UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

SOBRE COHOMOLOGÍA DE Q-GRUPOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
CARLOS ALBERTO AQUINO ZÁRATE

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ROLANDO JIMÉNEZ BENÍTEZ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
DR. GREGOR WEINGART (INSTITUTO DE MATEMÁTICAS)
DR. DANIEL JUAN PINEDA (CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS)

CIUDAD DE MÉXICO, AGOSTO 2020.

Dedicado a Dios

Índice general

Introducción

Uno de los inicios de la teoría de cohomología de grupos surgió con el trabajo de Hurewicz en 1936 sobre espacios asféricos. Un espacio X es asférico si $\pi_n(X) = 0$ para $n \neq 1$. Hurewicz demostró que un espacio asférico X está completamente determinado salvo homotopía por su grupo fundamental.

En 1953, Eilenberg y MacLane demuestran que dado un grupo discreto G, existe un CW-complejo asférico X con $\pi_1(X) = G$. Un espacio X que cumple estas condiciones es conocido como espacio de Eilenberg-MacLane de tipo $K(G,1)$. Con estos resultados se pueden definir de manera topológica la homología y cohomología de un grupo G como:

$$H_n(G,\mathbb{Z}) = H_n(X), \quad H^n(G,\mathbb{Z}) = H^n(X),$$

donde X es precisamente un espacio de Eilenberg-MacLane de tipo $K(G,1)$. Algebraicamente, los grupos de homología y cohomología en bajas dimensiones habían sido estudiados antes que los grupos definidos topológicamente. En 1904, Schur estudió un grupo isomorfo a $H_2(G,\mathbb{Z})$ y este grupo es conocido como el multiplicador de Schur de G. En 1932, Baer estudió $H^2(G,A)$ como un grupo de clases de equivalencia de extensiones. Fue en 1945 que Eilenberg y MacLane introducen un enfoque algebraico que incluye a estos grupos como un caso particular:

$$H_n(G,M) = \operatorname{Tor}_n^G(\mathbb{Z},M), \quad H^n(G,M) = \operatorname{Ext}_G^n(\mathbb{Z},M).$$

Algunas propiedades que satisfacen la homología y cohomología de un grupo son las siguientes (ver [Bro82]):

- Lema de Shapiro: si H es un subgrupo de G y M es un H-módulo, entonces $H_n(G, Ind_H^G(M)) \cong H_n(H,M)$ y $H^n(G, CoInd_H^G(M)) \cong H^n(H,M)$.
- $H_n(G,-)$ es un δ-funtor homológico universal y $H^n(G,-)$ es un δ-funtor cohomológico universal.
- Existencia de morfismos de restricción y transfer.
- Existencia de productos cup y cap.

En [KW04], Knudson y Walker contruyen una teoría homológica $\mathscr{H}_i(X,G,A)$ donde G es un grupo algebraico y X es una variedad algebraica ambos sobre el mismo campo k. Ellos demuestran que si X es un esquema afín, entonces existe un isomorfismo entre $\mathscr{H}_i(Spec(k),G,\mathbb{Z})$ y los grupos de homología $H_i(BG(\bar{k})/\Gamma,\mathbb{Z})$ donde $\bar{k}$ es la cerrradura algebraica de k, Γ es el grupo de Galois de la extensión $\bar{k}/k$, $Spec(k)$ es el espectro primo de k, $G(\bar{k})$ es el grupo discreto de puntos $\bar{k}$-racionales de G y $BG(\bar{k})$ el espacio clasificante de $G(\bar{k})$. De esta manera, Knudson estaba interesado en calcular la homología de cierto espacio cociente $H_n(BG/Q,\mathbb{Z})$ donde BG es el espacio clasificante de un grupo discreto G y Q es un grupo finito que está actuando sobre G por automorfismos y él pensaba que podía hacerlo con el complejo de puntos fijos del complejo barra $C(G)^Q$. Esta fue la motivación de Knudson para definir los siguientes invariantes.

Supongamos que Q y G son grupos discretos donde Q está actuando sobre G por automorfismos. En este caso diremos que G es un Q-grupo. La acción de Q sobre G induce una acción de Q sobre el complejo barra $C(G)$ definida por: $q[g_1 \mid \cdots \mid g_n] = [qg_1 \mid \cdots \mid qg_n]$. Supongamos que A es un grupo abeliano con acciones triviales de Q y G. Knudson define en [Knu06] la homología y cohomología de cadenas invariantes:

$$H_*^Q(G,A) = H_*((C(G)\otimes A)^Q), \;\; H_Q^*(G,A) = H^*(Hom(C(G)^Q,A)).$$

Estos invariantes generalizan los grupos de homología y cohomología usual de un grupo con coeficientes en $\mathbb{Z}$ ya que si la acción de Q sobre G es trivial, entonces $C(G)^Q = C(G)$ y $(C(G)\otimes A)^Q = C(G)\otimes A$, por lo tanto se recuperan los grupos de homología y cohomología. Utilizando técnicas de topología equivariante, Knudson calculó la homología $H_*^Q(G,A)$ para algunos grupos cíclicos. En [JLM18], se construye una sucesión espectral que converge a $H_*(Q,C(G)\otimes A)$ cuyo segundo término es isomorfo a $H_*^Q(G,A)$. Cuando esta sucesión espectral colapsa, esta produce un isomorfismo $H_*^Q(G,A) \cong H_*(Q,C(G)\otimes A)$. En [AJMM20], se demuestra que si $Q = \mathbb{Z}_n$ y n es invertible en A (la multiplicación por n en A es un isomorfismo), entonces $H_*^{\mathbb{Z}_n}(G,A) \cong H_*(G \rtimes \mathbb{Z}_n, A)$. También se da una relación entre el primer grupo de homología de cadenas invariantes de Knudson y la abelianización del grupo $G//Q$ por medio de un morfismo natural $(G//Q)_{ab} \to H_1^Q(G,\mathbb{Z})$. El grupo $G//Q$ está equipado con una proyección Q-invariante $p : G \to G//Q$ y está caracterizado por la siguiente propiedad universal: si $\varphi : G \to H$ es tal que $\varphi(qg) = \varphi(g)$ para cada $g \in G$, $q \in Q$, entonces existe un único morfismo $\psi : G//Q \to H$ tal que $\psi \circ p = \varphi$. Explícitamente, el grupo $G//Q$ está dado como sigue. Denotemos por $[G,Q]^{G\rtimes Q}$ la cerradura normal de $[G,Q]$ en $G \rtimes Q$. Entonces $G//Q$ es la imagen bajo la composición $G \to G \rtimes Q \to G \rtimes Q/[G,Q]^{G\rtimes Q}$, donde la primera aplicación es la inclusión y la segunda es la proyección.

Inspirados en esto, proponemos una teoría que generaliza tanto a la homología y cohomología de grupos clásica con coeficientes arbitrarios y de cierta manera también generaliza la homología y cohomología de cadenas invariantes. Además, brinda información algebraica Q-equivariante análoga a la que nos proporciona la teoría clásica. Algunos resultados de este trabajo se publicaron en [AJMM20]. Este trabajo está estructurado de la siguiente manera. En el capítulo 1 presentamos las preliminares. Introducimos en el capítulo 2, la categoría Q-G $\mathscr{M}od$ cuyos objetos son grupos abelianos M con acciones de Q y G de tal manera que si consideramos a la acción de G sobre M como un grupoide (grupoide acción), entonces las acciones de Q sobre G y sobre M inducen una acción de Q sobre este grupoide, es decir, Q está actuando sobre la acción de G sobre M. Los morfismos en esta categoría son los morfismos de G-módulos y Q-módulos a la vez. La categoría Q-G $\mathscr{M}od$ es equivalente a la categoría de módulos sobre el producto semidirecto $G \rtimes Q$ (Proposición 2.2.1). De esta manera, la categoría Q-G $\mathscr{M}od$ posee todas la bondades de una categoría abeliana además de ser una categoría con suficientes proyectivos y suficientes inyectivos. Estos objetos serán nuestros módulos de coeficientes. Proponemos la homología y cohomología invariante del Q-grupo G con coeficientes en el Q-G módulo M de la siguiente manera:

$$HH^Q_*(G,M) = H_*((B(G) \otimes_G M)^Q), \;\; HH^*_Q(G,M) = H^*(Hom_G(B(G),M)^Q),$$

donde $B(G)$ es la resolución barra. En las proposiciones 2.3.1 y 2.3.2 podemos ver la relación que existe entre la cohomología invariante, la cohomología de cadenas invariantes de Knudson y la cohomología clásica cuando Q es un grupo finito y $|Q|$ es invertible en M. Una desventaja de estos grupos de homología y cohomología invariante es que están definidos por una resolución de Q-G módulos muy particular y esta resolución particular $B(G)$, no es una resolución proyectiva en Q-G $\mathscr{M}od$, es decir, en general los funtores de homología y cohomología invariante no son funtores derivados. Uno de los objetivos de este trabajo es encontrar si existen condiciones bajo las cuales la cohomología invariante es un funtor derivado. En la teoría clásica, la cohomología de un grupo G siempre tiene una interpretación topológica, es decir $H^n(G,M) \cong H^n(X,\mathscr{M})$ donde X es un espacio de Eilenberg-MacLane de tipo $K(G,1)$ y $\mathscr{M}$ es el sistema de coeficientes locales sobre X asociados al G-módulo M. En la sección 2.4 vemos que si A es un Q-G módulo con acciones triviales, entonces la cohomología invariante tiene una interpretación topológica.

Teorema 2.4.1 Si A es un Q-G módulo con acciones triviales, entonces existe un isomorfismo:

$$HH^n_Q(G,A) \cong H^n(BG/Q,A).$$

Aquí BG es un modelo del espacio clasificante particular: BG es la realización geométrica del nervio de G. En este caso, no podemos reemplazar BG por cualquier modelo del espacio clasificante a menos que sea Q-homotópicamente equivalente a BG.

Por otra parte, si consideramos la sucesión exacta:

$$1 \longrightarrow G \longrightarrow G \rtimes Q \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

tenemos que la sucesión espectral de Hochschild-Serre converge a la cohomología del producto semidirecto:

$$E_2^{p,q} = H^p(Q,H^q(G,M)) \Rightarrow H^{p+q}(G \rtimes Q,M),$$

de esta manera, la columna $E_2^{0,*}$ tiene la forma: $H^0(Q,H^q(G,M)) = H^q(G,M)^Q$. Ahora si Q es finito y $|Q|$ es invertible en M, entonces por la Proposición 2.3.1,

$$E_2^{0,q} = H^0(Q,H^q(G,M)) = H^q(G,M)^Q \cong HH_Q^q(G,M),$$

esto significa que la segunda página de la sucesión espectral E_* contiene en su columna $E_2^{0,*}$ a la cohomología invariante $HH_Q^*(G,M)$ y converge a $H^*(G \rtimes Q,M)$. Por otra parte, si Q es cíclico finito y $|Q|$ es invertible en M, entonces $H^p(Q,H^q(G,M)) = 0$ para $p > 0$, es decir, la sucesión espectral E_* colapsa en E_2 y la cohomología invariante $HH_Q^*(G,M)$ coincide con la cohomología usual del producto semidirecto.

Teorema 2.5.1. Si Q es un grupo cíclico finito y $|Q|$ es invertible en M, entonces existe un isomorfismo: $HH_Q^*(G,M) \cong H^*(G \rtimes Q,M)$.

Otro de los objetivos que surgieron durante el desarrollo de este trabajo, fue definir una teoría de homología y cohomología de Tate invariante para Q-grupos finitos y demostrar un teorema de dualidad análogo al siguiente en la teoría clásica: el producto cup $\hat{H}^i(G,\mathbb{Z}) \otimes \hat{H}_{-i}(G,\mathbb{Z}) \to \hat{H}^0(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{|G|}$ induce un isomorfismo $\hat{H}^i(G,\mathbb{Z}) \cong (\hat{H}_{-i}(G,\mathbb{Z}))'$, donde $A' = Hom(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ representa el dual de A.

Consideramos la resolución barra $B(G) \to \mathbb{Z}$ y su dual $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^* \to B(G)^*$. Aquí, el dual de un R-módulo M es $M^* = Hom_R(M,R)$. Pegando estas dos resoluciones obtenemos la resolución completa estándar:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & B_1(G) \arrow[r] & \mathbb{Z}[G] \arrow[rr, "\eta\circ\varepsilon"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & \mathbb{Z}[G] \arrow[r] & B_1^* \arrow[r] & \cdots \\
& & & \mathbb{Z} \arrow[ur, "\eta"'] & & &
\end{tikzcd}$$

donde $\eta : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[G]$ está dado por $\eta(n) = n\sum_{g\in G} g$ y $d_n^* : B_{n-1}(G)^* \to B_n(G)^*$ está dado por $d_n^*(f) = f \circ d_n$. De esta manera todas las aplicaciones son Q-equivariantes. Este complejo completo lo denotaremos por $\hat{B}(G)$. De esta forma, $\hat{B}_n(G) = B_n(G)$ para $n \geq 0$ y $\hat{B}_n(G) = B_{-n-1}(G)^*$ para $n \leq -1$.

Hemos podido definir la homología y cohomología de Tate invariante como:

$$\hat{HH}_*^Q(G,M) = H_*((\hat{B}(G) \otimes_G M)^Q), \quad \hat{HH}_Q^*(G,M) = H^*(Hom_G(\hat{B}(G),M)^Q).$$

Pero no hemos podido definir un producto cup para esta cohomología. Sin embargo presentamos en la sección 2.7 un teorema de dualidad para grupos cíclicos de orden primo.

Teorema 2.7.1. Si $Q = \mathbb{Z}_p$ con p primo, G es un Q-grupo finito y $G^Q = \{1\}$, entonces existe un isomorfismo

$$HH_Q^n(G,\mathbb{Z}) \cong HH_{n-1}^Q(G,\mathbb{Z}), \text{ para } n \geq 2.$$

Finalizamos el capítulo 2, demostrando que bajo ciertas condiciones existen sucesiones exactas largas y de esta manera, la cohomología invariante es un δ-funtor cohomológico pero no un δ-funtor cohomológico universal como sí sucede en la teoría clásica. Demostramos la existencia del morfismo de restricción y productos en homología y cohomología invariante.

El capítulo 3 lo destinamos a la interpretación de $HH^0_Q(G,M)$, $HH^1_Q(G,M)$ y $HH^2_Q(G,M)$, demostrando el siguiente teorema análogo al teorema de clasificación de extensiones de la teoría usual:

Teorema 3.2.1. Existe una biyección entre $HH^2_Q(G,M)$ y $Ext_Q(G,M)$.

Aquí $Ext_Q(G,M)$ es el conjunto de clases de equivalencia de extensiones Q-equivariantes de la forma $0 \to M \to E \to G \to 1$ que admiten una sección Q-equivariante $s : G \to E$ y donde M tiene estructura de Q-G módulo. Esto generaliza lo que sucede en la teoría clásica ya que si Q actúa trivialmente sobre G, entonces $HH^2_Q(G,M)$ coincide con $H^2(G,M)$ y $Ext_Q(G,M)$ coincide con el conjunto de clases de equivalencia de extensiones de la forma $0 \to M \to E \to G \to 1$.

Finalmente, el capítulo 4 lo dedicamos al estudio de la cohomología invariante de acciones libres (4.1.1). Una acción $Q \to Aut(G)$ es semilibre si $Q_g = \{1\}$ ó $Q_g = Q$ para cada $g \in G$ y diremos que una acción es libre si $Q_g = \{1\}$ para $g \neq 1$. Aquí Q_g denota el grupo de isotropía de $g \in G$. A diferencia de la teoría clásica, donde la resolución barra $B(G)$ es homotópicamente equivalente a la resolución barra normalizada $B^N(G)$ ya que estas son resoluciones proyectivas del mismo módulo $\mathbb{Z}$, en la categoría $Q\text{-}G\mathscr{M}od$ estas resoluciones no son proyectivas y tampoco necesariamente homotópicamente equivalentes. Sin embargo, para acciones libres demostramos en 4.1.3 que podemos reemplazar la resolución barra $B(G)$ por la resolución barra normalizada $B^N(G)$ para calcular $HH^*_Q(G,M)$. En este caso, $B^N_n(G)$ es un Q-G módulo proyectivo para $n > 0$ y de esta forma, también podemos reemplazar la resolución barra normalizada $B^N(G)$ por cualquier resolución proyectiva del ideal de aumentación de G denotado por I_G y así obtenemos:

$$HH^n_Q(G,M) = \begin{cases} (M^G)^Q, & n = 0, \\ \\ Ext^0_{Q\text{-}G}(I_G,M)/IDer_Q(G,M), & n = 1, \\ \\ Ext^{n-1}_{Q\text{-}G}(I_G,M), & n \geq 2, \end{cases}$$

donde $IDer_Q(G,M)$ es el conjunto de derivaciones internas Q-equivariantes, es decir,

$$IDer_Q = \{d_x \colon G \to M \mid x \in M^Q\}$$

donde $d_x(g) = (g-1)x$. Como mencionamos anteriormente, en la teoría clásica, la cohomología de un grupo es un funtor derivado y para acciones libres, la cohomología invariante se comporta como un funtor derivado a partir de $n \geq 2$. En la sección 4.2, demostramos la existencia del transfer para cierta clase de subgrupos Q-invariantes de G y demostramos propiedades análogas a la propiedades del transfer de la teoría clásica.

El teorema 1.3.2 nos proporciona bajo ciertas hipótesis una sucesión espectral que converge a la cohomología de los puntos fijos de un complejo de cocadenas de G-módulos

$$E_2^{p,q} = H^p(G, H^q(C)) \Rightarrow H^{p+q}(C^G).$$

Aplicando este resultado a ciertos complejos de cocadenas de la forma $C = Hom_G(F, M)$, obtenemos las siguientes sucesiones espectrales para acciones libres y semilibres:

Teorema 4.3.1. Si la acción $Q \to Aut(G)$ es semilibre y M es un Q-G módulo tal que como Q-módulo es Q-acíclico, entonces existe una sucesión espectral de la forma:

$$E_2^{p,q} = H^p(Q, H^q(G, M)) \Rightarrow HH_Q^{p+q}(G, M).$$

Si la acción $Q \to Aut(G)$ es libre y M es un Q-G módulo arbitrario, entonces existe una sucesion espectral de la forma:

$$E_2^{p,q} = \left\{ \begin{array}{ll} H^p(Q, H^{q+1}(G, M)) & q > 0 \\ & \\ H^p(Q, Der(G, M)) & q = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow Ext_{Q\text{-}G}^{p+q}(I_G, M).$$

Con este resultado presentamos el ejemplo 4.3.3 que demuestra que en general la cohomología invariante no es igual a la cohomología usual del producto semidirecto $G \rtimes Q$. Concluimos el capítulo analizando los grupos de cohomología relativa de Takasu ([Tak59]): Si H es un subgrupo de G, se define el funtor:

$$I_{(G,H)} : G\text{-}\mathscr{M}od \to G\text{-}\mathscr{M}od,$$
$$I_{(G,H)}(M) = ker(\theta_M),$$

donde $\theta_M : \mathbb{Z}[G] \otimes_H M \to M$ envía $g \otimes m$ al elemento gm. Se definen los grupos de homología y cohomología relativa de Takasu por:

$$H_n(G, H, M) = Tor_{n-1}^G(I_{(G,H)}(\mathbb{Z}), M), \quad H^n(G, H, M) = Ext_G^{n-1}(I_{(G,H)}(\mathbb{Z}), M),$$

para $n \geq 1$ y demostramos que la cohomología invariante de acciones libres es un caso particular de esta cohomología relativa:

Teorema 4.4.2. Existe un isomorfismo entre la cohomología invariante para acciones libres y los grupos de cohomología relativa de Takasu,

$$HH_Q^n(G, M) \cong H^n(G \rtimes Q, Q, M), \ \text{para } n \geq 2.$$

Por último, en [Tak59] se demuestra que los grupos de cohomología relativa son un caso particular de los grupos de cohomología usual. Usando este resultado, demostramos que la cohomología invariante $HH^n_Q(G,M)$ coincide con la cohomología clásica del producto semidirecto pero con un cambio de coeficientes:

Teorema 4.4.3. Si la acción $Q \to Aut(G)$ es libre, los grupos de cohomología invariante coinciden con los grupos de cohomología usual del producto semidirecto $G \rtimes Q$, salvo por un cambio de coeficientes, es decir,

$$HH^n_Q(G,M) \cong H^n(G \rtimes Q, J_{(G\rtimes Q,Q)}(M)), \text{ para } n \geq 2.$$

Aquí $J_{(G,H)}(M) = coker(i_M)$ donde $i_M : M \to Hom_H(\mathbb{Z}[G],M)$ está dado por $i_M(m)(x) = xm$. En general,

$$HH^n_Q(G,M) = \begin{cases} (M^G)^Q & n = 0, \\ \\ Der_Q(G,M)/IDer_Q(G,M) & n = 1, \\ \\ H^n(G \rtimes Q, J_{(G\rtimes Q,Q)}(M)) & n \geq 2. \end{cases}$$

Una diferencia importante entre la cohomología clásica $H^*(G,M)$ y la cohomología invariante es que $HH^*_Q(G,M)$ detecta el tipo de acción $Q \to Aut(G)$ mientras que $H^*(G,M)$ no lo hace. De esta manera podemos pensar a $HH^*_Q(G,M)$ como una cohomología de la acción $Q \to Aut(G)$. Por otra parte, ya que $Hom_G(B(G),M)^Q = Hom_{Q\text{-}G}(B(G),M)$, la cohomología $HH^*_Q(G,M)$ está relacionada con la cohomología $H^*(G \rtimes Q, M)$ y se podría llegar a pensar que estas cohomologías coinciden, pero a lo largo de este trabajo hemos visto que en general estas cohomologías difieren incluso para el caso de acciones libres, de esta manera tiene sentido el estudio de este invariante. Uno de los mayores inconvenientes de $HH^*_Q(G,M)$ es como está definido, sin embargo, en algunos casos hemos podido evitar esta limitante y presentar algunos resultados interesantes.

Capítulo 1

Cohomología de grupos y sucesiones espectrales

En este capítulo, presentamos brevemente los temas necesarios para poder abordar sin problemas los siguientes capítulos. Concluiremos con el Teorema 1.3.2 que será muy importante en el capítulo 4 ya que nos proporcionará una sucesión espectral para el cálculo de cohomología invariante de acciones libres.

1.1. Categorías abelianas y funtores derivados

En esta sección introducimos las definiciones básicas de la teoría de categorías así como las definiciones principales del álgebra homológica en categorías abelianas en general.

Definición 1.1.1. Una **categoría** consta de lo siguiente:

- Una colección de objetos $Ob(\mathscr{C})$.
- Para cada par de objetos $A, B \in Ob(\mathscr{C})$ se tiene un conjunto que será llamado conjunto de **morfismos** de A en B y será denotado por $Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$.
- Para cualesquiera tres objetos $A, B, C \in Ob(\mathscr{C})$ con $Hom_{\mathscr{C}}(A, B) \neq \emptyset \neq Hom_{\mathscr{C}}(B, C)$ se tiene una función composición

$$R : Hom_{\mathscr{C}}(A, B) \times Hom_{\mathscr{C}}(B, C) \to Hom_{\mathscr{C}}(A, C),\ R(f, g) = g \circ f.$$

Se satisfacen las siguientes leyes de composición:

C1 Para todo objeto A en $\mathscr{C}$ existe un morfismo $1_A \in Hom_{\mathscr{C}}(A, A)$ llamado identidad en A tal que para todo $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$, $1_B \circ f = f$ y $f \circ 1_A = f$.

C2 Dados $A,B,C,D \in Ob(\mathscr{C})$ y $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B), g \in Hom_{\mathscr{C}}(B,C)$ y $h \in Hom_{\mathscr{C}}(C,D)$, se tiene la siguiente igualdad: $R(R(h,g),f) = R(h,R(g,f))$.

Ejemplo 1.1.1. *Grp* es la categoría cuyos objetos son los grupos y cuyos morfismos son los homomorfismos de grupos.

Ejemplo 1.1.2. *Ring* es la categoría cuyos objetos son los anillos y cuyos morfismos son los homomorfismos de anillos.

Ejemplo 1.1.3. *Top* es la categoría cuyos objetos son los espacios topológicos y cuyos morfismos son las aplicaciones continuas.

Definición 1.1.2. Sea $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$. Diremos que f es un **monomorfismo** si para todo objeto X en la categoría, la función $f_* : Hom_{\mathscr{C}}(X,A) \to Hom_{\mathscr{C}}(X,B)$, $\phi \mapsto f \circ \phi$ es inyectiva. Diremos que f es un **epimorfismo** si la función $f^* : Hom_{\mathscr{C}}(B,X) \to Hom_{\mathscr{C}}(A,X)$, $\phi \mapsto \phi \circ f$ es inyectiva. Diremos que f es un **isomorfismo** si existe $g \in Hom_{\mathscr{C}}(B,A)$ tal que $f \circ g = 1_B$ y $g \circ f = 1_A$.

Es claro que un isomorfismo es un monomorfismo y un epimorfismo, pero un morfismo que es monomorfismo y epimorfismo no necesariamente es un isomorfismo como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.1.4. Consideremos la categoría **Haus** de espacios topológicos de Hausdorff. En esta categoría los monomorfismos son las aplicaciones continuas inyectivas, mientras que los epimorfismos son las aplicaciones continuas con imagen densa. Sea $p \in S^n$ un punto en la esfera de dimensión n, entonces la inclusión natural $i : S^n \setminus \{p\} \to S^n$ es un monomorfismo y a la vez un epimorfismo en **Haus** pero no es un isomorfismo.

Definición 1.1.3. Una categoría se llama **aditiva** si:

A1 Para todo par de objetos A y B, $Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ tiene estructura de grupo abeliano.

A2 Para cualesquiera tres objetos $A,B,C \in \mathscr{C}$ la función composición R es bilineal.

A3 Existe un objeto cero denotado 0 en $\mathscr{C}$ tal que para todo objeto A en $\mathscr{C}$, $Hom_{\mathscr{C}}(0,A) = \{0\} = Hom_{\mathscr{C}}(A,0)$.

A4 Para todo par de objetos A,B existe el producto directo $A \times B$.

A una categoría que satisface solamente A1) y A2) se la llama **pre-aditiva**.

Definición 1.1.4. Sea $\mathscr{C}$ una categoría aditiva, y sea $\phi : A \to B$ un morfismo de objetos en $\mathscr{C}$. Definimos el **kernel** de ϕ como una pareja $(ker(\phi),i)$, donde $ker(\phi)$ está en $\mathscr{C}$ e $i : ker(\phi) \to A$ es un morfismo que satisface: $\phi \circ i = 0$ y dados un objeto X en $\mathscr{C}$ y un morfismo $\sigma : X \to A$ tal que $\phi \circ \sigma = 0$, existe un único morfismo $\overline{\sigma} : X \to ker(\phi)$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
ker(\phi) \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "\phi"] & B \\
& X \arrow[ul, "\overline{\sigma}"] \arrow[u, "\sigma"] \arrow[ur, "\phi\circ\sigma=0"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Esta definición es equivalente a que la sucesión de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(X, ker(\alpha)) \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(X,A) \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(X,B)$$

sea exacta para cada objeto X en $\mathscr{C}$.

De igual forma se define el **cokernel** de ϕ como un par $(coker(\phi), p)$ formado por un objeto $coker(\phi)$ en $\mathscr{C}$ y un morfismo $p : B \to coker(\phi)$ que satisface: $p \circ \phi = 0$ y dados un objeto X en $\mathscr{C}$ y un morfismo $\sigma : B \to X$ tal que $\sigma \circ \phi = 0$ existe un único morfismo $\overline{\sigma} : coker(\phi) \to X$ tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\sigma\circ\phi"'] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\sigma"] & coker(\phi) \arrow[dl, "\overline{\sigma}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

conmuta. Esta definición es equivalente a que la sucesión de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(coker(\alpha), X) \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(B,X) \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(A,X)$$

sea exacta para cada objeto X en $\mathscr{C}$.

Evidentemente el $ker(\alpha)$ y $coker(\alpha)$ son únicos salvo isomorfismo. En ocasiones abusaremos de la notación y usaremos sólo el morfismo o el objeto cuando hablemos del kernel o cokernel.

Definición 1.1.5. Una categoría **abeliana** es una categoría aditiva $\mathscr{C}$ que satisface las siguientes condiciones:

- Todo morfismo $\alpha \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ admite un kernel y un cokernel.
- Todo monomorfismo es el kernel de su cokernel.
- Todo epimorfismo es el cokernel de su kernel.

Ejemplo 1.1.5. Sea R un anillo. La categoría R-$\mathscr{M}od$ de R-módulos izquierdos es una categoría abeliana. En particular, la categoría $\mathscr{A}b$ de grupos abelianos es abeliana. Si A y B son R-módulos, el conjunto de morfismos en esta categoría lo denotaremos por $Hom_R(A,B) = Hom_{R\text{-}\mathscr{M}od}(A,B)$. Si $R = \mathbb{Z}$ entonces conjunto de morfismos de $\mathbb{Z}$-módulos será denotado por $Hom(A,B) = Hom_{\mathbb{Z}}(A,B)$.

Definición 1.1.6. (Subobjetos y cocientes). Sea $\mathscr{C}$ una categoría abeliana y X un objeto de $\mathscr{C}$. Un objeto A en $\mathscr{C}$es un subobjeto de X si existe un monomorfismo $i : A \to X$. Dos subobjetos $i_1 : A \to X$ e $i_2 : A \to X$ son equivalentes si existe un isomorfismo $f : A_1 \to A_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f"'] & X \\ A_2 \arrow[ur, "i_2"'] & \end{tikzcd}$$

Si A es un subobjeto de X, definimos el cociente X/A como el cokernel de $i : A \to X$.

