



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS DEL MAR Y LIMNOLOGÍA

**ANÁLISIS NO LINEAL Y PERIODICIDAD EN SERIES DE
TIEMPO CLIMÁTICAS**

TESIS

**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTORA EN CIENCIAS
(OCEANOGRAFÍA FÍSICA)**

PRESENTA:

M. EN. C. BERENICE ROJO GARIBALDI

TUTOR PRINCIPAL

**DR. DAVID ALBERTO SALAS DE LEÓN
(INSTITUTO DE CIENCIAS DEL MAR Y LIMNOLOGÍA)**

COMITÉ TUTOR

**DRA. LIGÍA LUCINA PÉREZ CRUZ
(INSTITUTO DE GEOFÍSICA)**

**DR. JAVIER ALDECO RAMÍREZ
(UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA, XOCHIMILCO)**

**DR. ALEXANDER CORREA METRIO
(INSTITUTO DE GEOLOGÍA)**

**DRA. CECILIA ELIZABETH ENRÍQUEZ ORTIZ
(FACULTAD DE CIENCIAS, SISAL)**

CDMX, SEPTIEMBRE, 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



ANÁLISIS NO LINEAL Y PERIODICIDAD EN SERIES DE TIEMPO CLIMÁTICAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:
DOCTORA EN CIENCIAS
(OCEANOGRAFÍA FÍSICA)

PRESENTA:
M. EN. C. BERENICE ROJO GARIBALDI

TUTOR PRINCIPAL:
DR. DAVID ALBERTO SALAS DE LEÓN
(INSTITUTO DE CIENCIAS DEL MAR Y LIMNOLOGÍA)

COMITÉ TUTOR:
DRA. LIGÍA LUCINA PÉREZ CRUZ
(INSTITUTO DE GEOFÍSICA)
DR. JAVIER ALDECO RAMÍREZ
(UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA, XOCHIMILCO)
DR. ALEXANDER CORREA METRIO
(INSTITUTO DE GEOLOGÍA)
DRA. CECILIA ELIZABETH ENRÍQUEZ ORTIZ
(FACULTAD DE CIENCIAS, SISAL)

MÉXICO, CD. MX. SEPTIEMBRE 2020

ANÁLISIS NO LINEAL Y PERIODICIDAD EN SERIES DE TIEMPO CLIMÁTICAS

BERENICE ROJO GARIBALDI

POSGRADO EN CIENCIAS DEL MAR Y LIMNOLOGÍA

Esta tesis esta dedicada a mi “Abue Chuli” que ahora está en un lugar mejor, pero que siempre me dio sólo lo mejor. Te amo.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

2020

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mi tutor de tesis, el Dr. David Alberto Salas de León, quien no sólo fue una guía para mis estudios de posgrado, sino que también fue un amigo y me ayudó a confiar más en mis habilidades como estudiante. Al final si nos cubrió ese manto.

De igual manera quiero agradecer a los Doctores: Javier Aldeco Ramírez, Cecilia Elizabeth Enríquez Ortiz, Alexander Correa Metrio y Ligia Pérez Cruz, quienes me asesoraron en la realización del trabajo y me brindaron parte de sus conocimientos y apoyo en mi crecimiento profesional.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca otorgada para la realización de mis estudios de doctorado.

Al Posgrado de Ciencias del Mar y Limnología, así como todo el personal por su paciencia al resolver mis dudas.

A mis colegas y amigos: Jorge Castro, Marlene Ramírez, Verónica Guerra, María Barba del Refugio, Martín Bonifacio, Azucena Shade y todas aquellas personas cuyo nombre no menciono, pero con su grata compañía y consejos hicieron más llevadera mi estancia en el posgrado.

A mi hermosa madre Yolanda Garibaldi, le doy las infinitas gracias por siempre apoyarme y confiar en mí, por inspirarme a terminar mis metas y tener siempre un consejo para mí. También quiero agradecer a mi hermana Sarahí Juárez Garibaldi por reírse conmigo y de mí cuando las cosas se ponían difíciles, eso me ayudó a mucho a ver las cosas diferente.

Finalmente, quiero agradecer a mi hermosa compañera de vida Ana Alicia Torres Benítez por siempre estar cuando más te necesito, por hacer valer tu palabra cada instante; has sabido enseñarme a ver el lado bueno de las cosas, incluso cuando no veo nada bueno, me ofrecido tu mano, tu tiempo y tus oídos cuando los he necesitado. Tienes toda mi infinita paciencia y admiración. Esto va por la Suprema.

Resumen

Se aplicaron análisis espectrales y no-lineales a series de tiempo de registros de temperatura de alta resolución de tres regiones geográficas: Groenlandia (del Greenland Ice Core Project, {GRIP por sus siglas en inglés}), Antártida (EPICA, Domo C) y del Margen Ibérico. A través del análisis espectral fue posible reconocer, además de los ciclos de Milankovitch, otros de 4000, 5000, 7000, 9000 y 11000 años, los cuales se encontraron tanto en Groenlandia como en la Antártida. Se considera que los estos ciclos son muy importantes, ya que también han sido reconocidos en latitudes medias (Sur de California). Por otra parte, los resultados arrojados por el método de Ondículas, mostraron que el tiempo que transcurre entre fase-fase en Groenlandia y el Margen Ibérico está relacionado con el ciclo de las manchas solares (10, 20 y 60 años) y una señal de forzamiento regional que propicia una amplificación por mil. Asimismo, en estas regiones se observa la parte de desfase-desfase con un valor de 30,000 años, que está asociado con el ciclo de rayos cósmicos (30 años, amplificado por mil). En general, para las tres regiones, el tiempo entre fase o desfase estuvo alrededor de 100,000 a 130,000 años, resaltando la importancia del ciclo de excentricidad de la órbita de la Tierra. El análisis espectral sugiere que la región que dispara la señal de variabilidad climática es la Antártida, que, con base en el análisis no-lineal, es la región con menor nivel de caos, al parecer relacionado a las condiciones oceánicas que prevalecen en el área, que hacen difícil su perturbación debido a su inercia térmica. Sin embargo, a través del análisis de Ondículas, se sugiere que, si esta región se perturbara sería la más dominante de las tres regiones. Las tres regiones mostraron un comportamiento caótico, el Margen Ibérico presentó el mayor nivel de caos, seguido de Groenlandia y la Antártida. A través de la construcción del atractor en el espacio fase se reconocen comportamientos erráticos entre temperaturas frías y cálidas, puntualizando como el clima debió haber pasado por cambios sensibles que llevaron a las regiones a tener un comportamiento caótico. De acuerdo con los resultados, el tiempo que transcurre para que esta señal climática de la Antártida llegué a Groenlandia es de 3868 años, al Margen Ibérico es de 3640 años, y de Groenlandia al Margen Ibérico es de 8440 años.

Abstract

Spectral and nonlinear analyzes were applied to time series of high-resolution temperature records from three geographic regions: Greenland (from the Greenland Ice Core Project, GRIP), Antarctica (EPICA, Dome C) and of the Iberian Margin. Through spectral analysis it was possible to recognize, in addition to the Milankovitch cycles, others of 4000, 5000, 7000, 9000 and 11000 years, which were found both in Greenland and in Antarctica. These cycles are considered to be very important, as they have also been recognized in mid-latitudes (Southern California). On the other hand, the results obtained by the Wave method showed that the time that elapses between phase-phase in Greenland and the Iberian Margin is related to the sunspot cycle (10, 20 and 60 years) and a sign of regional forcing that favors an amplification per thousand. Likewise, in these regions, the phase-lag part with a value of 30,000 years is observed, which is associated with the cosmic ray cycle (30 years, amplified by a thousand). In general, for the three regions, the time between phase or phase shift was around 100,000 to 130,000 years, highlighting the importance of the cycle of eccentricity of the Earth's orbit. The spectral analysis suggests that the region that triggers the climate variability signal is Antarctica, which, based on the non-linear analysis, is the region with the lowest level of chaos, apparently related to the oceanic conditions that prevail in the area, which make its disturbance difficult due to its thermal inertia. However, through Wavelet analysis, it is suggested that if this region were disturbed it would be the most dominant of the three regions. The three regions showed a chaotic behavior, the Iberian Margin presented the highest level of chaos, followed by Greenland and Antarctica. Through the construction of the attractor in phase space, erratic behaviors between cold and warm temperatures are recognized, specifying how the climate must have gone through sensitive changes that led the regions to have a chaotic behavior. According to the results, the time that elapses for this climatic signal from Antarctica to reach Greenland is 3,868 years, to the Iberian Margin is 3,640 years, and from Greenland to the Iberian Margin is 8,440 years.

ÍNDICE DE CONTENIDO

| | |
|---|-----------|
| AGRADECIMIENTOS..... | 4 |
| RESUMEN..... | 5 |
| ABSTRACT..... | 6 |
| CAPÍTULO 1.-ANTECEDENTES..... | 11 |
| CAPÍTULO 2.-HIPÓTESIS Y OBJETIVOS..... | 15 |
| 2.1 HIPÓTESIS..... | 15 |
| 2.2 OBJETIVO GENERAL..... | 15 |
| 2.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS..... | 15 |
| CAPÍTULO 3.-INDICADORES PALEOCLIMÁTICOS..... | 17 |
| 3.1 MÉTODOS HISTÓRICOS..... | 17 |
| 3.1.1 FORMAS DE VIDA EN ESTRATOS ANUALES..... | 20 |
| 3.1.2 EVIDENCIA GEOMÓRFICA SUPERFICIAL..... | 20 |
| 3.1.3 INDICADORES FÍSICOS..... | 22 |
| 3.1.4 INDICADORES PALEOBIOLÓGICOS (ABUNDANCIA Y TIPOS DE FAUNA FÓSIL)..... | 22 |
| 3.1.5 MÉTODOS ISOTÓPICOS..... | 24 |
| CAPÍTULO 4.-ÁREAS DE ESTUDIO..... | 27 |
| 4.1 ANTÁRTIDA..... | 27 |
| 4.2 GROENLANDIA..... | 29 |
| 4.3 MARGEN IBÉRICO..... | 32 |
| CAPÍTULO 5.-MÉTODOS..... | 35 |
| 5.1 MÉTODO DE RECONSTRUCCIÓN DE RETARDOS (TEOREMA DE TAKENS)..... | 36 |
| 5.2 MÉTODO DE LOS VECINOS CERCANOS FALSOS..... | 40 |
| 5.3 GRÁFICA DE RECURRENCIA..... | 42 |
| 5.4 GRÁFICA DE SEPARACIÓN ESPACIO-TIEMPO Y LA VENTANA DE THEILER..... | 44 |
| 5.5 INTEGRAL DE CORRELACIÓN..... | 46 |
| 5.6 EXPONENTE DE LYAPUNOV..... | 50 |
| 5.7 MÉTODO PARA DIFERENCIAR ENTRE CAOS Y RUIDO DENTRO DE UNA SERIE DE TIEMPO..... | 57 |
| 5.8 ANÁLISIS ESPECTRAL..... | 60 |
| 5.8.1 BLACKMAN-TUKEY..... | 63 |
| 5.8.2 MÉTODO DE MÁXIMA ENTROPÍA..... | 64 |
| 5.8.3 MÉTODO MULTI-TAPER..... | 65 |
| 5.8.4 ANÁLISIS DE ONDÍCULAS..... | 65 |
| 5.9 SERIES DE TIEMPO (MANEJO PREVIO DE DATOS)..... | 66 |
| 5.10 INTERPOLACIÓN DE LAS SERIES DE TIEMPO..... | 68 |

| | |
|---|-----|
| CAPÍTULO 6.-RESULTADOS Y DISCUSIÓN | 70 |
| 6.1 ANÁLISIS NO-LINEAL..... | 70 |
| 6.2 ANÁLISIS ESPECTRAL..... | 85 |
| 6.3 ONDÍCULAS..... | 93 |
| 6.3.1 TRANSFORMADA DE ONDÍCULAS..... | 93 |
| 6.3.2 COHERENCIA DE LA TRANSFORMADA DE ONDÍCULAS..... | 96 |
| 6.3.3 ONDÍCULA CRUZADA..... | 99 |
| CONCLUSIONES | 109 |
| ANEXO A. INTRODUCCIÓN AL SISTEMA CLIMÁTICO TERRESTRE | 111 |
| A.1 SISTEMA CLIMÁTICO TERRESTRE..... | 111 |
| A.1.1 ATMÓSFERA..... | 112 |
| A.1.2 HIDRÓSFERA..... | 113 |
| A.1.3 LITÓSFERA..... | 114 |
| A.1.4 BIÓSFERA..... | 116 |
| A.1.5 CRIÓSFERA..... | 117 |
| A.2 BALANCE DE ENERGÍA..... | 118 |
| A.3 MECANISMOS DE RETROALIMENTACIÓN Y FORZAMIENTO CLIMÁTICO..... | 121 |
| A.3.1 FORZAMIENTOS ASTRONÓMICOS..... | 123 |
| A.3.2 FORZAMIENTOS TECTÓNICOS..... | 125 |
| ANEXO B. DIMENSIONES DE CORRELACIÓN PARA VARIAS SERIES DE TIEMPO | 126 |
| REFERENCIAS | 128 |

ÍNDICE DE FIGURAS

| | |
|---|-----|
| 1. Mapa de la Antártida..... | 27 |
| 2. Mapa del Ártico..... | 30 |
| 3. Localización del núcleo sedimentario del Margen Ibérico..... | 33 |
| 4. Filtro de Kalman..... | 63 |
| 5. Serie de tiempo de temperatura para Antártida, Groenlandia y Margen Ibérico..... | 70 |
| 6. Vecinos Cercanos Falsos de la serie de tiempo de la Antártida..... | 71 |
| 7. Vecinos Cercanos Falsos de la serie de tiempo de Groenlandia..... | 72 |
| 8. Vecinos Cercanos Falsos de la serie de tiempo de Margen Ibérico..... | 72 |
| 9. Diagrama de espacio fase y gráfica de recurrencia para Antártida..... | 73 |
| 10. Diagrama de espacio fase y gráfica de recurrencia para Groenlandia..... | 74 |
| 11. Diagrama de espacio fase y gráfica de recurrencia para Margen Ibérico..... | 74 |
| 12. Exponente de Lyapunov para Antártida..... | 76 |
| 13. Exponente de Lyapunov para Groenlandia..... | 76 |
| 14. Exponente de Lyapunov para Margen Ibérico..... | 76 |
| 15. Dimensión de correlación para Antártida..... | 77 |
| 16. Integral de correlación para Antártida..... | 78 |
| 17. Dimensión de correlación para Groenlandia..... | 78 |
| 18. Integral de correlación para Groenlandia..... | 79 |
| 19. Dimensión de correlación para Margen Ibérico..... | 79 |
| 20. Integral de correlación para Margen Ibérico..... | 80 |
| 21. Prueba de datos surrogados para Antártida, Groenlandia y Margen Ibérico..... | 84 |
| 22. Series filtradas con filtro Kalman..... | 86 |
| 23. Histogramas y función de distribución de densidad para Antártida, Groenlandia y Margen Ibérico..... | 89 |
| 24. Espectro de potencia para Antártida..... | 90 |
| 25. Espectro de potencia para Groenlandia..... | 90 |
| 26. Espectro de potencia para Margen Ibérico..... | 91 |
| 27. Transformada de Ondícula para Antártida..... | 94 |
| 28. Transformada de Ondícula para Groenlandia..... | 95 |
| 29. Transformada de Ondícula para Margen Ibérico..... | 96 |
| 30. Coherencia de Transformada de Ondícula para Antártida - Margen Ibérico..... | 97 |
| 31. Coherencia de Transformada de Ondícula para Groenlandia - Margen Ibérico..... | 97 |
| 32. Coherencia de Transformada de Ondícula para Antártida - Groenlandia..... | 98 |
| 33. Ondícula Cruzada para Antártida - Margen Ibérico..... | 100 |
| 34. Ondícula Cruzada para Groenlandia - Margen Ibérico..... | 100 |
| 35. Ondícula Cruzada para Antártida - Groenlandia..... | 101 |
| 36. Vías de transferencia de energía en el balance de energía promedio global..... | 119 |

ÍNDICE DE TABLAS

| | |
|---|----|
| 1. Características de los archivos naturales..... | 19 |
| 2. Tipos posibles de movimiento y el exponente de Lyapunov correspondiente...53 | |
| 3. Resultados de las periodicidades obtenidos para Antártida con los tres métodos de análisis espectral.....91 | |
| 4. Resultados de las periodicidades obtenidos para Groenlandia con los tres métodos de análisis espectral.....92 | |
| 5. Resultados de las periodicidades obtenidos para Margen Ibérico con los tres métodos de análisis espectral.....92 | |
| 6. Estimación de las dimensiones de correlación para varias series de tiempo geofísicas.....126 | |

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES

Se han llevado a cabo diversos estudios acerca del clima del pasado tratando de entender qué forzamientos tanto internos como externos lo controlan, muchos de estos estudios se enfocan en encontrar y comprender los diversos cambios de temperatura por los que ha pasado la Tierra. La mayoría de ellos se han realizado desde un enfoque lineal. En este estudio se propone abordar el tema desde el punto de vista de la teoría de sistemas no-lineales.

El caos determinístico y la estructura fractal en sistemas dinámicos disipativos (por ejemplo, la atmósfera) están entre los paradigmas lineales más importantes. Se han desarrollado métodos prácticos para construir el espacio fase de series de tiempo experimentales [Takens, 1981], para calcular la dimensión fractal de un atractor [Grassberger y Procaccia, 1983a] que caracteriza su estructura métrica (dando lugar a invariantes estáticos independientes del tiempo), para evaluar el espectro de los exponentes de Lyapunov [Zeng *et al.*, 1991, 1992] y la entropía de Kolmogorov [Grassberger y Procaccia 1983b] que son invariantes dinámicos que describen los detalles de la evolución temporal del sistema. La dimensión fractal del atractor mide hasta qué punto la dinámica llena el espacio fase embebido y, proporciona un límite bajo para el número de variables independientes (grados de libertad) necesarias para modelar la evolución temporal del sistema [Zeng *et al.*, 1992].

Usando núcleos de Groenlandia se han realizado varios estudios con la finalidad de poder corroborar si la serie de tiempo climática sigue un comportamiento de tipo no-lineal, algunos de éstos se encuentran reflejados en *Ashkenazy et al.* [2003]; *Blender et al.* [2006] y *Schmitt et al.* [1995]. Se cree que el cambio climático abrupto es el resultado de inestabilidades, transporte umbral y diferentes comportamientos no-lineales del sistema climático global, es por ello, que se han efectuado este tipo de análisis [Jouzel *et al.*, 1994; Clark *et al.*, 1999; Alley *et al.*, 1999; Rahmstorf, 2000]. Con base en esto, se ha encontrado que Groenlandia posee un comportamiento multifractal, característico de un sistema no-lineal.

Sin embargo, no se han llevado a cabo estudios que reflejen si el sistema climático de Groenlandia tiene un comportamiento de tipo caótico, por lo que, en este estudio se realizó un análisis no-lineal con la serie temporal de temperatura obtenida a partir de proxies en el núcleo GRIP del sitio Summit. Dentro de los análisis realizados en dinámica no-lineal, es importante calcular el máximo exponente de Lyapunov y la dimensión de correlación del atractor correspondiente, para ver si exhibe una dinámica caótica.

La existencia de un atractor climático de baja dimensionalidad muestra que, la principal característica de una evolución climática a largo plazo puede ser vista como la manifestación de una dinámica determinista que involucra un número determinado de variables claves. El hecho de que el atractor tenga una dimensionalidad fractal proporciona una explicación natural de la variabilidad intrínseca del sistema climático a pesar de su carácter determinístico. Esto sugiere que, aun cuando se presentan picos pronunciados en el espectro de las frecuencias del forzamiento orbital, el comportamiento actual es altamente no periódico [Nicolis y Nicolis, 1984].

En el Pacífico ecuatorial (núcleo V28-328, con coordenadas 01° 01' N, 160° 29' E) Nicolis y Nicolis [1984] encontraron un atractor de dimensionalidad 3.1. Esto dio como resultado un sistema de cuatro variables que podrían proporcionar una descripción de las características salientes del sistema. Al respecto, Grassberger [1986] también trabajó con los datos del núcleo V28-328 y los datos de Berger y Pestiaux [1982], sin embargo, no obtuvo indicios de un atractor extraño. De igual manera, utilizó un registro de anillos de árboles provenientes de las Montañas White, cuyas características son bastante diferentes a las del núcleo V28-238, en este caso, sí obtuvo un atractor, pero con dimensionalidad alta. Dentro de su estudio, Grassberger [1986] advirtió que se pueden obtener pequeñas estimaciones espurias de la dimensión usando pocos datos, o que éstos estén muestreados de manera demasiado fina y suavizada.

Por su parte Fraedrich [1986,1987] trabajó con diferentes variables climáticas y reportó la presencia de atractores climáticos y meteorológicos. Para la serie climática contó con 182 datos y obtuvo una dimensión de saturación de 4.4 que, de acuerdo con Islam et al. [1993] es un número drásticamente inadecuado de datos para reconstruir un atractor, incluso si éste existiera. En el caso del atractor meteorológico, no se encontró saturación hasta que, de manera artificial se separaron los datos de invierno y verano.

Essex et al. [1987] y *Keppenne y Nicolis* [1989] analizaron las alturas geopotenciales diarias a 500 mb en varias estaciones meteorológicas de Europa occidental y reportaron un valor muy alto de la dimensión de correlación ($> 6-8.4$). *Tsonis y Elsner* [1988] investigaron la presencia de un atractor meteorológico sobre escalas de tiempo muy cortas. Ellos analizaron datos de la velocidad vertical del viento en promedios de 10 segundos sobre un periodo de 11 horas (con $N = 3960$ puntos), registrados por la Administración Atmosférica y Oceánica Nacional de los Estados Unidos de América (*NOAA*) en Boulder, Colorado ($40^{\circ} 01' 10''$ N, $105^{\circ} 17' 34''$ W) y reportaron una dimensión de correlación de 7.3.

Rodríguez-Iturbide et al. [1989] y *Sharifi et al.* [1990] analizaron datos de la intensidad de lluvia para varias tormentas de Boston y reportaron valores de la dimensión de correlación menores a cuatro. Esto es sorpresivamente bajo, dada la naturaleza del sistema atmosférico y los resultados de *Tsonis y Elsner* [1988] en escalas de tiempo similares [*Islam et al.*, 1993].

Se ha especulado mucho acerca de la dimensión del atractor de un sistema y en el caso específico del sistema atmosférico se ha mencionado la posibilidad de que no exista un atractor de baja dimensionalidad, como es el caso de *Zeng et al.* [1992] quienes no lograron obtener una dimensión fractal saturada para Fort Collins, Colorado ($40^{\circ} 32' 54''$ N, $105^{\circ} 3' 53''$ W); los Ángeles, California ($34^{\circ} 03' 08''$ N, $118^{\circ} 14' 37''$ W) y la Parte Norte del Océano Atlántico ($50-60^{\circ}$ N, $330-340^{\circ}$ W), la conclusión a la que llegaron fue que la dimensión fractal es mayor a ocho. Lo mismo reporta *Pierrehumert* [1990] al concluir que no existe una dimensión menor a 20 para la atmósfera global. Por su parte *Tsonis et al.* [1993] comentan que en muchos (si no es que en todos) los estudios que reportan atractores de baja dimensionalidad en el tiempo y el clima han sido cuidadosos en la elección del tiempo de retardo (τ). Donde comúnmente el parámetro de retardo se ha obtenido por medio de la función de autocorrelación (se puede encontrar más información en el cuadro del Anexo B).

Lorenz [1991] sugirió como posible explicación para atractores de baja dimensionalidad, el hecho de escoger variables débilmente acopladas o que la base de datos tuviera una cantidad moderada. Siguiendo un pensamiento similar al de *Lorenz* [1992], las variables atmosféricas que están delimitadas o resultan de un fenómeno tipo umbral dan como resultado dimensiones de correlación (para conjuntos de datos moderadamente

grandes) que subestiman las dimensiones verdaderas del atractor del sistema [Islam et al., 1993]. En este punto es importante notar que las variables como: presión y velocidad vertical estudiadas para un análisis de dimensión de correlación dan como resultado dimensiones altas, mientras que las provenientes de la duración de la luz solar y lluvia poseen dimensiones bajas (ver la Tabla 1 del Anexo B).

Ashkenazy et al. [2003] usaron registros de proxy de temperatura de cuatro núcleos de hielo provenientes de la Antártida y Groenlandia, ellos muestran que estas series de tiempo son no-lineales para escalas de tiempo de 1~100 ka (1000 años = ka) como es expresado por correlaciones temporales de largo alcance en magnitudes de incrementos de temperatura y por un amplio espectro multifractal.

Las correlaciones a largo plazo en las series de tiempo de temperatura T_i reflejan los aspectos lineales de T_i . Las correlaciones a largo plazo en las magnitudes de incrementos de temperatura, $|\Delta T_i| = |T_{i+1} - T_i|$ indican no-linealidad de los procesos subyacentes [Ashkenazy et al., 2001, 2003]. Series de tiempo lineales están no correlacionadas $|\Delta T_i|$ mientras que, las series de tiempo no-lineales que siguen una ley de escalamiento, exhiben correlaciones a largo plazo en las series de magnitud $|\Delta T_i|$. Ashkenazy et al., [2001, 2003] encontraron que $|\Delta T_i|$ está correlacionada a largo plazo dentro del rango de tiempo 1-100 ka con un exponente $\alpha \approx 0.8$ por lo que, el proceso subyacente es no-lineal.

El valor del exponente de correlación de $|\Delta T_i|$ cuantifica el grado de no-linealidad en los registros de los núcleos de hielo. Correlaciones en $|\Delta T_i|$ indican que las series de magnitud están “agrupadas”, es decir, una magnitud grande es más probable que este acompañada de una magnitud grande, y una pequeña esté seguida por una magnitud pequeña.

Hasta aquí, se han mencionado algunos trabajos realizados en la parte del hemisferio norte y el Pacífico Norte utilizando análisis no-lineal, pero ninguno centrado en la dinámica caótica de éstos. De igual manera, durante la revisión bibliográfica, no se encontraron estudios con este enfoque en la Antártida. Es por esta razón, y tomando en cuenta la importancia que tienen en cuanto al estudio del clima, Groenlandia y la Antártida, que se desarrolló el presente estudio, sin dejar de lado una región media entre estas dos, en este caso, el Margen Ibérico, para ver no sólo el tipo de comportamiento dinámico de las regiones, sino también, el desfase de la señal climática entre éstas.

CAPÍTULO 2

HIPÓTESIS Y OBJETIVOS

2.1 Hipótesis

El hemisferio sur es un área dominada por un ambiente de tipo oceánico, a diferencia del hemisferio norte y la zona templada, que están dominadas por un ambiente más continental. Esto hace posible pensar que el hemisferio sur es menos susceptible a los cambios climáticos debido a la capacidad calorífica del agua, ya que, se necesita más energía para poder perturbarlo y por ende su dinámica caótica sería más baja que en las otras dos regiones; sin embargo, de ser perturbado sería la parte dominante de las tres regiones de estudio, provocando cambios de temperatura en la parte superficial del mar y llevando con esto, a un cambio en los diversos eventos tanto oceánicos como atmosféricos, debido a su mayor inercia térmica.

2.2 Objetivos

Objetivo General

El objetivo general de este trabajo es determinar cuál de las tres regiones de estudio (Groenlandia, Antártida y Margen Ibérico) presenta mayor susceptibilidad al cambio climático, si éstas exhiben una dinámica caótica y cómo afecta esta dinámica a los procesos oceánicos.

2.3 Objetivos Específicos

Los objetivos específicos son:

- a. Buscar el tipo de tendencia que se presenta en las series de tiempo climáticas, correspondientes al Margen Ibérico (zona templada), la Antártica (para el hemisferio sur) y Groenlandia (para el hemisferio norte).

- b. Identificar las periodicidades en las series de tiempo climáticas.
- c. Determinar el nivel de caos en las series de tiempo climáticas.
- d. Determinar la conexión y fase entre las oscilaciones de las series de tiempo climáticas.

CAPÍTULO 3

Indicadores paleoclimáticos

El sistema climático de la Tierra está conformado por una variedad de conexiones entre diferentes subsistemas que interactúan para producir cambios en la temperatura, el viento y la precipitación entre otros. Los más importantes son la atmósfera; los océanos, incluyendo su vínculo químico y procesos biológicos; y la Tierra sólida a medida que influye en la concentración de CO₂ en el aire. Los procesos atmosféricos gobiernan el clima sobre escalas de tiempo de pocos años o menos. Los océanos influyen en el cambio climático durante períodos de décadas a decenas de milenios. Cada subsistema modifica el clima en escalas temporales diferentes (ver Anexo A).

El estudio del cambio climático se ha tornado interesante y de suma importancia en los últimos años, debido a los daños que puede ocasionar en sistemas naturales, pérdidas humanas y materiales, y también por su gran complejidad, lo que ha llevado a que se estudie desde distintos campos del conocimiento tanto de las ciencias naturales como de las sociales. En este capítulo se hace un breve resumen de los diferentes tipos de indicadores paleoclimáticos y algunas técnicas de fechamiento o datación; ya que, sin estimaciones confiables sobre la edad de los eventos en el pasado, es imposible investigar si ocurrieron sincrónicamente o si ciertos eventos condujeron o retrasaron a otros, tampoco es posible evaluar con precisión la tasa a la que ocurrieron los cambios ambientales del pasado. Por lo tanto, se deben realizar grandes esfuerzos para fechar todos los materiales, para evitar la contaminación de la muestra y para garantizar que se entienda claramente el contexto estratigráfico de la muestra.

3.1 Métodos históricos

Los climatólogos modernos luchan por reconstruir una historia climática continua y confiable a partir de fuentes que pueden dividirse en datos instrumentales y fenomenológicos. Los primeros registros de temperatura, hechos con un termómetro, en los principales centros

urbanos de Europa y América del Norte, son un ejemplo de registros instrumentales. Algunas observaciones instrumentales tienen varios siglos de antigüedad, incluidas las observaciones telescópicas de la actividad solar [*Schove, 1983; Hoyt y Schatten, 1997*] y las mediciones del mareógrafo sobre los cambios en el nivel del mar, disponibles desde el siglo XVIII en Europa [*Emery y Aubrey, 1991; Pirazzoli, 1991*].

Los registros fenomenológicos son ligeramente diferentes de los instrumentales. Éstos se derivan principalmente de relatos históricos de actividades humanas, como registros de granjas, y de interacciones humanas con el medio ambiente. El avance de los glaciares a finales del siglo XIX en los Alpes europeos documentado con fotografías y grabados es un excelente ejemplo de documentación histórica de eventos climáticos [*Grove, 1988; Lamb, 1995*]. Los registros de hielo marino alrededor de Islandia o los registros de pesca de aldeanos sudamericanos son otros ejemplos. Sin embargo, al igual que los registros instrumentales, los registros climáticos fenomenológicos tienen severas limitaciones espaciales y temporales que impiden la comprensión de la historia climática a largo plazo [*Cronin, 1999*].

Los principales registros naturales que conservan características físicas o biofísicas del pasado y que permiten medir condiciones meteorológicas para reconstruir las condiciones climáticas de otros momentos de la historia de la Tierra, mejor conocidos como “proxies”, se pueden clasificar de varias maneras: en los componentes del sistema climático que reconstruyen (hidrosfera, litósfera, atmósfera, etc.) en reinos oceánicos versus no marinos [*Webb et al., 1993*] por grupo taxonómico [*Parrish, 1998*], o en métodos biológicos versus no biológicos (litológicos, geoquímicos) [*Webb et al., 1993*]. Otro enfoque es centrarse en proxies que delimitan procesos relacionados con el clima, como la productividad biológica, el cambio del nivel del mar, el flujo de nutrientes o el intercambio de carbono en la atmósfera terrestre a través de la fotosíntesis [*Cronin, 1999*].

La Tabla 3.1 documenta las características principales de fuentes de datos paleoclimáticos. El valor de los datos de proxies para las reconstrucciones paleoclimáticas depende mucho del intervalo mínimo de muestreo y la resolución de datación, ya que esto es lo que determina principalmente el grado de detalle disponible del registro. Comúnmente, existe una dependencia de la frecuencia que impide la reconstrucción de climas pasados sobre parte del espectro debido a los atributos inherentes del archivo en sí. Los sedimentos marinos

suelen tener un fuerte espectro de ruido rojo con la mayor parte de la variación a bajas frecuencias debido a las bajas tasas de sedimentación y la bioturbación. Los anillos de los árboles, por otro lado, rara vez proporcionan información a frecuencias muy bajas (es decir, mayor a unos pocos cientos de años); eliminar la función de crecimiento biológico (un prerequisite necesario para el análisis paleoclimático) esencialmente filtra tales componentes de baja frecuencia de los datos sin procesar. Todos los paleo registros tienen un sesgo dependiente de la frecuencia, que debe entenderse para hacer un uso razonable de los datos [Bradley, 1999].

TABLA 3.1 Características de los archivos naturales

| Archivo | Intervalo de muestreo mínimo | Rango temporal | Información que se obtiene del archivo |
|-----------------------------|-------------------------------------|-----------------------|---|
| Registros históricos | día/h | $\sim 10^3$ | T, P, B V, M, L, S |
| Anillos de árboles | año/temporada | $\sim 10^4$ | T, P, B V, M, S |
| Sedimentos de lagos | 1-20 años | $\sim 10^4$ - 10^6 | T, P, B, V, M, C _w |
| Corales | 1 año | $\sim 10^4$ | C _w , L, T, P |
| Núcleos de hielo | 1 año | $\sim 5 \times 10^5$ | T, P, C _a , B, V, M, S |
| Polen | 20 años | $\sim 10^5$ | T, P, B |
| Espeleotemas | 100 años | $\sim 5 \times 10^5$ | C _w , T, P |
| Paleosuelos | 100 años | $\sim 10^6$ | T, P, B |
| Loess | 100 años | $\sim 10^6$ | P, B, M |
| Características geomórficas | 100 años | $\sim 10^6$ | T, P, V, L, P |
| Sedimentos marinos | 500 años | $\sim 10^7$ | T, C _w , B, M, L, P |

T = temperatura

P = precipitación, humedad, o balance de agua (P-E)

C = composición química del aire (C_a) o el agua (C_w)

B = información sobre biomasa y patrones de vegetación

V = erupciones volcánicas

M = variaciones del campo geomagnético

L = nivel del mar

S = actividad solar

Tabla tomada de *Bradley* [1999].

3.1.1 Formas de vida en estratos anuales

Quizás el más útil de esta clase de indicadores climáticos son los anillos de los árboles, cuyo espesor y densidad son proporcionales a la disponibilidad relativa de calor y humedad. Ciertas variedades de árboles pueden vivir hasta 5000 años, lo que permite la inferencia de variaciones climáticas cualitativas a largo plazo para ciertas localidades.

Otros indicadores biológicos útiles del cambio climático son los estratos de crecimiento anual de los corales que forman los vastos arrecifes de todo el mundo, cuyo grosor y composición química son indicativos de la temperatura del agua y la salinidad en la que se forman [*Gagan*, 2000]. Del mismo modo, los estratos acumulados de carbonato de calcio de muchas formas de conchas de moluscos también son útiles para evaluar los cambios en la temperatura superficial del agua. Algunas especies de moluscos revelan ciclos diarios y anuales de estratos acumulados. Por lo tanto, cuando se encuentran formas fósiles de estas especies en sedimentos antiguos, pueden indicar el número de días en un año o, de manera equivalente, la velocidad de rotación de la Tierra, en el momento de la deposición de los sedimentos antiguos. De esta evidencia se ha estimado, por ejemplo, que hace 400 Ma, un año tenía 400 días [*Wells*, 1963; *Saltzman*, 2002].

3.1.2 Evidencia geomórfica superficial

Existen al menos cuatro clases de evidencia geomórfica de superficie que son valiosas en la reconstrucción paleoclimática:

1. *La estructura de las costas marinas como evidencia del cambio de la altura del nivel del mar.* La variación del nivel de la superficie del océano relativo a los márgenes continentales es una función de la cantidad de agua almacenada como hielo glacial; así como, de los movimientos tridimensionales tectónicos y eustáticos de la litósfera. En algunos lugares, tales cambios en el nivel del mar son deducibles de un examen

de la historia geológica de la costa y de la historia del crecimiento de los arrecifes de coral [*Dodge et al.*, 1983].

2. *Orillas de lagos y lechos y evidencia de condiciones hidrológicas regionales pasadas.* Los niveles cambiantes de los lagos durante períodos que varían hasta aproximadamente 50000 años se pueden inferir por las antiguas formaciones de terrazas de lagos y por indicadores de la presencia de lagos donde ahora no existe ninguno.
3. *Suelos y arena.* La meteorización de las rocas y la descomposición del material orgánico en el suelo y la arena, y sus propiedades químicas y físicas, dependen en gran medida de las condiciones climáticas. Un ejemplo es la presencia de evaporitas, las cuales son un fuerte indicador de periodos prolongados de aridez. Las formaciones de arena que se encuentran en las regiones desérticas del interior suelen ser el resultado de condiciones climáticas áridas que prevalecieron. En particular, la estructura de las dunas es uno de los pocos indicadores disponibles para determinar los vientos que prevalecieron en años pasados [*Bagnold*, 1954].
4. *Efectos de hielo y glaciares.* El avance y la posterior retirada de vastas capas de hielo sobre un terreno determinado dejan una fuerte firma en el terreno, como lo demuestran a) los raspaduras, que se deben al movimiento de hielo y rocas encerradas en el hielo, lo que indica la dirección del movimiento de éste; b) la forma de los valles a través de los cuales avanza el hielo, que cambia de una característica en forma de V pre-glacial a una forma de U post-glacial; c) flujo de agua basal debajo y alrededor de las capas de hielo, y las rocas y el suelo transportados por el hielo y posteriormente depositados en retirada, que dejan patrones característicos de escombros y geomorfología [*Andersen y Borns*, 1994].

3.1.3 Indicadores físicos

En las superficies terrestres, la composición de los conjuntos de rocas en los estratos puede dar una primera pista sobre las condiciones climáticas de deposición, particularmente con referencia a las condiciones glaciales, que se identifican fácilmente por capas que contienen desechos glaciales o material de morrenas [Saltzman, 2002].

Uno de los indicadores o proxies más interesantes en esta categoría para la consideración de edad-hielo, es la presencia de desechos de hielo (ice-rafted debris, IRD por sus siglas en inglés) en los núcleos marinos. Esto es medible simplemente como la fracción de material de origen terrestre (transportado por la fusión de icebergs a porciones más profundas del océano) en relación con la cantidad de material calcáreo (CaCO_3) y silíceo que normalmente se deposita en el océano más profundo debido al crecimiento y la descomposición de microorganismos. La alteración de los episodios IRD glaciales y los episodios no glaciales se puede observar visualmente en el laboratorio notando la alternancia de capas blanquecinas (CaCO_3) y capas IRD mucho más oscuras, pero es cuantificable midiendo y registrando el porcentaje de CaCO_3 en cualquier nivel central. Un fuerte aumento en los desechos de hielo comenzó a aparecer simultáneamente en núcleos oceánicos de alta latitud en ambos hemisferios, hace aproximadamente 2.5 Ma, lo que indica un inicio bastante brusco de una época glacial [Saltzman, 2002].

También son valiosas las evaluaciones del espesor y las tasas de acumulación de polvo, cenizas y arena que fueron depositadas tanto en la tierra como en el océano por paleovientos.

3.1.4 Indicadores paleobiológicos (abundancia y tipos de fauna fósil)

Las capas estratigráficas contienen mucha evidencia fósil de las formas de vida dependientes del clima que existían en el momento de la deposición sedimentaria. Estos indicadores pueden tener varias formas:

- Polen y esporas, que generalmente se encuentran en depósitos de sedimentos de lagos y océanos; éstos son indicadores de las condiciones de temperatura, precipitación y

humedad del suelo bajo las cuales florecieron las plantas progenitoras; así como, las condiciones del viento responsables del transporte [Hooghiemstra y van der Hammen, 1998].

- Impresiones de microfósiles vegetales o conjuntos florales (hojas), o los residuos orgánicos de dichos conjuntos en forma de turba, carbón o aceite. La transición de las hojas de formas predominantemente de bordes lisos, comunes a temperaturas más cálidas, a formas de bordes dentados, comunes a temperaturas más frías ha sido particularmente útil como un indicador de la tendencia de enfriamiento sobre el Cenozoico [Wolfe, 1978].
- Ensamblajes de fauna fósil principalmente en forma de material óseo de animales más grandes.
- Conchas calcáreas o silíceas de organismos marinos, incluyendo plantas y animales planctónicos y formas más grandes de moluscos. “Coope [1977] proporcionó cinco atributos de especies de coleópteros (escarabajos) que también se aplican a la mayoría de otros grupos, para identificar qué clase de especies pueden ser buenos proxies de parámetros climáticos: estabilidad evolutiva, complejidad morfológica (caracteres fosilizables específicos de la especie), abundancia de sedimentos (permitiendo análisis cuantitativos de ensamblaje), constancia fisiológica (difícil de determinar directamente) y respuesta rápida a los cambios climáticos” [Cronin, 1999]. Dependiendo de las especies estudiadas, éstas pueden ser altamente indicadoras de las condiciones de temperatura y salinidad del agua superficial o profunda (bentónica) y de la extensión del hielo marino.
- Otro método desarrollado para inferir las paleo-variaciones de la temperatura de la superficie del mar es mediante la determinación del contenido de alquenona (cetona) de las membranas de las células fósiles de ciertos cocolitos. En particular, en aguas más frías, dichos organismos aumentan la producción de estas cadenas moleculares orgánicas, que se conservan bastante bien en la columna sedimentaria, lo que representa un ejemplo de moléculas orgánicas resistentes y compuestos que contienen información ambiental; ahora se denominan "biomarcadores" [Saltzman, 2002].

3.1.5 Métodos isotópicos

Entre los indicadores más importantes del cambio climático se encuentran la relación de isótopos de oxígeno ($^{18}\text{O}/^{16}\text{O}$) y la relación de isótopos de carbono ($^{13}\text{C}/^{12}\text{C}$) del material calcáreo en núcleos sedimentarios, junto con la relación de deuterio (D/H) en las aguas de los océanos y las placas de hielo. Estas relaciones generalmente se expresan como salidas, δ , de un valor estándar de laboratorio (en partes por mil) [Saltzman, 2002].

En el caso del $\delta^{18}\text{O}$, fue Willi Dansgaard quien en la década de 1950 investigó la relación entre la temperatura media anual y el delta del isótopo más pesado del oxígeno en la precipitación en un gran número de lugares en todo el mundo, encontrando una fuerte correspondencia en muestras actuales de precipitación, lo que lleva a creer que esta relación se mantiene en el pasado, al menos cualitativamente.

