



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

EFFECTOS DE UN CAMPO MAGNÉTICO EN LA
TASA DE PRODUCCIÓN DEL BOSÓN DE HIGGS
MEDIANTE FUSIÓN DE GLUONES

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

JORGE IGOR JABER URQUIZA

COMITÉ TUTOR:

DR. ÁNGEL SÁNCHEZ CECILIO
(FC-UNAM)

DR. JOSÉ ALEJANDRO AYALA MERCADO
(ICN-UNAM)

DRA. GABRIELLA PICCINELLI BOCCHI
(FES ARAGÓN-UNAM)

Ciudad Universitaria, Ciudad de México, septiembre de 2020.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A las personas que más quiero en la vida:
Águeda, Estela y Germán...gracias por tanto.*

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México y al Posgrado en Ciencias Físicas por darme la oportunidad de continuar aprendiendo.

A mi tutor, el Dr. Ángel Sánchez Cecilio, por brindarme su apoyo y enseñarme tanto éstos últimos cuatro años.

A los miembros de mi comité tutor, la Dra. Gabriella Piccinelli Bocchi y el Dr. José Alejandro Ayala Mercado, por apoyarme y guiarme en ésta gran aventura llamada “física de partículas”.

A los miembros del jurado, el Dr. Genaro Toledo Sánchez, el Dr. Alfredo Raya Montaña, el Dr. Hermes León Vargas y el Dr. Luis Alberto Hernández Rosas, les agradezco los valiosos comentarios y correcciones del presente trabajo.

Finalmente agradezco el apoyo que me proporcionó el CONACYT y el proyecto PAPIIT IN118219 durante éstos dos últimos años.

Resumen

El objetivo principal del presente trabajo de tesis es cuantificar los efectos de la presencia de un campo magnético externo en la producción del bosón de Higgs mediante el proceso de fusión de gluones

$$gg \longrightarrow H.$$

Para ello, se da una expresión analítica para la sección eficaz no polarizada a partir de los dos diagramas de Feynman topológicamente no equivalentes, para el proceso a orden dominante, que incluyen el efecto de un campo magnético de intensidad arbitraria.

En el régimen de campo magnético débil, con la ayuda de una aproximación, se estudia el efecto del campo magnético en una contribución específica a la sección eficaz no polarizada.

Los resultados de la presente tesis indican que, en el límite de momentos transversos bajos, el campo magnético tiende a aumentar la sección eficaz; la cinemática del proceso juega un rol importante y es necesario un estudio a mayor profundidad para determinar el efecto de esta en el proceso.

Este tipo de correcciones, debidas a agentes externos, pueden ser de gran relevancia para el programa de física de precisión del Higgs que se está llevando a cabo y podrían ayudar a discernir o fortalecer si las desviaciones experimentales respecto de las predicciones teóricas del Modelo Estándar pueden ser interpretadas como nueva física; una desviación de los datos experimentales con respecto a las predicciones teóricas podría ser atribuida erróneamente a física más allá del Modelo Estándar cuando en realidad se debía al efecto de agentes externos que no fueron considerados en los cálculos.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	v
1. Introducción	1
2. Antecedentes teóricos	9
2.1. Rompimiento espontáneo de la simetría	9
2.1.1. Mecanismo de Higgs	15
2.2. Modelo Estándar de las Partículas Elementales	18
2.2.1. Sector de Higgs	19
2.2.2. Interacciones tipo Yukawa	25
2.2.3. Interacción fuerte	30
2.2.4. Reglas de Feynman	35
3. Producción del bosón de Higgs en el vacío	37
3.1. Elemento de matriz invariante	37
3.1.1. Vértice efectivo	41
3.1.2. Estructura tensorial	46
3.1.3. Método de integración Gaussiano	48
3.1.4. Integración sobre el tiempo propio de Schwinger	50
3.2. Sección eficaz no polarizada	55
4. Producción del bosón de Higgs en presencia de un campo magnético externo	61
4.1. Propagador fermiónico en presencia de un campo magnético externo	61

4.2.	Elemento de matriz invariante en presencia de un campo magnético externo	63
4.2.1.	Vértice efectivo	63
4.2.2.	Método de integración Gaussiano	69
4.3.	Sección eficaz no polarizada en presencia de un campo magnético externo	76
4.3.1.	Determinación del coeficiente A	78
4.3.2.	Aproximación de campo débil para momentos transversos bajos	80
5.	Efectos del campo magnético en la sección eficaz	85
5.1.	Coeficiente A	86
5.2.	Sección eficaz parcial	93
6.	Conclusiones	103
A.	Trazas espinoriales	107
A.1.	Matrices de Dirac en d dimensiones	107
A.2.	Algunas relaciones relevantes	108
A.3.	Y ahora, ¿qué se hace con el campo magnético?	111
B.	Conjugación de carga	115
B.1.	Conjugación de carga para un campo fermiónico	115
B.2.	Propagador fermiónico en el vacío	118
B.3.	Propagador fermiónico en presencia de un campo magnético externo	120
B.4.	Teorema de Furry	122
C.	Estructura tensorial del vértice efectivo	127
C.1.	Método de proyectores	127
C.2.	Estructura tensorial del vértice efectivo en presencia de un campo magnético externo	128
D.	Método de integración Gaussiana	137
D.1.	Integrales Gaussianas generales	137
D.2.	Integrales Gaussianas en el vacío	139
D.3.	Integrales Gaussianas en presencia de un campo magnético externo	141
D.3.1.	Integración de las componentes paralelas	143

D.3.2. Integración de las componentes perpendiculares	145
D.3.3. Dependencia de la fase	150
E. Algunas integrales interesantes	153
E.1. Función Gamma	153
E.2. Funciones polilogarítmicas	154
E.3. Algunas integrales interesantes	157
E.3.1. Integrales sobre el tiempo propio de Schwinger	157
E.3.2. Integrales nulas	159
E.3.3. Cálculo de los coeficientes A y B	162
E.3.4. Cálculo del coeficiente A en presencia de campo mag- nético externo	166
E.4. Divergencias en presencia de un campo magnético externo . .	169
F. Sobre la fase de Schwinger	173
F.1. Fase de Schwinger	173
F.2. Integración en el espacio de configuraciones	176
Bibliografía	181

Capítulo 1

Introducción

Desde la predicción teórica del bosón de Higgs [1, 2], y especialmente desde su descubrimiento en 2012, los procesos que lo involucran han cobrado gran relevancia en la física de vanguardia, teórica y experimental, de altas energías debido al gran impacto que tiene el mecanismo de Higgs en la generación de masas de las partículas elementales.

Las mediciones en donde se detectó una nueva partícula escalar, con propiedades similares al Higgs, se realizaron en el “Gran Colisionador de Hadrones” (LHC) en los experimentos de ATLAS y CMS en colisiones protón-protón [3, 4]. El tipo de *background* en estos procesos, permitió detectar una resonancia en la región de los 125 GeV.

Con la detección de esta nueva partícula, el programa del Higgs entró en una nueva fase donde era necesario determinar experimentalmente las propiedades de la partícula descubierta con el fin de confirmar que fuera el bosón de Higgs [5–7].

El descubrimiento del bosón de Higgs marcó un nuevo hito en la física moderna, y en la ciencia en general, pues ahora se cuenta con evidencia conclusiva de la existencia del campo de Higgs que, mediante el rompimiento espontáneo de la simetría electrodébil, dota a las partículas elementales de masa. Además, el bosón de Higgs da el último grado de libertad del Modelo Estándar de las Partículas Elementales (SM) y con ello una teoría matemáticamente autoconsistente y totalmente predictiva con la que se pueden formular predicciones físicas hasta energías fuera del alcance de los experimentos que se tienen actualmente. Gracias a que el SM es renormalizable [8, 9], las propiedades del bosón de Higgs están totalmente determinadas y, en princi-

pio, se podrían calcular teóricamente las tasas de producción y decaimientos con una precisión únicamente limitada por la capacidad de cómputo.

La investigación sobre el bosón de Higgs es una de las mayores prioridades de la comunidad de física de altas energías en la actualidad y en los siguientes años. El caracterizar de forma precisa las propiedades del bosón de Higgs, ayudaría a comprender mejor la naturaleza de diversos procesos de la física de partículas así como el rompimiento espontáneo de la simetría electrodébil [10–12].

La existencia del bosón de Higgs, que completa el SM, algunas veces llegó a ponerse en duda. Sin embargo, el gran éxito del SM como teoría predictiva hacía pensar que sólo era cuestión de tiempo para su corroboración experimental. El sector del SM que describe las interacciones electromagnéticas, la electrodinámica cuántica (QED), ha servido como marco teórico para calcular una de las cantidades físicas que tiene mayor acuerdo entre la predicción teórica y la medición experimental, el momento magnético anómalo del electrón. La primera corrección radiativa a esta cantidad fue calculada por Julian Schwinger en 1948 [13]; actualmente la medición experimental y la predicción teórica coinciden en más de 11 dígitos de precisión [14, 15].

A pesar de ser una teoría que, por el momento, se ajusta a los datos experimentales, el SM es una teoría fenomenológica incompleta que necesita ser extendida para poder describir de forma satisfactoria toda la física que se conoce hoy en día. Todavía no es claro a qué escala de energía el SM dejará de ser una teoría válida ni si será necesario introducir nuevas leyes físicas, lo que es un hecho es que este modelo debe ser ampliado para incluir los efectos de gravedad cuántica [16, 17].

De forma más concisa para la física del Higgs, a partir de cierta escala de energía Λ (acoplada al bosón de Higgs), se espera que los acoplamientos del Higgs con los fermiones y con los bosones de norma se modifiquen por la cantidad

$$\frac{\delta g}{g} \sim \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{\Lambda^2}\right),$$

donde $v = 246$ GeV es la escala de rompimiento espontáneo de la simetría electrodébil. Si se toma $\Lambda = 1$ TeV, la modificación en los acoplamientos del Higgs es alrededor de 5%, esto indica la precisión que deben de adquirir tanto los cálculos teóricos como las mediciones experimentales [18].

Las mediciones de las propiedades del bosón de Higgs abren una nueva ventana para el entendimiento de las interacciones fundamentales y para

examinar posibles extensiones a las leyes de la física que se conoce. Pues si se lograran encontrar pequeñas discrepancias entre las predicciones teóricas y los datos experimentales estas podrían ser señal de nueva física, física más allá del Modelo Estándar (BSM). De tal forma que un programa a largo plazo de física de precisión, tanto teórica como experimental, de las propiedades del bosón de Higgs sería de gran relevancia, ya que podría brindar evidencia, directa o indirectamente, de física BSM. Teóricamente se han explotado diversas extensiones al SM en el sector del Higgs [19–22].

El LHC ha entrado en una etapa en donde las medidas de precisión de las propiedades del Higgs han jugado un rol central; en paralelo, los físicos teóricos han hecho grandes avances y esfuerzos a lo largo de décadas elaborando cálculos que revelen con gran precisión las propiedades del bosón de Higgs, como lo son: sus modos de producción y decaimiento por diferentes canales [23].

Un área de investigación, muy activa en años recientes, se encuentra alrededor de la medición de los acoplamientos tipo Yukawa del Higgs con fermiones. Debido a que estos acoplamientos son proporcionales a la masa de los fermiones, las perspectivas para la medición de los acoplamientos del Higgs con los fermiones de la “tercera generación” (los quarks top y bottom, así como el leptón τ) son prometedoras [24–26].

Por otra parte, la sección eficaz inclusiva para la producción de Higgs es una observable física típica para este tipo de comparaciones entre las partes experimental y teórica. De esta observable es posible obtener información de las constantes de acoplamiento, así que es una herramienta muy útil para buscar desviaciones en las predicciones del SM. Para poder obtener predicciones teóricas confiables para esta observable, o cualquier otra que provenga de colisionadores de hadrones, es necesario tomar en cuenta correcciones debidas a procesos de Cromodinámica Cuántica (QCD) [27, 28].

Uno de los muchos procesos físicos que contribuyen a la sección eficaz del Higgs son los decaimientos de este en dos bosones (*di-boson modes*)

$$H \longrightarrow \gamma\gamma, WW, ZZ.$$

Los acoplamientos involucrados en estos procesos han sido determinados experimentalmente en la primera corrida del LHC y han concordado con las predicciones del SM [29]. En estos modos de decaimiento la incertidumbre de los cálculos teóricos es dominada por los errores sistemáticos, uno de estos errores sistemáticos proviene de la normalización de la señal para la cual

es necesario tener un cálculo preciso de la sección eficaz inclusiva del Higgs mediante el canal de fusión de gluones [30].

Es importante mencionar que en el SM no existe un acoplamiento directo entre el bosón de Higgs y los bosones de norma de la interacción nuclear fuerte, los gluones [8, 31]. Así que la producción del Higgs mediante fusión de gluones, a primer orden, se da por medio de correcciones cuánticas de la QCD [27].

La producción de bosones de Higgs mediante la fusión de gluones es un proceso de gran relevancia debido a que corresponde a más del 90 % de la sección eficaz a 13 TeV. La contribución a este proceso debido a interacciones puras de QCD es de alrededor del 95 %, mientras que interacciones tipo QCD-electrodébil (QCD-EW por sus siglas en inglés) contribuyen con aproximadamente 5 % [32]; las interacciones tipo QCD-EW corresponden a acoplamientos del bosón de Higgs con bosones de norma del sector electrodébil que, posteriormente, se convierten en gluones mediante un lazo de quarks.

Desde el siglo pasado, la descripción teórica de la sección efectiva de la producción de Higgs mediante fusión de gluones se ha llevado a cabo. La contribución *leading-order* fue calculada en los 70's [33], las contribuciones debidas a interacciones puras de QCD a *next-to-leading-order* (NLO) fueron calculadas en los 90's [27, 34, 35] y se observó que éstas tienen contribuciones significativas que van del $\sim 80 - 100$ % de la contribución *leading-order*, esto causó una gran duda en si una expansión perturbativa en la constante de acoplamiento fuerte α_s era confiable para la estimación teórica de la sección eficaz. Las correcciones de QCD a *next-to-next-to-leading-order* (NNLO o N²LO) [36–40] se calcularon usando una teoría efectiva para el bosón de Higgs (HEFT por sus siglas en inglés), en donde la masa del quark top (173.1 GeV [32]) es mucho mayor que la masa del bosón de Higgs (125.1 GeV [32]) en el límite quiral [41–43]; estas contribuciones son $\sim 10 - 20$ % pero menores que las correcciones NLO, lo cual parecería indicar que la expansión en la constante de acoplamiento fuerte tendiese a estabilizarse. El cálculo teórico de las correcciones *next-to-next-to-next-to-leading order* (N³LO) son un tema de gran interés en años recientes [44–47] y resultan ser mucho menos significativas $\sim 4 - 6$ % [48], este hecho nos da la confianza de que los resultados obtenidos mediante la expansión perturbativa para la sección eficaz son válidos.

Como se mencionó anteriormente, correcciones del tipo QCD-EW contribuyen con aproximadamente el 5 % a la sección eficaz de la producción de Higgs pero para la física de precisión no son despreciables. Así que es

necesario considerar las contribuciones tanto de QCD pura como de QCD-EW [18, 49].

Hasta el momento, todas las investigaciones a las que se han hecho referencia se enfocan únicamente en la física del bosón de Higgs en el vacío. Sin embargo, pueden ser extendidas a escenarios donde los efectos de agentes externos pudieran cambiar las propiedades globales del bosón de Higgs [50, 51]; mismas que al no ser contempladas en cálculos perturbativos del Higgs podrían ser malinterpretadas como desviaciones de las predicciones del SM y, por ello, confundidas con señales de “nueva física”.

En las colisiones de iones pesados relativistas, por ejemplo, es posible crear ambiente extremo de alta temperatura y densidad que evoluciona en el tiempo [52]. Los grados de libertad que dominan en el sistema dependerán de la etapa de la colisión [53]:

- Al tiempo $t=0$ fm/ c , con c es la velocidad de la luz, los dos iones colisionan y las interacciones se empiezan a producir. En estas interacciones iniciales es cuando los jets hadrónicos, fotones directos, pares de dileptones, quarks pesados y bosones vectoriales son producidos.
- Ya pasado un tiempo $t\sim 0.2$ fm/ c , se crea un estado denominado “glasma” conformado por materia partónica fuera del equilibrio que tiene una alta densidad junto con otras características particulares [54].
- Los partones (quarks y gluones) que componen el “glasma” comienzan a interactuar fuertemente entre ellos de tal forma que rápidamente se alcanza un equilibrio térmico a un tiempo aproximado de $t\sim 1$ fm/ c después de la colisión.
- El resultado de esta termalización es una fase de QCD a alta temperatura conocida como “plasma de quarks y gluones” (QGP). La abundante producción y el estudio detallado de esta fase de la materia es el principal objetivo de los programas de colisiones de iones pesados relativistas en los experimentos de RHIC¹ en el Laboratorio Nacional de Brookhaven (BNL) y ALICE² en el LHC.

¹*Relativistic Heavy Ion Collider.*

²*A Large Ion Collider Experiment.*

Actualmente, se está estudiando la posibilidad de la detección de bosones de Higgs en otros tipos de colisiones³; por ejemplo, en las colisiones de iones pesados relativistas que se estudian actualmente en RHIC y en el LHC y, próximamente, en el FCC⁴ también en el CERN [55, 56]. En tales procesos, dependiendo de la etapa de la posible formación y decaimiento del bosón de Higgs, se tendrían que considerar los efectos del “glasma” y/o del QGP, así como aquellos debidos a la centralidad y a la energía de la colisión, como son: temperatura, densidad y/o la presencia de un campo magnético [57, 58]. Los efectos en las propiedades del bosón de Higgs debido a estos agentes deben de ser tomadas en cuenta en el programa de física de alta precisión.

Es importante hacer notar que el estudio del efecto que tiene el “glasma” sobre la producción de diferentes tipos de partículas es un tema de vanguardia sobre el que no se tiene control todavía pero está siendo estudiado [59].

Pasadas las etapas iniciales de la colisión, se forma el QGP, en los experimentos realizados en el LHC se ha encontrado que el tiempo característico para la expansión y enfriamiento del sistema es del orden de $10 \text{ fm}/c$ [60–62]. Al comparar este tiempo con la vida media del bosón de Higgs, $\tau \sim 47 \text{ fm}/c$ [32], se observa que este es mayor que el tiempo característico del QGP, de modo que alguna de las siguientes situaciones físicas podría presentarse:

- Que un bosón de Higgs producido en la etapa inicial de la colisión (antes de la formación del QGP) sea afectado al “entrar” en el QGP y se modifiquen algunas de sus propiedades, como la vida media, distribución cinemática, tasa de decaimiento, etc.
- Que un bosón de Higgs sea producido dentro del QGP, de manera que el principal efecto del medio termalizado se observará en la tasa de producción.
- Que un bosón de Higgs sea producido después del enfriamiento del QGP, en esta última situación la producción del Higgs se verá afectada por el efecto que tenga el QGP sobre las partículas que posteriormente darán origen al Higgs.

³Hasta ahora el estudio del bosón de Higgs se basó en las datos obtenidos de colisiones protón-protón.

⁴*Future Circular Collider*.

Los efectos de un campo magnético en colisiones de iones pesados relativistas ha sido un tema de intensa investigación en la última década. Se ha estimado que en colisiones periféricas pueden alcanzar intensidades de $eB \sim m_\pi^2$, donde m_π es la masa de pión y e la magnitud de la carga del electrón. Estos campos magnéticos son muy intensos al inicio y decaen exponencialmente con un tiempo característico de 3-4 fm/c [58]. Si el bosón de Higgs es producido en una etapa de la colisión en presencia de este campo magnético externo, una pregunta natural que surge es ¿como se verá afectada su tasa de producción (en la sección eficaz)? La respuesta a la pregunta anterior dependerá del momento exacto de la producción pues el campo magnético, al decaer exponencialmente, podría ser intenso o débil. Esta última consideración, asociada a un escenario físico, es particularmente importante pues permite cuantificar analíticamente el efecto del campo magnético mediante algún tipo de aproximación [63–65].

Estructura del trabajo

En este trabajo de tesis nos damos a la tarea de cuantificar el efecto de este campo magnético en el proceso principal de producción del Higgs mediante fusión de gluones, de tal forma que la tesis se ha organizado de la siguiente manera:

- En el capítulo 2 se dan las bases teóricas de la física de partículas necesarias para realizar el cálculo propuesto, así como las reglas de Feynman que se utilizan posteriormente.
- En el tercer capítulo se recrean los resultados reportados en la literatura para la sección eficaz de la producción de bosones de Higgs mediante fusión de gluones. Además, se plantea la metodología que se sigue en el caso donde se considera la presencia de un campo magnético externo.
- A partir de la metodología desarrollada en los capítulos anteriores, en el capítulo 4 se encuentra una expresión analítica para la sección eficaz del bosón de Higgs en presencia de un campo magnético externo y se lleva a cabo el cálculo explícito de uno de los coeficientes que contribuye a la sección eficaz mediante la aproximación de campo débil para momentos transversos bajos.