Proposición 1.1.1. *Sea $\alpha : A \to B$ un morfismo en una categoría abeliana $\mathscr{C}$. Entonces el cokernel del kernel de α es isomorfo al kernel del cokernel de α.*

Demostración: Sea $i : ker(\alpha) \to A$ el kernel de α, $p : B \to coker(\alpha)$ el cokernel de α, $p' : A \to coker(i)$ el cokernel de i, $i' : ker(p) \to B$ el kernel de p. Como $\alpha \circ i = 0$, existe un único morfismo $\varphi : coker(i) \to B$ tal que $\varphi \circ p' = \alpha$ y como $p \circ \alpha = 0$, existe un único morfismo $\psi : A \to ker(p)$ tal que $i' \circ \psi = \alpha$. Por otra parte, $p \circ \varphi \circ p' = p \circ \alpha = 0$ y por ser p' un epimorfismo, $p \circ \varphi = 0$ así que existe un único morfismo $h : coker(i) \to ker(p)$ tal que $i' \circ h = \varphi$. Además, $i' \circ h \circ p' = \varphi \circ p' = \alpha = i' \circ \psi$ y por ser i' un monomorfismo, $h \circ p' = \psi$. De esta manera el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & & coker(i) \arrow[dd, "h"] \arrow[dr, "\varphi"] & & \\ ker(\alpha) \arrow[r, "i"] & A \arrow[ur, "p'"] \arrow[rr, "\alpha"'] \arrow[dr, "\psi"'] & & B \arrow[r, "p"] & coker(\alpha). \\ & & ker(p) \arrow[ur, "i'"'] & & \end{tikzcd}$$

Sea X un objeto en $\mathscr{C}$ y $s : ker(p) \to X$ un morfismo tal que $s \circ \psi = 0$ y $t : ker(s) \to ker(p)$ el kernel de s. Por la propiedad universal del kernel existe $r : A \to ker(s)$ tal que $t \circ r = \psi$. Sea $\lambda : B \to coker(i' \circ t)$ el cokernel de $i' \circ t$. Como $\lambda \circ \alpha = \lambda \circ i' \circ t \circ r = 0$, existe $\gamma : coker(\alpha) \to coker(i' \circ t)$ tal que $\gamma \circ p = \lambda$. Por otra parte, $\lambda \circ i' = \gamma \circ p \circ i' = 0$ y como $i' \circ t$ es un monomorfismo, $i' \circ t$ es el kernel de λ así que existe $q : ker(p) \to ker(s)$ tal que $i' \circ t \circ q = i'$ y por ser i' un monomorfismo, $t \circ q = 1_{ker(p)}$ entonces t es epi y $s = 0$, así que ψ es epi. De manera similar se demuestra que φ es mono y como $h \circ p' = \psi$ y $i' \circ h = \varphi$, h es un isomorfismo. $\square$

Gracias a esta proposición, queda bien definida la imagen de un morfismo en una categoría abeliana:

Definición 1.1.7. Sea $\alpha : A \to B$ un morfismo en una categoría abeliana, definimos la **imagen** de α como $Im(\alpha) = coker(ker(\alpha)) = ker(coker(\alpha))$ junto con los morfismos naturales $g : A \to Im(\alpha)$ y $f : Im(\alpha) \to B$.

Nota 1.1.1. Cualquier morfismo $\alpha : A \to B$ en una categoría abeliana $\mathscr{C}$ se factoriza mediante la imagen

$$A \xrightarrow{g} Im(\alpha) \xrightarrow{f} B$$

con g un epimorfismo y f un monomorfismo.

Para un estudio más a fondo de la teoría de categorías y categorías abelianas también se pueden consultar por ejemplo [Mac70] y [Mit64].

Definición 1.1.8 (Sucesiones exactas)**.** Sea $\mathscr{C}$ una categoría abeliana, una sucesión

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$

es **exacta** en B si $Im(\alpha)$ y $ker(\beta)$ son equivalentes como subobjetos de B. Una sucesión

$$\cdots \longrightarrow A_{n-1} \longrightarrow A_n \longrightarrow A_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

es exacta si es exacta en cada objeto A_i.

Definición 1.1.9. Sean $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ dos categorías, un **funtor covariante** $F : \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2$ es una regla que asocia a cada objeto de $\mathscr{C}_1$ un objeto de $\mathscr{C}_2$ y para cada par de objetos A, B en $\mathscr{C}_1$ se tiene una función $Hom_{\mathscr{C}_1}(A,B) \to Hom_{\mathscr{C}_2}(F(A),F(B))$, con $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ y $F(1_A) = 1_{F(A)}$ para todo objeto A en $\mathscr{C}_1$. Análogamente definimos un **funtor contravariante** entre categorías $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, como una regla que asocia a cada objeto de $\mathscr{C}_1$ un objeto de $\mathscr{C}_2$, y cada par de objetos A,B en $\mathscr{C}_1$ se tiene una función $Hom_{\mathscr{C}_1}(A,B) \to Hom_{\mathscr{C}_2}(F(B),F(A))$ con $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ y $F(1_A) = 1_{F(A)}$ para todo objeto A en $\mathscr{C}_1$.

Ejemplo 1.1.6. Sea R un anillo y A un R-módulo derecho, definimos $(A \otimes \_\,) : R\text{-}\mathscr{M}od \to \mathscr{A}b$ dado por $(A \otimes \_\,)(X) = A \otimes X$ y $(A \otimes \_\,)(f : X \to Y) = 1_A \otimes f : A \otimes X \to A \otimes Y$, esta asignación es un funtor covariante.

Ejemplo 1.1.7. Sea $Diff$ la categoría de variedades diferenciables y aplicaciones diferenciables. Sean X y Y variedades diferenciables y sea $\varphi : X \to Y$ una función diferenciable. Denotamos por T_pX el espacio tangente de X en el punto $p \in X$. Sea $k \in \mathbb{N}$, una k-forma diferencial ω asigna a cada punto $p \in X$ una aplicación k-lineal alternante $\omega_p : (T_pX)^k \to \mathbb{R}$. El conjunto de k-formas diferenciales en X es denotado por $\Omega^k(X)$ y tiene estructura de grupo abeliano. La aplicación φ induce un morfismo de grupos abelianos

$$\varphi^* : \Omega^k(Y) \to \Omega^k(X),$$

$$\varphi^*(\omega) \in \Omega^k(X), \quad \varphi^*(\omega)_p(v_1, \cdots, v_k) = \omega_{\varphi(p)}(d\varphi_p(v_1), \ldots, d\varphi_p(v_k)),$$

para cada $p \in X$ y $v_i \in T_pX$. Por lo tanto, $\Omega^k : Diff \to \mathscr{A}b$ el funtor que asigna a cada variedad diferenciable X el grupo abeliano $\Omega^k(X)$ de k-formas diferenciables y a cada aplicación diferenciable $\varphi : X \to Y$ el morfismo de grupos abelianos $\varphi^* : \Omega^k(Y) \to \Omega^k(X)$, es un funtor contravariante.

Un ejemplo muy importante que ocuparemos más adelante es el siguiente:

Ejemplo 1.1.8. Consideremos la categoría Δ cuyos objetos son los conjuntos $[n] = \{0, 1, \ldots, n\}$ para $n \geq 0$. Los morfismos en esta categoría son las funciones $f : [n] \to [m]$ monótonas no decrecientes. Vamos a considerar los siguientes morfismos:

$$\delta_i : [n-1] \to [n], \;\; 0 \leq i \leq n, \qquad \sigma_i : [n+1] \to [n], \;\; 0 \leq i \leq n,$$

$$\delta_i(j) = \begin{cases} j, & j < i \\ j+1, & j \geq i, \end{cases} \qquad \sigma_i(j) = \begin{cases} j, & j \leq i \\ j-1, & j > i, \end{cases}$$

que son especiales por la siguiente razón: si $f : [n] \to [m]$ es un morfismo en Δ, entonces f se factoriza en la forma:

$$f = \delta_{i_i} \circ \cdots \circ \delta_{i_k} \circ \sigma_{j_1} \circ \cdots \circ \sigma_{j_l}.$$

Es decir, cualquier morfismo en la categoría Δ está generado por dichos morfismos.

Un **objeto simplicial** en la categoría $\mathscr{C}$ es un funtor contravariante $F : \Delta \to \mathscr{C}$. De manera equivalente, un objeto simplicial en $\mathscr{C}$ consta de lo siguiente:

- Una sucesión de objetos $X_* = \{X_n = F([n])\}_{n\geq 0}$ en $\mathscr{C}$
- Para $n \geq 1$, una colección de morfismos $\partial_i = F(\delta_i) : X_n \to X_{n-1}$, $0 \leq i \leq n$. Llamados **aplicaciones cara** o simplemente caras.
- Para cada $n \geq 0$, una colección de morfismos $s_j = F(\sigma_i) : X_n \to X_{n+1}$, $0 \leq j \leq n$. Llamadas **aplicaciones degeneración** o simplemente degeneraciones.

y satisfacen las siguientes identidades simpliciales:

$$\begin{array}{ll} \partial_i \circ \partial_j = \partial_{j-1} \circ \partial_i, & i < j, \\ s_i \circ s_j = s_{j+1} \circ s_i, & i \leq j, \\ \partial_i \circ s_j = s_{j-1} \circ \partial_i, & i < j, \\ \partial_i \circ s_j = id, & i = j \text{ ó } i = j+1, \\ \partial_i \circ s_j = s_j \circ \partial_{i-1}, & i > j+1. \end{array}$$

Si $\mathscr{C} = Grp$ es la categoría de grupos, diremos que X_* es un grupo simplicial. Si $\mathscr{C} = Top$ la categoría de espacios topológicos, diremos que X_* es un espacio simplicial. La categoría en la que estamos interesados es la categoría de conjuntos *Set*, en este caso, llamaremos a X_* un **conjunto simplicial**. A cada conjunto simplicial le podemos asociar un espacio topológico de la siguiente manera:

Sea X_* un conjunto simplicial y consideramos a X_n como un espacio discreto. Sea Δ^n la cerradura convexa de la base estándar de $\mathbb{R}^{n+1}$, es decir, $\Delta^n = \{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_i t_i = 1\}$ con aplicaciones cara y degeneraciones:

$$\delta_i : \Delta^{n-1} \to \Delta^n, \;\; (t_0, \ldots, t_{n-1}) \mapsto (t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-1}), \;\; 0 \leq i \leq n.$$

$$\sigma_j : \Delta^{n+1} \to \Delta^n, \;\; (t_0, \ldots, t_{n+1}) \mapsto (t_0, \ldots, t_j + t_{j+1}, \ldots, t_{n+1}), \;\; 0 \leq j \leq n.$$

Entonces definimos la **realización geométrica** $|X_*|$ de X_* como:

$$|X_*| = \left(\bigsqcup_{n\geq 0} X_n \times \Delta^n \right) / \sim, \quad \begin{array}{l} (x_n, \delta_i(t_0, \ldots, t_{n-1})) \sim (\partial_i(x_n), (t_0, \ldots, t_{n-1})), \\ (x_n, \sigma_j(t_0, \ldots, t_{n+1})) \sim (s_j(x_n), (t_0, \ldots, t_{n+1})). \end{array}$$

Donde $\bigsqcup_{n\geq 0} X_n \times \Delta^n$ tiene la topología débil y $|X_*|$ la topología cociente. Estamos interesados en considerar la realización geométrica de un conjunto simplicial X_* sin involucrar degeneraciones, a esta realización la llamaremos **realización geométrica gruesa**.

Definición 1.1.10. Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías abelianas, un funtor $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ covariante es **exacto izquierdo** si para cada sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

en la categoría $\mathscr{A}$, la sucesión

$$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(\alpha)} F(B) \xrightarrow{F(\beta)} F(C)$$

es exacta en la categoría $\mathscr{B}$. F es **exacto derecho** si la sucesión

$$F(A) \xrightarrow{F(\alpha)} F(B) \xrightarrow{F(\beta)} F(C) \longrightarrow 0$$

es exacta en $\mathscr{B}$. F es **exacto** si para cada sucesión exacta $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$, la sucesión

$$F(A) \xrightarrow{F(\alpha)} F(B) \xrightarrow{F(\beta)} F(C)$$

es exacta en $\mathscr{B}$.

Definición 1.1.11. Sean $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ dos categorías preaditivas, un funtor covariante $F : \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2$ es **aditivo** si para cada par de objetos A y B en $\mathscr{C}_1$ la función $Hom_{\mathscr{C}_1}(A;B) \to Hom_{\mathscr{C}_2}(F(A), F(B))$ es un morfismo de grupos abelianos. De forma análoga se definen los funtores aditivos contravariantes.

Definición 1.1.12. Sea $\mathscr{C}$ una categoría abeliana. Un **complejo de cocadenas** en $\mathscr{C}$ es un par $(\mathscr{F}, \delta)$ donde $\mathscr{F}$ y δ son sucesiones de objetos y morfismos en $\mathscr{C}$:

$$\mathscr{F} : \cdots \longrightarrow \mathscr{F}_{i-1} \xrightarrow{\delta_{i-1}} \mathscr{F}_i \xrightarrow{\delta_i} \mathscr{F}_{i+1} \xrightarrow{\delta_{i+1}} \cdots$$

tales que $\delta_i \circ \delta_{i-1} = 0$ para toda i. Ahora sea $k_i : ker\delta_i \to \mathscr{F}_i$ la inclusión natural, entonces existe un morfismo $c_i : \mathscr{F}_{i-1} \to ker\delta_i$ tal que $k_i \circ c_i = \delta_{i-1}$ ahora definimos el i-ésimo objeto de cohomología del complejo $\mathscr{F}$ como

$$H^i(\mathscr{F}) = ker\delta_i / Im\delta_{i-1} = coker(c_i).$$

De manera análoga se define un complejo de cadenas y su homología.

Definición 1.1.13. Sean (C,δ) y (C',δ') dos complejos de cocadenas en una categoría abeliana $\mathscr{C}$. Un **morfismo de complejos de cocadenas** $f:(C,\delta)\to(C',\delta')$ es una colección de morfismos $f_n : C_n \to C'_n$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_{n-1} \arrow[r] & C'_n \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Definición 1.1.14. Sean $f,g:(C,\delta)\to(C',\delta')$ dos morfismos de complejos de cocadenas. Una **homotopía** entre f y g es una colección de morfismos $h_n : C_n \to C'_{n-1}$ tales que $f_n - g_n = \delta'_{n-1}\circ h_n + h_{n+1}\circ\delta_n$ y escribiremos $f \simeq g$. Un morfismo $f:(C,\delta)\to(C',\delta')$ es una **equivalencia homotópica** si existe un morfismo $g:(C',\delta')\to(C,\delta)$ tal que $f\circ g \simeq 1_{(C',\delta')}$ y $g\circ f \simeq 1_{(C,\delta)}$. Dos complejos de cocadenas son **homotópicamente equivalentes** si existe una equivalencia homotópica entre ellos.

Definición 1.1.15. Sea $\mathscr{C}$ una categoría abeliana, decimos que un objeto P en $\mathscr{C}$ es **proyectivo** si siempre que se tenga $q: M\to N$ un epimorfismo y $f: P\to N$, existe un morfismo $\overline{f}: P\to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "\overline{f}"'] \arrow[d, "f"] & \\
M \arrow[r, "q"'] & N \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Decimos que un objeto I en $\mathscr{C}$ es **inyectivo** si siempre que se tenga $i: M\to N$ un monomorfismo y $g: M\to I$, existe un morfismo $\overline{g}: N\to I$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, "\overline{g}"] \\
 & I &
\end{tikzcd}$$

Definición 1.1.16. Sea A un objeto en una categoría abeliana $\mathscr{C}$, una **resolución proyectiva** de A es una sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

donde cada P_i es un objeto proyectivo. Análogamente definimos una **resolución inyectiva** de A como una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \cdots$$

donde cada I_i es un objeto inyectivo. Diremos que una categoría abeliana $\mathscr{C}$ tiene suficientes proyectivos (inyectivos) si todo objeto en $\mathscr{C}$ admite una resolución proyectiva (inyectiva respectivamente).

Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías abelianas tal que $\mathscr{C}$ tiene suficientes inyectivos y $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor exacto izquierdo, definimos el k-ésimo **funtor derivado** de F por la derecha evaluando en $A \in \mathscr{C}$ como:

$$R^k F(A) = H^k(F(I)) \in \mathscr{D},$$

donde $A \to I$ es una resolución inyectiva en $\mathscr{C}$. Análogamente, supongamos que $\mathscr{C}$ tiene suficientes proyectivos y sea $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor exacto derecho, definimos el k-ésimo funtor derivado de F por la izquierda evaluado en $A \in \mathscr{C}$ como:

$$L_k F(A) = H_k(F(P)) \in \mathscr{D},$$

donde $P \to A$ es una resolución proyectiva en $\mathscr{C}$. Es bien sabido que estas asignaciones no dependen de la elección de las resoluciones inyectivas y proyectivas respectivamente.

Si M es un R-módulo derecho y A, B, N son R-módulos izquierdos y consideramos los funtores particulares $- \otimes_R N$ y $Hom_R(A, -)$ entonces sus funtores derivados reciben un nombre particular:

$$Ext^k_R(A,B) = R^k(Hom_R(A,-))(B),$$

$$Tor^R_k(M,N) = L_k(- \otimes_R N)(M).$$

Nota 1.1.2. De la misma manera que en ([Bro82], cap. 3, 2), se puede ver que estos funtores se pueden calcular de la siguiente manera: Si $F \to M$ es una resolución proyectiva de R-módulos derechos y $P \to N$ es una resolución proyectiva de R-módulos izquierdos, entonces

$$Tor^R_*(M,N) = H_*(F \otimes_R N) = H_*(F \otimes_R P) = H_*(M \otimes_R P).$$

Similarmente, si $F \to M$ es una resolución proyectiva de R-módulos izquierdos y $N \to Q$ es una resolución inyectiva de R-módulos izquierdos, entonces

$$Ext^*_R(M,N) = H^*(Hom_R(M,Q)) = H^*(Hom_R(F,Q)) = H^*(Hom_R(F,N)).$$

Cabe mencionar que cuando el anillo R es el anillo de los enteros $\mathbb{Z}$, simplemente escribiremos $A \otimes B = A \otimes_{\mathbb{Z}} B$.

Para un estudio más detallado de los funtores derivados y en general de álgebra homológica se pueden ver [HS71] y [Wei94].

1.2. Homología y cohomología de un grupo discreto

Sea G un grupo discreto. El anillo de grupo entero $\mathbb{Z}[G]$ se define como el grupo libre abeliano generado por G, es decir, el conjunto de sumas formales finitas $\mathbb{Z}[G] = \{\sum_{g \in G} n_g g\}$ con el siguiente producto: Si

$a = \sum_{g\in G} n_g g$ y $b = \sum_{g\in G} m_g g$, entonces $ab = \sum_{g\in G} h_g g$ con $h_g = \sum_{k\in G} n_k m_{k^{-1}g}$.

Un G-módulo izquierdo o simplemente G-módulo, es un grupo abeliano M junto con una acción

$$\varphi : G \to Aut(M).$$

Análogamente, un G módulo derecho es un grupo abeliano M junto con una acción

$$\varphi : G^{op} \to Aut(M),$$

donde G^{op} es el grupo cuyo conjunto subyacente es G y cuya operación de grupo está dada por: $g_1 \cdot g_2 = g_2 g_1$. En ambos casos escribiremos abusando de la notación:

$$gx = \varphi(g)(x),$$

para cada $g \in G$ y $x \in M$.

Cada G-módulo izquierdo M admite una estructura de G-módulo derecho de la siguiente manera: $x \cdot g = g^{-1}x$. Análogamente, cada G-módulo derecho N admite una estructura de G-módulo izquierdo.

Un morfismo entre G-modulos es un morfismo de grupos abelianos $f : M \to N$ tal que $f(gx) = gf(x)$ para cada $g \in G$ y $x \in M$. Denotaremos por G-$\mathscr{M}od$ a la categoría de G-módulos. Sean M y N dos G-módulos, denotaremos por $Hom_G(M,N)$ al conjunto de morfismos en esta categoría.

Sea R un anillo. La siguiente función:

$$f : Hom_{Ring}(\mathbb{Z}[G], R) \to Hom_{Grp}(G, R^*)$$

$$f(\psi) = \psi\mid_G,$$

es una biyección. Si $R = End(M)$ es el anillo de endomorfismos de un grupo abeliano M, entonces obtenemos la biyección

$$Hom_{Ring}(\mathbb{Z}[G], End(M)) \cong Hom_{Grp}(G, Aut(M)),$$

de esta manera, podemos hablar indistintamente de G-módulos y módulos sobre el anillo $\mathbb{Z}[G]$. Debido a esta correspondencia entre G-módulos y $\mathbb{Z}[G]$-módulos, escribiremos $F \otimes_G M$ en vez de $F \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M$ y $Hom_G(F,M)$ en vez de $Hom_{\mathbb{Z}[G]}(F,M)$.

A partir de ahora consideraremos a $\mathbb{Z}$ como un G-módulo con acción trivial a menos que se indique lo contrario.

Definición 1.2.1. Sea G un grupo y M un G-módulo. Definimos la **homología** y **cohomología** de G como los funtores derivados de $\mathbb{Z} \otimes_G -$ y $Hom_G(\mathbb{Z}, -)$. En otras palabras, si $P \to \mathbb{Z}$ es una resolución proyectiva de G-módulos,

$$H_n(G,M) = H_n(F \otimes_G M),$$

$$H^n(G,M) = H^n(Hom_G(F,M)).$$

Una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[G]$ que estaremos utilizando es la resolución barra que describimos a continuación: Consideremos $B_n(G)$ como el $\mathbb{Z}$-módulo libre generado por los elementos $(g_0, \ldots, g_n)$ con $g_i \in G$. Entonces $B_n(G)$ tiene estructura de G-módulo con la acción

$$g(g_0, \ldots, g_n) = (gg_0, \ldots, gg_n).$$

Definimos el morfismo de aumentación:

$$\varepsilon : B_0(G) = \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$$

$$g \mapsto 1$$

y definimos los diferenciales para $n \geq 1$:

$$d_n : B_n(G) \to B_{n-1}(G)$$

$$d_n(g_0, \ldots, g_n) = \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i (g_0, \ldots, \hat{g}_i, \ldots, g_n),$$

donde $\hat{g}_i$ indica que se ha omitido el elemento g_i. Como la acción de G sobre el conjunto de elementos de la forma $(g_0, \ldots, g_n)$ es libre, $B_n(G)$ es un $\mathbb{Z}[G]$-módulo libre. Por otra parte, los diferenciales son morfismos de $\mathbb{Z}[G]$-módulos porque son morfismos de grupos abelianos que son G-equivariantes. Por otra parte, la sucesión

$$\cdots \to B_2(G) \to B_1(G) \to B_0(G) \to \mathbb{Z} \to 0$$

es exacta ([Bro82], pág. 18). De esta manera obtenemos una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[G]$: Una base para $B_n(G)$ es el conjunto de elementos de la forma $(1, g'_1, \ldots, g'_n) = (1, g_1, g_1g_2, \ldots, g_1g_2 \cdots g_n)$ a los cuales denotaremos por :

$$[g_1 \mid \cdots \mid g_n] = (1, g_1, g_1g_2, \ldots, g_1g_2 \cdots g_n).$$

Consideramos el submódulo $B'_n(G) \subseteq B_n(G)$ generado por los elementos $[g_1 \mid \cdots \mid g_n]$ tal que $g_i = 1$ para algún i. Es fácil ver que $d(B'_n(G)) \subseteq B'_{n-1}(G)$ así que podemos restringir estos diferenciales a los cocientes $d_n^N : B_n(G)/B'_n(G) \to B_{n-1}(G)/B'_{n-1}(G)$, $d^N(\overline{[g_1 \mid \cdots \mid g_n]}) = \overline{d([g_1 \mid \cdots \mid g_n])}$. Llamaremos a $B(G)$ la resolución barra y denotaremos por $B_n^N(G)$ a la resolución barra normalizada:

$$B_n^N G = B_n(G)/B'_n(G) = \mathbb{Z}[G]\{[g_1 \mid \cdots \mid g_n] \mid 1 \neq g_i \in G\}.$$

En términos de esta base el diferencial queda definido como:

$$d^N([g_1 \mid \cdots \mid g_n]) = g_1[g_2 \mid \cdots \mid g_n] + \sum_{1 \leq i \leq n-1} (-1)^i [g_1 \mid \cdots \mid g_i g_{i+1} \mid \cdots \mid g_n] + (-1)^n [g_1 \mid \cdots \mid g_{n-1}]$$

ignorando los sumandos que contienen un 1. En ocasiones abusaremos de la notación y no haremos distinción entre d y d^N. Tanto $B(G)$ como $B^N(G)$ son resoluciones proyectivas de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[G]$, por lo tanto, son homotópicamente equivalentes (ver [Wei94] Teorema 2.2.6). Definimos el complejo barra $C(G)$ como el producto tensorial $C(G) = B(G) \otimes_G \mathbb{Z}$, es decir, $C_n(G)$ es el $\mathbb{Z}$-módulo libre generado por los elementos $[g_1 \mid \cdots \mid g_n]$ y el diferencial en $C(G)$ está inducido por el diferencial de la resolución barra.

Es bien sabido que los grupos de cohomología $H^*(G,M)$ en bajas dimensiones admiten interpretaciones algebraicas (ver por ejemplo: [Bro82], capítulo IV):

- El grupo $H^0(G,M)$ es el módulo de puntos fijos de M, $H^0(G,M) = M^G$.
- $H^1(G,M)$ está dado en términos de derivaciones. $H^1(G,M) = Der(G,M)/IDer(G,M)$ donde $Der(G,M) = \{d : G \to M \mid d(g_1 g_2) = g_1 d(g_2) + d(g_1)\}$ y $IDer(G,M) = \{d_x : G \to M \mid x \in M\}$ donde $d_x(g) = (g-1)x$.
- $H^2(G,M)$ clasifica extensiones de la forma: $0 \to M \to E \to G \to 1$ que inducen la misma acción de G sobre M.

En el capítulo 3 generalizaremos estas interpretaciones.

1.3. Sucesiones espectrales

En esta sección daremos algunas herramientas para hacer cálculos más adelante y aunque todo lo que presentamos en esta sección es válido en categorías abelianas que satisfacen las hipótesis adecuadas, sólo hablaremos de sucesiones espectrales en categorías de módulos.

Definición 1.3.1. Una **sucesión espectral** cohomológica consta de lo siguiente:

- Sea $a \in \mathbb{N}$. Una familia $(E_r, d_r)_{r \geq a}$ de R-módulos $\mathbb{Z}$-bigraduados $E_r^{p,q}$ tal que cada E_r está equipado con un diferencial $d_r : E_r \to E_r$ de grado $(r, -r+1)$ tal que $d_r^2 = 0$.
- Se tienen isomorfismos $H^{p,q}(E_r, d_r) \cong E_{r+1}^{p,q}$.

El objeto (E_r, d_r) es llamado r-ésima página de E. El grado total de $E_r^{p,q}$ es $n = p+q$. En este caso los diferenciales $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ son de grado total 1.

Sea E una sucesión espectral con página inicial (E_a, d_a). Definimos los submódulos bigraduados Z_a y B_a de E_a como $Z_a^{p,q} = ker(d_a^{p,q})$ y $B_a^{p,q} = Im(d_a^{p-a,q+a-1})$, de esta manera, $E_{a+1} \cong Z_a/B_a$. Definimos Z_{a+1} y B_{a+1} como los submódulos de E_a tales que $ker(d_{a+1}) = Z_{a+1}/B_a$ y $Im(d_{a+1}) = B_{a+1}/B_a$, entonces

$$0 \subseteq B_a \subseteq B_{a+1} \subseteq Z_{a+1} \subseteq Z_a \subseteq E_a$$

y $E_{a+2} \cong Z_{a+1}/B_{a+1}$. De la misma manera definimos para cada $r \in \mathbb{N}$, B_r y Z_r tal que

$$0 \subseteq B_a \subseteq B_{a+1} \subseteq \cdots \subseteq B_r \subseteq \cdots \subseteq Z_r \subseteq \cdots \subseteq Z_{a+1} \subseteq Z_a \subseteq E_a$$

y $E_{r+1} \cong Z_r/B_r$. Definimos los módulos bigraduados Z_∞ y B_∞ como:

$$Z_\infty = \bigcap_{r \geq a} Z_r, \qquad B_\infty = \bigcup_{r \geq a} B_r,$$

entonces $B_\infty \subseteq Z_\infty$ y definimos

$$E_\infty = Z_\infty / B_\infty.$$

Sean (E, d) y (D, δ) sucesiones espectrales con páginas iniciales E_a y D_a respectivamente. Un morfismo de sucesiones espectrales $f : E \to D$ es una familia de morfismos $f_r : D_r \to E_r$, $r \geq a$ de R-módulos bigraduados, es decir, tales que $f_r \circ d_r = \delta_r \circ f_r$ y además, f_{r+1} es el morfismo inducido por f_r en cohomología. Esta definición es equivalente a tener un morfismo $f : E_a \to D_a$ de módulos bigraduados tal que $f(Z(E)_r) \subseteq Z(D)_r$ y $f(B(E)_r) \subseteq B(D)_r$ y tal que todos los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
Z(E)_{r-1}/B(E)_{r-1} \arrow[r, "d_r"] \arrow[d, "f_r"'] & Z(E)_{r-1}/B(E)_{r-1} \arrow[d, "f_r"] \\
Z(D)_{r-1}/B(D)_{r-1} \arrow[r, "\delta_r"'] & Z(D)_{r-1}/B(D)_{r-1}
\end{tikzcd}$$

sean conmutativos. De esta manera, $f : E \to D$ induce un morfismo $f_\infty : E_\infty \to D_\infty$.

Sea M un R-módulo. Una filtración de M es una familia de submódulos de M, tales que:

$$\cdots \subseteq F_{p+1}M \subseteq F_pM \subseteq F_{p-1}M \subseteq \cdots$$

Decimos que una filtración es finita si existen $s < t$ tal que $F_sM = 0$ y $F_tM = M$. Una filtración induce un módulo graduado GrM, dado por $Gr_pM = F_pM/F_{p+1}M$. Si el módulo M es un módulo graduado, una filtración de M es una filtración $\{F_pM_n\}_{p\in\mathbb{Z}}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. De esta manera, una filtración de un módulo graduado M induce un módulo bigraduado $Gr_{p,q}M$ dado por,

$$Gr_{p,q}M = Gr_pM_{p+q} = F_pM_{p+q}/F_{p+1}M_{p+q}.$$

Una filtración de un módulo graduado M es finita si para cada $n \in \mathbb{Z}$, la filtración $\{F_pM_n\}$ es finita.

