UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS Y LÓGICA DE LA CIENCIA

La negación en lógicas conexivas y paraconsistentes

TESIS QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
MAESTRO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA
PRESENTA

Ricardo Arturo Nicolás Francisco

Tutor: Dr. Luis Estrada González I I F UNAM

Ciudad de México Julio de 2020

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi tutor Luis Estrada González por todo su apoyo, sus consejos y su paciencia; no podría pagarle las interminables horas que pasó conmigo durante el desarrollo de esta investigación (más que trabajando duro y ayudando a mis compañeros que lo necesiten).

Quiero agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo otorgado para cursar mis estudios de maestría y realizar esta investigación. También quiero agradecer al Programa de Apoyo a los Estudios de Posgrado (PAEP) y al proyecto PAPIIT IN403719 "Intensionalidad hasta el final: un nuevo plan para la relevancia lógica"por el apoyo otorgado para presentar avances de esta investigación en los siguientes eventos: *Logic Colloquium 2019* y el *16th International Congress on Logic, Methodology and Philosophy of Science and Technology*.

Además, quiero agradecer a todos los integrantes del Seminario de Tesistas en Filosofía de las Ciencias Formales y al grupo de Tesistas en Aprietos.

Por último quiero agradecerme a mí, por saber esperar, adaptarme a los cambios y continuar adelante, y a las bendiciones que me han dado mi familia, mi asesor y Marisela, sin las cuales no habría podido sobrevivir a la maestría.

Introducción

Este trabajo versa sobre el tema de la negación lógica. En ella cubro discusiones sobre la logicidad de la negación, dos enfoques conexivos sobre la negación del condicional y un método para obtener reglas de tableaux para fórmulas negadas en una lógica paraconsistente no veritativo funcional.

Jc Beall ha afirmado que no hay una negación lógica, o —en términos menos controversiales— que no hay una negación lógica "filosóficamente interesante"más allá de ciertos patrones inferenciales para una conectiva unaria. Algunas de las premisas en las que se basa para defender esta tesis presuponen una postura filosófica cercana a la semática de pruebas dentro del debate del significado de las conectivas lógicas.

De acuerdo con la semántica de pruebas, los significados de las conectivas son dados por las reglas primitivas en las que aparecen. Beall no habla del significado de las conectivas, sino de su estatuto lógico: una conectiva lógica tiene que estar caracterizada por reglas de derivación. Pero estas reglas deben cumplir con una característica particular, pues en ellas no tienen que aparecer otras conectivas más que aquella a la que se intenta caracterizar. Por ejemplo, las reglas para el condicional tendrían que ser similares (o las mismas) a las siguientes:

$$(\to\mathrm{R})\ \frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \to B} \qquad\qquad (\to\mathrm{L})\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad B, \Pi \vdash \Sigma}{A \to B, \Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Sigma}$$

y no como las siguientes:

$$(\sim\to\mathrm{R})\ \frac{A, \Gamma \vdash \Delta, \sim B}{\Gamma \vdash \Delta, \sim (A \to B)} \qquad\qquad (\sim\to\mathrm{L})\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \sim B, \Pi \vdash \Sigma}{\sim (A \to B), \Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Sigma}$$

que son las que se ofrecen para la lógica conexiva biclásica [34], en las que aparecen negaciones.

Por ello la postura de Beall se asemeja —también dentro de la discusión del significado de las conectivas— a lo que se ha denominado "separatismo". De acuerdo con esta última postura, el significado de cada conectiva se obtiene de manera independiente del significado de las otras conectivas. La alternativa a esta perspectiva es dada por el interaccionismo, en el que se establece que los significados de cada conectiva se obtienen de sus relaciones con otras conectivas. Un ejemplo es el de las lógicas conexivas, en las que, a decir de Routley [49], los significados del condicional y la negación son inseparables.

En las lógicas conexivas, hay al menos dos enfoques sobre la negación del condicional [36]. En el primer enfoque se considera que la negación del condicional es equivalente con el esquema $(A \rightarrow\sim B)$ [55], mientras que en el segundo enfoque se considera una forma modalizada del mismo, $(A \rightarrow \Diamond \sim B)$ [58]. Estos enfoques han sido relacionados por Hitoshi Omori utilizando una lógica modal desarrollada por Sergei Odintsov y Heinrich Wansing [35]; sin embargo, la relación de ambos enfoques resulta problemática en la discusión del posibilismo, perspectiva según la cual toda fórmula es posible. Utilizando un fragmento de la lógica **LP** junto con un condicional especial, Estrada González [17] relaciona una manera de definir las lógicas conexivas mediante la definición del condicional en términos de posibilidad, noción definida a su vez en términos de consistencia, con la idea de que toda proposición es autoconsistente. Esto resulta en que toda fórmula con la forma $\Diamond A$ sea válida. Sin embargo, un teorema limitativo ofrecido por Omori en [36] establece que en una lógica con pocos y casi incontrovertibles principios lógicos y reglas de inferencia[1], al añadir los esquemas $\sim (A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow\sim B)$ y $\sim (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \Diamond \sim B)$, se obtiene $\Diamond B \leftrightarrow B$ como un esquema válido, lo que conlleva a que no se pueda añadir $\Diamond B$ como un esquema válido, so pena de trivialidad. Uno de mis objetivos es mostrar cómo se pueden conservar ambos enfoques dentro de este mismo marco, es decir, utilizando la expansión de **LP**, pero al precio de restringir el posibilismo a los casos en los que las fórmulas sólo tienen valores designados.

Distinguir entre diferentes valores designados resulta útil para proponer un nuevo sistema de tableaux para la lógica paraconsistente $\mathbf{C}_{\mathit{1}}$ en el tercer capítulo. Como es bien sabido, dicha lógica está caracterizada por un método de decisión que no es representable por tablas finitas de valores. Las condiciones usuales de evaluación de las fórmulas libres de negación para esa

[1] De los cuales hablaré en el capítulo 2.

lógica permiten obtener las mismas reglas de la lógica clásica en un cálculo de tableaux, pero resultan problemáticas para las fórmulas negadas, las cuales pueden tener el mismo valor de las fórmulas a las que se está negando. Ante tal escenario surge la pregunta de si la noción de verdad que se utiliza en la lógica paraconsistente sigue siendo la misma que la de la lógica clásica. Al traducir las fórmulas negadas a una lógica trivaluada con dos valores designados, es posible recuperar la veritativo funcionalidad de $\mathbf{C}_{\mathit{1}}$ y ofrecer una nueva perspectiva sobre lo que parece ser *prima facie* la noción de verdad en la lógica paraconsistente.

Los tres temas que he mencionado agotan el contenido de esta investigación; a pesar de lo distantes que puedan parecer, ellos contienen aportaciones a la discusión sobre la negación en la filosofía de la lógica en los ámbitos de la lógica conexiva y la lógica paraconsistente. En este trabajo no exploraré si hay implicaciones de las ideas centrales de los contenidos de cada capítulo sobre los restantes, ya que mi propósito fue trabajar sobre cada uno de ellos de manera independiente. Es decir que no estudiaré si los sistemas de tableaux para la lógica $\mathbf{C}_{\mathit{1}}$ se puede extender para incluir negaciones de condicionales con un enfoque conexivo; o si con las reglas de tableaux hay otra línea de defensa para una postura similar a la de Beall.

La estructura de este trabajo es la siguiente En la primera parte del trabajo discuto el argumento de Jc Beall con el que defiende que no hay negación lógica. Una de las premisas del argumento establece que la negación tiene que ser exclusiva o exhaustiva y presento dos razones para negar esta premisa

En la segunda parte del trabajo discuto tres enfoques de las lógicas conexivas con lógicas modales veritativo funcionales y dos tipos de negación. Al interpretar la posibilidad como dicen Lewis y Langford en *Symbolic Logic* y aceptar que la posibilidad tiene las condiciones de interpretación que dice Béziau para la negación del condicional en el enfoque de Égré y Politzer, la negación del condicional en el enfoque de Wansing es interderivable con la negación del condicional en el enfoque de Égré y Politzer.

En la tercera parte del trabajo propongo un sistema de tableaux para la lógica paraconsistente $\mathbf{C}_{\mathit{1}}$ de Newton da Costa. Discuto el procedimiento para obtener un tableaux por medio de cuasimatrices y cómo poder representar reglas para fórmulas negadas en estos sistemas.

Cada uno de los capítulos constituye un artículo que ya ha sido publicado o aceptado para su publicación. El primer artículo, correspondiente al primer capítulo, se encuentra condicionalmente aceptado en la revista *Crítica*; el segundo artículo fue publicado el año 2019 en el volumen 51 de la revista *Felsefe Arkivi- Archives of Philosophy* bajo el título de “A note on three approaches to connexivity” en las páginas 129–138; el tercero será publicado en una edición dedicada al *Coloquio de Estudiantes de Filosofía de la Ciencia* celebrado durante los días 4, 5 y 6 de marzo de 2019 en el Instituto de Investigaciones Filosóficas de la UNAM.

Índice general

Capítulo 1

Sí hay negación lógica

En este capítulo discutimos la tesis de Jc Beall según la cual no hay negación lógica.[1] Evaluamos la solidez del argumento con el que defiende su tesis y presentamos dos razones para rechazar una de sus premisas: que la negación tiene que ser excluyente o exhaustiva. La primera razón involucra una presentación alternativa de las reglas de la negación en sistemas de secuentes diferentes al que Beall presupone. La segunda razón establece que la negación no tiene que ser excluyente o exhaustiva.

Introducción

En este capítulo discutiremos la tesis de Beall, defendida en [4], de que no hay negación lógica. Evaluaremos la solidez del argumento que sustenta la tesis y presentaremos dos razones para negar la verdad de una de sus premisas, según la cual la negación tiene que ser excluyente o exhaustiva. La primera razón que ofrecemos es que incluso si aceptamos que la negación en la lógica preferida por Beall —**FDE**— tiene que estar caracterizada por reglas en las que no aparezcan otras conectivas, reglas así pueden obtenerse en marcos lógicos distintos (marcos de sistemas de secuentes tri y tetralaterales [51], [52]) al presupuesto por Beall, que es un marco de sistemas de secuentes de conclusiones múltiples. De hecho, hay reglas así para la negación en un cálculo de secuentes estándar que no es considerado por Beall ni por sus detractores. En ambos casos las reglas para la negación no expresan exclusividad ni exhaustividad. La segunda razón, todavía más sencilla, dice

[1] Este capítulo fue realizado de manera conjunta con Luis Estrada González.

que la negación no tiene que caracterizarse mediante exclusividad o exhaustividad, sino simplemente como una conectiva que intercambia la verdad y la falsedad.

El problema que abordamos aquí es importante porque está estrechamente vinculado con la comprensión de **FDE**, que es una lógica central en muchas investigaciones lógicas contemporáneas además de las del propio Beall (véanse por ejemplo [41], [37] y [38]). Pero la importancia del tema no se agota en la comprensión de **FDE**, sino que se trata de un problema más general acerca de la naturaleza de la negación. En ese sentido, nuestro trabajo puede enmarcarse en el debate reciente entre Omori/De cf. [23] y Berto/Restall (cf. [7] y [8]). Si bien no nos pronunciamos acerca de cuál es el mejor tratamiento semántico para la negación —si el "plan australiano", defendido por Berto y Restall, con su semántica tipo Kripke y condiciones no estándar para la negación, o el "plan estadounidense", defendido por Omori y De, con una semántica extensional bivaluada pero no vertitativo funcional— sí tratamos el problema de qué propiedades sí cabe esperar en una teoría suficientemente general acerca de la negación.

La estructura del capítulo es la siguiente. En la primera sección presentamos el argumento con el que Beall defiende que no hay negación lógica. En la segunda sección presentamos la objeción de Lionel Shapiro al argumento de Beall, de acuerdo con la cual al cambiar la presentación de la lógica a marcos de secuentes tri y tetralaterales, se pueden encontrar reglas para la negación en las que no aparecen otras conectivas. En la tercera sección presentamos la segunda objeción, según la cual no es necesario que la negación tenga que ser excluyente o exhaustiva. La insistencia de Beall en que una conectiva lógica debe estar caracterizada por reglas en las que no aparezcan otras conectivas se asemeja a la postura separatista en el tema del significado de las conectivas lógicas. En la cuarta sección discutiremos este supuesto, lo cual también nos lleva a considerar que hay otras opciones antes de concluir la inexistencia de la negación lógica.

1.1. El argumento sobre la inexistencia de la negación lógica

Jc Beall ha defendido que no hay negación lógica [4]. Su argumento para defender esta tesis es el siguiente:

B1. La negación lógica debe ser excluyente o exhaustiva, esto es, dadas un par de proposiciones A y $\sim A$, no pueden tener el mismo valor (exclusividad) o entre las dos tienen todos los valores posibles (exhaustividad).
B2. Hay razones para abandonar exclusividad.
B3. Hay razones para abandonar exhaustividad.
B4. No hay razones para preferir abandonar exclusividad sobre exhaustividad, ni viceversa. Además, las razones para abandonar exclusividad y exhaustividad son más fuertes que las razones para aceptarlas.
B5. Si hay razones para abandonar exclusividad y hay razones para abandonar exhaustividad, no hay razones para preferir abandonar una sobre la otra, y las razones para abandonar exclusividad y exhaustividad son más fuertes que las razones para aceptarlas, entonces hay que abandonar ambas.
B6. Entonces, hay que abandonar exclusividad y exhaustividad.
B7. Así, la negación lógica no es excluyente ni exhaustiva.
BC. Por lo tanto, no hay negación lógica.

A continuación discutiremos brevemente todas las premisas, excepto la primera, que dejaremos para la sección 3.

Beall dice que las razones para abandonar exclusividad las proporcionan las oraciones paradójicas de autorreferencia. Una de estas oraciones es la del mentiroso: "Esta oración es falsa". Para interpretar esta oración en términos intuitivos, las personas que admiten cúmulos de valores de verdad (por ejemplo, [43], [3], [56], [57]) usan una semántica que les permita expresar que hay oraciones que son tanto verdaderas como falsas. Dado que ellos interpretan la negación de una proposición como la afirmación de su falsedad, abandonan el requerimiento de que la negación sea excluyente de la verdad de esa fórmula. La lógica preferida por varias personas que admiten cúmulos de valores de verdad para hacer esto es la lógica paraconsistente **LP**.[2]

Con respecto a la tercera premisa, Beall dice que los fenómenos de vaguedad proporcionan las razones para abandonar exhaustividad. Para hablar de los fenómenos de vaguedad, las personas que admiten vacíos de valores de verdad (por ejemplo, [31] o [18]) usan una semántica que les permita expresar que hay oraciones que no son ni verdaderas ni falsas. La lógica preferida por varias personas que admiten vacíos de valores de verdad para hacer esto es la lógica paracompleta $\mathbf{K}_3$.[3]

[2]Las propiedades de **LP** han sido ampliamente estudiadas en varios lugares y son bien conocidas; el *locus classicus* es por supuesto [42]; el lector con menos tiempo libre puede revisar [43, capítulo 5].

[3]Para un estudio sucinto de las características de $\mathbf{K}_3$, véase [18, capítulo 3].

Con respecto a la cuarta premisa, Beall dice que no hay razones dadas puramente por la lógica para preferir abandonar exclusividad sobre exhaustividad, ni viceversa. Las únicas razones para preferir abandonar exclusividad sobre exhaustividad (o viceversa) son razones extralógicas, como que haya oraciones paradójicas de autorreferencia o fenómenos de vaguedad. Sin embargo, tomadas en conjunto, éstas constituyen razones más fuertes para abandonar tanto exhaustividad como exclusividad, no solamente una de ellas. A Beall le parece que no hay una manera lógicamente imparcial para decidir entre exhaustividad y exclusividad sin que se acepte la posición que se quiere probar. Por ello es que Beall cree que la lógica que subyace a todas nuestras teorías verdaderas tiene que ser subclásica [5] —esto es, una lógica cuyo conjunto de argumentos válidos sea un subconjunto del conjunto de argumentos válidos de la lógica clásica— y dicha lógica tiene que tener una negación que no sea excluyente ni exhaustiva. Beall considera que esa lógica es **FDE**.[4]

Cualquiera de las premisas se puede discutir, pero le concederemos a Beall las premisas B2 a B7, de modo que nos concentraremos en la evaluación de B1.

