. En el sistema CGS no racionalizado,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_L, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_L, \quad (1.4)$$

donde \mathbf{E} y \mathbf{B} son los campos eléctrico y de inducción magnética, \mathbf{D} y \mathbf{H} son el campo de desplazamiento eléctrico y el campo magnético, y ρ_L y \mathbf{J}_L son las densidades de carga y corriente libres. El comportamiento macroscópico de los aislantes topológicos es descrito efectivamente mediante las ecuaciones constitutivas [29]

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} - \frac{\vartheta \alpha}{\pi} \mathbf{B}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} + \frac{\vartheta \alpha}{\pi} \mathbf{E}. \quad (1.5)$$

Las expresiones (1.4) y (1.5) dan lugar a las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas:

$$\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = 4\pi\rho_L + \frac{\alpha}{\pi} \nabla \vartheta \cdot \mathbf{B}, \quad (1.6)$$

$$\nabla \times (\mathbf{B}/\mu) - \frac{1}{c} \frac{\partial (\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_L - \frac{\alpha}{\pi} \nabla \vartheta \times \mathbf{E} - \frac{\alpha}{c\pi} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \mathbf{B}. \quad (1.7)$$

De aquí, se observa que

$$\rho = \rho_L + \rho_\vartheta = \rho_L + \frac{\alpha}{4\pi^2} \nabla \vartheta \cdot \mathbf{B}, \quad (1.8)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_L + \mathbf{J}_\vartheta = \mathbf{J}_L - \frac{\alpha c}{4\pi^2} \nabla \vartheta \times \mathbf{E} - \frac{\alpha}{4\pi^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (1.9)$$

donde ρ_ϑ y \mathbf{J}_ϑ son las densidades de carga y de corriente inducidas por la PME, respectivamente.

La respuesta más general de un medio magnetoeléctrico también se puede obtener de las ecuaciones de Euler-Lagrange mediante la acción

$$S[\Phi, \mathbf{A}] = \int dt d^3\mathbf{x} \left[\frac{1}{8\pi} \left(\varepsilon \mathbf{E}^2 - \frac{1}{\mu} \mathbf{B}^2 \right) - \frac{\alpha}{4\pi^2} \vartheta(\mathbf{r}) \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - \rho_L \Phi + \frac{1}{c} \mathbf{J}_L \cdot \mathbf{A} \right], \quad (1.10)$$

donde se observa que, además de considerar el término \mathcal{L}_{em} en la densidad lagrangiana, se ha tomado en cuenta la contribución de \mathcal{L}_ϑ .

Para el caso que nos concierne, ϑ es una propiedad de los aislantes. Esto quiere decir que, para materiales lineales, isotrópicos y homogéneos, podemos describir la PME como

una función de Heaviside, que toma cierto valor constante en la posición del material magnetoeléctrico y un valor distinto en el resto del espacio. La derivada de esta función, la delta de Dirac, aparece en las nuevas ecuaciones, implicando que sólo las interfaces juegan un papel en la producción del efecto ME. Explícitamente, las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas son

$$\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = 4\pi \rho_L + \tilde{\alpha} \delta(F_\Sigma(\mathbf{x})) \mathbf{B} \cdot \hat{n}, \quad \nabla \times (\mathbf{B}/\mu) - \frac{1}{c} \frac{(\partial \varepsilon \mathbf{E})}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_L + \tilde{\alpha} \delta(F_\Sigma(\mathbf{x})) \mathbf{E} \times \hat{n}, \quad (1.11)$$

donde $\tilde{\alpha} \equiv \Delta\vartheta/\pi$, siendo $\Delta\vartheta$ la diferencia entre la PME de dos medios distintos. Por su parte, Σ es la superficie definida por la interfase entre dichos medios, parametrizada por $F_\Sigma(\mathbf{x}) = 0$ tal que $n_\mu = (0, \hat{n}) = \partial_\mu F_\Sigma(\mathbf{x})$, donde \hat{n} es el vector unitario normal a la superficie. Las dos ecuaciones de Maxwell homogéneas permanecen iguales.

Suponiendo que las derivadas temporales de los campos son finitas cerca de las interfaces, y debido a la continuidad de las componentes normales de \mathbf{D} y \mathbf{B} y las componentes tangenciales de \mathbf{H} y \mathbf{E} , se sigue que

$$(\varepsilon \mathbf{E})_\Sigma \cdot \hat{n} = \tilde{\alpha} (\mathbf{B} \cdot \hat{n})_\Sigma, \quad (\mathbf{B}/\mu)_\Sigma \times \hat{n} = -\tilde{\alpha} (\mathbf{E} \times \hat{n})_\Sigma, \quad (\mathbf{B})_\Sigma \cdot \hat{n} = 0, \quad (\mathbf{E})_\Sigma \times \hat{n} = 0, \quad (1.12)$$

donde se ha usado la notación

$$(\mathbf{V})_\Sigma \cdot \hat{n} = (\mathbf{V}_i \cdot \hat{n})_\Sigma - (\mathbf{V}_o \cdot \hat{n})_\Sigma, \quad (\mathbf{V})_\Sigma \times \hat{n} = (\mathbf{V}_i \times \hat{n})_\Sigma - (\mathbf{V}_o \times \hat{n})_\Sigma. \quad (1.13)$$

Los subíndices i y o hacen referencia al campo vectorial en cada uno de los dos lados de la interfase Σ . Por su parte, $(\mathbf{V} \cdot \hat{n})_\Sigma$ y $(\mathbf{V} \times \hat{n})_\Sigma$ indican que se está evaluando sobre la interfase Σ , sobrentendiéndose que las respectivas funciones son continuas.

1.3. Estructura del trabajo

En la Sección 2 se expone el análisis de un condensador semiesférico —esfera hueca perfectamente conductora ($\sigma \rightarrow \infty$) con hemisferios sur y norte a potenciales opuestos $-V$ y $+V$ —, que se encuentra rodeado por un aislante topológico esférico grueso. Se tomaron, para ello, campos estáticos y sin presencia de fuentes libres. Para la resolución de las ecuaciones se utilizaron campos escalares eléctrico y magnético (Φ y Ψ respectivamente), lo cual es permitido por las condiciones del problema, que aseguran $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ y $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ en

cada bulto, de modo que $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ y $\mathbf{B} = -\nabla\Psi$. Dichos potenciales satisfacen la ecuación de Laplace, $\nabla^2\Phi = 0$ y $\nabla^2\Psi = 0$, debido a las dos ecuaciones de Maxwell restantes $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, lo cual permite expresar la solución general de forma sencilla de acuerdo con la simetría del problema empleando coordenadas esféricas. Esto reduce la resolución de las ecuaciones a la determinación de algunos coeficientes. Se aplicaron las condiciones de borde que resultan de las ecuaciones de Maxwell modificadas y se determinaron dichos coeficientes. Todas las ecuaciones de este trabajo están escritas en el sistema CGS no racionalizado. En el Apéndice D se muestra una revisión de las unidades de la PME en distintos sistemas (SI, CGS y un sistema híbrido popular en los estudios experimentales).

En general, las soluciones poseen una dependencia en ϑ difícil de manejar. Por ello, se utilizó el hecho de que α (la constante de estructura fina) es del orden de 10^{-2} , y que ϑ es del orden de π , para realizar una expansión perturbativa. Todos los resultados obtenidos son a primer orden en $\alpha\vartheta/\pi$, por lo que no describen satisfactoriamente la electrodinámica de medios magnetoeléctricos para valores grandes de la PME. No obstante, constituyen un buen punto de partida para un análisis más profundo.

En la Sección 3, se consideran algunas configuraciones particulares (casos límite) para simplificar el problema por un lado y, por otro, para darle más relevancia física a los resultados. Además, esto permite comprobar que las soluciones halladas son consistentes. De los cinco casos límite estudiados, tres resultan ser equivalentes al caso trivial (sin interfases topológicas) y los dos restantes están relacionados por una serie de transformaciones. Por su parte, este análisis dio lugar a expresiones explícitas de las corrientes inducidas por la PME. Por completitud, se graficaron las líneas de flujo de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} para un ejemplo representativo de cada uno de los casos límite.

En la actualidad, se han logrado medir campos magnéticos de 10 – 100 mG mediante magnetómetros basados en un centro nitrógeno-vacancia (NV) en diamante [53, 54]. Con esto en mente, en la Sección 4 se estudian los valores de los parámetros que simplificarían un posible arreglo experimental, a la vez que maximizarían el campo magnético en ciertas direcciones. El caso en que la interfase interior del AT coincide con la superficie del condensador resulta de gran interés porque su construcción sería relativamente simple y generaría campos magnéticos lo suficientemente intensos como para ser detectados por métodos modernos. Por otra parte, se estima el flujo magnético a través de una espira a cierta distancia

del sistema, que resulta ser detectable mediante magnetómetros SQUID, capaces de medir flujos del orden de 10^{-14} G cm² [55]. Esto le confiere una relevancia fenomenológica a este problema. Los resultados indican tres configuraciones relevantes: una de ellas da lugar a campos altamente isotrópicos no tan intensos (aunque detectables), otra da lugar a campos intensos en ciertas direcciones preferenciales y la última corresponde a un caso intermedio entre los dos anteriores.

2. Planteamiento del problema

Una de las formas más simples de explorar el efecto ME en ATs es colocar una fuente eléctrica en frente del material y determinar/medir el campo magnético inducido. La implementación de esta idea ha sido reportada para los siguientes casos: (i) una carga puntual frente a un AT plano [34, 35] y (ii) una esfera de radio finito frente a un AT plano [41]. En este trabajo, se propone reemplazar las cargas puntuales y los ATs semi-infinitos por un condensador esférico macroscópico que produce un campo magnético en presencia de un cascarón esférico de material topológico, constituyendo un arreglo muy compacto. Por su parte, la interfase más externa de este arreglo es accesible a los magnetómetros. Es interesante observar que la posibilidad más simple en esta dirección sería una esfera metálica a un potencial dado rodeada por un AT. Sin embargo, la simetría esférica de este arreglo prevendría la generación del efecto ME, pues la densidad de corriente efectiva \mathbf{J}_y sería cero en las dos interfases del material, lo cual se traduce en campos magnéticos nulos.

En otras palabras, es necesario romper la simetría esférica, lo cual se logra al considerar un condensador formado por dos placas metálicas semiesféricas huecas de radio a mantenidas a distinto potencial (V y $-V$), y que no se tocan en el ecuador. A este dispositivo lo denominamos *condensador semiesférico*. La región 1 ($a < r < r_1$) es llenada por un medio con permitividad ε_1 y PME ϑ_1 . A una distancia r_1 de su centro, tal que $r_1 \geq a$, hay un cascarón de grosor $r_2 - r_1$ formado por un AT que define la región 2 ($r_1 < r < r_2$) y que tiene permitividad ε_2 y PME ϑ_2 . La región 3 ($r_2 < r < \infty$) tiene los mismos parámetros que la región 1. Tomamos las regiones 1 y 3 como el vacío, de manera que $\varepsilon_1 = 1$, $\vartheta_1 = 0$, y consideramos materiales no magnéticos, por lo que $\mu = 1$ en todo el espacio. El arreglo se muestra en la Fig. 1.

La PME posee simetría esférica y está dada por

$$\vartheta(r) = \vartheta_2(H(r - r_1) - H(r - r_2)) + \vartheta_1(1 + H(r_1 - r) - H(r_2 - r)), \quad (2.1)$$

donde $H(x)$ es la función de Heaviside, que es 1 si $x > 0$ y 0 si $x < 0$. Se ha considerado que dentro del condensador semiesférico la PME es la del vacío.

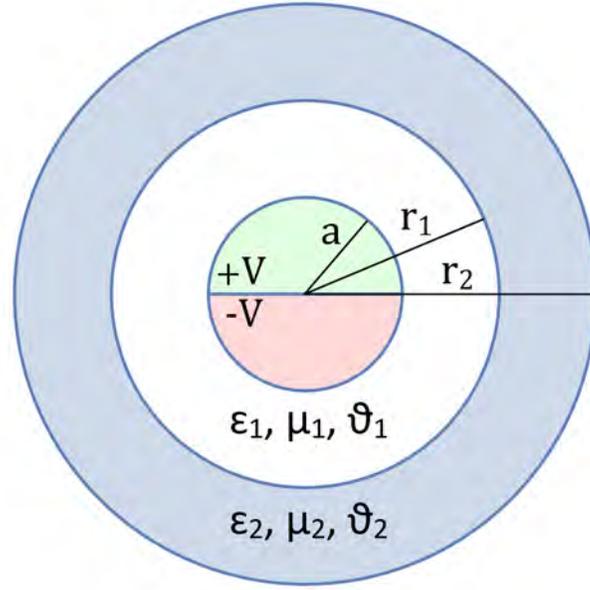


Figura 1: Sistema compuesto por un condensador semiesférico de radio a rodeado por un aislante topológico esférico de grosor $r_2 - r_1$.

Recapitulando, las ecuaciones constitutivas de un medio magnetoeléctrico son

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} - \frac{\vartheta \alpha}{\pi} \mathbf{B}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} + \frac{\vartheta \alpha}{\pi} \mathbf{E}. \quad (2.2)$$

Esto implica que hay un término de magnetización que depende del campo eléctrico y un término de polarización que depende del campo magnético. De las ecuaciones de Maxwell en medios materiales, sin fuentes y en el caso estático, se tiene

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (2.3)$$

Se sigue, además, que $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Estas ecuaciones, junto con las constitutivas, dan lugar a las siguientes condiciones de borde en términos de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} .

(I) Para la interfase interior $r = r_1$:

$$\begin{aligned} (\epsilon \mathbf{E})_{r=r_1} \cdot \hat{r} &= \tilde{\alpha} (\mathbf{B} \cdot \hat{r})_{r=r_1}, & (\mathbf{B})_{r=r_1} \times \hat{r} &= -\tilde{\alpha} (\mathbf{E} \times \hat{r})_{r=r_1}, \\ (\mathbf{B})_{r=r_1} \cdot \hat{r} &= 0, & (\mathbf{E})_{r=r_1} \times \hat{r} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

(II) Para la interfase exterior $r = r_2$:

$$\begin{aligned} (\epsilon \mathbf{E})_{r=r_2} \cdot \hat{r} &= -\tilde{\alpha} (\mathbf{B} \cdot \hat{r})_{r=r_2}, & (\mathbf{B})_{r=r_2} \times \hat{r} &= \tilde{\alpha} (\mathbf{E} \times \hat{r})_{r=r_2}, \\ (\mathbf{B})_{r=r_2} \cdot \hat{r} &= 0, & (\mathbf{E})_{r=r_2} \times \hat{r} &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

con $\tilde{\alpha} \equiv (\vartheta_2 - \vartheta_1)\alpha/\pi$.

Alternativamente, se pueden obtener estas condiciones de borde al considerar las más generales

$$(\mathbf{D})_{r=r_i} \cdot \hat{r} = 0, \quad (\mathbf{H})_{r=r_i} \times \hat{r} = 0, \quad (\mathbf{B})_{r=r_i} \cdot \hat{r} = 0, \quad (\mathbf{E})_{r=r_i} \times \hat{r} = 0, \quad (2.6)$$

donde $i = 1, 2$.

Debido a que no hay fuentes y que los campos son estacionarios, es posible escribir todo en términos de potenciales escalares tales que $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ y $\mathbf{B} = -\nabla\Psi$. Estos potenciales satisfacen la ecuación de Laplace en cada región. Ya que el sistema posee simetría azimutal, basta expresar la solución en coordenadas esféricas como [56]

$$\Phi_i(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l^i r^l + B_l^i r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta), \quad (2.7)$$

$$\Psi_i(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (C_l^i r^l + D_l^i r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta), \quad (2.8)$$

donde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right), \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right). \quad (2.9)$$

La variable r es la distancia radial desde el origen, mientras que θ y ϕ son el ángulo polar y el ángulo azimutal, respectivamente. Como se observa en la Fig. 1, el sistema posee simetría azimutal, lo cual explica que los potenciales de las expresiones (2.7) y (2.8) no dependan de ϕ . Por otro lado, el índice $i = 1, 2, 3$ hace referencia a cada una de las regiones previamente definidas.

Se hace hincapié en que la configuración tiene una discontinuidad del potencial eléctrico en el ecuador del condensador, es decir, en $r = a$, $\theta = \pi/2$, de modo que para acercarse a estos puntos en cualquier cálculo se tiene que proceder como un proceso límite. Dado que el potencial eléctrico es la fuente del efecto ME, esperamos que se requiera un cuidado similar al tratar con el campo magnético en estos puntos.

2.1. Determinación del sistema de ecuaciones

Es sencillo escribir las condiciones de borde en términos de los potenciales escalares, lo cual simplifica en gran medida el problema.

(I) Para la interfase interior $r = r_1$:

$$\varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}(r_1) - \varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}(r_1) = \tilde{\alpha} \frac{\partial \Psi_{2,1}}{\partial r}(r_1), \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta}(r_1) - \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta}(r_1) = -\tilde{\alpha} \frac{\partial \Phi_{1,2}}{\partial \theta}(r_1), \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial r}(r_1) = \frac{\partial \Psi_2}{\partial r}(r_1), \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta}(r_1) = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta}(r_1). \quad (2.13)$$

(II) Para la interfase exterior $r = r_2$:

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_3}{\partial r}(r_2) - \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}(r_2) = -\tilde{\alpha} \frac{\partial \Psi_{3,2}}{\partial r}(r_2), \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \Psi_3}{\partial \theta}(r_2) - \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta}(r_2) = \tilde{\alpha} \frac{\partial \Phi_{2,3}}{\partial \theta}(r_2), \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial r}(r_2) = \frac{\partial \Psi_3}{\partial r}(r_2), \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta}(r_2) = \frac{\partial \Phi_3}{\partial \theta}(r_2). \quad (2.17)$$

Cuando se toman dos subíndices, $\Psi_{i,j}(r_k)$ o $\Phi_{i,j}(r_k)$ ($k = 1, 2$) es porque $\Psi_i(r_k) = \Psi_j(r_k)$ o $\Phi_i(r_k) = \Phi_j(r_k)$, respectivamente, así que es indiferente si se utiliza el potencial i -ésimo o el j -ésimo en esa condición de borde particular. Por su parte, en el sistema CGS, $\varepsilon_1 = 1$, por lo que ε_2 coincide con la permitividad relativa $\varepsilon \equiv \varepsilon_2/\varepsilon_1$.

Además de estas ecuaciones que restringen los valores de los coeficientes, debemos tomar en consideración que el potencial eléctrico es continuo en ambas interfases, i. e.,

$$\Phi_1(r_1) = \Phi_2(r_1), \quad (2.18)$$

$$\Phi_2(r_2) = \Phi_3(r_2). \quad (2.19)$$

A su vez, la componente normal del campo magnético debe anularse en $r = a$, puesto que se trata de la superficie de un conductor:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial r}(a) = 0. \quad (2.20)$$

Asimismo, ambos potenciales deben anularse en el infinito si se desean soluciones físicamente plausibles. Esto se traduce directamente en

$$C_l^3 = 0, \quad A_l^3 = 0. \quad (2.21)$$

Finalmente, este problema exige una forma particular para el potencial eléctrico en $r = a$, la superficie de la esfera, dada por

$$\Phi_1(a, \theta) = \begin{cases} +V & \text{si } (0 \leq \theta < \pi/2) \\ -V & \text{si } (\pi/2 < \theta \leq \pi). \end{cases} \quad (2.22)$$

Esta última ecuación implica que el campo eléctrico es perpendicular a la superficie de la esfera $r = a$. Adicionalmente, como $\Phi(\cos \theta) = -\Phi(-\cos \theta)$ en la superficie del condensador, los coeficientes con valores pares de l son nulos. Por ende, de ahora en adelante se usará la notación

$$\sum'_l \equiv \sum_{l=1,3,5,\dots}^{\infty}. \quad (2.23)$$

El próximo objetivo consiste en hallar expresiones algebraicas que relacionen los coeficientes $A_l^i, B_l^i, C_l^i, D_l^i$. Antes de comenzar a traducir las condiciones de borde en términos de éstos, cabe hacer una aclaración. Tomemos, por ejemplo, la ecuación (2.13):

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta}(r_1) = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta}(r_1), \quad (2.24)$$

o, más explícitamente,

$$\sum'_l \left(A_l^1 r_1^l + B_l^1 r_1^{-(l+1)} \right) \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} = \sum'_l \left(A_l^2 r_1^l + B_l^2 r_1^{-(l+1)} \right) \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta}. \quad (2.25)$$

Reagrupando términos, se sigue que

$$\sum'_l \left[\left(A_l^1 r_1^l + B_l^1 r_1^{-(l+1)} \right) - \left(A_l^2 r_1^l + B_l^2 r_1^{-(l+1)} \right) \right] \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} = 0. \quad (2.26)$$

Por simplicidad, definimos $\gamma_l^i = A_l^i r_1^l + B_l^i r_1^{-(l+1)}$, obteniendo

$$\sum'_l (\gamma_l^1 - \gamma_l^2) \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} = 0. \quad (2.27)$$

Nótese que

$$\frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} = \frac{dP_l(\cos \theta)}{d \cos \theta} \frac{d \cos \theta}{d\theta} = \frac{dP_l(\cos \theta)}{d \cos \theta} (-\sin(\theta)). \quad (2.28)$$

Así, al multiplicar la expresión (2.27) por $dP_m(\cos \theta)/d\theta$ e integrar de -1 a 1, se tiene

$$\sum'_l (\gamma_l^1 - \gamma_l^2) \int_{-1}^1 \sin^2 \theta \frac{dP_l(\cos \theta)}{d \cos \theta} \frac{dP_m(\cos \theta)}{d \cos \theta} d(\cos \theta) = 0. \quad (2.29)$$

Definiendo $x = \cos \theta$,

$$\sum_l' (\gamma_l^1 - \gamma_l^2) \int_{-1}^1 (1-x^2) \frac{dP_l(x)}{dx} \frac{dP_m(x)}{dx} dx = 0. \quad (2.30)$$

Integrando por partes y usando las relaciones de ortogonalidad de los polinomios de Legendre,

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{lm}, \quad (2.31)$$

además de la propiedad

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_l(x)}{dx} \right] = -l(l+1) P_l(x), \quad (2.32)$$

que no es más que la ecuación de Legendre [57], se llega a que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x^2) \frac{dP_l(x)}{dx} \frac{dP_m(x)}{dx} dx &= (1-x^2) \frac{dP_l(x)}{dx} P_m(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 -l(l+1) P_l(x) P_m(x) dx \\ &= \frac{2l(l+1)}{2l+1} \delta_{lm}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Consecuentemente, la expresión (2.30) puede escribirse como

$$\sum_l' (\gamma_l^1 - \gamma_l^2) \frac{2l(l+1)}{2l+1} \delta_{lm} = 0. \quad (2.34)$$

Al sumar todos los términos, sólo permanece aquel en que $l = m$:

$$(\gamma_m^1 - \gamma_m^2) \frac{2m(m+1)}{2m+1} = 0, \quad (2.35)$$

de donde se deduce finalmente que $\gamma_l^1 = \gamma_l^2$ para toda l impar. En términos de A_l^i y B_l^i , la expresión (2.35) se reduce a

$$A_l^1 r_1^l + B_l^1 r_1^{-(l+1)} = A_l^2 r_1^l + B_l^2 r_1^{-(l+1)}, \quad (2.36)$$

que es la misma restricción impuesta por la condición $\Phi_1(r_1) = \Phi_2(r_1)$.