Definición 1.3.2. Una sucesion espectral (E_r, d_r) converge a un módulo graduado H si existe una filtración finita F de H tal que $E_\infty^{p,q} \cong Gr_{p,q}H = F_pH^{p+q}/F_{p+1}H^{p+q}$. Esto será denotado por $E \Rightarrow H$.

Teorema 1.3.1 ([Mac63], Teorema 3.1)**.** *Una filtración F de un complejo de cocadenas C induce una sucesión espectral (E,d) tal que*

$$E_0^{p,q} \cong Gr_{p,q}C = F_pC^{p+q}/F_{p+1}C^{p+q} \quad y \quad E_1^{p,q} \cong H^q(Gr_{p,*}C).$$

Si la filtración F es finita, entonces $E \Rightarrow H^*(C)$.

Definición 1.3.3. Una sucesión espectral (E,d) colapsa en E_r cuando $d_k = 0$ para $k \geq r$. En este caso,

$$E_r = E_{r+1} = \cdots = E_\infty.$$

Un bicomplejo de cocadenas es un módulo bigraduado K con dos diferenciales, uno horizontal d' y otro vertical d'' tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
K^{p,q+1} \arrow[r, "d'"] & K^{p+1,q+1} \\
K^{p,q} \arrow[u, "d''"] \arrow[r, "d'"'] & K^{p+1,q}. \arrow[u, "d''"']
\end{tikzcd}$$

Cada bicomplejo K induce un complejo de cocadenas TK al que llamaremos complejo total y está dado por:

$$TK^n = \prod_{p+q=n} K^{p,q},$$

con diferencial:

$$d : \prod_{p+q=n} K^{p,q} \to \prod_{k+l=n+1} K^{k,l},$$

$$d(x)_{k,l} = d''(x_{k,l-1}) + (-1)^{n+1}d'(x_{k-1,l}).$$

Definimos una primera filtración para el complejo de cocadenas TK dada por:

$${}^IF_p(TK)^n = \prod_{i \leq p} K^{i,n-i}.$$

Si el bicomplejo K es tal que para cada n sólo hay un número finito de módulos $K^{p,q}$ con $p+q=n$ distintos de cero (un bicomplejo que satisface esta condición lo llamaremos acotado), entonces la primera filtración ${}^IF(TK)$ es finita, y esta induce una sucesión espectral ${}^IE \Rightarrow H^*(TK)$. Esta sucesión espectral es de la forma: ${}^IE_0^{p,q} = K^{p,q}$ y ${}^IE_1^{p,q} = H^q(K^{p,*})$.

Definimos la segunda filtración como:

$$^{II}F_p(TK)^n = \prod_{j\leq p} K^{n-j,p}.$$

Nuevamente si el complejo K es acotado, entonces la segunda filtración $^{II}F(TK)$ es finita e induce una segunda sucesión espectral $^{II}E \Rightarrow H^*(TK)$. Esta sucesión espectral es de la forma: $^{II}E_0^{p,q} = K^{q,p}$ y $^{II}E_1^{p,q} = H^q(K^{*,p})$.

Vamos a definir ahora la cohomología de un grupo con coeficientes en un complejo de cocadenas:

Sea G un grupo, (F,d) una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[G]$ y (C,δ) un complejo de cocadenas no negativo de G-módulos. Definimos el complejo de cocadenas $Hom_G(F,C)$ como:

$$Hom_G(F,C)^n = \prod_{p+q=n} Hom_G(F_p,C^q)$$

con diferencial $D(f) = \delta\circ f + (-1)^{n+1} f\circ d$, es decir, $Hom_G(F,C)$ es el complejo total inducido por el bicomplejo de cocadenas $K^{p,q} = Hom_G(F_p,C^q)$ con diferencial horizontal $d'(f) = f\circ d$ y diferencial vertical $d''(f) = \delta\circ f$.

Definición 1.3.4. Sea G un grupo y C un complejo de cocadenas no negativo de G-módulos. La cohomología de G con coeficientes en C se define como:

$$H^n(G,C) = H^n(Hom_G(F,C)),$$

donde F es una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[G]$.

De manera similar se define la homología de G con coeficientes en un complejo de cadenas. Por el momento sólo hablaremos de la cohomología.

Ya que C es un complejo de cocadenas no negativo, el bicomplejo $K^{p,q} = Hom_G(F_p,C^q)$ es acotado y de esta manera existen dos sucesiones espectrales que convergen a la cohomología del complejo total asociado que en este caso, es la cohomología $H^*(G,C)$. Con la primera filtración obtenemos $^{I}E_0^{p,q} = Hom_G(F_p,C^q)$, $^{I}E_1^{p,q} = H^q(Hom_G(F_p,C^*)) = Hom_G(F_p,H^q(C))$ ya que el G-módulo F_p es proyectivo. Por último, $^{I}E_2^{p,q} = H^p(G,H^q(C))$ ya que F es una resolución proyectiva de G. Con la segunda filtración obtenemos $^{II}E_0^{p,q} = Hom_G(F_q,C^p)$ y $^{II}E_1^{p,q} = H^q(G,C^p)$. En resumen, tenemos:

$$^{I}E_2^{p,q} = H^p(G,H^q(C)) \Rightarrow H^{p+q}(G,C),$$

$$^{II}E_1^{p,q} = H^q(G,C^p) \Rightarrow H^{p+q}(G,C).$$

Terminaremos esta sección con un teorema que utilizaremos más adelante para hacer algunos cálculos. Dado un complejo (C,δ) de G-módulos, denotaremos por C^G al complejo de puntos fijos, es decir, $(C^G)_n = C_n^G$ y cuyos diferenciales son las restricciones a los puntos fijos.

Teorema 1.3.2. *Sea G un grupo y C un complejo de cocadenas no negativo de G-módulos tal que cada C^n es H^*-acíclico, es decir, $H^k(G,C^n) = 0$ para $k > 0$. Entonces existe una sucesión espectral de la forma:*

$$E_2^{p,q} = H^p(G,H^q(C)) \Rightarrow H^{p+q}(C^G).$$

Demostración: De la sucesión espectral inducida por la segunda filtración, obtenemos:

$$^{II}E_1^{p,q} = H^q(G,C^p) = \begin{cases} 0, & q \neq 0, \\ & \\ (C^p)^G, & q = 0, \end{cases}$$

así que:

$$^{II}E_2^{p,q} = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & q \neq 0 \\ & \\ H^p(C^G), & q = 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow H^{p+q}(G,C).$$

de esta forma la segunda sucesión espectral colapsa en $^{II}E_2$ por lo tanto, $H^*(G,M) \cong H^*(C^G)$. Por otro lado, la sucesión espectral inducida por la primera filtración es de la forma $^{I}E_2^{p,q} = H^p(G,H^q(C))$ y converge a $H^{p+q}(G,C) \cong H^{p+q}(C^G)$ y así obtenemos la sucesión espectral buscada:

$$E_2^{p,q} = H^p(G,H^q(C)) \Rightarrow H^{p+q}(C^G). \quad \square$$

Capítulo 2

Cohomología invariante

En este capítulo introducimos la categoría Q-G $\mathscr{M}od$ cuyos objetos serán los módulos de coeficientes para definir la cohomología invariante $HH_Q^*(G,M)$. Aquí veremos cual es la relación de este invariante con la cohomología clásica y la cohomología de cadenas invariantes de Knudson. También daremos una interpretación topológica cuando los coeficientes son triviales. Además, analizaremos cual es la relación con la cohomología clásica del producto semidirecto $H^*(G \rtimes Q, M)$ entre otros resultados.

2.1. Grupos de homología y cohomología de Knudson

En esta sección presentamos los grupos de homología y cohomología de cadenas invariantes definidos en [Knu06]. Knudson define estos invariantes con la finalidad de producir una herramienta para calcular la homología de ciertos espacios cociente BG/Q donde Q está actuando sobre G por automorfismos. Sin embargo esta homología de cadenas invariantes no siempre coincide con la homología de BG/Q y esta es una de la razones para buscar y estudiar otra generalización de la homología y cohomología de grupos.

Definición 2.1.1. Sean G y Q grupos donde Q está actuando sobre G mediante automorfismos, es decir, G está equipado con un morfismo de grupos:

$$\varphi : Q \to Aut(G)$$

y escribiremos $qg = \varphi(q)(g)$. En este caso diremos que G es un **Q-grupo**. Un **morfismo de Q-grupos** es un morfismo de grupos Q-equivariante.

Sea G un Q-grupo. Supongamos que A es un grupo abeliano donde G y Q actúan trivialmente. Entonces la acción de Q sobre G induce una acción de Q sobre $C(G) \otimes A$ por:

$$q([g_1 \mid \cdots \mid g_n] \otimes a) = [qg_1 \mid \cdots \mid qg_n] \otimes a.$$

Definición 2.1.2. Sea G un Q-grupo y A un grupo abeliano con acciones triviales de Q y G. La **homología y cohomología de cadenas invariantes** se define como:

$$H_*^Q(G,A) = H_*((C(G)\otimes A)^Q),$$

$$H_Q^*(G,A) = H^*(Hom(C(G)^Q,A)).$$

2.2. La categoría Q-$G\,\mathscr{M}od$

Definición 2.2.1. Un **grupoide** es una categoría $\mathscr{C}$ de tal manera que la colección de objetos $Ob(\mathscr{C})$ es un conjunto y cada morfismo es un isomorfismo.

Supongamos que G es un Q-grupo y M tiene estructura de G-módulo y Q-módulo. Podemos considerar a la acción de G sobre M como un grupoide llamado grupoide acción cuyo conjunto de objetos es igual a M y por cada elemento $(g,x)\in G\times M$, tenemos un morfismo $g : x\to gx$. Denotemos por $\mathscr{G}$ a este grupoide. De esta manera, una condición necesaria y suficiente para que las acciones de Q sobre G y Q sobre M induzcan una acción de Q sobre $\mathscr{G}$, es que

$$q : \mathscr{G}\to\mathscr{G},$$

$$x\mapsto qx,$$

$$(g : x\to gx)\mapsto (qg : qx\to q(gx)),$$

sea un funtor y esto es equivalente a pedir que $q(gx) = (qg)(qx)$ ya que de esta forma, $qg : qx\to q(gx)$ sería un morfismo en $\mathscr{G}$.

Después de analizar la acción de Q sobre la resolución barra del grupo G:

$$q(g[g_1\mid\cdots\mid g_n]) = q(g(1,g_1,g_1g_2,\ldots,g_1\cdots g_n)) =$$

$$= q(g,gg_1,gg_1g_2,\ldots,gg_1\cdots g_n)$$

$$= (qg,qgqg_1,qgqg_1qg_2,\ldots,qgqg_1\cdots qg_n)$$

$$= qg(1,qg_1,qg_1qg_2,\ldots,qg_1\cdots qg_n) = qg[qg_1\mid\cdots\mid qg_n],$$

podemos observar que Q está actuando sobre la acción de G sobre $B(G)$. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 2.2.2. Sea G un Q-grupo. Un Q-G módulo es un grupo abeliano M con estructuras de G-módulo y Q-módulo tal que las dos estructuras están relacionadas por

$$q(gx) = (qg)(qx),$$

para cada $q\in Q$, $g\in G$, $x\in M$. Un morfismo de Q-G módulos es un morfismo de grupos abelianos $f : M\to N$ tal que $f(gx) = gf(x)$ y $f(qx) = qf(x)$ para cada $q\in Q$, $g\in G$ y $x\in M$.

Ejemplo 2.2.1. Cualquier grupo abeliano A con acciones triviales de G y Q, es un Q-G módulo.

Ejemplo 2.2.2. $\mathbb{Z}_2 = \langle s \mid s^2 \rangle$ actúa sobre $\mathbb{Z}_n = \langle t \mid t^n \rangle$ por $s : t \mapsto t^{-1}$, entonces $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n]$ es un $\mathbb{Z}_2$-$\mathbb{Z}_n$ módulo. En general, si G es un Q-grupo, entonces $\mathbb{Z}[G]$ es un Q-G módulo.

Ejemplo 2.2.3. Sea G un Q-grupo. $\mathbb{Z}[G](Q)$ es el $\mathbb{Z}[G]$-módulo libre generado por Q donde la acción de Q está dada por: $q'\left(\sum x_q q\right) = \sum (q' x_q)(q' q)$ y la acción de G es diagonal. Con estas acciones, $\mathbb{Z}[G](Q)$ es un Q-G módulo.

Denotaremos por Q-G $\mathscr{M}od$ la categoría cuyos objetos son Q-G módulos y cuyos morfismos son los morfismos de Q-G módulos. $Hom_{Q\text{-}G}(A,B)$ denotará el conjunto de morfismos de A a B en esta categoría. Cabe mencionar que denotaremos por $G \rtimes Q$-$\mathscr{M}od$ a la categoría de módulos sobre el producto semidirecto $G \rtimes Q$.

Proposición 2.2.1. *La categoría Q-G $\mathscr{M}od$ es isomorfa a la categoría de módulos sobre $G \rtimes Q$.*

Demostración: Sea T el funtor

$$T : Q\text{-}G\mathscr{M}\text{od} \to G \rtimes Q\text{-}\mathscr{M}\text{od},$$

$$M \mapsto M',$$

$$f \mapsto f',$$

donde M' y f' están definidos como sigue: M' es igual a M como grupo abeliano y la acción de un elemento $(g,q) \in G \rtimes Q$ sobre $m \in M$ está dada por

$$(g,q)m = g(qm)$$

y $f'(m) = f(m)$. Sea L el funtor

$$L : G \rtimes Q\text{-}\mathscr{M}\text{od} \to Q\text{-}G\mathscr{M}\text{od},$$

$$M \mapsto \bar{M},$$

$$f \mapsto \bar{f},$$

donde $\bar{M}$ es definido como grupo abeliano igual a M. Las acciones de G y Q sobre $\bar{M}$ están inducidas por la acción de $G \rtimes Q$ sobre M al restringir esta acción a Q y a G. Es decir, un elemento $q \in Q$ actúa sobre $m \in M$ por la regla, $qm = (1,q)m$ y $g \in G$ actúa por $gm = (g,1)m$. Con estas acciones, $\bar{M}$ resulta ser un Q-G módulo. El morfismo $\bar{f}$ está definido por $\bar{f}(m) = f(m)$ para todo $m \in M$. Es fácil ver que T define un isomorfismo de categorías con inversa L. $\square$

Este resultado nos dice que la categoría Q-G $\mathscr{M}od$ posee todas las bondades de una categoría de módulos sobre un anillo, sin embargo a lo largo de este trabajo hablaremos en el contexto de los Q-G módulos.

Consideremos una clase especial de Q-G módulos M que contienen un Q-conjunto libre B como subconjunto y que satisfacen la siguiente propiedad universal: sea E un conjunto de representantes de B/Q y dado cualquier Q-G módulo N y cualquier función $f : E \to N$ de conjuntos, existe un único morfismo $\widetilde{f} : M \to N$ de Q-G módulos tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & M \arrow[d, "\widetilde{f}"] \\ & N. \end{tikzcd}$$

Esto es equivalente a la siguiente definición donde T es el funtor de la Proposición 2.2.1:

Definición 2.2.3. Un Q-G módulo M es un Q-G módulo libre, si $T(M)$ es un $G \rtimes Q$-módulo libre.

La siguiente proposición es una caracterización de los Q-G módulos libres:

Proposición 2.2.2. *Un Q-G módulo M es libre si y sólo si M admite una $\mathbb{Z}[G]$-base donde Q actúa libremente.*

Demostración: Si M admite una $\mathbb{Z}[G]$-base donde Q actúa libremente, entonces $M \cong \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}[G]i$ tal que Q actúa libremente sobre I. Para cada $i \in I$, tenemos un $\mathbb{Z}[G \rtimes Q]$-isomorfismo:

$$\bigoplus_{q\in Q} \mathbb{Z}[G]qi \cong \mathbb{Z}[G \rtimes Q],$$

$$g(qi) \mapsto (g,q).$$

Si E es un conjunto de representantes de I/Q, entonces

$$M \cong \bigoplus_{j\in E} \left(\bigoplus_{q\in Q} \mathbb{Z}[G]qj \right) \cong \bigoplus_{j\in E} \mathbb{Z}[G \rtimes Q].$$

Inversamente, si M es un Q-G módulo libre, entonces $T(M) = M$ es un $\mathbb{Z}[G \rtimes Q]$-módulo libre, así

$$M \cong \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}[G \rtimes Q]i \cong \bigoplus_{(q,i)\in Q\times I} \mathbb{Z}[G](q,i)$$

y la acción de Q sobre $Q \times I$ dada por $q'(q,i) = (q'q,i)$ es libre. $\square$

La siguiente proposición se sigue inmediatamente del isomorfismo de categorías dado por la Proposición 2.2.1:

Proposición 2.2.3. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *P es un Q-G módulo proyectivo.*

2. *Cada sucesión exacta $0 \to M' \to M \to P \to 0$ de Q-G módulos se escinde.*

3. *P es sumando directo de un Q-G módulo libre.*

Proposición 2.2.4. *La categoría Q-G $\mathscr{M}od$ tiene suficientes proyectivos.*

Demostración: Sea M un Q-G módulo y sea $\widetilde{M}$ el $\mathbb{Z}[G]$-módulo libre generado por $M \times Q$. Definimos una acción de G sobre $\widetilde{M}$ por:

$$g\sum x_i(m_i,q_i) = \sum gx_i(m_i,q_i), \quad g \in G, x_i \in \mathbb{Z}[G], q_i \in Q, m_i \in M$$

y definimos una acción de Q sobre $\widetilde{M}$ por:

$$q\sum x_i(m_i,q_i) = \sum qx_i(m_i,qq_i), \quad q,q_i \in Q,\ x_i \in \mathbb{Z}G,\ m_i \in M.$$

De esta forma,

$$q(g\sum x_i(m_i,q_i)) = q(\sum gx_i(m_i,q_i)) = \sum[(qg)(qx_i)](m_i,qq_i) = qg(q\left(\sum x_i(m_i,q_i)\right)).$$

Por lo tanto, con estas acciones, $\widetilde{M}$ tiene estructura de Q-G módulo y la función $\pi : M \times Q \to M$, $(m,q) \mapsto (qm)$ induce un morfismo de Q-G módulos sobreyectivo $\widetilde{\pi} : \widetilde{M} \to M$. Ahora demostraremos que $\widetilde{M}$ es proyectivo. Para esto, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{M} \arrow[d, "\beta"] & \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Para cada $m \in M$ existe $a_m \in A$ tal que $\alpha(a_m) = \beta(m,1)$, de esta manera definimos $\varphi : \widetilde{M} \to A$ como $\varphi(m,q) = qa_m$ y extendemos por linealidad sobre $\mathbb{Z}[G]$ y así, el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{M} \arrow[d, "\beta"] \arrow[dl, "\varphi"'] & \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto, $\widetilde{M}$ es proyectivo en Q-G $\mathscr{M}od$. Es decir, demostramos que todo Q-G módulo es cociente de un Q-G módulo proyectivo y en una categoría abeliana esto es suficiente para construir una resolución proyectiva de M. $\square$

Con esto, podemos ver que el módulo $\widetilde{M}$ construido en la demostración de la proposición anterior, es libre por lo que todo Q-G módulo admite una resolución libre.

Dado un morfismo de Q-grupos $\alpha : G \to G'$ el funtor de restricción vía α, está definido como sigue:

$$Res_\alpha : Q\text{-}G' \mathscr{M}od \to Q\text{-}G \mathscr{M}od$$

$$M \mapsto Res_\alpha(M),$$

donde $Res_\alpha(M)$ como Q-módulo es el mismo M y la acción de G está dada por

$$g \cdot x = \alpha(g)x, \quad g \in G, \quad x \in M.$$

Con esta acción, $Res_\alpha(M)$ tiene estructura de Q-G módulo. Si $f : M \to N$ es un morfismo de Q-G' módulos, definimos $Res_\alpha(f) : Res_\alpha(M) \to Res_\alpha(N)$, $Res_\alpha(f)(x) = f(x)$. Se tiene que $f(g \cdot x) = f(\alpha(g)x) = \alpha(g)f(x) = g \cdot f(x)$, con esto, $Res_\alpha(f)$ es un morfismo de Q-G módulos.

Describimos a continuación dos funtores importantes. Definimos el funtor extensión:

$$ext_\alpha : Q\text{-}G \mathscr{M}od \to Q\text{-}G' \mathscr{M}od$$

$$ext_\alpha(M) = \mathbb{Z}[G'] \otimes_G M,$$

donde $\mathbb{Z}[G']$ es considerado como G-módulo derecho vía α, las acciones de G' y Q están dadas por

$$g'(g'' \otimes m) = g'g'' \otimes m, \quad q(g' \otimes m) = qg' \otimes qm,$$

donde $g', g'' \in G', q \in Q, x \in M$ y $ext_\alpha(f) = 1_{\mathbb{Z}[G']} \otimes f$. La aplicación natural

$$i : M \to \mathbb{Z}[G'] \otimes_G M$$

$$m \mapsto 1 \otimes m,$$

es de Q-G módulos donde $\mathbb{Z}[G'] \otimes_G M$ es considerado un Q-G módulo vía α. Entonces se satisface la siguiente propiedad universal:

Proposición 2.2.5. *Dado un Q-G' módulo N y una aplicación de Q-G módulos $f : M \to N$, existe un único morfismo de Q-G' módulos $\widetilde{f} : \mathbb{Z}[G'] \otimes_G M \to N$ tal que el siguiente diagrama conmuta :*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{Z}[G'] \otimes_G M \arrow[dl, "\widetilde{f}"] \\ N & \end{tikzcd}$$

Demostración: Para la existencia definimos $\widetilde{f}(g' \otimes m) = g' f(m)$, es fácil ver que está aplicación es de Q-G' módulos y hace que el diagrama conmute. Si $h : \mathbb{Z}[G'] \otimes_G M \to N$ es otra aplicación de Q-G' módulos que hace conmutativo el diagrama, entonces $h(g' \otimes m) = h(g'(1 \otimes m)) = g' h(1 \otimes m) = g' f(m) = \widetilde{f}(g' \otimes m)$. $\square$

De esta forma obtenemos una biyección:

$$Hom_{Q\text{-}G'}(ext_\alpha(M), N) \cong Hom_{Q\text{-}G}(M, Res_\alpha(N)).$$

Definimos ahora el funtor coextensión:

$$coext_\alpha : Q\text{-}G\mathscr{M}od \to Q\text{-}G'\mathscr{M}od$$

$$M \mapsto Hom_G(\mathbb{Z}[G'], M),$$

donde $\mathbb{Z}[G']$ es considerado Q-G módulo izquierdo vía α y las acciones de G' y Q están dadas por:

$$g' \cdot f(g'') = f(g''g'), \quad q \cdot f(g') = qf(q^{-1}g'),$$

donde $g', g'' \in G', q \in Q, f \in Hom_G(\mathbb{Z}[G'], M)$ y $coext_\alpha(f) = Hom_G(\mathbb{Z}[G'], f)$. La aplicación natural

$$\pi : Hom_G(\mathbb{Z}[G'], M) \to M$$

$$f \mapsto f(1),$$

es un morfismo de Q-G módulos donde $Hom_G(\mathbb{Z}[G'], M)$ está considerado un Q-G módulo vía α y se tiene la siguiente propiedad universal:

Proposición 2.2.6. *Dado un Q-G' módulo N y un morfismo de Q-G módulos $f : N \to M$, existe un único morfismo de Q-G' módulos $\widetilde{f} : N \to Hom_G(\mathbb{Z}[G'], M)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "\widetilde{f}"'] \arrow[d, "f"] \\ Hom_G(\mathbb{Z}[G'], M) \arrow[r, "\pi"'] & M. \end{tikzcd}$$

Demostración: Para la existencia, definimos $\widetilde{f}(n)(g') = f(g'n)$, esta asignación es de Q-G' módulos y hace el diagrama conmutativo. Si $h : N \to Hom_G(\mathbb{Z}[G'], M)$ es otra aplicación de Q-G' módulos que hace el diagrama conmutativo, entonces $h(n)(g') = g' \cdot h(n)(1) = h(g'n)(1) = f(g'n) = \widetilde{f}(n)(g')$ por lo tanto, $\widetilde{f} = h$. $\square$

Así obtenemos una biyección

$$Hom_{Q\text{-}G'}(N, coext_\alpha(M)) \cong Hom_{Q\text{-}G}(Res_\alpha(N), M).$$

Si H es un Q-subgrupo de G, es decir, H es un subgrupo de G y además es Q-invariante, entonces la inclusión natural $i : H \to G$ es un morfismo de Q-grupos. Si consideramos $\alpha = i : H \to G$, entonces los funtores extensión y coextensión definidos arriba reciben el nombre de inducción y coinducción respectivamente y se denotan por

$$Ind_H^G(M) = \mathbb{Z}[G] \otimes_H M,$$

$$Coind_H^G(M) = Hom_H(\mathbb{Z}[G], M).$$

Proposición 2.2.7. *Si M es un Q-H módulo proyectivo (inyectivo), entonces $Ind_H^G(M)$ ($Coind_H^G(M)$) es un Q-G módulo proyectivo (inyectivo).*

Demostración: Supongamos primero que M es un Q-H módulo libre, entonces $M \cong \bigoplus_{\gamma \in I} \mathbb{Z}[H]\gamma$ donde Q actúa libremente sobre I. De esta forma, $\mathbb{Z}[G] \otimes_H M \cong \bigoplus_\gamma (\mathbb{Z}[G] \otimes_H \mathbb{Z}[H]\gamma) \cong \bigoplus_\gamma \mathbb{Z}[G]\gamma$ y así, $Ind_H^G(M)$ es libre. Si M es Q-H proyectivo, entonces existe un Q-H módulo N tal que $M \oplus N$ es Q-H libre, así que $Ind_H^G(M \oplus N) = Ind_H^G(M) \oplus Ind_H^G(N)$ es libre y por lo tanto, $Ind_H^G(M)$ es Q-G proyectivo.

Supongamos ahora que M es un Q-H módulo inyectivo, entonces el funtor $Hom_{Q\text{-}H}(-, M)$ es exacto y por la propiedad universal del $Coind_H^G(M)$, el funtor $Hom_{Q\text{-}G}(-, Coind_H^G(M))$ también es exacto y por lo tanto, $Coind_H^G(M)$ es un Q-G módulo inyectivo. $\square$

Nota 2.2.1. Si M es un Q-G módulo libre entonces

$$M = \bigoplus_{\alpha \in I} \mathbb{Z}[G]\alpha,$$

donde Q actúa libremente sobre I. Entonces Q actúa libremente sobre $B = \{g\alpha \mid g \in G, \alpha \in I\}$ y M se puede expresar como el grupo libre abeliano generado por B,

$$M = \mathbb{Z}[B].$$

Así que M es un Q-módulo libre. En resumen,

- Si M es un Q-G módulo libre, entonces M es un G-módulo libre y también un Q-módulo libre.
- Si M es un Q-G módulo proyectivo, entonces M es un G-módulo proyectivo y también un Q-módulo proyectivo.

2.3. Homología y cohomología invariante de Q-grupos

Sea G un Q-grupo. Si M y N son Q-G módulos, definimos:

$$\varphi : Q \times Hom_G(M,N) \to Hom_G(M,N),$$

$$\varphi(q,f) = q \cdot f,$$
$$q \cdot f(x) = qf(q^{-1}x).$$

Esta función es una acción bien definida ya que:

$$q \cdot f(gx) = qf(q^{-1}(gx)) = qf((q^{-1}g)(q^{-1}x)) =$$

$$= q[(q^{-1}g)f(q^{-1}x)] = g(qf(q^{-1}x)) = g(q \cdot f(x))$$

y así, $q \cdot f \in Hom_G(M,N)$. Entonces $Hom_G(M,N)$ es un Q-módulo. De esta manera, $Hom_G(B(G),M)$ también tiene estructura de Q-módulo. Además el diferencial en $Hom_G(B(G),M)$, inducido por la resolución barra:

$$\delta : Hom_G(B_n(G),M) \to Hom_G(B_{n+1}(G),M)$$
$$\delta f([g_1 \mid \cdots \mid g_{n+1}]) = g_1 f([g_2 \mid \cdots \mid g_{n+1}]) + \sum_{1 \leq i < n+1} (-1)^i f([g_1 \mid \cdots \mid g_i g_{i+1} \mid \cdots \mid g_{n+1}])$$
$$+(-1)^{n+1} f([g_1 \mid \cdots \mid g_n])$$

satisface:

$$\delta(q \cdot f)([g_1 \mid \cdots \mid g_{n+1}]) = g_1(q \cdot f)([g_2 \mid \cdots \mid g_{n+1}]) + \sum_{1 \leq i < n+1} (-1)^i (q \cdot f)([g_1 \mid \cdots \mid g_i g_{i+1} \mid \cdots \mid g_{n+1}])$$

$$+(-1)^{n+1}(q \cdot f)([g_1 \mid \cdots \mid g_n]) = q(q^{-1}g_1 f([q^{-1}g_2 \mid \cdots \mid q^{-1}g_{n+1}]))+$$

$$+q\left(\sum_{1 \leq i < n+1} (-1)^i f([q^{-1}g_1 \mid \cdots \mid q^{-1}g_i q^{-1}g_{i+1} \mid \cdots \mid q^{-1}g_{n+1}])\right) + q((-1)^{n+1} f([q^{-1}g_1 \mid \cdots \mid q^{-1}g_n])) =$$

$$= q\delta f(q^{-1}[g_1 \mid \cdots \mid g_{n+1}]) = q \cdot \delta f([g_1 \mid \cdots \mid g_{n+1}]).$$

Es decir, $\delta : Hom_G(B_n(G),M) \to Hom_G(B_{n+1}(G),M)$ es Q-lineal.

