



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y  
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

PATRONES PANCROMÁTICOS

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:  
GERMÁN BENÍTEZ BOBADILLA

DIRECTORA DE LA TESIS  
DRA. HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ, INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR  
DR. HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA, FACULTAD DE CIENCIAS UNAM  
DR. ILÁN ABRAHAM GOLDFEDER ORTIZ, PROGRAMA DE MAESTRÍA Y  
DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN  
ESTADÍSTICA APLICADA

CIUDAD DE MÉXICO, SEPTIEMBRE 2020.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Prefacio

En este trabajo de investigación se tratan temas muy especializados. Por esta razón, el primer capítulo es dedicado a las definiciones necesarias para entender el contenido del texto, tratando de que éste sea autocontenido; sin embargo, debido a su extensión, referimos al lector a [2] y [4] para material básico y complementario. La primera parte es dedicada a las definiciones básicas de multidigráficas y digráficas, así como las definiciones de conjunto absorbente y conjunto independiente, las que nos llevan al concepto de núcleo de una multidigráfica. En la segunda parte damos las definiciones de algunos tipos de multidigráficas, de submultidigráficas y de algunas operaciones entre multidigráficas y para multidigráficas, que son usadas a lo largo del trabajo.

En el segundo capítulo, llamado Introducción Histórica, es un breve resumen de la evolución de teoría de núcleos en digráficas, desde su surgimiento en economía. Debido a que no toda digráfica tiene un núcleo, es importante apuntar que Chvátal probó en [6] que el problema de decisión de determinar si una digráfica tiene núcleo o no, es un problema **NP**-completo. Empezando con las generalizaciones, a través del alcance entre los vértices de una digráfica, definimos a los núcleos por caminos (trayectorias) en una digráfica; que a diferencia de los núcleos, toda digráfica tiene un núcleo por caminos (trayectorias). Continuando con las generalizaciones de núcleos, hablamos de los núcleos por trayectorias monocromáticas en multidigráficas con las flechas coloreadas, que han sido ampliamente estudiados. En 1982, Sands, Sauer y Woodrow probaron que toda multidigráfica 2-coloreada contiene un núcleo por trayectorias monocromáticas, para el caso infinito se necesita una hipótesis adicional. En su trabajo plantean la siguiente pregunta que se debe a Erdős: *¿es cierto que para cada  $n$ , existe un entero positivo más pequeño  $f(n)$  tal que cada torneo  $n$ -coloreado contiene un conjunto  $S$  de  $f(n)$  vértices con la propiedad de que  $S$  es absorbente por trayectorias monocromáticas?, en particular, ¿ $f(3) = 3$ ?* Recientemente, Bousquet, Lochet y Thomassé

demonstraron que *para cada  $k$ , existe un entero  $f(k)$  tal que si  $T$  es una multidigráfica semicompleta cuyo conjunto de flechas es la unión de  $k$  conjuntos de flechas cuasi ordenados, entonces la cardinalidad del conjunto dominante más pequeño de  $T$  es menor que  $f(k)$*  [5]. Dado que el cierre transitivo de cada clase de color se puede ver como un cuasi orden, se sigue que, el problema Erdős-Sands-Sauer-Woodrow puede deducirse del resultado de Bousquet, Lochet y Thomassé. Es importante notar que el resultado de Sands, Sauer y Woodrow afirma que no importa la multidigráfica ni la forma de colorearla, si se hace con dos colores, entonces siempre se puede encontrar un núcleo por trayectorias monocromáticas.

Más adelante, Linek y Sands proponen colorear las flechas una multidigráfica con los vértices de una digráfica, posiblemente con lazos. Si  $H$  es la digráfica con la que se colorea, decimos que la coloración es una  $H$ -coloración. Dentro de las digráficas  $H$ -coloreadas un  $H$ -camino es un camino tales que los colores de sus flechas forman camino en  $H$ , si un  $H$ -camino no repite vértices lo llamamos  $H$ -trayectoria. En este sentido llamamos a  $H$  un patrón de colores, o simplemente un patrón. De manera natural se define el alcance por  $H$ -caminos y por  $H$ -trayectorias, llegando a los núcleos por  $H$ -caminos y núcleos por  $H$ -trayectorias.

Nuestro principal objeto de estudio son los patrones  $H$  que, sin importar la multidigráfica ni la  $H$ -coloración, garantizan la existencia de conjuntos de vértices absorbentes por  $H$ -caminos o por  $H$ -trayectorias. En particular, los patrones que garantizan la existencia de núcleos por  $H$ -caminos o núcleos por  $H$ -trayectorias.

El tercer capítulo se centra en las diferencias y similitudes entre los  $H$ -caminos y las  $H$ -trayectorias en una multidigráfica  $H$ -coloreada, así como entre los conceptos definidos a partir del alcance por  $H$ -caminos y los definidos a partir de las  $H$ -trayectorias. En la primera parte se muestra que, a diferencia de los caminos y trayectorias usuales, un  $H$ -camino entre dos vértices no necesariamente contiene una  $H$ -trayectoria entre los mismos. Basados en lo anterior, se muestran las diferencias y similitudes entre los núcleos por  $H$ -caminos y los núcleos por  $H$ -trayectorias. Para convencer al lector que los conceptos de núcleo por  $H$ -caminos y núcleo por  $H$ -trayectorias son distintos, y que el problema de decisión de su existencia es distinto, exhibimos un patrón  $H_1$  y una digráfica  $H_1$ -coloreada que tiene un núcleo por  $H_1$ -trayectorias y no tiene núcleo por  $H_1$ -caminos. De la misma manera, se exhibe otro patrón  $H_2$  y otra digráfica  $H_2$ -coloreada que tiene un núcleo por  $H_2$ -caminos y no tiene núcleo por  $H_2$ -trayectorias. Con estos ejemplos se contruyen fami-

lias infinitas de digráficas con las propiedades mencionadas. A pesar de las diferencias y de ser conceptos distintos, no se puede negar que ambos están estrechamente relacionados. Por lo anterior, para finalizar el capítulo, demostramos que los únicos patrones  $H$  tales que no importa la multidigráfica ni la  $H$ -coloración, todo  $H$ -camino entre dos vértices contiene una  $H$ -trayectoria entre los mismos, son exactamente los patrones transitivos.

En el cuarto capítulo se presentan tres familias de patrones, definidas por Arpin y Linek en [1], basadas en el alcance por  $H$ -caminos en multidigráficas  $H$ -coloreadas.  $\mathcal{B}_1$  ( $\mathcal{B}_2$ ) es la clase de todas las digráficas  $H$  tal que para cualquier  $H$ -coloración de cualquier torneo  $T$  (multidigráfica) existe un vértice  $v$  (un conjunto independiente de vértices) de  $T$  que es absorbente por  $H$ -caminos en  $T$ .  $\mathcal{B}_3$  es la clase de todas las digráficas  $H$  tal que para cualquier  $H$ -coloración de cualquier multidigráfica  $D$ ,  $D$  tiene núcleo por  $H$ -caminos. En este capítulo presentamos los resultados obtenidos por Arpin y Linek sobre estas tres familias. Principalmente, la caracterización de los patrones en  $\mathcal{B}_2$  como aquellos patrones que su complemento no tiene ciclos impares. Una de las propiedades que demuestran Arpin y Linek es que estas familias son cerradas bajo tomar subdigráficas inducidas, contracciones y expansiones. Por lo que, el análisis de estas familias se ha centrado en los patrones de orden pequeño.

El quinto capítulo está completamente dedicado a los patrones en  $\mathcal{B}_3$ . Éstos fueron nombrados por Galeana Sánchez y Strausz como *patrones pancromáticos*, nosotros nos referimos a ellos como *patrones pancromáticos por caminos*. En [12] Galeana Sánchez y Hernández Cruz demuestran que cada digráfica  $H$  es un patrón pancromático por caminos, o el problema de determinar si una digráfica  $H$ -coloreada tiene un núcleo por  $H$ -caminos es **NP**-completo. En [11] se prueba que los patrones pancromáticos por caminos están completamente caracterizados como elementos de dos familias. Sin embargo, en este trabajo mostramos un contraejemplo a la construcción usada en la demostración del lema 6 que se encuentra en [11]. El lema 6 se usa para argumentar que dos digráficas de orden tres no son patrones pancromáticos por caminos. También se utiliza de manera esencial en la prueba presentada en [11], de la caracterización de los patrones en  $\mathcal{B}_3$ . Aún con ello, actualmente, la caracterización puede ser cierta. Por lo anterior, el problema de caracterizar a los patrones pancromáticos por caminos sigue abierto. En particular, el problema de determinar si los patrones  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$  y  $F_2$  son patrones pancromáticos por caminos sigue abierto. Para estos patrones mostramos

que basta con demostrar que toda digráfica  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -coloreada ( $F_2$ -coloreada) tiene núcleo por  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -camino ( $F_2$ -camino) para determinar su pertenencia, o no, a la familia  $\mathcal{B}_3$ , recordemos que la definición habla de multidigráficas. Así mismo, realizamos un análisis estructural de los patrones pancromáticos por caminos, concluyendo que estos tienen que pertenecer a una de dos familias. Dentro de este análisis, mostramos que no todas las digráficas de una de estas familias son patrones pancromáticos por caminos. Finalmente, enunciaremos dos problemas abiertos, sobre esta familia.

En el sexto capítulo definimos, por primera vez, las familias  $\tilde{\mathcal{B}}_i$ , con  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Éstas son las familias análogas a las presentadas por Arpin y Linek en [1], pero basadas en el alcance por  $H$ -trayectorias.  $\tilde{\mathcal{B}}_1$  ( $\tilde{\mathcal{B}}_2$ ) es la clase de todas las digráficas  $H$  tal que para cualquier  $H$ -coloración de cualquier torneo  $T$  (multidigráfica) existe un vértice  $v$  (un conjunto independiente de vértices) de  $T$  que es absorbente por  $H$ -trayectorias en  $T$ .  $\tilde{\mathcal{B}}_3$  es la clase de todas las digráficas  $H$  tal que para cualquier  $H$ -coloración de cualquier multidigráfica  $D$ ,  $D$  tiene núcleo por  $H$ -trayectorias. En este capítulo presentamos algunas propiedades de estas tres familias. Especialmente demostramos que estas familias son cerradas bajo tomar subdigráficas inducidas, contracciones y expansiones. Por lo que, el análisis de estas familias se centra en los patrones de orden pequeño. Como resultado principal, caracterizamos a los patrones en  $\tilde{\mathcal{B}}_2$  como aquellos patrones que su complemento no tiene ciclos impares; es decir,  $\tilde{\mathcal{B}}_2 = \mathcal{B}_2$ .

El séptimo capítulo se centra en los patrones de  $\tilde{\mathcal{B}}_3$ . Nos referimos a ellos como *patrones pancromáticos por trayectorias*. Como ya mencionamos el enfoque para analizar a los patrones de esta familia es determinar si los patrones de orden pequeño, menor o igual a tres, son patrones pancromáticos por trayectorias o no. Usando los resultados obtenidos por Arpin y Linek, así como los obtenidos en el tercer y sexto capítulo, determinamos, a excepción del patrón  $F_1$ , si cada uno de los patrones reflexivos de orden menor o igual a tres, son patrones pancromáticos por trayectorias o no. Para probar que los patrones  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$  y  $F_2$  no son patrones pancromáticos por trayectorias usamos una técnica similar a la presentada en [11], en el ya mencionado lema 6. Por otro lado, mostramos que para  $F_1$  que basta con demostrar que toda digráfica  $F_1$ -coloreada tiene núcleo por  $F_2$ -trayectorias para determinar su pertenencia, o no, a la familia  $\tilde{\mathcal{B}}_3$ , recordemos que la definición habla de multidigráficas. Con este análisis, mostramos que los patrones pancromáticos por trayectorias

son exactamente los patrones que se pueden contraer a  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$  o a  $\overset{\rightarrow}{P}_2$ , si  $F_1$  no es patrón pancromático. En caso de que  $F_1$  pertenezca a  $\tilde{\mathcal{B}}_3$ , los patrones pancromáticos por trayectorias pertenecen a una de dos familias. Finalmente, planteamos dos problemas abiertos sobre los patrones de esta familia.

Los  $H$ -caminos están definidos en las multidigráficas  $H$ -coloreadas; sin embargo, a lo largo de este trabajo de investigación, notamos que la propiedad de tener más de una flecha entre dos vértices con la misma dirección no había sido explotada por completo. Por lo que definimos, por primera vez, los conceptos de  $H$ -camino dinámico y  $H$ -trayectoria dinámica en una multidigráfica  $H$ -coloreada. El concepto de  $H$ -camino se puede generalizar permitiendo “cambios de flecha”, esto es, en lugar de considerar un solo  $H$ -camino, permitimos la concatenación de dos  $H$ -caminos siempre que la última flecha del primero y la primer flecha del segundo tengan el mismo vértice inicial y el mismo vértice final. Entonces, de esta manera, se obtiene una nueva forma de alcance entre dos vértices, en lugar de seguir únicamente por un  $H$ -camino para que un vértice alcance a otro, podemos “cambiar de flecha” para seguir avanzando. El octavo capítulo se centra en la definición de los  $H$ -caminos dinámicos,  $H$ -trayectorias dinámicas, así como de sus respectivas nociones de alcance. En este capítulo, se consideran los 4 tipos de núcleos ya definidos, y se exhiben patrones  $H$  y multidigráficas  $H$ -coloreadas que contienen un tipo de núcleo y no contienen de otro tipo; por ejemplo, se exhibe un patrón  $H$  y una multidigráfica  $H$ -coloreada que contiene un núcleo por  $H$ -caminos dinámicos pero no contiene núcleo por  $H$ -trayectorias. Al igual que en el tercer capítulo, se forman familias infinitas con las propiedades de los ejemplos mostrados. Se concluye que, los nuevos conceptos son realmente distintos a los ya existentes, y por lo tanto, sus problemas de alcance son distintos. A pesar de lo anterior, al finalizar el capítulo, demostramos que para cada patrón  $H$  y cada multidigráfica  $H$ -coloreada  $D$ , existe otro patrón  $\hat{H}$  y otra digráfica  $\hat{D}$  tales que  $D$  tiene núcleo por  $H$ -caminos dinámicos ( $H$ -trayectorias dinámicas) si y solo si  $\hat{D}$  tiene núcleo por  $\hat{H}$ -caminos ( $\hat{H}$ -trayectorias). Sin embargo, esta equivalencia se realiza a través de una reducción que depende totalmente del patrón  $H$ , la multidigráfica y la  $H$ -coloración.

En último capítulo definimos, por primera vez, las familias  $\mathcal{D}_i$  y  $\tilde{\mathcal{D}}_i$ , con  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Éstas son las familias análogas a las presentadas por Arpin y Linek en [1] y las presentadas en el capítulo 6, pero basadas en el alcance por  $H$ -caminos dinámicos y en el alcance por  $H$ -trayectorias diná-

micas, respectivamente. A los patrones que pertenecen a  $\mathcal{D}_3$  ( $\tilde{\mathcal{D}}_3$ ) los llamamos *patrones pancromáticos por caminos dinámicos* (*patrones pancromáticos por trayectorias dinámicas*). Al igual que las otras familias, probamos que estas son cerradas bajo tomar subdigráficas inducidas, contracciones y expansiones. Por lo que, su análisis se centra en los patrones de orden menor o igual a 3. Para demostrar la pertenencia, o no, a la familia  $\tilde{\mathcal{D}}_3$  ( $\mathcal{D}_3$ ) realizamos algunas equivalencias entre los problemas de alcance por  $H$ -trayectorias dinámicas ( $H$ -caminos dinámicos) con las  $H$ -trayectorias ( $H$ -caminos). Con estas equivalencias, probamos que los patrones pancromáticos por trayectorias dinámicas son únicamente las digráficas completas, si  $\vec{P}_2$  no pertenece a  $\tilde{\mathcal{D}}_3$ . Y cumplen con pertenecer a una de dos familias, si  $\vec{P}_2$  es un patrón pancromático por trayectorias dinámicas. De manera análoga, probamos que los patrones pancromáticos por caminos dinámicos cumplen con pertenecer a una de dos familias. Dichas familias son distintas dependiendo de si  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$  es un patrón pancromático por caminos dinámicos o no.

El trabajo de investigación, realizado durante este tiempo, presentado en esta tesis se organizó en 4 artículos de investigación, para que se considere su publicación en revistas indexadas, especializadas y de circulación internacional. De estos artículos, uno ya ha sido publicado, dos se encuentran en revisión y el último se encuentra en proceso. Los artículos obtenidos son:

1. Los resultados expuestos en los capítulos 3, 6 y 7 forman parte del artículo titulado “**Panchromatic patterns by paths**”, el cual fue sometido para su revisión a la revista internacional **Discrete Mathematics**.
2. Algunos de los resultados expuestos en el capítulo 5 forman parte del artículo titulado “**Corrigendum to ‘On Panchromatic Patterns’**”, el cual fue sometido para su revisión a la revista internacional **Discrete Mathematics**.
3. Algunos de los resultados expuestos en los capítulos 5 y 9 forman parte del artículo titulado “**Advances and open problems of panchromatic patterns**”, el cual será enviado para su revisión a una revista internacional.
4. Algunos de los resultados expuestos en los capítulos 8 y 9 forman parte del artículo titulado “**Characterization of color patterns by dynamic  $H$ -paths**”, el cual ya está publicado en la revista internacional



**Discrete Applied Mathematics** (G. Benítez-Bobadilla, H. Galeana-Sánchez, and C. Hernández-Cruz, Characterization of color patterns by dynamic  $H$ -paths, *Discrete Applied Mathematics*, 267:41-51, 2019. DOI 10.1016/j.dam.2019.04.020).



# Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas que han hecho este proyecto posible. A mi mamá por su inmenso amor, por ser la persona que más admiro, que más me ha apoyado. Gracias por formar la persona que soy. A mi hermana que siempre ha estado ahí para apoyarme. A mi familia. A mis tíos y tías, que siempre me han dado su cariño, en especial a Yaxis y a Timo, con las que siempre puedo contar. A Julio del que siempre aprendo algo. A mis primos con los que crecí y he pasado momentos inolvidables. A mis abuelas, los ángeles que están en mi corazón, siempre recordaré su amor y cariño. A Wen por su gran amor, por todo el apoyo que me da y por la felicidad de su compañía.

Agradezco a mis amigos, que se volvieron mis hermanos. Betsy, Tania, Rodo, Migue, Oscar y Karen su compañía, amistad y cariño me han dado la fuerza para seguir adelante. George, tu recuerdo está siempre presente en nuestras pláticas y anécdotas. Ximena, Sofía, Mariana, Alain y Beto a pesar de las distancias nuestra amistad es muy fuerte y cada momento con ustedes es una gran alegría. Jimmy, Ratón, Mariana, Miguel, Paola, Margain y Vic me divierten mucho con ustedes y los quiero como a mi familia. Oscar, Bere, Alan, Fermín, Raúl, Javi, Juan Pablo y Oziel les agradezco su apoyo incondicional, por siempre estar ahí, y por las enseñanzas que siempre me dan. Narda, Jana y Gerardo gracias por su apoyo, con ustedes he avanzado y aprendido mucho.

Gracias a mi tutora Hortensia Galeana, que me ha guiado a lo largo de mis estudios de posgrado. Es una gran investigadora pero sobretodo una gran persona. De ella he aprendido mucho y disfrutado el trabajo que hemos realizado juntos. Gracias por tu apoyo durante todo este tiempo, y por el que me sigues brindando. A Laura Pastrana a quien nunca dejaré de agradecerle que me haya enseñado ese cariño por las gráficas. Gracias por siempre preocuparte por mí, brindarme tu amistad y tus consejos. Agradezco a César

Hernández por su guía y consejos durante todo este tiempo; por mostrarme que hay más formas de entender las gráficas y por todos los aportes a este trabajo. También, quiero agradecer a Pilar Valencia por brindarme nuevas oportunidades, su amistad y su guía. Gracias a Rocío Sánchez y Mucuy-kak Guevara por sus enseñanzas y sus consejos.

También, agradezco a Hugo Rincón e Ilán Goldfeder por formar parte de mi comité tutor.

Gracias a cada uno de mis sinodales: Hortensia Galeana, César Hernández, Ilán Goldfeder, Mika Olsen y Juan José Montellano por haberse tomado el tiempo de revisar este trabajo; sus observaciones y correcciones enriquecieron sustancialmente el mismo.

Agradezco a la UNAM, al CONACYT y al Instituto de Matemáticas el apoyo para facilitar el trabajo, por medio de becas, espacio laborales y material bibliográfico. Este proyecto fue apoyado por CONACYT FORDECYT-PRONACES CF-2019/39570 y por UNAM-DGAPA-PAPIIT IN102320, gracias por su apoyo en la realización y divulgación de este trabajo.

# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>I</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Primeras definiciones . . . . .	1
1.2. Submultidigráficas y operaciones . . . . .	5
<b>2. Introducción histórica</b>	<b>11</b>
<b>3. <math>H</math>-trayectorias y <math>H</math>-caminos</b>	<b>17</b>
3.1. Alcance por $H$ -trayectorias . . . . .	18
3.2. Núcleos por $H$ -trayectorias y núcleos por $H$ -caminos . . . . .	20
3.2.1. Núcleos por $H$ -trayectorias . . . . .	21
3.2.2. Digráficas con núcleo por $H$ -caminos sin núcleo por $H$ -trayectorias . . . . .	24
3.2.3. Familias infinitas . . . . .	27
3.3. Digráficas transitivas . . . . .	29
<b>4. Familias <math>\mathcal{B}_i</math></b>	<b>33</b>
<b>5. Familia <math>\mathcal{B}_3</math>: Patrones pancromáticos por caminos</b>	<b>37</b>
5.1. Una prueba errónea . . . . .	40
5.2. Patrones $F_2$ y $P_3$ . . . . .	44
5.3. Análisis estructural . . . . .	48
<b>6. Familias <math>\tilde{\mathcal{B}}_i</math></b>	<b>55</b>
6.1. Familia $\tilde{\mathcal{B}}_2$ . . . . .	59
<b>7. Familia <math>\tilde{\mathcal{B}}_3</math>: Patrones pancromáticos por trayectorias</b>	<b>61</b>
7.1. Patrones $P_3$ y $F_2$ . . . . .	66

7.2. Patrón $F_1$ . . . . .	72
7.3. Estructura y problemas abiertos . . . . .	74
<b>8. Caminos y trayectorias dinámicas</b>	<b>79</b>
8.1. Ejemplos diferenciales . . . . .	84
8.2. Familias infinitas . . . . .	95
8.3. Equivalencia con $H$ -caminos . . . . .	97
<b>9. Familias <math>\tilde{\mathcal{D}}_i</math> y <math>\mathcal{D}_i</math></b>	<b>101</b>
9.1. Patrones pancromáticos dinámicos . . . . .	105
9.2. Estructura y problemas abiertos . . . . .	119
<b>Conclusiones</b>	<b>125</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>129</b>

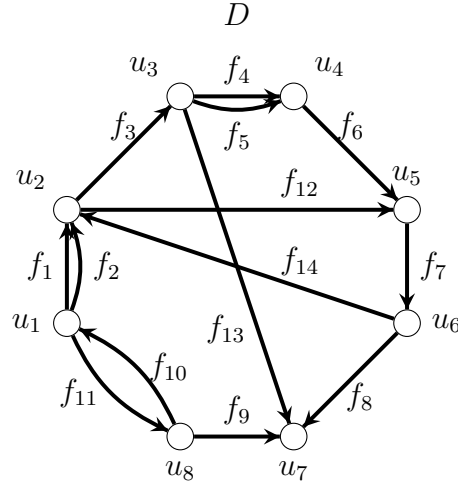
# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo damos la mayor parte de las definiciones que se usan a lo largo de este trabajo, tratando que éste sea autocontenido; sin embargo, debido a su extensión, referimos al lector a [2] y [4] para material básico y complementario. La primera sección se dedica a las definiciones básicas de multidigráficas, así como las definiciones de conjunto absorbente y conjunto independiente, que nos llevan al concepto de núcleo de una multidigráfica. En la segunda sección damos las definiciones de algunos tipos de multidigráficas, y de algunas operaciones entre multidigráficas y para multidigráficas, que son usadas en el trabajo.

### 1.1. Primeras definiciones

Una *multidigráfica*  $D$  consta de dos conjuntos  $V(D)$  y  $F(D)$ , y una función  $\psi_D$ . El conjunto  $V(D)$  es finito y no vacío, y el conjunto  $F(D)$  es finito y ajeno a  $V(D)$ . Los elementos  $V(D)$  son los vértices de  $D$  y los elementos de  $F(D)$  son las flechas de  $D$ . La función  $\psi_D$  se llama *función de incidencia* y asocia a cada flecha de  $D$  un par ordenado de vértices distintos de  $D$ , véase la figura 1.1. Si  $f$  es una flecha de  $D$  y  $\psi_D(f) = (u, v)$ , entonces decimos que  $u$  es el *vértice inicial* de  $f$  y que  $v$  el *vértice final* de  $f$ , también decimos que  $u$  es *adyacente hacia* el vértice  $v$  y el vértice  $v$  es *adyacente desde*  $u$ . El conjunto  $F_D[u, v]$  tiene como elementos las flechas de  $D$  cuyo vértice inicial es  $u$  y su vértice final es  $v$ ; es decir,  $F_D[u, v]$  es la imagen inversa del par ordenado  $(u, v)$  bajo  $\psi_D$ . Así, decimos que dos vértices  $u$  y  $v$  de  $D$  son *adyacentes* si existe una flecha entre ellos o, lo que es lo mismo, si  $F_D[u, v] \neq \emptyset$  o



**Figura 1.1:** Representación de una multidigráfica  $D$ , donde su conjunto de vértices es  $V(D) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$ , su conjunto de flechas está dado por  $F(D) = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14}\}$  y la función de incidencia es  $\psi_D(f_1) = (u_1, u_2)$ ,  $\psi_D(f_2) = (u_1, u_2)$ ,  $\psi_D(f_3) = (u_2, u_3)$ ,  $\psi_D(f_4) = (u_3, u_4)$ ,  $\psi_D(f_5) = (u_3, u_4)$ ,  $\psi_D(f_6) = (u_4, u_5)$ ,  $\psi_D(f_7) = (u_5, u_6)$ ,  $\psi_D(f_8) = (u_6, u_7)$ ,  $\psi_D(f_9) = (u_8, u_7)$ ,  $\psi_D(f_{10}) = (u_8, u_1)$ ,  $\psi_D(f_{11}) = (u_1, u_8)$ ,  $\psi_D(f_{12}) = (u_2, u_5)$ ,  $\psi_D(f_{13}) = (u_3, u_7)$  y  $\psi_D(f_{14}) = (u_6, u_2)$ .

$F_D[v, u] \neq \emptyset$ . El orden de  $D$  es el número de vértices en  $V(D)$  y el tamaño de  $D$  es el número de flechas en  $F(D)$ . Decimos que  $f \in F_D[u, v]$  es *simétrica* si  $F_D[v, u] \neq \emptyset$ , y llamamos a  $f$  *asimétrica* si  $F_D[v, u] = \emptyset$ . Cuando  $f$  es simétrica, entonces lo denotamos por  $u \leftrightarrow_D v$ . Si  $f$  es asimétrica escribimos  $u \mapsto_D v$ . Escribimos  $u \rightarrow_D v$  cuando  $F_D[u, v] \neq \emptyset$ . Extendiendo esta notación a conjuntos, sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos de vértices de  $D$ ,  $A \rightarrow_D B$ ,  $A \mapsto_D B$  y  $A \leftrightarrow_D B$  denotan que  $a \rightarrow_D b$ ,  $a \mapsto_D b$  y  $a \leftrightarrow_D b$ , respectivamente, para todo  $a \in A$  y todo  $b \in B$ .

Notemos que en la definición de multidigráfica, la función de incidencia no le asocia a una flecha el mismo vértice inicial y final, a estas flechas las llamamos *lazos*. Por otro lado, sí se permite la existencia de dos o más flechas que compartan el vértice inicial y el vértice final, a estas flechas las llamamos *flechas paralelas*. Cuando en una multidigráfica  $D$ , se tenga que  $F_D[u, v]$  contiene a lo más un elemento, para todo par de vértices  $u, v \in V(D)$ , decimos que  $D$  es una *digráfica*; es decir, las digráficas no tienen flechas



paralelas. En este trabajo habrá ocasiones en que únicamente trabajemos con digráficas u ocasiones en las que sean permitidos los lazos, en dichas ocasiones especificaremos en cuales casos están, o no, permitidos cada una. Por lo anterior, decimos que  $D$  es *reflexiva* si todos sus vértices tienen un lazo.

El grado exterior de un vértice  $v$ , también llamado *exgrado* y denotado por  $\delta_D^+(v) = \delta^+(v)$ , es el número de flechas de  $D$  que tienen a  $v$  como vértice inicial. Análogamente, el grado interior de un vértice  $v$ , también llamado *ingrado* y denotado por  $\delta_D^-(v) = \delta^-(v)$ , es el número de flechas de  $D$  que tienen a  $v$  como vértice final. Decimos que un vértice  $v \in V(D)$  es un *pozo* si  $\delta^+(v) = 0$ , o bien,  $v$  es *fuentes* si  $\delta^-(v) = 0$ , en el caso que  $v$  sea pozo y fuente lo llamamos *vértice aislado*. La *vecindad exterior* o *exvecindad* de un vértice  $v$  es  $N_D^+(v) = N^+(v) = \{u \in V(D) : F_D[v, u] \neq \emptyset\}$ , a sus elementos se les llama *vecinos exteriores* o *exvecinos* de  $v$ . La *vecindad interior* o *invecindad* de un vértice  $v$  es  $N_D^-(v) = N^-(v) = \{u \in V(D) : F_D[u, v] \neq \emptyset\}$ , a sus elementos se les llama *vecinos interiores* o *invecinos* de  $v$ . A un vértice  $x$  tal que  $N_D^+(x) = N_D^-(x) = V(D)$ , lo llamamos *vértice universal* de  $D$ . El conjunto de los vecinos exteriores de un subconjunto  $S$  de  $V(D)$  se define como  $N_D^+(S) = N^+(S) = \{y \in V(D) : F_D[v, y] \neq \emptyset \text{ para algún } v \in S\}$ . Análogamente, el conjunto de los vecinos interiores de un subconjunto  $S$  de  $V(D)$  es  $N_D^-(S) = N^-(S) = \{y \in V(D) : F_D[y, v] \neq \emptyset \text{ para algún } v \in S\}$ . Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos de vértices de  $D$ . Una *AB-flecha* en  $D$  es una flecha de  $F(D)$  cuyo vértice inicial está en  $A$  y el vértice final en  $B$ . Si  $A = \{x\}$ , entonces escribimos una *AB-flecha* como *xB-flecha*. Análogamente, si  $B = \{y\}$ , entonces escribimos *Ay-flecha*.

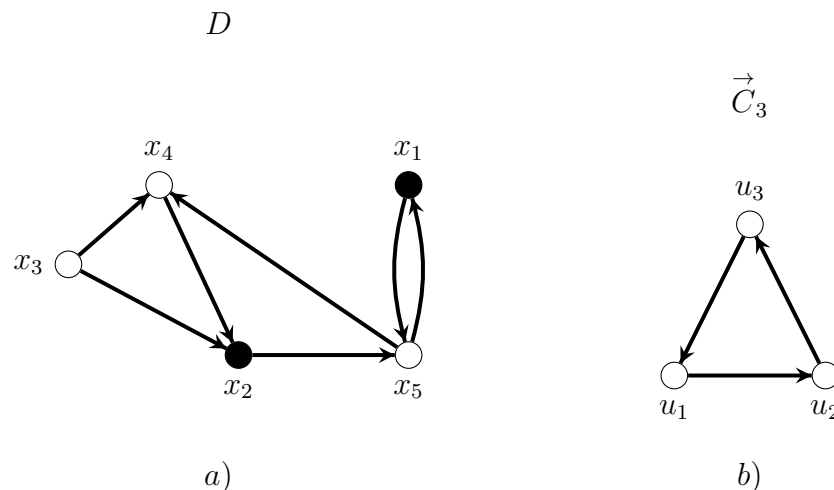
Un *camino* es una sucesión que alterna vértices y flechas  $C = (v_0, f_0, v_1, \dots, v_{n-1}, f_{n-1}, v_n)$  tal que  $f_i \in F_D[v_i, v_{i+1}]$  para toda  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . También lo llamamos un  $v_0v_n$ -camino, donde la longitud de  $C$  es  $l(C) = n$ . Por comodidad, cuando no sea necesario distinguir la flechas del camino, describimos a  $C$  como  $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$ . Una *trayectoria* es un camino que no repite vértices. Decimos que el camino  $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$  es *cerrado* si  $v_0 = v_n$ . Un *ciclo* es un camino cerrado que no repite vértices salvo el primero y el último. Si la longitud de un ciclo es impar lo llamamos *ciclo impar*. De la misma manera, si la longitud de un ciclo es par lo llamamos *ciclo par*. Es importante notar que, por definición, toda *uv-trayectoria* es un *uv-camino* pero no todo *uv-camino* es una *uv-trayectoria*; sin embargo, todo *uv-camino* contiene una *uv-trayectoria*. Sean  $C = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  y  $C' = (y_0, y_1, \dots, y_m)$  dos caminos tales que  $x_n = y_0$ . Escribimos  $(x_i, C, x_j)$  pa-

ra referirnos al subcamino  $(x_i, x_{i-1}, \dots, x_j)$  de  $C$ . También escribimos  $C \cup C'$  para referirnos a la concatenación, o unión, de los caminos  $C$  y  $C'$ , que está dada por el camino  $(x_0, x_1, \dots, x_n = y_0, y_1, \dots, y_m)$ . La digráfica que es exactamente una trayectoria asimétrica, de orden  $n$ , la denotamos por  $\vec{P}_n$ . Si la trayectoria es simétrica la denotamos por  $\leftrightarrow P_n$ . Además, si la digráfica es un ciclo asimétrico con orden  $n$ , lo denotamos por  $\vec{C}_n$ . Si el ciclo es simétrico lo denotamos por  $\leftrightarrow C_n$ .

Sea  $S$  un subconjunto de  $V(D)$ . Decimos que  $S$  es un conjunto *independiente* en  $D$  si todo par de vértices distintos de  $S$  no son adyacentes en  $D$ . Lo llamamos conjunto *absorbente* en  $D$  si para todo vértice que no está en  $S$  existe una flecha hacia algún vértice de  $S$  en  $D$ . Finalmente, un subconjunto  $N \subseteq V(D)$  es un *núcleo* de  $D$  si es ambos, un conjunto independiente y absorbente en  $D$ , véase la figura 1.2a. Observemos que en cualquier digráfica el conjunto que tiene un único vértice es un conjunto independiente, por lo que toda digráfica tiene al menos un conjunto independiente. Además, el conjunto de todos los vértices de la digráfica es un conjunto absorbente, por lo que toda digráfica tiene al menos un conjunto absorbente. Sin embargo, no todas las digráficas tienen núcleo. Por lo anterior, muchos autores se han dedicado a encontrar condiciones para poder encontrar al menos un núcleo en algunas familias de digráficas, véase la figura 1.2b.

Una *m-coloración* de una multidigráfica  $D$  es una función  $\zeta : F(D) \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$ . Nos referimos a  $D$  como una *multidigráfica m-coloreada*. Sea  $T = (x_0, f_0, x_1, \dots, f_{n-1}, x_n)$  una trayectoria en  $D$ , decimos que  $T$  es *monocromática* en  $D$  si el color de todas las flechas de  $T$  es el mismo, es decir,  $\zeta(f_i) = c$  para toda  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  con  $c \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Sean  $x, y \in V(D)$ , decimos que  $x$  *alcanza a y por trayectorias monocromáticas* en  $D$  si existe una trayectoria monocromática que empieza en  $x$  y termina en  $y$  en  $D$ . Un subconjunto  $S$  de  $V(D)$  es *independiente por trayectorias monocromáticas* si ningún vértice de  $S$  alcanza a otro vértice de  $S$  por trayectorias monocromáticas. Decimos que  $S$  es *absorbente por trayectorias monocromáticas* si cada vértice que no pertenece a  $S$  alcanza a un vértice de  $S$  por trayectorias monocromáticas en  $D$ . Finalmente, un *núcleo por trayectorias monocromáticas* de  $D$  es un subconjunto de vértices que es independiente por trayectorias monocromáticas y absorbente por trayectorias monocromáticas.

Observemos que si  $D$  es una multidigráfica  $m$ -coloreada tal que toda



**Figura 1.2:**  $N = \{x_1, x_2\}$  es un núcleo de  $D$ .  $\vec{C}_3$  no tiene núcleo.

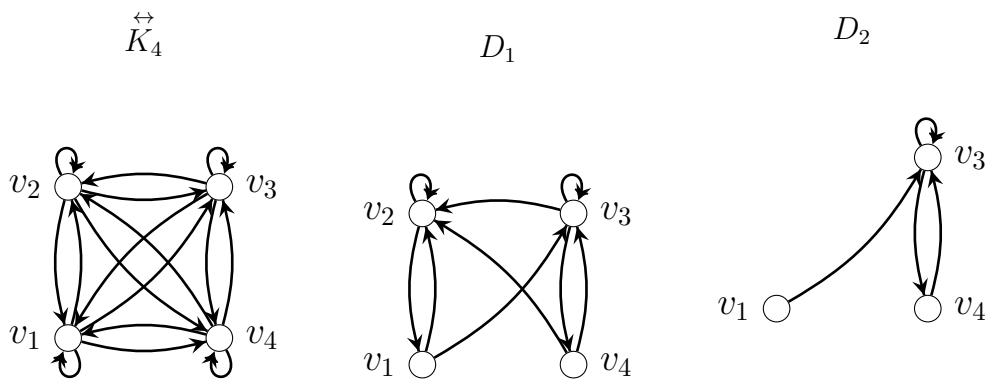
flecha de  $D$  tiene un color distinto, entonces  $N \subseteq V(D)$  es un núcleo por trayectorias monocromáticas de  $D$  si y solo si  $N$  es núcleo de  $D$ .

## 1.2. Tipos de multidigráficas, submultidigráficas y operaciones

En esta sección definimos algunos tipos de multidigráficas, operaciones de éstas, así como las submultidigráficas y algunos tipos de ellas. Además, enunciamos un resultado que nos es de utilidad en este trabajo.

Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos multidigráficas, posiblemente con lazos. Decimos que  $D_1$  es isomorfa a  $D_2$ , denotado por  $D_1 \cong D_2$ , si y solo si existen dos funciones biyectivas  $f : V(D_1) \rightarrow V(D_2)$  y  $\theta : F(D_1) \rightarrow F(D_2)$  tales que  $\psi_{D_1}(a) = (u, v)$  si y solo si  $\psi_{D_2}(\theta(a)) = (f(u), f(v))$ .

Sea  $D$  una multidigráfica. Una multidigráfica  $D_1$  es una *submultidigráfica* de  $D$ , denotado por  $D_1 \subseteq D$ , si  $V(D_1) \subseteq V(D)$ ,  $F(D_1) \subseteq F(D)$  y  $\psi_{D_1}$  es la función  $\psi_D$  restringida a  $A(D_1)$ . También decimos que  $D$  es una *supermultidigráfica* de  $D_1$ . Una multidigráfica  $D_2$  es una *submultidigráfica generadora* de  $D$  si es una submultidigráfica de  $D$  y  $V(D_2) = V(D)$ . También decimos que  $D$  es una *supermultidigráfica generadora* de  $D_2$ . Sea  $S \subseteq V(D)$ , la *submulti-*



**Figura 1.3:** La digráfica completa reflexiva de 4 vértices  $\overleftrightarrow{K}_4$ ,  $D_1$  una subdigráfica de  $\overleftrightarrow{K}_4$  y  $D_2 = D_1[S]$  la subdigráfica inducida por  $S = \{v_1, v_3, v_4\}$ .

digráfica inducida por  $S$  de  $D$ , denotada por  $D[S]$ , es tal que  $V(D[S]) = S$  y  $F(D[S]) = \{f \in F_D[x, y] : x, y \in S\}$ . En las definiciones anteriores, cuando  $D$  sea una digráfica omitimos *multi* de los nombres.

Sean  $H_1$  y  $H_2$  dos multidigráficas, posiblemente con lazos. Decimos que  $H_1$  es  $H_2$ -libre, si  $H_2$  no es isomorfa a ninguna submultidigráfica inducida de  $H_1$ .

Como en una digráfica  $D$ , existe a lo más una flecha en  $F_D[u, v]$ , con  $u, v \in V(D)$ , entonces escribimos  $(u, v)$  para hacer referencia a la única flecha cuya imagen, respecto a la función de incidencia de  $D$ , es  $(u, v)$ . Sea  $D$  una digráfica, posiblemente con lazos. El *complemento de  $D$* , denotado por  $D^c$ , es la digráfica tal que  $V(D^c) = V(D)$  y  $(u, v) \in F(D^c)$  si y solo si  $(u, v) \notin F(D)$ . La *digráfica dual* de  $D$ , denotada por  $D^{-1}$ , se define como la digráfica resultante de cambiarle la dirección a todas las flechas de  $D$ , es decir,  $F(D^{-1}) = \{(u, v) : (v, u) \in F(D)\}$ .

A una digráfica la llamamos *completa* si todo par de vértices son adyacentes y todas sus flechas son simétricas; es decir todas las posibles flechas están presentes. Si una digráfica completa tiene orden  $n$ , entonces la denotamos por  $\overleftrightarrow{K}_n$ , en caso de que sea reflexiva la llamamos *completa reflexiva*, véase la figura 1.3. A una digráfica  $D$  tal que todo par de vértices de  $D$  son adyacentes la llamamos *semicompleta*.

Una digráfica  $D$  es *transitiva* si para cada tres vértices distintos  $x, y$  y  $z$

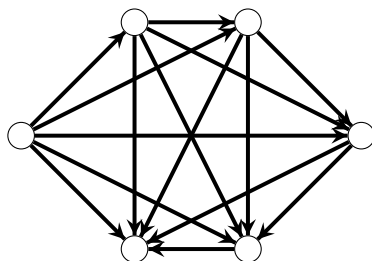


Figura 1.4: Torneo de seis vértices.

tales que  $(x, y, z)$  es una trayectoria en  $D$ , entonces  $(x, z) \in F(D)$ . Observemos que las digráficas completas son transitivas, véase la figura 1.3.

Una digráfica  $D$  es *bipartita* si  $V(D)$  admite una partición en dos conjuntos independientes y no vacíos,  $V$  y  $W$ . A los conjuntos  $V$  y  $W$  les llamamos clases de la bipartición de  $D$ . Si para todo par de vértices  $u, v \in V(D)$  en diferentes clases de la bipartición de  $D$ , se tiene que  $(u, v) \in F(D)$  y  $(v, u) \in F(D)$ , entonces decimos que  $D$  es una digráfica *bipartita completa*, y la denotamos por  $\overset{\leftrightarrow}{K}_{r,s}$ , donde  $r = |V|$  y  $s = |W|$ .

Un *multitorneo*  $T$  es una multidigráfica tal que para todo par de vértices distintos  $u$  y  $v$  de  $T$ , se tiene que  $F_D[u, v] \neq \emptyset$  o  $F_D[v, u] \neq \emptyset$ , pero no ambos. Un *torneo* es un multitorneo que es una digráfica, es decir, que entre todo par de vértices distintos existe exactamente una flecha entre ellos, véase la figura 1.4.

Decimos que una multidigráfica  $D$  es *conexa* si para todo par de vértices  $u$  y  $v$  existe una sucesión de vértices que empieza en  $u$  y termina en  $v$  tal que vértices consecutivos en la sucesión son adyacentes. Observemos que la sucesión en la multidigráfica conexa no tiene que ser un camino en ella. Por otro lado, decimos que  $H$  es una multidigráfica *fuertemente conexa* si para cada par de vértices  $u$  y  $v$  existe una  $uv$ -trayectoria y una  $vu$ -trayectoria en  $H$ . Debido a que no toda multidigráfica es conexa, definimos una *componente conexa* de una multidigráfica como una submultidigráfica conexa que es máxima por contención, con esta propiedad. Análogamente, una *componente fuerte* de una multidigráfica es una submultidigráfica fuertemente conexa que es máxima, por contención, con esta propiedad. Sea  $D$  una multidigráfica y  $D'$  una componente fuerte de  $D$ . Decimos que  $D'$  es una *componente fuerte inicial (final)* o simplemente *componente inicial (final)* de  $D$  si  $N^-(V(D')) \subseteq V(D')$  ( $N^+(V(D')) \subseteq V(D')$ ).

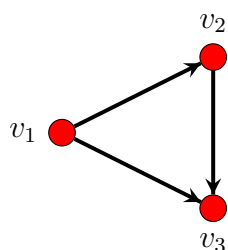
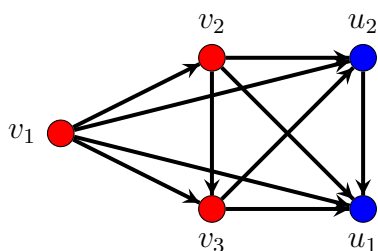
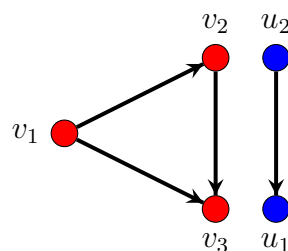
$D_1$  $D_2$  $D_1 \bullet D_2$  $D_1 + D_2$ 

Figura 1.5: Digráficas  $D_1$  y  $D_2$ , con su suma  $D_1 \bullet D_2$  y su unión  $D_1 + D_2$ .

El siguiente teorema da una caracterización de las digráficas bipartitas que son fuertemente conexas con respecto a los ciclos en ella, la prueba de este teorema se puede encontrar en [2].

**Teorema 1.2.1.** [2] Sea  $D$  una digráfica fuertemente conexa de orden al menos 2.  $D$  es bipartita si y solo si  $D$  no tiene ciclos impares.

Sean  $D$  una multidigráfica,  $x$  un vértice de  $V(D)$  y  $f$  una flecha de  $F(D)$ . Definimos  $D - x$  como la multidigráfica tal que  $V(D - x) = V(D) - \{x\}$  y  $F(D - x) = F(D) - \{e \in F(D) : x \text{ es vértice final o inicial de } e\}$ . De la misma manera,  $D - f$  es la multidigráfica tal que  $V(D - f) = V(D)$  y  $F(D - f) = F(D) - \{f\}$ . Además, si  $e \notin F(D)$  y su vértice inicial es  $u$  y el final es  $v$ , entonces  $D \cup e$  es la digráfica tal que  $V(D \cup e) = V(D)$  y  $F(D \cup e) = F(D) \cup \{e\}$ .

Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos multidigráficas, posiblemente con lazos, cuyos conjuntos de vértices son ajenos. La suma de  $D_1$  y  $D_2$ , denotada por

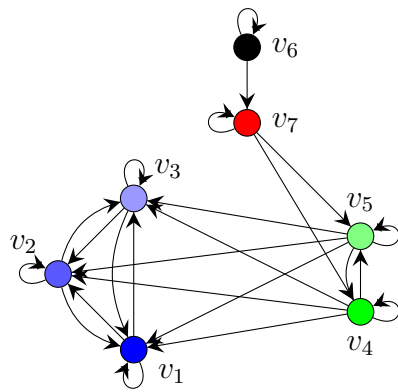
$D_1 \bullet D_2$ , es la multidigráfica definida por  $V(D_1 \bullet D_2) = V(D_1) \cup V(D_2)$  y  $F(D_1 \bullet D_2) = A(D_1) \cup A(D_2) \cup (V(D_1) \times V(D_2))$ , véase la figura 1.5. La *unión* de  $D_1$  y  $D_2$ , denotada por  $D_1 + D_2$ , es la multidigráfica tal que  $V(D_1 + D_2) = V(D_1) \cup V(D_2)$  y  $F(D_1 + D_2) = F(D_1) \cup F(D_2)$ . Basados en la notación anterior, si se unen varias veces la misma multidigráfica  $D$ , la denotamos por  $nD$  donde  $n$  es el número de copias de  $D$ , véase la figura 1.5.

A continuación definimos la contracción de una digráfica. Esta operación nos será de gran ayuda a lo largo de todo el trabajo para poder garantizar la pertenencia, o no, de digráficas a ciertas familias específicas.

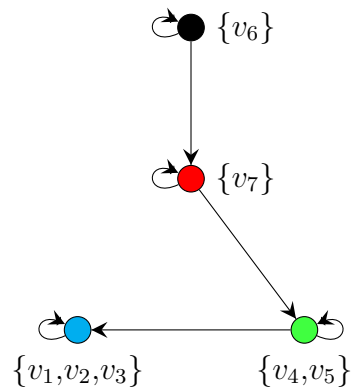
Sea  $H$  una digráfica reflexiva; es decir, todos sus vértices tienen un lazo, tal que:

1.  $V(H) = \bigsqcup_{i=1}^n C_i$ , donde  $\sqcup$  denota la unión ajena.
2.  $H[C_i]$  es una digráfica completa.
3.  $C_i \times C_j \subseteq F(H)$ , siempre que  $i \neq j$  y  $(C_i \times C_j) \cap F(H) \neq \emptyset$  o  $i = j$  y  $(x, x) \in F(H)$  para alguna  $x \in C_i$ .