- En el quinto capítulo se comparan los resultados obtenidos entre el caso del vacío y el caso con campo magnético.
- Finalmente, en el capítulo 6, se presentan las conclusiones del trabajo de tesis y se dan a conocer los posibles caminos para un mayor desarrollo del presente proyecto.

Capítulo 2

Antecedentes teóricos

En este capítulo se abordarán de forma breve los diferentes conceptos de física de partículas que permiten situar y realizar el cálculo de la amplitud del proceso de producción del bosón de Higgs mediante fusión de gluones en el contexto del Modelo Estándar de las Partículas Elementales.

2.1. Rompimiento espontáneo de la simetría

El rompimiento espontáneo de la simetría es un fenómeno ampliamente conocido en la física. Las primeras ideas surgen al tratar de explicar el fenómeno de superconductividad con los modelos de Ginsburg-Landau y Bardeen-Cooper-Schrieffer ¹. En estos modelos un campo escalar es el responsable de llevar a cabo el rompimiento de simetría del estado base. Estas ideas son centrales en la formulación del Modelo Estándar de las Partículas Elementales, a continuación se presentan las ideas básicas detrás de este proceso.

Considérese un campo escalar complejo $\Phi(x)$ cuya acción está dada por

$$\mathcal{S}_0[\Phi] = \int d^4x \mathcal{L}_0(\Phi, \partial\Phi), \quad (2.1)$$

a la cual, en el caso de una teoría libre, le corresponde la densidad Lagrangiana

¹Una revisión interesante se da en [66].

$$\mathcal{L}_0(\Phi, \partial\Phi) = \partial_\mu \Phi(x) \partial^\mu \Phi^*(x) - m^2 \Phi(x) \Phi^*(x). \quad (2.2)$$

Al escribir el campo complejo de la forma

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(x) + i\phi_2(x)), \quad (2.3)$$

con $\phi_1(x), \phi_2(x) \in \mathbb{R}$, es posible reescribir la densidad Lagrangiana como sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_1(x) \partial^\mu \phi_1(x) + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_2(x) \partial^\mu \phi_2(x) \\ - \frac{m^2}{2} \phi_1(x) \phi_1(x) - \frac{m^2}{2} \phi_2(x) \phi_2(x). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Las ecuaciones de movimiento asociadas a cada campo se obtienen al extremizar a la acción, se pueden calcular a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial_\mu \phi_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\phi_j} = 0, \quad (2.5)$$

con $j = 1, 2$. Explícitamente, las ecuaciones de movimiento asociadas son

$$(\partial^\mu \partial_\mu - m^2) \phi_j(x) = 0, \quad (2.6)$$

es decir, ambas componentes de campo escalar complejo satisfacen la ecuación de Klein-Gordon.

Es fácil observar que la densidad Lagrangiana (2.2) es invariante ante las transformaciones

$$\Phi(x) \longrightarrow \Phi'(x) = e^{iq\theta}\Phi(x), \quad (2.7)$$

donde $q, \theta \in \mathbb{R}$ son parámetros constantes². En este punto, el parámetro q representa simplemente un escalamiento de la fase θ . Al observar que la teoría, descrita por la Ec. (2.2), es invariante ante estas transformaciones se dice que la teoría es invariante ante la simetría global $U(1)$.

Hasta ahora se ha presentado una teoría que describe a un campo escalar masivo libre, es posible introducir un término de interacción de tal forma que

$$\mathcal{L}(\Phi, \partial\Phi) = \partial_\mu\Phi(x)\partial^\mu\Phi^*(x) - m^2\Phi(x)\Phi^*(x) - \lambda(\Phi(x)\Phi^*(x))^2. \quad (2.8)$$

A este modelo simple para la interacción se le conoce como teoría Φ^4 y el potencial asociado está dado por

$$V(\Phi) = m^2\Phi(x)\Phi^*(x) + \lambda(\Phi(x)\Phi^*(x))^2, \quad (2.9)$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ la constante de acoplamiento; esta debe de ser positiva para que el potencial esté acotado inferiormente. Esta nueva teoría sigue siendo invariante ante las transformaciones (2.7) y, por ello, presenta la simetría global $U(1)$.

Al tomar $\lambda > 0$ es posible distinguir entre dos casos distintos:

- (a) $m^2 \geq 0$: en este caso el potencial presenta un único mínimo. La solución “clásica” que extremiza la acción está dada por el campo constante $\Phi(x) \equiv 0$. Nótese que esta teoría describe a un campo escalar complejo masivo con una interacción cuártica.
- (b) $m^2 < 0$: en este caso el potencial presenta dos puntos críticos distintos. Tiene un máximo local en el punto $\Phi = 0$ mientras que existe una colección de mínimos, es decir, un mínimo degenerado.

²Independientes del punto x .

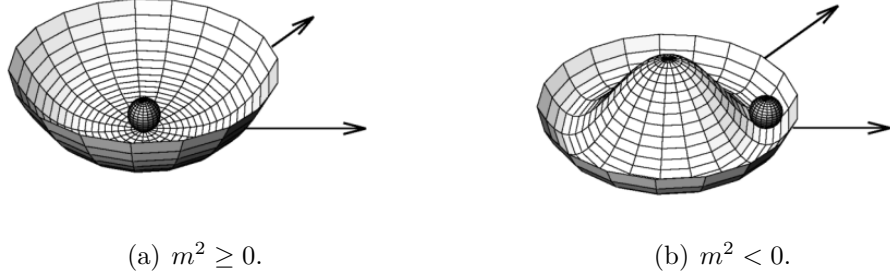


Figura 2.1: Comportamiento del potencial $V(\phi_1, \phi_2)$ para los distintos intervalos de m^2 . Imagen tomada de [67].

En la Figura 2.1 se muestra la forma del potencial para ambos casos en términos de los campos reales ϕ_1 y ϕ_2 .

Cuando se tiene $m^2 < 0$, la configuración de campo constante $\Phi(x) \equiv 0$ es inestable porque corresponde al máximo local. La condición para que se presente un mínimo está determinada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(|\Phi|)}{\partial |\Phi|} &= 2m^2|\Phi| + 4\lambda|\Phi|^3 = 0, \\ \Rightarrow |\Phi|^2 &= -\frac{m^2}{2\lambda} = \frac{v^2}{2}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde v es el valor de expectación del campo en el vacío. En este caso el vacío “clásico” ya no es único, presenta un conjunto de vacíos degenerados que se pueden expresar de la siguiente manera

$$\Phi(x) = \frac{v}{\sqrt{2}} e^{i\alpha}, \tag{2.11}$$

con

$$v = \sqrt{-\frac{m^2}{\lambda}} \tag{2.12}$$

y $\alpha \in (-\pi, \pi]$. Nótese que la simetría $U(1)$ se observa trivialmente en el potencial en el caso $m^2 \geq 0$ (Fig. 2.1(a)), mientras que para $m^2 < 0$ es menos

evidente; la simetría $U(1)$ sigue estando presente de forma global pero esto sólo se puede observar de forma local en el punto $\Phi(x) = 0$ que corresponde al máximo local (Fig. 2.1(b)).

Al elegir explícitamente una de las configuraciones de vacío de forma arbitraria, por ejemplo $\alpha = 0$, se dice que la simetría se “rompe”; la simetría sigue presente de manera global pero no se manifiesta explícitamente alrededor de los mínimos, es decir, la vecindad del punto $\Phi(x) = v/\sqrt{2}$ ya no es simétrica ante $U(1)$. A este fenómeno se le conoce como rompimiento espontáneo de la simetría (SSB³).

¿Qué consecuencias presenta el rompimiento espontáneo de la simetría? Para responder a esta pregunta, se hará una expansión alrededor de la configuración de vacío que se ha escogido

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= v + \sigma(x), \\ \phi_2(x) &= \pi(x),\end{aligned}\tag{2.13}$$

con $\sigma(x), \pi(x) \in \mathbb{R}$ y $|\sigma(x)|, |\pi(x)| \ll |v|$. Entonces se tiene que

$$\Phi(x) = \frac{v + \sigma(x) + i\pi(x)}{\sqrt{2}}.\tag{2.14}$$

Es posible escribir la densidad Lagrangiana (2.8) en términos de estos nuevos campos reales, de tal forma se obtiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial^\mu\sigma\partial_\mu\sigma + \frac{1}{2}\partial^\mu\pi\partial_\mu\pi - \frac{m^2}{2}(v + \sigma)^2 - \frac{m^2}{2}\pi^2 - \frac{\lambda}{4}((v + \sigma)^2 + \pi^2)^2 \\ &= \frac{1}{2}\partial^\mu\sigma\partial_\mu\sigma + \frac{1}{2}\partial^\mu\pi\partial_\mu\pi - \frac{1}{2}(m^2 + 3\lambda v^2)\sigma^2 + \text{cte.} + \mathcal{O}(\sigma^3, \pi^3).\end{aligned}\tag{2.15}$$

³*Spontaneous Symmetry Breaking.*

Se pueden identificar dos tipos de partículas diferentes: una partícula σ con masa

$$m_\sigma^2 = m^2 + 3\lambda v^2 = -2m^2 > 0, \quad (2.16)$$

y una partícula no masiva π . A esta última se le conoce como *bosón de Nambu-Goldstone* y su presencia es una característica del rompimiento espontáneo de una simetría continua global.

Nótese que la partícula σ corresponde a perturbaciones en las direcciones ortogonales al mínimo degenerado, es por eso que es masiva. Mientras que la partícula π corresponde a las perturbaciones a lo largo de la dirección que conecta a los mínimos y, por ello, no tiene masa.

El comportamiento descrito anteriormente para una teoría escalar con simetría global $U(1)$ se puede generalizar para otros grupos de simetría y se sintetiza mediante el siguiente teorema:

Teorema de Goldstone [68]: El rompimiento espontáneo de una simetría continua en una teoría da origen a N partículas no masivas llamadas bosones de Nambu-Goldstone, donde N es el número de generadores que se perdieron del grupo de simetría inicial al grupo de simetría final. Es decir, si el rompimiento espontáneo de la simetría causa que el grupo de simetría de la teoría se reduzca de acuerdo con

$$G \xrightarrow{\text{SSB}} H,$$

donde H es un subgrupo de G ($H \subset G$). Entonces el número de bosones de Nambu-Goldstone N corresponde a la diferencia del número de generadores entre ambos grupos

$$N = n_G - n_H.$$

2.1.1. Mecanismo de Higgs

¿Qué pasaría si ahora se quiere promover la simetría $U(1)$ de global a local? Es decir, que las transformaciones dadas por (2.7) dependieran del punto donde esté evaluado el campo

$$\Phi(x) \longrightarrow \Phi'(x) = e^{iq\theta(x)}\Phi(x), \quad (2.17)$$

donde el parámetro de la transformación $\theta(x)$ depende del punto espacio-temporal.

Es bien conocido el hecho que al promover una simetría global a simetría local es necesario introducir la derivada covariante que cuenta con un campo auxiliar conocido como campo de norma [68, 69]. En este caso, como el grupo $U(1)$ es abeliano, el campo de norma asociado $A^\mu(x)$ también lo es.

Al introducir este campo de norma, la densidad Lagrangiana toma la siguiente forma⁴

$$\mathcal{L}(\Phi, \partial\Phi, A^\mu, \partial A^\mu) = D^\mu\Phi (D_\mu\Phi)^* - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - m^2\Phi\Phi^* - \lambda(\Phi\Phi^*)^2, \quad (2.18)$$

donde

$$D^\mu \equiv \partial^\mu - iqA^\mu(x), \quad (2.19)$$

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x), \quad (2.20)$$

son la derivada covariante y el tensor de intensidad de campo respectivamente.

Al comparar esta nueva teoría con las teorías que consideran campos escalares cargados en presencia de un campo electromagnético, se puede identificar al parámetro q , que antes era solamente un reescalamiento de la fase θ , como la carga eléctrica asociada a la partícula escalar⁵. El término extra que aparece en la derivada covariante, conocido como acoplamiento mínimo,

⁴También se agrega el término cinético correspondiente al campo de norma.

⁵La antipartícula asociada al campo $\Phi^*(x)$ tendría carga eléctrica $-q$.

cuantifica la interacción de las partículas cargadas con el campo electromagnético.

La acción y la densidad Lagrangiana asociadas a esta nueva teoría son invariantes ante las transformaciones dadas en la Ec. (2.17), en adición con las transformación del campo de norma

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\theta(x). \quad (2.21)$$

Nótese que un término de masa para el campo de norma

$$\frac{m_A^2}{2} A^\mu(x) A_\mu(x),$$

no es invariante ante las transformaciones de norma dadas por (2.21).

Al igual que en el caso cuando la simetría $U(1)$ era global, se puede distinguir entre dos casos ya discutidos

- (a) $m^2 \geq 0$: la simetría no se ha roto y se tienen partículas escalares masivas con carga eléctrica q y bosones de norma no masivos. A este caso se le suele llamar “fase de Coulomb”.
- (b) $m^2 < 0$: al igual que cuando la simetría era global, se presenta un vacío degenerado pero ahora están relacionados por las transformaciones de norma⁶. Es en este caso cuando se presenta el rompimiento espontáneo de la simetría, se dice que “la fase se ha roto”.

En la norma unitaria⁷

$$\begin{aligned} \Re(\Phi(x)) &= \phi_1(x) \geq 0, \\ \Im(\Phi(x)) &= \phi_2(x) = 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

⁶Se sabe que las configuraciones conectadas por transformaciones de norma corresponden al mismo estado físico, esto quiere decir que sólo existe un vacío físico y los demás son estados espurios.

⁷Esto es equivalente a cuando se elige $\alpha = 0$ para la simetría global.

se pueden analizar las fluctuaciones alrededor de la configuración de vacío $\Phi(x) \equiv v/\sqrt{2}$. Nótese que en esta norma la parte imaginaria está ausente, por lo que las fluctuaciones son reales

$$\Phi(x) = \frac{v + \sigma(x)}{\sqrt{2}}, \quad (2.23)$$

y las fluctuaciones asociadas al campo $\pi(x)$ no están presentes. Sustituyendo (2.23) en la densidad Lagrangiana (2.18) se obtiene

$$\begin{aligned} V(\Phi) &= \frac{m^2}{2}(v + \sigma)^2 + \frac{\lambda}{4}(v + \sigma)^4 \\ &= \frac{1}{2}(m^2 + 3\lambda v^2)\sigma^2 + \text{cte.} + \mathcal{O}(\sigma^3), \end{aligned} \quad (2.24)$$

de donde, como en (2.16), se puede indentificar a la masa de partícula σ

$$m_\sigma^2 = -2m^2. \quad (2.25)$$

El término cinético de la Ec. (2.18), en la norma unitaria, adquiere la forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (D^\mu \Phi)^* D_\mu \Phi &= \frac{1}{2} [(\partial^\mu + iqA^\mu)(v + \sigma)] [(\partial_\mu - iqA_\mu)(v + \sigma)] \\ &= \frac{1}{2} \partial^\mu \sigma \partial_\mu \sigma - \frac{q^2 v^2}{2} A^\mu A_\mu + \text{cte.}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

de donde se puede identificar el término cinético de la partícula σ . Así mismo, en esta norma, es fácil identificar un término masivo asociado al campo de norma⁸ $A^\mu(x)$

$$m_A = qv. \quad (2.27)$$

⁸Este término de masa sí es invariante ante transformaciones de norma.

Nótese que en esta norma los bosones de Nambu-Goldstone están ausentes, sin embargo el grado de libertad asociado a ellos se ve reflejado en una polarización extra (debida al término de masa) para el bosón de norma. A este procedimiento para generar términos de masa en los campos de norma, a partir del rompimiento espontáneo de una simetría continua, se le conoce como mecanismo de Higgs⁹.

2.2. Modelo Estándar de las Partículas Elementales

El Modelo Estándar de las Partículas Elementales es una teoría cuántica de campos que describe la naturaleza, comportamiento e interacción de los bloques fundamentales que conforman a la materia.

El éxito de este modelo radica en el hecho de que existen diversas cantidades físicas que, usando el formalismo del SM, se han calculado teóricamente y coinciden con una precisión muy alta con las mediciones experimentales. Por ejemplo, la predicción teórica y las mediciones experimentales del momento magnético anómalo del electrón, coinciden en más de 11 dígitos de precisión.

A pesar de ello, se sabe que esta es sólo una “teoría efectiva” que necesita ser extendida (o sustituida) para energías arbitrariamente altas. Otro punto en contra del SM es que carece de explicaciones a diversos fenómenos como la jerarquía de escalas de energía, la ausencia de neutrinos derechos, el número de familias de leptones, la violación de \mathcal{CP} , la materia y energía oscuras, etc.

La construcción del SM está fundamentada en el principio de invariancia de norma local. Gracias a ello, las partículas mediadoras de las interacciones, conocidas como bosones de norma, surgen de forma natural y llevan a las fuerzas fundamentales a un plano secundario¹⁰.

El principio de invariancia de norma local provee un bosón de norma asociado a cada uno de los generadores del grupo de simetría local de la teoría, en el caso del SM el grupo de simetría es [70, 71]

⁹A una fase donde se presenta un rompimiento espontáneo de una simetría junto con bosones de norma masivos se le conoce como “fase de Higgs”.

¹⁰Ya no son necesarias las interacciones instantáneas con rangos de acción infinitos sino que surge una explicación más profunda gracias a estos bosones de norma.

$$SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y,$$

de tal forma que cuenta con 12 bosones de norma. El grupo de simetría $SU(3)_C$ está asociado a la interacción fuerte y tiene como mediadores 8 gluones mientras que el grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ está asociado con la interacción electrodébil y tiene como mediadores, en la fase rota, a tres bosones de norma masivos (W^\pm y Z^0) y uno no masivo (el fotón).

Otro éxito del SM, es que logra unificar la fuerza nuclear débil con la fuerza electromagnética en la interacción electrodébil gracias al modelo de Glashow-Salam-Weinberg (GSW).

Finalmente, la pieza angular del SM está dada por el bosón de Higgs. Este, gracias al rompimiento espontáneo de la simetría electrodébil y al mecanismo de Higgs, dota de masa a todas las partículas elementales¹¹.

A continuación se estudia de forma general ciertos sectores del SM que son relevantes par el cálculo que se desarrolla en la presente tesis.

2.2.1. Sector de Higgs

En el SM, el bosón de Higgs está modelado como un doblete de campos escalares complejos

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_+(x) \\ \Phi_0(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Phi_{+,1}(x) + i\Phi_{+,2}(x) \\ \Phi_{0,1}(x) + i\Phi_{0,2}(x) \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

con $\Phi_{+,i}(x), \Phi_{0,i}(x) \in \mathbb{R}$. En este punto los subíndices + y 0 son mera convención pero más tarde, cuando se promueva la simetría global a una simetría local, representarán la carga eléctrica asociada.

La densidad Lagrangiana que describe a este doblete está dada por

$$\mathcal{L}_{Higgs}(\Phi, \partial\Phi) = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - m^2 |\Phi|^2 - \lambda |\Phi|^4. \quad (2.29)$$

Debido a que esta densidad Lagrangiana describe a un doblete de campos escalares complejos, las simetrías globales de la teoría cambian respecto al

¹¹Salvo a los neutrinos.

caso que se analizó con anterioridad. Los dos tipos transformaciones globales que dejan invariante a la densidad Lagrangiana (2.29) están dadas por

$$\Phi(x) \longrightarrow \Phi'(x) = G\Phi(x), \quad (2.30)$$

$$\Phi(x) \longrightarrow \Phi'(x) = \Phi(x)H^\dagger, \quad (2.31)$$

con $G, H \in SU(2)$, es decir, el grupo de matrices unitarias de 2×2 con determinante 1. Dependiendo del lado por el que opera la transformación, se denota que

$$\begin{aligned} G &\in SU(2)_L, \\ H &\in SU(2)_R. \end{aligned}$$

Esto revela que el grupo de simetría que tiene la teoría es¹² es $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$, de tal forma que se tienen 6 generadores diferentes.

Al igual que en la sección anterior, esta teoría presentan dos casos distintos cuando $\lambda > 0$

(a) $m^2 \geq 0$: es la fase simétrica con una configuración única de vacío

$$\Phi(x) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

(b) $m^2 < 0$: es la fase se ha rota con un vacío degenerado, que cumplen la condición

$$|\Phi|^2 = -\frac{2m^2}{\lambda}. \quad (2.33)$$

¹²También es posible adoptar una notación donde el campo de Higgs es representado por un vector de cuatro campos reales, en ese caso el grupo de simetría es $O(4) \cong SU(2)_L \otimes SU(2)_R$.