1.2. Las reglas de derivación para la negación

Beall toma como evidencia de que no hay negación lógica que las reglas para la negación en **FDE** sean las siguientes:

$$(\sim\wedge\mathrm{L})\,\frac{\Gamma, \sim A \vdash \Delta \qquad \Gamma, \sim B \vdash \Delta}{\Gamma, \sim (A \wedge B) \vdash \Delta} \qquad (\sim\wedge\mathrm{R})\,\frac{\Gamma \vdash \Delta, \sim A, \sim B}{\Gamma \vdash \Delta, \sim (A \wedge B)}$$

[4]Las lógicas **LP** y $\mathbf{K}_3$ son extensiones de **FDE**. Hay varias maneras de obtener aquellas dos lógicas a partir de ésta; en la siguiente sección presentamos una forma de hacerlo. El argumento de Beall sugiere que si la teoría correcta acerca de la negación no es la de $\mathbf{K}_3$ ni la de **LP**, quizá tal teoría correcta pueda obtenerse de la intersección de ambas lógicas. La intersección de **LP** y $\mathbf{K}_3$ es la lógica **S3** (véase [25]). **S3** contiene estrictamente a **FDE**, pues en ella valen todos los argumentos válidos en **FDE**, pero también el siguiente, que es inválido en **FDE**:
(RA) $A\wedge \sim A \vdash B\vee \sim B$
No obstante, **S3** no es la lógica favorecida por el argumento de Beall, porque la validez de (RA) en esa lógica sugeriría que si la negación no es excluyente entonces es exhaustiva y, contraponiendo, que si no es exhaustiva entonces es excluyente, lo cual va contra la idea de que la negación no es excluyente ni exhaustiva.

$$(\sim\vee\text{L})\ \frac{\Gamma, \sim A, \sim B \vdash \Delta}{\Gamma, \sim (A \vee B) \vdash \Delta} \qquad (\sim\vee\text{R})\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, \sim A \qquad \Gamma \vdash \Delta, \sim B}{\Gamma \vdash \Delta, \sim (A \vee B)}$$

$$(\sim\sim\text{L})\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, \sim\sim A \vdash \Delta} \qquad (\sim\sim\text{R})\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, \sim\sim A}$$

Considerando reglas de este tipo, Beall concluye que "(...) no hay una negación lógica filosóficamente interesante (más allá de los patrones de De Morgan), ninguna conectiva de negación interesante cuyo comportamiento independiente [de otras conectivas] (...) esté caracterizado por la lógica misma" [4, p. 2][5] y "hay una conectiva lógica llamada *negación* u *operador de falsedad*, sólo que la lógica no le impone ninguna restricción interesante (...) aparte de lo que la lógica le demanda de su interacción con otras conectivas [que sí son] lógicas."[4, p. 15][6] Al considerar que en las reglas para una conectiva lógica —en este caso, la negación— no deben aparecer otras conectivas, Beall es implícitamente un separatista, pero trataremos este asunto en la sección 4.

Shapiro [51] ha replicado que Beall llegó a su conclusión por haber considerado sólo sistemas de secuentes con conclusiones múltiples. En cálculos de secuentes tri y tetralaterales [52], hay reglas para la negación incluso para la lógica **FDE** con los requisitos que Beall pide, esto es, que no involucren otras conectivas. Estos últimos sistemas son parecidos a los sistemas de secuentes de n lados (véase [39, capítulo 4]).

La motivación formal para desarrollar estos sistemas es la de proporcionar una contrapartida de secuentes para la teoría de modelos de lógicas con n valores siguiendo esta intuición: si la lógica con *dos* valores necesita de "secuentes *bi*laterales", $\Gamma \vdash \Delta$, una lógica con n valores necesita de "secuentes n-laterales":

[5] "(...) there is no philosophically interesting logical negation (aside from De Morgan behaviour), no interesting negation connective whose stand-alone behaviour (independent of interaction with other connectives) is characterized by logic itself."

[6] "There is a logical connective called *negation* or *falsity operator*; it's just that logic imposes no interesting constrains on it (or dually, the null or truth operator), aside from what logic demands of its interaction with other logical connectives." En otras palabras, para Beall una conectiva lógica debe ser caracterizada por medio de "reglas puras" —como se les llama en [29]— o más exactamente "reglas de introducción puras" en cálculos de secuentes, es decir, reglas en donde las conectivas sólo figuren en el secuente inferior. Estas nociones serán útiles cuando al final de la sección analicemos una última línea de defensa para alguien que piense como Beall.

$\Gamma_1, A_{1_1}, ..., A_{1_n}; ...; \Gamma_n, A_{n_1}, ..., A_{n_m} \vdash \Delta_1, B_{1_1}, ..., B_{1_n}; ...; \Delta_n, B_{n_1}, ..., B_{n_m}$

Así, en un marco de secuentes trilaterales, las reglas de derivación tienen una de las siguientes formas generales:

$$\frac{\Gamma, A; \Sigma, B \vdash \Delta, C}{\Theta, D; \Phi, E \vdash \Psi, F} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B; \Sigma, C}{\Theta, D \vdash \Psi, E; \Phi, F}$$

donde Γ y Θ no pueden ser vacíos.

En el caso particular de las reglas para las conectivas en **FDE** usamos la forma de la izquierda; en el caso de la negación, tenemos las siguientes reglas de derivación:

$$(\sim\text{R'})\ \frac{\Gamma; \Sigma, A \vdash \Delta}{\Gamma; \Sigma \vdash \Delta, \sim A} \qquad (\sim\text{L'})\ \frac{\Gamma; \Sigma \vdash \Delta, A}{\Gamma; \Sigma, \sim A \vdash \Delta}$$

Si permitiéramos que A estuviera del lado de Γ en la regla ($\sim$ R'), es decir,

$$(\sim\text{R*})\ \frac{\Gamma, A; \Sigma \vdash \Delta}{\Gamma; \Sigma \vdash \Delta, \sim A}$$

obtendríamos la negación de **LP**. Si permitiéramos que $\sim A$ estuviera del lado de Γ en la regla ($\sim$ L'), es decir,

$$(\sim\text{L*})\ \frac{\Gamma; \Sigma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \sim A; \Sigma \vdash \Delta}$$

obtendríamos la negación de $\mathbf{K}_3$. Si permitiéramos las cuatro reglas anteriores, obtendríamos la negación de la lógica clásica. En este caso no tendría sentido, más allá de la generalidad, usar el punto y coma.

En un marco de secuentes tetralaterales, en cambio, las reglas de derivación para FDE tienen la siguiente forma general:

$$\frac{\Gamma, A; \Sigma, B \vdash \Delta, C; \Theta, D}{\Xi, F; \Pi, G \vdash \Psi, H; \Phi, I}$$

En el caso particular de las reglas de la negación para la lógica **FDE**, tenemos las siguientes cuatro reglas de derivación:

$$(\sim \text{L1})\ \frac{\Gamma; \Sigma \vdash \Delta; \Theta, A}{\Gamma, \sim A; \Sigma \vdash \Delta; \Theta} \qquad (\sim \text{R1})\ \frac{\Gamma, A; \Sigma \vdash \Delta; \Theta}{\Gamma; \Sigma \vdash \Delta; \Theta, \sim A}$$

$$(\sim \text{L2})\ \frac{\Gamma; \Sigma \vdash \Delta, A; \Theta}{\Gamma; \Sigma, \sim A \vdash \Delta; \Theta} \qquad (\sim \text{R2})\ \frac{\Gamma; \Sigma, A \vdash \Delta; \Theta}{\Gamma; \Sigma \vdash \Delta, \sim A; \Theta}$$

Si permitéramos que A estuviera del lado de Δ en la regla (∼L1) y que A estuviera al lado de Σ en la regla (∼R1), es decir,

$$(\sim \text{L1*})\ \frac{\Gamma; \Sigma \vdash \Delta, A; \Theta}{\Gamma, \sim A; \Sigma \vdash \Delta; \Theta} \qquad (\sim \text{R1*})\ \frac{\Gamma; \Sigma, A \vdash \Delta; \Theta}{\Gamma; \Sigma \vdash \Delta; \Theta, \sim A}$$

obtendríamos la negación de la lógica $\mathbf{K}_3$.

Si permitiéramos que A estuviera al lado de Θ en la regla (∼L2) y que A estuviera al lado de Γ en la regla (∼R2), es decir,

$$(\sim \text{L2*})\ \frac{\Gamma; \Sigma \vdash \Delta; \Theta, A}{\Gamma; \Sigma, \sim A \vdash \Delta; \Theta} \qquad (\sim \text{R2*})\ \frac{\Gamma, A; \Sigma \vdash \Delta; \Theta}{\Gamma; \Sigma \vdash \Delta, \sim A; \Theta}$$

obtendríamos la negación de la lógica **LP**.[7] Si permitiéramos las cuatro reglas de intercambio para las cuatro reglas de la negación, obtendríamos la negación clásica.

De este modo, Shapiro logra dar una caracterización de la negación independiente de otras conectivas utilizando dos marcos lógicos distintos. Cabe mencionar que los sistemas multilaterales tienen aplicaciones filosóficas bien conocidas, por ejemplo, en el contexto de lógicas no transitivas usadas para estudiar paradojas semánticas; véanse de nuevo [48] y [2].

La moraleja de considerar todas estas estructuras complejas es que hay una conectiva de negación cuyas propiedades están caracterizadas por la lógica misma, independientemente de cualquier otra conectiva, sólo que esto no se observa en un marco como el de conclusiones múltiples *bilateral*, que es el que Beall presupone en su argumento.

Una posible objeción es que los sistemas de reglas con n lados no son legítimos, sino que son una manera de reescribir tablas de verdad con n valores.[8] El cargo de ilegimitidad es recurrente contra las generalizaciones[9] y

[7] En [48] y [2] hay presentaciones trilaterales de **LP** que usan precisamente estas reglas.

[8] Agradecemos a un dictaminador anónimo la sugerencia de discutir esta objeción.

[9] Véanse por ejemplo la afirmación de Quine de que las lógicas multivaluadas suelen ser "álgebra abstracta" [45, p. 70], no lógica, así como las críticas de Dummett contra la lógica de conclusiones múltiples [16, p. 187].

tienden a desaparecer conforme el uso de la nueva maquinaria avanza. Pero podríamos adelantar algunas razones para disipar algunas de esas dudas acerca de los sistemas multilaterales. Primero, es útil señalar que lo que se presenta como objeción tiene algo de verdad: los sistemas de reglas multilaterales pueden considerarse como una presentación alternativa de ciertas tablas de verdad; lo mismo es cierto de los sistemas bilaterales, véase [1]. Pero de ahí no se sigue que los sistemas de reglas no sean legítimos. Las interpretaciones de los cálculos usuales en términos bilaterales —donde un secuente $\Gamma \vdash \Delta$ se interpreta "no es posible afirmar todo lo que está en Γ y rechazar algo de lo que está en Δ", véase [47]— simplemente se extienden para contemplar otros actos de habla. Por ejemplo, Hjortland en [24] argumenta que el lado adicional en el cálculo trilateral para $\mathbf{K}_3$ es para el acto de *abstención* (ni afirmar ni negar). Como es de esperar, el acto correspondiente para el lado adicional en **LP**, y así completar los cuatro lados de **FDE**, es difícil de conceptualizar, pero Paoli en [41] ya ha esbozado algunas ideas de cómo conceptualizar el acto de afirmar y negar a la vez. Así, hay buenas razones para no desechar como ilegítimos los cálculos multilaterales; hay argumentos para decir que son por lo menos tan legítimos, si bien menos familiares, que los cálculos bilaterales.

Sin embargo, en última instancia no es necesario considerar los sistemas multilaterales para responderle a Beall, ya que hay otros cálculos de secuentes para **FDE**, como el de Font [19] con reglas para la negación que tampoco involucran otras conectivas:

$$(\sim\sim\text{L})\ \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, \sim\sim A \vdash B} \qquad\qquad (\sim\sim\text{R})\ \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \sim\sim A}$$

$$(\sim)\ \frac{A \vdash B}{\sim B \vdash \sim A}$$

Finalmente, tanto la propuesta de Shapiro como el cálculo de Font sirven para bloquear otra línea de defensa para Beall o para alguien que piense como él. En el tema del significado de las conectivas, y siguiendo algunas ideas de Gentzen[10], es una posición estándar considerar que las reglas de introducción de una conectiva determinen el significado de una conectiva. Una versión más estricta sería que dichas reglas fueran *puras*, esto es, que

[10] Gentzen dice que "las [reglas] de introducción de una conectiva representen, por decirlo así, las definiciones de [las conectivas] en cuestión" [21, p. 295], dejándole a las reglas de eliminación el estatuto de simples "consecuencias de esas definiciones".

sólo se introdujera una conectiva. Si, como también es usual, se considera que las reglas en que las conectivas están en los secuentes superiores representan reglas de eliminación de dichas conectivas y aquellas en que las conectivas están en los secuentes inferiores representan reglas de introducción, entonces las reglas que Beall considera para la negación no determinarían el significado de conectiva alguna. Sin embargo, en los sistemas de Shapiro y de Font sí hay tales reglas de introducción puras para la negación, de modo que sí hay reglas que determinen su significado, por lo menos según la tradición gentzeniana recién esbozada.

De esta manera, aunque las objeciones a los sistemas de secuentes multilaterales fueran correctas, el cálculo de Font es un sistema donde la negación se presenta con las características que Beall espera. Así, la conclusión de Beall acerca de la inexistencia de la negación es apresurada, y parece haber llegado a ella simplemente por no haber considerado suficientes cálculos de secuentes para **FDE**.

1.3. Las condiciones de evaluación para la negación

Beall no dice por qué cree que B1 es verdadera, aunque supone que es verdadera por razones lógicas. Sin embargo, su argumento nos parece más bien una reducción al absurdo de la premisa B1, pues según la premisa B7, la negación lógica no es exhaustiva ni excluyente. Además, el paso de B7 a B8 no es inmediato, sino que requiere de un argumento como el siguiente:
B7. La negación lógica no es excluyente ni exhaustiva.
B7a. Si la negación lógica no es excluyente ni exhaustiva, es la negación de la lógica **FDE**.
B7b. Sin embargo no hay conectiva que de acuerdo con **FDE** tenga un comportamiento independiente de cualquier otra conectiva y que esté caracterizada por las siguientes reglas de secuentes de la lógica clásica:

$$(\sim\!\mathrm{L})\,\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \sim A, \Delta} \qquad\qquad (\sim\!\mathrm{R})\,\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \sim A \vdash \Delta}$$

las cuales expresan, conjuntamente, exhaustividad y exclusividad.
BC. Por lo tanto, no hay negación lógica.

La premisa B7b expresa prácticamente lo mismo que la premisa B1. No obstante, B7b no es una razón suficiente para la conclusión. Las reglas de derivación en un marco de secuentes bilateral de conclusiones múltiples— que Beall asume en su argumento— tienen la siguiente forma general:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Theta, C \vdash D, \Sigma}$$

Una regla puede leerse modeloteóricamente siguiendo estas instrucciones[11]:
(LADOS) Si las fórmulas están a la derecha de $\vdash$, las fórmulas son falsas y si las fórmulas están a la izquierda de $\vdash$, las fórmulas son verdaderas.
(POLOS) Todos los secuentes en la parte superior se interpretan como en (LADOS), poniendo en conjunción las fórmulas de cada secuente; cada conjunción de fórmulas se pone en disyunción con las conjunciones de fórmulas resultantes de interpretar los demás secuentes superiores como en (LADOS). La disyunción resultante de la parte superior es el antecedente de un condicional cuyo consecuente es el secuente inferior, poniendo en disyunción sus fórmulas interpretándolas como en (LADOS).[12]
(CONVERTIBILIDAD) (POLOS) es convertible para el caso de la negación: la instrucción de (POLOS) para el secuente superior puede ser la instrucción del secuente inferior y viceversa.[13]

---

[11]La lectura de las reglas no necesita tener en cuenta los contextos Γ, Δ, etc.; basta considerar el lugar de las fórmulas en las reglas.