$H$



$H'$



**Figura 1.6:** Digráfica  $H$  con su contracción  $H'$ .

La digráfica  $H'$  tal que  $V(H') = \{C_1, \dots, C_n\}$  y  $(C_i, C_j) \in F(H')$  si y solo si  $(C_i \times C_j) \cap F(H) \neq \emptyset$  se llama una *contracción* de  $H$ , de la misma manera, se dice que  $H$  es una *expansión* de  $H'$ , véase la figura 1.6. A cada  $C_i$  lo llamamos *conjunto de contracción* de  $H$ .





# Capítulo 2

## Introducción histórica

En este capítulo damos una breve introducción histórica a la evolución de la teoría de núcleos en digráficas.

En el capítulo anterior, definimos un núcleo de una digráfica como un subconjunto de vértices que es independiente y absorbente en dicha digráfica. El concepto de núcleo tuvo su origen en la teoría de juegos y economía, Von Neumann y Morgenstern en [19] definieron el concepto *solución* en juegos cooperativos, cuya noción es la misma a la de núcleo en digráficas. Como ya hemos visto, no toda digráfica tiene núcleo, más aún, Chvátal probó en [6] que el problema de decisión de determinar si una digráfica tiene núcleo o no es un problema **NP**-completo. Por lo que, muchos autores han centrado sus investigaciones en encontrar condiciones para asegurar la existencia de al menos un núcleo en una digráfica. De la misma manera, se buscaron algunas generalizaciones.

Sea  $D$  una multidigráfica y  $u, v \in V(D)$ . Decimos que  $u$  alcanza a  $v$  por trayectorias en  $D$ , si existe una  $uv$ -trayectoria en  $D$ . Un subconjunto de vértices  $S$  es *independiente por trayectorias* si ningún vértice de  $S$  alcanza por trayectorias a ningún otro vértice de  $S$  en  $D$ . Decimos que  $S$  es un conjunto *absorbente por trayectorias* si cada vértice que no pertenece a  $S$ , alcanza por trayectorias a al menos un vértice de  $S$  en  $D$ . Un *núcleo por trayectorias* de  $D$  es un subconjunto de vértices que es ambos, independiente por trayectorias y absorbente por trayectorias en  $D$ . En el libro clásico de Berge [3], se prueba que toda digráfica tiene un núcleo por trayectorias.

En 1953 Landau probó en [16] que todo torneo tiene un vértice el cual puede alcanzar a cualquier otro vértice del torneo con una trayectoria de longitud a lo más 2, él llamó a estos vértices *reyes*. Posteriormente, el concepto

de núcleo fue generalizado para digráficas  $m$ -coloreadas, bajo el nombre de *núcleo por trayectorias monocromáticas*, los cuales ya definimos en el capítulo anterior. Como ya hemos observado, si  $D$  es una digráfica de tamaño  $m$  que está  $m$ -coloreada, entonces  $N \subseteq V(D)$  es un núcleo por trayectorias monocromáticas de  $D$  si y solo si  $N$  es núcleo  $D$ . Por otro lado, si consideramos una digráfica 1-coloreada  $D$ , entonces todas las trayectorias son trayectorias monocromáticas y viceversa. De esta manera,  $N \subseteq V(D)$  es un núcleo por trayectorias monocromáticas de  $D$  si y solo si  $N$  es núcleo por trayectorias  $D$ . En este sentido, el concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas generaliza al concepto de núcleo por trayectorias.

En 1982 Sands, Sauer and Woodrow probaron en [22], que toda multidigráfica 2-coloreada, con algunas restricciones para el caso infinito, contiene un núcleo por trayectorias monocromáticas. En el mismo trabajo se incluyó la siguiente pregunta, que se debe a Erdős: *¿es cierto que para cada  $n$ , existe un entero positivo más pequeño  $f(n)$  tal que cada torneo  $n$ -coloreado contiene un conjunto  $S$  de  $f(n)$  vértices con la propiedad de que  $S$  es absorbente por trayectorias monocromáticas?, en particular, ¿ $f(3) = 3$ ? De acuerdo al resultado obtenido por Sands Sauer y Woodrow,  $f(2) = 1$  y como todo torneo tiene un núcleo por trayectorias  $f(1) = 1$ . Recientemente, Bousquet, Lochet y Thomassé demostraron que *para cada  $k$ , existe un entero  $f(k)$  tal que si  $T$  es una multidigráfica semicompleta cuyo conjunto de flechas es la unión de  $k$  conjuntos de flechas casi ordenados, entonces existe un subconjunto de vértices  $S$  que es absorbente con a lo más  $f(k)$  elementos* [5]. Dado que el cierre transitivo<sup>1</sup> de cada clase de color se puede ver como un cuasiorden, por lo tanto, el problema Erdős–Sands–Sauer–Woodrow puede deducirse del resultado en [5].*

Siguiendo con el caso monocromático, Minggang [18] probó que todo torneo sin triángulos heterocromáticos; es decir, que las flechas de toda subdigráfica inducida por tres vértices en el torneo usan a lo más dos colores, tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas. En [10], Galeana-Sánchez probó que si todos los ciclos de longitud  $k$  tienen al menos  $k - 1$  colores idénticos con  $k \in \{3, 4\}$ , entonces existe un vértice que es absorbente por trayectorias monocromáticas; ambos resultados fueron generalizados por Hahn, Ille y Woodrow en [13].

En [17], Linek y Sands generalizaron el problema descrito por Sands,

---

<sup>1</sup>El cierre transitivo de una digráfica es la digráfica resultante de agregar las flechas faltantes hasta obtener una digráfica transitiva.

Sauer y Woodroow en [22] de la siguiente manera; sea  $P$  un conjunto parcialmente ordenado y  $c$  una coloración de las flechas de un torneo  $T$  con los elementos de  $P$ . Ellos llamaron a una trayectoria  $(v_1, \dots, v_n)$  en  $T$  *monótona* si  $c(v_i, v_{i+1}) \leq c(v_{i+1}, v_{i+2})$  en  $P$  para cada  $i$ . Propusieron el problema de encontrar el menor entero positivo  $t_c(P)$ , tal que para cada coloración de las flechas de cualquier torneo  $T$  con elementos de  $P$ , existe un  $S \subseteq V(T)$  con a lo más  $t_c(P)$  vértices, con la propiedad de que para cada vértice en  $V(T) - S$  existe una trayectoria monótona que empieza en él y termina en un vértice de  $S$ .

Adicionalmente, ellos consideraron reemplazar al conjunto parcialmente ordenado con una digráfica, reflexiva y colorear las flechas de un torneo con los vértices de la digráfica reflexiva. Lo que nos lleva a algunas de las definiciones más importantes de este trabajo.

**Definición 2.0.1.** *Sea  $H$  una digráfica posiblemente con lazos y  $D$  una multidigráfica. Una  $H$ -coloración de las flechas de  $D$  o, simplemente, una  $H$ -coloración de  $D$  es una función  $\zeta : F(D) \rightarrow V(H)$ .*

Con base en la definición 2.0.1, los vértices de  $H$  son pensados como colores. También decimos que  $D$  es una multidigráfica  $H$ -coloreada. Observemos que una  $H$ -coloración no tiene que ser suprayectiva, es decir, no se tienen que utilizar todos los colores. De lo anterior, se sigue que si  $H'$  es una subdigráfica de  $H$ , entonces toda  $H'$ -coloración de una multidigráfica es una  $H$ -coloración de la misma multidigráfica; es decir, toda multidigráfica  $H'$ -coloreada es una multidigráfica  $H$ -coloreada.

**Definición 2.0.2.** *Sea  $D$  una multidigráfica  $H$ -coloreada, con  $H$ -coloración  $\zeta$ . Un camino  $W = (x_0, \dots, x_n)$  en  $D$  es un  $H$ -camino si  $\zeta(W) = (\zeta((x_0, x_1)), \zeta((x_1, x_2)), \dots, \zeta((x_{n-1}, x_n)))$  es un camino en  $H$ . Si  $W$  es una trayectoria, diremos que  $W$  es una  $H$ -trayectoria.*

Para ejemplificar las definiciones anteriores, consideremos la digráfica  $H$  y la multidigráfica  $H$ -coloreada  $D$  en la figura 2.1. Notemos que  $C = (x, f_1, y, f_3, z, f_4, y, f_6, w)$  es un  $H$ -camino, pues  $(b, r, r, g)$  es un camino en  $H$ . Sin embargo,  $(w, f_2, x, f_1, y)$  no es una  $H$ -trayectoria pues  $(b, b)$  no es un lazo de  $H$ .

En el sentido de encontrar los caminos y trayectorias en una multidigráfica  $D$  que son  $H$ -caminos y  $H$ -trayectorias, respectivamente, pensamos a  $H$  como un *patrón de colores*, o simplemente un *patrón*. Además, a lo largo del trabajo,

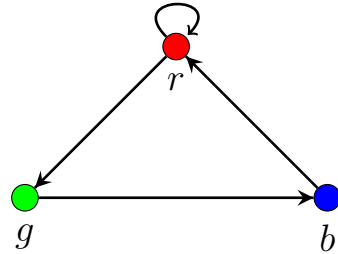
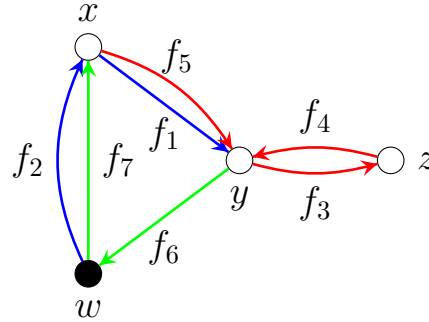
$H$  $D$ 

Figura 2.1:  $H$  una digráfica y  $D$  una multidigráfica  $H$ -coloreada.

vamos a suponer que para todo par de vértices  $u$  y  $v$  de  $D$ , todo par de flechas de  $F_D[u, v]$  tienen color distinto, lo que implica que  $|F_D[u, v]| \leq |V(H)|$ .

A partir de la definición anterior, es natural definir el concepto de alcance por  $H$ -caminos y por  $H$ -trayectorias. Sea  $D$  una multidigráfica  $H$ -coloreada y  $x, y \in V(D)$  decimos que  $x$  alcanza a  $y$  por  $H$ -caminos ( $H$ -trayectorias) si existe un  $H$ -camino ( $H$ -trayectoria) que empieza en  $x$  y termina en  $y$  en  $D$ .

Regresando al problema de Linek y Sands,  $t_c(H)$  es el menor entero positivo tal que en cualquier torneo  $H$ -coloreado  $T$ , existe un subconjunto  $S$  de vértices de  $T$ , con a lo más  $t_c(H)$  vértices, con la propiedad de que para cada vértice en  $V(T) - S$  existe una  $H$ -trayectoria que empieza en él y termina en algún vértice de  $S$ .

De manera natural, ya definido el alcance por  $H$ -caminos en una multidigráfica  $D$ , se dice que un subconjunto  $S$  de vértices de  $D$  es *independiente por  $H$ -caminos* en  $D$  si ningún vértice de  $S$  alcanza por  $H$ -caminos a otro vértice de  $S$  en  $D$ . De la misma manera, un subconjunto  $S$  de vértices de  $D$  es *absorbente por  $H$ -caminos* en  $D$  si todo vértice de  $V(D) - S$  alcanza a un vértice de  $S$  por  $H$ -caminos en  $D$ . Un *núcleo por  $H$ -caminos* en  $D$  es un subconjunto de vértices que es ambos; independiente por  $H$ -caminos y absorbente por  $H$ -caminos en  $D$ .

Considerando  $H$  y la multidigráfica  $H$ -coloreada  $D$  de la figura 2.1, probaremos que el conjunto  $\{w\}$  es un núcleo por  $H$ -caminos de  $D$ . Como

$\{w\}$  consta de un único vértice, entonces  $\{w\}$  es un conjunto independiente por  $H$ -caminos en  $D$ . Además, el camino  $(x, f_1, y, f_3, z, f_4, y, f_6, w)$  es un  $H$ -camino en  $D$  que pasa por todos los vértices y termina en  $w$ , por lo que  $\{w\}$  es un conjunto absorbente por  $H$ -caminos en  $D$ . Por lo tanto,  $\{w\}$  es un núcleo por  $H$ -caminos en  $D$ .

Este trabajo se centra, principalmente, en las diferencias y similitudes entre la existencia de los  $H$ -caminos y las  $H$ -trayectorias. Como ya hemos mencionado, todo camino contiene una trayectoria; sin embargo, esto no es siempre cierto cuando nos referimos a  $H$ -caminos y  $H$ -trayectorias en multidigráficas  $H$ -coloreadas. Para poder ejemplificar mejor esta afirmación el siguiente capítulo está centrado en exhibir las diferencias entre  $H$ -caminos y  $H$ -trayectorias.

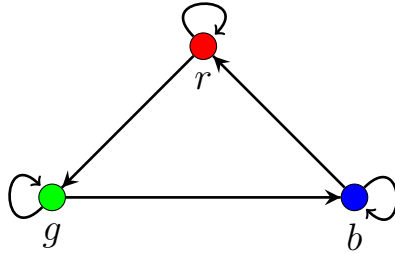
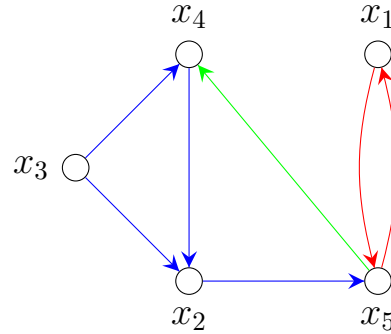


# Capítulo 3

## *H*-trayectorias y *H*-caminos

Este capítulo se centra en las diferencias y similitudes entre los *H*-caminos y las *H*-trayectorias en una multidigráfica *H*-coloreada, así como entre los conceptos definidos a partir del alcance por *H*-caminos y los definidos a partir de las *H*-trayectorias. En la primera parte del capítulo mostramos como un *H*-camino entre dos vértices no contiene una *H*-trayectoria entre los mismos. Basados en lo anterior, mostramos las diferencias y similitudes entre los conceptos de independencia por *H*-caminos y absorbencia por *H*-caminos con los conceptos de independencia por *H*-trayectorias y absorbencia por *H*-trayectorias, y por consecuencia, entre los conceptos de núcleo por *H*-caminos y núcleo por *H*-trayectorias.

Para convencer al lector que los conceptos de núcleo por *H*-caminos y núcleo por *H*-trayectorias son distintos, y que el problema de decisión de su existencia es distinto, exhibimos una digráfica  $H_1$ -coloreada que contiene un núcleo por  $H_1$ -trayectorias y no contiene núcleo por  $H_1$ -caminos. De la misma manera, exhibimos otra digráfica  $H_2$ -coloreada que contiene un núcleo por  $H_2$ -caminos y no contiene núcleo por  $H_2$ -trayectorias. Incluso, a partir de los ejemplos anteriores, construimos una familia infinita de digráficas  $H_1$ -coloreadas que tienen núcleo por  $H_1$ -trayectorias y no contienen núcleo por  $H_1$ -caminos, y una familia infinita de digráficas  $H_2$ -coloreada que contienen un núcleo por  $H_2$ -caminos y no contienen núcleo por  $H_2$ -trayectorias. Concluyendo así, que son conceptos distintos que valen la pena investigar. A pesar de las diferencias y de ser conceptos distintos, no se puede negar que ambos están estrechamente relacionados, por lo anterior, caracterizamos a todos los patrones *H* tales que para toda digráfica y toda *H*-coloración, se tiene que todo *H*-camino de  $u$  a  $v$  contiene una *H*-trayectoria de  $u$  a  $v$ .

$H$  $D$ 

**Figura 3.1:**  $(x_2, x_5, x_1, x_5, x_4)$  es un  $H$ -camino de  $x_2$  a  $x_4$  que no contiene una  $H$ -trayectoria de  $x_2$  a  $x_4$ .

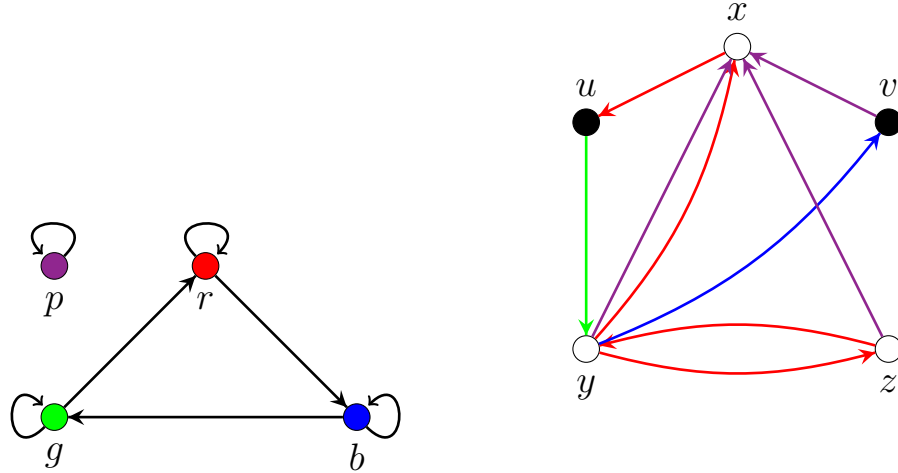
### 3.1. Alcance por $H$ -trayectorias

Por definición, en una multidigráfica, toda  $uv$ -trayectoria es un  $uv$ -camino; más aún, todo  $uv$ -camino contiene una  $uv$ -trayectoria. Sin embargo, esto no siempre es cierto cuando hablamos de  $H$ -caminos y  $H$ -trayectorias. Sea  $H$  una digráfica, posiblemente con lazos, y  $D$  una multidigráfica  $H$ -coloreada. Por definición, toda  $H$ -trayectoria de  $u$  a  $v$  es un  $H$ -camino de  $u$  a  $v$  en  $D$ . En particular, las flechas de  $D$  son  $H$ -trayectorias y  $H$ -caminos; sin embargo, no todo  $H$ -camino de  $u$  a  $v$  contiene una  $H$ -trayectoria de  $u$  a  $v$ . Además, la concatenación de un  $H$ -camino de  $u$  a  $v$  con un  $H$ -camino de  $v$  a  $w$ , no necesariamente es un  $H$ -camino de  $u$  a  $w$ .

Para ejemplificar la observación anterior, consideremos a  $D$  la digráfica  $H$ -coloreada, ilustrada en la figura 3.1. Notemos que  $C = (x_2, x_5, x_1, x_5, x_4)$  es un  $H$ -camino en  $D$ ; sin embargo, la única trayectoria de  $x_2$  a  $x_4$  contenida en  $C$  es  $(x_2, x_5, x_4)$  que no es una  $H$ -trayectoria, pues el color  $(g, b)$  no es una flecha de  $H$ . Por otro lado,  $(x_3, x_2, x_5)$  y  $(x_5, x_4)$  son dos  $H$ -caminos pero el camino  $(x_3, x_2, x_5, x_4)$  no es un  $H$ -camino pues  $(b, b, g)$  no es un camino en  $H$ .

Por lo anterior, podemos concluir que el alcance por  $H$ -caminos y por  $H$ -trayectorias no son iguales. De esta manera, vale la pena definir indepen-



$H$  $D$ 

**Figura 3.2:**  $N = \{u, v\}$  es un núcleo por  $H$ -trayectorias de  $D$ .

dencia por  $H$ -trayectorias y absorbencia por  $H$ -trayectorias.

Para las siguientes definiciones, consideremos  $H$  una digráfica, posiblemente con lazos, y  $D$  una multidigráfica  $H$ -coloreada. Un subconjunto  $I \subseteq V(D)$  es *independiente por  $H$ -trayectorias* en  $D$ , si ningún vértice de  $I$  alcanza por  $H$ -trayectorias a otro vértice de  $I$  en  $D$ . Un subconjunto  $S \subseteq V(D)$  es *absorbente por  $H$ -trayectorias* en  $D$  si todo vértice que no está en  $S$  alcanza por  $H$ -trayectorias a un vértice de  $S$  en  $D$ . Un subconjunto  $N \subseteq V(D)$  es un *núcleo por  $H$ -trayectorias* en  $D$  si es ambos: independiente por  $H$ -trayectorias y absorbente por  $H$ -trayectorias en  $D$ .

Consideremos la digráfica  $H$  y la multidigráfica  $H$ -coloreada  $D$  en la figura 3.2. Demostraremos que  $N = \{u, v\}$  es un núcleo por  $H$ -trayectorias de  $D$ . Veamos que  $N$  es independiente por  $H$ -trayectorias en  $D$ . Debido a que el único vecino exterior de  $v$  es el vértice  $x$  y el único vecino exterior de  $x$  es  $u$ , entonces la única trayectoria de  $v$  a  $u$  en  $D$  es  $(v, x, u)$ ; sin embargo,  $(p, r)$  no es una flecha de  $H$ , lo que implica que  $(v, x, u)$  no es una  $H$ -trayectoria. Por lo tanto, no existe la  $H$ -trayectoria de  $v$  a  $u$  en  $D$ . Por otro lado, como el único exvecino de  $u$  es  $y$ , y el único invecino de  $v$  es  $y$ , se sigue que la única trayectoria de  $u$  a  $v$  en  $D$  es  $(u, y, v)$ , pero  $(g, b)$  no es una flecha de  $H$ ; es decir, no existe un  $H$ -trayectoria de  $u$  a  $v$  en  $D$ . Por lo tanto,  $N$  es indepen-

diente por  $H$ -trayectorias en  $D$ . Ahora mostraremos que  $N$  es absorbente por  $H$ -trayectorias en  $D$ . Notemos que  $(z, y, v)$  es una  $H$ -trayectoria en  $D$ , pues  $(r, b)$  es una flecha de  $H$ . Además, como toda flecha es una  $H$ -trayectoria, entonces  $(x, u)$  lo es. Se sigue que  $N$  es absorbente por  $H$ -trayectorias, y por lo tanto,  $N$  es núcleo por  $H$ -trayectorias en  $D$ .

Las siguientes observaciones dicen que los conjuntos absorbentes por  $H$ -trayectorias son conjuntos absorbentes por  $H$ -caminos, y los conjuntos independientes por  $H$ -caminos son conjuntos independientes por  $H$ -trayectorias.

**Observación 3.1.1.** *Sea  $H$  una digráfica, posiblemente con lazos, y  $D$  una multidigráfica  $H$ -coloreada. Como toda  $H$ -trayectoria es un  $H$ -camino, entonces*

1. *Todo conjunto absorbente por  $H$ -trayectorias es un conjunto absorbente por  $H$ -caminos en  $D$ .*
2. *Todo conjunto independiente por  $H$ -caminos es un conjunto independiente por  $H$ -trayectorias en  $D$ .*

A pesar de la observación anterior, ya que no todo  $H$ -camino de  $u$  a  $v$  contiene una  $H$ -trayectoria de  $u$  a  $v$ , podemos obtener la siguiente observación.

**Observación 3.1.2.** *Sea  $H$  una digráfica, posiblemente con lazos, y  $D$  una multidigráfica  $H$ -coloreada. Como no todo  $H$ -camino entre dos vértices contiene una  $H$ -trayectoria entre los mismo vértices, entonces*

1. *Un conjunto absorbente por  $H$ -caminos no necesariamente es un conjunto absorbente por  $H$ -trayectorias en  $D$ .*
2. *Un conjunto independiente por  $H$ -trayectorias no necesariamente es un conjunto independiente por  $H$ -caminos en  $D$ .*

Las dos observaciones anteriores nos dan pie a la siguiente sección.

## 3.2. Núcleos por $H$ -trayectorias y núcleos por $H$ -caminos

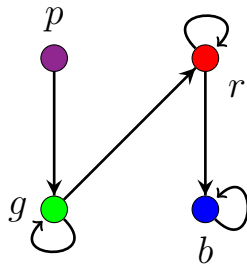
Esta sección se conforma por tres subsecciones. La primera muestra un patrón  $H_1$  y una digráfica  $H_1$ -coloreada  $D_1$  tal que  $D_1$  tiene núcleo por

$H_1$ -trayectorias pero no tiene núcleo por  $H_1$ -caminos. La segunda subsección muestra un patrón  $H_2$  y una digráfica  $H_2$ -coloreada  $D_2$  tal que  $D_2$  tiene núcleo por  $H_2$ -caminos pero no tiene núcleo por  $H_1$ -trayectorias. En la tercera sección, a partir de los ejemplos de las primeras secciones, se muestran familias infinitas con las mismas propiedades descritas en las primeras dos subsecciones.

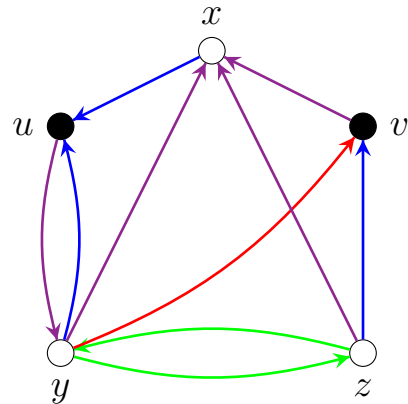
### 3.2.1. Digráficas con núcleo por $H$ -trayectorias sin núcleo por $H$ -caminos

Consideremos el siguiente patrón  $H_1$  y la digráfica  $H_1$ -coloreada  $D_1$ .

**Ejemplo 3.2.1.**  $H_1$



$D_1$



**Afirmación 3.2.1.**  $D_1$  tiene núcleo por  $H_1$ -trayectorias y no tiene núcleo por  $H_1$ -caminos.

*Demostración.* Afirmamos que  $N_1 = \{u, v\}$  es un núcleo por  $H_1$ -trayectorias de  $D_1$ . Veamos que  $N_1$  es independiente por  $H_1$ -trayectorias en  $D_1$ .

Notemos que la única trayectoria de  $v$  a  $u$  en  $D_1$  es  $(v, x, u)$ ; sin embargo,  $(p, b)$  no es una flecha de  $H_1$ , por lo que no es una  $H_1$ -trayectoria en  $D_1$ . Se sigue que, no existe una  $H_1$ -trayectoria de  $v$  a  $u$  en  $D_1$ . Por otro lado, como el único exvecino de  $u$  es  $y$ , los invecinos de  $v$  son  $y$  y  $z$ , y el único invecino de  $z$  es  $y$ , entonces las dos únicas trayectorias de  $u$  a  $y$  en  $D_1$  son  $(u, y, v)$

y  $(u, y, z, v)$ , pero no son  $H_1$ -trayectorias ya que  $(p, r)$  no es flecha de  $H_1$  y  $(p, g, b)$  no es un camino en  $H_1$  pues  $(g, b)$  no es flecha de  $H_1$ , es decir, no existe la  $H_1$ -trayectoria de  $u$  a  $v$  en  $D_1$ . Por lo tanto,  $N_1$  es independiente por  $H_1$ -trayectorias en  $D_1$ .

Para la absorbencia por  $H_1$ -trayectorias, basta observar que  $(x, u)$ ,  $(y, v)$  y  $(z, v)$  son flechas de  $D_1$ . Por lo que,  $N_1$  es absorbente por  $H_1$ -trayectorias en  $D_1$ .

Por lo tanto,  $N_1$  es núcleo por  $H_1$ -trayectorias de  $D_1$ .

Afirmamos que  $D_1$  no tiene núcleo por  $H_1$ -caminos. Procediendo por contradicción, supongamos que  $D_1$  tiene un núcleo por  $H_1$ -caminos, digamos  $N'_1$ . Observemos que como todo conjunto independiente por  $H_1$ -caminos es independiente en  $D_1$ , y la cardinalidad más grande que puede tener un conjunto independiente en  $D_1$  es 2, se deduce que,  $|N'_1| \leq 2$ .

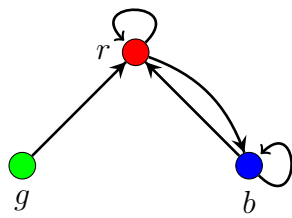
Supongamos que  $|N'_1| = 1$ . Observemos que el único exvecino de  $x$  es  $u$  y el único exvecino de  $u$  es  $y$ ; se sigue que, todo  $xy$ -camino, todo  $xz$ -camino y todo  $xv$ -camino contienen la trayectoria  $(x, u, y)$ , que no es una  $H_1$ -trayectoria pues  $(b, p)$  no es una flecha de  $H_1$ . Por lo que,  $\{y\}$ ,  $\{z\}$  y  $\{v\}$  no son núcleos por  $H_1$ -caminos en  $D_1$ . Así, tendremos los siguientes casos.

- Si  $N'_1 = \{u\}$ , entonces como el único exvecino de  $v$  en  $D_1$  es  $x$ , y el único exvecino de  $x$  es  $u$ , se sigue que todo camino de  $v$  a  $u$  en  $D_1$  contiene como subcamino a  $(v, x, u)$  que no es un  $H_1$ -camino pues  $(p, b)$  no es flecha de  $H_1$ . Por lo que,  $N'_1$  no es absorbente por  $H_1$ -caminos. Por lo tanto,  $N'_1 \neq \{u\}$ .
- Si  $N'_1 = \{x\}$ , entonces notemos que la última flecha de todo camino de  $u$  a  $x$  es de color  $p$ , pero el color  $p$  no tiene lazos y es una fuente en  $H_1$ . Por lo que, ningún camino de  $u$  a  $x$  es un  $H_1$ -camino en  $D_1$ . Se sigue que  $N'_1$  no es absorbente por  $H_1$ -caminos. Por lo tanto,  $N'_1 \neq \{x\}$ .

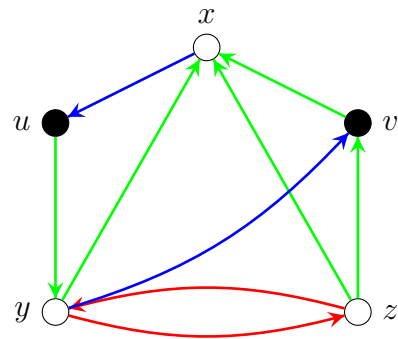
Por lo anterior, podemos concluir que ningún conjunto de cardinalidad uno es absorbente por  $H_1$ -caminos en  $D_1$ . Lo que implica que  $|N'_1| = 2$ . Notemos que los únicos conjuntos independientes de  $D_1$  con cardinalidad dos son  $\{u, v\}$  y  $\{u, z\}$ . Pero  $(u, y, z, y, v)$  es un  $H_1$ -camino que empieza en  $u$ , pasa por  $z$  y termina  $v$ . Lo que implica que ni  $\{u, v\}$ , ni  $\{u, z\}$  son independientes por  $H_1$ -caminos en  $D_1$ . Por lo tanto,  $|N'_1| \neq 2$ , lo que es una contradicción.

Por lo tanto,  $D_1$  no tiene núcleo por  $H_1$ -caminos.  $\square$

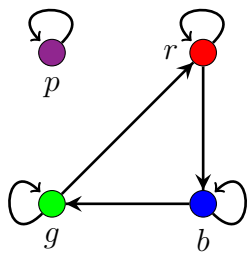
$H_2$



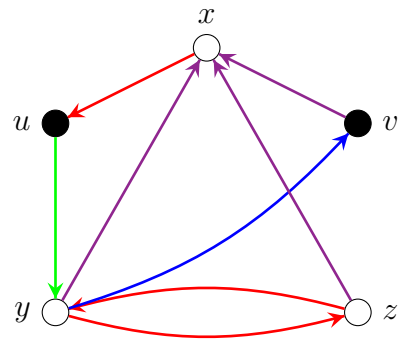
$D_2$



$H_3$



$D_3$



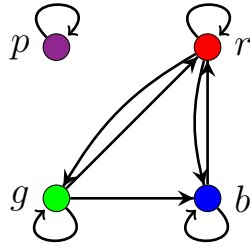
**Figura 3.3:** Ejemplos de digráficas  $H$ -coloreadas con núcleo por  $H$ -trayectorias sin núcleo por  $H$ -caminos.

En la figura 3.3 se muestran dos digráficas  $H_2$  y  $H_3$ , junto con la digráfica  $H_2$ -coloreada  $D_2$  y la digráfica  $H_3$ -coloreada  $D_3$  tales que  $D_2$  tiene núcleo por  $H_2$ -trayectorias y no tiene núcleo por  $H_2$ -caminos, y  $D_3$  tiene núcleo por  $H_3$ -trayectorias y no tiene núcleo por  $H_3$ -caminos. Por brevedad del trabajo, dichas pruebas no son presentadas.

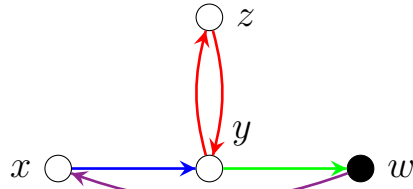
### 3.2.2. Digráficas con núcleo por $H$ -caminos sin núcleo por $H$ -trayectorias

Consideremos el siguiente patrón  $H_4$  y la digráfica  $H_4$ -coloreada  $D_4$ .

**Ejemplo 3.2.2.**  $H_4$



$D_4$



**Afirmación 3.2.2.**  $D_4$  tiene núcleo por  $H_4$ -caminos y no tiene núcleo por  $H_4$ -trayectorias.

*Demostración.* Primero mostraremos que  $N_4 = \{w\}$  es núcleo por  $H_4$ -caminos en  $D_4$ . Notemos que como  $|N_4| = 1$ , entonces  $N_4$  es independiente por  $H_4$ -caminos en  $D_4$ . Para ver que  $N_4$  es absorbente por  $H$ -caminos en  $D_4$ , basta notar que  $(x, y, z, y, w)$  es un  $H_4$ -camino que pasa por todos los vértices de  $D_4$  y termina en  $w$ . Por lo tanto,  $N_4$  es núcleo por  $H_4$ -caminos en  $D_4$ .

Ahora, demostraremos que  $D_4$  no tiene núcleo por  $H_4$ -trayectorias. Procediendo por contradicción, supongamos que  $D_4$  tiene un núcleo por  $H_4$ -trayectorias, digamos  $N'_4$ .

Como toda flecha en  $D_4$  es una  $H_4$ -trayectoria, entonces  $N'_4$  tiene que ser un conjunto independiente. Por lo que,  $|N'_4| \leq 2$ .

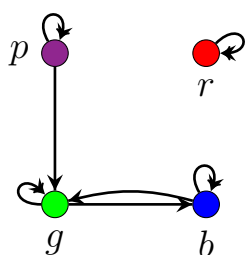
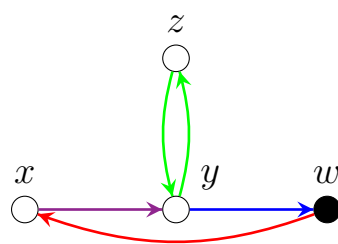
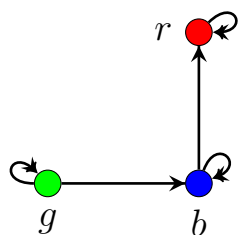
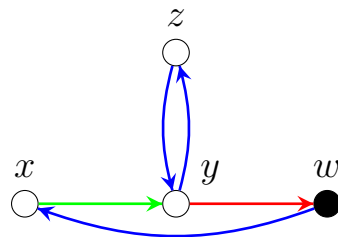
Si  $|N'_4| = 1$ , entonces tendremos los siguientes casos.

- Si  $N'_4 = \{w\}$ , entonces al ser  $y$  el único exvecino de  $x$  en  $D_5$  e  $y$  el único invecino de  $w$ , se sigue que, la única trayectoria de  $x$  a  $w$  en  $D_4$  es  $(x, y, w)$  pero no es una  $H_4$ -trayectoria pues  $(b, g) \notin F(H_4)$ . Por lo que,  $N'_4$  no es absorbente por  $H_4$ -trayectorias en  $D_4$ . Por lo tanto,  $N'_4 \neq \{w\}$ .
- Si  $N'_4 = \{x\}$ , entonces notemos que la única trayectoria de  $y$  a  $x$  en  $D_4$  es  $(y, w, x)$ ; sin embargo, no es una  $H_4$ -trayectoria pues  $(g, p) \notin F(H_4)$ . Por lo que,  $N'_4$  no es absorbente por  $H_4$ -trayectorias en  $D_4$ . Por lo tanto,  $N'_4 \neq \{x\}$ .
- Si  $N'_4 = \{y\}$ , entonces notemos que la única trayectoria de  $w$  a  $y$  en  $D_4$  es  $(w, x, y)$ ; sin embargo, no es una  $H_4$ -trayectoria pues  $(p, b) \notin F(H_4)$ . Por lo que,  $N'_4$  no es absorbente por  $H_4$ -trayectorias en  $D_4$ . Por lo tanto,  $N'_4 \neq \{y\}$ .
- Si  $N'_4 = \{z\}$ , entonces notemos que la única trayectoria de  $w$  a  $z$  en  $D_4$  es  $(w, x, y, z)$ ; sin embargo, no es una  $H_4$ -trayectoria pues  $(p, b, r)$  no es un camino en  $H_4$ . Por lo que,  $N'_4$  no es absorbente por  $H_4$ -trayectorias en  $D_4$ . Por lo tanto,  $N'_4 \neq \{z\}$ .

Por lo tanto, ningún conjunto de un vértice es absorbente por  $H_4$ -trayectorias en  $D_4$ . Se sigue que  $|N'_4| = 2$ .

Notemos que, los únicos conjuntos independientes con dos elementos en  $D_4$  son  $\{x, z\}$  y  $\{w, z\}$ ; sin embargo,  $(x, y, z)$  y  $(z, y, w)$  son  $H_4$ -trayectorias en  $D_4$ . Por lo que, ni  $\{x, z\}$  ni  $\{w, z\}$  son independientes por  $H_4$ -trayectorias en  $D_4$ , lo que es una contradicción. Se concluye que  $N'_4$  no existe; es decir,  $D_4$  no tiene núcleo por  $H_4$ -trayectorias.  $\square$

En la figura 3.4 se muestran dos digráficas  $H_5$  y  $H_6$ , junto con la digráfica  $H_5$ -coloreada  $D_5$  y la digráfica  $H_6$ -coloreada  $D_6$  tales que  $D_5$  tiene núcleo por  $H_5$ -caminos y no tiene núcleo por  $H_5$ -trayectorias, y  $D_6$  tiene núcleo por  $H_6$ -caminos y no tiene núcleo por  $H_6$ -trayectorias. Por brevedad del trabajo, dichas pruebas no son presentadas.

$H_5$  $D_5$  $H_6$  $D_6$ 

**Figura 3.4:** Ejemplos de digráficas  $H$ -coloreadas con núcleo por  $H$ -caminos sin núcleo por  $H$ -trayectorias.



### 3.2.3. Familias infinitas

En esta sección se exhiben familias infinitas con las propiedades descritas en las primeras dos subsecciones.

Sea  $H$  un patrón, y sean  $D_1$  y  $D_2$  dos digráficas  $H$ -coloreadas con coloraciones  $c_1$  y  $c_2$ , respectivamente. Consideremos la suma de  $D_1$  y  $D_2$ . Definimos la  $H$ -coloración  $c$  de  $D_1 \bullet D_2$  de la siguiente manera,  $c : F(D_1 \bullet D_2) \rightarrow V(H)$  tal que

$$c(a) = \begin{cases} c_1(a) & \text{si } a \in F(D_1) \\ c_2(a) & \text{si } a \in F(D_2) \\ c' & \text{si } a \in V(D_1) \times V(D_2) \text{ con } c' \in V(H). \end{cases}$$

Basados en la  $H$ -coloración anterior obtenemos el siguiente lema.

**Lema 3.2.1.** *Sea  $H$  un patrón. Si  $D_1$  y  $D_2$  son dos multidigráficas  $H$ -coloreadas, entonces la multidigráfica  $H$ -coloreada  $D_1 \bullet D_2$  tiene núcleo por  $H$ -caminos ( $H$ -trayectorias) si y solo si  $D_2$  tiene núcleo por  $H$ -caminos ( $H$ -trayectorias).*

*Demostración.* La prueba del lema la haremos para  $H$ -caminos; sin embargo, la prueba para  $H$ -trayectorias es completamente análoga. Sean  $H$ ,  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_1 \bullet D_2$ , como en la hipótesis.

Primero, supongamos que  $D_1 \bullet D_2$  tiene un núcleo por  $H$ -caminos, digamos  $N$ . Demostraremos que  $N$  es un núcleo por  $H$ -caminos de  $D_2$ .

Observemos que, por definición de suma, ningún vértice en  $V(D_2)$  es adyacente hacia ningún vértice en  $V(D_1)$ , por lo que ningún conjunto de vértices de  $V(D_1)$  puede absorber por  $H$ -caminos a ningún vértice de  $V(D_2)$ . Más aún, ningún vértice de  $V(D_1)$  puede pertenecer a  $N$ ; es decir,  $N \subseteq V(D_2)$ , pues si un vértice  $v \in V(D_1)$  pertenece a  $N$ , entonces ningún vértice de  $V(D_2)$  pertenece a  $N$ , y por la observación anterior,  $N$  no sería absorbente por  $H$ -caminos en  $D_1 \bullet D_2$ .

Por otro lado, sean  $x$  e  $y$  dos vértices de  $V(D_2)$  y  $C$  un  $H$ -camino de  $x$  a  $y$  en  $D_1 \bullet D_2$ . Notemos que como ningún vértice de  $V(D_2)$  es adyacente hacia ningún vértice de  $V(D_1)$ , entonces todo vértice de  $C$  está en  $V(D_2)$ . Se deduce que, todo  $H$ -camino, que empieza en un vértice de  $D_2$ , en  $D_1 \bullet D_2$  también es un  $H$ -camino en  $D_2$ . Por lo tanto, dado que  $N$  es un núcleo por  $H$ -caminos de  $D_1 \bullet D_2$ , entonces  $N$  es un núcleo por  $H$ -caminos de  $D_2$ .

Ahora, demostraremos que si  $D_2$  tiene un núcleo por  $H$ -caminos, entonces  $D_1 \bullet D_2$  tiene un núcleo por  $H$ -caminos. La definición de  $c$  garantiza que un

$H$ -camino en  $D_2$  también es un  $H$ -camino en  $D_1 \bullet D_2$ . Además, observemos nuevamente que, por la definición de  $D_1 \bullet D_2$ , cada vértice en  $V(D_1)$  es adyacente hacia todos los vértices en  $V(D_2)$  y ningún vértice en  $V(D_2)$  es adyacente hacia ningún vértice en  $V(D_1)$ . Por lo que, no hay  $H$ -caminos entre vértices de  $V(D_2)$  que contengan vértices en  $V(D_1)$ . De lo anterior se deduce que un núcleo por  $H$ -caminos en  $D_2$  también es un núcleo por  $H$ -caminos en  $D_1 \bullet D_2$ .  $\square$

Como se señaló anteriormente, utilizando el ejemplo 3.2.1 y el lema 3.2.1 construimos, de manera recursiva, una familia infinita de digráficas que tienen un núcleo por  $H$ -trayectorias y no tienen núcleo por  $H$ -caminos de la siguiente manera. Sean  $H_1$  y  $D_1$  las digráficas como en el ejemplo 3.2.1 y  $\overset{\leftrightarrow}{K}_1$  la digráfica que consta de un único vértice sin lazos. Definimos:

- $D^1 = D_1$  y
- $D^{j+1} = \overset{\leftrightarrow}{K}_1 \bullet D^j$ .

Observemos que por la elección de  $D^1$ , por construcción y por el lema 3.2.1, las digráficas  $D^j$  para toda  $j \in \mathbb{N}$ , tienen núcleo por  $H_1$ -trayectorias; más aún, utilizando la contrapositiva del lema 3.2.1 obtenemos que ninguna  $D^j$  tiene núcleo por  $H_1$ -caminos.

Similarmente, usando el ejemplo 3.2.2 y el lema 3.2.1 construimos, de manera recursiva, una familia infinita de digráficas que tienen núcleo por  $H$ -caminos y no tienen núcleo por  $H$ -trayectorias, de la siguiente manera. Sean  $H_4$  y  $D_4$  las digráficas como en el ejemplo 3.2.2 y  $\overset{\leftrightarrow}{K}_1$  la digráfica que consta de un único vértice sin lazos. Definimos:

- $E^1 = D_4$  y
- $E^{j+1} = \overset{\leftrightarrow}{K}_1 \bullet E^j$ .

Observemos que por la elección de  $E^1$ , por construcción y por el lema 3.2.1, las digráficas  $E^j$  para toda  $j \in \mathbb{N}$ , tienen núcleo por  $H_4$ -caminos; más aún, utilizando la contrapositiva del lema 3.2.1 obtenemos que ninguna  $E^j$  tiene núcleo por  $H_4$ -trayectorias.

Por lo tanto, el problema de determinar la existencia, o no, de un núcleo por  $H$ -trayectorias en una digráfica  $H$ -coloreada y el problema de determinar la existencia de un núcleo por  $H$ -caminos en una digráfica  $H$ -coloreada son, de hecho, problemas diferentes. En vista de estos ejemplos, los resultados de la siguiente sección son un poco sorprendentes.

### 3.3. Digráficas transitivas

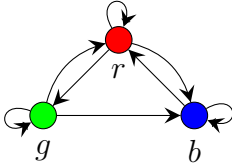
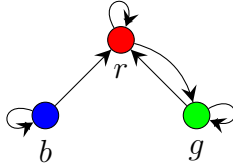
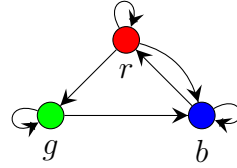
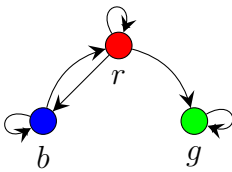
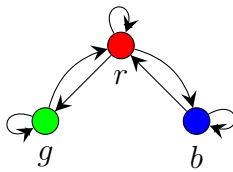
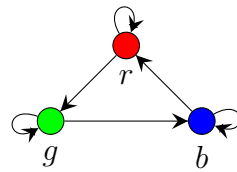
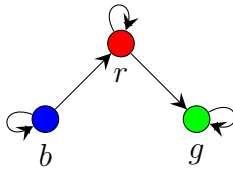
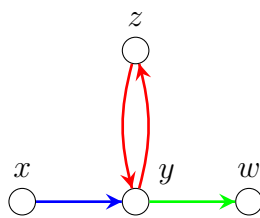
En esta sección presentamos una caracterización de los patrones  $H$ , de modo que para cada digráfica  $D$  y cada  $H$ -coloración de  $D$ , cada  $H$ -camino entre dos vértices en  $D$  contiene una  $H$ -trayectoria con los mismos vértices finales.

Dado un conjunto de digráficas  $\mathcal{S}$ , decimos que una digráfica es  $\mathcal{S}$ -libre si no contiene ninguna digráfica en  $\mathcal{S}$  como subdigráfica inducida. Recordemos que, si una propiedad  $\mathcal{P}$  es cerrada al tomar subdigráficas inducidas, entonces existe una familia de digráficas prohibidas,  $\mathcal{F}$ , no necesariamente finita, que caracterizan a las digráficas con esa propiedad. En otras palabras, una digráfica satisface la propiedad  $\mathcal{P}$  si y solo si es  $\mathcal{F}$ -libre. Como ejemplo, considere el siguiente teorema.

**Teorema 3.3.1.** *Sea  $H$  una digráfica reflexiva.  $H$  es una digráfica transitiva si y solo si es  $\mathcal{T}$ -libre, donde  $\mathcal{T}$  es la familia de los digráficas reflexivas representadas en la figura 3.5a.*

*Demostración.* Observemos que la trayectoria  $(b, r, g)$  está presente en las siete digráficas de  $\mathcal{T}$ ; sin embargo, la flecha  $(b, g)$  no está presente en ninguna, por lo que ninguno de los elementos de  $\mathcal{T}$  es subdigráfica inducida de una digráfica transitiva; es decir, si  $H$  es transitiva, entonces es  $\mathcal{T}$ -libre. Para la suficiencia, notemos que cualquier digráfica no transitiva tiene una subdigráfica de orden 3 donde tres flechas están fijas (dos flechas consecutivas presentes y una flecha ausente que formaría un torneo transitivo con las dos flechas anteriores). Entonces, solo se deben elegir tres flechas, lo que lleva a ocho posibilidades, dos de las cuales son isomorfas. Por lo tanto, la familia  $\mathcal{T}$  tiene siete digráficas.  $\square$

Si consideramos los elementos de  $\mathcal{T}$  como patrones de color  $H$ , cada uno de ellos es un ejemplo que muestra que no todos los  $H$ -caminos contienen una  $H$ -trayectoria con los mismos puntos finales, véase la figura 3.5b. El siguiente resultado indica que estos son los únicos patrones (mínimos) con esta propiedad.

$F_1$  $F_2$  $F_3$  $F_4$  $F_5$  $\vec{C}_3$  $\vec{P}_3$ (a) La familia  $\mathcal{T}$ . $D$ 

(b) Ejemplo donde  $(x, y, z, y, w)$  es un  $H$ -camino de  $x$  a  $w$  en  $D$  pero no hay una  $H$ -trayectoria de  $x$  a  $w$  en  $D$ , por cada  $H$  en  $\mathcal{T}$ .