Al elegir el vacío de la forma

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

con

$$v = \sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}}, \quad (2.35)$$

las fluctuaciones del doblete de escalar alrededor de su valor promedio en el vacío son

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pi_1(x) + i\pi_2(x) \\ v + \sigma(x) + i\pi_3(x) \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

con $\sigma(x), \pi_i(x) \in \mathbb{R}$, la densidad Lagrangiana en la Ec. (2.29) adquiere la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Higgs} &= \frac{1}{2} \left[\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \vec{\pi}^T \partial^\mu \vec{\pi} \right] - \frac{m^2}{2} [(v + \sigma)^2 - \vec{\pi}^2] - \frac{\lambda}{4} [(v + \sigma)^2 + \vec{\pi}^2]^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \vec{\pi}^T \partial^\mu \vec{\pi} \right] - m^2 \sigma^2 + \text{cte.} + \mathcal{O}(\sigma^3, \pi_i^3). \end{aligned} \quad (2.37)$$

En lo anterior ha introducido la notación $\vec{\pi}^T = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$. De esta expresión, se identifica inmediatamente a la masa de la partícula σ , dada por

$$m_\sigma^2 = -2m^2, \quad (2.38)$$

así como tres bosones de Nambu-Goldstone π_1, π_2 y π_3 . Estos indican que se perdieron tres generadores en el proceso de rompimiento espontáneo de la

simetría¹³

$$SU(2)_L \otimes SU(2)_R \longrightarrow SU(2).$$

Para que la simetría se vuelva local, se tienen que añadir campos de norma. En este caso el grupo de simetría $SU(2)$ es no-abeliano así que el campo de norma correspondiente será no-abeliano.

El grupo de simetría global $SU(2)_L$ se vuelve local con un campo de norma $W^\mu(x)$. En cambio, la simetría global $SU(2)_R$ no se promueve a una simetría local completamente sino que sólo un subgrupo de ella $U(1) \subset SU(2)_R$; como el grupo $U(1)$ es abeliano este procedimiento se puede lograr con un campo de norma abeliano $B^\mu(x)$.

Los tres generadores que se pierden en el rompimiento espontáneo de la simetría electrodébil

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \longrightarrow U(1)_{EM},$$

de acuerdo al teorema de Goldstone, generan tres bosones de Nambu-Goldstone, mismos que son absorbidos por tres bosones de norma masivos volviéndolos masivos. Los bosones de norma que adquieren masa corresponden a los bosones de la interacción débil W^\pm y Z^0 , mientras que el grupo de simetría remanente $U(1)_{EM}$ conserva un bosón de norma no masivo, el fotón.

La densidad Lagrangiana que describe este sector del SM, el bosón de Higgs y los campos de norma del sector electrodébil, es la siguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{H+EW}(\Phi, W_\mu, B_\mu) = & (D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi + \frac{1}{2} \text{Tr} [W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}] \\ & - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - m^2 |\Phi|^2 - \lambda |\Phi|^4, \end{aligned} \quad (2.39)$$

¹³También se puede pensar como $O(4) \longrightarrow O(3)$.

donde la derivada covariante está dada por

$$D_\mu = \partial_\mu + g_W W_\mu(x) + i\frac{g'}{2} B_\mu(x), \quad (2.40)$$

con

$$W_\mu(x) = \frac{i}{2} \sum_{a=1}^3 W_\mu^{(a)}(x) \sigma_a, \quad (2.41)$$

$$W_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + g_W [W_\mu, W_\nu], \quad (2.42)$$

$$B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad (2.43)$$

donde σ_a son las matrices de Pauli y g_W y g' los acoplamientos para los campos de norma W^μ y B^μ respectivamente.

Al tomar las fluctuaciones alrededor del vacío de la Ec. (2.34)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \sigma(x) \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

la densidad Lagrangiana toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{H+EW}(\Phi, W_\mu, B_\mu) = & \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \text{Tr} [W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}] - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{8} (v + \sigma)^2 [g_W^2 W_\mu^{(1)} W^{(1)\mu} + g_W^2 W_\mu^{(2)} W^{(2)\mu} \\ & \quad + (g_W W_\mu^{(3)} - g' B_\mu) (g_W W^{(3)\mu} - g' B_\mu)] \\ & - m^2 \sigma^2 + \text{cte.} + \mathcal{O}(\sigma^3). \end{aligned} \quad (2.45)$$

En términos de los campos de la fase simétrica, los campos físicos están dados por

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^{(1)} \mp iW_\mu^{(2)}), \quad (2.46)$$

$$Z_\mu = \frac{g_w W_\mu^{(3)} - g' B_\mu}{\sqrt{g_w^2 + g'^2}}, \quad (2.47)$$

$$A_\mu = \frac{g' W_\mu^{(3)} + g_w B_\mu}{\sqrt{g_w^2 + g'^2}}. \quad (2.48)$$

Los cuales tienen asociadas las masas

$$m_W = \frac{1}{2} g_w v, \quad (2.49)$$

$$m_Z = \frac{1}{2} v \sqrt{g_w^2 + g'^2}, \quad (2.50)$$

$$m_A = 0, \quad (2.51)$$

donde a v se le conoce como el valor esperado del vacío para el bosón de Higgs $v = 246$ GeV. La masa del bosón de Higgs, corresponde a la de la partícula σ , está dada por

$$m_H^2 = -2m^2 = 2\lambda v^2, \quad (2.52)$$

cuyo valor experimental es $m_H^2 \simeq 125.1$ GeV. Es importante notar que g_w, g', λ y v son parámetros libres del SM¹⁴, es decir, son parámetros que no pueden ser predichos teóricamente y su valor proviene unicamente de la medición experimental.

En el procedimiento mostrado podrían surgir preguntas como, ¿por qué no se promovió el grupo $SU(2)_R$ a una simetría local completamente? ¿Qué

¹⁴Estos parámetros libres usualmente son escritos en términos de la contante de estructura fina (α), la constante de acoplamiento de Fermi (G_F), la masa del bosón de Higgs (m_H) y v .

pasa con la parte del grupo que no fue promovida? No se promovió el grupo completo $SU(2)_R$ a una simetría local debido a que esa no es la simetría que se observa en la naturaleza, como ya se mencionó anteriormente, el grupo de simetría que se tiene para la interacción electrodébil es

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y.$$

Así que esa debe de ser la simetría que tenga el modelo que se está utilizando para describir el comportamiento de la teoría; que la descripción matemática que se usa tenga un grupo de simetría mayor no es relevante a la física¹⁵. Ahora, a la simetría remanente $SU(2)$ del planteamiento inicial

$$SU(2)_L \otimes SU(2)_R \longrightarrow SU(2).$$

se le conoce como “simetría custodial” y protege a la teoría de ciertos métodos de renormalización [72, 73].

2.2.2. Interacciones tipo Yukawa

Este sector contempla las interacciones que surgen al incorporar los campos de materia en el SM a través de las tres generaciones de leptones y quarks¹⁶.

Al ser campos fermiónicos, su descripción se da en términos del Lagrangiano de Dirac [68]

$$\mathcal{L}_{Dirac}(\Psi, \partial\Psi) = \bar{\Psi}(x) (i\cancel{\partial} - m) \Psi(x), \quad (2.53)$$

donde $\cancel{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$ y $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ con γ^μ las matrices de Dirac.

¹⁵Simplemente pareciera que no se está usando el lenguaje correcto. Por ejemplo, al intentar describir a fotón (que tiene dos grados de libertad) con un campo $A^\mu(x)$ (que tiene cuatro grados de libertad) hace que la teoría se redundante y surgen la transformaciones de norma que conectan a estados físicamente equivalentes.

¹⁶Los leptones sólo son afectados por la interacción electrodébil mientras que los quarks son afectados tanto por la interacción electrodébil como por la interacción fuerte.

En la base de Weyl, es posible descomponer un biespinor de Dirac Ψ en dos

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_R(x) \end{pmatrix}, \quad (2.54)$$

donde $\psi_{L,R}$ son conocidos como espinores de Weyl y tienen asociadas quiralidades izquierda y derecha respectivamente. Estos transforman por separado ante transformaciones de Lorentz y pueden ser extraídas del biespinor de Dirac mediante los siguientes proyectores

$$\mathcal{P}_{\pm} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} \pm \gamma^5), \quad (2.55)$$

cuya acción es la siguiente

$$\begin{aligned} \Psi_{L,R} &= \mathcal{P}_{\mp} \Psi, \\ \bar{\Psi}_{L,R} &= \bar{\Psi} \mathcal{P}_{\pm}. \end{aligned}$$

Nótese que el término que masa que aparece en la densidad Lagrangiana (2.53) se puede reescribir como

$$m \bar{\Psi} \Psi = m (\bar{\Psi}_L \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Psi_L), \quad (2.56)$$

de donde se observa claramente que este término de masa es el responsable de la mezcla entre los espinores de Weyl $\psi_{L,R}$. Si no se tiene un término de masa son grados de libertad independientes.

Para observar el comportamiento de los fermiones del SM se hará un breve análisis de la primera generación de leptones: el electrón y su neutrino. Estos se pueden representar por los biespinores

$$e_L(x), e_R(x) \text{ y } \nu_L(x). \quad (2.57)$$

Se ha omitido al neutrino derecho (quiralidad positiva) debido a que este no ha sido observado¹⁷. Es posible escribir a las componentes izquierdas como un doblete de $SU(2)_L$ mientras que la parte derecha corresponde a un singulete de $SU(2)_L$

$$\begin{pmatrix} \nu_L(x) \\ e_L(x) \end{pmatrix} \text{ y } e_R(x), \quad (2.58)$$

de tal forma que el Lagrangiano libre se escribe como

$$\mathcal{L}_{fermiones} = (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L) \begin{pmatrix} i\cancel{\partial} & 0 \\ 0 & i\cancel{\partial} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} + \bar{e}_R i\cancel{\partial} e_R, \quad (2.59)$$

donde se está considerando que los fermiones son no masivos.

Ahora, al igual que en el sector del Higgs, al promover el grupo de simetría global $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ a una simetría local es necesario promover la derivada a una derivada covariante para que la acción sea invariante

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig_W W_\mu^a \frac{\sigma_a}{2} - i\frac{g'}{2} B_\mu, \quad (2.60)$$

para la parte izquierda y

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu - ig' B_\mu, \quad (2.61)$$

para la componente derecha, donde se han introducido los campos de norma $W_\mu(x)$ y $B_\mu(x)$ y σ_a son las matrices de Pauli. Nótese que el campo de norma B_μ se acopla con una constante distinta a las componentes izquierdas que a las derechas

$$\frac{g'}{2} \longleftrightarrow g',$$

¹⁷En este punto se sigue la construcción original del SM donde los neutrinos eran no masivos.

mientras que el campo W_μ se acopla únicamente a la parte izquierda. Por esto es que se dice que la interacción electrodébil es una teoría quiral.

Una de las consecuencias de que los acoplamientos de las componentes izquierdas y derechas de los fermiones sean diferentes se observa en el término de masa (2.56). Si se considera el término de masa para el electrón

$$m(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L),$$

debido a que las componentes izquierda y derecha transforman de manera distinta ante transformaciones de $U(1)_Y$ y de $SU(2)_L$, los términos de masa no son invariantes ante este grupo de simetría local. Entonces, si el SM tiene el grupo de simetría local $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, los términos de masa no pueden estar presentes en el Lagrangiano.

En la naturaleza se observa que los electrones y, en general, todos los fermiones sí tienen masa, entonces, ¿cómo adquieren masa los fermiones en el SM? La respuesta es: a través de la interacción con el campo de Higgs.

La interacción que se propone es de la forma

$$g\bar{\Psi}\Phi\Psi,$$

denominada interacción de Yukawa. La idea detrás de este término es simple: una vez que el campo de Higgs condensa, este adquiere un valor constante, de tal forma que se genera el término de masa que se busca.

La densidad Lagrangiana asociada a esta interacción debe respetar el grupo de simetría $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, por ello, el campo de Higgs se incorpora como un doblete de $SU(2)_L$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_+ \\ \Phi_0 \end{pmatrix},$$

de tal manera que el término de interacción que dota de masa a los fermiones tiene la forma

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -g_e \left[\bar{e}_R(\Phi_+^*, \Phi_0^*) \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} + (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L) \begin{pmatrix} \Phi_+ \\ \Phi_0 \end{pmatrix} e_R \right]. \quad (2.62)$$

Para ver con detalle como adquieren masa los fermiones mediante el rompimiento de la simetría electrodébil, considérese la configuración del campo de Higgs en el vacío (2.34)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix},$$

de modo que al sustituirla en la Ec. (2.62) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yukawa} &= -\frac{g_e}{\sqrt{2}} \left[\bar{e}_R(0, v) \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} + (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} e_R \right] \\ &= -\frac{g_e v}{\sqrt{2}} (\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R), \end{aligned} \quad (2.63)$$

de donde se observa que el electrón adquirió masa

$$m_e = \frac{g_e v}{\sqrt{2}}, \quad (2.64)$$

la cual es proporcional al acoplamiento Yukawa g_e y al valor de expectación del bosón de Higgs en el vacío v . Nótese que el neutrino no adquirió masa debido a que no se está trabajando con la componente derecha¹⁸ ν_R .

Este es el mecanismo por el cual todos los fermiones del SM adquieren masa, de manera general tendrá la forma

$$m_f = \frac{g_f v}{\sqrt{2}}, \quad (2.65)$$

donde g_f son los acoplamientos tipo Yukawa, los cuales forman parte de los parámetros libres de la teoría.

Vale la pena mencionar que la forma precisa de trabajar con los acoplamientos tipo Yukawa para los quarks tiene pequeños detalles, por ejemplo:

¹⁸El mecanismo por el cual los neutrinos adquieren masa es distinto.

dotar de masa a la entrada superior del doblete, pasar de los eigenestados débiles a los eigenestados de masa mediante la matriz CKM. Estos puntos no se discuten debido a que el objetivo general de esta sección es dar las características principales del mecanismo por el cual los fermiones adquieren masa, enfatizando el acoplamiento del campo de Higgs con los fermiones, ya que esta interacción es crucial en el diagrama que se trabaja en la presente tesis.

2.2.3. Interacción fuerte

A pesar del gran esfuerzo por parte de la comunidad científica, no ha sido posible observar a los quarks¹⁹ libres en la naturaleza. Esto se debe a que la fuerza nuclear fuerte es de tal magnitud que los quarks y los gluones²⁰ permanecen confinados a bajas energías. La construcción de un modelo realista que se aproxime lo más posible a la naturaleza de las interacciones fuertes debe de estar basado en el fenómeno del confinamiento.

La consecuencia principal del confinamiento es que los quarks y gluones, partículas con carga de color, forman estados de color neutro y carga eléctrica entera llamados hadrones. Los hadrones se clasifican en bariones (estados de tres quarks) y mesones (estados de quark-antiquark) pero se han propuesto estados más exóticos como las “glueballs” (ó bolas de gluones). El fenómeno del confinamiento es en la actualidad un problema abierto en la física de partículas, pues no ha sido explicado a fondo y se está lejos de un entendimiento cualitativo completo de las propiedades de los hadrones.

Una imagen sencilla del confinamiento de color se puede dar con ayuda de los gluones, al tratar de separar un singulete de color (formado por un quark-antiquark), un “tubo” del campo de norma (asociado a los gluones) se forma entre las dos partículas y, debido a que la constante de acoplamiento es muy grande, cada vez se necesita más energía para separarlos hasta que se llega a un radio fijo. En este punto se crea un par quark-antiquark (con la densidad de energía almacenada en el campo de norma) y por ello no quedan quarks libres. De manera más pictórica, es como si las parejas quark-antiquark estuvieran atadas por una liga que va almacenando energía a medida que se separan, cuando llega el punto donde la liga se rompe ha

¹⁹Fermiones con carga eléctrica fraccionaria y carga de color.

²⁰Los bosones de norma mediadores de la interacción fuerte.

almacenado tanta energía que se crea un par quark-antiquark que se asocian con los estados iniciales y forman estados ligados otra vez.

La teoría que mejor describe a la interacción fuerte es la cromodinámica cuántica (QCD), una teoría de norma no-abeliana con un grupo de simetría local $SU(3)_C$. En este modelo los quarks tienen tres tipos de carga de color y su interacción está mediada por los gluones²¹. Los acoplamientos tipo Yukawa de los quarks con el bosón de Higgs entran a la teoría mediante los términos de masa de los quarks, lo cual permite estudiarla de forma totalmente independiente al resto de los sectores del SM.

En general, las masas de los quarks no juegan un rol dominante en la dinámica de la QCD y no representan las masas de los estados físicos observables. Es decir, la suma de las masas del contenido de quarks de los hadrones no es la masa observable, es mucho menor a esta. Este “exceso” de masa en los hadrones se debe a la gran energía de amarre entre los gluones y quarks y es la contribución principal de toda la materia observable.

Sabor	Carga eléctrica [e]	Masa
Up (u)	2/3	$2.16^{+0.49}_{-0.26}$ MeV
Down (d)	-1/3	$4.67^{+0.48}_{-0.17}$ MeV
Strange (s)	-1/3	93^{+11}_{-5} MeV
Charm (c)	2/3	1.27 ± 0.02 GeV
Beauty/Bottom (b)	-1/3	$4.18^{+0.03}_{-0.02}$ GeV
Top (t)	2/3	173.1 ± 0.9 GeV

Tabla 2.1: Propiedades de los quarks [32].

La existencia de los quarks se ha corroborado a través de una gran cantidad de evidencia experimental en los procesos de dispersión inelástica profunda (DIS²²).

La QCD exhibe una propiedad llamada libertad asintótica, la cual da un cambio radical en el comportamiento de la materia hadrónica si la densidad o la temperatura aumentan drásticamente. En un sistema muy denso los hadrones están tan cerca uno de otro que los quarks y gluones se comportan como partículas libres. Esto se debe a que la constante de acoplamiento decrece a medida que la energía aumenta, así que a medida que la energía se

²¹A diferencia de la interacción electrodébil, la QCD es una teoría vectorial, en el sentido que se acopla de igual forma a las componentes izquierda y derecha de los quarks.

²²*Deep inelastic scattering.*

incrementa la interacción entre los quarks se debilita. Este comportamiento en la constante de acoplamiento fuerte sugiere que un sistema de hadrones (con quarks confinados) sufre una transición de fase en donde los quarks y gluones están libres (plasma de quarks y gluones), esta transición requiere ya sea una densidad muy grande (aproximadamente $1 \text{ GeV}/\text{fm}^3$ [74, 75]) o una temperatura muy alta²³. Este plasma de quarks y gluones (QGP) puede estar presente en el interior de estrellas de neutrones o en colisiones de iones relativistas producidas en los aceleradores de partículas donde se recrean estas condiciones extremas de temperatura y/o densidad, ó durante alguna etapa temprana de la evolución del Universo. En la Figura 2.2, se ilustra el diagrama de fase de la QCD y la región que accesible para diferentes laboratorios.

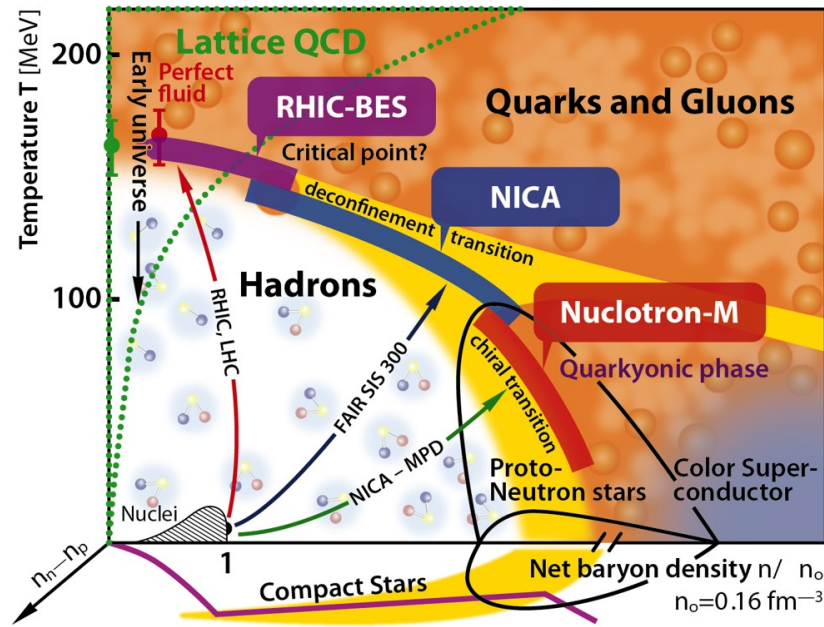


Figura 2.2: Diagrama fase de la QCD. Imagen tomada de [76].

De manera más formal, los generadores del grupo de simetría $SU(3)$ se denotan como $(t^a)_{ij}$, donde a es el índice de color en la representación ad-

²³La temperatura requerida para lograr su formación llega hasta los 175 MeV ($\frac{1}{40} eV \sim 20^\circ C$).

junta²⁴ y corre de 1 a 8 y los índices matriciales i, j son índices de color de la representación fundamental²⁵ y toman tres valores. Estos generadores satisfacen las relaciones de conmutación

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c, \quad (2.66)$$

donde f^{abc} son conocidas como constantes de estructura de grupo, las cuales son antisimétricas en todos los índices. Para el caso de $SU(3)$, los generados son ocho matrices de 3×3 que pueden escribirse como

$$t^a = \frac{1}{2}\lambda^a, \quad (2.67)$$

donde λ^a son las matrices de Gell-Mann

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} \sigma^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

con σ^i las matrices de Pauli.