Análogamente, para la interfase exterior $r = r_2$ se tiene que

$$A_l^2 r_2^l + B_l^2 r_2^{-(l+1)} = B_l^3 r_2^{-(l+1)}. \quad (2.37)$$

Se concluye que cualquier condición que involucre derivadas de los potenciales respecto a θ puede traducirse en una condición sobre los potenciales mismos. Así, (2.13) y (2.17) dan lugar a las mismas ecuaciones que (2.18) y (2.19), respectivamente.

De la misma manera, las ecuaciones

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta}(r_1) - \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta}(r_1) = -\tilde{\alpha} \frac{\partial \Phi_{1,2}}{\partial \theta}(r_1), \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial \Psi_3}{\partial \theta}(r_2) - \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta}(r_2) = \tilde{\alpha} \frac{\partial \Phi_{2,3}}{\partial \theta}(r_2), \quad (2.39)$$

son equivalentes a

$$\Psi_2(r_1) - \Psi_1(r_1) = -\tilde{\alpha} \Phi_{1,2}(r_1), \quad (2.40)$$

$$\Psi_3(r_2) - \Psi_2(r_2) = \tilde{\alpha} \Phi_{2,3}(r_2). \quad (2.41)$$

Expresamente,

$$\left(C_l^2 r_1^l + D_l^2 r_1^{-(l+1)} \right) - \left(C_l^1 r_1^l + D_l^1 r_1^{-(l+1)} \right) = -\tilde{\alpha} \left(A_l^1 r_1^l + B_l^1 r_1^{-(l+1)} \right), \quad (2.42)$$

$$\left(D_l^3 r_2^{-(l+1)} \right) - \left(C_l^2 r_2^l + D_l^2 r_2^{-(l+1)} \right) = \tilde{\alpha} \left(B_l^3 r_2^{-(l+1)} \right). \quad (2.43)$$

Habiendo considerado todas las relaciones que involucran derivadas tangenciales, es necesario fijar la atención en las condiciones asociadas a derivadas radiales. Vemos que de (2.7) y (2.8), se obtiene

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial r} = \sum_l' (l A_l^i r^{l-1} - (l+1) B_l^i r^{-(l+2)}) P_l(\cos \theta), \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial r} = \sum_l' (l C_l^i r^{l-1} - (l+1) D_l^i r^{-(l+2)}) P_l(\cos \theta). \quad (2.45)$$

Así que las expresiones (2.10) y (2.14) dan lugar a

$$\varepsilon \left(l A_l^2 r_1^{l-1} - (l+1) B_l^2 r_1^{-(l+2)} \right) - \left(l A_l^1 r_1^{l-1} - (l+1) B_l^1 r_1^{-(l+2)} \right) = \tilde{\alpha} \left(l C_l^2 r_1^{l-1} - (l+1) D_l^2 r_1^{-(l+2)} \right), \quad (2.46)$$

$$\left(-(l+1) B_l^3 r_2^{-(l+2)} \right) - \varepsilon \left(l A_l^2 r_2^{l-1} - (l+1) B_l^2 r_2^{-(l+2)} \right) = -\tilde{\alpha} \left(-(l+1) D_l^3 r_2^{-(l+2)} \right). \quad (2.47)$$

Por otra parte, de la continuidad de la derivada radial del potencial magnético (ecuaciones (2.12) y (2.16)) se sigue que

$$l C_l^1 r_1^{l-1} - (l+1) D_l^1 r_1^{-(l+2)} = l C_l^2 r_1^{l-1} - (l+1) D_l^2 r_1^{-(l+2)}, \quad (2.48)$$

$$l C_l^2 r_2^{l-1} - (l+1) D_l^2 r_2^{-(l+2)} = -(l+1) D_l^3 r_2^{-(l+2)}. \quad (2.49)$$

Y la ecuación (2.20) indica que

$$lC_l^1 a^{l-1} = (l+1)D_l^1 a^{-(l+2)}. \quad (2.50)$$

Finalmente, se debe implementar la forma particular (semiesférica) del potencial eléctrico Φ en $r = a$, dada por la ecuación (2.22):

$$\Phi_1(a, \theta) = \sum_l' \alpha_l f_l(\theta), \quad (2.51)$$

donde $\alpha_l = A_l^1 a^l + B_l^1 a^{-(l+1)}$ y $f_l(\theta) = P_l(\cos \theta)$. De acuerdo con la Ref. [58], se puede obtener de esta forma una relación lineal entre coeficientes:

$$A_l^1 a^l + B_l^1 a^{-(l+1)} = \begin{cases} 0 & \text{si } l \text{ es par} \\ V_l & \text{si } l \text{ es impar} \end{cases} \quad (2.52)$$

donde

$$V_l = V \left(-\frac{1}{2} \right)^{(l-1)/2} \frac{(2l+1)(l-2)!!}{2 \left(\frac{l+1}{2} \right)!}. \quad (2.53)$$

En la expresión de los potenciales sólo aparecen polinomios impares, es decir, potencias impares de $\cos \theta$. Este hecho, que ya había sido mencionado, va de acuerdo con la simetría del problema.

2.2. Solución a primer orden

Se tienen doce coeficientes para cada l impar y doce ecuaciones que los relacionan linealmente:

$$C_l^3 = 0, \quad (2.54)$$

$$A_l^3 = 0, \quad (2.55)$$

$$A_l^1 r_1^l + B_l^1 r_1^{-(l+1)} = A_l^2 r_1^l + B_l^2 r_1^{-(l+1)}, \quad (2.56)$$

$$A_l^2 r_2^l + B_l^2 r_2^{-(l+1)} = B_l^3 r_2^{-(l+1)}, \quad (2.57)$$

$$\left(C_l^2 r_1^l + D_l^2 r_1^{-(l+1)} \right) - \left(C_l^1 r_1^l + D_l^1 r_1^{-(l+1)} \right) = -\tilde{\alpha} \left(A_l^1 r_1^l + B_l^1 r_1^{-(l+1)} \right), \quad (2.58)$$

$$\left(D_l^3 r_2^{-(l+1)} \right) - \left(C_l^2 r_2^l + D_l^2 r_2^{-(l+1)} \right) = \tilde{\alpha} \left(B_l^3 r_2^{-(l+1)} \right), \quad (2.59)$$

$$\varepsilon \left(l A_l^2 r_1^{l-1} - (l+1) B_l^2 r_1^{-(l+2)} \right) - \left(l A_l^1 r_1^{l-1} - (l+1) B_l^1 r_1^{-(l+2)} \right) = \tilde{\alpha} \left(l C_l^2 r_1^{l-1} - (l+1) D_l^2 r_1^{-(l+2)} \right), \quad (2.60)$$

$$\left(-(l+1) B_l^3 r_2^{-(l+2)} \right) - \varepsilon \left(l A_l^2 r_2^{l-1} - (l+1) B_l^2 r_2^{-(l+2)} \right) = -\tilde{\alpha} \left(-(l+1) D_l^3 r_2^{-(l+2)} \right), \quad (2.61)$$

$$l C_l^1 r_1^{l-1} - (l+1) D_l^1 r_1^{-(l+2)} = l C_l^2 r_1^{l-1} - (l+1) D_l^2 r_1^{-(l+2)}, \quad (2.62)$$

$$l C_l^2 r_2^{l-1} - (l+1) D_l^2 r_2^{-(l+2)} = -(l+1) D_l^3 r_2^{-(l+2)}, \quad (2.63)$$

$$l C_l^1 a^{l-1} = (l+1) D_l^1 a^{-(l+2)}, \quad (2.64)$$

$$A_l^1 a^l + B_l^1 a^{-(l+1)} = V_l. \quad (2.65)$$

La siguiente solución aproximada fue inicialmente motivada al considerar que el sistema es invariante bajo inversión temporal y que $\tilde{\alpha}$ es del orden de la constante de estructura fina. La invariancia impone algunas restricciones a la dependencia en $\tilde{\alpha}$ de los coeficientes: bajo inversión temporal (\mathcal{T}) los campos eléctrico y magnético se transforman de acuerdo con $\mathcal{T}\mathbf{E} = \mathbf{E}$ y $\mathcal{T}\mathbf{B} = -\mathbf{B}$, mientras que, para las densidades de carga y corriente, $\mathcal{T}\rho = \rho$ y $\mathcal{T}\mathbf{J} = -\mathbf{J}$. De esto se sigue que \mathcal{T} transforma $\tilde{\alpha}$ en $-\tilde{\alpha}$, pues $\vartheta \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ debe ser invariante. Por otro lado, para sistemas invariantes bajo dicha operación, se obtienen dos posibles valores de la PME: $\vartheta = 0$ para aislantes triviales o $\vartheta = \pi$ para aislantes topológicos.

En nuestro caso, los campos eléctrico y magnético tienen como fuente densidades de carga que generan el potencial en las placas del condensador. Así, la relación lineal en-

tre fuentes y campos, aquí construidos como gradientes de potenciales, demandan que $\Phi(\tilde{\alpha}) = \Phi(-\tilde{\alpha})$ mientras $\Psi(\tilde{\alpha}) = -\Psi(-\tilde{\alpha})$ para garantizar el comportamiento correcto de los campos correspondientes bajo inversión temporal [41]. El razonamiento previo requiere que los coeficientes eléctricos (magnéticos) A_l^i, B_l^i (C_l^i, D_l^i) incluyan sólo potencias pares (impares) de $\tilde{\alpha}$. Sin embargo, sin tomar la hipótesis de invariancia, un análisis más detenido revela que esta propiedad de los campos es una consecuencia algebraica de las ecuaciones mismas, y no depende de la respuesta del sistema al aplicar inversión temporal. De esto se sigue que los resultados mostrados a continuación son válidos incluso para sistemas que no son invariantes bajo esta transformación.

A primer orden en $\tilde{\alpha}$, los coeficientes no nulos son

$$A_l^1 = \lambda(l+1)(\varepsilon-1)(l\varepsilon+l+1)(r_1^{2l+1} - r_2^{2l+1}), \quad (2.66)$$

$$A_l^2 = \lambda(l+1)(2l+1)(\varepsilon-1)r_1^{2l+1}, \quad (2.67)$$

$$B_l^1 = -\lambda r_1^{2l+1}(l(l+1)(\varepsilon-1)^2 r_1^{2l+1} - r_2^{2l+1}(l\varepsilon+l+1)(l\varepsilon+l+\varepsilon)), \quad (2.68)$$

$$B_l^2 = \lambda(2l+1)r_1^{2l+1}r_2^{2l+1}(l\varepsilon+l+1), \quad (2.69)$$

$$B_l^3 = \lambda(2l+1)^2 \varepsilon r_1^{2l+1} r_2^{2l+1}, \quad (2.70)$$

$$C_l^1 = -\lambda \tilde{\alpha}(l+1)(l\varepsilon+l+1)(r_1^{2l+1} - r_2^{2l+1}), \quad (2.71)$$

$$C_l^2 = -\lambda \tilde{\alpha}(l+1)(2l+1)\varepsilon r_1^{2l+1}, \quad (2.72)$$

$$D_l^1 = -\lambda \tilde{\alpha} a^{2l+1} l(l\varepsilon+l+1)(r_1^{2l+1} - r_2^{2l+1}), \quad (2.73)$$

$$D_l^2 = -\lambda \tilde{\alpha} l(a^{2l+1}(l\varepsilon+l+1)(r_1^{2l+1} - r_2^{2l+1}) + r_1^{2l+1} r_2^{2l+1}(l\varepsilon+l+1) + (l+1)(\varepsilon-1)r_1^{4l+2}) \quad (2.74)$$

$$D_l^3 = -\lambda \tilde{\alpha} l(r_1^{2l+1} - r_2^{2l+1})(a^{2l+1}(l\varepsilon+l+1) + (l+1)(\varepsilon-1)r_1^{2l+1}), \quad (2.75)$$

donde se ha definido

$$\lambda = \frac{a^{l+1} V_l}{(l+1)(\varepsilon-1)a^{2l+1}(l\varepsilon+l+1)(r_1^{2l+1} - r_2^{2l+1}) + r_1^{2l+1} r_2^{2l+1}(l\varepsilon+l+1)(l\varepsilon+l+\varepsilon) - l(l+1)(\varepsilon-1)^2 r_1^{4l+2}}.$$

Incluso en esta situación simplificada, se observa que las soluciones A_l^i, B_l^i, C_l^i y D_l^i no son fáciles de manejar, por lo que es conveniente discutir configuraciones particulares para obtener resultados más accesibles.

3. Casos límite

Se ha encontrado ya la solución más general del problema (es decir, válida para cualquier conjunto de parámetros $\{a, r_1, r_2\}$ que satisfaga $a \leq r_1 \leq r_2$). Sin embargo, es conveniente estudiar ciertos casos límite, en primer lugar, para saber si la solución es correcta al reducirla a problemas conocidos y, en segundo lugar, para determinar las condiciones óptimas que permitirían obtener magnitudes medibles del campo magnético generado por el efecto ME.

Por otro lado, se graficaron las líneas de flujo de los campos tomando un conjunto de parámetros representativo de cada uno de los casos límite. Para hacerlo, se calcularon los respectivos potenciales hasta orden $l = 9$. Como se verá en la Sección 4, esta aproximación es más que suficiente para las configuraciones que aquí se consideran. Como se ha hecho desde el inicio de la Sección 2, se tomaron las regiones 1 y 3 como el vacío ($\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1, \vartheta_1 = \vartheta_3 = 0$). Por su parte, en la región 2 se fijaron los valores $\varepsilon_2 = 4$ y $\vartheta_2 = \pi$ para realizar las gráficas. Los códigos de *Mathematica* empleados con este objetivo se presentan en el Apéndice E.

3.1. Caso $\varepsilon = 1, \tilde{\alpha} = 0$

El primer caso consiste en dotar a la región 2, aquella comprendida entre r_1 y r_2 , de las propiedades del vacío. Esto debe implicar coeficientes magnéticos nulos, dado que sin gradientes de la PME no puede manifestarse el efecto ME. Como se verá, este problema corresponde al de hallar el campo eléctrico producido por una esfera hueca con hemisferio norte a potencial $+V$ y hemisferio sur a potencial $-V$, cuya solución es bien conocida (véase la Ref. [58]) y que denominaremos *caso trivial*.

Se ha procedido sustituyendo los valores $\tilde{\alpha} = 1$ y $\varepsilon = 0$ en el sistema de ecuaciones, que al ser resuelto da lugar a

$$B_l^1 = B_l^2 = B_l^3 = a^{l+1}V_l, \quad (3.1)$$

con el resto de los coeficientes nulos.

Por tanto, el potencial magnético es idénticamente cero en todo el espacio, mientras que el potencial eléctrico toma la forma

$$\Phi = \sum_l' \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} V_l P_l(\cos \theta). \quad (3.2)$$

$$V_1 = 3V/2, \quad V_3 = -7V/8, \quad V_5 = 11V/16... \quad (3.3)$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} \Phi &= a^2 \left(\frac{3}{2}V\right) r^{-2} P_1(\cos \theta) + a^4 \left(\frac{-7}{8}V\right) r^{-4} P_3(\cos \theta) + \dots \\ &= \frac{3Va^2}{2r^2} \left[\cos \theta - \frac{7a^2}{12r^2} \left(\frac{5}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta \right) + \dots \right], \end{aligned} \quad (3.4)$$

que coincide con el resultado de la literatura [58].

En la Fig. 2 se muestran las líneas de flujo del campo eléctrico para la configuración trivial.

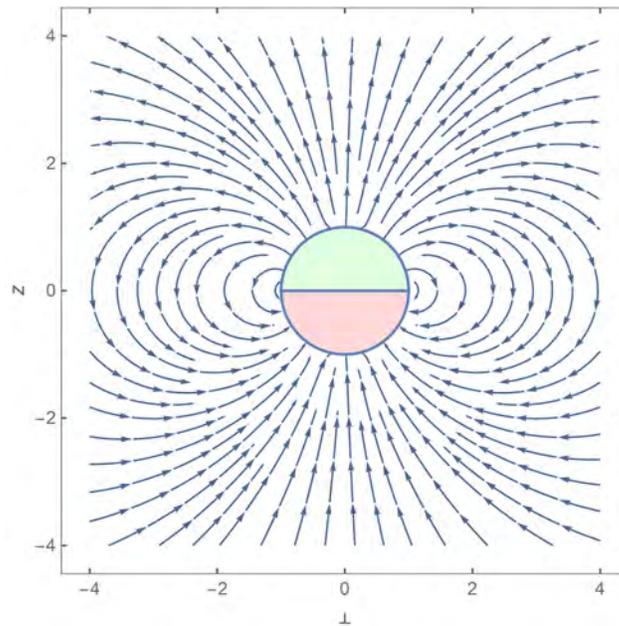


Figura 2: Campo eléctrico para el caso trivial.

3.2. Caso $r_1 = r_2$

A pesar de que este problema puede resolverse sustituyendo $r_1 = r_2$ en la solución a primer orden, se utilizará un procedimiento distinto con el fin explorar la forma explícita de las corrientes inducidas por la PME en cada interfase. Se procederá analizando qué ocurre en el límite en que dichas interfaces coinciden, de manera que el grosor del aislante topológico se anula.

3.2.1. Densidades de corriente inducidas por la PME

Se ha dicho ya que el análisis mediante potenciales escalares es válido en cada bulto puesto que se satisfacen las ecuaciones de Maxwell homogéneas. Sin embargo, en las interfaces se producen corrientes superficiales debido a la magnetización. Analizaremos qué ocurre con dichas corrientes en el límite $r_1 = r_2$. Para ello, usaremos que la densidad de corriente debida a la magnetización está dada por $\mathbf{J}_\vartheta = c\nabla \times \mathbf{M}$, pues los campos son estáticos y el término $\partial\mathbf{P}/\partial t$ no contribuye. Hemos visto que el valor de la PME como función de la distancia puede describirse mediante

$$\vartheta(r) = \vartheta_2(H(r - r_1) - H(r - r_2)) + \vartheta_1(1 + H(r_1 - r) - H(r_2 - r)), \quad (3.5)$$

donde $H(x)$ es la función de Heaviside. Así,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_\vartheta &= c\nabla \times \left(-\frac{\vartheta\alpha}{4\pi^2} \mathbf{E} \right) = -c\frac{\alpha}{4\pi^2} \nabla\vartheta \times \mathbf{E} \\ &= -c\frac{\alpha}{4\pi^2} (\vartheta_2 - \vartheta_1) (\delta(r - r_1) - \delta(r - r_2)) \hat{r} \times \mathbf{E} \\ &= c\frac{\tilde{\alpha}}{4\pi} (\delta(r - r_1) - \delta(r - r_2)) \mathbf{E} \times \hat{r}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Se ha usado que $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, que $dH(r)/dr = \delta(r)$ y que $\delta(x) = \delta(-x)$, donde $\delta(x)$ es la función delta de Dirac.

Notemos que si $r_1 = r_2$, entonces la corriente \mathbf{J}_ϑ se anula. Como no hay fuentes inducidas por la PME ni tampoco fuentes libres, se satisface la ecuación de Laplace en toda la región $r > a$ y por tanto se puede tomar un solo potencial eléctrico (magnético) para el exterior de la esfera conductora. Esto se reduce al caso trivial.

También se puede llegar a este resultado en términos de las corrientes superficiales, que se obtienen al integrar la densidad de corriente en la interfase respectiva:

$$\mathbf{K}_{\vartheta,1} = c \frac{\tilde{\alpha}}{4\pi} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \int_{r_1-\gamma}^{r_1+\gamma} (\mathbf{E} \times \hat{r}) \delta(r - r_1) dr = c \frac{\tilde{\alpha}}{4\pi} (\mathbf{E} \times \hat{r})|_{r=r_1}, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{K}_{\vartheta,2} = -c \frac{\tilde{\alpha}}{4\pi} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \int_{r_2-\gamma}^{r_2+\gamma} (\mathbf{E} \times \hat{r}) \delta(r - r_2) dr = -c \frac{\tilde{\alpha}}{4\pi} (\mathbf{E} \times \hat{r})|_{r=r_2}. \quad (3.8)$$

Por tanto, de estas ecuaciones en el límite $r_1 = r_2$ se sigue que

$$\mathbf{K}_{\vartheta,1} + \mathbf{K}_{\vartheta,2} = 0. \quad (3.9)$$

Esta igualdad se satisface porque la componente tangencial del campo eléctrico es continua en las interfaces. Se concluye que no hay corrientes superficiales netas, lo que nuevamente asegura que el problema se reduce al caso trivial.

3.3. Caso $r_1 = a$

Esto corresponde a eliminar la región de vacío entre el condensador y el material topológico, de modo que el interior del cascarón está en contacto con las placas del condensador. Aquí la región 1 se contrae a la superficie de una esfera. Con el fin de eliminar consistentemente la región 1 tenemos que verificar que las condiciones de borde correctas en la superficie del condensador son ahora satisfechas en términos de los coeficientes A_l^2 , B_l^2 , C_l^2 y D_l^2 cuando Φ_2 y Ψ_2 se evalúan en $r = a$. Verificaremos que estas condiciones son satisfechas tras aplicar la restricción $r_1 = a$ a los coeficientes (2.66-2.75):

$$A_l^1 = \frac{(l+1)(\varepsilon-1)(l\varepsilon+l+1) \left(1 - \left(\frac{r_2}{a}\right)^{2l+1}\right)}{2l+1} \lambda_c^l, \quad (3.10)$$

$$A_l^2 = (l+1)(\varepsilon-1) \lambda_c^l, \quad (3.11)$$

$$B_l^1 = \frac{r_2^{2l+1} (l^2(\varepsilon+1)^2 + l(\varepsilon+1)^2 + \varepsilon) - l(l+1)(\varepsilon-1)^2 a^{2l+1}}{2l+1} \lambda_c^l, \quad (3.12)$$

$$B_l^2 = r_2^{2l+1} (l\varepsilon+l+1) \lambda_c^l, \quad (3.13)$$

$$B_l^3 = (2l+1) \varepsilon r_2^{2l+1} \lambda_c^l, \quad (3.14)$$

$$C_l^2 = -\tilde{\alpha}(l+1) \varepsilon \lambda_c^l, \quad (3.15)$$

$$D_l^2 = -\tilde{\alpha} l \varepsilon a^{2l+1} \lambda_c^l, \quad (3.16)$$

$$D_l^3 = -\tilde{\alpha} l \varepsilon (a^{2l+1} - r_2^{2l+1}) \lambda_c^l, \quad (3.17)$$

donde se ha definido

$$\lambda_c^l = \frac{a^{l+1}V_l}{a^{2l+1}(l+1)(\varepsilon-1) + r_2^{2l+1}(l\varepsilon+l+1)}. \quad (3.18)$$

La condición (2.65) para el potencial en la superficie del condensador debe ser reemplazada por $A_l^2 a^l + B_l^2 a^{-(l+1)} = V_l$. Se observa que los resultados obtenidos satisfacen esta relación. Por su parte, la condición de borde (2.64) se lee ahora como $lC_l^2 a^{l-1} = (l+1)D_l^2 a^{-(l+2)}$. Nuevamente, los valores obtenidos muestran que este es el caso. Por ende, es posible ignorar sin problemas la región 1. En general, para esta configuración los coeficientes magnéticos son no nulos en las dos regiones de interés.

El caso $a = r_1$ es de particular relevancia porque, como se verá en la Sección 4, maximiza el campo en la dirección del eje z en un intervalo importante de valores de a .

Se observan las líneas de flujo de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} para el caso $a = r_1$ en la Fig. 3.