Aunque los fundamentos de la termometría isotópica se basaban en las variaciones del cociente $^{18}\text{O}/^{16}\text{O}$ en función de la temperatura a la que precipitaba el carbonato de calcio [Urey, 1947], posteriormente se observó que los cambios de estado y las variaciones de salinidad del agua introducían variaciones isotópicas mucho mayores, en otras palabras, el fraccionamiento isotópico era significativamente superior que el estrictamente debido a la temperatura de calcificación. Estas diferencias son debidas a que las moléculas de agua con isótopos ligeros (^{16}O o H) tienen una mayor presión de vapor (volatilidad) que las constituidas con isótopos pesados (^{18}O o D—deuterio). Así, durante el proceso de condensación, se extrae el isótopo pesado y el agua restante que no se condensa se enriquece más en el isótopo ligero. Las últimas fases de condensación se producen a temperaturas más frías, las cuales se alcanzan a altas latitudes (en los polos), produciendo valores mínimos isotópicos respecto a aquellos alcanzados a bajas latitudes [Otálvaro, 2008].

Los fenómenos de condensación y evaporación sólo alteran la composición isotópica de la capa superficial del océano temporalmente, ya que las aguas continentales tardan poco tiempo en volver al mar. Durante los episodios glaciales, que duraron varios miles de años, la prolongada permanencia de las aguas continentales en forma de hielo, pobres en isótopos pesados, alteró la composición isotópica del agua de todos los océanos de la Tierra [Criss, 1999].

Las series de tiempo del registro de $\delta^{18}O$ de las conchas de los foraminíferos han generado un registro importante de los cambios del clima. El $\delta^{18}O$ en los foraminíferos es función de la temperatura y del $\delta^{18}O$ del agua en el cual se forma. El $\delta^{18}O$ del agua del mar es una función del volumen de hielo global y de la salinidad del agua [Lisiecki y Raymo, 2005; Otálvaro, 2008].

La señal isotópica del $\delta^{18}O$ indica que durante el proceso glacial/interglacial (expansión/fusión del hielo), un aumento gradual en los valores isotópicos indica una acumulación progresiva de hielo en los polos y/o un enfriamiento gradual que culmina en un máximo glacial (máximo volumen de hielo). Ese máximo isotópico y de volumen de hielo es seguido por un descenso isotópico brusco que identifica una deglaciación rápida o calentamiento (terminaciones) que da paso a un período interglacial [Kennett, 1982].

La razón por la cual se estudian los núcleos de hielo es porque dan acceso a series paleoclimáticas que incluyen temperatura local y tasas de precipitación, condiciones de fuente de humedad y flujos de aerosoles de origen marino, volcánico, terrestre, cosmogénico y antropogénico. También son únicos por sus inclusiones de aire, las cuales proporcionan los cambios pasados en la composición de gases traza atmosféricos [Petit et al., 1999]. Con ello pueden verse las variaciones en la escala milenaria, aunque también son registradas en isótopos de oxígeno de foraminíferos plantónicos [Hendy y Kennett, 1999; Hendy et al., 2002], composición química de sedimentos [Hendy et al., 2002; Hendy y Pedersen, 2005], e isótopos de nitrógeno [Emmer y Thunell, 2000; Hendy y Pedersen, 2005] registrando un intervalo de cambios ambientales que incluye la fuerza de la zona de mínimo oxígeno [Cannariato et al., 1999; Petit et al., 1999], temperaturas superficiales del mar y la profundidad de la termoclina [Hendy y Kennett, 1999], masas de agua intermedia [Stott et al., 2000], condiciones redox del sedimento [Hendy y Pedersen, 2005; van Geen et al., 2003], desnitrificación subsuperficial [Emmer y Thunell, 2000], la fuerza de las surgencias y la productividad marina [Ortiz et al., 2004; Petit et al., 1999].

Para este estudio se llevó a cabo un análisis de las diferentes series de tiempo proporcionadas en World Data Center for Paleoclimatology, National Oceanic and Atmospheric Administration (http://cdiac.ornl.gov/trends/co2/ice_core_co2.html). Para el hemisferio sur se analizó la serie de 800 ka de EPICA Domo C, en la Antártida; para el hemisferio norte se

analizaron las series de tiempo de 248 y 800 ka del núcleo de hielo GRIP, en Groenlandia, y finalmente la serie de tiempo del Margen Ibérico con 420 ka, tomada de *Martrat et al.* [2007].

CAPÍTULO 4

ÁREAS DE ESTUDIO

4.1 Antártida

El Océano Austral ventila los océanos globales y regula el sistema climático mediante la captación y el almacenamiento de calor, agua dulce, O₂, CO₂ y CO₂ atmosférico. El Comité Científico de investigación Antártica (Scientific Committee on Antarctic Research, SCAR por sus siglas en inglés) considera que la región Antártica incluye el continente, sus islas costeras y el Océano Austral circundante (Figura 4.1), incluyendo la Corriente Circumpolar Antártica (Antarctic Circumpolar Current, ACC por sus siglas en inglés), cuyo límite norte es el Frente Sub-Antártico [Bamber *et al.*, 2008].

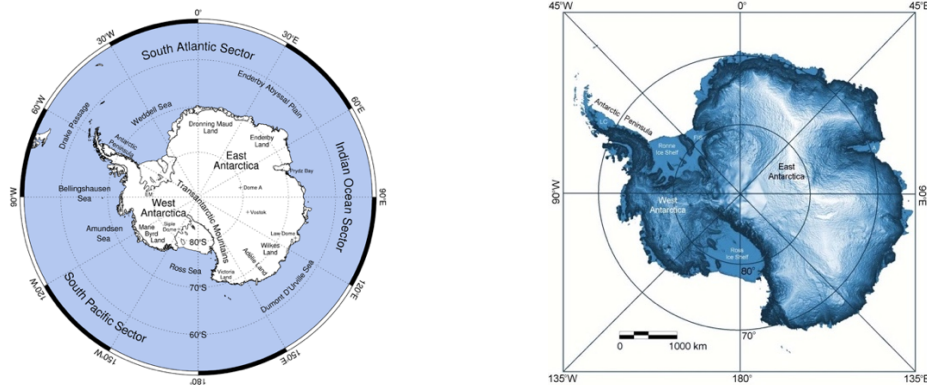


Figura 4.1. (Izquierda) Mapa de la Antártida mostrando características topográficas y lugares importantes. (Derecha) Elevación de la superficie, iluminada directamente desde la parte superior, muestra la forma general del continente, así como la rugosidad en escala menor. Tomado de *Bamber et al.* [2008].

El registro de perfiles de deuterio de 800 ka de la Antártida del Proyecto Europeo para la Extracción de Hielo en la Antártida (European Project for Ice Coring in Antarctica, EPICA por sus siglas en inglés), Domo C (75° 6' S, 123° 21' E, con una longitud del núcleo

de 3259.7 m) proviene de la escala de tiempo o modelo de edad¹ EDC3, el cual tiene una precisión de ~6 ka de 130 a 800 ka y $\pm 20\%$ para la duración de los eventos [*Dreyfus, 2007; Parrenin, 2007*]. Por lo tanto, la escala de edad EDC3 se configura independientemente de las propiedades orbitales del δD . Las mediciones de δD del núcleo de hielo están disponibles en secciones de hielo de 55 cm [*Jouzel et al., 2007; Masson-Delmotte et al., 2010*].

Las primeras placas de hielo en escala continental se formaron en la Antártida alrededor de 34 Ma, probablemente como respuesta a la declinación en los niveles de CO₂ atmosféricos, causados por una combinación de desgasificación reducida de CO₂ de volcanes y cordilleras del océano medio y el aumento del entierro de carbono. Esta declinación resultó en una caída de las temperaturas globales de alrededor de 4 °C. Como máximo, estas primeras capas de hielo llegaron al borde del continente antártico, pero fueron probablemente, más cálidas y delgadas que las actuales. Se produjo un enfriamiento más agudo alrededor de 14 Ma, probablemente acelerado por el creciente aislamiento térmico y físico de la Antártida a medida que otros continentes se alejaban de ella y se desarrollaba la ACC, sobre todo debido a cualquier cambio en los niveles de CO₂ atmosféricos [*Turner et al., 2009*].

El continente es dominado por la placa de hielo de la Antártida, una vasta masa contigua de hielo glacial que cubre el continente antártico y los mares circundantes. Es la región de mayor acumulación de hielo en la Tierra, con unos 30,000,000 km², lo cual constituye el 90% de todo el hielo en el planeta y el 70% de sus reservas de agua dulce. La masa de hielo que cubre la Antártida es un componente fundamental en el ciclo hidrológico global. Su mayor o menor desarrollo regula el ascenso y descenso del nivel global de los océanos, mientras que la formación estacional de hielo marino controla el comportamiento de la vida en las aguas antárticas y en sus ecosistemas dependientes y asociados [*Sánchez, 2007*].

El océano Antártico tiene la mayor corriente oceánica, ya antes mencionada como la ACC, la cual fluye de oeste a este transportando un volumen de ~130,000,000 m³/s (en el paso

¹ Muchos estudios paleoclimáticos proceden desarrollando primero una cronología, generalmente conocida como modelo de edad. Un modelo de edad es un modelo construido a partir de las diversas herramientas de datación y correlación [*Cronin, 1999*].

Drake) a lo largo de un camino de ~23,000 km. Ésta se localiza principalmente entre el Frente Sub-Antártico y el Frente Polar. El Frente Sub-Antártico es una zona de divergencia de masas de agua y el Frente Polar de convergencia, caracterizado además por un descenso brusco de la temperatura superficial de norte a sur [*Cristian, 2008*].

La ACC es conducida principalmente por los vientos de Deriva del Oeste, que provocan que el movimiento de la corriente sea de oeste a este, además de este flujo superficial forzado por el viento, existe un flujo geostrófico debido a que la pendiente de la superficie del mar se inclina hacia el continente antártico y que por el efecto de Coriolis el flujo neto también es de oeste a este, extendiéndose el movimiento hacia mayores profundidades. Bajo la capa de influencia por el viento, la distribución de densidad es tal que, en general, la fuerza del gradiente de presión horizontal y la fuerza de Coriolis se balancean y el equilibrio geostrófico se mantiene, haciendo que casi toda la columna de agua se mueva en una sola dirección [*Cristian, 2008*].

El Océano Atlántico Sur es una región que carece de datos sobre el monitoreo a largo plazo de los parámetros oceanográficos. Además, los indicadores proxy en esta región aún no están bien establecidos [*Kikuchi et al., 2013*].

4.2 Groenlandia

El sistema climático del Ártico es caracterizado por un estado de baja energía térmica y un íntimo acoplamiento entre la atmósfera, tierra y océano. Esto hace del Ártico una región cambiante y fascinante para estudiar.

La definición más formal del Ártico es que, es la región más al norte del Círculo Polar Ártico (66.5° N). La característica fundamental es la luz diurna de 24 horas en verano y la oscuridad de 24 horas durante el invierno, el número de días con estos dos extremos incrementa con la latitud. En el polo norte, el Sol se sitúa arriba del horizonte por seis meses, entre los equinoccios de primavera y otoño, y por debajo del horizonte en los seis meses restantes. Incluye partes de Rusia, Estados Unidos de América (Alaska), Canadá, Dinamarca (Groenlandia), Islandia, la región de Laponia, en Suecia, Noruega, Finlandia y las islas Svalbard, así como, el océano Ártico (Figura 4.2). Las isotermas de 10 °C en julio son comúnmente usadas para definir el borde de la región ártica [*Farré et al., 2014*].



Figura 4.2. Mapa del Ártico, rodeado por Rusia, Estados Unidos (Alaska), Canadá, Dinamarca (Groenlandia), Islandia, Suecia, Noruega, Finlandia y las islas Svalbard. Tomado de (<https://es.wikipedia.org/wiki/Ártico>).

La escala de edad para Groenlandia en el Proyecto Comunitario Europeo del Núcleo de Hielo de Groenlandia (European Greenland Ice Core Project, GRIP por sus siglas en inglés) es el SS09, con un alcance temporal de 248 ka proveniente de perfiles de $\delta^{18}O$, con una resolución de 55 cm. Se han perforado a través de la capa de hielo de Groenlandia, un total de cuatro núcleos que alcanzan el lecho rocoso y dos más en el lecho rocoso o capa de hielo marginal al rededor del hielo interior. El núcleo de hielo para GRIP fue recuperado en la parte superior de la placa de hielo con un entorno deposicional casi ideal, Summit (72° 34' N; 37° 37' W; con una elevación de 3232 m sobre el nivel del mar y una longitud del núcleo de 3018.8 m) [Dansgaard et al., 1993; GRIP Project Members, 1993; Johnsen et al., 1992a], la cual es la única localidad en la parte central de Groenlandia, donde el patrón de flujo es simple, ya que en la actualidad no se cree que tenga lugar un movimiento horizontal en la placa de hielo y en el pasado este movimiento fue despreciable [Johnsen et al., 1992, 1997].

La temperatura superficial de Summit rara vez se eleva por encima del punto de congelación, en contraste con Dye-3 donde el derretimiento de verano a menudo causa cambios post-deposicionales en el firn; por ejemplo, absorción de gases solubles de la atmósfera. Es por esta razón que Summit se escogió como el nuevo objetivo de perforación de un núcleo profundo en GRIP.

Barker et al. [2011] construyeron un registro sintético de la variabilidad climática en Groenlandia basados en el modelo de balance polar termal. Este registro reproduce mucha de la variabilidad que se observa en los núcleos de hielo de Groenlandia sobre los pasados 100 ka y muestra una fuerte similitud con los registros de espeleotemas de China absolutamente fechados. Este registro sintético tiene un alcance temporal de 800 ka y es construido sincronizándolo con el de la Antártida (modelo de edad EDC3).

En este estudio se utilizó el registro sintético de Groenlandia junto con la serie paleoclimática del Margen Ibérico-construida con el Modelo EDC3 (esta serie fue proporcionada por Stephen Barker, vía correo) y la serie temporal de la Antártida, para la parte del desfase entre las series, mientras que las series temporales provenientes de los modelos de origen fueron usadas para la parte no-lineal.

Groenlandia es la segunda masa de hielo más grande en el Planeta, *Weidick* [1995] citó un valor para el grosor de $2.6 \times 10^6 \text{ km}^3$ basado en una estimación obtenida en 1950. Sin embargo, *Bamber et al.* [2001] reportaron un valor de $2.93 \times 10^6 \text{ km}^3$. Groenlandia está en las latitudes 59° y 83° N y longitudes 11° y 74° W , se encuentra rodeado por el Océano Ártico al norte, el mar de Groenlandia al este, el Océano Atlántico al sureste, el Estrecho Davis al suroeste, la Bahía Baffin al oeste y el Estrecho Nares al noroeste [*Bamber et al.* 2001].

Una porción significativa de la parte central de la placa de Groenlandia está asentada debajo del nivel del mar, donde el espesor del hielo es mayor, bajando la elevación del lecho de roca, a través de la compensación isostática, en 1000 m. Estas áreas bajas también incluyen; sin embargo, varias áreas marginales sobre la costa norte y noreste, donde las elevaciones del lecho rocoso son $> 200 \text{ m}$ debajo del nivel del mar. La existencia de estas áreas de hielo marino sugiere que pueden ser inestables, como se ha propuesto para las porciones marinas de la placa de hielo de la Antártida Occidental [*Bamber et al.*, 2001].

Desde finales de la década de 1990 la placa de hielo de Groenlandia ha perdido masa como resultado del aumento de la escorrentía del agua de deshielo superficial (representando el 60% de la pérdida de masa) y por el incremento en la descarga de icebergs [*van den Broeke et al.*, 2016]. Esta reciente aceleración en la dinámica de la placa de hielo es probablemente una consecuencia de la disponibilidad del agua de deshielo y el calentamiento del océano,

aunque el papel del agua de deshielo sigue sin estar claro [Sundal et al., 2011; Tedstone et al., 2013; de Fleurian et al., 2016]. El reciente aumento de la superficie derretida probablemente se deba al calentamiento global, potenciado por la amplificación del Ártico [Serreze y Barry, 2011] y los cambios generales observados en la circulación en verano que favorecen la advección de masas de aire cálido sobre la placa de hielo de Groenlandia [Fettweis et al., 2017].

4.3 Margen Ibérico

La Península Ibérica se encuentra en la placa Euroasiática, justo al norte del límite actual de la placa África/Eurasia. Este límite se encuentra a lo largo de la zona de fractura Azores-Gibraltar (AGFZ), justo al sur de Iberia, y continua hacia el este hasta el Mediterráneo [Srivastava et al., 1990a, 1990b]. El análisis de las anomalías magnéticas de la expansión del fondo marino, con ayuda de estudios paleomagnéticos [Van der Voo y Zijdeveld, 1971; Galdeano et al., 1989], demostró que la configuración tectónica de placas de la Península Ibérica cambió significativamente a lo largo de su historia, posterior al desplazamiento [Olivet et al., 1984; Klitgord y Schouten, 1986; Malod y Maufret, 1990; Srivastava et al., 1990a, b; Roest y Srivastava, 1991; Sibuet y Collette, 1991].

El Margen Ibérico tiene un modelo de edad que proviene de varios núcleos y con ello varios modelos de edad en diferentes partes de su composición. Para el Margen Ibérico su usaron los datos del núcleo MD01-2443 (37° 52.8' N, 10° 10,57' W, con 2925 m debajo del nivel del mar), estos datos permiten generar una reconstrucción de alta resolución de la historia climática de los pasados 420 ka, proveniente de registros de alquenonas [Tzedakis et al., 2004; Abreu et al., 2005]. El núcleo se obtuvo en el año 2001 durante el crucero científico de geociencias MD123 a bordo del buque francés Marion Dufresne, fue colectado por parte de proyecto POP (Pole-Ocean-Pole: una estratigrafía global para variabilidad en escala milenial [Abreu et al., 2005]. Para este estudio, los datos del núcleo MD01-2443 se obtuvieron de Martrat et al. [2007].

El ancho de la plataforma continental Ibérica varía entre 10 y 65 km a lo largo de su longitud aproximada de 700 km. Ésta se puede dividir en tres segmentos, separados por los principales cañones que atraviesan la plataforma y descienden en los dominios abisales [Vannev and

Mougenot, 1981; Mougenot, 1988]: 1) Norte del cañón Nazaré. 2) Entre el cañón Nazaré y Setúbal y 3) Entre el cañón Setúbal y San Vicente [*Whitmarsh et al., 1996*].

Dos grandes placas abisales se encuentran al oeste de Iberia: la placa abisal Tagus en el sur y, la placa abisal Iberia en el norte (Figura 4.3). La placa abisal Tagus es una placa cerrada, de piso extremadamente plano, limitada al este por el margen continental irregular de Portugal, sobre el cual, los sedimentos han sido canalizados a través de los cañones de Lisboa y Setúbal. La placa abisal Iberia se encuentra frente al centro y noroeste de Iberia. Al sur, esta placa está separada de la placa Tagus por la plataforma continental de Espuela de Extremadura y el monte submarino Tore. Para la parte oeste y noroeste, los límites de la placa están aproximadamente definidos por la isóbata de 4800 m, que marca aproximadamente la transición de las características de la topografía plana de la placa abisal a la morfología típica irregular del basamento oceánico más al oeste [*Whitmarsh et al., 1996*].

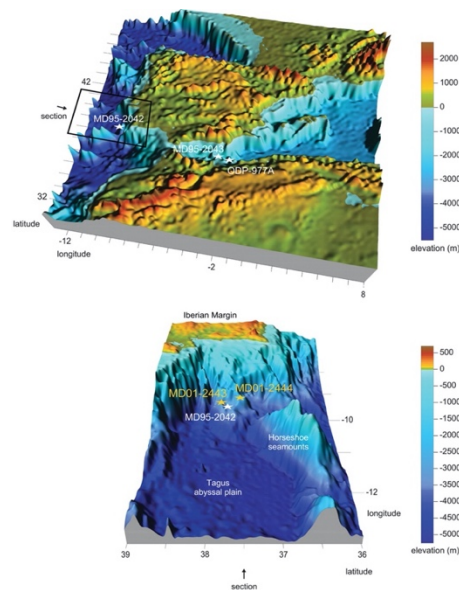


Figura 4.3. Localización del núcleo sedimentario que se ocupó para el estudio en el caso del Margen Ibérico junto con la vista de la placa abisal Tagus. El núcleo sedimentario MD01-2343 (37° 52.85'' N, 10° 10.57'' W, 2925 m debajo del nivel del mar). La banda en colores indica la elevación en metros. Tomado de *Martrat et al. [2007]*.

Los sedimentos del suroeste del Margen Ibérico son altamente sensibles al cambio climático en escalas de tiempo tanto orbital como milenial. Tienen una tasa de sedimentación

relativamente constante y alta, que se mantiene a través de periodos glacial-interglacial y estadal-interstadial. El Margen Ibérico es climáticamente sensible, ya que es influenciado por procesos de latitud alta y baja. La migración del frente polar en el Atlántico Norte actúa como una bisagra con un pivote, con grandes oscilaciones meridionales ocurriendo en la cuenca este a medida que el hielo marino avanza y retrocede. Durante los estadales fríos (Heinrich) del último periodo glacial, el frente polar alcanzó la parte norte del Margen Ibérico (41° N) [Voelker y deAbreu, 2011]. El Margen Ibérico también está influenciado por procesos de baja latitud, principalmente a través del ciclo hidrológico a medida que la precipitación sobre Europa cambia con la migración de la posición de la Convergencia Intertropical en escalas temporales orbitales y milenarias [Tzedakis *et al.*, 2009; Hodell *et al.*, 2013]. Los núcleos sedimentarios del Margen Ibérico son únicos por su capacidad para ser correlacionados con los núcleos de hielo polar en ambos hemisferios y con secuencias terrestres europeas [Hodell *et al.*, 2013].

CAPÍTULO 5

MÉTODOS

Para la parte del análisis no-lineal se usaron varios métodos que permitieron obtener el máximo exponente de Lyapunov, que es el objetivo central en el análisis no-lineal ya que éste junto con la dimensión de correlación son indicadores de caos en sistemas dinámicos, ambas son mediciones invariantes ante transformaciones suaves. A continuación, se dará una breve explicación sobre cada uno de los métodos, cabe mencionar que, aunque estos métodos sirvieron para obtener el exponente de Lyapunov, son importantes por sí solos ya que ayudan a visualizar el comportamiento del sistema desde una perspectiva no-lineal.

Una de las razones por las que se hace un análisis no-lineal es porque el ruido continuo en un espectro de potencia puede surgir en parte, de los procesos que exhiben caos determinístico, un término usado en el campo de la dinámica no-lineal. Si el caos está presente, entonces el diagrama de fase puede exhibir una clara, aunque compleja estructura, la cual se describe como un atractor extraño [Weedon, 2003]. Un atractor extraño tiene una geometría muy especial llamada fractal, lo que significa que tiene una dimensión no entera. Sin embargo, aunque característico, una dimensión no entera no es diagnóstico de caos debido a que hay sistemas con dimensiones no enteras que no muestran dependencia sensible sobre las condiciones iniciales [Medio, 1992; Weedon, 2003].

La teoría del caos ha establecido que, en las condiciones adecuadas, ciertas ecuaciones no-lineales relativamente simples pueden generar series de tiempo que tienen un espectro continuo. Dichas series son indistinguibles del ruido usando métodos estándar de series de tiempo, ya que es imposible predecir valores sucesivos a menos que las condiciones iniciales sean conocidas. La dependencia sensible de las condiciones iniciales es característica del caos. Una diferencia infinitesimal en valores iniciales resultará en una salida divergente. Como una consecuencia, sin saber la ecuación y las condiciones iniciales exactas, es imposible predecir los valores futuros después de unos pocos pasos de tiempo [Weedon, 2003; Stewart, 1990].

5.1 Método de Reconstrucción de Retardos (Teorema de Takens)

El teorema de Takens asegura que, bajo ciertas hipótesis sobre el sistema, resulta posible reconstruir la dinámica completa del sistema original a partir de mediciones de algunas de las variables involucradas y, de esta forma conocer la evolución de éste.

Un sistema dinámico consta de un conjunto de posibles estados que evolucionan en el tiempo siguiendo una regla que expresa el estado actual en términos del estado anterior. Además, se requiere que la regla que define los estados sea determinista, lo que significa que se puede determinar completamente el estado actual haciendo uso únicamente de los estados anteriores.

Se tiene que la evolución de la variable x es a través de una sustracción directamente independiente de la variable y , mientras que la evolución temporal de la variable y similarmente depende de la variable x y de la variable z . La consecuencia directa de este hecho es: Si en un tiempo t sólo el valor de la variable x es conocido entonces otra medición de la misma variable en un tiempo futuro $t + \tau$ llevará implícitamente información acerca de las otras dos variables. Siguiendo con las mediciones de x en los tiempos $t + 2\tau, t + 3\tau, \dots$, continuamente se reúne información no sólo de la variable x sino también de la variable z y la variable y . De hecho, si τ se elige adecuadamente, la cantidad de información obtenida alrededor de las otras dos variables es bastante grande como para poder introducir los valores de la variable x en los tiempos $t + \tau$ y $t + 2\tau$ como sustitutos de las variables originales [Perc, 2006].

El teorema de Takens también conocido como el teorema de embebimiento, trata de encontrar una dimensión de embebimiento suficientemente grande para los vectores de retardo en un espacio fase con exactamente las mismas cantidades que el sistema original.

$$P(t) = X_t, X_{t+\tau}, X_{t+2\tau}, \dots \dots X_{t+(m-1)\tau} \quad (1)$$

La gráfica que se obtiene de los vectores de estado x en \mathbb{R}^m es equivalente a la dada por los vectores y en \mathbb{R}^{2d+1} correspondiente al método de coordenadas de retardo. Por lo tanto, mediante el método de coordenadas de retardo se obtiene una reconstrucción del atractor en \mathbb{R}^k que resulta tener las mismas propiedades que las del atractor original en \mathbb{R}^m . ““De hecho,

bajo circunstancias bastante generales el atractor formado en \mathbb{R}^k es equivalente al atractor en el espacio desconocido, en este caso \mathbb{R}^m , en el cual vive el sistema original si la dimensión m del espacio coordinado de retardo es suficientemente grande” [Kantz y Schreiber, 2004]. De hecho, el teorema de Takens se basa en la dimensión de embebimiento y no en el retardo de embebimiento [Perc, 2006].

El teorema no brinda información sobre el valor preciso de τ ; sin embargo, está permitido cualquier valor de éste. Con respecto al valor de τ existen otros métodos para poder obtenerlo y serán tratadas más adelante.

Lo que se ha expresado como equivalencia entre las gráficas del atractor original y su reconstrucción, en el teorema está establecido como un homeomorfismo entre los dos conjuntos. Un homeomorfismo entre dos conjuntos básicamente significa que uno de ellos se obtiene a través de una deformación continua del otro, esta deformación está determinada por una función que debe ser continua, biyectiva, y que su inversa también sea continua. Cuando dos conjuntos se dicen homeomorfos se hace hincapié en que más allá de la forma que tengan cada uno, los conjuntos tienen las mismas propiedades.

Para poder entender el método de retardos es necesario saber qué es una serie de tiempo. Las series de tiempo son una secuencia de mediciones escalares de alguna cantidad que depende del estado actual del sistema, tomado en múltiplos de un tiempo de muestreo fijo dado por:

$$S_n = S(X(n\Delta t)) + \eta_n \quad (2)$$

Es decir, se analiza el sistema a través de alguna función de medición S y se hacen observaciones sólo hasta algunas fluctuaciones aleatorias η_n , de la medición de ruido.

Una reconstrucción de retardo en m dimensiones está formada por S_n vectores, dados como:

$$S_n = (S_{n-(m-1)\tau}, S_{n-(m-2)\tau}, \dots, S_{n-\tau}, S_n) \quad (3)$$

La diferencia de tiempo en número de muestreo τ (o en unidades de tiempo, $\tau\Delta t$) entre componentes adyacentes de los vectores de retardo es referida como el lag o tiempo de

retardo. Para $\tau > 1$ sólo la ventana de tiempo cubierta por cada vector se incrementa, mientras el número de vectores construidos a partir de la serie de tiempo escalar sigue siendo más o menos el mismo. Esto es porque se creó un vector para cada observación escalar, S_n , con $n > (m - 1)\tau$. Una serie de teoremas de integración se refieren a la cuestión de, ¿en qué circunstancias y en qué medida el objeto geométrico formado por los vectores S_n , son equivalentes a la trayectoria original X_n ? [Kantz y Schreiber, 2004].

Es un poco difícil obtener una buena estimación del tiempo de retardo $\tau = \tau\Delta t$. El τ no es tema de los teoremas de embebimiento, ya que se considera que los datos tienen precisión infinita. Embebimientos con el mismo m , pero diferente τ son equivalentes en el sentido matemático para datos libres de ruido, pero en realidad una buena elección de τ facilita el análisis. Si τ es pequeño comparada con la escala de tiempo interna del sistema, elementos sucesivos de los vectores de retardo estarán fuertemente correlacionados (no ha pasado suficiente tiempo para que el sistema evolucione en el espacio fase), casi no hay diferencia entre los diferentes elementos de los vectores de retardo, tal que todos los puntos se acomodan alrededor de la bisectriz del espacio embebido. Esto se llama redundancia de Casdagli et al. [1991a] y Gibson et al. [1992]. Si, además, los datos son ruidosos los vectores formados de este modo son casi insignificantes si la variación de la señal durante el tiempo cubierto por $m\tau$ (periodo de tiempo representado por un vector embebido, es incluso más importante que m y τ por separado) es menor que el nivel de ruido [Kantz y Schreiber, 2004].

Si τ es muy grande, las diferentes coordenadas pueden estar casi no correlacionadas. En este caso el atractor construido puede volverse muy complicado, incluso si el atractor verdadero subyacente es simple. Esto es típico en sistemas caóticos donde la función de autocorrelación decae rápidamente [Kantz y Schreiber, 2004].

De acuerdo con la teoría de embebimiento sólo se requiere que τ sea no cero ni un múltiplo de algún periodo orbital, esto sólo es válido cuando se usa la aritmética de valores reales sobre una cantidad infinita de datos que están libres de ruido. En la práctica, cuando los datos de series de tiempo de longitud finita y ruidosos están involucrados, se necesita que τ sea grande, para desplegar adecuadamente la dinámica del sistema [Bradley y Kantz, 2015].

Existen varios métodos para obtener el lag o retardo (τ); sin embargo, ya que no hay relevancia, en el marco de trabajo matemático, no existe una forma rigurosa de obtener un τ óptimo e incluso no están claras las propiedades que debe tener. De igual manera, los

resultados no deben depender tanto de la sensibilidad de τ ya que, de lo contrario, la invarianza carecería de las propiedades del atractor bajo transformaciones suaves, lo cual sugiere que no se está investigando el atractor verdadero.

Dos de los métodos más usados para el cálculo de τ son la función de autocorrelación y la información mutua. El método más apropiado para obtener el tiempo de retardo es por medio de la función de autocorrelación de la señal. Desde un punto de vista práctico, es óptimo ya que, en primer lugar, esta prueba debe calcularse para familiarizarse con los datos, además de que da información acerca de la estacionariedad y las escalas de tiempo típicas. En segundo lugar, está íntimamente relacionada con la forma del atractor en el estado reconstruido. El primer cero de la función de autocorrelación de la señal a menudo da lugar a una buena compensación entre estos extremos [Kantz y Schreiber, 2004]. Este método no funciona en todas las situaciones, debido a que los procesos de memoria larga tardan mucho tiempo en alcanzar el valor de cero en la función de autocorrelación [Luo, 2004; Valencia, 2010], por lo que se sugiere un método alternativo, el cual consiste en elegir el tiempo de rezago τ donde la función de autocorrelación decae a $1/e$ [Valencia, 2010; Kantz y Schreiber, 2004], de hecho este valor es comúnmente más usado en meteorología, especialmente si el decaimiento es casi exponencial [Zawadzki, 1973; Zeng et al., 1992]. Este método es más robusto para elegir un rezago adecuado; sin embargo, no existe evidencia para demostrar que $1/e$ es un factor universal del criterio de la función de autocorrelación para la elección del lag adecuado [Valencia, 2010]. Una objeción bastante razonable para este procedimiento es que está basado en estadística lineal, no toma en cuenta correlaciones dinámicas no-lineales, por lo que se usa otro estadístico para medir la correlación no-lineal llamado información mutua.

El tiempo de retardo de información mutua fue sugerido por Fraser y Swinney [1986] como una herramienta para determinar un retardo razonable, mide la dependencia general de dos variables, por consiguiente, proporciona un mejor criterio para la elección del retardo más que la función de autocorrelación [Hegger et al., 1999; Fraser y Swinney, 1986]. Existen buenos argumentos que establecen que si el tiempo de retardo de la información mutua exhibe un marcado mínimo en cierta información de τ , entonces es un buen candidato para un tiempo de retardo razonable [Hegger et al., 1999].

La información mutua es una medición de la cantidad de información que una variable aleatoria contiene acerca de otra variable aleatoria. Es la reducción en la incertidumbre de

una variable aleatoria debido al conocimiento de otra [Cover y Joy, 1991].

Un valor alto en la información mutua indica una reducción grande en la incertidumbre, un valor bajo indica una reducción pequeña, y un valor de cero en la información mutua entre dos variables aleatorias significa que las variables son independientes [Peter y Yasser, 2009]. La información mutua es un caso más general de una cantidad llamada entropía relativa, la cual es una medición de la distancia entre dos mediciones de probabilidad [Cover y Joy, 1991].

La información mutua puede ser muy diferente de la función de autocorrelación y selecciona valores superiores de τ . En sistemas caóticos (con entropía métrica positiva) cualquier banda de medición se extenderá finalmente a la medida invariante. Esto se puede ver mediante estiramientos y doblamientos del sistema. Para evitar este comportamiento es que se escoge el primer mínimo local de la información mutua [Fraser y Swinney, 1986].

La teoría de información de Shannon proporciona un formalismo para cuantificar los conceptos de extensión y nueva información. Fraser y Swinney [1986] aplican esta teoría a los atractores extraños y los resultados que toman en cuenta son los valores que pueden tomar las medidas del atractor. Los atractores extraños son ergódicos y tienen una distribución de probabilidad asintótica bien definida [Fraser y Swinney, 1986].

5.2 Método de los Vecinos Cercanos Falsos

Al obtener el tiempo de rezago o de retardo, se busca determinar la dimensión (m) global entera donde se tiene el número necesario de coordenadas para desplegar las órbitas observadas y eliminar los traslapes producidos por la proyección del atractor en un espacio de dimensión menor, para esto se analiza el conjunto de datos y se observa cuándo se presentan estos traslapes. Se podría pensar que la mejor decisión es asignar una dimensión alta; sin embargo, la elección de un valor demasiado grande de m para datos caóticos añadirá redundancia y, por tanto, disminuirá el rendimiento de muchos algoritmos; entre ellos, el del exponente de Lyapunov [Kantz y Schreiber, 2004]; además, con cada unidad aumentada en la dimensión se aumenta la cantidad de ruido introducida [Sprott, 2003; Valencia, 2010]. Por otro lado, si m es muy pequeña sería imposible reunir información suficiente de todas las variables que influyen el valor de todas las variables medidas para reconstruir

exitosamente el espacio fase [Perc, 2006].

Uno de los métodos más usados para encontrar la dimensión de embebimiento es el llamado método de los vecinos cercanos falsos que fue introducido por *Kennel et al.* [1992] como una herramienta para determinar la mínima dimensión de embebimiento requerida con la finalidad de resolver completamente la estructura compleja del atractor. Nuevamente se puede observar como el teorema de Takens garantiza un embebimiento apropiado para todas las m suficientemente grandes; es decir, también para aquellas que son más grandes que la mínima dimensión de embebimiento requerida. El método depende de suponer que el atractor de un sistema determinístico se pliega y despliega suavemente sin irregularidades repentinas en su estructura. Con esta suposición se puede concluir que dos puntos que son cercanos en el espacio embebido reconstruido, están suficientemente cercanos también durante la iteración directa [Perc, 2006]. *Hegger et al.* [1999] realizan algunas modificaciones al método para evitar resultados espurios provocados por ruido.

La idea básica es la búsqueda de puntos en el conjunto de datos que son vecinos en el espacio embebido, pero que no deben ser vecinos, ya que su futura evolución temporal es muy diferente. Supongamos que la dimensión de embebimiento mínima para una serie de tiempo dada $\{S_i\}$ es m_0 . Esto significa que en un espacio de retardo m_0 -dimensional el atractor reconstruido es una imagen uno a uno del atractor en el espacio fase original. Especialmente las propiedades topológicas son preservadas. Así, los vecinos de un punto dado son mapeados sobre vecinos en el espacio de retardo. Si se estudian los mismos datos en una dimensión embebida menor $m < m_0$, la transición de m_0 a m es una proyección que ya no conserva la estructura topológica. Por lo tanto, los puntos cuyas coordenadas son eliminadas por proyecciones fuertemente diferentes, pueden convertirse en “vecinos falsos” en un espacio dimensional m . La estadística por estudiar es que, por cada punto de la serie de tiempo, tomamos su vecino cercano en m dimensiones y calculamos la proporción de las distancias entre estos dos puntos en $m + 1$ dimensiones y en m dimensiones. Si esta tasa es mayor que un umbral r el vecino es falso. Este umbral tiene que ser lo suficientemente grande para permitir la divergencia exponencial debida al caos determinístico.

La idea del algoritmo es que a cada punto \bar{S}_i en la serie de tiempo se le debe buscar su vecino cercano \bar{S}_j en un espacio m dimensional. Se calcula la distancia $\|\bar{S}_i - \bar{S}_j\|$ iterando ambos puntos:

$$R_i = \frac{|s_{i+1} - s_{j+1}|}{\|\bar{s}_i - \bar{s}_j\|} \quad (4)$$

Si R_i excede un umbral heurístico dado (R_t), entonces pueden resultar valores mayores dando una subestimación de los vecinos falsos y valores menores identificarían muchos vecinos cercanos falsos, en particular cuando los puntos del atractor comienzan a esparcirse, este punto se marca como que tiene un vecino cercano falso. *Kennel et al.* [1992] probaron que $R_t = 10$ es una buena elección para la mayoría del conjunto de datos; últimamente se formuló una prueba matemática formal para esta conclusión [*Perc*, 2006]. El criterio para que la dimensión de embebimiento sea lo suficientemente alta es que la fracción de puntos para los que $R_i > R_t$ sea cero, o al menos suficientemente pequeña. Puede haber algunos vecinos cercanos falsos incluso cuando se trabaja con la dimensión de embebimiento correcta. El resultado de este análisis puede depender del lag [*Kantz y Schreiber*, 2004]. Este método también puede ayudar a determinar la presencia de determinismo en la serie de tiempo [*Perc*, 2006].

5.3 Gráfica de Recurrencia

La estacionariedad y el determinismo son propiedades que hasta cierto punto deben estar presentes para garantizar la relevancia de cantidades invariantes tales como el exponente de Lyapunov. Para esto se usó una prueba de estacionariedad conocida como gráfica de recurrencia, ésta es una herramienta útil para identificar la estructura en el conjunto de datos en el tiempo de manera cualitativa. La estructura puede ser de intermitencia (la cual se puede detectar por inspección visual), puede indicar proximidad temporal de la trayectoria caótica a una órbita periódica inestable, o bien, mostrar no-estacionariedad. La gráfica de recurrencia es un escaneo de la serie de tiempo y marca cada par de índices de tiempo (i, j) con un punto negro, el cual corresponde a un par de vectores de retardo con una distancia $\leq \varepsilon$. Por lo que en el plano (i, j) los puntos negros indican cercanía. En una situación ergódica, los puntos pueden cubrir en promedio, el plano de manera uniforme, mientras que la no estacionariedad

se expresa por una tendencia general de los puntos a estar cerca de la diagonal y mostrar una estructura coherente [Hegger *et al.*, 1999; Dasan *et al.*, 2002]. En términos físicos, ésta compara la distribución de distancias entre pares de vectores en el espacio estado reconstruido, con la distribución de distancias entre diferentes órbitas evolucionando en el tiempo [Dasan *et al.*, 2002]. El regreso del sistema a una situación dinámica ocurrida anteriormente se hace evidente por medio de una región negra alejada de la diagonal. La prueba de estacionariedad se hizo originalmente para determinar si las series de tiempo estudiadas se originaron de un proceso estacionario, de un sistema cuyos parámetros son constantes durante las mediciones. La gráfica de recurrencia no es particularmente sensible a la elección del embebimiento [Hegger *et al.*, 1999].

En cierto sentido, el simple examen de las series de tiempo y sus gráficas de recurrencia a menudo indican si se puede realizar un análisis integral de correlación significativa (más precisamente, tal examen indica a menudo que el análisis no debe ser realizado). Para un sistema que se cree que contiene un atractor de muy baja dimensionalidad (dimensión menor a tres) se puede examinar directamente el diagrama de fase y la sección de Poincaré; si éstas producen distribuciones “desordenadas” sin estructura discernible o aisladas, parches no recurrentes de puntos, la estimación de la integral de correlación debe ser interpretada con extrema precaución. Análogamente, las series temporales que muestran secciones raras en regiones del espacio fase de otra manera inexploradas; así como, series no provenientes de procesos estacionarios y/o la ausencia de retornos cercanos en el espacio fase, no son candidatos prometedores para la búsqueda de caos disipativo de baja dimensión [Provenzale *et al.*, 1992].

Hasta ahora se ha calculado el tiempo de retardo, la dimensión de embebimiento, el diagrama de fase y un medio de comprobar si el sistema viene de un proceso estacionario; sin embargo, aún es necesario llevar a cabo más análisis para poder llegar al objetivo de este estudio.

El estudio de sistemas complejos y caóticos requiere tomar en cuenta toda la información posible acerca del sistema, viéndolo desde un punto de vista físico, es decir, sabemos que los sistemas caóticos deben cumplir la no-periodicidad en su comportamiento; no obstante, hay patrones que se repiten, de igual manera este tipo de sistemas requieren retroalimentación de tipo no-lineal, puesto que su estado actual se encuentra ligado de cierta

manera a su estado anterior, lo anterior requiere el estudio de todos los estados posibles de la dinámica involucrada, es por ello que los siguientes métodos toman en cuenta la evolución del sistema a través de los vecinos cercanos a un punto fijo y la trayectoria seguida por la evolución de éste.