La derivada covariante del sector de color $SU(3)$ del SM está dada por

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s G^\mu(x), \quad (2.69)$$

donde g_s la constante de acoplamiento fuerte y

²⁴Representa los colores de los gluones.

²⁵Representa los colores de los quarks: rojo, azul y verde.

$$G^\mu(x) = G_a^\mu(x)t^a, \quad (2.70)$$

es el campo de norma asociado a los gluones. A partir de esta derivada, el tensor de intensidad del campo de color se obtiene inmediatamente, usando la relación general

$$\frac{1}{g_s}[D^\mu, D^\nu] = G^{\mu\nu}(x), \quad (2.71)$$

de tal forma que

$$G_a^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu G_a^\nu(x) - \partial^\nu G_a^\mu(x) - g_s f_{abc} G_b^\mu G_c^\nu. \quad (2.72)$$

Esta teoría, por construcción, es invariante de norma local ante las transformaciones de $SU(3)$.

Debido a que se tienen tres colores diferentes de quarks, los campos fermiónicos asociados a ellos $\Psi_f^j(x)$ llevan un índice de color de la representación fundamental j además de un índice f que denota los distintos sabores de los quarks como se muestra en la Tabla 2.1. Todas estas propiedades se ven englobadas en la densidad Lagrangiana de la QCD

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^8 G_a^{\mu\nu}(x) G_{\mu\nu}^a(x) + \sum_f \sum_{j=1}^3 \bar{\Psi}_f^j(x) (i\not{D} - m_f) \Psi_f^j(x). \quad (2.73)$$

El primer término corresponde al término cinético de los campos de norma, mientras que el segundo contiene información tanto de la teoría libre de los quarks (el término de masa m_f es el que surge mediante los acoplamientos tipo Yukawa de los quarks con el bosón de Higgs) como del acoplamiento mínimo entre los gluones y los quarks en la derivada covariante.

La expresión (2.73) no es la forma exacta de la densidad Lagrangiana para la teoría de QCD. Para poder realizar de manera precisa la cuantización de la teoría es necesario incluir un término para fijar la norma así como campos fantasma mediante el podrecimiento de Fadeev-Popov, de modo que

la teoría completa se describe con un Lagrangiano que contiene todos estos ingredientes

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{Yang-Mills} + \mathcal{L}_{Quarks} + \mathcal{L}_{Norma} + \mathcal{L}_{Fantasmas}. \quad (2.74)$$

La anterior es la densidad Lagrangiana que describe con exactitud a la interacción nuclear fuerte. En el presente trabajo de tesis no se ahondará en estos términos adicionales.

2.2.4. Reglas de Feynman

La sección del SM relevante para el cálculo que se quiere hacer está descrita por la siguiente densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{H+EW} + \mathcal{L}_{QCD} + \mathcal{L}_{Yukawa}. \quad (2.75)$$

Si se trabaja en el régimen de la expansión perturbativa, esta da origen a las siguientes reglas de Feynman en el espacio de momentos

(a) Propagadores

- Bosón de Higgs

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \text{-----} \end{array} = \frac{i}{p^2 - m_H^2 + i\epsilon}. \quad (2.76)$$

- Quarks

$$j, f \xrightarrow{p} k, f' = \frac{i\delta_k^j \delta_{f'}^f}{\not{p} - m_f + i\epsilon}. \quad (2.77)$$

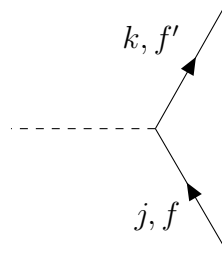
- Gluones

$$a, \mu \xrightarrow{p} b, \nu = \frac{-i\delta_b^a}{p^2 + i\epsilon} \left(g^{\mu\nu} + (\zeta - 1) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right), \quad (2.78)$$

con ζ el parámetro de norma.

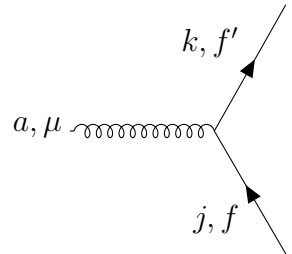
(b) Vértices de interacción

- Yukawa



$$= -ig_f \delta_k^j \delta_{f'}^f. \quad (2.79)$$

- Gluón-quarks



$$= -ig_s \gamma^\mu (t^a)^j_k \delta_{f'}^f. \quad (2.80)$$

Las deltas de Kronecker representan la conservación de la carga de color, en cualquiera de sus representaciones, así como del sabor de los quarks.

En esta sección se han omitido las reglas de Feynman asociadas al sector electrodébil, a los vértices de autointeracción tanto del bosón de Higgs como de los gluones, así como las correspondientes a los fantasmas. Lo anterior se debe a que no son relevantes al cálculo central de esta tesis, mismo que se presenta con detalle en los siguientes capítulos.

Capítulo 3

Producción del bosón de Higgs en el vacío

En este capítulo se presenta con detalle el cálculo de la sección eficaz para la producción de bosones de Higgs a través del proceso de fusión de gluones al orden dominante (*leading order*); para ello se plantean los diagramas de Feynman relevantes a este proceso. Posteriormente, se calcula la amplitud de probabilidad para el proceso, se obtiene el elemento de matriz invariante y, finalmente, se encuentra la sección eficaz.

El propósito principal del presente capítulo es introducir las herramientas y la metodología que se usará posteriormente en el Capítulo 4, donde se considera un campo magnético homogéneo y su efecto en la tasa de producción del bosón de Higgs.

3.1. Elemento de matriz invariante

La sección eficaz del bosón de Higgs a través del proceso de fusión de gluones

$$gg \longrightarrow H,$$

tiene asociada la amplitud de probabilidad

$$\langle p_3; + | (p_1, \mu, \sigma, a), (p_2, \nu, \sigma', b); - \rangle, \quad (3.1)$$

donde p_1 y p_2 son los cuadrimomentos de los gluones incidentes¹, con polarizaciones σ y σ' e índices de color a y b respectivamente, p_3 es el cuadrimomento asociado al bosón de Higgs saliente. Los signos “+” y “-” representan que son estados asintóticos a los tiempos $\pm\infty$.

A nivel árbol este proceso no existe, debido a que no hay un vértice directo entre gluones y bosones de Higgs en el Modelo Estándar. La contribución dominante a este proceso, ó *leading order* (LO), se da mediante correcciones radiativas de QCD que involucra lazos de quarks. A partir de los vértices de interacción que se muestran en la Sección 2.2.4, la amplitud de probabilidad al LO es la siguiente

$$\langle p_3 | (\hat{\psi} \hat{\phi}_H \hat{\psi})_{v_3} (\hat{\psi} \hat{G} \hat{\psi})_{v_2} (\hat{\psi} \hat{G} \hat{\psi})_{v_1} | (p_1, \mu, \sigma, a), (p_2, \nu, \sigma', b) \rangle, \quad (3.2)$$

donde \hat{G} , $\hat{\psi}$ y $\hat{\phi}_H$ son los operadores de campo asociados a los gluones, quarks y al bosón de Higgs, respectivamente. Las v_i etiquetan a los diferentes vértices.

Siguiendo el formalismo de la teoría cuántica de campos, se deben de considerar todas las posibles contracciones entre los operadores de campo y los estados asintóticos para obtener las diferentes contribuciones a la amplitud de probabilidad.

Las únicas contracciones posibles están dadas por [68]

$$\overbrace{\hat{\phi}_H(x) | \vec{p}_3 \rangle} \equiv e^{-ip_3 \cdot x} | 0 \rangle, \quad (3.3)$$

$$\overbrace{\hat{G}_a^\mu(x) | (\vec{p}, \sigma) \rangle} \equiv \epsilon_a^\mu(\vec{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} | 0 \rangle, \quad (3.4)$$

$$\overbrace{\hat{\psi}(x) \hat{\psi}(y)} \equiv S(x, y) = -\overbrace{\hat{\psi}(y) \hat{\psi}(x)}, \quad (3.5)$$

donde $S_F(x, y)$ es el propagador de Feynman fermiónico en el espacio de configuraciones.

¹Los gluones tienen asociados índices de Lorentz al ser bosones vectoriales, en este caso son μ y ν respectivamente.

En el caso de la Ec. (3.2), se tienen las siguientes contribuciones²

$$\langle p_3 | \overbrace{(\hat{\psi} \hat{\phi}_H \hat{\psi})_{v_3}} \overbrace{(\hat{\psi} \hat{G} \hat{\psi})_{v_2} (\hat{\psi} \hat{G} \hat{\psi})_{v_1}} | (p_1, \mu), (p_2, \nu) \rangle, \quad (3.6)$$

$$\langle p_3 | \overbrace{(\hat{\psi} \hat{\phi}_H \hat{\psi})_{v_3}} \overbrace{(\hat{\psi} \hat{G} \hat{\psi})_{v_2} (\hat{\psi} \hat{G} \hat{\psi})_{v_1}} | (p_1, \mu), (p_2, \nu) \rangle, \quad (3.7)$$

$$\langle p_3 | \overbrace{(\hat{\psi} \hat{\phi}_H \hat{\psi})_{v_3}} \overbrace{(\hat{\psi} \hat{G} \hat{\psi})_{v_2} (\hat{\psi} \hat{G} \hat{\psi})_{v_1}} | (p_1, \mu), (p_2, \nu) \rangle, \quad (3.8)$$

$$\langle p_3 | \overbrace{(\hat{\psi} \hat{\phi}_H \hat{\psi})_{v_3}} \overbrace{(\hat{\psi} \hat{G} \hat{\psi})_{v_2} (\hat{\psi} \hat{G} \hat{\psi})_{v_1}} | (p_1, \mu), (p_2, \nu) \rangle, \quad (3.9)$$

donde se han omitido los índices de polarización σ y σ' así como los índices de color a y b para simplificar la notación. Las contracciones bosónicas se han colocado en la parte superior mientras que las contracciones fermiónicas se colocaron en la parte inferior. Esto es útil debido a que los “cruces” entre las contracciones fermiónicas generan un signo “-” ya a que estos campos anticonmutan entre sí, esto último permite ver fácilmente que todas las contribuciones tienen el mismo signo.

La representación pictórica, mediante diagramas de Feynman, de las Ecs. (3.6)-(3.9) se muestra en la Figura 3.1. Nótese que de estos cuatro diagramas sólo existen dos topologías diferentes, es decir, sólo hay dos tipos distintos de diagramas. Los diagramas A y D son equivalentes entre sí al igual que los diagramas B y C, esto se puede ver fácilmente si en los diagramas C y D se “descruzan” las patas externas de los gluones y posteriormente se voltea el diagrama.

De tal forma que para obtener la amplitud de probabilidad del proceso basta con calcular dos diagramas no equivalentes, multiplicarlos por la multiplicidad y finalmente sumar los resultados.

²Omitiendo diagramas no conexos, tipo *tadpoles*.

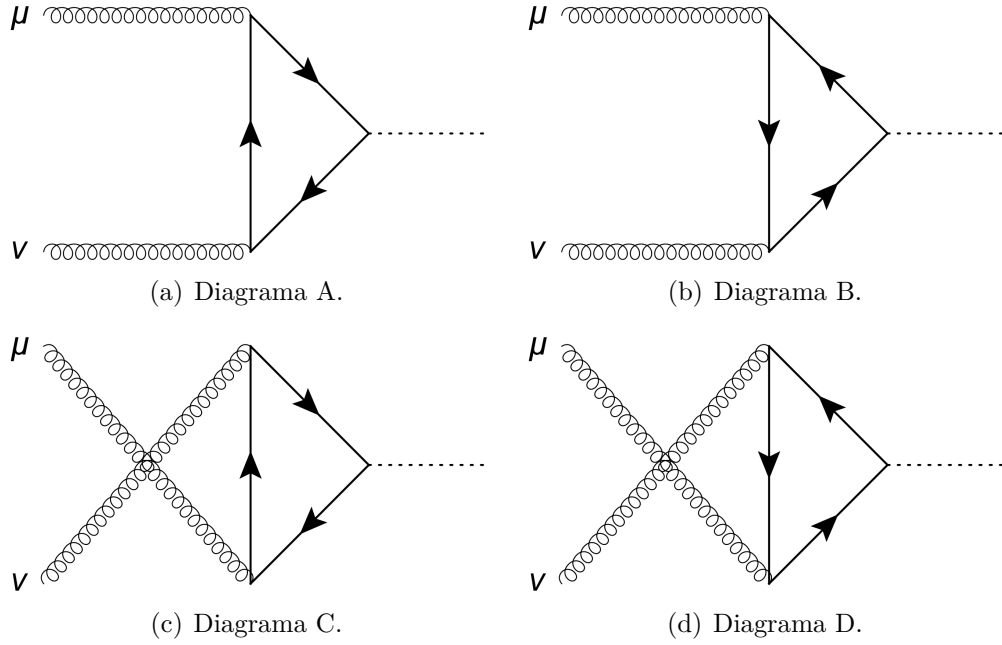


Figura 3.1: Diagramas de Feynman correspondientes las cuatro posibles contracciones en la amplitud de probabilidad de la producción de Higgs mediante fusión de gluones al LO.

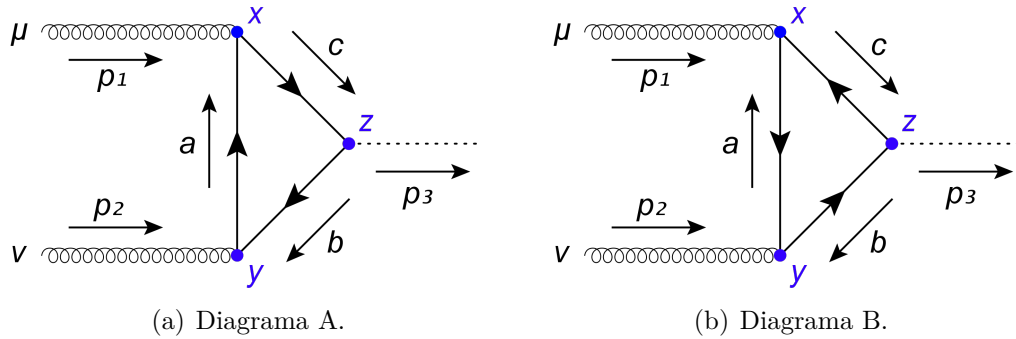


Figura 3.2: Diagramas de Feynman que contribuyen al proceso al LO. El flujo de carga se denota por las flechas de los campos espinoriales (quarks), los índices de Lorentz están asociados a los bosones vectoriales (gluones), el flujo de momento se indica con las flechas separadas y los puntos sobre los vértices indican la posición espacio-temporal de éstos.

En la Fig. 3.2 se muestran los dos diagramas topológicamente inequivalentes, junto con las variables relevantes para el cálculo de la amplitud. Nótese que en dicha figura se han incluido las posiciones espacio-tiempo de los vértices, la utilidad de esto lo veremos en el siguiente capítulo.

Una observación importante es que ambos diagramas son muy similares, la diferencia que se observa es que la dirección en la que fluye la carga (el sentido de los propagadores fermiónicos) es opuesta, es decir, en un diagrama la carga circula hacia la derecha mientras que en el otro circula hacia la izquierda. A este tipo de diagramas se les conoce como “conjugados de carga”, lo cual es de gran relevancia en el análisis posterior y se analiza de forma detallada en el Apéndice B.

3.1.1. Vértice efectivo

Las contribuciones de cada uno de los diagramas de la Figura 3.2 no se considerarán con los estados asintóticos, es decir, se calcularán los respectivos diagramas de Feynman amputados. Estos diagramas podrían pensarse como un “vértice efectivo”, $\Gamma^{\mu\nu}$, que contiene toda la información del proceso de producción de Higgs mediante fusión de gluones. Dicho vértice efectivo representa un acoplamiento directo entre el Higgs y los gluones tal como se muestra, de forma esquemática, en la Figura 3.3.

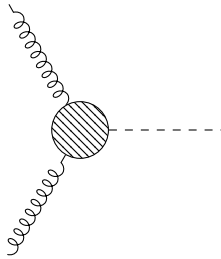


Figura 3.3: Vértice efectivo.

La forma analítica del vértice efectivo, debida al diagrama A, se obtiene fácilmente al aplicar las reglas de Feynman en el espacio de configuraciones, obteniéndose

$$i\Gamma_{(A)}^{\mu\nu}(x, y, z) = (-1) \frac{2}{2!} \mathcal{TR} [(-ig_s \gamma^\mu t^a) S_f(x, y) \quad (3.10)$$

$$(-ig_s \gamma^\nu t^b) S_f(y, z) (-ig_f) S_f(z, x)],$$

donde el -1 corresponde al lazo fermiónico, el 2 se debe a la multiplicidad del diagrama, el $\frac{1}{2!}$ a la expansión perturbativa³ y el subíndice f denota el sabor del quark. El operador \mathcal{TR} indica una traza funcional, es decir, hay que sumar sobre todos los grados de libertad indeterminados del diagrama: los momentos dentro del lazo así como el espín y el color de los quarks.

Teniendo en cuenta que la relación entre el propagador fermiónico en el espacio de configuración y el espacio de momentos, es [68]

$$S_f(x, y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S_f(p) e^{-ip \cdot (x-y)}, \quad (3.11)$$

donde $S_f(p)$, el propagador fermiónico en el espacio de momentos, está dado por

$$S_f(p) = \frac{i}{\not{p} - m_f + i\epsilon}, \quad (3.12)$$

con m_f la masa del fermión y $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$.

Esto permite reescribir la Ec. (3.10) como sigue

$$i\Gamma_{(A)}^{\mu\nu}(x, y, z) = -ig_s^2 g_f \mathbf{tr} [t^a t^b] \int \frac{d^4 a}{(2\pi)^4} \frac{d^4 b}{(2\pi)^4} \frac{d^4 c}{(2\pi)^4} e^{-ia \cdot (x-y)} e^{-ib \cdot (y-z)} \quad (3.13)$$

$$\times e^{-ic \cdot (z-x)} Tr[\gamma^\mu S_f(a) \gamma^\nu S_f(b) S_f(c)],$$

donde \mathbf{tr} representa la traza en el espacio de color y Tr es la traza sobre los índices de espín.

Para obtener la contribución al vértice efectivo de la Ec. (3.13) en el espacio de momentos, donde la interpretación física se da en términos de cantidades cinemáticas, se aplica una transformada de Fourier sobre cada

³Se está trabajando a segundo orden en el acoplamiento de quarks con gluones.

coordenada espacial, esto es

$$\begin{aligned}
i\Gamma_{(A)}^{\mu\nu}(p_1, p_2, p_3) &= \int d^4x d^4y d^4z i\Gamma_{(A)}^{\mu\nu}(x, y, z) e^{-ip_1 \cdot x} e^{-ip_2 \cdot y} e^{+ip_3 \cdot z} \\
&= -ig_f^2 g_H \mathbf{tr} [t^a t^b] \int \frac{d^4a}{(2\pi)^4} \frac{d^4b}{(2\pi)^4} \frac{d^4c}{(2\pi)^4} \\
&\quad \times \int d^4x d^4y d^4z e^{-i(p_1+a-c) \cdot x} e^{-i(p_2+b-a) \cdot y} e^{-i(-p_3+c-b) \cdot z} \\
&\quad \times \text{Tr} [\gamma^\mu S_f(a) \gamma^\nu S_f(b) S_f(c)].
\end{aligned} \tag{3.14}$$

De esta ecuación es posible identificar la representación integral de la delta de Dirac

$$\int d^4x e^{-ip \cdot x} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p), \tag{3.15}$$

de tal forma que la expresión (3.14) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
i\Gamma_{(A)}^{\mu\nu}(p_1, p_2) &= -ig_s^2 g_f \mathbf{tr} [t^a t^b] (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3) \\
&\quad \times \int \frac{d^4a}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\gamma^\mu S_f(a) \gamma^\nu S_f(a - p_2) S_f(p_1 + a)],
\end{aligned} \tag{3.16}$$

donde se ha retirado la dependencia explícita de p_3 en el vértice efectivo debido a que la delta de Dirac indica la conservación de momento. De aquí en adelante, por simplicidad, se omite este factor de conservación.

Debido a que las trazas en la Ec. (3.13), hacen referencia a grados de libertad independientes, estas pueden calcularse por separado. En el caso de la traza de color, haciendo uso de las relaciones de conmutación de la Ec. (2.66), junto con

$$\{t^a, t^b\} = \frac{1}{3} \delta^{ab} + d^{abc} t^c, \tag{3.17}$$

donde d^{abc} son conocidas como constantes de estructura simétricas. Se obtiene de forma inmediata la relación

$$\mathbf{tr} [t^a t^b] = \frac{1}{2} \delta^{ab}, \quad (3.18)$$

donde la delta de Kronecker con índices de color indica la conservación del color en el lazo de quarks que interviene en el proceso.