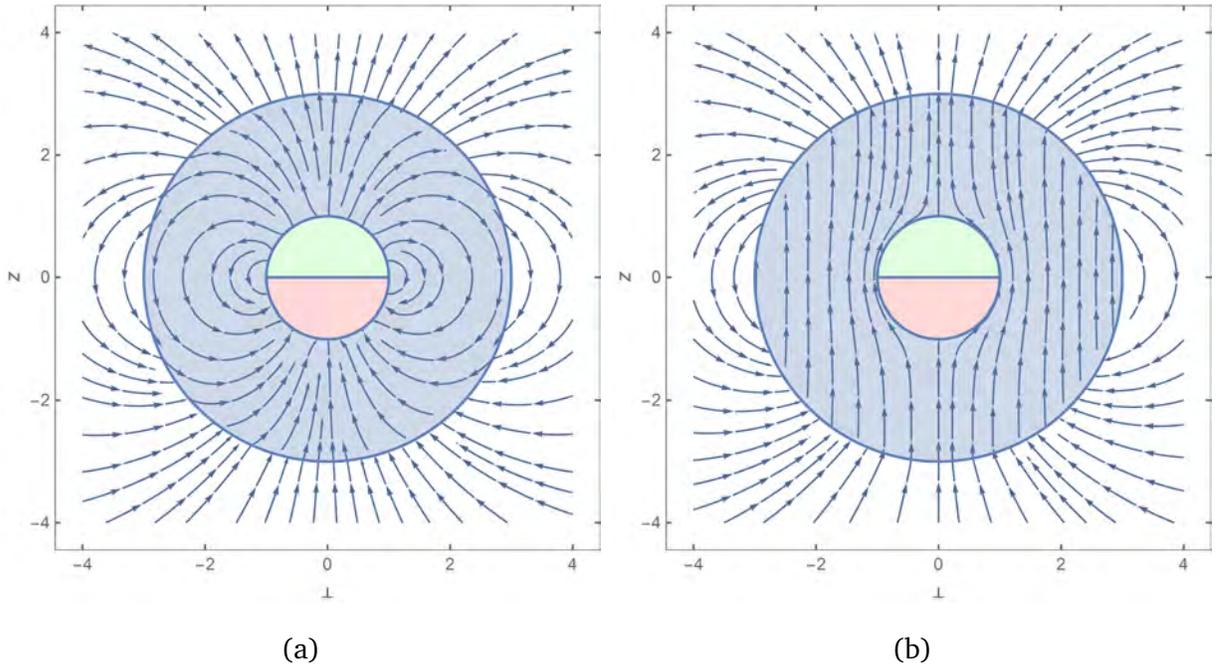


Figura 3: Caso $r_1 = a$: Usando los valores $a = r_1 = 1$ y $r_2 = 3$, se graficaron (a) el campo eléctrico y (b) el campo magnético.

3.4. Caso $r_2 \rightarrow \infty$

Esta situación consiste en la extensión del medio topológico hacia el infinito, de manera que la región 3 es eliminada. Para analizar este caso, regresamos a las ecuaciones (2.57), (2.59), (2.61) y (2.63), que en el límite $r_2 \rightarrow \infty$ se reducen a

$$A_l^2 r_2^l = 0, \quad C_l^2 r_2^l = 0, \quad l A_l^2 r_2^{l-1} = 0, \quad l C_l^2 r_2^{l-1} = 0, \quad (3.19)$$

puesto que, en el límite, $r_2^{-n} = 0$ para toda $n > 0$.

Como también $r_2^n \rightarrow \infty$, la única forma en que se satisfacen las ecuaciones anteriores es si

$$A_l^2 = C_l^2 = 0. \quad (3.20)$$

Por otra parte, ya que el análisis la región 3 carece de sentido (su dominio es $r > r_2$), los coeficientes B_l^3 y D_l^3 pueden ignorarse. Al eliminar estas cuatro variables (A_l^2 , C_l^2 , B_l^3 y D_l^3) del conjunto (2.54-2.65) se obtiene un sistema de seis ecuaciones. La solución está dada por

$$\begin{aligned} A_l^1 &= (1+l)(-1+\varepsilon)\lambda_d^l, & B_l^1 &= -r_1^{2l+1}(l+\varepsilon+l\varepsilon)\lambda_d^l, & B_l^2 &= -(1+2l)r_1^{2l+1}\lambda_d^l, \\ C_l^1 &= -\tilde{\alpha}(1+l)\lambda_d^l, & D_l^1 &= -\tilde{\alpha}l a^{2l+1}\lambda_d^l, & D_l^2 &= -\tilde{\alpha}l(a^{2l+1} - r_1^{2l+1})\lambda_d^l, \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde se ha definido

$$\lambda_d^l = \frac{a^{l+1}V_l}{a^{2l+1}(1+l)(-1+\varepsilon) - r_1^{2l+1}(l+\varepsilon+l\varepsilon)}. \quad (3.22)$$

Las líneas de flujo de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} para el caso $r_2 \rightarrow \infty$ se muestran en la Fig. 4.

3.4.1. Relación entre los casos $r_1 = a$ y $r_2 \rightarrow \infty$

En contraste con el caso $r_2 \rightarrow \infty$, en el caso $r_1 = a$ hay dos gradientes de la PME. Uno se manifiesta en la interfase $r = r_2$ y el otro corresponde a la superficie del conductor $r = a$, ya que dentro de éste se asume la PME del vacío. Veremos que el segundo no es relevante. Para ello, es necesario recordar cómo se modifican las ecuaciones de Maxwell debido al efecto ME. Particularmente,

$$\nabla \times (\mathbf{B}/\mu) - \frac{1}{c} \frac{(\partial \varepsilon \mathbf{E})}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_L + \tilde{\alpha} \delta(F_\Sigma(\mathbf{x})) \mathbf{E} \times \hat{n}, \quad (3.23)$$

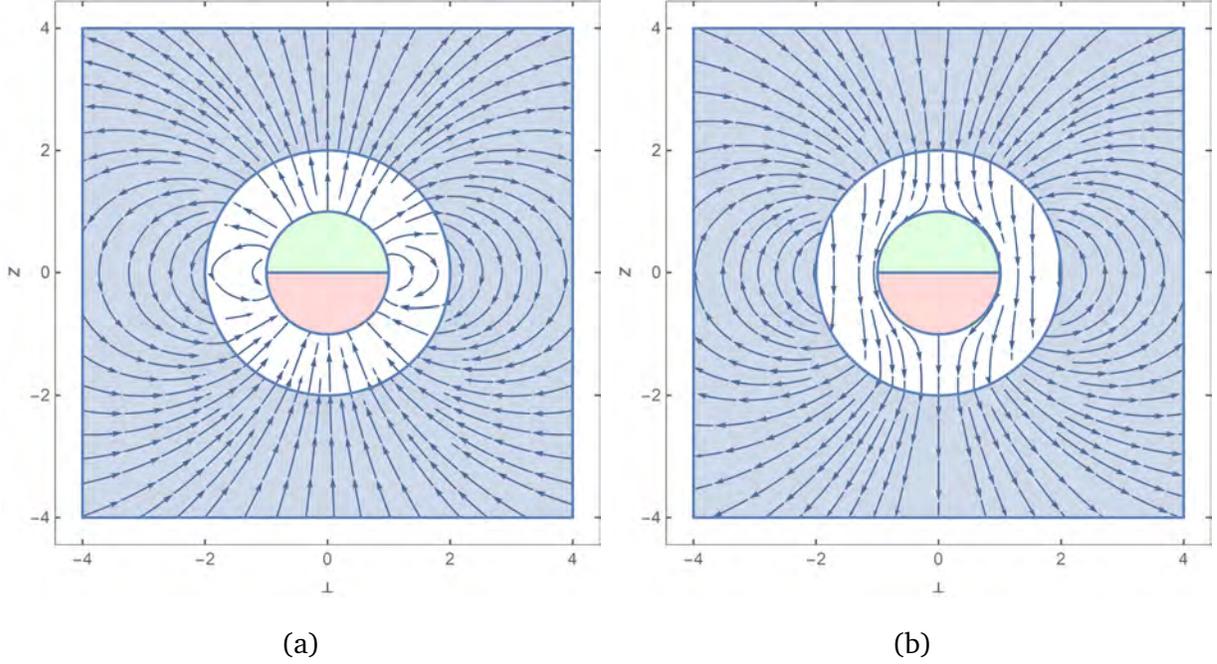


Figura 4: Caso $r_2 \rightarrow \infty$: Usando los valores $a = 1$ y $r_1 = 2$, se graficaron (a) el campo eléctrico y (b) el campo magnético.

de donde se deduce que $\mathbf{J}_\vartheta = (c\tilde{\alpha}/4\pi)\delta(F_\Sigma(\mathbf{x}))\mathbf{E} \times \hat{n}$ es la corriente inducida por la PME. Ahora bien, en la interfase $r = a$, que corresponde a la superficie del conductor, el campo eléctrico es radial debido al equilibrio electrostático. En otras palabras, $\mathbf{E} \times \hat{n} = 0$. Se concluye que las corrientes que serían inducidas por el gradiente de la PME no se presentan debido a la naturaleza conductora de la interfase $r = a$. Es importante notar que el resultado es general: cuando una interfase entre dos medios con distinta PME coincide con una superficie conductora, se anulan las corrientes inducidas.

Después de tomar los límites correspondientes, las dos interfases de los casos $r_1 = a$ y $r_2 \rightarrow \infty$ están determinadas por los radios (a, r_2) y (a, r_1) , como se muestra en las Figs. 3 y 4 respectivamente. Tales gráficas sugieren que ambos casos pueden relacionarse mediante el conjunto de transformaciones

$$\vartheta_1 \leftrightarrow \vartheta_2, \quad (\tilde{\alpha} \rightarrow -\tilde{\alpha}), \quad r_1 \leftrightarrow r_2, \quad \varepsilon_1 \leftrightarrow \varepsilon_2, \quad (\varepsilon \rightarrow 1/\varepsilon), \quad (3.24)$$

donde $\varepsilon = \varepsilon_1/\varepsilon_2$.

En la Fig. 5 se ilustran las dos configuraciones, lo que hace más transparente su conexión. Ahora se verá cómo cambia la solución del caso $r_1 = a$. Definimos los coeficientes

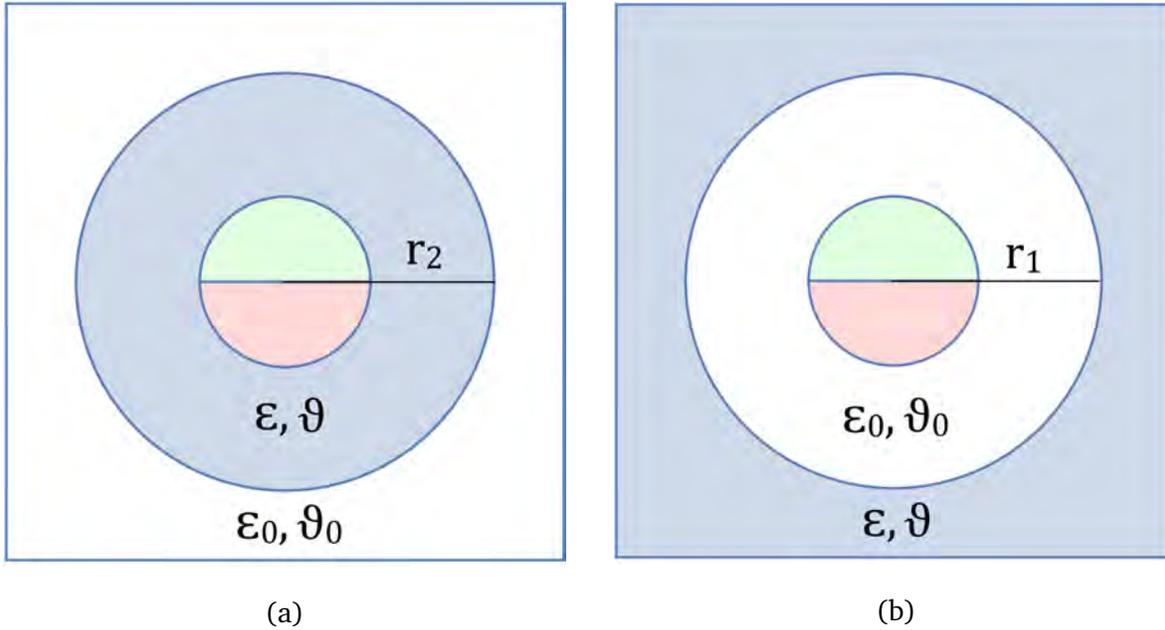


Figura 5: Los casos (a) $r_1 = a$ y (b) $r_2 \rightarrow \infty$ están relacionados por las transformaciones indicadas en la ecuación (3.24).

transformados

$$A_l^i \rightarrow \bar{A}_l^i, \quad B_l^i \rightarrow \bar{B}_l^i, \quad C_l^i \rightarrow \bar{C}_l^i, \quad D_l^i \rightarrow \bar{D}_l^i. \quad (3.25)$$

Para comenzar, es pertinente analizar cómo cambia el factor λ_c^l , que es común a todos los coeficientes. En concordancia con la notación anteriormente introducida, nombramos $\bar{\lambda}_c^l$ al factor transformado, de suerte que

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_c^l &= \frac{a^{l+1}V_l}{a^{2l+1}(l+1)(1/\varepsilon - 1) + r_1^{2l+1}(l/\varepsilon + l + 1)} \\ &= \varepsilon \frac{a^{l+1}V_l}{a^{2l+1}(l+1)(1 - \varepsilon) + r_1^{2l+1}(l + l\varepsilon + \varepsilon)} \\ &= -\varepsilon \frac{a^{l+1}V_l}{a^{2l+1}(l+1)(-1 + \varepsilon) - r_1^{2l+1}(l + l\varepsilon + \varepsilon)}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Así, $\bar{\lambda}_c^l$ puede escribirse en términos de λ_d^l , que fue definido para el caso $r_2 \rightarrow \infty$:

$$\bar{\lambda}_c^l = -\varepsilon \lambda_d^l. \quad (3.27)$$

En consecuencia, observamos que

$$\begin{aligned}\bar{A}_l^2 &= (l+1)(1/\varepsilon - 1)(-\varepsilon\lambda_d^l), & \bar{B}_l^2 &= r_1^{2l+1}(l/\varepsilon + l + 1)(-\varepsilon\lambda_d^l), & \bar{B}_l^3 &= (2l+1)(1/\varepsilon)r_1^{2l+1}(-\varepsilon\lambda_d^l), \\ \bar{C}_l^2 &= \tilde{\alpha}(l+1)(1/\varepsilon)(-\varepsilon\lambda_d^l), & \bar{D}_l^2 &= \tilde{\alpha}(l/\varepsilon)a^{2l+1}(-\varepsilon\lambda_d^l), & \bar{D}_l^3 &= \tilde{\alpha}(l/\varepsilon)(a^{2l+1} - r_1^{2l+1})(-\varepsilon\lambda_d^l).\end{aligned}\tag{3.28}$$

Escrito de forma más transparente,

$$\begin{aligned}\bar{A}_l^2 &= (l+1)(-1 + \varepsilon)\lambda_d^l, & \bar{B}_l^2 &= -r_1^{2l+1}(l + l\varepsilon + \varepsilon)\lambda_d^l, & \bar{B}_l^3 &= -(2l+1)r_1^{2l+1}\lambda_d^l, \\ \bar{C}_l^2 &= -\tilde{\alpha}(l+1)\lambda_d^l, & \bar{D}_l^2 &= -\tilde{\alpha}a^{2l+1}\lambda_d^l, & \bar{D}_l^3 &= -\tilde{\alpha}(a^{2l+1} - r_1^{2l+1})\lambda_d^l.\end{aligned}\tag{3.29}$$

Es decir, se recuperan los coeficientes de la configuración $r_2 \rightarrow \infty$, como se afirmó inicialmente.

La relación establecida en la ecuación (3.27) y el coeficiente \bar{D}_l^3 del conjunto (3.29) provee una explicación simple del cambio de dirección del campo magnético en la región más externa que se da en la configuración $r_1 = a$ respecto a la configuración $r_2 \rightarrow \infty$. Este comportamiento es aparente en las Figs. 3b y 4b. Recordemos que el potencial magnético está determinado por los coeficientes D_l^3 y $\bar{D}_l^3 = D_l^2$ en los casos $r_1 = a$ y $r_2 \rightarrow \infty$, respectivamente. Analizamos el cociente

$$\frac{D_l^2}{D_l^3} = \frac{\bar{D}_l^3}{D_l^3} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{a^{2l+1}(l+1)(\varepsilon-1) + r_1^{2l+1}(l\varepsilon + l + 1)}{a^{2l+1}(l+1)(\varepsilon-1) - r_1^{2l+1}(l\varepsilon + l + \varepsilon)} \equiv \frac{1}{\varepsilon} \frac{N}{D}\tag{3.30}$$

para determinar su signo. Como $\varepsilon \geq 1$ y el numerador N es positivo, nos queda sólo hallar el signo del denominador D . Ya que $r_1 > a$, se sigue que $D < a^{2l+1} \left((l+1)(\varepsilon-1) - (l\varepsilon + l + \varepsilon) \right) = -a^{2l+1}(2l+1) < 0$. Es decir, $N/(\varepsilon D)$ es negativo, lo cual da lugar a un signo menos relativo entre Ψ_C y Ψ_D . Esto explica que las configuraciones $r_1 = a$ y $r_2 \rightarrow \infty$ produzcan campos magnéticos en direcciones opuestas en dicha región. Análogamente, para el potencial eléctrico tenemos que los coeficientes relevantes son B_l^3 y $\bar{B}_l^3 = B_l^2$. Su cociente es $B_l^2/B_l^3 = -N/(\varepsilon D)$, que nos indica que el signo relativo entre Φ_C y Φ_D es positivo, dando lugar a campos eléctricos en la misma dirección. Este comportamiento se observa en las regiones externas de las Figs. 3a y 4a.

3.5. Caso $r_1 = a$ y $r_2 \rightarrow \infty$

En esta situación, toda la región exterior al condensador semiesférico está constituida por el material topológico. La solución se obtiene directamente de los coeficientes de (3.21), y está dada por

$$\begin{aligned} A_l^1 &= -\frac{a^{-l}(1+l)(\varepsilon-1)V_l}{2l+1}, & B_l^1 &= \frac{a^{l+1}(l+\varepsilon+l\varepsilon)V_l}{2l+1}, & B_l^2 &= a^{l+1}V_l, \\ C_l^1 &= \frac{\tilde{\alpha}a^{-l}(l+1)V_l}{2l+1}, & D_l^1 &= \frac{\tilde{\alpha}a^{l+1}lV_l}{2l+1}, & D_l^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Nótese que ahora además de $C_l^2 = 0$ tenemos $D_l^2 = 0$, por lo que en $a < r < \infty$ el potencial magnético es nulo. Esto es lo que se espera para un medio homogéneo (con PME constante).

Por otro lado, a pesar de que los coeficientes A_l^1 y B_l^1 no son nulos, el dominio del potencial en la región 1 está degenerado (sólo tiene sentido hablar de Φ_1 en $r = a$). Se espera, no obstante, que $\Phi_1(a, \theta) = \Phi_2(a, \theta)$, lo cual ocurre a pesar de la forma barroca de A_l^1 y B_l^1 . Explícitamente,

$$\begin{aligned} \Phi_1(a, \theta) &= \sum_l' (A_l^1 a^l + B_l^1 a^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) \\ &= \sum_l' \left[\left(-\frac{a^{-l}(1+l)(-1+\varepsilon)V_l}{1+2l} \right) a^l + \left(\frac{a^{l+1}(l+\varepsilon+l\varepsilon)V_l}{1+2l} \right) a^{-(l+1)} \right] P_l(\cos \theta) \\ &= \sum_l' V_l P_l(\cos \theta). \end{aligned} \quad (3.32)$$

A su vez,

$$\begin{aligned} \Phi_2(a, \theta) &= \sum_l' (B_l^2 a^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) = \sum_l' (a^{l+1} V_l a^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) \\ &= \sum_l' V_l P_l(\cos \theta). \end{aligned} \quad (3.33)$$

El potencial eléctrico en el bulto ($a < r < \infty$) está dado por Φ_2 :

$$\Phi_2(r, \theta) = \sum_l' (B_l^2 r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) = \sum_l' \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} V_l P_l(\cos \theta), \quad (3.34)$$

que de nuevo coincide con el caso trivial.

Como prueba adicional de estos resultados, verificamos que los valores no nulos de C_l^1 y D_l^1 reproducen la condición de borde en las placas conductoras al imponer que la componente normal del campo magnético es nula. Para ello usamos la ecuación (2.45) evaluada en $r = a$, que después de la sustitución produce

$$\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial r}\right)_{r=a} = \sum_l' \left[\left(\frac{\tilde{\alpha} a^{-l}(l+1)V_l}{2l+1}\right) l a^{l-1} - \left(\frac{\tilde{\alpha} a^{l+1}lV_l}{2l+1}\right) (l+1)a^{-(l+2)} \right] P_l(\cos \theta) = 0. \quad (3.35)$$

Como se procedió en un caso previo, se puede prescindir de los coeficientes de la región 1, pues los de la región 2 satisfacen las condiciones de borde en las placas del condensador semiesférico. De este modo queda claro que el presente caso es equivalente al trivial.

Se concluye que, de los cinco límites estudiados, tres son equivalentes al caso trivial y los dos restantes están relacionados bajo el intercambio de los parámetros en cada región. Cabe agregar que los casos en los que hay un hueco entre el conductor y la primera interfase son más difíciles de construir que aquellos en los que la superficie de la esfera conductora coincide con la interfase del AT.

A pesar de la utilidad cualitativa de las gráficas aquí expuestas, ha de tenerse en cuenta que no pretenden hacer explícita la magnitud de los campos producidos, ya que sólo muestran líneas de flujo. Con esto en mente, en la próxima Sección se estudian las magnitudes de los campos y cómo hallar las configuraciones que los maximizan, acercando el problema a un posible estudio fenomenológico.

4. Posibilidades experimentales

El funcionamiento de los magnetómetros basados en un centro nitrógeno-vacancia (NV) en diamante consiste en un defecto del diamante en el que dos átomos de la red de carbono se ven sustituidos por una vacancia y un átomo de nitrógeno [59]. Entre diversas propiedades, uno de sus estados posee un espín total $S = 1$ que interactúa con campos magnéticos externos, permitiendo su medición. Estos dispositivos operan con rangos de sensibilidad de $10^{-2} \text{ G Hz}^{-1/2}$ a $10^{+2} \text{ G Hz}^{-1/2}$ y operan a frecuencias del orden de hertz [60]. Esto quiere decir que son capaces de detectar campos magnéticos de magnitudes tan pequeñas como 10^{-2} G . Alternativamente, los actuales magnetómetros SQUID (dispositivo superconductor de interferencia cuántica), son capaces de medir cambios en el campo magnético correspondientes a flujos del orden de $10^{-6} \Phi_0$, donde Φ_0 es el cuanto de flujo magnético con valor de $2.2 \times 10^{-8} \text{ G cm}^2$ [55].

Fijando valores para los parámetros que determinan el potencial magnético, es posible estimar la magnitud del campo en distintos puntos del espacio. Ha de recordarse que hemos tomado las regiones 1 y 3 como el vacío, de modo que el efecto ME surge sólo por la presencia del material topológico en la región 2. Es importante fijar la atención cerca de la interfase exterior del medio magnetoeléctrico, pues es esa la región accesible a los dispositivos de medición. En cuanto a la dirección, es suficiente analizar los casos $\theta = 0, \pi/4, \pi/2$ para tener una idea general del comportamiento de la magnitud del campo magnético.