Por otra parte, si M y N son Q-G módulos, podemos considerar a M como G-módulo derecho con la acción $x \cdot g = g^{-1}x$, de esta forma $M \otimes_G N = (M \otimes N)_G$, es decir, $M \otimes_G N$ es el grupo de coinvariantes de $M \otimes N$ bajo la acción diagonal. Por lo tanto, la función

$$\psi : Q \times M \otimes_G N \to M \otimes_G N, \quad (q, x \otimes y) \mapsto qx \otimes qy,$$

es una acción bien definida ya que si $g \in G$, tenemos

$$q(gx \otimes gy) = (qg)(qx) \otimes (qg)(qy) = qx \otimes qy.$$

Así que $M \otimes_G N$ es un Q-módulo. De esta manera, $B(G) \otimes_G M$ también tiene estructura de Q-módulo y el diferencial:

$$\partial : B_n \otimes_G M \to B_{n-1} \otimes_G M$$

$$\begin{aligned}\partial([g_1 \mid \cdots \mid g_n] \otimes x) = g_1[g_2 \mid \cdots \mid g_n] \otimes x + &\sum_{1 \leq i \leq n-1} [g_1 \mid \cdots \mid g_i g_{i+1} \mid \cdots \mid g_n] \otimes x \\ &+ (-1)^n [g_1 \mid \cdots \mid g_{n-1}] \otimes x\end{aligned}$$

es claramente Q-lineal. Así podemos restringir estos diferenciales a los grupos de puntos fijos:

$$\delta : Hom_G(B_n(G), M)^Q \to Hom_G(B_{n+1}(G), M)^Q$$

$$\partial : (B_n \otimes_G M)^Q \to (B_{n-1} \otimes_G M)^Q.$$

De esta forma, podemos definir la homología y cohomología invariante:

Definición 2.3.1. Sea G un Q-grupo y M un Q-G módulo. Definimos la **homología** y **cohomología invariante** del Q-grupo G con coeficientes en M como:

$$HH_*^Q(G, M) = H_*((B(G) \otimes_G M)^Q, \partial),$$

$$HH_Q^*(G, M) = H^*(Hom_G(B(G), M)^Q, \delta).$$

Nota 2.3.1. Es claro que esta homología y cohomología generalizan la homología y cohomología de grupos usual ya que si Q actúa trivialmente sobre G y sobre M, entonces

$$(B(G) \otimes_G M)^Q = B(G) \otimes_G M \ \text{ y } \ Hom_G(B(G), M)^Q = Hom_G(B(G), M).$$

También podemos notar fácilmente que si A es un Q-G módulo trivial, entonces $B(G) \otimes_G A \cong C(G) \otimes A$ y así $HH_*^Q(G, A) \cong H_*^Q(G, A)$ de esta manera, $HH_*^Q(G, M)$ también es una generalización de los grupos de homología de cadenas invariantes de Knudson.

Definición 2.3.2. Un elemento $n \in \mathbb{Z}$ es **invertible** en un grupo abeliano A, si la función:

$$n : A \to A$$

$$a \mapsto na,$$

es un isomorfismo.

Lema 2.3.1. *Si $n \in \mathbb{Z}$ es invertible en un G-módulo A, entonces n es invertible en los grupos abelianos $B_k(G) \otimes_G A$ y en $Hom_G(B_k(G), A)$ para cada $k \in \mathbb{Z}$.*

Demostración: La multiplicación por n en $B(G) \otimes_G A$ es igual a la función $1_{B(G)} \otimes n$ cuya inversa es $1_{B(G)} \otimes \frac{1}{n}$ y la multiplicación por n en $Hom_G(B(G), A)$ está dada por la composición $n \circ f$ que es un isomorfismo ya que la multiplicación por n en A lo es. $\square$

La siguiente proposición da una relación entre la homología y cohomología invariante y la homología y cohomología usual cuando $|Q|$ es invertible en M. Knudson en [Knu06] demuestra el resultado de una manera diferente sólo para homología, es decir, $H_*^Q(G, A) \cong H_*(G, A)^Q$.

Proposición 2.3.1. *Si $|Q|$ es invertible en M, entonces $HH_n^Q(G, M) \cong H_n(G, M)^Q$ y $HH_Q^n(G, M) \cong H^n(G, M)^Q$.*

Demostración: La acción de Q en $B(G) \otimes_G M$ induce una acción bien definida:

$$Q \times H_n(G, M) \to H_n(G, M)$$
$$(q, \overline{[g_1 \mid \cdots \mid g_n] \otimes x}) \mapsto \overline{[qg_1 \mid \cdots \mid qg_n] \otimes qx}$$

ya que si $z = \partial([g_1 \mid \cdots \mid g_{n+1}] \otimes x')$ entonces

$$(q, \bar{z}) \mapsto \overline{q\partial([g_1 \mid \cdots \mid g_{n+1}] \otimes x')} = \overline{\partial(q([g_1 \mid \cdots \mid g_{n+1}] \otimes x'))} = 0$$

y ya que $|Q|$ es invertible en M, también es invertible en $B_n(G) \otimes_G M$ así definimos:

$$\alpha : H_n(G, M)^Q \to HH_n^Q(G, M)$$
$$\bar{z} \to \frac{1}{|Q|} \overline{\sum_{q \in Q} qz},$$

el cual es un isomorfismo cuya inversa es el morfismo $i_* : HH_n^Q(G, M) \to H_n(G, M)^Q$ inducido por la inclusión natural $i : (B_n(G) \otimes_G M)^Q \to B_n(G) \otimes_G M$. La acción de Q sobre $Hom_G(B(G), M)$ induce una acción bien definida en $H^n(G, M)$:

$$Q \times H^n(G, M) \to H^n(G, M)$$
$$(q, \overline{f}) \mapsto \overline{q \cdot f}$$

ya que si $f = \delta(h)$, entonces $\overline{q \cdot \delta(h)} = \overline{\delta(q \cdot h)} = 0$ y como $|Q|$ es invertible en M, podemos definir

$$\varphi : H^n(G, M)^Q \to HH_Q^n(G, M)$$
$$\overline{f} \mapsto \overline{\frac{1}{|Q|} \sum_{q \in Q} q \cdot f}$$

el cual resulta ser un isomorfismo cuya inversa es el morfismo $j^* : HH_Q^n(G, M) \to H^n(G, M)^Q$ inducido por la inclusión natural: $j : Hom_G(B_n(G), M)^Q \to Hom_G(B_n(G), M)$. $\square$

La siguiente proposición brinda bajo ciertas hipótesis un isomorfismo entre $HH^n_Q(G,M)$ y los grupos de cohomología de Knudson pero antes vamos a demostrar un lema.

Lema 2.3.2. *Si M es un Q-G módulo trivial, entonces $HH^n_Q(G,M) \cong H^n(Hom_G(C(G),M)^Q)$.*

Demostración: Definimos $\varphi : Hom(C_n(G),M) \to Hom_G(B_n(G),M)$ por
$\varphi(f)([g_1 \mid \cdots \mid g_n]) = f([g_1 \mid \cdots \mid g_n] \otimes 1)$. Esta asignación es un isomorfismo equivariante con inversa $\psi : Hom_G(B_n(G),M) \to Hom(C_n(G),M)$ dada por $\psi(f)([g_1 \mid \cdots \mid g_n] \otimes n) = nf([g_1 \mid \cdots \mid g_n])$.

Por otra parte,

$$\delta(\varphi(f))([g_1 \mid \cdots \mid g_{n+1}]) = \varphi(f)([g_2 \mid \cdots \mid g_{n+1}]) +$$
$$+ \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^i \varphi(f)([g_1 \mid \cdots \mid g_i g_{i+1} \mid \cdots \mid g_{n+1}]) + (-1)^{n+1} \varphi(f)([g_1 \mid \cdots \mid g_n]) =$$
$$= f([g_2 \mid \cdots \mid g_{n+1}] \otimes 1) + \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^i f([g_1 \mid \cdots \mid g_i g_{i+1} \mid \cdots \mid g_{n+1}] \otimes 1) +$$
$$+(-1)^{n+1} f([g_1 \mid \cdots \mid g_n] \otimes 1) = d(f)([g_1 \mid \cdots \mid g_{n+1}] \otimes 1) = \varphi(d(f))([g_1 \mid \cdots \mid g_{n+1}]).$$

Por lo tanto, el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Hom(C_n(G),M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\varphi"'] & Hom(C_{n+1}(G),M) \arrow[d, "\varphi"] \\
Hom_G(B_n(G),M) \arrow[r, "\delta"'] & Hom_G(B_{n+1}(G),M)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo y Q-equivariante y de esta manera, induce un diagrama conmutativo a nivel de puntos fijos:

$$\begin{tikzcd}
Hom(C_n(G),M)^Q \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\varphi"', "\cong"] & Hom(C_{n+1}(G),M)^Q \arrow[d, "\varphi", "\cong"'] \\
Hom_G(B_n(G),M)^Q \arrow[r, "\delta"'] & Hom_G(B_{n+1}(G),M)^Q.
\end{tikzcd}$$ □

Proposición 2.3.2. *Si Q es finito y M es un Q-G módulo trivial tal que $|Q|$ es invertible en M, entonces $HH^n_Q(G,M) \cong H^n_Q(G,M)$.*

Demostración: Definimos

$$\alpha : Hom(C_n(G)^Q,M) \to Hom(C_n(G),M)^Q,$$

$$\alpha(f)([g_1 \mid \cdots \mid g_n] \otimes n) = \frac{1}{|Q|} f\left(\sum_{q \in Q} q[g_1 \mid \cdots \mid g_n] \otimes n\right),$$

$$\beta : Hom(C_n(G),M)^Q \to Hom(C_n(G)^Q,M),$$
$$\beta(f) = f\mid_{C_n(G)^Q}.$$

Supongamos que $f \in Hom(C_n(G)^Q,M)$ y $x \in C_n(G)^Q$, entonces

$$\beta(\alpha(f))(x) = \alpha(f)\mid_{C_n(G)^Q}(x) = \alpha(f)(x) = \frac{1}{|Q|} f\left(\sum_{q\in Q} qx\right) = \frac{1}{|Q|}(|Q|f(x)) = f(x).$$

Ahora supongamos que $f \in Hom(C_n(G),M)^Q$ y $x \in C_n(G)$, entonces

$$\alpha(\beta(f))(x) = \frac{1}{|Q|} f\mid_{C_n(G)^Q}\left(\sum_{q\in Q} qx\right) = \frac{1}{|Q|} f\left(\sum_{q\in Q} qx\right) = \frac{1}{|Q|}(|Q|f(x)) = f(x)$$

y así α es un isomorfismo.

Por otra parte,

$$\alpha(\delta(f))([g_1 \mid \cdots \mid g_{n+1}] \otimes n) = \frac{1}{|Q|}\delta f\left(\sum_{q\in Q} q[g_1 \mid \cdots \mid g_{n+1}] \otimes n\right)$$

$$= \frac{1}{|Q|} f\left(\sum_{q\in Q}([qg_2 \mid \cdots \mid qg_n] \otimes n + \sum_{1\le i<n+1}(-1)^i[qg_1 \mid \cdots \mid (qg_i)(qg_{i+1}) \mid \cdots \mid qg_{n+1}] \otimes n \right.$$
$$\left. +(-1)^{n+1}[qg_1 \mid \cdots \mid qg_n] \otimes n) \right)$$
$$= \alpha(f)([g_2 \mid \cdots \mid g_{n+1}] \otimes n) + \sum_{i\le n}(-1)^i \alpha(f)([g_1 \mid \cdots \mid g_i g_{i+1} \mid \cdots \mid g_{n+1}] \otimes n)$$
$$+(-1)^{n+1}\alpha(f)([g_1 \mid \cdots \mid g_n] \otimes n) = d(\alpha(f))([g_1 \mid \cdots \mid g_{n+1}] \otimes n).$$

Por lo tanto el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Hom(C_n(G)^Q,M) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\alpha"'] & Hom(C_{n+1}(G)^Q,M) \arrow[d, "\alpha"] \\
Hom(C_n(G),M)^Q \arrow[r, "d"'] & Hom(C_{n+1}(G),M)^Q
\end{tikzcd}$$

y así obtenemos el isomorfismo $H^n_Q(G,M) \cong H^n(Hom_G(C(G),M)^Q)$ y por el lema anterior, obtenemos el isomorfismo deseado:

$$HH^n_Q(G,M) \cong H^n_Q(G,M). \qquad \square$$

2.4. Una interpretación topológica para $HH^*_Q(G,M)$

En [Knu06], Knudson demuestra que si $Q=\mathbb{Z}_p$ con p un número primo y $G^Q=\{1\}$, entonces $H^Q_n(G,\mathbb{Z})\cong H_n(BG/Q,\mathbb{Z})$. En esta sección demostramos un resultado similar para $HH^n_Q(G,A)$ pero el resultado es válido para cualquier grupo Q y no sólo para $\mathbb{Z}_p$ cuando las acciones de Q y G sobre A son triviales. Antes de esto, vamos a dar la definición de G-CW complejo.

Definición 2.4.1. Sea G un grupo topológico. Un G-espacio es un espacio topológico X junto con una acción $\varphi : G\to Homeo(X)$ tal que la función inducida $\widetilde{\varphi} : G\times X\to X$, $\widetilde{\varphi}(g,x)=\varphi(g)(x)$ es continua.

Definición 2.4.2. Sea n un entero no negativo y sea $D^n=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|\leq 1\}$. Una G-(n-celda) es un G-espacio de la forma $(G/H)\times D^n$ donde H es un subgrupo de G, la G-acción sobre D^n es trivial y la acción de G sobre G/H es la acción natural sobre el conjunto de clases laterales $g\cdot(g'H)=gg'H$.

Definición 2.4.3. Un G-espacio X es un G-CW-complejo si X es el límite directo de G-espacios X_n con inclusiones $i_n : X_n\to X_{n+1}$, tal que X_0 es la unión disjunta de G-(0-celdas) G/H y X_n es obtenido de X_{n-1} adjuntando una colección de G-(n-celdas) $\{G/H_\alpha\times D^n\}_{\alpha\in R}$ mediante funciones equivariantes de pegado $\varphi_\alpha : G/H_\alpha\times S^{n-1}\to X_{n-1}$ como en el siguiente diagrama push-out:

$$\begin{tikzcd} \coprod_{\alpha\in R} G/H_\alpha\times S^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & X_{n-1} \arrow[d] \\ \coprod_{\alpha\in R} G/H_\alpha\times D^n \arrow[r] & X_n. \end{tikzcd}$$

Un G-CW complejo Y es un subcomplejo de X si Y es un G-subespacio de X y $Y_n=Y\cap X_n$ en la descomposición celular.

Definición 2.4.4. Sea G un grupo y X un CW complejo. Decimos que una acción $G\to Homeo(X)$ es celular si para cada $g\in G$ y cada n-celda E de X, gE es una n-celda de X y tal que si $g\in G$ fija una celda, entonces fija punto a punto cada elemento de dicha celda.

Proposición 2.4.1. *Sea G un grupo discreto. X es un G-CW complejo si y sólo si X es un CW complejo con una acción celular de G.*

Demostración: Supongamos que X es un G-CW complejo y sea $\{G/H_\alpha\times D^n\}_{\alpha\in R}$ el conjunto de G-(n-celdas) de X, entonces tenemos una función equivariante

$$\varphi : \bigcup_{\alpha\in R}(G/H_\alpha\times D^n)\to X_n$$

tal que las funciones $\varphi\mid_{G/H_\alpha\times S^{n-1}}$ coinciden con las aplicaciones de pegado. Consideremos el conjunto $R'=\coprod_{\alpha\in R} G/H_\alpha$ entonces obtenemos una aplicación $\psi : R'\times D^n\to X_n$ dada por $\psi(gH_i,x)=\varphi(gH_i,x)$ y de esta manera obtenemos un diagrama push-out:

$$\begin{tikzcd} R' \times S^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & X_{n-1} \arrow[d] \\ R' \times D^n \arrow[r] & X_n. \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, X es un CW complejo en donde claramente G actúa sobre el conjunto de índices R', de esta manera es una acción celular. Ahora supongamos que X es un CW complejo con una acción celular de G, sea $\{D^n_\alpha\}_{\alpha\in R}$ un conjunto de n-celdas que definen la estructura de CW-complejo de X. Consideremos a R como un espacio discreto y sea $\psi : R \times D^n \to X_n$ la aplicación asociada de n-celdas en X_n tal que al restrigirla sobre $R \times S^{n-1}$, obtenemos la aplicación de pegado. Ya que la acción de G sobre X es celular, G actúa sobre R. Entonces R es unión disjunta de sus órbitas. Si R_i es la órbita de $i \in R$ y H_i es el estabilizador de i, entonces gracias a que R y G son discretos, R_i y G/H_i también son discretos, entonces tenemos un homeomorfismo $\gamma_i : R_i \cong G/H_i$.

Definimos una función equivariante $\varphi_i : G/H_i \times D^n \to X_n$, $\varphi_i(gH_i, x) = g\psi(\gamma_i^{-1}(H_i), x)$. Entonces, restringiendo estas aplicaciones a $G/H_i \times S^{n-1}$ obtenemos aplicaciones de pegado y así el siguiente diagrama conmutativo es un push-out:

$$\begin{tikzcd} \coprod_{\alpha\in J} (G/H_\alpha) \times S^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & X_{n-1} \arrow[d] \\ \coprod_{\alpha\in J} (G/H_\alpha) \times D^n \arrow[r] & X_n. \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, X es un G-CW-complejo. $\square$

Sea EG_* el conjunto simplicial (ver ejemplo 1.1.8) definido de la siguiente manera: $EG_n = G^{n+1}$ con aplicaciones cara y degeneraciones dadas por:

$$\partial_i : EG_n \to EG_{n-1}, \qquad s_i : EG_n \to EG_{n+1},\ \ 0 \le i \le n,$$

$$\partial_i(g_0, \ldots, g_n) = (g_0, \ldots, \hat{g}_i, \ldots, g_n), \qquad s_i(g_0, \ldots, g_n) = (g_0, \ldots, g_i, g_i, \ldots, g_n).$$

Definimos BG_* como el conjunto simplicial: $BG_n = G^n$ con aplicaciones cara y degeneraciones:

$$\partial_i : BG_n \to BG_{n-1}, \quad \partial_i(g_1,\dots,g_n) = \begin{cases} (g_2,\dots,g_n), & i=0, \\ \\ (g_1,\dots,g_ig_{i+1},\dots,g_n), & 1 \leq i < n, \\ \\ (g_1,\dots,g_{n-1}), & i=n, \end{cases}$$

$$s_i : BG_n \to BG_{n+1}, \qquad s_i(g_1,\dots,g_n) = (g_1,\dots,g_i,1,g_{i+1},\dots,g_n), \quad 0 \leq i \leq n.$$

Ahora vamos a considerar las realizaciones geométricas gruesas, es decir, sin involucrar las degeneraciones.

Sea EG la realización geométrica de EG_* y BG la realización geométrica de BG_*, es decir,

$$EG = \left(\bigsqcup_{n\geq 0} (G^{n+1} \times \Delta^n) \right) /\sim, \text{ donde } ((g_0,\dots,g_n),\delta_i(t)) \sim (\partial_i(g_0,\dots,g_n),t), \; t \in \Delta^{n-1}, g_i \in G.$$

$$BG = \left(\bigsqcup_{n\geq 0} (G^{n} \times \Delta^n) \right) /\sim, \text{ donde } ((g_1,\dots,g_n),\delta_i(t)) \sim (\partial_i(g_1,\dots,g_n),t), \; t \in \Delta^{n-1}, g_i \in G.$$

Entonces, EG tiene estructura de CW-complejo y G actúa sobre EG celularmente y libremente por

$$g[(g_0,\dots,g_n),t] = [(gg_0,\dots,gg_n),t]$$

así que $EG/G \cong BG$. De esta forma, el complejo de cadenas celular de EG es la resolución barra $B(G)$ y el complejo de cadenas celular de BG es el complejo barra $B(G)_G = B(G) \otimes_G \mathbb{Z} = C(G)$.

Nota 2.4.1. La realización geométrica de cualquier conjunto simplicial es un CW-complejo con una n-celda por cada elemento no degenerado $x \in X_n$, es decir, x no está en la imagen de alguna degeneración $s_j : X_{n-1} \to X_n$. Mientras que la realización geométrica gruesa es un CW-complejo con una n-celda por cada elemento $x \in X_n$. En particular, estamos considerando a EG y BG como CW-complejos cuyos complejos de cadenas celulares son $B(G)$ y $C(G)$ repectivamente.

La acción de Q sobre G induce una acción de Q sobre BG dada por

$$q[(g_1,\dots,g_n),t] = [(qg_1,\dots,qg_n),t]$$

y es tal que si un elemento $q \in Q$ deja fija una celda σ de BG, entonces deja fijos todos los puntos de dicha celda, es decir, si $q\sigma = \sigma$, entonces $qx = x$ para cada $x \in \sigma$. De esta forma, BG tiene estructura de Q-CW complejo y su cociente BG/Q es un CW-complejo con una n-celda por cada Q-órbita de $(g_1,\dots,g_n)$.

Entonces, el complejo de cadenas celular de BG/Q es un complejo

$$\cdots \longrightarrow C_{n-1} \xrightarrow{d'_{n-1}} C_n \xrightarrow{d'_n} C_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

donde C_n es el $\mathbb{Z}$-módulo libre generado por G^n/Q y los diferenciales d_n están inducidos por los diferenciales del complejo barra, es decir,

$$d'(Q(g_1,\dots,g_n)) = Q(g_2,\dots,g_n) + \sum_{1\leq i<n} (-1)^i Q(g_1,\dots,g_i g_{i+1},\dots,g_n)$$
$$+(-1)^n Q(g_1,\dots,g_{n-1}).$$

Demostraremos ahora que $\mathbb{Z}[G^n/Q] \cong C_n(G)_Q$. Definimos:

$$\eta : C_n(G) \to \mathbb{Z}[G^n/Q],\ \ [g_1 \mid \cdots \mid g_n] \mapsto Q[g_1 \mid \cdots \mid g_n].$$

Esta aplicación es claramente sobreyectiva y $I_Q C_n(G) \subseteq ker(\eta)$. Sea $\sum_i n_i [g_{i_1} \mid \cdots \mid g_{i_n}] \in ker(\eta)$ podemos suponer que cada $[g_{i_1} \mid \cdots \mid g_{i_n}]$ está en la misma Q-órbita, entonces supongamos que todos los elementos $[g_{i_1} \mid \cdots \mid g_{i_n}]$ están en la órbita de $[g_1 \mid \cdots \mid g_n]$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_i n_i [g_{i_1} \mid \cdots \mid g_{i_n}] &= \sum_i n_i [g_{i_1} \mid \cdots \mid g_{i_n}] - \left(\sum_i n_i\right)[g_1 \mid \cdots \mid g_n] \\ &= \sum_i n_i ([g_{i_1} \mid \cdots \mid g_{i_n}] - [g_1 \mid \cdots \mid g_n]) \\ &= \sum_i n_i (q_i [g_1 \mid \cdots \mid g_n] - [g_1 \mid \cdots \mid g_n]) \in I_Q C(G).\end{aligned}$$

Por lo tanto, η se factoriza por un isomorfismo $\bar{\eta} : C(G)_Q \to \mathbb{Z}[G^n/Q]$ que hace conmutativo:

$$\begin{tikzcd} C_n(G)_Q \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\bar{\eta}"'] & C_{n-1}(G)_Q \arrow[d, "\bar{\eta}"] \\ \mathbb{Z}[G^n/Q] \arrow[r, "d'_n"'] & \mathbb{Z}[G^{n-1}/Q]. \end{tikzcd}$$

De esta manera, el complejo de cadenas que calcula la homología de BG/Q es $C(G)_Q$ y la cohomología de este espacio cociente con coeficientes triviales A, está dada por:

$$H^n(BG/Q, A) = H^n(Hom(C(G)_Q, A)).$$

Sea $\pi : C(G) \to C(G)_Q$ la proyección natural y definimos:

$$\varphi : Hom(C(G)_Q, A) \to Hom(C(G), A)^Q,\ \ f \mapsto f \circ \pi,$$

esta aplicación es un isomorfismo cuya inversa está dada por:

$$\psi : Hom(C(G),A)^Q \to Hom(C(G)_Q,A),$$

$$h \mapsto \widetilde{h},\ \ \widetilde{h}(\overline{[g_1 \mid \cdots \mid g_n]}) = h([g_1 \mid \cdots \mid g_n]).$$

Además, estos isomorfismos son de cadenas, es decir, el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Hom(C_n(G),A)^Q \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\psi", "\cong"'] & Hom(C_{n+1}(G),A)^Q \arrow[d, "\psi", "\cong"'] \\
Hom(C_n(G)_Q,A) \arrow[r, "\partial'"'] & Hom(C_{n+1}(G)_Q,A)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por último, gracias al isomorfismo de la Proposición 2.3.2, hemos obtenido el siguiente resultado:

Teorema 2.4.1. *Si A es un Q-G módulo con acciones triviales, entonces existe un isomorfismo:*

$$HH_Q^n(G,A) \cong H^n(X/Q,A)$$

donde X es cualquier Q-espacio, Q-homotópicamente equivalente a BG.

En este caso, no podemos reemplazar X por cualquier modelo del espacio clasificante a menos que sea Q-homotópicamente equivalente a BG.

Corolario 2.4.1. *Sea Q un grupo finito y A un Q-G módulo con acciones triviales. Si $|Q|$ es invertible en A, entonces:*

$$H_Q^*(G,A) \cong H^*(BG/Q,A).$$

2.5. Relación entre la cohomología invariante y el producto semidirecto

Ya hemos visto en una sección anterior que la categoría de Q-G módulos es equivalente a la categoría de módulos sobre $G \rtimes Q$. De esta manera, la resolución barra $B(G)$ que usamos para definir $HH_Q^*(G,M)$ es una resolución de módulos sobre $G \rtimes Q$ así que una pregunta pertinente sería ¿qué relación hay entre $HH_Q^*(G,M)$ y la cohomología del producto semidirecto $H^*(G \rtimes Q,M)$? En esta sección vamos a dar una respuesta parcial a dicha pregunta.

Lo primero que podemos observar es que en general, la resolución barra $B(G)$ no es una resolución proyectiva en Q-G $\mathscr{M}od$ de lo contrario, $B(G)$ sería una resolución proyectiva en la categoría $G \rtimes Q$-$\mathscr{M}od$ y así $HH_Q^*(G,M) \cong H^*(G \rtimes Q,M)$. De hecho, en general, $B_0(G) = \mathbb{Z}[G]$ no es proyectivo en Q-$G\mathscr{M}od$.

Supongamos que $\mathbb{Z}[G]$ es proyectivo en Q-$G\mathscr{M}od$ y sea $\mathbb{Z}[G](Q)$ el $\mathbb{Z}[G]$-módulo libre generado por Q como en el ejemplo 2.2.3. Entonces la aplicación $h : \mathbb{Z}[G](Q) \to \mathbb{Z}[G]$, $\sum x_q q \mapsto \sum x_q$ debe admitir una inversa derecha $\mu : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G](Q)$ en Q-$G\mathscr{M}od$. Para la existencia de μ, dada por $\mu(1) = \sum x_q q$, es necesario y suficiente que se satisfagan las siguientes condiciones:

- $q' x_q = x_{q'q}$ para cada $q, q' \in Q$.
- $\sum x_q = 1$.

Sin embargo, podemos encontrar ejemplos donde no se satisfacen estas dos condiciones a la vez, como el siguiente:

Ejemplo 2.5.1. Sea $Q = \mathbb{Z}_2 = \langle s \mid s^2 \rangle$, $G = \mathbb{Z}_3 = \langle t \mid t^3 \rangle$ y Q actuando sobre G por inversos, es decir, $s : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$, $t \mapsto t^{-1}$. Entonces $\mu(1) = (a + bt + ct^2) + (a + ct + bt^2)s$ donde $x_1 = a + bt + ct^2$ y $x_s = a + ct + bt^2$. Para que se cumpla la segunda condición, es necesario que $2a = 1$ y $b + c = 0$ pero esto es imposible ya que $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Vamos a recordar como se obtiene la sucesión espectral de Hochschild-Serre en la teoría clásica. Para esto, primero recordemos que podemos pensar a $H^n(G,M)$ como un funtor contravariante en la categoría de pares: Sea $\mathscr{D}$ la categoría cuyos objetos son pares (G,M) donde G es un grupo y M es un G-módulo y cuyos morfismos son pares $(\alpha, f) : (G,M) \to (G',M')$ donde $\alpha : G \to G'$ es un morfismo de grupos y $f : M' \to M$ es un morfismo de grupos abelianos tal que $f(\alpha(g)x') = gf(x')$ para cada $g \in G$ y $x' \in M'$. Si F y F' son resoluciones proyectivas para G y G' respectivamente y τ es un morfismo de complejos de cadenas compatible con α, es decir, $\tau_n(gx) = \alpha(g)\tau_n(x)$ para cada $g \in G$, $x \in F_n$ y $n \geq 0$. Entonces existe un morfismo de complejos de cocadenas:

$$Hom(\tau, f) : Hom_{G'}(F', M') \to Hom_G(F, M)$$

$$h \mapsto f \circ h \circ \tau,$$

el cual induce un morfismo en cohomología: $(\alpha, f)^* : H^*(G',M') \to H^*(G,M)$. Consideremos una sucesión exacta de grupos:

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1.$$

Sea M un G-módulo y F una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[G]$. El isomorfismo en la categoría de pares:

$$(\alpha_g, f_g) : (H,M) \to (H,M)$$

$$\alpha_g(h) = g^{-1}hg, \;\; f_g(m) = gm,$$

da lugar a un isomorfismo en cohomología $(\alpha_g, f_g)^* : H^p(H,M) \to H^p(H,M)$ el cual induce una acción $G \times H^p(H,M) \to H^p(H,M)$ tal que H actúa trivialmente y así obtenemos una acción sobre la cohomología

$$Q \times H^p(H,M) \to H^p(H,M), \;\; (q, \overline{f}) \mapsto \overline{q \cdot f}.$$

Aquí, $q\cdot f$ está dada por: $q\cdot f(x)=gf(g^{-1}x)$ donde $g\in G$ es cualquier elemento tal que $\pi(g)=q$. Con esto, $H^p(H,M)$ tiene estructura de Q-módulo. Por otra parte, $Hom_G(F,M)\cong Hom_H(F,M)^Q$ y además $Hom_H(F_k,M)$ es un módulo Q-acíclico, entonces después de aplicar el teorema 1.3.2, obtenemos la sucesión espectral cohomológica de Hochschild-Serre ([Bro82], cap. VII, 6):

$$E_2^{p,q}=H^p(Q,H^p(H,M))\Rightarrow H^{p+q}(G,M).$$

Sea Q un grupo, G un Q-grupo y M un Q-G módulo. Consideremos la sucesión exacta:

$$1\longrightarrow G\longrightarrow G\rtimes Q\longrightarrow Q\longrightarrow 1\ .$$

Entonces tenemos que la sucesión espectral de Hochschild-Serre converge a la cohomología del producto semidirecto:

$$E_2^{p,q}=H^p(Q,H^q(G,M))\Rightarrow H^{p+q}(G\rtimes Q,M)$$

y así, la columna $E_2^{0,*}$ tiene la forma:

$$H^0(Q,H^q(G,M))=H^q(G,M)^Q.$$

Ahora la acción de Q sobre $H^q(G,M)$ está inducida por el isomorfismo en la categoría de pares:

$$(\alpha_q,r_q):(G,M)\to(G,M),\ \ \alpha_q(g)=q^{-1}g,\ \ r_q(x)=qx.$$

Si consideramos la resolución barra $B(G)$, podemos ver que dicha acción coincide con la acción sobre la cohomología que está inducida por la acción de Q sobre la resolución barra.