5.4 Gráfica de Separación Espacio-Tiempo y la Ventana de Theiler

Mientras la gráfica de recurrencia muestra tiempos absolutos, la gráfica de separación espacio-tiempo introducida por *Provenzale et al.* [1992], se integra a lo largo de los paralelos a la diagonal y por lo tanto sólo muestra tiempos relativos. Usualmente se dibujan líneas de probabilidad constante por unidad de tiempo para puntos que son un ε -vecino del punto actual, cuando su distancia temporal es δt . Esto ayuda a identificar la correlación temporal dentro de las series de tiempo y es relevante para estimar un tiempo de retardo razonable, no obstante, resulta ser más importante para calcular la ventana de Theiler W , que es muy utilizada en análisis dimensional y para el cálculo del exponente de Lyapunov. Dicho en otras palabras, esta gráfica muestra qué tan grande es la distancia temporal entre puntos, de modo que se puede suponer que forman muestras independientes de acuerdo con mediciones invariantes [*Hegger et al.*, 1999]. Este método junto con la ventana de Theiler, surgieron la necesidad de poder obtener resultados confiables en la integral de correlación.

Theiler [1986] demuestra que las correlaciones a corto plazo pueden producir líneas bastante curvadas llamadas “rodillas” en la integral de correlación, debido a la naturaleza unidimensional de la trayectoria y esto inhibe una buena estimación de la dimensión.

La integral de correlación representa la probabilidad de que un par de puntos escogidos aleatoriamente sobre la reconstrucción tengan una distancia menor a r . Cuando se hacen los cálculos estándar se asume que las distancias entre pares de puntos se deben a la geometría de la reconstrucción, no porque los puntos estén dinámicamente correlacionados y su separación en el espacio refleje el ser vecinos en el tiempo. Esta correlación temporal lleva a *Theiler* a restringir la suma en la integral de correlación (la cual será explicada más adelante) para los pares i, j donde $|i - j| > W$ para alguna constante W . Las curvas que se obtienen de la gráfica de separación espacio-tiempo representan un método para elegir W ; en el caso de ruidos de leyes de potencia no-estacionarias, la gráfica indica que no hay ningún

valor de W para el cual la integral de correlación refleje escalamiento global debido a la recurrencia.

Las gráficas de separación espacio-tiempo muestran como la distancia temporal entre pares de puntos de datos afecta su distancia espacial en el atractor reconstruido, para esto W puede ser suficientemente grande para excluir estos puntos de datos para los cuales la distancia espacial es afectada por su distancia temporal, es decir, W remueve temporalmente los puntos de datos cercanos desde el conjunto de pares usados para estimar la divergencia de la trayectoria [Guastello y Gregson, 2011].

Una forma fácil de obtener la ventana de *Theiler* es multiplicando el tiempo de la función de autocorrelación por tres [Heath,2000], pero una forma más rigurosa es, como ya se había mencionado, utilizando la gráfica de separación espacio-tiempo, en donde, para las series caóticas, las curvas de contorno inicialmente suben, entonces oscilan alrededor de un valor constante mientras que, para series con ruidos de color éstas continúan subiendo [Guastello y Gregson, 2011].

Para la construcción de una serie de tiempo, cada par de puntos de la reconstrucción es separada en el espacio fase por alguna distancia r y en el tiempo por algún Δt . El enfoque de *Provenzale et al.* [1992] es considerar explícitamente la separación temporal de puntos, primero, a través de una gráfica de dispersión de la separación entre dos puntos en el espacio contra su separación en el tiempo. Para Δt pequeños los puntos siempre están cerca de los vecinos en el espacio, ya que su separación en el tiempo aumenta y, por ende, también lo hace su separación en el espacio.

La integral de correlación es usualmente calculada incluyendo estas separaciones temporales con la suposición implícita de que el promedio de oscilaciones visibles está ausente. La aproximación de *Theiler* remueve la contribución de la región $|i - j| < W$. Para un sistema caótico el decaimiento de las correlaciones con el tiempo resulta en la convergencia de partes a una Δt constante para la integral de correlación a una Δt grande [Provenzale et al., 1992].

La conexión con la integral de correlación es directa: $C(r)$ es simplemente la suma sobre Δt grande para una r dada. La utilidad de esta gráfica es que: a) proporciona una estimación cuantitativa de lo que constituye un Δt grande (normalmente aquellos valores donde los contornos han alcanzado su comportamiento asintótico); b) es sensible a los

parámetros de reconstrucción específicos usados, y a la estructura completa no lineal en m dimensiones en contraposición a la función de autocorrelación (lineal), o a la información mutua unidimensional, y c) computacionalmente, es un subconjunto de la integral de correlación. Notar que estas distribuciones también pueden ser usadas para estimar el corte interno para el rango de escala en una separación espacial de puntos con una correlación dinámica mínima. La gráfica de separación espacio-tiempo cuantifica la ocurrencia (o ausencia) de regresos cercanos en series temporales más sutiles, donde sus contornos indican la fracción de puntos más cercanos a una distancia r en una separación de tiempo dada [Provenzale et al., 1992].

Ya se especificaron las características de la gráfica de separación y su utilidad, dentro de este contexto se ha enfatizado sobre la importancia de su cálculo para la ventana de Theiler, cabe resaltar que esta ventana asegura que el espaciamiento temporal entre pares potenciales de puntos sea bastante grande para representar una muestra independientemente distribuida de forma idéntica (si W es demasiado pequeña la estimación de la dimensión de correlación puede estar sesgada hacia un tamaño demasiado pequeño, por ejemplo, por efectos de intermitencia) [Bradley y Kantz, 2015]. Para poder comprender su importancia es necesario explicar primero la integral de correlación, ya que esta ventana surge de la necesidad de resolver algunos inconvenientes que surgieron con este método.

5.5 Integral de Correlación

Existe toda una familia de dimensiones fractales D_q , usualmente llamadas las dimensiones Renyi. Su definición más intuitiva es a través de una partición del espacio de estado: El número de cajas N_ε de tamaño ε que se necesitan para cubrir un conjunto fractal con escalas de dimensión D_0 con un tamaño de caja ε como ε^{-D_0} . D_0 es llamada la “capacidad de dimensión” y es cercanamente relacionada a la “dimensión de Hausdorff” [Bradley y Kantz, 2015].

Es posible la aplicación directa del método de conteo de cajas a los puntos del espacio de estado reconstruido, pero implica memoria significativa y demanda de procesamiento; por otro lado, los resultados pueden ser muy sensibles a la longitud de los datos [Bradley y Kantz,

2015]. Entre los diferentes procedimientos que se han desarrollado para calcular la dimensión fractal está el método de los vecinos cercanos [Badii y Politi, 1985], el método de la integral de correlación [Grassberger-Procaccia, 1983a] y el método de sistema-singular [Broomhead y King, 1986]. Se ha reportado cierta información sobre la calidad de los resultados obtenidos con los diferentes métodos [Holzfuss y Mayer-Kress, 1986]. Sin embargo, el método más robusto y eficiente para estimar la dimensión fractal es la suma o integral de correlación de Grassberger-Procaccia [Bradley y Kantz, 2015].

El algoritmo de *Grassberger-Procaccia* implica el cálculo de la integral de correlación cuyo comportamiento de ley de potencia es usado para estimar la dimensión del atractor. Esta dimensión es; sin embargo, una medición del “número de modos activos” en el sistema o del “número efectivo de grados de libertad” [Theiler, 1986]. La integral de correlación calcula la dimensión efectiva de la dinámica subyacente, no tiene nada que ver con la cercanía de los puntos en el espacio fase debido a correlaciones temporales [Dasan et al., 2002].

Theiler [1986] examinó la estructura de la integral de correlación tanto para datos estocásticos como para datos dinámicos, y en ambos casos encontró que, para conjuntos de datos limitados, con una autocorrelación alta, la integral de correlación mostraba una curva ascendente (“hombro”) anómala, la cual, como ya se mencionó anteriormente, inhibe una buena estimación de la dimensión.

Retomando el teorema de *Takens*, que fue el que sirvió para formar el espacio de fases, al transformar la información dinámica de los datos unidimensionales en información espacial en un conjunto m -dimensional, se mostró que para m suficientemente grande y con “ciertas condiciones genéricas” sobre la medición, un sistema, el cual tiene un atractor v -dimensional en su espacio de fase, tendrá sus vectores de *Takens* situados en un subconjunto v -dimensional del espacio embebido \mathbb{R}^m [Theiler, 1986].

Para obtener v , *Grassberger* y *Procaccia* introdujeron la siguiente integral de correlación:

$$C(r, N) = \frac{2}{N^2} \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{N-n} H(r - |V_{i+n} - V_i|) \quad (5)$$

Donde $H(x)$ es la función de paso de Heaviside. La dimensión de correlación es entonces definida por el límite:

$$\nu = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log C(r, N)}{\log r} \quad (6)$$

o cuando éste existe:

$$\nu = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{d[\log C(r, N)]/dr}{d(\log r)/dr} \quad (7)$$

Con datos finitos; sin embargo, no se puede tomar ningún límite, N puede ser tan grande como sea posible y r puede ser tan pequeño como la menor de las N^2 distancias. Lo que usualmente se hace, aunque no siempre, es construir una gráfica log-log de la curva $C(r, N)$ y obtener una pendiente en el pequeño régimen de r . Se espera un amplio rango sobre el cual la pendiente sea constante por lo que el valor de ésta puede ser exactamente determinada [Theiler, 1986].

Theiler [1986] mostró que, para datos auto-correlacionados, el rango de pendiente constante sobre la gráfica log-log puede estar indebidamente restringido si el número de puntos de datos N es limitado. La restricción no es algo fundamental, sin embargo, puede fijarse sin incrementar N . Esto se puede hacer con una versión generalizada de la integral de correlación:

$$C(r, N, W) = \frac{2}{N^2} \sum_{n=W}^N \sum_{i=1}^{N-n} H(r - |V_{i+n} - V_i|) \quad (8)$$

Hay que recordar que $W = 1$ nos regresa a la fórmula estándar de Grassberger-Procaccia.

La integral de correlación está clasificada en dos regímenes cualitativamente diferentes:

1. Si N es suficientemente grande (o α suficientemente pequeña; α es la autocorrelación), entonces el efecto de autocorrelación es despreciable, la trayectoria

llena el espacio fase y la pendiente de $\log C(r, N, W)$ y $\log r$ aproxima la curva de dimensión de embebimiento m a $r \ll \sigma$, con σ la desviación estándar [Theiler, 1986].

2. Para una N que no es suficientemente grande (o α bastante cerca de la unidad) el efecto de autocorrelación se vuelve perceptible y, aunque la trayectoria aún llena el espacio fase, la integral de correlación no tiene un buen comportamiento, una estructura es inducida en la curva de correlación; inhibiendo así, la estimación de la dimensión [Theiler, 1986].

No es esencial, pero si hace más fácil el análisis si se impone que el tiempo de retardo T sea mayor que el tiempo de autocorrelación τ . Esto permite tratar X_i y X_{i+T} como independientes y simplificar la expresión para la probabilidad de que dos vectores estén separados por una distancia menor que r .

Reemplazando la ecuación (8) por una suma interna sobre la función de Heaviside y haciendo una sustitución en su valor esperado, da:

$$C(r, N, W) = \frac{2}{N^2} \sum_{n=w}^N (N - n) \left[\operatorname{erf} \left[\frac{r}{2\sigma(1-\alpha^n)^{\frac{1}{2}}} \right] \right]^m \quad (9)$$

Cuando $\alpha = 0$ entonces

$$C(r, N, W) = \left[\operatorname{erf} \left[\frac{r}{2\sigma} \right] \right]^m \quad (10)$$

Mientras que, para cuando $\alpha \approx 1$ o N es suficientemente grande, la ecuación (9) no se puede expresar tan fácilmente, en este caso la ecuación (9) se reduce a:

$$C(r, N, W) = \frac{2}{N} (N - W) \left[\operatorname{erf} \left[\frac{r}{2\sigma(1-\alpha^W)^{\frac{1}{2}}} \right] \right]^m \quad (11)$$

El rango utilizable de $C(r, N, W)$, es decir, el rango sobre el cual $C(r, N, W) \propto r^m$ podría ser entre $2/N^2$ y el orden de 1, para el límite interrelacionado, mientras que, para el caso de la autocorrelación es entre $2/N^2$ y $2/N$.

El límite de no correlación puede ser alcanzado tomando en cuenta una N suficientemente grande, pero “suficientemente grande” puede ser de hecho muy grande. Con $W = 1$ entonces $N \gg 2\tau^{m/2}$, donde m es la dimensión de embebimiento. Una posibilidad es disminuir la tasa de muestreo en los datos originales, por lo que τ disminuye, o hacer que $W > 1$ [Theiler, 1986].

Si $w > \tau(\frac{2}{N})^{2/m}$ entonces habrá N puntos de datos suficientes para que el rango de linealidad no sea comprometido en la gráfica log-log. Es notable que W es típicamente mucho menor que N . Si desde un punto de vista intuitivo tomamos $w > \tau$ aseguramos que el pequeño comportamiento de r de la función de autocorrelación sólo cuente accidentalmente los pares cercanos de vectores, esto no está sesgado por aquellos vectores que sólo son cercanos en el espacio, pero no lo están en el tiempo.

Theiler [1986] recomienda que $W \approx \tau$ es una buena elección, no obstante, señala que mientras $w > \tau(\frac{2}{N})^{2/m}$, la elección exacta de W no es importante.

5.6 Exponente de Lyapunov

El hecho de que las trayectorias diverjan en el transcurso del tiempo no es en sí mismo muy significativo si esto fuera un proceso lento, como es típico de sistemas predominantemente periódicos, por lo que se habla de caos sólo si esta separación es exponencialmente rápida. El exponente correctamente promediado es característico para el sistema subyacente de los datos y cuantifica la fuerza del caos, a esto se le llama exponente de Lyapunov.

El exponente de Lyapunov no depende de las modificaciones hechas a los datos, es decir, es independiente de la métrica usada para determinar la distancia entre perturbaciones y la elección de las variables. Es invariante bajo transformaciones suaves, la razón básica es porque el exponente de Lyapunov describe el comportamiento a largo plazo, proporcionando una caracterización objetiva de la dinámica correspondiente. Cualquier re-parametrización invertible suave del espacio fase puede modificar las proporciones de distancia únicamente

por factores finitos. Tales factores se alejan en el límite como $\Delta n \rightarrow \infty$. Esto justifica el interés en este número, ya que todo el mundo va a encontrar exactamente los mismos resultados de su propia observación, siempre y cuando el sistema físico subyacente sea realmente el mismo.

Detectar la presencia de caos en sistemas dinámicos es un problema importante que se resuelve por medio del máximo exponente de Lyapunov, éste cuantifica la convergencia o divergencia exponencial de trayectorias inicialmente cercanas en el espacio estado y estima la cantidad de caos en un sistema [Rosenstein et al., 1993; Haken, 1981; Wolf, 1986]. De acuerdo con Stoop y Parisi [1991] λ proporciona una medición cuantitativa de la velocidad de separación promedio de trayectorias cercanas sobre el atractor. Este exponente no sólo proporciona una caracterización cualitativa del comportamiento dinámico, sino que también proporciona la medición de previsibilidad [Ataei et al., 2003].

Se pueden definir diferentes exponentes de Lyapunov para un sistema dinámico como dimensiones de espacio fase se hallen. El máximo exponente de Lyapunov puede ser determinado sin la construcción explícita de un modelo para las series de tiempo. Una caracterización fiable requiere que la independencia de parámetros embebidos y la ley exponencial para el crecimiento de distancias sean comprobadas explícitamente [Rigney et al., 1993; Rosenstein, 1993]. Considere la representación de los datos de la serie de tiempo como una trayectoria en el espacio embebido y asumiendo que se ha observado de cerca el retorno de un punto S_{n_2} a un punto visitado previamente S_{n_1} , entonces se puede considerar la distancia $\|S_{n_1} - S_{n_2}\| = \delta_0 \ll 1$ como una pequeña perturbación, la cual podría crecer exponencialmente en el tiempo. Denotamos por $\delta_{\Delta n}$ la distancia en algún tiempo Δn por delante entre las dos trayectorias que emergen de estos puntos, $\delta_{\Delta n} = \|S_{n_1+\Delta n} - S_{n_2+\Delta n}\|$. Entonces λ es determinado por:

$$\delta_{\Delta n} \simeq \delta_0 e^{\lambda \Delta n}, \quad \delta_{\Delta n} \ll 1, \quad \Delta n \gg 1 \quad (12)$$

Si λ es positiva significa que hay divergencia exponencial de trayectorias cercanas, es decir, caos. Naturalmente, dos trayectorias no pueden separarse más allá del tamaño del atractor,

de tal manera que la ley de la ecuación (12) sólo es válida durante los tiempos Δn para los cuales $\delta_{\Delta n}$ sigue siendo pequeño. De otra manera se observa una violación en la ecuación (12) en la forma de una saturación en la distancia [Kantz y Schreiber, 2004]. Debido a ese hecho, una definición matemáticamente más rigurosa deberá involucrar un primer límite $\delta_0 \rightarrow 0$ tal que, un segundo límite $\Delta n \rightarrow \infty$ puede ser desarrollado sin involucrar efectos de saturación. Sólo en el segundo límite el exponente λ se vuelve una cantidad bien definida e invariante. Los exponentes de Lyapunov llevan unidades de $1/t$ y dan una escala de tiempo típica para divergencia y convergencia de trayectorias cercanas.

En sistemas disipativos también se puede encontrar un exponente máximo de Lyapunov negativo, el cual refleja la existencia de un punto fijo estable. Dos trayectorias que se aproximan a un punto fijo también se aproximan la una a la otra exponencialmente rápido. Si el movimiento se establece en un ciclo límite, dos trayectorias sólo pueden separarse o aproximarse la una a la otra lentamente más que exponencialmente. En este caso el máximo exponente de Lyapunov es cero y el movimiento es llamado marginalmente estable. Si un sistema predominantemente determinístico es perturbado por ruido aleatorio sobre escalas pequeñas, éste puede ser caracterizado por un proceso de difusión, con $\delta_{\Delta n}$ creciendo como \sqrt{n} . Así, el máximo exponente de Lyapunov es infinito. Algunas veces, el exponente de movimiento difusivo se dice que es cero, debido a que las distancias entre dos caminos que empiezan en el mismo punto crecen como \sqrt{t} . Sin embargo, la naturaleza afín de caminos Brownianos sugiere ver el comportamiento en el límite de tiempos cortos, donde la derivada de \sqrt{t} con respecto a t diverge. También $\lambda = \infty$ para movimiento Browniano concuerda con el hecho de que la entropía de un proceso estocástico es infinita. De acuerdo con la definición matemática, esto es cierto sin importar que tan pequeña sea la componente de ruido. Si suponemos que sólo hay error aditivo de medición, podemos; sin embargo, intentar estimar el exponente de Lyapunov al asumir un sistema determinístico subyacente (ver Tabla 6.1) [Kantz y Schreiber, 2004].

Tabla 5.1. Tipos posibles de movimiento y el exponente de Lyapunov correspondiente.

| <i>TIPO DE MOVIMIENTO</i> | <i>EXPONENTE MÁXIMO DE LYAPUNOV</i> |
|---------------------------|-------------------------------------|
| Punto Fijo Estable | $\lambda < 0$ |
| Ciclo Límite Estable | $\lambda = 0$ |
| Caos | $0 < \lambda < \infty$ |
| Ruido | $\lambda = \infty$ |

Se desarrollaron diferentes métodos para estimar los exponentes de Lyapunov a partir de sistemas cuyas ecuaciones diferenciales son bien conocidas; sin embargo, también es deseable desarrollar métodos en casos donde no se cuente con esta información, pero si se tenga un registro de una serie de tiempo, ya que ésta se ve afectada por diferentes variables dinámicas y contiene un registro histórico relativamente completo de la dinámica del sistema [Yang et al., 2012]. Los algoritmos más usados para obtener el exponente de Lyapunov son los propuestos por *Wolf*, *Eckmann-Ruelle*, *Kantz* y *Rosenstein*; aunque el método de *Wolf* no es el más recomendado como se verá enseguida.

El primer algoritmo para calcular los exponentes de Lyapunov para series de tiempo fue propuesto por *Wolf et al.* [1985]. En coordenadas de retardo de dimensiones apropiadas uno busca un punto de la serie de tiempo que esté más cerca de un primer punto fijo. Esto es considerado como el inicio de una trayectoria vecina, dada por los vectores de retardo consecutivos. Se calcula el incremento en la distancia entre estas dos trayectorias en el tiempo. Cuando la distancia excede algún umbral, se busca una nueva trayectoria vecina para este punto de la serie de tiempo cuya distancia sea tan pequeña como sea posible, bajo la limitación de que la nueva diferencia de vectores señale más o menos en la misma dirección que la anterior. Esta es la dirección del eigenvector local asociado a $\lambda_{\text{máx}}$. Los logaritmos de los factores de estiramiento de los vectores de diferencia son promediados en el tiempo para dar el máximo exponente de Lyapunov [Kantz, 1994].

Si los datos son ruidosos es necesario pedir que la distancia inicial entre la trayectoria de referencia y una trayectoria vecina sea mayor que el nivel del ruido, de otra manera, se podrían interpretar las fluctuaciones debidas al ruido como divergencia determinística [Kantz, 1994].

Otro inconveniente es que la dimensión de embebimiento es un parámetro importante,

para una dimensión demasiado pequeña, el exponente es severamente sobre valorado, ya que las trayectorias pueden divergir simplemente porque no son vecinas en el espacio fase verdadero, mientras que, en una dimensión demasiado amplia no se plantean problemas en principio. Típicamente la distancia inicial entre las trayectorias vecinas se incrementa con las dimensiones de embebimiento [Kantz, 1994].

Los métodos de *Wolf y Eckmann-Ruelle* para los exponentes de Lyapunov asumen que la fuente de datos es de hecho un sistema dinámico determinístico, y que las fluctuaciones irregulares de los datos de las series de tiempo son debidas al caos determinístico. Una aplicación ciega de este algoritmo a un conjunto de datos arbitrarios siempre producirá números, es decir, estos métodos no ofrecen una prueba fuerte de si el número calculado puede realmente ser interpretado como el exponente de Lyapunov de un sistema determinístico [Kantz et al., 2013].

El método de *Rosenstein* es preciso ya que, toma ventaja de todos los datos disponibles. El algoritmo es rápido, fácil de implementar y robusto para cambios en las siguientes cantidades: dimensiones embebidas; tamaño del conjunto de datos; reconstrucción del retardo y nivel de ruido [Rosenstein et al., 1993].

El método de *Kantz* [1994] se deduce directamente de la definición del exponente máximo de Lyapunov (la distancia entre dos trayectorias típicamente se incrementa con una tasa dada por el exponente) y para este algoritmo se toman en cuenta dos cosas:

- Una divergencia exponencial se establece sólo después de algún tiempo transitorio, ya que un vector arbitrario de diferencia tiene que convertirse en la dirección más inestable.
- La tasa de la divergencia de las trayectorias naturalmente fluctúa a lo largo de la trayectoria con la fluctuación dada por el espectro de los exponentes efectivos de Lyapunov [Kantz, 1994].

El máximo exponente de Lyapunov se define como:

$$\lambda_{\tau}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \ln\left(\frac{|x(t+\tau) - x_{\varepsilon}(t+\tau)|}{\varepsilon}\right), \quad x(t) - x_{\varepsilon}(t) = \varepsilon w_u(t) \quad (13)$$

Donde $w_u(t)$ es el eigenvector local asociado con el máximo exponente de Lyapunov $\lambda_{\text{máx}}$. El valor para $\lambda_\tau(t)$ depende de la estructura en el espacio tangente y, por lo tanto, depende de la posición. Es aproximadamente lo mismo para todas las trayectorias dentro de una pequeña vecindad. Por definición, el promedio de $\lambda_\tau(t)$ a lo largo de la trayectoria es el verdadero exponente de Lyapunov.

Para obtener el exponente de Lyapunov se escoge un punto arbitrario de la serie de tiempo en coordenadas de retardo m -dimensional, $x_t = (x_{t-m+1}, \dots, x_t)$. Todos los vectores de retardo de la serie que caigan dentro de la ε -vecindad U_t de x_t serán considerados como el comienzo de trayectorias vecinas, las cuales son dadas por los puntos de la serie de tiempo consecutivos en el tiempo. Aparte del hecho de que se tiene que fijar una dimensión para buscar vecinos, no es necesario distinguir ninguna dimensión en particular, por lo que, se define la distancia entre trayectorias de referencia x_t y un vecino x_i después de un tiempo relativo τ por:

$$\text{dist}(x_t, x_i, \tau) = |x_{t+\tau} - x_{i+\tau}| \quad (14)$$

Estas distancias son (generalmente no lineales) proyecciones de los vectores de diferencia en el espacio de estado verdadero sobre un subespacio unidimensional abarcado por la observable (en el caso simple, la observable misma es una coordenada del espacio fase). Por lo tanto, son modulados con $|\cos\phi|$ donde ϕ es el ángulo entre el eigenvector correspondiente a $\lambda_{\text{máx}}$ y la dirección local del subespacio sobre el cual vive la observable.

Al igual que el exponente efectivo de Lyapunov, el ángulo ϕ depende de la posición en el espacio fase y, por tanto, es casi el mismo para todos los vecinos $x_i \in U_t$ para una trayectoria de referencia x_t , si la distancia en el espacio fase es suficientemente pequeña.

Con la finalidad de medir el máximo exponente de Lyapunov se fija una t , se buscan todos los vecinos x_i dentro de una ε -vecindad U_t y se calcula el promedio de las distancias entre todas las trayectorias vecinas y la trayectoria de referencia ε -vecindad x_t como una función de τ . Para deshacerse de posibles fluctuaciones se toma el logaritmo de las distancias promedio, el cual da un exponente de Lyapunov local efectivo más fluctuaciones dadas por el ángulo ϕ . Entonces se obtiene el promedio en t sobre la longitud completa de la serie de tiempo. Los ángulos locales son promediados y los exponentes efectivos son promediados al

exponente de Lyapunov verdadero. El algoritmo para la búsqueda de vecinos queda como:

$$S(\Delta n) = \frac{1}{N} \sum_{n_0=1}^N \ln\left(\frac{1}{|\mathcal{U}(S_{n_0})|} \sum_{S_n \in \mathcal{U}(S_{n_0})} |S_{n_0+\Delta n} - S_{n+\Delta n}|\right) \quad (15)$$

Con los parámetros definidos de la siguiente manera:

- S_{n_0} , punto arbitrario de referencia en la serie de tiempo, son vectores embebidos.
- $\mathcal{U}(S_{n_0})$ es la vecindad de S_{n_0} con diámetro ε .
- S_n es vecino de S_{n_0} .
- Δn , escala de tiempo relativa para la tasa de muestreo.
- N , longitud de la serie de tiempo.
- $S(\Delta n)$ es el factor de estiramiento con la región de incremento lineal robusto, mostrando una pendiente igual al exponente de Lyapunov $iee^{\lambda\tau} \propto e^{S(\tau)}$ [Kantz, 1994; Kantz y Schreiber, 2004; McCue et al., 2011].

Donde $|S_{n_0+\Delta n} - S_{n+\Delta n}| = \sum a_i \exp(\lambda_i t)$, donde λ_i son los exponentes efectivos de Lyapunov en las diferentes direcciones estables e inestables. Por consiguiente, para τ pequeño no se puede esperar un comportamiento escalado. Para un rango intermedio de τ , el incremento lineal $S(\Delta n)$ con la pendiente λ , la cual es la estimación del máximo exponente de Lyapunov. Este es el rango escalado, donde por un lado τ es suficientemente grande tal que, casi todos los vectores de distancia apuntan hacia la dirección inestable y por el otro, las distancias correspondientes $dist(\tau)$ son más pequeñas que el tamaño del atractor. Cuando alcanzan el tamaño final, $S(\Delta n)$ tiende asintóticamente hacia una constante (la cual es $<1/4$ si el diámetro del atractor es normalizado a 1) ya que las distancias no pueden crecer más.

Si los datos son ruidosos, la distancia típica entre dos trayectorias cercanas es del orden del nivel del ruido. Si se escoge un ε más pequeño que la amplitud del ruido y si se encuentran vecinos para este valor, $S(\Delta n)$ cambia de un valor más pequeño que $\ln \varepsilon$ para un valor dado por el nivel de ruido en $\tau = 1$. Si este valor no es muy grande, aún se puede encontrar un rango escalado y, por tanto, el exponente no será afectado por el ruido.

Nótese que el último elemento de S_{n_0} es S_{n_0} , donde $S_{n_0+\Delta n}$ está fuera del periodo de tiempo cubierto por el vector de retardo S_{n_0} . Puesto que a priori uno podría no saber ni la dimensión de embebimiento m ni la distancia óptima ε , se puede calcular $S(\Delta n)$ para una variedad de ambos valores. El tamaño de la vecindad debe ser lo más pequeño posible, pero suficientemente grande para que en promedio cada punto de referencia tenga al menos un par de vecinos [Kantz y Schreiber, 2004]. Si $S(\Delta n)$ se incrementa linealmente con Δn para un Δn pequeño con pendiente idéntica para todas las dimensiones “ m ” mayores a un m_0 para un rango razonable de r , entonces la pendiente puede tomarse como una estimación del máximo exponente de Lyapunov [Dasan et al., 2002].

Si para algún rango de Δn la función $S(\Delta n)$ exhibe un incremento lineal robusto su pendiente es una estimación del máximo exponente de Lyapunov, se pone énfasis en la palabra robusto ya que encontrar un incremento lineal para valores aislados, optimizados de m y ε no pueden considerarse como una firma positiva de divergencia exponencial [Kantz y Schreiber, 2004].

Antes de dar un valor numérico para λ , se debe intentar entender las desviaciones de las curvas desde el comportamiento lineal; la información más útil viene de las curvas de en medio, para las cuales la distancia inicial de las trayectorias es suficientemente pequeña tal que, hay suficientes pasos de tiempo para la divergencia exponencial antes de que terminen los efectos de saturación de la parte lineal [Kantz y Schreiber, 2004].

5.7 Métodos para diferenciar entre caos y ruido dentro de una serie de tiempo

Debido a que la no-linealidad es una condición necesaria para un comportamiento caótico, particularmente ha recibido especial atención la pregunta acerca de si una serie de tiempo errática observada es compatible con un proceso aleatorio lineal [Diks, 1999].

Las aplicaciones a experimentos de laboratorio bien controlados han llevado a determinar la presencia de caos de baja dimensionalidad en varios contextos experimentales [Atten et al., 1984; Brandstater et al., 1983; Cilberto y Gollub, 1985] donde estos sistemas fueron caracterizados por un grado limitado de complejidad espacial por la habilidad de ajustar los parámetros de control [Provenzale et al., 1992].

La situación es más complicada para sistemas naturales (no controlados) como los presentados por *Cannizo et al.* [1990], *Fraedrich* [1986], *Grassberger* [1986], *Harding et al.* [1990], *Keppenne y Nicolis* [1989], *Kollath* [1990], *Lorenz* [1991], *Norris y Matilsky* [1989], *Osborne et al.* [1986], *Shan et al.* [1991], *Tsonis y Elsner* [1988], *Voges et al.* [1987], donde reclaman la coexistencia de atractores de baja dimensionalidad para los mismos datos; así como, para sistemas dominados por la presencia de ruidos de color con un espectro de potencia que cumpla las leyes de potencia [*Osborne et al.*, 1986; *Osborne y Provenzale*, 1989; *Provenzale et al.*, 1991] o para procesos estocásticos no-lineales [*Vio et al.*, 1992].

La importancia de probar la hipótesis respecto a la naturaleza del mecanismo generador de series temporales observadas, se ha reconocido en la literatura del caos debido a que es bien conocido que incluso series de tiempo estocásticas lineales, pueden dar lugar a identificaciones espurias en caos de baja dimensionalidad con el método de Grassberger-Procaccia [*Diks*, 1999].

Una prueba para la hipótesis de que una serie de tiempo consiste de observaciones distribuidas idénticamente independientes (i.i.d) fue desarrollada por *Brock et al.* [1987]. *Takens* [1993] propone una prueba bootstrap paramétrica para la linealidad. Se utiliza un modelo lineal óptimo ajustado para generar series de tiempo “surrogadas” (“sustitutivas”) con innovaciones tomadas de los residuos del ajuste. Los datos surrogados son comparados con la serie de tiempo original usando la Integral de Correlación como una prueba estadística [*Diks*, 1999]. Por otro lado, la entropía K_2 también es usada, en el caso donde la

entropía es cero se tienen sistemas periódicos o cuasi-periódicos. K_2 es positiva para sistemas caóticos y diverge para ruido blanco, sin embargo, *Osborne y Provenzale* [1989] y *Provenzale et al.* [1991] encontraron que procesos estocásticos simples, caracterizados por un espectro que cumple con las leyes de decaimiento potencial, con aleatoriedad, independientes y fases de Fourier uniformemente distribuidas, generan series de tiempo con dimensión de correlación finita y estimaciones de convergencia en la entropía, ambas determinadas por una pendiente espectral logarítmica [*Provenzale et al.*, 1992].

Se han utilizado varios métodos para tratar de probar la existencia de caos en los sistemas de estudios, muchos de estos métodos se han basado en los datos surrogados; no obstante, se ha

argumentado que los métodos basados en series de tiempo de sustitución aleatoria de fase se han adaptado para probar la hipótesis de que la serie de tiempo es una realización de un proceso aleatorio lineal Gaussiano y, que una prueba exacta de nivel α puede ser construida basada en cualquier estadístico de interés [Diks, 1999]. Otras mediciones para no-linealidad incluyen, asimetría de las series de tiempo [King, 1996; Schreiber y Schmitz, 2000; Diks 1999], armónicos en el poder espectral [King, 1996], modulaciones de las series [King, 1996], la presencia de tonos de combinación en el espectro de potencia [Ghil y Treut, 1981; Yiou et al., 1994] y otros [Nicolis y Nicolis, 1984; Tsonis y Elsner, 1992; Ashkenazy et al., 2003].

El ruido de color no es la única clase de ruido aleatorio que da una estimación finita de la dimensión de correlación y la entropía. Vio et al. [1992] estudió dos series de tiempo generadas por un proceso estocástico lineal y no-lineal, donde el valor calculado de la dimensión de correlación para ambas señales es ligeramente mayor que el valor indicado por la expresión $\nu = \frac{2}{\alpha-1} = 2$ cuando $\alpha=2$. Esto es debido al hecho de que las dos señales tienden a aplanarse en bajas frecuencias, lo cual es consistente con la naturaleza estacionaria del proceso. Cuando la longitud de las series incrementa el ruido en ambas series tiende a llenar todo el espacio, como es requerido por procesos estocásticos estacionarios. Sin embargo, la convergencia es lenta y para un número finito de puntos, se puede obtener una aparente estimación finita de la dimensión de correlación. El aumento de la dimensión estimada con el aumento en la longitud de la serie puede advertirnos a cerca de las dimensiones engañosas [Provenzale et al., 1992].

La prueba para la presencia de no-linealidad debe dar un resultado positivo. Sin embargo, encontrar que una serie de tiempo es no-lineal no es suficiente para inferir la presencia de dinámicas determinísticas de baja dimensionalidad [Provenzale et al., 1992].

Entre los muchos métodos que existen para probar la no-linealidad de las series de tiempo, en este proyecto se usaron sólo tres de ellos, uno fue desarrollado por Diks et al. [1995], en donde utilizaron la reversibilidad del tiempo como un criterio para discriminar series de tiempo. Ellos pusieron particular interés en desarrollar una prueba que tomara en cuenta la posibilidad de que el proceso generador de la serie de tiempo sea una transformación estática no-lineal de un proceso aleatorio Gaussiano lineal.

Debido a que una transformación f estática no-lineal uno a uno, que mapea cada una de las x_n observaciones de una serie de tiempo Gaussiana lineal a $Y_n = f(X_n)$ puede producir no-linealidad en la serie de tiempo Y_n . Algunos autores han explicado esta “no-linealidad trivial” al tomarla en cuenta en la hipótesis nula. Se dice que una serie de tiempo es reversible si sus propiedades probabilísticas son invariantes con respecto a la inversión del tiempo, de lo contrario se dice que es irreversible. El rechazo de la hipótesis nula implica la serie de tiempo no está bien descrita por una transformación estática de un proceso aleatorio Gaussiano lineal.

De acuerdo con *Diks et al.* [1995], se puede hacer en principio una inspección visual de los datos al graficarlos en un espacio fase y si al introducir una línea diagonal en la gráfica podemos ver similitud entre las dos partes del gráfico, entonces podemos decir que la serie de tiempo es reversible; si por el contrario, las dos partes de la gráfica producidas por la diagonal, no son similares, el proceso es irreversible, lo que lleva a una serie no-lineal. A manera de hacer esta prueba más formal, *Diks et al.* [1995] desarrollaron una prueba estadística.

5.8 Análisis Espectral

Otra parte importante del análisis realizado en este estudio fue el análisis espectral llevado a cabo para las tres series de tiempo. Antes de aplicar los diferentes métodos espectrales, es necesario aplicar algún filtro a las series temporales con la finalidad de eliminar la mayor cantidad de ruido. En este caso se utilizó el filtro de Kalman ya que, filtra; predice y suaviza la serie.

El filtro de Kalman es un algoritmo que se basa en el modelo de espacio de estados de un sistema para estimar el estado y la salida futura realizando un filtrado óptimo a la señal de salida, y dependiendo del retraso de las muestras que se le ingresan puede cumplir la función de estimador de parámetros o únicamente de filtro. En ambos casos se elimina ruido. Estas ecuaciones son ampliamente utilizadas ya que incluyen probabilidades estadísticas puesto que toma en cuenta la aleatoriedad tanto de la señal como del ruido. A diferencia de otros tipos de filtros, éste no requiere de una frecuencia de corte específica debido a que se basa en la característica del ruido, permitiendo de esta manera filtrar en todo el espectro de

frecuencias [Díaz y Arteaga, 2001; Haykin, 2009].

Entre varias de sus aplicaciones se encuentran la estimación demográfica; procesamiento de señales biológicas; sistemas de navegación; predecir el comportamiento de variables económicas; procesamiento de imágenes, entre otras [Qi-tu y Kaykin, 1983; Jwo y Chang, 2008; Meller y Laban, 1987; Avendaño et al., 2007].

El filtro de Kalman está dirigido al problema general de intentar estimar el estado $x \in \mathfrak{R}^n$ de un proceso controlado en tiempo discreto que es gobernado por una ecuación diferencial estocástica lineal. El filtro es un procedimiento matemático que opera por medio de un mecanismo de predicción y corrección. En esencia este algoritmo pronostica el nuevo estado a partir de su estimación previa añadiendo un término de corrección proporcional al error de predicción, de tal forma que este último es minimizado estadísticamente [Obando, 2005].

En el proceso llamado filtro de Kalman se definen tres modelos o partes fundamentales a las cuales se les suele llamar modelo del proceso a ser estimado, y dos fases que constituyen el filtrado de Kalman en sí. Las partes (modelos) del proceso y las fases, son las siguientes: 1) modelo del proceso (Ecuación 16), el cual describe la transformación del estado, 2) modelo de medición (Ecuación 17), que describe la relación entre el proceso o los estados y las medidas:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1} \quad (16)$$

Con una medición $z \in \mathfrak{R}^m$ que es dada por:

$$Z_k = Hx_k + v_k \quad (17)$$

Donde las variables aleatorias w_{k-1} y v_k representan el proceso y medición de ruido (respectivamente). Se asume que son independientes el uno del otro y con distribución de probabilidad normal.

$$\begin{aligned} p(w) &\sim N(0, Q) \\ p(v) &\sim N(0, R) \end{aligned} \quad (18)$$

En la práctica, las matrices del proceso de covarianza de ruido Q y la medición de la covarianza de ruido R , pueden cambiar en cada paso de tiempo o medición; sin embargo, se asume que son constantes. El ruido del sistema puede considerarse que se genera en su interior o bien que se introduce a la entrada del sistema, y el ruido de la medición es el error que se comete al medir la salida, es decir, será el error que cometen los sensores al medir o en el caso de este estudio, las herramientas utilizadas para la medición

La matriz A de $n \times n$, es la matriz de coeficientes de aquellos términos del modelo lineal que dependen de las variables de estado, es decir, es la matriz que relaciona las variables entre sí, el estado en el paso anterior $k - 1$, con el estado actual, en ausencia de ruido del proceso. B de $n \times l$ es la matriz de coeficientes de aquellos términos del modelo lineal que no dependen de las variables de estado, es decir, de aquellos términos que permanecen constantes durante la implementación del filtro. Puede servir también, para modificar las dimensiones del vector u_k . El vector de variables de control u_k , incluye los términos del modelo lineal que permanecen constantes durante la predicción de las variables, por ejemplo, aceleraciones conocidas, como la gravedad o una fuerza de empuje [Cárdenas *et al.*, 2013; Welch y Bishop, 2006].

w_{k-1} es el vector de ruido del modelo dinámico. Pasar de un modelo real a un modelo matemático implica errores de aproximación, redondeos o simplificaciones, como puede ser una pequeña componente de viento aleatorio que modificaría la trayectoria en un movimiento. Se asume como ruido, la diferencia entre el modelo real sobre el que se realiza el estudio, y el modelo matemático que lo representa. Esa diferencia está compuesta por todos aquellos elementos del sistema real no considerados en el modelo matemático, y por las aproximaciones realizadas para aquellos elementos que sí están incluidos.

Como parte de la ecuación del modelo de predicción, está Z_k , que describe como las medidas del sistema u observaciones son derivadas del estado interno. Puede implicar un cambio de unidades, de ejes, de posición dentro del vector o, en el caso de que la misma variable sea medida por más de un sensor, una fusión de datos. H , que es una matriz $m \times m$, adapta las medidas obtenidas directamente de los sensores a la estructura del vector de estado. Normalmente, si las matrices tienen la misma dimensión, se toma como una matriz identidad

[Obando, 2005; Cárdenas et al., 2013; Welch y Bishop, 2006].

El tercero es el modelo a priori, aquí se describe el conocimiento previo del vector de estado en el instante inicial $X(0)$, en cuanto al valor esperado y a su matriz de covarianza $P(0)$.

Las dos fases antes mencionadas son: actualización del tiempo (Predicción) y Actualización de la medida (Corrección) (Figura 5.1). Para ello es necesario usar la ganancia del filtro de Kalman, cuyo cálculo se realiza utilizando las matrices de covarianza, se encarga de ponderar entre la medida y la predicción, para decidir cuál de las dos presenta mayor incertidumbre y, por tanto, es menos fiable.