Pondremos especial atención a la configuración en la que el cascarón topológico está en contacto con el condensador (i. e. $r_1 = a$) y en el que el campo magnético se mide en la interfase exterior (i. e. en $r = r_2$). Bajo estas condiciones, los campos pueden escribirse como

$$\begin{aligned} [r_2 B_r]_{r_1=a, r=r_2} &= \tilde{\alpha} \sum_l' F_l(s) l(l+1) V_l P_l(\cos \theta), \\ [r_2 B_\theta]_{r_1=a, r=r_2} &= -\tilde{\alpha} \sum_l' F_l(s) l V_l \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

con

$$F_l(s) = \varepsilon \frac{s^{l+1} (1 - s^{2l+1})}{[(\varepsilon - 1)(l + 1)s^{2l+1} + (l\varepsilon + l + 1)]}, \quad s = \frac{r_1}{r_2}. \quad (4.2)$$

Argumentos dimensionales indican que los potenciales $[\Phi]_{r_1=a, r=r_2}$ y $[\Psi]_{r_1=a, r=r_2}$, que son lineales en V_l , son funciones únicamente de s .

Para las estimaciones numéricas, asignamos $\tilde{\alpha} = \alpha \approx 1/137$, el mínimo valor que puede tomar un aislante topológico para el cual elegimos TlBiSe₂, con $\varepsilon \approx 4$. Además, se escoge $V = 3 \text{ V}$; a, r_1 del orden de $\mu\text{m} = 10^{-4} \text{ cm}$ y se fija $r_2 = 1 \mu\text{m}$. Esta elección de las características del sistema está motivada por la Ref. [41]. Los códigos de *Mathematica* empleados para realizar las estimaciones y gráficas de esta Sección se presentan en el Apéndice E.

En el sistema CGS, el campo eléctrico y el campo magnético se miden en statV/cm y G, respectivamente. Ha de tenerse en cuenta la relación con el SI: $1 \text{ statV} = 300 \text{ V}$, $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$ [9].

4.1. Configuración óptima en $\theta = 0$

Analizar el comportamiento del campo en la dirección $\theta = 0$ da una idea general del problema. Después de esto, se realizan estimaciones de la magnitud total del campo en otras direcciones. Como primera aproximación, puede suponerse que el máximo del campo magnético se da cerca de la interfase para cualquier configuración. Esta hipótesis es razonable porque sabemos que el campo debe atenuarse con la distancia. Más aún, puede demostrarse que si $r_1 \leq 0.6 \mu\text{m}$, entonces $a = r_1$ maximiza $|B_r(r_2, 0)| = |\mathbf{B}(r_2, 0)|$ (la componente tangencial de \mathbf{B} se anula en $\theta = 0$). Se muestran algunos ejemplos en la Fig. 6, donde es posible ver que $a = r_1$ es una buena elección para valores pequeños de r_1 (Figs. 6a y 6b); en contraste, para valores grandes de r_1 hay un valor óptimo de a para cada caso particular (Figs. 6c y 6d). Para saber este valor, debe resolverse la ecuación $d|\mathbf{B}(r_2, 0)|/da = 0$ con r_1 y r_2 fijos.

En lo que resta de esta Sección, se toma $a = r_1$. Prosiguiendo con el análisis, ha de repararse que dado r_2 es posible determinar el valor de r_1 que maximiza $|\mathbf{B}(r_2, 0)|$ usando la expresión $d|\mathbf{B}(r_2, 0)|/dr_1 = 0$. En la Fig. 7 se muestra la gráfica de $|\mathbf{B}(r_2, 0)|$ en función de r_1 , que alcanza el máximo en $r_1 \approx 0.5 \mu\text{m}$.

Respecto a estas observaciones, cabe hacer algunos comentarios. El primero es que a

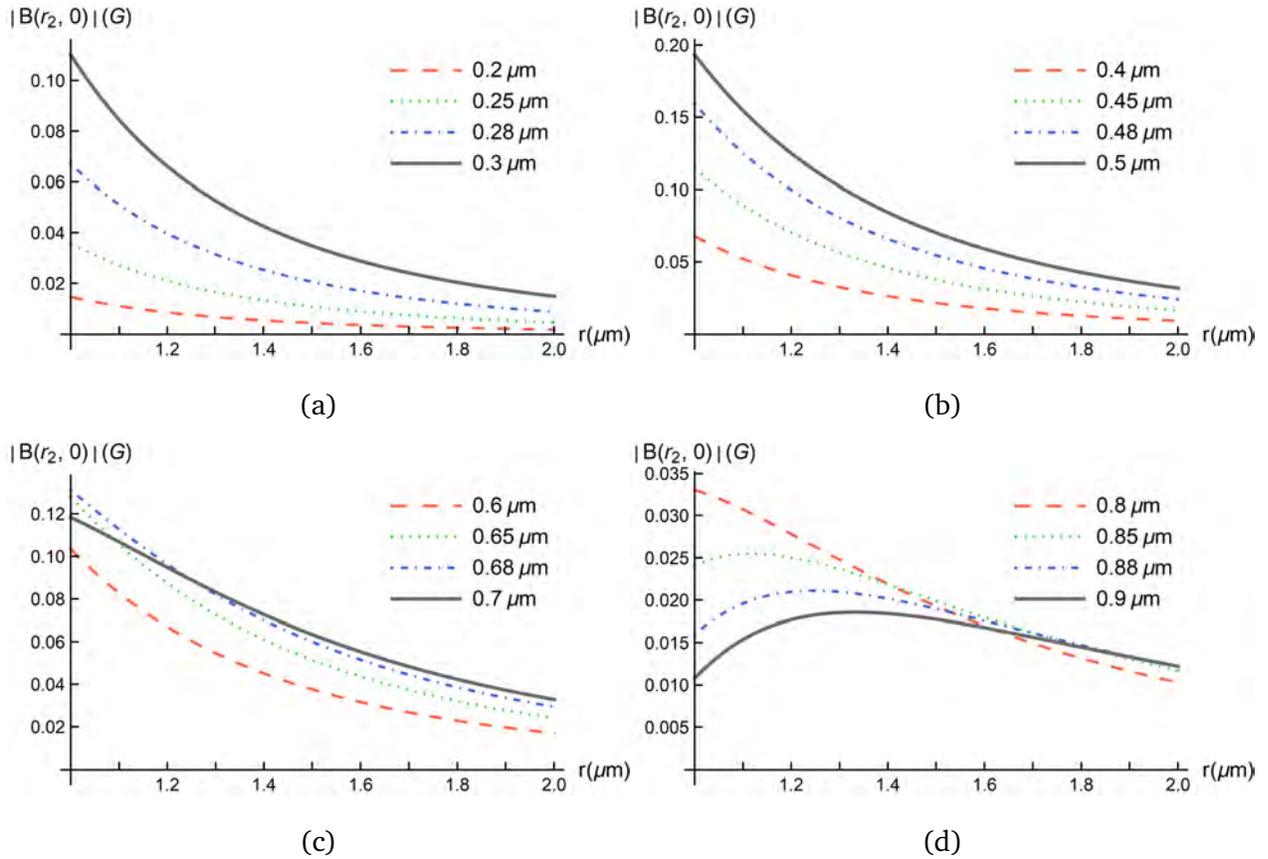


Figura 6: Usando los valores $r_2 = 1 \mu\text{m}$ y (a) $r_1 = 0.3 \mu\text{m}$, (b) $r_1 = 0.5 \mu\text{m}$, (c) $r_1 = 0.7 \mu\text{m}$, (d) $r_1 = 0.9 \mu\text{m}$, se graficó la magnitud del campo magnético en la dirección $\theta = 0$ como función de la distancia para distintos valores de a . En los primeros casos, $a = r_1$ maximiza la magnitud del campo cerca de r_2 . Para valores mayores $a \approx 0.6 \mu\text{m}$ este ya no es el caso.

pesar de que en el dominio $r_1 \geq 0.6 \mu\text{m}$ no se cumple la hipótesis de que $a = r_1$ maximiza $|\mathbf{B}(r_2, 0)|$, en general (para cualquier valor de a) la magnitud del campo en dicho dominio es menor que en $r_1 = 0.5 \mu\text{m}$, donde se alcanzan los 0.2 G. El segundo es que experimentalmente es más sencillo hacer un recubrimiento del material magnetoeléctrico en la superficie de la esfera conductora que dejar un espacio vacío entre ésta y el cascarón esférico de grosor $r_2 - r_1$, por lo que son de mayor interés experimental las configuraciones en las que a coincide con r_1 . El tercero, relevante en cuanto a la eficiencia al realizar cálculos, es que para describir adecuadamente la física asociada a valores grandes de r_1 es necesario considerar una gran cantidad de términos del potencial magnético. En la Fig. 8 se observa el cociente entre la aproximación de Ψ a orden $l = 7$ y a orden $l = 1000$. A partir

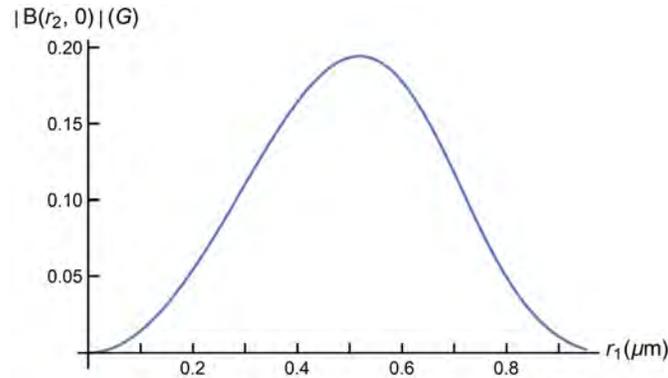


Figura 7: Gráfica de $|\mathbf{B}(r_2, 0)|$ en función de r_1 . La magnitud del campo magnético alcanza su valor máximo en $r_1 \approx 0.5 \mu\text{m}$, que corresponde a $0.2G$.

de $r_1 \approx 0.7 \mu\text{m}$, $l = 7$ ya no resulta ser un buen valor de corte para describir al sistema. Para valores mayores de r_1 , la aproximación se vuelve aún más imprecisa. Es importante aclarar que para graficar la Figs. 6a y 6b bastó con tomar $l = 7$, mientras que para la Figs. 6c y 6d fue necesario incrementar el número de términos.

De lo anterior, se concluye que la condición $a = r_1 \approx 0.5 \mu\text{m}$ daría lugar al campo magnético más intenso en la dirección del eje z. Como se observa en la Fig. 6b, este campo sería del orden de 0.2 G en la interfase $r = r_2$. Por completitud, es importante saber cómo se comporta el campo en otras direcciones. En la Fig. 9a se muestra la gráfica de la magnitud del campo \mathbf{B} en las direcciones $\theta = 0, \pi/4, \pi/2$ como función de r . Asimismo, en la Fig. 9b se muestra la magnitud total del campo en la interfase $r = r_2$ como función de θ para la configuración $a = r_1$ y $r_1 = 0.5 \mu\text{m}$. Es preciso señalar que, en este caso, la magnitud del campo es altamente isotrópica.

4.2. Configuración óptima en $\theta = \pi/2$

El campo total es tangencial. Haciendo un análisis similar al del caso anterior, se muestra que, a diferencia de la componente radial en $\theta = 0$, cuando $a = r_1$ la componente tangencial en $\theta = \pi/2$ crece con r_1 en todo el dominio (Fig. 10). De ese modo, es posible generar campos magnéticos grandes en la vecindad de $\theta = \pi/2$ que disminuyen drásticamente en otras direcciones. En la Fig. 11a se muestra la gráfica de la magnitud total del campo con

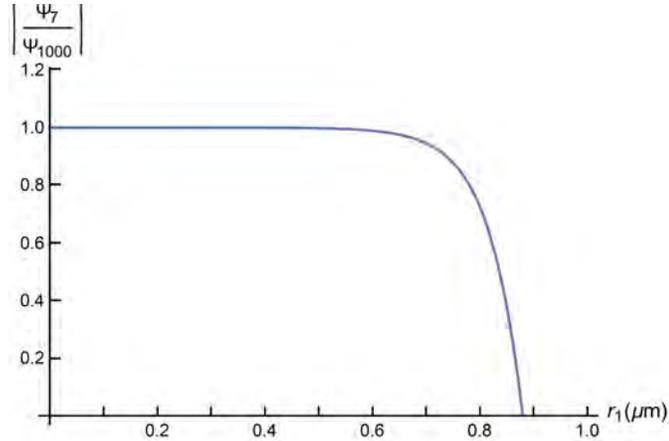


Figura 8: Gráfica de $|\Psi_7/\Psi_{1000}|$ como función de r_1 , con $r_2 = 1 \mu\text{m}$. La aproximación a orden 7 es válida hasta $r_1 \approx 0.6 \mu\text{m}$. Si se desea describir el comportamiento del sistema para valores mayores, es necesario aumentar el orden de la aproximación.

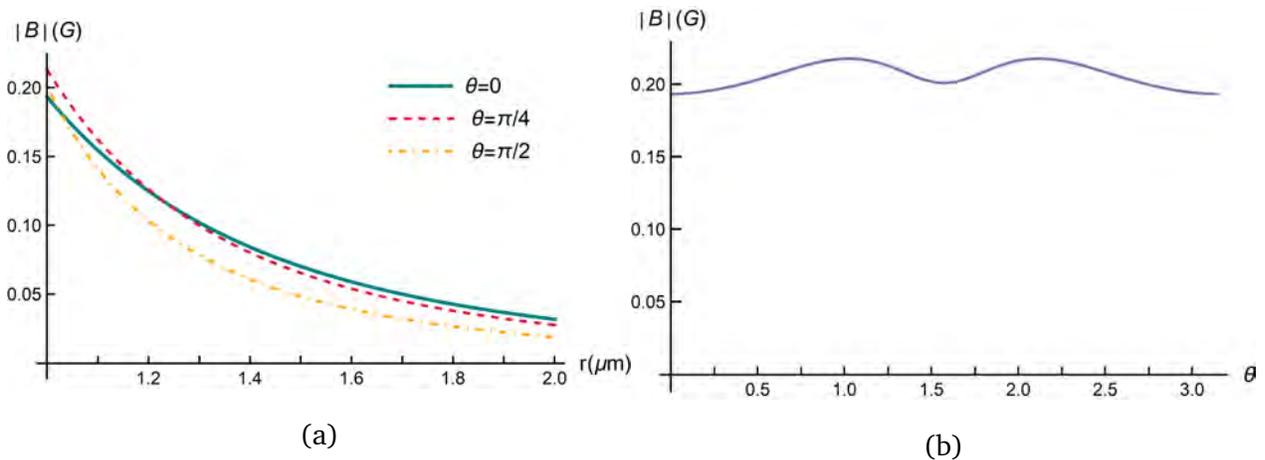


Figura 9: Usando los valores $r_2 = 1 \mu\text{m}$, $r_1 = 0.5 \mu\text{m}$ y $a = r_1$, se graficó (a) la magnitud total del campo en tres direcciones $\theta = 0, \pi/4, \pi/2$ como función de r y (b) la magnitud del campo en la interfase $r = r_2$ como función de θ .

$r_1 = 0.75 \mu\text{m}$ para tres ángulos ($\theta = 0, \pi/4, \pi/2$) como función de la distancia, mientras que en la Fig. 11b se muestra la gráfica del campo en la interfase $r = r_2$ como función de θ . Se toma $r_1 = 0.75 \mu\text{m}$ porque es lo suficientemente grande para notar el contraste con el caso $r_1 = 0.5 \mu\text{m}$, además de que no supone grandes dificultades para realizar estimaciones numéricas.

Una primera conclusión que sugiere dos enfoques empíricos distintos, e incluso opues-

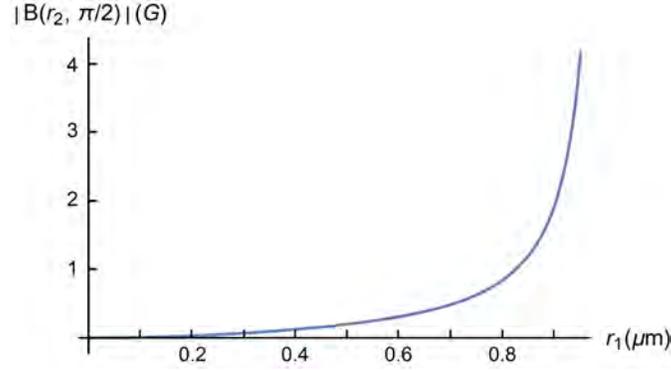


Figura 10: Gráfica de $|B(r_2, \pi/2)|$ en función de r_1 . La función es creciente en el dominio mostrado.

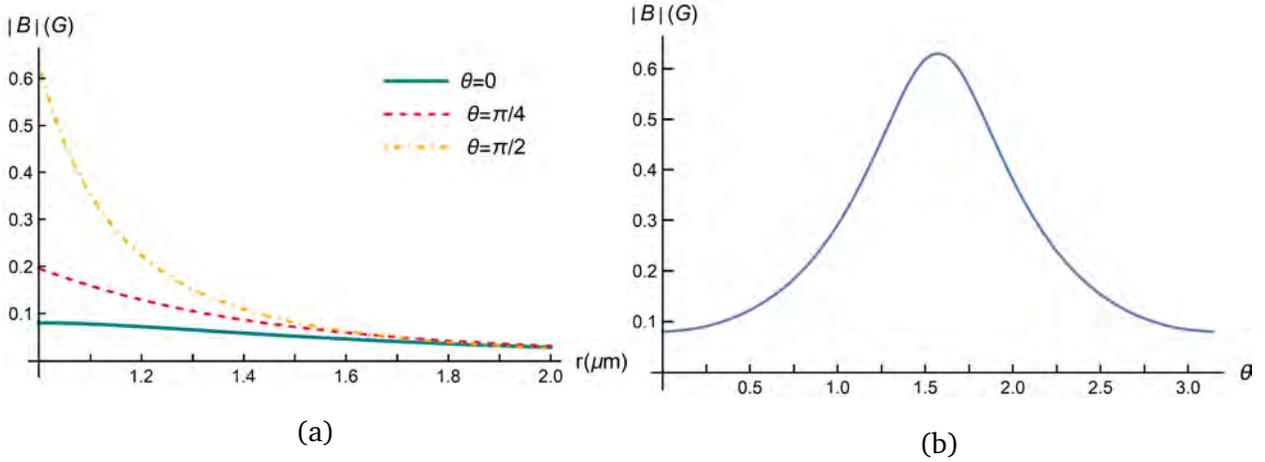


Figura 11: Usando los valores $r_2 = 1 \mu\text{m}$, $r_1 = 0.75 \mu\text{m}$ y $a = r_1$, se graficó (a) la magnitud total del campo en tres direcciones $\theta = 0, \pi/4, \pi/2$ como función de r y (b) la magnitud del campo en la interfase $r = r_2$ como función de θ .

tos, es que la configuración $a = r_1 = 0.75 \mu\text{m}$ generaría campos intensos pero anisotrópicos, mientras que la configuración $a = r_1 = 0.5 \mu\text{m}$ generaría campos casi isotrópicos pero de menor magnitud.

Cabe notar lo que ocurre al escalar las dimensiones del sistema en su conjunto, suponiendo que se multiplica a , r_1 y r_2 por un factor $\Lambda > 1$. La región de interés es la más externa, en donde $D_l^3 \rightarrow \Lambda^{l+1} D_l^3$. Las componentes del campo magnético son

$$\tilde{B}_r(r, \theta) = \sum_l \Lambda^{l+1} \left(\frac{D_l^3}{r^{l+2}} \right) (l+1) P_l(\cos \theta), \quad \tilde{B}_\theta(r, \theta) = - \sum_l \Lambda^{l+1} \left(\frac{D_l^3}{r^{l+2}} \right) \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta}. \quad (4.3)$$

De este modo, al evaluar en $\tilde{r} = \Lambda r$, se obtiene $|\tilde{\mathbf{B}}(\tilde{r}, \theta)| = |\mathbf{B}(r, \theta)|/\Lambda$.

En particular, esto significa que el campo magnético medido en la interfase exterior de la configuración escalada se reduce en un factor Λ con respecto al medido en la misma interfase antes de realizar el escalamiento. Es notable que un aumento en las dimensiones del sistema de hasta diez veces ($\Lambda = 10$), con valores óptimos de $|\mathbf{B}| \approx 0.2$ G, mantendría la posibilidad de una detección experimental al producir campos de magnitud $|\mathbf{B}| \approx 0.02$ G. Este resultado aplica a las dos configuraciones que hemos explorado hasta ahora.

4.3. Configuración óptima en $\theta = \pi/4$

Análogamente a los casos anteriores, se puede encontrar la condición que maximiza el campo en la dirección $\theta = \pi/4$. En la Fig. 12 se muestra la gráfica de $|\mathbf{B}(r_2, \pi/4)|$ como función de r_1 . El máximo se da en $r_1 \approx 0.62 \mu\text{m}$. Este caso es un híbrido entre los dos anteriores, pues da lugar a campos no tan intensos como en $r_1 = 0.75 \mu\text{m}$ ni tan isotrópicos como en $r_1 = 0.5 \mu\text{m}$. En la Fig. 13a se muestra el campo magnético como función de r producido por esta configuración en las direcciones $\theta = 0, \pi/4, \pi/2$. Asimismo, en la Fig. 13b se muestra el campo magnético en la interfase como función de θ .

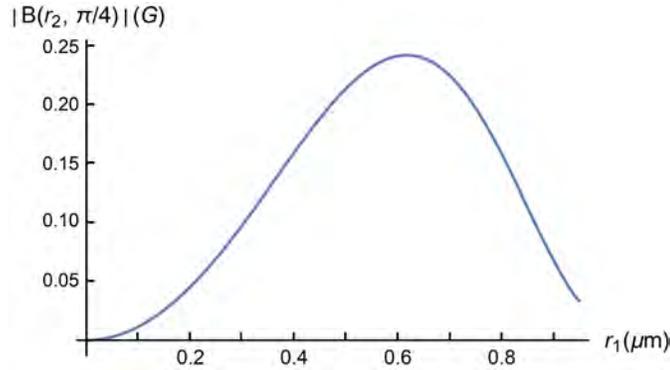


Figura 12: Gráfica de $|\mathbf{B}(r_2, \pi/4)|$ como función de r_1 .