Figura 3.5: Familia  $\mathcal{T}$  y un ejemplo.

**Teorema 3.3.2.** *Sea  $H$  una digráfica reflexiva.  $H$  es transitiva si y solo si para cada multidigráfica  $H$ -coloreada  $D$ , y cada par de vértices diferentes  $x$  e  $y$  de  $V(D)$ , cada  $H$ -camino de  $x$  a  $y$  en  $D$  contiene una  $H$ -trayectoria de  $x$  a  $y$  en  $D$ .*

*Demostración.* Sea  $H$  una digráfica reflexiva tal que cada multidigráfica  $H$ -coloreada  $D$ , cumple que para cada par de vértices diferentes  $x$  e  $y$  de  $V(D)$ , cada  $H$ -camino de  $x$  a  $y$  en  $D$  contiene una  $H$ -trayectoria de  $x$  a  $y$  en  $D$ . Demostraremos que  $H$  es transitiva. Procediendo por la contrapositiva y según el teorema 3.3.1, supongamos que  $H$  es una digráfica reflexiva que contiene uno de los patrones de la figura 3.5a como subdigráfica inducida. Observemos que la digráfica de la figura 3.5b es una multidigráfica  $H$ -coloreada, con vértices  $x$  y  $w$  de tal manera que existe un  $H$ -camino de  $x$  a  $w$ , pero no existe una  $H$ -trayectoria con los mismos puntos finales pues  $(b, g)$  no es una flecha de  $H$ .

Ahora, supongamos que  $H$  es una digráfica reflexiva transitiva. Probaremos que para cada multidigráfica  $H$ -coloreada  $D$ , y que para cada par de vértices diferentes  $x$  e  $y$  de  $V(D)$ , cada  $H$ -camino de  $x$  a  $y$  en  $D$  contiene una  $H$ -trayectoria de  $x$  a  $y$  en  $D$ . Sea  $D$  una multidigráfica  $H$ -coloreada, con  $H$ -coloración  $c$ . Sean  $x$  e  $y$  vértices diferentes en  $D$  y  $\gamma = (x = x_0, f_1, x_1, \dots, f_{n-1}, x_n = y)$  un  $H$ -camino de  $x$  a  $y$  en  $D$ . Por definición,  $c(\gamma) = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$  es un camino en  $H$  donde  $c_i = c((f_i, f_{i+1}))$  con  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Además, como  $H$  es transitiva, se sigue que  $(c_i, c_j) \in F(H)$  con  $i < j$ . Sea  $P$  una trayectoria de  $x$  a  $y$  contenida en  $\gamma$ . Dado que  $(c_i, c_j) \in F(H)$  con  $i < j$ , entonces los colores de las flechas de  $P$  también forman un camino en  $H$ . Por lo tanto,  $P$  es una  $H$ -trayectoria de  $x$  a  $y$  en  $D$ .  $\square$

El resultado anterior nos permite establecer el siguiente teorema.

**Teorema 3.3.3.** *Sean  $H$  una digráfica transitiva y reflexiva, y  $D$  una multidigráfica  $H$ -coloreada. El subconjunto  $K$  de  $V(D)$  es un núcleo por  $H$ -caminos de  $D$  si y solo si es un núcleo por  $H$ -trayectorias de  $D$ .*

*Demostración.* Sea  $K \subseteq V(D)$  un núcleo por  $H$ -caminos de  $D$ . Mostraremos que  $K$  es núcleo por  $H$ -trayectorias de  $D$ . Dado que  $K$  es independiente por  $H$ -caminos en  $D$  y cada  $H$ -trayectoria es un  $H$ -camino en  $D$ , entonces, en particular,  $K$  es un conjunto independiente por  $H$ -trayectorias en  $D$ . Para mostrar que  $K$  es un absorbente por  $H$ -trayectorias en  $D$ , consideremos un

vértice  $x$  en  $V(D) - K$ . Dado que  $K$  es absorbente por  $H$ -caminos en  $D$ , entonces hay  $w$  en  $K$  tal que existe un  $H$ -camino de  $x$  a  $w$  en  $D$ , digamos  $\gamma$ . Por el teorema 3.3.2, se tiene que,  $\gamma$  contiene una  $H$ -trayectoria de  $x$  a  $w$  en  $D$ . Por lo tanto,  $K$  es un núcleo por  $H$ -trayectorias de  $D$ .

Ahora, sea  $K' \subseteq V(D)$  un núcleo por  $H$ -trayectorias de  $D$ . Demostraremos que  $K'$  es un núcleo por  $H$ -caminos de  $D$ . Como cada  $H$ -trayectoria es un  $H$ -camino en  $D$  y  $K'$  es absorbente por  $H$ -trayectorias, entonces  $K'$  es absorbente por  $H$ -caminos. Del teorema 3.3.2 se deduce que, cada  $H$ -camino contiene una  $H$ -trayectoria. Como no hay  $H$ -trayectorias entre vértices de  $K'$  en  $D$ , se sigue que no hay  $H$ -caminos entre vértices de  $K'$  en  $D$  y, por lo que,  $K'$  es independiente por  $H$ -caminos. Por lo tanto,  $K'$  es un núcleo por  $H$ -caminos de  $D$ .  $\square$

Observemos que el teorema anterior establece que únicamente cuando un patrón  $H$  es reflexivo y transitivo, no importa que multidigráfica ni qué  $H$ -coloración se tome, los núcleos por  $H$ -caminos son exactamente los núcleos por  $H$ -trayectorias. Este resultado contrasta con los obtenidos en la sección anterior.

# Capítulo 4

## Familias $\mathcal{B}_i$

En este capítulo presentamos tres familias, de patrones, definidas por Arpin y Linek en [1], basadas en el alcance por  $H$ -caminos en multidigráficas  $H$ -coloreadas. Estas familias hacen aún más general y ambiciosa la pregunta hecha por Linek y Sands en [17].

**Definición 4.0.1.** [1]  $\mathcal{B}_1$  es la clase de todas las digráficas  $H$  tal que para cualquier  $H$ -coloración de cualquier torneo  $T$  existe un vértice  $v$  de  $T$  que es absorbente por  $H$ -caminos en  $T$ .

**Definición 4.0.2.** [1]  $\mathcal{B}_2$  es la clase de todas las digráficas  $H$  tal que para cualquier  $H$ -coloración de cualquier multidigráfica  $D$  existe un subconjunto independiente de vértices de  $D$  que es absorbente por  $H$ -caminos en  $D$ .

**Definición 4.0.3.** [1]  $\mathcal{B}_3$  es la clase de todas las digráficas  $H$  tal que para cualquier  $H$ -coloración de cualquier multidigráfica  $D$ ,  $D$  tiene núcleo por  $H$ -caminos.

Observemos que en una multidigráfica  $H$ -coloreada, todo conjunto independiente por  $H$ -caminos es un conjunto independiente. Más aún, en un torneo los conjuntos independientes son únicamente los conjuntos que constan de un único vértice. De lo anterior, se sigue que  $\mathcal{B}_3 \subseteq \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_1$ .

A continuación, exponemos algunos resultados básicos sobre estas familias, que aparecen en el trabajo realizado por Arpin y Linek [1].

**Lema 4.0.1.** [1] *Las siguientes propiedades se cumplen.*

1. Si  $H \in \mathcal{B}_i$ , entonces todo vértice tiene un lazo, con  $i \in \{1, 2, 3\}$ .
2. Si  $H \in \mathcal{B}_i$ , entonces toda subdigráfica inducida de  $H$  es elemento de  $\mathcal{B}_i$ , con  $i \in \{1, 2, 3\}$ .
3. Sea  $H$  un patrón y  $H'$  una contracción de  $H$ , se tiene que  $H \in \mathcal{B}_i$  si y solo si  $H' \in \mathcal{B}_i$ , con  $i \in \{1, 2, 3\}$ .
4. Sea  $H \in \mathcal{B}_i$ . Si  $H_1$  es tal que  $V(H_1) = V(H)$  y  $F(H) \subseteq F(H_1)$ , entonces  $H_1 \in \mathcal{B}_i$ , con  $i \in \{1, 2\}$ .

Del lema anterior, el primer inciso dice que si  $H$  pertenece a alguna de estas familias, entonces  $H$  es una digráfica reflexiva, por este motivo, a partir de este momento cada que nos referimos a un patrón en estas familias, suponemos que es un patrón reflexivo. El segundo y tercer inciso dicen que estas familias son cerradas bajo tomar subdigráficas inducidas, contracciones y expansiones. El último inciso dice que  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{B}_2$  son cerradas bajo tomar súperdigráficas generadoras.

En [1], Arpin y Linek caracterizan completamente las digráficas que pertenecen a la familia  $\mathcal{B}_2$ . En la demostración usan el siguiente lema, que afirma que la familia  $\mathcal{B}_2$  es cerrada bajo tomar sumas de digráficas.

**Lema 4.0.2.** [1] *Si  $H_1$  y  $H_2$  son patrones de  $\mathcal{B}_2$ , entonces la suma de  $H_1$  con  $H_2$ ,  $H_1 \bullet H_2$  también pertenece a  $\mathcal{B}_2$ .*

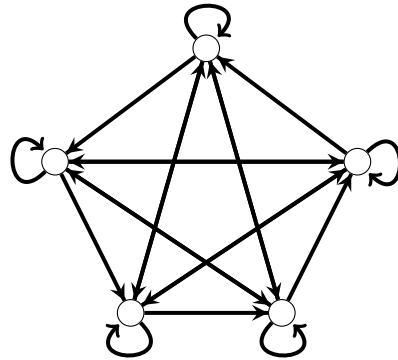
En el siguiente teorema se caracteriza completamente la familia  $\mathcal{B}_2$ .

**Teorema 4.0.1.** [1] *Los siguientes enunciados son equivalentes.*

1.  $H \in \mathcal{B}_2$ .
2. El complemento de  $H$ ,  $H^c$ , no tiene ciclos de longitud impar.
3.  $H$  es generada por un cuasiorden cuyo cociente de orden parcial es una suma lineal de anticadenas con 1 y 2 elementos.

Las digráficas en  $\mathcal{B}_1$  no han sido caracterizadas; sin embargo, Arpin y Linek probaron algunas propiedades de ellas [1]. En particular, demuestran que la digráfica en la figura 4.1 pertenece a  $\mathcal{B}_1$ , pero al ser su complemento





**Figura 4.1:** *Digráfica en  $\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_2$ .*

un ciclo de longitud cinco, por el teorema 4.0.1, no pertenece a  $\mathcal{B}_2$ . Es decir,  $\mathcal{B}_2$  está estrictamente contenida en  $\mathcal{B}_1$ . También, demuestran que la suma de una digráfica en  $\mathcal{B}_2$  con una digráfica en  $\mathcal{B}_1$ , sin importar el orden de los sumandos, pertenece a  $\mathcal{B}_1$ . Sin embargo, exhiben una suma de dos digráficas en  $\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_2$ , que no pertenece a  $\mathcal{B}_1$ ; es decir, la familia  $\mathcal{B}_1$  no es cerrada bajo sumas.

El siguiente capítulo es dedicado a la familia  $\mathcal{B}_3$ .



# Capítulo 5

## Familia $\mathcal{B}_3$ : Patrones pancromáticos por caminos

Este capítulo se dedica a los elementos de la familia  $\mathcal{B}_3$ , definida en [1]. En [11], los patrones en esta familia son nombrados *patrones pancromáticos*, para evitar confusiones, nosotros nos referimos a ellos como *patrones pancromáticos por caminos*. En [12], Galeana Sánchez y Hernández Cruz demuestran que una digráfica  $H$  es un patrón pancromático por caminos; es decir, toda digráfica  $H$ -coloreada tiene núcleo por  $H$ -caminos, o bien, el problema de determinar si una digráfica  $H$ -coloreada tiene un núcleo por  $H$ -caminos es **NP**-completo.

Anteriormente, se creía que los patrones pancromáticos por caminos estaban completamente caracterizados [11]; sin embargo, en este trabajo mostramos un contraejemplo a la construcción usada en la demostración del lema 6 que se encuentra en [11]. El lema 6 se usa para argumentar que dos digráficas de orden tres no son patrones pancromáticos por caminos. También se utiliza de manera esencial para la prueba presentada en [11], de la caracterización de los patrones en  $\mathcal{B}_3$ . Aún con ello, actualmente, dicha caracterización puede ser cierta, o no. Por lo anterior, el problema de caracterizar a los patrones pancromáticos por caminos sigue abierto. En particular, el problema de determinar si los patrones  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$  y  $F_2$  son patrones pancromáticos sigue abierto, véase la figura 5.3c. Para estos patrones mostramos que basta con demostrar que toda digráfica  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -coloreada ( $F_2$ -coloreada) tiene núcleo por  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -caminos ( $F_2$ -caminos) para determinar su pertenencia, o no, a la familia  $\mathcal{B}_3$ . Así mismo, realizamos un análisis estructural de los patrones pancromáticos por

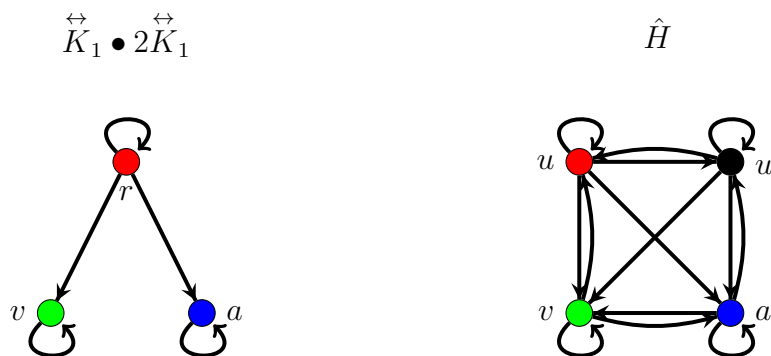


Figura 5.1: Digráficas en  $\mathcal{B}_2 - \mathcal{B}_3$ .

caminos, concluyendo que cada patrón de  $\mathcal{B}_3$  tiene una de dos estructuras. Dentro de este análisis, mostramos que no todas las digráficas que cumplen con tener una de las dos estructuras mencionadas son patrones pancromáticos por caminos. También, demostramos que la digráfica reflexiva  $\vec{P}_2$  es el único patrón pancromático por caminos con todas sus flechas asimétricas, y describimos la estructura de los patrones pancromáticos por caminos con todas sus flechas simétricas. Finalmente, enunciarnos dos problemas abiertos, sobre esta familia.

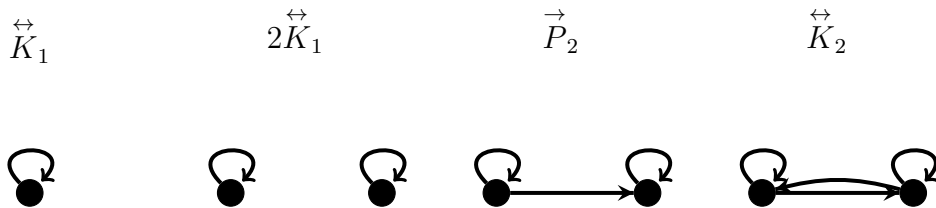
Empezamos por citar algunos resultados sobre esta familia. El siguiente resultado es presentado por Arpin y Linek en [1].

**Lema 5.0.1.** [1] Si  $W = (x_0, x_1, \dots, x_k)$  es un camino en  $H$  tal que

1. para cada  $x_i$ , existe  $c_i \in V(H)$  tal que  $(x_i, c_i) \notin F(H)$ , con  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$  y
2.  $(x_k, x_0) \notin F(H)$ .

Entonces  $H \notin \mathcal{B}_3$ .

El lema anterior da una forma de identificar a digráficas que no son patrones pancromáticos por caminos. Es decir, si una digráfica contiene un camino para el cual no existe la flecha del último vértice del camino hacia el primer vértice del camino, y para cada vértice, distinto del final, existe otro vértice hacia el que no es adyacente, entonces la digráfica no es un patrón pancromático por caminos.



**Figura 5.2:** Patrones pancromáticos por caminos de orden 1 y 2.

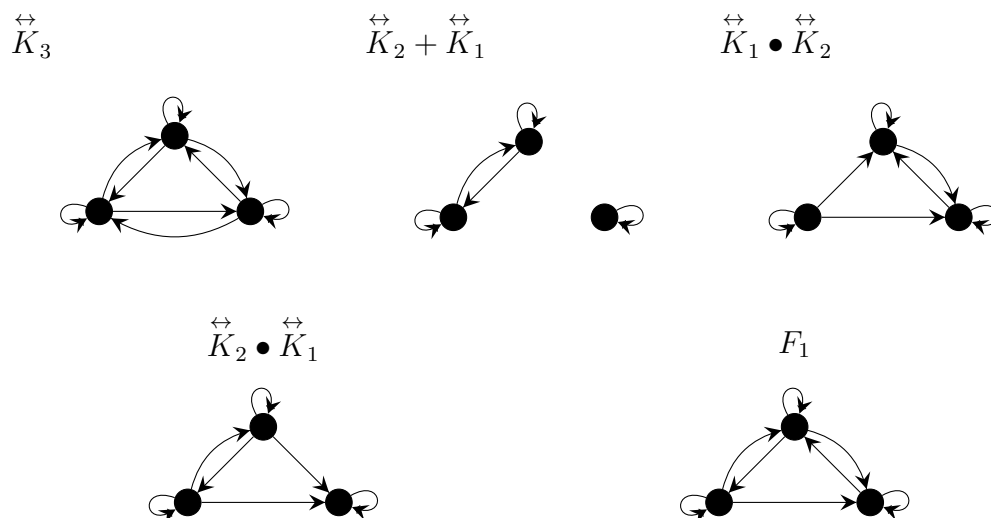
Sin usar el lema anterior, Arpin y Linek muestran que los patrones en la figura 5.1,  $\overset{\leftrightarrow}{K}_1 \bullet \overset{\leftrightarrow}{2K}_1$  y  $\hat{H}$ , no son patrones pancromáticos por caminos [1]. Más aún, sus complementos no tienen ciclos impares, así por el teorema 4.0.1,  $\overset{\leftrightarrow}{K}_1 \bullet \overset{\leftrightarrow}{2K}_1$  y  $\hat{H}$  son elementos de  $\mathcal{B}_2$ . Concluyendo que,  $\mathcal{B}_3$  está estrictamente contenida en  $\mathcal{B}_2$ .

Los incisos 2 y 3, del lema 4.0.1, dicen que la familia  $\mathcal{B}_3$  es cerrada bajo tomar subdigráficas inducidas, contracciones y expansiones. Por lo que, el análisis de los patrones pancromáticos por caminos se ha centrado en los patrones con orden pequeño.

Sean  $H$  una digráfica posiblemente con lazos y  $D$  una multidigráfica  $H$ -coloreada. Recordemos que estamos asumiendo que para todo par de vértices  $u$  y  $v$  de  $D$ , todo par de flechas de  $F_D[u, v]$  tienen color distinto, lo que implica que  $|F_D[u, v]| \leq |V(H)|$ . Sea  $\overset{\leftrightarrow}{K}_n$  la digráfica completa reflexiva con  $n$  vértices. Sea  $D$  una multidigráfica  $\overset{\leftrightarrow}{K}_1$ -coloreada. Por la suposición mencionada al inicio de este párrafo, se tiene que  $D$  es una digráfica. Observemos que los  $\overset{\leftrightarrow}{K}_1$ -caminos son exactamente los caminos en  $D$ . Se sigue que un núcleo por caminos en  $D$  es un núcleo por  $\overset{\leftrightarrow}{K}_1$ -caminos en  $D$ . Como ya hemos dicho, toda digráfica tiene núcleo por caminos [3].

Como ya mencionamos, Sands, Sauer y Woodrow prueban que toda multidigráfica 2-coloreada tiene un núcleo por caminos monocromáticos [22]. En términos de  $H$ -coloraciones, significa que toda multidigráfica  $\overset{\leftrightarrow}{2K}_1$ -coloreada tiene núcleo por  $\overset{\leftrightarrow}{2K}_1$ -caminos. Podemos concluir que  $\overset{\leftrightarrow}{2K}_1$  es un patrón pancromático por caminos, véase la figura 5.2.

Usando cuasiórdenes, Arpin y Linek dan una demostración alternativa al resultado de Sands, Sauer y Woodrow [1], más aún, prueban que el patrón



**Figura 5.3a:** Patrones pancromáticos por caminos de orden 3.

reflexivo  $\vec{P}_2$  pertenece a  $\mathcal{B}_3$ . En la tesis doctoral de Rocío Sánchez se da una prueba, que no usa cuasiórdenes, de que  $\vec{P}_2$  es un patrón pancromático por caminos [21], véase la figura 5.2.

Existen 16 patrones reflexivos, no isomorfos, de orden 3. En [1], Arpin y Linek prueban que  $\vec{K}_3$ ,  $\vec{K}_2 + \vec{K}_1$ ,  $\vec{K}_1 \bullet \vec{K}_2$ ,  $\vec{K}_2 \bullet \vec{K}_1$  y  $F_1$  son patrones pancromáticos por caminos, véase la figura 5.3a. En el mismo trabajo prueban que  $2\vec{K}_1 \bullet \vec{K}_1$ ,  $\vec{P}_2 + \vec{K}_1$ ,  $T_3$ ,  $\vec{K}_1 \bullet 2\vec{K}_1$ ,  $3\vec{K}_1$ ,  $\vec{C}_3$ ,  $\vec{P}_3$ ,  $F_3$  y  $F_4$ , no son patrones pancromáticos por caminos, véase la figura 5.3b. Con estos resultados, se sabe la pertenencia o no de 14 de los 16 patrones reflexivos de orden 3. Para los dos patrones restantes,  $\vec{P}_3$  y  $F_2$ , Arpin y Linek dejan su pertenencia, o no, a la familia  $\mathcal{B}_3$  como un problema abierto, véase la figura 5.3c.

## 5.1. Una prueba errónea

En 2016, en el artículo [11] se enuncia el siguiente lema:

**Lema 5.1.1.** [11] Sean  $H$  una digráfica reflexiva,  $a = (u, v)$  tal que  $a \notin F(H)$ , con  $u$  a distancia 2 de  $v$  en  $H$  y  $H' = H \cup a$ . Si  $H' \notin \mathcal{B}_3$ , entonces  $H \notin \mathcal{B}_3$ .

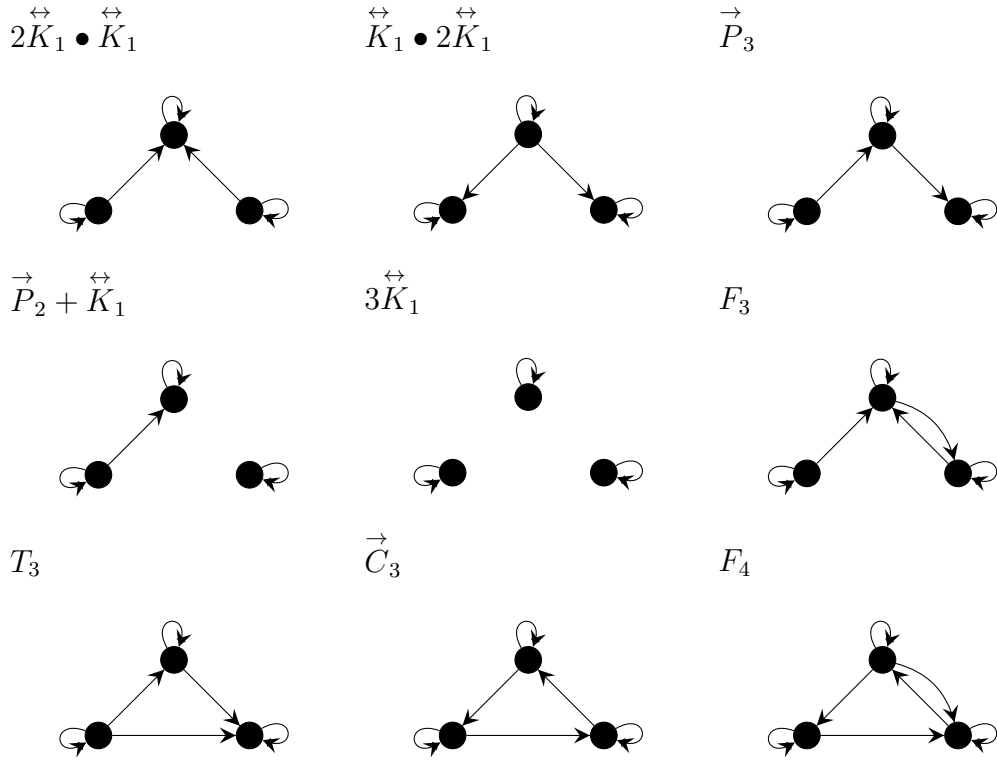


Figura 5.3b: Patrones de orden 3, que no son patrones pancromáticos por caminos.



Figura 5.3c: Patrones  $\overleftrightarrow{P}_3$  y  $F_2$ .

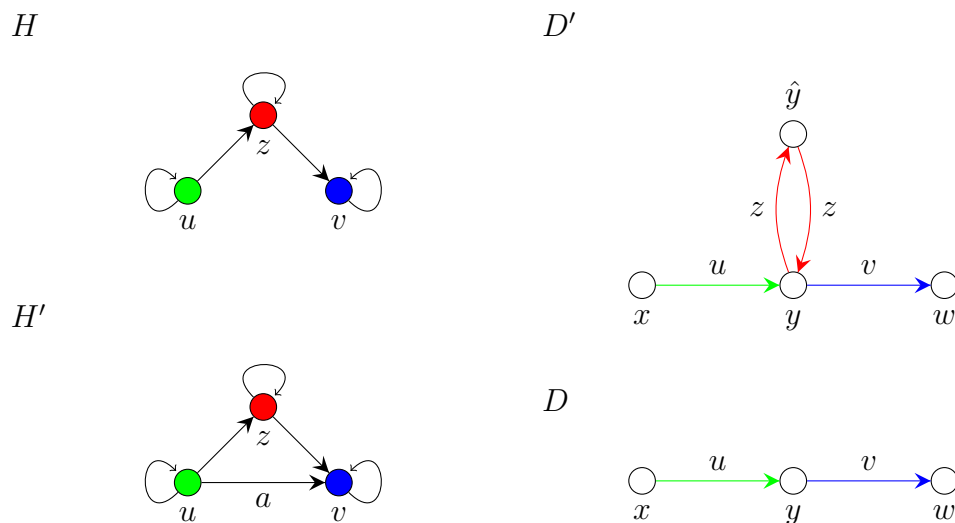


Figura 5.4: Construcción de  $D'$  del lema 5.1.1.

En la demostración del lema anterior, dada una multidigráfica  $H'$ -coloreada  $D$ , se construye una multidigráfica  $H$ -coloreada  $D'$ , para la cual se demuestra que  $D$  tiene núcleo por  $H'$ -caminos si y solo si  $D'$  tiene núcleo por  $H$ -caminos.

Sea  $H' = H \cup a$  tal que  $(u, z, v)$  es una  $uv$ -trayectoria de longitud dos en  $H$ ,  $a = (u, v)$  y  $a \notin F(H)$ . Se construye  $D'$  a partir de  $D$  de la siguiente manera: para cada camino  $(x, y, w)$  en  $D$ , con flechas coloreadas por  $u$  y  $v$ , en ese orden, se agrega un vértice  $\hat{y}$  en  $D'$  junto con las flechas  $(y, \hat{y})$  y  $(\hat{y}, y)$ , ambas con color  $z$ , véase la figura 5.4.

Sea  $\hat{Y}$  el conjunto de todos los nuevos  $\hat{y}$  en  $D'$ . En [11], se afirma que si  $K'$  es un núcleo por  $H$ -caminos en  $D'$ , entonces

$$K = (K' \cup \{y \in V(D) : \hat{y} \in K'\}) - \hat{Y}$$

es un núcleo por  $H'$ -caminos en  $D$ .

A pesar de lo anterior, si consideramos  $H$  y  $H'$ , con  $D$  y su construcción  $D'$ , como se muestra en la figura 5.5, entonces podemos notar que  $K' = \{2, \hat{3}, 5\}$  es un núcleo por  $H$ -caminos en  $D'$  pero  $K = \{2, 3, 5\}$  no es un núcleo por  $H'$ -caminos en  $D$ , pues  $(2, 3)$  es un  $H'$ -camino en  $D$ . Por lo anterior, no podemos concluir que el lema 5.1.1 sea falso; sin embargo, podemos afirmar que la prueba no es correcta.



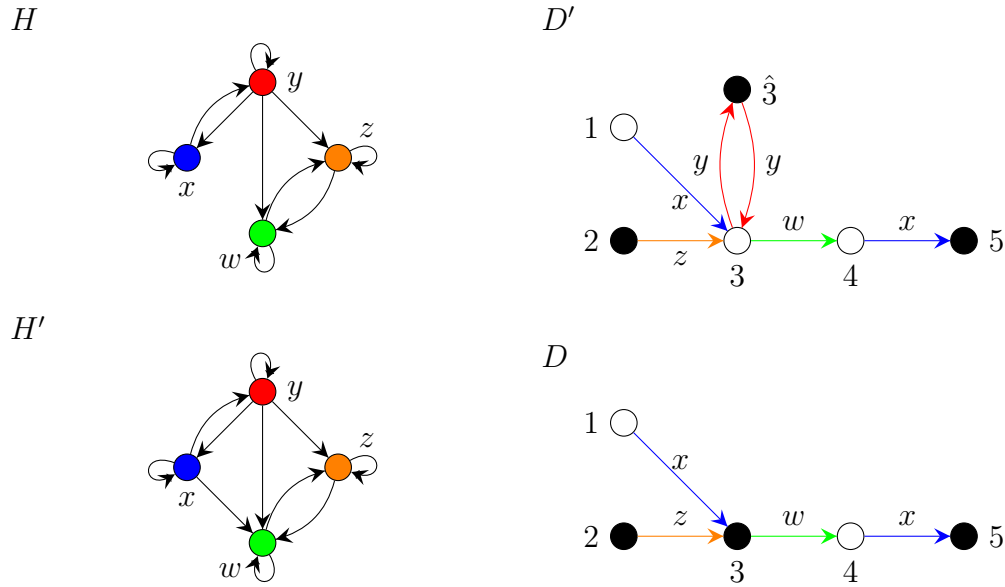


Figura 5.5: Contraejemplo de la construcción del lema 5.1.1.

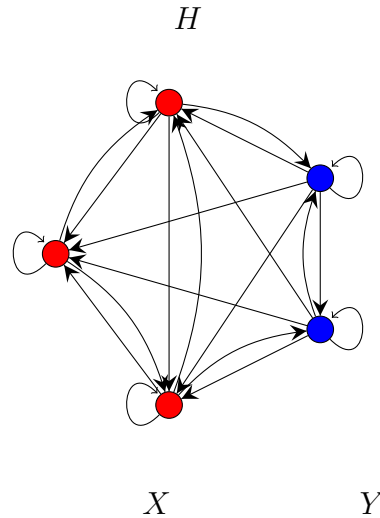
En [11], el lemma 5.1.1 se usó para demostrar que los patrones  $\overleftrightarrow{P}_3$  y  $F_2$  no son patrones pancromáticos por caminos. Por el análisis anterior, el problema de la pertenencia, o no, de ambos patrones a la familia  $\mathcal{B}_3$  continúa siendo un problema abierto.

Cabe mencionar, que para continuar es necesario definir la siguiente familia de digráficas definidas en [11].

**Definición 5.1.1.** Sea  $H$  una digráfica reflexiva. Decimos que  $H$  es bicompleta, si cumple que  $V(H)$  admite una partición en dos conjuntos  $X$  e  $Y$ , tales que:

1.  $H[Y]$  y  $H[X]$  son digráficas completas.
2.  $Y \times X \subseteq F(H)$ .

Notemos que la definición anterior no prohíbe la existencia de las  $XY$ -flechas en  $H$ . Cuando en la digráfica estas flechas no estén presentes diremos que  $H$  es una digráfica bicompleta estricta. También observemos que  $\overleftrightarrow{K}_n$  es bicompleta para todo natural  $n \geq 2$ , véase la figura 5.6.



**Figura 5.6:** Ejemplo de una digráfica bicompleta.

En [11], se afirma la siguiente caracterización de los patrones pancromáticos por caminos.

**Teorema 5.1.1.** [11]  $H$  es un patrón pancromático por caminos si y solo si  $H$  es una digráfica bicompleta o se puede contraer a  $2\overleftrightarrow{K}_1$ .

Pero para demostrar que toda digráfica bicompleta es un patrón pancromático por caminos se utiliza fuertemente en el lema 5.1.1. Además, para la demostración de que todo patrón pancromático por caminos, que no se puede contraer a  $2\overleftrightarrow{K}_1$ , es una digráfica bicompleta, se utiliza que  $\overleftrightarrow{P}_3$  y  $F_2$  no son patrones pancromáticos por caminos. Por lo anterior, hasta el día de hoy, no se puede afirmar si el teorema 5.1.1 es cierto o no.

## 5.2. Patrones $F_2$ y $\overleftrightarrow{P}_3$

En esta sección, nos centramos en los patrones  $F_2$  y  $\overleftrightarrow{P}_3$ . Recordemos que, para probar que una digráfica  $H$  es un patrón pancromático por caminos, hay que demostrar que toda multidigráfica  $H$ -coloreada tiene núcleo por  $H$ -caminos. El siguiente lema nos permite reducir el espacio de trabajo a las digráficas  $H$ -coloreadas, para algunas  $H$ ; en particular, para los patrones  $F_2$  y

$\leftrightarrow$   
 $\overleftrightarrow{P}_3$ , nos permite centrarnos en las digráficas  $F_2$ -coloreadas y en las digráficas  $\overleftrightarrow{P}_3$ -coloreadas.

**Lema 5.2.1.** Sean  $H$  un patrón y  $R = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  el conjunto de vértices de  $H$  que no son vértices universales de  $H$ . Para cada  $x_i$  existe un color  $c_i$  en  $H$  tal que  $(x_i, c_i) \notin A(H)$ , con  $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ .

Si toda digráfica  $H$ -coloreada tiene núcleo por  $H$ -caminos, entonces  $H$  es un patrón pancromático por caminos.

*Demostración.* Primero, mostraremos que para cada multidigráfica  $H$ -coloreada  $D$ , existe una digráfica  $H$ -coloreada  $\widehat{D}$  tal que  $D$  tiene núcleo por  $H$ -caminos si y solo si  $\widehat{D}$  tiene núcleo por  $H$ -caminos.

Sea  $U = V(H) - R$  el subconjunto de vértices universales de  $H$ . Construimos la digráfica  $H$ -coloreada  $\widehat{D}$ , obtenida desde  $D$  a través de las siguientes modificaciones. Para cada par de vértices  $w$  y  $v$  de  $D$  tales que  $F_D[w, v] = \{f_1, \dots, f_r\}$  con  $r \geq 2$ , entonces:

1. Si existe, al menos, una  $f_i$  en  $F_D[w, v]$  con color  $u \in U$ , entonces reemplazamos todo  $F_D[w, v]$  por una única flecha de  $w$  a  $v$ ,  $e_{wv}$ , con color  $u$ .
2. Si toda flecha  $f_i$  en  $F_D[w, v]$  tiene color  $x_j$ , con  $i \in \{1, \dots, r\}$  y  $j \in \{1, \dots, n\}$ , entonces:
  - a) Si existe  $f_i$  de color  $x_1$ , entonces reemplazamos  $f_i$  por una flecha  $f_{wv}^1$ , con color  $x_1$ .
  - b) Por cada  $f_i$  con color  $x_j$  con  $j \in \{2, \dots, n\}$ , agregamos nuevos vértices  $s_{w,v}^j$  y  $t_{w,v}^j$  a  $V(\widehat{D})$ , agregamos las flechas  $(u, s_{w,v}^j)$ ,  $(s_{w,v}^j, t_{w,v}^j)$  y  $(s_{w,v}^j, v)$ , con colores  $x_j$ ,  $c_j$  y  $x_j$ , respectivamente, a  $F(\widehat{D})$  y borramos  $f_i$  de las flechas de  $\widehat{D}$ .

Sean  $S$  el conjunto de todos los nuevos vértices de  $s_{w,v}^j$  en  $\widehat{D}$ , y  $T$  el conjunto de todos los nuevos vértices  $t_{w,v}^j$  en  $\widehat{D}$ .

**Afirmación 1.** Sean  $x, y \in V(D)$ . Existe un  $H$ -camino de  $x$  a  $y$  en  $D$  si y solo si existe un  $H$ -camino de  $x$  a  $y$  en  $\widehat{D}$ .

*Demostración de la Afirmación 1.*

Sea  $W = (w = w_0, f_0, w_1, f_1, \dots, f_{n-1}, w_n = y)$  un  $H$ -camino en  $D$ . Notemos que existe  $\widehat{W}$ , un  $H$ -camino de  $x$  a  $y$  en  $\widehat{D}$ , que se obtiene desde  $W$  a

través de las siguientes modificaciones. Para cada  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  tal que  $|F_D[w_i, w_{i+1}]| \geq 2$ , reemplazamos la flecha  $f_i$ , por:

1.  $e_{w_i w_{i+1}}$  con color  $u$ , si existe  $f \in F_D[w_i, w_{i+1}]$  con color  $u$  para alguna  $u \in U$ , o
2. por  $(w_i, w_{i+1})$  con color  $x_1$ , si no existe  $f \in F_D[w_i, w_{i+1}]$  con color  $u$  para alguna  $u \in U$ , y  $f_i$  es de color  $x_1$ , o
3. por  $(w_i, s_{w_i, w_{i+1}}^j, w_{i+1})$  la trayectoria monocromática de color  $x_j$ , si no existe  $f \in F_D[w_i, w_{i+1}]$  con color  $u$  para alguna  $u \in U$ , y  $f_i$  en  $W$  es de color  $x_j$ .

Como  $W$  es un  $H$ -camino en  $D$ , basta con verificar que para cada substitución de las flechas en  $W$ , la sucesión de colores de las nuevas flechas siguen siendo un camino en  $H$ . Pero notemos que cada substitución de las flechas en  $W$  son por flechas con un color que es un vértice universal  $H$ , por flechas del mismo color o por una trayectoria monocromática del mismo color. Por lo tanto,  $\widehat{W}$  es un  $H$ -camino de  $x$  a  $y$  en  $\widehat{D}$ .

Por otro lado, sea  $\widehat{W} = (x = w_0, f_0, w_1, f_1, \dots, f_{n-1}, w_n = y)$  un  $H$ -camino de  $x$  a  $y$  en  $\widehat{D}$ . Notemos que existe  $W$ , un  $H$ -camino de  $x$  a  $y$  en  $D$ , que se obtiene desde  $W$  a través de las siguientes modificaciones:

1. Para cada  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  tal que  $w_i \in S$ , reemplazamos a  $(w_{i-1}, f_{i-1}, s_{w_{i-1}, w_{i+1}} = w_i, f_i, w_{i+1})$ , la trayectoria monocromática de color  $x_j$ , por una flecha de  $w_{i-1}$  a  $w_{i+1}$  con color  $x_j$  en  $D$ , y
2. para cada  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  tal que  $|F_D[w_i, w_{i+1}]| \geq 2$ , diferente de las obtenidas por las primeras modificaciones, reemplazamos la flecha  $f_i$  por:
  - a)  $f \in F_D[w_i, w_{i+1}]$  con color  $u$ , si  $f_i$  es  $e_{w_i w_{i+1}}$  con color  $u$ , para alguna  $u \in U$ , o
  - b) por  $f \in F_D[w_i, w_{i+1}]$  con color  $x_1$ , si no existe  $f' \in F_D[w_i, w_{i+1}]$  con color  $u$  para alguna  $u \in U$  y  $f_i$  tiene color  $x_1$ .

Notemos que las modificaciones anteriores reemplazan una trayectoria monocromática por una flecha del mismo color, o reemplazan una flecha por otra coloreada con un vértice universal de  $H$ , o reemplazan una flecha de

color por otra con el mismo color. Por lo tanto, se deduce que  $W$  es un  $H$ -camino de  $x$  a  $y$  en  $D$ . Esto termina la demostración de la afirmación 1.

Sea  $N$  un núcleo por  $H$ -caminos en  $D$ . Consideremos  $\widehat{N} = N \cup T$ , probaremos que  $\widehat{N}$  es un núcleo por  $H$ -caminos en  $\widehat{D}$ . Comenzando por la independencia por  $H$ -caminos, notemos que  $\widehat{N} \cap S = \emptyset$  y los únicos vértices que alcanzan a  $T$  por  $H$ -caminos son los vértices en  $S$ . Además, cada vértice de  $T$  es un pozo, por lo que no existen  $H$ -caminos que empiezan en algún vértice de  $T$ . Por la independencia por  $H$ -caminos de  $N$  en  $D$ , y por la afirmación 1, se sigue que no existen  $H$ -caminos entre vértices de  $N$  en  $\widehat{D}$ . Como  $S \cap N = \emptyset$  y por las observaciones al inicio del párrafo, no existen  $H$ -caminos entre vértices de  $N$  y vértices de  $T$ , o entre vértices de  $T$ , en  $\widehat{D}$ . Por lo tanto,  $\widehat{N}$  es independiente por  $H$ -caminos en  $\widehat{D}$ .

Ahora, probaremos que  $\widehat{N}$  es absorbente por  $H$ -caminos en  $D$ . Sea  $x$  un vértice en  $V(\widehat{D}) - \widehat{N}$ . Si  $x \in S$ , entonces, por construcción de  $\widehat{D}$ , existe  $t \in T$  tal que  $(x, t) \in F(\widehat{D})$ ; además,  $t \in \widehat{N}$ . Si  $x \in V(D) - N$ , entonces existe  $y \in N$  tal que  $x$  alcanza a  $y$  por  $H$ -caminos en  $D$ . Por la afirmación 1, existe un  $H$ -camino de  $x$  a  $y$  en  $\widehat{D}$ . Por lo que,  $\widehat{N}$  es absorbente por  $H$ -caminos en  $\widehat{D}$ , y por lo tanto,  $\widehat{N}$  es un núcleo por  $H$ -caminos en  $\widehat{D}$ .

Sea  $\widehat{N}$  un núcleo por  $H$ -caminos en  $\widehat{D}$ . Consideremos  $N = \widehat{N} \cap V(D)$ , probaremos que  $N$  es un núcleo por  $H$ -caminos en  $D$ . Como todos los vértices de  $T$  son pozos de  $\widehat{D}$ , entonces  $T \subseteq \widehat{N}$ , y por consecuencia,  $S \cap \widehat{N} = \emptyset$ . Más aún, los únicos vértices que alcanzan a  $T$  por  $H$ -caminos en  $\widehat{D}$  son los vértices de  $S$ . Como  $\widehat{N}$  es independiente por  $H$ -caminos en  $\widehat{D}$ , entonces, por la afirmación 1,  $N = \widehat{N} \cap V(D)$  es independiente por  $H$ -caminos en  $D$ . Además, por la absorbencia por  $H$ -caminos de  $\widehat{N}$  en  $\widehat{D}$ , las observaciones al inicio de este párrafo, y por la afirmación 1, cada vértice en  $x \in V(D) - N$  alcanza a un vértice de  $N$  por  $H$ -caminos en  $D$ . Por lo que,  $N$  es absorbente por  $H$ -caminos en  $D$ , y por lo tanto,  $N$  es un núcleo por  $H$ -caminos en  $D$ .

Finalmente, supongamos que cada digráfica  $H$ -coloreada tiene núcleo por  $H$ -caminos. Sea  $D$  una multidigráfica  $H$ -coloreada, construimos  $\widehat{D}$ , a partir de  $D$ , la digráfica  $H$ -coloreada anteriormente descrita. Se sigue que  $\widehat{D}$  tiene núcleo por  $H$ -caminos, y por lo anterior,  $D$  tiene núcleo por  $H$ -caminos. Por lo que, podemos concluir que  $H$  es un patrón pancromático por caminos.  $\square$

Consideremos  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$  y  $F_2$  como en la figura 5.7. Notemos que  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$  con  $R_{\overset{\leftrightarrow}{P}_3} = \{x_3, x_1\}$  y  $F_2$  con  $R_{F_2} = \{x_2, x_1, x_3\}$ , cumplen con las hipótesis del

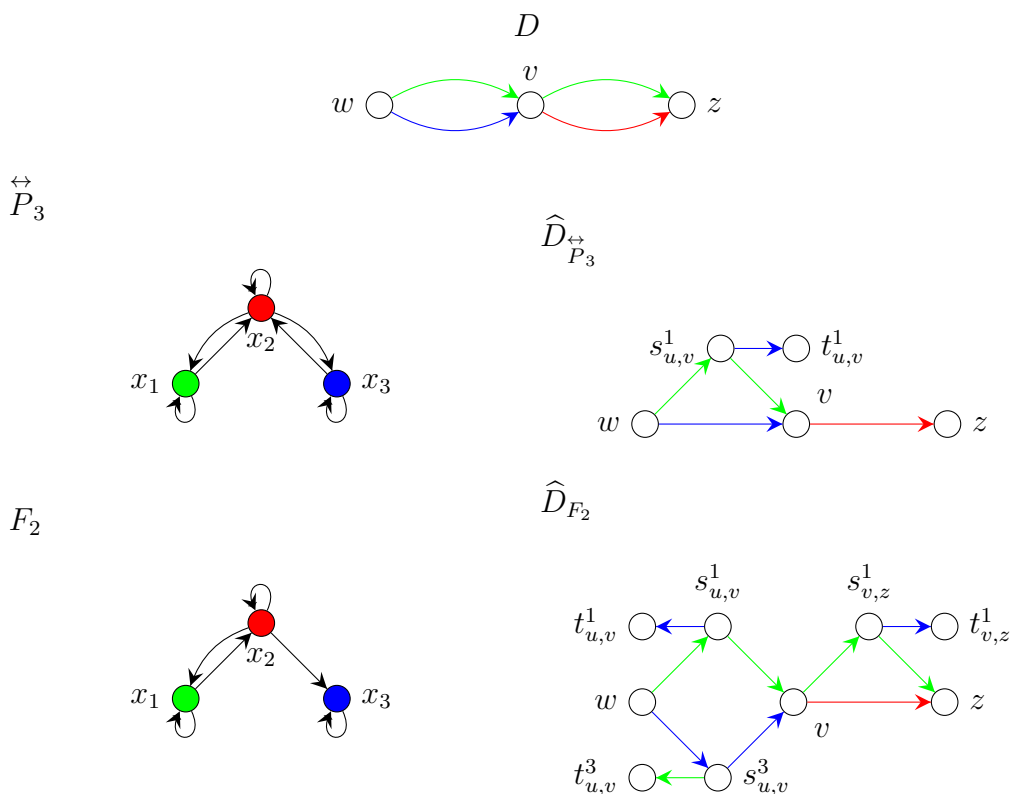


Figura 5.7: Construcción del lema 5.2.1 para  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$  y  $F_2$ .

lema 5.2.1. Por lo tanto, tenemos los siguientes corolarios.

**Corolario 5.2.1.** *Si toda digráfica  $F_2$ -coloreada tiene núcleo por  $F_2$ -caminos, entonces  $F_2$  es un patrón pancromático por caminos.*

**Corolario 5.2.2.** *Si toda digráfica  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -coloreada tiene núcleo por  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -caminos, entonces  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$  es un patrón pancromático por caminos.*

### 5.3. Análisis estructural

A pesar del análisis de las secciones anteriores, en esta sección, presentamos un análisis estructural de los patrones pancromáticos por caminos, no sin antes definir las digráficas cuasibicompletas y demostrar un lema técnico.

Notemos que como  $\mathcal{B}_3 \subset \mathcal{B}_2$  y por el teorema 4.0.1, se tiene que si una digráfica es un patrón pancromático por caminos, entonces su complemento no tiene ciclos impares, en particular, su complemento no tiene al ciclo de tres vértices  $\vec{C}_3$  como subdigráfica.

**Lema 5.3.1.** *Si  $H \in \mathcal{B}_3$ , entonces se cumple:*

1. *Si  $(u, v) \in F(H^c)$  es una flecha asimétrica, entonces  $\delta_{H^c}^+(v) = 0$ .*
2. *Toda componente fuertemente conexa, no trivial (con al menos dos vértices), de  $H^c$  es bipartita.*

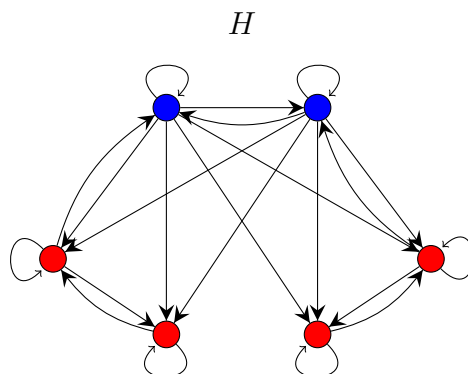
*Demostración.* 1. Sea  $(u, v) \in F(H^c)$  una flecha asimétrica. Procediendo por contradicción, supongamos que existe  $y \in V(H^c)$  tal que  $(v, y) \in F(H^c)$  y  $u \neq y$ . Si  $(y, v) \notin F(H^c)$ , entonces  $H[\{u, v, y\}]$  es isomorfa a  $\vec{P}_3, T_3, \vec{C}_3$  o  $F_4$ , que no son patrones pancromáticos por caminos, por teorema 4.0.1.2 se tiene que  $H \notin \mathcal{B}_3$  lo cual es una contradicción. Si  $(y, v) \in F(H^c)$ , entonces  $H[\{u, v, y\}]$  es isomorfa a  $F_3, \vec{P}_3, 2\overleftrightarrow{K}_1 \bullet \overleftrightarrow{K}_1$  o  $\vec{P}_2 + \overleftrightarrow{K}_1$ , que no son patrones pancromáticos por caminos, por teorema 4.0.1.2 se sigue que  $H \notin \mathcal{B}_3$ , causando una contradicción. Por lo tanto,  $\delta_{H^c}^+(v) = 0$ .