[12]Por ejemplo, siguiendo la instrucción de (POLOS), la regla

$$(\to L)\ \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}$$

tiene la siguiente lectura: si el antecedente es falso o el consecuente es verdadero, el condicional es verdadero.

[13]La validez y el alcance de (CONVERTIBILIDAD) es muy sensible a la presentación; para una misma lógica **L** puede haber cálculos y reglas para ciertas conectivas que sí la satisfagan y otros que no. Por ejemplo, sea **L** la lógica clásica de orden cero. Su presentación estándar en cálculo de secuentes incluye las siguientes reglas de introducción de la conjunción a la izquierda (de $\vdash$):

$$(\wedge\mathrm{L})\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \qquad\qquad (\wedge\mathrm{L})\ \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

Estas reglas, también conocidas como "reglas aditivas" o "reglas extensionales", no satisfacen (CONVERTIBILIDAD). Sin embargo, la versión Ketonen de introducción de la conjunción a la izquierda —ahora más conocida como "regla multiplicativa" o "regla intensional" y que en la lógica clásica es equivalente a las dos reglas anteriores—

Sabemos que, aunque estándar, esta manera de leer las reglas no es única ni está exenta de controversias véase [39, pp. 30–35]. Por ejemplo, las reglas también pueden leerse en términos de afirmación y rechazo, cambiando sólo la lectura de (LADOS) de la siguiente manera:
(LADOS) Si las fórmulas están a la derecha de $\vdash$, las fórmulas son rechazadas, y si las fórmulas están a la izquierda de $\vdash$, las fórmulas son afirmadas. Sin embargo, ignorar esas lecturas alternativas no perjudica en nada nuestro argumento contra Beall.[14]

Entonces las reglas ($\sim$R) y ($\sim$L) expresan no exhaustividad y exlusividad sino, respectivamente, lo siguiente:
A es falsa si y sólo si $\sim A$ es verdadera
A es verdadera si y sólo si $\sim A$ es falsa

Pero **FDE** tiene exactamente estas condiciones de evaluación para la negación en la semántica relacional. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con un conjunto de variables proposicionales $PROP = \{p_1, \ldots, p_n\}$ y un conjunto de conectivas $\{\sim, \wedge, \vee\}$. Una evaluación para $PROP$ es una relación, denotada por 'ρ', entre $PROP$ y el conjunto de valores $\{1, 0\}$, de tal modo que $p\rho 1$ indica que p se relaciona con 1 (p se relaciona con verdadero) y $p\rho 0$, que p se relaciona con 0 (p se relaciona con falso). Sea $FORM = \{A, B, C...\}$ el conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$ definidas de la manera usual. La relación ρ se extiende a $FORM$ y al conjunto de valores $\{1, 0\}$ también de la manera usual; en particular, las condiciones de interpretación para $\sim A$ en esta semántica para **FDE** son las siguientes:
$\sim A\rho 1$ si y sólo si $A\rho 0$
$\sim A\rho 0$ si y sólo si $A\rho 1$
que son las que obtuvimos a partir de las reglas. Que de estas condiciones no se obtengan exclusividad y exhaustividad se debe a que la relación de interpretación no es una función e incluye tanto el caso en el que $A\rho 1$ y $A\rho 0$ como el caso en el que ni $A\rho 1$ ni $A\rho 0$.

Alguien podría preguntarse si esto no es sino un mero artefacto de la semántica relacional bivaluada. La respuesta es que no. En la otra semántica habitual para **FDE**, que es veritativo-funcional pero tetravaluada, la tabla

$$(\wedge\text{L'})\ \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$$

sí satisface (CONVERTIBILIDAD).

[14]Para una discusión más detallada de cómo leer las reglas, véanse [39, capítulo 1, sección 3], [1], [46], [48], [20] y [54].

de verdad para la negación es la siguiente:

A	$\sim A$
$\{1\}$	$\{0\}$
$\{1,0\}$	$\{1,0\}$
$\varnothing$	$\varnothing$
$\{0\}$	$\{1\}$

que satisface exactamente las mismas condiciones de evaluación que la semántica relacional bivaluada, a saber:
$1 \in v(\sim A)$ si y sólo si $0 \in v(A)$
$0 \in v(\sim A)$ si y sólo si $1 \in v(A)$
El hecho de que la semántica bivaluada relacional y la tetravaluada funcional impliquen las mismas condiciones de verdad y falsedad para la negación —sólo hay que tomar 'ρ' y '$\in$' como intercambiables— usualmente queda oculto por la elección de la notación T (o t) para $\{1\}$, F (o f) para $\{0\}$, N (o n, por 'neither true nor false') para $\varnothing$ y B (o b, por 'both true and false') para $\{1,0\}$.[15]

No obstante, es preciso mencionar que, siguiendo las instrucciones que adoptamos para leer modelotéoricamente las reglas de derivación, las reglas para la negación en el cálculo de Font no inducen estas condiciones, sino, respectivamente, las siguientes:
A es verdadera si y sólo si $\sim\sim A$ es verdadera
A es falsa si y sólo si $\sim\sim A$ es falsa
A es verdadera y B es falsa si y sólo si $\sim A$ es falsa y $\sim B$ es verdadera.

Estas condiciones de evaluación para la negación no corresponden exactamente con las condiciones expresadas por las reglas ($\sim$R) y ($\sim$L) porque en la última de las tres condiciones se consideran dos fórmulas para expresar la condición de evaluación estándar de la negación, no sólo una. Sin embargo, el cálculo de Font aventaja a los otros cálculos que hemos considerado hasta ahora en que no sólo tiene reglas puras de introducción para la negación, sino que las reglas reflejan una variante de la propiedad esperada de la negación de intercambiar verdad y falsedad.

En otras palabras: Beall afirmó que no hay una negación lógica por no encontrar reglas puras para la negación, sin siquiera sopesar que una conectiva lógica también puede ser distinguida por sus condiciones de verdad y de falsedad, y que la negación tiene condiciones de evaluación muy particulares

[15]Véanse [44, p. 143] y [37] para más detalles de las semánticas para **FDE**.

que la distinguen de otras conectivas; pero de ser cierto que una conectiva lógica se caracteriza por reglas puras (de introducción), el cálculo de Font no sólo cumple con esta característica, sino que también las condiciones de evaluación de la negación en el cálculo de Font tienen virtualmente las mismas condiciones de evaluación que la negación en la lógica clásica. Así, encontramos más razones fuertes para afirmar que sí hay negación lógica.

Así, el argumento de Beall para concluir que no hay negación lógica no es sólido, pues no es verdad que la lógica no le imponga ninguna restricción (interesante) a la conectiva de negación más allá de lo que la lógica le demanda de su interacción con otras conectivas. Como ha quedado claro por las condiciones de evaluación para la negación, la negación tiene que intercambiar el valor de verdad por el de falsedad y viceversa, y esto es independiente de la interacción que tiene con otras conectivas.

1.4. El separatismo

En la sección 3, al discutir algunos pasos faltantes entre B7 y B8, notamos que Beall exigía que las reglas para la negación no incluyeran otras conectivas. La insistencia de Beall en que una conectiva lógica debe estar caracterizada por reglas en las que no aparezcan otras conectivas, las denominadas "reglas puras", se asemeja a la postura separatista en el tema del significado de las conectivas lógicas, y ofrece otra opción para rechazar la solidez de su argumento. Aunque la falta de solidez del argumento de Beall ya quedó establecida y no nos pronunciaremos acerca de la verdad de este supuesto adicional, creemos importante discutirlo por dos razones. La primera es que de este modo redondearíamos nuestro análisis del argumento de Beall. La segunda es que ese supuesto está estrechamente vinculado con discusiones en filosofía de la lógica que hemos abordado en este capítulo, como el tema del significado de las conectivas lógicas, y el de la negación en particular.

De acuerdo con el separatismo, el significado de cada conectiva lógica se determina de manera independiente del significado de otras conectivas. El separatismo se opone al interaccionismo, postura según la cual el significado de cada conectiva lógica depende de las relaciones que tenga con otras conectivas. Aunque es similar a la distinción entre minimalismo y maximalismo semánticos, la distinción entre separatismo e interaccionismo es independiente. El maximalismo es la tesis según la cual el significado de una conectiva c en una lógica $\mathbf{L}$ bajo una presentación P depende de todos los elementos de

L (bajo P) que estén relacionados con c; el minimalismo es la tesis según la cual el significado de c no depende de todos esos elementos. La presentación P suele ser alguna versión de una teoría de pruebas, siguiendo el trabajo de Paoli [40], aunque también hay versiones modelo teóricas como en [6] y [17].[16] Si P es, digamos, un cálculo de secuentes tipo Gentzen para **L**, un maximalista diría que tanto las reglas estructurales para **L** como las operacionales para c —y quizá todos los secuentes derivables en los que aparezca c— determinan al significado de ésta, mientras que un minimalista diría que sólo las reglas operacionales lo hacen.

El separatismo no es necesariamente minimalista. Para el separatismo, el resto de conectivas en **L** no contribuyen a determinar el significado de c, pero está abierta la posibilidad de que las reglas estructurales sí lo hagan. Y el interaccionismo no es necesariamente maximalista. El ejemplo de interaccionismo que Routley tiene en mente al introducir esa noción es el de las lógicas conexivas. Los esquemas distintivos de esas lógicas son las tesis de Aristóteles —$\sim (A \rightarrow \sim A)$ y $\sim (\sim A \rightarrow A)$— y de Boecio —$(A \rightarrow B) \rightarrow \sim (A \rightarrow \sim B)$ y $(A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim (A \rightarrow B)$—. Según Routley, en esas lógicas los significados de la negación y del condicional son inseparables, no se puede dar el significado de la una sin dar también el del otro y viceversa. Pero eso no implica maximalismo: no es necesario que el significado de la negación esté determinado por el de otras conectivas más allá del condicional y tampoco por las reglas estructurales, si es que las lógicas conexivas se presentaran en un cálculo de Gentzen.[17]

Cada una de estas posturas puede ejemplificarse tanto en teoría de pruebas como en teoría de modelos. En el interaccionismo en teoría de pruebas, el significado de las conectivas se determina por las reglas (básicas, no derivables ni admisibles) y axiomas en las que aparecen, pero en esas reglas y axiomas puede aparecer más de una conectiva. Los sistemas axiomatizados al estilo Hilbert son tal vez el caso paradigmático de interaccionismo, porque si el significado de las conectivas está determinado por los (esquemas de) axiomas en los que aparecen, ese significado típicamente estaría determinado por el de otras conectivas. Pero el interaccionismo no es sugerido sólo por los sistemas axiomáticos tipo Hilbert. En el cálculo de secuentes que Beall usa para presentar **FDE**, una de las reglas básicas para la negación es la

[16] Para una discusión más reciente del debate maximalismo-minimalismo, véanse [24] y [17] .

[17] Para una discusión más extensa del separatismo y el interaccionismo, véanse [49, p. 93] y [17] .

siguiente:

$$(\sim \wedge \mathrm{R})\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, \sim A, \sim B}{\Gamma \vdash \Delta, \sim (A \wedge B)}$$

Tal regla es claramente interaccionista: si el significado de la negación estuviera determinado por esa regla, dependería del significado de la conjunción.[18]

El separatismo en teoría de pruebas es más común. Por ejemplo, en sistemas de secuentes de Gentzen y en sistemas de deducción natural es habitual encontrar reglas en las que sólo aparece una sola conectiva. También es común en teoría de modelos. Por ejemplo, las condiciones de evaluación de cada conectiva casi siempre son dadas en términos independientes de otras conectivas, como en la lógica **FDE**. No obstante, también hay teorías de modelos interaccionistas, como la semántica bivaluada de Suszko para la lógica trivaluada de Łukasiewicz (véase [53]) en la que encontramos, por ejemplo, las siguientes condiciones de evaluación para el condicional, en las que también aparece la negación:
Si $v(A) = v(B)$ y $v(\sim A) = v(\sim B)$ entonces $v(A \to B) = 1$
Si $v(A) = v(B)$ y $v(\sim A) \neq v(\sim B)$ entonces $v(A \to B) = v(\sim A)$[19]

Como ya dijimos, Beall presupone una perspectiva similar al separatismo en teoría de pruebas, pero no tanto acerca del significado de las conectivas sino en cuanto a su logicidad. Según ese tipo de separatismo, una conectiva es lógica si y sólo si las reglas básicas en las que aparece no contienen otras conectivas. Beall no ofrece ninguna razón para defender este tipo de separatismo. Como vimos, en lugar de concluir la inexistencia de la negación lógica, pudo o bien haber considerado una presentación alternativa de **FDE** o haber cuestionado su concepción separatista de la logicidad de una conectiva.

Conclusiones

En este capítulo discutimos dos razones para dudar de la primera premisa en el argumento de Beall. La primera razón es que hay reglas para la negación en las que no aparecen otras conectivas en marcos de secuentes diferentes al

[18] Aunque Beall no trata explícitamente del tema del significado de las conectivas, que las reglas para la negación tengan esta característica es parte de lo que lleva a Beall a sostener que no hay negación lógica.

[19] Otro ejemplo de esto son las semánticas bivaluadas desarrolladas por da Costa y Alves [14] para las lógicas $\mathbf{C}_n$.

considerado por Beall, pero estas reglas no expresan exclusividad y exhaustividad. La segunda razón dice que no es verdad que la negación tenga que ser excluyente o exhaustiva. La negación bien puede ser involutiva, es decir, intercambiar el valor de verdad por el de falsedad (y viceversa), y ésta es una restricción interesante sobre la negación.

De haber un argumento sólo en contra de la negación lógica, éste tendría que considerar todas las caracterizaciones que se han dado de la negación lógica. Beall sólo considera una de esas caracterizaciones, y por eso su argumento falla.

Capítulo 2

Tres enfoques sobre la conexividad

Introducción

En este capítulo discuto tres enfoques sobre las lógicas conexivas con lógicas modales veritativo-funcionales y dos tipos de negación. El primer enfoque es el de Lewis y Langford, con su definición del condicional en términos de consistencia. El segundo enfoque es el de Wansing, con su reformulación de la condición de falsedad estándar para el condicional. El tercer enfoque es el de Égré y Politzer, con su propuesta modalizada —$A \to \Diamond \sim B$— para la negación del condicional. Exploraré si hay una manera de relacionar estos tres enfoques en un mismo marco lógico.

Como marco metodológico utilizaré el trabajo de Luis Estrada González [22] para relacionar la connexividad con el posibilismo, la tesis según la cual todo es posible. Utilizando un fragmento de la lógica **LP** expandido con un condicional especial, Estrada González relaciona el enfoque connexivo de Lewis y Langford con la tesis de Nelson de que toda proposición es autoconsistente. Esta relación ha tenido como subproducto la distinción de diversos operadores modales veritativo-funcionales. Mi procedimiento será emplear dichos operadores para evaluar la fórmula que expresa la condición de falsedad en el enfoque de Égré y Politzer. Mostraré que, al usar la denominada modalidad de Béziau, $\Diamond_B$, es posible relacionar en terminos de derivabilidad la propuesta de la negación del condicional en el enfoque de Wansing con la propuesta de negación del condicional en el enfoque de Égré y Politzer.