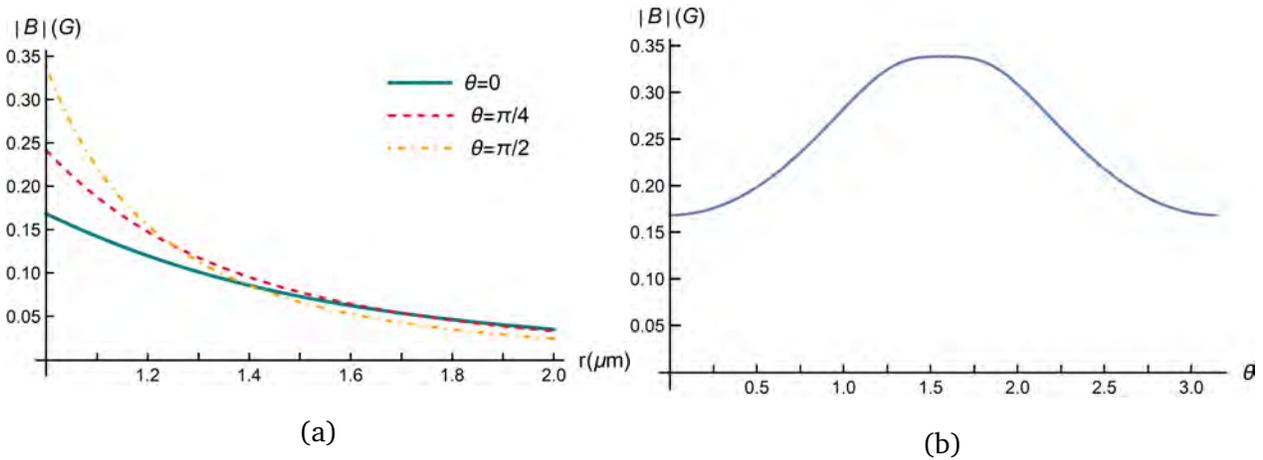


Figura 13: Usando los valores $r_2 = 1 \mu m$, $r_1 = 0.62 \mu m$ y $a = r_1$, se graficó (a) la magnitud total del campo en tres direcciones $\theta = 0, \pi/4, \pi/2$ como función de r y (b) la magnitud del campo en la interfase $r = r_2$ como función de θ .

4.4. Observaciones

Fijando $r = r_2 = 1 \mu m$, quedan dos parámetros libres: $a = r_1$ y θ . Se graficó el campo magnético en ciertas direcciones como función de $a = r_1 < 0.95 \mu m$. Se encontró un máximo que ocurre para valores cada vez más grandes de r_1 a medida que θ se acerca a $\pi/2$.

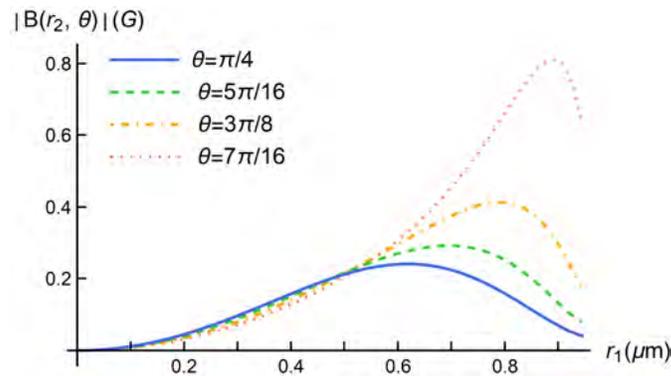


Figura 14: Gráfica de $|B(r_2, \theta)|$ como función de $a = r_1$, para diferentes valores de θ que se aproximan a $\pi/2$. El cambio en la pendiente después del máximo es evidente, lo cual es compatible con el hecho de que el campo debe anularse en el límite $r_1 = r_2 = 1 \mu m$.

La discontinuidad del potencial en $r = a$ y $\theta = \pi/2$ hace que en estos puntos las aproximaciones numéricas sean poco confiables. Esto se evidencia al considerar $a = r_1$ y observar el campo magnético en r_2 en el límite $r_1 \rightarrow r_2$. Sin embargo, de acuerdo con la física del problema, se espera que en el límite $a = r_1 \rightarrow r_2$, cuando el aislante topológico desaparece, el campo magnético se anule en todo el espacio, particularmente en la interfase exterior. Este comportamiento, que es manifiesto en las Figs. 7 y 12, es consistente con los casos $\theta = \pi/4, 5\pi/16, 3\pi/8, 7\pi/16$, que van acercándose a $\pi/2$. Lo anterior se muestra en la Fig. 14. No obstante, este no es el caso en la Fig. 10, en el que $\theta \equiv \pi/2$. En consecuencia, los cálculos en este entorno no son confiables con la precisión que hemos empleado, por lo que nos restringimos al dominio $a = r_1 \leq 0.95 \mu\text{m}$ en todas las configuraciones relevantes.

A modo de resumen de esta Sección, dentro del límite $a = r_1 \leq 0.95 \mu\text{m}$ nos enfocamos en las configuraciones $a = r_1 = 0.50, 0.62$ y $0.75 \mu\text{m}$ y exploramos el comportamiento del campo magnético en la interfase exterior. Como se muestra en las Figs. 9b, 13b y 11b, la característica principal que muestra el campo magnético es un aumento en la anisotropía angular a medida que aumenta r_1 , junto con un incremento correspondiente en su magnitud alrededor de $\theta = \pi/2$.

4.5. Flujo magnético a través de un SQUID

El magnetómetro SQUID es uno de los dispositivos más eficaces y sensibles para medir flujos magnéticos. A grandes rasgos, su funcionamiento está basado en dos fenómenos cuánticos: la superconductividad (resistencia eléctrica nula, que también da lugar a la cuantización del flujo magnético) y el efecto Josephson [61]. Este último ocurre en las denominadas junturas de Josephson, que consisten en la unión de dos alambres superconductores mediante una fina capa aislante. Los estados superconductores están descritos por una función de onda distinta a cada lado de la capa aislante. Mediante tunelaje, una corriente proporcional a la diferencia de fase $\Delta\varphi$ entre estas dos funciones de onda puede fluir en la capa aislante en ausencia de un voltaje aplicado. Por su parte, si $\Delta\varphi$ cambia con el tiempo, se genera un voltaje en el circuito [62].

Un SQUID es una espira superconductora (que permite únicamente múltiplos enteros

del cuanto de flujo magnético Φ_0) con una o dos junturas de Josephson. Un cambio en el flujo que atraviesa la espira genera corrientes que lo contrarrestan. A su vez, este cambio en la corriente que circula por el circuito da lugar a un cambio en $\Delta\varphi$, lo que genera un voltaje fácilmente medible. Esto permite estimar flujos magnéticos con una precisión de hasta $10^{-6}\Phi_0$.

A continuación nos proponemos estimar el flujo magnético a través de una espira circular de radio R cuyo centro se encuentra a una distancia ζ del origen, como se muestra en la Fig. 15. Esto nos permitirá saber si los campos magnéticos generados por el condensador semiesférico rodeado por un aislante topológico son detectables mediante magnetometría SQUID. Nos restringimos al caso $a = r_1$ anteriormente estudiado. Es claro que

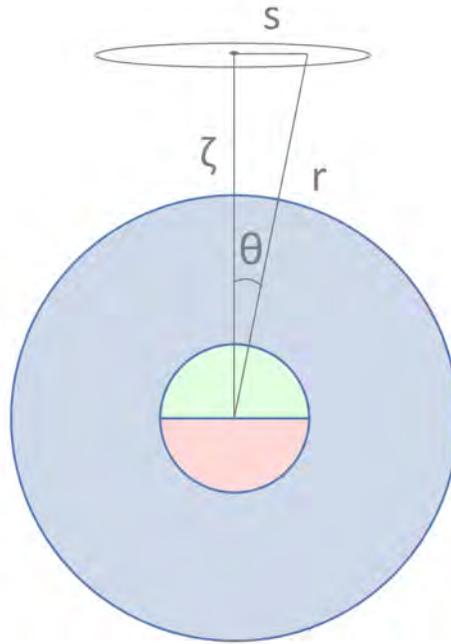


Figura 15: Una espira circular se posiciona a una distancia vertical ζ del origen. La distancia a cualquier punto de la región encerrada por el circuito puede ser descrita mediante el ángulo polar y ζ .

$$s = \zeta \tan \theta, \quad r = \zeta \sec \theta. \quad (4.4)$$

Debido a la segunda expresión, el radio vector a la región interior de la espira es

$$\mathbf{r} = \zeta \sec \theta \hat{r}. \quad (4.5)$$

De acuerdo con la relación $s = \zeta \tan \theta$, el ángulo máximo θ_0 (que determina la posición de la espira misma) puede expresarse en términos del radio R y la distancia vertical ζ , ambas cantidades constantes, como

$$\theta_0 = \arctan \left(\frac{R}{\zeta} \right). \quad (4.6)$$

Por tanto, debemos considerar que, en todas las ecuaciones anteriores, $\theta \in [0, \theta_0]$.

En la región 3, las componentes del campo magnético están dadas por

$$B_r(r, \theta) = \sum_l' \left((l+1) \frac{D_l^3}{r^{l+2}} P_l(\cos \theta) \right), \quad (4.7)$$

$$B_\theta(r, \theta) = \sum_l' \left(-\frac{D_l^3}{r^{l+2}} \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} \right). \quad (4.8)$$

Conociendo la relación de recurrencia

$$(1-x^2) \frac{dP_l(x)}{dx} = lP_{l-1}(x) - lxP_l(x), \quad (4.9)$$

y definiendo $x = \cos \theta$, es posible escribir

$$\frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} = -\frac{1}{\sin \theta} (lP_{l-1}(\cos \theta) - l \cos \theta P_l(\cos \theta)), \quad (4.10)$$

de forma que, evaluado en la superficie delimitada por la espira, las componentes del campo magnético son

$$B_r(\theta) \equiv B_r(\zeta \sec \theta, \theta) = \sum_l' \left((l+1) \frac{D_l^3}{(\zeta \sec \theta)^{l+2}} P_l(\cos \theta) \right), \quad (4.11)$$

$$B_\theta(\theta) \equiv B_\theta(\zeta \sec \theta, \theta) = \sum_l' \frac{D_l^3}{(\zeta \sec \theta)^{l+2}} \left(\frac{1}{\sin \theta} [lP_{l-1}(\cos \theta) - l \cos \theta P_l(\cos \theta)] \right). \quad (4.12)$$

Se ha hecho explícito que, ya que hay una relación entre r y θ en la región donde el campo magnético está siendo evaluado, B_r y B_θ pueden escribirse en términos de sólo una de estas variables (en este caso, se ha escogido θ).

Por otro lado, el elemento diferencial de área de la espira está dado por

$$d\mathbf{a} = s ds d\phi \hat{k}, \quad (4.13)$$

donde \hat{k} es el vector unitario en la dirección del eje z . La relación $s = \zeta \tan \theta$ permite expresar la ecuación anterior en una forma diferente que, aunque es complicada, resulta de mayor utilidad:

$$d\mathbf{a} = (\zeta \tan \theta) \left(\zeta \frac{d \tan \theta}{d\theta} d\theta \right) d\phi \hat{k} = \zeta^2 \tan \theta \sec^2 \theta d\theta d\phi \hat{k}. \quad (4.14)$$

Usando coordenadas esféricas, \hat{k} es descrito por

$$\hat{k} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}. \quad (4.15)$$

Esto es conveniente al obtener el producto punto entre el campo magnético y el elemento diferencial de área:

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = (\mathbf{B} \cdot \hat{k})(\zeta^2 \tan \theta \sec^2 \theta d\theta d\phi) = (B_r(\theta) \cos \theta - B_\theta(\theta) \sin \theta)(\zeta^2 \tan \theta \sec^2 \theta d\theta d\phi). \quad (4.16)$$

De acuerdo con las ecuaciones (4.11) y (4.12), vemos que

$$B_r(\theta) \cos \theta - B_\theta(\theta) \sin \theta = \sum_l' \frac{D_l^3}{(\zeta \sec \theta)^{l+2}} [(2l+1)P_l(\cos \theta) \cos \theta - lP_{l-1}(\cos \theta)]. \quad (4.17)$$

El flujo magnético se define como

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}, \quad (4.18)$$

donde S es la superficie delimitada por la espira. Mediante la ecuación (4.16), se llega a

$$\begin{aligned} \Phi &= 2\pi \int_0^{\theta_0} \left(\sum_l' \frac{D_l^3}{(\zeta \sec \theta)^{l+2}} [(2l+1)P_l(\cos \theta) \cos \theta - lP_{l-1}(\cos \theta)] \right) \zeta^2 \tan \theta \sec^2 \theta d\theta \\ &= \pi \int_0^{\theta_0} \left(\sum_l' \frac{D_l^3}{(\zeta \sec \theta)^l} [(2l+1)P_l(\cos \theta) \sin \theta - lP_{l-1}(\cos \theta) \tan \theta] \right) d\theta. \end{aligned} \quad (4.19)$$

El factor 2π aparece tras integrar el ángulo azimutal ϕ .

Consideramos el caso especial $a = r_1$, para el cual los coeficientes D_l^3 son

$$D_l^3 = -\tilde{\alpha} l \varepsilon (a^{2l+1} - r_2^{2l+1}) \lambda_c^l, \quad \lambda_c^l = \frac{a^{l+1} V_l}{a^{2l+1}(l+1)(\varepsilon-1) + r_2^{2l+1}(l\varepsilon+l+1)}. \quad (4.20)$$

En el Cuadro I se presenta el flujo magnético a través de una espira de radio $R = 10 \mu\text{m}$, como función de diferentes valores de $a = r_1$ y distancias ζ . La interfase externa del arreglo se encuentra en $r_2 = 1 \mu\text{m}$ y el flujo está dado en unidades de 10^{-10} G cm^2 . Estos valores se calcularon usando la ecuación (4.19). El código de *Mathematica* empleado para este propósito se presenta en el Apéndice E.

En promedio hallamos valores del orden de 10^{-9} G cm^2 , que se encuentran dentro de las posibilidades de medición de magnetometría SQUID.

$a (\mu\text{m}) \setminus \zeta (\mu\text{m})$	2	3	4	5	6
0.50	8.4	7.8	7.1	6.4	5.6
0.62	10.2	9.5	8.7	7.8	6.8
0.75	9.9	9.2	8.4	7.5	6.6

Cuadro I: El flujo magnético, en unidades de 10^{-10} G cm^2 , a través de una espira circular de radio $R = 10 \mu\text{m}$ a una distancia $\zeta = 2, 3, 4, 5, 6 \mu\text{m}$, para las tres configuraciones previamente consideradas, cuando $r_2 = 1 \mu\text{m}$ y $a = r_1$.

5. Conclusiones

El estudio de los medios magnetoeléctricos ha tenido un gran eco recientemente. En particular, los *aislantes topológicos* (ATs) han recibido mucha atención en la literatura. Dichos materiales son reconocidos por sus propiedades físicas (bultos aislantes y superficies conductoras con valores cuantizados de la conductividad). La respuesta electromagnética de los aislantes topológicos es descrita por una modificación de las ecuaciones de Maxwell que considera la posibilidad de inducir una polarización (magnetización) mediante campos magnéticos (eléctricos). El origen de este fenómeno, denominado *efecto magnetoeléctrico* (ME), son corrientes y cargas inducidas por gradientes de la *polarizabilidad magnetoeléctrica* (PME) ϑ , que caracteriza a los medios de forma similar a como lo hacen la permitividad y la permeabilidad.

Si bien desde hace varias décadas ya se había investigado el efecto ME en materiales ferroeléctricos y ferromagnéticos, no fue hasta hace algunos años que su estudio cobró una fuerza notable tanto teórica como experimentalmente, debido a los avances en el entendimiento y la fabricación de materiales multiferroicos, junto con el reconocimiento de que este efecto también está presente en fases topológicas. Desde entonces, se han logrado avances significativos que posiblemente permitan aplicaciones tecnológicas en los años subsecuentes motivados por la producción de materiales compuestos con acoplamientos magnetoeléctricos más fuertes que los conocidos.

En este trabajo, se estudió un sistema formado por una esfera conductora hueca con placas semiesféricas a potenciales $+V$ y $-V$ colocada en el vacío ($\vartheta_1 = 0$) y rodeada por un cascarón esférico grueso formado por un aislante topológico con $\vartheta_2 = \pi$, como se muestra en la Fig. 1. Usando coordenadas esféricas, se resolvió el problema considerando ausencia de fuentes libres y para campos estacionarios. Las tres regiones delimitadas por los radios interior y exterior del cascarón esférico están gobernadas por las ecuaciones de Maxwell para medios materiales, mientras que los efectos del AT se manifiestan únicamente en las interfases a través de las condiciones de borde (2.4) y (2.5) que resultan de las relaciones constitutivas (1.5). La motivación principal fue la estimación de la magnitud de los campos magnéticos producidos por la configuración eléctrica.

La solución general del sistema (2.54-2.65) posee una forma difícil de manejar, por lo que se hizo una expansión en serie de potencias a primer orden en el parámetro $\tilde{\alpha} \equiv \vartheta_2 \alpha / \pi$, donde α es la constante de estructura fina. Esto dio lugar a la solución (2.66-2.75).

a (μm)	$ \mathbf{B}(r_2, 0) $ (G)	$ \mathbf{B}(r_2, \pi/4) $ (G)	$ \mathbf{B}(r_2, \pi/2) $ (G)
0.5	≈ 0.2	≈ 0.2	≈ 0.2
0.62	≈ 0.175	≈ 0.25	≈ 0.35
0.75	≈ 0.1	≈ 0.2	≈ 0.6

Cuadro II: *Magnitudes del campo magnético en distintas direcciones para las configuraciones más relevantes. En todos los casos, $a = r_1$ y $r_2 = 1 \mu\text{m}$.*

Posteriormente, se particularizó el problema para algunos casos límite, permitiendo una interpretación más directa de los resultados. Por otro lado, esto dio la oportunidad de verificar si las soluciones obtenidas eran correctas al reducirlas a problemas conocidos. Más aún, se halló que cuando una interfase entre dos medios con distinta PME coincide con una superficie conductora, no se manifiesta el efecto ME.

La invariancia bajo inversión temporal en el bulto del AT ($\vartheta = \pi$), junto con el origen eléctrico de los campos electromagnéticos demandan que la expansión de Φ (Ψ) contenga sólo potencias pares (impares) de $\tilde{\alpha}$. Sin embargo, un análisis más profundo del sistema de ecuaciones (2.54-2.65) revela que tal elección de las potencias de $\tilde{\alpha}$ es una consecuencia algebraica de las ecuaciones. En este sentido, las expresiones para los coeficientes A_l , B_l , C_l , D_l , que se resolvieron a primer orden en $\tilde{\alpha}$, también son válidas cuando la invariancia bajo inversión temporal $\vartheta \rightarrow -\vartheta$ no se satisface, lo cual permite extender la aplicación de los resultados obtenidos al caso de medios magnetoeléctricos lineales, isotrópicos y homogéneos con valores arbitrarios de ϑ tales que $\tilde{\alpha} \ll 1$.

Asimismo, se graficaron las líneas de flujo de los campos eléctrico y magnético para distintas configuraciones y, finalmente, se estudiaron las posibilidades experimentales del sistema para un número significativo de configuraciones. Se buscaron principalmente aquellas que producen los campos magnéticos más intensos, centrandó la atención en el caso

$a = r_1$ que es el más sencillo de producir experimentalmente dado que el AT se encuentra en contacto directo con la esfera conductora. Ya que el campo magnético decrece con la distancia por tratarse de un sistema localizado, las estimaciones se hicieron principalmente en las cercanías de la interfase exterior r_2 del cascarón esférico. Fijando $r_2 = 1 \mu\text{m}$, quedaron únicamente dos parámetros a explorar: el grosor del AT, parametrizado por $a = r_1$, y la isotropía angular del campo en la interfase exterior.

La discontinuidad del potencial fuente en $r = a$ y $\theta = \pi/2$ hace que en estos puntos las aproximaciones numéricas sean poco confiables. Esto es particularmente notable al considerar $a = r_1$ y observar el campo magnético en r_2 en el límite de un cascarón esférico delgado, i. e. cuando $r_1 \rightarrow r_2$. El cálculo se vuelve intrincado en este límite y requiere técnicas numéricas más sofisticadas que quedan fuera del propósito de este trabajo. No obstante, de acuerdo con la física del problema, se espera que en el límite $a = r_1 \rightarrow r_2$, cuando el AT desaparece, el campo magnético se anule en todos lados, particularmente en la interfase exterior del cascarón. Este comportamiento, que es evidente en las Figs.7 y 12, es consistente con los casos en que θ es $\pi/4$, $5\pi/16$, $3\pi/8$, $7\pi/16$, aproximándose a $\pi/2$, que se muestra en la Fig. 14. Sin embargo, eso no sucede en la Fig. 10 para $\theta \equiv \pi/2$. El problema se evita al restringir el dominio a $a = r_1 \leq 0.95 \mu\text{m}$ en todas las configuraciones relevantes.

Escogiendo las direcciones $\theta = 0, \pi/4, \pi/2$ y graficando el campo magnético como función de $a = r_1 < 0.95 \mu\text{m}$, se encontró un máximo que incrementa en magnitud y ocurre para valores cada vez mayores de r_1 a medida que θ se aproxima a $\pi/2$. Estas configuraciones óptimas se dan cuando $a = r_1$ toma los valores $0.50, 0.62$ y $0.75 \mu\text{m}$, respectivamente. Luego de esto, se exploró el comportamiento angular del campo magnético en la interfase exterior r_2 . Como se muestra en las Figs. 9b, 13b y 11b, la característica principal del campo magnético es un incremento en la anisotropía angular a medida que r_1 crece, aunado a un aumento correspondiente en su magnitud alrededor de $\theta = \pi/2$. De hecho, para la configuración $a = r_1 = 0.75 \mu\text{m}$ se obtienen $|\mathbf{B}| \approx 0.20, 0.35$ y 0.60 G en $\theta = 0, \pi/4$ y $\pi/2$, respectivamente. En el Cuadro II se muestra la magnitud del campo magnético en estas tres direcciones generado por las configuraciones $a = r_1 = 0.50, 0.62$ y $0.75 \mu\text{m}$.

Se concluyó que las magnitudes de los campos magnéticos producidos son detectables de acuerdo con las condiciones experimentales actuales, que permiten medir campos del

orden de 10^{-2} G mediante magnetómetros basados en un centro nitrógeno-vacancia (NV) en diamante. Adicionalmente, al considerar que es posible medir flujos magnéticos del orden de 10^{-14} G cm² mediante magnetometría SQUID, se calculó el flujo magnético a través de una espira circular de radio R colocada perpendicularmente al eje z a una distancia ζ del centro del condensador semiesférico, como se muestra en la Fig. 15. En el Cuadro I se presentan los valores del flujo magnético para $R = 10\mu\text{m}$, como función de distintos valores de $a = r_1$ y distancias ζ . Las estimaciones del flujo magnético, que en promedio son del orden de 10^{-9} G cm², se encuentran cómodamente dentro los rangos de medición de los magnetómetros SQUID.

No es inmediata una comparación de los resultados obtenidos en este trabajo con aquellos obtenidos por otros métodos estáticos implementados para estudiar el efecto ME, por ejemplo, en las Refs. [34, 35, 41], pues éstas consideran fuentes eléctricas monopulares para producir el efecto, mientras en este caso se considera, por primera vez según nuestro conocimiento, una fuente dipolar para tal propósito. De cualquier forma, en todos los casos reportados, incluyendo éste, los campos magnéticos generados resultan ser medibles mediante métodos modernos de magnetometría. En este trabajo se verificó muchas veces la consistencia de los resultados generales: (i) estudiando los límites que dan lugar a resultados conocidos, (ii) verificando algunas propiedades de simetría esperadas y, finalmente, (iii) comprobando que la eliminación de alguna región en un proceso límite traslada las condiciones de borde consistentemente a los coeficientes restantes.

En conclusión, se propone un nuevo arreglo, compacto y con forma esférica, para estudiar el efecto ME lineal isotrópico generado por una fuente eléctrica dipolar, que produce campos magnéticos medibles. Tales mediciones pueden emplearse para determinar el acoplamiento magnetoeléctrico de los diferentes materiales que pueden utilizarse para construir el cascarón externo del dispositivo.