2. Como  $\mathcal{B}_3 \subset \mathcal{B}_2$  y por el teorema 4.0.1, se tiene  $H^c$  no tiene ciclos impares. Por lo que toda componente fuerte, no trivial, de  $H^c$  cumple las hipótesis del teorema 1.2.1 y, por lo tanto, es una digráfica bipartita.  $\square$

A continuación definimos las digráficas cuasibicompletas.

**Definición 5.3.1.** *Sea  $H$  una digráfica reflexiva. Decimos que  $H$  es cuasibicompleta, si  $V(H)$  admite una partición en dos conjuntos  $X$  e  $Y$  tales que:*

1.  *$H[Y]$  es una digráfica completa.*
2.  *$H[X]$  es una digráfica completa o puede contraerse a  $2\overleftrightarrow{K}_1$ .*
3.  *$Y \times X \subseteq F(H)$ .*



**Figura 5.8:** Ejemplo de una digráfica cuasibicompleta.

Observemos que, en una digráfica cuasibicompleta  $H$ , algunas flechas de  $X$  a  $Y$  pueden estar presentes en  $H$ ; más aún, si  $H[X]$  es una digráfica completa, entonces  $H$  cumple con ser una digráfica bicompleta, véase la figura 5.8.

El siguiente teorema afirma que todo patrón pancromático por caminos se puede contraer a  $\overleftrightarrow{2K_1}$  o es una digráfica cuasibicompleta.

**Teorema 5.3.1.** *Si  $H \in \mathcal{B}_3$ , entonces  $H$  puede contraerse a  $\overleftrightarrow{2K_1}$  o es una digráfica cuasibicompleta.*

*Demostración.* Sea  $H$  un patrón pancromático por caminos. Si  $H$  es una digráfica completa, entonces  $H$  es una digráfica bicompleta y, por lo tanto, es una digráfica cuasibicompleta. Ahora, supongamos que  $H$  no es una digráfica completa.

Como  $\overleftrightarrow{3K_1}$  no es un patrón pancromático, entonces  $H$  tiene como máximo dos componentes conexas. Si  $H$  tiene dos componentes conexas, entonces cada componente tiene que ser una digráfica completa. De lo contrario hay dos vértices en una componente, con a lo más una flecha entre ellos, que junto con un vértice en la otra componente inducen  $\overleftrightarrow{3K_1}$  o  $\overrightarrow{P_2} + \overleftrightarrow{K_1}$  en  $H$ , lo que no puede suceder, pues  $\mathcal{B}_3$  es cerrada bajo tomar subdigráficas inducidas y tanto  $\overleftrightarrow{3K_1}$  como  $\overrightarrow{P_2} + \overleftrightarrow{K_1}$  no son patrones pancromáticos por caminos. Por lo tanto,  $H$  tiene que ser una expansión de  $\overleftrightarrow{2K_1}$ .

Ahora, supongamos que  $H$  es una digráfica conexa. Demostraremos que



$H$  es una digráfica cuasibicompleta, para eso probaremos la existencia de ciertas estructuras dentro del complemento de  $H$ .

Consideremos a  $H^c$ . Sea  $S$  una componente fuerte, no trivial, de  $H^c$ . Por definición de  $S$ , todo vértice en  $S$  tiene exgrado al menos 1 en  $H^c$ . Por el lema 5.3.1 se deduce que  $S$  tiene que ser una subdigráfica simétrica y bipartita de  $H^c$ . Sean  $A$  y  $B$  las partes de la bipartición de  $S$ . Demostraremos que  $S$  es una digráfica bipartita completa en  $H^c$ . Como  $S$  es fuertemente conexa si  $A$  o  $B$  consisten de un solo vértice, entonces  $S$  es una digráfica bipartita completa. Supongamos que  $|A| \geq 2$  y  $|B| \geq 2$ . Procediendo por contradicción, y como  $S$  es simétrica, supongamos que existen  $a_1 \in A$  y  $b_1 \in B$  tales que  $a_1 \leftrightarrow_H b_1$ . Ya que  $S$  es fuertemente conexa, entonces existe  $b_2 \in B$  y  $a_2 \in A$  tal que  $a_1 \leftrightarrow_{H^c} b_2$  y  $b_1 \leftrightarrow_{H^c} a_2$ , además,  $a_1 \leftrightarrow_H a_2$ . Lo que implica que  $(b_1, a_1, a_2)$  es una trayectoria en  $H$  que cumple las hipótesis del lema 5.0.1, por lo que  $H \notin \mathcal{B}_3$ , que es una contradicción. Por lo tanto,  $A \leftrightarrow_{H^c} B$  y  $S$  es una digráfica bipartita completa en  $H^c$ .

Observemos que por el lema 5.3.1.1 todas las componentes fuertes de  $H^c$  tienen que ser una componente fuerte inicial o una componente fuerte terminal. Del mismo lema, también se deduce que cada componente fuerte terminal consta de un único vértice y, como ya mostramos, cada componente fuerte inicial es una digráfica bipartita completa o un único vértice.

Ahora demostraremos que existe a lo más una componente fuerte inicial, no trivial, en  $H^c$ . Procediendo por contradicción supongamos que existen al menos dos componentes fuerte iniciales, no triviales, digamos  $S_1$  y  $S_2$ , en  $H^c$ . Se sigue que  $S_1$  y  $S_2$  son digráficas bipartitas completas en  $H^c$  y todas las flechas entre vértices de  $S_1$  y  $S_2$  están presentes en  $H$ . Sean  $u, v \in V(S_1)$  tales que  $u$  y  $v$  están en diferentes partes de la bipartición de  $S_1$ . Sean  $w, z \in V(S_2)$  tales que  $w$  y  $z$  están en diferentes partes de la bipartición de  $S_2$ . Notemos que  $(u, z, v)$  es una trayectoria tal que  $u \leftrightarrow_{H^c} v$  y  $z \leftrightarrow_{H^c} w$  en  $H$ , es decir, cumple la hipótesis del lema 5.0.1, lo que implica que  $H \notin \mathcal{B}_3$ , lo que es una contradicción. Por lo tanto, a lo más existe una componente fuerte inicial, no trivial, en  $H^c$ .

Demostraremos que  $H$  es una digráfica cuasibicompleta. Sea  $X$  el subconjunto de  $V(H)$  tal que cada  $x \in X$  pertenece a una componente fuerte inicial que no es un vértice aislado en  $H^c$ , y sea  $Y = V(H) - X$ . Observemos que todo vértice de  $Y$  está en una componente fuerte terminal de  $H^c$  o es un vértice aislado en  $H^c$ . Por otro lado, si  $X$  es vacío, entonces todos los vértices son vértices universales en  $H$ ; es decir,  $H$  es una digráfica completa, lo que no puede suceder. Por lo que  $X \neq \emptyset$  y  $Y \neq \emptyset$ .

Sean  $y_1, y_2 \in Y$ . Mostraremos que  $y_1 \leftrightarrow_H y_2$ . Como  $y_i$  es el único vértice en un componente fuerte terminal de  $H^c$  o un vértice aislado en  $H^c$ , entonces  $\delta_{H^c}^+(y_i) = 0$  con  $i \in \{1, 2\}$ . Se sigue que  $y_1 \leftrightarrow_H y_2$  y, por lo tanto,  $Y$  induce una digráfica completa.

Mostraremos que  $H[X]$  es un digráfica completa o puede contraerse a  $2\overleftrightarrow{K}_1$ . Si cada componente fuerte inicial de  $H^c$  es trivial, entonces  $\delta_{H^c}^-(x) = 0$  para cada  $x \in X$ . Se tiene que  $x_1 \leftrightarrow_H x_2$  para cada  $x_1, x_2 \in X$ . Por lo tanto,  $H[X]$  es un digráfica completa. Ahora asumamos que  $S$  es la única componente fuerte inicial, no trivial, de  $H^c$ , la cual es una digráfica bipartita completa. Sean  $A$  y  $B$  las partes de la bipartición de  $S$ . Probaremos que  $X = V(S)$ . Procediendo por contradicción, supongamos que existe  $x \in X - V(S)$ . Por definición de  $X$ , existe  $y$  en  $V(H^c) - X$  tal que  $x \rightarrow_{H^c} y$ . Sean  $a \in A$  y  $b \in B$ . Como  $S$  es una digráfica bipartita completa, entonces  $a \leftrightarrow_{H^c} b$ , además,  $a \leftrightarrow_H x$  y  $x \leftrightarrow_H b$ , ya que  $x$  no pertenece a  $S$ . Se sigue que  $(a, x, b)$  es una trayectoria en  $H$  tal que cumple con las hipótesis de lema 5.0.1, por lo que  $H \notin \mathcal{B}_3$ , lo que es una contradicción. Por lo tanto,  $X = V(S)$  y se puede concluir que  $H[X]$  puede contraerse a  $2\overleftrightarrow{K}_1$ .

Ahora, demostraremos que  $Y \times X \subseteq F(H)$ . Sea  $y \in Y$ . Como  $y$  es el único vértice en una componente fuerte terminal o es un vértice aislado en  $H^c$ , entonces  $\delta_{H^c}^+(y) = 0$ , por lo que  $y \rightarrow_H V(H)$ , en particular  $y \rightarrow_H X$ . Por lo tanto,  $Y \rightarrow_H X$ ; es decir,  $Y \times X \subseteq F(H)$ .

Por todo lo anterior, podemos concluir que  $H$  es un digráfica cuasibicompleta.  $\square$

De los resultados presentados en este capítulo; en particular, del teorema anterior, podemos obtener las siguientes observaciones, conclusiones y problemas abiertos.

**Observación 5.3.1.** *El único patrón pancromático por caminos con todas sus flechas asimétricas es  $\overrightarrow{P}_2$ .*

*Demostración.* Sea  $H \in \mathcal{B}_3$  tal que todas sus flechas son asimétricas. Basta demostrar que  $H$  tiene únicamente dos vértices. Procediendo por contradicción, supongamos que hay más de dos vértices en  $H$ . Sea  $(x, y)$  una flecha en  $H$  y  $z$  un vértice diferente de  $x$  e  $y$ . Como  $H$  es un patrón pancromático por caminos, por el lema 4.0.1, se sigue que  $H[\{x, y, z\}]$  es un patrón pancromático por caminos. Pero no existe ningún patrón pancromático por caminos de orden 3 tal que todas sus flechas sean asimétricas, véase la figura 5.3.a,

causando una contradicción. Por lo tanto,  $H$  tiene dos vértices y debe de ser isomorfa a  $\overset{\leftrightarrow}{P}_2$ .  $\square$

**Observación 5.3.2.** *Los patrones pancromáticos por caminos con todas sus flechas simétricas son las digráficas completas, las expansiones de  $\overset{\leftrightarrow}{2K}_1$  y expansiones de  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ .*

*Demostración.* Sea  $H \in \mathcal{B}_3$ . Por el teorema 5.3.1 se tiene que  $H$  es una expansión de  $\overset{\leftrightarrow}{2K}_1$  o una digráfica cuasibicompleta. Basta notar que las únicas digráficas cuasibicompletas simétricas son las digráficas completas y las expansiones de  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ .  $\square$

**Observación 5.3.3.**  $\overset{\leftrightarrow}{K}_1 \bullet \overset{\leftrightarrow}{2K}_1$  es una digráfica cuasibicompleta; sin embargo, como ya hemos mencionado, Arpin y Linek probaron que  $\overset{\leftrightarrow}{K}_1 \bullet \overset{\leftrightarrow}{2K}_1$  no es un patrón pancromático por caminos, véase la figura 5.3.b. Por consiguiente, la implicación recíproca del teorema anterior es falsa.

De la observación 5.3.3 podemos concluir que cada patrón pancromático por caminos tiene una estructura muy bien definida, es decir, pertenece a una de dos familias. Lamentablemente, la implicación recíproca es falsa.

**Observación 5.3.4.** *Sea  $H$  una digráfica cuasibicompleta que es un patrón pancromático por caminos. Como ya hemos dicho,  $\overset{\leftrightarrow}{K}_1 \bullet \overset{\leftrightarrow}{2K}_1$  no es un patrón pancromático por caminos. Por lo tanto, si  $X$  induce una expansión de  $\overset{\leftrightarrow}{2K}_1$  y existe un vértice  $y$  en  $Y$ , que alcanza a al menos un vértice en una de las dos subdigráficas completas que induce  $X$  con una flecha asimétrica, entonces  $y$  tiene que alcanzar a todos los vértices de la otra subdigráfica completa inducida por  $X$  con una flecha simétrica.*

Como  $\mathcal{B}_3$  es cerrado bajo tomar contracciones, expansiones y subdigráficas inducidas, el análisis de los patrones pancromáticos por caminos se centra en los patrones de orden pequeño. Por lo que es de gran importancia conocer cuáles subdigráficas, de orden mínimo, son prohibidas para los patrones pancromáticos por caminos. A estos patrones prohibidos los llamamos *obstrucciones mínimas*. Por el teorema 5.3.1 se tiene que cada obstrucción mínima, para ser patrón pancromático por caminos, es una digráfica cuasibicompleta.

A continuación, proponemos los siguientes problemas abiertos.

**Problema 5.3.1.** *Determinar si  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$  y  $F_2$  son patrones pancromáticos por caminos o no.*

**Problema 5.3.2.** *Determinar cuales de las digráficas cuasibicompletas son patrones pancromáticos por caminos.*

Es importante notar que, los corolarios 5.2.1 y 5.2.2 establecen el problema de determinar si  $F_2$  y  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$  son patrones pancromáticos por caminos, o no, es suficiente para enfocarse en los digráficas; es decir, si cada digráfica  $F_2$ -coloreada tiene núcleo por  $F_2$ -caminos y cada digráfica  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -coloreada tiene núcleo por  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -caminos, entonces  $F_2$  y  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$  son patrones pancromáticos por caminos.

Si la respuesta para ambos patrones en el problema 5.3.1 es negativa, entonces ambos patrones son obstrucciones mínimas, aún más, la prueba, presentada en [11] por Galeana-Sánchez y Strausz, que establece que cada patrón pancromático por caminos es una digráfica bicompleta es válida. Es importante tener en cuenta que tanto  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$  como  $F_2$  son digráficas cuasibicompletas. Por lo tanto, una respuesta positiva puede ayudar a resolver el problema 5.3.2, o al menos dar una mejor comprensión sobre los patrones pancromáticos por caminos. Resolver el segundo problema completa la caracterización de patrones pancromáticos por caminos.

# Capítulo 6

## Familias $\tilde{\mathcal{B}}_i$

En este capítulo definimos las familias  $\tilde{\mathcal{B}}_i$ , con  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Éstas son las familias análogas a las presentadas por Arpin y Linek en [1], pero basadas en el alcance por  $H$ -trayectorias. Que como hemos mostrado, en el capítulo 3 no siempre son equivalentes a los problemas de alcance por  $H$ -caminos.

**Definición 6.0.1.**  $\tilde{\mathcal{B}}_1$  es la clase de todas las digráficas  $H$  tal que para cualquier  $H$ -coloración de cualquier torneo  $T$  existe un vértice  $v$  de  $T$  que es absorbente por  $H$ -trayectorias en  $T$ .

**Definición 6.0.2.**  $\tilde{\mathcal{B}}_2$  es la clase de todas las digráficas  $H$  tal que para cualquier  $H$ -coloración de cualquier multidigráfica  $D$  existe un subconjunto independiente de vértices de  $D$  que es absorbente por  $H$ -trayectorias en  $D$ .

**Definición 6.0.3.**  $\tilde{\mathcal{B}}_3$  es la clase de todas las digráficas  $H$  tal que para cualquier  $H$ -coloración de cualquier multidigráfica  $D$ ,  $D$  tiene núcleo por  $H$ -trayectorias.

Observemos que todo conjunto independiente por  $H$ -trayectorias en una multidigráfica  $H$ -coloreada es un conjunto independiente, se sigue que  $\tilde{\mathcal{B}}_3 \subseteq \tilde{\mathcal{B}}_2$ . Más aún, en un torneo los conjuntos independientes son únicamente los conjuntos que constan de un único vértice. Por lo que se deduce que  $\tilde{\mathcal{B}}_2 \subseteq \tilde{\mathcal{B}}_1$ .

Notemos que en una digráfica  $\overset{\leftrightarrow}{K}_1$ -coloreada los núcleos por trayectorias coinciden con los núcleos por  $H$ -trayectorias, y como ya hemos mencionado, toda digráfica tiene núcleo por trayectorias [3]; esto significa que,  $\overset{\leftrightarrow}{K}_1 \in \tilde{\mathcal{B}}_3$ .

Por otro lado, el resultado de Sands, Sauer y Woodrow en [22] que dice que toda multidigráfica 2-coloreada tiene núcleo por trayectorias monocromáticas, se puede reescribir en términos de  $H$ -trayectorias como: el patrón reflexivo  $2\overleftrightarrow{K}_1$  pertenece a  $\tilde{\mathcal{B}}_3$ . Por lo anterior, ninguna de las tres familias es vacía.

A continuación, presentamos algunas propiedades de estas familias.

**Lema 6.0.1.** *Sea  $H$  un patrón.*

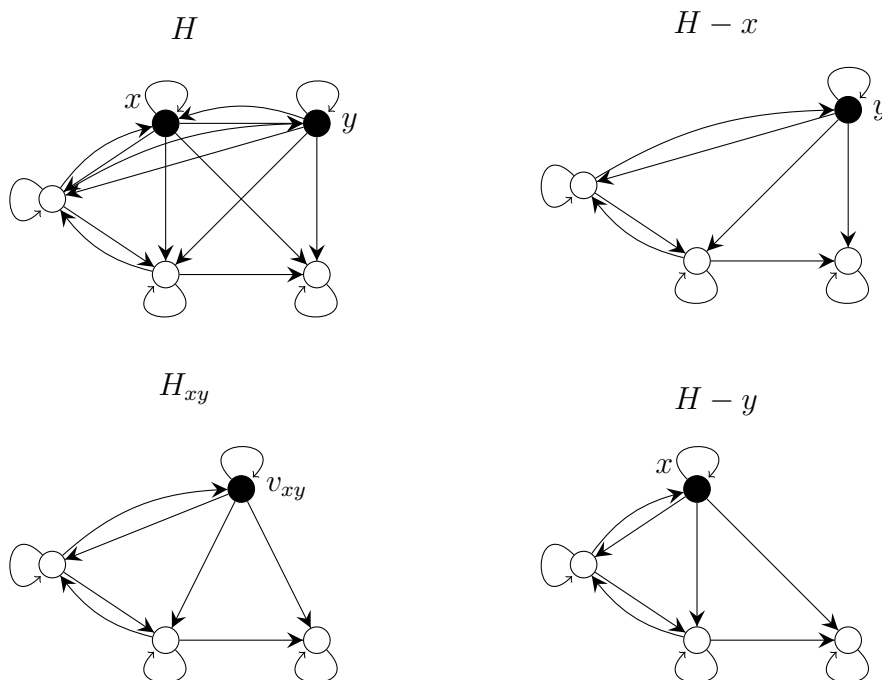
1. Si  $H \in \tilde{\mathcal{B}}_i$ , entonces  $H$  es reflexiva, para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ .
2. Si  $H \in \tilde{\mathcal{B}}_i$  y  $H_1$  es una subdigráfica inducida de  $H$ , entonces  $H_1 \in \tilde{\mathcal{B}}_i$ , para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ .
3. Si  $H \in \tilde{\mathcal{B}}_i$  y  $H_2$  es una superdigráfica generadora de  $H$ , entonces  $H_2 \in \tilde{\mathcal{B}}_i$ , para cada  $i \in \{1, 2\}$ .

*Demostración.* 1. Procediendo por contrapositiva. Sea  $H$  un patrón con un vértice  $x$  tal que  $(x, x) \notin F(H)$ . Consideremos a  $\vec{C}_3$ , el ciclo de longitud 3, que también es un torneo, junto con la  $H$ -coloración que le asigna el color  $x$  a cada flecha de  $\vec{C}_3$ . Notemos que las  $H$ -trayectorias son únicamente las flechas por lo que no hay un vértice que sea absorbente por  $H$ -trayectorias. Por lo que  $H \notin \tilde{\mathcal{B}}_1$ . Como  $\tilde{\mathcal{B}}_3 \subseteq \tilde{\mathcal{B}}_2 \subseteq \tilde{\mathcal{B}}_1$ , podemos concluir que  $H \notin \tilde{\mathcal{B}}_i$ , con  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

2. El segundo inciso se sigue del hecho que toda  $H_1$ -coloración de una multidigráfica también es una  $H$ -coloración, por lo que cualquier ejemplo que muestre que  $H_1 \notin \tilde{\mathcal{B}}_i$  también muestra que  $H \notin \tilde{\mathcal{B}}_i$  para  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

3. Observemos que toda  $H$ -coloración de una multidigráfica también es una  $H_2$ -coloración, más aún, toda  $H$ -trayectoria también es una  $H_2$ -trayectoria en la misma multidigráfica. Por lo que todo subconjunto independiente, que es absorbente por  $H$ -trayectorias también es absorbente por  $H_2$ -trayectorias. De lo anterior, se deduce que si  $H \in \tilde{\mathcal{B}}_i$ , entonces  $H_2 \in \tilde{\mathcal{B}}_i$  con  $i \in \{1, 2\}$ . □

El lema anterior, afirma que los patrones que pertenecen a estas familias son digráficas reflexivas, más aún, son cerradas bajo tomar subdigráficas inducidas.



**Figura 6.1:** Ejemplo de una contracción de gemelos verdaderos.

Sea  $H$  una digráfica reflexiva. A dos vértices distintos,  $x$  e  $y$ , los llamamos *gemelos verdaderos* si  $N^+(x) = N^+(y)$  y  $N^-(x) = N^-(y)$ . Observemos que, como  $H$  es reflexiva, entonces  $x \in N^+(x)$  y  $y \in N^+(y)$ . Por lo que, la subdigráfica inducida por  $\{x, y\}$  en  $H$ , es  $\overleftrightarrow{K}_2$  y ambos son adyacentes hacia y desde los mismos vértices.

Notemos que de la definición anterior se deduce que, si  $x$  e  $y$  son gemelos verdaderos, y eliminamos cualquiera de ellos o consideramos la contracción de  $H$  donde el único conjunto de contracción, con dos o más vértices, es  $\{x, y\}$ , entonces obtenemos patrones isomorfos. Denotamos este tipo de contracción del conjunto  $\{x, y\}$  como  $H_{xy}$  y al vértice nuevo lo denotamos por  $v_{xy}$ . De la observación anterior, es evidente que  $H_{xy}$  es isomorfo a una subdigráfica inducida de  $H$ , véase la figura 6.1.

El siguiente lema establece que la contracción de los gemelos verdaderos y su operación inversa, que llamamos *expansión de gemelos verdaderos*, se

preserva dentro de las familias  $\tilde{\mathcal{B}}_i$  con  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

**Lema 6.0.2.** *Sea  $H$  un patrón reflexivo, Si  $x$  e  $y$  son un par de gemelos verdaderos en  $H$ , entonces  $H \in \tilde{\mathcal{B}}_i$  si y solo si  $H_{xy} \in \tilde{\mathcal{B}}_i$ , con  $i \in \{1, 2, 3\}$ .*

*Demostración.* Como  $H_{xy}$  es isomorfa a  $H - x$ , que es una sudigráfica inducida de  $H$ , se sigue que, por el lema 6.0.1, si  $H \in \tilde{\mathcal{B}}_i$ , entonces  $H_{xy} \in \tilde{\mathcal{B}}_i$ , con  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Sea  $D$  sea una multidigráfica  $H$ -coloreada, con coloración  $c$ , denotada por  $(D, c)$ . También, consideremos a  $D$  con la siguiente  $H_{xy}$ -coloración, definida de la siguiente manera:

$$c_{xy}(a) = \begin{cases} c(a) & \text{si } c(a) \neq x \text{ y } c(a) \neq y \\ v_{xy} & \text{si } c(a) = x \text{ o } c(a) = y. \end{cases}$$

la denotamos por  $(D, c_{xy})$ .

Sea  $P = (w_0, w_1, \dots, w_n)$  una trayectoria en  $D$ . Mostraremos que  $P$  es una  $H$ -trayectoria en  $(D, c)$  si y solo si  $P$  es una  $H_{xy}$ -trayectoria en  $(D, c_{xy})$ .

Primero, supongamos que  $P$  es una  $H$ -trayectoria en  $(D, c)$ . Si ninguna flecha de  $P$  tiene color  $x$  o  $y$ , en  $(D, c)$ , entonces  $P$  también es una  $H_{xy}$ -trayectoria en  $(D, c_{xy})$ . Ahora, supongamos que al menos una flecha de  $P$  tiene color  $x$  o color  $y$  en  $(D, c)$ . Por definición de  $c_{xy}$ , cada una de esas flechas tienen color  $v_{xy}$  en  $(D, c_{xy})$ . Por otro lado, en  $H_{xy}$ , el vértice con lazo,  $v_{xy}$  tiene los mismos invecinos y los mismos exvecinos que tienen  $x$  e  $y$  en  $H$ . Se deduce que la sucesión de colores de las flechas de  $P$  en  $(D, c_{xy})$  forman un camino en  $H_{xy}$ . Por lo tanto,  $P$  es una  $H_{xy}$ -trayectoria en  $(D, c_{xy})$ .

Ahora, supongamos que  $P$  es una  $H_{xy}$ -trayectoria en  $(D, c_{xy})$ . Si ninguna flecha de  $P$  tiene color  $v_{xy}$ , en  $(D, c_{xy})$ , entonces  $P$  también es una  $H$ -trayectoria en  $(D, c)$ . Supongamos que al menos una flecha de  $P$  tiene color  $v_{xy}$  en  $(D, c_{xy})$ . Por definición de  $c_{xy}$ , cada una de estas flechas tiene color  $x$  o color  $y$  en  $(D, c)$ . Además, en  $H$ ,  $x$  e  $y$  son gemelos verdaderos, por lo que ambos tienen los mismos invecinos y los mismos exvecinos que  $v_{xy}$  en  $H_{xy}$ . Se deduce que si el color  $v_{xy}$  se reemplaza por cualquiera de los colores  $x$  o  $y$  en  $(D, c)$ , entonces la sucesión de colores de las flechas de  $P$  en  $(D, c)$  forma un camino en  $H$ . Por lo tanto,  $P$  es una  $H$ -trayectoria en  $(D, c)$ .

Por la observación anterior, se sigue que si  $H_{xy} \in \tilde{\mathcal{B}}_i$ , entonces  $H \in \tilde{\mathcal{B}}_i$ , con  $i \in \{1, 2, 3\}$ .  $\square$

Observemos que, por definición,  $H_{xy}$  es una contracción de  $H$ . Además, si  $H'$  es una contracción de  $H$ , podemos llegar a  $H'$ , a partir de  $H$ , tras una



sucesión de contracciones de gemelos verdaderos de las digráficas resultantes. Es decir, cada conjunto de contracción para  $H'$ , con dos o más elementos, se puede ir contrayendo a través de gemelos verdaderos. De lo anterior, y usando el lema 6.0.2 podemos deducir el siguiente corolario.

**Corolario 6.0.1.** *Sea  $H$  un patrón y  $H'$  una contracción de  $H$ .  $H \in \tilde{\mathcal{B}}_i$  si y solo si  $H' \in \tilde{\mathcal{B}}_i$ , con  $i \in \{1, 2, 3\}$ .*

## 6.1. Familia $\tilde{\mathcal{B}}_2$

En esta sección, damos una caracterización de los patrones que pertenecen a  $\tilde{\mathcal{B}}_2$ . Estos patrones son las digráficas reflexivas tales que su complemento no contiene ciclos impares. Recordemos que estas digráficas son exactamente las que pertenecen a  $\mathcal{B}_2$ , véase el teorema 4.0.1; es decir,  $\tilde{\mathcal{B}}_2 = \mathcal{B}_2$ .

Consideremos el siguiente lema, el cual nos dice que la familia  $\tilde{\mathcal{B}}_2$  es cerrada bajo tomar sumas.

**Lema 6.1.1.** *Sean  $H_1$  y  $H_2$  dos patrones reflexivos. Si  $H_1$  y  $H_2$  pertenecen a  $\tilde{\mathcal{B}}_2$ , entonces  $H_1 \bullet H_2 \in \tilde{\mathcal{B}}_2$ .*

*Demostración.* Sean  $H_1$  y  $H_2$  patrones reflexivos en  $\tilde{\mathcal{B}}_2$ .

Sea  $D$  una multidigráfica  $(H_1 \bullet H_2)$ -coloreada. Demostraremos que  $D$  tiene un conjunto independiente que es absorbente por  $H$ -trayectorias.

Para  $i \in \{1, 2\}$ , sea  $D_i$  la subdigráfica generadora de  $D$  cuyo conjunto de flechas consiste precisamente en aquellas flechas de  $D$  que están coloreadas con los vértices de  $H_i$ . Como  $H_1 \in \tilde{\mathcal{B}}_2$ , existe  $K$  un conjunto de vértices independiente que es absorbente por  $H_1$ -trayectorias en  $D_1$ . Análogamente, como  $H_2 \in \tilde{\mathcal{B}}_2$ , existe  $K'$  un conjunto independiente que es absorbente por  $H_2$ -trayectorias en  $D_2[K]$ , la subdigráfica inducida por  $K$  en  $D_2$ .

Por construcción,  $K'$  es independiente en  $D$ ; para verificar que  $K'$  es absorbente por  $(H_1 \bullet H_2)$ -trayectorias en  $D$ , consideremos  $x \in V(D) - K'$ . Si  $x \in K$ , entonces la elección de  $K'$  garantiza que existe una  $H_2$ -trayectoria en  $D$  que termina en un vértice de  $K'$ , esa misma  $H_2$ -trayectoria es una  $(H_1 \bullet H_2)$ -trayectoria en  $D$ . Si  $x \notin K$ , entonces, por la elección de  $K$ , existe un vértice  $y \in K$ , tal que existe una  $H_1$ -trayectoria, digamos  $P_1$ , de  $x$  a  $y$  en  $D_1$  y, por lo tanto, en  $D$ . En caso de que  $y \in K'$ , entonces  $P_1$  es la  $(H_1 \bullet H_2)$ -trayectoria buscada. Si  $y \notin K'$ , entonces, como en el caso anterior, existe una  $H_2$ -trayectoria, digamos  $P_2$  desde  $y$  hasta un vértice

$z \in K'$  en  $D_2[K]$ . Sea  $s$  el último vértice en  $P_2$  que también está en  $P_1$ , existe pues  $y$  pertenece a ambas trayectorias. Consideremos la trayectoria  $P_3 = (x, P_1, s) \cup (s, P_2, z)$  en  $D$ . Ya que  $P_1$  es una  $H_1$ -trayectoria en  $D$ ,  $P_2$  es una  $H_2$ -trayectoria en  $D$  y como todo vértice en  $V(H_1)$  es adyacente hacia todos los vértices en  $V(H_2)$ , entonces se sigue que  $P_3$  es una  $(H_1 \bullet H_2)$ -trayectoria de  $x$  a  $z$  en  $D$ .

Por lo tanto,  $K'$  es un conjunto independiente que es absorbente por  $(H_1 \bullet H_2)$ -trayectorias en  $D$ .  $\square$

Usando el lema anterior obtenemos la siguiente caracterización de los patrones en  $\tilde{\mathcal{B}}_2$ .

**Teorema 6.1.1.** *Sea  $H$  un patrón reflexivo.  $H$  pertenece a  $\tilde{\mathcal{B}}_2$  si y solo si su complemento,  $H^c$ , no contiene ciclos impares.*

*Demostración.* Sea  $H \in \tilde{\mathcal{B}}_2$ . Demostraremos, por contrapositiva, que  $H^c$  no contiene ciclos impares. Supongamos que  $H^c$  contiene un ciclo impar  $C = (0, 1, 2, \dots, 2k, 0)$ . Consideremos la digráfica que es un ciclo impar  $C_{2k+1} = (x_0, x_1, \dots, x_{2k}, x_0)$  junto con la siguiente  $H$ -coloración  $c$ , tal que  $c((x_i, x_{i+1})) = i$  para  $i \in \{0, 1, \dots, 2k-1\}$  y  $c((x_{2k}, x_0)) = 2k$ . Notemos que cada  $H$ -trayectoria en  $C_{2k+1}$  es una única flecha. Se sigue que,  $C_{2k+1}$  no tiene un conjunto independiente que es absorbente por  $H$ -trayectorias y, por lo tanto,  $H \notin \tilde{\mathcal{B}}_2$ .

Ahora, supongamos que  $H^c$  no tiene ciclos impares. Demostraremos que  $H \in \tilde{\mathcal{B}}_2$ . Sea  $H_1, \dots, H_k$  una sucesión de los complementos de las componentes fuertes de  $H^c$ , tal que  $H_1^c$  es una componente inicial de  $H^c$  y  $H_i^c$  es una componente inicial de  $H^c - \left( \bigcup_{j=1}^{i-1} H_j^c \right)$  con  $i \in \{2, \dots, k\}$ . Como cada  $H_j^c$  es una componente fuerte de  $H^c$  y no tiene ciclos impares, entonces, por el teorema 1.2.1, se tiene que  $H_j^c$  es bipartita, con  $V_{j,1}$  y  $V_{j,2}$  sus clases de la bipartición, para cada  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Se sigue que, en  $H$ , cada  $V_{i,j}$  induce una digráfica reflexiva completa con  $i \in \{1, \dots, k\}$  y  $j \in \{1, 2\}$ . Por lo que,  $H[V_{i,1}] \cup H[V_{i,2}]$  es una subdigráfica generadora de  $H_i$  y una expansión de  $\overleftrightarrow{2K}_1$ . Recordemos que  $\overleftrightarrow{2K}_1 \in \tilde{\mathcal{B}}_3 \subseteq \tilde{\mathcal{B}}_2$ . Por el corolario 6.0.1 y el lema 6.0.1.3, se tiene que  $H_i \in \tilde{\mathcal{B}}_2$ .

Por la elección de  $H_i$ , se tiene que  $H' = H_k \bullet (\dots \bullet (H_3 \bullet (H_2 \bullet H_1)) \dots)$  es una subdigráfica generadora de  $H$ . Más aún, por el lema 6.1.1, se sigue que  $H' \in \tilde{\mathcal{B}}_2$ . Finalmente, por del lema 6.0.1.3, podemos concluir que  $H \in \tilde{\mathcal{B}}_2$ .  $\square$

# Capítulo 7

## Familia $\tilde{\mathcal{B}}_3$ : Patrones pancromáticos por trayectorias

En esta sección dirigimos nuestra atención a  $\tilde{\mathcal{B}}_3$ . A los elementos de esta familia los llamamos *patrones pancromáticos por trayectorias*. En la sección 5.3 del capítulo 5, se hace un análisis estructural de los patrones pancromáticos por caminos, utilizando subdigráficas prohibidas. Se puede utilizar un enfoque similar para describir la estructura de los patrones pancromáticos por trayectorias. La idea es clasificar todos los patrones con a lo más tres vértices; saber cuáles de ellos pertenecen a  $\tilde{\mathcal{B}}_3$ , y de esta manera, obtener suficiente información para describir la estructura general de los patrones pancromáticos por trayectorias.

Comenzamos nuestro análisis con el siguiente teorema, que es una consecuencia directa del teorema 3.3.3, y relaciona a los patrones pancromáticos por trayectorias con los patrones pancromáticos por caminos.

**Teorema 7.0.1.** *Si  $H$  es un patrón transitivo y reflexivo, entonces  $H$  es un patrón pancromático por trayectorias si y solo si  $H$  es un patrón pancromático por caminos.*

*Demostración.* Sean  $H$  un patrón transitivo y reflexivo, y  $D$  una multidigráfica  $H$ -coloreada. El resultado se sigue directamente del teorema 3.3.3 que afirma que todo núcleo por  $H$ -caminos en  $D$  es un núcleo por  $H$ -trayectorias en  $D$ , y viceversa.  $\square$

Arpin y Linek muestran en [1] que toda digráfica reflexiva con orden uno o dos es un patrón pancromático. Estos patrones son trivialmente transitivos,

del teorema 7.0.1 se sigue que los patrones pancromáticos con orden uno o dos también son patrones pancromáticos por trayectorias.

A partir del teorema anterior, es posible analizar nueve de los 16 patrones de orden tres. En [1], Arpin y Linek demuestran que los patrones  $\overleftrightarrow{K}_3$ ,  $\overleftrightarrow{K}_1 \bullet \overleftrightarrow{K}_2$ ,  $\overleftrightarrow{K}_2 \bullet \overleftrightarrow{K}_1$  y  $\overleftrightarrow{K}_2 + \overleftrightarrow{K}_1$  pertenecen a  $\mathcal{B}_3$ , además, todos de ellos son patrones transitivos, por lo tanto, también pertenecen a  $\tilde{\mathcal{B}}_3$ , véase la figura 7.1a. De la misma manera, los patrones  $2\overleftrightarrow{K}_1 \bullet \overleftrightarrow{K}_1$ ,  $\overrightarrow{P}_2 + \overleftrightarrow{K}_1$ ,  $T_3$ ,  $\overleftrightarrow{K}_1 \bullet 2\overleftrightarrow{K}_1$  y  $3\overleftrightarrow{K}_1$  son transitivos y no pertenecen a  $\mathcal{B}_3$ , por lo que no son patrones pancromáticos por trayectorias, véase la figura 7.1b.

El siguiente resultado se prueba en [1]; aunque lo declararon para patrones pancromáticos por caminos, es fácil notar que la misma prueba funciona para patrones pancromáticos por trayectorias.

**Lema 7.0.1.** *Si  $W = (x_0, x_1, \dots, x_k)$  es un camino en  $H$  tal que*

1. *Para cada  $x_i$ , existe  $c_i \in V(H)$  tal que  $(x_i, c_i) \notin F(H)$ , con  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ .*
2.  *$(x_k, x_0) \notin F(H)$ .*

*Entonces  $H \notin \tilde{\mathcal{B}}_3$ .*

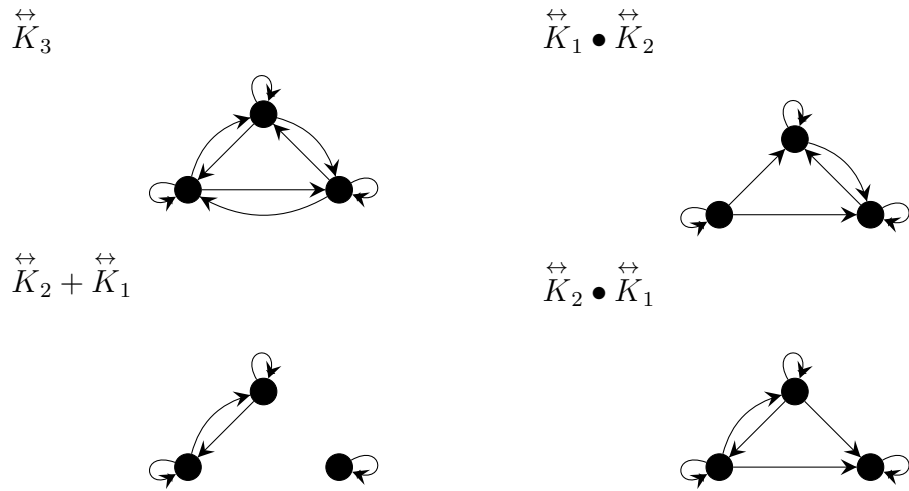
*Demostración.* Sean  $W = (x_0, x_1, \dots, x_k)$  un camino en  $H$  como en la hipótesis, y  $D$  la digráfica tal que

$$\begin{aligned} V(D) &= \{v_{ij} : i \in \mathbb{Z}_3, j \in \mathbb{Z}_{k+1}\} \cup \{v_\infty\} \\ &\text{y} \\ F(D) &= \{(v_{ij}, v_{i(j+1)}) : 0 \leq j \leq k-1\} \\ &\quad \cup \{(v_{ik}, v_{(i+1)0}) : i \in \mathbb{Z}_3\} \\ &\quad \cup \{(v_{ij}, v_\infty) : i \in \mathbb{Z}_3, 1 \leq j \leq k\}. \end{aligned}$$

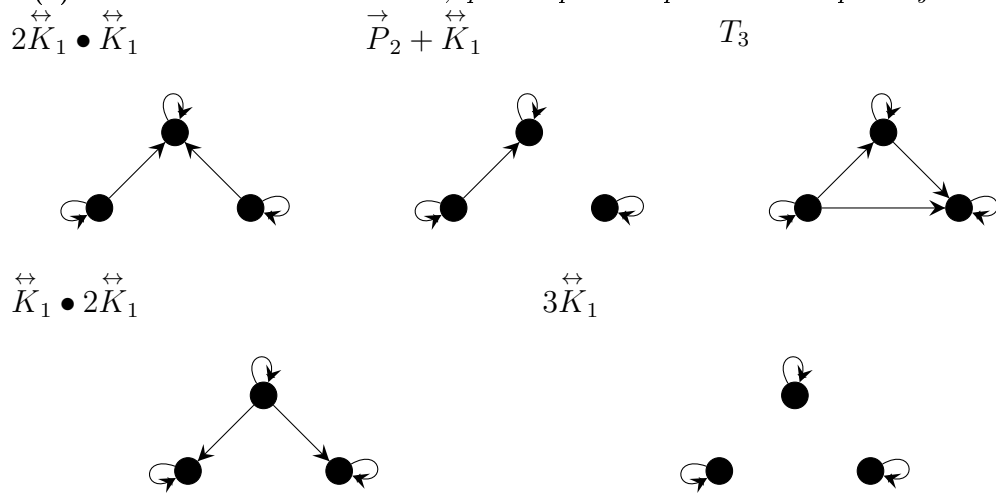
Consideramos  $\varsigma$ , la  $H$ -coloración de  $D$ , definida de la siguiente manera:

$$\varsigma((u, v)) = \begin{cases} x_j & \text{si } (u, v) = (v_{ij}, v_{i(j+1)}) \text{ con } 0 \leq j \leq k-1, \\ x_k & \text{si } (u, v) = (v_{ik}, v_{(i+1)0}) \text{ con } i \in \mathbb{Z}_3, \\ c_{j-1} & \text{si } (u, v) = (v_{ij}, v_\infty) \text{ con } i \in \mathbb{Z}_3, 1 \leq j \leq k. \end{cases}$$

Afirmamos que  $D$  no tiene núcleo por  $H$ -trayectorias. Procediendo por contradicción, supongamos que existe  $N \subseteq V(D)$  tal que  $N$  es un núcleo por  $H$ -trayectorias en  $D$ . Debido a que  $v_\infty$  es un pozo de  $D$ , entonces  $v_\infty \in N$ .



(a) *Patrones transitivos de orden 3, que son patrones pancromáticos por trayectorias.*



(b) *Patrones transitivos de orden 3, que no son patrones pancromáticos por trayectorias.*

**Figura 7.1:** *Patrones transitivos de orden 3.*

Ya que los vértices  $v_{ij}$ , con  $i \in \mathbb{Z}_3$  y  $1 \leq j \leq k$ , son adyacentes hacia  $v_\infty$ , entonces no pueden ser elementos de  $N$ . Por construcción, toda trayectoria  $T = (z_0, \dots, z_n = v_\infty)$ , de longitud al menos dos, cuyo vértice final es  $v_\infty$  cumple que sus dos últimas flechas son:  $(v_{i(j-1)}, v_{ij})$  y  $(v_{ij}, v_\infty)$ , respectivamente, con  $i \in \mathbb{Z}_3$  y  $j \in \{1, \dots, k\}$ , pero  $\varsigma((v_{i(j-1)}, v_{ij})) = x_{j-1}$  y  $\varsigma((v_{ij}, v_\infty)) = c_{j-1}$ , que por hipótesis  $(x_{j-1}, c_{j-1}) \notin F(H)$ . Por lo que,  $T$  no es una  $H$ -trayectoria. Por lo tanto, toda  $H$ -trayectoria que termina en  $v_\infty$  es una flecha. Observemos que  $v_{00}$ ,  $v_{10}$  y  $v_{20}$  no son adyacentes hacia  $v_\infty$ , se sigue que  $N \neq \{v_\infty\}$ .

Consideremos las siguientes trayectorias:  $T_i = (v_{i0}, v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ik}, v_{(i+1)0})$  con  $i \in \mathbb{Z}_3$ . Como  $\varsigma((v_{ij}, v_{i(j+1)})) = x_j$  con  $i \in \mathbb{Z}_3$  y  $j \in \{0, \dots, k-1\}$  se tiene que  $T_i$  es una  $H$ -trayectoria en  $D$ , con  $i \in \mathbb{Z}_3$ . Por lo tanto, dos vértices del conjunto  $\{v_{00}, v_{10}, v_{20}\}$  no pueden estar al mismo tiempo en  $N$ .

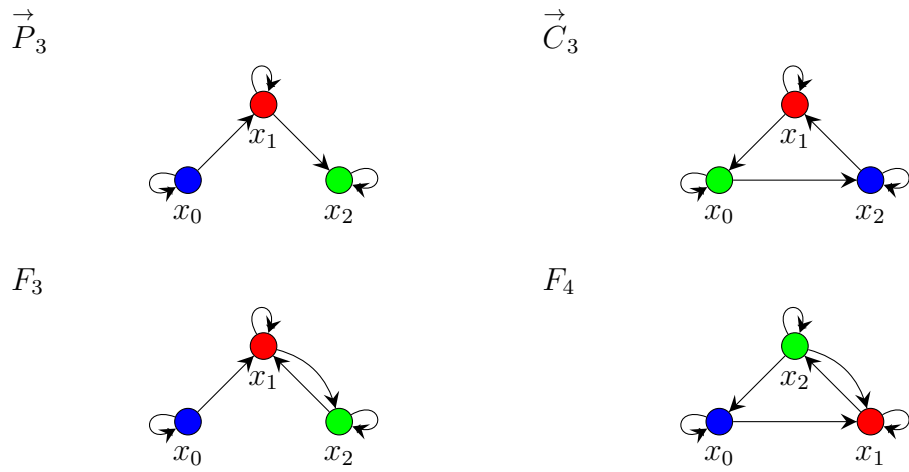
Por otro lado,  $(v_{i0}, T_i, v_{(i+1)0}) \cup (v_{(i+1)0}, T_{i+1}, v_{(i+2)0})$  es la única trayectoria de  $v_{i0}$  a  $v_{(i+2)0}$  en  $D$ , con  $i \in \mathbb{Z}_3$ ; sin embargo, no es una  $H$ -trayectoria pues  $\varsigma((v_{ik}, v_{(i+1)0})) = x_k$  y  $\varsigma((v_{(i+1)0}, v_{(i+1)1})) = x_0$  pero  $(x_k, x_0) \notin F(H)$ . Se sigue que no hay un vértice del conjunto  $\{v_{00}, v_{10}, v_{20}\}$  que es alcanzable por  $H$ -trayectorias desde los otros dos vértices. De esta manera, se deduce que no se puede construir  $N$ , es decir,  $D$  no tiene núcleo por  $H$ -trayectorias y, por lo tanto,  $H \notin \tilde{\mathcal{B}}_3$ .  $\square$

Como consecuencia del lema anterior, obtenemos el siguiente corolario.

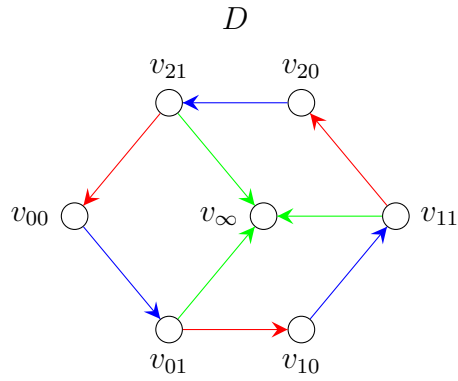
**Corolario 7.0.1.**  $\vec{C}_3, \vec{P}_3, F_3$  y  $F_4$  no son patrones pancromáticos por trayectorias.

*Demostración.* Sea  $D$  la digráfica en la figura 7.2b. Notemos que  $D$  no tiene núcleo por  $H$ -trayectorias con  $H \in \{\vec{C}_3, \vec{P}_3, F_3, F_4\}$ . Vale la pena notar que,  $D$  se obtuvo usando la construcción dada por la prueba del lema 7.0.1.  $\square$

Hasta ahora, tratamos con trece de los dieciséis patrones reflexivos con tres vértices. Los tres patrones restantes son más difíciles de manejar. La siguiente sección se enfoca en los patrones  $\vec{P}_3, F_2$  y  $F_1$ .