Para calcular la traza sobre espines es necesario escribir de forma explícita el propagador fermiónico en el espacio de momentos

$$S_f(p) = \frac{i(\not{p} + m_f)}{p^2 - m_f^2 + i\epsilon}, \quad (3.19)$$

de modo que, al usar el álgebra de las matrices de Dirac tal como se detalla en el Apéndice A, se obtiene

$$\begin{aligned} & \text{Tr} [\gamma^\mu (\not{a} + m_f) \gamma^\nu (\not{a} - \not{p}_2 + m_f) (\not{p}_1 + \not{a} + m_f)] \\ &= 4m_f [g^{\mu\nu} (m_f^2 - a^2 - p_1 \cdot p_2) + 4a^\mu a^\nu + 2a^\mu p_2^\nu \\ & \quad - 2a^\nu p_1^\mu + p_2^\mu p_1^\nu - p_1^\mu p_2^\nu]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Reemplazando (3.18) y (3.19) en (3.16), la contribución del diagrama A al vértice efectivo adquiere la forma

$$\begin{aligned} i\Gamma_{(A)}^{\mu\nu}(p_1, p_2) &= -2ig_s^2 g_f m \delta^{ab} \int \frac{d^4 a}{(2\pi)^4} \frac{i}{a^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(a - p_2)^2 - m^2 + i\epsilon} \\ & \quad \times \frac{i}{(p_1 + a)^2 - m^2 + i\epsilon} \\ & \quad \times [g^{\mu\nu} (m^2 - a^2 - p_1 \cdot p_2) + 4a^\mu a^\nu \\ & \quad + 2a^\mu p_2^\nu - 2a^\nu p_1^\mu + p_2^\mu p_1^\nu - p_1^\mu p_2^\nu], \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde se han omitido los subíndices f en las masas para facilitar la lectura.

Antes de proseguir con el cálculo de la traza sobre el momento en la Ec. (3.10), expresada en términos de la integral sobre el momento indeterminado que fluye en el lazo, vale la pena calcular la contribución del diagrama B de la Figura 3.2 al vértice efectivo. Siguiéndose un razonamiento análogo al desarrollado para el diagrama A, la expresión equivalente a la Ec. (3.13) para el diagrama B es

$$i\Gamma_{(B)}^{\mu\nu}(x, y, z) = -ig_s^2 g_f \mathbf{tr} [t^a t^b] \int \frac{d^4 a}{(2\pi)^4} \frac{d^4 b}{(2\pi)^4} \frac{d^4 c}{(2\pi)^4} e^{-ia \cdot (x-y)} e^{-ib \cdot (y-z)} \\ \times e^{-ic \cdot (z-x)} \text{Tr} [\gamma^\nu S_f(-a) \gamma^\mu S_f(-c) S_f(-b)], \quad (3.22)$$

donde los propagadores fermiónicos tienen un signo negativo en cada momento debido a que en el diagrama B el flujo de momento va en sentido contrario al flujo de carga sobre cada propagador. Nótese que en los diagramas A y B de la Figura 3.2 todas las variables se definieron exactamente igual, así que la suma de ambos diagramas es directa.

Por otro lado, al comparar las ecuaciones (3.13) y (3.22) se observa que lo único en lo que difieren es en la traza sobre índices espinoriales

$$\text{Tr} [\gamma^\mu S_f(a) \gamma^\nu S_f(b) S_f(c)] \xleftrightarrow{A \leftrightarrow B} \text{Tr} [\gamma^\nu S_f(-a) \gamma^\mu S_f(-c) S_f(-b)].$$

En el Apéndice B se muestra con detalle la igualdad entre estas dos trazas así como la simetría de conjugación de carga que las conecta. Este análisis es de gran utilidad más adelante cuando se desarrolla el cálculo en presencia de un campo magnético.

Tomando en cuenta que las contribuciones debidas a los diagramas A y B son exactamente iguales, entonces, el vértice efectivo “total” está dado por

$$i\Gamma^{\mu\nu}(p_1, p_2) = -4ig_s^2 g_f m \delta^{ab} \int \frac{d^4 a}{(2\pi)^4} \frac{i}{a^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(a - p_2)^2 - m^2 + i\epsilon} \\ \times \frac{i}{(p_1 + a)^2 - m^2 + i\epsilon} \\ \times [g^{\mu\nu} (m^2 - a^2 - p_1 \cdot p_2) + 4a^\mu a^\nu \\ + 2a^\mu p_2^\nu - 2a^\nu p_1^\mu + p_2^\mu p_1^\nu - p_1^\mu p_2^\nu]. \quad (3.23)$$

Las integrales sobre el momento que fluye dentro del lazo a para encontrar una expresión analítica para el vértice efectivo, esto se pueden realizar por distintos métodos, por ejemplo usando el parámetro de Feynman [77] o por el método de reducción de Passarino-Veltman [78]. En este trabajo se calculan por un tercer método implementando integrales Gaussianas debido a que este es el que se utiliza para el caso con campo magnético.

Antes de continuar con el cálculo de una expresión analítica para el vértice efectivo, es importante realizar un análisis general de las estructuras tensoriales que lo constituyen. Este análisis, basado en simetrías y propiedades generales que debe satisfacer el vértice, se realiza con detalle a continuación y será de gran ayuda en el caso de campo magnético.

3.1.2. Estructura tensorial

Teniendo en cuenta las estructuras tensoriales que se tienen a disposición en este proceso

$$p_1^\mu, p_2^\mu, g^{\mu\nu} \text{ y } \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}.$$

La forma más general del vértice efectivo es

$$\Gamma^{\mu\nu}(p_1, p_2) = Ag^{\mu\nu} + Bp_1^\mu p_2^\nu + Cp_1^\nu p_2^\mu + Dp_1^\mu p_1^\nu + Ep_2^\mu p_2^\nu + F\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{1\alpha} p_{2\beta}, \quad (3.24)$$

donde los coeficientes asociados a cada uno de estos términos son funciones de escalares de Lorentz. Debido a que no es posible formar un pseudoescalar con los tensores disponibles y a que la teoría con la que se está trabajando conserva paridad, el coeficiente F debe de ser nulo.

Los coeficientes de la Ec. (3.24), se determinan al resolver un sistema de ecuaciones, tal como se detalla en el Apéndice C.1, obteniendo

$$A = \frac{(p_1 \cdot p_2)g^{\mu\nu} - p_1^\mu p_2^\nu - p_2^\mu p_1^\nu}{(d-2)(p_1 \cdot p_2)} \Gamma_{\mu\nu}(p_1, p_2), \quad (3.25)$$

$$B = -\frac{(p_1 \cdot p_2)g^{\mu\nu} - p_1^\mu p_2^\nu - (d-1)p_2^\mu p_1^\nu}{(d-2)(p_1 \cdot p_2)^2} \Gamma_{\mu\nu}(p_1, p_2), \quad (3.26)$$

$$C = -\frac{(p_1 \cdot p_2)g^{\mu\nu} - (d-1)p_1^\mu p_2^\nu - p_2^\mu p_1^\nu}{(d-2)(p_1 \cdot p_2)^2} \Gamma_{\mu\nu}(p_1, p_2). \quad (3.27)$$

Donde, por simplicidad, se ha restringido el cálculo a gluones reales. Debido a esto último, no ha sido posible encontrar expresiones para los coeficientes D y E pues en capa de masa se cumple que $p_1^2 = p_2^2 = 0$.

Ahora, la estructura tensorial del vértice efectivo debe ser tal que cumpla con todas las propiedades generales de QCD. La primera es que debe de satisfacer las identidades de Slavnov-Taylor⁴; estas identidades aseguran que la estructura tensorial del vértice efectivo sea transversa respecto a los cuadrimentos de los gluones incidentes, es decir

$$p_1^\mu \Gamma_{\mu\nu}(p_1, p_2) = 0, \quad (3.28)$$

$$p_2^\nu \Gamma_{\mu\nu}(p_1, p_2) = 0. \quad (3.29)$$

Adicional a lo anterior, debido a que se está trabajando con gluones, partículas bosónicas indistinguibles, en la estructura del vértice efectivo no debe ser posible diferenciar la contribución de cada uno de los gluones. Esto se ve reflejado en la siguiente propiedad

$$\Gamma^{\mu\nu}(p_1, p_2) = \Gamma^{\nu\mu}(p_2, p_1), \quad (3.30)$$

es decir, el vértice efectivo es simétrico ante el intercambio entre los gluones incidentes.

A partir de las relaciones (3.28)-(3.30) se encuentran las siguientes relaciones

$$A = -C, \quad (3.31)$$

$$E = D = 0. \quad (3.32)$$

⁴Es la generalización a QCD de las identidades de Ward para QED [79, 80].

De lo anterior, la estructura tensorial que debe tener el vértice efectivo para este proceso es

$$\Gamma^{\mu\nu}(p_1, p_2) = A \left[g^{\mu\nu} - \frac{p_1^\nu p_2^\mu}{p_1 \cdot p_2} \right] + B p_1^\mu p_2^\nu. \quad (3.33)$$

3.1.3. Método de integración Gaussiano

La integral que aparece en la expresión (3.23) para el vértice efectivo se puede resolver de forma simple usando la siguiente identidad matemática

$$\frac{i}{x} = \int_0^\infty ds e^{ixs}, \quad (3.34)$$

donde s se conoce como tiempo propio de Schwinger y es válida si se cumple que $\Im(x) > 0$ [81]. Usando esta relación, la ecuación (3.23) toma la forma

$$\begin{aligned} i\Gamma^{\mu\nu}(p_1, p_2) = & -4ig_s^2 g_f m \delta^{ab} \int \frac{d^4 a}{(2\pi)^4} \int_0^\infty ds_1 \int_0^\infty ds_2 \int_0^\infty ds_3 e^{is_1(a^2 - m^2 + i\epsilon)} \\ & \times e^{is_2((a-p_2)^2 - m^2 + i\epsilon)} e^{is_3((p_1+a)^2 - m^2 + i\epsilon)} \\ & \times [g^{\mu\nu} (m^2 - a^2 - p_1 \cdot p_2) + 4a^\mu a^\nu \\ & + 2a^\mu p_2^\nu - 2a^\nu p_1^\mu + p_2^\mu p_1^\nu - p_1^\mu p_2^\nu]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Nótese que el factor “ $i\epsilon$ ” en el propagador de Feynman ha permitido el uso de (3.34). De este punto en adelante ya no se escribe explícitamente este factor pero se tendrá en cuenta que sigue presente, una manera sencilla de pensar esto es que se redefine la masa de tal forma que ahora esta cuenta con un pequeño factor imaginario

$$m^2 \longrightarrow m_\epsilon^2 \equiv m^2 - i\epsilon,$$

de tal forma que ahora la combinación im^2 tiene una parte real positiva

$$\Re(im^2) = \epsilon > 0.$$

Esta representación permite una manipulación simple de las exponenciales que aparecen en la expresión 3.35, de forma tal que se obtienen integrales Gaussianas en la variable a . Esto se logra completando el cuadrado en el argumento de la exponencial, como se discute en el Apéndice D, esto es

$$e^{is_1(a^2-m^2)} e^{is_2((a-p_2)^2-m^2)} e^{is_3((p_1+a)^2-m^2)} = \exp\left[\gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}\right] \exp\left[\alpha\left(a + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2\right], \quad (3.36)$$

con

$$\alpha = i(s_1 + s_2 + s_3), \quad (3.37)$$

$$\beta^\mu = 2i(s_3 p_1^\mu - s_2 p_2^\mu), \quad (3.38)$$

$$\gamma = -im^2(s_1 + s_2 + s_3) + is_2 p_2^2 + is_3 p_1^2. \quad (3.39)$$

Para obtener un resultado general es necesario calcular estas integrales Gaussianas en d dimensiones debido a que más tarde se procederá a hacer la regularización del vértice efectivo.

Al aislar la integral sobre los momentos de la Ec. (3.35), se define

$$I^{\mu\nu}(p_1, p_2) \equiv \int \frac{d^d a}{(2\pi)^d} e^{\alpha\left(a + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2} [g^{\mu\nu}(m^2 - a^2 - p_1 \cdot p_2) + 4a^\mu a^\nu + 2a^\mu p_2^\nu - 2a^\nu p_1^\mu + p_2^\mu p_1^\nu - p_1^\mu p_2^\nu]. \quad (3.40)$$

La integración se puede llevar a cabo de forma simple, término a término, tal como se muestra en el Apéndice D.2, obteniendo

$$\begin{aligned}
I^{\mu\nu}(p_1, p_2) = & -i \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}d}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{s^{d/2}} \\
& \times \left[g^{\mu\nu} \left(m^2 - p_1 \cdot p_2 + \frac{i}{s} \left(2 - \frac{d}{2} \right) - \frac{(s_3 p_1 - s_2 p_2)^2}{s^2} \right) \right. \\
& - \frac{4s_2 s_3}{s^2} p_1^\nu p_2^\mu + p_2^\nu \frac{(s^2 p_1^\mu - 2s_2 p_2^\mu (s - 2s_2))}{s^2} \\
& \left. + p_1^\mu \frac{(2s_3 - s)(2s_3 p_1^\nu + p_2^\nu (s - 2s_2))}{s^2} \right], \tag{3.41}
\end{aligned}$$

con $s = s_1 + s_2 + s_3$.

3.1.4. Integración sobre el tiempo propio de Schwinger

La manera en que se introdujo el tiempo propio de Schwinger en la ecuación (3.34) corresponde a una identidad matemática que permite escribir los propagadores en una forma tal que sea posible realizar las integrales sobre el momento que fluye dentro del lazo.

El uso del tiempo propio de Schwinger tiene un origen mucho más profundo, este se puede usar como método de regularización⁵. El método consiste en realizar de forma exacta la integral funcional de la parte cuadrática en los campos, en la acción, y llevar a cabo la regularización en el determinante, producto de la integración, mediante el tiempo propio de Schwinger. Para esto, se toma un corte inferior en las integrales sobre el tiempo propio $s_0 > 0$ de tal forma que la integración no se lleva a cabo en la región divergente $s \rightarrow 0$. Este tipo de regularización preserva la invariancia de norma abeliana pero no es posible realizar una generalización al caso no-abeliano [8].

Debido a que ahora se está trabajando con QCD, una teoría de norma no-abeliana, no sería posible utilizar este método de regularización⁶. El método propuesto para trabajar es el de regularización dimensional, se mostrará más adelante que las divergencias se cancelan de forma automática antes de tomar el límite $d \rightarrow 4 - \delta$ con $\delta > 0$.

⁵Regularización por tiempo propio de Schwinger.

⁶En el presente trabajo se utiliza la parametrización de tiempo propio de Schwinger como una identidad matemática para escribir a los propagadores fermiónicos pero no para llevar a cabo la regularización.

Para llevar a cabo la integración sobre los tiempos propios de Schwinger que aparecen en la ecuación (3.41) es conveniente realizar los siguientes cambios de variable⁷

$$\begin{aligned} s_3 &= sv, \\ s_2 &= su, \\ s_1 &= s(1 - u - v), \end{aligned} \tag{3.42}$$

donde $s \in [0, \infty)$ y $u, v \in [0, 1]$. Nótese que el parámetro s tiene unidades de $[E^{-2}]$, mientras que los parámetros u y v son adimensionales.

En términos de estas nuevas variables, la expresión (3.41) se reescribe de la siguiente forma⁸

$$\begin{aligned} i\Gamma^{\mu\nu}(p_1, p_2) &= - \frac{4g_s^2 g_f m \delta^{ab} e^{-\frac{i\pi}{4}d}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dv \int_0^{1-v} du \int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{d}{2}-2}} e^{-i\Delta^2 s} \\ &\quad \times \left[\frac{i}{s} \left(2 - \frac{d}{2} \right) g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} (m^2 - p_1 \cdot p_2 - (up_2 - vp_1)^2) \right. \\ &\quad \quad \quad + (2v - 1) p_1^\mu (2vp_1^\nu + (1 - 2u) p_2^\nu) \\ &\quad \quad \quad \left. + p_2^\mu ((1 - 4uv) p_1^\nu + 2u(2u - 1) p_2^\nu) \right], \end{aligned} \tag{3.43}$$

donde $\Delta^2 \equiv m^2 - uv(p_1 + p_2)^2 - (1 - u - v)(vp_1^2 - up_2^2)$. Claramente las condiciones para los coeficientes de la estructura tensorial (3.31)-(3.32) no se cumplen en la expresión (3.43) para el vértice efectivo, sin embargo, una vez que la integral sobre el tiempo propio de Schwinger es realizada, la relación entre los coeficientes se pone de manifiesto, como se verá en breve.

Nótese que en la ecuación (3.43) la divergencia se presenta en la región donde $s \rightarrow 0$, las singularidades aparecen en los términos de la forma $\frac{1}{s^n}$ con $n \in \mathbb{N}$. Esta divergencia sólo está presente en el primer término de la expresión anterior en el límite $d \rightarrow 4$, así que este es el término que es necesario regularizar.

⁷Nótese que con estos cambios de variable, efectivamente se cumple que $s = s_1 + s_2 + s_3$.

⁸El jacobiano de esta transformación de coordenadas es s^2 .

Las integrales sobre s , que aparecen en la Ec. (3.43), se pueden identificar con la representación integral de la función Gamma⁹, esto es

$$\int_0^\infty s^{n-\frac{d}{2}} e^{-i\Delta^2 s} ds = \frac{(i\Delta^2)^{\frac{d}{2}-(n+1)}}{n+1-\frac{d}{2}} \Gamma\left(n+2-\frac{d}{2}\right), \quad (3.44)$$

con $n \in \mathbb{N}$. Obsérvese que la ecuación (3.44) es divergente si se toma $d = 4$ y $n = 1$. La forma general de lidiar con estas divergencias es la regularización dimensional, con este método se toma una dimensión ligeramente menor a la que se está trabajando; en este caso se presenta tomando la dimensión $d = 4 - \delta$ en el límite $\delta \rightarrow 0$ para posteriormente hacer una expansión en la función Gamma correspondiente $\Gamma(\delta/2)$, con esto la singularidad se presenta como un polo de la forma $\frac{1}{\delta}$.

Lo que sucede en el cálculo que se está llevando a cabo es que la dimensión que aparece al hacer la integral (3.44) se cancela con el coeficiente que acompaña a dicho término, de tal forma que la dimensión d no aparece explícitamente y es posible tomar $d = 4$ sin que se presente una singularidad. Sustituyendo los resultados a partir de la Ec. (3.44) en la expresión (3.43) para el vértice efectivo, se obtiene

$$\begin{aligned} i\Gamma^{\mu\nu}(p_1, p_2) = & -\frac{4g_s^2 g_f m \delta^{ab} e^{-\frac{i\pi}{4}d}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dv \int_0^{1-v} du (i\Delta^2)^{\frac{d}{2}-3} \Gamma\left(3-\frac{d}{2}\right) \\ & \times \left[-\Delta^2 g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} (m^2 - p_1 \cdot p_2 - (up_2 - vp_1)^2) \right. \\ & \quad + (2v-1)p_1^\mu (2vp_1^\nu + (1-2u)p_2^\nu) \\ & \quad \left. + p_2^\mu ((1-4uv)p_1^\nu + 2u(2u-1)p_2^\nu) \right]. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Esta cancelación parecería “mágica” pero es muy importante debido a que como no existe un vértice de interacción directo entre los gluones y el bosón de Higgs en el Modelo Estándar, no se cuenta con el contratérmino adecuado

⁹Para ver un desarrollo detallado de este método ver el Apéndice E.

para cancelar/absorber las posibles divergencias que surgieran de los diagramas que se están trabajando. Entonces, en la expresión anterior, se puede sustituir $d = 4$ sin ningún problema, de tal forma se obtiene

$$\begin{aligned}
i\Gamma^{\mu\nu}(p_1, p_2) = & -\frac{4ig_s^2 g_f m \delta^{ab}}{(4\pi)^2} \int_0^1 dv \int_0^{1-v} du \frac{1}{\Delta^2} \\
& \times \left[-\Delta^2 g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} (m^2 - p_1 \cdot p_2 - (up_2 - vp_1)^2) \right. \\
& \quad + (2v - 1) p_1^\mu (2vp_1^\nu + (1 - 2u) p_2^\nu) \\
& \quad \left. + p_2^\mu ((1 - 4uv) p_1^\nu + 2u(2u - 1) p_2^\nu) \right].
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Es importante remarcar que en este proceso de regularización, tanto las integrales Gaussianas sobre los momentos como la traza sobre las matrices de Dirac deben realizarse en d dimensiones, de lo contrario se pueden obtener resultados erróneos.

Es posible obtener la expresión anterior para el vértice efectivo al realizar las integrales de momento mediante el parámetro de Feynman [77], las variables u y v son equivalentes a los parámetros de Feynman.