Si $|Q|$ es invertible en M, por la Proposición 2.3.1,

$$H^0(Q,H^q(G,M))=H^q(G,M)^Q\cong HH_Q^q(G,M).$$

En resumen, si $|Q|$ es invertible en M, existe una sucesión espectral cuya segunda página contiene en su columna $E_2^{0,*}$ a la cohomología invariante $HH_Q^*(G,M)$ y que converge a $H^*(G\rtimes Q,M)$. Sin embargo, hay casos donde estas dos cohomologías coinciden.

Sea Q un grupo finito y A un Q-módulo, la aplicación $N:A\to A$, $a\mapsto\sum_{q\in Q}qa$ es Q-invariante, es decir, satisface $N(qa)=N(a)$ y $Im(N)\subseteq A^Q$ por lo tanto induce una aplicación $\bar{N}:A_Q\to A^Q$, $\bar{a}\mapsto\sum_{q\in Q}qa$ a la que llamaremos aplicación norma.

La demostración de las siguientes tres proposiciones son rutinarias.

Proposición 2.5.1. *El orden de Q anula a $ker(\bar{N})$ y a $coker(\bar{N})$.*

Proposición 2.5.2. *Si $|Q|$ es invertible en A, entonces $|Q|$ es invertible en A_Q, A^Q, $ker(\bar{N})$, $coker(\bar{N})$ y $H^p(G,A)$.*

Corolario 2.5.1. *Si $|Q|$ es invertible en A, entonces $\bar{N} : A_Q \to A^Q$ es un isomorfismo.*

Demostración: Como $|Q|$ anula tanto a $ker(\bar{N})$ y $coker(\bar{N})$ y las aplicaciones $ker(\bar{N}) \to ker(\bar{N})$, $x \mapsto |Q|x$, $coker(\bar{N}) \to coker(\bar{N})$, $y \mapsto |Q|y$ son isomorfismos pero también son la aplicación 0, se tiene que los grupos $ker(\bar{N})$ y $coker(\bar{N})$ son iguales a 0. $\square$

Teorema 2.5.1. *Si Q es un grupo cíclico finito y $|Q|$ es invertible en M, entonces existe un isomorfismo: $HH_Q^*(G,M) \cong H^*(G \rtimes Q, M)$.*

Demostración: Sea $Q = \mathbb{Z}_n$ y consideremos la sucesión exacta:

$$1 \longrightarrow G \longrightarrow G \rtimes \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n \longrightarrow 1\ ,$$

entonces tenemos una sucesión espectral:

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{Z}_n, H^q(G,M)) \Rightarrow H^{p+q}(G \rtimes \mathbb{Z}_n, M).$$

Por la Proposición 2.3.1,

$$H^0(\mathbb{Z}_n, H^q(G,M)) = H^q(G,M)^{\mathbb{Z}_n} \cong HH^q_{\mathbb{Z}_n}(G,M)$$

y como $|Q|$ es invertible en M, por la proposición 2.5.2, $|Q|$ es invertible en $H^q(G,M)$ y por el corolario 2.5.1, $\bar{N} : H^q(G,M)_Q \to H^q(G,M)^Q$ es un isomorfismo. Entonces obtenemos:

$$H^p(\mathbb{Z}_n, H^q(G,M)) = \left\{ \begin{array}{ll} coker(\bar{N}), & p = 2k \geq 2 \\ & \\ ker(\bar{N}), & p = 2k-1 \geq 1 \end{array} \right\} = 0,$$

de esta forma, los únicos términos no necesariamente nulos están en la columna $E_2^{0,*}$ y así, $HH^*_{\mathbb{Z}_n}(G,M) \cong H^*(G \rtimes \mathbb{Z}_n, M)$. $\square$

2.6. δ-Funtores y el morfismo de restricción

En esta sección vamos a ver que bajo ciertas condiciones, $HH_Q^*(G,M)$ es un funtor cohomológico.

Definición 2.6.1. Sea $T = \{T_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ una familia de funtores covariantes de la categoría de Q-G módulos a la categoría de grupos abelianos. Diremos que T es un δ-funtor si para cada sucesión exacta $0 \to M' \to M \to$

$M'' \to 0$ de Q-G módulos, existen **morfismos de conexión** naturales $\delta : T_n(M'') \to T_{n+1}(M')$ de tal manera que todas las composiciones son cero en la siguiente sucesión:

$$\cdots \longrightarrow T_{n-1}(M'') \xrightarrow{\delta} T_n(M') \longrightarrow T_n(M) \longrightarrow T_n(M'') \xrightarrow{\delta} T_{n+1}(M') \longrightarrow \cdots$$

Si la sucesión anterior es exacta para cada sucesión exacta corta $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, diremos que T es un funtor cohomológico.

Lema 2.6.1. *Sea $f : A \to B$ un morfismo sobreyectivo de Q-módulos. Si $H^1(Q, ker(f)) = 0$, entonces $f\,|_{A^Q}$: $A^Q \to B^Q$ es sobreyectiva.*

Demostración: La sucesión exacta $0 \to ker(f) \to A \to B \to 0$ induce una sucesión exacta larga en cohomología:

$$0 \longrightarrow (ker(f))^Q \longrightarrow A^Q \xrightarrow{f} B^Q \longrightarrow H^1(Q, ker(f)) \longrightarrow \cdots$$

y como $H^1(Q, ker(f)) = 0$, $f\,|_{A^Q}: A^Q \to B^Q$ es sobreyectiva. □

Vamos a considerar a la cohomología invariante como funtor del módulo de coeficientes:

$$HH^n_Q(G, -) : Q\text{-}G\mathscr{M}od \to Ab.$$

Consideremos una sucesión exacta de Q-G módulos:

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0\ .$$

El funtor $Hom_G(B_n(G), -)^Q$ es composición de dos funtores, el funtor $Hom_G(B_n(G), -)$ y el funtor de Q-puntos fijos y como ambos son exactos izquierdos, el funtor $Hom_G(B_n(G), -)^Q$ es exacto izquierdo. Por lo tanto, la sucesión:

$$0 \longrightarrow Hom_G(B_n(G), M')^Q \xrightarrow{\alpha_*} Hom_G(B_n(G), M)^Q \xrightarrow{\beta_*} Hom_G(B_n(G), M'')^Q$$

es exacta pero en general, β_* no es sobreyectiva. Sin embargo, la aplicación

$$Hom_G(B_n(G), M) \to Hom_G(B_n(G), M''), \quad f \mapsto \beta \circ f$$

es sobreyectiva ya que $B_n(G)$ es proyectivo en la categoría de G-módulos. Por lo tanto, gracias al lema anterior, una condición suficiente para la sobreyectividad de β_* es que $H^1(Q, Hom_G(B_n(G), M')) = 0$ y así obtenemos que $HH^*_Q(G, -)$ es un δ-funtor:

Proposición 2.6.1. *Sea* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta de Q-G módulos. Si $H^1(Q, Hom_G(B_n(G), M')) = 0$ para cada $n \geq 0$, entonces existe un morfismo de conexión $\delta^n : HH^n_Q(G, M'') \to HH^{n+1}_Q(G.M')$ para cada $n \geq 0$ tal que la siguiente sucesión:*

$$\cdots \longrightarrow HH^n_Q(G, M') \longrightarrow HH^n_Q(G, M) \longrightarrow HH^n_Q(G, M'') \xrightarrow{\delta^n} HH^{n+1}_Q(G, M') \longrightarrow \cdots$$

es exacta.

Demostración: Como vimos anteriormente,

$$0 \longrightarrow Hom_G(B_n(G), M')^Q \xrightarrow{\alpha_*} Hom_G(B_n(G), M)^Q \xrightarrow{\beta_*} Hom_G(B_n(G), M'')^Q \longrightarrow 0$$

es exacta para cada $n \geq 0$ y así

$$0 \longrightarrow Hom_G(B(G), M')^Q \xrightarrow{\alpha_*} Hom_G(B(G), M)^Q \xrightarrow{\beta_*} Hom_G(B(G), M'')^Q \longrightarrow 0$$

es exacta en la categoría de complejos de cadenas de grupos abelianos y esta sucesión exacta induce la sucesión buscada. $\square$

Este morfismo de conexión es natural, es decir, dado un diagrama conmutativo de Q-G módulos:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B' \arrow[r] & B \arrow[r] & B'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

con filas exactas en donde se satisfacen las condiciones de la proposición anterior para la existencia de los morfismos de conexión, entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} HH^n_Q(G, A'') \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & HH^{n+1}_Q(G, A') \arrow[d] \\ HH^n_Q(G, B'') \arrow[r, "\delta"'] & HH^{n+1}_Q(G, B'). \end{tikzcd}$$

De esta manera, $HH^*_Q(G, -)$ es un δ-funtor cohomológico.

Ahora consideremos la categoría $\mathscr{C}$ cuyos objetos son pares (G, M) donde G es un Q-grupo y M es un Q-G módulo, los morfismos en esta categoría son pares:

$$(\alpha, f) : (G, M) \to (G', M'),$$

donde $\alpha : G \to G'$ es un morfismo de Q-grupos y $f : M' \to M$ es un morfismo de Q-α módulos, es decir, es Q-equivariante y $f(\alpha(g)x') = gf(x')$.

En esta sección vamos a considerar a la cohomología invariante como un funtor contravariante:

$$HH_Q^*(-,-) : \mathscr{C} \to \mathscr{A}b$$

$$(G,M) \mapsto HH_Q^*(G,M)$$

y si $(\alpha, f) : (G,M) \to (G',M')$ es un morfismo, definimos $(\alpha, f)^* : HH_Q^n(G',M') \to HH_Q^n(G,M)$ de la siguiente manera:

Sea $\widetilde{\alpha} : B_n(G) \to B_n(G')$, $\widetilde{\alpha}(g[g_1 \mid \cdots \mid g_n]) = \alpha(g)[\alpha(g_1) \mid \cdots \mid \alpha(g_n)]$. Si $h : B_n(G') \to M'$ es un cociclo, entonces $f \circ h \circ \widetilde{\alpha} : B_n(G) \to M$ es un morfismo de Q-G módulos y

$$\delta(f \circ h \circ \widetilde{\alpha}) = (f \circ h) \circ (\widetilde{\alpha} \circ d) =$$

$$= (f \circ h) \circ (d \circ \widetilde{\alpha}) = f \circ (h \circ d) \circ \widetilde{\alpha}$$

$$= f \circ (\delta h) \circ \widetilde{\alpha} = 0.$$

Es decir, $f \circ h \circ \widetilde{\alpha}$ es un cociclo también. Además si $h = \delta h'$ es una cofrontera, entonces $f \circ h \circ \widetilde{\alpha}$ es una cofrontera ya que

$$f \circ h \circ \widetilde{\alpha} = f \circ (\delta h') \circ \widetilde{\alpha} =$$

$$= f \circ (h' \circ d) \circ \widetilde{\alpha} = (f \circ h') \circ (d \circ \widetilde{\alpha}) =$$

$$= (f \circ h') \circ (\widetilde{\alpha} \circ d) = \delta(f \circ h' \circ \widetilde{\alpha}).$$

Así que la asignación:

$$(\alpha, f)^* : HH_Q^n(G',M') \to HH_Q^n(G,M)$$

$$(\alpha, f)^*(\bar{h}) = \overline{f \circ h \circ \widetilde{\alpha}}$$

está bien definida. A este morfismo lo llamaremos restricción y lo denotaremos por $(\alpha, f)^* = Res_{(\alpha,f)}$. Si H es un subgrupo Q-invariante de G, α es la inclusión natural $\alpha = i : H \to G$ y $f = 1_M : M \to M$, entonces escribiremos $Res_H^G = Res_{(i,1_M)} : HH_Q^n(G,M) \to HH_Q^n(H,M)$.

2.7. Un teorema de dualidad para $Q = \mathbb{Z}_p$

En esta sección vamos a utilizar la fórmula de Künneth y algunos resultados de Knudson ([Knu06]) para demostrar un teorema de dualidad cuando Q es un grupo cíclico de orden primo.

Proposición 2.7.1. *[Fórmula de Künneth ([HS71], cap. 3)] Sea R un dominio de ideales principales. Sean C y C' complejos de cadenas de R-módulos tal que C es libre. Entonces existe una sucesión exacta natural:*

$$0 \longrightarrow \prod_{p\in\mathbb{Z}} Ext^1_R(H_p(C), H_{p+n+1}(C')) \longrightarrow H_n(Hom_R(C,C'))$$

$$\longrightarrow \prod_{p\in\mathbb{Z}} Hom_R(H_p(C), H_{p+n}(C')) \longrightarrow 0$$

y esta sucesión se escinde.

Sea M un R-módulo y $C' = M$, es decir, C' es el complejo de cadenas concentrado en dimensión 0 ($C'_0 = M$ y $C'_n = 0$ para $n \neq 0$). En este caso, la Proposición 2.7.1 es llamada **Teorema de los coeficientes universales en cohomología**:

Proposición 2.7.2 ([HS71])**.** *Sea R un dominio de ideales principales, C un complejo de cadenas de R-módulos libres y M un R-módulo. Entonces existe una sucesión exacta natural:*

$$0 \longrightarrow Ext^1_R(H_{n-1}(C), M) \longrightarrow H^n(Hom_R(C,M)) \longrightarrow Hom_R(H_n(C), M) \longrightarrow 0$$

y esta sucesión se escinde.

Si A es Q-G módulo con acciones triviales, entonces

$$Hom_G(B(G),A)^Q \cong Hom_Q(C(G),A) \cong Hom(C(G)_Q,A).$$

Ahora veamos que $C_n(G)_Q$ es proyectivo. Para esto consideremos $\alpha : B_1 \to B_2$ y $\beta : C_n(G)_Q \to B_2$ morfismos de grupos abelianos tal que α es sobreyectivo y $\pi : C_n(G) \to C_n(G)_Q$ es la proyección natural. Podemos considerar a B_1 y B_2 como Q-módulos con acciones triviales, de esta forma α es Q-equivariante. Como $C_n(G)$ es $\mathbb{Z}$-libre con base en el conjunto $\{[g_1 \mid \cdots \mid g_n]\}$, un morfismo $f : C_n(G) \to B_1$ queda completamente determinado por los valores que toma en dicha base. Definimos $f([g_1 \mid \cdots \mid g_n]) = x \in B_1$ de tal manera que $\alpha(x) = \beta \circ \pi([g_1 \mid \cdots \mid g_n])$, entonces podemos definir $f(q[g_1 \mid \cdots \mid g_n]) = x$ ya que $\beta \circ \pi$ es Q-equivariante. De esta manera, podemos definir $f : C_n(G) \to B_1$ constante en cada Q-órbita del conjunto $\{[g_1 \mid \cdots \mid g_n]\}$. En otras palabras, existe un morfismo Q-equivariante $f : C_n(G) \to B_1$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
& C_n(G) \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\pi"] & \\
& C_n(G)_Q \arrow[d, "\beta"] & \\
B_1 \arrow[r, "\alpha"'] & B_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y f se factoriza de manera única por medio de $\widetilde{f} : C_n(G)_Q \to B_1$, $\overline{[g_1 \mid \cdots \mid g_n]} \mapsto f([g_1 \mid \cdots \mid g_n])$ y esta última aplicación es tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
& C_n(G)_Q \arrow[dl, "\widetilde{\alpha}"'] \arrow[d, "\beta"] & \\
B_1 \arrow[r, "\alpha"'] & B_2 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $C_n(G)_Q$ es $\mathbb{Z}$-proyectivo y como $\mathbb{Z}$ es un dominio de ideales principales, $C_n(G)_Q$ es $\mathbb{Z}$-libre. De esta forma $C = C(G)_Q$ y A satisfacen las hipótesis del teorema de los coeficientes universales y así, existe una sucesión exacta que se escinde:

$$0 \longrightarrow Ext^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(C(G)_Q), A) \longrightarrow HH^n_Q(G, A) \longrightarrow Hom(H_n(C(G)_Q), A) \longrightarrow 0 \ .$$

Supongamos ahora que Q es finito y no trivial y consideremos la aplicación norma (morfismo de complejos de cadenas):

$$N : C(G)_Q \to C(G)^Q,\ \ \overline{[g_1 \mid \cdots \mid g_n]} \mapsto \sum_{q \in Q} [qg_1 \mid \cdots \mid qg_n].$$

Esta aplicación en general, no es un isomorfismo. Como $C(G)_Q$ es libre sobre $\mathbb{Z}$ y $ker(N)$ es un submódulo de $C(G)_Q$, entonces $ker(N)$ es libre y además es anulado por $|Q|$ (Proposición 2.5.1) así que $ker(N) = 0$, por lo tanto tenemos una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow C(G)_Q \xrightarrow{N} C(G)^Q \longrightarrow coker(N) \longrightarrow 0 \ .$$

La siguiente proposición nos dice quien es la homología del complejo $coker(N)$ cuando $Q = \mathbb{Z}_p$ con p primo.

Proposición 2.7.3 ([Knu06], Prop. 2.1)**.** *Sea $Q = \mathbb{Z}_p$ donde p es primo. Entonces $coker(N)_n = C_n(G^Q, \mathbb{Z}_p)$ y así, existe un isomorfismo:*

$$H_n(coker(N)) \cong H_n(G^Q, \mathbb{Z}_p).$$

Demostración: Para $n = 0$, $C_0(G) = \mathbb{Z}$ y $N_0 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es simplemente la multiplicación por p así que $coker(N)_0 = \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_p = C_0(G^Q, \mathbb{Z}_p)$. Para $n > 0$, ya que p es primo, las Q-órbitas de cualquier elemento $[g_1 \mid \cdots \mid g_n]$ tienen orden 1 o p. El grupo $C(G)^Q \subseteq C(G)$ es libre ya que es un submódulo de un $\mathbb{Z}$-módulo libre y tiene una base de elementos de la forma

$$\sum_{q \in Q} [qg_1 \mid \cdots \mid qg_n]$$

junto con elementos $[g_1 \mid \cdots \mid g_n]$ para $g_i \in G^Q$. La función norma satisface $N([g_1 \mid \cdots \mid g_n]) = p[g_1 \mid \cdots \mid g_n]$ si $g_i \in G^Q$ para todo i, de lo contrario, $N([g_1 \mid \cdots \mid g_n]) = \sum_{q \in Q}[qg_1 \mid \cdots \mid qg_n]$. Entonces es claro que

$$coker(N)_n = \frac{\mathbb{Z}\{[g_1 \mid \cdots \mid g_n] \mid g_i \in G^Q\}}{p\mathbb{Z}\{[g_1 \mid \cdots \mid g_n] \mid g_i \in G^Q\}} \cong C_n(G^Q, \mathbb{Z}_p)$$

y las aplicaciones frontera de $coker(N)$ están inducidas por las de $C(G)^Q$. Por lo tanto, obtenemos el isomorfismo deseado. $\square$

De esta manera, cuando $Q = \mathbb{Z}_p$ tenemos una sucesión exacta:

$$\cdots \longrightarrow H_n(C(G)_Q) \longrightarrow HH_n^Q(G, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(G^Q, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H_{n-1}(C(G)_Q) \longrightarrow \cdots$$

y así llegamos al siguiente corolario:

Corolario 2.7.1. *Si $Q = \mathbb{Z}_p$ y $G^Q = \{1\}$, entonces existe un isomorfismo:*

$$H_n(C(G)_Q) \cong HH_n^Q(G, \mathbb{Z})$$

para $n \geq 1$.

Bajo las mismas hipótesis del corolario anterior, obtenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow Ext^1_{\mathbb{Z}}(HH^Q_{n-1}(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \longrightarrow HH^n_Q(G, \mathbb{Z}) \longrightarrow Hom(HH^Q_n(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

y esta sucesión se escinde. Por otra parte, si G es finito, entonces $H_n^Q(G, \mathbb{Z})$ es anulado por $|G|$ para $n > 0$ ([Knu06], Prop. 4.1) y como en este caso los coeficientes son Q-G módulos con acciones triviales, $HH_n^Q(G, \mathbb{Z}) \cong H_n^Q(G, \mathbb{Z})$ (ver Nota 2.3.1). Así que $|G|$ anula a $HH_n^Q(G, \mathbb{Z})$. Ahora como $\mathbb{Z}$ es libre de torsión, si G es finito,

$$Hom(HH_n^Q(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = 0$$

y tenemos un isomorfismo:

$$HH^n_Q(G, \mathbb{Z}) \cong Ext^1_{\mathbb{Z}}(HH^Q_{n-1}(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \oplus Hom(HH^Q_n(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \cong Ext^1_{\mathbb{Z}}(HH^Q_{n-1}(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}), \text{ para } n \geq 2.$$

Para un grupo abeliano A definimos $A' = Hom(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Si $nA = 0$ para algún $n > 0$, tenemos

$$Hom(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = Hom(A, (n^{-1}\mathbb{Z})/\mathbb{Z}) \cong Hom(A, \mathbb{Z}_n).$$

Así que podemos identificar A' con $Hom(A, \mathbb{Z}_n)$. Si A es cíclico de orden n, entonces también A' es cíclico de orden n. Como consecuencia tenemos que si A es un grupo abeliano finito, entonces $A' \cong A$ ([Bro82], Cap. 6, Sec. 7). Ahora ya estamos en condiciones de demostrar el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.7.1. *Si $Q = \mathbb{Z}_p$ con p primo, G es un Q-grupo finito y $G^Q = \{1\}$, entonces existe un isomorfismo*

$$HH^n_Q(G, \mathbb{Z}) \cong HH^Q_{n-1}(G, \mathbb{Z})$$

para $n \geq 2$.

Demostración: Como G es finito, $C(G)$ es finitamente generado y también $C(G)^Q$. Por lo tanto, $HH^Q_n(G, \mathbb{Z})$ es finitamente generado y como es anulado por $|G|$ para $n > 0$, obtenemos que $HH^Q_n(G, \mathbb{Z})$ es un grupo abeliano finito para $n > 0$. Así que $HH^Q_n(G, \mathbb{Z})' \cong HH^Q_n(G, \mathbb{Z})$ para $n > 0$. Por otra parte, consideremos la sucesión exacta de grupos abelianos:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

que es una resolución inyectiva de $\mathbb{Z}$. Entonces para calcular $Ext^1_{\mathbb{Z}}(HH^Q_{n-1}(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ aplicamos el funtor $Hom(HH^Q_{n-1}(G, \mathbb{Z}), -)$ a la resolución inyectiva anterior para obtener:

$$Hom(HH^Q_{n-1}(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Q}) \xrightarrow{\partial^0} Hom(HH^Q_{n-1}(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial^1} 0$$

pero $\mathbb{Q}$ es libre de torsión y $HH^Q_{n-1}(G, \mathbb{Z})$ es finito, entonces $Hom(HH^Q_{n-1}(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Q}) = 0$ y así,

$$Ext^1_{\mathbb{Z}}(HH^Q_{n-1}(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \cong Hom(HH^Q_{n-1}(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = (HH^Q_{n-1}(G, \mathbb{Z}))' \cong HH^Q_{n-1}(G, \mathbb{Z}). \quad \square$$

2.8. Productos

En esta sección describiremos algunos productos que podemos definir en homología y cohomología invariante.

Sea $\eta : G \to G \times G$, $g \mapsto (g, g)$ la aplicación diagonal. Un morfimo de complejos de cadenas $\Delta : B(G) \to B(G) \otimes B(G)$ es compatible con η si $\Delta(g[g_1 \mid \cdots \mid g_n]) = (g, g)\Delta([g_1 \mid \cdots \mid g_n])$. Fijemos una clase de Q-homotopía de morfismos de cadenas $\Delta : B(G) \to B(G) \otimes B(G)$ compatible con η.

Nota 2.8.1. A diferencia de la teoría clásica en donde cualesquiera dos morfismos de cadenas $\Delta_1, \Delta_2 : B(G) \to B(G) \otimes B(G)$ son homotópicos y de esta manera los productos cup y cap no dependen del morfismo de cadenas elegido, aquí es importante dejar fija una clase de Q-homotopía de morfismos de cadenas $\Delta : B(G) \to B(G) \otimes B(G)$ ya que los complejos $B(G)$ y $B(G) \otimes B(G)$ no son resoluciones proyectivas en Q-$G\mathscr{M}od$ y de esta manera, dos morfismos de cadenas Δ_1 y Δ_2 no son necesariamente Q-homotópicos y dos clases diferentes de Q-homotopía podrían estar definiendo productos diferentes.

La aplicación de Alexander-Whitney:

$$\Delta : B(G) \to B(G) \otimes B(G)$$

$$\Delta([g_1 \mid \cdots \mid g_n]) = \sum_{0 \leq k \leq n} [g_1 \mid \cdots \mid g_k] \otimes g_1 \cdots g_k [g_{k+1} \mid \cdots \mid g_n]$$

es un ejemplo de morfismo de complejos de cadenas Q-equivariante y compatible con η.

Sean $u \in Hom_G(B_p(G), M)^Q$ y $v \in Hom_G(B_q(G), N)^Q$, definimos el producto cruzado como:

$$u \times v \in Hom_G\left(\bigoplus_{k+l=p+q} (B_k(G) \otimes B_l(G)), M \otimes N \right)^Q,$$

$$u \times v(x \otimes y) = \begin{cases} (-1)^{pq} u(x) \otimes v(y), & \text{si } p = deg(x),\ q = deg(y), \\ \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Si d es diferencial de $B(G)$, entonces el diferencial d' en $B(G) \otimes B(G)$ está dado por:

$$d' : \bigoplus_{p+q=n} B_p(G) \otimes B_q(G) \to \bigoplus_{p+q=n-1} B_p(G) \otimes B_q(G),$$

$$d'(x \otimes y) = d(x) \otimes y + (-1)^k x \otimes d(y),$$

donde $x \in B_k(G)$, $y \in B_l(G)$ con $k + l = n$. Sea ∂ el diferencial en $Hom_G(B(G) \otimes B(G), M \otimes N)^Q$. Entonces ∂ está definido como:

$$\partial : Hom_G\left(\bigoplus_{p+q=n} B_p(G) \otimes B_q(G), M \otimes N \right)^Q \to Hom_G\left(\bigoplus_{p+q=n+1} B_p(G) \otimes B_q(G), M \otimes N \right)^Q,$$

$$\partial(f)(x \otimes y) = f(d'(x \otimes y)),$$

donde $x \in B_k(G)$, $y \in B_l(G)$ con $k + l = n + 1$.

El producto cruzado satisface:

$$\partial(u\times v)(x\otimes y)=(u\times v)\circ d'(x\otimes y)=$$

$$\begin{aligned}
&=(u\times v)(d(x)\otimes y+(-1)^{deg(x)}x\otimes d(y))\\
&=(-1)^{pq}u(d(x))\otimes v(y)+(-1)^{pq+deg(x)}u(x)\otimes v(d(y))\\
&=(-1)^{pq}\partial u(x)\otimes v(y)+(-1)^{pq+deg(x)}u(x)\otimes\partial v(y).
\end{aligned}$$

Es decir, $\partial(u\times v)=\partial u\times v+(-1)^p u\times\partial v$ (Aquí estamos haciedo un abuso de notación ya que estamos utilizando ∂ para el diferencial de tres complejos diferentes: $Hom_G(B(G)\otimes B(G),M\otimes N)^Q$, $Hom_G(B(G),M)^Q$ y $Hom_G(B(G),N)^Q$). En consecuencia, si u y v son cociclos, entonces $u\times v$ es un cociclo también. Si además de ser cociclos, se tiene que u o v es una cofrontera, entonces $u\times v$ también es una cofrontera. Por otra parte, definimos $u\cup v=u\times v\circ\Delta$, como Δ es un morfismo de complejos de cadenas,

$$\partial(u\cup v)=u\times v\circ(\Delta\circ d)$$

$$\begin{aligned}
&=u\times v\circ(d'\circ\Delta)=(u\times v\circ d')\circ\Delta\\
&=\partial(u\times v)\circ\Delta=(\partial u\times v+(-1)^p u\times\partial v)\circ\Delta\\
&=\partial u\times v\circ\Delta+(-1)^p u\times\partial v\circ\Delta\\
&=\partial u\cup v+(-1)^p u\cup\partial v.
\end{aligned}$$

De esta forma, podemos definir el **producto cup**:

$$HH_Q^p(G,M)\otimes HH_Q^q(G,N)\to HH_Q^{p+q}(G,M\otimes N)$$

$$u\otimes v\mapsto u\cup v=u\times v\circ\Delta.$$

Como mencionamos anteriormente, cada clase de Q-homotopía define un producto cup. La clase de Q-homotopía de morfismos de cadenas $\Delta: B(G)\to B(G)\otimes B(G)$ que vamos a elegir, es la clase cuyo representante es la aplicación de Alexander-Whitney:

$$\Delta([g_1\mid\cdots\mid g_n])=\sum_{0\leq k\leq n}[g_1\mid\cdots\mid g_k]\otimes g_1\cdots g_k[g_{k+1}\mid\cdots\mid g_n].$$

En términos de esta aplicación, el producto cup quedaría definido de la siguiente manera:

$$(u\cup v)([g_1\mid\cdots\mid g_{p+q}])=(-1)^{pq}u([g_1\mid\cdots\mid g_p])\otimes g_1\cdots g_p v([g_{p+1}\mid\cdots\mid g_{p+q}]).$$

Este producto satisface las siguientes propiedades:

Proposición 2.8.1. *1. El producto cup $HH^0_Q(G,M)\otimes HH^0_Q(G,N)\to HH^0_Q(G,M\otimes N)$ es la aplicación $(M^G)^Q\otimes(N^G)^Q\to((M\otimes N)^G)^Q$ inducida por las inclusiones: $(M^G)^Q\to M$ y $(N^G)^Q\to N$.*

2. Dados $f:M\to M'$ y $h:N\to N'$ aplicaciones de Q-G módulos y elementos $u\in HH^*_Q(G,M)$ y $v\in HH^*_Q(G,N)$, entonces tenemos que $(f\otimes h)_*(u\cup v)=f_*(u)\cup h_*(v)$ donde $(-)_*=HH^*_Q(G,-)$.