(a) Patrones no transitivos de orden 3, que no son patrones pancromáticos por trayectorias.



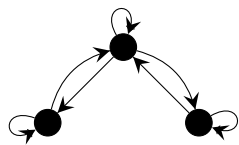
(b) Digráfica H-coloreada sin núcleo por H-trayectorias.

**Figura 7.2:** Patrones que no son patrones pancromáticos por trayectorias y su contraejemplo.

## 7.1. Patrones $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ y $F_2$

En [11], se demuestra que los patrones  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$  y  $F_2$  no son patrones pancromáticos por caminos, véase la figura 7.3. Sin embargo, al tratar de adaptar la prueba en [11] para verificar si ambos patrones son patrones pancromáticos por trayectorias, notamos que la prueba del lema clave, presentada en [11], es errónea. Por lo que, hasta este momento no se sabe si  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$  y  $F_2$  son patrones pancromáticos por caminos o no. A pesar de esto, usamos una técnica similar a la propuesta en [11] para demostrar que  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$  y  $F_2$  no son patrones pancromáticos por trayectorias.

$\overset{\leftrightarrow}{P}_3$



$F_2$

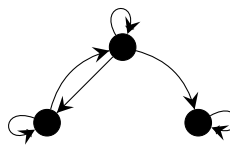


Figura 7.3: Patrones  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$  y  $F_2$ .

**Lema 7.1.1.** *El patrón  $H$  de la figura 7.4 no es un patrón pancromático por trayectorias.*

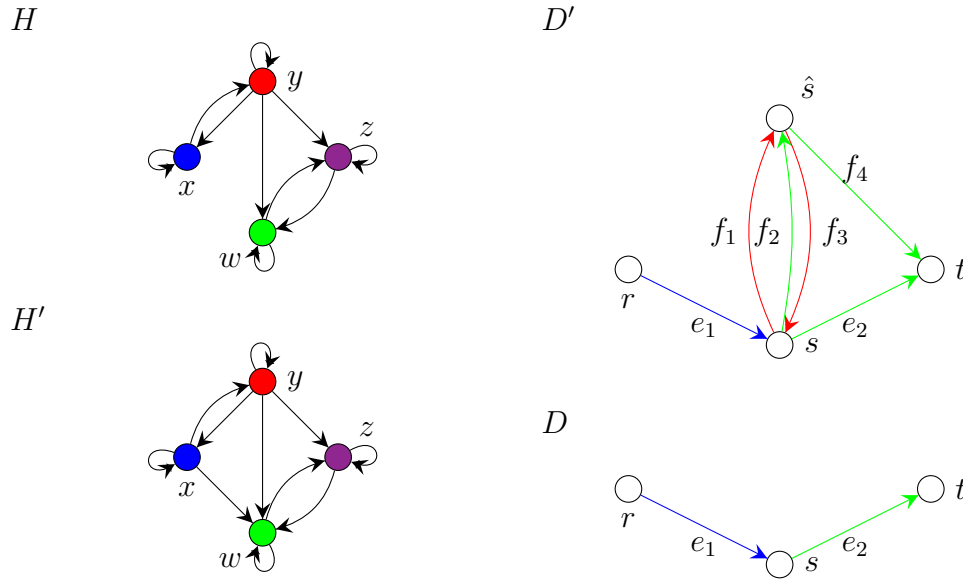
*Demostración.* Consideremos los patrones  $H$  y  $H'$  como en figura 7.4. Primero mostraremos que para cada multidigráfica  $H'$ -coloreada  $D$  existe una multidigráfica  $H$ -coloreada  $D'$  tal que si  $D'$  tiene un núcleo por  $H$ -trayectorias, entonces  $D$  tiene un núcleo por  $H'$ -trayectorias.

Sea  $D$  una multidigráfica  $H'$ -coloreada, con coloración  $c$ , construimos  $D'$  a partir de  $D$  de la siguiente manera. Para cada trayectoria  $(r, e_1, s, e_2, t)$  en  $D$ , con  $e_1, e_2 \in F(D)$ ,  $c(e_1) = x$  y  $c(e_2) = w$ , agregamos un nuevo vértice  $\hat{s}$ , junto con las flechas  $f_1, f_2 \in F_{D'}[s, \hat{s}]$ ,  $f_3 \in F_{D'}[\hat{s}, s]$  y  $f_4 \in F_{D'}[\hat{s}, t]$  tales que  $c(f_1) = y$ ,  $c(f_2) = w$ ,  $c(f_3) = y$  y  $c(f_4) = w$ . Sea  $\hat{S}$  el conjunto de todos los nuevos vértices  $\hat{s}$  en  $D'$ , véase la figura 7.4.

Supongamos que  $N' \subseteq V(D')$  es un núcleo por  $H$ -trayectorias en  $D'$ . Consideremos  $N$  definido de la siguiente manera.

$$N = (N' \cup \{s \in V_D : \hat{s} \in N'\}) - \hat{S}.$$





**Figura 7.4:** Patrones  $H$  y  $H'$  del lema 7.1.1.

Afirmamos que  $N$  es un núcleo por  $H'$ -trayectorias en  $D$ . Para demostrar que  $N$  es independiente por  $H'$ -trayectorias, sean  $u$  y  $v$  dos vértices de  $N$ . Procediendo por contradicción, supongamos que existe una  $H'$ -trayectoria  $P = (u = u_0, u_1, \dots, u_n = v)$  de  $u$  a  $v$  en  $D$ . Notemos que  $P$  es una trayectoria en  $D'$ . Si  $P$  no es una  $H$ -trayectoria en  $D'$ , entonces, por construcción, existe al menos una subtrayectoria  $(r, e_1, s, e_2, t)$  de  $P$ , con  $e_1, e_2 \in F(D)$ ,  $c(e_1) = x$  y  $c(e_2) = w$ . Consideremos la  $H$ -trayectoria  $(r, e_1, s, f_1, \hat{s}, f_4, t)$ , con  $f_1 \in F_{D'}[s, \hat{s}]$  y  $f_4 \in F_{D'}[\hat{s}, t]$  tales que  $c(f_1) = y$  y  $c(f_4) = w$ . Sea  $P'$  la trayectoria resultante de reemplazar cada subtrayectoria de la forma  $(r, e_1, s, e_2, t)$  de  $P$ , con  $e_1, e_2 \in F(D)$ ,  $c(e_1) = x$  y  $c(e_2) = w$ , por su respectiva  $H$ -trayectoria de la forma  $(r, e_1, s, f_1, \hat{s}, f_4, t)$  donde  $f_1 \in F_{D'}[s, \hat{s}]$  y  $f_4 \in F_{D'}[\hat{s}, t]$  con  $c(f_1) = y$  y  $c(f_4) = w$ . Por construcción,  $P'$  es una  $H$ -trayectoria de  $u$  a  $v$  en  $D'$ . Por lo que tenemos 4 casos.

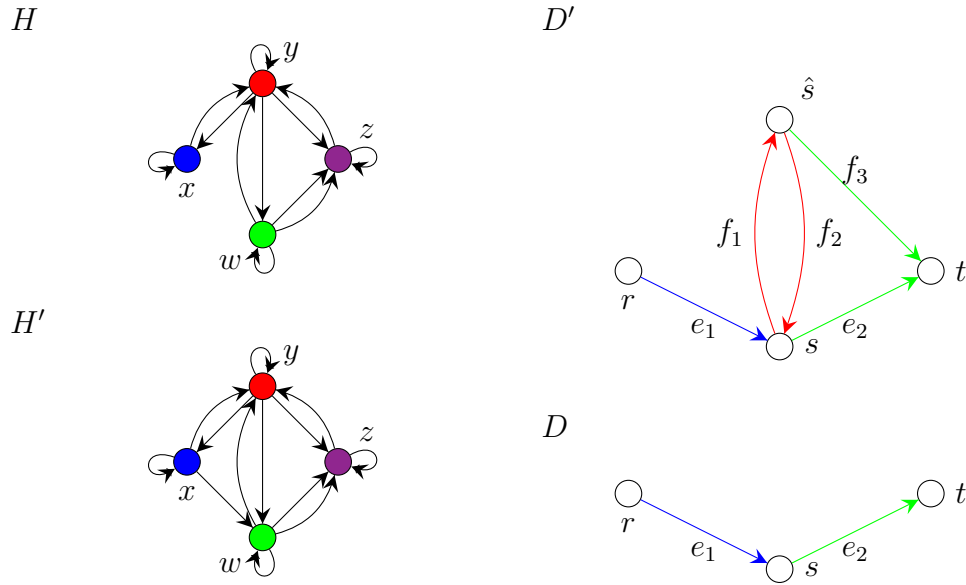
- $\{u, v\} \subseteq N' - \{s \in V_D : \hat{s} \in N'\}$ . Se sigue que  $P$  o  $P'$  es una  $H$ -trayectoria entre dos vértices de  $D'$ , contradiciendo la independencia por  $H$ -trayectorias de  $N'$ .
- $u \in \{s \in V_D : \hat{s} \in N'\}$  y  $v \in N' - \{s \in V_D : \hat{s} \in N'\}$ . Sea  $\hat{u} \in V(D')$  tal que  $\hat{u} \in N'$  correspondiente a  $u$ . Como  $N_H^+(y) = V(H)$ , entonces

agregar el vértice  $\hat{u}$ , con la flecha de  $\hat{u}$  a  $u$  de color  $y$ , al inicio de  $P$  (o de  $P'$ ), nos da como resultado una  $H$ -trayectoria entre dos vértices de  $N'$  en  $D'$ , contradiciendo la independencia por  $H$ -trayectorias de  $N'$ .

- $u \in N' - \{s \in V_D : \hat{s} \in N'\}$  y  $v \in \{s \in V_D : \hat{s} \in N'\}$ . Sea  $\hat{v} \in V(D')$  tal que  $\hat{v} \in N'$  correspondiente a  $v$ . Como  $N_H^-(y) = \{x, y\}$  y  $N_H^-(w) = \{z, w, y\}$ , entonces agregar la flecha de  $v$  a  $\hat{v}$  con color  $y$ , si la flecha de  $u_{n-1}$  a  $u_n = v$  tiene color  $x$  o  $y$ , al final de  $P$  (o  $P'$ ), o agregar la flecha de  $v$  a  $\hat{v}$  con color  $w$  si la flecha de  $u_{n-1}$  a  $u_n = v$  tiene color  $z$  o  $w$ , al final de  $P$  (o  $P'$ ) nos da como resultado una  $H$ -trayectoria entre dos vértices de  $N'$  en  $D'$ , contradiciendo la independencia por  $H$ -trayectorias de  $N'$ .
- $\{u, v\} \subseteq \{s \in V_D : \hat{s} \in N'\}$ . Sean  $\hat{u}, \hat{v} \in V(D')$  tales que  $\hat{u}, \hat{v} \in N'$ , los vértices correspondientes a  $u$  y  $v$ , respectivamente. Como  $N_H^+(y) = V(H)$ ,  $N_H^-(y) = \{x, y\}$  y  $N_H^-(w) = \{z, w, y\}$ , entonces agregar el vértice  $\hat{u}$ , con la flecha de  $\hat{u}$  a  $u$  de color  $y$ , al inicio de  $P$  (o de  $P'$ ), y agregar la flecha de  $v$  a  $\hat{v}$  con color  $y$ , si la flecha de  $u_{n-1}$  a  $u_n = v$  tiene color  $x$  o  $y$ , al final de  $P$  (o  $P'$ ), o agregar la flecha de  $v$  a  $\hat{v}$  con color  $w$  si la flecha de  $u_{n-1}$  a  $u_n = v$  tiene color  $z$  o  $w$ , al final de  $P$  (o  $P'$ ) nos da como resultado una  $H$ -trayectoria entre dos vértices de  $N'$  en  $D'$ , contradiciendo la independencia por  $H$ -trayectorias de  $N'$ .

Por lo tanto, no puede existir una  $H'$ -trayectoria de  $u$  a  $v$  en  $D$ ; es decir,  $N$  es independiente por  $H'$ -trayectorias en  $D$ .

Ahora demostraremos que  $N$  es absorbente por  $H'$ -trayectorias en  $D$ . Sea  $u \in V(D) - N$ . Por definición de  $N$ , tenemos que  $u \in V(D') - N'$ . Como  $N'$  es núcleo por  $H$ -trayectorias en  $D'$ , entonces existe  $v \in N'$  tal que  $u$  alcanza a  $v$  por  $H$ -trayectorias en  $D'$ . Sea  $P = (u = u_0, u_1, \dots, u_n = v)$  dicha  $H$ -trayectoria en  $D'$ . Supongamos que  $v \notin \hat{S}$ . Si  $\hat{s} \in V(P)$ , entonces  $\hat{s} = u_i$  para alguna  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Por construcción de  $D'$ , se tiene que  $s = u_{i-1}$ , por lo que existe la flecha de  $u_{i-1}$  a  $u_{i+1}$  en  $D$  con color  $w$ , más aún, la flecha de  $u_i$  a  $u_{i+1}$  tiene color  $w$ . Como  $N_{H'}^-(w) = V(H')$ , entonces  $(u_{i-2}, u_{i-1}, u_{i+1}, u_{i+2})$  es una  $H'$ -trayectoria en  $D$ . Se sigue que al remover todos los  $\hat{s}$  de  $P$  se obtiene una  $H'$ -trayectoria de  $u$  a  $v$  en  $D$ . Si  $v \in \hat{S}$ , entonces  $u_{n-1} \in N$ . El procedimiento anterior nos da una  $H'$ -trayectoria de  $u$  a un vértice de  $N$  en  $D$ . Se concluye que  $N$  es absorbente por  $H'$ -trayectorias en  $D$ , y, por lo tanto,  $N$  es un núcleo por  $H'$ -trayectorias en  $D$ .



**Figura 7.5:** Patrones  $H$  y  $H'$  del lema 7.1.2.

Por otro lado, notemos que  $H'[\{x, w, z\}]$  no es un patrón pancromático por trayectorias. Del lema 6.0.1 se sigue que  $H' \notin \tilde{\mathcal{B}}_3$ . Por lo que existe una multidigráfica  $H'$ -coloreada  $D$  que no tiene núcleo por  $H'$ -trayectorias. Sea  $D'$  la multidigráfica  $H$ -coloreada construida como al inicio de esta prueba. Si  $H \in \tilde{\mathcal{B}}_3$ , entonces  $D'$  tiene núcleo por  $H$ -trayectorias, pero por los argumentos presentados anteriormente, se implica que  $D$  tiene núcleo por  $H'$ -trayectorias, lo que no puede suceder. Por lo tanto,  $H \notin \tilde{\mathcal{B}}_3$ . □

El siguiente resultado es muy similar al lema y la prueba anterior.

**Lema 7.1.2.** *El patrón  $H$  de la figura 7.5 no es un patrón pancromático por trayectorias.*

*Demostración.* Consideremos los patrones  $H$  y  $H'$  como en figura 7.5. Como en el lema anterior, mostraremos que para cada multidigráfica  $H'$ -coloreada  $D$  existe una multidigráfica  $H$ -coloreada  $D'$  tal que si  $D'$  tiene un núcleo por  $H$ -trayectorias, entonces  $D$  tiene un núcleo por  $H'$ -trayectorias.

Sea  $D$  una multidigráfica  $H'$ -coloreada, con coloración  $c$ , construimos  $D'$  a partir de  $D$  de la siguiente manera. Para cada trayectoria  $(r, e_1, s, e_2, t)$  en

$D$ , con  $e_1, e_2 \in F(D)$ ,  $c(e_1) = x$  y  $c(e_2) = w$ , agregamos un nuevo vértice  $\hat{s}$ , junto con las flechas  $f_1 \in F_{D'}[s, \hat{s}]$ ,  $f_2 \in F_{D'}[\hat{s}, s]$  y  $f_3 \in F_{D'}[\hat{s}, t]$  tales que  $c(f_1) = y$ ,  $c(f_2) = y$  y  $c(f_3) = w$ . Sea  $\hat{S}$  el conjunto de todos los nuevos vértices  $\hat{s}$  en  $D'$ , véase la figura 7.5.

Supongamos que  $N' \subseteq V(D')$  es un núcleo por  $H$ -trayectorias en  $D'$ . Consideremos  $N$  definido de la siguiente manera.

$$N = (N' \cup \{s \in V_D : \hat{s} \in N'\}) - \hat{S}.$$

Demostraremos que  $N$  es un núcleo por  $H'$ -trayectorias en  $D$ . Para la independencia por  $H'$ -trayectorias, sean  $u$  y  $v$  dos vértices de  $N$ . Procediendo por contradicción, supongamos que existe una  $H'$ -trayectoria  $P = (u = u_0, u_1, \dots, u_n = v)$  de  $u$  a  $v$  in  $D$ . Notemos que  $P$  es una trayectoria en  $D'$ . Si  $P$  no es una  $H$ -trayectoria, entonces, por construcción, existe al menos una subtrayectoria  $(r, e_1, s, e_2, t)$  de  $P$ , con  $e_1, e_2 \in F(D)$ ,  $c(e_1) = x$  y  $c(e_2) = w$ . Consideremos la  $H$ -trayectoria  $(r, e_1, s, f_1, \hat{s}, f_3, t)$  con  $f_1 \in F_{D'}[s, \hat{s}]$  y  $f_3 \in F_{D'}[\hat{s}, t]$  tales que  $c(f_1) = y$  y  $c(f_3) = w$ . Sea  $P'$  la trayectoria resultante de reemplazar cada subtrayectoria de la forma  $(r, e_1, s, e_2, t)$  de  $P$ , con  $e_1, e_2 \in F(D)$ ,  $c(e_1) = x$  y  $c(e_2) = w$ , por su respectiva  $H$ -trayectoria de la forma  $(r, e_1, s, f_1, \hat{s}, f_3, t)$  donde  $f_1 \in F_{D'}[s, \hat{s}]$  y  $f_3 \in F_{D'}[\hat{s}, t]$  tales que  $c(f_1) = y$  y  $c(f_3) = w$ . Por construcción,  $P'$  es una  $H$ -trayectoria de  $u$  a  $v$  en  $D'$ . Por lo que tenemos 4 casos.

- $\{u, v\} \subseteq N' - \{s \in V_D : \hat{s} \in N'\}$ . Se sigue que  $P$  o  $P'$  es una  $H$ -trayectoria entre dos vértices de  $D'$ , contradiciendo la independencia por  $H$ -trayectorias de  $N'$ .
- $u \in \{s \in V_D : \hat{s} \in N'\}$  y  $v \in N' - \{s \in V_D : \hat{s} \in N'\}$ . Sea  $\hat{u} \in V(D')$  tal que  $\hat{u} \in N'$  correspondiente a  $u$ . Como  $y$  es un vértice universal de  $H$ , entonces agregar el vértice  $\hat{u}$ , con la flecha de  $\hat{u}$  a  $u$  de color  $y$ , al inicio de  $P$  (o de  $P'$ ), nos da como resultado una  $H$ -trayectoria entre dos vértices de  $N'$  en  $D'$ , contradiciendo la independencia por  $H$ -trayectorias de  $N'$ .
- $u \in N' - \{s \in V_D : \hat{s} \in N'\}$  y  $v \in \{s \in V_D : \hat{s} \in N'\}$ . Sea  $\hat{v} \in V(D')$  tal que  $\hat{v} \in N'$  correspondiente a  $v$ . Como  $y$  es un vértice universal de  $H$ , entonces agregar el vértice  $\hat{v}$ , con la flecha de  $\hat{v}$  a  $u$  de color  $y$ , al final de  $P$  (o de  $P'$ ), nos da como resultado una  $H$ -trayectoria entre dos vértices de  $N'$  en  $D'$ , contradiciendo la independencia por  $H$ -trayectorias de  $N'$ .

- $\{u, v\} \subseteq \{s \in V_D : \hat{s} \in N'\}$ . Sean  $\hat{u}, \hat{v} \in V(D')$  tales que  $\hat{u}, \hat{v} \in N'$ , los vértices correspondientes a  $u$  y  $v$ , respectivamente. Como  $y$  es un vértice universal de  $H$ , entonces agregar el vértice  $\hat{u}$ , con la flecha de  $\hat{u}$  a  $u$  de color  $y$ , al inicio de  $P$  (o de  $P'$ ), y agregar la flecha de  $v$  a  $\hat{v}$  con color  $y$ , nos da como resultado una  $H$ -trayectoria entre dos vértices de  $N'$  en  $D'$ , contradiciendo la independencia por  $H$ -trayectorias de  $N'$ .

Por lo tanto, no puede existir una  $H'$ -trayectoria de  $u$  a  $v$  en  $D$ ; es decir,  $N$  es independiente por  $H'$ -trayectorias en  $D$ .

Ahora, demostraremos que  $N$  es absorbente por  $H'$ -trayectorias en  $D$ . Sea  $u \in V(D) - N$ . Por definición de  $N$ , tenemos que  $u \in V(D') - N'$ . Como  $N'$  es núcleo por  $H$ -trayectorias en  $D'$ , entonces existe  $v \in N'$  tal que  $u$  alcanza a  $v$  por  $H$ -trayectorias en  $D'$ . Sea  $P = (u = u_0, u_1, \dots, u_n = v)$  dicha  $H$ -trayectoria en  $D'$ . Supongamos que  $v \notin \hat{S}$ . Si  $\hat{s} \in V(P)$ , entonces  $\hat{s} = u_i$  para alguna  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Por construcción de  $D'$ , se tiene que  $s = u_{i-1}$ , por lo que existe la flecha de  $u_{i-1}$  a  $u_{i+1}$  en  $D$  con color  $w$ , más aún, la flecha de  $u_i$  a  $u_{i+1}$  tiene color  $w$ . Como  $N_{H'}^-(w) = V(H')$ , entonces  $(u_{i-2}, u_{i-1}, u_{i+1}, u_{i+2})$  es una  $H'$ -trayectoria en  $D$ . Se sigue que al remover todos los  $\hat{s}$  de  $P$  se obtiene una  $H'$ -trayectoria de  $u$  a  $v$  en  $D$ . Si  $v \in \hat{S}$ , entonces  $u_{n-1} \in N$ . El procedimiento anterior nos da una  $H'$ -trayectoria de  $u$  a un vértice de  $N$  en  $D$ . Se concluye que  $N$  es absorbente por  $H'$ -trayectorias en  $D$ , y, por lo tanto,  $N$  es un núcleo por  $H'$ -trayectorias en  $D$ .

Por otro lado, notemos que  $H'[\{x, w, z\}]$  no es un patrón pancromático por trayectorias. Del lema 6.0.1 se sigue que  $H' \notin \tilde{\mathcal{B}}_3$ . Por lo que existe una multidigráfica  $H'$ -coloreada  $D$  que no tiene núcleo por  $H'$ -trayectorias. Sea  $D'$  la multidigráfica  $H$ -coloreada construida como al inicio de esta prueba. Si  $H \in \tilde{\mathcal{B}}_3$ , entonces  $D'$  tiene núcleo por  $H$ -trayectorias, pero por los argumentos presentados anteriormente, se implica que  $D$  tiene núcleo por  $H'$ -trayectorias, lo que no puede suceder. Por lo tanto,  $H \notin \tilde{\mathcal{B}}_3$ . □

**Proposición 7.1.1.** *Los patrones  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$  y  $F_2$  no son patrones pancromáticos por trayectorias.*

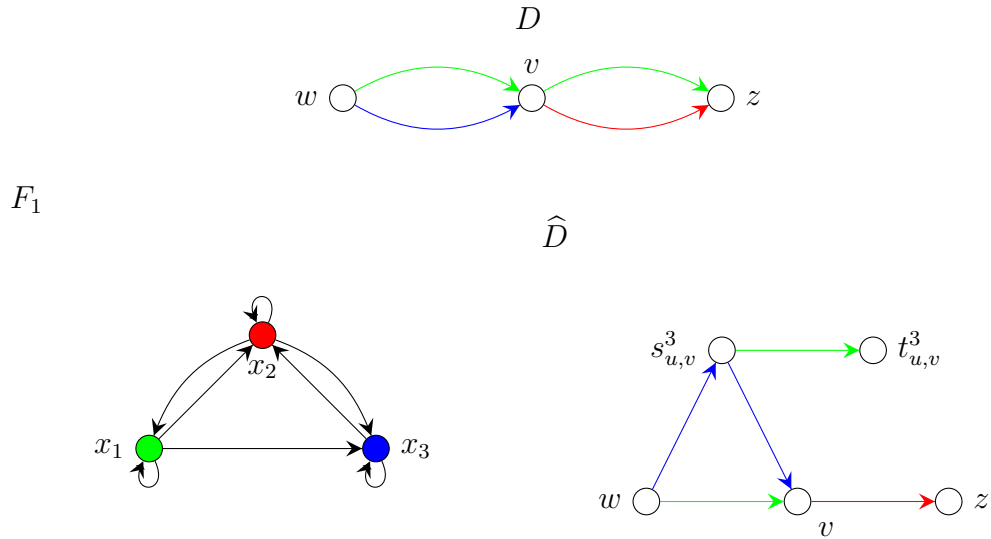
*Demostración.* Observemos que los vértices  $z$  y  $w$ , de los patrones  $H$  de los lemas 7.1.1 y 7.1.2, son gemelos verdaderos. Del corolario 6.0.1 se tiene que el patrón  $H$  es un patrón pancromático por trayectorias si y solo si el patrón obtenido de  $H$  al contraer  $z$  y  $w$  es un patrón pancromático por trayectorias.

Pero los patrones obtenidos al contraer  $z$  y  $w$  de  $H$  son  $F_2$  y  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$  para los lemas 7.1.1 y 7.1.2, respectivamente. De los lemmas 7.1.1 y 7.1.2 se deduce que  $F_2$  y  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$  no son patrones pancromáticos por trayectorias.  $\square$

## 7.2. Patrón $F_1$

En las secciones anteriores se demuestra cuáles de los patrones de tres vértices son un patrón pancromático por trayectorias, o no, excepto el patrón  $F_1$ . Arpin y Linek demuestran en [1] que  $F_1$  es un patrón pancromático por caminos, utilizando una operación de cierre por colores para las digráficas  $F_1$ -coloreadas. Desafortunadamente, su técnica no es directamente aplicable en el caso por trayectorias, ni parece ser modificable para adaptarse a ella. Un hecho interesante que debería señalarse a partir de la técnica de Arpin y Linek es que construyen una multidigráfica, hay flechas paralelos presentes, donde siempre existen algunas subestructuras. A partir de aquí, uno puede preguntarse si puede existir una multidigráfica  $F_1$ -coloreada sin un núcleo por  $F_1$ -trayectorias, mientras que cada digráfica  $F_1$ -coloreada, sin flechas paralelos, tiene un núcleo por  $F_1$ -trayectorias. Si es así, buscar un contraejemplo implica buscar dentro de todas multidigráficas, lo que representa un espacio de búsqueda más amplio que solo considerar digráficas. Afortunadamente, no es el caso, el resultado principal de esta sección nos dice que únicamente podemos considerar a las digráficas.

Para probar lo anterior, recordemos que el lema 5.2.1 da condiciones a un patrón  $H$  para que su pertenencia o no, a la familia  $\mathcal{B}_3$  pueda centrarse únicamente en encontrar un núcleo por  $H$ -caminos en las digráficas  $H$ -coloreadas. En la demostración de dicho lema, dada una multidigráfica  $H$ -coloreada  $D$  se construye una digráfica  $H$ -coloreada  $\widehat{D}$  tal que  $D$  tiene núcleo por  $H$ -caminos si y solo si  $\widehat{D}$  tiene núcleo por  $H$ -caminos. Para probar lo anterior, se demuestra que para todo par de vértices  $x$  e  $y$  de  $D$ , existe un  $H$ -camino de  $x$  a  $y$  en  $D$  si y solo si existe un  $H$ -camino de  $x$  a  $y$  en  $\widehat{D}$ . En esta última parte de la demostración, para cada  $H$ -camino  $W$ , de  $x$  a  $y$  en  $D$ , se sustituyen algunas flechas por otras con el mismo color, o por otras flechas cuyo color es un vértice universal de  $H$ , o por trayectorias monocromáticas del mismo color, para obtener un  $H$ -camino  $\widehat{W}$  de  $x$  a  $y$  en  $\widehat{D}$ . De manera análoga, para cada  $H$ -camino  $\widehat{W}$ , de  $x$  a  $y$  en  $\widehat{D}$ , se sustituyen algunas flechas por otras con el mismo color, o por otras flechas cuyo color es un vértice universal de  $H$ , y se sustituyen algunas trayectorias monocromáticas por flechas



**Figura 7.6:** Construcción del lema 7.2.1 para  $F_1$ .

del mismo color, para obtener un  $H$ -camino  $W$  de  $x$  a  $y$  en  $D$ . Es importante notar, que todas las sustituciones no reutilizan vértices de  $W$  o de  $\widehat{W}$ , es decir, si  $W$  es una trayectoria, entonces  $\widehat{W}$  también lo es, y viceversa. Con todo lo anterior, la prueba del siguiente lema es completamente análoga a la presentada en lema 5.2.1 intercambiando  $H$ -camino por  $H$ -trayectoria.

**Lema 7.2.1.** Sean  $H$  un patrón y  $R = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  el conjunto de vértices de  $H$  que no son vértices universales de  $H$ . Supongamos que para cada  $x_i$  existe un color  $c_i$  en  $H$  tal que  $(x_i, c_i) \notin A(H)$ , con  $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ .

Si toda digráfica  $H$ -coloreada tiene núcleo por  $H$ -trayectorias, entonces  $H$  es un patrón pancromático por trayectorias.

Consideremos  $F_1$  como en la figura 7.6. Notemos que  $F_1$  con  $R = \{x_1, x_3\}$ , cumplen con las hipótesis del lema 7.2.1. Por lo tanto, tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 7.2.1.** Si cada digráfica  $F_1$ -coloreada tiene núcleo por  $F_1$ -trayectorias, entonces  $F_1$  es un patrón pancromático por trayectorias.

### 7.3. Estructura y problemas abiertos de los patrones pancromáticos por trayectorias

Para redondear nuestra comparación entre los patrones pancromáticos por trayectorias con los patrones pancromáticos por caminos, hay que observar que Arpin y Linek prueban que existe un patrón en  $\mathcal{B}_2$  que no pertenece a  $\mathcal{B}_3$ . Recordemos que en la sección 6.1 se prueba que  $\mathcal{B}_2 = \tilde{\mathcal{B}}_2$ . Con base en lo anterior, podemos observar que  $\vec{P}_3 \in \tilde{\mathcal{B}}_2$ , más aún,  $\vec{P}_3 \notin \tilde{\mathcal{B}}_3$ . Por lo que, podemos concluir que  $\tilde{\mathcal{B}}_3$  está estrictamente contenido en  $\tilde{\mathcal{B}}_2$ .

Para alcanzar una conclusión respecto a  $\tilde{\mathcal{B}}_3$ , sea  $\mathcal{F}$  la familia de digráficas que contiene como elementos a  $2\vec{K}_1 \bullet \vec{K}_1$ ,  $\vec{P}_2 + \vec{K}_1$ ,  $T_3$ ,  $\vec{K}_1 \bullet 2\vec{K}_1$ ,  $3\vec{K}_1$ ,  $\vec{C}_3$ ,  $\vec{P}_3$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $F_4$  y  $\vec{P}_3$ , véase las figuras 7.1b, 7.2a y 7.3. También, sea  $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \{F_1\}$ .

Los siguientes afirmaciones describen la estructura de las digráficas  $\mathcal{F}$ -libres y las  $\mathcal{F}'$ -libres, respectivamente. El primer lema se debe a Galeana Sánchez y Hernández Cruz en [12].

**Lema 7.3.1.** [12] *Una digráfica reflexiva  $H$  es  $\mathcal{F}$ -libre si y solo si  $H$  es una digráfica completa o  $V(H)$  admite una partición  $(V_1, V_2)$  tal que  $H[V_i]$  es una digráfica reflexiva completa, con  $i \in \{1, 2\}$ , y se cumple una de las siguientes dos posibilidades.*

1. No hay flechas entre los vértices de  $V_1$  y los vértices de  $V_2$ .
2. Todo vértice de  $V_1$  es adyacente hacia a todo vértice de  $V_2$  y algunos vértices de  $V_2$  pueden ser adyacentes hacia algunos vértices de  $V_1$ .

El lema anterior dice que las digráficas reflexivas que son  $\mathcal{F}$ -libres son únicamente las digráficas completas, las expansiones de  $2\vec{K}_1$  y las digráficas bicompletas.

**Lema 7.3.2.** *Una digráfica reflexiva  $H$  es  $\mathcal{F}'$ -libre si y solo si  $H$  es una digráfica completa o  $V(H)$  admite una partición  $(V_1, V_2)$  tal que  $H[V_i]$  es una digráfica reflexiva completa, con  $i \in \{1, 2\}$ , y se cumple una de las siguientes dos posibilidades.*

1. No hay flechas entre los vértices de  $V_1$  y los vértices de  $V_2$ .
2. Todo vértice de  $V_1$  es adyacente hacia a todo vértice de  $V_2$  y ningún vértice de  $V_2$  es adyacente hacia ningún vértice de  $V_1$ .



*Demostración.* Sea  $H$  una digráfica  $\mathcal{F}'$ -libre. Supongamos que  $H$  no es una digráfica completa.

Como  $3\overset{\leftrightarrow}{K}_1 \in \mathcal{F}'$ , entonces  $H$  tiene como máximo dos componentes conexas. Si  $H$  tiene dos componentes conexas, entonces cada componente tiene que ser una digráfica completa. De lo contrario hay dos vértices en una componente, con a lo más una flecha entre ellos, que junto con un vértice en la otra componente inducen  $3\overset{\leftrightarrow}{K}_1$  o  $\overset{\leftrightarrow}{P}_2 + \overset{\leftrightarrow}{K}_1$  en  $H$ , lo que no puede suceder, pues  $3\overset{\leftrightarrow}{K}_1, \overset{\leftrightarrow}{P}_2 + \overset{\leftrightarrow}{K}_1 \in \mathcal{F}'$ . Por lo tanto,  $V(H)$  admite una partición  $(V_1, V_2)$  tal que  $H[V_i]$  es una digráfica reflexiva completa, con  $i \in \{1, 2\}$ , tal que no hay flechas entre los vértices de  $V_1$  y los vértices de  $V_2$ .

Ahora, supongamos que  $H$  es una digráfica conexa, no completa. Sean  $x, y \in V(H)$ , tales que no hay flecha simétrica entre  $x$  e  $y$ . Definimos  $V_1 = \{v \in V(H) : x \leftrightarrow_H v\} \cup \{x\}$  y  $V_2 = V_1 - V_2$ . Mostraremos que  $V_1$  y  $V_2$  cumplen las condiciones buscadas. Observemos que  $x \in V_1$  e  $y \in V_2$ . Sean  $u, v \in V_1$ . Por definición  $x \leftrightarrow_H u$  y  $x \leftrightarrow_H v$ . Como  $H$  es  $\mathcal{F}'$ -libre, entonces  $u \leftrightarrow_H v$ . Sean  $z, w \in V_2$ , se sigue que no hay flecha simétrica entre  $x$  y  $z$ , ni entre  $x$  y  $w$ . Como  $H$  es  $\mathcal{F}'$ -libre, se sigue que  $w \leftrightarrow_H z$ . Por lo tanto,  $H[V_i]$  es una digráfica completa, con  $i \in \{1, 2\}$ .

Como  $H$  es conexa, entonces existe una  $V_1V_2$ -flecha o una  $V_2V_1$ -flecha en  $H$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que existe la  $V_1V_2$ -flecha, es decir, existe  $u \in V_1$  y  $w \in V_2$  tales que  $u \rightarrow_H w$ . Sea  $v \in V_1$ . Como  $H[\{u, v, w\}] \notin \mathcal{F}'$  y  $u \leftrightarrow_H v$  y  $u \rightarrow_H w$ , entonces  $v \rightarrow_H w$ . Por lo tanto,  $V_1 \rightarrow_H w$ . Sea  $z \in V_2 - \{w\}$  y  $v \in V_1$ . Como  $w \leftrightarrow_H z$ ,  $v \rightarrow_H w$  y  $H[\{w, z, v\}] \notin \mathcal{F}'$ , entonces  $v \rightarrow_H z$ . Por lo que,  $V_1 \rightarrow_H V_2$ . Falta demostrar que  $V_1 \mapsto_H V_2$ , es decir, que no existe la  $V_2V_1$ -flecha. Procediendo por contradicción, supongamos que existe  $z \in V_2$  y  $v \in V_1$  tales que  $z \leftrightarrow_H v$ . Sea  $u \in V_1 - \{v\}$ . Como  $H[\{u, v, z\}] \notin \mathcal{F}'$ , entonces  $z \leftrightarrow_H u$  para todo  $u \in V_1$ , en particular para  $x$ , lo que implica que  $z \in V_1$ , lo que es una contradicción. Por lo tanto, ningún vértice de  $V_2$  es adyacente hacia ningún vértice de  $V_1$ .

Notemos que la implicación restante es inmediata pues toda subdigráfica inducida de  $H$ , con tres vértices, es isomorfa a  $3\overset{\leftrightarrow}{K}_1, \overset{\leftrightarrow}{K}_2 + \overset{\leftrightarrow}{K}_1, \overset{\leftrightarrow}{K}_1 \bullet \overset{\leftrightarrow}{K}_2$  o  $\overset{\leftrightarrow}{K}_2 \bullet \overset{\leftrightarrow}{K}_1$ , que no pertenecen a  $\mathcal{F}'$ .  $\square$

El lema anterior prueba que las digráficas reflexivas que son  $\mathcal{F}'$ -libres son únicamente las digráficas completas, las expansiones de  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$  y las digráficas bicompletas estrictas.

Por ahora, a excepción de  $F_1$ , tenemos una clasificación completa de los patrones de orden 3; las digráficas que no están en  $\mathcal{F}$  son patrones pancromáticos por trayectorias, y las digráficas en  $\mathcal{F}$  no lo son. Aunque no sabemos si  $F_1$  es un patrón pancromático por trayectorias, tenemos suficiente información para describir completamente lo que sucedería si  $F_1 \notin \tilde{\mathcal{B}}_3$ , y proporcionar algunas propiedades útiles de patrones pancromáticos por trayectorias si ocurre lo contrario.

**Teorema 7.3.1.** *Sea  $H$  un patrón reflexivo. Si  $F_1 \notin \tilde{\mathcal{B}}_3$ , entonces  $H \in \tilde{\mathcal{B}}_3$  si y solo si  $H$  es una digráfica completa, una expansión de  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$  o una digráfica bicompleta estricta.*

*Demostración.* Sea  $H$  un patrón pancromático por trayectorias. Se sigue que  $H$  es  $\mathcal{F}'$ -libre. Por el lema 7.3.2 se tiene que  $H$  es una digráfica completa, una expansión de  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$  o una digráfica bicompleta estricta.

Por otro lado, si  $H$  es una digráfica completa, una expansión de  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$  o una digráfica bicompleta estricta, entonces se puede contraer a  $\overset{\leftrightarrow}{K}_1$ ,  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$  o  $\overset{\rightarrow}{P}_2$ , respectivamente, los cuales son todos patrones pancromáticos por trayectorias. Por el corolario 6.0.1 se sigue que  $H$  es un patrón pancromático por trayectorias.  $\square$

**Teorema 7.3.2.** *Sea  $H$  un patrón reflexivo y suponga que  $F_1 \in \tilde{\mathcal{B}}_3$ . Si  $H \in \tilde{\mathcal{B}}_3$ , entonces  $H$  es una digráfica completa, una expansión de  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$  o una digráfica bicompleta.*

*Demostración.* Sea  $H$  un patrón pancromático por trayectorias. Como  $F_1 \in \tilde{\mathcal{B}}_3$ , entonces  $H$  es  $\mathcal{F}$ -libre. Por el lema 9.2.1, se sigue que  $H$  es una digráfica completa, una expansión de  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$  o una digráfica bicompleta.  $\square$

Para concluir este capítulo, proponemos dos problemas abiertos con respecto a los patrones pancromáticos por trayectorias.

**Problema 7.3.1.** *Determinar si  $F_1$  es un patrón pancromático por trayectorias.*

**Problema 7.3.2.** *Encontrar una multidigráfica  $H$ -coloreada sin núcleo por  $H$ -trayectorias, con  $H \in \{F_2, \overset{\leftrightarrow}{P}_3\}$ .*

Si la respuesta al problema 7.3.1 es negativa, esto resuelve la caracterización de los patrones pancromáticos por trayectorias. Una respuesta positiva llevaría a preguntar si hay otras subdigráficas prohibidas mínimas (obstrucciones mínimas) para que una digráfica sea un patrón pancromático por trayectorias. Cualquier obstrucción mínima de este tipo debería ser  $\mathcal{F}$ -libre y, por lo tanto, tendría la estructura descrita en el teorema 9.2.2; si no existe tal obstrucción, la implicación recíproca al teorema 9.2.2 sería verdadera, lo que da como resultado una caracterización.

Respecto al problema 7.3.2, recordemos que las pruebas de los lemas 7.1.1 y 7.1.2 no son constructivas, por lo tanto, no se tiene un ejemplo de una multidigráfica  $H$ -coloreada con la propiedad deseada.



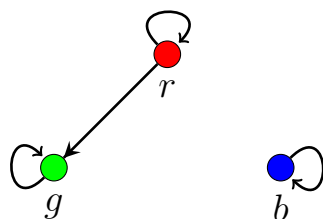
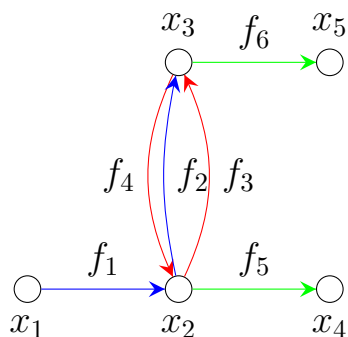
## Capítulo 8

# $H$ -caminos dinámicos y $H$ -trayectorias dinámicas

En este capítulo definimos por primera vez el concepto de  $H$ -camino dinámico y  $H$ -trayectoria dinámica en una multidigráfica  $H$ -coloreada. Lo que da un nuevo concepto de alcance en las multidigráficas  $H$ -coloreadas.

En la introducción del artículo *Reachability problems in edge-colored digraphs* de Arpin y Linek [1], de manera intuitiva, ellos hablan de los  $H$ -caminos, en una multidigráfica  $H$ -coloreada, como aquellos caminos tales que el color de dos flechas consecutivas forman una flecha en  $H$ ; es decir, únicamente son permitidos los cambios de color en el camino si los vértices de  $H$  correspondientes a estos colores son adyacentes. Sin embargo, al momento de definir formalmente un  $H$ -camino, se definen como aquellos caminos tales que la sucesión de colores de sus flechas forman un camino en  $H$ . A nuestro parecer, esta última definición puede tener otro enfoque que aproveche, de manera distinta, la existencia de flechas paralelas en las multidigráficas. De esta manera, surge la idea de los “cambios de flecha”, dando lugar a los  $H$ -caminos dinámicos.

Sea  $D$  una multidigráfica  $H$ -coloreada. El concepto de  $H$ -camino se puede generalizar permitiendo “cambios de flecha”, esto es, en lugar de considerar un solo  $H$ -camino, permitimos la concatenación de dos  $H$ -caminos siempre que la última flecha del primero y la primer flecha del segundo tengan el mismo vértice inicial y el mismo vértice final. Entonces, un nuevo concepto de alcance se obtiene de esta manera, en lugar de seguir únicamente por un  $H$ -camino para que un vértice alcance a otro, podemos “cambiar de flecha” para seguir avanzando. Formalmente, un  $H$ -camino dinámico en  $D$ ,

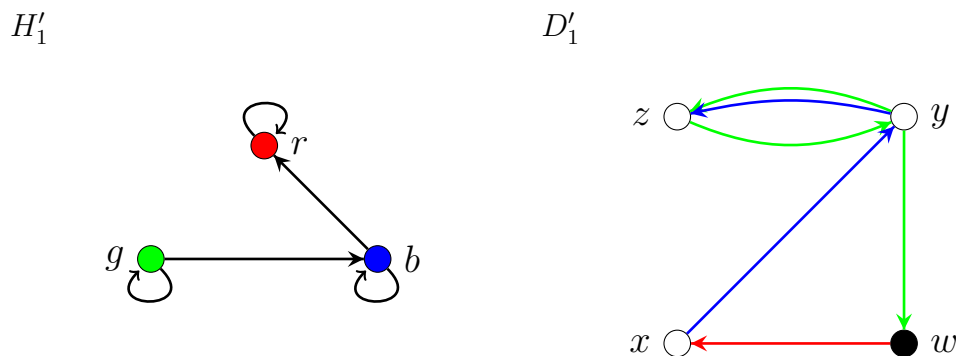
$H$  $D$ 

**Figura 8.1:** La sucesión  $(x_1, x_2, x_3, x_5)$  es una  $H$ -trayectoria dinámica. La sucesión  $(x_1, x_2, x_3, x_2, x_4)$  es un  $H$ -camino dinámico que no contiene una  $H$ -trayectoria dinámica de  $x_1$  a  $x_4$ .

es una sucesión de vértices  $W = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  en  $D$  tal que para cada  $i \in \{0, \dots, n-2\}$  existen  $f_i \in F_D[x_i, x_{i+1}]$  y  $f_{i+1} \in F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]$ , de modo que  $(c(f_i), c(f_{i+1}))$  es una flecha en  $H$ . Si  $W$  no repite vértices, entonces llamamos a  $W$  una  $H$ -trayectoria dinámica, véase la figura 8.1. Basados en estas nuevas definiciones, decimos que un vértice  $x$  en  $V(D)$  alcanza por  $H$ -caminos dinámicos ( $H$ -trayectorias dinámicas) a otro vértice  $y$  en  $D$  si existe un  $H$ -camino dinámico (una  $H$ -trayectoria dinámica) que empieza en  $x$  y termina en  $y$ .

Por definición, los conceptos de  $H$ -camino,  $H$ -trayectoria,  $H$ -camino dinámico y  $H$ -trayectoria dinámica son muy similares, más aún, cuando se consideran digráficas  $H$ -coloreadas los conceptos de  $H$ -camino ( $H$ -trayectoria) y  $H$ -camino dinámico ( $H$ -trayectoria dinámica) coinciden. Por esta razón, este capítulo está centrado en exhibir las diferencias y similitudes que tienen estos conceptos y sus respectivas nociones de alcance.

Observemos que, al igual que en los  $H$ -caminos, toda  $H$ -trayectoria dinámica es un  $H$ -camino dinámico; sin embargo, no todo  $H$ -camino dinámico de  $x$  a  $y$  contiene una  $H$ -trayectoria dinámica. Para ejemplificar la observación anterior, consideremos al patrón  $H$  y la multidigráfica  $H$ -coloreada  $D$  de la figura 8.1. Notemos que  $(x_1, x_2, x_3, x_2, x_4)$  es un  $H$ -camino diná-



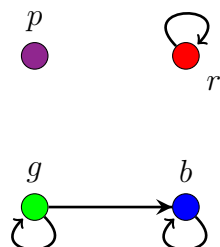
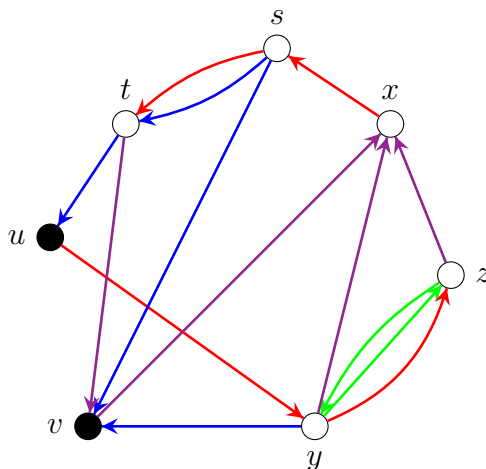
**Figura 8.2:**  $\{w\}$  es un núcleo por  $H'_1$ -caminos dinámicos en  $D$ .

mico de  $x_1$  a  $x_4$  en  $D$ , debido a que existen las flechas  $f_1 \in F_D[x_1, x_2]$ ,  $f_2 \in F_D[x_2, x_3]$  con  $(c(f_1), c(f_2)) = (b, b)$ ,  $f_3 \in F_D[x_2, x_3]$ ,  $f_4 \in F_D[x_3, x_2]$  con  $(c(f_3), c(f_4)) = (r, r)$  y  $f_4 \in F_D[x_3, x_2]$ ,  $f_5 \in F_D[x_2, x_4]$  con  $(c(f_4), c(f_5)) = (r, g)$ , que no contiene una  $H$ -trayectoria dinámica de  $x_1$  a  $x_4$ , pues la única posible sucesión es  $(x_1, x_2, x_4)$  y  $(c(f_1), c(f_5)) = (b, g) \notin F(H)$ .