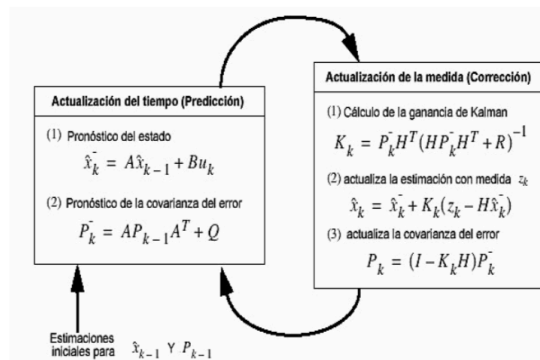


Figura 5.1. Imagen de la operación del filtro de Kalman. Tomada de Obando [2005].

Una vez escogido el tipo de filtro que se quiere usar para las series de tiempo, se realizó el análisis espectral para las tres regiones. Se usaron cuatro métodos, que son complementarios entre ellos: Blackman-Tukey, Multi-taper y Máxima Entropía, y Ondículas (Wavelets), los cuales serán brevemente explicados a continuación.

5.8.1 Blackman-Tukey

Uno de los problemas genéricos del análisis espectral de series de tiempo es la duración del intervalo de tiempo en el cual se conoce la señal. Cuando el espectro es estimado mediante la transformada de Fourier discreta, esto corresponde a la convolución del espectro verdadero con el espectro de una función de paso, lo cual induce a una fuga de potencia, debido a los lóbulos de la transformada de Fourier de la función de paso. Esto se suma al problema de la varianza en el espectro estimado. El método de Blackman-Tukey, también conocido como el estimador espectral indirecto de las transformadas rápidas de Fourier o método de

correlograma, da una estimación de la potencia espectral, el cual reduce la varianza de la estimación espectral de una señal real dada X y atenúa los efectos de fuga del periodograma [Chatfield, 1984]. El punto de partida de este método es el llamado teorema Wiener-Kintchine o Bochner-Khinchin-Wiener [Jenkins y Watts, 1968, Yiou et al., 1996].

El método de Blackman-Tukey es bastante eficiente para estimar la parte continua del espectro, pero es menos útil para detectar las componentes de la señal que son únicamente o casi sinusoidales. Las razones para esto son dos: tiene una resolución baja y las barras de error estimadas son proporcionales a la media estimada $\tilde{S}_x(f)$ en cada frecuencia f [Ghil et al., 2002]. Las periodicidades que se obtengan con este método deben ser confirmadas y refinadas usando el método de Máxima Entropía y el método Multi-taper.

Cuando la serie tiene pocos datos, la mejor opción es utilizar el método de Máxima Entropía el cual se describe a continuación.

5.8.2 Método de Máxima Entropía

Este es un método paramétrico (hace suposiciones de la naturaleza de los datos) que se basa en la aproximación de las series de tiempo mediante un proceso AR de orden M , $AR(M)$, el orden es determinado por un número de retardos usados para calcular la secuencia de autocovarianza a partir de los datos [Weedon, 2003].

Este método asume que la serie de tiempo viene de un proceso $AR(M)$, donde M es el orden. Los coeficientes de autocorrelación se usan para formar una matriz que recibe el nombre de matriz de Toeplitz (es una matriz cuadrada en donde los elementos de sus diagonales son constantes) [Vautard y Ghil, 1989; Penland et al., 1991; Vautard et al., 1992]. Es más usado en el caso en el que se tienen pocos datos, define los picos con mayor resolución dependiendo de la razón señal-ruido, también es capaz de reconocer dos picos máximos próximos a igualdad de longitud en el periodograma [Vautard et al., 1992]. No requiere de introducir ventanas en los datos y no hay fuga espectral; sin embargo, su resolución para determinar la amplitud de los picos espectrales es menor que en el caso del método de Blackman-Tukey.

5.8.3 Método Multi-taper

Este método proporciona una herramienta útil para la estimación espectral [Thomson, 1982; Percival y Walden, 1993] y la reconstrucción de la señal [Park, 1992] de una serie de tiempo cuyo espectro puede contener tanto componentes de banda ancha como componentes lineales. Así como, los métodos del periodograma clásico y el correlograma, el método Multi-taper (Multitaper Method, MTM por sus siglas en inglés) es no-paramétrico ya que, no usa un modelo paramétrico a priori del proceso que genera la serie de tiempo bajo análisis. El MTM reduce la varianza de la estimación espectral mediante un conjunto pequeño de tapers (ventanas) [Thomson, 1982; Percival y Walden, 1993; Ghil et al., 2002], más que un único taper de datos o ventana espectral usado por los métodos clásicos. Los datos son pre-multiplicados por tapers ortogonales construidos para minimizar la fuga espectral debido a la longitud de las series de tiempo y calcula un conjunto de estimaciones independientes del espectro de potencia [Ghil et al., 2002, Percival y Walden, 1993].

5.8.4 Análisis de Ondículas o Wavelets

En el análisis de Fourier, las funciones seno y coseno usadas por la transformada se extienden a lo largo de toda la longitud de las series de tiempo. El resultado es que el espectro presenta una potencia promedio. La evolución del espectro puede ser usada para estudiar los cambios graduales. Sin embargo, para datos no estacionarios, cambios abruptos en la distribución de la variación presentan un problema, por lo que una aproximación para estos datos es el uso del análisis de wavelets u ondículas en español [Hubbard, 1996; Mallat, 1998; Torrence y Compo, 1998; Weedon, 2003].

Las ondículas son funciones ortogonales donde las oscilaciones se extinguen lejos del cero después de un breve intervalo en lugar de seguir de forma indefinida. Una ondícula puede ser usada para la multiplicación con las series de tiempo con el propósito de producir una transformada de ondículas, análoga al uso de las ondas seno y coseno para la ventana de la transformada de Fourier en la evolución del espectro. Aunque hay restricciones en las características permitidas de las ondículas, los diferentes tipos exhiben una enorme variación en la forma [Mallat, 1998; Weedon, 2003]. Para cada aplicación se elige una forma particular, u “ondícula madre”. Para analizar el carácter no estacionario de una serie de tiempo la ondícula madre tiene una variación en la longitud de onda, estiramiento o compresión,

llamada dilatación; así como, variaciones en diferentes periodos de tiempo (traslación).

5.9 Series de Tiempo (Manejo previo de datos)

Para las series de tiempo se ocuparon los datos de edad (en años antes del presente, AP) y los registros de δD y $\delta^{18}O$ (en los núcleos de hielo en la parte de la Antártida y Groenlandia), que son necesarios para obtener los datos de temperatura. La serie proveniente del Margen Ibérico cuenta con datos de alquenonas y sus correspondientes temperaturas. En el caso de Antártida, la serie ya proporcionaba datos de δD y temperatura (diferencia de las temperaturas con el promedio); sin embargo, en la parte de Groenlandia (GRIP) sólo se contaba con datos de $\delta^{18}O$; ya que la conversión no se hace a la ligera, se realizó una breve revisión bibliográfica para saber cómo se podían convertir estos datos a temperatura, tomando en cuenta el lugar del que provienen.

Se sabe desde hace varias décadas que la composición isotópica de δ de precipitación cambia con la temperatura de formación de la precipitación [Dansgaard, 1953; Johnsen et al., 1995]. Dansgaard [1964] y Johnsen et al. [1995] desarrollaron una relación lineal entre los valores medios anuales actuales de temperatura y $\delta(^{\circ}/_{\text{oo}})$ de precipitación para climas templados a polares, posteriormente se modificó para la temperatura actual superficial de la placa de hielo de Groenlandia $T_s(^{\circ}\text{C})$ y precipitación [Johnsen et al., 1989; Johnsen et al., 1995]. Esta relación está dada por:

$$T_s = 1.50\delta + 20.3 \quad (19)$$

Debido a la falta de una relación temporal T_s a δ , los registros de δ a lo largo del núcleo de hielo de Groenlandia no habían sido convertidos a registros de paleotemperaturas en general. Sin embargo, se realizaron estudios recientes sobre la relación temporal. La comparación de variaciones estacionales de δ en la nieve sobre la capa de hielo con temperaturas observadas del aire sobre la costa este de Groenlandia [Steffensen, 1985] o con temperaturas superficiales en la placa de hielo de Groenlandia observadas desde satélites [Shuman et al., 1995], sugieren el uso de la ecuación (19) también para cambios temporales,

quizá con una sensibilidad, $dT_s/d\delta$, ligeramente mayor que 1.50 °C por parte por mil (‰). Modelando el perfil de temperaturas medidas a lo largo del núcleo de hielo de Crête con 400 m de longitud, también sugiere una alta sensibilidad [Johnsen, 1977] y un método similar aplicado a la parte superior del núcleo de hielo GISP2 indica una sensibilidad en el rango de 1.5 a 2.22 °C por parte por mil (‰) [Cuffey et al., 1994].

Johnsen et al. [1995] realizaron una interpretación del registro de δ en GRIP. Con ello establecieron un historial de temperatura en la parte central de Groenlandia regresando al estadio isotópico 5d, 113 ka AP, es decir, al tiempo a través del cual los registros de δ son representativos del cambio climático en Groenlandia y el Océano Atlántico Norte.

En primera instancia, se debe encontrar la relación temporal entre δ y T_s modelando los perfiles de temperatura a lo largo de 3029 m del núcleo GRIP, Summit, lo siguiente es convertir los registros de δ en registros de paleotemperaturas, corregidas por cambios en la elevación superficial y la composición isotópica del agua de mar.

La historia de la temperatura superficial en Summit está relacionada con el fechado y el perfil de δ a lo largo del núcleo de hielo GRIP [Johnsen et al., 1995] como:

$$T_s = \alpha + \beta\delta + \gamma\delta^2 \quad (20)$$

donde δ es el valor de $\delta^{18}\text{O}$ del hielo, corregido por posibles desviaciones de la composición isotópica del agua de mar desde el SMOW² en el tiempo de la deposición [Sowers et al., 1993; Johnsen et al., 1995]. Los valores para α , β y γ fueron obtenidos a partir de varios experimentos: $\alpha = -211.4$ °C, $\beta = -11.88$ °C/‰ y, $\gamma = -0.1925$ °C/(‰)².

Con ayuda de la ecuación (20) fue posible obtener la serie de tiempo para Groenlandia y con ello se lograron tener las tres series en términos de temperatura. Puesto que es necesario tener las series equi-espaciadas, primero se deben interpolar. Las gráficas finales son mostradas en la sección de resultados.

² Standard Mean Ocean Water (SMOW), es una definición estándar de agua que define la composición isotópica del agua dulce.

5.10 Interpolación de las series de tiempo

Se llevó a cabo un análisis no-lineal a la dinámica de tres sistemas diferentes correspondientes a tres regiones: Groenlandia, Antártida y Margen Ibérico.

Puesto que es necesario trabajar con series equi-espaciadas se aplicó un método de interpolación estocástica. Este método fue desarrollado por *Nieto-Barajas y Sinha* [2015] en el que proponen un modelo de proceso Gaussiano para interpolar una serie de tiempo desigualmente espaciada y con ello producir predicciones para tiempos de observación igualmente espaciados. La dependencia entre dos observaciones se asumió como una función de las diferencias temporales. La novedad de la propuesta se basa en parametrizar la función de correlación en términos de las funciones de supervivencia Weibull y Log-logistic, permitiendo a la vez que la correlación sea negativa o positiva. La inferencia del modelo se hizo bajo una aproximación Bayesiana y la interpolación se realizó a través de distribuciones condicionales predictivas de una nueva ubicación dado un subconjunto de tamaño m de vecinos, similar al que se hace en datos espaciales conocido como kriging Bayesiano [*Handcock y Stein* 1993, *Bayraktar y Turalioglu* 2005, *Nieto-Barajas y Sinha* 2015]

El estudio para series de tiempo que no están igualmente espaciadas se centró en dos aproximaciones: 1) modelos para datos observados que no están igualmente espaciados en su forma inalterada y 2) modelos que reducen los datos irregularmente espaciados a observaciones regularmente espaciadas y después aplican la teoría estándar para series de tiempo equi-espaciadas [*Nieto-Barajas y Sinha*, 2015].

Dentro de la última aproximación hay métodos de interpolación determinística [*Adorf*, 1995] o métodos de interpolación estocástica, el método más popular fue la interpolación lineal con un movimiento Browniano estándar [*Chang*, 2012; *Eckner*, 2012, *Nieto-Barajas y Sinha* 2015]. En una perspectiva diferente, series de tiempo que no están igualmente espaciadas han sido tratadas como series de tiempo equi-espaciadas con observaciones perdidas. *Aldrin et al.* [1989] usaron un modelo dinámico lineal para predecir las observaciones perdidas. Alternativamente, *Friedman* [1962] y más recientemente *Kashani y Dinpashoh* [2012] hicieron uso de datos auxiliares para predecir observaciones perdidas, este último también comparó el desarrollo de varios modelos de inteligencia artificial y clásica [*Nieto-Barajas y Sinha*, 2015]. En contraste el modelo propuesto por

Nieto-Barajas y Sinha [2015] no se basa en ningún dato auxiliar, este hace uso de datos futuros y pasados de la misma variable de interés.

La razón para utilizar este método es que fue desarrollado basándose principalmente en series de tiempo similares a las paleoclimáticas, específicamente en la serie de tiempo de 800 ka de temperatura y CO₂ provenientes de dos núcleos de hielo ubicados en las estaciones Kohnen y Concordia, también conocido como Domo C, ambos forman parte del Proyecto EPICA.

Una vez obtenidas las series interpoladas (cada 100 años para Antártida y Groenlandia y cada 50 años para el Margen Ibérico) (Figura 6.1), se realizó un análisis no-lineal a las tres regiones, esto con la finalidad de poder observar si la dinámica de los sistemas presenta un comportamiento caótico.

Antes de continuar es importante mencionar que cuando se hace una interpolación, en realidad se está estudiando una mezcla de dinámica real e interpolada. El requisito final es que el proceso de medición de las variables, digamos y , sea una función genérica y suave sobre el espacio de estados del sistema [*Bradley y Kantz, 2015*].

CAPÍTULO 6

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

6.1 Análisis no-lineal

Como primer paso, para las tres series de tiempo (Figura 6.1) se obtuvieron los retardos de tiempo (lag τ) por medio de dos métodos: la función de autocorrelación y la información mutua, debido a que este último toma en cuenta correlaciones dinámicas no-lineales a comparación de la función de autocorrelación que sólo se basa en estadísticas lineales, es el método que mejor se aproxima a la forma del atractor del sistema. Para fines prácticos aquí sólo se mostrarán los valores que se obtuvieron con la información mutua: Para la Antártida el valor de lag fue de $\tau= 109\Delta t$; para Groenlandia el valor de fue de $\tau= 25\Delta t$, y para el Margen Ibérico el valor fue de $\tau= 23\Delta t$.

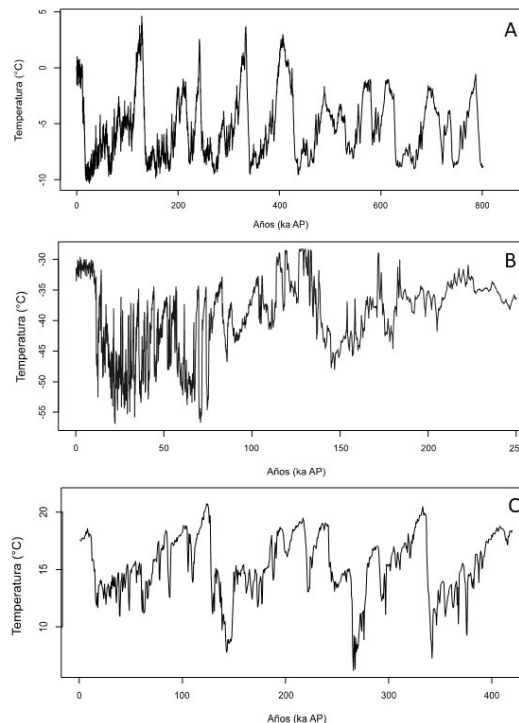


Figura 6.1. Serie de tiempo de temperatura (°C) perteneciente a: A) Antártida, B) Groenlandia y C) Margen Ibérico. Todas las series se presentan en miles de años antes del presente (ka AP). Nótese que en todos los casos el eje horizontal (tiempo) no está a la misma escala.

En ninguno de los tres sistemas la función de autocorrelación cayó a cero dentro de un tiempo muy corto, esto indica que ninguna de las series de tiempo muestra los signos de un comportamiento completamente aleatorio, ya que para el ruido blanco Gaussiano el cero de la función de autocorrelación se alcanza rápidamente. De igual manera esto sugiere que las series de tiempo pueden ser procesos de memoria larga, las cuales tardan mucho tiempo en alcanzar el cero.

Utilizando el método de los vecinos cercanos falsos fue posible obtener la dimensión de embebimiento para el atractor del sistema (Figuras 6.2-6.4), cabe mencionar que para no quedarnos con una dimensión errónea se utilizó la gráfica de separación espacio-tiempo con la que se puede obtener la ventana de Theiler (W), a través de la visualización de estas gráficas se obtuvieron los valores de $W = 1000$, 30 y 170 para Antártida, Groenlandia y Margen Ibérico respectivamente.

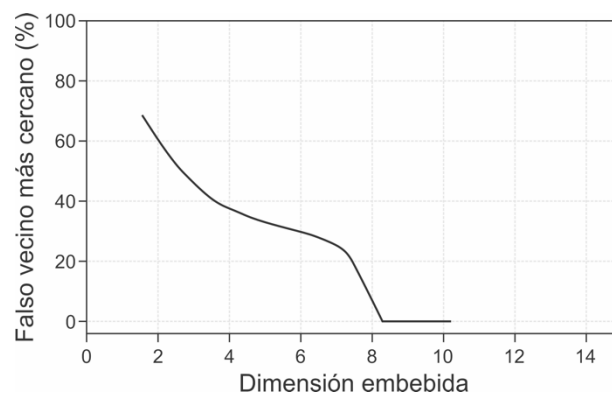


Figura 6.2. Vecinos Cercanos Falsos de la serie de tiempo de la Antártida, la parte donde el porcentaje de vecinos cercanos falsos decae a cero indica la dimensión de embebimiento óptima, en este caso la dimensión de embebimiento tiene un valor de $m = 8$.

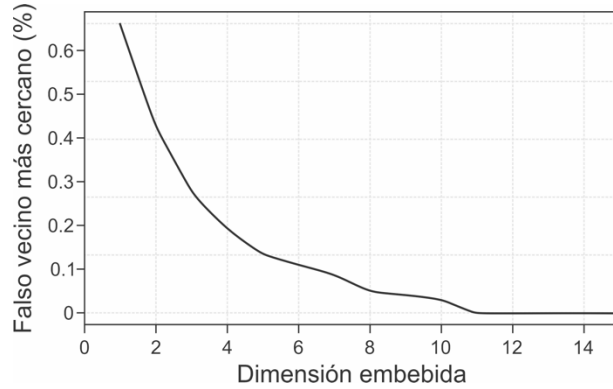


Figura 6.3. Vecinos Cercanos Falsos de la serie de tiempo de Groenlandia, la parte donde el porcentaje de vecinos cercanos falsos decae a cero indica la dimensión de embebimiento óptima, en este caso la dimensión de embebimiento tiene un valor de $m = 11$.

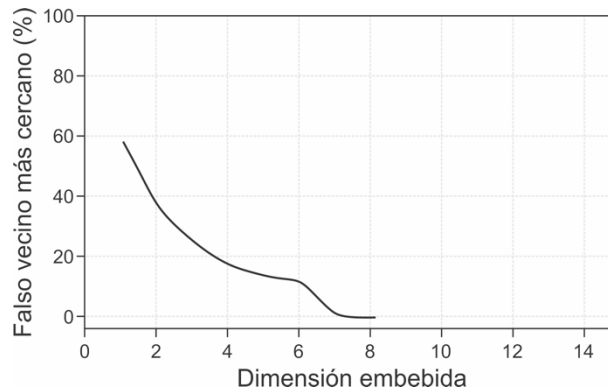


Figura 6.4. Vecinos Cercanos Falsos de la serie de tiempo de Marge Ibérico, la parte donde el porcentaje de vecinos cercanos falsos decae a cero indica la dimensión de embebimiento óptima, en este caso la dimensión de embebimiento tiene un valor de $m = 7$.

Las gráficas de separación espacio-tiempo también son útiles para encontrar un valor del lag óptimo; sin embargo, los métodos presentados con anterioridad son los más utilizados y dan una representación más fiable del atractor, habrá algunas ocasiones en que los valores obtenidos por los tres métodos puedan coincidir; no obstante, no es una regla. En este caso el valor de $W = 30$ y $\tau = 25\Delta t$ para Groenlandia, son muy cercanos, pero no se repitió en las otras dos áreas de estudio.

Con la ayuda del tiempo de retardo y la dimensión de embebimiento se pudieron realizar los diagramas de fase por medio del método de *Takens*, en estos diagramas es posible visualizar la forma del atractor en un espacio de estados para las tres regiones (Figuras 6.5-6.7). La realización de los diagramas de fase puede ser un primer análisis exploratorio de los

datos, de tal manera que se pueden explorar los valores de τ y m , tratando de observar cómo se comportan los datos en diferentes tiempos de retardo y embebiendo el sistema en diferentes dimensiones, con ello también se pretende tratar de obtener estos dos valores, siendo muy ambiguo el resultado. En este estudio se prefirió realizar los diagramas correspondientes una vez obtenidos los valores óptimos del lag y m .

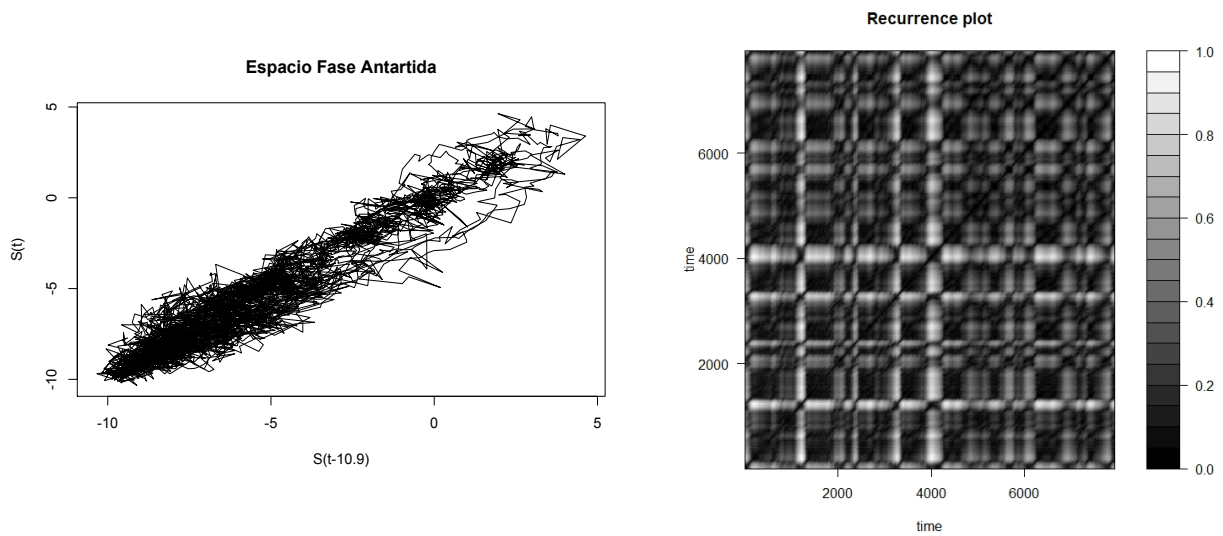


Figura 6.5. (Izquierda) Diagrama de Espacio Fase para Antártida con $\tau = 10.9$ ka y $m = 8$. (Derecha) Gráfica de recurrencia. El eje x es equivalente a j y el eje y es equivalente a i , que son los números de índices de los puntos de datos de la serie de tiempo. La barra en escala de grises del lado derecho indica el mapeo de color a distancia, donde el blanco representa una distancia cero y el negro una distancia mayor. La diagonal indica el momento en el que $i = j$.

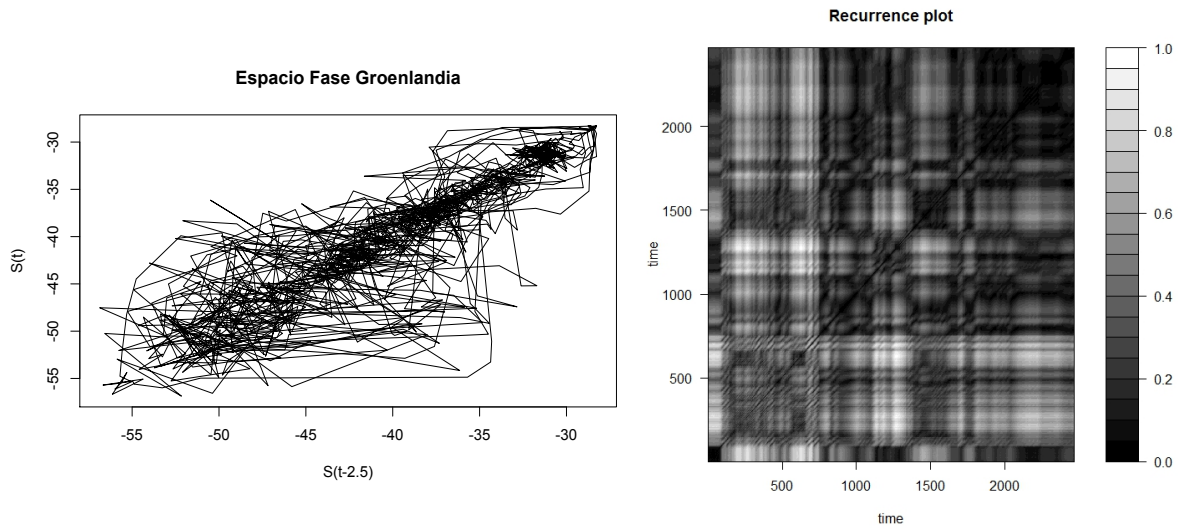


Figura 6.6. (Izquierda) Diagrama de Espacio Fase para Groenlandia con $\tau = 2.5$ ka y $m = 11$. (Derecha) Gráfica de recurrencia. El eje x es equivalente a j y el eje y es equivalente a i , que son los números de índices de los puntos de datos de la serie de tiempo. La barra en escala de grises del lado derecho indica el mapeo de color a distancia, donde el blanco representa una distancia cero y el negro una distancia mayor. La diagonal indica el momento en el que $i = j$.

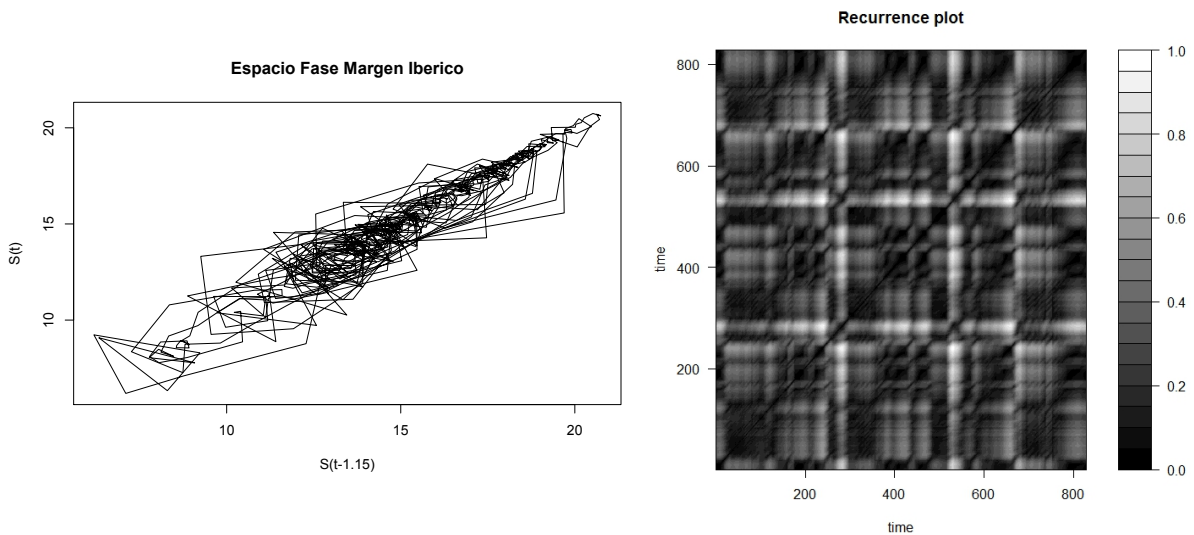


Figura 6.7. (Izquierda) Diagrama de Espacio Fase para el Margen Ibérico con $\tau = 1.15$ ka y $m=7$. (Derecha) Gráfica de recurrencia. El eje x es equivalente a j y el eje y es equivalente a i , que son los números de índices de los puntos de datos de la serie de tiempo. La barra en escala de grises del lado derecho indica el mapeo de color a distancia, donde el blanco representa una distancia cero y el negro una distancia mayor. La diagonal indica el momento en el que $i = j$.

En los tres atractores se puede apreciar un ángulo de inclinación similar y una forma muy parecida. En cuanto a Groenlandia y el Margen Ibérico los tiempos de retardo son muy cercanos, es decir, a Groenlandia le toma 2.5 ka obtener un cambio máximo mientras que al Margen Ibérico le toma 1.15 ka, la diferencia es de 1.35 ka, mientras que a la Antártida le toma 10.9 ka tener un cambio máximo, entre esta región y Groenlandia la diferencia es de 8.4 ka mientras que con el Margen Ibérico es de 9.75 ka. Estos resultados parecen indicar que los cambios en la temperatura ocurren primero en el Margen Ibérico, después en Groenlandia y finalmente en la Antártida. Estos resultados son satisfactorios, tomando en cuenta la gran inercia térmica de la Antártida, en comparación con las otras dos regiones.

Es importante asegurarse que los datos vienen de un proceso estacionario y por esta razón se realizaron las gráficas de recurrencia, a través de ellas se puede identificar una estructura bien definida y con ello indicios de que nuestros sistemas vienen de procesos estacionarios. Una vez concluida satisfactoriamente esta prueba, ya que, como se dijo anteriormente, es necesario este requisito para garantizar la relevancia del resultado que se obtuvo mediante el exponente de Lyapunov, se llevó a cabo un análisis exploratorio que se basó en el método de “búsqueda de vecinos” de *Schreiber* [1995] con la finalidad de poder obtener diferentes barridos posibles, para la búsqueda de posibles vecinos cercanos que ayudarán a la reconstrucción de trayectorias en el sistema.

Puesto que el objetivo de este estudio es corroborar si los tres sistemas presentan una dinámica caótica, se obtuvieron los exponentes de Lyapunov para cada uno de ellos. Debido a que el exponente de Lyapunov es invariante ante transformaciones, antes de poder sacar la pendiente que indique el máximo exponente de Lyapunov es necesario asegurarse que en verdad se conserve el comportamiento, para ello se graficó el exponente de Lyapunov con diferentes dimensiones de embebimiento y diferentes radios de vecindad (Figuras 6.8-6.10). Para obtener radios de vecindad óptimos se utilizó la técnica desarrollada por *Schreiber* [1995].

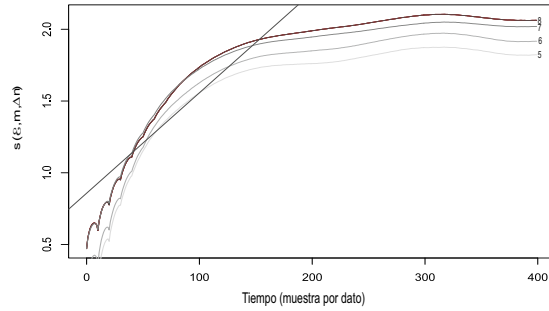


Figura 6.8. Exponente de Lyapunov con $\varepsilon = 8, 250, 500$ y 1000 , las diferentes curvas muestran el uso de dimensiones diferentes, éstas van de 5 a 8 . La línea recta de color negro indica el máximo exponente de Lyapunov para la Antártida con un valor de $\lambda = 0.007$.

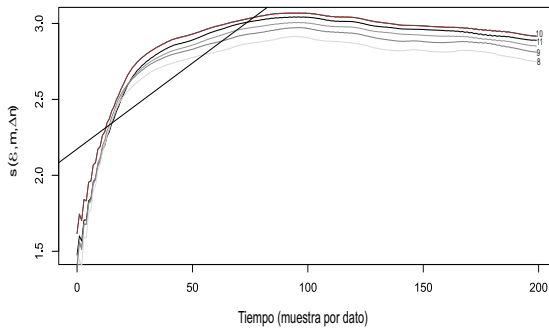


Figura 6.9. Exponente de Lyapunov con $\varepsilon = 12, 30$ y 100 , las diferentes curvas muestran el uso de dimensiones diferentes, éstas van de 8 a 11 . La línea recta de color negro indica el máximo exponente de Lyapunov para Groenlandia con un valor de $\lambda = 0.011$.

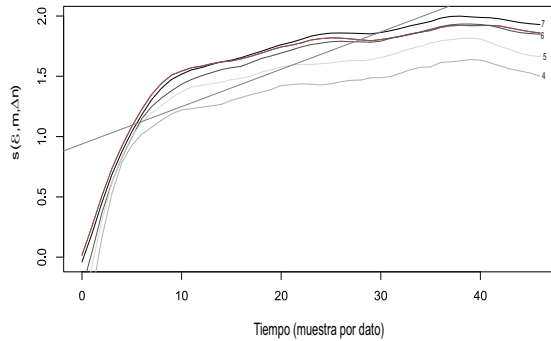


Figura 6.10. Exponente de Lyapunov con $\varepsilon = 16, 42$ y 150 , las diferentes curvas muestran el uso de dimensiones diferentes, éstas van de 4 a 7 . La línea recta de color negro indica el máximo exponente de Lyapunov para el Margen Ibérico con un valor de $\lambda = 0.031$.

Para las tres regiones el exponente de Lyapunov resultó invariante ante transformaciones y se obtuvo un valor de λ positivo, lo cual sugiere que los tres sistemas presentan una dinámica caótica, y ya que el exponente es el promedio de la tasa de divergencia local de todos los datos, es posible observar a través de los resultados que es el Margen Ibérico la región que mayor divergencia presenta en sus trayectorias, es decir, cambia más rápido de un estado a otro, es más sensible a las condiciones iniciales.

Hasta aquí se ha visto que los tres sistemas son caóticos determinísticos, sin embargo, un comportamiento de esta clase siempre viene acompañado de una baja dimensionalidad, la cual se puede ver a través de la dimensión del atractor, que es lo que se conoce como “Dimensión de Hausdorff”, para poder visualizar la dimensión de los atractores correspondientes a las tres regiones se utilizó el algoritmo de *Grassberger y Procaccia* [1983, 1983a].

Para la región de la Antártida se analizaron las gráficas de integral de correlación y dimensión de correlación [Figuras 6.11-6.12]. En la gráfica de dimensión de correlación se pudieron visualizar algunas posibles dimensiones para el atractor; no obstante, es necesario reforzar la información con la integral de correlación en donde se obtuvo una $D_2 = 3.1 \pm 0.01$.

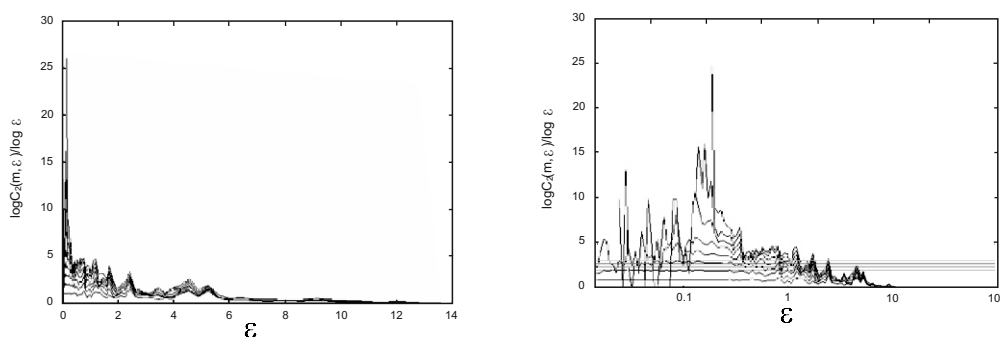


Figura 6.11. (Izquierda) Dimensión de Correlación para la Antártida Domo C, las curvas muestran que la convergencia es de baja dimensionalidad. (Derecha) Dimensión de Correlación para Antártida Domo C con escala logarítmica en el eje x, las pendientes indican las posibles dimensiones del atractor 2.1, 2.5, 2.8 y 3.1.

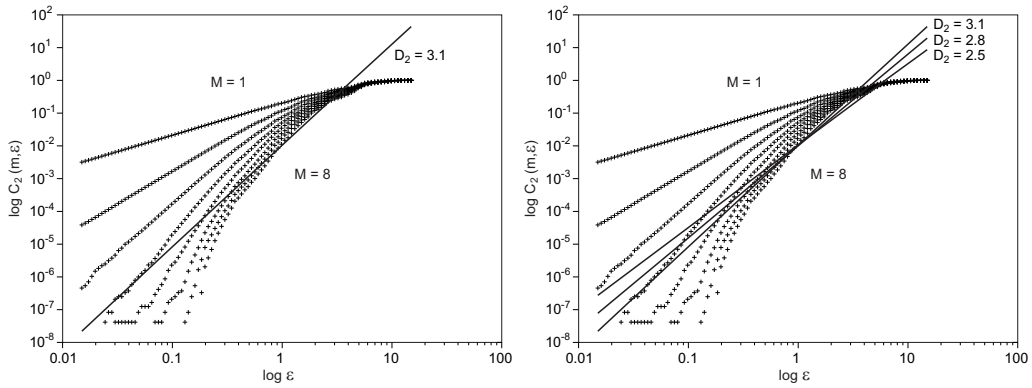


Figura 6.12. (Izquierda) Integral de Correlación con el ajuste a $D_2=3.1 \pm 0.01$. (Derecha) Integral de Correlación para la Antártida Domo C, las pendientes indican las posibles dimensiones del atractor $D_2=2.5, 2.8$ y 3.1 ± 0.01 .

Para Groenlandia, en la región de GRIP se realizaron los mismos análisis y se obtuvo una $D_2 = 3.1 \pm 0.001$ para la dimensión del atractor, en este punto es importante notar que tanto Antártida como Groenlandia presentan un atractor con la misma dimensión, esto quiere decir que necesitarán del mismo número de variables en un sistema de ecuaciones para poder modelar su comportamiento [Figuras 6.13-6.14].

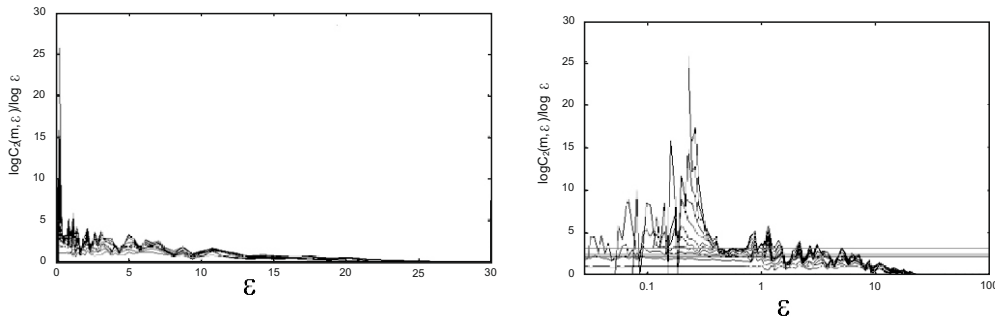


Figura 6.13. (Izquierda) Dimensión de Correlación para Groenlandia, en la región GRIP, la convergencia de las curvas indica la dimensión del atractor es de baja dimensionalidad. (Derecha) Dimensión de Correlación para GRIP con escala logarítmica en el eje x , las pendientes indican las posibles dimensiones del atractor en 2.2, 2.5 y 3.1.

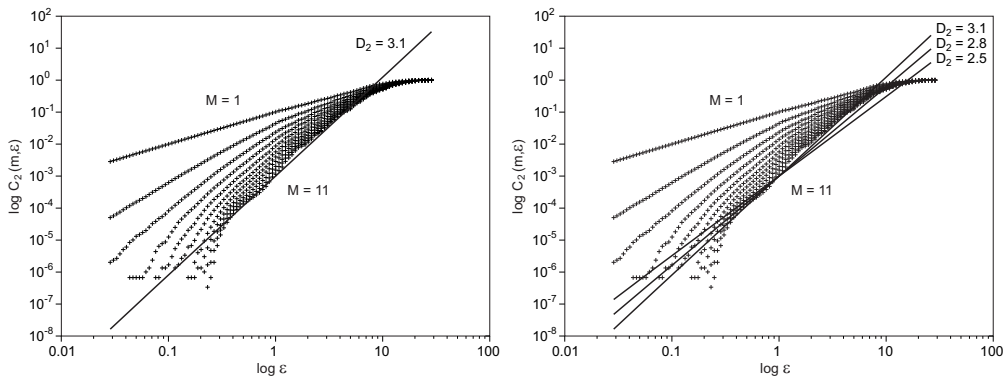


Figura 6.14. (Izquierda) Integral de Correlación con el ajuste a $D_2=3.1 \pm 0.001$. (Derecha) Integral de Correlación para Groenlandia, en la región GRIP, las pendientes indican las posibles dimensiones del atractor $D_2=2.5, 2.8, 3.1$ y 3.3 ± 0.001 .

Finalmente se calculó la dimensión del atractor para la región del Margen Ibérico, donde el valor obtenido fue $D_2 = 2.8$ (Figuras 6.15-6.16), esto indica que, para poder modelar la variabilidad climática en el Margen, se requiere un sistema de tres ecuaciones diferenciales parciales.

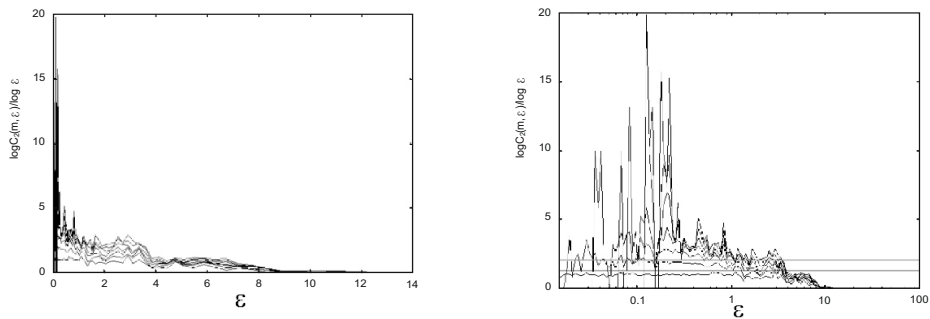


Figura 6.15. (Izquierda) Dimensión de Correlación para el Margen Ibérico, la convergencia de las curvas indica que el atractor es de baja dimensionalidad. (Derecha) Dimensión de Correlación en escala logarítmica para el eje x , las pendientes de colores muestran las posibles dimensiones de correlación para el atractor.