3. Compatibilidad con el morfismo de conexión. Sea $0\to M'\to M\to M''\to 0$ una sucesión exacta de Q-G módulos y sea N un Q-G módulo tal que $0\to M'\otimes N\to M\otimes N\to M''\otimes N\to 0$ es exacta. Además, supongamos que $H^1(Q,Hom_G(B_k(G),M'))=0=H^1(Q,Hom_G(B_k(G),M'\otimes N))$ para cada $k\geq 0$ entonces $\delta(u\cup v)=\delta(u)\cup v$ para cada $u\in HH^p_Q(G,M'')$ y $v\in HH^q_Q(G,N)$.
Similarmente, Sea $0\to N'\to N\to N''\to 0$ una sucesión exacta de Q-G módulos y sea M un Q-G módulo tal que $0\to M\otimes N'\to M\otimes N'\to M\otimes N''\to 0$ es exacta. Además, supongamos que $H^1(Q,Hom_G(B_k(G),N'))=0=H^1(Q,Hom_G(B_k(G),M\otimes N'))$ para todo $k\geq 0$ entonces $\delta(u\cup v)=(-1)^p u\cup\delta(v)$ para cada $u\in HH^p_Q(G,M)$ y $v\in HH^q_Q(G,N'')$.

4. Existencia de elemento neutro. Existe un elemento $1\in HH^0_Q(G,\mathbb{Z})$ que satisface $1\cup u=u=u\cup 1$ para todo $u\in HH^*_Q(G,M)$.

5. Asociatividad. Dados, $u_i\in HH^*_Q(G,M_i)$ para $i=1,2,3$, tenemos $(u_1\cup u_2)\cup u_3=u_1\cup(u_2\cup u_3)\in HH^*_Q(G,M_1\otimes M_2\otimes M_3)$.

Demostración: 1. La aplicación de Alexander-Whitney en dimensión 0 está dada por $\Delta:\mathbb{Z}[G]\to\mathbb{Z}[G]\otimes\mathbb{Z}[G]$, $1\to 1\otimes 1$, entonces $u\cup v(1)=u\times v(\Delta(1))=u\cup v(1\otimes 1)=u(1)\otimes v(1)$. Esto concluye la demostración ya que $u(1)\in(M^G)^Q$ y $v(1)\in(N^G)^Q$.

2. $(f\otimes h)_*(u\cup v)([g_1\mid\cdots\mid g_{p+q}])=(-1)^{pq}f\circ u([g_1\mid\cdots\mid g_p])\otimes g_1\cdots g_p h\circ v([g_{p+1}\mid\cdots\mid g_{p+q}])=f_*(u)\cup h_*(v)([g_1\mid\cdots\mid g_{p+q}])$.

3. Ya que $H^1(Q,Hom_G(B_k(G),M'))=0=H^1(Q,Hom_G(B_r(G),M'\otimes N))$, en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Hom_G(B(G),M')^Q \arrow[r] \arrow[d, "-\cup v"] & Hom_G(B(G),M)^Q \arrow[r] \arrow[d, "-\cup v"] & Hom_G(B(G),M'')^Q \arrow[r] \arrow[d, "-\cup v"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Hom_G(B(G),M'\otimes N)^Q \arrow[r] & Hom_G(B(G),M\otimes N)^Q \arrow[r] & Hom_G(B(G),M''\otimes N)^Q \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

las filas son exactas y gracias al punto 2 y ya que $\partial(u\cup v)=\partial u\cup v+(-1)^p u\cup\partial v=\partial u\cup v$, el diagrama anterior es conmutativo en la categoría de complejos de cocadenas de grupos abelianos. Ahora como el morfismo de conexión es natural, obtenemos: $\delta(u)\cup v=\delta(u\cup v)$. De manera análoga se demuestra la parte restante.

4. La función constante $1\in Hom_G(\mathbb{Z}[G],\mathbb{Z})^Q$ es un cociclo y si $u\in HH^p_Q(G,M)$, entonces $1\cup u([g_1\mid\cdots\mid g_p])=u([g_1\mid\cdots\mid g_p])=u\cup 1([g_1\mid\cdots\mid g_p])$.

5. Sean $u_1 \in HH^p_Q(G,M_1)$, $u_2 \in HH^q_Q(G,M_2)$ y $u_3 \in HH^l_Q(G,M_3)$ entonces

$$(u_1 \cup u_2) \cup u_3([g_1 \mid \cdots \mid g_{p+q+l}]) =$$

$$= (-1)^{(p+q)l}(u_1 \cup u_2)([g_1 \mid \cdots \mid g_{p+q}]) \otimes g_1 \cdots g_{p+q} u_3([g_{p+q+1} \mid \cdots \mid g_{p+q+l}])$$

$$= (-1)^{(p+q)l+pq} u_1([g_1 \mid \cdots \mid g_p]) \otimes g_1 \cdots g_p u_2([g_{p+1} \mid \cdots \mid g_{p+q}]) \otimes g_1 \cdots g_{p+q} u_3([g_{p+q+1} \mid \cdots \mid g_{p+q+l}]).$$

Por otra parte,

$$u_1 \cup (u_2 \cup u_3)([g_1 \mid \cdots \mid g_{p+q+l}]) =$$

$$(-1)^{p(q+l)} u_1([g_1 \mid \cdots \mid g_p]) \otimes g_1 \cdots g_p (u_2 \cup u_3)([g_{p+1} \mid \cdots \mid g_{p+q+l}])$$

$$= (-1)^{p(q+l)+ql} u_1([g_1 \mid \cdots \mid g_p]) \otimes g_1 \cdots g_p u_2([g_{p+1} \mid \cdots \mid g_{p+q}]) \otimes g_1 \cdots g_{p+q} u_3([g_{p+q+1} \mid \cdots \mid g_{p+q+l}]).$$

Así que el producto cup es asociativo.

$\square$

Se sigue entonces que $HH^*_Q(G,\mathbb{Z})$ es un anillo graduado y que $HH^*_Q(G,M)$ es un $HH^*_Q(G,\mathbb{Z})$-módulo graduado.

El morfismo de complejos de cadenas:

$$\gamma : Hom_G(B(G),M) \otimes ((B(G) \otimes B(G)) \otimes_G N) \to B(G) \otimes_G (M \otimes N)$$

$$u \otimes (x \otimes y \otimes n) \mapsto (-1)^{deg(u)deg(x)} x \otimes u(y) \otimes n$$

es Q-lineal. Nuevamente supongamos que Δ es la aproximación diagonal de Alexander-Whitney, entonces, la aplicación

$$\gamma \circ (1 \otimes (\Delta \otimes 1)) : Hom_G(B(G),M) \otimes (B(G) \otimes_G N) \to B(G) \otimes_G (M \otimes N)$$

es un morfismo de complejos de cadenas Q-lineal e induce un morfismo:

$$HH^p_Q(G,M) \otimes HH^Q_q(G,N) \to HH^Q_{q-p}(G,M \otimes N),$$

al que llamaremos **producto cap**. Explícitamente el producto cap queda expresado como:

$$u \cap ([g_1 \mid \cdots \mid g_q] \otimes n) = (-1)^{p(q-p)}[g_1 \mid \cdots \mid g_{q-p}] \otimes g_1 \cdots g_{q-p} u([g_{q-p+1} \mid \cdots \mid g_q]) \otimes n.$$

Proposición 2.8.2. *$HH^Q_*(G,M)$ es un módulo graduado sobre el anillo graduado $HH^*_Q(G,\mathbb{Z})$.*

Demostración: Sólo hay que demostrar que si $u_1 \in HH^p_Q(G,\mathbb{Z})$, $u_2 \in HH^q_Q(G,\mathbb{Z})$ y $z = [g_1 \mid \cdots \mid g_l] \otimes n$, entonces $(u_1 \cup u_2) \cap z = u_1 \cap (u_2 \cap z)$, para esto veamos que:

$$(u_1 \cup u_2) \cap z = (-1)^{(p+q)(l-q-p)}[g_1 \mid \cdots \mid g_{l-p-q}] \otimes (g_1 \cdots g_{l-p-q} u_1 \cup u_2([g_{l-p-q+1} \mid \cdots \mid g_l])) \otimes n$$

$$= (-1)^{(p+q)(l-q-p)+pq}[g_1 \mid \cdots \mid g_{l-p-q}] \otimes u_1([g_{l-p-q+1} \mid \cdots \mid g_{l-q}]) \otimes g_{l-p-q+1} \cdots g_{l-q} u_2([g_{l-q+1} \mid \cdots \mid g_l]) \otimes n$$

$$= (-1)^{(p+q)(l-p-q)+pq}[g_1 \mid \cdots \mid g_{l-p-q}] \otimes u_1([g_{l-p-q+1} \mid \cdots \mid g_{l-q}]) \otimes u_2([g_{l-q+1} \mid \cdots \mid g_l]) \otimes n.$$

Por otra parte,

$$u_1 \cap (u_2 \cap z) = u_1 \cap ((-1)^{q(l-q)}[g_1 \mid \cdots \mid g_{l-q}] \otimes g_1 \cdots g_{l-q} u_2([g_{l-q+1} \mid \cdots \mid g_l]) \otimes n)$$

$$= (-1)^{p(l-q-p)+q(l-q)}[g_1 \mid \cdots \mid g_{l-q-p}] \otimes u_1([g_{l-q-p+1} \mid \cdots \mid g_{l-q}]) \otimes u_2([g_{l-q+1} \mid \cdots \mid g_l]) \otimes n. \quad \square$$

El producto cap es adjunto al producto cup en el siguiente sentido: Consideremos la aplicación evaluación:

$$ev : Hom_G(B(G), M) \otimes (B(G) \otimes_G N) \to M \otimes_G N$$

$$u \otimes (x \otimes n) \mapsto u(x) \otimes n,$$

y esta aplicación es Q-lineal. Denotemos por $\langle u, z \rangle$ la imagen de $u \otimes z$ bajo esta aplicación. Entonces,

$$\langle \partial u, z \rangle = \langle \partial u, x \otimes n \rangle = \partial u(x) \otimes n = u(d(x)) \otimes n = \langle u, d(x) \otimes n \rangle = \langle u, dz \rangle.$$

Así que la evaluación induce una aplicación:

$$HH^p_Q(G,M) \otimes HH^Q_p(G,N) \to (M \otimes_G N)^Q$$

y satisface:

$$\langle u \cup v, z \rangle = \langle u, v \cap z \rangle$$

para cada $u \in HH^p_Q(G,M_1)$, $v \in HH^q_Q(G,M_2)$, $z \in HH^Q_{p+q}(G,M_3)$.

Si G es un grupo abeliano, entonces la multiplicación $G \times G \to G$ es un morfismo de grupos. Si k es un anillo conmutativo G-trivial, en la teoría usual se define el producto de Pontryagin como la composición:

$$H_*(G,k) \otimes H^*(G,k) \xrightarrow{\times} H_*(G \times G, k \times k) \xrightarrow{\mu_*} H_*(G,k)$$

donde $\times$ es el morfismo inducido por

$$(F \otimes_G k) \otimes (F \otimes_G k) \to ((F \otimes F) \otimes_G (k \otimes k)),$$

$$(x_1 \otimes k_1) \otimes (x_2 \otimes k_2) \mapsto ((x_1 \otimes x_2) \otimes (k_1 \otimes k_2))$$

y $\mu : (G \times G, k \otimes k) \to (G,k)$ es la aplicación multiplicación $((g_1,g_2) \mapsto g_1g_2, \lambda_1 \otimes \lambda_2 \mapsto \lambda_1\lambda_2)$. Entonces, para definir el producto de Pontryagin invariante, necesitamos un morfismo $\tau : B(G) \otimes B(G) \to B(G)$ de cadenas Q-lineal que preserve aumentación. El grupo S_n de permutaciones de $\{1,\dots,n\}$ actúa sobre $B_n(G)$ por:

$$\sigma[g_1 \mid \cdots \mid g_n] = (-1)^{sig\sigma}[g_{\sigma^{-1}(1)} \mid \cdots \mid g_{\sigma^{-1}(n)}].$$

Sea $n = p+q$ y $D_{p,q}$ el subconjunto de S_{p+q} de permutaciones que satisfacen: $\sigma(i) < \sigma(j)$ para $1 \leq i < j \leq p$ y para $p+1 \leq i < j \leq p+q$. Definimos

$$\tau_n : (B(G) \otimes B(G))_n \to B_n(G)$$

$$[g_1 \mid \cdots \mid g_p] \otimes [g_{p+1} \mid \cdots \mid g_{p+q}] \mapsto \sum_{\sigma \in D_{p,q}} \sigma[g_1 \mid \cdots \mid g_{p+q}].$$

Si G es un Q-grupo abeliano y k un anillo conmutativo G-trivial y Q-trivial, entonces el producto de Pontryagin invariante queda definido como:

$$HH_p^Q(G,k) \otimes HH_q^Q(G,k) \to HH_{p+q}^Q(G,k)$$

$$(\overline{[g_1 \mid \cdots \mid g_p] \otimes k_1}) \otimes (\overline{[g_{p+1} \mid \cdots \mid g_{p+q}] \otimes k_2}) \mapsto \overline{\sum_{\sigma \in D_{p,q}} \sigma[g_1 \mid \cdots \mid g_{p+q}] \otimes k_1k_2}.$$

Este producto es asociativo y tiene un elemento neutro.

Capítulo 3

Grupos de cohomología invariante en bajas dimensiones

Una extensión de un grupo G por un grupo N es una sucesión exacta: $1 \to N \to E \to G \to 1$. Dos extensiones $1 \to N \to E \to G \to 1$ y $1 \to N \to E' \to G \to 1$ se dice que son equivalentes si existe un morfismo de grupos $\alpha : E \to E'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "="] & E \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & G \arrow[r] \arrow[d, "="] & 1 \\
1 \arrow[r] & N \arrow[r] & E' \arrow[r] & G \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

El problema principal en el estudio de las extensiones de grupos es clasificar las extensiones de G por N salvo equivalencia. Si el grupo N es abeliano, este problema involucra sólo a los grupos de cohomología H^1 y H^2. En este breve capítulo daremos interpretaciones de HH^0_Q, HH^1_Q y HH^2_Q en donde este último grupo clasifica una generalización de las extensiones antes mencionadas.

3.1. $HH^0_Q(G,M)$ y $HH^1_Q(G,M)$

Ahora vamos a dar una interpretación de los grupos $HH^0_Q(G,M)$ y $HH^1_Q(G,M)$.

Sea M un Q-G módulo. Un elemento $f \in Hom_G(\mathbb{Z}[G],M)$ está determinado por un elemento $m \in M$. Es decir, $f(1) \in M$ determina por completo esta función, de hecho, $\varphi : Hom_G(\mathbb{Z}[G],M) \to M$, $f \mapsto f(1)$ es un isomorfismo. Además $\varphi(q \cdot f) = q \cdot f(1) = qf(q^{-1}1) = qf(1)$, es decir, φ es Q-lineal y así obtenemos un isomorfismo $Hom_G(\mathbb{Z}[G],M)^Q \cong M^Q$.

El kernel de la aplicación

$$\psi : M^Q \to Hom_G(B_1(G),M)^Q$$

$$m \mapsto f_m$$

$$f_m([g]) = (g-1)m$$

coincide con $HH^0_Q(G,M)$ ya que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} Hom_G(\mathbb{Z}[G],M)^Q \arrow[r, "\delta^0"] \arrow[d, "\varphi"'] & Hom_G(B_1(G),M)^Q \arrow[d, "1_{Hom_G(B_1(G),M)^Q}"] \\ M^Q \arrow[r, "\psi"'] & Hom_G(B_1(G),M)^Q. \end{tikzcd}$$

De esta manera, un elemento $m \in M^Q$ está en el kernel de ψ si y sólo si $f_m[g] = 0$ para cada $g \in G$ pero esto es equivalente a decir que $m \in M^G$ así que $HH^0_Q(G,M) = M^Q \cap M^G$. Por otra parte, $g(qm) = q((q^{-1}g)m) = qm$ para cada $q \in Q$, $m \in M^G$, es decir, Q actúa sobre M^G y así podemos escribir:

$$HH^0_Q(G,M) = (M^G)^Q.$$

$H^1_Q(G,M)$ está dado en términos de las derivaciones que definimos a continuación:

Definición 3.1.1. Una **derivación Q-equivariante** de G en M es una función Q-equivariante $d : G \to M$ tal que $d(g_1g_2) = d(g_1) + g_1d(g_2)$ para cada $g_1, g_2 \in G$. El conjunto de Q-derivaciones lo denotaremos por $Der_Q(G,M)$. Cada elemento $m \in M^Q$ define una derivación Q-equivariante $d_m : G \to M$ dada por $d_m(g) = (g-1)m$, a estas derivaciones las llamaremos **Q-derivaciones internas**. Al conjunto de Q-derivaciones internas lo denotaremos por $IDer_Q(G,M) = \{d_m \mid m \in M^Q\}$.

Para calcular $HH^1_Q(G,M)$ vamos a considerar la sucesión:

$$M^Q \xrightarrow{\psi} Hom_G(B_1(G),M)^Q \xrightarrow{\delta^1} Hom_G(B_2(G),M)^Q$$

donde $\delta^1 f([g_1 \mid g_2]) = g_1 f([g_2]) - f([g_1g_2]) + f([g_1])$ así que $f \in ker(\delta^1)$ si y sólo si $f([g_1g_2]) = g_1 f([g_2]) + f([g_1])$ para cada $g_1, g_2 \in G$. Entonces $ker(\delta^1) \cong Der_Q(G,M)$.

Por otra parte, $Im(\psi) = \{\psi(m) \mid m \in M^Q\} = \{f_m \mid m \in M^Q\} = IDer_Q(G,M)$. Por lo tanto, hemos obtenido

$$HH^1_Q(G,M) = ker(\delta^1)/Im(\psi) = Der_Q(G,M)/IDer_Q(G,M).$$

3.2. Extensiones Q-equivariantes

Definición 3.2.1. Sea Q un grupo. Una **extensión Q-equivariante** de grupos es una sucesión exacta

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 1$$

donde A, B y C son Q-grupos y además α y β son Q-equivariantes.

Sea M un Q-G módulo y

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

una extensión Q-equivariante. Esta extensión induce una acción de G sobre M de la siguiente manera:

$$i(g \cdot m) = xi(m)x^{-1}$$

donde $\pi(x) = g$. Si $x' \in E$ es tal que $\pi(x') = g$, entonces existe $m' \in M$ tal que $x' = i(m')x$ entonces $x'i(m)x'^{-1} = xi(m')i(m)i(m')^{-1}x^{-1} = xi(m'mm'^{-1})x^{-1} = xi(m)x^{-1}$ así que $g \cdot m$ no depende de la elección de x.

Por otra parte, $q(g \cdot m) = q(xi(m)x^{-1}) = qxqi(m)q(x^{-1}) = qxi(qm)(qx)^{-1} = qg \cdot (qm)$. Por lo tanto con esta acción, M adquiere una estructura de Q-G módulo donde la acción de G no necesariamente es igual a la acción original de G sobre M.

Definición 3.2.2. Dos extensiones Q-equivariantes $1 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 1$ y $1 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B' \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 1$ son equivalentes si existe un morfismo de grupos Q-equivariante $\eta : B \to B'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "1_A"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\eta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "1_C"] & 1 \\
1 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & B' \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Si G es un Q-grupo y M es un Q-G módulo, denotaremos por $Ext_Q(G,M)$ al conjunto de clases de equivalencia de extensiones de la forma

$$1 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} G \longrightarrow 1$$

que inducen la misma estructura original del Q-G módulo M y que poseen una sección equivariante, es decir, que existe una función de conjuntos $s : G \to E$ tal que $\beta(s(g)) = g$, $s(qg) = qs(g)$ para cada $g \in G$, $q \in Q$.

Ejemplo 3.2.1. Como $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n]$ es un $\mathbb{Z}_2$-$\mathbb{Z}_n$ módulo, $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n] \rtimes \mathbb{Z}_n$ es un $\mathbb{Z}_2$-grupo. Entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n] \xrightarrow{i} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n] \rtimes \mathbb{Z}_n \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0$$

con i la inclusión natural y π la proyección natural, es una extensión $\mathbb{Z}_2$-equivariante que admite una sección equivariante normalizada $s : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n] \rtimes \mathbb{Z}_n$, $x \mapsto (0,x)$.

Es bien sabido que el segundo grupo de cohomología usual $H^2(G,M)$ clasifica extensiones de G por M (ver [Bro82]), aquí presentamos una clasificación de extensiones equivariantes.

Teorema 3.2.1. *Sea M un Q-G módulo. Existe una biyección entre $HH^2_Q(G,M)$ y $Ext_Q(G,M)$.*

Demostración: Definimos $\varphi : HH^2_Q(G,M) \to Ext_Q(G,M)$ de la siguiente manera: sea $\overline{f} \in HH^2_Q(G,M)$ donde $f \in Hom_G(B_2(G),M)^Q$ es un representante de la clase de cohomología, es decir, satisface la siguiente ecuación:

$$g_1 f([g_2 \mid g_3]) - f([g_1g_2 \mid g_3]) + f([g_1 \mid g_2g_3]) - f([g_1 \mid g_2]) = 0$$

para cada $g_1, g_2, g_3 \in G$. De la ecuación anterior, se obtiene que:

$$f([1 \mid g]) = f([1 \mid 1])$$

$$f([g \mid 1]) = g f([1 \mid 1])$$

y ya que $f([1 \mid 1])$ es un Q-punto fijo, definimos $h \in Hom_G(B_1(G),M)^Q$ como $h([g]) = f([1 \mid 1])$, entonces $f' = f - \partial h \in Hom_G(B_2(G),M)^Q$ está en la misma clase de cohomología de f y satisface que:

$$f'([1 \mid g]) = f([1 \mid g]) - f([1 \mid 1]) = 0,$$

$$f'([g \mid 1]) = f([g \mid 1]) - g f([1 \mid 1]) = 0.$$

A un cociclo que satisface estas condiciones se le llama cociclo normalizado. Entonces hemos visto que toda clase de cohomología $\bar{f} \in HH^2_Q(G,M)$ contiene un cociclo normalizado. De esta forma, podemos suponer que f es normalizado.

El conjunto $M \times G$ con el siguiente producto:

$$(m_1, g_1)(m_2, g_2) = (f[g_1 \mid g_2] + m_1 + g_1 m_2, g_1 g_2),$$

es un grupo el cual denotamos por $M \times_f G$. Además, gracias a que f es Q-lineal, la acción diagonal de Q sobre $M \times_f G$ satisface que

$$q(m_1, g_1)(m_2, g_2) = q(f[g_1 \mid g_2] + m_1 + g_1 m_2, g_1 g_2)$$

$$= (f[qg_1 \mid qg_2] + qm_1 + (qg_1)qm_2, qg_1qg_2) = q(m_1,g_1)q(m_2,g_2)$$

y así tenemos una acción diagonal $Q \to Aut(M \times_f G)$.

Sea $i : M \to M \times_f G$, $i(m) = (m,1)$ y $\pi : M \times_f G \to G$, $\pi(m,g) = g$ y obtenemos una extensión equivariante

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} M \times_f G \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

la cual define la misma estructura de G-módulo en M que la original y admite una sección Q-equivariante normalizada $s : G \to M \times_f G$, $s(g) = (0,g)$. Si f' es otro cociclo invariante normalizado tal que $\overline{f} = \overline{f'}$, entonces existe una cocadena normalizada $\mu \in Hom_G(B_1(G),M)^Q$ tal que

$$f' = f - \partial\mu$$

y así, definimos $\theta : M \times_f G \to M \times_{f'} G$, $\theta(m,g) = (\mu([g]) + m, g)$ el cual es un morfismo de grupos Q-equivariante y hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "1_M"] & M \times_f G \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & G \arrow[r] \arrow[d, "1_G"] & 1 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & M \times_{f'} G \arrow[r] & G \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

De esta forma, φ está bien definida.

Sea $\psi : Ext_Q(G,M) \to HH^2_Q(G,M)$ la función dada de la siguiente manera: Sea

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

una extensión equivariante de Q-grupos con una sección equivariante $s : G \to E$. Sean $g_1, g_2 \in G$ entonces

$$\pi(s(g_1)s(g_2)) = \pi(s(g_1g_2))$$

y como E es un grupo y el morfismo $i : M \to E$ es inyectivo, existe un único elemento $a_{(g_1,g_2)} \in M$ que depende de la pareja (g_1,g_2) tal que $s(g_1)s(g_2) = i(a_{(g_1,g_2)})s(g_1g_2)$. Por otra parte, $a_{(qg_1,qg_2)} \in M$ es el único elemento tal que

$$s(qg_1)s(qg_2) = i(a_{(qg_1,qg_2)})s(qg_1qg_2)$$

pero $i(qa_{(g_1,g_2)})$ también satisface la ecuación anterior gracias a que s es Q-equivariante. De esta manera hemos obtenido un elemento $f \in Hom_g(B_2(G),M)^Q$ definido como $f([g_1 \mid g_2]) = a_{(g_1,g_2)}$. Gracias a la asociatividad de E, f es un 2-cociclo invariante y definimos $\psi(E) = \overline{f} \in HH^2_Q(G,M)$.

Si s' es otra sección equivariante, entonces existe $y: G \to M$ tal que $s'(g) = y(g)s(g)$. Es fácil ver que $y(qg) = qy(g)$ así que hemos definido una cocadena invariante $y \in Hom_G(B_1(G), M)^Q$. Sea f' el 2-cociclo definido por s', entonces también es fácil ver que $f' = f + \partial y$. Por lo tanto $\overline{f} = \overline{f'}$ y así $\psi(E)$ no depende de la sección elegida.

Supongamos ahora que E y E' son dos extensiones equivalentes, es decir, existe un diagrama conmutativo equivariante:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d] & E \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\eta"] & G \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i'"] & E' \arrow[r, "\pi'"] & G \arrow[r] & 1. \end{tikzcd}$$

Sea s una sección equivariante de π, entonces $\eta \circ s$ es una sección equivariante de π' y podemos elegir esta sección ya que hemos demostrado que $\psi(E')$ no depende de la sección. Sean f y f' los 2-cociclos definidos por E y E' respectivamente, entonces

$$s'(g_1)s'(g_2) = \eta(s(g_1)s(g_2)) = \eta(i(f(g_1,g_2)))\eta(s(g_1g_2)) = i'(f(g_1,g_2))s'(g_1g_2).$$

Por lo tanto, $f = f'$ y así, $\psi(E) = \psi(E')$.

Sea $\overline{f} \in HH_Q^2(G,M)$ y $s: G \to M \times_f G$, $s(g) = (0,g)$ una sección definida en $\varphi(\overline{f})$, entonces $s(g_1)s(g_2) = (f(g_1,g_2),1)s(g_1g_2)$ y así, $\psi(\varphi(\overline{f})) = \overline{f}$.

Sea $E \in Ext_Q(G,M)$ y f el 2-cociclo definido por una sección s de E. Definimos $\gamma: E \to M \times_f G$, $\gamma(e) = (e(s(\pi(e)))^{-1}, \pi(e))$ el cual es equivariante y hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d] & E \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\gamma"] & G \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i'"'] & M \times_f G \arrow[r, "\pi"'] & G \arrow[r] & 1. \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\varphi(\psi(E)) = E$ y así, $HH_Q^2(G,M) \cong Ext_Q(G,M)$. □

El siguiente corolario dice que bajo ciertas condiciones el grupo de cohomología de Knudson $H_Q^2(G,A)$ también clasifica extensiones.

Corolario 3.2.1. *Si A es un Q-G módulo con acciones triviales y $|Q|$ es invertible en A entonces $H_Q^2(G,A)$ clasifica extensiones equivariantes*

$$0 \to A \to E \to G \to 0$$

que poseen una sección Q-equivariante y que inducen sobre A una acción G-trivial.

Demostración: Se sigue directamente del isomorfismo de la Proposición 2.3.2. □

Capítulo 4

Q-Grupos libres

Ya hemos visto que en general $B_n(G)$ no es proyectivo en Q-G $\mathscr{M}od$. Sin embargo, cuando la acción $Q \to Aut(G)$ es libre, podemos asegurar que $B_n^N(G)$ es proyectivo (de hecho libre) en Q-G $\mathscr{M}od$ para $n > 0$. Después de ver esto demostraremos que podemos reemplazar la resolución barra $B(G)$ por la resolución barra normalizada $B^N(G)$ en la definición de $HH_Q^*(G,M)$. En este capítulo estudiaremos la cohomología de este tipo de acciones.

4.1. Acciones libres

Estrictamente cualquier acción $Q \to Aut(G)$ no es libre ya que el elemento neutro $1 \in G$ es un punto fijo. Así que establecemos la siguiente definición en la categoría de grupos.

Definición 4.1.1. Sean Q y G grupos tal que Q actúa sobre G por automorfismos. Decimos que la acción $Q \to Aut(G)$ es **libre** si el grupo de isotropía de cada elemento no trivial, es trivial. Es decir, $Q_g = \{1\}$ para cada $g \neq 1$. Este es un caso particular de acción semi-libre.