Por otro lado, notemos que todo  $H$ -camino es un  $H$ -camino dinámico pero no todo  $H$ -camino dinámico es un  $H$ -camino. En la figura 8.1 el  $H$ -camino dinámico  $(x_1, x_2, x_3, x_2, x_4)$  no es un  $H$ -camino, más aún, no contiene ningún  $H$ -camino de  $x_1$  a  $x_4$ .

Basados en estas definiciones y observaciones, consideremos  $H$  un patrón y  $D$  una multidigráfica  $H$ -coloreada. Un subconjunto  $I \subseteq V(D)$  es *independiente por  $H$ -caminos dinámicos* en  $D$ , si ningún vértice de  $I$  alcanza por  $H$ -caminos dinámicos a otro vértice de  $I$  en  $D$ . Un subconjunto  $S \subseteq V(D)$  es *absorbente por  $H$ -caminos dinámicos* en  $D$  si todo vértice que no está en  $S$  alcanza por  $H$ -caminos dinámicos a un vértice de  $S$  en  $D$ . Un subconjunto  $N \subseteq V(D)$  es un *núcleo por  $H$ -caminos dinámicos* en  $D$  si es ambos: independiente por  $H$ -caminos dinámicos y absorbente por  $H$ -caminos dinámicos en  $D$ .

Para ilustrar la definición anterior, consideremos al patrón  $H'_1$  y la multidigráfica  $H'_1$ -coloreada  $D'_1$  en la figura 8.2. Probaremos que  $\{w\}$  es un núcleo por  $H'_1$ -caminos dinámicos. Como  $\{w\}$  consta de un único vértice, entonces  $\{w\}$  es un conjunto independiente por  $H'_1$ -caminos dinámicos en

$H'_2$  $D'_2$ 

**Figura 8.3:**  $\{u, v\}$  es un núcleo por  $H'_2$ -trayectorias dinámicas de  $D'_2$ .

$D'_1$ . Por otro lado,  $(x, y, z, y, w)$  es un  $H'_1$ -camino dinámico en  $D'_1$ , pues  $(b, b)$ ,  $(g, g)$  y  $(g, g)$  son flechas de  $H'_1$ . Se sigue que,  $\{w\}$  es absorbente por  $H'_1$ -caminos dinámicos. Por lo tanto,  $\{w\}$  es núcleo por  $H'_1$ -caminos dinámicos de  $D'_1$ .

De manera completamente análoga, en una multidigráfica  $H$ -coloreada  $D$ , un subconjunto  $I \subseteq V(D)$  es *independiente por  $H$ -trayectorias dinámicas* en  $D$ , si ningún vértice de  $I$  alcanza por  $H$ -trayectorias dinámicas a otro vértice de  $I$  en  $D$ . Un subconjunto  $S \subseteq V(D)$  es *absorbente por  $H$ -trayectorias dinámicas* en  $D$  si todo vértice que no está en  $S$  alcanza por  $H$ -trayectorias dinámicas a un vértice de  $S$  en  $D$ . Un subconjunto  $N \subseteq V(D)$  es un *núcleo por  $H$ -trayectorias dinámicas* en  $D$  si es ambos: independiente por  $H$ -trayectorias dinámicas y absorbente por  $H$ -trayectorias dinámicas en  $D$ .

Para ilustrar la definición anterior, consideremos al patrón  $H'_2$  y la multidigráfica  $H'_2$ -coloreada  $D'_2$  en la figura 8.3. Demostraremos que  $\{u, v\}$  es un núcleo por  $H'_2$ -trayectorias dinámicas en  $D'_2$ . Primero probaremos que  $\{u, v\}$  es independiente por  $H'_2$ -trayectorias dinámicas en  $D'_2$ . Observemos que la única flecha que tiene como vértice inicial a  $v$  no tiene a  $u$  como vértice final y es de color  $p$ , entonces no existe la  $H'_2$ -trayectoria dinámica de  $v$  a  $u$  en  $D'_2$ . Observemos que  $(u, y)$  y  $(u, y, z)$  son todas las  $H'_2$ -trayectoria diná-



micas desde  $u$ , las cuales no pasan o terminan por  $v$ , esto es, no existe la  $H'_2$ -trayectoria dinámica de  $u$  a  $v$  en  $D'_2$ . Por lo que  $\{u, v\}$  es independiente por  $H'_2$ -trayectorias dinámicas en  $D'_2$ . Para mostrar que  $\{u, v\}$  es absorbente por  $H'_2$ -trayectorias dinámicas en  $D'_2$ , basta notar que  $(x, s, t, u)$  y  $(z, y, v)$  son  $H'_2$ -trayectorias dinámicas en  $D'_2$ ; pues  $(r, r)$ ,  $(b, b)$  y  $(g, b)$  son flechas de  $H'_2$ . Por lo tanto,  $\{u, v\}$  es núcleo por  $H'_2$ -trayectorias dinámicas de  $D'_2$ .

De las definiciones anteriores obtenemos las siguientes observaciones, las cuales nos dan la pauta para poder mostrar con mayor claridad que los conceptos de núcleo por  $H$ -caminos dinámicos y núcleo por  $H$ -trayectorias dinámicas, son distintos a los núcleos por  $H$ -caminos y a los núcleos por  $H$ -trayectorias.

**Observación 8.0.1.** *Sea  $H$  un patrón y  $D$  una multidigráfica  $H$ -coloreada. Como todo  $H$ -trayectoria dinámica es un  $H$ -camino dinámico, entonces*

1. *Todo conjunto absorbente por  $H$ -trayectorias dinámicas es un conjunto absorbente por  $H$ -caminos dinámicos en  $D$ .*
2. *Todo conjunto independiente por  $H$ -caminos dinámicos es un conjunto independiente por  $H$ -trayectorias dinámicas en  $D$ .*

**Observación 8.0.2.** *Sea  $H$  un patrón y  $D$  una multidigráfica  $H$ -coloreada. Como todo  $H$ -camino es un  $H$ -camino dinámico, entonces*

1. *Todo conjunto absorbente por  $H$ -caminos es un conjunto absorbente por  $H$ -caminos dinámicos en  $D$ .*
2. *Todo conjunto independiente por  $H$ -caminos dinámicos es un conjunto independiente por  $H$ -caminos en  $D$ .*

**Observación 8.0.3.** *Sea  $H$  un patrón y  $D$  una multidigráfica  $H$ -coloreada. Como todo  $H$ -trayectoria es una  $H$ -trayectoria dinámica, entonces*

1. *Todo conjunto absorbente por  $H$ -trayectorias es un conjunto absorbente por  $H$ -trayectoria dinámicas en  $D$ .*
2. *Todo conjunto independiente por  $H$ -trayectorias dinámicas es un conjunto independiente por  $H$ -trayectorias en  $D$ .*

**Observación 8.0.4.** *Sea  $H$  un patrón y  $D$  una multidigráfica  $H$ -coloreada. Como no todo  $H$ -camino dinámico entre dos vértices contiene una  $H$ -trayectoria dinámica entre los mismos vértices, entonces*

1. *Un conjunto absorbente por  $H$ -caminos dinámicos no necesariamente es un conjunto absorbente por  $H$ -trayectorias dinámicas en  $D$ .*
2. *Un conjunto independiente por  $H$ -trayectorias dinámicas no necesariamente es un conjunto independiente por  $H$ -caminos dinámicos en  $D$ .*

**Observación 8.0.5.** *Sea  $H$  un patrón y  $D$  una multidigráfica  $H$ -coloreada. Como no todo  $H$ -camino dinámico entre dos vértices contiene un  $H$ -camino entre los mismos vértices, entonces*

1. *Un conjunto absorbente por  $H$ -caminos dinámicos no necesariamente es un conjunto absorbente por  $H$ -caminos en  $D$ .*
2. *Un conjunto independiente por  $H$ -caminos no necesariamente es un conjunto independiente por  $H$ -caminos dinámicos en  $D$ .*

**Observación 8.0.6.** *Sea  $H$  un patrón y  $D$  una multidigráfica  $H$ -coloreada. Como no toda  $H$ -trayectoria dinámica entre dos vértices contiene una  $H$ -trayectoria entre los mismos vértices, entonces*

1. *Un conjunto absorbente por  $H$ -trayectorias dinámicas no necesariamente es un conjunto absorbente por  $H$ -trayectorias en  $D$ .*
2. *Un conjunto independiente por  $H$ -trayectorias no necesariamente es un conjunto independiente por  $H$ -trayectorias dinámicas en  $D$ .*

## 8.1. Ejemplos diferenciales

En esta sección mostramos ejemplos de patrones  $H$  y multidigráficas  $H$ -coloreadas  $D$ , tales que  $D$  cumple con tener un tipo de núcleo (por  $H$ -caminos, por  $H$ -trayectorias, por  $H$ -caminos dinámicos o por  $H$ -trayectorias dinámicas) pero que no tiene otro tipo de núcleo, de los ya mencionados.

**Ejemplo 8.1.1.** *La multidigráfica  $H'_1$ -coloreada  $D'_1$  de la figura 8.2 tiene núcleo por  $H'_1$ -caminos dinámicos pero no tiene núcleo por  $H'_1$ -trayectorias dinámicas.*

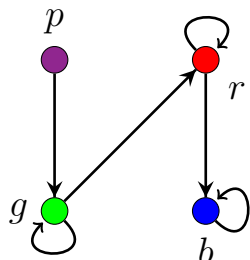
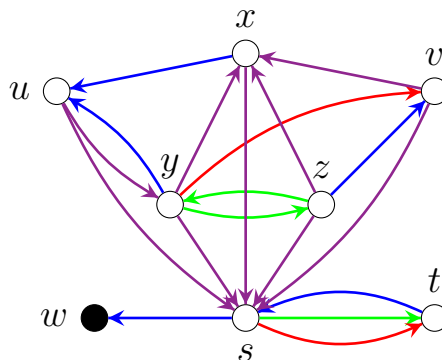
*Demostración.* Observemos que ya hemos demostrado que  $\{w\}$  es un núcleo por  $H'_1$ -caminos dinámicos en  $D'_1$ .

Ahora, probaremos que  $D'_1$  no tiene núcleo por  $H'_1$ -trayectorias dinámicas. Procediendo por contradicción, supongamos que  $D'_1$  tiene núcleo por  $H'_1$ -trayectorias dinámicas, digamos  $N$ . Si  $w \in N$ , entonces  $N = \{w\}$ , ya que  $(z, y, w)$  y  $(w, x)$  son  $H'_1$ -trayectorias dinámicas en  $D_1$ . Sin embargo, no tenemos que  $(x, y, w)$  es la única sucesión que podría ser una  $H'_1$ -trayectoria dinámica pero  $(b, g)$  no es una flecha de  $H'_1$ . Se sigue que  $N$  no es absorbente por  $H'_1$ -trayectorias dinámicas, lo que no puede suceder. Por lo que podemos suponer que  $w \notin N$ . Observemos que después del color  $r$  no puede seguir ningún otro color en una  $H'_1$ -trayectoria dinámica en  $D'_1$ , entonces el único vértice al que alcanza  $w$  por  $H'_1$ -trayectorias es  $x$ . Así  $x \in N$ . Como  $(x, y, z)$  es una  $H'_1$ -trayectoria dinámica, entonces  $y, z \notin N$ . De lo anterior,  $N = \{x\}$ . Notemos que la única posible  $H'_1$ -trayectoria dinámica de  $y$  a  $x$  en  $D_1$  es  $(y, w, x)$  pero  $(g, r)$  no es una flecha de  $H'_1$ , por lo que no lo es. Se sigue que  $N$  no es absorbente por  $H'_1$ -trayectorias dinámicas en  $D'_1$ , contradiciendo que  $N$  es un núcleo por  $H'_1$ -trayectorias dinámicas. Por lo tanto,  $D'_1$  no tiene núcleo por  $H'_1$ -trayectorias dinámicas.  $\square$

**Ejemplo 8.1.2.** *La multidigráfica  $H'_3$ -coloreada  $D'_3$  de la figura 8.4 tiene núcleo por  $H'_3$ -caminos dinámicos pero no tiene núcleo por  $H'_3$ -caminos.*

*Demostración.* Primero mostraremos que  $\{w\}$  es un núcleo por  $H'_3$ -caminos dinámicos en  $D'_3$ . Como  $\{w\}$  consta de un único vértice, entonces  $\{w\}$  es un conjunto independiente por  $H'_3$ -caminos dinámicos. Por otro lado,  $(u, s, t, s, w)$ ,  $(y, s, t, s, w)$ ,  $(x, s, t, s, w)$ ,  $(z, s, t, s, w)$  y  $(v, s, t, s, w)$  son  $H'_3$ -caminos dinámicos en  $D'_3$  pues  $(p, g)$ ,  $(r, b)$  y  $(b, b)$  son flechas de  $H'_3$ . Se sigue que  $\{w\}$  es absorbente por  $H'_3$ -caminos dinámicos en  $D_2$ . Por lo tanto,  $\{w\}$  es núcleo por  $H'_3$ -caminos dinámicos en  $D'_3$ .

Afirmamos que  $D'_3$  no tiene núcleo por  $H'_3$ -caminos. Procediendo por contradicción, supongamos que  $N$  es un núcleo por  $H'_3$ -caminos de  $D'_3$ . Como  $w$  es un pozo en  $D'_3$ , entonces  $w \in N$ . Notemos que los únicos vértices que alcanzan a  $w$  por  $H'_3$ -caminos son  $s$  y  $t$ , puesto que  $(u, s, t, s, w)$ ,  $(y, s, t, s, w)$ ,  $(x, s, t, s, w)$ ,  $(z, s, t, s, w)$  y  $(v, s, t, s, w)$  son  $H'_3$ -caminos dinámicos pero no son  $H'_3$ -caminos en  $D'_3$ . Por lo que,  $s, t \notin N$ . Se sigue que

$H'_3$  $D'_3$ 

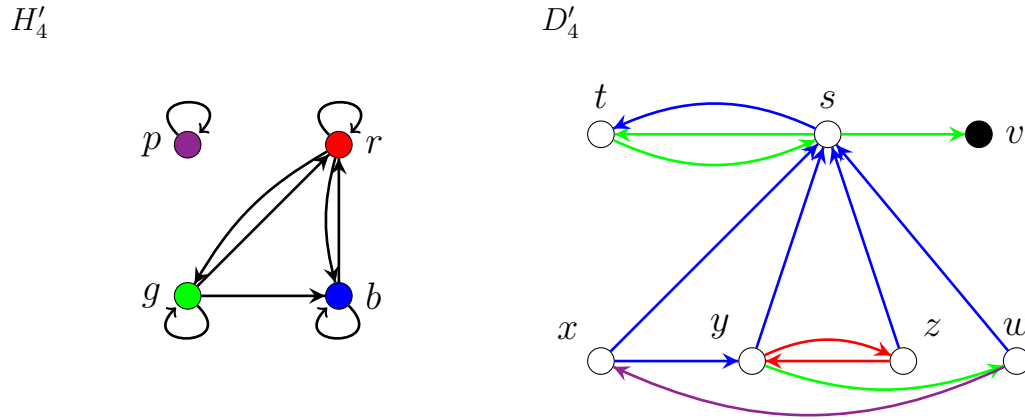
**Figura 8.4:** Patrón  $H'_3$  y multidigráfica  $H'_3$ -coloreada  $D'_3$ .  $\{w\}$  es un núcleo por  $H'_3$ -caminos dinámicos de  $D'_3$ , pero  $D'_3$  no tiene núcleo por  $H'_3$ -caminos.

existe un subconjunto de  $\{x, u, y, z, v\}$  que es independiente por  $H'_3$ -caminos y absorbente por  $H'_3$ -caminos en  $D'_3[\{x, u, y, z, v\}]$ , es decir, un núcleo por  $H'_3$ -caminos en  $D'_3[\{x, u, y, z, v\}]$ . Sin embargo, notemos que  $H'_3 = H_1$  y  $D'_3[\{x, u, y, z, v\}] = D_1$ , descritas en el ejemplo 3.2.1, para las cuales demostramos que  $D_1$  no tiene núcleo por  $H_1$ -caminos, lo que es una contradicción. Por lo tanto,  $D'_3$  no tiene núcleo por  $H'_3$ -caminos.  $\square$

**Ejemplo 8.1.3.** La multidigráfica  $H'_4$ -coloreada  $D'_4$  de la figura 8.5 tiene núcleo por  $H'_4$ -caminos dinámicos pero no tiene núcleo por  $H'_4$ -trayectorias.

*Demostración.* Primero demostraremos que  $\{v\}$  es un núcleo por  $H'_4$ -caminos dinámicos en  $D'_4$ . Como  $(x, s, t, s, v)$ ,  $(y, s, t, s, v)$ ,  $(z, s, t, s, v)$  y  $(w, s, t, s, v)$  son  $H'_4$ -caminos dinámicos en  $D'_4$  pues  $(b, b)$ ,  $(g, g)$  y  $(g, g)$  son flechas de  $H'_4$ . Se sigue que  $\{v\}$  es absorbente por  $H'_4$ -caminos dinámicos en  $D'_4$ . Además, como  $\{v\}$  consta de un único vértice, entonces es un conjunto independiente por  $H'_4$ -caminos dinámicos. Por lo tanto,  $\{v\}$  es núcleo por  $H'_4$ -caminos dinámicos en  $D'_4$ .

Ahora, mostraremos que  $D'_4$  no tiene núcleo por  $H'_4$ -trayectorias. Procediendo por contradicción, supongamos que  $N$  es un núcleo por  $H'_4$ -trayectorias de  $D'_4$ . Notemos que como  $v$  es un pozo de  $D'_4$ , entonces



**Figura 8.5:** Patrón  $H'_4$  y multidigráfica  $H'_4$ -coloreada  $D'_4$ .  $\{v\}$  es un núcleo por  $H'_4$ -caminos dinámicos de  $D'_4$ , pero  $D'_4$  no tiene núcleo por  $H'_4$ -trayectorias.

$v \in N$ . Más aún, los únicos vértices alcanzan a  $v$  por  $H'_4$ -trayectorias son  $s$  y  $t$ , puesto que  $(b, g)$  no es una flecha de  $H'_4$ . Se sigue que  $s, t \notin N$ . Por lo que existe un subconjunto de  $\{x, y, z, w\}$  que es independiente por  $H'_4$ -trayectorias y absorbente por  $H'_4$ -trayectorias en  $D'_4[\{x, y, z, w\}]$ , es decir, un núcleo por  $H'_4$ -trayectorias en  $D'_4[\{x, y, z, w\}]$ . Sin embargo, notemos que  $H'_4 = H_4$  y  $D'_4[\{x, y, z, w\}] = D_4$ , descritas en el ejemplo 3.2.2, para las cuales demostramos que  $D_4$  no tiene núcleo por  $H_4$ -trayectorias, lo que es una contradicción. Por lo tanto,  $D'_4$  no tiene núcleo por  $H'_4$ -caminos.  $\square$

**Ejemplo 8.1.4.** La multidigráfica  $H'_2$ -coloreada  $D'_2$  de la figura 8.3 tiene núcleo por  $H'_2$ -trayectorias dinámicas pero no tiene núcleo por  $H'_2$ -caminos dinámicos.

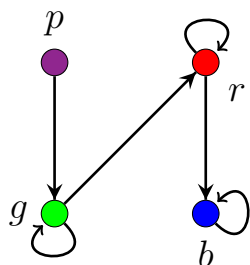
*Demostración.* Observemos que ya hemos demostrado que  $\{u, v\}$  es un núcleo por  $H'_2$ -trayectorias dinámicas en  $D'_2$ .

Afirmamos que  $D'_2$  no tiene núcleo por  $H'_2$ -caminos dinámicos. Procediendo por contradicción, supongamos que  $N$  es un núcleo por  $H'_2$ -caminos dinámicos en  $D'_2$ . Si  $v \in N$ , entonces  $x, s, t \notin N$ , pues son adyacentes a  $v$  en  $D'_2$ , más aún, como  $(u, y, z, y, v)$  es un  $H'_2$ -camino dinámico en  $D'_2$ , pues  $(r, r)$ ,  $(g, g)$  y  $(g, b)$  son flechas de  $H'_2$ , se sigue que  $u, y, z \notin N$ . Por lo anterior, se deduce que  $N = \{v\}$ . Notemos que  $(x, s)$ ,  $(x, s, t)$  y  $(x, s, t, u)$  son los únicos

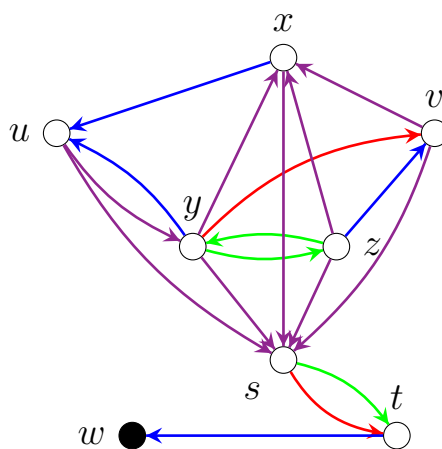
$H'_2$ -caminos dinámicos de  $D'_2$  que empiezan en  $x$ . Lo que implica que  $N$  no es absorbente por  $H'_2$ -caminos dinámicos en  $D_4$ , lo que no puede suceder. De lo anterior, se tiene que  $v \notin N$ . Notemos que la única flecha que tiene como vértice inicial a  $v$  es de color  $p$ , que es un vértice aislado en  $H'_2$ , es decir, el único vértice al que  $v$  alcanza por  $H'_2$ -caminos dinámicos en  $D'_2$  es  $x$ . De ahí,  $x \in N$ . Como  $y, z$  y  $s$  son adyacentes a  $x$ , entonces  $y, z$  y  $s$  no pertenecen a  $N$ , más aún, como ya dijimos  $(x, s, t, u)$  es un  $H'_2$ -camino dinámico en  $D'_2$ , por lo que  $t$  y  $u$  no pertenecen a  $N$ . De esta manera,  $N = \{x\}$ . Pero notemos que  $(t, u)$  y  $(t, v)$  son los únicos  $H'_2$ -caminos dinámicos que empiezan con el vértice  $t$  en  $D'_2$ . Lo que implica que  $N$  no es absorbente por  $H'_2$ -caminos dinámicos en  $D'_2$ , que es una contradicción. Por lo tanto,  $D'_2$  no tiene núcleo por  $H'_2$ -caminos dinámicos.  $\square$

**Ejemplo 8.1.5.**  $D'_5$  es una multidigráfica  $H'_3$ -coloreada con núcleo por  $H'_3$ -trayectorias dinámicas sin núcleo por  $H'_3$ -caminos.

$H'_3$



$D'_5$



**Figura 8.6:** Patrón  $H'_3$  y multidigráfica  $H'_3$ -coloreada  $D'_5$ .  $\{w\}$  es un núcleo por  $H'_3$ -trayectorias dinámicas de  $D'_5$ , pero  $D'_5$  no tiene núcleo por  $H'_3$ -caminos.

*Demostración.* Primero demostraremos que  $\{w\}$  es un núcleo por  $H'_3$ -trayectorias dinámicas en  $D'_5$ . Como  $(x, s, t, w)$ ,  $(y, s, t, w)$ ,  $(z, s, t, w)$ ,

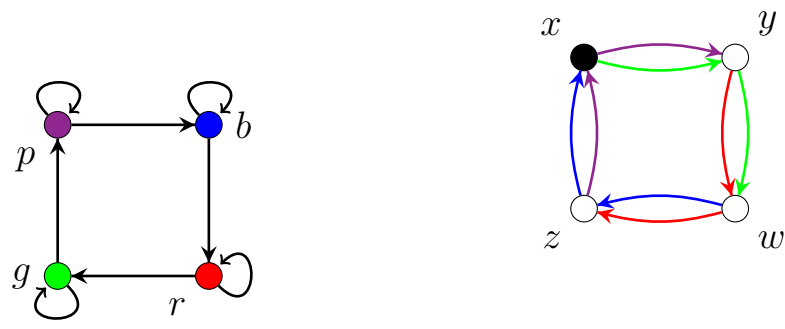
$(v, s, t, w)$  y  $(u, s, t, w)$  son  $H'_3$ -trayectorias dinámicas en  $D'_5$  pues  $(p, g)$  y  $(r, b)$  son flechas de  $H'_3$ . Se sigue que  $\{w\}$  es absorbente por  $H'_3$ -trayectorias dinámicas en  $D'_5$ . Además, como  $\{w\}$  consta de un único vértice, entonces es un conjunto independiente por  $H'_3$ -trayectorias dinámicas. Por lo tanto,  $\{w\}$  es núcleo por  $H'_3$ -trayectorias dinámicas en  $D'_5$ .

Ahora, mostraremos que  $D'_5$  no tiene núcleo por  $H'_3$ -caminos. Procediendo por contradicción, supongamos que  $N$  es un núcleo por  $H'_3$ -caminos de  $D'_5$ . Notemos que como  $w$  es un pozo de  $D'_5$ , entonces  $w \in N$ . Más aún, los únicos vértices alcanzan a  $w$  por  $H'_3$ -caminos son  $s$  y  $t$ , puesto que  $(r, b)$  es una flecha  $H'_3$ , y tanto  $(p, r)$  y como  $(g, b)$  no lo son. Se sigue que  $s, t \notin N$ . Se deduce que existe un subconjunto de  $\{x, y, z, u, v\}$  que es independiente por  $H'_3$ -caminos y absorbente por  $H'_3$ -caminos en  $D'_5[\{x, y, z, u, v\}]$ , es decir, un núcleo por  $H'_3$ -caminos en  $D'_5[\{x, y, z, u, v\}]$ . Sin embargo, notemos que  $H'_3 = H_1$  y  $D'_5[\{x, y, z, u, v\}] = D_1$ , descritas en el ejemplo 3.2.1, para las cuales demostramos que  $D_1$  no tiene núcleo por  $H_1$ -caminos, lo que es una contradicción. Por lo tanto,  $D'_5$  no tiene núcleo por  $H'_3$ -caminos.  $\square$

**Ejemplo 8.1.6.**  $D'_6$  es una multidigráfica  $H'_5$ -coloreada con núcleo por  $H'_5$ -trayectorias dinámicas sin núcleo por  $H'_5$ -trayectorias.

$H'_5$

$D'_6$



**Figura 8.7:** Patrón  $H'_5$  y multidigráfica  $H'_5$ -coloreada  $D'_6$ .  $\{x\}$  es un núcleo por  $H'_5$ -trayectorias dinámicas de  $D'_6$ , pero  $D'_6$  no tiene núcleo por  $H'_5$ -trayectorias.

*Demostración.* Primero, demostraremos que  $\{x\}$  es un núcleo por  $H'_5$ -trayectorias dinámicas en  $D'_6$ . Como  $\{x\}$  consta de un único vértice, entonces  $\{x\}$  es independiente por  $H'_5$ -trayectorias dinámicas. Para mostrar

que  $\{x\}$  es absorbente por  $H'_5$ -trayectorias dinámicas, basta observar que  $(y, w, z, x)$  es una  $H'_5$ -trayectoria dinámica, pues  $(r, r)$  y  $(b, b)$  son flechas de  $H'_5$ . Por lo que,  $\{x\}$  es absorbente por  $H'_5$ -trayectorias dinámicas y, por lo tanto, un núcleo por  $H'_5$ -trayectorias dinámicas en  $D'_6$ .

Ahora, mostraremos que  $D'_6$  no tiene núcleo por  $H'_5$ -trayectorias. Procediendo por contradicción, supongamos que  $N$  es un núcleo por  $H'_5$ -caminos de  $D'_6$ . Como  $N$  es un conjunto independiente en  $D'_6$ , entonces  $|N| \leq 2$ . Además, los únicos conjuntos independientes con dos vértices en  $D'_6$  son  $\{x, w\}$  y  $\{y, z\}$ , pero  $(x, y, w)$  y  $(y, w, z)$  son  $H'_5$ -trayectorias, por lo que ninguno de los dos es independiente por  $H'_5$ -trayectorias. Se sigue que  $|N| = 1$ . Por otro lado, podemos notar que todas las  $H'_5$ -trayectorias en  $D'_6$  tienen longitud a lo más 2, más aún, para todo vértice en  $V(D'_6)$  existe otro en  $V(D'_6)$  tal que la trayectoria de menor longitud tiene longitud 3 en  $D'_6$ . Se sigue que ningún conjunto con un solo vértice puede ser absorbente por  $H'_5$ -trayectorias en  $D'_6$ . Lo que causa una contradicción. Por lo tanto,  $D'_6$  no tiene núcleo por  $H'_5$ -trayectorias.  $\square$

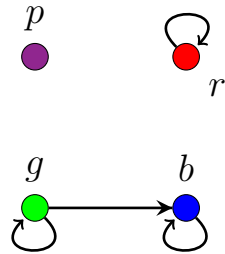
**Ejemplo 8.1.7.** *La multidigráfica  $H'_2$ -coloreada  $D'_7$  de la figura 8.8 tiene núcleo por  $H'_2$ -caminos pero no tiene núcleo por  $H'_2$ -caminos dinámicos.*

*Demostración.* Demostraremos que  $\{w_4, w_1\}$  es un núcleo por  $H'_2$ -caminos en  $D'_7$ . Para demostrar que es independiente por  $H'_2$ -caminos, notemos que, como  $w_4$  es pozo de  $D'_7$ , entonces no existe un  $H'_2$ -camino de  $w_4$  a  $w_1$  en  $D'_7$ . Por otro lado, todo camino de  $w_1$  a  $w_4$  en  $D'_7$  contiene a los caminos  $(w_1, w_2, w_4)$  o  $(w_1, w_2, w_3, w_2, w_4)$ , que no son  $H'_2$ -caminos pues  $(r, b)$  y  $(r, g)$  no son flechas de  $H'_2$ . Se sigue que no existe un  $H'_2$ -camino de  $w_1$  a  $w_4$  en  $D'_7$ . Por lo tanto,  $\{w_4, w_1\}$  es independiente por  $H'_2$ -caminos.  $\{w_4, w_1\}$  es absorbente por  $H'_2$ -caminos, ya que  $(w_3, w_2, w_4)$ ,  $(u, w_1)$ ,  $(v, w_1)$ ,  $(y, w_1)$ ,  $(z, w_1)$ ,  $(x, w_1)$ ,  $(s, w_1)$  y  $(t, w_1)$  son  $H'_2$ -caminos en  $D'_7$ . Por lo tanto,  $\{w_4, w_1\}$  es un núcleo por  $H'_2$ -caminos en  $D'_7$ .

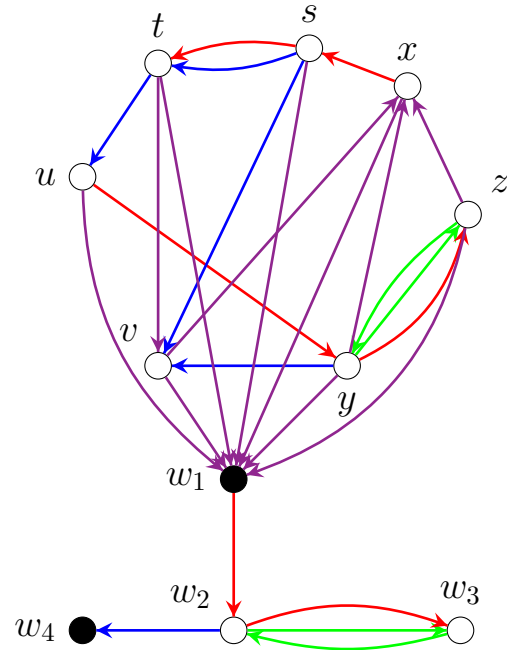
Ahora, demostraremos que  $D'_7$  no tiene núcleo por  $H'_2$ -caminos dinámicos. Procediendo por contradicción, supongamos que  $N$  es un núcleo por  $H'_2$ -caminos dinámicos de  $D'_7$ . Como  $w_4$  es un pozo de  $D'_7$ , entonces  $w_4 \in N$ , más aún, como  $(w_1, w_2, w_3, w_2, w_4)$  es un  $H'_2$ -camino dinámico, se implica que  $w_1, w_2, w_3 \notin N$ . Como  $(p, r)$  no es una flecha de  $H'_2$ , entonces ningún vértice del conjunto  $\{u, v, y, z, x, s, t\}$  alcanza a  $w_4$  por  $H'_2$ -caminos dinámicos. Se deduce que existe un subconjunto de  $\{u, v, y, z, x, s, t\}$  que es independiente por  $H'_2$ -caminos dinámicos y absorbente por  $H'_2$ -caminos dinámicos en  $D'_7[\{u, v, y, z, x, s, t\}]$ , es decir, un núcleo por  $H'_2$ -caminos dinámicos en



$H'_2$



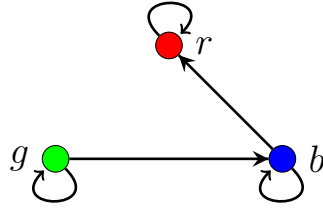
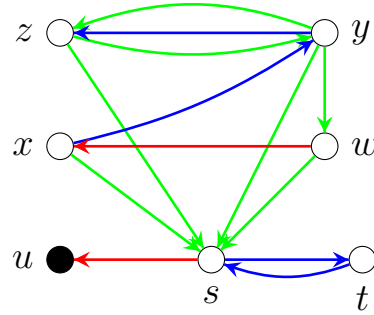
$D'_7$



**Figura 8.8:** Patrón  $H'_2$  y multidigráfica  $H'_2$ -coloreada  $D'_7$ .  $\{w_1, w_4\}$  es un núcleo por  $H'_2$ -caminos de  $D'_7$ , pero  $D'_7$  no tiene núcleo por  $H'_2$ -caminos dinámicos.

$D'_7[\{u, v, y, z, x, s, t\}]$ . Sin embargo, notemos que  $D'_7[\{u, v, y, z, x, s, t\}] = D'_2$ , descrita en la figura 8.3, para la cual demostramos que  $D'_2$  no tiene núcleo por  $H'_2$ -caminos dinámicos, lo que es una contradicción. Por lo tanto,  $D'_7$  no tiene núcleo por  $H'_2$ -caminos dinámicos.  $\square$

**Ejemplo 8.1.8.**  $D'_8$  es una multidigráfica  $H'_1$ -coloreada con núcleo por  $H'_1$ -caminos sin núcleo por  $H'_1$ -trayectorias dinámicas.

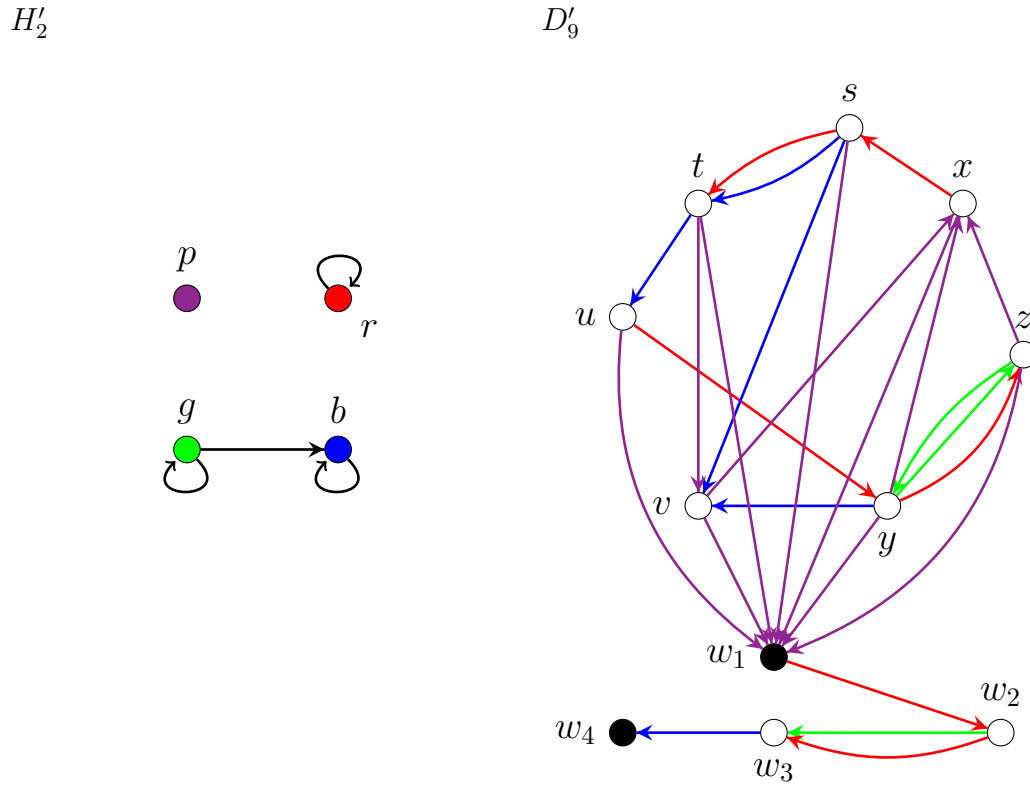
 $H'_1$  $D'_8$ 

**Figura 8.9:** Patrón  $H'_1$  y multidigráfica  $H'_1$ -coloreada  $D'_8$ .  $\{u\}$  es un núcleo por  $H'_1$ -caminos de  $D'_8$ , pero  $D'_8$  no tiene núcleo por  $H'_1$ -trayectorias dinámicas.

*Demostración.* Demostraremos que  $\{u\}$  es un núcleo por  $H'_1$ -caminos en  $D'_8$ . Como  $\{u\}$  consta de un único vértice, entonces  $\{u\}$  es independiente por  $H'_1$ -caminos. Para mostrar que  $\{u\}$  es absorbente por  $H'_1$ -caminos, basta observar que  $(y, s, t, s, u)$ ,  $(z, s, t, s, u)$ ,  $(x, s, t, s, u)$  y  $(w, s, t, s, u)$  son  $H'_1$ -caminos en  $D'_8$ . Por lo que,  $\{u\}$  es absorbente por  $H'_1$ -caminos y, por lo tanto, un núcleo por  $H'_1$ -caminos en  $D'_8$ .

Afirmamos que  $D'_8$  no tiene núcleo por  $H'_1$ -trayectorias dinámicas. Procediendo por contradicción, supongamos que  $D'_8$  tiene un núcleo por  $H'_1$ -trayectorias dinámicas, digamos  $N$ . Como  $u$  es un pozo de  $D'_8$ , entonces  $u \in N$ . Más aún, como  $(g, r)$  no es una flecha de  $H'_1$  y  $(t, s, u)$  es una  $H'_1$ -trayectoria dinámica, entonces los únicos vértices que alcanzan por  $H'_1$ -trayectorias dinámicas a  $u$  son  $s$  y  $t$ . Se deduce que existe un subconjunto de  $\{y, z, x, w\}$  que es independiente por  $H'_1$ -trayectorias dinámicas y absorbente por  $H'_1$ -trayectorias dinámicas en  $D'_8[\{y, z, x, w\}]$ , es decir, un núcleo por  $H'_1$ -trayectorias dinámicas en  $D'_8[\{y, z, x, w\}]$ . Sin embargo, notemos que  $D'_8[\{y, z, x, w\}] = D'_1$ , descrita en la figura 8.2, para la cual demostramos que  $D'_1$  no tiene núcleo por  $H'_1$ -trayectorias dinámicas, lo que es una contradicción. Por lo tanto,  $D'_8$  no tiene núcleo por  $H'_1$ -trayectorias dinámicas.  $\square$

**Ejemplo 8.1.9.** La multidigráfica  $H'_2$ -coloreada  $D'_9$  de la figura 8.10 tiene núcleo por  $H'_2$ -trayectorias pero no tiene núcleo por  $H'_2$ -caminos dinámicos.



**Figura 8.10:** Patrón  $H'_2$  y multidigráfica  $H'_2$ -coloreada  $D'_9$ .  $\{w_1, w_4\}$  es un núcleo por  $H'_2$ -trayectorias de  $D'_9$ , pero  $D'_9$  no tiene núcleo por  $H'_2$ -caminos dinámicos.

*Demostración.* Demostraremos que  $\{w_4, w_1\}$  es un núcleo por  $H'_2$ -trayectorias en  $D'_9$ . Para demostrar que es independiente por  $H'_2$ -trayectorias, notemos que, como  $w_4$  es pozo de  $D'_9$ , entonces no existe una  $H'_2$ -trayectoria de  $w_4$  a  $w_1$  en  $D'_9$ . Por otro lado, la única trayectoria de  $w_1$  a  $w_4$  en  $D'_9$  es  $(w_1, w_2, w_3, w_4)$ , que no es una  $H'_2$ -trayectoria pues  $(r, b)$  y  $(r, g)$  no son flechas de  $H'_2$ . Por lo tanto,  $\{w_4, w_1\}$  es independiente por  $H'_2$ -trayectorias.  $\{w_4, w_1\}$  es absorbente por  $H'_2$ -trayectorias, ya que  $(w_2, w_3, w_4)$ ,  $(u, w_1)$ ,  $(v, w_1)$ ,  $(y, w_1)$ ,  $(z, w_1)$ ,

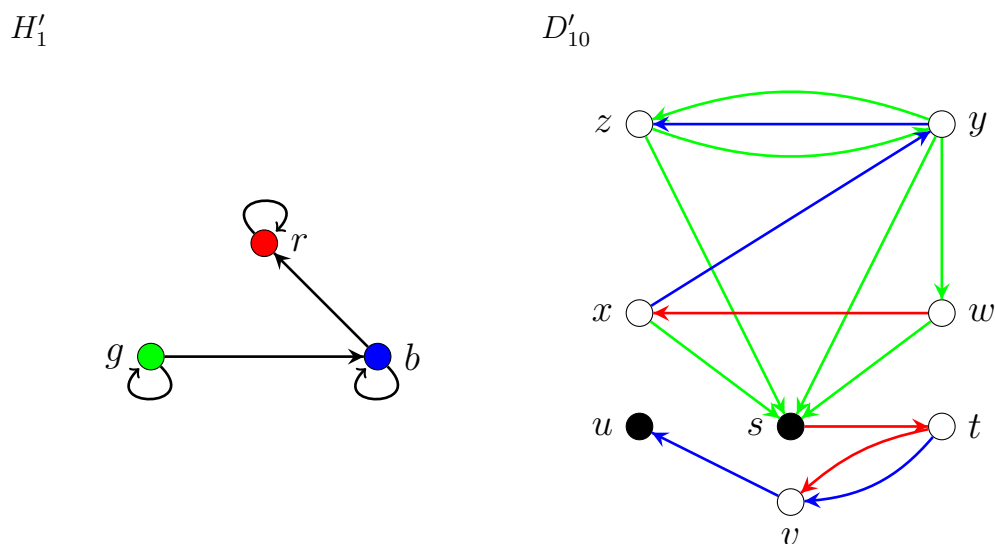
$(x, w_1)$ ,  $(s, w_1)$  y  $(t, w_1)$  son  $H'_2$ -trayectorias en  $D'_9$ . Por lo tanto,  $\{w_4, w_1\}$  es un núcleo por  $H'_2$ -trayectorias en  $D'_9$ .

Afirmamos que  $D'_9$  no tiene núcleo por  $H'_2$ -caminos dinámicos. Procediendo por contradicción, supongamos que  $N$  es un núcleo por  $H'_2$ -caminos dinámicos de  $D'_9$ . Como  $w_4$  es un pozo de  $D'_9$ , entonces  $w_4 \in N$ , más aún, como  $(w_1, w_2, w_3, w_4)$  es un  $H'_2$ -camino dinámico, se implica que  $w_1, w_2, w_3 \notin N$ . Como  $(p, r)$  no es una flecha de  $H'_2$ , entonces ningún vértice del conjunto  $\{u, v, y, z, x, s, t\}$  alcanza a  $w_4$  por  $H'_2$ -caminos dinámicos. Se deduce que existe un subconjunto de  $\{u, v, y, z, x, s, t\}$  que es independiente por  $H'_2$ -caminos dinámicos y absorbente por  $H'_2$ -caminos dinámicos en  $D'_9[\{u, v, y, z, x, s, t\}]$ , es decir, un núcleo por  $H'_2$ -caminos dinámicos en  $D'_9[\{u, v, y, z, x, s, t\}]$ . Sin embargo, notemos que  $D'_9[\{u, v, y, z, x, s, t\}] = D'_2$ , descrita en la figura 8.3, para la cual demostramos que  $D'_2$  no tiene núcleo por  $H'_2$ -caminos dinámicos, lo que es una contradicción. Por lo tanto,  $D'_9$  no tiene núcleo por  $H'_2$ -caminos dinámicos.  $\square$

**Ejemplo 8.1.10.** *La multidigráfica  $H'_1$ -coloreada  $D'_{10}$  de la figura 8.11 tiene núcleo por  $H'_1$ -trayectorias pero no tiene núcleo por  $H'_1$ -trayectorias dinámicas.*

*Demostración.* Demostraremos que  $\{u, s\}$  es un núcleo por  $H'_1$ -trayectorias en  $D'_{10}$ . Para demostrar que es independiente por  $H'_1$ -trayectorias, notemos que, como  $u$  es pozo de  $D'_{10}$ , entonces no existe una  $H'_1$ -trayectoria de  $u$  a  $s$  en  $D'_{10}$ . Por otro lado, la única trayectoria de  $s$  a  $u$  en  $D'_{10}$  es  $(s, t, v, u)$ , que no es una  $H'_1$ -trayectoria pues  $(r, b)$  no es una flecha de  $H'_1$ . Por lo tanto,  $\{u, s\}$  es independiente por  $H'_1$ -trayectorias.  $\{u, s\}$  es absorbente por  $H'_1$ -trayectorias, ya que  $(t, v, u)$ ,  $(x, s)$ ,  $(w, s)$ ,  $(y, s)$  y  $(z, s)$  son  $H'_1$ -trayectorias en  $D'_{10}$ . Por lo tanto,  $\{u, s\}$  es un núcleo por  $H'_1$ -trayectorias en  $D'_{10}$ .

Afirmamos que  $D'_{10}$  no tiene núcleo por  $H'_1$ -trayectorias dinámicas. Procediendo por contradicción, supongamos que  $D'_{10}$  tiene un núcleo por  $H'_1$ -trayectorias dinámicas, digamos  $N$ . Como  $u$  es un pozo de  $D'_{10}$ , entonces  $u \in N$ . Más aún, como  $(g, r)$  no es una flecha de  $H'_1$  y  $(s, t, v, u)$  es una  $H'_1$ -trayectoria dinámica, entonces los únicos vértices que alcanzan por  $H'_1$ -trayectorias dinámicas a  $u$  son  $s, t$  y  $v$ . Se deduce que existe un subconjunto de  $\{y, z, x, w\}$  que es independiente por  $H'_1$ -trayectorias dinámicas y absorbente por  $H'_1$ -trayectorias dinámicas en  $D'_{10}[\{y, z, x, w\}]$ , es decir, un núcleo por  $H'_1$ -trayectorias dinámicas en  $D'_{10}[\{y, z, x, w\}]$ . Sin embargo, notemos que  $D'_{10}[\{y, z, x, w\}] = D'_1$ , descrita en la figura 8.2, para la cual demostramos que  $D'_1$  no tiene núcleo por  $H'_1$ -trayectorias dinámicas, lo que



**Figura 8.11:** Patrón  $H'_1$  y multidigráfica  $H'_1$ -coloreada  $D'_{10}$ .  $\{u\}$  es un núcleo por  $H'_1$ -trayectorias de  $D'_{10}$ , pero  $D'_{10}$  no tiene núcleo por  $H'_1$ -trayectorias dinámicas.

es una contradicción. Por lo tanto,  $D'_{10}$  no tiene núcleo por  $H'_1$ -trayectorias dinámicas.  $\square$

## 8.2. Familias infinitas

En esta sección, probamos un lema con el que, a partir de los ejemplos exhibidos en la sección anterior, se forman familias infinitas con las propiedades descritas en cada uno de los ejemplos.

Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos multidigráficas  $H$ -coloreadas. Recordemos la  $H$ -coloración  $c$  de  $D_1 \bullet D_2$  definida en la sección 3.2.3,  $c : F(D_1 \bullet D_2) \rightarrow V(H)$  tal que

$$c(a) = \begin{cases} c_1(a) & \text{si } a \in F(D_1) \\ c_2(a) & \text{si } a \in F(D_2) \\ c' & \text{si } a \in V(D_1) \times V(D_2) \text{ con } c' \in V(H). \end{cases}$$

Sea  $\mathcal{A}$  el conjunto que contiene a los tipos de alcance:  $H$ -caminos,

$H$ -trayectorias,  $H$ -caminos dinámicos y  $H$ -trayectorias dinámicas. Sea  $A \in \mathcal{A}$ . Decimos que  $C$  es un elemento de  $A$ , si  $C$  es un camino del tipo de alcance de  $A$ ; por ejemplo,  $C$  es un elemento de  $H$ -caminos si  $C$  es un  $H$ -camino en  $D$ . Basados en la  $H$ -coloración anterior obtenemos el siguiente lema.

**Lema 8.2.1.** *Sean  $H$  un patrón. Si  $D_1$  y  $D_2$  son dos multidigráficas  $H$ -coloreadas, entonces la multidigráfica  $H$ -coloreada  $D_1 \bullet D_2$  tiene núcleo por  $A$  si y solo si  $D_2$  tiene núcleo por  $A$ , con  $A \in \mathcal{A}$ .*

*Demostración.* Sea  $A \in \mathcal{A}$ , fija, y sean  $H$ ,  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_1 \bullet D_2$ , como en la hipótesis.