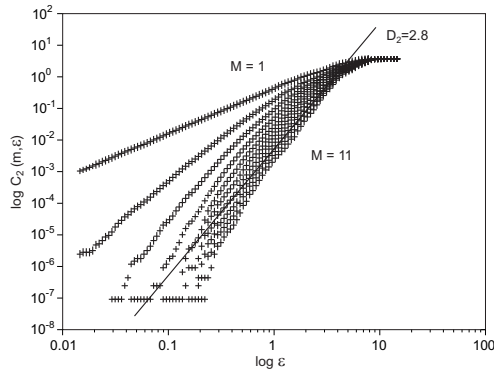


Figura 6.16. Integral de Correlación para el Margen Ibérico con el ajuste a $D_2=2.8 \pm 0.01$.

Para las tres regiones los resultados indican que el cambio de temperatura presenta un comportamiento caótico determinístico en donde el Margen Ibérico puede ser descrito con tres variables, es decir, una variable menos de las que se necesitan para las otras dos regiones. Esto nos lleva a pensar, qué está pasando en los tres lugares, por qué en los polos (norte y sur de la Tierra) la dimensión es la misma. Podríamos pensar que son los dos hemisferios quienes están modulando la señal que llega al Margen Ibérico, de tal manera que su dinámica está regida en cierto modo por la dinámica de Groenlandia y la Antártida.

Así mismo, contrario a lo propuesto por *Grassberger* [1986], se encontró un atractor climático para las tres regiones. De igual manera, contrario a lo propuesto por *Zeng et al.* [1992] y *Pierrehumbert* [1990] fue posible obtener una región fractal baja en las tres regiones, lo cual es concomitante con lo reportado por *Nicolis y Nicolis* [1984]; *Cuculeanu y Lupu* [2001]; *Fraedrich* [1987]; *Keppenne y Nicolis* [1989], todos ellos encontraron dimensionalidad baja en la atmósfera; sin embargo, de acuerdo con *Zeng et al.* [1992] ninguno cumplió el requisito de *Ruelle* [1990], el cual estipula que al menos $M = 10^{v_s/2}$ puntos de datos son necesarios para una estimación fiable de la dimensión fractal v_s .

En estudios más recientes *Petkov et al.* [2015] y *Badin y Domeisen* [2014] encontraron dimensiones para su atractor entre tres y seis, trabajando en el primer caso, con series de tiempo provenientes de la columna de ozono ártico, y en el segundo con diferentes zonas estratosféricas del hemisferio norte.

Por esta razón se aplicó el criterio de *Ruelle* [1990] a nuestros datos, con la finalidad

de poder corroborar que la dimensionalidad resultante fuera fiable. Se obtuvo $M = 35.48$ tanto para Antártida como para Groenlandia y $M = 25.11$ para el Margen Ibérico, por lo que nuestros datos (8020, 2500 y 840 datos para Antártida, Groenlandia y Margen Ibérico respectivamente) rebasan por mucho esta cantidad. Por otro lado, si tomamos en cuenta lo sugerido por *Tsonis et al.* [1993], asumiendo que se necesitan $M \sim 10^{2+0.4\nu_2}$ puntos de datos para una estimación confiable de la dimensión fractal ν_2 , entonces se obtiene el valor de $M = 1737.8$ para Antártida y Groenlandia y, $M = 1318$ para el Margen Ibérico, nuevamente nuestros datos abarcan esta cantidad, sólo que en este caso no se cumple para el Margen Ibérico. Sin embargo, ya que nuestras series de tiempo cumplen con al menos uno de los dos criterios podemos decir que nuestra estimación de la dimensión fractal es confiable.

Las series de tiempo muestran que las tres regiones están pasando por un episodio de climas cálidos (valores bajos de X_0) a fríos (valores altos de X_0), lo cual es concordante con los resultados obtenidos a partir del análisis espectral (vistos más adelante) y de tendencia de la serie. Estos resultados han sido ampliamente mostrados por diferentes autores y se atribuyen, en la mayoría de los casos a eventos astronómicos [*Nicolis y Nicolis*, 1986], más allá de los efectos astronómicos, se observa que dichos episodios se presentan de manera errática y son interrumpidos por excursiones principales lejos de estas fases frías o cálidas. Los valores sucesivos de la señal pueden ser muy erráticos; sin embargo, es posible hacer un pronóstico preciso de los valores futuros utilizando algoritmos de predicción no lineales [*Kantz y Schreiber*, 2004]. Esto se basa en que en lugar de tratar de describir el futuro a partir de condiciones iniciales y de frontera mediante un sistema de ecuaciones, tratamos de encontrar el estado final del sistema conociendo las propiedades del atractor; por otro lado, la trayectoria en torno al atractor nos da la periodicidad del sistema [*Takens*, 1981]. Cabe mencionar que el atractor del Margen Ibérico y Groenlandia muestra un patrón repetitivo entre las trayectorias y parece evolucionar hacia temperaturas bajas, sólo que en el atractor de Groenlandia se observa un comportamiento más disperso en la evolución de las temperaturas. *Nicolis y Nicolis* [1986] obtienen un atractor cuya forma es muy similar a la obtenida en este estudio. Es importante resaltar que, la dirección de enrollamiento que toman estos dos atractores es, aparentemente siempre la misma. Esto parece indicar que los atractores climáticos pertenecen a una familia de atractores que exhiben “caos espiral” y “caos tornillo” [*Rössler*, 1979]. En lo que respecta al atractor de la Antártida, se observa un

comportamiento más errático en las trayectorias, pero al igual que en el Margen Ibérico, la evolución es más restringida.

De igual manera, el haber obtenido un máximo exponente de Lyapunov con valor positivo, no sólo indica que los sistemas presentan una dinámica caótica, sino que ayuda a saber sus límites de predictibilidad. Para el Margen Ibérico, al obtener el valor inverso del exponente de Lyapunov se obtuvo un valor de 32.28 ka, nuevamente nuestro valor está dentro del rango de predictibilidad (25-40 ka) que reportaron *Nicolis y Nicolis* [1986]. Para la Antártida, el valor de predictibilidad fue 142.85 ka, mientras que en Groenlandia el valor que se obtuvo fue 90.91 ka, en el caso de estas dos regiones, no se ha realizado la comparación con otros resultados ya que, no se han hecho estudios de dinámica caótica para ellos.

En cuanto a la razón por la cual se obtuvo una baja dimensionalidad, tomando en cuenta lo propuesto por *Lorenz* [1991], puede ser porque nuestra variable de observación está reflejando una interacción débil no-lineal con otras variables en la atmósfera. Así mismo, se puede decir que la dimensión fractal de baja dimensionalidad que se obtuvo puede deberse al hecho de que no estamos estudiando el comportamiento atmosférico como tal sino únicamente los cambios de temperatura a través de un proxy en particular y para una sola localidad en cada región, ya que de acuerdo con *Halsey et al.* [1986], una baja dimensionalidad puede deberse a que se está estudiando el sistema en una sola localidad y la dimensión puede variar con el lugar.

Con base en lo anterior es probable que, si se estudian más localidades en estas regiones con otras variables, de acuerdo con lo propuesto por *Halsey et al.* [1986] se pueda tener un atractor global multifractal para las tres regiones. Esto significa que la dimensión global promedio estará dominada por las grandes dimensiones locales; muchas dimensiones locales pueden ser menores que la dimensión global, y la dimensión puede variar con el lugar.

Por otro lado, como *Zeng et al.* [1992] mencionan, la variabilidad geográfica de dimensiones fractales puede estar relacionada con la tasa climática señal-ruido; sin embargo, necesita más verificaciones, ya que, no siempre muestra resultados que concuerden con esto.

Lorenz [1991] propone que los resultados no dependen únicamente del número de datos, sino también de escoger la variable adecuada para el sistema que se quiere estudiar. En este caso se utilizó el proxy que mejor se asocia con los cambios de temperatura y se

puede, por tanto, decir que únicamente para las regiones estudiadas, en cuanto al cambio de temperatura, se tiene un sistema dinámico con un atractor de baja dimensionalidad, indicando que es a través de cuatro (Antártida y Groenlandia) y tres variables (Margen Ibérico) que es posible modelar el sistema.

Otra posible explicación es que se trato de tener mucho cuidado con la elección de τ , de acuerdo con lo sugerido por *Tsonis et al.* [1993]. Por su parte *Islam et al.* [1993] proponen que la dimensión de correlación baja puede ser el resultado de la dependencia de algunas variables atmosféricas en los umbrales y otros límites físicos. La dimensión de correlación resultante del análisis de este tipo de variables puede no ser construida como representativa de los sistemas dinámicos subyacentes que estos producen; desde este punto de vista la baja dimensionalidad que se obtuvo puede deberse a que la variable es dependiente de otras.

Todos los análisis han apuntado a un comportamiento caótico; no obstante, es necesario probar la no-linealidad de las series y así poder asegurar que en realidad estamos observando un comportamiento caótico y no uno estocástico. Se han reportado varios sistemas estocásticos lineales como sistemas caóticos determinísticos, por tanto, es necesario asegurar que en realidad se tienen dinámicas caóticas, para ello se utilizaron los datos surrogados, la prueba estadística de reversibilidad del tiempo y, finalmente, se comprobó la invariabilidad de la dimensión en la integral de correlación con la serie diferenciada (sólo para Groenlandia), tal como es propuesto por *Provenzale et al.* [1992].

En la prueba de datos surrogados sólo la serie de tiempo proveniente de la Antártida mostró ser no-lineal (Figura 6.17); sin embargo, no hay razón para descartar las otras dos regiones puesto que en todo el análisis han dado indicios de ser sistemas caóticos, con esto en mente y tomando en cuenta que las pruebas basadas en datos surrogados lo que buscan es probar que la serie es lineal, se decidió realizar otro tipo de pruebas. El estadístico de reversibilidad del tiempo fue aplicado en las tres regiones, para el caso de la Antártida sólo se llevó a cabo para corroborar los resultados obtenidos al trabajar con la serie surrogada.

El valor para Antártida fue $Q = 0.0004$ con un $P - value = 0.006$, estos datos se obtuvieron con un ancho de banda de 0.2 y aplicando el método de bloques de la prueba de reversibilidad del tiempo, con un valor de 30 bloques. En el caso del Margen Ibérico el valor fue de $Q = 0.002$ con un $P - value = 0.001$, aplicando los mismos valores de banda ancha

y bloques, ambos valores en los parámetros resultaron óptimos en la prueba. Para el caso de Groenlandia el resultado fue negativo, es decir, no estamos hablando de una serie no-lineal.

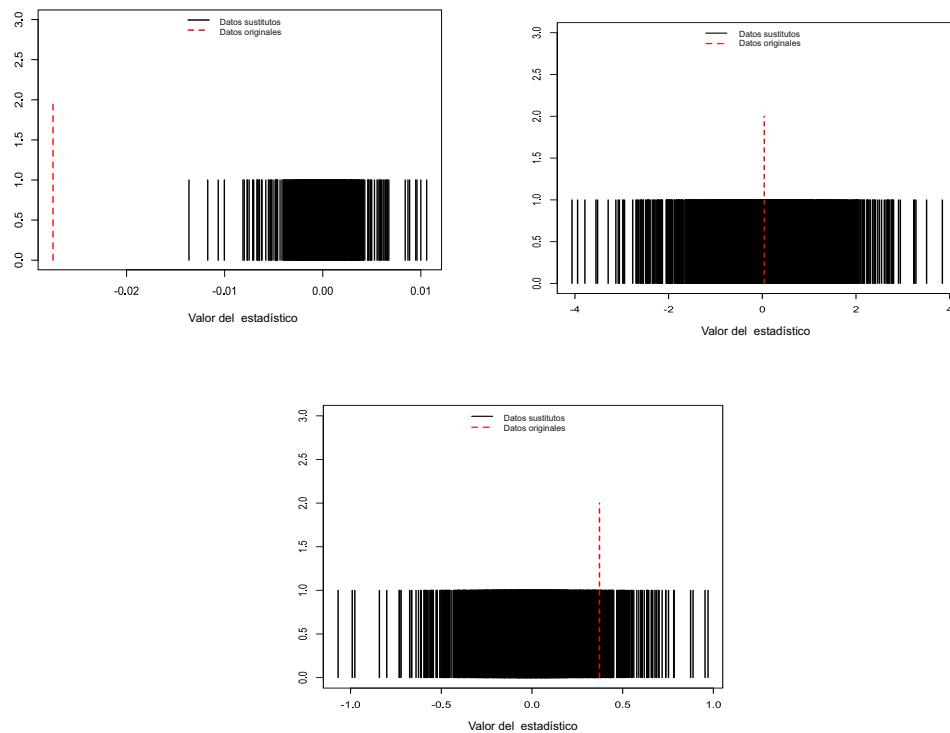


Figura 6.17. (Izquierda superior) Prueba de datos surrogados contra datos originales para la Antártida, la línea punteada de color rojo representa los datos surrogados y las líneas de color negro representan los datos originales. (Derecha superior) Prueba de datos surrogados contra datos originales para Groenlandia. (Centro inferior) Prueba de datos surrogados contra datos originales para el Margen Ibérico.

Como prueba final para poder encontrar indicios de no-linealidad en la serie de tiempo de Groenlandia, se aplicaron todos los métodos anteriormente descritos. Los resultados para la serie de tiempo diferenciada, donde se corroboró que la dimensión del atractor fue conservada, indican no-linealidad en la serie de tiempo.

No debemos olvidar que *Ghil y Tavantzis* [1983]; *Nicolis y Nicolis* [1984]; *Yiou et al.* [1994]; *King* [1996] y *Ashkenazy et al.* [2003] mostraron que la dinámica del clima es no-lineal. Por su parte *Ashkenazy et al.* [2003] estudiaron las propiedades de correlación (escalamiento) de los registros climáticos de los pasados 420 ka utilizando registros de GISP y GRIP en Groenlandia, mostrando que las variaciones de temperatura están correlacionadas a largo plazo, sugiriendo que los periodos de Milankovitch son en efecto secundarios

(contrario a lo que se creía comúnmente [Imbrie *et al.*, 1992]) y que la dinámica del clima de todas las escalas debajo de 100 ka hasta 1000 años son altamente no-lineales.

Ashkenazy et al. [2003] hicieron más pruebas con datos surrogados de los que se hicieron en este proyecto para Groenlandia (GRIP) y Antártida. Ellos encontraron pruebas de no-linealidad, de igual manera aplicaron el método de asimetría en las series de tiempo, donde, en algunos casos fue un buen indicador de no-linealidad y en otros una simple transformación estática de una distribución simétrica. Estos autores concluyeron que la asimetría de los datos de núcleos de hielo no estaba relacionada con la no-linealidad que ellos encontraron. Los resultados que obtuvimos con el método de asimetría del tiempo son concordantes con los de *Ashkenazy et al.* [2003], ya que no pudimos encontrar indicios de no-linealidad para las tres regiones en total, con este método.

No obstante, se puede concluir que la serie de tiempo correspondiente a Groenlandia (GRIP) es no-lineal ya que tanto *Ashkenazy et al.* [2003] como *Schmitt et al.* [1995] encontraron que la serie de tiempo para GRIP es multifractal y debido a que nuestros resultados con la serie diferenciada fueron positivos. Por tanto, la serie de tiempo proveniente del núcleo de hielo GRIP representa un sistema caótico de baja dimensionalidad con su correspondiente atractor.

6.2 Análisis espectral

Para poder entender el comportamiento de la variabilidad climática, es importante estudiarla desde un enfoque tanto lineal (análisis espectral), como no-lineal (caos). Hasta ahora se han presentado los resultados de la parte no-lineal, en esta sección se presentarán los resultados obtenidos con análisis espectral.

La figura 6.18 representa las tres series de tiempo provenientes del mismo modelo de edad EDC3, que se les aplicó el filtro de Kalman, el cual, a diferencia de los métodos convencionales de suavizado, permite considerar no-linealidad y no gaussianidad del sistema dinámico, de igual manera, permite estimar el estado futuro, realizando un filtrado óptimo a la señal de salida.

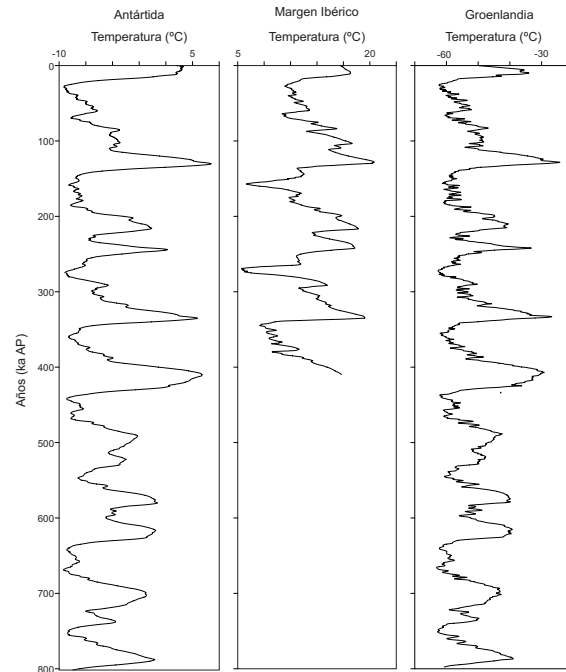


Figura 6.18. Series filtradas con el filtro de Kalman: Izquierda) Antártida. Centro) Margen Ibérico. Derecha) Groenlandia.

Con las series filtradas es posible apreciar varios eventos de calentamiento y enfriamiento; así como, hacer una exploración básica a las series.

El análisis estadístico realizado con fines exploratorios, para el caso de Antártida, dio los siguientes valores: media de -5.31 °C, mediana de -5.79 , desviación estándar de 2.89 , varianza de 8.38 , mínimo de -10.33 y máximo de 4.635 °C (no olvidar que en este caso estamos trabajando con las diferencias respecto del promedio, ya que las temperaturas de la Antártida son menores que las de Groenlandia). La tendencia lineal muestra una disminución de 6.55×10^{-7} °C esto es, un proceso de enfriamiento durante los 800 ka.

Se observan cuatro eventos cálidos, donde la mayor temperatura ocurrió alrededor de 130.9 ka; con respecto a los eventos fríos se observaron cinco, el más frío se encontró en 25461 años. De acuerdo con la primera y segunda derivada, ocurrieron dos eventos importantes, el primero a los 15.8 ka y el segundo a los 158.9 ka.

De acuerdo con el histograma, el valor de diferencia en temperatura que más se repite está en el rango de $[-9,-8]$ grados centígrados, también podemos ver que la variabilidad de los datos está entre -10 y 5 . Una técnica más robusta para sacar el ancho apropiado de los

bins del histograma en función del número de muestras es la técnica de Freedman Diacons. A través de ésta podemos ver que el rango de diferencia de temperatura que más se repite, visto desde una manera más precisa, se encuentra entre $[-9.5,-8]$.

Con la inspección visual de los datos y al sacar curtosis y asimetría se obtuvo: skewness = 0.74 (indica un valor positivo con respecto a la asimetría de los datos, es decir, los valores de temperatura se concentran más hacia la izquierda, que es donde se ubican las temperaturas más bajas). Curtosis = -0.10 (con un valor negativo, se tiene una distribución platicúrtica, es decir, el valor de los datos es disperso). Al sacar la función de distribución podemos ver que es concordante con la curtosis y asimetría (Figura 6.19).

En el caso del Margen Ibérico se muestran tres eventos de enfriamiento, donde el más frío está en aproximadamente 267630 años, mientras que en los de calentamiento se observan cinco eventos, donde la mayor temperatura está en 126.9 ka aproximadamente. Es de hacer notar que cuatro de los cinco eventos cálidos son de mayor amplitud que el más reciente; por otro lado, la tendencia de la temperatura en los 6000 años más próximos al reciente es claramente a la baja.

De acuerdo con un análisis estadístico básico, se tienen: una media aritmética de $14.71\text{ }^{\circ}\text{C}$, una desviación estándar de 2.76 y una varianza de 7.65, un máximo de $20.91\text{ }^{\circ}\text{C}$ y un mínimo de $5.41\text{ }^{\circ}\text{C}$. La tendencia lineal muestra una disminución de $1.68\text{ }^{\circ}\text{C}$ esto es, un proceso de enfriamiento durante los 420 ka, nos muestra a primera instancia que la serie no es estacionaria y que tiene efectos periódicos, es decir que el comportamiento de la serie es aproximadamente repetido en ciertos tiempos. Por otro lado, una serie es ruido blanco cuando la media y la covarianza son siempre cero, que no es el caso de la serie que estamos estudiando.

Con ayuda del histograma vemos que la variabilidad de los datos está entre 10 y 20, donde las temperaturas que más se repiten están entre $[14,15]$ y $[18,19]$, visto con el histograma convencional, si lo vemos con la técnica Freedman Diacons, el rango es el mismo.

Para ver la forma de la gráfica de la función de distribución y conocer los valores hacia los que más tiende nuestra serie, se calcularon: skewness=-0.50 (indica un valor negativo con respecto a la asimetría de los datos, es decir, nuestra serie se concentra más hacia valores de la derecha). Curtosis=2.97 (con un valor positivo, se tiene una distribución

leptocúrtica, es decir, el valor de los datos es menos disperso). Al obtener la función de distribución se observó una distribución modal, cargado hacia los valores antes mencionados con el histograma (Figura 6.19).

En Groenlandia el análisis estadístico mostró: media de -39.02 °C, mediana de -37.64 , desviación estándar de 5.84 , varianza de 34.15 , mínimo de -56.87 y máximo de -28.27 . De la variabilidad de los datos obtenida con el histograma se puede distinguir que el rango de temperaturas que más se repite va de $[-38.4, -36.2]$, ocupando nuevamente la técnica de Freedman Diacons, vemos que el rango se enfoca más entre -37 y -36 °C, también podemos ver que la variabilidad de los datos está entre -55 y -30 . La tendencia lineal muestra una disminución de 7.81×10^{-7} °C esto representa un proceso de enfriamiento durante 420 ka, aunque de manera visual, la tendencia no es muy pronunciada, indicando que las temperaturas en Groenlandia se han mantenido casi constantes.

Se identificaron cinco eventos cálidos, donde la mayor temperatura ocurrió alrededor de 333749 años; con respecto a los eventos fríos se observaron tres, el más frío se encontró en 179768 años. De acuerdo con la primera y segunda derivada, ocurrió un evento importante en los 49.1 ka.

Del mismo modo que en los dos casos anteriores, se calculó: skewness = -0.66 (indica un valor negativo con respecto a la asimetría de los datos). Curtosis = -0.067 (con un valor negativo, lo que muestra una distribución platicúrtica, es decir, el valor de los datos es disperso). Donde la función de densidad de distribución corrobora que los datos están más concentrados en valores no tan fríos en comparación con los -56 °C (Figura 6.19).

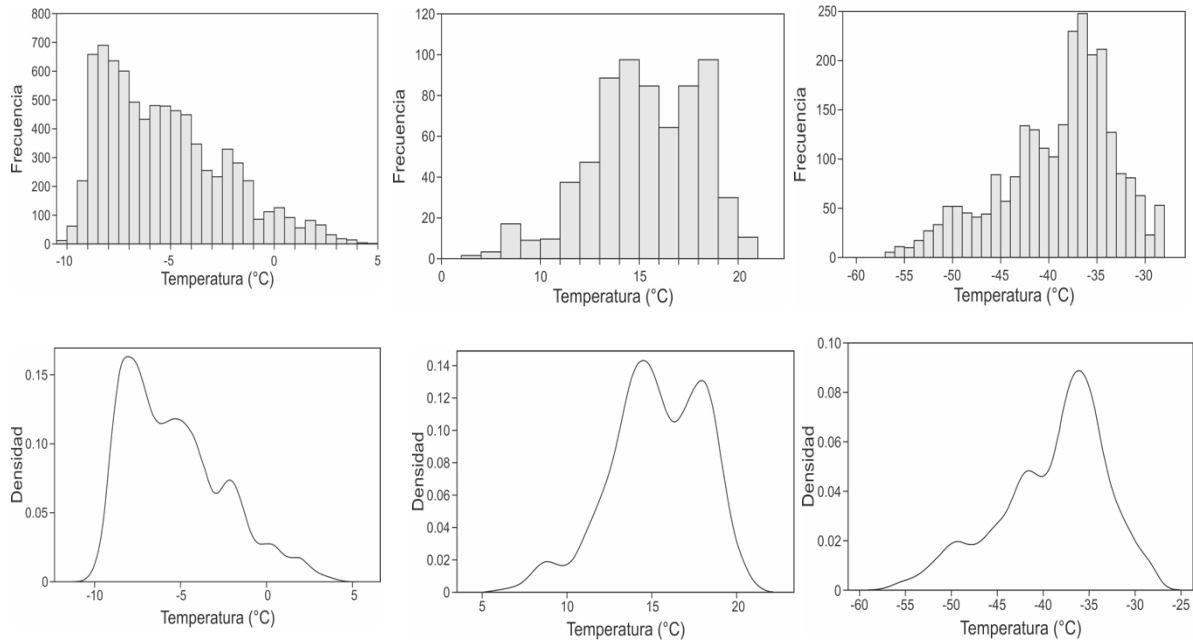


Figura 6.19. (Arriba-Izquierda) Histograma de Antártida con la técnica FD. (Arriba-Centro) Histograma del Margen Ibérico con la técnica FD. (Arriba-Derecha) Histograma de Groenlandia con la técnica FD. (Abajo-Izquierda) Función de distribución de densidad para Antártida, se muestra una distribución platicúrtica. (Abajo-Centro) Función de distribución de densidad para el Margen Ibérico, tiene una distribución bimodal. (Abajo-Derecha) Función de distribución de densidad de para el Margen Ibérico, se muestra una distribución platicúrtica.

Una vez llevado a cabo el análisis exploratorio de los datos, fue posible realizar el análisis espectral con el método de Blackman-Tukey, Máxima Entropía, Multi-taper y Ondículas, que serán presentados a continuación (Figuras 6.20-6.22).

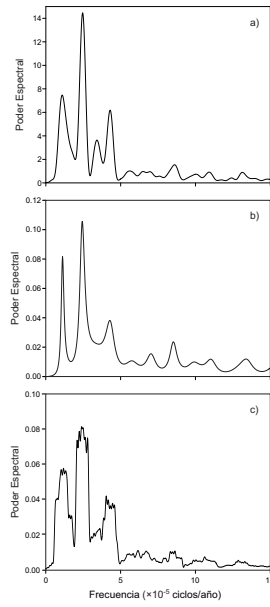


Figura 6.20. Espectro de potencia para la serie de temperatura (°C) de la Antártida con los métodos: a) Blackman-Tukey. b) Máxima. c) Multi-taper. Los tres con los picos más representativos.

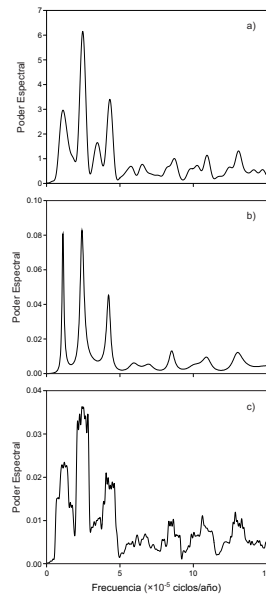


Figura 6.21. Espectro de potencia para la serie de temperatura (°C) de Groenlandia con los métodos: a) Blackman-Tukey. b) Máxima. c) Multi-taper. Los tres con los picos más representativos.

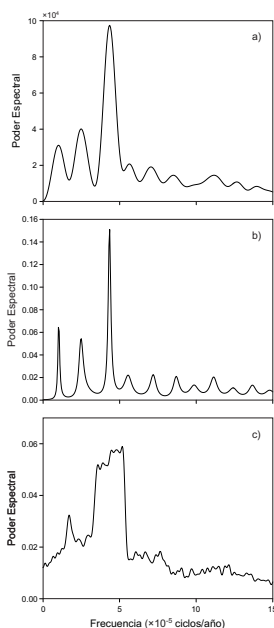


Figura 6.22. Espectro de potencia para la serie de temperatura (°C) del Margen Ibérico con los métodos: a) Blackman-Tukey. b) Máxima. c) Multi-taper. Los tres con los picos más representativos.

Para propósitos prácticos, se reportan los resultados en tres tablas, que representan las regiones de estudio.

Tabla 6.1. Resultados de las periodicidades obtenidas para Antártida con los tres métodos de análisis espectral.

| Blackman-Tukey (ma) | Multi-Taper (ma) | Máxima Entropía (ma) |
|------------------------|---------------------|-------------------------|
| 90.512 | 89.262 | 87.318 |
| 41.286 | 78.761 | 40.572 |
| 29.416 | 70.47 | 23.352 |
| 23.3 | 45.645 | 14.193 |
| 17.828 | 42.732 | 11.676 |
| 11.592 | 40.168 | 7.465 |
| 9.121 | 36.516 | 5.32 |
| 7.591 | 34.627 | 4.692 |
| | 25.105 | 3.538 |
| | 24.348 | |
| | 23.490 | |
| | 21.366 | |
| | 16.262 | |

| |
|--------|
| 14.713 |
| 11.676 |
| 9.451 |

Tabla 6.2. Resultados de las periodicidades obtenidas para Groenlandia con los tres métodos de análisis espectral.

| Blackman-Tukey (ma) | Multi-Taper (ma) | Máxima Entropía (ma) |
|--------------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| 83.104 | 95.638 | 87.318 |
| 40.572 | 81.975 | 41.408 |
| 28.896 | 47.256 | 23.627 |
| 23.084 | 44.631 | 11.779 |
| 11.476 | 41.41 | 9.212 |
| 9.149 | 39.77 | 7.694 |
| 7.650 | 35.547 | 5.377 |
| 5.348 | 24.643 | 4.816 |
| 4.753 | 23.768 | |
| 4.528 | 22.315 | |
| 4.332 | 21.595 | |
| | 16.262 | |
| | 14.877 | |
| | 11.575 | |
| | 9.429 | |
| | 7.784 | |
| | 7.522 | |
| | 5.327 | |
| | 4.816 | |

Tabla 6.3. Resultados de las periodicidades obtenidas para Margen Ibérico con los tres métodos de análisis espectral.

| Blackman-Tukey (ma) | Multi-Taper (ma) | Máxima Entropía (ma) |
|--------------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| 102.318 | 58.835 | 98.77 |
| 40.547 | 28.017 | 39.9 |
| 23.071 | 25.036 | 22.908 |
| | 22.413 | |
| | 20.826 | |
| | 19.290 | |

| |
|--------|
| 16.343 |
| 14.895 |
| 13.074 |

Con los tres métodos se encontraron periodos concordantes. En el caso de Antártida, los periodos que se encontraron fueron: 87-90, 40-41, 23, 11, 9 y 7 ma, los tres primeros están dentro de los Ciclos de Milankovitch. Para Groenlandia, los periodos fueron: 83-95, 40-41, 23, 11, 9, 7,5 y 4 ka, nuevamente, los tres primeros se encuentran alrededor de los Ciclos de Milankovitch, así mismo, se puede observar cómo se repiten los periodos de 11, 9 y 7 ka en ambas regiones, sólo que en Groenlandia aparecen otros periodos importantes (5 y 4 ka). Finalmente, en el caso del Margen Ibérico: 98-102, 22-23 y 40 ka, en este caso, sólo se tienen periodos relacionados con los Ciclos de Milankovitch.

6.3 Ondículas

6.3.1 Transformada de Ondícula

Como parte del análisis espectral se realizaron las ondículas de las tres series, esto es: la transformada de ondícula discreta y la coherencia de la transformada de ondículas (Figuras 6.23-6.28). A través de las gráficas obtenidas por este método fue posible ver en qué región había más variabilidad en el paleoregistro, en qué fechas se daban las periodicidades más importantes y cuál era el desfase en la señal entre regiones.

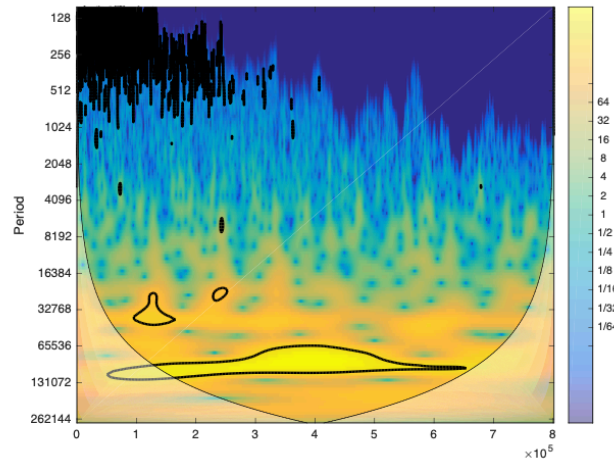


Figura 6.23. Transformada de ondícula de Morlet para la serie de temperatura de la Antártida de un registro de 800 ka. La escala de la derecha representa el valor de la energía, el eje horizontal representa el tiempo en años y el eje vertical el periodo.

Analizando los resultados se pudieron encontrar diferentes bandas con periodos característicos en diferentes años. En el caso de la Antártida se encontraron cuatro bandas, empezando de abajo hacia arriba se tiene: para la primera banda que va desde el año 140 a 660 ka AP, se tiene una banda de periodo de 65536 a 131072 años, con un periodo promedio de 104858 años. La segunda banda que va de 100 a 160 ka AP, tiene una banda de periodo de 26214 a 49152 años, con un periodo promedio de 36045 años. Para la tercera banda que va desde 225 a 250 ka AP, la banda de periodo fue de 22938 a 31130, con un periodo promedio de 26214 años. Finalmente, para la cuarta la banda que abarca de 230 a 250 ka AP, la banda fue de 6144 a 7782 años, con un promedio de 6963 años.

Al igual que con los métodos antes mencionados, en el caso de ondículas, también se obtuvieron periodos relacionados con el Ciclo de Milankovitch; sin embargo, es importante notar que, de igual manera, también apareció el ciclo ubicado alrededor de 7000 años.

Otro punto importante por notar es que, la variabilidad en la señal de esta región, como se puede ver es menor, eso podemos notarlo porque las bandas son muy puntuales y están bien definidas.

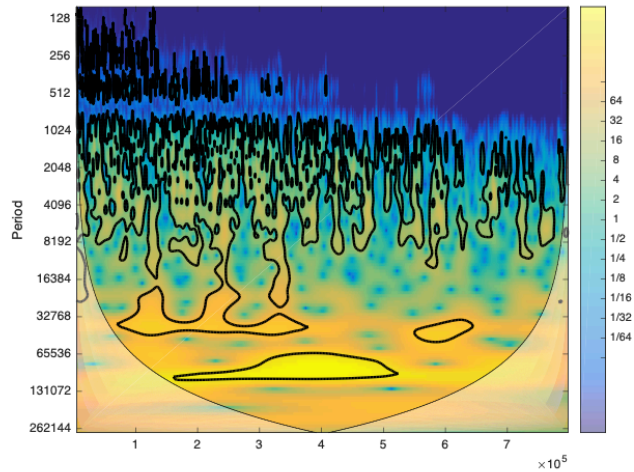


Figura 6.24. Transformada de ondícula de Morlet para la serie de temperatura de Groenlandia de un registro de 240 ka. La escala de la derecha representa el valor de la energía, el eje horizontal representa el tiempo en años y el eje vertical el periodo.

En el caso de Groenlandia se obtuvieron dos bandas principales, comenzando de abajo hacia arriba. La primera que va de 170 a 520 ka AP, con una banda de 65536 a 117965, con una banda promedio de 9834 años. La segunda abarca desde 550 a 660 ka AP, con su respectiva banda de 36045 a 55706 años, donde la banda promedio fue de 42598 años. El resto del espectro también muestra periodos representativos, pero a lo largo del registro, abarcando desde 819 a 49152 años AP.

Se puede observar que también sus dos primeros periodos concuerdan con Milankovitch.

En cuanto a la variabilidad, ésta se hace presente ya que, hay una fluctuación de periodos a lo largo del registro, los cuales también son representativos, pero es imposible discernir cuales son los más importantes.

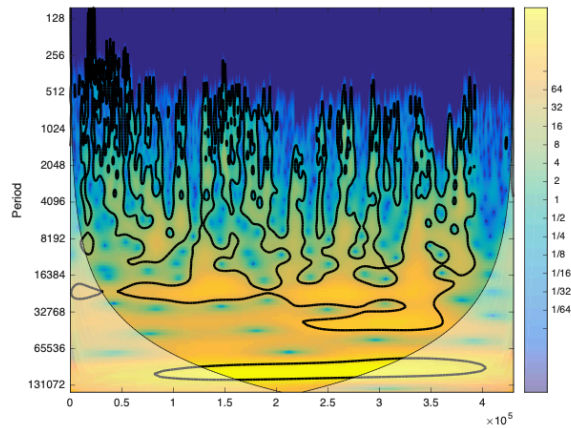


Figura 6.25. Transformada de ondícula de Morlet para la serie de temperatura del Margen Ibérico de un registro de 420 ka. La escala de la derecha representa el valor de la energía, el eje horizontal representa el tiempo en años y el eje vertical el periodo.

Para el Margen Ibérico se tiene un caso similar al de Groenlandia, es decir, se presenta una banda representativa que va de 140 a 330 ka AP, con una banda de periodo de 81920 a 125610 años, cuyo periodo promedio fue 103765 años. El resto del registro tiene bandas desde 405 a 49152 años. En este caso se puede apreciar el ciclo de excentricidad y de igual manera, mucha variabilidad en el registro. Esto hace de Groenlandia y el Margen Ibérico las regiones con mayor variabilidad, posiblemente se deba a que éste último es una zona donde se está creando constantemente nuevo piso oceánico, razón por la que también, fue la región con mayor nivel de caos; comparando la situación de Antártida con Groenlandia, se tiene que la tasa de acumulación de nieve es menor en Antártida.

El periodo promedio de 100 ka, para los tres registros, se encuentra alrededor de los años 140-330 ka.

6.3.2 Coherencia de la Transformada de ondículas

Las gráficas de este estudio ayudaron a visualizar si había algún tipo de relación (lineal o no-lineal) entre los registros de temperatura de las regiones, de ser así, es posible hablar de un desfase o fase entre ellas.

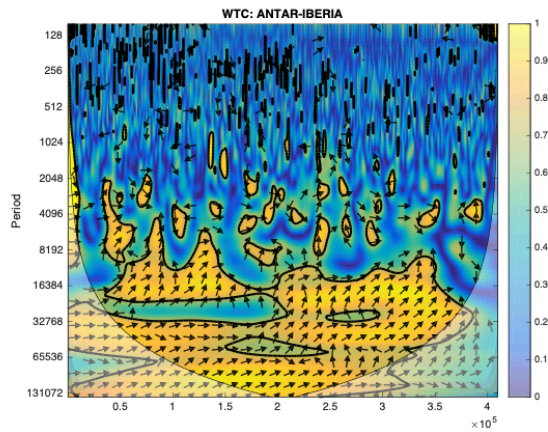


Figura 6.26. Coherencia de la Transformada de ondículas entre las series de tiempo Antártida-Margen Ibérico. Las flechas indican si las series están en fase o no, o si tienen otro tipo de relación. Cuando las flechas son completamente horizontales apuntando hacia la derecha, es que están en fase, cuando apunta hacia la izquierda es que tienen 180° de desfase, cuando apuntan hacia arriba están a 90° de desfase y, por último, cuando apuntan hacia abajo están a 270° de desfase.

Antártida-Margen Ibérico (A-MI) se encuentran en fase sólo entre 50 y 180 ka, cubriendo periodos de 32768 a 62260 años, el resto muestra un comportamiento no-lineal entre ellas. El tiempo durante el cual estuvieron en fase fue de 130 ka.

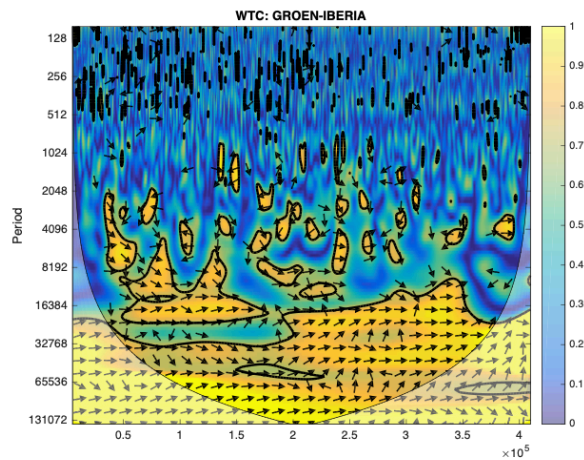


Figura 6.27. Coherencia de la Transformada de wavelets entre las series de tiempo Groenlandia-Margen Ibérico. Las flechas indican si las series están en fase o no, o si tienen otro tipo de relación. Cuando las flechas son completamente horizontales apuntando hacia la derecha, es que están en fase, cuando apunta hacia la izquierda es que tienen 180° de desfase, cuando apuntan hacia arriba están a 90° de desfase y, por último, cuando apuntan hacia abajo están a 270° de desfase.

Groenlandia-Margen Ibérico (G-MI) están en fase para los años 50 a 170 ka con bandas de 14746 a 245576 años, para los años 60 a 180 ka con bandas de 54613 a 87381, se presenta nuevamente una fase entre ambas series para los años 240 a 250 ka con bandas de periodos que van de 4505 a 10650 años, entran en fase una cuarta vez para los años 240 a 380 ka con bandas de periodos desde 24576 a 54613 años y finalmente se encontró una última fase para los años 380 a 390 ka, que abarcan bandas de periodos de 3686 a 6144 años. En cuanto al desfase, se encontraron dos ocasiones para este evento, el primero ocurrió en los años 100 a 110 ka con bandas de 3686 a 7168 años y un segundo desfase que se presentó para los años 140 a 151 ka con bandas de 1024 a 2253 años. El tiempo transcurrido entre fase y fase fue de 10, 20 y 60 ka, mientras que, para el caso de desfase el tiempo fue de 30 ka.