Apéndices

A. Electromagnetismo en formalismo 4-vectorial

Una forma particularmente simple de escribir las ecuaciones de Maxwell es mediante el formalismo de 4-vectores. Para hacerlo, se define el tensor electromagnético o de Faraday en unidades CGS y en donde se adopta la signatura $(-, +, +, +)$:

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

donde los subíndices μ y ν toman los valores 0, 1, 2, 3 (índice temporal e índices espaciales). E_i y B_i son las componentes del campo eléctrico y magnético en la dirección i .

Del mismo modo, se puede definir el dual de este tensor mediante

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad (\text{A.2})$$

donde se está usando convención de Einstein (índices repetidos se suman) y $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ es el símbolo de Levi-Civita, que satisface

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{si } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ es permutación par de } (0, 1, 2, 3) \\ -1 & \text{si } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ es permutación impar de } (0, 1, 2, 3) \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Explícitamente, el tensor dual posee la forma

$$(G^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z & E_y \\ -B_y & E_z & 0 & -E_x \\ -B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Definiendo la 4-corriente como

$$(J^\mu) = (c\rho, J_x, J_y, J_z), \quad (\text{A.5})$$

donde ρ y (J_x, J_y, J_z) son las densidades volumétrica de carga y de corriente, respectivamente y c es la velocidad de la luz, es posible escribir las ecuaciones de Maxwell como

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\mu, \quad \frac{\partial G^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0, \quad (\text{A.6})$$

donde $(\partial/\partial x^\mu) = (\partial_\mu) = (-(1/c)\partial/\partial t, \nabla)$ es el 4-gradiente. La equivalencia es la siguiente:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \leftrightarrow \quad \frac{\partial F^{0\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{4\pi}{c} J^0, \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad \leftrightarrow \quad \frac{\partial F^{i\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{4\pi}{c} J^i, \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{\partial G^{0\nu}}{\partial x^\nu} = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{\partial G^{i\nu}}{\partial x^\nu} = 0; \quad (\text{A.10})$$

como es usual en toda la literatura, el índice latino i denota exclusivamente componentes espaciales.

En términos de los potenciales escalar Φ y vectorial \mathbf{A} , los campos eléctrico y magnético pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (\text{A.11})$$

Definiendo el 4-potencial $(A^\mu) = (\Phi, A_x, A_y, A_z)$, las componentes del tensor de Faraday se formulan como

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (\text{A.12})$$

A su vez, de la definición del tensor dual se sigue que

$$G_{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho A_\sigma. \quad (\text{A.13})$$

En este formalismo, es trivial ver que se satisfacen las ecuaciones de Maxwell homogéneas $\partial G^{\mu\nu}/\partial x^\nu = 0$, pues el símbolo de Levi-Civita es antisimétrico y las derivadas parciales conmutan, de modo que $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu \partial_\rho A_\sigma = 0$. Sin embargo, las ecuaciones no homogéneas se escriben como

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \partial_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu. \quad (\text{A.14})$$

Escogiendo la norma de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$, estas expresiones adquieren una forma muy simple:

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = -\frac{4\pi}{c} J^\mu. \quad (\text{A.15})$$

B. Algunos modelos microscópicos

Las bandas de valencia y conducción de los aislantes topológicos (ATs) se encuentran separadas por una brecha de energía. Sin embargo, la brecha se cierra en los bordes, permitiendo el transporte electrónico. Esto da lugar a la característica fundamental de estos materiales: aislantes en el bulto y conductores en la superficie. Se presentan a continuación, de forma concisa, los modelos más simples que describen la estructura electrónica de bandas de diversos ATs. Se recomienda consultar las referencias [63, 64] para un tratamiento más profundo.

Aislante de Chern (2D). Para comprender este ejemplo, es importante introducir un concepto importante: la inversión temporal (IT), definida mediante $t \rightarrow -t$. Un sistema es invariante bajo esta transformación si su hamiltoniano no es afectado por la misma, i. e., $\hat{T}\hat{H}\hat{T}^{-1} = \hat{H}$, donde \hat{T} es el operador de IT. Este operador es antiunitario, i. e. $\hat{T}^\dagger = -\hat{T}$, y sin pérdida de generalidad puede escribirse como $\hat{T} = i\sigma_y C$, donde C implica conjugación compleja y σ_y es una de las matrices de Pauli, definidas más adelante.

Al aplicar esta transformación, los vectores de posición \mathbf{r} , momento lineal \mathbf{p} y momento angular \mathbf{s} se modifican de la siguiente forma:

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}, \quad \mathbf{s} \rightarrow -\mathbf{s}. \quad (\text{B.1})$$

El espín es un tipo de momento angular, lo que explica la manera en la que se transforma bajo el operador de IT.

En general, una partícula de espín 1/2 sin masa moviéndose a velocidad v puede describirse mediante el hamiltoniano $\hat{H} = v\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$ [64], siendo $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ el vector de matrices de Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Tomando en cuenta la forma en la que se modifican las cantidades $\mathbf{s} = \hbar\boldsymbol{\sigma}$ y \mathbf{p} , queda claro que este hamiltoniano es invariante bajo IT.

Un aislante de Chern bidimensional se modela como:

$$\hat{H} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d}, \quad (\text{B.3})$$

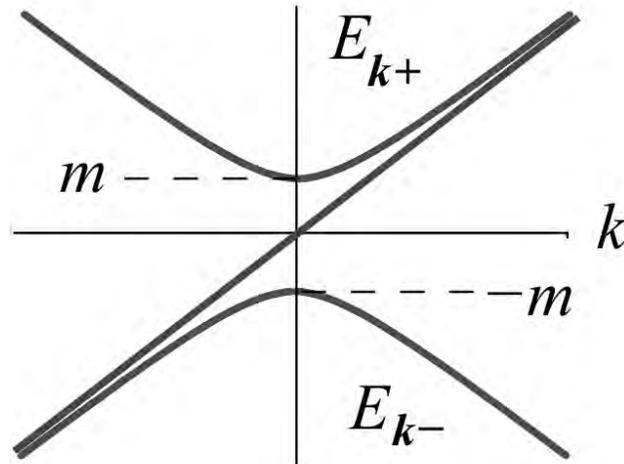


Figura 16: Espectro del aislante de Chern. En los bordes, la relación de dispersión está dada por $E_k = \hbar v k$ [64].

donde $\mathbf{d} = (\hbar v k_x, \hbar v k_y, m)$. Nótese que la tercera componente del vector \mathbf{d} hace que este hamiltoniano difiera del invariante bajo IT dado por $\hat{H} = v \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$ (i. e., el término $m \sigma_z$ rompe la simetría). Sin embargo, es precisamente esto lo que da lugar a las propiedades notables de este sistema: se puede mostrar [64] que el espectro de energías está dado, en el bulto, por $E_{\mathbf{k}} = \pm \sqrt{(\hbar v \mathbf{k})^2 + m^2}$ y, en los bordes, por $E_k = \pm \hbar v k$, generando una estructura de bandas como la que se muestra en la Fig. 16. Más aún, la conductividad de Hall es no nula y se encuentra cuantizada en unidades de e^2/h [64].

Aislantes topológicos invariantes bajo IT (2D). Los ATs de esta clase también tienen un bulto aislante y superficies conductoras. Sin embargo, cuentan con dos canales de conducción: en una dirección circulan electrones con espín hacia arriba y en la dirección opuesta circulan electrones con espín hacia abajo. Estas corrientes también son libres de disipación, pues se encuentran protegidas por simetría bajo inversión temporal. El origen de la estructura de bandas es una fuerte interacción espín-órbita [25, 65].

Se considera un sistema formado por un bulto aislante y dos superficies electrónicas planas que lo limitan por encima y por debajo. En el límite cuasi-2D (en que el grosor de el bulto tiende a cero), la función de onda $\psi(\mathbf{r})$ posee cuatro componentes, asociadas a las

superficies planas (que denominaremos t y b) y a sus dos posibles valores de espín [64]:

$$\psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \psi_{t\uparrow} \\ \psi_{t\downarrow} \\ \psi_{b\uparrow} \\ \psi_{b\downarrow} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

El hamiltoniano efectivo está dado por:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} -i\hbar v(\sigma_x \partial_x + \sigma_y \partial_y) & \Delta \sigma_0 \\ \Delta \sigma_0 & i\hbar v(\sigma_x \partial_x + \sigma_y \partial_y) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

con Δ un parámetro real similar a un término de masa y σ_0 la matriz unitaria en el espacio de espín [64]. Se puede mostrar que en la base que diagonaliza el hamiltoniano, las bandas de energía son descritas en conjunto por la estructura normal ($\Delta > 0$) y la estructura invertida ($\Delta < 0$), que resultan en dos canales sin brecha en los bordes. En el bulto, la relación de dispersión está dada por $E_{\mathbf{k}} = \pm \text{sgn}(\Delta) \sqrt{(\hbar v \mathbf{k})^2 + \Delta^2}$ y, en los bordes, por $E_{ks} = s\hbar v k$ (donde $s = \pm 1$). La dirección de propagación del electrón está determinada por su espín. Existen dos estados transportadores de carga que están protegidos de perturbaciones locales que no rompen IT [64].

Aislantes topológicos 3D. Son una generalización del caso anterior. La física que los describe no difiere en gran medida, salvo que los estados se propagan por superficies bidimensionales. El vector que describe al espín es tangente a la superficie, pero perpendicular al vector de propagación [66].

C. Dos formas de calcular la conductividad de Hall

La conductividad asociada al EHC en sistemas bidimensionales está dada por $\sigma = e^2 C_1 / (2\pi\hbar)$, donde C_1 es un entero denominado primer número de Chern (en tres dimensiones surge el segundo número de Chern, que aparece en la ecuación (1.3)). Es posible obtener una expresión para C_1 en términos de los estados propios $|\psi(\mathbf{k})\rangle$ del hamiltoniano que describe al sistema, dado por $\hat{H} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d}$, donde $\mathbf{d} = (\hbar v k_x, \hbar v k_y, m)$. El vector $(\hbar k_x, \hbar k_y)$

es el momento lineal y v es la velocidad. El término $m\sigma_z$ introduce una masa de Dirac. Nos disponemos a demostrar que también es posible calcular C_1 directamente del vector $\mathbf{u} \equiv \mathbf{d}/|\mathbf{d}|$.

Consideremos la evolución de $|\psi(\mathbf{k}(t))\rangle$ bajo una rotación del vector de onda \mathbf{k} . Se toma como hipótesis que el estado resultante $|\phi(t)\rangle$ es también estado propio del hamiltoniano \hat{H} . Esta suposición está sustentada por el teorema adiabático, cuya forma original se debe a los científicos Born y Fock [67]. El teorema dice que si colocamos al sistema en un estado propio del hamiltoniano \hat{H} y rotamos lentamente el vector de onda \mathbf{k} , entonces el sistema se mantendrá en ese estado propio, con la condición de que la brecha entre energías adyacentes sea lo suficientemente grande [47]. El estado final $|\phi(t)\rangle$ se puede escribir en términos del estado inicial:

$$|\phi(t)\rangle = e^{-i\theta(t)} |\psi(\mathbf{k}(t))\rangle, \quad (\text{C.1})$$

de manera que difieren sólo por una fase. Suponemos, por otra parte, que $\langle\psi(\mathbf{k}(t))|\psi(\mathbf{k}(t))\rangle = 1$, por lo que igualmente $\langle\phi(t)|\phi(t)\rangle = 1$. La fase descrita por $\theta(t)$ es no trivial y codifica mucha información del sistema. Para ver esto, notamos que se satisface la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\phi(t)\rangle = \hat{H}(\mathbf{k}(t)) |\phi(t)\rangle = E(\mathbf{k}(t)) |\phi(t)\rangle. \quad (\text{C.2})$$

De acuerdo con la expresión (C.1), la ecuación anterior adquiere la forma

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(\mathbf{k}(t))\rangle + \hbar\dot{\theta}(t) |\psi(\mathbf{k}(t))\rangle = E(\mathbf{k}(t)) |\psi(\mathbf{k}(t))\rangle, \quad (\text{C.3})$$

donde $\dot{\theta}(t) = \frac{d}{dt}\theta(t)$. Al multiplicar por el bra $\langle\psi(\mathbf{k}(t))|$ se tiene la ecuación

$$\dot{\theta}(t) = \frac{1}{\hbar} E(\mathbf{k}(t)) - i \langle\psi(\mathbf{k}(t))| \partial_t |\psi(\mathbf{k}(t))\rangle. \quad (\text{C.4})$$

Integrando respecto al tiempo llegamos a:

$$\theta(t) = \frac{1}{\hbar} \int_0^t E(\mathbf{k}(t')) dt' - i \int_0^t \langle\psi(\mathbf{k}(t'))| \partial_{t'} |\psi(\mathbf{k}(t'))\rangle dt'. \quad (\text{C.5})$$

El primer término es simplemente la fase dinámica. El segundo término es de mayor interés: al completar un ciclo, de modo que se regresa al estado inicial en un tiempo t_c , se obtiene la fase de Berry γ :

$$\gamma = -i \int_0^{t_c} \langle\psi(\mathbf{k}(t'))| \partial_{t'} |\psi(\mathbf{k}(t'))\rangle dt' = -i \oint \langle\psi(\mathbf{k})| \nabla_{\mathbf{k}} |\psi(\mathbf{k})\rangle \cdot d\mathbf{k}. \quad (\text{C.6})$$

La idea de la fase Berry surge entonces en la siguiente situación: variamos el vector de onda \mathbf{k} pero, en última instancia, lo regresamos a su valor inicial. Esto significa que se realiza una trayectoria cerrada en el espacio de los vectores de onda. Definiendo la conexión de Berry

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = -i \langle \psi(\mathbf{k}) | \nabla_{\mathbf{k}} \psi(\mathbf{k}) \rangle, \quad (\text{C.7})$$

observamos que la fase de Berry se escribe como

$$\gamma = \oint \mathbf{A}_{\mathbf{k}} \cdot d\mathbf{k} = \int (\nabla_{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}})_z dk_x dk_y, \quad (\text{C.8})$$

donde se ha usado el teorema de Stokes y la integración se extiende sobre la zona de Brillouin total del sistema. El número de Chern se escribe en términos de la fase de Berry:

$$C_1 = \frac{\gamma}{2\pi} = \int \frac{1}{2\pi} (\nabla_{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}})_z dk_x dk_y. \quad (\text{C.9})$$

Ahora nos disponemos a probar que el número de Chern C_1 puede calcularse requiriendo únicamente de la forma funcional del vector normalizado $\mathbf{u}(\mathbf{k}) = \mathbf{d}/|\mathbf{d}|$. Recordemos que el hamiltoniano está dado $\hat{H}(\mathbf{k}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d}$, donde σ_i son las matrices de Pauli.

Este hamiltoniano es estándar para describir el comportamiento microscópico de los aislantes topológicos. Explícitamente, queremos probar que

$$C_1 = \int \frac{1}{4\pi} \mathbf{u}(\mathbf{k}) \cdot (\partial_1 \mathbf{u}(\mathbf{k}) \times \partial_2 \mathbf{u}(\mathbf{k})) dk_x dk_y. \quad (\text{C.10})$$

Las derivadas parciales ∂_i se efectúan en el espacio de vectores de onda, de manera que $\nabla_{\mathbf{k}} = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$. Notemos que probar esto es equivalente a demostrar la igualdad de los integrandos de las ecuaciones (C.9) y (C.10):

$$(\nabla_{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}})_z = \frac{1}{2} \mathbf{u}(\mathbf{k}) \cdot (\partial_1 \mathbf{u}(\mathbf{k}) \times \partial_2 \mathbf{u}(\mathbf{k})). \quad (\text{C.11})$$

El término de la izquierda puede simplificarse usando la definición de la conexión de Berry:

$$(\nabla_{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}})_z = -i (\nabla_{\mathbf{k}} \times \langle \psi(\mathbf{k}) | \nabla_{\mathbf{k}} \psi(\mathbf{k}) \rangle)_z = -i (\partial_1 \langle \psi(\mathbf{k}) | \partial_2 \psi(\mathbf{k}) \rangle - \partial_2 \langle \psi(\mathbf{k}) | \partial_1 \psi(\mathbf{k}) \rangle). \quad (\text{C.12})$$

De acuerdo con la regla de la derivada de un producto, se sigue que

$$\begin{aligned} \partial_1 \langle \psi(\mathbf{k}) | \partial_2 \psi(\mathbf{k}) \rangle - \partial_2 \langle \psi(\mathbf{k}) | \partial_1 \psi(\mathbf{k}) \rangle &= \langle \partial_1 \psi(\mathbf{k}) | \partial_2 \psi(\mathbf{k}) \rangle - \langle \partial_2 \psi(\mathbf{k}) | \partial_1 \psi(\mathbf{k}) \rangle \\ &= \langle \partial_1 \psi(\mathbf{k}) | \partial_2 \psi(\mathbf{k}) \rangle - \langle \partial_1 \psi(\mathbf{k}) | \partial_2 \psi(\mathbf{k}) \rangle^* \\ &= 2i \text{Im} \langle \partial_1 \psi(\mathbf{k}) | \partial_2 \psi(\mathbf{k}) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

De este modo, $(\nabla_{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}})_z = 2Im \langle \partial_1 \psi(\mathbf{k}) | \partial_2 \psi(\mathbf{k}) \rangle$, reduciendo la ecuación (C.11) a

$$Im \langle \partial_1 \psi(\mathbf{k}) | \partial_2 \psi(\mathbf{k}) \rangle = \frac{1}{4} \mathbf{u}(\mathbf{k}) \cdot (\partial_1 \mathbf{u}(\mathbf{k}) \times \partial_2 \mathbf{u}(\mathbf{k})). \quad (\text{C.14})$$

Para probar la igualdad de arriba, tenemos que encontrar la función de onda $|\psi(\mathbf{k})\rangle$. Primero notemos que

$$\hat{H}^2 = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d})^2 = |\mathbf{d}|^2, \quad (\text{C.15})$$

de manera que los valores propios del hamiltoniano son $\pm|\mathbf{d}|$. Definimos ahora el operador $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}$, que posee el par de valores propios ± 1 . Es trivial ver que ambos operadores poseen las mismas funciones propias porque difieren únicamente por un factor. De esta manera, hay dos funciones de onda asociadas al vector \mathbf{k} , una para cada signo:

$$|\psi_s(\mathbf{k})\rangle = \frac{\sigma_0 + s\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}}{\sqrt{2(1 + su_z)}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1 + su_z} \\ s \frac{u_x + iu_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \sqrt{1 - su_z} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.16})$$

donde $s = \pm 1$ y σ_0 es la matriz identidad [64]. Es sencillo ver que efectivamente $|\psi_s(\mathbf{k})\rangle$ es función propia del operador $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}$, y en consecuencia del hamiltoniano. Notemos que

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u})(\sigma_0 + s\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} + s|\mathbf{u}|^2 = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} + s\sigma_0 = s(\sigma_0 + s\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}). \quad (\text{C.17})$$

De esto se concluye que $|\psi_s(\mathbf{k})\rangle$ es función propia del operador $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}$:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}) |\psi_s(\mathbf{k})\rangle = s |\psi_s(\mathbf{k})\rangle. \quad (\text{C.18})$$

El factor $1/\sqrt{2(1 + su_z)}$ resulta de normalizar el estado. Más detalladamente, dado que las matrices de Pauli son autoadjuntas, vemos que

$$\begin{aligned} \langle \psi_s(\mathbf{k}) | \psi_s(\mathbf{k}) \rangle &= \frac{1}{2(1 + su_z)} (\sigma_0 + s(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u})) \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} (\sigma_0 + s(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u})) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2(1 + su_z)} \begin{pmatrix} 1 + su_z & s(u_x - iu_y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + su_z \\ s(u_x + iu_y) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2(1 + su_z)} [(1 + su_z)^2 + (u_x^2 + u_y^2)] = \frac{1}{2(1 + su_z)} [1 + 2su_z + |\mathbf{u}|^2] = 1. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

A partir de este momento, escribiremos el estado simplemente como $|\psi\rangle$. Además, efectuaremos el análisis tomando únicamente $s = 1$, haciendo notar que el caso $s = -1$ es

totalmente análogo. Observemos que

$$\langle \psi | = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c} \sqrt{1+u_z} \\ \frac{u_x - iu_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \sqrt{1-u_z} \end{array} \right)^T \quad (\text{C.20})$$

Considerando que $\partial_1 \langle \psi | = \langle \partial_1 \psi |$, se tiene:

$$\langle \partial_1 \psi | = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c} \frac{\partial_1 u_z}{2\sqrt{1+u_z}} \\ -\frac{(u_x^2 + u_y^2)\partial_1 u_z + 2i(1-u_z)(u_y\partial_1 u_x - u_x\partial_1 u_y)}{2(u_x + iu_y)\sqrt{u_x^2 + u_y^2}\sqrt{1-u_z}} \end{array} \right)^T, \quad (\text{C.21})$$

$$|\partial_2 \psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c} \frac{\partial_2 u_z}{2\sqrt{1+u_z}} \\ -\frac{(u_x^2 + u_y^2)\partial_2 u_z - 2i(1-u_z)(u_y\partial_2 u_x - u_x\partial_2 u_y)}{2(u_x - iu_y)\sqrt{u_x^2 + u_y^2}\sqrt{1-u_z}} \end{array} \right). \quad (\text{C.22})$$

Las expresiones son complicadas, pero hemos de recordar que sólo nos interesa la parte imaginaria de $\langle \partial_1 \psi | \partial_2 \psi \rangle$. Notemos que, de hecho, estos objetos son de la forma

$$\langle \partial_1 \psi | = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c} \frac{\partial_1 u_z}{2\sqrt{1+u_z}} \\ \frac{a+ib}{2(u_x + iu_y)\sqrt{u_x^2 + u_y^2}\sqrt{1-u_z}} \end{array} \right)^T, \quad |\partial_2 \psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c} \frac{\partial_2 u_z}{2\sqrt{1+u_z}} \\ \frac{c+id}{2(u_x - iu_y)\sqrt{u_x^2 + u_y^2}\sqrt{1-u_z}} \end{array} \right). \quad (\text{C.23})$$

El producto de las primeras entradas es real, por lo que no es de interés. Por otro lado, al multiplicar las segundas entradas se obtiene la parte imaginaria

$$\begin{aligned} \text{Im} \langle \partial_1 \psi | \partial_2 \psi \rangle &= \frac{1}{2} \left[\frac{ad + bc}{4(u_x^2 + u_y^2)^2(1-u_z)} \right] \\ &= \frac{1}{4(u_x^2 + u_y^2)} [\partial_1 u_z (u_y \partial_2 u_x - u_x \partial_2 u_y) - \partial_2 u_z (u_y \partial_1 u_x - u_x \partial_1 u_y)]. \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

Ahora bien, como el vector \mathbf{u} está normalizado, de manera que $u_z^2 = 1 - u_x^2 - u_y^2$, este resultado puede simplificarse aún más, pues se cuenta con la expresión

$$\partial_i u_z = -\frac{u_x \partial_i u_x + u_y \partial_i u_y}{\sqrt{1 - u_x^2 - u_y^2}}, \quad (\text{C.25})$$

que al ser sustituida en la ecuación (C.24) da lugar a:

$$\begin{aligned} &\text{Im} \langle \partial_1 \psi | \partial_1 \psi \rangle \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{1 - u_x^2 - u_y^2}} \left[\frac{(u_x \partial_2 u_x + u_y \partial_2 u_y)(u_y \partial_1 u_x - u_x \partial_1 u_y) - (u_x \partial_1 u_x + u_y \partial_1 u_y)(u_y \partial_2 u_x - u_x \partial_2 u_y)}{u_x^2 + u_y^2} \right] \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{1 - u_x^2 - u_y^2}} \left(\frac{1}{u_x^2 + u_y^2} \right) [(u_x^2 + u_y^2)(\partial_2 u_y \partial_1 u_x - \partial_2 u_x \partial_1 u_y)] \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{1 - u_x^2 - u_y^2}} [\partial_2 u_y \partial_1 u_x - \partial_2 u_x \partial_1 u_y]. \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

Ahora falta analizar el lado derecho de la expresión (C.14) para ver que la igualdad es satisfecha. Ha de observarse que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \mathbf{u}(\mathbf{k}) \cdot (\partial_1 \mathbf{u}(\mathbf{k}) \times \partial_2 \mathbf{u}(\mathbf{k})) \\ &= \frac{1}{4} [u_z(\partial_2 u_y \partial_1 u_x - \partial_2 u_x \partial_1 u_y) + u_y(\partial_2 u_x \partial_1 u_z - \partial_2 u_z \partial_1 u_x) + u_x(\partial_2 u_z \partial_1 u_y - \partial_2 u_y \partial_1 u_z)]. \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

Nuevamente, mediante la ecuación (C.25) la expresión se reduce a

$$\frac{1}{4} \mathbf{u}(\mathbf{k}) \cdot (\partial_1 \mathbf{u}(\mathbf{k}) \times \partial_2 \mathbf{u}(\mathbf{k})) = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{1 - u_x^2 - u_y^2}} [\partial_2 u_y \partial_1 u_x - \partial_2 u_x \partial_1 u_y]. \quad (\text{C.28})$$

De este modo, hemos probado la relación (C.14), lo cual asegura que existen dos formas de calcular el número de Chern y, a su vez, el valor de la conductividad de Hall. Una de ellas es mediante la función de onda $|\psi(\mathbf{k})\rangle$ del hamiltoniano $\hat{H} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d}$:

$$C_1 = \frac{\gamma}{2\pi} = \int \frac{1}{2\pi} (\nabla_{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}})_z dk_x dk_y. \quad (\text{C.29})$$

y la otra a partir del vector $\mathbf{u} = \mathbf{d}/|\mathbf{d}|$:

$$C_1 = \int \frac{1}{4\pi} \mathbf{u}(\mathbf{k}) \cdot (\partial_1 \mathbf{u}(\mathbf{k}) \times \partial_2 \mathbf{u}(\mathbf{k})) dk_x dk_y. \quad (\text{C.30})$$

D. Sistemas de unidades

En la literatura no hay un consenso respecto al sistema de unidades más apropiado para reportar el valor de la PME, lo cual ha generado diversas confusiones. Por ello, es importante aclarar cuál es la manera correcta de traducir los resultados de un sistema a otro. A lo largo de este Apéndice, la notación $[Q]$ indica las unidades de Q .