2.1. Los tres enfoques sobre las lógicas conexivas

Las lógicas conexivas son lógicas en las cuales los siguientes esquemas son válidos:

$\sim (A \rightarrow \sim A)$

$\sim (\sim A \rightarrow A)$

$(A \rightarrow B) \rightarrow \sim (A \rightarrow \sim B)$

$(A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim (A \rightarrow B)$

mientras que el siguiente esquema es inválido:

$(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

En un artículo reciente, Hitoshi Omori [36] logra relacionar dos enfoques sobre las lógicas conexivas. El primer enfoque lo proporciona Heinrich Wansing al presentar una condicion de falsedad no estándar para el condicional [55]. El segundo enfoque es el de Paul Égré y Guy Politzer, quienes proponen que la negación del condicional tiene que estar modalizado internamente [58].

Wansing considera que la condición de falsedad de un condicional es representada por el esquema $(A \rightarrow \sim B)$ más que por el esquema $(A \wedge \sim B)$. Por su parte, Égré y Politzer proponen los esquemas modalizados $(A \wedge \Diamond \sim B)$ $(A \rightarrow \Diamond \sim B)$ como esquemas equivalentes al esquema $\sim (A \rightarrow B)$, y los llaman "formas débiles", para distinguirlos de los esquemas más comúnes que son los que Wansing considera, a los que llaman "formas fuertes".

Omori relaciona los dos enfoques considerando como negación del condional al esquema $(A \rightarrow \Diamond \sim B)$, pues bajo ciertas condiciones el enfoque de Wansing resulta ser un caso límite del enfoque de Égré y Politzer.

Desde un frente distinto, Estrada González ha relacionado las lógicas conexivas con el posibilismo [17] usando como marco teórico el trabajo de Everett Nelson, sirviéndose particularmente de su concepción de la (auto)consistencia [32], y el trabajo de C.I. Lewis y C.H. Langford en cuanto a su concepción de la posibilidad [26].

Considérese la conectiva binaria de consistencia $\circ$ [30]. Lewis y Langford definieron la posibilidad en términos de consistencia —$\Diamond(A \wedge B) =_{def} (A \circ B)$— y, mediante la definición Lewisiana del condicional (estricto) en términos de posibilidad —$(A \rightarrow B) =_{def} \sim \Diamond(A \wedge \sim B)$— el condicional en téminos de consistencia —$(A \rightarrow B) =_{def} \sim (A \circ B)$—. Nelson, a su vez, propuso que toda proposición es autoconsistente, preservando la definición del condicional en términos de consistencia, pero rechazando la interdefinibilidad de consistencia y posibilidad.

Estrada González conecta ambas propuestas usando un fragmento de la lógica **LP** aumentado con un condicional especial. La conexión de esas perspectivas ha tenido como subproducto la distinción de varias modalidades veritativo-funcionales.

Omori demostró que cualquier lógica que satisfaga los siguientes esquemas
$(A \to A)$
$(A \leftrightarrow A)$
$((A \to A)) \leftrightarrow B$
$(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
las siguientes reglas de inferencia

$$\frac{(A \to B), A}{B} \qquad\qquad \frac{(A \to B)}{\Diamond A \to \Diamond B}$$

más la condición de falsedad de Wansing sugerida por el esquema $\sim (A \to B) \leftrightarrow (A \to \sim B)$
y la versión condicional modalizada de Égré y Politzer
$\sim (A \to B) \leftrightarrow (A \to \Diamond \sim B)$
tal lógica tiene $\Diamond B \leftrightarrow B$ como esquema válido, lo que significa que si se añade $\Diamond B$ como un esquema válido, equivalente a $\sim (B \to \sim B)$ en el marco de Lewis y Langford, entonces se obtiene una lógica trivial. En consecuencia, no es posible tener el enfoque de Wansing como el de Égré y Politzer dentro de un mismo marco no trivial.

En este capítulo mostraré que es sí es posible retener ambos enfoques considerando un marco trivaluado de lógica modal, lo que tiene algunas consecuencias para la apreciación negativa de las modalidades veritativo-funcionales trivaluadas, como la que ofrece Béziau. La estructura del capítulo es la siguiente. En la sección 2 presento algunos preliminares técnicos. En la sección 3 presento las condiciones de evaluación para las diferentes modalidades y la evaluación de las fórmulas equivalentes a la negación del condicional. Finalmente, en la sección 4 discuto algunas implicaciones de estos resultados para la modalidad trivaluada de Béziau.

2.2. Preliminares

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con un conjunto numerable $PROP = \{p_1, p_2, p_3, ...\}$ de variables proposicionales y con las conectivas $\to$ y $\sim$, Las fórmulas son definidas de manera usual. Las letras mayúsculas A, B, C, etcétera, son usadas como metavariables para fórmulas. Usaré $FORM$ para denotar el conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$.

Sea $V = \{T, *, F\}$ un conjunto de valores de verdad, ordenados como $F{<}*{<}T$, con $D^+ = \{T, *\}$ y $D^- = \{F\}$ como conjunto de valores designados y antidesignados, respectivamente. Una función $v : PROP \to V$ es una asignación de valores de verdad a las variables proposicionales que puede ser extendida a todas las fórmulas siguiendo las condiciones mostradas en las siguientes tablas:

A	$\sim A$	B	$A \to B$
T	F	T	T
T	F	$*$	$*$
T	F	F	F
$*$	$*$	T	T
$*$	$*$	$*$	$*$
$*$	$*$	F	F
F	T	T	$*$
F	T	$*$	$*$
F	T	F	$*$

Es decir que el valor del condicional es el valor del consecuente si el antecedente tiene un valor designado; de otro modo, tiene el valor $*$. La negación es como en **LP**, es decir

A	$\sim A$
T	F
$*$	$*$
F	T

Se puede introducir otra negación, $\neg$, mas fuerte que $\sim$, con las siguientes condiciones de evaluación:

A	$\sim A$
T	F
$*$	F
F	T

Distinguiré los siguientes casos: A y B son equivalentes si y sólo si tienen los mismos valores bajo cualquier asignación. A y B son interderivables si y sólo si siempre que una de ellas es premisa, la otra es conclusión en un argumento válido. A y B son coimplicativas una a otra si y sólo si $A \to B$ y $B \to A$ son siempre designadas.

2.3. Unas cuantas modalidades

Todas las distintas modalidades consideradas en lo que sigue son definidas como negaciones de condicionales con esquemas implicando su propia negación, como se indica bajo cada modalidad. Los subíndices ligados a cada modalidad distinguen el tipo de modalidad que será empleada. Las condiciones de evaluación para cada modalidad son el resultado de evaluar sus condicionales respectivos y negaciones.

A	$\Diamond_L A$ $\sim (A \to\sim A)$	$\sim \Diamond_L A$ $\sim\sim (A \to\sim A)$	$\Diamond_L \sim A$ $\sim (\sim A \to\sim\sim A)$	$\sim \Diamond_L \sim A$ $\sim\sim (\sim A \to\sim\sim A)$
T	T	F	$*$	$*$
$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
F	$*$	$*$	T	F

Estas son las modalidades de Lewis y Langford evaluadas en este marco trivaluado. Es fácil ver que cualesquiera fórmulas con la forma $\Diamond_L A$ son designadas bajo cualquier asignación, de ahí su relación con el posibilismo. Las siguientes modalidades usan, por el contrario, la negación fuerte:

A	$\Diamond_{Lc} A$ $\neg(A \to \neg A)$	$\neg\Diamond_{Lc} A$ $\neg\neg(A \to \neg A)$	$\Diamond_{Lc}\neg A$ $\neg(\neg A \to \neg\neg A)$	$\neg\Diamond_{Lc}\neg A$ $\neg\neg(\neg A \to \neg\neg A)$
T	T	F	F	T
$*$	T	F	F	T
F	F	T	T	F

Las modalidades de abajo son introducidas por Béziau en [10] y son obtenidas combinando las dos negaciones en la no-posibilidad, imposibilidad, y necesidad.

A	$\Diamond_B A$ $\neg(A \to \neg A)$	$\sim \Diamond_B A$ $\sim \neg(A \to \neg A)$	$\Diamond_B \sim A$ $\neg(\sim A \to \neg \sim A)$	$\sim \Diamond_B \sim A$ $\sim \neg(\sim A \to \neg \sim A)$
T	T	F	F	T
$*$	T	F	T	F
F	F	T	T	F

Las siguientes modalidades también se obtienen al mezclar las dos negaciones en la no-posibilidad, imposibilidad y la necesidad, pero empezando con la posibilidad definida con $\sim$.

A	$\Diamond_L A$ $\sim (A \to\sim A)$	$\neg\Diamond_L A$ $\neg \sim (A \to\sim A)$	$\Diamond_L \neg A$ $\sim (\neg A \to\sim \neg A)$	$\neg\Diamond_L \neg A$ $\neg \sim (\neg A \to\sim \neg A)$
T	T	F	$*$	F
$*$	$*$	F	$*$	F
F	$*$	F	T	F

2.4. La conexión

En lo que resta de este capítulo evaluaré los esquemas $A \to\sim B$ y $\sim (A \to B)$ y ofreceré algunos comentarios de los resultados: lo hago primero sin tomar en cuenta las modalidades, y después con cada modalidad.

A	B	$\sim B$	$A \to B$	$A \wedge \sim B$	$A \to\sim B$	$\sim (A \to B)$	$\neg(A \to B)$
T	T	F	T	F	F	F	F
T	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	F
T	F	T	F	T	T	T	T
$*$	T	F	T	F	F	F	F
$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	F
$*$	F	T	F	$*$	T	T	T
F	T	F	$*$	F	$*$	$*$	F
F	$*$	$*$	$*$	F	$*$	$*$	F
F	F	T	$*$	F	$*$	$*$	F

Es fácil ver que $A \to\sim B$ y $\sim (A \to B)$ son equivalentes. Ahora procedo con las distintas modalidades:

A	B	$\Diamond_{Lc}\neg B$	$A \to B$	$A \wedge \Diamond_{Lc}\neg B$	$A \to \Diamond_{Lc}\neg B$	$\sim (A \to B)$	$\neg(A \to B)$
T	T	F	T	F	F	F	F
T	$*$	F	$*$	F	F	$*$	F
T	F	T	F	T	T	T	T
$*$	T	F	T	F	F	F	F
$*$	$*$	F	$*$	F	F	$*$	F
$*$	F	T	F	$*$	T	T	T
F	T	F	$*$	F	$*$	$*$	F
F	$*$	F	$*$	F	$*$	$*$	F
F	F	T	$*$	F	$*$	$*$	F

A pesar de que $\sim (A \to B)$ y $(A \wedge \Diamond_{Lc}\neg B)$ no son equivalentes, hay una interacción interesante entre $\neg(A \to B)$ y $(A \wedge \Diamond_{Lc}\neg B)$. Esos esquemas no son equivalentes porque difieren en la asignación de un valor (en la sexta hilera). Sin embargo, en ambos casos el valor es designado. Considerando que la relación de consecuencia lógica es una relación de preservación de valores designados (de premisas a conclusíón), $\neg(A \to B)$ implica $(A \wedge \Diamond_{Lc}\neg B)$ y viceversa, es decir, son fórmulas interderivables. Es decir que la negación fuerte del condicional se relaciona con una versión conyuntiva débil.

A	B	$\Diamond_B \sim B$	$A \to B$	$A \wedge \Diamond_B \sim B$	$A \to \Diamond_B \sim B$	$\sim (A \to B)$	$\neg(A \to B)$
T	T	F	T	F	F	F	F
T	$*$	T	$*$	T	T	$*$	F
T	F	T	F	T	T	T	T
$*$	T	F	T	F	F	F	F
$*$	$*$	T	$*$	$*$	T	$*$	F
$*$	F	T	F	$*$	T	T	T
F	T	F	$*$	F	$*$	$*$	F
F	$*$	T	$*$	F	$*$	$*$	F
F	F	T	$*$	F	$*$	$*$	F

Al igual que en el caso previo, los esquemas $(A \to \Diamond_B \sim B)$ y $\sim (A \to B)$ no son equivalentes porque se diferencian en la asignación de dos valores (en la segunda y quinta hilera), pero en ambos casos los valores son designados, así que son interderivables. Más aún, ambos esquemas son coimplicativos, porque $(A \to \Diamond_B \sim B) \to \sim (A \to B)$ y $\sim (A \to B) \to (A \to \Diamond_B \sim B)$ son siempre válidos, como el lector facilmente podrá verificar.

$\Diamond_B$ es entonces la modalidad que puede relacionar dos enfoques **sobre** la conexividad, porque si $\sim (A \to B)$ es equivalente con $(A \to \sim B)$, entonces $(A \to \sim B)$ y $(A \to \Diamond_B \sim B)$ son interderivables también. Es interesante notar que esta era la modalidad que, de acuerdo con Béziau, fue considerada por Łukasiewicz en un sistema donde nada es necesario pero no todo es posible. Béziau considera la siguiente tabla de verdad[1] para la necesidad $\Box$, con $D^+ = \{T\}$ y $D^- = \{*, F\}$:

$\Box A$	A	$\Diamond A$
D^-	F	D^-
D^-	$*$	T
D^-	T	T

Es decir, la necesidad puede tener sólo valores antidesignados. Béziau afirma que en una lógica con dos valores antidesignados, la necesidad puede tener sólo valores antidesignados, porque de esta manera se puede obtener una lógica modal básica, es decir, una lógica en la cual los siguientes esquemas de inferencia son válidos.

[1]Estrictamente, esta no es una tabla de verdad, sino un conjunto de tablas de verdad, ya que los valores en el conjunto de valores antidesignados puede ser precisificado de diversas maneras. Por ejemplo, si A es F, el valor de $\Box A$ es o bien $*$ o F; esto es así para todos los valores que recibe A.

$\Box A \vdash A$	$A \nvdash \Box A$
$A \vdash \Diamond A$	$\Diamond A \nvdash A$

Sin embargo, en el marco de Estrada González, la necesidad de Béziau —definida como $\Box_B =_{def} \sim \Diamond_B \sim$—es al menos verdadera en un caso, como se muestra en la siguiente tabla:

$\Box_B A$	A	$\Diamond_B A$
D^-	F	D^-
D^-	$*$	T
T	T	T

Esta asignación para la necesidad no tiene que ver con la elección del conjunto de valores designados y antidesignados (en la perspectiva de Béziau, la elección de dos valores designados significa la asignación de sólo valores designados para la posibilidad, lo que tampoco sucede dentro del marco de Estrada González).

Me parece que la distribución de los valores en la tabla de Estrada González es más natural, porque si la distribución de valores para la posibilidad es el resultado de la siguiente condición:

$v(\Diamond_B A) = F$ (o antidesignado) si y sólo si $v(A) = F$, y $v(\Diamond_B A) = T$ en otro caso

se esperaría que la distribución de valores para la necesidad sea el resultado de su condición dual:

$v(\Box_B A) = T$ si y sólo si $v(A) = T$ y $v(\Diamond_B A) = F$ (o antidesignado) en cualquier otro caso.

Conclusiones

Después de haber presentado los esquemas que Égré y Politzer consideran equivalentes con la negación del condicional, y las distintas modalidades veritativo-funcionales producto del trabajo de Estrada González, evalué la negación de esos esquemas con esas modalidades. El resultado es que el enfoque de Wansing, el de Lewis y Langord y finalmente el de Égré y Politzer pueden ser relacionados con la modalidad $\Diamond_B$: $(A \rightarrow \sim B)$ y $(A \rightarrow \Diamond \sim B)$ son interderivables.

Capítulo 3

Un sistema de tableaux para la lógica paraconsistente C_1 basado en las semánticas de traducciones posibles

En este capítulo presento un sistema de tableaux llamado **Ms** para la lógica paraconsistente $\mathbf{C}_{\mathit{1}}$. Este sistema está basado en la semántica de traducciones posibles. Discuto su construcción comparándolo con los sistemas de tableaux para la lógica clásica y la lógica **P1**.

Introducción

En este capítulo quiero responder la siguiente pregunta: ¿es posible obtener reglas de tableaux para la lógica paraconsistente $\mathbf{C}_{\mathit{1}}$ a partir de sus cuasimatrices?