Para poder realizar de forma analítica las integrales restantes, sobre los parámetros u y v , se llevará el vértice efectivo a la capa de masa usando las relaciones

$$\begin{aligned}
p_1^2 &= 0, \\
p_2^2 &= 0, \\
p_1 \cdot p_2 &= \frac{m_H^2}{2},
\end{aligned} \tag{3.47}$$

con m_H la masa del bosón de Higgs, de tal modo que el vértice efectivo en la capa de masa tiene la forma

$$\begin{aligned}
i\Gamma^{\mu\nu}(p_1, p_2) = & -\frac{ig_s^2 g_f m \delta^{ab}}{m_H^2 \pi^2} \int_0^1 dv \int_0^{1-v} \frac{du}{\tau - 4uv} \\
& \times \left[\frac{m_H^2}{2} (4uv - 1) \left[g^{\mu\nu} - \frac{p_2^\mu p_1^\nu}{p_1 \cdot p_2} \right] - (1 - 2v)^2 p_1^\mu p_2^\nu \right. \\
& \left. + 2v(2v - 1) p_1^\mu p_1^\nu + 2u(2u - 1) p_2^\mu p_2^\nu \right], \tag{3.48}
\end{aligned}$$

donde se ha definido $\tau \equiv 4m_f^2/m_H^2$.

En la expresión anterior para el vértice efectivo se observan cuatro estructuras tensoriales distintas, y no dos como se había discutido anteriormente en 3.1.2. En el Apéndice E se muestra que las integrales asociadas a estas estructuras tensoriales extras son nulas. Tomando en cuenta esto, la expresión (3.48) se reduce a

$$\begin{aligned}
i\Gamma^{\mu\nu}(p_1, p_2) = & -\frac{ig_s^2 g_f m \delta^{ab}}{m_H^2 \pi^2} \int_0^1 dv \int_0^{1-v} \frac{du}{\tau - 4uv} \\
& \times \left[\frac{m_H^2}{2} (4uv - 1) \left[g^{\mu\nu} - \frac{p_2^\mu p_1^\nu}{p_1 \cdot p_2} \right] - (1 - 2v)^2 p_1^\mu p_2^\nu \right]. \tag{3.49}
\end{aligned}$$

Con esto se completa el cálculo del vértice efectivo en el vacío.

Lo que resta por hacer es identificar los coeficientes A y B de la Ec. (3.33), esto se logra fácilmente comparando (3.49) con (3.33), obteniendo

$$A = \frac{g_s^2 g_f m \delta^{ab}}{2\pi^2} \int_0^1 dv \int_0^{1-v} du \frac{1 - 4uv}{\tau - 4uv}, \tag{3.50}$$

$$B = \frac{g_s^2 g_f m \delta^{ab}}{m_H^2 \pi^2} \int_0^1 dv \int_0^{1-v} du \frac{(1 - 2v)^2}{\tau - 4uv}. \tag{3.51}$$

Estas integrales se calculan de forma explícita en el Apéndice E.

Una vez obtenido el vértice efectivo, se procede a calcular el elemento de matriz invariante. Este se forma al contraer el vértice efectivo con los respectivos estados asintóticos de los gluones y del Higgs, obteniéndose

$$i\mathcal{M} = iA \left[g^{\mu\nu} - \frac{p_2^\mu p_1^\nu}{p_1 \cdot p_2} \right] \epsilon_\mu^a(p_1, \sigma) \epsilon_\nu^b(p_2, \sigma'), \quad (3.52)$$

donde se ha usado la propiedad de ortogonalidad $p_\mu \epsilon^\mu(p) = 0$. De este análisis se deduce que el único coeficiente que contribuye a la sección eficaz es A .

Nótese que los términos con las expresiones tensoriales extras en la ecuación (3.48) serían eliminados al contraer con los estados asintóticos debido a la propiedad anterior, así que de haberse realizado la contracción en un punto más temprano hubiera ahorrado el cálculo de varias integrales. Al contraer el vértice efectivo con los vectores de polarización $\epsilon_\mu^a(p_1, \sigma)$ y $\epsilon_\nu^b(p_2, \sigma')$ se anulan los términos proporcionales a p_1^μ y p_2^ν , lo que se puede interpretar como una proyección en el espacio transversal a los momentos de los gluones. Esta es una forma muy interesante de entenderlo y será de gran utilidad más adelante.

3.2. Sección eficaz no polarizada

La sección eficaz diferencial para un proceso arbitrario con dos partículas incidentes con momentos p_1 y p_2 , y con masas m_1 y m_2 respectivamente, está dada por [32]

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} d\Phi_n(p_1 + p_2; p_3, \dots, p_{n+2}), \quad (3.53)$$

donde el elemento de espacio fase invariante se define como

$$d\Phi_n(Q; q_1, \dots, q_n) = \delta^{(4)} \left(Q - \sum_{i=1}^n q_i \right) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3 2E_i}. \quad (3.54)$$

En el caso particular de la producción de un bosón de Higgs mediante fusión de gluones, la sección eficaz no polarizada está dada por

$$\begin{aligned}
\sigma(gg \rightarrow H) &= \frac{1}{2m_H^2} \int \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2E_H} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 - p_1 - p_2) \overline{\sum}_{\text{color, espín}} |\mathcal{M}|^2 \\
&= \frac{1}{2m_H^2} 2\pi \delta(\mathcal{S} - m_H^2) \overline{\sum}_{\text{color, espín}} |\mathcal{M}|^2,
\end{aligned} \tag{3.55}$$

donde p_3 y E_H son el momento y la energía del bosón de Higgs producido respectivamente y $\mathcal{S} = (p_1 + p_2)^2$ es la variable usual para el cuadrado de la energía¹⁰. Nótese que en la primera línea de la expresión anterior aparece la misma delta de conservación de momento que se ignoró, únicamente por comodidad, en la expresión para el vértice efectivo; la delta de la segunda línea asegura que el bosón de Higgs sea producido en la capa de masa y es una de las condiciones dadas en (3.47).

Obsérvese que para poder obtener la sección eficaz no polarizada se debe calcular el valor absoluto del cuadrado del elemento de matriz invariante y promediar sobre los valores de espín y color de los gluones incidentes. Como ahora se busca hacer la suma sobre espines no se van a contraer directamente con el vértice efectivo, así que se usará de forma dada por la expresión (3.33) en lugar de (3.52). De tal forma que se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= \left(A \left[g^{\mu\nu} - \frac{p_2^\mu p_1^\nu}{p_1 \cdot p_2} \right] - B p_1^\mu p_2^\nu \right) \left(A^* \left[g^{\alpha\beta} - \frac{p_2^\alpha p_1^\beta}{p_1 \cdot p_2} \right] - B^* p_1^\alpha p_2^\beta \right) \\
&\quad \times \epsilon_\mu^a(p_1, \sigma) \epsilon_\nu^b(p_2, \sigma') \epsilon_\alpha^{a^*}(p_1, \sigma) \epsilon_\beta^{b^*}(p_2, \sigma'),
\end{aligned} \tag{3.56}$$

misma que se promedia sobre espines

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\sigma'=\pm 1} |\mathcal{M}|^2, \tag{3.57}$$

donde, por comodidad, se ha escrito la suma en la base de polarización lineal. Tomando una de la sumas, nótese que esta se puede llevar a cabo usando la

¹⁰Se usa \mathcal{S} en lugar de s para que no se preste a confusiones con el tiempo propio de Schwinger.

propiedad

$$\sum_{\sigma=\pm 1} \epsilon_{\mu}(k, \sigma) \epsilon_{\alpha}^{*}(k, \sigma) = -g_{\mu\alpha} + \frac{k_{\mu} n_{\alpha} + k_{\alpha} n_{\mu}}{k \cdot n} + n^2 \frac{k_{\mu} k_{\alpha}}{(k \cdot n)^2}, \quad (3.58)$$

donde n^{μ} es un vector auxiliar arbitrario en la relación de completitud¹¹. Este vector, al ser una consecuencia de la libertad de norma de los gluones, se puede elegir de forma conveniente. Al tomarse como p_2^{μ} en la relación para los estados asintóticos que involucran a p_1^{μ} y viceversa, se llega a las siguientes relaciones

$$\sum_{\sigma=\pm 1} \epsilon_{\mu}^a(p_1, \sigma) \epsilon_{\alpha}^{a*}(p_1, \sigma) = -g_{\mu\alpha} + \frac{p_{1\mu} p_{2\alpha} + p_{1\alpha} p_{2\mu}}{p_1 \cdot p_2}, \quad (3.59)$$

$$\sum_{\sigma=\pm 1} \epsilon_{\nu}^b(p_2, \sigma') \epsilon_{\beta}^{b*}(p_2, \sigma') = -g_{\nu\beta} + \frac{p_{2\nu} p_{1\beta} + p_{2\beta} p_{1\nu}}{p_1 \cdot p_2}. \quad (3.60)$$

Nótese que la estructura tensorial de ambos resultados es exactamente igual, así que será útil definir el proyector

$$\mathcal{P}^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} - \frac{p_2^{\mu} p_1^{\nu} + p_1^{\mu} p_2^{\nu}}{p_1 \cdot p_2}. \quad (3.61)$$

De esta forma, usando (3.61) en (3.57), el promedio sobre espines es

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sum_{\sigma=\pm 1} \sum_{\sigma'=\pm 1} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{1}{2^2} \Gamma^{\mu\nu}(p_1, p_2) \mathcal{P}_{\mu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{*}(p_1, p_2) \mathcal{P}_{\nu}^{\beta} \\ &= \frac{d-2}{4} |A|^2 \\ &\xrightarrow{d=4} \frac{1}{2} |A|^2. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Obsérvese que, al igual que en la expresión (3.52), el único coeficiente que contribuye a la sección eficaz es A . Anteriormente se mencionó la idea de que

¹¹Por ello debe de ser linealmente independiente del momento del gluón k^{μ} .

esto era porque los estados asintóticos proyectan el vértice efectivo a cierto subespacio, ahora se puede interpretar este resultado como que al sumar sobre todas polarizaciones, los términos asociados al coeficiente B en la proyección de la polarización dan cero como resultado (en promedio).

Una vez que se ha obtenido el promedio de espines, lo único que resta por hacer es promediar sobre colores. Para ello, es conveniente hacer las siguientes redefiniciones

$$A = \frac{\delta^{ab}}{2} \tilde{A}, \quad (3.63)$$

$$B = \frac{\delta^{ab}}{2} \tilde{B}. \quad (3.64)$$

Con esto se extrae el factor obtenido de la traza de color en la representación fundamental dada por (3.18), de tal forma que el promedio sobre los colores de los gluones¹² es

$$\overline{\sum_{\text{color, espín}} |\mathcal{M}|^2} = \frac{\delta^{ab} \delta_{ab}}{2^2 \cdot 8^2} \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2 = \frac{1}{32} \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2. \quad (3.65)$$

Sustituyendo lo anterior en la Ec. (3.55), se obtiene la expresión analítica para la sección eficaz no polarizada de producción de Higgs mediante fusión de gluones

$$\begin{aligned} \sigma_{LO}(gg \rightarrow H) &= \frac{1}{128m_H^2} |\tilde{A}|^2 2\pi \delta(\mathcal{S} - m_H^2) \\ &= \frac{1}{128m_H^2} \frac{g_s^4 m_H^4}{8\pi^4 v^2} \tau^2 |N_A(\tau)|^2 2\pi \delta(\mathcal{S} - m_H^2). \end{aligned} \quad (3.66)$$

donde el subíndice LO indica que es la contribución al *leading order* y se ha usado el resultado (E.44)

$$\tilde{A} = \frac{g_s^2 m_H^2}{2\sqrt{2}\pi^2 v} \tau N_A(\tau), \quad (3.67)$$

¹²En la representación adjunta.

con

$$N_A(\tau) = \frac{1}{4} \left[2 - (\tau - 1) \text{Li}_2 \left(\frac{2}{1 - \sqrt{1 - \tau}} \right) - (\tau - 1) \text{Li}_2 \left(\frac{2}{1 + \sqrt{1 - \tau}} \right) \right], \quad (3.68)$$

donde $\text{Li}_2(x)$ es la función dilogaritmo que se analiza en el Apéndice E.2. Estos dos último resultados se obtienen detalladamente en el Apéndice E.3.3.

En la Figura 3.4 se muestra el comportamiento de la sección eficaz en función de la masa del sabor de los quarks dentro del lazo fermiónico, este comportamiento coincide con el reportado en la literatura [78].

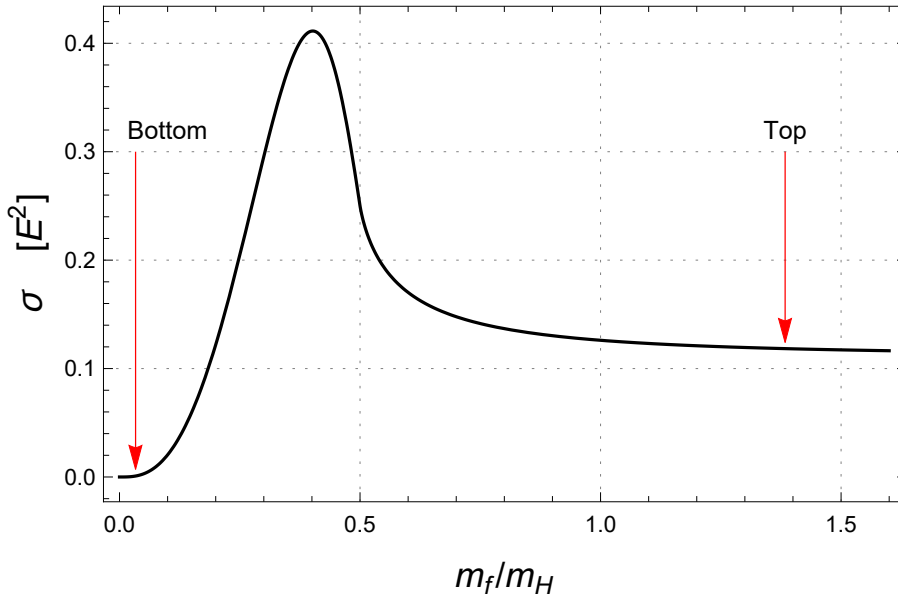


Figura 3.4: Comportamiento de la sección eficaz de producción de Higgs mediante fusión de gluones dada por la expresión (3.66) como función de la masa del quark dentro del lazo fermiónico.

En la Figura 3.4 se observa que la contribución principal a la sección eficaz de la producción de Higgs mediante fusión de gluones proviene del quark top

$$\frac{\sigma_{LO}^{\text{top}}(gg \rightarrow H)}{\sigma_{LO}^{\text{bottom}}(gg \rightarrow H)} \sim 130, \quad (3.69)$$

$$\frac{\sigma_{LO}^{\text{top}}(gg \rightarrow H)}{\sigma_{LO}^{\text{charm}}(gg \rightarrow H)} \sim 5400, \quad (3.70)$$

y es considerablemente mayor a las contribuciones de los otros quarks.

Con éste último análisis se da por concluido el estudio de la sección eficaz no polarizada de producción de Higgs mediante fusión de gluones en el vacío. En el siguiente capítulo se extenderán las ideas a un escenario que contempla la presencia de un campo magnético homogéneo de fondo durante el proceso.

Capítulo 4

Producción del bosón de Higgs en presencia de un campo magnético externo

En el presente capítulo se extienden las ideas planteadas en el Capítulo 3, considerando ahora que el proceso de fusión de gluones se da en presencia de un campo magnético¹ homogéneo que define la dirección z .

4.1. Propagador fermiónico en presencia de un campo magnético externo

El efecto del campo magnético se ven reflejados en la forma que los quarks se propagan pues estos, al ser eléctricamente cargados, se acoplan con el campo magnético externo modificando su movimiento.

El propagador fermiónico que incorpora los efectos de este campo magnético de fondo fue obtenido por Schwinger en 1951 y está dado por [82]

$$S^{qB}(x, y) = \Omega_q(x, y) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S^{qB}(p) e^{-ip \cdot (x-y)}, \quad (4.1)$$

¹El campo magnético se considera de forma clásica, es decir, no se trabaja como correcciones de QED sino como un campo de fondo.

donde

$$\Omega_q(x', x'') = \exp \left(-iq \int_{x''}^{x'} A_\mu(x) dx^\mu \right) \quad (4.2)$$

se conoce como fase de Schwinger, con q la carga eléctrica del fermión y A_μ el cuadripotencial que genera al campo magnético B .

Lo primero que se observa es que el propagador en el espacio de configuraciones ya no es simplemente la transformada de Fourier del propagador en el espacio de momentos, como en el caso del vacío (3.11), esta es la razón por la que es útil trabajar de inicio en el espacio de configuraciones.

En el caso particular en que un campo magnético homogéneo define la dirección z , la parte simétrica del propagador fermiónico en el espacio de momentos está dado por [82]

$$S^{qB}(p) = \int_0^\infty \frac{ds}{\cos(qBs)} \exp \left[-is \left(m^2 - p_\parallel^2 - p_\perp^2 \frac{\tan(qBs)}{qBs} \right) \right] \times \left[(m + \not{p}_\parallel) e^{-iqBs\Sigma_3} + \frac{\not{p}_\perp}{\cos(qBs)} \right], \quad (4.3)$$

donde p_\parallel y p_\perp , son las componentes del cuadrimomento paralela y perpendicular al campo magnético, cuyo contenido es

$$p_\parallel^\mu \equiv (p^0, 0, 0, p^3) \quad \text{y} \quad p_\perp^\mu \equiv (0, p^1, p^2, 0). \quad (4.4)$$

Análogamente, las matrices de Dirac perpendiculares y paralelas al campo magnético son

$$\begin{aligned} \gamma_\parallel &= \gamma_0, \gamma_3, \\ \gamma_\perp &= \gamma_1, \gamma_2, \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde además se define

$$\Sigma_3 \equiv i\gamma^1\gamma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

la cual se identifica con la matriz de espín a lo largo de la dirección del campo.

4.2. Elemento de matriz invariante en presencia de un campo magnético externo

4.2.1. Vértice efectivo

De forma análoga al capítulo anterior, los diagramas a considerar se muestran en la Figura 3.2 pero ahora se tienen que considerar a los propagadores de los quarks de la Ec. (4.1), esto está representado en la Figura 4.1 con una doble línea.

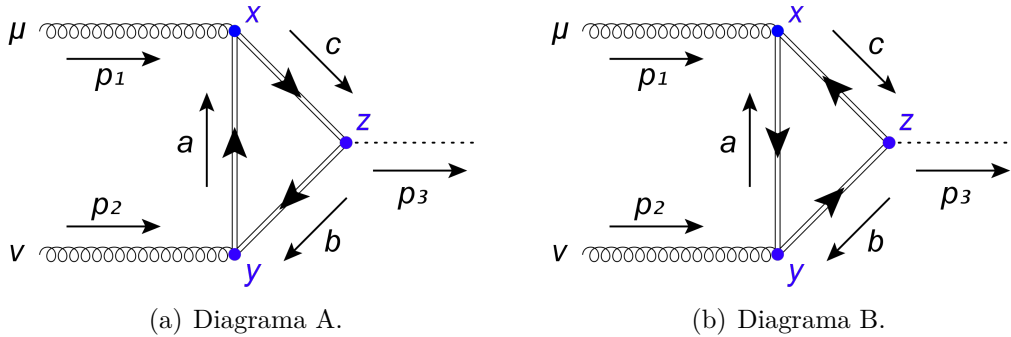


Figura 4.1: Diagramas de Feynman que contribuyen al proceso a “leading order” en presencia de un campo magnético externo. La contribución del campo magnético está representada por una línea doble en los propagadores fermiónicos.