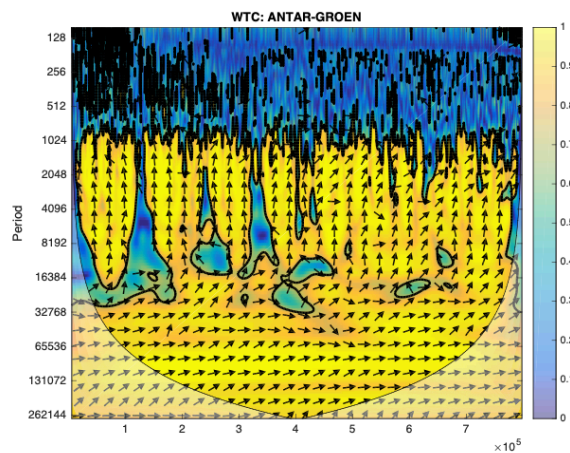


Figura 6.28. Coherencia de la Transformada de ondícula entre las series de tiempo Antártida-Groenlandia. Las flechas indican si las series están en fase o no, o si tienen otro tipo de relación. Cuando las flechas son completamente horizontales apuntando hacia la derecha, es que están en fase, cuando apunta hacia la izquierda es que tienen 180° de desfase, cuando apuntan hacia arriba están a 90° de desfase y, por último, cuando apuntan hacia abajo están a 270° de desfase.

Finalmente, para las series Antártida-Groenlandia (A-G) se observaron tres ocasiones en las que se presentaron en fase: la primera fue para los años 290 a 380 ka con banda de 44684 a 53621, una segunda ocasión para los años 510 a 720 ka con una banda desde 59579 a 101283 años y una tercera ocasión para los años 610 a 720 ka con una banda de 23831 a 29789 años.

En resumen, de las tres figuras de Coherencia se tiene que, el tiempo transcurrido entre fase y fase es de 100 ka (A-G) para las tres bandas, las cuales concuerdan nuevamente con Milankovitch. De igual manera, el tiempo que dura la fase está entre 100 y 130 ka, para la

relación entre las tres regiones, con excepción de la banda de periodo que va de 59579 a 101283 (A-G), la cual abarca una duración de 210 ka (sigue siendo múltiplo de 100). En el caso de los desfases (solo para G-MI), la duración está entre 10 y 11 ka, probablemente relacionado con las deglaciaciones. Con esto se puede ver que es el ciclo de excentricidad el que está regulando las variaciones del clima en nuestras regiones de estudios, este resultado no debería sorprendernos ya que, de acuerdo con *Berger y Loutre* [1991] la excentricidad modula el parámetro de precesión climática que controla la mayoría de las variaciones a largo plazo de la insolación diaria recibida del sol.

Cabe destacar que este método es crucial para ver cuál de las señales empieza primero. De acuerdo con *Torres y Compo* [1998], *Grinsted et al.* [2004] y *Jevrejeva et al.* [2003], la orientación de la flecha indica cuál región inicia el cambio, en nuestro estudio, resultó que es Antártida quien muestra primero la señal de cambio climático. Por otro lado, el ver que las relaciones entre las señales fueron tanto de tipo lineal como no-lineal, es una forma de darse cuenta, con ayuda del análisis de ondículas, que el sistema de estudio también requiere un enfoque no-lineal.

6.3.3 Ondícula cruzada

Una vez que sabemos el tipo de relación que hay entre las tres regiones, el momento en el que están en fase o desfase, qué región es la que influye en las demás y las principales periodicidades, es importante saber cuánto tiempo tarda en llegar la señal desde la Antártida a Groenlandia y el Margen Ibérico, para ello, se utilizó el método de ondícula cruzada. Los resultados que se obtuvieron con este método son presentados a continuación.

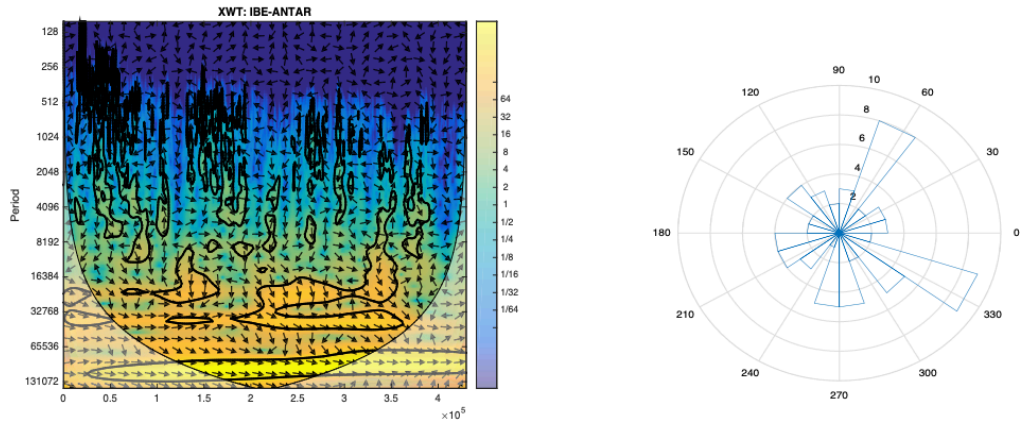


Figura 6.29. (Izquierda) Ondícula cruzada para Antártida-Margen Ibérico (IBE-ANTAR), los vectores indican la diferencia de fase entre ambas señales. (Derecha) la distribución de los ángulos de fase.

Entre Antártida y Marge Ibérico (A-MI) se encontraron 15 contornos donde se presentó un traslape entre las bandas de periodo 1583-13405. El ángulo promedio fue de 320° , el cual se calculó con ayuda del diagrama de rosas representado en la figura 6.29, con una banda de periodo promedio de 5011 años, con estos dos valores se obtuvo un desfase de 3640 años, es decir, el tiempo que tiene que pasar para que la señal de Antártida llegue al Margen Ibérico, debe ser de 3640 años en promedio.

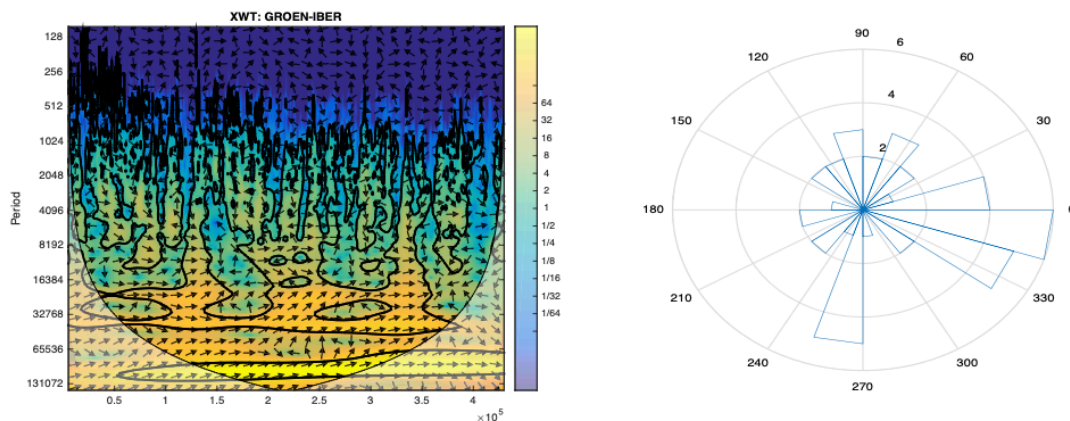


Figura 6.30. (Izquierda) Ondícula cruzada para Groenlandia-Margen Ibérico (GROEN-IBER), los vectores indican la diferencia de fase entre ambas señales. (Derecha) la distribución de los ángulos de fase.

Para Groenlandia – Margen Ibérico se obtuvo un total de cuatro contornos con un traslape en las bandas de periodo de 1676-59579 años. De igual manera, el ángulo promedio fue de 340° , con un periodo promedio de 8937 años, donde el desfase resultante fue 8440 años (Figura 6.30).

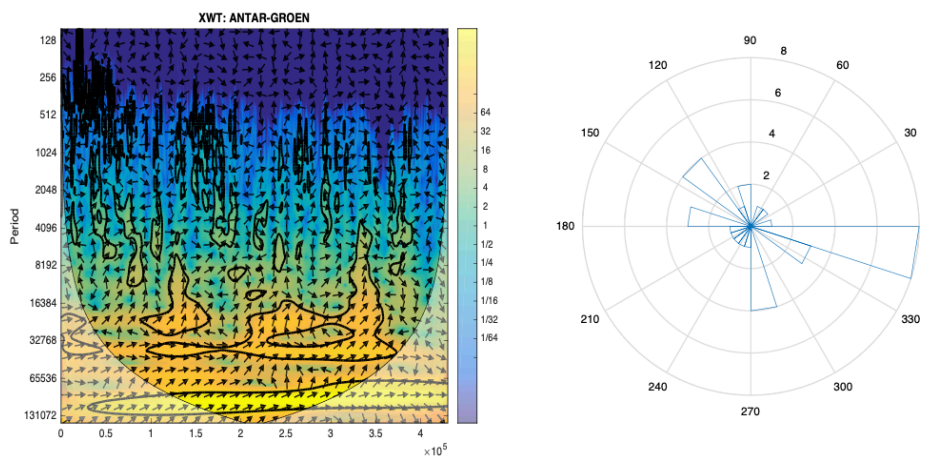


Figura 6.31. (Izquierda) Ondícula cruzada para Antártida-Groenlandia (ANTAR-GROEN), los vectores indican la diferencia de fase entre ambas señales. (Derecha) la distribución de los ángulos de fase.

Para Antártida -Groenlandia fue posible obtener un total de 15 contornos representativos, donde hay un traslape entre las bandas de 2048-7850. El ángulo promedio fue de 340° , dicho ángulo se obtuvo con ayuda del diagrama de rosas representado en la figura 6.31 con una banda de periodo promedio de 4096 años, con estos dos valores se calculó un desfase de 3868 años, es decir, el tiempo que tiene que pasar para que la señal de Antártida llegue a Groenlandia, debe ser de 3868 años.

Los datos del Margen Ibérico abarcan hasta el MIS 11 (tanto el MIS 11, como el Holoceno son interglaciales donde la excentricidad de la órbita de la Tierra estuvo en su mínimo), y se puede observar un marcado cambio en el clima durante el Cuaternario, en el que dichos cambios al pasar de temperaturas frías a cálidas son más abruptos, esto coincide con lo reportado en la literatura [Bond, 1993; Martrat et al., 2007; Boch et al., 2011; Moseley et al., 2014; Luetscher et al., 2015; Moseley et al., 2015]. Los periodos cálidos encontrados en este estudio presentan una mayor estabilidad climática, lo cual concuerda con lo reportado por

Martrat et al. [2007] al observar que los periodos cálidos estables similares al Holoceno se mantuvieron y aunque las oscilaciones eran raras, generalmente fueron más pronunciadas que durante las edades de hielo.

El pico de temperatura más alta (20.91 °C) que se encontró para el Margen Ibérico fue en 126.9 ka que está dentro del MIS 5e, periodo interglacial que va de 118-130 ka [*Henderson y Slowey*, 1996; *Raymo*, 1997], mientras que la temperatura más baja (5.41 °C) se encontró en 267630 años, lo que abarca el MIS 8 (Periodo frío que va 240-300 ka), hasta el momento se encontraron temperaturas concordantes con los Estadios Isotópicos Marinos mencionados.

De igual manera, podemos ver que hay un calentamiento mayor durante el MIS 11 que, durante el Holoceno, como lo sugieren los datos del mar el Labrador de *Aksu et al.* [1992] y *Abreu et al.* [2005]. También podemos observar la geometría de insolación entre estas dos etapas, ya que el MIS 11 a menudo es considerado el periodo interglacial análogo al Holoceno [*Berger y Loutre*, 1991; *Loutre y Berger*, 2003]. No obstante, el calentamiento más significativo se dio durante el MIS 5e, muy cercano a una de las dos últimas deglaciaciones, la Terminación II, ubicada en SPECMAP en 128 ka [*Raymo*, 1997; *Broecker y Henderson*, 1998], en nuestro caso, ubicamos el pico de mayor temperatura en 126.9 ka, que es muy cercano al de SPECMAP. Nuestros resultados también coinciden nuevamente con lo reportado por *Abreu et al.* [2005], quienes reportaron el MIS 5e como el periodo más cálido para la misma región de estudio.

Por otro lado, el valor obtenido (140 ka) por la segunda derivada en el Margen Ibérico, coincide con el comienzo de la Terminación II, esto, si nos basamos en los reportes de *Lorius et al.* [1985], quien ubicó el punto medio del calentamiento en la Antártida muy cercano a 140 ka, que es el mismo valor reportado en los registros de isótopos de oxígeno de Devils Hole [*Winograd et al.*, 1992; *Ludwig et al.*, 1992; *Wong y Breecker*, 2015], de igual manera, si recordamos los resultados que nosotros obtuvimos para Domo C, el evento más cálido se encontró en 130.9 ka, que no está muy alejado de los 140 ka reportados con anterioridad. La Terminación II fue una época de rápido cambio climático, cuando las placas de hielo se derritieron y el nivel del mar aumentó, al igual que las concentraciones atmosféricas de CO₂ [*Denton et al.*, 2010; *Moseley et al.*, 2015]. Para el caso del Margen Ibérico, *Drysdale et al.* [2009] limitaron el comienzo de la Terminación II, basándose en el cambio de $\delta^{18}O$ bentónico hacia valores interglaciales en 141 ± 2.5 ka, lo que ubica de igual manera, nuestros

resultados en este evento.

Los valores obtenidos en nuestros análisis del Margen Ibérico concuerdan con cualquiera de los dos fechamientos proporcionados para la Terminación II, lo cual es de esperarse ya que los sedimentos del Margen Ibérico preservan un excelente registro multiproxy paleoclimático de la Terminación II y el último Interglacial [*Skinner y Shackleton*, 2006; *Martrat et al.*, 2004, 2007; *Sánchez-Goñi et al.*, 1999, 2005; *Paillet y Bard*, 2002; *Drysdale et al.*, 2009]. Sin duda, este evento tuvo una relevancia importante para la variación climática dentro del Margen Ibérico, pues sus registros permiten ver, de manera muy clara este evento. En el caso de la Antártida, nuestro valor no es igual al reportado por *Lorius et al.* [1985], quizá porque esta región no se ha registrado como la más idónea para obtener un registro confiable de la Terminación II; sin embargo, podríamos ubicar esta terminación también en nuestros resultados de Domo C.

Para examinar la naturaleza de la variabilidad suborbital dentro del MIS 5 de manera más cercana, *Oppo et al.* [2001] estimaron el espectro del sitio 1059 (32° N, 75° W, 2985 m, cerca del sur de California) con registros de $\delta^{18}O$ de *G. ruber* usando el método Multi-taper [*Thomson*, 1990], el pico espectral que ellos encontraron, ocurre en una banda ancha entre 4.8 y 12 ka (con picos de mayor potencia en 6 y 10 ka). *Keigwin y Jones* [1994], encontraron estos mismos periodos para la misma región, pero en MIS 3. En nuestro análisis espectral, sin tomar en cuenta el método de ondículas, se encontraron periodicidades de 4, 5, 7, 9 y 11 ka (para Antártida y Groenlandia, pero sólo 4 y 5 ka fueron encontrados en Groenlandia), que son valores muy cercanos a los reportados por estos autores. Lo relevante aquí, es pensar que debieron haber ocurrido tres o cuatro eventos importantes, con una periodicidad de ~4, 7, 9 y 11 ka, que afectaron no sólo al MIS 3 y 5, sino a todo un registro de 800 ka, ya que Antártida y Groenlandia abarcan este tiempo y seguimos encontrando estas periodicidades en sus series; de hecho, para Groenlandia encontramos el mismo valor de 4.8 ka reportado por *Oppo et al.* [2001]. De igual manera, podemos decir que el evento debió haber sido importante y grande, ya que estas tres regiones están muy alejadas entre sí, aunque Groenlandia y California del sur están más cerca de lo que el sur de California lo está de la Antártida, quizá está sea la razón por la cual la periodicidad de Groenlandia sea la misma que la hallada en California.

Por otro lado, si tomamos en cuenta el análisis de ondículas, el tiempo transcurrido en el que Groenlandia y el Marge Ibérico están en fase o desfase, abarca entre 10 y 11 ka (dos ocasiones de cinco para la fase y las dos únicas ocasiones de desfase). Analizando las dos ocasiones en las que estas dos regiones están en desfase (100 - 110 ka y 140 - 150 ka) se observa que abarca el tiempo en el que el Margen Ibérico está en fase con la Antártida (50 - 180 ka), pero al mismo tiempo, desde los años 50 - 170 ka Groenlandia y Margen Ibérico están en fase, provocando un traslape entre fase y desfase para estos dos lugares, esto da una razón más para sostener la teoría mencionada sobre la ocurrencia de dos eventos importantes que provoquen este traslape entre Margen Ibérico y Groenlandia, al mismo tiempo que el Margen Ibérico está en fase con la Antártida.

No obstante, sin olvidar el tema de los ~10 - 11 ka, que están presentes en la fase y desfase; así como, en los otros análisis espectrales, también pueden visualizarse entre fase y fase (G-MI), donde los valores encontrados son múltiplos de 10 (10, 20 y 60 ka), mientras que el tiempo entre desfase y desfase fue de 30 ka. Sin duda, así como el ciclo de 100 ka está presente de manera importante a lo largo de nuestros registros, también lo está el de 10 ka, sin perder importancia, lo cual tiene una analogía con los ciclos de las manchas solares (~10 -11, 22 y 60 años) y el ciclo de los rayos cósmicos (~30 años), que en nuestro caso están presentes cuando están en fase (ciclos solares) y cuando están desfasados (rayos cósmicos). Se podría pensar que estos dos eventos están involucrados en estas transiciones de fase y desfase, en el que probablemente hay algo que amplifica los ciclos solares y de rayos cósmicos por mil años de manera regional, pero posiblemente sea solo característico de la parte norte, ya que no se encontraron transiciones de fase y desfase para Antártida y Margen Ibérico, esto puede ser también solo un caso de casualidad y no causalidad.

De lo anterior es posible decir, y como ya lo sugirieron *Roe y Steig* [2004] al estudiar la variabilidad de frecuencias bajas en los núcleos de hielo de Groenlandia y Antártida, que la variabilidad en escala milenial está determinada ampliamente por procesos regionales, que son en este caso los ciclos que hemos sugerido. Cabe resaltar que, para ellos hay poca comunicación entre el hemisferio norte y sur, mientras que, de los resultados obtenidos en este estudio es claro a través del análisis de ondícula cruzada que ambos hemisferios están muy conectados. De hecho, *Steig et al.* [1998] al estudiar el Domo Taylor encontraron sincronía o casi sincronía para la última transición glacial-interglacial con los cambios

ocurridos en la región del Atlántico norte, con esto observaron que sus resultados tienen implicaciones importantes para entender el mecanismo de vinculación climática entre los hemisferios.

Con respecto a la influencia entre hemisferios, también se obtuvo información importante a través del método de ondícula cruzada, por medio de este, se pudo visualizar un retraso de 3868 años para la señal de variabilidad climática entre la Antártida y Groenlandia, un retraso de 3640 años para Antártida y Margen Ibérico y un retraso de 8440 años entre Groenlandia y Margen Ibérico. Los dos primeros valores podrían parecer coherentes si tomamos en cuenta la ubicación geográfica de las regiones, el problema se presenta cuando vemos el retraso entre Groenlandia y Margen Ibérico; por ser dos regiones que se encuentran relativamente próximas, la señal no debería tardar tanto en llegar. Los alcances de este estudio no permitieron llegar a una explicación para este comportamiento, sin embargo, dejamos este resultado como un problema abierto, el cual requiere de más análisis para poder ser explicado.

A través del análisis de ondículas y los tres métodos adicionales de análisis espectral es posible ubicar los Ciclos de Milankovitch, haciendo de ésta, una señal fuerte para estas tres regiones.

Para el Margen Ibérico más que para la Antártida y Groenlandia, es posible observar la forma de diente de sierra en la serie de tiempo, que es un patrón claro encontrado antes por *Bond* [1993], quien asocia los ciclos de enfriamiento con forma diente de sierra a los registros de temperatura superficial del mar y la atmosférica, manteniendo una relación cercana con los eventos Heinrich y los colapsos masivos de la placa de hielo Laurentina. *Bond* [1993] encontró este patrón estudiando registros de un núcleo de hielo y en el caso del Margen Ibérico se trata de registros sedimentarios; sin embargo, como ya lo hemos mencionado anteriormente, esta región proporciona registros tanto de las masas de agua del Atlántico norte como de la Antártida; además, de acuerdo con *Bond* [1993], esta serie de ciclos de calentamiento y enfriamiento es tan notorio en los registros de la superficie del mar y la atmósfera del Atlántico norte que deben estar impresos en otros registros de la última glaciación. De esta manera podemos decir que, el Margen Ibérico también lleva información de estos ciclos y es muy probable que la forma de nuestra serie temporal también se deba a

los colapsos masivos de la Placa Laurentina, sólo que, en este caso, la forma se aprecia más allá del último periodo glacial. Este tipo de comportamiento también fue observado por *Alexandrov et al.* [2015] en un análisis estocástico realizado a través de un modelo para estudiar las variaciones climáticas del Cuaternario, su análisis demuestra una auto-fluctuación climática del tipo diente de sierra cercana a los 100 ka. Es un hecho que este tipo de comportamiento es una característica de la variabilidad climática del Cuaternario.

Para Groenlandia y la Antártida que contienen registros hasta el MIS 20.2 (800 ka antes del presente), que cubre el Plioceno superior. De los dos eventos importantes encontrados en Antártida con la primera y segunda derivada, están: 1) 15.8 ka, que se ubica en el MIS 2, donde hubo fuertes aumentos de temperatura en 15 ka. En lo que respecta a esto, *Chappellaz et al.* [1990] y *Chappellaz et al.* [1993], al realizar un análisis de las burbujas de aire atrapadas en el núcleo de hielo GRIP y Vostok reportan un aumento rápido en las concentraciones de CH₄ atmosférico cerca del final del Younger Dryas, de hecho, también observaron un aumento en las concentraciones de $\delta^{18}O_{atmos}$ para el mismo periodo, ubicando puntos precisos de correlación en 14.6 ka y 11.6 ka. La precisión en los puntos de correlación para cambios lentos en las concentraciones de los mismos elementos se reportó en 20 y 15 ka [Steig et al., 1998], en el que puede entrar el evento importante de 15.8 ka que nosotros encontramos. Cabe destacar que también *Liu et al.* [2009] mediante un Modelo de Circulación General Océano-Atmósfera hicieron un análisis de 17 a 14 ka, disminuyendo el Flujo Reducido de Agua de Deshielo (Reduced Meltwater Flux, MWF por sus siglas en inglés), que fue donde se observaron cambios más pronunciados en la temperatura. Para Groenlandia y la Antártida la temperatura aumentó en el comienzo del Bolling/Allerod, esto ubica nuestro evento importante en un periodo cálido.

Si recordamos los eventos fríos hallados en el registro, también se tiene 25461 años, ubicados de igual manera en el MIS 2, donde se reporta un frío extremo en 26 ka, que no está muy lejos del valor encontrado en este estudio. 2) Este evento se encontró en 58.9 ka, ubicándolo en el MIS 3. Con respecto al rango de temperatura más baja (-10. °C), vemos que ésta se encuentra en el MIS 2 y para el rango más alto de temperatura (4.6 °C) se ubica en el MIS 5.5.

Para Groenlandia, la primera y segunda derivada ubicaron un evento importante en 49.1 ka, que probablemente esté relacionado con algún evento Heinrich, los cuales, junto con

los Dansgaard-Oeschger, conocidos como ciclos Bond, están ubicados en el último periodo glacial (~100 a 10 ka, sin abarcar el Holoceno) [Bond *et al.*, 1993; Broecker, 1994; Cox y Press, 2007]. En cuanto al valor de menor temperatura, podemos ubicarlo muy bien en el MIS 6, el cual corresponde a un periodo glacial; mientras que el valor de mayor temperatura está ubicado en el MIS 9, donde se reportó un pico de calor en 340 ka, que no está muy lejos de los 333749 años que se obtuvieron en este estudio.

La razón para realizar este estudio tomando en cuenta el enfoque lineal y el no-lineal, es porque el sistema climático se comporta de manera no-lineal y es necesario juntar ambos enfoques para lograr entender la dinámica del clima.

Se puede observar comportamientos caóticos y periódicos dentro de las series estudiadas, lo cual es de esperarse ya que las interacciones entre forzamientos internos y externos que regulan el clima son bastante complejos, no se puede esperar que el clima tenga un comportamiento únicamente lineal. Weertman [1976] hizo un estudio experimental, cambiando los parámetros de su modelo dentro de un rango físicamente aceptable, haciendo una diferencia entre un régimen glacial y uno interglacial, notando que un ligero cambio en los parámetros provocaba un clima u otro. Este es un ejemplo claro de lo que se observa a través del análisis que se efectúa en este estudio, ya que a través de la construcción del atractor en el espacio fase se pueden ver comportamientos erráticos entre temperaturas frías y cálidas, puntualizando como el clima debió haber pasado por cambios sensibles que llevaron al sistema a tener un comportamiento caótico. De igual manera Alexandrov *et al.* [2014] hicieron un estudio del comportamiento del clima con ayuda del modelo de Saltzman *et al.* [1978; 1980; 1981; 1982], en el que ven los diferentes tipos de cambio en las trayectorias del espacio fase conforme aumentan o disminuyen el ruido aditivo (utilizando la temperatura media del océano) y paramétrico (representa mecanismos físicos que gobiernan la dinámica del clima). Con las variaciones en estos dos tipos de ruido, observan como el sistema pasa de una transición entre oscilaciones de pequeña amplitud a oscilaciones de amplitud grande. La parte importante de sus resultados es que encuentran un comportamiento caótico al aumentar la intensidad del ruido. Más adelante Alexandrov *et al.* [2015; 2017] aplicando nuevamente el modelo de Saltzman-Sutera [1984] encuentran que cuando el sistema climático se acerca a su punto de bifurcación se generan oscilaciones estocásticas de

amplitud pequeña y grande, es decir, el ruido más pequeño conduce a una transición del orden al caos.

No obstante, los resultados obtenidos a través del análisis espectral también indican comportamientos periódicos que pueden asociarse con forzamientos externos, como son en este caso, el ciclo de excentricidad de la Tierra y con forzamientos internos. De esta manera, el clima se está comportando como si estuviera pasando de un estado de transición periódica (fácilmente predecible) a una caótica (con un límite de predictibilidad), y es la razón por la cual no es posible predecir el clima de manera certera, pues es necesario llevar a cabo más análisis que junten estos dos comportamientos de un sistema. *Alexandrov et al.* [2015; 2017] encuentran que la transición de glaciación/deglaciación se vuelve más rápida y abrupta, así como su transición del orden al caos a medida que aumentan la intensidad del ruido (forzamiento externo). Nuestros resultados son concordantes con los de *Alexandrov et al.* [2014; 2015; 2017], quienes al observar el complejo comportamiento no-lineal en su modelo, consideran importante este tipo de análisis para clarificar el mecanismo intrínseco de los cambios climáticos inducidos por el ruido. Así, a través de sus resultados de modelación, *Alexandrov et al.* [2014, 2015, 2017] encontraron lo mismo que nosotros, pero en nuestro caso, con datos reales, el sistema climático se encuentra en un estado de transición entre orden y caos, y la precisión al momento de predecir el cambio climático dentro de una zona de caos, se reducen considerablemente.

CONCLUSIONES

Los registros de temperatura del Margen Ibérico muestran una forma clara de diente sierra, la cual es característica de los cambios de temperatura oceánica y atmosférica. Es a través de la identificación de este patrón que es posible asociar el comportamiento caótico encontrado a través de los exponentes de Lyapunov, con los cambios abruptos en la temperatura, al pasar de manera abrupta de temperaturas frías a cálidas, ya que el sistema resultó ser sensible a las condiciones iniciales y, ligeros cambios en el entorno del Margen Ibérico pudieron causar la variabilidad climática en la región. Para la Antártida y Groenlandia es posible identificar este mismo patrón, pero realizando un acercamiento a las series de tiempo, esto también hace posible vincular este patrón en los núcleos de hielo con un comportamiento caótico, aunque resulta claro que es en el Margen Ibérico donde se puede apreciar mejor la asociación entre estos dos factores.

Gracias al análisis espectral fue posible identificar el forzamiento de 100 ka característico del Pleistoceno tardío, junto con otras periodicidades relacionadas con las manchas solares y los rayos cósmicos, ayudados por algún factor regional que amplifica sus señales. Esto indica que es posible predecir algunos comportamientos generales del clima; sin embargo, son los forzamientos internos que provocan el caos en el sistema, los que impiden predecir más allá de un cierto límite el comportamiento de la región y, en nuestro caso sólo es posible predecir la variabilidad climática del Margen Ibérico hasta ~ 32.38 ka, de Antártida hasta ~ 142.85 ka y para Groenlandia ~ 90.91 ka, con mayor alcance de predictibilidad para la Antártida.

Los resultados anteriores ayudaron a confirmar la hipótesis planteada acerca de quién dispara la señal de variabilidad climática entre el hemisferio norte y sur, corroborando que es la Antártida quien dispara la señal, pero sin dejar de lado que tiene un nivel de caos muy bajo, que es algo también planteado en la hipótesis, basándonos en la gran inercia térmica que hay en esta región.

Así mismo, gracias a la dimensión del atractor obtenida con la dimensión de correlación, se sabe que la Antártida y Groenlandia están modulando de alguna manera la señal del Margen Ibérico ya que este último necesita una ecuación diferencial parcial menos (tres), para poder modelar su dinámica, a diferencia de las otras dos regiones que tienen el mismo número de

ecuaciones para su modelación (cuatro).

Hasta aquí, se ha logrado probar la importancia de estudiar cualquier evento ocurrido en la naturaleza desde un enfoque tanto lineal como no-lineal, ya que sólo así se podrá entender mejor el comportamiento de cualquier sistema que se esté estudiando.

ANEXO A

INTRODUCCIÓN AL SISTEMA CLIMÁTICO TERRESTRE

A.1 Sistema climático terrestre

Debido a que la atmósfera es un sistema termo-hidrodinámico, puede ser caracterizada por su composición, su estado termodinámico, el cual se puede especificar por medio de las variables termodinámicas, y su estado mecánico. Una descripción completa de los estados de la atmósfera también debe incluir otras variables como la nubosidad, la precipitación y el calor latente que afectan el comportamiento de la atmósfera a gran escala. Tradicionalmente, la temperatura y la precipitación son considerados los elementos más importantes del clima. Es sobre la base de estos elementos que los climas son generalmente clasificados. En general, su distribución geográfica muestra climas húmedos y cálidos en latitudes bajas, climas cálidos y mucho más secos en los subtrópicos, climas húmedos y templados en latitudes medias a altas y, finalmente, climas fríos y secos en regiones polares y subpolares. Sin embargo, se sabe que esta distribución no da una descripción completa del clima local y regional. También se debe tener en cuenta el contraste tierra-mar y la influencia de los océanos en la temperatura; los efectos de las montañas en la precipitación, nubosidad y temperatura; la influencia de la capa de hielo en la temperatura; y otras influencias similares [Peixoto y Oort, 1992].

En términos generales, el clima es modulado por factores internos y externos. Los factores externos se pueden agrupar en: a) factores generales, tales como la radiación solar, los parámetros orbitales terrestres, la existencia de continentes y océanos; y b) factores locales y regionales, como la distancia al mar, la topografía, la cubierta vegetal y la proximidad a los lagos. Los factores internos se ocupan de las propiedades intrínsecas de la atmósfera, como son: la composición atmosférica, diversas inestabilidades y la circulación general [Peixoto y Oort, 1992].

La atmósfera como un sistema termodinámico, no puede estudiarse sin tomar en cuenta sus sistemas vecinos. Los sistemas adjuntos son la hidrósfera (océanos, lagos, ríos y agua subterránea), la criósfera (glaciares, nieve y masas de hielo de la tierra), la litósfera

(superficie de la tierra) y los biosistemas marinos y terrestres. Aunque estos sistemas naturales son muy diferentes en su composición, propiedades físicas, estructura y comportamiento, todos están unidos por flujos de masa, energía y momento que forman un sistema llamado sistema climático. Este sistema climático es extremadamente complejo debido a las interacciones no-lineales de sus componentes [Peixoto y Oort, 1992; Cronin, 1999].

A continuación, se hará una descripción breve de los componentes climáticos.

A.1.1 Atmósfera

De los cinco subsistemas que conforman al sistema climático, la atmósfera es el más variable, posee una capacidad calorífica relativamente baja y responde rápidamente a influencias externas (del orden de un mes o menos). Se acopla a otros componentes del sistema climático a través del intercambio de energía en la superficie (las capas límite atmosféricas), así como a través de interacciones químicas que pueden afectar la composición atmosférica [Junge, 1972; Jaenicke, 1981; Bolin, 1981; Raymond, 1999].

En dirección vertical, más del 99% de la masa atmosférica se encuentra debajo de una altitud de 30 km. En comparación, las dimensiones horizontales de la atmósfera pueden ser representadas por la distancia entre los polos norte y sur, y está en el orden de 20 000 km. La atmósfera se divide en varios estratos que pueden diferir en composición, temperatura, estabilidad y energía. Los principales estratos, empezando desde la superficie terrestre son: la tropósfera, la estratósfera, la mesosfera y la termósfera, separadas por capas donde la temperatura es constante [Raymond, 1999].

La composición de la atmósfera hasta la mesopausa es prácticamente uniforme con respecto a las concentraciones de hidrógeno, oxígeno y otros gases inertes. Entre las componentes variables, el vapor de agua es predominante en la troposfera, donde la variabilidad de la temperatura estacional y diaria controla en gran medida los patrones de circulación vertical; y el ozono en la estratósfera media, que es relativamente estable sobre escalas de tiempo cortas. La circulación atmosférica en dirección norte-sur es llamada flujo meridional y en dirección este-oeste es conocida como flujo zonal, al igual que la oceánica, es el producto de una combinación de factores que incluyen gradientes de presión causados

por el calentamiento de la radiación solar, y la fuerza de Coriolis debida a la rotación de la Tierra [Cronin, 1999].

Las principales características de la circulación atmosférica son impulsadas por una fuerte insolación solar en el ecuador, lo que hace que el aire caliente se eleve para después hundirse, ya que se enfría en aproximadamente 30° de latitud en ambos hemisferios. Esta elevación y hundimiento de las masas de aire forman la celda de Hadley. La rama ascendente de esta celda se encuentra en la Zona de Convergencia Intertropical (Intertropical Convergence Zone, ITCZ por sus siglas en inglés).

El tiempo de respuesta de la atmósfera a causa de un cambio efectuado es más corto que el de cualquiera de los otros componentes del sistema climático. Debido a su compresibilidad relativamente grande, su calor específico bajo y su densidad, el tiempo de respuesta es del orden de días a semanas. Estas propiedades hacen que la atmósfera sea más fluida e inestable.

A.1.2 Hidrósfera

Los océanos son un componente mucho más lento del sistema climático que la atmósfera. Las capas superficiales del océano responden a influencias externas sobre una escala de tiempo de meses a años, mientras que los cambios en el océano profundo son más lentos, por otro lado, el agua tiene una capacidad calorífica más alta que la del aire. Los océanos almacenan grandes cantidades de energía y actúan como un amortiguador contra los grandes cambios estacionales de temperatura. A gran escala, esto se refleja en las diferencias entre los rangos de temperaturas estacionales de los hemisferios norte y sur. En menor escala, la proximidad al océano es un factor importante que afecta al clima de una región. De hecho, éste es probablemente el factor más importante después de la latitud y la elevación [Raymond, 1999].

Los océanos son más extensos en el hemisferio sur, entre 30° y 70° S, y menos extensos en la zona 50-70° N. Éstos juegan un papel crítico en el balance químico del sistema atmosférico, particularmente con respecto a los niveles de dióxido de carbono; ya que los océanos contienen grandes cantidades de CO₂ en solución, incluso un pequeño cambio en el

balance de éste puede tener consecuencias importantes para el balance de radiación de la atmósfera y, por tanto, del clima [Sundquist, 1985].

A.1.3 Litósfera

La litósfera forma el caparazón rígido externo (típicamente, de 50 a 300 km de espesor) de la Tierra. Incluye la corteza y, en general, una parte no convectiva del manto superior llamada manto litosférico. El conocimiento de la estructura, composición y evolución secular de la litósfera es crucial para la comprensión de la evolución geológica de la Tierra desde su acumulación, incluida la comprensión de los procesos detrás de la formación de la litósfera temprana, los procesos detrás de la tectónica de placas y la interacción manto-litósfera [Artemieva, 2011].

El límite litósfera-asténosfera es una zona de transición sobre la cual ocurre un cambio gradual en las características físicas y químicas. Éste es un límite global importante debido a su naturaleza dual, ya que refleja el proceso relacionado tanto a la evolución global (como la diferenciación global del manto que condujo a la distinción de la corteza y la litosfera; enfriamiento secular de la Tierra; estilos y patrones de convección global del manto), como a la tectónica de placas (tales como la generación de litosfera, reciclaje y modificación mediante procesos de tectónica de placas y convección secundaria del manto) [Artemieva, 2011].

De acuerdo con los estudios geofísicos que se realizan, se tienen cuatro definiciones de litósfera: elástica, térmica, eléctrica y sísmica. Como queda claro por sus nombres, se basan en mediciones indirectas de diferentes propiedades de las rocas del manto superior y, por lo tanto, pueden referirse a capas externas de la Tierra de grosores significativamente diferentes.

Litósfera elástica: El concepto de litosfera elástica (una placa elástica que recubre el manto viscoso) está cerca de la definición "clásica" de la litosfera como la capa rígida superior que se mueve mecánicamente de manera coherente con el movimiento de la placa [Barrell, 1914]. El grosor elástico de la litosfera es una medida de la resistencia mecánica de una placa elástica y considera a la litosfera como una capa reológicamente fuerte que proporciona la respuesta

isostática de la placa a las cargas topográficas y/o subsuperficiales (es decir, debido a variaciones en el grosor de la corteza y densidad) y soporta mecánicamente las tensiones elásticas inducidas por la flexión litosférica.

Litósfera térmica: La mayoría de las definiciones geofísicas prácticas de la base de la litósfera se basan en las propiedades físicas dependientes de la temperatura de las rocas del manto, medidas indirectamente en estudios geofísicos. La base de la litósfera térmica se define comúnmente ya sea por la profundidad a una isoterma constante (por ejemplo, 1300 °C) o por la profundidad donde una continuación lineal hacia abajo de la geoterma, alcanza una fracción predefinida de la temperatura ambiente del manto o del manto sólido [*Pollack y Chapman, 1977*].

Una fuerte dependencia de la temperatura del comportamiento elástico y no elástico de las rocas del manto en condiciones P-T (presión-temperatura) altas [*Duffy y Anderson, 1989; Jackson et al., 1990; Karato, 1993; Karato y Spetzler, 1990*] proporciona la base para conversiones de velocidades sísmicas a temperaturas del manto superior y, por lo tanto, permite estimaciones independientes del grosor de la litósfera térmica.

Litósfera sísmica: La litósfera sísmica, o la tapa, es una capa sísmica de alta velocidad por encima de la zona de baja velocidad o por encima de una zona de gradiente de alta velocidad en el manto superior, presumiblemente causada por la fusión parcial [*Artemieva, 2011*].

Cuando los modelos sísmicos están limitados en velocidades relativas en lugar de absolutas (es decir, como una perturbación de velocidad con respecto a un modelo de referencia), la zona de baja velocidad sísmica puede ser un artefacto del modelo de referencia. Este es el caso, en particular, cuando el Modelo de Tierra de referencia preliminar (Preliminary Reference Earth Model, PREM por sus siglas en inglés) (con un incremento abrupto de velocidad a una profundidad de 220 km, típico de la litósfera oceánica, pero no requerido por los datos sísmicos para las regiones continentales) se utiliza como modelo de referencia para continentes estables [*Kennett, 2006*]. Otra confusión que surge de la definición de la tapa sísmica está relacionada con el hecho de que se puede producir una zona de baja velocidad sin involucrar la fusión del manto: puede ocurrir una disminución de la

velocidad con la profundidad cuando el aumento de la velocidad sísmica debido al aumento de la presión es menor que la disminución de la velocidad debido al aumento de temperatura con la profundidad [Artemieva, 2011].

Litósfera eléctrica: La litósfera eléctrica generalmente se define como la capa superior altamente resistiva, por encima de la astenosfera altamente conductora. Su base corresponde a un cambio brusco en la conductividad del manto. La difusividad anisotrópica de hidrógeno en los cristales de olivino produce conductividad eléctrica dependiente de la dirección. Por lo tanto, si el olivino está parcialmente alineado por el flujo astenosférico, la profundidad donde se observa un cambio en la anisotropía eléctrica del manto puede interpretarse como el límite eléctrico litósfera-astenosfera [Artemieva, 2011].

La característica más conocida asociada con la litósfera de la Tierra es la actividad tectónica. La actividad tectónica describe la interacción de las grandes losas de litósfera llamadas placas tectónicas, entre las más grandes están: Norteamericana, Sudamericana, Caribe, Scotia, Antártica, Eurasia, Árabe, Africana, Indoaustraliana, Filipina, Australiana, Pacífico, Juan de Fuca, Cocos y Nazca.

A.1.4 Biósfera

La biósfera comprende la vegetación terrestre, la fauna continental y la flora y fauna de los océanos. La vegetación altera la rugosidad de la superficie, el albedo de la superficie, la evaporación, la escorrentía y la capacidad de campo del suelo. Además, la biósfera influye en el balance del dióxido de carbono en la atmósfera y los océanos a través de la fotosíntesis y la respiración. La ausencia de vegetación puede resultar en incrementos significativos en la carga de partículas de la atmósfera, al menos localmente, y esto puede ser un factor significativo en la alteración del clima [Charney *et al.*, 1975; Overpeck *et al.*, 1996]. El tipo de vegetación varía mucho de una región a otra. Los bosques cubren el 34% de los continentes y juegan un papel importante en la remoción del CO₂ atmosférico [Woodwell *et al.*, 1978; Potter *et al.*, 1993; Ciais *et al.*, 1995]. Desiertos y matorrales desérticos ocupan el ~13% de los continentes, y son las principales fuentes de polvo arrastrado por el viento (aunque también las tierras cultivadas son cada vez más susceptibles a la erosión eólica).

En general, la biosfera es sensible a los cambios en el clima atmosférico y es a través del registro de estos cambios en fósiles, anillos de árboles, polen, etc., durante épocas pasadas, que obtenemos información sobre los paleoclimas de la Tierra. El tiempo de la respuesta de la biosfera varía ampliamente, del orden de años, para elementos individuales de la atmósfera a siglos para comunidades enteras de vegetación. La captura de carbono en ecosistemas terrestres ha variado a lo largo de los ciclos glaciales-interglaciales debido a los cambios a gran escala en el área de diferentes tipos de ecosistemas. Por lo tanto, el área de bosques durante el Último Máximo Glacial se redujo en menos de la tercera parte de la cubierta forestal actual, con una reducción correspondiente al almacenamiento de carbono en el ecosistema forestal [Van Campo et al., 1993; Peng et al., 1998]. En general, el almacenamiento de carbono en tierra fue 30% menos durante el Último Máximo Glacial que en la actualidad.