Una lógica paraconsistente es una lógica en la cual no vale el esquema de inferencia $A \wedge \neg A \vdash B$, para cualesquier fórmulas A y B. Las reglas de tableaux son esquemas que muestran las condiciones de evaluación de las conectivas, por ejemplo: cuándo es que las conectivas son verdaderas y cuándo es que son falsas. Las cuasimatrices pueden considerarse como un caso particular de una matriz, en las cuales no hay un arreglo predefinido de renglones. La tesis central de esta investigación es que sí es posible obtener reglas de tableaux para dicha lógica a partir de las cuasimatrices.

En [27] Marconi presentó sistemas de tableaux semánticos al estilo de los tableaux de Beth para $\mathbf{C_{\mathit{1}}}$.[1]. En [9] Buchsbaum y Pequeno presentaron un método de prueba de tableaux analítico para la lógica de primer orden basada en $\mathbf{C_{\mathit{1}}}$. En [12] Carnielli y Lima-Marques introdujeron un sistema de tableaux *à la* Smullyan para una variante de $\mathbf{C_{\mathit{1}}}$, y mostraron que el sistema es completo y decidible. En [15] D'Ottaviano y Castro presentaron sistemas de tableaux para la jerarquía de lógicas paraconsistentes $\mathbf{C}_n$ ($1\leq n<\omega$).

Cada uno de los sistemas que se han ofrecido hasta ahora para $\mathbf{C_{\mathit{1}}}$ se basan en distintas intuiciones sobre esta lógica, pero ninguna de esas intuiciones tiene que ver con la obtención de reglas a partir de las cuasimatrices. En este trabajo no hablaré de esos sistemas ni de las motivaciones de transfondo que llevaron a su contrucción

Esta investigación es importante porque explora si hay una manera sencilla de obtener reglas de tableaux para la lógica $\mathbf{C_{\mathit{1}}}$, tal como sucede con otras lógicas multivaluadas y veritativo-funcionales. Si esto fuera posible, esto sugeriría que, independientemente de si se considera una lógica que sea veritativo-funcional, habría una manera uniforme de obtener reglas de tableaux.

Reitero nuevamente que la tesis de esta investigación es que es posible obtener reglas de tableaux para la lógica $\mathbf{C_{\mathit{1}}}$ a partir de sus cuasimatrices. Para mostrar que es posible obtener reglas de tableaux para $\mathbf{C_{\mathit{1}}}$ utilizaré las semánticas de traducciones posibles [28] (desde ahora abreviadas como STP), un método que consiste en la obtención de la semántica de una lógica dada traduciéndola a otra.

La estructura del trabajo es la siguiente. En la primera parte presento la lógica $\mathbf{C_{\mathit{1}}}$ desde un punto de vista modelo-teorético. En la segunda parte discuto la obtención de reglas de un sistema de tableaux para la lógica clásica y para la lógica **P1**. En la tercera parte expongo STP y analizo si es posible obtener reglas de tableaux para $\mathbf{C_{\mathit{1}}}$ utilizando este medio. En la cuarta parte presento los resultados para una prueba de equivalencia de un sistema de tableaux basado en STP con $\mathbf{C_{\mathit{1}}}$ y señalo cómo es posible obtener reglas de tableaux para $\mathbf{C_{\mathit{1}}}$ a partir de sus cuasimatrices.

[1] Para más detalles de estos sistemas véase [33]

3.1. $\mathbf{C}_{\mathit{1}}$

Existen diferentes sistemas de lógica paraconsistente. Entre estos sistemas destaca el sistema de lógica paraconsistente $\mathbf{C}_{\mathit{1}}$. Este sistema fue creado por Newton da Costa en 1963 [13] junto con una jerarquía de sistemas paraconsistentes $\mathbf{C}_n$ ($1\leq n<\omega$). El sistema $\mathbf{C}_{\mathit{1}}$ permite el estudio de las contradicciones, y lo hace por medio de axiomas y una teoría de modelos peculiar. Digo que la teoría de modelos es peculiar porque su característica más distintiva es que no es veritativo-funcional, aun cuando sus interpretaciones sean bivaluaciones. La teoría de modelos fue introducida en 1976 por Newton da Costa junto con Elías Alves [14].

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional de orden cero con un conjunto finito de variables proposicionales $PROP = \{p_1, p_2, p_3, ...\}$ y con el conjunto de conectivas $\{\circ, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$. Una fórmula de $\mathcal{L}$ es una sucesión de signos que satisface una de las siguientes condiciones:

- p_n es una fórmula (para todo n)
- Si A y B son fórmulas, también lo son $\circ A$, $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$
- Ninguna otra sucesión de signos es una fórmula.

Las letras mayúsculas A, B, C, etcétera, son usadas como metavariables para fórmulas. Usaré $FORM$ para denotar el conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$. Las fórmulas con la forma $\circ A$ son derivadas y se definen como $\circ A =_{def} \neg(A \wedge \neg A)$. Las asignaciones de las fórmulas son las siguientes:

1. $v(A) = 0 \Rightarrow v(\neg A) = 1$
2. $v(\neg\neg A) = 1 \Rightarrow v(A) = 1$
3. $v(\circ B) = v(A \rightarrow B) = v(A \rightarrow \neg B) = 1 \Rightarrow v(A) = 0$
4. $v(A \rightarrow B) = 1 \Leftrightarrow v(A) = 0$ ó $v(B) = 1$
5. $v(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow v(A) = v(B) = 1$
6. $v(A \vee B) = 1 \Leftrightarrow v(A) = 1$ ó $v(B) = 1$
7. $v(\circ A) = v(\circ B) = 1 \Rightarrow v(\circ(A \wedge B)) = v(\circ(A \vee B)) = v(\circ(A \rightarrow B)) = 1$

El símbolo '$\circ$' indica un buen comportamiento de la fórmula respecto del esquema de no contradicción, es decir, si una fórmula tiene '$\circ$' dicha fórmula y su negación no pueden ser verdaderas.

Las asignaciones de $\mathbf{C_1}$ tienen como corolario un método de decisión que no es representable por una matriz finita, es decir, no ofrecen un arreglo finito de filas y columnas tal como ocurre con la lógica proposicional clásica u otras lógicas veritativo funcionales: por este motivo se les ha dado el nombre de 'cuasimatrices'.

La construcción de las cuasimatrices procede mediante instrucciones que no son muy intuitivas: por ejemplo, se pide que para asignar valor a un enunciado negado molecular se atienda a los valores de los enunciados atómicos y de sus negaciones. Estas son las instrucciones:

> "A fin de construir una cuasimatriz para una fórmula A el procedimiento es el siguiente:
>
> 1. Haz una lista de todas las variables proposicionales que ocurren en A y colócalas en una línea.
>
> 2. Bajo la lista de las variables proposicionales coloca en líneas sucesivas todas las posibles combinaciones de '0' y '1' que pueden ser atribuidas a estas variables.
>
> 3. Haz una lista de todas las negaciones de variables proposicionales y calcula su valor en cada línea del modo siguiente: si a una variable le es dado el valor '0', la negación obtiene el valor '1'. Si a una variable le fue dado el valor '1', bifurca la línea en que esto ocurrió, escribiendo en la primera parte el valor '0' y en la segunda parte el valor '1' para la negación. Toda vez que hay una bifurcación, los valores que están del lado izquierdo son los mismos para las dos líneas.
>
> 4. Haz una lista y calcula para cada línea el valor de cada subfórmula de A y, si es una subfórmula propia, de su negación, cuyas subfórmulas propias y sus negaciones habían sido ya enlistadas y calculadas, del modo siguiente:
>
> i) Cuando no haya negaciones involucradas, procede como en una tabla de verdad del cálculo proposicional clásico;
>
> ii) Si cualquiera de las fórmulas bajo consideración es una negación y entonces de la forma $\neg A$', escribe el valor '1' bajo ella en

> las líneas en las cuales A' tiene el valor '0'. En las líneas en las cuales A' tiene el valor '1' procede del modo siguiente:
>
> (1) Si A' es de la forma $\neg B$, revisa si el valor de B es igual al valor de $\neg B$. Si ese es el caso, bifurca la línea, escribiendo el valor '0' en la primera parte, y en la segunda, el valor '1'. Si el valor de B es diferente del valor de $\neg B$, simplemente escribe el valor '0'.
>
> (2) Si A' es de la forma $B \S C$, donde § es $\rightarrow$, $\vee$ ó $\wedge$, hay dos casos a considerar:
>
> (2.1) A' es de la forma $D \wedge \neg D$ [o de la forma $\neg D \wedge D$].[2] En este caso escribe el valor '0' para la fórmula $\neg A$'.
>
> (2.2) A' no es de la forma $D \wedge \neg D$ [ni de la forma $\neg D \wedge D$]. En este caso verifica si el valor de B es igual al valor de $\neg B$, o si el valor de C es igual al valor de $\neg C$. Si esto es verdadero, bifurca la línea, escribiendo el valor '0' en la primera parte y, en la segunda, el valor '1'. Si, por el contrario, el valor de B es diferente al valor de $\neg B$ y el valor de C es diferente al valor de $\neg C$, simplemente escribe el valor '0"'. ([14, págs. 624-625], mi traducción).

La intención detrás de estas instrucciones es tomar en cuenta la posibilidad de que dos fórmulas sean verdaderas, una siendo la negación de la otra. Este tipo de asignaciones son llamadas 'singulares', es decir, cuando $v(A) = v(\neg A) = 1$, en contraposición a las asignaciones que son llamadas 'normales', cuando $v(A) \neq v(\neg A)$. La lógica paraconsistente tiene los dos tipos de asignaciones, mientras que la lógica clásica sólo contiene asignaciones normales.

La evaluación de las fórmulas moleculares positivas —es decir, sin negaciones— procede como en la lógica clásica. La evaluación de las fórmulas moleculares negativas está determinada por el valor de su correspondiente fórmula positiva cuando el valor es '0' (por la primera condición de la bivaluación). Pero cuando la fórmula positiva es '1', existe la posibilidad de que la correspondiente negativa sea '1' o sea '0'; todo depende del valor de las fórmulas constituyentes: si alguna de ellas tiene una asignación singular, afecta la fórmula de la cual es parte. Por eso hay una bifurcación, en la cual se

[2] Los corchetes son míos, el contenido, de N. da Costa. João Marcos [28, pág. 49] señala que el contenido de los corchetes es incorrecto, tanto en este caso como en el siguiente. Señalar esto no afectará el resto de la discusión.

considera la posibilidad de que la fórmula también reciba una asignación singular. En los casos en los que los componentes tienen asignaciones normales, la evaluación se realiza como en la lógica clásica.

Un ejemplo de una cuasimatriz es el siguiente:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$B \wedge \neg B$	$A \to (B \wedge \neg B)$	$(A \to (B \wedge \neg B)) \to \neg A$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
			1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
		1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1
			1	1	1	0
		1	0	0	0	1
			1	1	1	1

Dado que hay un caso en el que la fórmula es '0', esta fórmula no es válida en esta lógica.

3.2. Los tableaux semánticos

Una forma aproximadamente sencilla de acercarse a una lógica puede ser por medio de los tableaux (semánticos). Los tableaux se pueden obtener generalmente de las asignaciones de valores y las evaluaciones de una fórmula.

Consideraré por caso la lógica clásica. La conjunción es verdadera cuando el primer y el segundo conyunto son verdaderos. Esto se puede representar de la siguiente forma:

(1) $A \wedge B$
(2) A
(3) B

Y la disyunción es verdadera cuando el primer disyunto es verdadero o cuando el segundo disyunto es verdadero. Esto se puede representar de la siguiente forma:

(1) $A \vee B$

(2) A $\quad$ B

Si se quiere probar la validez de un argumento se procede por reducción al absurdo: las premisas se suponen verdaderas y la conclusión no. En la lógica clásica, esto último equivale a decir que las premisas son verdaderas y la conclusión es falsa. Si se trata de averiguar si una fórmula es teorema, la fórmula se supone falsa. Para cualquier caso, tanto en la conclusión como en la fórmula sola, se tiene que anteponer una negación.

Al final de la aplicación de las reglas, hay que llegar a una contradicción. En este caso particular, que una fórmula sea verdadera y falsa (i.e. que aparezcan dos fórmulas de la forma A y $\neg A$ a lo largo de una misma línea).

Pero esto no es especial de la lógica clásica. Considérese la lógica paraconsistente **P1** (creada por Sette [50]), la cual considera tres valores de verdad, $\{0,1,2\}$, pero admite sólo dos como valores designados, a saber, $\{0,1\}$. Las asignaciones y evaluaciones de las conectivas se pueden resumir en las siguientes tablas: [3]

$\rightarrow$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	2
2	0	0	0

	$\neg$
0	2
1	0
2	0

$\vee$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	0
2	0	0	2

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	0	2
2	2	2	2

Cuadro 3.1: Matrices de **P1**

A diferencia del caso de la lógica clásica, no basta con establecer una simple fórmula. Los valores que preservan tanto la validez como la invalidez se tienen que distinguir: por eso se agregan números a la derecha. Por ejemplo, si se quiere considerar el caso en el que la implicación no es designada (i.e. en el caso en el que tiene el valor '2'), hay dos posibilidades: al antecedente le es asignado '0' y al consecuente '2' o al antecedente le es asignado '1' y al consecuente '2'. Esto se puede representar de la siguiente forma:

[3] La lectura de una tabla comienza con hilera y termina con columna. Por ejemplo, para leer el condicional primero se considera el antecedente (cuyo valor es el que se le asigne en la hilera) y después el consecuente (con el valor que se le asigne en la columna): si el antecedente tiene '1' y el consecuente '2', el condicional es '2'.

$$
\begin{array}{lcc}
(1) & \multicolumn{2}{c}{A \rightarrow B/2} \\
(2) & A/0 & A/1 \\
(3) & B/2 & B/2
\end{array}
$$

Ahora las premisas se suponen con valores designados y la conclusión con valores no designados a fin de comprobar la validez de un argumento. Algo similar ocurre si se quiere comprobar la teoremicidad de una fórmula.

Un ejemplo es el siguiente: $A \rightarrow B \vdash \neg A \vee B$

$$
\begin{array}{lcccc}
(1) & \multicolumn{4}{c}{A \rightarrow B} \\
(2) & \multicolumn{4}{c}{\neg A \vee B/2} \\
(3) & \multicolumn{4}{c}{\neg A/2} \\
(4) & \multicolumn{4}{c}{B/2} \\
(5) & \multicolumn{4}{c}{A/0} \\
(6) & A \rightarrow B/1 & \multicolumn{3}{c}{A \rightarrow B/0} \\
(7) & * & A/2 & B/0 & B/1 \\
 & & * & * & *
\end{array}
$$

Dado que la única premisa puede tener uno de los dos valores designados, se tiene que considerar dos casos separados, como en el renglón 6. Ahora bien, según el cuadro 3.1 no hay ninguna evaluación para el condicional que dé el valor '1' y por eso el lado izquierdo se cierra. El caso restante procede de la manera esperada.

Este método de representación de valores resulta efectivo para muchas lógicas que son no clásicas y veritativo-funcionales, es decir, aquellas lógicas que determinan el valor de sus fórmulas conjuntivas, disyuntivas, negativas e implicativas a partir de las fórmulas que las componen. Pero esto no es tan sencillo para la lógica paraconsistente $\mathbf{C}_{\mathit{1}}$ ¿Cómo se podría proceder con un caso como el siguiente?

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$	$A \vee B$	$\neg(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow (A \vee B)$	
0	0	1	1	1	0	0	1	**1**
0	1	1	0	0	1	1	1	**2**
			1	1	0	1	1	**3**
					1	1	1	**4**
1	0	0	1	0	1	1	1	**5**
		1	1	1	0	1	1	**6**
					1	1	1	**7**
1	1	0	0	0	1	1	1	**8**
			1	0	1	1	1	**9**
		1	0	0	1	1	1	**10**
			1	1	0	1	1	**11**
					1	1	1	**12**

De acuerdo con la sexta línea, la fórmula $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ es falsa si A es verdadera y B es falsa. Pero según la quinta línea la fórmula $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ es verdadera exactamente en ese caso.