Al aplicar las reglas de Feynman al diagrama A, se llega a una expresión análoga a (3.13)

$$\begin{aligned}
i\Gamma_{qB(A)}^{\mu\nu}(x, y, z) &= -ig_s^2 g_f \mathbf{tr} [t^a t^b] \Omega_q(x, y) \Omega_q(y, z) \Omega_q(z, x) \\
&\times \int \frac{d^4 a}{(2\pi)^4} \frac{d^4 b}{(2\pi)^4} \frac{d^4 c}{(2\pi)^4} e^{-ia \cdot (x-y)} e^{-ib \cdot (y-z)} e^{-ic \cdot (z-x)} \\
&\times \text{Tr} \left[\gamma^\mu S_f^{qB}(a) \gamma^\nu S_f^{qB}(b) S_f^{qB}(c) \right].
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Y de forma análoga a (3.22), para el diagrama B

$$\begin{aligned}
i\Gamma_{qB(B)}^{\mu\nu}(x, y, z) &= -ig_s^2 g_f \mathbf{tr} [t^a t^b] \Omega_q(z, y) \Omega_q(x, z) \Omega_q(y, x) \\
&\times \int \frac{d^4 a}{(2\pi)^4} \frac{d^4 b}{(2\pi)^4} \frac{d^4 c}{(2\pi)^4} e^{-ia \cdot (x-y)} e^{-ib \cdot (y-z)} e^{-ic \cdot (z-x)} \\
&\times \text{Tr} \left[\gamma^\nu S_f^{-qB}(-a) \gamma^\mu S_f^{-qB}(-c) S_f^{-qB}(-b) \right].
\end{aligned} \tag{4.8}$$

donde ahora los propagadores fermiónicos tienen un signo negativo tanto en el momento como en la carga correspondientes debido a que en el diagrama B el flujo de momento va en sentido contrario al flujo de carga sobre cada propagador, tal como se discute en el Apéndice B. Nótese que las fases siguen siendo etiquetadas con la carga q y no $-q$, ¿por qué? Esto se debe a que el sentido del flujo de carga ya se ha considerado al escribir la dependencia espacio-temporal, esto se ve reflejando en la siguiente propiedad

$$\Omega_q(x, y) = \Omega_{-q}(y, x). \tag{4.9}$$

Para seguir adelante en el cálculo es necesario determinar la fase que acarrea cada uno de los diagramas. Ello se logra al considerar que el campo magnético externo es homogéneo y define la dirección espacial z , esto es, $\vec{B} = B\hat{k}$. Esta configuración de campo se puede producir con una norma

simétrica del cuadripotencial

$$A^\mu = \left(0, -\frac{B}{2}x^2, \frac{B}{2}x^1, 0 \right), \quad (4.10)$$

de tal forma que se obtienen las componentes correctas en el tensor electromagnético, dado por

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Al sustituirse (4.2) en (4.10), la forma de la fase de Schwinger es

$$\Omega_q(x, y) = e^{i\frac{qB}{2}x_\mu \hat{F}^{\mu\nu} y_\nu} = e^{i\frac{qB}{2}(x^1 y_2 - x^2 y_1)}, \quad (4.12)$$

donde se ha definido el tensor electromagnético unitario como

$$\hat{F}^{\mu\nu} = \frac{F^{\mu\nu}}{B}. \quad (4.13)$$

Al aplicarse (4.12) a los diagramas A y B, se obtiene

$$\Omega_q(x, y)\Omega_q(y, z)\Omega_q(z, x) = e^{i\frac{qB}{2}\hat{F}^{\mu\nu}(x_\mu y_\nu + y_\mu z_\nu + z_\mu x_\nu)} = e^{-i\frac{qB}{2}\xi}, \quad (4.14)$$

$$\Omega_q(y, x)\Omega_q(z, y)\Omega_q(x, z) = e^{-i\frac{qB}{2}\hat{F}^{\mu\nu}(x_\mu y_\nu + y_\mu z_\nu + z_\mu x_\nu)} = e^{i\frac{qB}{2}\xi}, \quad (4.15)$$

donde se ha definido

$$\xi \equiv -x_2 y^1 + x_1 y^2 - y_2 z^1 + y_1 z^2 - z_2 x^1 + z_1 x^2. \quad (4.16)$$

Los cálculos que se han realizado hasta este punto están desglosados en el Apéndice F así como una breve discusión donde se muestra que el resultado a pesar de que la fase de Schwinger de cada propagador depende de la norma, la fase total del lazo es invariante de norma [83].

Ahora, para poder continuar con el cálculo en el espacio de momentos es necesario tomar la transformada de Fourier como se muestra en la ecuación (3.14)

$$\begin{aligned}
i\Gamma_{qB(A)}^{\mu\nu}(p_1, p_2, p_3) &= \int d^4x d^4y d^4z i\Gamma_{qB(A)}^{\mu\nu}(x, y, z) e^{-ip_1 \cdot x} e^{-ip_2 \cdot y} e^{+ip_3 \cdot z} \\
&= -ig_f^2 g_H \mathbf{tr} [t^a t^b] \int \frac{d^4a}{(2\pi)^4} \frac{d^4b}{(2\pi)^4} \frac{d^4c}{(2\pi)^4} \\
&\quad \times \int d^4x d^4y d^4z e^{-i\frac{qB}{2}\xi} e^{-i(p_1+a-c) \cdot x} e^{-i(p_2+b-a) \cdot y} \\
&\quad \times e^{-i(-p_3+c-b) \cdot z} \text{Tr} \left[\gamma^\mu S_f^{qB}(a) \gamma^\nu S_f^{qB}(b) S_f^{qB}(c) \right].
\end{aligned} \tag{4.17}$$

A diferencia del caso del vacío, en este caso no es posible identificar a las representaciones integrales de la delta de Dirac (3.15) para todas las componentes. Las identificaciones sólo se pueden realizar en las coordenadas paralelas pero no en las perpendiculares debido a la fase que ha adquirido el diagrama, de tal forma que

$$\begin{aligned}
i\Gamma_{qB(A)}^{\mu\nu}(p_1, p_2, p_3) &= -ig_s^2 g_f \mathbf{tr} [t^a t^b] (2\pi)^6 \int \frac{d^4a}{(2\pi)^4} \frac{d^4b}{(2\pi)^4} \frac{d^4c}{(2\pi)^4} \\
&\quad \times \delta^{(2)}(p_1 + a - c)_\parallel \delta^{(2)}(p_2 + b - a)_\parallel \delta^{(2)}(p_3 - c + b)_\parallel \\
&\quad \times \int d^2x_\perp d^2y_\perp d^2z_\perp e^{-i\frac{qB}{2}\xi} e^{-i(p_1+a-c)_\perp \cdot x_\perp} e^{-i(p_2+b-a)_\perp \cdot y_\perp} \\
&\quad \times e^{-i(-p_3+c-b)_\perp \cdot z_\perp} \text{Tr} \left[\gamma^\mu S_f^{qB}(a) \gamma^\nu S_f^{qB}(b) S_f^{qB}(c) \right].
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Nótese que estas deltas de Dirac indican la conservación de las componentes paralelas de momento en cada uno de los vértices, sin embargo, aparentemente este ya no es el caso de las componentes perpendiculares.

Para la integración sobre las componentes perpendiculares se usa la misma idea de identificar deltas de Dirac pero esta nueva fase que adquiere el diagrama, debida al campo magnético, “mezcla” las componentes. Este cálculo se realiza con detalle en el Apéndice F. De modo que, una vez realizada la integración perpendicular, se obtiene la siguiente expresión para el vértice efectivo en el espacio de momentos

$$\begin{aligned}
i\Gamma_{qB(A)}^{\mu\nu}(p_1, p_2, p_3) &= -ig_s^2 g_f \mathbf{tr} [t^a t^b] (2\pi)^8 \left(\frac{4\pi}{qB} \right)^2 \delta^{(2)}(p_1 + p_2 - p_3)_\perp \\
&\times \int \frac{d^4 a}{(2\pi)^4} \frac{d^4 b}{(2\pi)^4} \frac{d^4 c}{(2\pi)^4} \delta^{(2)}(p_1 + a - c)_\parallel \delta^{(2)}(p_2 + b - a)_\parallel \\
&\times \delta^{(2)}(p_3 - c + b)_\parallel e^{i\frac{2}{qB}(p_1+a-c)_\mu \hat{F}^{\mu\nu}(p_2+b-a)_\nu} \\
&\times \text{Tr} \left[\gamma^\mu S_f^{qB}(a) \gamma^\nu S_f^{qB}(b) S_f^{qB}(c) \right].
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Cuando se realice la integración sobre los momentos paralelos en expresión anterior, la delta de Dirac final dará la conservación global de momento paralelo. Así que, como se realizó anteriormente en la expresión (3.16), es posible factorizar la delta de conservación

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3),$$

y redefinir el vértice efectivo sin ella, tal como en el caso sin campo. De tal forma que se llega a la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
i\Gamma_{qB(A)}^{\mu\nu}(p_1, p_2) &= -ig_s^2 g_f \mathbf{tr} [t^a t^b] (2\pi)^4 \left(\frac{4\pi}{qB} \right)^2 \\
&\times \int \frac{d^4 a}{(2\pi)^4} \frac{d^4 b}{(2\pi)^4} \frac{d^4 c}{(2\pi)^4} e^{i\frac{2}{qB}(p_1+a-c)_\mu \hat{F}^{\mu\nu}(p_2+b-a)_\nu} \\
&\times \delta^{(2)}(p_1 + a - c)_\parallel \delta^{(2)}(p_2 + b - a)_\parallel \\
&\times \text{Tr} \left[\gamma^\mu S_f^{qB}(a) \gamma^\nu S_f^{qB}(b) S_f^{qB}(c) \right].
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Procediendo de forma totalmente análoga para el diagrama B, se tiene

$$\begin{aligned}
i\Gamma_{qB(B)}^{\mu\nu}(p_1, p_2) = & -ig_s^2 g_f \mathbf{tr} [t^a t^b] (2\pi)^4 \left(\frac{4\pi}{qB} \right)^2 \\
& \times \int \frac{d^4 a}{(2\pi)^4} \frac{d^4 b}{(2\pi)^4} \frac{d^4 c}{(2\pi)^4} e^{-i\frac{2}{qB}(p_1+a-c)_\mu \hat{F}^{\mu\nu}(p_2+b-a)_\nu} \\
& \times \delta^{(2)}(p_1 + a - c)_\parallel \delta^{(2)}(p_2 + b - a)_\parallel \\
& \times \text{Tr} \left[\gamma^\nu S_f^{-qB}(-a) \gamma^\mu S_f^{-qB}(-c) S_f^{-qB}(-b) \right].
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Al igual que en el caso del vacío, las trazas espinoriales de las expresiones (4.20) y (4.21) son iguales, como se muestra en el Apéndice B.

Siguiendo las ideas del caso del vacío, es posible llevar a cabo un análisis de las estructuras tensoriales que conforman el vértice efectivo en presencia de un campo magnético externo. Sin embargo, dado que es un análisis extenso (detalles en Apéndice C.2), sólo se presenta la estructura final, dada por

$$\begin{aligned}
\Gamma_{qB}^{\mu\nu}(p_1, p_2) = & A \left[g^{\mu\nu} - \frac{p_1^\nu p_2^\mu}{p_1 \cdot p_2} \right] + B \frac{p_1^\mu p_2^\nu}{p_1 \cdot p_2} + C \frac{\hat{F}^\mu p_1 \hat{F}^\nu p_2}{p_1 \cdot p_2} \\
& + D \left[g_{\perp}^{\mu\nu} - \frac{p_{1\perp}^\nu p_{2\perp}^\mu}{(p_1 \cdot p_2)_{\perp}} \right] + E \left[\frac{p_1^\mu p_1^\nu + p_2^\mu p_2^\nu}{p_1 \cdot p_2} - \frac{p_{1\perp}^\mu p_{1\perp}^\nu + p_{2\perp}^\mu p_{2\perp}^\nu}{(p_1 \cdot p_2)_{\perp}} \right] \\
& + G \left[g^{\mu\nu} + \frac{(p_1 \cdot p_2) g_{\perp}^{\mu\nu} - p_1^\nu p_{2\perp}^\mu - p_2^\mu p_{1\perp}^\nu}{(p_1 \cdot p_2)_{\perp}} \right] \\
& + H \left(p_2 \hat{F} p_1 \right) \left[g^{\mu\nu} \frac{p_2 \hat{F} p_1}{(p_1 \cdot p_2)^2} - \frac{(p_1 \cdot p_2) \hat{F}^{\mu\nu} + p_2^\mu \hat{F}^\nu p_1 - p_1^\nu \hat{F}^\mu p_2}{(p_1 \cdot p_2)^2} \right] \\
& + I \left[\left(p_2 \hat{F} p_1 \right)^2 \frac{p_1^\mu p_1^\nu + p_2^\mu p_2^\nu}{(p_1 \cdot p_2)^3} - \left(p_2 \hat{F} p_1 \right) \frac{p_1^\mu \hat{F}^\nu p_1 - p_2^\nu \hat{F}^\mu p_2}{(p_1 \cdot p_2)^2} \right] \\
& + J \left[\frac{\hat{F}^{\mu\nu} p_2 \hat{F} p_1}{p_1 \cdot p_2} - \frac{\hat{F}^\mu p_2 \hat{F}^\nu p_1}{p_1 \cdot p_2} \right] + K \left(p_2 \hat{F} p_1 \right) \frac{p_1^\mu \hat{F}^\nu p_2 - p_2^\nu \hat{F}^\mu p_1}{p_1 \cdot p_2} \\
& + L \left[\frac{\hat{F}^\mu p_1 \hat{F}^\nu p_1 + \hat{F}^\mu p_2 \hat{F}^\nu p_2}{p_1 \cdot p_2} - \left(p_2 \hat{F} p_1 \right) \frac{p_1^\nu \hat{F}^\mu p_1 - p_2^\mu \hat{F}^\nu p_2}{(p_1 \cdot p_2)^2} \right] \\
& + M \left(p_2 \hat{F} p_1 \right) \left[g_{\perp}^{\mu\nu} \frac{p_2 \hat{F} p_1}{(p_1 \cdot p_2)^2} \right. \\
& \quad \left. - (p_1 \cdot p_2)_{\perp} \frac{\hat{F}^{\mu\nu} + p_{2\perp}^\mu \hat{F}^\nu p_1 - p_{1\perp}^\nu \hat{F}^\mu p_2}{(p_1 \cdot p_2)^2} \right] \\
& + N \left(p_2 \hat{F} p_1 \right) \left[\frac{p_{1\perp}^\nu \hat{F}^\mu p_1 - p_{2\perp}^\mu \hat{F}^\nu p_2}{(p_1 \cdot p_2)^2} \right. \\
& \quad \left. + (p_1 \cdot p_2)_{\perp} \frac{p_{2\perp}^\mu \hat{F}^\nu p_2 - p_{1\perp}^\nu \hat{F}^\mu p_1}{(p_1 \cdot p_2)^3} \right], \tag{4.22}
\end{aligned}$$

de donde se puede observar que hay 11 nuevas estructuras en comparación con la expresión obtenida para el vacío (3.33).

4.2.2. Método de integración Gaussiano

Para poder llevar a cabo la integración sobre los momentos se generalizan las expresiones (4.20) y (4.21) a una dimensión arbitraria d . Debido

a que la presencia de campo magnético separa las componentes paralelas y perpendiculares, se tendrán 2 dimensiones paralelas y $d - 2$ dimensiones perpendiculares. Promoviendo estas expresiones a d dimensiones y reemplazando la forma explícita de los propagadores fermiónicos (4.3) se obtiene

$$\begin{aligned}
i\Gamma_{qB(A)}^{\mu\nu}(p_1, p_2) &= -ig_s^2 g_f \mathbf{tr} [t^a t^b] (2\pi)^4 \left(\frac{4\pi}{qB} \right)^{d-2} \\
&\times \int_0^\infty \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{\cos(qBs_1) \cos(qBs_2) \cos(qBs_3)} \\
&\times \int \frac{d^d a}{(2\pi)^d} \frac{d^d b}{(2\pi)^d} \frac{d^d c}{(2\pi)^d} e^{i \frac{2}{qB} (p_1 + a - c) \hat{F} (p_2 + b - a)} \\
&\times e^{-is_1 \left(m^2 - a_{\parallel}^2 - a_{\perp}^2 \frac{\tan(qBs_1)}{qBs_1} \right)} e^{-is_2 \left(m^2 - b_{\parallel}^2 - b_{\perp}^2 \frac{\tan(qBs_2)}{qBs_2} \right)} \\
&\times e^{-is_3 \left(m^2 - c_{\parallel}^2 - c_{\perp}^2 \frac{\tan(qBs_3)}{qBs_3} \right)} \delta^{(2)}(p_1 + a - c)_{\parallel} \\
&\times \delta^{(2)}(p_2 + b - a)_{\parallel} T^{\mu\nu}(a_{\parallel}, a_{\perp}, b_{\parallel}, b_{\perp}, c_{\parallel}, c_{\perp}), \tag{4.23}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
i\Gamma_{qB(B)}^{\mu\nu}(p_1, p_2) &= -ig_s^2 g_f \mathbf{tr} [t^a t^b] (2\pi)^4 \left(\frac{4\pi}{qB} \right)^{d-2} \\
&\times \int_0^\infty \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{\cos(qBs_1) \cos(qBs_2) \cos(qBs_3)} \\
&\times \int \frac{d^d a}{(2\pi)^d} \frac{d^d b}{(2\pi)^d} \frac{d^d c}{(2\pi)^d} e^{-i \frac{2}{qB} (p_1 + a - c) \hat{F} (p_2 + b - a)} \\
&\times e^{-is_1 \left(m^2 - a_{\parallel}^2 - a_{\perp}^2 \frac{\tan(qBs_1)}{qBs_1} \right)} e^{-is_2 \left(m^2 - b_{\parallel}^2 - b_{\perp}^2 \frac{\tan(qBs_2)}{qBs_2} \right)} \\
&\times e^{-is_3 \left(m^2 - c_{\parallel}^2 - c_{\perp}^2 \frac{\tan(qBs_3)}{qBs_3} \right)} \delta^{(2)}(p_1 + a - c)_{\parallel} \\
&\times \delta^{(2)}(p_2 + b - a)_{\parallel} T^{\mu\nu}(a_{\parallel}, a_{\perp}, b_{\parallel}, b_{\perp}, c_{\parallel}, c_{\perp}), \tag{4.24}
\end{aligned}$$

donde $T^{\mu\nu}$ es la traza espinorial dada por (A.19)

$$T^{\mu\nu} = \text{Tr} \left[\gamma^\mu \left((m + \not{a}_\parallel) e^{(s_1)} + \tilde{\not{a}}_\perp \right) \gamma^\nu \left((m + \not{b}_\parallel) e^{(s_2)} + \tilde{\not{b}}_\perp \right) \right. \\ \left. \times \left((m + \not{c}_\parallel) e^{(s_3)} + \tilde{\not{c}}_\perp \right) \right], \quad (4.25)$$

y se ha usado la notación $x_\mu F^{\mu\nu} y_\nu = x F y$. Nótese que la única diferencia entre las expresiones asociadas a los diagramas A y B, para el vértice efectivo, es el signo opuesto de la exponencial proveniente de la integración de las fases de Schwinger.

El análisis que se hace alrededor de las ecuaciones (A.20) y (A.21) en el Apéndice A, un conteo simple de matrices de Dirac en la Ec. (4.25), permite identificar tres tipos de integrales Gaussianas sobre los momentos que son relevantes

$$\int_{-\infty}^{\infty} da \exp [\alpha a^\mu a_\mu + \beta^\mu a_\mu + \gamma], \\ \int_{-\infty}^{\infty} da \exp [\alpha a^\mu a_\mu + \beta^\mu a_\mu + \gamma] a^\alpha, \quad (4.26) \\ \int_{-\infty}^{\infty} da \exp [\alpha a^\mu a_\mu + \beta^\mu a_\mu + \gamma] a^\alpha a^\beta.$$

Cómo se muestra en el Apéndice D, se puede factorizar el resultado de la integral simple en (4.26) en cada uno de los tres tipos de integrales y después “evaluar” las inserciones haciendo sustituciones sencillas. Este procedimiento es de gran utilidad pues permite que en las ecuaciones (4.23) y (4.24) se puedan realizar las integrales Gaussianas sin inserciones de momentos y posteriormente hacer las sustituciones respectivas en la traza. En el Apéndice D.3 se analiza un caso concreto.