Los seres humanos y sus actividades son parte de la biosfera y juegan un papel importante en el sistema climático. Incrementos en las concentraciones de CO₂ atmosférico, cambios en la vegetación natural, incremento en las partículas cargadas de la tropósfera inferior, y reducciones en las concentraciones de ozono atmosférico en la estratósfera pueden atribuirse a las actividades del hombre [MacCracken et al., 1990; Schimel et al., 1996]. La tasa de estos cambios es rápida y la extensión a la cual el sistema climático puede ajustarse a ellos sin cambios drásticos en el clima o la variabilidad climática permanece en incertidumbre.

A.1.5 Criósfera

La criósfera, que abarca toda el agua congelada en la Tierra, consta de nieve, hielo (incluido el hielo de lagos y ríos, hielo marino, glaciares y capas de hielo) y permafrost (incluido el suelo estacionalmente congelado). Las propiedades físicas, mecánicas y térmicas de la nieve, el hielo y el permafrost controlan la dinámica de los riesgos criosféricos asociados. Estas propiedades son vitales para el modelado numérico y el pronóstico de los peligros naturales relacionados con la criósfera [Arenson et al., 2015].

El área de la cubierta de nieve varía drásticamente durante todo el año. En América del Norte, por ejemplo, la nieve cubre casi 50% (45 millones de km²) de tierra en invierno, y

menos de 10% (3 millones de km²) de tierra en verano [Armstrong y Brodzick, 2001]. Más de mil millones de personas, entre un sexto y un tercio de la población mundial, dependen del agua suministrada al menos parcialmente por la nieve estacional o el deshielo glacial [Beniston et al., 2003; Barnett et al., 2005]. La lluvia sobre la nieve y el deshielo pueden causar aumentos rápidos en el flujo de la corriente, y a menudo son los principales contribuyentes a las inundaciones de primavera y los flujos de escombros en terrenos montañosos. Las condiciones climáticas extremas de invierno son una de las principales causas de muerte, y representaron 18% de las muertes por peligros naturales en Estados Unidos entre 1970 y 2004 (aproximadamente 100 de 570 muertes relacionadas con peligros cada año) [Borden y Cutter, 2008]. Las avalanchas de nieve causaron en promedio 27 muertes por año sólo en el oeste de Estados Unidos entre 1998 y 2008 [Spencer y Ashley, 2011]. En algunos estados, las avalanchas son la principal fuente de muerte debido a los peligros naturales.

Casi 70% del agua dulce de la Tierra, que es sólo alrededor de 3% del agua total en la Tierra, se almacena en los glaciares y las capas de hielo que se alimentan de nieve [IPCC, 2013]. Por definición, los glaciares y las capas de hielo desarrollan un flujo termomecánico, impulsado por la gravedad, por lo que la ablación del hielo en las elevaciones más bajas se repone por la acumulación de nieve en las regiones más altas [Cogley et al., 2011]. La respuesta de los glaciares y las capas de hielo al cambio climático contemporáneo es un tema de gran interés para los peligros a más largo plazo, como el cambio de los recursos hídricos y el aumento del nivel del mar [Vaughan y Comiso, 2013; Arenson et al., 2015].

A.2 Balance de energía

Dentro de estos subsistemas, hay un gran número de procesos climáticos. Un efecto fundamental en la configuración del clima de la Tierra es que la radiación solar tiende a atravesar la atmósfera y ser absorbida en la superficie terrestre y en los 10 m superiores del océano. Ya que el océano se calienta desde arriba, éste tiende a ser bastante estable para movimientos verticales.

El balance de energía promedio global y anual puede parecer simple desde el punto de vista del forzamiento solar. Sin embargo, las vías por las cuales este aporte de energía se

transfiere desde la superficie de la Tierra a través de la atmósfera y eventualmente de regreso al espacio, incluyen muchas de las complicaciones que plantean problemas para la evaluación del calentamiento global. La Figura 3.1 muestra la transferencia de energía, con una entrada promedio de radiación solar de $\sim 342 \text{ W/m}^2$. No toda esta energía es absorbida por el sistema Tierra, ya que parte de ésta es inmediatamente reflejada. Nubes y aerosoles (partículas suspendidas) reflejan una parte a la atmósfera y otra parte a la superficie. El albedo es definido como la fracción de radiación solar incidente que es reflejada. El albedo promedio global de la radiación solar (albedo planetario), de acuerdo con la Figura A.1 es 0.31 (107 W/m^2 salen de la Tierra, de los 342 W/m^2 que entran). Diferentes partes de la superficie tienen diferentes albedos. Por ejemplo, las nubes convectivas profundas tienen un albedo de ~ 0.9 . El océano tiene un albedo de 0.08, el cual es más bajo que el de la nieve, el hielo, el desierto o las nubes. Por tanto, variaciones en la cobertura de nieve y la extensión de nieve pueden afectar potencialmente el albedo promedio [Neelin, 2011].

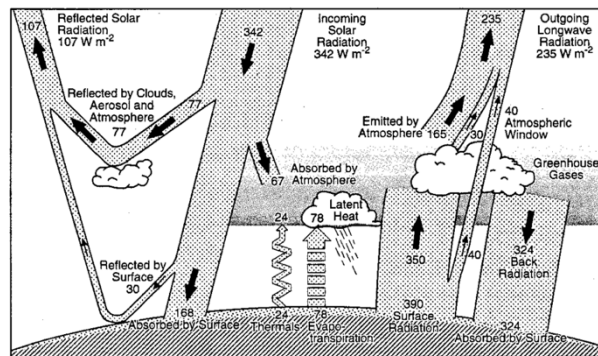


Figura A.1. Vías de transferencia de energía en el balance de energía promedio global. Tomada de Kiehl y Trenberth [1997].

A medida que la radiación penetra en la atmósfera, un promedio global de 77 W/m^2 (23%) se refleja desde las nubes o se dispersa hacia arriba por las moléculas y las partículas en el aire. Debido a que la superficie de la Tierra también es reflectiva, aproximadamente otro 9% de la radiación solar que entra es regresada al espacio sin calentar la atmósfera o la superficie de la Tierra. Otros 67 W/m^2 (20%) son absorbidos por el ozono, por el vapor de agua y las gotas de agua en las nubes, y por partículas, elevando así la temperatura de la atmósfera. Por lo tanto, sólo aproximadamente la mitad de la energía que incide en la atmósfera exterior alcanza la superficie, donde es absorbida, incrementando la temperatura superficial. La energía se vuelve a radiar desde la superficie de la Tierra en longitudes de onda más largas

(radiación terrestre), mucha de esta energía es absorbida por vapor de agua y dióxido de carbono en la atmósfera. Eventualmente, la energía absorbida es re-radiada por la atmósfera y finalmente se pierde en el espacio. De este modo, solo el ~39% de la energía absorbida por la superficie de la Tierra se pierde por las emisiones radiativas [Bradley, 1999].

Tres formas de transferencia de calor ocurren desde el suelo hacia arriba: calor latente, calor sensible y emisión infrarroja. La transferencia de calor sensible es debido al contacto entre las moléculas de aire con el suelo caliente que posteriormente se transfiere hacia arriba por parcelas de aire más caliente. Dondequiera que haya agua disponible, la evaporación es un medio más efectivo para enfriar la superficie sobre la mayor parte de la Tierra. El cambio de fase de líquido a vapor almacena energía en forma de calor latente [Neelin, 2011].

La importancia relativa de los mecanismos de calor latente y calor sensible en la transferencia de calor desde la superficie de la Tierra a veces es caracterizada por la relación de Bowen (H/LE); valores altos (≥ 10) son típicos de áreas desérticas, donde los valores del flujo del calor latente son muy bajos, mientras las tasas bajas de Bowen (≤ 1) son típicas de áreas oceánicas, donde se radia mucha energía a través de la evaporación del agua [Bradley, 1999].

La radiación infrarroja (RI) juega un doble papel en el balance de la energía superficial. La superficie cálida pierde energía al emitir RI hacia arriba, pero la atmósfera también emite RI hacia abajo, la cual es absorbida en la superficie. La pérdida neta de RI de la superficie es de 66 W/m^2 , mucho más pequeña que la de 390 W/m^2 que se emite hacia arriba. Aquí es donde los gases de efecto invernadero juegan un papel muy importante [Neelin, 2011]. Lo anterior puede resumirse como sigue:

- La RI que la superficie emite hacia arriba está mayormente atrapada en la atmósfera, en lugar de escapar directamente al espacio, por lo que tiende a calentar la atmósfera.
- La atmósfera se calienta a una temperatura en la que emite suficiente radiación para equilibrar el balance de calor, pero emite tanto hacia arriba como hacia abajo, por lo que parte de la energía se devuelve a la superficie, donde se absorbe.

- Esto resulta en un calentamiento adicional de la superficie, comparado con un caso sin absorción atmosférica de RI.
- Tanto los gases como las nubes contribuyen a la absorción de RI y, por lo tanto, al efecto invernadero.

Los valores medios globales para el balance de energía proporcionan las bases para apreciar la importancia de un número de parámetros en el sistema climático. Pequeñas variaciones en la cobertura global de nubes, o incluso en el tipo de nubes, puede tener grandes consecuencias para el balance de energía global, pero no tenemos datos en los registros paleoclimáticos de cómo pudo haber variado la nubosidad a lo largo del tiempo sobre una escala global [Bradley, 1993].

A.3 Mecanismos de retroalimentación y forzamiento climático

Existen diferentes tipos de mecanismos de retroalimentación que son esenciales para explicar la variabilidad climática observada. Las interacciones dentro del sistema climático a menudo involucran relaciones no-lineales y complejas. Todos los componentes del sistema climático están íntimamente vinculados o acoplados entre ellos; de modo que, los cambios en un subsistema pueden involucrar cambios compensatorios en todo el sistema climático. Estos cambios pueden amplificar la perturbación inicial o amortiguarla. Las interacciones que tienden a amplificar la perturbación son llamadas mecanismos o procesos de retroalimentación positiva; operan de tal manera que el sistema se desestabiliza cada vez más. Las interacciones que tienden a amortiguar la perturbación inicial son llamadas mecanismos o procesos de retroalimentación negativa; proporcionan una influencia estabilizadora en el sistema y tienden a preservar el estatus quo [Prentice y Sarthein, 1993].

Es útil revisar los términos de forzamiento y retroalimentación climáticos. El forzamiento climático es un cambio en el sistema que se espera cambie el clima. Los ejemplos serían duplicar el CO₂, aumentar la irradiancia solar total en un 2%, introducir aerosoles volcánicos en la estratósfera. Los forzamientos climáticos son usualmente cuantificados en términos de cuántos watts por metro cuadrado cambian el balance energético cuando se imponen. Por

ejemplo, duplicar instantáneamente el CO₂ cambia el balance de energía en la parte superior de la atmósfera en aproximadamente 4 W/m² [Hartmann, 2016].

Un proceso de retroalimentación es una respuesta del sistema climático al calentamiento de la superficie que luego altera el balance de energía de tal manera que cambia la respuesta de la temperatura al forzamiento. Una retroalimentación positiva aumenta la respuesta forzada, y una retroalimentación negativa la reduce. Ejemplos clásicos de retroalimentación positiva son el albedo del hielo y el vapor de agua. Cuando el sistema se calienta, el hielo se derrite y esto reduce el albedo de la Tierra y provoca un mayor calentamiento. Cuando el sistema se enfría, el hielo crece, y esto aumenta el albedo de la Tierra, causando un mayor enfriamiento. En la retroalimentación de vapor de agua, la presión de vapor de saturación es muy sensible a la temperatura y el vapor de agua es el gas de efecto invernadero más importante, produciendo la retroalimentación positiva más fuerte [Hartmann, 2016].

No obstante, con el vapor de agua también se tiene un mecanismo de retroalimentación negativo. Un incremento de la evaporación del agua del mar produce un incremento de la concentración de vapor de agua en la atmósfera. Este incremento podría tener asociado un aumento de la cobertura nubosa, y por tanto, del albedo (radiación solar reflejada directamente hacia el espacio). La disminución en la cantidad de radiación solar que llega a la superficie de la Tierra se traduce en una disminución de la temperatura global, cosa que tendería a mitigar la evaporación del agua de los océanos. En este caso, la perturbación original (incremento de la evaporación del agua del mar) se ve mitigada tras la interacción.

Los factores externos que pueden influir en el clima son llamados forzamientos climáticos. Éstos se pueden dividir en dos grupos principales: 1) aquellos de naturaleza cósmica o astronómica controlados en gran medida por los procesos involucrados en el mantenimiento y la evolución del sistema solar y más allá, y 2) los de naturaleza tectónica que involucran fuentes de energía dentro de la porción sólida del planeta [Saltzman, 2002].

A.3.1 Forzamientos astronómicos

- **Cambios en la luminosidad solar.** La eyección radiativa de onda corta del sol, varía en cierta medida en escalas de tiempo cortas, pero se cree que por consideraciones astrofísicas solares ha aumentado monótonicamente a una velocidad de aproximadamente $68 \text{ W/m}^2\text{año}$. Otras variaciones mucho menos energéticas del flujo corpuscular solar (viento solar), el cual interactúa fuertemente con el campo magnético de la Tierra a una distancia de más de 15 radios terrestres [Saltzman, 2002].
- **Cambios orbitales de la Tierra.** Las variaciones de forzamiento climático más regulares y mejor conocidas son el resultado del cambio orbital de la Tierra con el sol. Estas son principalmente las variaciones diurnas y anuales asociadas con la rotación de la Tierra, la inclinación y la revolución elíptica sobre el sol, y las perturbaciones de estas variaciones estacionales que proporcionan la fuente más importante de forzamiento externo del sistema climático en la misma escala que las edades de hielo. Estas últimas perturbaciones se deben a los cambios en la orientación y posición de la Tierra con respecto al Sol debido a cambios en los siguientes elementos orbitales:
 - a) *Excentricidad.* La órbita de la Tierra varía de una forma casi circular a otra elíptica y el cambio entre dichas variaciones ocurre en periodos de aproximadamente 100 y 400 ka, las cuales conducen a un cambio en la irradiancia anual neta de la Tierra, un valor bajo de excentricidad (órbita casi circular) corresponde a una reducción de menos de 0.2% de la constante solar. Asumiendo que la constante solar es 1370 W/m^2 , esto representa un cambio de aproximadamente 2 W/m^2 durante el periodo de 100 ka [Saltzman, 2002].
 - b) *Oblicuidad o inclinación angular del eje de la Tierra con respecto al plano de la eclíptica.* Actualmente, el eje de rotación de la Tierra está inclinado 23.5° en relación con el plano eclíptico y está disminuyendo gradualmente a una velocidad de aproximadamente $0.5''/\text{año}$. La inclinación de la Tierra ha variado en escalas de tiempo prolongadas entre 22° y 25° , debido a los efectos planetarios en la posición de la eclíptica en el espacio. Un ciclo completo de

oblicuidad toma alrededor de 41 ka. El efecto climático de la oblicuidad es que una mayor inclinación tiende a amplificar los ciclos estacionales en latitudes altas porque una mayor inclinación hace que las regiones polares reciban relativamente más radiación que la que llega a los trópicos. El cambio neto en la radiación solar que alcanza la parte superior de la atmósfera en latitudes altas durante un ciclo completo de 41 ka es de aproximadamente 17 W/m^2 [Cronin, 1999].

Precesión. Los ciclos de precesión reflejan los cambios seculares en el perihelio de la Tierra. La precesión puede separarse en dos componentes: axial y elíptica. La precesión axial resulta del torque del Sol y la Luna en la protuberancia ecuatorial de la Tierra. El torque hace que el eje de rotación de la Tierra oscile, lo que a su vez hace que el Polo Norte describa un círculo durante un período de 26 ka. La precesión elíptica resulta de los efectos planetarios en toda la masa de la Tierra y hace que la órbita de la Tierra gire independientemente alrededor de un foco. El efecto neto es que la precesión de los equinoccios y los solsticios se desplaza lentamente alrededor de la órbita terrestre con un período de 22 ka. Este periodo es modulado por la excentricidad para producir efectos de 19 y 23 ka. El impacto climático de los cambios de precesión es mayor cerca del ecuador y equivale a aproximadamente un $\pm 10\%$ de cambio de insolación durante una temporada [Cronin, 1999].

- **Velocidad de rotación de la Tierra.** De acuerdo con la teoría de las mareas [MacDonald, 1964] y los estudios paleontológicos de los moluscos fósiles [Wells, 1963], existe una disminución progresiva de la velocidad angular de la rotación de la Tierra. Esto lleva a un incremento en la longitud del día sobre el tiempo geológico que puede afectar más al ciclo climático diario y la circulación global a través de los cambios de la fuerza de Coriolis [Hunt, 1979; Jenkins, 1993].
- **Bombardeos cósmicos.** Cada vez hay más pruebas de que la Tierra ha sido sometida episódicamente a impactos de fragmentos cósmicos, algunos de los cuales se cree que

han provocado cambios catastróficos en el clima y la biosfera de la Tierra. Se cree que uno de estos eventos ocurrió hace aproximadamente 65 millones de años (Ma), lo que llevo a cambios rápidos masivos en la biota de la Tierra, incluida la extinción de los dinosaurios [*Alvarez et al.*, 1984].

A.3.2 Forzamientos tectónicos

- **Movimiento de las placas tectónicas.** Bajo la influencia de movimientos convectivos lentos masivos en el manto de la Tierra, la faz de la Tierra ha estado cambiando continuamente en largas escalas de tiempo, alterando la forma y distribución de continentes y océanos. La topografía y las variaciones batimétricas asociadas con estos movimientos tectónicos son muy importantes, al igual que la naturaleza de la roca expuesta que es potencialmente resistente a la intemperie, con consecuencias geoquímicas.
- **Flujo de calor geotérmico.** Debido principalmente a la radiactividad en la Tierra sólida, existe un gradiente de temperatura cerca de la superficie sublitosférica que se asocia con un flujo de calor ascendente que varía en el espacio y el tiempo. Este flujo actúa continuamente para calentar las partes más bajas de la atmósfera, los océanos y las placas de hielo, con un valor promedio de $\sim 10^{-2}$ W/m². Se han producido importantes inyecciones de calor, productos químicos y masas de aerosoles en la atmósfera y los océanos, asociadas con los movimientos tectónicos y el calentamiento geotérmico productor de magma, con un grado variable de intensidad a lo largo de la historia de la Tierra [*Saltzman*, 2002].

ANEXO B

DIMENSIONES DE CORRELACIÓN PARA VARIAS SERIES DE TIEMPO

Tabla B.1. Estimación de la dimensión de correlación para varias series de tiempo geofísicas.

| Series de tiempo de variables individuales | Dimensión de Correlación | Referencia |
|--|--|---------------------------------|
| Registros de isótopos de oxígeno de los núcleos del mar profundo que abarcan el último millón de años. | 3.1 | <i>Nicolis y Nicolis</i> [1984] |
| Mismo registro diferente suavizado | No hay evidencia de dimensionalidad infinita | <i>Grassberger</i> [1986] |
| Valores geopotenciales locales diarios a 500 mb tomados a 1200 UTC extendiéndose en un lapso de 40 años. | ~6.0 | <i>Essex et al.</i> [1987] |
| 15 años de presión superficial diaria | No hay saturación | <i>Fraedrich</i> [1986] |
| 14 años de presión superficial diaria en invierno | | |
| 15 años de presión superficial diaria en verano | | |
| 30 años de la duración relativa del brillo solar | | |
| 29 años de la duración relativa del brillo solar en invierno | | |
| 30 años de la duración relativa del brillo solar en verano | | |
| 10 años de la amplitud de onda zonal | | |
| 10 años de la amplitud de onda zonal en invierno | | |

| | | |
|---|------------------|---|
| 10 años de la amplitud de onda zonal en verano | | |
| 14 años de la presión superficial diaria en invierno | $\geq 6.8 - 7.1$ | <i>Fraedrich</i> [1987] |
| Trayectoria Lagrangiana de tres boyas de seguimiento por satélite | 1.4 | <i>Osborne et al.</i> [1986] |
| Movimiento Lagrangiano relativo entre pares | 1.3 | <i>Sanderson y Goulding</i> [1990] |
| Promedio de 10 s de la velocidad vertical del viento registrada a 10 m sobre el suelo durante un periodo de 11 h | 7.3 | <i>Tsonis y Elsner</i> [1988] |
| 15 s de datos de intensidad de lluvia para una tormenta de Boston | 3.8 | <i>Rodríguez-Iturbide et al.</i> [1989] |
| Tiempo entre señales de pluviómetros, cada uno a la acumulación de 0.01 mm de lluvia; analizado para tres tormentas | < 4 | <i>Sharifi et al.</i> [1990] |
| Alturas geopotenciales diarias de 500 mb en 9 estaciones meteorológicas diferentes del oeste de Europa para 24 años | 6.8 - 8.4 | <i>Keppenne y Nicolis</i> [1989] |

Tomada de *Islam et al.* [1993].

REFERENCIAS

- Abreu, L., Abrantes, F. F., Shackleton, N. J., Tzedakis, P. C., McManus, J. F., Oppo, D. W., y Hall, M. E. (2005), Ocean climate variability in the eastern North Atlantic during interglacial marine isotope stage 11: A partial analogue to the Holocene? *Paleoceanography*, 20, pp. 1-15.
- Adorf, H-M. (1995), Interpolation of irregularly sampled data series-a survey. In: Shaw RA, Payne HE, Hayes JJE (eds) Proceedings of the astronomical data analysis software and systems IV, Conference series 77.
- Aksu, A. E., Mudie, P. J., de Vernal, A., y Gillespie, H. (1992), Ocean-atmosphere responses to climate change in the Labrador Sea: Pleistocene plankton and pollen records, *Palaeogeogr. Palaeoclimatol. Palaeoecol.*, 92, pp. 121 – 138.
- Aldrin, M., Damsleth, E., y Saebo, H.V. (1989), Time series analysis of unequally spaced observations with applications to copper contamination of the river Gaula in central Norway, *Environ Monit Assess*, 13, pp. 227-243.
- Alexandrov, D. V., Bashkirtseva, I. A., y Ryashko, L. B. (2017), Excitability, mixed-mode oscillations and transition to chaos in a stochastic ice ages model, *Physica D*343, pp. 28-37.
- Alexandrov, D. V., Bashkirtseva, I. A., y Ryashko, L. B. (2015), Noise-induced generation of saw-tooth type transitions between climate attractors and Stochastic excitability of paleoclimate, *The European Physical Journal B*88, pp. 1-12.
- Alexandrov, D. V., Bashkirtseva, I. A., Fedotov, S. P., y Ryashko, L. B. (2014), *The European Physical Journal B*87(227).
- Alley, R. B., Clark, P. U., Keiwin, L. D., y Webb, R. S. (1999), Making sense of millennial-scale climate change. In : Clark, R. B., Webb, P. U., Keiwin, L. D. (Eds), Mechanisms of Global Climate Change at Millennial Time Scales. *AGU Geophysical Monograph*, 112, pp. 385-394.
- Alvarez, W., Asaro, F., y Michel, H. V. (1984), Impact theory of mass extinctions and the invertebrate fossil record, *Science*, 223, pp. 1135-114.

- Andersen, B. G., y Borns, H. B. (1994), "The ice Age World: An Introduction to Quaternary History and Research with Emphasis on North America and Northern Europe during the Last 2.5 Million Years", Scandinavian University Press, Oslo.
- Arenson, L. U., Colgan, W., y Marshall, H. P. (2015), Physical, Thermal, and Mechanical Properties of Snow, Ice, and Permafrost. *Snow and Ice-Related Hazards, Risks and Disasters*, pp. 35-75.
- Armstrong, R.L., y Brodzick, M.J., (2001), Recent northern hemisphere snow extent: a comparison of data derived from visible and microwave satellite sensors, *Geophys. Res. Lett.* 28, pp. 3673.
- Artemieva, I.M. (2011), The lithosphere. An interdisciplinary Approach, Cambridge University Press, New York, pp. 794.
- Ashkenazy, Y., Barker, D. R., Gildor, H., y Havlin, S. (2003), Nonlinearity and multifractality of climate change in the past 420, 000 years, *Geophysical Research Letters*, 30(22), pp.1-4.
- Ashkenazy, Y., Ivanov, P. C., Havlin, S., Peng, C. K., Goldberger, A. L., y Stanley, H. E. (2001), Magnitude and sign correlations in heartbeat fluctuations, *Phys. Rev. Lett.*, 86, pp. 1900-1903.
- Ataei. M., A. Khaki-Sedigh, Lohmann, B., y Lucas, C. (2003), Determining embedding dimension from output time series of dynamical Systems-Scalar and multiple output cases, *Proceedings of the 2nd International Conference on System Identification and Control Problems, Moscow, Russia*, pp. 1004-1013.
- Atten, P., Caputo, J. G., Malraison, B., y Gagne, Y. J. (1984), Determination of attractor dimension of various flows, *Mech. Theor. Appl., Special Issue*, pp. 133-156.
- Avendaño, L. D., Avendaño, Ferrero, J. M., y Castellanos, G. (2007), Improvement of an extended Kalman filter power line interference supresor for EGC signal, *Computers in Cardiology*, 34, pp. 553-556.
- Badii, R., y Politi, A. (1985), Statistical description of chaotic attractors: The dimensión Function, *J. Stat. Phys.*, 40, pp. 725-750.
- Badin, G., y Domeisen, D. I. (2014), A search for chaotic behavior in northern hemisphere stratospheric variability. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 71(4), pp. 1494-1507. doi:10.1175/JAS-D-13-0225.1

- Bagnold, R. A. (1954), "The Physics of Blown Sand and Desert Dunes", Methuen, London, *Progress in Physical Geography: Earth and Environment*, 18(1), pp. 91-96.
- Bamber, J.L., Gomez-Dans, J. L., y Griggs, J. A. (2008), A new 1 km digital elevation model of the Antarctic derived from combined satellite radar and laser data. Part I: Data and methods, *The Cryosphere Discuss.*, 2(6).
- Bamber, J.L., y Layberry, R. L. (2001), A new ice thickness and bed data set for the Greenland ice sheet, *Journal of Geophysical Research*, 106, D24, pp. 33773-33780.
- Barker, S., Knorr, G., Edwards, L. R., Parrenin, F., Putnam, E. A., Skinner, C. L., Wolff, E., y Ziegler, M. (2011), 800,000 Years of Abrupt Climate Variability, *Science*, 334, pp. 347-351.
- Barnett, T.P., Adam, J.C., y Lettenmaier, D.P. (2005), Potential impacts of a warming climate on water availability in snow-dominated regions, *Nature*, 438, pp. 303-309.
- Barrell, J. (1914), The strength of the Earth's crust. *J. Geol.*, 22 (4), pp. 289-313.
- Bayraktar, H., y Turalioglu, F. S. (2005), A Kriging-based approach for locating a sampling site in the assessment of air quality, *Stoch Environ Res Risk Assess*, 19, pp. 301-305.
- Beniston, M., Keller, F., Koffi, B., y Goyette, S. (2003), Estimates of snow accumulation and volume in the Swiss Alps under changing climatic conditions, *Theor. Appl. Climatol.* 76, pp. 125-140.
- Berger, A. L., y Loutre, M. F. (1991), Insolation values for the climate of the last 10 million years, *Quat. Sci. Rev.*, 10, pp. 297-317.
- Berger, A. L., y Pestiaux, P. (1982), Tech. Rep., 28 (Institute of Astronomy and Geophysics, Catholic University of Louvain).
- Blender, R., Fraedrich, K., y Hunt, B. (2006), Milleanial climate variability: GCM-simulation and Greenland ice cores, *Geophysical Research Letters*, 33, L04710, pp. 1-4.
- Boch, R., Cheng, H., Spötl, C., Edwards, R.L., Wang, X., y Häuselmann, P. (2011), NALPS: a precisely dated European climate record 120-60 ka. *Clim. Past.* 7, pp. 1247-1259. <http://dx.doi.org/10.5194/cp-7-1247-2011>.
- Bolin, B. (1981), The carbon cycle. In: *Climatic variations and Variability: Facts and Theories* (A. Berger, ed.). Dordrecht: D. Riedel, pp. 623-639.

- Bond, G., Broecker, W., Johnsen, S., McManus, J. M., Labeyrie, L., Jouzel, J., y Bonani, G. (1993), Correlations between climate records from North Atlantic sediments and Greenland ice, *Nature*, 365, pp. 143-147.
- Borden, K. A., y Cutter, S. L. (2008), Spatial patterns of natural hazards mortality in the United States, *International Journal of Health Geographics*, 7, pp. 1-13
- Bradley, E., y Kantz, H. (2015), Nonlinear time-series analysis revisited, *Chaos*, 25, pp. 097610-1-097610-10.
- Bradley, R. S. (1999), Paleoclimatology: Reconstructing Climates of the Quaternary, Second Edition, *International Geophysics Series*, 64, pp. 613.
- Bradley, R. S., y Jones, P. D. (1993), "Little Ice Age" summer temperature variations: their nature and relevance to recent global warming trends, *The Holocene*, 3, pp. 367-376.
- Brandstater, A., Swift, J., Swinney, H. J., Wolf, A., Farmer, J. D., Jen, E., y Crutchfield, P. J. (1983), Low-dimensional chaos in a hydrodynamic system, *Phys. Rev. Lett.*, 51, pp. 1442.
- Brock, W. A., Dechter, W. D., y Scheinkman, J. (1987), A test for Independence based on the correlation dimension, Technical report 8702. Social Systems Research Institute, Univ. Of Wisconsin, Madison.
- Broecker, W. S., y Henderson, G. M. (1998), The sequence of events surrounding Termination II and their implications for the cause of glacial-interglacial CO₂ changes, *Paleoceanography*, 13(4), pp. 352-364.
- Broecker, W. S. (1994), Massive iceberg discharges as triggers for global climate change, *Nature*, 372, pp. 421-424.
- Broomhead, D. S., y King, G. P. (1986), Extracting qualitative dynamics from experimental data, *Physica*, 20D, pp. 217-236.
- Cannariato, K. G., Kennett, J. P., y Behl, R. J. (1999), Biotic response to late Quaternary climate flickers in the Santa Barbara Basin: Ecological and evolutionary implications, *Geology*, 24, pp. 63-66.
- Cannizzo, J. K., Goodings, D. A., y Mattei, J. A. (1990), A search for chaotic behavior in the light curves of the three long-term variables, *Astrophys. J.*, 357, pp. 235-242.

- Cárdenas, C. A., Arias, N. A., y Bravo, O. A. (2013), Análisis y aplicación del filtro de Kalman a una señal con ruido aleatorio, *Scientia et Technica* Año XVIII, 18(1), pp. 267-274.
- Casdagli, M., Eubank, S., Farmer, J. D., y Gibson, J. (1991a), State space reconstruction in the presence of noise, *Physica D* 51, 52.
- Chang, J. T. (2012) Stochastic Processes, *Technical report*, Department of Statistics, Yale University.
- Chappellaz, J., Blunier, T., Raynaud, D., Barnola, J. M., Schwander, J., y Stauffert, B. (1993), Synchronous changes in atmospheric CH₄ and Greenland climate between 40 and 8 kyr BP, *Nature*, 366, pp. 443-445.
- Chappellaz, J., Barnola, J. M., Raynaud, D., Korotkevich, Y. S., y Lorius, C. (1990), Ice core record of atmospheric methane over the past 160000 years, *Nature*, 345, pp. 127-131.
- Charney, J. G., Stone, P. H., y Quirk, W. J. (1975), Drought in the Sahara: a biogeophysical feedback mechanism, *Science*, 187, pp. 434-435.
- Chatfield, C. (1984), *The Analysis of Time Series: An introduction*, Chapman and Hall, New York, 89 p.
- Ciais, P., Tans, P. P., Trolier, M., White, J. W. C., y Francey, R. J. (1995), A large northern hemisphere terrestrial CO₂ sink indicated by ¹³C/¹²C of atmospheric CO₂, *Science*, pp. 1098-1102.
- Cilberto, S., y Gollub, J. P. (1985), Chaotic mode competition in parametrically forced surface waves, *J. Fluid Mech.*, pp. 381-398.
- Clark, P. U., Alley, R. B., y Pollard, D. (1999), Northern Hemisphere ice sheet influences on global climate change, *Science*, 286, pp. 1104-1111.
- Cogley, J., Hock, R., Rasmussen, L., Arendt, A., Bauder, A., Braithwaite, R.J., Jansson, P., Kaser, G., Mo'ller, M., Nicholson, L., y Zemp, M. (2011), *Glossary of Glacier Mass Balance and Related Terms*. IHP-VII Technical Documents in Hydrology No. 86, IACS Contribution No. 2. UNESCO-IHP, Paris.
- Coope, G. R. (1977), Fossil colepteran assemblages as sensitive indicators of climatic changes during the Devensian (last) cold stage, *Philosophical Transactions of the Royal Society, Series B, Biological Sciences*, 280, pp. 313-340.

- Cover, M. T., y Joy, A. T. (1991), *Elements of information Theory*, Ed. John Wiley & Sons, Inc. New York, Print ISBN 0-471-06259-6, 542 p.
- Cox, J. D., and Press, J. H. (2007), climate crash abrupt climate change and what it means for our future, *Int. J. Climatol.*, 27, pp. 411-412.
- Criss, R. (1999). *Principles of Stable Isotope Distribution*. Oxford University Press.
- Cristian, R. (2008), La Corriente Circumpolar Antártica y su influencia en el clima, *Boletín Antártico Chileno*, 27(2), pp. 15-16.
- Cronin, T. M. (1999), *Principles of Paleoclimatology*, Cambridge University Press, New York, 560 p.
- Cuculeanu, V., y Lupu, A. (2001), Deterministic chaos in atmospheric radon dynamics, *Journal of Geophysical Research Atmospheres D16*, pp. 17,961-17,968.
- Cuffey, K. M., Alley, R., Grootes, P. M., Bolzan, J. M., y Anandakrishnan, S. (1994), Calibration of the isotopic Paleothermometer for central Greenland, using borehole temperatures, *J. Glaciol.*, 40, pp. 341-349.
- Dansgaard, W., Johnsen, S. J., Clausen, H. B., Dahl-Jensen, D., Gundestrup, N. S., Hammer, C. U., Hvidberg, C. S., Steffensen, J. P., Sveinbörnsdóttir, A. E., Jouzel, J., Bond, G. (1993), Evidence for general instability of past climate from a 250-kyr ice-core record, *Nature*, 364, pp. 218-220.
- Dansgaard, W. (1964), Stable isotopes in precipitation, *Tellus*, 16, pp.436-468.
- Dansgaard, W. (1953), The abundance of $\delta^{18}\text{O}$ in atmospheric water and water vapour, *Tellus*, 5, pp. 461-469.
- Dasan, J., Ramamohan, R. T., Singh, A., y Prabhu, R. N. (2002), Stress fluctuations in sheared Stokesian suspensions, *Phys. Rev., E.*, 66, pp. 021409-1-021409-14.
- Denton, G.H., Anderson, R.F., Toggweiler, J.R., Edwads, R.L., Schaefer, J.M., y Putnam, A.E. (2010). The last glacial termination, *Science* 328, pp.1652-1656. <http://dx.doi.org/10.1126/science.1184119>.
- Díaz, J. G., Mejía, A. M., Arteaga, F. (2001), Aplicación de los filtros de Kalman a sistemas de Control, *Redalyc*, pp.1-20.
- Diks, C. (1995), *Nonlinear time series analysis: Methods and Applications*, ed. World Scientific, *Nonlinear Time Series and Chaos*, Vol. 4, University of Kent, England.
- Diks, C., Houwelingen, J. C van., Takens, F., y DeGoede, J. (1995), Reversibility as a

- criterion for discriminating time series, *Phys. Lett. A.*, 201, pp. 221-228.
- Dodge, R. E., Fairbanks, R. G., Benninger, L. K., y Murrase, F. (1983), Pleistocene sea level from raised coral reefs of Haiti, *Science*, 219, pp. 1423-1425.
- Dreyfus, G. B., Parrenin, F., y Lemieux-Dudon, B. (2007), Anomalous flow below 2700 m in the EPICA Dome C ice core detected using $\delta^{18}\text{O}$ of atmospheric oxygen measurements, *Clim. Past.*, 3, pp. 341-353.
- Drysdale, R.N., Hellstrom, J.C., Zanchetta, G., Fallick, A.E., Sánchez-Goñi, M.F., Couchoud, I., McDonald, J., Maas, J., Lohmann, G., y Isola, I. (2009). Evidence for obliquity forcing of glacial termination II, *Science*, 325, pp. 1527-1531. <http://dx.doi.org/10.1126/science.1170371>.
- Duffy, T.S., y Anderson, D.L. (1989), Seismic velocities in mantle minerals and the mineralogy of the upper mantle, *J. Geophys. Res.*, 94, pp. 1895–1912.
- Eckner, A. (2012), A framework for the analysis of unevenly spaced time series data. Preprint. Available at: http://www.eckner.com/papers/unevenly_spaced_time_series_analysis.
- Emery, K. O., y Aubrey, D. G. (1991), *Sea Levels, Land Levels, and Tide Gauges*, New York: Springer-Verlag.
- Emmer, E., y Thunell, R. C. (2000), Nitrogen isotope variations in Santa Barbara Basin sediments: Implications for denitrification in the eastern tropical North Pacific during the last 50,000 years, *Paleoceanography*, 15(4), pp. 377–387,
- EPICA community members (2006): 8 glacial cycles from an Antarctic ice core, *Nature*, 429, pp. 623-628.
- EPICA community members (2004): One-to-one coupling of glacial climate variability in Greenland and Antarctica, *Nature*, 444, pp. 195-198.
- Essex, C., Lookman, T., y Nerenberg, M. A. H. (1987), The climate attractors over short timescales, *Nature*, 326, pp. 64-66.
- Farré, A. B., Stephenson, S. R., Chen, L., Czub, M., Dai, Y., Demchev, D. Efimov, Y., Graczyk, P., Grythe, H., Keil, K., Kivekäs, N., Kumar, N., Liu, N., Matelenok, I., Myksovoll, M., O’Leary, D., Olsen, J., Pavithran, S. A. P., Petersen, E., Raspotnik, A., Ryzhov, I., Solski, J., Suo, L., Troein, C., Valeeva, V., Rijckevorsel, J., y Wighting, J. (2014), Commercial Arctic shipping through the Northeast Passage: routes,

- resources, governance, technology, and infrastructure, *Polar Geography*, 37(4), pp. 298-324.
- Fettweis, X., Box, J. E., Agosta, C., Amory, C., Kittel, C., Lang, C., y Gallée, H. (2017), Reconstructions of the 1900-2015 Greenland ice sheet surface mass balance Using the regional climate MAR model, *The Cryosphere*, 11(2), pp. 1015-1033.
- de Fleurian, B., Morlighem, M., Seroussi, H., Rignot, E., van den Broecke, M. R., Kuipers Munneke, P., Mouginot, J., Smeets, C. J. P. P., y Tedstone, A. J. (2016), A modeling study of the effect of runoff variability on the effective pressure beneath Russell Glacier, West Greenland, *J. Geophys. Res.-Earth*, 121, pp. 1834-1848, doi:10.1002/2016JF003842.
- Fraedrich, K. (1987), Estimating weather and climate predictability on attractors, *J. Atmos. Sci.*, 44, pp.722-728.
- Fraedrich, K. (1986), Estimating the dimensions of weather and climate attractors, *J. Atmos. Sci.*, 43, pp. 419-432.
- Fraser, A. M., y Swinney, H. L. (1986), Independent coordinates for strange attractors from mutual information, *Phys. Rev.*, A 33, pp. 1134-1140.
- Friedman, M. (1962), The interpolation of time series by related series. *J. Am. Stat. Assoc.*, 57, pp. 729-757.
- Gagan, M., Ayliffe, L. K., Beck, J. W., Cole, J. E., Druffel, E. R. M., Dunbar, R. B., y Schrang, D. P. (2000), New views of tropical paleoclimates from corals, *Quatern, Sci. Rev.* 19, pp. 45-64.
- Galdeano, A., Moreau, M.G., Pozzi, J.P., Berthou, P.Y., y Malod, J.A. (1989), New paleomagnetic results from Cretaceous sediments near Lisboa (Portugal) and implications for the rotation of Iberia. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 92:95-106.
- Ghil, M., Allen, M. R., Dettinger, M. D., Ide, K., Kondrashov, D., Mann, M. E., Robertson, A. R., Saunders, A., Tian, Y., Varadi, F., y Yiou P. (2002), Advanced Spectral Methods for Climatic Time Series, *Rev. Geophys.*, 40, pp. 1-16, doi: 10.1029/2000RG000092.
- Ghil, M., y Tavantzis, J. (1983), Global hopf-bifurcation in a simple climate model, *SIAM J. On Applied Mathematics*, 43, pp. 1019-1041.

- Ghil, M., y Treut, L. H. (1981), A climate model with cryodynamics and geodynamics, *J. Geophys. Res.*, 86, pp. 5262-5270.
- Gibson, J. F., Farmer, J. D., Casdagli, M., y Eubanks, S. (1992), An analytic approach to practical state space reconstruction, *Physica D*57, pp. 1-30.
- Guastello, S. J., y Gregson, R. A. M. (2011), *Nonlinear Dynamical Systems Analysis for the Behavioral. Sciences Using Real Data*, ed. CRC, Broken Sound Parkway, U. S.
- Grassberger, P. (1986), Do climatic attractor exist?, *Nature*, 323,16, pp. 609-612.
- Grassberger, P., y Procaccia, I. (1983a), Characterization of strange attractors, *Phys. Rev. Lett.*, 50, pp. 448-451.
- Grassberger, P., y Procaccia, I. (1983b), Estimating the Kolmogorov entropy from a chaotic signal. *Phys. Rev.*, 28A, pp. 2591-2593.
- Greenland Ice-Core Project (GRIP) Members. (1993), Climate instability during the last interglacial period recorded in the GRIP ice core, *Nature*, 364, 203-208.
- Grinsted, A., Moore, J. C., y Jevrejeva, S. (2004), Application of the cross wavelet transform and wavelet coherence to geophysical time series, *Nonlinear Processes in Geophysics*, 11, pp. 561-566.
- Grove, J. M. (1988), The Little Ice Age, London: Methuen, XXII, *Progress in Physical Geography*, 12(4), pp. 613-615.
- Haken, H. (1981), *Chaos and Order in Nature*. New York: Springer-Verlag.
- Halsey, T. C., Jensen, M. H., Kadanoff, L. P., Procaccia, I., y Shraiman, B. (1986), Fractal measures and their singularities: The Characterization of strange sets, *Phys. Rev. A* **33**, pp. 1141-1151.
- Handcock, M. S., y Stein, M. L. (1993), Estimation, smoothing, interpolation, and distribution for structural time-series models in discrete and continuous time. In *Models, Methods and Applications of Econometrics* PCB Phillips (ed), Cambridge, Blackwell, pp. 55-70.
- Harding, A. K., Shinbrot, T., y Corde, J. M. (1990), A chaotic attractor in timing noise from the VELA pulsar, *Astrophys. J.*, 353, pp. 588-596.
- Hartmann, D. L. (2016), *Global Physical Climatology*, Second edition, Elsevier, Oxford, 485p.