Nota 4.1.1. Si G y G' son Q-grupos donde la acción $Q \to Aut(G)$ es libre y $\pi : G' \to G$ es un morfismo de Q-grupos sobreyectivo, entonces podemos definir una sección Q-equivariante $s : G \to G'$ de la siguiente manera: Primero definimos $s(1) = 1$. Tomamos un representante g de cada Q-órbita de $G \setminus \{1\}$ y definimos $s(g) = g'$ donde $g' \in G'$ es cualquier elemento con $\pi(g') = g$. Finalmente, definimos $s(qg) = qg'$ para cada $q \in Q$. Esta asignación está bien definida ya que la acción de Q sobre G es libre. De esta forma, en el teorema 3.2.1 se puede prescindir de la hipótesis de la existencia de una sección normalizada Q-equivariante ya que esta siempre existe si la acción es libre.

Proposición 4.1.1. *Si la acción de Q sobre G es libre, entonces para cada $n > 0$, $B_n^N(G)$ es libre en Q-G $\mathscr{M}od$ y por lo tanto proyectivo.*

Demostración: Una $\mathbb{Z}[G]$-base de $B_n^N(G)$ es el conjunto $\{[g_1 \mid \cdots \mid g_n] \mid g_i \in G, g_i \neq 1\}$ y como Q actúa libremente sobre G, Q actúa libremente sobre esta base. Por lo tanto $B_n^N(G)$ es libre para $n > 0$. $\square$

A diferencia de la resolución barra normalizada $B^N(G)$, no podemos asegurar que los Q-G módulos $B_n(G)$ sean proyectivos ya que estos siempre contienen al Q-punto fijo $[1 \mid \cdots \mid 1]$ aunque la acción de Q sea libre.

Como $B_n^N(G)$ es proyectivo para $n \geq 1$, existen morfismos de Q-G módulos $\alpha_n : B_n^N(G) \to B_n(G)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & B_3^N(G) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"] & B_2^N(G) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & B_1^N(G) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & \mathbb{Z}[G] \arrow[r] \arrow[d, "1_{\mathbb{Z}[G]}"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "1_{\mathbb{Z}}"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & B_3(G) \arrow[r] & B_2(G) \arrow[r] & B_1(G) \arrow[r] & \mathbb{Z}[G] \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Es decir, a partir de $n = 1$ podemos completar a un morfismo de complejos de cadenas $\alpha : B^N(G) \to B(G)$ única salvo homotopía en la categoría de complejos de Q-G módulos. Por otra parte, la proyección natural $\pi : B(G) \to B^N(G)$ es un morfismo de complejos de cadenas de Q-G módulos, entonces la composición $\pi \circ \alpha$ es homotópica a la identidad $1_{B^N(G)} : B^N(G) \to B^N(G)$ en la categoría Q-$G\mathscr{M}od$, así que esta composición induce la identidad en cohomología,

$$1_{H^*(Hom_G(B^N(G),M)^Q)} = \alpha^* \circ \pi^* : H^*(Hom_G(B^N(G),M)^Q) \to HH_Q^*(G,M) \to H^*(Hom_G(B^N(G),M)^Q),$$

pero no podemos aplicar el mismo argumento para la composición $\alpha \circ \pi$ ya que los Q-G módulos $B_n(G)$ no son proyectivos. La aplicación $\pi^* : H^*(Hom_G(B^N(G),M)^Q) \to HH_Q^*(G,M)$ es inyectiva y para demostrar que es sobreyectiva, vamos a demostrar que cada clase de cohomología $\bar{f} \in HH_Q^n(G,M)$ contiene un cociclo normalizado Q-lineal, es decir, que existe un cociclo $f' \in Hom_G(B_n(G),M)^Q$ con $f'([g_1 \mid \cdots \mid g_n]) = 0$ si algún $g_i = 1$, tal que $\bar{f} = \bar{f}'$.

Definición 4.1.2. Una cocadena $f \in Hom_G(B_n(G),M)^Q$ es ***i*-normalizada** si $f([g_1 \mid \cdots \mid g_n]) = 0$ para cualquier tupla $(g_1, \ldots, g_n)$ con $g_k = 1$ para algún $1 \leq k \leq i$.

Dado un cociclo $f \in Hom_G(B_n(G),M)^Q$ definimos $f_i \in Hom_G(B_n(G),M)^Q$ para cada $0 \leq i \leq n$ y $h_i \in Hom_G(B_{n-1}(G),M)^Q$ para cada $1 \leq i \leq n$ de manera recursiva:

$$f_0 = f,\ \ f_i = f_{i-1} - \delta h_i,\ \ h_i([g_1 \mid \cdots \mid g_{n-1}]) = (-1)^{i-1} f_{i-1}([g_1 \mid \cdots \mid g_{i-1} \mid 1 \mid g_i \mid \cdots \mid g_{n-1}]).$$

Proposición 4.1.2. *Cada f_i es i-normalizada.*

Demostración: Procedemos por inducción sobre i. Para $i = 0$, el resultado es inmediato ya que cualquier cocadena es una cocadena 0-normalizada. Suponemos que el resultado es válido para $i - 1$ y vamos a demostrar que el resultado es válido para i. Ya que f_{i-1} es $i-1$-normalizada, h_i es $i-1$-normalizada, entonces es fácil ver que δh_i es $i-1$ normalizada y de este modo, f_i es $i-1$-normalizada. Para probar que f_i es i-normalizada, sólo hay que demostrar que $f_i([g_1 \mid \cdots \mid g_{i-1} \mid 1 \mid g_{i+1} \mid \cdots \mid g_n]) = 0$. Para esto, vemos directamente de la definición que $\delta f_n = \delta f_{n-1} = \cdots = \delta f = 0$, entonces,

$$
\begin{aligned}
&f_i([g_1 \mid \cdots \mid g_{i-1} \mid 1 \mid g_{i+1} \mid \cdots \mid g_n]) = \\
&f_{i-1}([g_1 \mid \cdots \mid g_{i-1} \mid 1 \mid g_{i+1} \mid \cdots \mid g_n]) - \delta h_i([g_1 \mid \cdots \mid g_{i-1} \mid 1 \mid g_{i+1} \mid \cdots \mid g_n]) \\
&= f_{i-1}([g_1 \mid \cdots \mid g_{i-1} \mid 1 \mid g_{i+1} \mid \cdots \mid g_n]) - g_1 h_i([g_2 \mid \cdots \mid g_{i-1} \mid 1 \mid g_{i+1} \mid \cdots \mid g_n]) \\
&- \sum_{1 \le j \le i-2} (-1)^j h_i([g_1 \mid \cdots \mid g_j g_{j+1} \mid \cdots \mid g_{i-1} \mid 1 \mid g_{i+1} \mid \cdots \mid g_n]) \\
&- \sum_{i+1 \le j \le n-1} (-1)^j h_i([g_1 \mid \cdots \mid g_{i-1} \mid 1 \mid g_{i+1} \mid \cdots \mid g_j g_{j+1} \mid \cdots \mid g_n]) \\
&+ (-1)^{n+1} h_i([g_1 \mid \cdots \mid g_{i-1} \mid 1 \mid g_{i+1} \mid \cdots \mid g_{n-1}]) = f_{i-1}([g_1 \mid \cdots \mid g_{i-1} \mid 1 \mid g_{i+1} \mid \cdots \mid g_n]) \\
&- \sum_{i+1 \le j \le n-1} (-1)^{j+i-1} f_{i-1}([g_1 \mid \cdots \mid g_{i-1} \mid 1 \mid 1 \mid g_{i+1} \mid \cdots \mid g_j g_{j+1} \mid \cdots \mid g_n]) \\
&+ (-1)^{n+i} f_{i-1}([g_1 \mid \cdots \mid g_{i-1} \mid 1 \mid 1 \mid g_{i+1} \mid \cdots \mid g_{n-1}]) \\
&= (-1)^{i-1} \delta f_{i-1}([g_1 \mid \cdots \mid g_{i-1} \mid 1 \mid 1 \mid g_{i-1} \mid \cdots \mid g_n]) = 0. \quad \square
\end{aligned}
$$

Con esto podemos ver que f_n es n-normalizada pero esto es equivalente a decir que f_n es normalizada. Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
f - f_n &= (f - f_1) + (f_1 - f_2) + \cdots + (f_{n-1} - f_n) \\
&= \delta h_1 + \delta h_2 + \cdots + \delta h_n = \delta \left(\sum_i h_i \right)
\end{aligned}
$$

y $\sum_i h_i$ es una cocadena Q-lineal en $Hom_G(B_{n-1}(G), M)^Q$. Por lo tanto f y f_n representan la misma clase de cohomología invariante en $HH_Q^n(G,M)$ y de esta manera, f_n se factoriza por medio de un cociclo $f' \in Hom_G(B_n^N(G), M)^Q$, es decir, $f' \circ \pi = f_n$. Entonces $\pi^*(\bar{f}') = \bar{f}_n = \bar{f} \in HH_Q^n(G,M)$. Por lo tanto hemos demostrado que la aplicación

$$\pi^* : H^n(Hom_G(B^N(G), M)^Q) \to HH_Q^n(G,M)$$

es sobreyectiva y así, un isomorfismo. De esta manera hemos obtenido la siguiente proposición:

Proposición 4.1.3. *Si la acción $Q \to Aut(G)$ es libre, entonces la aplicación natural*

$$\pi^* : H^n(Hom_G(B^N(G), M)^Q) \to HH_Q^n(G,M)$$

es un isomorfismo para cada $n \ge 0$. Por lo tanto, podemos sustituir la resolución barra $B(G)$ por la resolución barra normalizada $B^N(G)$.

Si A y B son Q-G módulos, denotaremos por $Ext^n_{Q\text{-}G}(A,B)$ al enésimo funtor derivado de $Hom_{Q\text{-}G}(\text{-},M)$ $= Hom_G(\text{-},M)^Q$, es decir, si F es cualquier resolución proyectiva de A en Q-$G\mathscr{M}od$, entonces

$$Ext^n_{Q\text{-}G}(A,B) = H^n(Hom_G(F,B)^Q).$$

A continuación vamos a demostrar que la cohomología invariante $HH^*_Q(G,M)$ de acciones libres se puede calcular mediante un funtor derivado $Ext^*_{Q\text{-}G}(A,B)$ para ciertos Q-G módulos A y B.

Aún cuando la acción de Q sobre G es libre, $B^N_0(G) = \mathbb{Z}[G]$ no necesariamente es proyectivo y por lo tanto $HH^n_Q(G,M)$ no necesariamente coincide con $Ext^n_{Q\text{-}G}(\mathbb{Z},M)$. Denotemos por $I_G = ker(\varepsilon) = \{\sum n_g g \in \mathbb{Z}[G] \mid \sum n_g = 0\}$ al ideal de aumentación. Entonces podemos considerar la siguiente sucesión:

$$B^N(I_G): \qquad \cdots \longrightarrow B^N_2(G) \xrightarrow{d_2} B^N_1 G \xrightarrow{d_1} I_G \longrightarrow 0$$

que es una resolución proyectiva de I_G en Q-$G\ \mathscr{M}od$. Procederemos a continuación a calcular $Ext^n_{Q\text{-}G}(I_G,M)$, para esto, aplicamos $Hom_G(-,M)^Q$ a la resolución $B^N(I_G)$ y obtenemos:

$$Hom_G(B^N_1(G),M)^Q \xrightarrow{\delta'^0} Hom_G(B^N_2(G),M)^Q \xrightarrow{\delta'^1=\delta^2} Hom_G(B^N_3(G),M)^Q \xrightarrow{\delta'^2=\delta^3} \cdots$$

Entonces podemos observar que

$$Ext^n_{Q\text{-}G}(I_G,M) = ker(\delta'^n)/Im(\delta'^{n-1}) = ker(\delta^{n+1})/Im(\delta^n) = HH^{n+1}_Q(G,M) \quad \text{para } n \geq 1.$$

Para $n = 0$, podemos ver que el funtor $Hom_G(\text{-},M)^Q$ es composición de los funtores $Hom_G(\text{-},M)$ y $(\text{-})^Q$ y estos últimos son exactos izquierdos así que $Hom_G(\text{-},M)^Q$ es exacto izquierdo, por lo tanto,

$$Ext^0_{Q\text{-}G}(I_G,M) = ker(\delta'^0) = Hom_G(I_G,M)^Q.$$

Ahora consideremos la aplicación:

$$\eta : Hom_G(I_G,M) \to Der(G,M), \ \ f \mapsto d_f,$$

donde $d_f(g) = f(g-1)$. Esta aplicación está bien definida ya que

$$d_f(g_1g_2) = f(g_1g_2 - 1) = f(g_1g_2 - g_1 + g_1 - 1)$$

$$= g_1 f(g_2 - 1) + f(g_1 - 1) = g_1 d_f(g_2) + d_f(g_1).$$

Además, $\eta(q \cdot f)(g) = qf(q^{-1}g - 1) = qd_f(q^{-1}g) = q \cdot d_f(g)$ así que η es un morfismo de Q-módulos. Por otra parte, definimos:

$$\mu : Der(G,M) \to Hom_G(I_G,M), \ \mu(d)(g-1) = d(g)$$

y está bien definida ya que:

$$\mu(d)(g'(g-1)) = \mu(d)(g'g-1+1-g') = d(g'g)-d(g') = g'd(g) = g'\mu(d)(g-1)$$

y η es la inversa de μ. Entonces,

$$Ext^0_{Q-G}(I_G, M) = Hom_G(I_G, M)^Q \cong Der_Q(G, M).$$

Por lo tanto, obtenemos la siguiente descripción de $HH^n_Q(G,M)$:

$$HH^n_Q(G,M) = \begin{cases} (M^G)^Q & n = 0, \\ \\ Ext^0_{Q\text{-}G}(I_G, M)/IDer_Q(G,M) & n = 1, \\ \\ Ext^{n-1}_{Q\text{-}G}(I_G, M) & n \geq 2. \end{cases}$$

Si A es un Q-G módulo trivial, entonces $IDer_Q(G,A) = 0$ y así obtenemos:

$$HH^n_Q(G,A) = \begin{cases} A & n = 0, \\ \\ Ext^{n-1}_{Q\text{-}G}(I_G, M) & n \geq 1. \end{cases}$$

Las siguientes dos proposiciones son resultados análogos a resultados en la categoría de G-módulos y se pueden consultar por ejemplo en [Bro82].

Proposición 4.1.4. *Sea $f : C' \to C$ una equivalencia débil de complejos de cadenas de Q-G módulos e I un complejo de cocadenas no negativo de Q-G módulos inyectivos, entonces*

$$Hom_{Q\text{-}G}(f, I) : Hom_{Q\text{-}G}(C, I) \to Hom_{Q\text{-}G}(C', I)$$

es una equivalencia débil.

Demostración: Sea C'' el cono de f. Como $f : C' \to C$ es una equivalencia débil, C'' es acíclico. Por la propiedad universal de la suma directa, el cono de $Hom_{Q\text{-}G}(f, I)$ es $Hom_{Q\text{-}G}(C'', I)$ y este es acíclico ya que $H_n(Hom_{Q\text{-}G}(C'', I)) = [C'', I]_n = [\Sigma^n C'', I] = 0$ porque los módulos I_n son Q-G inyectivos, I es no negativo y $\Sigma^n C''$ es acíclico. □

Proposición 4.1.5. *Supongamos que $f : C' \to C$ una equivalencia débil entre complejos de cocadenas de Q-G módulos y P un complejo de cadenas no negativo de Q-G módulos proyectivos, entonces*

$$Hom_{Q\text{-}G}(P, f) : Hom_{Q\text{-}G}(P, C') \to Hom_{Q\text{-}G}(P, C)$$

es una equivalencia débil.

Demostración: Sea C'' el cono de $f : C' \to C$, entonces C'' es acíclico. Por la propiedad universal del producto directo, el cono de $Hom_{Q\text{-}G}(P, f)$ es $Hom_{Q\text{-}G}(P, C'')$. Además, $H_n(Hom_{Q\text{-}G}(P, C'')) = [P, C'']_n = [P, \Sigma^{-n} C''] = 0$ ya que C'' es acíclico, P es no negativo y los modulos P_n son Q-G proyectivos. $\square$

Sea $\eta : P \to I_G \to 0$ una resolución Q-G proyectiva de I_G y $\mu : 0 \to M \to I$ una resolución Q-G inyectiva del Q-G módulo M. Entonces podemos calcular la cohomología invariante de las dos formas:

$$H^n(Hom_{Q\text{-}G}(P, M)) = H^n(Hom_{Q\text{-}G}(I_G, I))$$

y de esta forma obtenemos la siguiente proposición (lo que no ocurre en el caso general):

Proposición 4.1.6. *Si Q actúa libremente sobre G y M es un Q-G módulo inyectivo, entonces $HH^n_Q(G, M) = 0$ para cada $n \geq 2$.*

4.2. El transfer

A continuación vamos a contruir una aplicación en el sentido contrario de la restricción (sección 2.6) para $Ext^*_{Q\text{-}G}(I_G, M)$. Para esto, necesitaremos una clase especial de Q-subgrupos de G y el siguiente lema que resulta ser un corolario del teorema 2.2.1.

Lema 4.2.1. *Sea H un Q-subgrupo de G. Si M es un Q-G módulo proyectivo, entonces $Res^G_H(M)$ es un Q-H módulo proyectivo.*

Definición 4.2.1. Un Q-subgrupo H de G es **adecuado** si H es de índice finito y si existe un conjunto de representantes E de G/H donde denotaremos por $\overline{g}$ al único elemento en E tal que $Hg = H\overline{g}$, que satisfacen $\overline{qg} = q\overline{g}$ y $\overline{1} = 1$.

Ejemplo 4.2.1. Sea $Q = \mathbb{Z}_2 = \langle t \mid t^2 \rangle$ y $G = \mathbb{Z}_{2^s k}$ con k impar donde Q actúa sobre G por

$$t : \mathbb{Z}_{2^s k} \to \mathbb{Z}_{2^s k}, \ \ n \mapsto -n.$$

Entonces el subgrupo $H = \langle k \rangle$ es un Q-subgrupo adecuado de G ya que el conjunto

$$\left\{0, 1, 2k-1, 2, 2k-2, \ldots, \frac{k-1}{2}, \frac{k+1}{2}\right\}$$

es un conjunto de representantes que satisfacen las condiciones de la definición anterior.

Supongamos que H es un Q-subgrupo adecuado de G y E un conjunto de representantes como en la definición anterior. Definimos:

$$\eta : G \to H, \ \ \eta(g) = g\overline{g}^{-1}.$$

Esta función satisface

$$\begin{aligned}\eta(qg) &= (qg)(\overline{qg})^{-1}\\ &= (qg)(q\overline{g})^{-1} = (qg)(q\overline{g}^{-1})\\ &= q(g\overline{g}^{-1}) = q\eta(g),\end{aligned}$$

para cada $q \in Q$, $g \in G$, es decir, η es Q-equivariante. Por otra parte,

$$\eta(hg) = (hg)(\overline{hg})^{-1} = (hg)(\overline{g})^{-1} = h\eta(g),$$

para cada $h \in H$, $g \in G$, es decir, η es H-equivariante. Esta aplicación induce un morfismo:

$$\widetilde{\eta} : I_G \to I_H,\ \ g - 1 \mapsto \eta(g) - 1$$

de H-Q módulos donde consideramos a I_G como un H-Q módulo por restricción.

Sea P' una resolución proyectiva del Q-G módulo I_G y P una resolución proyectiva del Q-H módulo I_H. Por el lema anterior, $Res_H^G(P')$ es un complejo acíclico de Q-H módulos proyectivos, entonces existe un único morfismo de complejos de cadenas

$$\mu : Res_H^G(P') \to P$$

(salvo Q-H homotopía) de Q-H módulos tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} Res_H^G(P') \arrow[r] \arrow[d, "\mu"'] & Res_H^G(I_G) \arrow[d, "\widetilde{\eta}"] \\ P \arrow[r] & I_H. \end{tikzcd}$$

Por otra parte, si N es un Q-G módulo, tanto N^H como N^G son Q-módulos y la aplicación

$$t : N^H \to N^G,\ \ t(n) = \sum_{g \in E} gn$$

es un morfismo de Q-módulos. Vamos a considerar el caso cuando $N = Hom(P', M)$ y

$$t : Hom_H(P', M) \to Hom_G(P', M).$$

Sea $f : P_n \to M$ un cociclo en $Hom_H(P_n, M)^Q$, entonces definimos el transfer como sigue:

$$tr^n : Ext^n_{Q\text{-}H}(I_H, M) \to Ext^n_{Q\text{-}G}(I_G, M),\ \ \overline{f} \mapsto t(f \circ \mu) = \sum_{g \in E} g \cdot (f \circ \mu).$$

Esta asignación no depende ni de las resoluciones proyectivas ni del morfismo de complejos de cadenas elegida μ. De esta forma, cuando la acción $Q \to Aut(G)$ es libre, tenemos un transfer para $HH_Q^*(G, M)$ para $n \geq 2$ ya que un Q-subgrupo de G es un Q-subgrupo libre o el grupo trivial y así $Ext^n_{Q\text{-}H}(I_H, M) = HH_Q^{n+1}(H, M)$ para $n \geq 1$.

Proposición 4.2.1. *Supongamos que G es un Q-grupo libre y que H es un Q-subgrupo adecuado. Entonces*

$$tr \circ Res_H^G = (G:H)id : HH_Q^n(G,M) \to HH_Q^n(G,M)$$

para $n \geq 2$.

Demostración: Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[r] \arrow[d, "\mu"'] & I_G \arrow[d, "\tilde{\eta}"] \\ P \arrow[r] \arrow[d, "j"'] & I_H \arrow[d, "i"] \\ P' \arrow[r] & I_G \end{tikzcd}$$

donde P y P' son resoluciones proyectivas de cada ideal de aumentación respectivamente, entonces basta con encontrar una Q-H homotopía entre $j \circ \mu$ y $1_{P'}$. Podemos considerar las resoluciones barra de los ideales de aumentación pero recordemos que estas son restricciones de las resoluciones barra del módulo trivial $\mathbb{Z}$, así que podemos considerar el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & B_2^N(G) \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & B_1^N(G) \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & \mathbb{Z}[G] \arrow[r] \arrow[d, "\mu"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "1_{\mathbb{Z}}"] & 0 \\ \cdots \arrow[r] & B_2^N(H) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & B_1^N(H) \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & \mathbb{Z}[H] \arrow[r] \arrow[d, "i"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "1_{\mathbb{Z}}"] & 0 \\ \cdots \arrow[r] & B_2^N(G) \arrow[r] & B_1^N(G) \arrow[r] & \mathbb{Z}[G] \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde $i : B_n^N(H) \to B_n^N(G)$ es la inclusión natural y

$$\mu : B_n^N(G) \to B_n^N(H)$$

$$\mu(g_0, \ldots, g_n) = (\eta(g_0), \ldots, \eta(g_n))$$

es un morfismo de complejos de cadenas de Q-H módulos. Definimos $h_0 : \mathbb{Z}[G] \to B_1^N(G)$ por $h_0(g) = g(1, \overline{g}^{-1})$. Esta es una aplicación de Q-H módulos y satisface que $d \circ h_0 = i \circ \mu - 1_{\mathbb{Z}[G]}$ y como $B_n^N(G)$ es proyectivo para $n \geq 1$, podemos extender esta aplicación a una homotopía de Q-H módulos entre $i \circ \mu$ y $1_{B^N(G)}$ y al restringir a resoluciones de los ideales de aumentación, obtenemos la homotopía deseada. De esta manera, si $f \in Hom_G(B_n^N(G), M)^Q$ es un cociclo, entonces

$$tr \circ Res_H^G(\bar{f}) = \overline{\sum_{g \in E} g \cdot (f \circ i \circ \mu)} =$$

$$\overline{\sum_{g\in E} g\cdot(f\circ(d\circ h+h\circ d+1_{B^N(G)}))} = \overline{\sum_{g\in E} g\cdot(f\circ d\circ h+f\circ h\circ d+f)}$$

$$= \overline{f\circ d\circ \sum_{g\in E} g\cdot h+f\circ(\sum_{g\in E} g\cdot h)\circ d+\sum_{g\in E} g\cdot f} = \overline{f\circ(\sum_{g\in E} g\cdot h)\circ d}+\overline{(G:H)f} = \overline{(G:H)f}$$

□

Nota 4.2.1. La demostración anterior nos permite construir el transfer para $n = 0,1$ y de hecho el resultado anterior también es válido para $n = 0,1$.

Como consecuencia tenemos los siguientes corolarios. En el primero sólo hay que notar que si $(G : H)$ es invertible en M, entonces también es invertible en $HH^n_Q(G,M)$ y en el segundo corolario sólo hay que aplicar el primero al Q-subgrupo trivial $\{1\}$ que es adecuado.

Corolario 4.2.1. *Sea H un Q-subgrupo adecuado de G y sea M un Q-G módulo tal que $HH^n_Q(H,M) = 0$ para algún $n \geq 1$, entonces $HH^n_Q(G,M)$ es anulado por $(G : H)$. Si además, $(G : H)$ es invertible en M, entonces $HH^n_Q(G,M) = 0$.*

Corolario 4.2.2. *Si G es finito, entonces $HH^n_Q(G,M)$ es anulado por $|G|$ para $n > 0$. Si $|G|$ es invertible en M entonces $HH^n_Q(G,M) = 0$ para $n > 0$.*

4.3. Una sucesión espectral para la cohomología de acciones libres y semilibres.

En esta sección haremos algunos cálculos de cohomología invariante y presentamos una herramienta que se deriva del teorema 1.3.2 para calcular la cohomología invariante de acciones libres y semilibres.

Ejemplo 4.3.1. Sea Q un grupo y S un conjunto donde Q actúa libremente. Entonces el grupo libre $F(S)$ generado por S es un Q-grupo con acción inducida por la acción de Q sobre S. Entonces el ideal de aumentación $I_{F(S)}$ es un $\mathbb{Z}[F(S)]$-módulo libre con base $S-1 = \{s-1 \mid s \in S\}$ y además Q actúa libremente sobre dicha base. Así que $I_{F(S)}$ es proyectivo en Q-$G\,\mathscr{M}od$. Por lo tanto,

$$0 \longrightarrow I_{F(S)} \xrightarrow{1} I_{F(S)} \longrightarrow 0$$

es una resolución proyectiva de $I_{F(S)}$ en Q-$G\,\mathscr{M}od$. Por lo tanto, obtenemos:

$$H^n_Q(F(S),\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0, \\ Der_Q(F(S),\mathbb{Z}) & n = 1, \\ 0 & n \geq 2. \end{cases}$$

Ejemplo 4.3.2. Consideremos los grupos $Q = \mathbb{Z}_2 = \langle s \mid s^2 \rangle$ y $G = \mathbb{Z} = \langle t \rangle$. $\mathbb{Z}_2$ actúa libremente sobre $\mathbb{Z}$ por

$$s : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$$t \mapsto t^{-1}.$$

De esta manera, $\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}_2$-grupo libre. El ideal de aumentación $I_{\mathbb{Z}}$ es el $\mathbb{Z}[G]$-módulo libre generado por el elemento $t-1$ pero no es un $\mathbb{Z}_2$-$\mathbb{Z}$ módulo proyectivo. Una resolución proyectiva para este ideal es la siguiente:

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}[G](\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}[G](\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}[G](\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\varepsilon} I_{\mathbb{Z}} \longrightarrow 0$$

donde $\mathbb{Z}[G](\mathbb{Z}_2)$ es el $\mathbb{Z}_2$-$\mathbb{Z}$ módulo definido como en el ejemplo 2.2.3. El morfismo de aumentación está dado por:

$$\begin{aligned} \varepsilon : \mathbb{Z}[G](\mathbb{Z}_2) &\to I_{\mathbb{Z}} \\ x + ys &\mapsto (x - t^{-1}y)(t-1) \end{aligned}$$

y los diferenciales están dados por:

$$d_i(x+ys) = \begin{cases} x(1+ts) + yt^{-1}(1+ts), & i = 2k-1, \\ \\ x(1-ts) - yt^{-1}(1-ts), & i = 2k, \end{cases}$$

con $x, y \in \mathbb{Z}$. Consideremos al módulo de coeficientes $\mathbb{Z}$ como un $\mathbb{Z}_2$-$\mathbb{Z}$ módulo trivial. Al aplicar el funtor $Hom_G(-,\mathbb{Z})^Q$ se tiene que $Hom_G(I_{\mathbb{Z}},\mathbb{Z})^Q = Der_Q(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = 0$ y $Hom_G(\mathbb{Z}[G](\mathbb{Z}_2),\mathbb{Z})^Q \cong \mathbb{Z}$. Entonces, obtenemos el complejo de cocadenas:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \longrightarrow \cdots$$

por lo tanto,

$$Ext^n_{\mathbb{Z}_2-\mathbb{Z}}(I_{\mathbb{Z}},\mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & n = 2k, \\ \\ \mathbb{Z}_2 & n = 2k-1, \end{cases}$$

y

$$HH^n_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0, \\ \\ 0 & n = 2k-1, \\ \\ \mathbb{Z}_2 & n = 2k \geq 2. \end{cases}$$

Ahora deseamos aplicar el teorema 1.3.2 al complejo de cocadenas $Hom_G(B^N(G),M)^Q$, para esto es necesario que $H^n(Q,Hom_G(B_k^N(G),M)) = 0$ para cada $n > 0$ y $k \geq 0$.

Vamos a descomponer $Hom_G(B_k^N(G),M)$ usando la siguiente proposición. Pero antes introducimos algo de nomenclatura.