3.3. Semánticas de traducciones posibles

'Semánticas de traducciones posibles' es un nombre para un método que consiste en la traducción de las fórmulas de una lógica a otra. De manera más precisa, una semántica de traducciones posibles para una lógica $\mathcal{L}$ consiste en el par **TP**$=<\{\mathcal{L}_t\}_{t \in |T|}, T>$, donde $\mathcal{L}_t$ es una lógica en la cual está definida la noción modelo-teorética de interpretación, T es el conjunto de funciones de traducción que tiene como dominio las fórmulas de $\mathcal{L}$ y como codominio las fórmulas de $\mathcal{L}_t$.

El método fue creado por Walter Carnielli [11], usado para una variante de la jerarquía de cálculos $\mathbf{C}_n$ ($1 \leq n < \omega$) y aplicado en detalle para $\mathbf{C}_1$ (y $\mathbf{C}_n$) en [28]. La idea básica del método es traducir las fórmulas de una lógica en otra en la que las asignaciones de los valores de verdad y las evaluaciones comprenda más de dos valores de verdad. Intuitivamente, el método sugiere que si se aplica a la lógica $\mathbf{C}_1$, se puede recuperar la veritativo-funcionalidad de $\mathbf{C}_1$ al precio de aumentar los valores de verdad. De hecho, no sólo se aumentan los valores de verdad, sino también las conectivas.

Llamaré a la lógica que es traducida —$\mathbf{C}_1$ en este caso— 'lógica interpretable', y a la lógica en donde se hace la traducción, 'lógica interpretante'. La lógica interpretante de $\mathbf{C}_1$ es **W3**, la cual destaca por el número de conectivas que posee: tres para cada conectiva binaria y dos para la conectiva unaria de la negación. Cada conectiva se distingue con un subíndice, y tienen las interpretaciones del cuadro 3.2.

$\wedge_1$	V	V-	F
V	V	V	F
V-	V-	V-	F
F	F	F	F

$\wedge_2$	V	V-	F
V	V	V-	F
V-	V	V-	F
F	F	F	F

$\wedge_3$	V	V-	F
V	V	V-	F
V-	V-	V-	F
F	F	F	F

$\vee_1$	V	V-	F
V	V	V	V
V-	V-	V-	V-
F	V	V	F

$\vee_2$	V	V-	F
V	V	V-	V
V-	V	V-	V-
F	V	V-	F

$\vee_3$	V	V-	F
V	V	V-	V
V-	V-	V-	V-
F	V	V-	F

$\rightarrow_1$	V	V-	F
V	V	V	F
V-	V-	V-	F
F	V	V	V

$\rightarrow_2$	V	V-	F
V	V	V-	F
V-	V	V-	F
F	V	V-	V

$\rightarrow_3$	V	V-	F
V	V	V-	F
V-	V-	V-	F
F	V	V-	V

	$\neg_L$
V	F
V-	F
F	V

	$\neg_C$
V	F
V-	V-
F	V

Cuadro 3.2: Matrices de **W3**

$\neg_L$ y $\neg_C$ son llamadas 'negación local' y 'negación continua', respectivamente. Los valores tienen el siguiente ordenamiento F<V-<V, donde V y F son los valores estándar, y V- representa la noción de verdad por *default*. El conjunto $\{V, V\text{-}\}$ es el de los valores designados. La intención de representar V- es tomar en consideración los casos en los que tenemos que aceptar una fórmula porque no hay información que la contradiga. Si después de agregar nueva información resulta que la fórmula es verdadera, entonces su negación es falsa (y por eso tenemos la negación local). Pero si después de agregar nueva información, la fórmula no resulta ser verdadera, su negación es igualmente verdadera por *default*. Pues si la negación fuese verdadera o falsa, esto constituiría prueba en contra o a favor de la fórmula original.

Las fórmulas de la lógica interpretable pueden tener muchas traducciones posibles. Sin embargo, los resultados de [28] limitan los tipos de traducciones a las siguientes (donde * $\in T$ —es decir, * es una función de traducción del lenguaje de $\mathbf{C}_{\mathbf{1}}$ al de **W3**):

"**Tr. 1** Para cualquier variable atómica p:

a. $p^*= p$

b. $(\neg p)^*= \neg_C p$

Tr. 2 Para fórmulas del tipo $(A\#B)$, donde $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$:

a. Si $(A\#B)$ es $(A \wedge \neg A)$, entonces $(A \wedge A)^*= (A^*\wedge_3(\neg A)^*)$, si no

b. $(A\#B)^*= A^*\#_1B^*$, si $(\neg A)^*= \neg_C A^*$ y $(\neg B)^*= \neg_L B^*$;

c. $(A\#B)^*= A^* \#_2B^*$, si $(\neg A)^*= \neg_L A^*$ y $(\neg B)^*= \neg_C B^*$;

d. $(A\#B)^*= A^* \#_3B^*$, en cualquier otro caso.

Tr 3. Para fórmulas del tipo $\neg(A\#B)$, donde $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$:

a. Si $(A\#B)$ es $(A\wedge\neg A)$, entonces $(\neg(A\wedge\neg A))^*= \neg_L(A\wedge \neg A)^*$, si no

b. $(\neg(A\#B))^*= \neg_L(A\#B)^*$, si $(\neg A)^*= \neg_L A^*$ y $(\neg B)^*= \neg_L B^*$;

c. $(\neg(A\#B))^*\in \{\neg_L(A\#B)^*, \neg_C(A\#B)^*\}$, en cualquier otro caso.

Tr 4. Para fórmulas del tipo $\neg\neg A$:

a. $(\neg\neg A)^*= \neg_L(\neg A)^*$, si $(\neg A)^*= \neg_L A^*$;

b. $(\neg\neg A)^*\in \{\neg_L(\neg A)^*, \neg_C(\neg A)^*\}$, en cualquier otro caso."([28, p.28], mi traducción).

Por ejemplo, considérese la fórmula $\neg(p_1 \wedge p_2)$. Dado que p_1 y p_2 son atómicas las negaciones deben ser continuas (por Tr.1). Si ambas negaciones son continuas, la conjunción debe ser $\wedge_3$ (por Tr. 2). Dado que $\neg_C p_1$ y $\neg_C p_2$, se concluye que la negación de $\neg(p_1 \wedge p_2)$ puede ser local o continua (por Tr. 3). Entonces, como ya se han considerado todos los casos, no hay sino dos traducciones posibles: $\neg_C(p_1 \wedge_3 p_2)$ y $\neg_L(p_1 \wedge_3 p_2)$.

Para probar que una inferencia de $\mathbf{C_{\mathit{1}}}$ es válida o que una fórmula es un teorema, se tienen que producir todas las traducciones posibles de tales expresiones en **W3**, y observar, dentro de esta lógica, si tales traducciones definen un un valor designado para la conclusión cada vez que las premisas lo tienen, o si se tienen sólo valores designados para una fórmula en caso de que se quiera saber si es un teorema.

Rescataré de este procedimiento, junto con los ejemplos de la lógica clásica y la lógica **P1**, las características para obtener las representaciones de un tableaux. Como en la lógica **P1**, tendré que señalar explícitamente el valor de una fórmula. Utilizaré la siguiente notación: '+' para 'V' , '+-' para 'V-' y '-' para 'F'.

De acuerdo con las condiciones de verdad de las fórmulas positivas, se puede proceder como en el caso clásico, es decir, se pueden utilizar las representaciones de tableaux de dicha lógica, sólo que haciendo explícito cuándo un enunciado es verdadero, como en el siguiente caso:

$$\begin{array}{cc} (1) & A \wedge B/+ \\ (2) & A/+ \\ (3) & B/+ \end{array}$$

Para los casos negativos, se utilizan las traducciones de la lógica interpretante, y se observa bajo qué casos, en sus diferentes interpretaciones, resultan ser 'V' o 'V-'. Una simple examinación de esas traducciones (como las que se exponen en el Cuadro 3.3) muestra que, se trate de negaciones locales o continuas, tienen el mismo número de V's, pero difieren en el número de V-'s; por eso es posible ceñirse a los casos de negación continua (bajo las diferentes traducciones de las otras conectivas).

Por mor de brevedad, sólo haré explícito el procedimiento de $\neg(A \wedge B)$ considerado arriba:

A	B	$A \wedge_3 B$	$\neg_C(A \wedge_3 B)$	$\neg_L(A \wedge_3 B)$
V	V	V	F	F
V	V-	V-	V-	F
V	F	F	V	V
V-	V	V-	V-	F
V-	V-	V-	V-	F
V-	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	V-	F	V	V
F	F	F	V	V

Cuadro 3.3: Tabla de valores de las traducciones posibles de $\neg(A \wedge B)$

Entonces se tienen las siguientes posibilidades para que $\neg(A \wedge B)$ sea +:

$$
\begin{array}{lccc}
(1) & & \neg(A \wedge B)/+ & \\
(2) & A/- & A/+ & A/+- \\
(3) & & B/- & B/-
\end{array}
$$

Y las siguientes posibilidades para que $\neg(A \wedge B)$ sea $+-$:

$$
\begin{array}{lccc}
(1) & & \neg(A \wedge B)/+- & \\
(2) & A/+ & A/+- & A/+- \\
(3) & B/+- & B/+ & B/+-
\end{array}
$$

Mediante un procedimiento repetitivo de este método se obtienen las siguientes reglas (estandarizaré las reglas para que sólo se representen los sígnos $+$ y $+-$, bajo el entendido de que si un enunciado es falso, su negación es verdadera, se trate de una negación local o continua):

Reglas generales

$$
\begin{array}{lccc}
(1) & & \neg(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})/+ & \\
(2) & \neg\mathfrak{A}/+ & \mathfrak{A}/+ & \mathfrak{A}/+- \\
(3) & & \neg\mathfrak{B}/+ & \neg\mathfrak{B}/+
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lccc}
(1) & & \neg(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})/+- & \\
(2) & \mathfrak{A}/+- & \mathfrak{A}/+- & \mathfrak{A}/+ \\
(3) & \mathfrak{B}/+- & \mathfrak{B}/+ & \mathfrak{B}/+-
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lc}
(1) & \neg(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})/+ \\
(2) & \neg\mathfrak{A}/+ \\
(3) & \neg\mathfrak{B}/+
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lccc}
(1) & & \neg(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})/+- & \\
(2) & \mathfrak{A}/+- & \neg\mathfrak{A}/+ & \mathfrak{A}/+ \\
(3) & & \mathfrak{B}/+- & \mathfrak{B}/+-
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcc}
(1) & \multicolumn{2}{c}{\neg(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})/+} \\
(2) & \mathfrak{A}/+ & \mathfrak{A}/+- \\
(3) & \neg\mathfrak{B}/+ & \neg\mathfrak{B}/+
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcc}
(1) & \multicolumn{2}{c}{\neg(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})/+-} \\
(2) & \mathfrak{A}/+- & \mathfrak{B}/+- \\
(3) & \mathfrak{B}/+ &
\end{array}
$$

$$\begin{array}{lcc}
(1) & \multicolumn{2}{c}{\mathfrak{A}/+-} \\
(2) & \neg\mathfrak{A}/+- & \neg\neg\mathfrak{A}/+
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcc}
(1) & \multicolumn{2}{c}{\neg\neg\mathfrak{A}/+} \\
(2) & \mathfrak{A}/+ & \mathfrak{A}/+-
\end{array}$$

$$\begin{array}{lc}
(1) & \mathfrak{A}/+ \\
(2) & \neg\neg\mathfrak{A}/+
\end{array}$$

$$\begin{array}{lc}
(1) & \neg\mathfrak{A}/+- \\
(2) & \mathfrak{A}/+-
\end{array}$$

Reglas particulares

$$\begin{array}{lc}
(1) & \mathfrak{a}/+- \\
(2) & \neg\mathfrak{a}/+-
\end{array}
\quad
\begin{array}{lc}
(1) & \neg\mathfrak{a}/+- \\
(2) & \mathfrak{a}/+-
\end{array}$$

$$\begin{array}{lc}
(1) & \neg\neg\mathfrak{a}/+ \\
(2) & \mathfrak{a}/+
\end{array}
\quad
\begin{array}{lc}
(1) & \mathfrak{a}/+ \\
(2) & \neg\neg\mathfrak{a}/+
\end{array}$$

Este sistema funciona del siguiente modo: se comienza suponiendo que la conclusion no tiene un valor designado (i.e. que es falso) mientras que las premisas (si las hay) tienen valores designados; entonces, la negación es verdadera y se comienza con la aplicación de las reglas. Las reglas generales se aplican sólo a fórmulas moleculares, y las reglas particulares se aplican sólo a las literales, por eso utilizo una notación distinta para cada tipo de fórmula. Una rama cierra si contiene dos fórmulas con la forma y signos $A/+$ y $\neg A/+$ ó $A/+-$ y $\neg A/+$ ó $\circ A/+$ y $A/+-$.

Observación 1: Las reglas correspondientes a $\neg(A\#B)/+-$ para cualquier $\# \in \{\wedge, \rightarrow, \vee\}$ colapsan en sus contrapartes positivas, es decir, se utilizan las mismas reglas para $(A\#B)/+-$. Una fórmula con la forma $\circ A$ no puede tener el sígno $+-$, y si esto sucede en una rama, debe cerrarse.

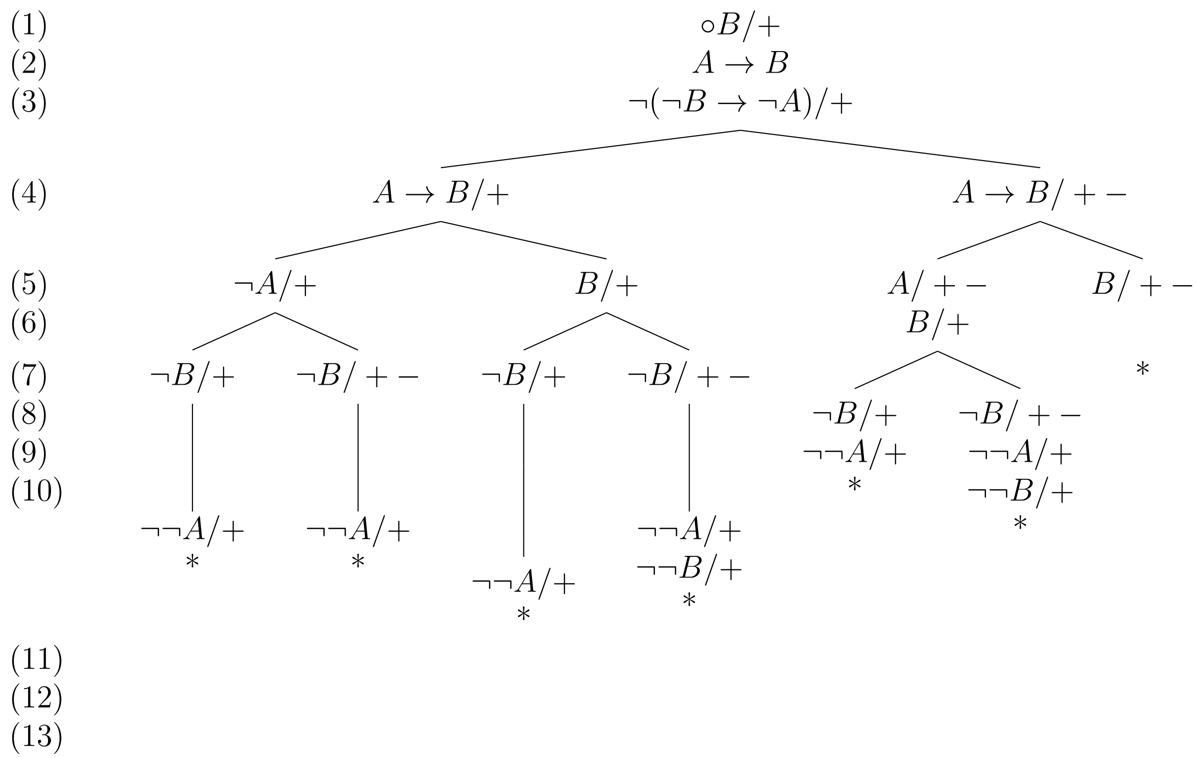
Estos son algunos ejemplos del funcionamiento de estas reglas:

$\vdash \neg(\neg\neg A \rightarrow A)$

$$\begin{array}{lcc}
(1) & \multicolumn{2}{c}{\neg(\neg\neg A \rightarrow A)/+} \\
(2) & \neg\neg A/+ & \neg\neg A/+- \\
(3) & \neg A/+ & \neg A/+ \\
(4) & * & \neg\neg\neg A/+ \\
 & & *
\end{array}$$

$\circ B,\ A \to B \vdash \neg B \to \neg A$

(En este caso hay que considerar dos casos: uno cuando $A \to B/+$ y otro cuando $A \to B/+-$. Por la observación 1, sólo vale la pena considerar el caso en el que $\circ B$ tiene $+$).