Primero supongamos que  $D_1 \bullet D_2$  tiene un núcleo por  $A$ , digamos  $N$ . Mostraremos que  $D_2$  tiene un núcleo por  $A$ . Sea  $N$  un núcleo por  $A$  de  $D_1 \bullet D_2$ . Demostraremos que  $N$  es un núcleo por  $A$  de  $D_2$ .

Observemos que, por definición de suma lineal, ningún vértice en  $V(D_2)$  es adyacente hacia ningún vértice en  $V(D_1)$ , entonces ningún conjunto de vértices de  $V(D_1)$  puede absorber por  $A$  a ningún vértice de  $V(D_2)$ . Más aún, ningún vértice de  $V(D_1)$  puede pertenecer a  $N$ ; es decir,  $N \subseteq V(D_2)$ , pues de no ser así, existe un vértice  $v \in V(D_1)$  que pertenece a  $N$ , pero al ser  $N$  independiente por  $A$  en  $D_1 \bullet D_2$ , ningún vértice de  $V(D_2)$  pertenece a  $N$ , y por la observación anterior,  $N$  no sería absorbente por  $A$  en  $D_1 \bullet D_2$ .

Por otro lado, sean  $x$  e  $y$  dos vértices de  $V(D_2)$  y  $C$  un elemento de  $A$  de  $x$  a  $y$  en  $D_1 \bullet D_2$ . Notemos que como ningún vértice de  $V(D_2)$  es adyacente hacia ningún vértice de  $V(D_1)$ , entonces todo vértice de  $C$  está en  $V(D_2)$ . Se deduce que todo elemento de  $A$  en  $D_1 \bullet D_2$  también es un elemento de  $A$  en  $D_2$ . Por lo tanto, dado que  $N$  es un núcleo por  $A$  en  $D_1 \bullet D_2$ , entonces  $N$  es un núcleo por  $A$  en  $D_2$ .

Ahora, demostraremos que si  $D_2$  tiene un núcleo por  $A$ , entonces  $D_1 \bullet D_2$  tiene un núcleo por  $A$ . La definición de  $c$  garantiza que un elemento de  $A$  en  $D_2$  también es un elemento de  $A$  en  $D_1 \bullet D_2$ . Además, observemos nuevamente que, por la definición de  $D_1 \bullet D_2$ , cada vértice en  $V(D_1)$  es adyacente hacia todos los vértices en  $V(D_2)$  y ningún vértice en  $V(D_2)$  es adyacente hacia ningún vértice en  $V(D_1)$ . Por lo que, no hay elementos de  $A$  entre vértices de  $V(D_2)$  que contengan vértices en  $V(D_1)$ . De lo anterior se deduce que un núcleo por  $A$  en  $D_2$  también es un núcleo por  $A$  en  $D_1 \bullet D_2$ .  $\square$

De manera análoga a las familias generadas en la sección 3.2.3, podemos

utilizar el lema 8.2.1 y los ejemplos de la sección anterior para generar de manera recursiva familias infinitas de digráficas  $H$ -coloreadas tales que tienen núcleo por  $A$  y no tienen núcleo por  $B$ , con  $A, B \in \mathcal{A}$ .

Por ejemplo, consideremos  $H'_2$ , la multidigráfica  $H'_2$ -coloreada  $D'_2$ , ambas de la figura 8.3 y  $\overset{\leftrightarrow}{K}_1$  la digráfica que consta de un único vértice sin lazos. Definimos:

- $G^1 = D'_2$ , y
- $G^{j+1} = \overset{\leftrightarrow}{K}_1 \bullet G^j$ .

Por el lema 8.2.1, se tiene que la familia de digráficas  $G^j$  son digráficas  $H'_2$ -coloreadas con la propiedad de tener núcleo por  $H'_2$ -trayectorias dinámicas y no tener núcleo por  $H'_2$ -camino dinámicos.

De lo anterior, podemos afirmar que el problema de determinar la existencia, o no, de un núcleo por  $A$  en una digráfica  $H$ -coloreada y el problema de determinar la existencia de un núcleo por  $B$  en una digráfica  $H$ -coloreada son, de hecho, problemas diferentes, con  $A, B \in \mathcal{A}$  y  $A \neq B$ .

### 8.3. Equivalencia con $H$ -camino

A pesar de lo mostrado en las secciones anteriores, las similitudes entre estos conceptos son suficientes para permitirnos reducir el problema de encontrar un núcleo por  $H$ -trayectorias dinámicas en una multidigráfica  $H$ -coloreada al problema de encontrar un núcleo por  $H'$ -trayectorias en una digráfica  $H'$ -coloreada, para  $H'$  un patrón en particular. Consideremos la siguiente construcción.

Sean  $H$  un patrón,  $D$  una multidigráfica  $H$ -coloreada con  $H$ -coloración  $\zeta$ , y  $u, v \in V(D)$  tales que  $|F_D[u, v]| \geq 2$ . Sea  $F_D^-[u]$  y  $F_D^+[v]$  definidas de la siguiente manera

$$F_D^-[u] = \{a \in F(D) : u \text{ es el vértice final de } a\}$$

y

$$F_D^+[v] = \{b \in F(D) : v \text{ es el vértice inicial } b\}.$$

Construimos un nuevo patrón  $H'$  desde  $H$ . Primero, creamos un nuevo vértice  $c$  y lo agregamos a  $V(H)$  para obtener  $V(H')$ . Ahora, consideramos a los

conjuntos  $I$  y  $O$  definidos por

$$I = \{(\zeta(a), c) : a \in F_D^-[u] \text{ y existe } e \in F_D[u, v] \text{ tal que } (\zeta(a), \zeta(e)) \in F(H)\}$$

y

$$O = \{(c, \zeta(b)) : b \in F_D^+[v] \text{ y existe } e \in F_D[u, v] \text{ tal que } (\zeta(e), \zeta(b)) \in F(H)\}.$$

Para finalizar la construcción de  $H'$ , sea  $F(H') = F(H) \cup I \cup O$ .

Sea  $D'$  la multidigráfica tal que  $V(D') = V(D)$  y  $F(D') = (F(D) - F_D[u, v]) \cup \{f_{uv}\}$  donde  $f_{uv}$  es una flecha con vértice inicial  $u$  y vértice final  $v$ . Definimos  $\zeta' : F(D') \rightarrow V(H')$  de la siguiente manera:

$$\zeta'(e) = \begin{cases} \zeta(e) & \text{si } e \in F(D) \\ c & \text{si } e = f_{uv} \end{cases}$$

**Lema 8.3.1.** *Sea  $H$  un patrón y  $D$  una multidigráfica  $H$ -coloreada. Si  $H'$  y  $D'$  son construidas como arriba, entonces para todo par  $x, y \in V(D)$  existe una  $H$ -trayectoria dinámica de  $x$  a  $y$  en  $D$  si y solo si existe una  $H'$ -trayectoria dinámica de  $x$  a  $y$  en  $D'$ .*

*Demostración.* Sean  $x, y$  dos vértices en  $V(D)$  y  $W = (x = x_0, \dots, x_n = y)$  una  $H$ -trayectoria dinámica en  $D$ . Probaremos que  $W$  es una  $H'$ -trayectoria dinámica en  $D'$ . Como  $W$  es una  $H$ -trayectoria dinámica en  $D$ , entonces para cada  $i$ , con  $i \in \{0, \dots, n-2\}$ , existen  $f_i \in F_D[x_i, x_{i+1}]$  y  $f_{i+1} \in F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]$  tales que  $(\zeta(f_i), \zeta(f_{i+1})) \in F(H)$ . Consideremos 3 casos.

- Si  $f_i \notin F_D[u, v]$  y  $f_{i+1} \notin F_D[u, v]$ , entonces  $\zeta'(f_i) = \zeta(f_i)$  y  $\zeta'(f_{i+1}) = \zeta(f_{i+1})$ . Por lo que,  $(\zeta'(f_i), \zeta'(f_{i+1})) \in F(H')$ .
- Si  $f_i \in F_D[u, v]$  y  $f_{i+1} \notin F_D[u, v]$ , entonces  $f_i \notin F(D')$  pero  $f_{uv} \in F(D')$  con  $\zeta'(f_{uv}) = c$ . Como  $\zeta'(f_{i+1}) = \zeta(f_{i+1})$  y por definición de  $H'$ , se sigue que  $(c, \zeta'(f_{i+1})) \in F(H')$ .
- Si  $f_i \notin F_D[u, v]$  y  $f_{i+1} \in F_D[u, v]$ , entonces  $f_{i+1} \notin A(D')$  pero  $f_{uv} \in F(D')$  con  $\zeta'(f_{uv}) = c$ . Como  $\zeta'(f_i) = \zeta(f_i)$  y por definición de  $H'$ , se sigue que  $(\zeta'(f_i), c) \in F(H')$ .

Por lo tanto,  $W$  es una  $H'$ -trayectoria dinámica en  $D'$ .

Para la implicación recíproca, sea  $W' = (x = x_0, \dots, x_n = y)$  una  $H'$ -trayectoria dinámica en  $D'$ . Probaremos que  $W'$  es una  $H$ -trayectoria



dinámica en  $D$ . De nuevo, como  $W'$  es una  $H'$ -trayectoria dinámica, para cada  $i \in \{0, \dots, n-2\}$  existen  $f_i \in F_{D'}[x_i, x_{i+1}]$  y  $f_{i+1} \in F_{D'}[x_{i+1}, x_{i+2}]$  tales que  $(\zeta'(f_i), \zeta'(f_{i+1})) \in F(H')$ . Tenemos 3 casos.

Si  $f_i \neq f_{uv}$  y  $f_{i+1} \neq f_{uv}$ , entonces  $\zeta(f_i) = \zeta'(f_i)$  y  $\zeta(f_{i+1}) = \zeta'(f_{i+1})$ . Por lo que  $(\zeta(f_i), \zeta(f_{i+1})) \in F(H)$ . Si  $f_i = f_{uv}$ , entonces  $\zeta'(f_i) = c$  y  $f_{i+1} \in F_D^+[v]$ , más aún,  $(c, \zeta'(f_{i+1})) \in F(H')$  y  $\zeta(f_{i+1}) = \zeta'(f_{i+1})$ . Por definición de  $H'$ , existe  $e \in F_D[u, v]$  tal que  $(\zeta(e), \zeta(f_{i+1})) \in F(H)$ . Si  $f_{i+1} = f_{uv}$ , entonces  $\zeta'(f_{i+1}) = c$  y  $f_i \in F_D^-[u]$ , más aún,  $(\zeta'(f_{i+1}), c) \in F(H')$  y  $\zeta(f_i) = \zeta'(f_i)$ . Por definición de  $H'$ , existe  $e \in F_D[u, v]$  tal que  $(\zeta(f_{i+1}), \zeta(e)) \in F(H)$ .

Por lo tanto,  $W'$  es una  $H$ -trayectoria dinámica en  $D$ . □

Usando el lema 8.3.1 obtenemos la siguiente reducción.

**Teorema 8.3.1.** *Sea  $H$  un patrón y  $D$  una multidigráfica  $H$ -coloreada. Existe un patrón  $\hat{H}$  y una digráfica  $\hat{H}$ -coloreada  $\hat{D}$  tales que  $D$  tiene núcleo por  $H$ -trayectorias dinámicas si y solo si  $\hat{D}$  tiene núcleo por  $\hat{H}$ -trayectorias.*

*Demostración.* Para demostrar la existencia de  $\hat{H}$  es suficiente iterar la construcción anterior hasta que obtengamos una digráfica  $H_k$ -coloreada  $D_k$ . Aplicando el lema 8.3.1 en cada iteración, se obtiene que hay una  $H$ -trayectoria dinámica entre dos vértices en  $D$  si y solo si hay una  $H_k$ -trayectoria entre los mismos vértices en  $D_k$ . Escogemos  $\hat{H} = H_k$  y  $\hat{D} = D_k$ , obteniendo el resultado deseado. □

Notemos que  $V(\hat{D}) = V(D)$  y  $|F(\hat{D})| < |F(D)|$ ; además, de esta desigualdad se deduce que  $|\zeta| < |\hat{\zeta}|$ . También, denotamos el número de pares ordenados de vértices que tienen flechas paralelas en  $D$  por  $\mu(D)$ , es evidente que  $|V(\hat{H})| = |V(H)| + \mu(D)$ , y  $|A(\hat{H})| \leq |A(H)| + 2\mu(D)$ . Entonces, la construcción de  $\hat{H}$ ,  $\hat{D}$  y  $\hat{\zeta}$  se puede hacer en tiempo lineal.

Del mismo modo, la construcción anterior también es válida para  $H$ -caminos dinámicos, por lo que el problema de decisión de encontrar un núcleo por  $H$ -caminos dinámicos en una multidigráfica  $H$ -coloreada puede reducirse al problema de encontrar un núcleo por  $H$ -caminos en una digráfica  $H'$ -coloreada, para un patrón  $H'$  en particular.



# Capítulo 9

## Familias $\tilde{\mathcal{D}}_i$ y $\mathcal{D}_i$

Inspirados en las clases  $\mathcal{B}_1$ ,  $\mathcal{B}_2$  y  $\mathcal{B}_3$  definidas por Arpin y Linek en [1], y las clases  $\tilde{\mathcal{B}}_1$ ,  $\tilde{\mathcal{B}}_2$  y  $\tilde{\mathcal{B}}_3$  definidas en el capítulo 6, ahora definimos las clases  $\tilde{\mathcal{D}}_1$ ,  $\tilde{\mathcal{D}}_2$  y  $\tilde{\mathcal{D}}_3$ . Basadas en el alcance por  $H$ -trayectorias dinámicas. Así como las clases  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$  y  $\mathcal{D}_3$ , basadas en el alcance por  $H$ -caminos dinámicos.

**Definición 9.0.1.**  $\tilde{\mathcal{D}}_1$  es la clase de todas las digráficas  $H$  tal que para cualquier  $H$ -coloración de cualquier multitorneo  $T$  existe un vértice  $v$  de  $T$  que es absorbente por  $H$ -trayectorias dinámicas en  $T$ .

**Definición 9.0.2.**  $\tilde{\mathcal{D}}_2$  es la clase de todas las digráficas  $H$  tal que para cualquier  $H$ -coloración de cualquier multidigráfica  $D$  existe un subconjunto independiente de vértices de  $D$  que es absorbente por  $H$ -trayectorias dinámicas en  $D$ .

**Definición 9.0.3.**  $\tilde{\mathcal{D}}_3$  es la clase de todas las digráficas  $H$  tal que para cualquier  $H$ -coloración de cualquier multidigráfica  $D$ ,  $D$  tiene núcleo por  $H$ -trayectorias dinámicas.

De manera análoga, se definen nuevas familias  $\mathcal{D}_i$ , con  $i \in \{1, 2, 3\}$ , basadas en el alcance por  $H$ -caminos dinámicos. La mayor parte de las pruebas que se presentan en este capítulo son sobre las familias  $\tilde{\mathcal{D}}_i$ ; sin embargo, varios de los resultados y construcciones son válidos para las familias  $\mathcal{D}_i$ , en dichos resultados haremos hincapié. Por estas razones, el análisis de las familias es simultáneo.

Observemos que todo conjunto independiente por  $H$ -trayectorias dinámicas en una multidigráfica  $H$ -coloreada es un conjunto independiente, se

sigue que  $\tilde{\mathcal{D}}_3 \subseteq \tilde{\mathcal{D}}_2$ . Más aún, en un multitorneo los conjuntos independientes son únicamente los conjuntos que constan de un único vértice. Por lo que se deduce que  $\tilde{\mathcal{D}}_2 \subseteq \tilde{\mathcal{D}}_1$ . De manera análoga,  $\mathcal{D}_3 \subseteq \mathcal{D}_2 \subseteq \mathcal{D}_1$ .

Observemos que en una digráfica  $\overleftrightarrow{K}_1$ -coloreada los núcleos por trayectorias coinciden con los núcleos por  $H$ -trayectorias dinámicas y con los núcleos por  $H$ -camino dinámicos, como ya hemos mencionado, toda digráfica tiene núcleo por trayectorias; esto significa que,  $\overleftrightarrow{K}_1 \in \tilde{\mathcal{D}}_3$  y  $\overleftrightarrow{K}_1 \in \mathcal{D}_3$ . Por lo anterior, ninguna de las seis familias son vacías.

A continuación, presentamos algunas propiedades de estas familias.

**Lema 9.0.1.** *Sea  $H$  un patrón.*

1. Si  $H \in \tilde{\mathcal{D}}_i$ , entonces  $H$  es reflexiva, para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ .
2. Si  $H \in \tilde{\mathcal{D}}_i$  y  $H_1$  es una subdigráfica inducida de  $H$ , entonces  $H_1 \in \tilde{\mathcal{D}}_i$ , para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ .
3. Si  $H \in \tilde{\mathcal{D}}_i$  y  $H_2$  es una superdigráfica generadora de  $H$ , entonces  $H_2 \in \tilde{\mathcal{D}}_i$ , para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

*Demostración.* 1. Procediendo por contrapositiva. Sea  $H$  un patrón con un vértice  $x$  tal que  $(x, x) \notin F(H)$ . Consideremos a  $\overrightarrow{C}_3$ , el ciclo de longitud 3, que también es un torneo junto con la  $H$ -coloración que le asigna el color  $x$  a cada flecha de  $\overrightarrow{C}_3$ . Notemos que las  $H$ -trayectorias dinámicas son únicamente las flechas por lo que no hay un vértice que sea absorbente por  $H$ -trayectorias dinámicas. Por lo que  $H \notin \tilde{\mathcal{D}}_i$  para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

2. El segundo inciso se sigue del hecho que toda  $H_1$ -coloración de una multidigráfica también es una  $H$ -coloración, por lo que cualquier ejemplo que muestre que  $H_1 \notin \tilde{\mathcal{D}}_i$  también muestra que  $H \notin \tilde{\mathcal{D}}_i$  para  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

3. Observemos que toda  $H$ -coloración de una multidigráfica también es una  $H_2$ -coloración, más aún, toda  $H$ -trayectoria dinámica también es una  $H_2$ -trayectoria dinámica en la misma multidigráfica. Por lo que todo subconjunto independiente, que es absorbente por  $H$ -trayectorias dinámicas también es absorbente por  $H_2$ -trayectorias dinámicas. De lo anterior, se deduce que si  $H \in \tilde{\mathcal{D}}_i$ , entonces  $H_2 \in \tilde{\mathcal{D}}_i$  con  $i \in \{1, 2\}$ .  $\square$

El siguiente lema dice que las familias  $\tilde{\mathcal{D}}_i$  son cerradas bajo tomar contracciones y expansiones.

**Lema 9.0.2.** *Sea  $H'$  una contracción de  $H$ , entonces  $H \in \tilde{\mathcal{D}}_i$  si y sólo si  $H' \in \tilde{\mathcal{D}}_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ .*

*Demostración.* Sea  $V(H) = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$  una partición tal que  $V(H') = \{C_1, \dots, C_n\}$ . Sea  $D$  una multidigráfica con  $\varsigma$  una  $H$ -coloración de  $D$ . Definimos  $\varsigma' : F(D) \rightarrow V(H')$  una  $H'$ -coloración de  $D$  de la siguiente manera  $\varsigma'(f) = C_i$  donde  $C_i$  es el único tal que  $\varsigma(f) \in C_i$ .

Demostraremos que  $W = (x_0, x_1, \dots, x_m)$  es una  $H$ -trayectoria dinámica en  $D$  si y sólo si  $W$  es una  $H'$ -trayectoria dinámica en  $D$ .

Sea  $W = (x = x_0, x_1, \dots, x_m = y)$  una  $H$ -trayectoria dinámica en  $D$ .  $W$  es una  $H$ -trayectoria dinámica si y sólo si para cada  $i \in \{0, \dots, m-2\}$  existen  $f_i \in F_D[x_i, x_{i+1}]$  y  $f_{i+1} \in F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]$  tales que  $(\varsigma(f_i), \varsigma(f_{i+1})) \in F(H)$ . Si y sólo si  $\varsigma'(f_i) = C_j$  con  $\varsigma(f_i) \in C_j$  y  $\varsigma'(f_{i+1}) = C_k$  con  $\varsigma(f_{i+1}) \in C_k$ . Si y sólo si  $(\varsigma(f_i), \varsigma(f_{i+1})) \in (C_j \times C_k) \cap F(H)$  y  $(C_j, C_k) \in F(H')$  si y sólo si  $W$  es una  $H'$ -trayectoria dinámica en  $D$ .

Sea  $D$  una multidigráfica y  $\zeta'$  una  $H'$ -coloración de  $D$ . Escogemos  $c_i \in C_i$  fija y definimos  $\zeta : V(D) \rightarrow V(H)$  la  $H$ -coloración de  $D$  como  $\zeta(f) = c_i$  donde  $c_i \in C_i = \zeta'(f)$ . Notemos que  $\zeta$  no necesariamente es suprayectiva.

Sea  $W' = (x = x_0, x_1, \dots, x_m = y)$  una  $H'$ -trayectoria dinámica en  $D$ . Como  $W'$  es una  $H'$ -trayectoria dinámica si y sólo si para cada  $i \in \{0, \dots, m-2\}$  existen  $f_i \in F_D[x_i, x_{i+1}]$  y  $f_{i+1} \in F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]$  tales que  $(\zeta'(f_i), \zeta'(f_{i+1})) \in F(H')$  si y sólo si  $\zeta(f_i) = c_j$  donde  $\zeta'(f_i) = C_j$  y  $\zeta(f_{i+1}) = c_k$  donde  $\zeta'(f_{i+1}) = C_k$  si y sólo si  $(C_j, C_k) \in F(H')$  y  $(\zeta(f_i), \zeta(f_{i+1})) \in (C_j \times C_k) \cap F(H)$  y si y sólo si  $W'$  es una  $H$ -trayectoria dinámica en  $D$ .

De las observaciones anteriores, se sigue que  $H \in \tilde{\mathcal{D}}_i$  si y sólo si  $H' \in \tilde{\mathcal{D}}_i$ , con  $i \in \{1, 2, 3\}$ .  $\square$

Observemos que los lemas análogos a lemas 9.0.1 y 9.0.2 también son válidos para los  $H$ -camino dinámicos. Por lo que, los patrones en  $\mathcal{D}_i$ , son reflexivos y las familias  $\mathcal{D}_i$  son cerradas bajo tomar subdigráficas inducidas, contracciones y expansiones.

A partir de las definiciones de  $\tilde{\mathcal{B}}_1$  y  $\tilde{\mathcal{D}}_1$  demostramos que estas dos clases son iguales.

**Teorema 9.0.1.**  $\tilde{\mathcal{D}}_1 = \tilde{\mathcal{B}}_1$ .

*Demostración.* Probaremos las dos contenciones. Sea  $H \in \tilde{\mathcal{B}}_1$  y  $T$  un multitorneo  $H$ -coloreado. Sea  $T'$  el torneo obtenido desde  $T$  borrando todas las flechas paralelas de  $T$  dejando exactamente una flecha entre dos vértices de  $T$ . Como  $H \in \tilde{\mathcal{B}}_1$ , entonces existe un vértice que es absorbente por  $H$ -trayectorias en  $T'$ . Observemos que toda  $H$ -trayectoria en  $T'$  es una  $H$ -trayectoria dinámica en  $T$ . Se sigue que  $T$  tiene un vértice que es absorbente por  $H$ -trayectorias dinámicas. Por lo tanto,  $H \in \tilde{\mathcal{D}}_1$ .

Para la otra contención, sea  $H \in \tilde{\mathcal{D}}_1$ . Como, en un torneo, toda  $H$ -trayectoria dinámica es una  $H$ -trayectoria y todo torneo es un multitorneo, entonces se deduce que  $H \in \tilde{\mathcal{B}}_1$ .  $\square$

Ahora, usando la caracterización de  $\tilde{\mathcal{B}}_2$  dada en el capítulo 6 probamos que  $\tilde{\mathcal{B}}_2 = \tilde{\mathcal{D}}_2$ . Sin embargo, vale la pena notar que más adelante probaremos que  $\mathcal{B}_3 \neq \mathcal{D}_3$ .

**Teorema 9.0.2.** Sea  $H$  un patrón.  $H \in \tilde{\mathcal{D}}_2$  si y solo si  $H^c$  no tiene ciclos impares.

*Demostración.* Es suficiente probar que  $\tilde{\mathcal{B}}_2 = \tilde{\mathcal{D}}_2$ . Como ya hemos notado en el capítulo anterior, todo conjunto independiente que es absorbente por  $H$ -trayectorias en una multidigráfica es un conjunto independiente que es absorbente por  $H$ -trayectorias dinámicas. Se sigue que  $\tilde{\mathcal{B}}_2 \subseteq \tilde{\mathcal{D}}_2$ .

Para probar que  $\tilde{\mathcal{D}}_2 \subseteq \tilde{\mathcal{B}}_2$ , mostraremos que si  $H \in \tilde{\mathcal{D}}_2$ , entonces  $H^c$  no tiene ciclos impares. Procediendo por contrapositiva. Si  $H^c$  contiene un ciclo impar  $C = (0, 1, 2, \dots, 2k, 0)$ . Consideremos la digráfica que es un ciclo impar  $C_{2k+1} = (x_0, x_1, \dots, x_{2k}, x_0)$  junto con la siguiente  $H$ -coloración  $c$ , tal que  $c((x_i, x_{i+1})) = i$  para  $i \in \{0, 1, \dots, 2k-1\}$  y  $c((x_{2k}, x_0)) = 2k$ . Notemos que cada  $H$ -trayectoria dinámica en  $C_{2k+1}$  es una única flecha. Se sigue que,  $C_{2k+1}$  no tiene un conjunto independiente que es absorbente por  $H$ -trayectorias dinámicas y, por lo tanto,  $H \notin \tilde{\mathcal{D}}_2$ . Por el teorema 6.1.1, podemos concluir que  $H \in \tilde{\mathcal{B}}_2$ .

Por lo tanto,  $\tilde{\mathcal{B}}_2 = \tilde{\mathcal{D}}_2$ .  $\square$

No es difícil de notar que las versiones análogas a los teoremas 9.0.1 y 9.0.2 son válidos para  $H$ -camino dinámicos, esto significa que  $\mathcal{B}_1 = \mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{B}_2 = \mathcal{D}_2$ .



Figura 9.1: Patrones  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$  y  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ .

### 9.1. Familias $\tilde{\mathcal{D}}_3$ y $\mathcal{D}_3$

En esta sección hablamos de los patrones que pertenecen a  $\tilde{\mathcal{D}}_3$  y los patrones que pertenecen a  $\mathcal{D}_3$ . Nos referimos a ellos como *patrones pancromáticos por trayectorias dinámicas* y como *patrones pancromáticos por caminos dinámicos*, respectivamente. De la misma manera en que se abordó la familia de patrones pancromáticos por trayectorias, analizamos los patrones de orden a lo más tres para poder recabar información, y poder describir la estructura general de los patrones pancromáticos por trayectorias dinámicas y la estructura general de los patrones pancromáticos por caminos dinámicos.

Como ya hemos mencionado,  $\overset{\leftrightarrow}{K}_1$  es un patrón pancromático por trayectorias dinámicas y por caminos dinámicos, más aún, por el lema 9.0.2 se tiene que  $\overset{\leftrightarrow}{K}_n$  es un patrón pancromático por trayectorias dinámicas y por caminos dinámicos, para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Consideremos a los patrones  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$  y  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$  en la figura 9.1.

**Lema 9.1.1.** *Sea  $D$  una digráfica  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -coloreada, y sea  $D'$  la multidigráfica obtenida desde  $D$  al reemplazar cada flecha  $(x, y)$  en  $D$  con color  $r$  por dos flechas de  $x$  a  $y$  tales que una tiene color  $b$  y la otra color  $g$ .*

*Para cada  $x, y \in V(D)$  existe una  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -trayectoria de  $x$  a  $y$  en  $D$  si y sólo si hay una  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$ -trayectoria dinámica de  $x$  a  $y$  en  $D'$ .*

*Demostración.* Sean  $D$  y  $D'$  como en las hipótesis. Probaremos que toda  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -trayectoria en  $D$  es una  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$ -trayectoria dinámica en  $D'$

Sea  $W = (x = x_0, \dots, x_n = y)$  una  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -trayectoria en  $D$ . Sea

$i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ , consideremos  $(x_i, x_{i+1})$  y  $(x_{i+1}, x_{i+2})$ . Tenemos 4 casos.

- Si  $(x_i, x_{i+1})$  tiene color  $r$  y  $(x_{i+1}, x_{i+2})$  tiene  $r$  en  $D$ , entonces existen  $f_i \in F_{D'}[x_i, x_{i+1}]$  con color  $b$  y  $f_{i+1} \in F_{D'}[x_{i+1}, x_{i+2}]$  con color  $b$  en  $D'$ .
- Si  $(x_i, x_{i+1})$  tiene color  $r$  y  $(x_{i+1}, x_{i+2})$  tiene color  $b$  o color  $g$  en  $D$ , entonces existen  $f_i, f'_i \in F_{D'}[x_i, x_{i+1}]$  tales que  $f_i$  tiene color  $g$  y  $f'_i$  tiene color  $b$  en  $D'$ . Por definición de  $D'$  la única flecha de  $F_{D'}[x_{i+1}, x_{i+2}]$  tiene color  $b$  o color  $g$ . Por lo tanto, existen una flecha en  $F_{D'}[x_i, x_{i+1}]$  y una flecha en  $F_{D'}[x_{i+1}, x_{i+2}]$  tales que ambas tienen el mismo color en  $D'$ .
- Si  $(x_i, x_{i+1})$  tiene color  $b$  o color  $g$  y  $(x_{i+1}, x_{i+2})$  tiene color  $r$  en  $D$ , entonces existen  $f_{i+1}, f'_{i+1} \in F_{D'}[x_{i+1}, x_{i+2}]$  tales que  $f_{i+1}$  tiene color  $g$  y  $f'_{i+1}$  tiene color  $b$  en  $D'$ . Por definición de  $D'$ , la única flecha en  $F_{D'}[x_i, x_{i+1}]$  tiene color  $b$  o color  $g$ . Por lo tanto, existen una flecha en  $F_{D'}[x_i, x_{i+1}]$  y una flecha en  $F_{D'}[x_{i+1}, x_{i+2}]$  tales que ambas tienen el mismo color en  $D'$ .
- Si  $(x_i, x_{i+1})$  tiene color  $b$  o color  $g$  y  $(x_{i+1}, x_{i+2})$  tiene color  $g$  o color  $b$  en  $D$ , entonces la única flecha en  $F_{D'}[x_i, x_{i+1}]$  y la única flecha en  $F_{D'}[x_{i+1}, x_{i+2}]$  tienen el mismo color en  $D'$ .

Por lo que,  $W$  es un  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$ -trayectoria dinámica en  $D'$ .

Sea  $W = (x = x_0, \dots, x_n = y)$  una  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$ -trayectoria dinámica en  $D'$ .

Probaremos que  $W$  es una  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -trayectoria en  $D$ .

Notemos que si  $|F_{D'}[x_i, x_{i+1}]| = 1$  para cada  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , entonces  $W$  es una trayectoria monocromática en  $D'$  y por consecuencia una  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -trayectoria en  $D$ . Ahora supongamos que existe al menos un  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  tal que  $|F_{D'}[x_i, x_{i+1}]| = 2$ , entonces la única flecha en  $F_{D'}[x_i, x_{i+1}]$  tiene color  $r$ . Por lo tanto, cada cambio de flecha de  $W$  en  $D'$  es un cambio de color de  $W$  en  $D$ . Como  $r$  es un vértice universal en  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ , entonces  $W$  es una  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -trayectoria en  $D$ .  $\square$

Recordemos que en la proposición 7.1.1, con ayuda del lema 7.1.2, se demuestra que  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$  no es un patrón pancromático por trayectorias. Por lo tanto, existe una multidigráfica  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -coloreada  $D$  tal que  $D$  no tiene núcleo por



$\leftrightarrow$   
 $\overleftrightarrow{P}_3$ -trayectorias. Más aún, notemos que en la construcción del lema 7.1.2 y en la proposición 7.1.1 solo se usan flechas simétricas y asimétricas, es decir, no se necesitan las flechas paralelas, por lo que el resultado es válido si se restringe a digráficas.

**Teorema 9.1.1.**  $2\overleftrightarrow{K}_1$  no es elemento de  $\tilde{\mathcal{D}}_3$ . Por lo tanto, si  $H \in \tilde{\mathcal{D}}_3$ , entonces  $H$  es una digráfica semicompleta.

*Demostración.* Para la primera afirmación, por el lema 7.1.2 y la proposición 7.1.1 existe una digráfica  $\overleftrightarrow{P}_3$ -coloreada  $D$  sin núcleo por  $\overleftrightarrow{P}_3$ -trayectorias. Consideremos  $D'$  la multidigráfica  $2\overleftrightarrow{K}_1$ -coloreada construida como en lema 9.1.1, que reemplaza cada flecha  $(x, y)$  en  $D$  con color  $r$  por dos flechas de  $x$  a  $y$  tales que una tiene color  $b$  y otra tiene color  $g$ . Por el lema 9.1.1,  $D'$  no tiene núcleo por  $2\overleftrightarrow{K}_1$ -trayectorias dinámicas.

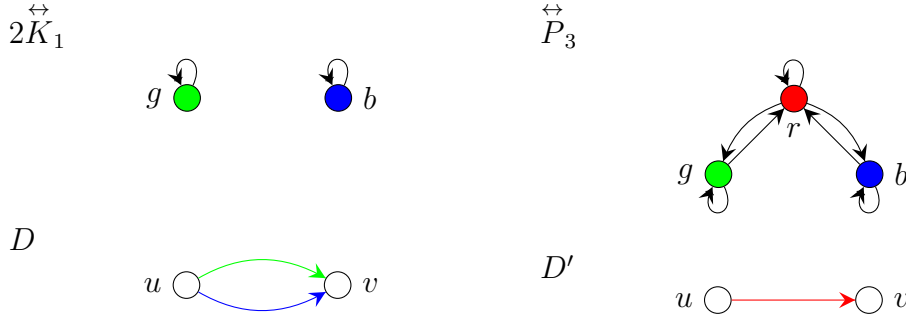
La segunda afirmación es consecuencia directa de la primera afirmación y del lema 9.0.1.2 que dice que los patrones pancromáticos por trayectorias dinámicas son cerrados bajo tomar subdigráficas inducidas.  $\square$

Observemos que si  $D'$  es la multidigráfica  $2\overleftrightarrow{K}_1$ -coloreada obtenida como en el lema 9.1.1, entonces la prueba de lema 9.1.1 también es válida para  $H$ -caminos dinámicos. Sin embargo, no se sabe si  $\overleftrightarrow{P}_3$  pertenece a  $\mathcal{B}_3$  o no, por lo que la versión del teorema 9.1.1 puede no ser cierta para los  $H$ -caminos dinámicos. Sin embargo, consideremos los siguientes lemas.

**Lema 9.1.2.** Si  $2\overleftrightarrow{K}_1$  es patrón pancromático por caminos dinámicos, entonces  $\overleftrightarrow{P}_3$  es patrón pancromático por caminos.

*Demostración.* Supongamos que  $2\overleftrightarrow{K}_1$  es patrón pancromático por caminos dinámicos. Por el corolario 5.2.2, sabemos que basta con probar que todas las digráficas  $\overleftrightarrow{P}_3$ -coloreadas tienen núcleo por  $\overleftrightarrow{P}_3$ -caminos, para demostrar que  $\overleftrightarrow{P}_3$  es patrón pancromático por caminos.

Sea  $D$  una digráfica  $\overleftrightarrow{P}_3$ -coloreada. Demostraremos que  $D$  tiene núcleo por  $\overleftrightarrow{P}_3$ -caminos. Construimos  $D'$ , la multidigráfica  $2\overleftrightarrow{K}_1$ -coloreada obtenida como en el lema 9.1.1. Como  $2\overleftrightarrow{K}_1$  es un patrón pancromático por caminos dinámicos, entonces  $D'$  tiene un núcleo por  $2\overleftrightarrow{K}_1$ -caminos dinámicos, digamos  $N$ .



**Figura 9.2:** Construcción para el lema 9.1.3.

Como ya hemos mencionado, la versión del lema 9.1.1 para  $H$ -caminos dinámicos es válida, y garantiza que para cada  $x, y \in V(D)$  existe un  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -camino de  $x$  a  $y$  en  $D$  si y solo si hay un  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$ -camino dinámico de  $x$  a  $y$  en  $D'$ . Se sigue que  $N$  es un núcleo por  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -caminos en  $D$ .

Por lo tanto,  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$  es un patrón pancromático por caminos.  $\square$

**Lema 9.1.3.** Si  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$  no es patrón pancromático por caminos dinámicos, entonces  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$  no es patrón pancromático por caminos.

*Demostración.* Probaremos que para cada multidigráfica  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$ -coloreada  $D$  existe una digráfica  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -coloreada  $D'$  tal que  $D$  tiene núcleo por  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$ -caminos dinámicos si y solo si  $D'$  tiene núcleo por  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -caminos.

Construimos la digráfica  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -coloreada  $D'$  desde  $D$ , a través de las siguientes modificaciones. Para cada par de vértices  $u$  y  $v$  en  $V(D)$  con  $|F_D[u, v]| = 2$ , entonces reemplazamos  $F_D[u, v]$  por una única flecha de  $u$  a  $v$ ,  $f_{uv}$ , con color  $r$ , véase la figura 9.2.

Probaremos que todo  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$ -camino dinámico en  $D$  es un  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -camino en  $D'$ . Sea  $W = (x = x_0, \dots, x_n = y)$  un  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$ -camino dinámico en  $D$ .

Notemos que si  $|F_D[x_i, x_{i+1}]| = 1$ , para cada  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , entonces  $W$  es un camino monocromático en  $D$  de color  $g$  o de color  $b$ . Por consecuencia,  $W$  es un  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -camino en  $D'$ . Ahora, supongamos que existe al menos una  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  tal que  $|F_D[x_i, x_{i+1}]| = 2$ . Por definición de  $D'$ , la única flecha en  $F_{D'}[x_i, x_{i+1}]$  tiene color  $r$ . Por lo que cada cambio de flecha de  $W$

en  $D$  es un cambio de color de  $g$  o  $b$  a  $r$  o es un cambio de color de  $r$  a  $b$  o  $g$ . Como  $r$  es un vértice universal en  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ , entonces  $W$  es un  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -camino en  $D'$ .

Ahora, sea  $W' = (x = x_0, \dots, x_n = y)$  un  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -camino en  $D'$ . Probaremos que  $W'$  es un  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$ -camino dinámico en  $D$ . Sea  $i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ , consideremos las flechas  $(x_i, x_{i+1})$  y  $(x_{i+1}, x_{i+2})$  en  $D'$ . Tenemos casos.

- Si  $(x_i, x_{i+1})$  tiene color  $r$  y  $(x_{i+1}, x_{i+2})$  tiene color  $r$  in  $D'$ , entonces existen  $f_i \in F_D[x_i, x_{i+1}]$  y  $f_{i+1} \in F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]$ , ambas con color  $b$  en  $D$ .
- Si  $(x_i, x_{i+1})$  tiene color  $r$  y  $(x_{i+1}, x_{i+2})$  tiene color  $b$  o  $g$  en  $D'$ , entonces existen  $f_i, f'_i \in F_D[x_i, x_{i+1}]$  tales que  $f_i$  tiene color  $g$  y  $f'_i$  tiene color  $b$  en  $D$ . Por definición de  $D'$  la única flecha en  $F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]$  tiene color  $b$  o color  $g$ . Por lo que, existen una flecha en  $F_D[x_i, x_{i+1}]$  y una flecha en  $F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]$  con el mismo color en  $D$ .
- Si  $(x_i, x_{i+1})$  tiene color  $b$  o color  $g$  y  $(x_{i+1}, x_{i+2})$  tiene color  $r$  en  $D'$ , entonces existen  $f_{i+1}, f'_{i+1} \in F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]$  tales que  $f_{i+1}$  tiene color  $g$  y  $f'_{i+1}$  tiene color  $b$  en  $D$ . Por definición de  $D'$  la única flecha en  $F_D[x_i, x_{i+1}]$  tiene color  $b$  o color  $g$ . Por lo que, existen una flecha en  $F_D[x_i, x_{i+1}]$  y una flecha en  $F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]$  con el mismo color en  $D$ .
- Si  $(x_i, x_{i+1})$  tiene color  $b$  o color  $g$  y  $(x_{i+1}, x_{i+2})$  tiene color  $g$  o color  $b$  en  $D'$ , entonces, como  $W'$  es un  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -camino, la única flecha en  $F_D[x_i, x_{i+1}]$  y la única flecha en  $F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]$  tienen el mismo color en  $D$ .

Por lo tanto,  $W'$  es un  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$ -camino dinámico en  $D$ .

Por lo anterior, podemos concluir que  $D$  tiene núcleo por  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$ -caminos dinámicos si y solo si  $D'$  tiene núcleo por  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -caminos.

Si  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1 \notin \mathcal{D}_3$ , entonces existe una multidigráfica  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$ -coloreada  $D$  sin núcleo por  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$ -caminos dinámicos. Consideremos  $D'$ , la digráfica  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -coloreada construida desde  $D$  como arriba. Se sigue que  $D'$  no tiene núcleo por  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -caminos. Por lo tanto,  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3 \notin \mathcal{B}_3$ .  $\square$

De los lemas 9.1.2 y 9.1.3, se sigue que  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3 \in \mathcal{B}_3$  si y solo si  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1 \in \mathcal{D}_3$ . Sin embargo, recordemos que el problema de determinar si  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$  es un patrón pancromático por caminos es un problema abierto, véase el problema 5.3.1.



**Figura 9.3:** Patrones  $\vec{P}_2$  y  $F_1$ .

Sean  $\vec{P}_2$  y  $F_1$  los patrones representados en la figura 9.3. El siguiente resultado nos da la equivalencia del problema de decisión entre si una multidigráfica  $\vec{P}_2$ -coloreada tiene núcleo por  $\vec{P}_2$ -trayectorias dinámicas y el problema de decisión de si una digráfica  $F_1$ -coloreada tiene núcleo por  $F_1$ -trayectorias. Además, recordemos que el teorema 7.2.1 afirma que el problema de decisión de determinar si una multidigráfica  $F_1$ -coloreada tiene núcleo por  $F_1$ -trayectorias equivalente al problema de decisión de determinar si la digráfica  $F_1$ -coloreada, construida en la prueba, tiene núcleo por  $F_1$ -trayectorias o no.

**Teorema 9.1.2.**  $F_1 \in \tilde{\mathcal{B}}_3$  si y sólo si  $\vec{P}_2 \in \tilde{\mathcal{D}}_3$ .

*Demostración.* Sea  $D$  una multidigráfica  $\vec{P}_2$ -coloreada. Denotaremos por  $\widehat{D}$  la multidigráfica  $F_1$ -coloreada obtenida a partir de  $D$  a través de las siguientes modificaciones. Para cada par de vértices  $u$  y  $v$  en  $D$  con  $f_1, f_2 \in F_D[u, v]$  tales que  $f_1$  tiene color  $b$  y  $f_2$  tiene color  $g$ , reemplazamos ambas flechas por una única flecha de  $u$  a  $v$ ,  $e_{uv}$ , con color  $r$ .

Sea  $W = (x_0, \dots, x_n)$  una  $\vec{P}_2$ -trayectoria dinámica en  $D$ . Demostraremos que  $W$  es  $F_1$ -trayectoria en  $\widehat{D}$ . Si para todo par de vértices consecutivos  $x_i$  y  $x_{i+1}$  en  $W$  existe a lo más una flecha de  $x_i$  a  $x_{i+1}$ , entonces  $W$  es una  $F_1$ -trayectoria monocromática con color  $b$  o color  $g$  en  $\widehat{D}$  o  $W$  es una  $F_1$ -trayectoria con un único cambio de color, de  $g$  a  $b$ , en  $\widehat{D}$ . Se sigue que  $W$  es una  $F_1$ -trayectoria en  $\widehat{D}$ . En otro caso, existe  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  tal que  $|F_D[x_i, x_{i+1}]| = 2$ . Por construcción de  $\widehat{D}$  para cada  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  con  $|F_D[x_i, x_{i+1}]| = 2$ , existe  $e_{x_i x_{i+1}} \in F(\widehat{D})$  con color  $r$ . Como  $r$  es un vértice universal en  $F_1$ , entonces  $W$  es una  $F_1$ -trayectoria de  $x$  a  $y$  en  $\widehat{D}$ .

Sea  $\widehat{W} = (x_0, \dots, x_n)$  una  $F_1$ -trayectoria en  $\widehat{D}$ . Probaremos que  $\widehat{W}$  es una  $\vec{P}_2$ -trayectoria dinámica en  $D$ . Sea  $i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ , consideremos  $(x_i, x_{i+1})$  y  $(x_{i+1}, x_{i+2})$ . Tenemos 4 casos.

- Si  $(x_i, x_{i+1})$  tiene color  $r$  y  $(x_{i+1}, x_{i+2})$  tiene color  $r$  en  $\widehat{D}$ , entonces existen  $f_i \in F_D[x_i, x_{i+1}]$  con color  $b$  y  $f_{i+1} \in F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]$  con color  $b$  in  $D$ .
- Si  $(x_i, x_{i+1})$  tiene color  $r$  y  $(x_{i+1}, x_{i+2})$  tiene color  $b$  o color  $g$  en  $\widehat{D}$ , entonces existen  $f_i, f'_i \in F_D[x_i, x_{i+1}]$  tales que  $f_i$  tiene color  $g$  y  $f'_i$  tiene color  $b$  en  $D$ . Por definición de  $\widehat{D}$  la única flecha en  $F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]$  tiene color  $b$  or  $g$ . Por lo que, existen una flecha en  $F_D[x_i, x_{i+1}]$  y una flecha en  $F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]$  tales que ambas tienen el mismo color en  $D$ .
- Si  $(x_i, x_{i+1})$  tiene color  $b$  o color  $g$  y  $(x_{i+1}, x_{i+2})$  tiene color  $r$  en  $\widehat{D}$ , entonces existen  $f_{i+1}, f'_{i+1} \in F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]$  tales que  $f_{i+1}$  tiene color  $g$  y  $f'_{i+1}$  tiene color  $b$  en  $D$ . Por definición de  $\widehat{D}$  la única flecha en  $F_D[x_i, x_{i+1}]$  tiene color  $b$  o color  $g$ . Por lo que, existen una flecha en  $F_D[x_i, x_{i+1}]$  y una flecha en  $F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]$  tales que ambas tienen el mismo color en  $D$ .
- Si  $(x_i, x_{i+1})$  tiene color  $b$  o color  $g$  y  $(x_{i+1}, x_{i+2})$  tiene color  $g$  o color  $b$  en  $\widehat{D}$ , entonces la única flecha en  $F_D[x_i, x_{i+1}]$  y la única flecha en  $F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]$  tienen el mismo color en  $D$  o la flecha de  $x_i$  a  $x_{i+1}$  tiene color  $g$  y la flecha de  $x_{i+1}$  a  $x_{i+2}$  tiene color  $b$ , en ambos casos se implica una flecha en  $\vec{P}_2$ .

Por lo tanto,  $\widehat{W}$  es una  $\vec{P}_2$ -trayectoria dinámica en  $D$ . Podemos concluir que  $D$  tiene núcleo por  $\vec{P}_2$ -trayectorias dinámicas si y sólo si  $\widehat{D}$  tiene núcleo por  $F_1$ -trayectorias.

Si  $F_1 \in \widetilde{\mathcal{B}}_3$ , entonces toda digráfica  $F_1$ -coloreada tiene núcleo por  $F_1$ -trayectorias, en particular,  $\widehat{D}$  tiene núcleo por  $F_1$ -trayectorias. Implicando que  $D$  tiene núcleo por  $\vec{P}_2$ -trayectorias dinámicas y, por lo tanto,  $\vec{P}_2 \in \widetilde{\mathcal{G}}_3$ .

Para la implicación recíproca, consideremos la siguiente construcción. Sea  $D$  una digráfica  $F_1$ -coloreada. Sea  $\bar{D}$  la multidigráfica  $\vec{P}_2$ -coloreada obtenida a partir de  $D$  a través de las siguientes modificaciones. Para cada par de vértices  $u$  y  $v$  en  $D$  tales que  $(u, v) \in F(D)$  tiene color  $r$ , reemplazamos esa

flecha por dos flechas de  $u$  a  $v$ , digamos  $f$  y  $f'$  tales que  $f$  tiene color  $b$  y  $f'$  tiene color  $g$ .

Sea  $W = (x_0, \dots, x_n)$  una  $F_1$ -trayectoria en  $D$ . Probaremos que  $W$  es una  $\vec{P}_2$ -trayectoria dinámica en  $\bar{D}$ . Sea  $i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ , consideremos  $(x_i, x_{i+1})$  y  $(x_{i+1}, x_{i+2})$ . Tenemos 4 casos.