Comenzamos analizando la relación entre las unidades el campo eléctrico y el campo magnético $[E] = [vB]$, que se puede deducir de la fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F}_{SI} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{F}_{CGS} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right). \quad (\text{D.1})$$

Mientras que de las ecuaciones constitutivas $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{P})$ y $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{B}, \mathbf{M})$ se infiere que $[D] = [\varepsilon E] = [P]$ y $[H] = [B/\mu] = [M]$.

Particularmente, en el SI $[E] = V/m = m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$, mientras que $[B] = T = kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$. Se confirma por tanto que $[E] = m/s[B]$. Por otra parte, en sistema CGS se observa, de la fuerza de Lorentz, que $[E] = [B] = cm^{-1/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-1}$. Partiendo de estas observaciones preliminares, se analizarán las unidades de la PME en distintos sistemas.

Internacional

Es posible describir un sistema electromagnético en términos de la *densidad de energía libre* g . En unidades del SI,

$$\begin{aligned} -g^{SI}(\mathbf{E}, \mathbf{B}; T) = & \dots + P_i^s E_i + \varepsilon_0 \varepsilon_{ik} E_i E_k + M_i^{sB} B_i \\ & + \tilde{\alpha}_{ij}^B E_i B_j + (1/2) \beta_{ijk}^B E_i B_j B_k \\ & + (1/2) \gamma_{ijk}^B B_i E_j E_k + \dots, \end{aligned} \quad (D.2)$$

donde T es la temperatura en K , \mathbf{P}^s es la polarización espontánea, \mathbf{M}^s es la magnetización espontánea y ε_{ik} , β_{ijk} , γ_{ijk} son coeficientes que codifican la dependencia de la energía libre en las componentes de los campos eléctrico y magnético E_i y B_i . El superíndice B denota que la función g depende del campo magnético \mathbf{B} . Es importante hacer esta distinción porque, por razones históricas, algunos autores han considerado la forma $g = g(\mathbf{E}, \mathbf{H}; T)$ (estas convenciones se denominan ME_B y ME_H , respectivamente).

Cada término de esta serie está relacionado a un efecto en específico. En particular, el término con coeficientes $\tilde{\alpha}_{ij}$ está asociado al efecto ME. Si el tensor $\tilde{\alpha}_{ij}^B$ es isotrópico,

$$-g^{SI}(\mathbf{E}, \mathbf{B}; T) = \dots + \tilde{\alpha}^B \delta_{ij} E_i B_j + \dots = \dots + \tilde{\alpha}^B \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} + \dots, \quad (D.3)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$). Derivando la energía libre respecto a \mathbf{E} (\mathbf{B}) se obtiene el vector de polarización (magnetización):

$$\mathbf{P}^{ME}(\mathbf{E}, \mathbf{B}; T) = -\tilde{\alpha}^B \mathbf{B}, \quad \mathbf{M}^{ME}(\mathbf{E}, \mathbf{B}; T) = -\tilde{\alpha}^B \mathbf{E}. \quad (D.4)$$

A partir de estas relaciones, es posible deducir las unidades de $\tilde{\alpha}$. Ha de tenerse en cuenta que $\tilde{\alpha} = (\vartheta \alpha)/\pi$, donde α es la constante de estructura fina y ϑ es la PME. Por ello, $[\tilde{\alpha}] = [\vartheta]$ independientemente del sistema de unidades. Es claro que

$$[P] = [\tilde{\alpha}^B B], \quad [M] = [\tilde{\alpha}^B E], \quad (D.5)$$

de donde se infieren, considerando que $[E] = [vB] = [v\mu M]$ (siendo v la velocidad), las unidades de $\tilde{\alpha}^B$:

$$[\tilde{\alpha}^B] = \left[\frac{M}{E} \right] = \left[\frac{1}{v\mu} \right] = \left[\frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{\mu} \right] = \left[\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \right] = \frac{1}{\Omega}. \quad (\text{D.6})$$

Como se ha mencionado, es común encontrar la forma $g = g(\mathbf{E}, \mathbf{H}; T)$ en la literatura. El término de interés, nuevamente, es el magnetoeléctrico. En el caso isotrópico se tiene

$$-g^{SI}(\mathbf{E}, \mathbf{H}; T) = \dots + \tilde{\alpha}^H \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} + \dots, \quad (\text{D.7})$$

donde H denota que g depende del campo aplicado \mathbf{H} . Ya que tanto (D.3) como (D.7) se miden en el sistema internacional, se satisface que $[g(\mathbf{E}, \mathbf{B}; T)] = [g(\mathbf{E}, \mathbf{H}; T)]$. En consecuencia, la relación entre las unidades de $\tilde{\alpha}^B$ y $\tilde{\alpha}^H$ está dada por

$$[\tilde{\alpha}^H EH] = [\tilde{\alpha}^B EB]. \quad (\text{D.8})$$

Como $[B] = [\mu H]$, se sigue que

$$[\tilde{\alpha}^H] = [\tilde{\alpha}^B \mu] = \left[\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mu \right] = [\sqrt{\varepsilon \mu}] = \left[\frac{1}{v} \right] = \frac{s}{m}. \quad (\text{D.9})$$

El orden de $\tilde{\alpha}^H$ suele ser alrededor de ps/m .

CGS (racionalizado y no racionalizado)

Las ecuaciones empleadas en este trabajo están escritas en el sistema CGS no racionalizado (o gaussiano). Por tanto, es importante conocer las unidades en las que se mide la PME en este sistema. Las ecuaciones de Maxwell son

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_L, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_L, \quad (\text{D.10})$$

donde se observa que el factor 4π multiplica las fuentes de los campos. En el sistema racionalizado (o de Lorentz-Heaviside), este factor se absorbe en la definición de carga y corriente, lo cual hace que las ecuaciones adquieran la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_L, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\mathbf{J}_L}{c}. \quad (\text{D.11})$$

Análogamente al caso anterior, es posible escribir la densidad de energía libre en términos de \mathbf{B} o en términos de \mathbf{H} . Sin embargo, como $\mu_0 = \varepsilon_0 = c = 1$, se satisface $[B] = [H]$

(además de $[E] = [B]$), de modo que la PME tendrá las mismas unidades independientemente de si se considera ME_B o ME_H . En este sentido, basta con hacer el análisis para uno de ellos. Expresamente, y tomando únicamente el término de interés,

$$-g^G(\mathbf{E}, \mathbf{B}; T) = \dots + (1/(4\pi))\tilde{\alpha}_{ik}^G E_i B_k + \dots \quad (\text{D.12})$$

El superíndice G denota que estamos tratando el sistema gaussiano. Para sistemas isotrópicos, se tiene

$$4\pi\mathbf{P}^{ME}(\mathbf{E}, \mathbf{B}; T) = -\tilde{\alpha}^G \mathbf{B}, \quad (\text{D.13})$$

$$4\pi\mathbf{M}^{ME}(\mathbf{E}, \mathbf{B}; T) = -\tilde{\alpha}^G \mathbf{E}. \quad (\text{D.14})$$

Del mismo modo, para el sistema de Lorentz-Heaviside (superíndice L), se tiene que

$$\mathbf{P}^{ME}(\mathbf{E}, \mathbf{B}; T) = -\tilde{\alpha}^L \mathbf{B}, \quad (\text{D.15})$$

$$\mathbf{M}^{ME}(\mathbf{E}, \mathbf{B}; T) = -\tilde{\alpha}^L \mathbf{E}. \quad (\text{D.16})$$

De estos dos conjuntos de ecuaciones, puede verse que

$$\tilde{\alpha}^G = 4\pi\tilde{\alpha}^L. \quad (\text{D.17})$$

En general $[H] = [M]$. De las ecuaciones (D.14) y (D.16) se deduce que

$$[\tilde{\alpha}^G] = [\tilde{\alpha}^L] = [M/E] = 1. \quad (\text{D.18})$$

Híbrido

En miras a aplicaciones tecnológicas, se ha logrado reproducir el efecto ME_H a temperaturas más asequibles utilizando materiales compuestos [9]. De la ecuación constitutiva

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + \tilde{\alpha}^{HE}\mathbf{H}, \quad (\text{D.19})$$

se deduce que $[\tilde{\alpha}^{HE}] = [E/H]$ al tomar ε adimensional. El superíndice HE hace referencia a un nuevo sistema. Ya que las magnitudes de los campos eléctricos y magnéticos empleados en estos estudios fenomenológicos suelen ser del orden de mV/cm y Oe respectivamente,

es común encontrar que la PME se mide en $mV/(cmOe)$. Sin embargo, V es una unidad derivada del SI y Oe del CGS. Es evidente que este *sistema híbrido* no corresponde a ninguno de ellos, y su proliferación en la literatura se debe a cuestiones experimentales.

De esta discusión, puede concluirse la relación que existe entre diferentes sistemas de unidades para la PME:

$$\tilde{\alpha}^G = 4\pi\tilde{\alpha}^L = R_0\tilde{\alpha}^B = c\tilde{\alpha}^H = \kappa\tilde{\alpha}^{HE}/R_0, \quad (D.20)$$

donde $\kappa = \varepsilon/\varepsilon_0$ es la permitividad relativa del medio, $R_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ es la impedancia característica del vacío y $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ es la velocidad de la luz. En el sistema internacional, la permitividad y la permeabilidad del vacío son $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} F/m$ y $\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6} H/m$ donde F y H simbolizan las unidades farad y henry, respectivamente. Cabe remarcar que tanto $\tilde{\alpha}^H$ como $\tilde{\alpha}^B$ se miden en unidades del SI, y su diferencia reside en la interpretación que se da a \mathbf{B} y \mathbf{H} .

En el Cuadro III se muestra el valor de $\tilde{\alpha}$ de distintas estructuras compuestas por materiales ferroicos. El sistema híbrido no ha sido considerando porque para obtener la PME a partir de otro sistema de unidades, se necesita conocer la permitividad relativa, que no siempre es accesible.

Estructura	$\tilde{\alpha}^H$ ($\frac{s}{m}$)	$\tilde{\alpha}^G$	$\tilde{\alpha}^L$	$\tilde{\alpha}^B$ ($\frac{1}{\Omega}$)	Referencia
MgO/Fe	9.4×10^{-11}	2.8×10^{-2}	2.2×10^{-3}	7.5×10^{-5}	[68]
MgO/Fe ₈₀ Co ₂₀	5.2×10^{-11}	1.5×10^{-2}	1.2×10^{-3}	4.1×10^{-5}	[69]
MgO/Fe	4.3×10^{-10}	0.1	1.0×10^{-2}	3.4×10^{-4}	[70]
Gd ₂ O ₃ /Co	2.4×10^{-8}	7.2	0.6	1.9×10^{-2}	[71]
ZrO ₂ /MgO/Fe	1.6×10^{-8}	4.7	0.4	1.2×10^{-2}	[72]
BaTiO ₃ /Co ₆₀ Fe ₄₀	3.0×10^{-6}	9.0×10^2	71.6	2.4	[73]

Cuadro III: Valores de $\tilde{\alpha}$ de varias estructuras en distintos sistemas de unidades.

E. Códigos de *Mathematica*

A continuación se muestran los códigos de *Mathematica 11.2* utilizados para realizar las gráficas y estimaciones numéricas de este trabajo. Algunos comentarios, limitados por asteriscos y entre paréntesis —(*...*)—, pretenden facilitar la comprensión de los códigos o indican las expresiones/figuras correspondientes a los mismos.

Coeficientes

```
(*ECS. (2.66)-(2.75)*)
V[l_] := V*(-1/2)^(l-1)/2 (2*l+1) (l-2)!! / (2 ((l+1)/2)!);
a1[a_, r1_, r2_, ε_, α_, l_] := (1+l) (r11+2l - r21+2l) (-1+ε) (1+l+l ε);
a2[a_, r1_, r2_, ε_, α_, l_] := (1+l) (1+2 l) r11+2l (-1+ε);
b1[a_, r1_, r2_, ε_, α_, l_] :=
  -r11+2l (l (1+l) r11+2l (-1+ε)2 - r21+2l (1+l+l ε) (l+ε+l ε));
b2[a_, r1_, r2_, ε_, α_, l_] := (1+2 l) r11+2l r21+2l (1+l+l ε);
b3[a_, r1_, r2_, ε_, α_, l_] := (1+2 l)2 r11+2l r21+2l ε;
c1[a_, r1_, r2_, ε_, α_, l_] := -(1+l) (r11+2l - r21+2l) (1+l+l ε) α;
c2[a_, r1_, r2_, ε_, α_, l_] := -(1+l) (1+2 l) r11+2l ε α;
d1[a_, r1_, r2_, ε_, α_, l_] := -a1+2l l (r11+2l - r21+2l) (1+l+l ε) α;
d2[a_, r1_, r2_, ε_, α_, l_] :=
  -l ((1+l) r12+4l (-1+ε) + r11+2l r21+2l (1+l+l ε) + a1+2l (r11+2l - r21+2l) (1+l+l ε)) α;
d3[a_, r1_, r2_, ε_, α_, l_] :=
  -l (r11+2l - r21+2l) ((1+l) r11+2l (-1+ε) + a1+2l (1+l+l ε)) α;

Z = (-1 (1+l) r12+4l (-1+ε)2 + a1+2l (1+l) (r11+2l - r21+2l) (-1+ε) (1+l+l ε) +
  r11+2l r21+2l (1+l+l ε) (l+ε+l ε));
Λ[a_, r1_, r2_, ε_, α_, l_] := (a1+l V[l]) / Z;
(*Se reescriben como funciones los coeficientes obtenidos al resolver
el sistema de ecuaciones.*)
```

Líneas de flujo del campo eléctrico

(*FIGS. 2, 3, 4*)

```

ϕ[r_, θ_, n_] :=
  Sum[Δ[a, r1, r2, ε, α, l] *
    |suma
    (Boole[a ≤ r ≤ r1] (a1[a, r1, r2, ε, α, l] * r^l + b1[a, r1, r2, ε, α, l] * r^(-l - 1)) +
    |función característica de Boole
    Boole[r1 ≤ r ≤ r2] (a2[a, r1, r2, ε, α, l] * r^l + b2[a, r1, r2, ε, α, l] * r^(-l - 1)) +
    |función característica de Boole
    Boole[r2 ≤ r] (b3[a, r1, r2, ε, α, l] * r^(-l - 1))) * LegendreP[l, Cos[θ]],
    |función característica de Boole |P de Legendre |coseno
    {l, 1, 2*n+1}] -
  Sum[Δ[a, r1, r2, ε, α, 2 l] *
    |suma
    (Boole[a ≤ r ≤ r1] (a1[a, r1, r2, ε, α, 2 l] * r^(2 l) +
    |función característica de Boole
    b1[a, r1, r2, ε, α, 2 l] * r^(-2 l - 1)) +
    Boole[r1 ≤ r ≤ r2]
    |función característica de Boole
    (a2[a, r1, r2, ε, α, 2 l] * r^(2 l) + b2[a, r1, r2, ε, α, 2 l] * r^(-2 l - 1)) +
    Boole[r2 ≤ r] (b3[a, r1, r2, ε, α, 2 l] * r^(-2 l - 1))) * LegendreP[2 l, Cos[θ]],
    |función característica de Boole |P de Legendre |coseno
    {l, 1, n}];

```

(*ϕ es el potencial eléctrico en todo el espacio en coordenadas esféricas a orden 2n+1. Sólo se consideran potencias impares al restar las potencias pares de la suma total. El código para el campo magnético es completamente análogo.*)

```

χ[x_, y_] :=
  Simplify[TransformedField["Polar" → "Cartesian", ϕ[r, θ, n], {r, θ} → {x, y}]];
|simplifica |campo transformado
{Ex, Ey} = {Simplify[-D[χ[x, y], x]], Simplify[-D[χ[x, y], y]]};
|simplifica |deriva |simplifica |deriva
Show[StreamPlot[{Ex, Ey}, {x, x1, x2}, {y, y1, y2}, PlotRange → All,
|mue· |representación de flujo |rango de repr· |todo
  FrameLabel → {Style["x", 12], Style["y", 12]}],
|etiqueta de marco |estilo |estilo
  (*Grafica de las líneas de flujo del campo eléctrico.*)
  RegionPlot[x^2 + y^2 ≤ a^2, {x, x1, x2}, {y, 0, y2}, PlotStyle → LightGreen],
|representación gráfica de una región |estilo de rep· |verde claro
  RegionPlot[x^2 + y^2 ≤ a^2, {x, x1, x2}, {y, 0, y1}, PlotStyle → LightRed],
|representación gráfica de una región |estilo de rep· |rojo claro
  (*Hemisferios del condensador.*)
  RegionPlot[{r1^2 ≤ x^2 + y^2 ≤ r2^2}, {x, x1, x2}, {y, y1, y2}, PlotRange → All],
|representación gráfica de una región |rango de rep· |todo
  AxesStyle → Black, ImageSize → 350] (*Cascarón de AT.*)
|estilo de ejes |negro |tamaño de imagen
(*{x1,x2} y {y1,y2} son los límites del eje de las abscisas y las ordenadas.*)

```

Gráfica del campo magnético en $\theta = 0$ como función de la distancia para r_1 fijo y distintos valores de a

(*FIG. 6*)

```

ψ3[a_, r1_, r_, θ_, n_] :=
  Sum[Λ[c*a, c*r1, c*r2, ε, α, 1] * (d3[c*a, c*r1, c*r2, ε, α, 1] * (r) ^ (-1 - 1))
  |suma
  * LegendreP[1, Cos[θ]], {1, 1, 2*n+1}]
  |P de Legendre |coseno
-Sum[Λ[c*a, c*r1, c*r2, ε, α, 2] * (d3[c*a, c*r1, c*r2, ε, α, 2] * (r) ^ (-2 - 1))
  |suma
  * LegendreP[2, Cos[θ]], {1, 1, n}];
  |P de Legendre |coseno

```

(*Potencial magnético en la región más externa. Se fija r2= 1 micra y los parámetros que varían ahora son a y r1.

Se multiplican a, r1 y r2 por c para pasar de micras a cm, unidad del sistema CGS.*)

```

R1[r_] := ψ3[(r1 - 0.1), r1, r, θ, n];
R2[r_] := ψ3[(r1 - 0.05), r1, r, θ, n];
R3[r_] := ψ3[(r1 - 0.02), r1, r, θ, n];
R4[r_] := ψ3[r1, r1, r, θ, n];

```

(*Las funciones Ri corresponden a ψ3 en $\theta=0$, para distintos valores de a con r1 fijo y, como siempre, r2=1 micra. R4 corresponde al caso a=r1.*)

```

plot = Show[
  |muestra
  Plot[Abs[R1'[c*r]], {r, 1, 2}, PlotLegends → Placed[{r1 - 0.10} μm, {0.8, 0.9}],
  |rep... |valor absoluto |leyendas de rep... |colocado
  PlotRange → All, PlotStyle → {RGBColor[255/255, 99/255, 71/255], Dashing[0.025]}],
  |rango de rep... |todo |estilo de repre... |color RGB |especificación de rayado
  Plot[Abs[R2'[c*r]], {r, 1, 2}, PlotLegends → Placed[{r1 - 0.05} μm, {0.8, 0.8}],
  |rep... |valor absoluto |leyendas de rep... |colocado
  PlotRange → All,
  |rango de rep... |todo
  PlotStyle → {RGBColor[50/255, 205/255, 50/255], Dotted}],
  |estilo de repre... |color RGB |punteado
  Plot[Abs[R3'[c*r]], {r, 1, 2}, PlotLegends → Placed[{r1 - 0.02} μm, {0.8, 0.7}],
  |rep... |valor absoluto |leyendas de rep... |colocado
  PlotRange → All, PlotStyle → {RGBColor[65/255, 105/255, 225/255], DotDashed}],
  |rango de rep... |todo |estilo de repre... |color RGB |punto-rayado

```

```

Plot[Abs[R4'[c*r]], {r, 1, 2}, PlotLegends -> Placed[{r1} μm, {0.8, 0.6}],
|rep... |valor absoluto |leyendas de rep... |colocado
PlotRange -> All,
|rango de rep... |todo
PlotStyle -> {RGBColor[105/255, 105/255, 105/255], Thick, Dashing[10]}],
|estilo de repre... |color RGB |grueso |especificación de rayado
AxesOrigin -> {1, 0}, PlotRange -> All, AxesLabel -> {Style["r (μm)", 12],
|origen de ejes |rango de rep... |todo |etiqueta de ejes |estilo
Style[Abs[Subscript[B, "r"] ["θ=0"]][G], 12]}, AxesStyle -> Black, ImageSize -> 350]
|estilo |val... |subíndice |estilo de ejes |negro |tamaño de imagen

```

(*Gráfica del campo magnético en $\theta=0$, como función de la distancia para las cuatro configuraciones. En esta dirección el campo total es radial, por lo que basta derivar el potencial ψ_3 respecto a r .)