- Haykin, S. (2009), Cognition is the Key to the Next Generation of Radar Systems, *IEEE 13th Digital Signal Processing Workshop and 5th IEEE Signal Processing Education Workshop*, pp. 463-467.
- Heath, R. A. (2000). *Nonlinear dynamics: Techniques and applications in psychology*. Mahwah, NJ: Earlbaum.
- Henderson, G., y Slowey, N. (1996), Direct U/Th dating of marine oxygen-isotope substage-5e in Bahamian sediments (abstract), *Eos. Trans., AGU, 77(17), Spring Meet. Suppl.*, S168.
- Hendy, I. L., y Pedersen, T. F. (2005), Is pure water oxygen content decoupled from productivity on the California Margin? Trace element results from Ocean Drilling Program Hole 1017E, San Lucia slope, California, *Paleoceanography*, 20, PA4026, doi:10.1029/2004PA001123.
- Hendy, I. L., Kennett, J. P., Roark, E. B., y Ingram, B. L. (2002), Apparent synchronicity of submillennial scale climate events between Greenland and Santa Barbara Basin, California from 30-10 ka, *Quaternary Science Reviews*, 21, pp. 1167-1184.
- Hendy, I. L., y Kennett, J. P. (1999), Latest Quaternary North Pacific surface-water responses imply atmosphere-driven climate instability, *Geology*, 27(4), pp. 291–294.
- Hegger, R., Kantz, H. y Schreiber, T. (1999), Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package, *Chaos: An Int. J. Nonlinear Sci.*, 9, pp. 413-435.
- Hodell, D., Crowhurst, S., Skinner, L., Polychronis, C., Tzedakis, C., Margari, V., Channell, J. E. T., Kamenov, G., Maclachlan, S., y Rothwell, G. (2013), Response of Iberian Margin sediments to orbital and suborbital forcing over the past 420 ka, *Paleoceanography*, 28, pp. 185-199.
- Holzfluss, J., y Mayer-Kress, G. (1986), An approach to error-estimation in the application of dimension algorithms, *Dimensions and Entropies in Chaos Systems*, G. Mayer-Kress, Ed., Springer-Verlag, pp. 114-122.
- Hooghiemstra, H., y van der Hammen, T. (1998), Neogene and quaternary development of the neotropical rain forest: The forest refugia hypothesis, and a literature overview, *Earth Sci. Rev.* 44, pp. 147-183.

- Hoyt, D. V., Schatten, K. H. (1997), *The Role of the Sun in Climate Change*, New York: Oxford University Press.
- Hubbard, B. B. (1996), *The World According to Wavelets, The Story of a Mathematical Technique in the Making*, A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, pp. 1-264.
- Hunt, B. (1979), Effects of past variations of the earth's rotation rate on climate, *Nature*, 281, pp. 188-191.
- Imbrie, J., Boyle, E. A., Clemens, S. C., Duffy, A., Howard, W. R., Kukla, G., Kutzbach, J., Martinson, D. G., McIntyre, A., Mix, A. C., Molino, B., Morley, J. J., Peterson, L. C., Pisias, N. G., Prell, W. L., Raymo, M. E., Shackleton, N. J., y Toggweiler, J. R. (1992), On the structure and origin of major glaciation cycles. I linear responses to Milankovich forcing, *Paleoceanography*, 7(6). pp.701-738.
- IPCC, 2013, *Climate change 2013: the physical science basis*. In: Stocker, T.F., Qin, D., Plattner, G.-K., Tignor, M., Allen, S.K., Boschung, J., Nauels, A., Xia, Y., Bex, V., Midgley, P.M. (Eds.), *Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA, 1535 p.
- Islam. S., Bras. R. L., y Rodriguez-Iturbide, I. (1993), A Possible Explanation for Low Correlation Dimension Estimates for the Atmosphere, *American Meteorological Society*, pp. 203-208.
- Jackson, I., Rudnick, R. L., O'Reilly, S. Y., y Bezant, C. (1990), Measured and calculated elastic wave velocities for xenoliths from the lower crust and upper mantle, *Tectonophysics*, 173, pp. 207–210.
- Jaenicke, R. (1981), Atmospheric aerosols and climate. In: *Climatic Variations and Variability: Facts and Theories* (A. Berger, ed.) Dordrecht: D. Riedel, pp. 577-579.
- Jenkins, G. (1993), A general circulation model study of the effects of faster rotation rate, enhanced CO₂ concentrations and reduced solar forcing- Implications for the faint young sun paradox, *J. Geophys. Res.* 98, pp. 10803-20811.
- Jenkins, J. M., y Watts, D. G. (1968), *Spectral Analysis and its Applications*, Holden-Day, San Francisco.
- Jevrejeva, S., Moore, J. C., y Grinsted, A. (2003), Influence of the Arctic oscillation and El Niño-Southern oscillation (ENSO) on ice conditions in the Baltic Sea: The wavelet

- approach, *Journal of Geophysical Research Atmospheres*, 108, D21, pp. 1-11.
- Johnsen, S., Clausen, H. B., Dansgaard, W., Gundestrup, N. S., Hammer, C. U., Andersen, U., Andersen, K. K., Hvidberg, C. S., Dahl-Jensen, D., Steffensen, J. P., Shoji, H., Sveinbörnsdóttir, A. E., White, J., Jouzel, J., y Fischer, D. (1997), The $\delta^{18}\text{O}$ record along the Greenland Ice Core Project deep ice core and the problem of possible Eemian climatic instability, *J. Geophys. Res.*, 102, C12, 26, pp. 397-410.
- Johnsen, S., Dahl-Jensen, D., Dansgaard, W., y Gundestrup, N. (1995), Greenland paleotemperatures derived from GRIP bore hole temperature and ice core isotope profiles, *Tellus*, 47B, pp. 624-629.
- Johnsen, S., y Dansgaard, W. (1992), *On flow model dating of stable isotope records from Greenland ice cores. In the Last Deglaciation: Absolute and Radiocarbon Chronologies*, Bard, E, Broecker, W. S (eds), NATO ASI Series 1, 2, Springer-Verlag: New York, pp. 13-24.
- Johnsen, S., Clausen, H. B., Dansgaard, W., Fuhrer, K., Gundestrup, N., Hammer, C. U., Iversen, P., Steffensen, J. P., Jouzel, J., y Stayffer, B. (1992a), Irregular glacial interstadials recorded in a new Greenland ice core, *Nature*, 359, pp. 311-313.
- Johnsen, S., Dansgaard, W., y White, J. W. (1989), The origin of Arctic precipitation under present and glacial conditions, *Tellus*, 41B, pp. 452-468.
- Johnsen, S. (1977), Stable isotope profiles compared with temperatures records. Proc. Of symp. on isotopes and impurities in snow and ice. *Int. Ass. of Hydrol. Sci.*, Commission of Snow and Ice, I. U. G. G.XVI, General Assembly, Grenoble Aug. Sept. 1975. *IAHS-AISH* Publication, 118, pp. 388-392.
- Jouzel, J., Masson-Delmotte, V., Cattani, O., Dreyfus, G., Falourd, S., Hoffman, G., Minster, B., Nouet, J., Barnola, J. M., Chapellaz, J., Fischer, H., Gallet, J. C., Johnsen, S., Leueberger, M., Loulergue, L., Luethi, D., Oerter, H., Oerter, H., Parrenin, F., Raisbeck, G., Raynaud, D., Schilt, A., Schwander, J., Selmo, E., Souchez, R., Spahni, R., Stauffer, B., Steffensen, J. P., Stenni, B., Stocker, T. F., Tison, J. L., Werener, M., y Wolff, E. (2007), Orbital and millennial Antarctic climate variability over the past 800000 years, *Science*, 317, pp. 793-796.
- Jouzel, J., Lorius, C., Johnsen, S., y Grootes, P. (1994), Climate instabilities: *Greenland and antarctic records*, *C. R. Acad. Sci. Paris t, 319 (serie II)*, pp. 65-77.

- Junge, C. (1972), The cycle of atmospheric gases-natural and man-made. *Quart, Jour. Royal Meteorological Society*, 98, pp. 711-729.
- Jwo, D. J., y Chang, S. C. (2008), Application of Optimization Technique for GPS Navigation Kalman Filter Adaptation, *Proceedings of the 4th international conference on Intelligent Computing: Advanced Intelligent Computing Theories and Applications - with Aspects of Theoretical and Methodological Issues*, pp.227-234.
- Kantz, H., Radons, G., y Yang, H (2013), The problem of spurious Lyapunov exponents in time series analysis and its solution by covariant Lyapunov vectors, *J. Phys. A: Mathematical and Theoretical*, 46, 254009 p.
- Kantz, H., y Schreiber, T (2004), *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge University Press.
- Kantz, H. (1994), A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series, *Phys. Lett., A*, 185, pp. 77-87.
- Karato, S.-I. (1993), Importance of anelasticity in the interpretation of seismic tomography, *Geophys. Res. Lett.*, 20, pp. 1623–1626.
- Karato, S.-I., y Spetzler, H. A. (1990), Effect of microdynamics in minerals and solid-state mechanisms of seismic wave attenuation and velocity dispersion in the mantle, *Rev. Geophys.*, 28, pp. 399–421.
- Kashani, M. H., Dinpashoh, Y. (2012), Evaluation of efficiency of different estimation methods for missing climatological data, *Stoch Environ Res Risk Assess*, 26, pp. 59-71.
- Keigwing, L. D., y Jones, G. A. (1994), Western North Atlantic evidence for milenial-scale changes in ocean circulation and climate, *J. Geophys. Res.*, 99, pp. 12,397-12,410.
- Kennel, M. B., Reggie B., y Abarbanel, H. D. (1992), “Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical”, *Physical Review A* 45(6), pp. 3403-3411.
- Kennett, B. L. N. (2006), On seismological reference models and the perceived nature of heterogeneity, *Phys. Earth Planet. Inter.*, 159, pp. 129–139.
- Kennett, J.P. (1982), *Marine Geology*. Englewood Cliffs. Prentice-Hall. New Jersey, p. 813
- Keppenne, C. L., y Nicolis, C. (1989), Global properties and local structure of the weather attractor over weaastern Europe, *J. Atmos. Sci.*, 46, pp. 2356-2370.

- Kiehl, J. T., y Trenberth, K. E. (1997), Earth's annual global mean energy budget, *Bull. Am. Meteor. Soc.*, 78, pp. 197-207.
- Kikuchi, R. K. P., Oliveire, M. D. M., y Leão, Z. M. A. N. (2013), Density banding pattern of the south western Atlantic coral *Mussismilia braziliensis*, *Journal of experimental Marine Biology and Ecology*, 449, pp. 207-214.
- King, T. (1996), Quantifying nonlinearity and geometry in time series of climate, *Quat. Sci. Rev.*, 15, pp. 247-266.
- Klitgord, K.D., y Schouten, H., 1986. Plate kinematics of the central Atlantic. In Vogt, P.R., and Tucholke, B.E. (Eds.), *The Geology of North America (Vol. M): The Western North Atlantic Region. Geol. Soc. Am.*, pp. 351-378.
- Kollath, Z. (1990) Chaotic behaviour in the light variation of the RV Tauri star R Scuti, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 247, pp. 377-386.
- Lamb, H. H. (1995), *Climate History and the Modern World*, Second edition, London: Routledge.
- Lisiecki, L. E., y Raymo, M. E. (2005), A Plio-Pleistocene Stack of 57 Globally Distributed Benthic $\delta^{18}\text{O}$ Records, *Paleoceanography*, 20,1, PA1003, doi:10.1029/2004PA001071.
- Liu, Z., Otto-Bliesner, B. L., He, F., Brady, E. C., Tomas, R., Clark, P. U., Carlson, A. E., Lynch-Stieglitz, J., Curry, W., Brook, E., Erickson, D., Jacob, R., J. Kutzbach, J., y Cheng, J. (2009), Transient Simulation of Last Deglaciation with a New Mechanism for Bølling-Allerød Warming, *Science*, 325, pp. 310-314.
- Lorenz, E. N. (1992), Dimension of weather and climate attractors, *Nature*, 353, pp. 241-244.
- Lorenz, E. N. (1991), dimension of weather and climate attractors, *Nature* **353**, pp. 241-244.
- Lorius, C., Jouzel, J., Ritz, C., Merlivat, L., Barkov, N., Korotkevitch, Y., y Kotlyakov, V. (1985), A 150,000-years climatic record from Antarctic ice, *Nature*, 316, pp. 591-596.
- Loutre, M. F., y Berger, A. (2003), Marine isotope stage 11 as an analogue for the present interglacial, *Global Planet. Change*, 36, pp. 209– 217.
- Ludwig, K.L., Simmons, K.R., Szabo, B.J., Winograd, I.J., Landwehr, J.M., Riggs, A.C., y Hoffman, R.J. (1992), Mass-spectrometric ^{230}Th - ^{234}U - ^{238}U dating of the Devils

- Hole calcite vein, *Science*, 258, pp. 284-287.
- Luetscher, M., Boch, R., Sodemann, H., Spötl, C., Cheng, H., Edwards, R.L., Frisia, S., Hof, F., y Müller, W. (2015), North Atlantic storm track changes during the Last Glacial Maximum recorded by Alpine speleothems. *Nat. Comm.* 6, pp. 1-6. <http://dx.doi.org/10.1038/ncomms7344>.
- Luo, Xiaodong (2004), "Characterising Nonlinear Determinism from Experimental Time Series Data." The Hong Kong Polytechnic University.
- MacCracken, M. C. Budyko, M. I., Hecht, A. D., y Izrael, Y. A. (1990). Prospects for future Climate, Chelsea, Michigan: Lewis Publishers.
- MacDonald, G. J. F. (1964), Tidal friction, *Rev. Geophys*, 2, pp. 467-541.
- Malod, J.A., and Mauffret, A. (1990), Iberian plate motion during the Mesozoic. In Boillot, G., and Fontbote, J.M. (Eds.), Alpine Evolution of Iberia and its Continental Margins. *Tectonophysics*, 184, pp. 261-278.
- Mallat, S. (1998), A Wavelet Tour of Signal Processing, Academic Press, London, pp. 1-577.
- Martrat, B., Grimalt, J. O., Shackleton, N. J., Abreu, L., Hutterli, M. A., y Stocker, T. F. (2007), Four Climate Cycles of Recurring Deep and Surface Water Destabilizations on the Iberian Margin, *Science*, 317, pp. 502-507.
- Martrat, B., Grimalt, J. O., López-Martinez, C., Cacho, I., Sierro, F. J., Flores, J.-A., Zahn, R., Canals, M., Curtis, J. H., y Hodell, D. A. (2004): Sea surface temperatures, alkenones and sedimentation rate from ODP Hole 161-977A, *Science*, 306, pp.1762-1765.
- Masson-Delmotte, V., Stenni, B., Pol, K., Braconnot, P., Cattani, O., Falourd, S., Kageyama, M., Jouzel, J., Landais, A., Minster, B., Barnola, J. M., Chappellaz, J., Krinner, G., Johnsen, S., Röthlisberger, R., Hansen, J., Mikolajewicz, U., y Otto-Bliesner, B. (2010), EPICA Dome C record of glacial and interglacial intensities, *Quaternary Science Review*, 29, pp. 113-128.
- McCue L., y Troesch A. (2011), Use of Lyapunov Exponents to Predict Chaotic Vessel Motions, *J. Fluid Mech.*, 96, pp. 415-432.
- Medio, A. (1992), Chaotic Dynamics. Theory and Applications to Economics. Cambridge University Press, Cambridge, pp. 1-344.

- Meller, P., y Laban, Y. (1987), Aplicación del filtro de Kalman a la estimación de elasticidades variables en el mercado del trabajo chileno, 1974-1985, *Revista de Análisis Económico*, 2(1), pp.3-38.
- Moseley, G. E., Spötl, C., Cheng, H., Boch, R., Min, A., y Edwards, R. L. (2015), Termination-II interstadial/stadial climate change recorded in two stalagmites from the north European Alps, *Quaternary Science Reviews*, 127, pp. 229-239.
- Moseley, G.E., Spötl, C., Svensson, A., Cheng, H., Brandstätter, S., y Edwards, R.L. (2014), Multi-speleothem record reveals tightly coupled climate between Central Europe and Greenland during MIS 3. *Geology*, 42, pp. 1043-1046. <http://dx.doi.org/10.1130/G36063.1>.
- Mougenot, D. (1988), Géologie de la Marge Portugaise [Thèse de Doctorat d'Etat és Sciences Naturelles]. *Univ. Pierre et Marie Curie*, Paris VI.
- Neelin, J. D. (2011), *Climate Change and Climate Modeling*, Cambridge, United Kingdom.
- Nicolis, C., y Nicolis, G. (1986), Reconstruction of the Dynamics of the Climatic System from Time-Series Data, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 83 (3), pp. 536-540.
- Nicolis, C., y Nicolis, G. (1984), Is there a climatic attractor? *Nature*, 311, pp. 529-532.
- Nieto-Barajas, L. E., y Sinha, T. (2015), Bayesian interpolation of unequally spaced time series, *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 29, 2, pp. 577-587.
- Norris, J. P., y Matilsky, T. A. (1989), Is Hercules X-I a strange attractor?, *Astrophys. J.*, 346, pp. 912-918.
- Obando, P. G. (2005), Técnicas Recursivas para Estimación Dinámica. Una introducción matemática al Filtro Kalman (tesis de pregrado), Fundación Universitaria Konrad Lorenz, Facultad de Matemáticas, Bogotá, Colombia.
- Olivet, J.L., Bonnin, J., Beuzart, P., y Auzende, J.M. (1984), Cinématique de l'Atlantique nord et central. *Publ. Cent. Natl Exploit. Oceans, Rapp. Sci. Tech.*, 54, pp. 108-112.
- Oppo, D. W., Keigwing, L. D., y McManus, J. F. (2001), Persistent suborbital climate variability in marine isotope stage 5 and Termination II, *Paleoceanography*, 16(3), pp. 280-292.
- Ortiz, J. D., O'Connell, S. B., DelViscio, J., Dean, W., Carriquiry, J. D., Marchitto, T., Zheng, Y., y van Geen, A. (2004), Enhanced marine productivity off western North America

- during warm climate intervals of the past 52 kyr, *Geology*, 32(6), pp. 521–524.
- Osborne, A. R., y Provenzale, A. (1989), Finite correlation dimension for stochastic systems with power-law spectra, *Physica D*, 35, pp. 357-381.
- Osborne, A. R., Kirwan, A. D., Provenzale, A., y Bergamasco, L. (1986), A search for chaotic behavior in large and mesoscale motions in the Pacific Ocean, *Physica D*, 23, pp. 75-83.
- Otálvaro, L. G. (2008), Paleoclimatología de los sectores tropicales en los océanos Pacífico oriental y Atlántico occidental durante los últimos ciclos climáticos, Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Salamanca, España.
- Overpeck, J. T., Rind, D., Lacy, A., y Healey, R. (1996), Possible role of dust-induced regional Warming in abrupt climate change during the last glacial period, *Nature*, 384, pp. 447-449.
- Pailler, D., y Bard, E. (2002), High frequency paleoclimatological changes during the past 140000 yr recorded by the organic matter in sediments of the Iberian Margin, *Palaeogeogr. Palaeoclimatol. Palaeocol.*, 181,4, pp. 431-452.
- Parrenin, F., Barnola, J. M., Beer, J., Blunier, T., Castellano, E., Chappellaz, J., Dreyfus, G., Fischer, H., Fujita, S., Jouzel, J., Kawamura, K., Lemieux-Dudon, B., Loulergue, L., Masson-Demotte, V., Narcisi, B., Petit, J. R., Raisbeck, G., Raynaud, D., Ruth, U., Schwaninger, J., Severi, M., Spahni, R., Steffensen, J. P., Svensson, A., Waelbroeck, C., y Wolff, E. (2007), The EDC3 chronology for the EPICA Dome C ice core, *Clim. Past*, 3, pp. 485-497.
- Parrish, J. T. (1998), *Interpreting Pre-Quaternary Climate from the Geological Record*, New York: Columbia University Press.
- Park, J. (1992), Envelope estimation for quasi-periodic geophysical signals in noise: A multitaper approach, In *Statistics in the Environmental and Earth Science*, edited by A. T. Walden and P. Guttorp, 189-219, Edward Arnold, London.
- Peixoto, J. P., y Oort, A. H. (1992), *Physics of Climate*, Springer, 538 p.
- Peng, C. H., Guiot, J., y Van Campo, E. (1998), Estimating changes in terrestrial vegetation and carbon storage using palaeoclimatological data and models. *Quaternary Science Reviews*, 17, pp. 719-735.
- Penland, C., Ghil, M., y Weickmann, K. (1991), Adaptive filtering and maximum entropy

- spectra, with application to changes in atmospheric angular momentum, *J. Geophys. Res.* 96, pp. 22, 659-22, 671.
- Perc, M. (2006), Introducing nonlinear time series analysis in undergraduate courses, *FISIKA A*, 15(2), pp. 91-112.
- Percival, D. B., y Walden, A. T. (1993), *Spectral Analysis for Physical Applications. Multitaper and Conventional Univariate Techniques*, Cambridge University Press, Cambridge, 583 p.
- Peter, E. L., y Yasser, R. (2009), Mutual Information, *Scholarpedia*, 4(1), 1658.
- Petit, R. J., Jouzel, J., Raynaud, D., Barkov, N. I., Barnola, J. M., Basile, I., Benders, M., Chappellaz, J., Davis, M., Delaygue, G., Delmotte, M., Kotlyakov, V. M., Legrand, M., Lipenkov, V. Y., Lorius, C., Pépin, L., Ritz, C., Saltzman, E., y Stievenard, M. (1999), Climate and atmospheric history of the past 420,000 years from the Vostok ice core, Antártica, *Nature*, 399, pp. 429-436.
- Petkov, B. H. (2015), Difficulties in detecting chaos in a complex system, *Applied Mathematics and Computation*, 260, pp. 35-47.
- Pierrehumbert, R. T. (1990), Dimensions of Atmospheric variability. *Beyond Belief: randomness, Prediction and Explanation in Science*. J. L. Casti and A. Karlqvist, Eds., CRC Press, pp. 110-142.
- Pirazzoli, P. A. (1991), *World Atlas of Holocene Sea-Level Changes*. Amsterdam: Elsevier.
- Pollack, H. N., y Chapman, D. S. (1977), On the regional variation of heat flow, geotherms and the thickness of the lithosphere, *Tectonophys*, 38, pp. 279–296.
- Potter, C. S. Randerson, J. T., Field, C. B., Marson, P. A., Vitousek, P. M., Mooney, H. A., y Klooster, S. A. (1993), Terrestrial ecosystem production: a process model based on global satellite and surface data, *Global Biogeochemical Cycles*, 7, pp. 811-841.
- Prentice, I. C., y Sarnthein, M. (1993), Self-regulatory processes in the biosphere in the face of climate change. In: *Global Changes in the Perspectives fo the Past* (Eddy J. A., and Oeschger, H., eds), Chichester: Wiley, pp. 29-38.
- Provenzale, A., Smith, L. A., Vio, R., y Murante, G. (1992), Distinguishing between low-dimensional dynamics and randomness in measured time series, *Physica D*, 58, pp. 31-49.
- Provenzale, A., Osborne, A. R., y Soj, R. (1991), Convergence of the K_2 entropy for random

- noises with power law spectra, *Physica D*, 47, pp. 361-372.
- Qi-tu, Z., y Haykin, S. (1983), Tracking characteristics of the Kalman filter in a nonstationary environment for adaptive filter applications, *ICASSP '83. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pp. 671-674.
- Rahmstorf, S. (2000), The thermohaline ocean circulation: a system with dangerous thresholds? *Clim. Change*, 46, pp. 247-256.
- Raymo, M. E. (1997), The timing of major terminations, *Paleoceanography*, 12, pp. 577-585.
- Raymond, S. B. (1999), *Paleoclimatology, Reconstructing Climates of the Quaternary*, second edition, International Geophysics Series, 64, 610 p.
- Rigney, D. R., Goldberger, A. L., Ocasio, W., Ichimaru, Y., Moody, G. B., y Mark, R. (1993), Multi-channel physiological data: Description and analysis (Data set B), *Time Series Prediction: Forecasting the future and understanding the past SFI Studies in the Sciences of Complexity, Proc, XV*.
- Roe, G. H., y Steig, E. J. (2004), Characterization of millennial-scale climate variability, *J. Clim.*, 17, pp. 1929-1944.
- Roest, W.R., y Srivastava, S.P. (1991), Kinematics of the plate boundaries between Eurasia, Iberia and Africa in the North Atlantic from the late Cretaceous to present. *Geology*, 19, pp. 613-616.
- Rodríguez-Iturbide, I., dePower, B. F., Sharifi, M. B., y Georgakakos, K. P. (1989), Chaos in rainfall, *Wat. Resources Res.*, 25, pp. 1667-1675.
- Rosenstein, M. T., Collins, J. J., y De Luca, C. J. (1993), A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets, *Physica D*, 65, pp. 117-134.
- Rössler, O. (1979), Continuous chaos-four prototype equations, *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, 316, pp. 376-392.
- Ruelle, R. (1990), The Claude Bernard Lecture, 1989-Deterministic chaos: the science and the fiction, *Proc. R. Soc. London A* 427, 241 p.
- Saltzman, B. (2002), *Dynamical Paleoclimatology: Generalized Theory of Global Climate Change*, Academic Press, San Diego, California, 354 p.
- Saltzman, B., y Sutera, A. (1984), A model of the internal feedback system involved in late Quaternary climatic variations, *J. Atmospheric Sci.*, 41, pp. 736-745.
- Saltzman, B. (1982), Stochastically driven climatic fluctuations in the sea-ice, ocean

- temperature, CO₂ feedback system, *Tellus* 34, 97 p.
- Saltzman, B., Sutera, A., y Evenson, A. (1981), Structural stochastic stability a simple auto-oscillatory climatic feedback system, *J. Atmos. Sci.* 38, 494 p.
- Saltzman, B., y Moritz, R. E. (1980), A time-dependent climatic feedback system involving sea-ice extent, ocean temperature and CO₂, *Tellus* 32, pp. 93-118.
- Saltzman, B. (1978), A survey of statistical-dynamical models of the terrestrial climate, *Advances in Geophysics* 20, pp. 183-304.
- Sánchez, R. A. (2007), Antártida: Introducción a un continente remoto, Ed. Albatros, Argentina, 256 p.
- Sánchez-Goñi, M. F., Loutre, M. F., Crucifix, M., Peyron, O., Santos, L., Duprat, J., Malaizé, B., Turon, J. L., y Peyrouquet, J. P. (2005), Increasing vegetation and climate gradient in Western Europe over the Last Glacial Inception (122-110 ka): data-model comparison, *Earth and Planetary Science Letters*, 231(1-2), pp. 111-130.
- Sánchez-Goñi, M. F., Eynaud, F., Turon, J. L., y Shackleton, N. J. (1999), High resolution palynological record off the Iberian margin: direct land-sea correlation for the Last Interglacial complex, *Earth and Planetary Science Letters*, 171(1), pp. 123-137.
- Sanderson, B. G., y Goulding, A. (1990), The fractal dimension of relative Lagrangian motion, *Tellus* 42A, pp. 550-556.
- Serreze, M. C. y Barry, R. G. (2011), Processes and impacts of Arctic amplification: A research synthesis, *Global Planet. Change*, 77, pp. 85-96, doi:10.1016/j.gloplacha.2011.03.004.
- Shan, L. H., Hansen, P., Goertz, C. K., y Smith, R. A. (1991), Chaotic appearance of the index, *Geophys. Res. Lett.*, 18, pp. 147-150.
- Sharifi, M. B., Georgakakos, K. P., y Rodriguez-Iturbide, I. (1990), Evidence of deterministic chaos: The science and the fiction, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A427, pp. 241-248.
- Schimel, D., Alves, D., Enting, I., Heimann, M., Joos, F., Raynaud, D., Wigley, t., Prather, M., Derwent, Ehhalt, D., Fraser, P., Sanhueza, E., Zhou, X., Jonas, P., Charlson, R., Srinivasan, J., Albritton, D., Isaksen, I., Lal, M., y Wuebbles, D. (1996), Radiative forcing of climate change. In: *Climate Change 1995: The Science of Climate Change* (ed. J. T. Houghton, L. G. Meirha Filho, B. A. Callendar, A. Kattenberg, y K. Maskell). Cambridge University Press, Cambridge, pp. 65-131.

- Schmitt, F., Lovejoy, S., y Schertzer, D. (1995), Multifractal analysis of the Greenland ice-core Project climate data, *Geophysical Research, Letters*, 22(13), pp. 1689-1692.
- Schove, D. J. (1983), *Sunspot Cycles*. Stroudsburg, Penn.: Hutchinson Ross.
- Schreiber, T., y Schmitz, A. (2000), Surrogate time series, *Physica, D*, 142, pp. 346-382.
- Schreiber, T. (1995), Efficient neighbor searching in nonlinear time series analysis, *Int. J. Bifurcation Chaos*, 05, pp. 349-358.
- Shuman, C. A., Alley, R. B., Anandakrishnan, S., White, J. W., Grootes, P. M., y Stearns, C. R. (1995), Temperature and accumulation at the Greenland Summit: Comparison of high-resolution isotope profiles and satellite passive microwave brightness temperatura trends, *J. Geophys. Res.*, 100, pp. 9165-9177.
- Sibuet, J.-C., y Collette, B.J. (1991), Triple junctions of Bay of Biscay and North Atlantic: new constraints on the kinematic evolution. *Geology*, 19, pp. 522-525.
- Skinner, L. C., y N. J. Shackleton (2006), Deconstructing Terminations I and II: Revisiting the glacioeustatic paradigm based on deep-water temperature estimates, *Quat. Sci. Rev.*, 25, pp. 3312–3321.
- Sowers, T., Bender, M., Labeyrie, L., Martinson, D., Raynaud, D., Pichon, J. J., y Korotkevich, Y. S. (1993), A 130, 000-year Vostok-Specmap common temporal framework, *Paleoceanography*, 8, pp. 737-766.
- Spencer, J., y Ashley, W. (2011), Avalanche fatalities in the western United States: a comparison of three databases, *Nat. Hazards*, 58, pp. 31-44.
- Sprott, J. C. (2003), *Chaos and Time-Series Analysis*, Oxford University Press.
- Srivastava, S.P., Roest, W.R., Kovacs, L.C., Oakey, G., Lévesque, S., Verhoef, J., y Macnab, R. (1990a). Motion of Iberia since the Late Jurassic: results from detailed aeromagnetic measurements in the Newfoundland Basin, *Tectonophysics*, 184, pp. 229-260.
- Srivastava, S.P., Schouten, H., Roest, W.R., Klitgord, K.D., Kovacs, L.C., Verhoef, J., y Macnab, R. (1990b). Iberian plate kinematics: a jumping plate boundary between Eurasia and Africa, *Nature*, 344, pp. 756-759.
- Steffensen, J. P. (1985), Microparticles in snow from the South Greenland ice sheet, *Tellus*, 37B, pp. 286-295.

- Steig, E. J., Brook, E. J., White, J. W. C., Sucher, C. M., Bender, M. L., Lehman, S. J., Morse, D. L., Waddington, E. D., y Clow, G. D. (1998), Synchronous Climate Changes in Antarctica and the North Atlantic, *Science*, 282, pp. 92-94.
- Stewart, I. (1990), *Does God Play Dice? The New Mathematics of Chaos*, Penguin, London, pp. 1-317.
- Stoop, R., y Parisi, J. (1991), Calculation of Lyapunov exponents avoiding spurious elements, *Physica D*, 50, pp. 89-94.
- Stott, L. D., Neumann, M. y Hammond, D. (2000), Intermediate water ventilation on the northeastern Pacific margin during the late Pleistocene inferred from benthic foraminiferal $\delta^{13}C$, *Paleoceanography*, 15(2), pp. 161–169, doi:10.1029/1999PA000375.
- Sundal, A. V., Shepherd, A., Nienow, P., Hanna, E., Palmer, S., y Huybrechts, P. (2011), Melt-induced speed-up of Greenland ice sheet offset by efficient subglacial drainage, *Nature*, 469, pp. 521–524, doi:10.1038/nature09740.
- Sundquist, E. T. (1985), Geological perspectives on carbon dioxide and the carbon cycle. In: *The Carbon Cycle and Atmospheric CO₂; Natural Variations Archean to Present* (E. T. Sundquist and W. S. Broecker, eds.) Washington DC: American Geophysical Union, pp. 5-59.
- Takens, F. (1993), Detecting nonlinearities in stationary time series, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 3, pp. 241-256.
- Takens, F. (1981), Detecting strange attractors in turbulence, *Dynamical Systems and Turbulence*, Springer-Verlag, pp. 366-381.
- Tedstone, A. J., Nienow, P. W., Sole, A. J., Mair, D. W., Cowton, T. R., Bartholomew, I. D., y King, M. A. (2013), Greenland ice sheet motion insensitive to exceptional meltwater forcing, *P. Natl. Acad. Sci. USA*, 110, pp. 19719–19724, doi:10.1073/pnas.1315843110.
- Theiler, J. (1986), Spurious dimension from correlation algorithms applied to limited time-series data, *Phys. Rev., A*, 34, 3, pp. 2427-2431.
- Thomson, D. J. (1982), Spectrum estimation and harmonic analysis, *Proc. IEEE*, 70, pp. 1055- 1096.
- Thomson, D. J. (1990), Quadratic-inverse spectrum estimates: Applications to

- Paleoclimatology, *Philos. Trans. R. Soc., London, Ser. A*, 332, pp. 539-597.
- Torrence, C., y Compo, G. P. (1998), A practical guide to wavelet analysis, *Bulletin of the American Meteorological Society*, 79(1), pp. 61-78.
- Tsonis, A. A., Elsner, J. B., y Georgakakos, K. P. (1993), Estimating the Dimension of the Weather and Climate Attractors: Important Issues about the Procedure and Interpretation, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 50(15), pp. 2549-2555.
- Tsonis, A. A., y Elsner, J. B. (1992), Nonlinear prediction as a way of distinguishing chaos from random fractal sequences, *Nature*, 358, pp. 217-220.
- Tsonis, A. A., y Elsner, J. B. (1988), The weather attractor over very short times scales, *Nature*, 333, pp. 545-547.
- Turner, J., Bindschadler, R., Convey, P., di Prisco, G., Fahrbach E., Gutt, J., Hodgson, D., Mayewski, P., y Summerhayes, C. (2009), Antarctic Climate Change and the Environment, Published by the Scientific Committee on Antarctic Research Scott Polar Research Institute, Lensfield Road, Cambridge, UK.
- Tzedakis, P.C., H. Pälike, K. H. Roucoux, y L. de Abreu (2009), Atmospheric methane, southern European vegetation and low-mid latitude links on orbital and millennial times scales, *Earth Planet. Sci. Lett.*, 277, pp. 307–317.
- Tzedakis, P. C., Roucoux, K. H., de Abreu, L., y Shackleton, N. J. (2004), the duration of forest stages in southern Europe and interglacial climate variability, *Science*, 306, pp. 2231-2235.
- Urey, H.C. (1947), The thermodynamic properties of isotopic substances, *Journal of Chemical Society*, pp. 562-581.
- Valencia, G. (2010), Aplicación de la teoría de caos para el análisis y pronóstico de series de tiempo financieras en Colombia, tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia, Colombia, 67 p.
- Vanne, J.-R., y Mougnot, D. (1981), La plate-forme continentale du Portugal et les provinces adjacentes: analyse geomorphologique. *Mem. Serv. Geol. Portugal*, 28 p.
- Vaughan, D., y Comiso, J. (2013), Observations: cryosphere. In: Bamber, J., Huybrechts, P., Lemke, P. (Eds.), Working Group I Contribution to the IPCC Fifth Assessment Report (AR5), Climate Change 2013: The Physical Science Basis.
- Vautard, R., Yiou, P., y Ghil, M. (1992), Singular spectrum analysis: A toolkit for short noisy

- chaotic signals, *Physica D*, 58, pp. 95-126.
- Vautard, R., y Ghil, M. (1989), Singular spectrum analysis in nonlinear dynamics, with applications to paleoclimatic time series, *Physica D*, 35, pp. 395-424.
- Van Campo, E., Guiot, J., y Peng, C. (1993), A data-based re-appraisal of the terrestrial carbon budget at the last glacial maximum. *Global and Planetary Change*, 8, pp. 189-201.
- Van den Broeke, M. R., Enderlin, E. M., Howat, I. M., Kuipers Munneke, P., Noël, B. P. Y., van de Berg, W. J., van Meijgaard, E., y Wouters, B. (2016), On the recent contribution of the Greenland ice sheet to sea level change, *The Cryosphere*, 10, pp. 1933–1946, doi:10.5194/tc-10-1933-2016.
- Van der Voo, R., y Zijdeveld, J.D.A. (1971), Renewed paleomagnetic study of the Lisbon volcanics and implications for the rotation of the Iberian Peninsula, *J. Geophys. Res.*, 76, pp. 3913-3921.
- Van Geen, A., Zheng, Y., Bernhard, J. M., Cannariato, K. G., Carriquiry, J., Dean, W. E., Eakins, B. W., Ortiz, J. D., y Pike, J. (2003), On the preservation of laminated sediments along the western margin of North America, *Paleoceanography and Paleoclimatology*, 18(4), pp. 22- 1-22- 17.
- Vio, R., Cristiani, S., Lessi, O., y Provenzale, A. (1992), Time series analysis in astronomy: an application to quasar variability studies, *J. Astrophys.*, 392(2), pp. 518-530.
- Voelker, A.H.L., y de Abreu, L. (2011), A review of abrupt climate change events in the northeastern Atlantic Ocean (Iberian Margin): Latitudinal, longitudinal, and vertical gradients. In: *Abrupt Climate Change: Mechanisms, Patterns, and Impacts*, Geophysical Monograph Series, 193, American Geophysical Union, Washington, D. C., pp.15–37.
- Voges, W., Atmanspacher, H., y Scheingraber, H. (1987), Deterministic chaos in accretion systems: Analysis of the X-ray variability of Hercules X-I, *Astrophys. J.*, 320, pp. 794-802.
- Webb, T. III, Crowley, T. J., Frenzel, B., Gliemeroth, A. -K., Jouzel, J., Labeyrie, L., Prentice, I. C., Rind, D., Ruddiman, W. F., Sarnthein, M., y Zwick, A. (1993), Group Report: Use of paleoclimatic data as analogs for understanding future global changes.

- In J. A. Eddy and H. Oeschger, eds., *Global Climate Changes in the Perspective of the Past*, Chichester: John Wiley y Sons, pp. 51-70.
- Weedon. G. (2003), *Time Series Analysis and Cyclostratigraphy*, Cambridge, Cambridge University, 48 p.
- Weertman, J. (1976), Milankovitch solar radiation variations and ice age ice Sheet sizes, *Nature*, 261, pp. 17-20.
- Weidick, A. (1995), Greenland. US Geological Survey, Professional Paper 1386-C.
- Welch, G., y Bishop, G. (2006), An introduction to the Kalman Filter, Department to Computer Science, University of North Carolina at Chapel Hill, pp. 1-16.
- Wells, J. (1963), Coral growth and geochronometry, *Nature*, 197, pp. 948-950.
- Whitmarsh, R. B., Sawyer, D. S., Klaus, A., y Masson, D. G. (1996), The Western Iberia Margin: A Geophysical and Geological Overview, Proceedings of the Ocean Drilling Program, Scientific Results, 149, pp. 1-23.
- Winograd, I. J., Coplen, T. B., Landwehr, J. M., Riggs, A. C., Ludwig, K. R., Szabo, B. J., Kolesar, P. T., y Revesz, K. M. (1992), Continuous 500,000-year climate record from vein calcite in Devils Hole, Nevada, *Science*, 258, pp. 255-260.
- Wolf, A. (1986), *Quantifying Chaos with Lyapunov Exponents*, Chaos, Princeton, NJ: Princeton University Press. Chap. 13.
- Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., y Vastano, J. A. (1985), Determining Lyapunov exponents from a times series, *Physica D*, 16, pp. 285-317.
- Wolfe, J. A. (1978), A paleobotanical interpretation of tertiary climates in the Northern Hemisphere, *Am. Sci.* 66, pp. 694-703.
- Wong, C. I., Breecker, D. O. (2015), Advancements in the use speleothems as climate archives, *Quaternary Science Review*, 127, pp. 1-18.
- Woodwell, G. M., Whittaker, R. H., Reiners, W. A., Likens, G. e., Delwiche, C. C., y Botkin, D. B. (1978), the biota and the world carbon budget, *Science*, 199, pp. 141-146.
- Yang, H-L., Radons, G., y Kantz, H. (2012), Covariant Lyapunov vectors from reconstructed dynamics: the geometry behind true and spurious Lyapunov exponents, *Phys. Rev. Lett.* 109, 244101.
- Yiou, P., Baert, E., and Loutre, F. M. (1996), Spectral Analysis of Climate Data, *Geophys.*,

17, pp. 619-663.

Yiou, P. Ghil, M., Jouzel, J., Paillard, D., y Vautard, R. (1994), Nonlinear variability of the climatic system from singular and power spectra of late Quaternary records, *Clim. Dyn.*, 9, pp. 371-389.

Zawadzki, I. I. (1973), Statistical properties of precipitation patterns, *J. Appl. Meteor.*, 12, pp. 459-472.

Zeng, X., Pielke, A. R., y Eykholt, R. (1992), Estimating the Fractal Dimension and the Predictability of the Atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, 49,8, pp. 649-659.

Zeng, X., Eykholt, R., y Pielke, R. A. (1991), Estimating the Lyapunov exponent spectrum from short time series of low precisión. *Phys. Rev. Lett.*, 66, pp. 3229-3232.