Si $\pi_1 : A \to B_1$ y $\pi_2 : A \to B_2$ son sobreyecciones de grupos abelianos, escribimos $\pi_1 \sim \pi_2$ si existe un isomorfismo $h : B_1 \to B_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & B_1 \arrow[d, "h"] \\ & B_2. \end{tikzcd}$$

Proposición 4.3.1 ([Bro82], Cap. 3 Prop 5.8)**.** *Sea N un Q-módulo tal que como grupo abeliano, admite una descomposición en producto directo $(\pi_i : N \to M_i)_{i\in I}$. Supongamos que existe una acción derecha transitiva de Q sobre I tal que $\pi_i q \sim \pi_{iq}$ para cada $i \in I$, $q \in Q$. Si H es el grupo de isotropía de algún $i \in I$, entonces M_i hereda una estructura de H-módulo de N y $N \cong Coind_H^G M_i$.*

Nota 4.3.1. La acción heredada de $h \in H = Q_i$ sobre M_i está dada por la existencia del isomorfismo $\varphi_h : M_i \to M_i$ mediante el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[d, "h"'] & M_i \arrow[d, "\varphi_h", "\cong"'] \\ N \arrow[r, "\pi_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

$Hom_G(B^N(G),M)$ admite una descomposición en producto directo de la siguiente manera:

$$Hom_G(B_n^N(G),M) \cong Hom_G\left(\bigoplus_{[g_{i_1}|\cdots|g_{i_n}]\in(G\setminus\{1\})^n} \mathbb{Z}[G][g_{i_1} \mid \cdots \mid g_{i_n}], M\right) \cong \prod_{[g_{i_1}|\cdots|g_{i_n}]\in(G\setminus\{1\})^n} M_{[g_{i_1}|\cdots|g_{i_n}]}$$

donde $M_{[g_{1_1}|\cdots|g_{i_n}]} \cong M$. Entonces la descomposición es

$$(\pi_{[g_{i_1}|\cdots|g_{i_n}]} : Hom_G(B_n^N(G),M) \to M_{[g_{i_1}|\cdots|g_{i_n}]})_{[g_{i_1}|\cdots|g_{i_n}]\in(G\setminus\{1\})^n}, \quad \pi_{[g_{i_1}|\cdots|g_{i_n}]}(f) = f([g_{i_1} \mid \cdots \mid g_{i_n}])$$

Por otra parte, se tiene una acción derecha de Q sobre $(G\setminus\{1\})^n$ dada por

$$[g_{i_1} \mid \cdots \mid g_{i_m}]q = q^{-1}[g_{i_1} \mid \cdots \mid g_{i_m}],$$

entonces $\pi_{[g_{i_1}|\cdots|g_{i_m}]}q \sim \pi_{q^{-1}[g_{i_1}|\cdots|g_{i_m}]}$ ya que

$$q^{-1}(q\cdot f([g_{i_1} \mid \cdots \mid g_{i_m}])) = q^{-1}(qf(q^{-1}[g_{i_1} \mid \cdots \mid g_{i_m}])) = f(q^{-1}[g_{i_1} \mid \cdots \mid g_{i_m}])$$

es decir, el isomorfismo $q^{-1} : M_{[g_{i_1}|\cdots|g_{i_m}]} \to M_{q^{-1}[g_{i_1}|\cdots|g_{i_m}]}$ hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Hom_G(B_n^N(G),M) \arrow[r, "q"] \arrow[drr, "\pi_{q^{-1}[g_{i_1}|\cdots|g_{i_m}]}"'] & Hom_G(B_n^N(G),M) \arrow[r, "\pi_{[g_{i_1}|\cdots|g_{i_m}]}"] & M_{[g_{i_1}|\cdots|g_{i_m}]} \arrow[d, "q^{-1}"] \\
& & M_{q^{-1}[g_{i_1}|\cdots|g_{i_m}]}
\end{tikzcd}$$

y la acción del grupo de isotropía $Q_{[g_{i_1}|\cdots|g_{i_m}]}$ sobre $M_{[g_{i_1}|\cdots|g_{i_m}]}$ inducida por la descomposición, coincide con la acción original del Q-G módulo M. Así que $Hom_G(B_n^N(G),M)$ satisface las hipótesis de la proposición 4.3.1 salvo por la transitividad de la acción sobre el conjunto de índices. Entonces separamos en órbitas:

$$Hom_G(B_n^N(G),M) \cong \prod_{[g_{i_1}|\cdots|g_{i_n}]\in(G\setminus\{1\})^n} M_{[g_{i_1}|\cdots|g_{i_n}]}$$

$$\cong \prod_{O\in(G\setminus\{1\})^n/Q} \left(\prod_{[g_{i_1}|\cdots|g_{i_n}]\in O} M_{[g_{i_1}|\cdots|g_{i_n}]} \right) \cong \prod_{O\in(G\setminus\{1\})^n/Q} Coind^{Q}_{Q_{[g_{i_1}|\cdots|g_{i_n}]}} M$$

y en este último producto la acción de Q es diagonal. De este modo y por el lema de Shapiro ([Bro82], Cap. 3, Prop 6.2):

$$H^n(Q, Hom_G(B_k^N(G),M)) = \prod_{O\in(G\setminus\{1\})^k/Q} H^n(Q_{[g_{i_1}|\cdots g_{i_k}]}, M)$$

y así hemos obtenido el siguiente Teorema en donde nos referimos a una acción semilibre en el sentido general, es decir, una acción $Q \to Aut(G)$ es semilibre si $Q_g = Q$ ó $Q_g = \{1\}$ para cada $g \in G$.

Teorema 4.3.1. *Si la acción $Q \to Aut(G)$ es semilibre y M es un Q-G módulo tal que como Q-módulo es Q-acíclico, entonces existe una sucesión espectral de la forma:*

$$E_2^{p,q} = H^p(Q, H^q(G,M)) \Rightarrow HH_Q^{p+q}(G,M).$$

Si la acción $Q \to Aut(G)$ es libre y M es un Q-G módulo arbitrario, entonces existe una sucesion espectral de la forma:

$$E_2^{p,q} = \begin{cases} H^p(Q, H^{q+1}(G,M)) & q > 0 \\ \\ H^p(Q, Der(G,M)) & q = 0 \end{cases} \Rightarrow Ext^{p+q}_{Q\text{-}G}(I_G, M).$$

Demostración: Para el primer caso, la descomposición descrita arriba para la resolución barra normalizada, aplica también para la resolución barra $B(G)$. $\mathscr{C} = Hom_G(B(G),M)$ es un complejo de cocadenas no negativo de Q-módulos. Si la acción $Q \to Aut(G)$ es semilibre y M es Q-acíclico, entonces $Q_{[g_{i_1}|\cdots|g_{i_n}]} = \{1\}$ o $Q_{[g_{i_1}|\cdots|g_{i_n}]} = Q$. En ambos casos:

$$H^n(Q,Hom_G(B_k(G),M)) = \prod_{O \in G^k/Q} H^n(Q_{[g_{i_1}|\cdots|g_{i_k}]},M) = 0$$

para $n > 0$ y por el teorema 1.3.2 existe una sucesión espectral de la forma:

$$E_2^{p,q} = H^p(Q,H^q(\mathscr{C})) \Rightarrow H^{p+q}(\mathscr{C}^Q) = HH_Q^{p+q}(G,M).$$

Para el segundo caso consideremos la resolución barra $B^N(I_G)$ del ideal de aumentación

$$\cdots \longrightarrow B_2^N(G) \longrightarrow B_1^N(G) \longrightarrow I_G \longrightarrow 0$$

y el complejo de cocadenas no negativo de Q-módulos $\mathscr{C} = Hom_G(B^N(G),M)$. Si la acción es libre y M es arbitrario, entonces $Q_{[g_{i_1}|\cdots|g_{i_n}]} = \{1\}$, de esta forma obtenemos:

$$H^n(Q,Hom_G(B_k^N(G),M)) = \prod_{O \in (G\setminus\{1\})^k/Q} H^n(Q_{[g_{i_1}|\cdots|g_{i_k}]},M) = 0$$

para $n \geq 1$ así que se satisfacen las condiciones del teorema 1.3.2 y existe una sucesión espectral de la forma:

$$E_2^{p,q} = H^p(Q,H^q(\mathscr{C})) \Rightarrow H^{p+q}(\mathscr{C}^Q) = Ext_{Q\text{-}G}^{p+q}(I_G,M)$$

y

$$H^q(\mathscr{C}) = H^q(Hom_G(B^N(G),M)) = \begin{cases} Der(G,M) & q = 0, \\ \\ H^{q+1}(G,M) & q > 0. \end{cases}$$

Lo cual concluye la demostración. $\square$

Ejemplo 4.3.3. Sea $G = \mathbb{Z}_n = \langle t \mid t^n \rangle$ con n impar, $Q = \mathbb{Z}_2 = \langle s \mid s^2 \rangle$ y $M = \mathbb{Z}$ con acciones triviales. La acción de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_n$ está dada por

$$s : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n,\ t \mapsto t^{-1}.$$

De esta forma, $\mathbb{Z}_n$ es un $\mathbb{Z}_2$-grupo libre ya que n es impar. Entonces existe una sucesión espectral de la forma:

$$E_2^{p,q} = \begin{cases} H^p(\mathbb{Z}_2,H^{q+1}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z})) & q \geq 1 \\ \\ H^p(\mathbb{Z}_2,Der(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z})) & q = 0 \end{cases} \Rightarrow Ext_{\mathbb{Z}_2-\mathbb{Z}_n}^{p+q}(I_{\mathbb{Z}_n},\mathbb{Z}).$$

Como $Der(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z})=0$, el renglón $E_2^{*,0}$ es cero. Para calcular $H^p(\mathbb{Z}_2,H^{q+1}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z}))$, tenemos que encontrar la acción de $\mathbb{Z}_2$ sobre $H^{q+1}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z})$ inducida por la acción de $\mathbb{Z}_2$ sobre la resolución barra de $\mathbb{Z}_n$. Dicha acción está inducida por el isomorfismo en la categoría de pares:

$$(\alpha_q,r_q):(G,M)\to(G,M),\ \ \alpha_q=q^{-1}g,\ \ r_q(x)=qx.$$

Para encontrar la acción de $s\in\mathbb{Z}_2$, basta encontrar un morfismo de complejos de cadenas $\{\tau_n\}$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n] \arrow[r, "N"] \arrow[d, "\tau_2"] & \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n] \arrow[r, "t-1"] \arrow[d, "\tau_1"] & \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n] \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\tau_0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "1_{\mathbb{Z}}"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n] \arrow[r, "N"'] & \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n] \arrow[r, "t-1"'] & \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n] \arrow[r, "\varepsilon"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

tal que $\tau_n(tx)=t^{-1}\tau_n(x)$ para cada $x\in\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n]$. La aplicación $\tau_k:\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n]\to\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n]$ está completamente determinada por el valor $\tau_k(1)\in\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n]$. Podemos obtener estos valores de manera recursiva:

$$\tau_k(1)=\begin{cases} 1 & k=4i,\\ -t^{-1} & k=4i+1,\\ -1 & k=4i+2,\\ t^{-1} & k=4i+3.\end{cases}$$

Entonces al aplicar el funtor $Hom_G(-,\mathbb{Z})$ al diagrama anterior obtenemos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\alpha_0"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "n"] \arrow[d, "\alpha_1"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\alpha_2"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "n"] \arrow[d, "\alpha_3"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "0"'] & \mathbb{Z} \arrow[r, "n"'] & \mathbb{Z} \arrow[r, "0"'] & \mathbb{Z} \arrow[r, "n"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

donde

$$\alpha_k(1)=\begin{cases} 1 & k=4i,\\ -1 & k=4i+1,\\ -1 & k=4i+2,\\ 1 & k=4i+3.\end{cases}$$

Por lo tanto, la acción de $s\in\mathbb{Z}_2$ es trivial sobre $H^{4k}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z})$ y la acción de s sobre $H^{4k+2}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z})$ es multiplicación por -1. Por otra parte,

$$H^p(\mathbb{Z}_2,H^{q+1}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z}))=\begin{cases} H^p(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_n) & \text{si } q \text{ es impar,}\\ \\ 0 & \text{si } q \text{ es par.}\end{cases}$$

Si la acción de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_n$ es trivial, entonces la aplicación norma es multiplicación por 2 en $\mathbb{Z}_n$ que resulta ser un isomorfismo. Por lo tanto,

$$H^p(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_n) = \begin{cases} \mathbb{Z}_n & \text{si } p=0, \\ \\ 0 & \text{si } p>0. \end{cases}$$

Por otro lado, si la acción de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_n$ es multiplicación por -1, entonces los coinvariantes $(\mathbb{Z}_n)_{\mathbb{Z}_2}$ y los puntos fijos $(\mathbb{Z}_n)^{\mathbb{Z}_2}$ son triviales. Por lo tanto, $H^p(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_n)=0$. En resumen,

$$H^p(\mathbb{Z}_2,H^{q+1}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z})) = \begin{cases} \mathbb{Z}_n & \text{si } p=0,\ q=4k-1 \\ \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

De esta manera, la única columna diferente de cero es $E_2^{0,*}$ y así

$$Ext^k_{\mathbb{Z}_2\text{-}\mathbb{Z}_n}(I_{\mathbb{Z}_n},\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_n & \text{si } k=4i-1, \\ \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$HH^k_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k=0, \\ \\ \mathbb{Z}_n & k=4i, \\ \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Por otra parte, en [Han93] se calculan los grupos de cohomología $H^*(\mathbb{Z}_n\rtimes\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z})$:

$$H^k(\mathbb{Z}_n\rtimes\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k=0, \\ \\ \mathbb{Z}_2 & k=4i+2, \\ \\ \mathbb{Z}_n\oplus\mathbb{Z}_2 & k=4k, \\ \\ 0 & k \text{ impar.} \end{cases}$$

De esta manera, $HH^*_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z}) \not\cong H^*(\mathbb{Z}_n\rtimes\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z})$. Con este ejemplo podemos ver que en general, la cohomología invariante $HH^*_Q(G,M)$ no es igual a la cohomología del producto semidirecto $H^*(G\rtimes Q,M)$.

4.4. Cohomología relativa de Takasu

En esta sección vamos a demostrar que la cohomología invariante $HH^n_Q(G,M)$ coincide con la cohomología usual del producto semidirecto $G \rtimes Q$ pero con un cambio de coeficientes, para esto, hablaremos de los grupos de cohomología relativa de Takasu ([Tak59]).

Comencemos definiendo algunas categorías. La categoría $\mathscr{P}$ es la categoría cuyos objetos son pares (G,H) donde G es un grupo y $H \subseteq G$ es un subgrupo. Un morfismo $\varphi : (G,H) \to (G',H')$ en esta categoría es un morfismo de grupos $\varphi : G \to G'$ tal que $\varphi(H) \subseteq H'$.

Ahora definimos la categoría $\mathscr{C}$ como la categoría cuyos objetos son las ternas (G,H,M) donde G es un grupo, $H \subseteq G$ es un subgrupo y M es un G-módulo. Un morfismo en esta categoría es un par (α, f) : $(G,H,M) \to (G',H',M')$ donde $\alpha : (G,H) \to (G',H')$ es un morfismo en la categoría $\mathscr{P}$ y $f : M \to M'$ es un morfismo de G-módulos vía α, es decir, $f(gx) = \alpha(g)f(x)$ para cada $g \in G$, $x \in M$.

Por último, definimos $\mathscr{C}'$ la categoría cuyos objetos son pares (G,M) donde G es un grupo y M es un G-módulo y cuyos morfismos son pares $(\alpha, f) : (G,M) \to (G',M')$ donde $\alpha : G \to G'$ es un morfismo de grupos y $f : M \to M'$ es un morfismo de G-módulos vía α como en la categoría $\mathscr{C}$. En esta situación, definimos el funtor

$$I : \mathscr{C} \to \mathscr{C}', \ \ (G,H,M) \mapsto (G, ker(\theta_M)),$$

donde $\theta_M : \mathbb{Z}[G] \otimes_H M \to M$, $g \otimes m \mapsto gm$ es un morfismo de G-módulos. Denotaremos por $I_{(G,H)}(M)$ al G-módulo $ker(\theta_M)$.

Si $(\alpha, f) : (G,H,M) \to (G',H',M')$ es un morfismo en $\mathscr{C}$, definimos $I(\alpha, f) = (\alpha, \widetilde{f}) : (G, I_{(G,H)}(M)) \to (G', I_{(G',H')}M')$ donde

$$\widetilde{f} : I_{(G,H)}(M) \to I_{(G',H')}(M')$$

es el único morfismo (propiedad universal del kernel (1.1.4)) que hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_{(G,H)}(M) \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{f}"] & \mathbb{Z}[G] \otimes_H M \arrow[r, "\theta_M"] \arrow[d, "\alpha \otimes f"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_{(G',H')}(M') \arrow[r] & \mathbb{Z}[G'] \otimes_{H'} M' \arrow[r, "\theta_{M'}"'] & M' \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Si fijamos el par (G,H) y $\alpha = 1_G : G \to G$, podemos interpretar el funtor I como el funtor covariante

$$I_{(G,H)} : G\text{-}\mathscr{M}od \to G\text{-}\mathscr{M}od, \ \ M \to I_{(G,H)}(M), \ \ f \mapsto \widetilde{f}.$$

Ahora vamos definir la parte dual, para esto, debemos definir nuevas categorías:

Sea $\mathscr{D}$ la categoría cuyos objetos son ternas (G,H,M) donde G es un grupo, $H \subseteq G$ es un subgrupo y M es un G-módulo. Un morfismo en esta categoría es un par $(\alpha, f) : (G,H,M) \to (G',H',M')$ donde α es un morfismo en la categoría $\mathscr{P}$ y $f : M' \to M$ es un morfismo de G-módulos vía α es decir, $f(\alpha(g)x') = gf(x')$ para cada $g \in G$, $x' \in M'$.

Sea $\mathscr{D}'$ la categoría cuyos objetos son pares (G,M) donde G es un grupo y M es un G-módulo. Un morfismo en esta categoría es un par $(\alpha, f) : (G,M) \to (G',M')$ donde α es un morfismo de grupos y f es un morfismo como en la categoría $\mathscr{D}$. Definimos el funtor:

$$J : \mathscr{D} \to \mathscr{D}', \ (G,H,M) \mapsto (G, coker(i_M)),$$

donde $i_M : M \to Hom_H(\mathbb{Z}[G],M)$, $i_M(m)(x) = xm$ para cada $x \in \mathbb{Z}[G]$, $m \in M$. Denotaremos por $J_{(G,H)}(M)$ al G-módulo $coker(i_M)$.

Si $(\alpha, f) : (G,H,M) \to (G',H',M')$ es un morfismo en $\mathscr{D}$, definimos $J(\alpha, f) = (\alpha, \bar{f}) : (G, J_{(G,H)}(M)) \to (G', J_{(G',H')}(M'))$ donde

$$\bar{f} : J_{(G',H')}(M') \to J_{(G,H)}(M)$$

es el único morfismo (propiedad universal del cokernel (1.1.4)) que hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i_{M'}"] \arrow[d, "f"'] & Hom_{H'}(\mathbb{Z}[G'],M') \arrow[r] \arrow[d, "Hom(\alpha,f)"] & J_{(G',H')}(M') \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i_M"'] & Hom_H(\mathbb{Z}[G],M) \arrow[r] & J_{(G,H)}(M) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Si fijamos el par (G,H) y $\alpha = 1_G : G \to G$, podemos interpretar el funtor J como el funtor covariante:

$$J_{(G,H)} : G\text{-}\mathscr{M}od \to G\text{-}\mathscr{M}od, \ M \mapsto J_{G,H}(M), \ f \mapsto \bar{f}.$$

Proposición 4.4.1. *([Tak59])*

1. *$I_{(G,H)}$ es un funtor covariante exacto y $J_{(G,H)}$ es un funtor covariante exacto.*
2. *Si M es un G-módulo proyectivo, entonces $I_{(G,H)}(M)$ también es un G-módulo proyectivo. Si M es un G-módulo inyectivo, entonces $J_{(G,H)}(M)$ también es un G-módulo inyectivo.*
3. *Existen equivalencias naturales de funtores: $I_{(G,H)}(A) \otimes_G B \cong A \otimes_G I_{(G,H)}(B)$ y $Hom_G(A, J_{(G,H)}(B)) \cong Hom_G(I_{(G,H)}(A), B)$.*

Definición 4.4.1. Definimos los grupos de homología y cohomología del par $(G,H) \in \mathscr{D}$ con coeficientes en el G-módulo M como:

$$H_n(G,H,M) = Tor_{n-1}^{G}(I_{(G,H)}(\mathbb{Z}),M), \;\; n \geq 1,$$

$$H^n(G,H,M) = Ext_{G}^{n-1}(I_{(G,H)}(\mathbb{Z}),M), \;\; n \geq 1.$$

Nota 4.4.1. Si $H = \{1\}$, entonces $\theta_{\mathbb{Z}}(x \otimes n) = n\varepsilon(x)$, es decir, $I_{(G,\{1\})}(\mathbb{Z}) = I_G$ así que

$$H_n(G,\{1\},M) = Tor_{n-1}^{G}(I_G,M) = H_n(G,M), \;\; n \geq 2,$$

$$H^n(G,\{1\},M) = Ext_{G}^{n-1}(I_G,M) = H^n(G,M), \;\; n \geq 2.$$

Teorema 4.4.1. *([Tak59]) Para cada G-módulo M tenemos una equivalencia natural de funtores:*

$$H_n(G,H,M) = H_{n-1}(G,I_{(G,H)}(M)),$$

$$H^n(G,H,M) = H^{n-1}(G,J_{(G,H)}(M)).$$

Demostración: Sea F una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[G]$, entonces por la Proposición 4.4.1, $I_{(G,H)}(F)$ es una resolución proyectiva de $I_{(G,H)}(\mathbb{Z})$. De este modo, para la homología:

$$\begin{aligned}
&H_{n-1}(G,I_{(G,H)}(M)) = H_{n-1}(F \otimes_G I_{(G,H)}(M)) \\
&\cong H_{n-1}(I_{(G,H)}(F) \otimes_G M) = Tor_{n-1}^{G}(I_{(G,H)}(\mathbb{Z}),M) \\
&= H_n(G,H,M).
\end{aligned}$$

Para la cohomología:

$$\begin{aligned}
&H_{n-1}(G,J_{(G,H)}(M)) = H_{n-1}(Hom_G(F,J_{(G,H)}(M))) \\
&\cong H^{n-1}(Hom_G(I_{(G,H)}(F),M)) = Ext_{G}^{n-1}(I_{(G,H)}(\mathbb{Z}),M) \\
&= H_n(G,H,M). \qquad \square
\end{aligned}$$

Ahora regresando a la cohomología invariante, supongamos que la acción $Q \to Aut(G)$ es libre. Entonces

$$HH_{Q}^{n}(G,M) = Ext_{Q\text{-}G}^{n-1}(I_G,M), \;\; n \geq 2.$$

Por otra parte, si A es un Q-G módulo, $\mathbb{Z}[G \rtimes Q] \otimes_Q A$ es un Q-G módulo donde las acciones están dadas por el producto en la primera entrada y $\mathbb{Z}[G] \otimes A$ es un Q-G módulo donde la acción de G está dada por multiplicación en la primera entrada y la acción de Q es diagonal. Definimos

$$\varphi : \mathbb{Z}[G \rtimes Q] \otimes_Q A \to \mathbb{Z}[G] \otimes A, \;\; (g,q) \otimes a \mapsto g \otimes qa.$$

Esta aplicación es un morfismo de Q-G módulos ya que

$$\varphi(g'((g,q)\otimes a)) = \varphi((g'g,q)\otimes a) = g'g\otimes qa = g'\varphi((g,q)\otimes a)$$

y

$$\varphi(q'((g,q)\otimes a)) = \varphi((q'g,q'q)\otimes a) = q'g\otimes q'qa = q'\varphi((g,q)\otimes a).$$

Además φ es un isomorfismo con inversa

$$\psi : \mathbb{Z}[G]\otimes A \to \mathbb{Z}[G\rtimes Q]\otimes_Q A,\;\; g\otimes a \mapsto (g,1)\otimes a$$

y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}[G\rtimes Q]\otimes_Q A \arrow[r, "\theta_A"] \arrow[d, "\cong"'] & A \\ \mathbb{Z}[G]\otimes A \arrow[ur, "\theta'_A"'] & \end{tikzcd}$$

donde $\theta_A((g,q)\otimes a) = g(qa)$ y $\theta'_A(g\otimes a) = ga$. En estas condiciones obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.4.2. *Existe un isomorfismo entre la cohomología invariante para acciones libres y los grupos de cohomología ralativa de Takasu,*

$$HH^n_Q(G,M) \cong H^n(G\rtimes Q, Q, M),\;\; \textit{para } n\geq 2.$$

Demostración: Si $A=\mathbb{Z}$, entonces tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}[G\rtimes Q]\otimes_Q \mathbb{Z} \arrow[r, "\theta_{\mathbb{Z}}"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}[G]\otimes \mathbb{Z} \arrow[ur, "\theta'_{\mathbb{Z}}"'] & \end{tikzcd}$$

de esta manera, $ker(\theta_{\mathbb{Z}}) \cong ker(\theta'_{\mathbb{Z}})$ pero $ker(\theta_{\mathbb{Z}}) = I_{(G\rtimes Q,Q)}(\mathbb{Z})$ y $ker(\theta'_{\mathbb{Z}}) = I_G$ por lo tanto, $Ext^{n-1}_{Q\text{-}G}(I_G,M) \cong Ext^{n-1}_{G\rtimes Q}(I_{(G\rtimes Q,Q)}(\mathbb{Z}),M)$ y así,

$$HH^n_Q(G,M) \cong H^n(G\rtimes Q, Q, M),\;\; \text{para } n\geq 2. \quad \square$$

La siguiente equivalencia entre la cohomología relativa de Takasu y la cohomología relativa con coeficientes locales se puede consultar en [ACS20] y [AC17].

Sea X un CW-complejo arcoconexo con cubriente universal $p:\widetilde{X}\to X$ y grupo fundamental $\pi_1(X)=G$. Sea $S_*(\widetilde{X})$ el complejo de cadenas celular de $\widetilde{X}$, la acción de G sobre $\widetilde{X}$ induce una acción de G sobre

$S_*(\widetilde{X})$. De esta manera, $S_*(\widetilde{X})$ es un complejo de cadenas de G-módulos. Sea M un G-módulo. Se define la cohomología de X con coeficientes locales asociados al G-módulo M como:

$$H^n(X,M) = H^n(Hom_G(S_*(\widetilde{X}),M)).$$

Si $Y \subseteq X$ es un subespacio, entonces $\widetilde{Y} = p^{-1}(Y)$ es un G-subespacio de $\widetilde{X}$ y $S_*(\widetilde{Y})$ es un G-subcomplejo de $S_*(\widetilde{X})$. Denotamos por $S^*(X,Y,M)$ al kernel de la sobreyección $Hom_G(S_*(\widetilde{X}),M) \to Hom_G(S_*(\widetilde{Y}),M)$ dada por restricción a $S_*(\widetilde{Y})$. Entonces se define la cohomología relativa con coeficientes locales asociados al G-módulo M como:

$$H^n(X,Y,M) = H^n(S^*(X,Y,M)).$$

La cohomología relativa de Takasu tiene una interpretación topológica: Si M es un G-módulo, entonces

$$H^n(G,H,M) \cong H^n(BG,BH,M),$$

donde consideramos a BH como un subespacio de BG reemplazando la función $i : BH \to BG$ inducida por la inclusión de H en G, por la cofibración $BH \to M_i$ donde M_i es el cilindro de i. De esta manera, si M es un Q-G módulo y Q actúa libremente sobre G, entonces la cohomología invariante $HH^n_Q(G,M)$ tiene una interpretación topológica:

$$HH^n_Q(G,M) \cong H^n(B(G \rtimes Q),BQ,M), \text{ para } n \geq 2.$$

Finalmente, si la acción $Q \to Aut(G)$ es libre, la cohomología invariante $HH^*_Q(G,M)$ es un caso particular de la cohomología usual del producto semidirecto $G \rtimes Q$, sin embargo, no deja de ser interesante ya que estas cohomologías no coinciden estrictamente sino que hay un cambio de coeficientes. Este resultado es un corolario inmediato de los teoremas 4.4.1 y 4.4.2.

Teorema 4.4.3. *Si la acción $Q \to Aut(G)$ es libre, los grupos de cohomología invariante coinciden con los grupos de cohomología usual del producto semidirecto $G \rtimes Q$, salvo por un cambio de coeficientes, es decir,*

$$HH^n_Q(G,M) \cong H^n(G \rtimes Q, J_{(G\rtimes Q,Q)}(M)), \textit{ para } n \geq 2.$$

En resumen, si la acción $Q \to Aut(G)$ es libre,

$$HH^n_Q(G,M) = \begin{cases} (M^G)^Q & n = 0, \\ Der_Q(G,M)/IDer_Q(G,M) & n = 1, \\ H^n(G \rtimes Q, J_{(G\rtimes Q,Q)}(M)) & n \geq 2. \end{cases}$$

Bibliografía

[ACS20] J. A. Arciniega, J. L. Cisneros, L. J. Sánchez, Relative group (co)homology theories with coefficients and the comparison homomorphism, Quaestiones Mathematicae, (2020), 1-26.

[AC17] J. A. Arciniega, J. L. Cisneros, Comparison of relative group (Co)homologies, Bol. Soc. Mat. Mex. 23 (2017), 41-47.

[AJMM20] C. Aquino, R. Jiménez, M. Mijangos, Q. Morales, On invariant (co)homology of a group, Preprint. arXiv:2007.05628, 2020. To appear in Topology and its Applications.

[Bro82] K. Brown, Cohomology of groups, Springer-Verlag, New York, 1982.

[Han93] D. Handel, On products in the cohomology of the dihedral groups, Tohoku Math. J. 45 (1993), 13-42.

[HS71] P. J. Hilton, U. Stammbach, A course in homological algebra, Springer-Verlag, 1971.

[JLM18] R. Jiménez, A. López Q. Morales, A spectral sequence for homology of invariant group chains, Moscow Math. J. 18 (2018), 149-162.

[Knu06] K. P. Knudson, The homology of invariant group chains, Journal of Algebra, 298 (2006), 15-33.

[KW04] K. P. Knudson, M. E. Walker, Homology of linear groups via cycles in $BG \times X$, Journal Pure Appl. Algebra, 192 (2004), 187-202.

[Mac63] S. MacLane, Homology, Springer-Verlag, 1963.

[Mac70] S. MacLane, Categories for the working mathematician, Springer-Verlag, 1970.

[Mit64] B. Mitchell, Theory of categories. Columbia University, New York, 1964.

[Tak59] S. Takasu, Relative homology and relative cohomology theory of groups, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 8 (1959) 75-110.

[Wei94] C. A. Weibel, An Introduction to homological algebra, Cambridge University Press, 1994.