Gráfica del cociente ψ_1/ψ_{1000} como función de $a = r_1$

```

(*FIG. 8*)
ψ3[a_, r_, θ_, n_] :=
Sum[(-1/2) ^ ((1 - 1) / 2) (2 l + 1) (1 - 2) !! / (2 ((1 + 1) / 2) !) * Λ[a, a, r2, 4, 1/137, 1] *
|suma
(d3[a, a, r2, 4, 1/137, 1] * r ^ (-1 - 1)) * LegendreP[1, Cos[θ]], {1, 1, 2 * n + 1}] -
|P de Legendre |coseno
Sum[(-1/2) ^ ((2 l - 1) / 2) (4 l + 1) (2 l - 2) !! / (2 ((2 l + 1) / 2) !) *
|suma
Λ[a, a, r2, 4, 1/137, 2 l] * (d3[a, a, r2, 4, 1/137, 2 l] * r ^ (-2 l - 1)) *
LegendreP[2 l, Cos[θ]], {1, 1, n}];
|P de Legendre |coseno

```

```

Plot[ψ3[c*r2, r2, 0, 11] / ψ3[c*r2, r2, 0, 500], {c, 0, 1}, PlotRange -> {0, 1.2},
|representación gráfica |rango de representación
AxesLabel -> {Style[Subscript[r, 1] / Subscript[r, 2], 12],
|etiqueta de ejes |estilo |subíndice |subíndice
Style[Abs[Subscript[ψ, 7] / ψ], 12]}, AxesStyle -> Black, ImageSize -> 350]
|estilo |val... |subíndice |estilo de ejes |negro |tamaño de imagen
(*Gráfica del cociente del potencial a orden 0 y a orden 1000 como función de r1=
c*r2, donde c es un parámetro que va de 0 a 1.)*

```

Gráfica del campo magnético como función de la distancia con θ fijo y como función del ángulo con $r = r_2$ fijo

```
(*FIGS. 9, 11, 13*)
ψ3[a_, r_, θ_, n_] :=
  Simplify[Sum[A[c*a, c*a, c*r2, ε, α, 1] * (d3[c*a, c*a, c*r2, ε, α, 1] * (r)^(-1-1))
  |simplifica |suma
    * LegendreP[1, Cos[θ]], {1, 1, 2*n+1}]
  |P de Legendre |coseno
  - Sum[A[c*a, c*a, c*r2, ε, α, 2] * (d3[c*a, c*a, c*r2, ε, α, 2] * (r)^(-2-1-1))
  |suma
    * LegendreP[2, Cos[θ]], {1, 1, n}]];

(*Potencial magnético en la región más externa. Se fijó r2=1 micra,
y el parámetro que variamos ahora es a=
r1. Se multiplican a y r2 por c para pasar de micras a cm.*)

R[r_, θ_] := Simplify[D[ψ3[a, r, θ, n], r]];
|simplifica |deriva
Θ[r_, θ_] := Simplify[1/r*D[ψ3[a, r, θ, n], θ]];
|simplifica |deriva

(*Componentes radial y angular del campo magnético.*)
B[r_, θ_] := Sqrt[(R[r, θ])^2 + (Θ[r, θ])^2];
|raíz cuadrada

(*Campo total como función de r y θ.*)

Show[
|muestra
  Plot[B[c*x, θ], {x, 1, 2}, PlotLegends → Placed[{"θ=0"}, {0.8, 0.9}],
  |representación gráfica |leyendas de rep... |colocado
  PlotStyle → {RGBColor[0, 128/255, 128/255], Thick}],
  |estilo de repre... |color RGB |grueso
  Plot[B[c*x, Pi/4], {x, 1, 2}, PlotLegends → Placed[{"θ=π/4"}, {0.8, 0.8}],
  |representació... |número pi |leyendas de rep... |colocado
  PlotStyle → {RGBColor[220/255, 20/255, 60/255], Dashed}],
  |estilo de repre... |color RGB |rayado
  Plot[B[c*x, Pi/2], {x, 1, 2}, PlotLegends → Placed[{"θ=π/2"}, {0.8, 0.7}],
  |representació... |número pi |leyendas de rep... |colocado
  PlotStyle → {RGBColor[1, 165/255, 0], DotDashed}], AxesOrigin → {Automatic, 0},
  |estilo de repre... |color RGB |punto-rayado |origen de ejes |automático
  AxesLabel → {Style["r (μm)", 12], Style[Abs[B][G], 12]}, AxesStyle → Black,
  |etiqueta de ejes |estilo |estilo |valor absoluto |estilo de ejes |negro
  ImageSize → 350]
|tamaño de imagen

(*Gráfica del campo como función de la distancia para tres ángulos
distintos.*)
```

```
Plot[B[c*r2,  $\theta$ ], { $\theta$ , 0, Pi}, PlotRange -> All,
|representación gráfica |nú... |rango de rep... |todo
AxesLabel -> {Style[" $\theta$ ", 12], Style[Abs[B][G], 12]},
|etiqueta de ejes |estilo |estilo |valor absoluto
AxesOrigin -> {Automatic, 0.0}, AxesStyle -> Black, ImageSize -> 350]
|origen de ejes |automático |estilo de ejes |negro |tamaño de imagen
(*Gráfica del campo como función del ángulo sobre la interfase exterior.*)
```

Estimación del flujo magnético a través de una espira que se encuentra a cierta distancia vertical ζ del sistema

```
(*EC. (4.19)*)
R = 10*c; (*Radio de la espira. Se toman 10 micras=10^(-3)cm.*)
 $\zeta$  =.; (*Distancia vertical, debe ser mayor que r.*)

d3[a_,  $\epsilon$ _,  $\alpha$ _, l_] := - $\alpha$ *l* $\epsilon$ * (a^(2 l+1) - r^(2 l+1)) * a^(l+1) *
V[l] / (a^(2 l+1) * ( $\epsilon$  - 1) (l+1) + (l* $\epsilon$  + l+1) * r^(2 l+1));
(*Coeficiente D1^3. Ya no necesitamos variar más que el radio del
condensador semiesférico pues a=r1 se ha fijado en 0.5,
0.62 o 0.75 micras. Asimismo, r2=1 micra.*)

F[n_,  $\theta$ _] := Sum[d3[a,  $\epsilon$ ,  $\alpha$ , 2*l+1] / (( $\zeta$ *Sec[ $\theta$ ])^(2*l+1)) *
|suma |secante
((4*l+3)*LegendreP[2*l+1, Cos[ $\theta$ ]]*Sin[ $\theta$ ] -
|P de Legendre |coseno |seno
(2*l+1)*LegendreP[2*l, Cos[ $\theta$ ]]*Tan[ $\theta$ ]), {1, 0, n}]
|P de Legendre |coseno |tangente

(*Esta es la suma entre paréntesis de la expresión (4.19) para el flujo
magnético. Se hace l ->
2l+1 para sólo considerar términos impares. Las unidades del flujo son statVcm=
Gcm^2*)

Table[2*Pi*Integrate[F[n,  $\theta$ ], { $\theta$ , 0, ArcTan[R/ $\zeta$ ]}, {a, {0.5*c, 0.62*c, 0.75*c}}]
|tabla |... |integra |arco tangente

(*Finalmente se integra lo anterior desde 0 hasta arctan(R/ $\zeta$ ) y se
multiplica por 2Pi como indica
la expresión (4.19).
Finalmente se obtiene el flujo a orden n para los tres valores de a=
r1 relevantes.*)
```

Gráfica del campo magnético como función de $a = r_1$ sobre la interfase exterior para varios ángulos que se aproximan a $\theta = \pi/2$

(*FIG. 14, ANÁLOGO A CÓDIGO DE FIGS. 7, 10, 12*)

```
ψ3[a_, r_, θ_, n_] :=
  Sum[Δ[a, a, r2, ε, α, 1] * (d3[a, a, r2, ε, α, 1] * (r) ^ (-1 - 1)) * LegendreP[1, Cos[θ]],
  |suma
  {1, 1, 2 * n + 1}] -
  Sum[Δ[a, a, r2, ε, α, 2 1] * (d3[a, a, r2, ε, α, 2 1] * (r) ^ (-2 1 - 1)) *
  |suma
  LegendreP[2 1, Cos[θ]], {1, 1, n}];
  |P de Legendre |coseno
```

```
ρθ[θ_] := ψ3[a, 1, θ, n];
```

(*Potencial ψ_3 fijando $r=r_2=1$ micra, es decir, sobre la interfase exterior, como función del ángulo*)

```
ρr[r_] := ψ3[a, r, Pi/4, n];
  |número pi
```

(*Potencial ψ_3 fijando $\theta=Pi/4$,

como función de la distancia. Ídem para los tres siguientes pares de funciones.

Esto permite derivar más fácilmente para obtener el campo magnético.*)

```
ηθ[θ_] := ψ3[a, 1, θ, n];
```

```
ηr[r_] := ψ3[a, r, 5 * Pi / 16, n];
  |número pi
```

```
σθ[θ_] := ψ3[a, 1, θ, n];
```

```
σr[r_] := ψ3[a, r, 6 * Pi / 16, n];
  |número pi
```

```
χθ[θ_] := ψ3[a, 1, θ, n];
```

```
χr[r_] := ψ3[a, r, 7 * Pi / 16, n];
  |número pi
```

```
Show[
```

```
|muestra
```

```
Plot[Sqrt[(c * χθ'[7 * Pi / 16]) ^ 2 + (c * χr'[1]) ^ 2], {a, 0, 0.94},
  |rep... |raíz cuadrada |número pi
```

```
PlotLegends → Placed[{"θ=7π/16"}, {0.25, 0.65}],
```

```
|leyendas de rep... |colocado
```

```
PlotRange → All, PlotStyle → {RGBColor[255 / 255, 99 / 255, 71 / 255], Dotted}],
  |rango de rep... |todo |estilo de repre... |color RGB |punteado
```

(*Los parámetros a , r_1 , r_2 del potencial ψ_3 no se pasaron A cm. Por tanto, el potencial se encuentra en unidades de statV/micra. Para pasar a statV/cm, una alternativa es multiplicar el potencial por c al final en lugar de modificar los parámetros al principio.*)

```

Plot[Sqrt[(c*σθ'[3*Pi/8])^2 + (c*σr'[1])^2], {a, 0, 0.94},
|rep... |raíz cuadrada |número pi
  PlotLegends → Placed[{"θ=3π/8"}, {0.25, 0.75}],
|leyendas de rep... |colocado
  PlotRange → All, PlotStyle → {RGBColor[1, 165/255, 0], DotDashed}],
|rango de rep... |todo |estilo de repre... |color RGB |punto-rayado
Plot[Sqrt[(c*ηθ'[5*Pi/16])^2 + (c*ηr'[1])^2], {a, 0, 0.94},
|rep... |raíz cuadrada |número pi
  PlotLegends → Placed[{"θ=5π/16"}, {0.25, 0.85}],
|leyendas de rep... |colocado
  PlotRange → All, PlotStyle → {RGBColor[50/255, 205/255, 50/255], Dashed}],
|rango de rep... |todo |estilo de repre... |color RGB |rayado
Plot[Sqrt[(c*ρθ'[Pi/4])^2 + (c*ρr'[1])^2], {a, 0, 0.94},
|rep... |raíz cuadrada |número pi
  PlotLegends → Placed[{"θ=π/4"}, {0.25, 0.95}],
|leyendas de rep... |colocado
  PlotRange → All, PlotStyle → {RGBColor[65/255, 105/255, 225/255]}],
|rango de rep... |todo |estilo de repre... |color RGB
AxesLabel → {Style[Subscript[r, 1][μm], 12],
|etiqueta de ejes |estilo |subíndice
  Style[Abs["B"[Subscript[r, 2], θ]][G], 12]},
|estilo |valor abs... |subíndice
AxesStyle → Black, ImageSize → 350]
|estilo de ejes |negro |tamaño de imagen

```

Bibliografía

- [1] I. E. Dzyaloshinskii, *On the Magneto-Electrical Effect in Antiferromagnets*, JETP **37**, 881 (1959).
- [2] D. N. Astrov, *The Magneto-Electrical Effect in Antiferromagnets*, JETP **38**, 984 (1960).
- [3] L. D. Landau & E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, Gostekhizdat (1958).
- [4] M. Fiebig, *Revival of the magnetoelectric effect*, J. Phys. D: Appl. Phys. **38** R123 (2005).
- [5] T. H. O'Dell, *The Electrodynamics of Magneto-Electric Media*, North-Holland, Amsterdam (1970).
- [6] N. A. Spaldin, S.-W. Cheong & R. Ramesh, *Multiferroics: Past, present, and future*, Phys. Today **63** (10), 38 (2010).
- [7] W. Eerenstein, N. D. Mathur & J. F. Scott, *Multiferroic and magnetoelectric materials*, Nature **442**, 759 (2006).
- [8] F. W. Hehl, Y. N. Obukhov, J.P. Rivera & H. Schmid, *Relativistic nature of a magnetoelectric modulus of Cr₂O₃ crystals: A four dimensional pseudoscalar and its measurement*, Phys. Lett. A **34**, 357 (2005).
- [9] J. P. Rivera, *A short review of the magnetoelectric effect and related experimental techniques on single phase (multi-) ferroics*, Eur. Phys. J. B **71**, 299 (2009).
- [10] H. Schmid, *On a Magnetoelectric Classification of Materials*, Int J. Magn. **4**, 239 (1973).
- [11] U. Özgür, Y. Alivov & H. Morkoç, *Microwave ferrites, part 2: Passive components and electrical tuning*, J. Mater. Sci.: Mater. Electron. **20**, 911 (2009).
- [12] M. M. Vopson, Y. K. Fetisov, G. Caruntu & G. Srinivasan, *Measurement Techniques of the Magnetoelectric Coupling in Multiferroics*, Materials **10**, 963 (2017).
- [13] F. Matsukura, Y. Tokura & H. Ohno, *Control of magnetism by electric fields*, Nature Nanotechnology **10**, 209 (2015).
- [14] T. Lottermoser, T. Lonkai, U. Amann, D. Hohlwein, J. Ihringer & M. Fiebig, *Magnetic phase control by an electric field*, Nature **430**, 541 (2004).
- [15] A. W. W. Ludwig, *Topological phases: classification of topological insulators and superconductors of non-interacting fermions, and beyond*, Phys. Scr. **T168**, 014001 (2016).

- [16] E. J. Mele, *The winding road to topological insulators*, Phys. Scr. **T164**, 014004 (2015).
- [17] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale & M. den Nijs, *Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential*, Phys. Rev. Lett. **49**, 405 (1982).
- [18] K. von Klitzing, G. Dorda & M. Pepper, *New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance*, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980).
- [19] R. B. Laughlin, *Quantized Hall conductivity in two dimensions*, Phys. Rev. B **23**, 5632 (1981).
- [20] B. I. Halperin, *Quantized Hall conductance, current-carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential*, Phys. Rev. B **25**, 2185 (1982).
- [21] F. D. M. Haldane, *Model for a Quantum Hall Effect without Landau Levels: Condensed-Matter Realization of the “Parity Anomaly”*, Phys. Rev. Lett. **61**, 2015 (1988).
- [22] C. L. Kane & E. J. Mele, *Quantum Spin Hall Effect in Graphene*, Phys. Rev. Lett. **95**, 226801 (2005).
- [23] C. L. Kane & E. J. Mele, *\mathbb{Z}_2 Topological Order and the Quantum Spin Hall Effect*, Phys. Rev. Lett. **95**, 146802 (2005).
- [24] A. Bernevig, T. L. Hughes & S.-C. Zhang, *Quantum Spin Hall Effect and Topological Phase Transition in HgTe Quantum Wells*, Science **314**, 1757 (2006).
- [25] M. König, et al., *Quantum Spin Hall Insulator State in HgTe Quantum Wells*, Science **318**, 766 (2007).
- [26] L. Fu & C. L. Kane, *Time Reversal Polarization and a \mathbb{Z}_2 Adiabatic Spin Pump*, Phys. Rev. B **74**, 195312 (2006).
- [27] L. Fu, C. L. Kane & E. J. Mele, *Topological Insulators in Three Dimensions*, Phys. Rev. Lett. **98**, 106803 (2007).
- [28] J. E. Moore & L. Balents, *Topological invariants of time-reversal-invariant band structures*, Phys. Rev. B **75**, 121306(R) (2007).
- [29] X.-L. Qi, T. L. Hughes & S.-C. Zhang, *Topological field theory of time-reversal invariant insulators*. Phys. Rev. B **78**, 195424 (2008).
- [30] R. Roy, *Topological phases and the quantum spin Hall effect in three dimensions*, Phys. Rev. B **79**, 195322 (2009).

-
- [31] M. Z. Hasan & C. L. Kane, *Colloquium: Topological insulators*, Rev. Mod. Phys. **82**, 3045 (2010).
- [32] D. Hsieh, et al., *A topological Dirac insulator in a quantum spin Hall phase*, Nature **452**, 970 (2008).
- [33] V. Diziom, A. Shuvaev, A. Pimentov, et al., *Observation of the universal magnetoelectric effect in a 3D topological insulator*, Nature Communications **8**, 15297 (2017).
- [34] X. L. Qi, R. Li, J. Zang & S. C. Zhang, *Inducing a magnetic monopole with topological surface States*, Science **323**, 1184 (2009).
- [35] Q. N. Meier, et al., *Search for the Magnetic Monopole at a Magnetoelectric Surface*, Phys. Rev. X **9**, 011011 (2019).
- [36] F. Wilczek, *Two applications of axion electrodynamics*, Phys. Rev. Lett. **58**, 1799 (1987).
- [37] L. Huerta & J. Zanelli, *Optical properties of a θ vacuum*, Phys. Rev. D **85**, 085024 (2012).
- [38] Y. N. Obukhov & F. W. Hehl, *Measuring a piecewise constant axion field in classical electrodynamics*, Phys. Lett. A **341**, 357 (2005).
- [39] A. Martín-Ruiz & L. F. Urrutia, *Interaction of a hydrogenlike ion with a planar topological insulator*, Phys. Rev. A **97**, 022502 (2018).
- [40] A. Martín-Ruiz & E. Chan-López, *Dynamics of a Rydberg hydrogen atom near a topologically insulating surface*, Eur. Phys. Lett. **119**, 53001 (2017).
- [41] A. Martín-Ruiz, O. Rodríguez-Tzompantzi, J. R. Maze & L. F. Urrutia, *Magnetoelectric effect of a conducting sphere near a planar topological insulator*, Phys. Rev. A **100**, 042124 (2019).
- [42] R. Eason (Ed.), *Pulsed laser deposition of thin films: Applications-LED growth of functional materials*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey (2007).
- [43] A. M. Essin, J. E. Moore & D. Vanderbilt, *Magnetoelectric Polarizability and Axion Electrodynamics in Crystalline Insulators*, Phys. Rev. Lett. **102**, 146805 (2009).
- [44] N. R. Meyer, *Topological insulator growth & characterization*. Graduate Theses and Dissertations, 13443 (2013).
- [45] A. A. Burkov, *Chiral anomaly and transport in Weyl metals*, J. Phys. Condens. Matter **27**, 113201 (2015).
- [46] A. Martín-Ruiz, *Magnetoelectric effect in cylindrical topological insulators*, Phys. Rev. D

- 98, 056012 (2018).
- [47] D. Tong, *The Quantum Hall Effect*. TIFR Infosys Lectures (2016).
- [48] A. Martín-Ruiz, M. Cambiaso & L. F. Urrutia, *The magnetoelectric coupling in electrodynamics*, Int. J. Mod. Phys. A **28**, 1941002 (2019).
- [49] E. Plum, J. Zhou, J. Dong, V. A. Fedotov, T. Koschny, C. M. Soukoulis & N. I. Zheludev, *Metamaterial with negative index due to chirality*, Phys. Rev. B **79**, 035407 (2009).
- [50] M. Vazifeh & M. Franz, *Electromagnetic Response of Weyl Semimetals*, Phys. Rev. Lett. **111**, 027201 (2013).
- [51] B. Yan & C. Felser, *Topological Materials: Weyl Semimetals*, Annu. Rev. Condens. Matter Phys. **8**, 1 (2017).
- [52] L. D. Duffy & K. van Bibber, *Axions as dark matter particles*, New J. Phys. **11**, 10500 (2009).
- [53] L. Rondin, et al., *Stray-field imaging of magnetic vortices with a single diamond spin*, Nat. Commun. **4**, 2279 (2013).
- [54] I. Gross et al., *Real-space imaging of non-collinear antiferromagnetic order with a single-spin magnetometer*, Nature **549**, 252 (2017).
- [55] J. Clarke & A. I. Braginski (Eds.), *The SQUID Handbook, Vol. I Fundamentals and Technology of SQUIDS and SQUID Systems*, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim (2004).
- [56] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier Academic Press, p. 450 (1985).
- [57] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, 6th ed. Elsevier Academic Press, pp. 751, 752 (2005).
- [58] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, Inc. (1999).
- [59] L. Rondin, et al., *Magnetometry with nitrogen-vacancy defects in diamond*, Rep. Prog. Phys. **77** 056503 (2014).
- [60] F. Casola, T. van der Sar, & A. Jacoby, *Probing condensed matter physics with magnetometry based on nitrogen-vacancy centres in diamond*, Nat. Rev. Mater. **3**, 17088 (2018).
- [61] K. Gramm, L. Lundgren & O. Beckman, *SQUID Magnetometer for Magnetization Measurements*, Phys. Scr. **13** 93 (1975).

-
- [62] P. A. Warburton, *The Josephson effect: 50 years of science and technology*, Phys. Educ. **46** 669 (2011).
- [63] A. Altland & L. Fritz, *Primer on topological insulators* (2012).
- [64] G. Tkachov, *Topological insulators: the physics of spin helicity in quantum transport*. Taylor & Francis Group, LLC (2016).
- [65] M. König, et al., *The Quantum Spin Hall Effect: Theory and Experiment*, J. Ph. Soc. JPN **77**, 031007 (2008).
- [66] Y. L. Chen, et al., *Experimental realization of a three-dimensional topological insulator; Bi_2Te_3* , Science **325**, 178 (2009).
- [67] M. Born & V. A. Fock, *Beweis des Adiabatenatzes*, Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei **51**, 165 (1928).
- [68] T. Maruyama, et al., *Large voltage-induced magnetic anisotropy change in a few atomic layers of iron*, Nat. Nanotechnol. **4**, 158–161 (2009).
- [69] Y. Shiota, et al., *Induction of coherent magnetization switching in a few atomic layers of FeCo using voltage pulses*, Nat. Mater. **11**, 39–43 (2012).
- [70] T. Nozaki, et al., *Large voltage-induced changes in the perpendicular magnetic anisotropy of an MgO-based tunnel junction with an ultrathin Fe layer*, Phys. Rev. Appl. **5**, 044006 (2016).
- [71] C. Bi, et al., *Reversible control of co magnetism by voltage-induced oxidation*, Phys. Rev. Lett. **113**, 267202 (2014).
- [72] U. Bauer, M. Przybylski, J. Kirschner & G. S. D. Beach, *Magnetoelectric charge trap memory*, Nano. Lett. **12**, 1437–1442 (2012).
- [73] T. H. E. Lahtinen, K. J. A. Franke & S. van Dijken, *Electric-field control of magnetic domain wall motion and local magnetization reversal*, Sci. Rep. **2**, 258 (2012).