- Si  $(x_i, x_{i+1})$  tiene color  $r$  y  $(x_{i+1}, x_{i+2})$  tiene color  $r$  en  $D$ , entonces existen  $f_i \in F_{\bar{D}}[x_i, x_{i+1}]$  con color  $b$  y  $f_{i+1} \in F_{\bar{D}}[x_{i+1}, x_{i+2}]$  con color  $b$  in  $\bar{D}$ .
- Si  $(x_i, x_{i+1})$  tiene color  $r$  y  $(x_{i+1}, x_{i+2})$  tiene color  $b$  o color  $g$  en  $D$ , entonces existen  $f_i, f'_i \in F_{\bar{D}}[x_i, x_{i+1}]$  tales que  $f_i$  tiene color  $g$  y  $f'_i$  tiene color  $b$  en  $\bar{D}$ . Por definición de  $\bar{D}$  la única flecha en  $F_{\bar{D}}[x_{i+1}, x_{i+2}]$  tiene color  $b$  or  $g$ . Por lo que, existen una flecha en  $F_{\bar{D}}[x_i, x_{i+1}]$  y una flecha en  $F_{\bar{D}}[x_{i+1}, x_{i+2}]$  tales que ambas tienen el mismo color en  $\bar{D}$ .
- Si  $(x_i, x_{i+1})$  tiene color  $b$  o color  $g$  y  $(x_{i+1}, x_{i+2})$  tiene color  $r$  en  $\bar{D}$ , entonces existen  $f_{i+1}, f'_{i+1} \in F_{\bar{D}}[x_{i+1}, x_{i+2}]$  tales que  $f_{i+1}$  tiene color  $g$  y  $f'_{i+1}$  tiene color  $b$  en  $\bar{D}$ . Por definición de  $\bar{D}$  la única flecha en  $F_{\bar{D}}[x_i, x_{i+1}]$  tiene color  $b$  o color  $g$ . Por lo que, existen una flecha en  $F_{\bar{D}}[x_i, x_{i+1}]$  y una flecha en  $F_{\bar{D}}[x_{i+1}, x_{i+2}]$  tales que ambas tienen el mismo color en  $\bar{D}$ .
- Si  $(x_i, x_{i+1})$  tiene color  $b$  o color  $g$  y  $(x_{i+1}, x_{i+2})$  tiene color  $g$  o color  $b$  en  $\bar{D}$ , entonces la única flecha en  $F_{\bar{D}}[x_i, x_{i+1}]$  y la única flecha en  $F_{\bar{D}}[x_{i+1}, x_{i+2}]$  tienen el mismo color en  $\bar{D}$  o la flecha de  $x_i$  a  $x_{i+1}$  tiene color  $g$  y la flecha de  $x_{i+1}$  a  $x_{i+2}$  tiene color  $b$ , en ambos casos se implica una flecha en  $F_1$ .

Por lo tanto,  $W$  es una  $\vec{P}_2$ -trayectoria dinámica en  $\bar{D}$ .

Sea  $\bar{W} = (x_0, \dots, x_n)$  una  $\vec{P}_2$ -trayectoria dinámica en  $\bar{D}$ . Demostraremos que  $\bar{W}$  es  $F_1$ -trayectoria en  $D$ . Si para todo par de vértices consecutivos  $x_i$  y  $x_{i+1}$  en  $\bar{W}$  existe a lo más una flecha de  $x_i$  a  $x_{i+1}$  en  $D$ , entonces  $\bar{W}$  es una  $F_1$ -trayectoria monocromática con color  $b$  o color  $g$  en  $D$  o  $\bar{W}$  es una  $F_1$ -trayectoria con un único cambio de color, de  $g$  a  $b$ , en  $D$ . Se sigue que  $\bar{W}$  es una  $F_1$ -trayectoria en  $D$ . En otro caso, existe  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  tal que  $|F_{\bar{D}}[x_i, x_{i+1}]| = 2$ . Por construcción de  $\bar{D}$  para cada  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  con  $|F_{\bar{D}}[x_i, x_{i+1}]| = 2$ , existe  $e_{x_i x_{i+1}} \in F(D)$  con color  $r$ . Como  $r$  es un vértice universal en  $F_1$ , entonces  $\bar{W}$  es una  $F_1$ -trayectoria de  $x$  a  $y$  en  $D$ .

Podemos concluir que  $D$  tiene núcleo por  $F_1$ -trayectorias si y sólo si  $\bar{D}$  tiene núcleo por  $\vec{P}_2$ -trayectorias dinámicas.

Si  $\vec{P}_2 \in \tilde{\mathcal{D}}_3$ , entonces toda digráfica  $\vec{P}_2$ -coloreada tiene núcleo por  $\vec{P}_2$ -trayectorias dinámicas, entonces  $\bar{D}$  tiene núcleo por  $\vec{P}_2$ -trayectorias dinámicas. Implicando que  $D$  tiene núcleo por  $F_1$ -trayectorias. Por el teorema 7.2.1 se tiene que  $F_1 \in \tilde{\mathcal{B}}_3$ . □

Dado que la pertenencia de  $F_1$  a  $\tilde{\mathcal{B}}_3$  es un problema abierto, por el teorema 9.1.2 la pertenencia de  $\vec{P}_2$  a  $\tilde{\mathcal{D}}_3$  también es un problema abierto. Observemos que el teorema 9.1.2 también es cierto si hablamos de  $F_1$ -camino y  $\vec{P}_2$ -camino dinámico. No obstante, en [1], Arpin y Linek probaron que  $F_1 \in \mathcal{B}_3$ , luego,  $\vec{P}_2 \in \mathcal{D}_3$ .

Como ya hemos mencionado, hay 16 patrones reflexivos no isomorfos de orden 3, véase la figura 9.4. Analicemos cuales de ellos están, o no, en  $\tilde{\mathcal{D}}_3$ .

Por el teorema 9.1.1 tenemos que las digráficas  $\overset{\leftrightarrow}{K}_2 + \overset{\leftrightarrow}{K}_1$ ,  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1 \bullet \overset{\leftrightarrow}{K}_1$ ,  $\overset{\leftrightarrow}{P}_2 + \overset{\leftrightarrow}{K}_1$ ,  $\overset{\leftrightarrow}{K}_1 \bullet 2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$ ,  $3\overset{\leftrightarrow}{K}_1$ ,  $\vec{P}_3$ ,  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ ,  $F_2$  y  $F_3$  no pertenecen a  $\tilde{\mathcal{D}}_3$ .

Recordemos que si  $D$  es una digráfica, entonces  $D$  tiene un núcleo por  $H$ -trayectorias si y sólo si  $D$  tiene un núcleo por  $H$ -trayectorias dinámicas. Sea  $\mathcal{H} = \{T_3, F_4, C_3\}$ , notemos que ninguno de los elementos de  $\mathcal{H}$  es un patrón pancromático por trayectorias, más aún, todos cumplen las hipótesis del lema 7.0.1, este lema muestra cómo construir una digráfica  $H$ -coloreada  $D$  sin núcleo por  $H$ -trayectorias, con  $H \in \mathcal{H}$ . Por lo tanto,  $H \notin \tilde{\mathcal{D}}_3$ , para toda  $H \in \mathcal{H}$ .

Por otro lado,  $\overset{\leftrightarrow}{K}_1 \bullet \overset{\leftrightarrow}{K}_2$  y  $\overset{\leftrightarrow}{K}_2 \bullet \overset{\leftrightarrow}{K}_1$  se pueden contraer a  $\vec{P}_2$ . Por el lema 9.0.2 se tiene que  $\overset{\leftrightarrow}{K}_1 \bullet \overset{\leftrightarrow}{K}_2$  y  $\overset{\leftrightarrow}{K}_2 \bullet \overset{\leftrightarrow}{K}_1$  pertenecen a  $\tilde{\mathcal{D}}_3$  si y sólo si  $\vec{P}_2 \in \tilde{\mathcal{D}}_3$ . Como ya hemos mencionado,  $\overset{\leftrightarrow}{K}_3 \in \tilde{\mathcal{D}}_3$ .

Hemos tratado todos los patrones reflexivos con tres vértices, excepto por  $F_1$ . Probaremos un resultado similar al lema 9.1.1 y al teorema 9.1.2.

Sea  $D$  una multidigráfica  $F_1$ -coloreada. Denotamos por  $\tilde{D}$  la digráfica  $F_1$ -coloreada obtenida a partir de  $D$  por el siguiente procedimiento. Para cada par de vértices  $u$  y  $v$  en  $D$  tales que hay al menos dos flechas de  $u$  a  $v$ , reemplazamos  $F_D[u, v]$  por una única flecha  $e_{uv}$  de color  $r$ .

**Lema 9.1.4.** *Para cada  $x, y \in V(D) = V(\tilde{D})$  existe una  $F_1$ -trayectoria dinámica de  $x$  a  $y$  en  $D$  si y sólo si hay una  $F_1$ -trayectoria de  $x$  a  $y$  en  $\tilde{D}$ .*

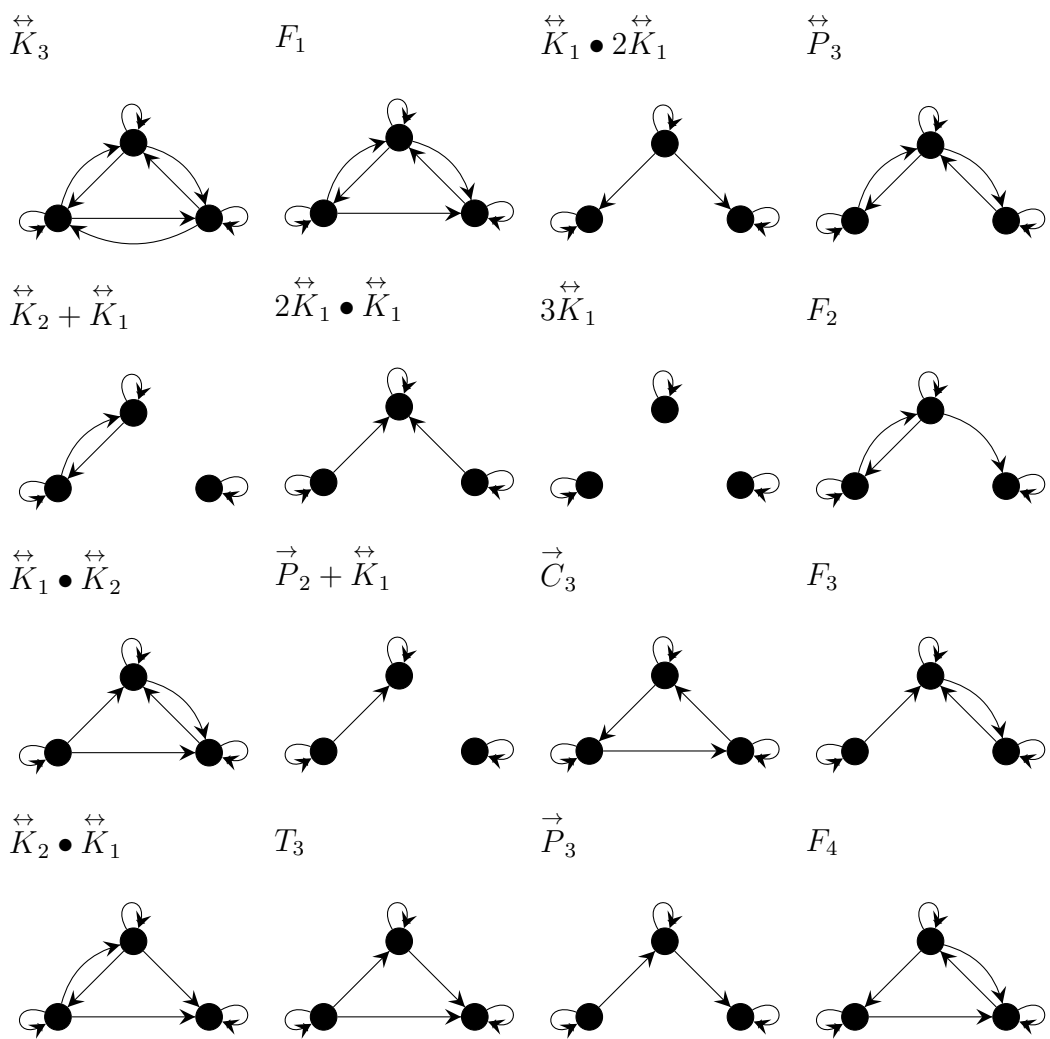


Figura 9.4: Patrones reflexivos no isomorfos de orden 3.



*Demostración.* Sea  $W = (x_0, \dots, x_n)$  una  $F_1$ -trayectoria dinámica en  $D$ . Demostraremos que  $W$  es  $F_1$ -trayectoria en  $\tilde{D}$ . Si para todo par de vértices consecutivos  $x_i$  y  $x_{i+1}$  en  $W$  existe a lo más una flecha de  $x_i$  a  $x_{i+1}$ , entonces  $W$  es una  $F_1$ -trayectoria en  $\tilde{D}$ . En otro caso, existe  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  tal que  $|F_D[x_i, x_{i+1}]| \geq 2$ . Por construcción de  $\tilde{D}$  para cada  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  con  $|F_D[x_i, x_{i+1}]| \geq 2$ , existe  $e_{x_i x_{i+1}} \in F(\tilde{D})$  con color  $r$ . Como  $r$  es un vértice universal en  $F_1$ , entonces  $W$  es una  $F_1$ -trayectoria de  $x$  a  $y$  en  $\tilde{D}$ .

Sea  $\tilde{W} = (x_0, \dots, x_n)$  una  $F_1$ -trayectoria en  $\tilde{D}$ . Probaremos que  $\tilde{W}$  es una  $F_1$ -trayectoria dinámica en  $D$ . Sea  $i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ , consideremos  $(x_i, x_{i+1})$  y  $(x_{i+1}, x_{i+2})$ . Tenemos 4 casos.

- Si  $|F_D[x_i, x_{i+1}]| = 1$  y  $|F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]| = 1$ , entonces ambas flechas siguen presentes en  $D$ , por lo que sus colores son una flecha en  $F_1$ .
- Si  $|F_D[x_i, x_{i+1}]| \geq 2$  y  $|F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]| = 1$ , entonces existen  $f_i, f'_i \in F_D[x_i, x_{i+1}]$  tales que al menos una de las dos tiene color  $r$  o color  $g$ . Notemos que  $V(F_1) = N_{F_1}^+(r) = N_{F_1}^+(g)$ , por lo que el color de dicha flecha con el color de la única flecha en  $F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]$  forman una flecha en  $F_1$ .
- Si  $|F_D[x_i, x_{i+1}]| = 1$  y  $|F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]| \geq 2$ , entonces existen  $f_{i+1}, f'_{i+1} \in F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]$  tales que al menos una de las dos tiene color  $r$  o color  $b$ . Notemos que  $V(F_1) = N_{F_1}^-(r) = N_{F_1}^-(b)$ , por lo que el color de dicha flecha con el color de la única flecha en  $F_D[x_i, x_{i+1}]$  forman una flecha en  $F_1$ .
- Si  $|F_D[x_i, x_{i+1}]| \geq 2$  y  $|F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]| \geq 2$ , entonces existen  $f_i, f'_i \in F_D[x_i, x_{i+1}]$  tales que al menos una de las dos tiene color  $r$  o color  $g$ , y existen  $f_{i+1}, f'_{i+1} \in F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]$  tales que al menos una de las dos tiene color  $r$  o color  $b$ . Notemos que  $V(F_1) = N_{F_1}^+(r) = N_{F_1}^+(g)$  y  $V(F_1) = N_{F_1}^-(r) = N_{F_1}^-(b)$ , por lo que el color de la flecha en  $F_D[x_i, x_{i+1}]$ , con color  $r$  o color  $g$ , con el color de la flecha en  $F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]$ , con color  $r$  o color  $b$ , forman una flecha en  $F_1$ .

Por lo tanto,  $\tilde{W}$  es una  $F_1$ -trayectoria dinámica en  $D$ . □

**Corolario 9.1.1.**  $F_1 \in \tilde{\mathcal{D}}_3$  si y sólo si  $F_1 \in \tilde{\mathcal{B}}_3$

*Demostración.* Notemos que el teorema 7.2.1, garantiza que si toda digráfica  $F_1$ -coloreada tiene núcleo por  $F_1$ -trayectorias, entonces  $F_1 \in \tilde{\mathcal{B}}_3$ . Como toda

digráfica es una multidigráfica, y en una digráfica  $F_1$ -coloreada los núcleos por  $F_1$ -trayectorias dinámicas son los núcleos por  $F_1$ -trayectorias, se sigue que si  $F_1 \in \tilde{\mathcal{D}}_3$ , entonces  $F_1 \in \tilde{\mathcal{B}}_3$ .

Supongamos que  $F_1 \in \tilde{\mathcal{B}}_3$ . Sea  $D$  una multidigráfica  $F_1$ -coloreada y  $\tilde{D}$  la digráfica construida como en el lema 9.1.4, reemplazando las flechas paralelas entre dos vértices por una única flecha con color  $r$ . Como  $F_1 \in \tilde{\mathcal{B}}_3$ , entonces  $\tilde{D}$  tiene núcleo por  $F_1$ -trayectorias, más aún, por el lema 9.1.4, se sigue que  $D$  tiene núcleo por  $F_1$ -trayectorias dinámicas. Por lo tanto,  $F_1 \in \tilde{\mathcal{D}}_3$ .  $\square$

Del corolario anterior y del teorema 9.1.2 podemos afirmar que  $\vec{P}_2 \in \tilde{\mathcal{D}}_3$  si y solo si  $F_1 \in \tilde{\mathcal{D}}_3$ .

Ahora, analicemos cuáles patrones reflexivos de orden tres pertenecen, o no, a  $\mathcal{D}_3$ , véase la figura 9.4.

Como ya hemos dicho,  $\overleftrightarrow{K}_3$  es un patrón pancromático por caminos dinámicos. Notemos que  $\overleftrightarrow{K}_2 \bullet \overleftrightarrow{K}_1$  y  $\overleftrightarrow{K}_1 \bullet \overleftrightarrow{K}_2$  se pueden contraer a  $\vec{P}_2$ , que es un patrón pancromático por caminos dinámicos, por lo que  $\overleftrightarrow{K}_2 \bullet \overleftrightarrow{K}_1$  y  $\overleftrightarrow{K}_1 \bullet \overleftrightarrow{K}_2$  también lo son. Por otro lado, notemos que como  $F_1$  es un patrón pancromático por caminos y, tanto el lema 9.1.4, como el corolario 9.1.1 son válidos para  $F_1$ -camino y  $F_1$ -camino dinámico, se sigue que  $F_1$  es un patrón pancromático por caminos dinámicos.

Recordemos que si  $D$  es una digráfica, entonces  $D$  tiene un núcleo por  $H$ -camino si y sólo si  $D$  tiene un núcleo por  $H$ -camino dinámico. Sea  $\mathcal{H}_C = \{2\overleftrightarrow{K}_1 \bullet \overleftrightarrow{K}_1, \vec{P}_2 + \overleftrightarrow{K}_1, T_3, 3\overleftrightarrow{K}_1, C_3, \vec{P}_3, F_3, F_4\}$ , notemos que ninguno de los elementos de  $\mathcal{H}_C$  es un patrón pancromático por caminos, más aún, todos cumplen las hipótesis del lema 5.0.1, este lema muestra cómo construir una digráfica  $H$ -coloreada  $D$  sin núcleo por  $H$ -camino, con  $H \in \mathcal{H}_C$ . Por lo tanto,  $H \notin \mathcal{D}_3$ , para toda  $H \in \mathcal{H}_C$ . Más aún, en [1], Arpin y Linnek exhibieron una digráfica  $\overleftrightarrow{K}_1 \bullet 2\overleftrightarrow{K}_1$ -coloreada que no tiene núcleo por  $\overleftrightarrow{K}_1 \bullet 2\overleftrightarrow{K}_1$ -camino, dicho ejemplo muestra que  $\overleftrightarrow{K}_1 \bullet 2\overleftrightarrow{K}_1$  no es un patrón pancromático por caminos dinámicos.

Con respecto a  $\overleftrightarrow{P}_3$  consideremos el siguiente teorema.

**Teorema 9.1.3.**  $\overleftrightarrow{P}_3$  es un patrón pancromático por caminos dinámicos si solo si  $\overleftrightarrow{P}_3$  es un patrón pancromático por caminos.

*Demostración.* Primero, probaremos que para cada multidigráfica

$\leftrightarrow$  $\tilde{P}_3$ -coloreada  $D$  existe un digráfica  $\leftrightarrow$  $\tilde{P}_3$ -coloreada  $\tilde{D}$  tal que  $D$  tiene núcleo por  $\leftrightarrow$  $\tilde{P}_3$ -caminos dinámicos si y solo si  $\tilde{D}$  tiene núcleo por  $\leftrightarrow$  $\tilde{P}_3$ -caminos. Sea  $\leftrightarrow$  $\tilde{P}_3$  como en la figura 9.1.

Sea  $D$  una multidigráfica  $\leftrightarrow$  $\tilde{P}_3$ -coloreada. Denotamos por  $\tilde{D}$  la digráfica  $\leftrightarrow$  $\tilde{P}_3$ -coloreada obtenida desde  $D$ , tras las siguientes modificaciones. Para cada par de vértices  $u$  y  $v$  en  $V(D)$  con  $|F_D[u, v]| \geq 2$ , reemplazamos  $F_D[u, v]$  por una única flecha de  $u$  a  $v$ , digamos  $e_{uv}$ , con color  $r$ .

Probaremos que todo  $\leftrightarrow$  $\tilde{P}_3$ -camino dinámico en  $D$  es un  $\leftrightarrow$  $\tilde{P}_3$ -camino en  $\tilde{D}$ . Sea  $W = (x = x_0, \dots, x_n = y)$  un  $\leftrightarrow$  $\tilde{P}_3$ -camino en  $D$ .

Notemos que si  $|F_D[x_i, x_{i+1}]| = 1$  para cada  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , entonces  $W$  es  $\leftrightarrow$  $\tilde{P}_3$ -camino dinámico sin cambios de flecha, esto es,  $W$  es un  $\leftrightarrow$  $\tilde{P}_3$ -camino en  $\tilde{D}$ . Ahora supongamos que existe al menos una  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  tal que  $|F_D[x_i, x_{i+1}]| \geq 2$ , entonces la única flecha en  $F_{\tilde{D}}[x_i, x_{i+1}]$  tiene color  $r$ . Como  $r$  es un vértice universal en  $\leftrightarrow$  $\tilde{P}_3$ , entonces  $(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$  es un  $\leftrightarrow$  $\tilde{P}_3$ -camino en  $\tilde{D}$ . Por lo que,  $W$  es un  $\leftrightarrow$  $\tilde{P}_3$ -camino en  $\tilde{D}$ .

Recíprocamente, sea  $\tilde{W} = (x = x_0, \dots, x_n = y)$  un  $\leftrightarrow$  $\tilde{P}_3$ -camino en  $\tilde{D}$ . Demostraremos que  $\tilde{W}$  es un  $\leftrightarrow$  $\tilde{P}_3$ -camino dinámico en  $D$ . Sea  $i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ , consideremos las flechas  $(x_i, x_{i+1})$  y  $(x_{i+1}, x_{i+2})$  en  $\tilde{D}$ . Tenemos casos.

- Si  $|F_D[x_i, x_{i+1}]| = 1$  y  $|F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]| = 1$ , entonces las flechas  $(x_i, x_{i+1})$  y  $(x_{i+1}, x_{i+2})$  están en  $\tilde{D}$  y en  $D$ , por lo que sus colores forman una flecha en  $\leftrightarrow$  $\tilde{P}_3$ .
- Si  $|F_D[x_i, x_{i+1}]| \geq 2$  y  $|F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]| = 1$ , entonces existen  $f_i, f'_i \in F_D[x_i, x_{i+1}]$  tales que al menos una de ellas tiene color  $r$  o tiene el mismo color de la única flecha en  $F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]$ . Como  $r$  es un vértice universal en  $\leftrightarrow$  $\tilde{P}_3$  y  $\leftrightarrow$  $\tilde{P}_3$  es reflexiva, se sigue que el color de una de estas flechas con el color de la única flecha en  $F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]$  forman una flecha en  $\leftrightarrow$  $\tilde{P}_3$ .
- Si  $|F_D[x_i, x_{i+1}]| = 1$  y  $|F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]| \geq 2$ , entonces existen  $f_{i+1}, f'_{i+1} \in F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]$  tales que al menos una de ellas tiene  $r$  o tiene el mismo color que la única flecha en  $F_D[x_i, x_{i+1}]$ . Como  $r$  es un

vértice universal  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$  y  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$  es reflexiva, se sigue que el color de una de estas flechas con el color de la única flecha en  $F_D[x_i, x_{i+1}]$  forman una flecha en  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ .

- Si  $|F_D[x_i, x_{i+1}]| \geq 2$  y  $|F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]| \geq 2$ , entonces existen  $f_i, f'_i \in F_D[x_i, x_{i+1}]$  y  $f_{i+1}, f'_{i+1} \in F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]$ . Como  $r$  es un vértice universal en  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ , si  $f_i$  o  $f'_i$  tiene color  $r$ , entonces el color de esta flecha con el color de cualquier otra flecha en  $F_D[x_{i+1}, x_{i+2}]$  forman una flecha en  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ . Análogamente, si  $f_{i+1}$  o  $f'_{i+1}$  tiene color  $r$ , entonces el color de esta flecha con el color de cualquier otra flecha en  $F_D[x_i, x_{i+1}]$  forman una flecha en  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ . Por lo que, supongamos que ninguna de las flechas  $f_i, f'_i, f_{i+1}$  o  $f'_{i+1}$  tiene color  $r$ . Se sigue que,  $f_i$  o  $f'_i$  tiene color  $b$  y  $f_{i+1}$  o  $f'_{i+1}$  tiene color  $b$ ; estos colores forman una flecha en  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ .

Por lo tanto,  $\tilde{W}$  es un  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -camino dinámico en  $D$ .

Por lo anterior, podemos concluir que  $D$  tiene núcleo por  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -caminos dinámicos si y solo si  $\tilde{D}$  tiene núcleo por  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -caminos.

Supongamos que  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3 \in \mathcal{B}_3$ , se sigue que cada digráfica  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -coloreada tiene núcleo por  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -caminos. Sea  $D$  un multidigráfica  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -coloreada. Consideremos  $\tilde{D}$ , la digráfica  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -coloreada construida desde  $D$  como se describe arriba. Se sigue que,  $\tilde{D}$  tiene núcleo por  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -caminos, y por consecuencia,  $D$  tiene núcleo por  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -caminos dinámicos. Por lo tanto,  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3 \in \mathcal{D}_3$ .

Recíprocamente, si  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3 \in \mathcal{D}_3$ , entonces toda multidigráfica  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -coloreada tiene núcleo por  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -caminos dinámicos, en particular, toda digráfica  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -coloreada tiene núcleo por  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -caminos dinámicos. Como en cada digráfica  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -coloreada un núcleo por  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -caminos dinámicos es un núcleo por  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -caminos. Se sigue que toda digráfica  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -coloreada tiene núcleo por  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ -caminos. Por el lema 5.2.1, podemos concluir que  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3 \in \mathcal{B}_3$ .  $\square$

Del teorema anterior, tenemos que  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3 \in \mathcal{D}_3$  si y solo si  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3 \in \mathcal{B}_3$ , y esto sucede, como ya hemos dicho, si y solo si  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1 \in \mathcal{D}_3$ . Por lo tanto,  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3 \in \mathcal{D}_3$  si y solo si  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1 \in \mathcal{D}_3$ . Más aún, notemos que  $\overset{\leftrightarrow}{K}_2 + \overset{\leftrightarrow}{K}_1$  se puede contraer

a  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$ , por lo que  $\overset{\leftrightarrow}{K}_2 + \overset{\leftrightarrow}{K}_1 \in \mathcal{D}_3$  si y solo si  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1 \in \mathcal{D}_3$ . Sin embargo, determinar si cualquiera de los patrones mencionados, en este párrafo, son patrones pancromáticos por caminos dinámicos, o no, es un problema abierto.

La pertenencia del patrón  $F_2$  a la familia  $\mathcal{D}_3$ , lo dejamos como un problema abierto.

Toda la información anterior, la resumimos en la tabla 9.1, en la que  $\checkmark$  significa que el patrón pertenece a la familia,  $\times$  significa que el patrón no pertenece a la familia y P.A. significa que es su pertenencia a la familia es un problema abierto.

## 9.2. Estructura y problemas abiertos de los Patrones pancromáticos dinámicos

Con la información de las secciones anteriores es posible hablar de la estructura de los patrones pancromáticos por trayectorias dinámicas, en términos de subdigráficas prohibidas.

Sea  $\tilde{\mathcal{F}}_D$  la familia de digráficas que contiene como elementos a  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$ ,  $\overset{\leftrightarrow}{K}_2 + \overset{\leftrightarrow}{K}_1$ ,  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1 \bullet \overset{\leftrightarrow}{K}_1$ ,  $\overset{\rightarrow}{P}_2 + \overset{\leftrightarrow}{K}_1$ ,  $T_3$ ,  $\overset{\leftrightarrow}{K}_1 \bullet 2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$ ,  $3\overset{\leftrightarrow}{K}_1$ ,  $\overset{\rightarrow}{C}_3$ ,  $\overset{\rightarrow}{P}_3$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $F_4$  y  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$ , véase la figura 9.4. El siguiente lema describe la estructura de las digráficas  $\tilde{\mathcal{F}}_D$ -libres. La prueba del lema está en [12] y se debe a Galeana Sánchez y Hernández Cruz.

**Lema 9.2.1.** [12] *Una digráfica reflexiva  $H$  es  $\tilde{\mathcal{F}}_D$ -libre si y sólo si  $V(H)$  admite una partición  $(V_1, V_2)$  tal que  $H[V_i]$  es una digráfica reflexiva completa, con  $i \in \{1, 2\}$ , y todo vértice de  $V_1$  es adyacente hacia a todo vértice de  $V_2$  y algunos vértices de  $V_2$  pueden ser adyacentes hacia algunos vértices de  $V_1$ .*

El lema anterior nos dice que las digráficas reflexivas que son  $\mathcal{F}_D$ -libres son únicamente las digráficas bicompletas.

Por ahora, a excepción de los patrones  $\overset{\rightarrow}{P}_2$ ,  $\overset{\leftrightarrow}{K}_1 \bullet \overset{\leftrightarrow}{K}_2$ ,  $\overset{\leftrightarrow}{K}_2 \bullet \overset{\leftrightarrow}{K}_1$  y  $F_1$ , tenemos una clasificación completa de los patrones de orden menor a 3; más aún, determinar si alguno es un patrón pancromático por trayectorias dinámicas determina la pertenencia, o no, de los otros patrones. Las digráficas que no están en  $\tilde{\mathcal{F}}_D$  son patrones pancromáticos por trayectorias dinámicas, y las digráficas en  $\tilde{\mathcal{F}}_D$  no lo son. Aunque no sabemos si  $\overset{\rightarrow}{P}_2$  es un patrón pancromático por trayectorias, tenemos suficiente información para describir

Patrón	$\tilde{\mathcal{D}}_3$	$\mathcal{D}_3$
$\overleftrightarrow{K}_1$	✓	✓
$\overleftrightarrow{K}_2$	✓	✓
$\overleftrightarrow{2K}_1$	×	P.A.
$\overrightarrow{P}_2$	P.A.	✓
$\overleftrightarrow{K}_3$	✓	✓
$\overleftrightarrow{K}_2 + \overleftrightarrow{K}_1$	×	P.A.
$\overleftrightarrow{K}_1 \bullet \overleftrightarrow{K}_2$	P.A.	✓
$\overleftrightarrow{K}_2 \bullet \overleftrightarrow{K}_1$	P.A.	✓
$\overleftrightarrow{2K}_1 \bullet \overleftrightarrow{K}_1$	×	×
$\overrightarrow{P}_2 + \overleftrightarrow{K}_1$	×	×
$\overline{T}_3$	×	×
$\overleftrightarrow{K}_1 \bullet \overleftrightarrow{2K}_1$	×	×
$\overleftrightarrow{3K}_1$	×	×
$F_1$	P.A.	✓
$F_2$	×	P.A.
$F_3$	×	×
$F_4$	×	×
$\overrightarrow{C}_3$	×	×
$\overrightarrow{P}_3$	×	×
$\overleftrightarrow{P}_3$	×	P.A.

**Tabla 9.1:** Tabla que resume la pertenencia a las familias  $\tilde{\mathcal{D}}_3$  y  $\mathcal{D}_3$

completamente lo que sucede si  $\vec{P}_2 \notin \tilde{\mathcal{D}}_3$ , y proporcionar una estructura definida de los patrones pancromáticos por trayectorias dinámicas si ocurre lo contrario.

**Teorema 9.2.1.** *Sea  $H$  un patrón reflexivo. Si  $\vec{P}_2 \notin \tilde{\mathcal{D}}_3$ , entonces  $H \in \tilde{\mathcal{D}}_3$  si y sólo si  $H$  es una digráfica completa.*

*Demostración.* Sea  $H \in \tilde{\mathcal{D}}_3$ . Por el teorema 9.1.1, sabemos que  $H$  es una digráfica semicompleta. Más aún, como  $\vec{P}_2$  no es un patrón pancromático por trayectorias dinámicas y por el lema 9.0.1.2, se tiene que entre cualquier par de vértices existe una flecha simétrica entre ellos. Es decir,  $H$  es completa.

Para la implicación recíproca, basta notar que  $\overset{\leftrightarrow}{K}_n$  se puede contraer a  $\overset{\leftrightarrow}{K}_1$ , que es un patrón pancromático por trayectorias dinámicas. Por el lema 9.0.2, se sigue que  $\overset{\leftrightarrow}{K}_n \in \tilde{\mathcal{D}}_3$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Teorema 9.2.2.** *Sea  $H$  un patrón reflexivo y suponga que  $\vec{P}_2 \in \tilde{\mathcal{D}}_3$ . Si  $H \in \tilde{\mathcal{D}}_3$ , entonces  $H$  es una digráfica bicompleta.*

*Demostración.* Sea  $H$  un patrón pancromático por trayectorias dinámicas. Como ya hemos observado, los elementos de  $\tilde{\mathcal{F}}_D$  no son patrones pancromáticos por trayectorias dinámicas. Por el lema 9.0.1.2,  $H$  no contiene a ningún elemento de  $\tilde{\mathcal{F}}_D$  como subdigráfica inducida, es decir,  $\tilde{\mathcal{F}}_D$ -libre. Por el lema 9.2.1, se sigue que  $H$  es una digráfica bicompleta.  $\square$

A continuación, proponemos dos problemas con respecto a los patrones pancromáticos por trayectorias dinámicas.

**Problema 9.2.1.** *Determinar si  $\vec{P}_2$  es un patrón pancromático por trayectorias dinámicas.*

**Problema 9.2.2.** *Encontrar una multidigráfica  $\overset{\leftrightarrow}{2K}_1$ -coloreada sin núcleo por  $\overset{\leftrightarrow}{2K}_1$ -trayectorias dinámicas.*

Si la respuesta al problema 9.2.1 es negativa, esto resuelve la caracterización de los patrones pancromáticos por trayectorias dinámicas. Una respuesta positiva lleva a preguntar si hay otras obstrucciones mínimas, para que una digráfica sea un patrón pancromático por trayectorias dinámicas. Cualquier obstrucción mínima de este tipo debe ser  $\tilde{\mathcal{F}}_D$ -libre y, por lo tanto,

tiene que ser una digráfica bicompleta; si no existe tal obstrucción, la implicación recíproca al teorema 9.2.2 es verdadera, lo que da como resultado una caracterización.

Respecto al problema 9.2.2, recordemos que las pruebas del lema 9.1.1 y del teorema 9.1.1 no son constructivas, por lo tanto, no se tiene un ejemplo de una multidigráfica  $\overset{\leftrightarrow}{2K_1}$ -coloreada con la propiedad deseada.

Análogamente, con la información de las secciones anteriores es posible hablar de la estructura de los patrones pancromáticos por caminos dinámicos, en términos de subdigráficas prohibidas. Dicha estructura depende de la pertenencia o no de  $\overset{\leftrightarrow}{2K_1}$  a  $\mathcal{D}_3$ .

**Teorema 9.2.3.** *Sea  $H$  un patrón y supongamos que  $\overset{\leftrightarrow}{2K_1} \in \mathcal{D}_3$ . Si  $H \in \mathcal{D}_3$ , entonces  $H$  se puede contraer a  $\overset{\leftrightarrow}{2K_1}$  o  $H$  es una digráfica cuasibicompleta.*

*Demostración.* Observemos que el teorema 9.2.3 tiene la misma conclusión que el teorema 5.3.1, más aún, la demostración del teorema 5.3.1 únicamente está basado en que  $\mathcal{B}_3$  es cerrado bajo tomar subdigráficas inducidas y que  $\overset{\leftrightarrow}{2K_1} \bullet \overset{\leftrightarrow}{K_1}$ ,  $\overset{\rightarrow}{P_2} + \overset{\leftrightarrow}{K_1}$ ,  $T_3$ ,  $\overset{\leftrightarrow}{K_1} \bullet \overset{\leftrightarrow}{2K_1}$ ,  $\overset{\leftrightarrow}{3K_1}$ ,  $\overset{\rightarrow}{C_3}$ ,  $\overset{\rightarrow}{P_3}$ ,  $F_3$  y  $F_4$  no son subdigráficas inducidas de ningún patrón pancromático por caminos. Notemos que, como  $\mathcal{D}_3$  es cerrado bajo tomar subdigráficas inducidas, y como hipótesis, se tiene que  $\overset{\leftrightarrow}{2K_1}$  pertenece a  $\mathcal{D}_3$ , se sigue que  $\overset{\leftrightarrow}{2K_1} \bullet \overset{\leftrightarrow}{K_1}$ ,  $\overset{\rightarrow}{P_2} + \overset{\leftrightarrow}{K_1}$ ,  $T_3$ ,  $\overset{\leftrightarrow}{K_1} \bullet \overset{\leftrightarrow}{2K_1}$ ,  $\overset{\leftrightarrow}{3K_1}$ ,  $\overset{\rightarrow}{C_3}$ ,  $\overset{\rightarrow}{P_3}$ ,  $F_3$  y  $F_4$  no son subdigráficas inducidas de ningún patrón pancromático por caminos dinámicos. Por lo tanto, la demostración del teorema 5.3.1 es válida para los patrones pancromáticos por caminos dinámicos.  $\square$

**Teorema 9.2.4.** *Sea  $H$  un patrón y suponga que  $\overset{\leftrightarrow}{2K_1} \notin \mathcal{D}_3$ . Si  $H \in \mathcal{D}_3$ , entonces  $V(H)$  admite una partición  $(V_1, V_2)$  tales que  $V_i$  induce una digráfica reflexiva completa, con  $i \in \{1, 2\}$ , cada vértice en  $V_1$  es adyacente hacia cada vértice en  $V_2$  y los vértices de  $V_2$  pueden ser adyacentes hacia algunos vértices en  $V_1$ .*

*Demostración.* Observemos que si  $\overset{\leftrightarrow}{2K_1} \notin \mathcal{D}_3$ , entonces los patrones pancromáticos por caminos dinámicos y los patrones pancromáticos por trayectorias dinámicas tienen las mismas subdigráficas inducidas prohibidas con a lo más tres vértices. Como las demostraciones del lema 9.2.1 y del teorema 9.2.2 están basadas, únicamente, en las subdigráficas inducidas prohibidas con a lo más tres vértices. Se sigue el resultado deseado.  $\square$



El teorema 9.2.3 establece que si  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1 \in \mathcal{D}_3$ , entonces todos los patrones pancromáticos por caminos dinámicos pueden contraerse a  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$  o son digráficas cuasibicompletas, pero como en el teorema 5.3.1, notemos que  $\overset{\leftrightarrow}{K}_1 \bullet \overset{\leftrightarrow}{2K}_1$  es una digráfica cuasibicompleta, pero no es un patrón pancromático por caminos dinámicos. Por lo tanto, la implicación recíproca del teorema 9.2.3 es falsa.

Para finalizar el capítulo, proponemos los siguientes problemas abiertos con respecto a los patrones pancromáticos por caminos dinámicos.

**Problema 9.2.3.** *Determinar si  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$ ,  $\overset{\leftrightarrow}{K}_2 + \overset{\leftrightarrow}{K}_1$  y  $\overset{\leftrightarrow}{P}_3$  son patrones pancromáticos por caminos dinámicos.*

**Problema 9.2.4.** *Determinar si  $F_2$  es un patrón pancromático por caminos dinámicos.*

Determinar si algún patrón en el problema 9.2.3 pertenece a  $\mathcal{D}_3$  resuelve todo el problema. Una respuesta negativa al problema 9.2.3 implica que todos los patrones pancromáticos por caminos dinámicos son digráficas semicompletas, en particular, son digráficas bicompletas, además, el problema 9.2.4 sería falso. Por lo tanto, podemos preguntarnos si hay otras obstrucciones mínimas para que una digráfica sea un patrón pancromático por caminos dinámicos. Cualquiera de estas obstrucciones mínimas deben de ser digráficas bicompletas; si no existen tales obstrucciones, la implicación recíproca al teorema 9.2.4 es verdadera, dando como resultado una caracterización de los patrones pancromáticos por caminos dinámicos. Si el problema 9.2.3 tiene una respuesta positiva, entonces todos los patrones pancromáticos por caminos dinámicos son digráficas cuasibicompletas o pueden contraerse a  $2\overset{\leftrightarrow}{K}_1$ , como en el otro caso, podemos preguntarnos si hay otras obstrucciones mínimas para que una digráfica sea un patrón pancromático por caminos dinámicos. Notemos que cada obstrucción mínima es una digráfica cuasibicompleta, por ejemplo, como ya dijimos,  $\overset{\leftrightarrow}{K}_1 \bullet \overset{\leftrightarrow}{2K}_1$  es una obstrucción mínima, aún más, resolver el problema 9.2.4 determina si  $F_2$  es una obstrucción mínima.



# Conclusiones

Este trabajo comienza con un breve recuento de la evolución de los núcleos en digráficas, hasta llegar a los núcleos por  $H$ -caminos. Al empezar este trabajo, ya se sabía que la existencia de un núcleo por  $H$ -caminos en una multidigráfica  $H$ -coloreada, no necesariamente implicaba la existencia de un núcleo por  $H$ -trayectorias en la misma multidigráfica; esto se debe a que, a diferencia de lo que pasa con los caminos y trayectorias en una multidigráfica, no todo  $H$ -camino contiene una  $H$ -trayectoria con los mismos vértices extremos. Analizando las diferencias, entre  $H$ -caminos y  $H$ -trayectorias se exhibieron familias infinitas de multidigráficas que contienen núcleo por  $H$ -caminos y no tienen núcleo por  $H$ -trayectorias, y viceversa. Marcando la diferencia entre estos dos conceptos; sin embargo, por definición, los conceptos son muy cercanos. Por lo que, se probó que los patrones  $H$  para los cuales no importa que multidigráfica ni que  $H$ -coloración se tomen, todo  $H$ -camino contiene una  $H$ -trayectoria con los mismos vértices extremos, son exactamente los patrones transitivos.

Desde que comenzamos este trabajo, se buscó aprovechar las diferencias y similitudes de entre  $H$ -caminos y  $H$ -trayectorias, así como el trabajo previo realizado para las familias  $\mathcal{B}_i$ , para de esta manera definir y tratar de caracterizar a los patrones de las familias  $\tilde{\mathcal{B}}_i$ , basadas en el alcance por  $H$ -trayectorias. Para alcanzar esta meta, estudiamos a fondo, aunque no exclusivamente, a los patrones que pertenecen a  $\mathcal{B}_2$  y  $\mathcal{B}_3$ . Para los cuales ya se tenían caracterizaciones completas. Al estudiar las pruebas presentadas para la caracterización de los patrones pancromáticos por caminos, pudimos notar un error en la demostración del lema principal de la caracterización. Aunque el error no prueba que el resultado es falso, deja abierta la caracterización; además de generar otros problemas abiertos, en particular la pertenencia de dos patrones de orden 3.

Regresando a  $\tilde{\mathcal{B}}_3$ . Aunque desafortunadamente no pudimos caracterizar

a los patrones pancromáticos por trayectorias, demostramos que estos tienen una estructura muy bien definida. En el proceso, tras un exhaustivo análisis del patrón  $F_1$ , notamos que la definición de  $H$ -camino se hace sobre multidigráficas; sin embargo, la propiedad de tener más de una flecha entre dos vértices en la misma dirección, no había sido explotada. De esta manera, surgió la idea de los  $H$ -caminos dinámicos. Después de mostrar que realmente era un concepto distinto, aunque muy cercano a los ya mencionados, nos enfocamos en las familias análogas a las ya definidas pero basadas en el alcance por  $H$ -caminos dinámicos y  $H$ -trayectorias dinámicas. Sin embargo, con este concepto surgen muchas más preguntas, y oportunidades de temas investigación.

Cabe mencionar que, en general, el estudio de las familias  $\mathcal{B}_1$ ,  $\tilde{\mathcal{B}}_1$ ,  $\mathcal{D}_1$  y  $\tilde{\mathcal{D}}_1$  ha sido muy superficial. Por lo que, las aportaciones para estas familias ayudarían mucho para encaminarse a una posible caracterización.

Para finalizar, en este trabajo obtuvimos resultados originales. Los cuales se traducen en avances significativos en las caracterizaciones de los patrones pancromáticos por caminos, por trayectorias, por caminos dinámicos y por trayectorias dinámicas. De la misma manera, a lo largo del trabajo fuimos planteando problemas de interés, para futuros temas de investigación.

# Bibliografía

- [1] Arpin, P. y V. Linek: *Reachability problems in edge-colored digraphs*. Discrete Mathematics, 307(17):2276 – 2289, 2007.
- [2] Bang-Jensen, J. y G. Z. Gutin: *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*. Springer-Verlag London, 2ª edición, 2008.
- [3] Berge, C.: *Graphs*. North-Holland Mathematical Library. North Holland, 1985.
- [4] Bondy, J. A. y U. S. R. Murty: *Graph Theory*, volumen 244 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag London, 2008.
- [5] Bousquet, N., W. Lochet y S. Thomassé: *A proof of the Erdős–Sands–Sauer–Woodrow conjecture*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 137:316 – 319, 2019.
- [6] Chvátal, V.: *On the computational complexity of finding a kernel*. Informe técnico, Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, 1973.
- [7] Corneil, D. G., H. Lerchs y L. Stewart Burlingham: *Complement reducible graphs*. Discrete Applied Mathematics, 3(3):163 – 174, 1981.
- [8] Delgado-Escalante, P. y H. Galeana-Sánchez: *Restricted domination in arc-colored digraphs*. AKCE Int. J. Comb., 1:95–104, 2014.
- [9] Duchet, P.: *Graphes Noyau-Parfaits*. En Hammer, Peter L. (editor): *Combinatorics 79*, volumen 9 de *Annals of Discrete Mathematics*, páginas 93 – 101. Elsevier, 1980.

- [10] Galeana-Sánchez, H.: *On monochromatic paths and monochromatic cycles in edge coloured tournaments*. Discrete Mathematics, 156(1):103 – 112, 1996.
- [11] Galeana-Sánchez, H. y R. Strausz: *On panchromatic patterns*. Discrete Mathematics, 339(10):2536 – 2542, 2016.
- [12] Galeana-Sánchez, H. y C. Hernández-Cruz: *A dichotomy for the kernel by H-walks problem in digraphs*. Journal of Graph Theory, 90(3):213–226, 2019.
- [13] Hahn, G., P. Ille y R. E. Woodrow: *Absorbing sets in arc-coloured tournaments*. Discrete Mathematics, 283(1):93 – 99, 2004.
- [14] Hell, P.: *Graph partitions with prescribed patterns*. European Journal of Combinatorics, 35:335 – 353, 2014.
- [15] Hell, P. y C. Hernández-Cruz: *Minimal digraph obstructions for small matrices*. ArXiv, arXiv:1605.09587, 2016. <https://arxiv.org/abs/1605.09587>.
- [16] Landau, H. G.: *On dominance relations and the structure of animal societies: III The condition for a score structure*. The Bulletin of Mathematical Biophysics, 15(2):143–148, 1953.
- [17] Linek, V. y B. Sands: *A note on paths in edge-coloured tournaments*. Ars Combinatoria, 44:225–228, 1996.
- [18] Minggang, S.: *On monochromatic paths in m-coloured tournaments*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 45(1):108 – 111, 1988.
- [19] Morgenstern, O. y J. Von Neumann: *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1944.
- [20] Reid, K. B.: *Monotone reachability in arc-colored tournaments*. Congr. Numer., 146:131–141, 2000.
- [21] Sánchez López, R.: *H-trayectorias y H-caminos en digráficas H-coloreadas*. Tesis de Doctorado, UNAM, 2013.

- [22] Sands, B., N. Sauer y R. Woodrow: *On monochromatic paths in edge-coloured digraphs*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 33(3):271 – 275, 1982.