Llamaré '**Ms**' al sistema que reúne estas reglas. A continuación presento algunos teoremas para probar la equivalencia de este nuevo sistema con $\mathbf{C}_1$.

3.4. Prueba de equivalencia

Probaré la equivalencia de **Ms** con $\mathbf{C}_1$. Para esto he adoptado y adaptado la prueba de equivalencia del sistema **TNCn** con cada $\mathbf{C}_n$ ($1 \leq n < \omega$) (presentada en [15]). Los axiomas del sistema $\mathbf{C}_1$ son los siguientes:

(Ax1) $A \to (B \to A)$

(Ax2) $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$

(Ax3) $(A \wedge B) \rightarrow A$

(Ax4) $(A \wedge B) \rightarrow B$

(Ax5) $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$

(Ax6) $A \rightarrow (A \vee B)$

(Ax7) $B \rightarrow (A \vee B)$

(Ax8) $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$

(Ax9) $A \vee \neg A$

(Ax10) $\neg\neg A \rightarrow A$

(Ax11) $\circ B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$

(Ax12) $\circ A \wedge \circ B \rightarrow \circ(A \wedge B)$

(Ax13) $\circ A \wedge \circ B \rightarrow \circ(A \vee B)$

(Ax14) $\circ A \wedge \circ B \rightarrow \circ(A \rightarrow B)$

Y tiene sólo la regla de *Modus Ponens*:

$$\frac{(A \rightarrow B), A}{B}$$

Primero probaré una variante de la regla de corte para el sistema de tableaux presentado aquí.[4].

Teorema 1. *Para el sistema* ***Ms*** *hay un tableau cerrado para un conjunto* Γ *de fórmulas si y sólo si para una fórmula* A *existe un tableau cerrado para* $\Gamma \cup \{\neg A/+\}$, $\Gamma \cup \{A/+\}$ *y* $\Gamma \cup \{A/+-\}$.

[4]Donde el significado de los términos *tableau cerrado*, *tableau completo* y *regla de expansión* son definidos como en [15, pág. 35].

Prueba. ($>$) Si existe un tableau cerrado para Γ, es evidente que hay un tableau cerrado para $\Gamma \cup \{\neg A/+\}$, $\Gamma \cup \{A/+\}$ y $\Gamma \cup \{A/+-\}$.

($<$) Supóngase ahora que hay un tableau cerrado para $\Gamma \cup \{\neg A/+\}$, $\Gamma \cup \{A/+\}$ y $\Gamma \cup \{A/+-\}$. La prueba de que existe un tableau cerrado para Γ se hace por inducción sobre la complejidad de la fórmula A.

Considérese que la fórmula A es una fórmula atómica. Para los casos cuando o bien $\neg A/+ \in \Gamma$ ó $A/+ \in \Gamma$ ó $A/+- \in \Gamma$, es evidente que Γ está cerrado. Entonces sólo hay que analizar los siguientes casos: $\neg A/+ \notin \Gamma$, $A/+ \notin \Gamma$ y $A/+- \notin \Gamma$.

Si o bien $\Gamma \cup \{\neg A/+\}$ ó $\Gamma \cup \{A/+\}$ ó $\Gamma \cup \{A/+-\}$ están cerrados sólo a causa de las fórmulas en Γ, entonces Γ está cerrado.

Obsérvese que de la fórmula atómica $A/+$ sólo se puede generar $\neg\neg A/+$; de $\neg A/+$, $\neg\neg\neg A/+$; y de $A/+-$ se puede generar $\neg A/+-$.

Dado que $\Gamma \cup \{\neg A/+\}$ está cerrado, entonces hay un tableau T tal que sus ramas están cerradas o bien por $A/+$ o por $A/+-$ o por $\neg\neg A/+$. Como también $\Gamma \cup \{A/+\}$ está cerrado, existe un tableau T' tal que sus ramas están cerradas por $\neg A/+$. Finalmente, $\Gamma \cup \{A/+-\}$ también está cerrado y, por consiguiente, hay un tableau T" tal que sus ramas están cerradas por $\neg A/+$.

Por lo tanto, en los tableaux T, T' y T" las fórmulas $A/+$ o $A/+-$ o $\neg\neg A/+$ (en T), $\neg A/+$ (en T') y $A/+$ (en T"), respectivamente, están generadas por las reglas de expansión en Γ porque ni $A/+$ ni $A/+-$ ni $\neg\neg A/+$ pueden ser generadas de $\neg A/+$; $\neg A/+$ no puede ser generada de $A/+$ y $\neg A/+$ no puede ser generada de $A/+-$. Entonces, hay un tableau cerrado para Γ y Γ está cerrado.

Supóngase que el resultado se sigue para fórmulas A de complejidad p, $p{>}0$.

Sea A una fórmula de complejidad $p+1$. (Dado que las pruebas para las otras fórmulas son similares, sólo mostraré el caso para la conjunción).

Sea A del tipo $\neg B$, siendo B de complejidad p.

Supóngase que $\Gamma \cup \{\neg\neg B/+\}$, $\Gamma \cup \{\neg B/+\}$ y $\Gamma \cup \{\neg B/+-\}$ están cerrados, considerando que $\neg\neg B/+$, $\neg B/+$ y $\neg B/+-$ no son fórmulas que están en Γ.

Sea A del tipo $(B \wedge C)$.

Para los casos cuando o bien $\neg(B \wedge C)/+ \in \Gamma$ ó $(B \wedge C)/+ \in \Gamma$ ó $(B \wedge C)/+- \in \Gamma$, es evidente que Γ está cerrado. Entonces sólo hay que analizar los casos cuando $\neg(B\wedge C)/+ \notin \Gamma$, $(B\wedge C)/+ \notin \Gamma$ y $(B\wedge C)/+- \notin \Gamma$.

Si o bien $\Gamma \cup \{\neg(B \wedge C)/+\}$ ó $\Gamma \cup \{(B \wedge C)/+\}$ ó $\Gamma \cup \{(B \wedge C)/+-\}$ están cerrados sólo a causa de las fórmulas en Γ, entonces Γ está cerrado.

Obsérvese que de la fórmula $(B \wedge C)/+$ se puede generar $B/+$ y $C/+$; de $\neg(B \wedge C)/+$, $\neg B/+$ ó $B/+$ y $\neg C/+$ ó $B/+-$ y $\neg C/+$: y de $(B \wedge C)/+-$ se puede generar $B/+-$ y $C/+-$ ó $B/+-$ y $C/+$ ó $B/+$ y $C/+-$.

Dado que $\Gamma \cup \{\neg(B \wedge C)/+\}$ está cerrado, hay un tableau T tal que sus ramas están cerradas por $B/+$ y $C/+$. Como también $\Gamma \cup \{(B \wedge C)/+\}$ está cerrado, existe un tableau T' tal que sus ramas están cerradas por $\neg B/+$ o por $\neg C/+$. Finalmente, $\Gamma \cup \{(B \wedge C)/+-\}$ también está cerrado y, por consiguiente, hay un tableau T" tal que sus ramas están cerradas por $\neg B/+$ o $\neg C/+$.

Por lo tanto, en los tableaux T, T' y T" las fórmulas $B/+$ y $C/+$ (en T), $\neg B/+$ ó $\neg C/+$ (en T') y $\neg B/+$ ó $\neg C/+$ (en T") están generadas por las reglas de expansión en Γ porque ni $B/+$ y $C/+$ pueden ser generadas de $\Gamma \cup \{\neg(B \wedge C)/+\}$; $\neg B/+$ ó $\neg C/+$ no puede ser generado de $\Gamma \cup \{(B \wedge C)/+\}$ y $\neg B/+$ ó $\neg C/+$ no puede ser generado de $\Gamma \cup \{(B \wedge C)/+-\}$. Entonces, hay un tableau cerrado para Γ y Γ está cerrado.

Sea A del tipo $(B \vee C)$.

Sea A del tipo $(B \to C)$. $\square$

Teorema 2. *El sistema **Ms** es equivalente al sistema **C₁**.*

Bosquejo de prueba. (<) Si $\Gamma \vdash_{C_1} S$, entonces $\Gamma \vdash_{Ms} S$.

Supóngase que $\Gamma \vdash_{C_1} S$. Si $S \in \Gamma$, $\Gamma \vdash_{Ms} S$. Entonces supondré que $S \notin \Gamma$.

Sea S un esquema axiomático de $\mathbf{C_1}$. Hay que probar que $\Gamma \vdash_{Ms} S$, i.e., que $\Gamma \cup \{\neg S/+\}$ está cerrado en **Ms**. Por mor de brevedad, presentaré la prueba sólo del primer axioma.

Sea S el axioma 1. Entonces,

$$
\begin{array}{lcccc}
(1) & & & \Gamma & \\
(2) & & & \neg(A \to (B \to A))/+ & \\
(3) & \multicolumn{2}{c}{A/+} & \multicolumn{2}{c}{A/+-} \\
(4) & \multicolumn{2}{c}{\neg(B \to A)/+} & \multicolumn{2}{c}{\neg(B \to A)/+} \\
(5) & B/+ & B/+^{-} & B/+ & B/+^{-} \\
(6) & \neg A/+ & \neg A/+ & \neg A/+ & \neg A/+ \\
 & * & * & * & *
\end{array}
$$

Consideraré que la fórmula S es una consecuencia de las fórmulas precedentes en la prueba en $\mathbf{C_{\mathit{1}}}$ por *Modus Ponens*, i.e., $\Gamma \vdash_{C_1} S$ es una consecuencia de $\Gamma \vdash_{C_1} A$ y $\Gamma \vdash_{C_1} A \rightarrow S$. Como se tiene que $\Gamma \vdash_{Ms} A$ y $\Gamma \vdash_{Ms} A \rightarrow S$, $\Gamma \cup \{\neg A/+\}$ y $\Gamma \cup \{\neg(A \rightarrow S)/+\}$ están cerradas en **Ms** y entonces, por la regla $\neg(\rightarrow)/+$, $\Gamma \cup \{\neg A/+\}$, $\Gamma \cup \{A/+, \neg S/+\}$ y $\Gamma \cup \{A/+-, \neg S/+\}$ están cerradas. Entonces $\Gamma \cup \{\neg A/+, \neg S/+\}$, $\Gamma \cup \{A/+, \neg S/+\}$ y $\Gamma \cup \{A/+-, \neg S/+\}$ están cerradas y, por la regla de corte, $\Gamma \cup \{\neg S/+\}$ está cerrada. Por lo tanto $\Gamma \vdash_{Ms} S$.

($>$) Si $\Gamma \vdash_{Ms} S$, entonces $\Gamma \vdash_{C_1} S$.

Supóngase que $\Gamma \vdash_{Ms} S$. Hay que transformar cada regla de expansión de **Ms** en una correspondiente prueba válida en $\mathbf{C_{\mathit{1}}}$. Para ello me valdré de los dos siguentes lemas [14] y los dos siguientes teoremas (probados en [28, págs. 69-73]), (donde $\mathbf{QM}\boldsymbol{F}$ representa la cuasimatriz de cualquier fórmula F, col(F) denota el conjunto de subfórmulas de F y negaciones de subformulas propias; para $G \in$col(F), $k(G)$ denota el valor que G toma en la línea k, y una asignación se dice que 'corresponde' a una línea k de $\mathbf{QM}\boldsymbol{F}$ si, para cada $G \in$col(F), $v(G) = k(G)$).[5]

Lema 3. *Toda asignación paraconsistente corresponde con una línea en* ***QMF****.*

Lema 4. *Dada una linea k de* ***QMF*** *existe una asignación paraconsistente que le correponde.*

Teorema 5. *Toda asignación en* ***W3****, w, y traducción, $*$, determina una asignación paraconsistente, v, tal que $v(A) = 1$ sii $w(A) = \{V, V-\}$ para cada fórmula del lenguaje de* $\boldsymbol{C_1}$*.*

Teorema 6. *Toda asignación paraconistente, v, determina una asignación en* ***W3*** *y una traducción $*$ tal que $w(A) \in \{V, V-\}$ si y sólo si $v(A) = 1$ para cada fórmula del lenguaje de* $\boldsymbol{C_1}$*.*

Entonces se puede hacer corresponder cada traduccion $*$ y asignación w en **W3** con una linea k de una cuasimatriz (por el lema 3 y por el teorema 5), como también, cada línea k de una cuasimatriz con una traducción $*$ y a una asignación en **W3** (por el lema 4 y por el teorema 6). Por ejemplo, para $\neg(A \wedge \neg A)$ sólo hay una traducción posible, i.e., $\neg_L(A \wedge_3 \neg_C A)$ cuya cuasimatriz en $\mathbf{C_{\mathit{1}}}$ y tabla en **W3** son:

[5] Uso la notación de [28] para los lemas de [14].

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$	$\neg(A \wedge \neg A)$	**k**
0	1	0	1	**1**
1	0	0	1	**2**
	1	1	0	**3**

A	$\neg_C A$	$A \wedge_3 \neg_C A$	$\neg_L(A \wedge_3 \neg_C A)$	**W3**
V	F	F	V	1’
V-	V-	V-	F	2’
F	V	F	V	3’

Cuadro 3.4: Tabla de valores de las traducciones posibles de $\neg(A \wedge \neg A)$

Es fácil comprobar que:

k	*	**W3**
1	1	3’
2	1	1’
3	1	2’

Cuadro 3.5: Correspondencia de * con **k**

En pocas palabras, si se considera una línea **k** de una cuasimatriz es posible encontrar su asignación correspondiente en **W3** y traducción posible *. La conversa también es verdadera. Esto sucede con cualquier fórmula y cualquier traducción.

Esto resulta en las siguientes equivalencias:

W3	$\mathbf{C}_{\mathit{1}}$
$A/+$	$v(A) = 1$ y $v(\neg A) = 0$
$A/+$-	$v(A) = 1$ y $v(\neg A) = 1$
$A/$-	$v(A) = 0$ y $v(\neg A) = 1$
$\neg A/+$	$v(A) = 0$ y $v(\neg A) = 1$
$\neg A/+$-	$v(A) = 1$ y $v(\neg A) = 1$
$\neg A/$-	$v(A) = 1$ y $v(\neg A) = 0$

Cuadro 3.6: (M)

Ahora hay que traducir cada fórmula con los signos + y +-, que pertenecen a **W3**, a fórmulas de $\mathbf{C}_{\mathit{1}}$. Algunas reglas pueden tener más de una traducción. Cada regla debe resultar en una derivación válida.

Consideraré el caso de $\neg(A \wedge B)/+$. En $\mathbf{C}_{\mathit{1}}$ la prueba correspondiente a esta regla tendría la siguiente forma $\neg(A \wedge B)/+ \vdash_{C1} \neg A/+ \vee (A/+ \wedge \neg B/+) \vee (A/+- \wedge \neg B/+)$, pero dado que el lenguaje de $\mathbf{C}_{\mathit{1}}$ carece de los signos + y +-, hay que cambiar las fórmulas que aparecen en la derivación por fórmulas sin esos signos; para ello se consideran las condiciones de asignación de las fórmulas de $\mathbf{C}_{\mathit{1}}$ junto con las equivalencias del cuadro 3.6.

Como se tiene que $\neg(A \wedge B)/+$, entonces $v(A \wedge B) = 0$ y $v(\neg(A \wedge B)) = 1$, por el cuadro 3.6. Pero $v(A \wedge B) = 0$ si y sólo si $v(A) = 0$ ó $v(B) = 0$, y entonces $v(\neg A) = 1$ ó $v(\neg B) = 1$. Por lo tanto, hay que considerar separadamente $\neg A \vdash$ y $\neg B \vdash$. Mediante un procecdimiento análogo se obtienen los resultados esperados para las fórmulas $\neg A/+$, $A/+$ y $\neg B/+$: $\neg A \vdash_{C1} \neg A \vee (A \wedge \neg B) \vee (A/+- \wedge \neg B)$. Para el caso de $A/+-$, se tiene que $v(A) = 1$ y $v(\neg A) = 1$, pero el primero ya aparece en el segundo disyunto con la misma fórmula, es decir, $\neg B$. Por lo tanto, se considera sólo la segunda alternativa. Esto resulta en dos derivaciones:

$\neg A \vdash_{C_1} \neg A \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

$\neg B \vdash_{C_1} \neg A \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

$\square$

3.5. De regreso a las cuasimatrices

Como ya señalé, es posible establececr una correspondencia entre las fórmulas con las etiquetas en **Ms** y las fórmulas con sus respectivas valuaciones en $\mathbf{C}_{\mathit{1}}$, siguiendo el cuadro (M).

Desde esta perspectiva, se puede apreciar que sí es posible sacar de las cuasimatrices un sistema de tableaux. Pero para percibir este hecho fue necesario complicar las cosas a través de traducciones de fórmulas. Regresaré al ejemplo que ofrecí anteriormente:

<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>$\neg A$</th><th>$\neg B$</th><th>$\neg A \wedge \neg B$</th><th>$\neg(\neg A \wedge \neg B)$</th><th>$A \vee B$</th><th>$\neg(\neg A \wedge \neg B) \to (A \vee B)$</th><th></th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">0</td><td rowspan="3">1</td><td rowspan="3">1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td rowspan="3">0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>6</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>7</td></tr>
<tr><td rowspan="5">1</td><td rowspan="5">1</td><td rowspan="2">0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>8</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>9</td></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>10</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>11</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>12</td></tr>
</table>

Préstese atención a la columna de $\neg(\neg A \wedge \neg B)$. A primera vista parecería que la fórmula es verdadera si, de acuerdo con la línea 4, $v(A) = 0$ y $v(B) = 1$. Pero esto último contradiría la línea 3, para la que esto resulta falso. Pero realmente no está siendo verdadera en 4. Para que fuera verdadera —siguiendo el cuadro 3.6— se necesitaría que la fórmula no negada fuera falsa. Entonces, los casos en los que $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ es verdadera se encuentran en las líneas 2, 5, 8, 9 y 10. Y entonces, teniendo presente el cuadro 3.6, se tienen las siguientes posibilidades: la fórmula $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ es verdadera cuando $v(\neg A) = 1$ y $v(B) = 1$ ó $v(A) = 1$ y $v(B) = 0$ ó $v(A) = v(\neg A) = 1$ y $v(B) = 1$ ó $v(A) = 1$ y $v(B) = v(\neg B) = 1$ ó $v(A) = 1$ y $v(B) = 1$. Pero entonces A ocurre junto a todas las combinaciones posibles de asignación de B. Entonces se pueden reducir las cinco posibilidades a sólo tres, es decir, $v(A) = 1$ ó $v(\neg A) = 1$ y $v(B) = 1$ ó $v(A) = v(\neg A) = 1$ y $v(B) = 1$.[6]

Una formulación del sistema de tableaux era posible desde el principio, sólo que esto no era evidente porque en la construcción de las cuasimatrices se atiende principalmente a las instrucciones para hacerlas bien, y no de la distinción entre la asignación singular y la asignación normal de una fórmula.

[6] Es interesante notar que esto resulta en un tableaux con una presentación ligeramente diferente, porque en el lugar de $v(A)$ =1 (y similarmente en $v(B)$ =1, para el segundo y tercer disyunto), **Ms** tiene $v(\neg\neg A)$=1. Pero esto no supone ningún problema (sólo recuérdese las reglas particulares).

Conclusiones

En este capítulo he discutido si es posible obtener un sistema de tableaux para la lógica paraconsistente $\mathbf{C}_{\mathit{1}}$ a través de sus cuasimatrices. Expuse la manera de obtener las reglas de un tableaux para la lógica clásica y la lógica paraconsistente **P1**, como casos particulares de lógicas veritativo funcionales. Mostré que mediante los rudimentos de las traducciones de traducciones posibles se podía recuperar la veritativo funcionalidad de $\mathbf{C}_{\mathit{1}}$. A partir de la traducción de las fórmulas de $\mathbf{C}_{\mathit{1}}$ a la lógica trivaluada **W3** pude ofrecer un sistema de tableaux para $\mathbf{C}_{\mathit{1}}$. Finalmente señalé que dichas reglas se pueden obtener de las cuasimatrices estableciendo una correspondencia entre las fórmulas etiquetadas de **Ms** con las valuaciones de $\mathbf{C}_{\mathit{1}}$.

Conclusión

En esta investigación he discutido los presupuestos filosóficos que subyacen a la tesis de Beall de que no hay negación lógica. Argumenté que desde un enfoque de teoría de pruebas se pueden proporcionar reglas para la negación con los criterios que Beall considera que debe tener cualquier conectiva lógica, y que desde un enfoque modelo teórico la negación se restringe a intercambiar los valores verdadero y falso. Presenté dos enfoques a las lógicas conexivas y su relación con el posibilismo. Mostré que las relaciones se pueden mantener en un marco de lógica trivaluada usando la modalidad de Béziau, pero al costo de restringir el posibilismo a todo aquello que tiene algún grado de ser verdadero, es decir, de sólo tener valores designados. Finalmente diseñé un sistema de tableaux para la lógica paraconsistente $\mathbf{C}_{\mathit{1}}$ mediante la semántica de traducciones posibles y discutí cómo se podían obtener las reglas de ese sistema mediante sus cuasimatrices.

Bibliografía

[1] Axel Arturo Barceló Aspeitia. «Patrones inferenciales». En: *Crítica* 40.140 (2008), págs. 3-35.

[2] Eduardo Barrio, Federico Pailos y Damian Enrique Szmuc. «A recovery operator for non-transitive approaches». En: *Review of Symbolic Logic* 13.1 (2018), págs. 80-104.

[3] Jc Beall. *Spandrels of Truth*. Oxford: Oxford University Press, 2009.

[4] Jc Beall. «There is no logical negation: true, false, both and neither». En: *Australasian Journal of Logic* 14.1 (2017), págs. 1-29.

[5] Jc Beall. «The simple argument for subclassical logic». En: *Philosophical Issues* 28.1 (2018), págs. 30-54.

[6] Jc Beall y Greg Restall. *Logical Pluralism*. Oxford: Oxford University Press, 2006.

[7] Francesco Berto. «A modality called 'negation'». En: *Mind* 124.495 (2015), págs. 761-793.

[8] Francesco Berto y Greg Restall. «Negation on the Australian Plan». En: *Journal of Philosophical Logic* 48.6 (2018), págs. 1119-1144.

[9] Arthur Buchsbaum y Tarcisio Pequeno. «A reasoning method for a paraconsistent logic». En: *Studia Logica* 52 (1993), págs. 281-289.

[10] Jean-Yves Béziau. «A new four-valued approach to modal logic». En: *Logique et Analyse* 54.213 (2011), págs. 109-121.

[11] Walter Alexandre Carnielli. «Possible translation semantics for paraconsistent logics». En: *Frontiers in paraconsistent logic: Proceedings of the I World Congress on Paraconsistency, Ghent, 1998*. Ed. por Diderik Batens y col. King's College Publications, 2000, págs. 159-172.

[12] Walter Alexandre Carnielli y Mamede Lima-Marques. «Reasoning under inconsistent knowledge». En: *Journal of Applied Non-Classical Logics* 2.1 (1992), págs. 49-79.

[13] Newton Carneiro Affonso da Costa. «Calculs propositionnels pour les systémes formels inconsistants». En: *Comptes Rendus d Académie des Sciences de Paris* 257 (1963), págs. 3790-3793.

[14] Newton Carneiro Affonso da Costa y Elías Humberto Alves. «A semantical analysis of the calculi Cn». En: *Notre Dame Journal of Formal Logic* 18.4 (1977), págs. 621-630.

[15] Itala María Loffredo D'Ottaviano y Milton Augustinis de Castro. «Analytical tableaux for da Costa's Hierarchy of Paraconsistent Logics». En: *Electronic Notes in Theoretical Computer Science* 143 (2006), págs. 27-44.

[16] Michael Dummett. *The Logical Basis of Metaphysics*. Cambridge MA: Harvard University Press, 1991.

[17] L. Estrada-González. «The Bochum Plan and the foundations of contra-classical logics». En: *CLE e-Prints* 19.1 (2020), págs. 1-22.

[18] Hartry Field. *Saving Truth from Paradox*. Oxford: Oxford University Press, 2008.

[19] Josep Maria Font. «Belnap's four-valued logic and De Morgan lattices». En: *Logic Journal of the IGPL* 5.3 (1997), págs. 413-440.

[20] Nissim Francez. «Bilateralism, trilateralism, multilateralism and polysequents». En: *Journal of Philosophical Logic* 48 (2019), 245-–262.

[21] Gerhard Gentzen. «Investigations into Logical Deduction». En: *American Philosophical Quarterly* 1.4 (1964), págs. 288-306.

[22] Luis Estrada González. «Possibility, consistency and connexivity». En: *Advances in Modal Logic*. Vol. 13. 2020.

[23] Michael De y Hitoshi Omori. «There is more to negation than modality». En: *Journal of Philosophical Logic* 47 (2018), págs. 281-299.

[24] Ole Thomassen Hjortland. «Verbal disputes in logic: against minimalism for logical connectives». En: *Logique et Analyse* 227.57 (2014), págs. 463-486.

[25] Michael Kremer. «Kripke and the Logic of Truth». En: *Journal of Philosophical Logic* 17.3 (1988), págs. 225-278.

[26] Clarence Irving Lewis y Cooper Harold Langford. *Symbolic Logic*. New York: Dover Publications, 1932.

[27] Diego Marconi. «A decision method for the calculus C1». En: *Proceedings of the 3rd Brazilian Conference on Mathematical Logic*. Ed. por Ayda Ignez Arruda, Newton Affonso Carneiro da Costa y Antonio Mario Sette. São Paulo: Sociedade Brasileira de Lógica, 1980, págs. 211-223.

[28] João Marcos. *Semânticas de Traduções Possíveis*. São Paulo: UNICAMP, 1999.

[29] João Marcos. «On negation: pure local rules». En: *Journal of Applied Logic* 11 (2005), págs. 185-219.

[30] Edwin Mares y Francesco Paoli. «C.I. Lewis, E.J. Nelson, and the Modern Origins of Connexive Logic». En: 26.3 (2019), págs. 405-426.

[31] Vann McGee. *Truth, Vagueness and Paradox: An Essay on the Logic of Truth*. Indianápolis: Hackett, 1991.

[32] Everett Nelson. «Intensional relations». En: *Mind* 156.39 (1930), págs. 440-453.

[33] Johannes J. F. Nieland. «Beth's Tableau-Method». En: *Synthese* 16.1 (1966), págs. 7-26.

[34] Kamide Norihiro. «Bi-classical connexive logic and its modal extension: Cut-elimination, completeness and duality». En: *Logic and Logical Philosophy* 28 (2019), págs. 481-511.

[35] Sergei P. Odintsov y Heinrich Wansing. «Modal logics with Belnapian truth values». En: *Journal of Applied Non-Classical Logics* 20.3 (2010), págs. 279-301.

[36] Hitoshi Omori. «Towards a bridge over two approaches in connexive logic». En: *Logic and Logical Philosophy* 28.3 (2019), págs. 553-556.

[37] Hitoshi Omori y Heinrich Wansing. «40 years of FDE: An Introductory Overview». En: *Studia Logica* 105 (2017). Ed. por Hitoshi Omori y Heinrich Wansing, págs. 1021-1049.

[38] Hitoshi Omori y Heinrich Wansing, eds. *New Essays on Belnap-Dunn Logic*. Berlín: Springer, 2019.

[39] Francesco Paoli. *Substructural Logics: A Primer*. Dordrecht: Kluwer, 2002.

[40] Francesco Paoli. «Quine and Slater on paraconsistency and deviance». En: *Journal of Philosophical Logic* 32 (2003), págs. 531-548.

[41] Francesco Paoli. «Bilattice logics and demi-negation». En: *New Essays on Belnap-Dunn Logic*. Ed. por Heinrich Wansing e Hitoshi Omori. Berlín: Springer, 2019, págs. 233-253.

[42] Graham Priest. «The logic of paradox». En: *Journal of Philosophical Logic* 8.1 (1979), págs. 219-241.

[43] Graham Priest. *In Contradiction: A Study of the Transconsistent*. 2.ª ed. Oxford: Oxford University Press, 2006.

[44] Graham Priest. *An Introduction to Non-Classical Logics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

[45] Willard Van Orman Quine. *Philosophy of Logic*. Englewood Cliffs NJ: Prentice Hall, 1970.

[46] Greg Restall. «Assertion, denial and non-classical theories». En: *Paraconsistency: Logic and Applications. Logic, Epistemology, and the Unity of Science*. Ed. por Koji Tanaka y col. Dordrecht: Springer, 2013.

[47] Greg Restall. «Assertion, denial, accepting, rejecting, symmetry and paradox». En: *Foundations of Logical Consequence*. Ed. por Colin R. Caret y Ole T. Hjortland. Oxford: Oxford University Press, 2015, págs. 310-321.

[48] David Ripley. «Paradoxes and failures of Cut». En: *Australasian Journal of Philosophy* 91.1 (2013), págs. 139-164.

[49] Richard Routley y col. *Relevant Logics and their Rivals 1*. Atascadero CA: Ridgeview, 1982.

[50] Antônio Mário Antunes Sette. «On the propositional calculus P1». En: *Mathematica Japonicae* 18.3 (1973), págs. 173-180.

[51] Lionel Shapiro. «LP, K3, and FDE as substructural logics». En: *The Logica Yearbook 2015*. Ed. por Pavel Arazim y Tomáš Lávička. Londres: College Publications, 2016.

[52] Lionel Shapiro. «The very idea of a substructural approach to paradox». En: *Synthese* (2016). DOI: `https://doi.org/10.1007/s11229-016-1230-x`.

[53] Roman Suszko. «Remarks on Łukasiewicz's three-valued logic». En: *Bulletin of the Section of Logic* 4.3 (1975), págs. 87-90.

[54] Paula Teijeiro. «Not a knot». En: *Thought: A Journal of Philosophy* 9.1 (2020), págs. 14-24.

[55] Heinrich Wansing. «Connexive modal logic». En: *Advances in modal logic*. Ed. por Renate Schmidt y col. Vol. 5. 2005, págs. 367-383.

[56] Zach Weber. «A paraconsistent model of vagueness». En: *Mind* 119.476 (2010), págs. 1025-1045.

[57] Zach Weber y col. «Tolerating gluts». En: *Mind* 123.491 (2014), págs. 813-828.

[58] Paul Égré y Guy Politzer. «On the negation of indicative conditionals». En: *Proceedings of the Amsterdam Colloquium*. Ed. por Maria Aloni, Michael Frankie y Floris Roelofsen. 2013, págs. 10-18.