Tomando las expresiones para el vértice efectivo asociadas a cada diagrama (4.23) y (4.24) junto con los resultados de la integración Gaussiana (D.36) y (D.37) se llega a las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
i\Gamma_{qB(A)}^{\mu\nu}(p_1, p_2) &= -ig_s^2 g_f \mathbf{tr} [t^a t^b] \left(\frac{4\pi}{qB} \right)^{d-2} \\
&\times \int_0^\infty \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{\cos(qBs_1) \cos(qBs_2) \cos(qBs_3)} G_{(A)} \tilde{T}_{(A)}^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

con

$$\begin{aligned}
G_{(A)} &= \frac{2^{4-3d}}{s\pi^{\frac{3d}{2}-2}} \left(\frac{-iqB \cos(s_1) \cos(s_1 + s_2)}{\sin(s)} \right)^{\frac{d}{2}-1} \left(\frac{(qB)^2 \cot(s_3)}{\cot(s_3) - \tan(s_2)} \right)^{\frac{d}{2}-1} \\
&\times e^{\frac{i}{qB} \frac{\cos(s_1) \cos(s_2) \sin(s_3)}{\sin(s)} [\tan(s_1) (\tan(s_2) \cot(s_3) p_{2\perp}^2 + p_{1\perp}^2) + \tan(s_2) (p_1 + p_2)_\perp^2]} \\
&\times e^{-ism^2} e^{\frac{i}{s} \left((s_1 + s_2) s_3 p_{1\parallel}^2 + (s_1 + s_3) s_2 p_{2\parallel}^2 + 2s_2 s_3 (p_1 \cdot p_2)_\parallel \right)} \\
&\times e^{-\frac{2i}{qB} \frac{\cos(s_1) \cos(s_2) \sin(s_3)}{\sin(s)} \tan(s_1) \tan(s_2) p_1 \hat{F} p_2},
\end{aligned} \tag{4.28}$$

y

$$\begin{aligned}
i\Gamma_{qB(B)}^{\mu\nu}(p_1, p_2) &= -ig_s^2 g_f \mathbf{tr} [t^a t^b] \left(\frac{4\pi}{qB} \right)^{d-2} \\
&\times \int_0^\infty \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{\cos(qBs_1) \cos(qBs_2) \cos(qBs_3)} G_{(B)} \tilde{T}_{(B)}^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

con

$$\begin{aligned}
G_{(B)} &= \frac{2^{4-3d}}{s\pi^{\frac{3d}{2}-2}} \left(\frac{-iqB \cos(s_1) \cos(s_1 + s_2)}{\sin(s)} \right)^{\frac{d}{2}-1} \left(\frac{(qB)^2 \cot(s_3)}{\cot(s_3) - \tan(s_2)} \right)^{\frac{d}{2}-1} \\
&\times e^{\frac{i}{qB} \frac{\cos(s_1) \cos(s_2) \sin(s_3)}{\sin(s)} [\tan(s_1) (\tan(s_2) \cot(s_3) p_{2\perp}^2 + p_{1\perp}^2) + \tan(s_2) (p_1 + p_2)_\perp^2]} \\
&\times e^{-ism^2} e^{\frac{i}{s} \left((s_1 + s_2) s_3 p_{1\parallel}^2 + (s_1 + s_3) s_2 p_{2\parallel}^2 + 2s_2 s_3 (p_1 \cdot p_2)_\parallel \right)} \\
&\times e^{\frac{2i}{qB} \frac{\cos(s_1) \cos(s_2) \sin(s_3)}{\sin(s)} \tan(s_1) \tan(s_2) p_1 \hat{F} p_2},
\end{aligned} \tag{4.30}$$

donde $\tilde{T}^{\mu\nu}$ corresponde a la traza espinorial de cada diagrama con las sustituciones pertinentes de acuerdo a lo discutido en el Apéndice D.3. Los reemplazos que se realizan son los siguientes

$$\begin{aligned}
c_{\parallel} &\longrightarrow (p_1 + a)_{\parallel}, \\
b_{\parallel} &\longrightarrow (a - p_2)_{\parallel}, \\
a_{\parallel}^{\mu} a_{\parallel}^{\nu} &\longrightarrow \frac{g_{\parallel}^{\mu\nu}}{2\alpha_{\parallel}} + \frac{\beta_{\parallel}^{\mu}}{2\alpha_{\parallel}} \frac{\beta_{\parallel}^{\nu}}{2\alpha_{\parallel}}, \\
a_{\parallel}^{\mu} &\longrightarrow -\frac{\beta_{\parallel}^{\mu}}{2\alpha_{\parallel}}, \\
p_{\perp}^{\mu} p_{\perp}^{\nu} &\longrightarrow \frac{g_{\perp}^{\mu\nu}}{2\alpha_{[p,\perp]}} + \frac{\beta_{[p,\perp]}^{\mu}}{2\alpha_{[p,\perp]}} \frac{\beta_{[p,\perp]}^{\nu}}{2\alpha_{[p,\perp]}}, \\
p_{\perp}^{\mu} &\longrightarrow -\frac{\beta_{[p,\perp]}^{\mu}}{2\alpha_{[p,\perp]}}.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

donde los coeficientes α 's son válidos para ambos diagramas y dependen del momento asociado a ellos, el campo magnético y los parámetros de Schwinger

$$\begin{aligned}
\alpha_{\parallel} &= is, \\
\alpha_{[c,\perp]} &= i \frac{\tan(qBs_3)}{qB}, \\
\alpha_{[b,\perp]} &= -i \frac{\cot(qBs_3) - \tan(qBs_2)}{qB}, \\
\alpha_{[a,\perp]} &= i \frac{\sec(qBs_1) \sec(qB(s_3 + s_3)) \sin(qBs)}{qB}.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Mientras que los coeficientes β 's sí dependen del diagrama

$$\begin{aligned}
\beta_{\parallel}^{\mu} &= 2i \left(s_3 p_{1\parallel}^{\mu} - s_2 p_{2\parallel}^{\mu} \right), \\
\beta_{[A,c,\perp]}^{\mu} &= \frac{2i}{qB} \hat{F}^{\mu} (a - b - p_2), \\
\beta_{[B,c,\perp]}^{\mu} &= -\frac{2i}{qB} \hat{F}^{\mu} (a - b - p_2), \\
\beta_{[A,b,\perp]}^{\mu} &= \frac{2i}{qB} \left(\cot(qBs_3) (a_{\perp}^{\mu} - p_{2\perp}^{\mu}) + (a + p_1) \hat{F}^{\mu} \right), \\
\beta_{[B,b,\perp]}^{\mu} &= \frac{2i}{qB} \left(\cot(qBs_3) (a_{\perp}^{\mu} - p_{2\perp}^{\mu}) - (a + p_1) \hat{F}^{\mu} \right), \\
\beta_{[A,a,\perp]}^{\mu} &= \frac{2i}{qB} \frac{p_{1\perp}^{\mu} - \tan(qBs_2) \left(\hat{F}^{\mu} p_2 - p_1 \hat{F}^{\mu} + \cot(qBs_3) p_{2\perp}^{\mu} \right)}{\cot(qBs_3) - \tan(qBs_2)}, \\
\beta_{[B,a,\perp]}^{\mu} &= \frac{2i}{qB} \frac{p_{1\perp}^{\mu} + \tan(qBs_2) \left(\hat{F}^{\mu} p_2 - p_1 \hat{F}^{\mu} - \cot(qBs_3) p_{2\perp}^{\mu} \right)}{\cot(qBs_3) - \tan(qBs_2)},
\end{aligned} \tag{4.33}$$

donde se está usando la notación

$$\begin{aligned}
p \hat{F}^{\mu} &\equiv p_{\nu} \hat{F}^{\nu\mu} = p_{\perp\nu} \hat{F}^{\nu\mu}, \\
\hat{F}^{\mu} p &\equiv \hat{F}^{\mu\nu} p_{\mu} = \hat{F}^{\mu\nu} p_{\perp\nu}, \\
p \hat{F} q &\equiv p_{\mu} \hat{F}^{\mu\nu} q_{\nu} = p_{\perp\mu} \hat{F}^{\mu\nu} q_{\perp\nu}.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Nótese que los coeficientes β 's en (4.33), asociados los diagramas A y B, difieren únicamente por un signo en los términos que involucran al tensor electromagnético $F^{\mu\nu}$.

Los reemplazos dados por (4.31) se deben de hacer con cuidado. Debido a que el orden de integración que se tomó fue $c \rightarrow b \rightarrow a$, ese mismo orden se debe de seguir al hacer las sustituciones. El resultado final no depende del orden de integración pero los parámetros β 's sí dependen del orden².

²Por ejemplo: se siguió el orden $c \rightarrow b \rightarrow a$, así que el coeficiente $\beta_{[a,\perp]}^{\mu}$ sólo depende de p_1 y p_2 debido a que los demás momentos ya fueron integrados. Pero si la inetgral sobre a se hiciera primero, dependería de b , c , p_1 y p_2 .

Con los resultados que se dieron a lo largo de esta sección ya es posible obtener una expresión analítica para el vértice efectivo. Ya se tienen los resultados de la integración Gaussiana y sólo es cuestión de hacer los reemplazos correspondientes en la traza espinorial de cada diagrama³.

Lo anterior es un proceso “sencillo” es su mecánica pero “complicado” en cuanto al número de términos que se deben de manejar⁴ y, por ello, obtener un resultado compacto conlleva una gran dificultad. Con ayuda del software Mathematica 12.0 y el paquete FeynCalc 9.2.0, se logró llegar a una expresión explícita para las trazas de ambos diagramas, ya con las sustituciones Gaussianas hechas, pero estas constan de 1300 términos aproximadamente. La forma general de estas expresiones es la siguiente

$$\begin{aligned}
\tilde{T}^{\mu\nu}(p_1, p_2, p_{1\perp}, p_{2\perp}) = & K_{(1)} p_1^\mu p_1^\nu + K_{(2)} p_1^\nu p_2^\mu + K_{(3)} p_1^\mu p_2^\nu + K_{(4)} p_2^\mu p_2^\nu \\
& + K_{(5)} \hat{F}^\nu p_2 p_1^\mu + K_{(6)} p_1^\mu p_{1\perp}^\nu + K_{(7)} \hat{F}^\nu p_1 p_1^\mu \\
& + K_{(8)} p_1^\mu p_{2\perp}^\nu + K_{(9)} g_\perp^{\mu\nu} + K_{(10)} \hat{F}^\mu p_2 \hat{F}^\nu p_1 \\
& + K_{(11)} \hat{F}^\mu p_1 \hat{F}^\nu p_2 + K_{(12)} \hat{F}^\mu p_1 p_2^\nu + K_{(13)} \hat{F}^\nu p_1 p_{1\perp}^\mu \\
& + K_{(14)} \hat{F}^\mu p_1 p_1^\nu + K_{(15)} \hat{F}^\mu p_1 p_{1\perp}^\nu + K_{(16)} \hat{F}^\nu p_1 p_2^\mu \\
& + K_{(17)} p_{2\perp}^\mu p_2^\nu + K_{(18)} p_{2\perp}^\nu p_2^\mu + K_{(19)} p_{2\perp}^\mu p_1^\nu \\
& + K_{(20)} \hat{F}^\mu p_2 p_2^\nu + K_{(21)} p_{1\perp}^\mu p_2^\nu + K_{(22)} p_{1\perp}^\nu p_2^\mu \\
& + K_{(23)} p_{1\perp}^\mu p_1^\nu + K_{(24)} \hat{F}^\mu p_2 p_{2\perp}^\nu + K_{(25)} p_{2\perp}^\mu p_{1\perp}^\nu \\
& + K_{(26)} p_{1\perp}^\mu p_{2\perp}^\nu + K_{(27)} \hat{F}^\nu p_2 p_2^\mu + K_{(28)} \hat{F}^\nu p_2 p_{2\perp}^\mu \\
& + K_{(29)} \hat{F}^\mu p_2 p_1^\nu + K_{(30)} \hat{F}^\mu p_2 \hat{F}^\nu p_2 + K_{(31)} \hat{F}^\mu p_1 \hat{F}^\nu p_1 \\
& + K_{(32)} p_{1\perp}^\mu p_{1\perp}^\nu + K_{(33)} p_{2\perp}^\mu p_{2\perp}^\nu + K_{(34)} \hat{F}^\nu p_2 p_{1\perp}^\mu \\
& + K_{(35)} \hat{F}^\mu p_1 p_{2\perp}^\nu + K_{(36)} \hat{F}^\nu p_1 p_{2\perp}^\mu + K_{(37)} \hat{F}^\mu p_2 p_{1\perp}^\nu \\
& + K_{(38)} g^{\mu\nu} + K_{(39)} \hat{F}^{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{4.35}$$

donde los coeficientes escalares $K_{(j)} = K_{(j)}(p_1, p_2, p_{1\perp}, p_{2\perp}, qB, s_1, s_2, s_3)$ dependen del diagrama. Nótese que al realizar de forma explícita el cálculo de la

³Las trazas de los diagramas en términos de los momentos del lazo a , b y c son idénticas pero cambian a la hora de hacer las integraciones Gaussianas, es decir, las sustituciones.

⁴Las sustituciones anidadas crean muchos más términos y las trazas sobre espín, aunque sencillas de hacer, pueden ir de 4 a 8 matrices γ .

traza y la integración sobre los momentos de lazo se obtienen 39 estructuras tensoriales distintas, tal como se plantea en el Apéndice C.2.

Ahora, al comparar la expresión (4.35) con la estructura tensorial para el vértice efectivo (C.21), la mayoría de los coeficientes $K_{(j)}$ deberían de ser cero. De forma muy similar a lo que sucedió en el caso del vacío, las integrales sobre los tiempos propios de Schwinger de los coeficientes $K_{(j)}$ que no aparecen en la estructura tensorial (C.21) deben de ser nulas⁵. De tal forma que la estructura se reduce a

$$\begin{aligned}
\tilde{T}^{\mu\nu}(p_1, p_2, p_{1\perp}, p_{2\perp}) = & K_{(1)} p_1^\mu p_1^\nu + K_{(2)} p_1^\nu p_2^\mu + K_{(3)} p_1^\mu p_2^\nu + K_{(4)} p_2^\mu p_2^\nu \\
& + K_{(5)} \hat{F}^\nu p_2 p_1^\mu + K_{(6)} p_1^\mu p_{1\perp}^\nu + K_{(7)} \hat{F}^\nu p_1 p_1^\mu \\
& + K_{(9)} g_{\perp}^{\mu\nu} + K_{(10)} \hat{F}^\mu p_2 \hat{F}^\nu p_1 + K_{(11)} \hat{F}^\mu p_1 \hat{F}^\nu p_2 \\
& + K_{(12)} \hat{F}^\mu p_1 p_2^\nu + K_{(14)} \hat{F}^\mu p_1 p_1^\nu + K_{(15)} \hat{F}^\mu p_1 p_{1\perp}^\nu \\
& + K_{(16)} \hat{F}^\nu p_1 p_2^\mu + K_{(17)} p_{2\perp}^\mu p_2^\nu + K_{(19)} p_{2\perp}^\mu p_1^\nu \\
& + K_{(20)} \hat{F}^\mu p_2 p_2^\nu + K_{(22)} p_{1\perp}^\nu p_2^\mu + K_{(25)} p_{2\perp}^\mu p_{1\perp}^\nu \\
& + K_{(27)} \hat{F}^\nu p_2 p_2^\mu + K_{(28)} \hat{F}^\nu p_2 p_{2\perp}^\mu + K_{(29)} \hat{F}^\mu p_2 p_1^\nu \\
& + K_{(30)} \hat{F}^\mu p_2 \hat{F}^\nu p_2 + K_{(31)} \hat{F}^\mu p_1 \hat{F}^\nu p_1 + K_{(36)} \hat{F}^\nu p_1 p_{2\perp}^\mu \\
& + K_{(37)} \hat{F}^\mu p_2 p_{1\perp}^\nu + K_{(38)} g^{\mu\nu} + K_{(39)} \hat{F}^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Las relaciones entre los coeficientes $K_{(j)}$ que dan origen a la estructura tensorial dada por (4.22) se ven reflejadas hasta después de calcular las integrales sobre los tiempos propios de Schwinger como se mostró y discutió en el caso del vacío.

4.3. Sección eficaz no polarizada en presencia de un campo magnético externo

De forma análoga al caso del vacío (3.55), la sección eficaz está dada por

⁵Para el presente trabajo todavía no se han realizado los cálculos de estas integrales de forma explícita pero para el caso del vacío se muestra en el Apéndice E.3.2.

$$\sigma_{qB}(gg \rightarrow H) = \frac{1}{2m_H^2} 2\pi\delta(\mathcal{S} - m_H^2) \overline{\sum}_{\text{color,espín}} |\mathcal{M}_{qB}|^2. \quad (4.37)$$

En analogía con (3.65), el promedio sobre color y espín de la amplitud de probabilidad está dada por

$$\overline{\sum}_{\text{color,espín}} |\mathcal{M}_{qB}|^2 = \frac{1}{32} \frac{1}{4} \Gamma_{qB}^{\mu\nu} \mathcal{P}_{\mu\alpha} \Gamma_{qB}^{*\alpha\beta} \mathcal{P}_{\nu\beta}. \quad (4.38)$$

donde, al igual que en el caso del vacío, se extrajo el factor $\frac{\delta^{ab}}{2}$ de los coeficientes de la estructura tensorial (C.21) para poder llevar a cabo el promedio sobre el color de los gluones incidentes. Ahora, sustituyendo la expresión (C.21) para el vértice efectivo en el límite $d \rightarrow 4$

$$\left(\Gamma_{qB}^{\mu\nu} \mathcal{P}_{\mu\alpha} \Gamma_{qB}^{*\alpha\beta} \mathcal{P}_{\nu\beta} \right)_{d \rightarrow 4}, \quad (4.39)$$

y sustituyendo el resultado en (4.38) se obtiene la sección eficaz no polarizada al *leading order* para la producción de bosones de Higgs mediante fusión de gluones en presencia de un campo magnético externo.

Para obtener la sección eficaz no polarizada se deben extraer los todos los coeficientes de la estructura tensorial para el vértice efectivo $A\text{-}M^6$, sin embargo, por razones de tiempo, se restringirá el cálculo al análisis del coeficiente que presenta la misma estructura tensorial que el caso sin campo (el coeficiente A). Esta elección permitirá comparar directamente con el resultado del vacío y cuantificar el efecto del campo en este coeficiente. De tal forma que

$$\sigma_{LO, \text{parcial}}^{qB}(gg \rightarrow H) = \frac{1}{2m_H^2} \frac{1}{128} 2|A|^2 2\pi\delta(\mathcal{S} - m_H^2), \quad (4.40)$$

que es análoga a (3.66). Donde el subíndice “parcial” se ha usado para indicar que sólo se toma en cuenta uno de los coeficientes que contribuye a la sección eficaz. El análisis que contempla todas las contribuciones de los coeficientes continua bajo estudio.

⁶Al igual que en el caso del vacío, se tienen algunos coeficientes que no contribuyen a la sección eficaz. Por ejemplo, los coeficientes B y E .

4.3.1. Determinación del coeficiente A

Para determinar la forma analítica del coeficiente A , se compara la estructura tensorial en (4.22) con la estructura proveniente de integración Gaussiana en (4.36). De esta última, después de una pequeña manipulación algebraica, se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{\mu\nu}(p_1, p_2, p_{1\perp}, p_{2\perp}) = & -K_{(2)}(p_1 \cdot p_2) \left[g^{\mu\nu} - \frac{p_1^\nu p_2^\mu}{p_1 \cdot p_2} \right] \\ & + [K_{(38)} + K_{(2)}(p_1 \cdot p_2)] g^{\mu\nu} + \dots, \end{aligned} \quad (4.41)$$

de este modo se identifica que a partir del coeficiente $K_{(2)}$ en la expresión completa de la traza, es posible calcular el coeficiente A . La forma explícita del coeficiente $K_{(2)}$ es la misma para ambos diagramas y está dada por

$$\begin{aligned} K_{(2)} = & -2m_f(d-2)(4uv-1) \cos^2(s_1) \cos^2(s_2) \cos^2(s_3) \\ & \times \left[\tan(s_1) \tan(s_2) + \tan(s_2) \tan(s_3) + \tan(s_3) \tan(s_1) + \frac{2}{d-2} \right], \end{aligned} \quad (4.42)$$

donde se ha empleado la notación $f(qBs_i) \equiv f(s_i)$. Las variables u y v están dadas por (3.42).

Para la identificación completa del coeficiente A , lo que resta es multiplicar la expresión (4.42) con los factores que aparecen en las Ecs. (4.27)-(4.30), esto es

$$A = g_s^2 g_f(p_1 \cdot p_2) \left(\frac{4\pi}{qB} \right)^{d-2} \int_0^\infty \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{\cos(s_1) \cos(s_2) \cos(s_3)} K_{(2)} [G_{(A)} + G_{(B)}], \quad (4.43)$$

con

$$\begin{aligned}
G_{(A/B)} = & \frac{2^{4-3d}}{s\pi^{\frac{3d}{2}-2}} \left(\frac{-iqB \cos(s_1) \cos(s_1 + s_2)}{\sin(s)} \right)^{\frac{d}{2}-1} \left(\frac{(qB)^2 \cot(s_3)}{\cot(s_3) - \tan(s_2)} \right)^{\frac{d}{2}-1} \\
& \times e^{\frac{i}{qB} \frac{\cos(s_1) \cos(s_2) \sin(s_3)}{\sin(s)} \left[\tan(s_1) \left(\tan(s_2) \cot(s_3) p_{2\perp}^2 + p_{1\perp}^2 \right) + \tan(s_2) (p_1 + p_2)_{\perp}^2 \right]} \\
& \times e^{-ism^2} e^{\frac{i}{s} \left((s_1 + s_2) s_3 p_{1\parallel}^2 + (s_1 + s_3) s_2 p_{2\parallel}^2 + 2s_2 s_3 (p_1 \cdot p_2)_{\parallel} \right)} \\
& \times e^{\mp \frac{2i}{qB} \frac{\cos(s_1) \cos(s_2) \sin(s_3)}{\sin(s)} \tan(s_1) \tan(s_2) p_1 \hat{F} p_2}.
\end{aligned}$$

Como se verá más adelante, el coeficiente A no presenta posibles divergencias al tomar el límite $d \rightarrow 4$, a diferencia del caso del vacío. Un análisis más profundo de esto se presenta en el Apéndice E.4.

La expresión (4.43) para el coeficiente A es analítica y exacta, es decir, se ha obtenido sin ninguna clase de aproximación en el procedimiento. Ahora, las tres integrales que quedan por realizar no se pueden calcular de forma analítica o con métodos numéricos; para conocer los efectos de campo magnético sobre este coeficiente, es necesario realizar cierto tipo de aproximaciones que permitan llevar a cabo el análisis de estas integrales para distintas situaciones físicas.

Como las escalas físicas presentes en la expresión (4.43) son los momentos de los gluones incidentes p_1 y p_2 , la masa de los quarks en lazo m_f y la combinación de la carga de los quarks con el campo magnético qB , una jerarquía entre estas escalas de energía podría ser determinada y dependerá de la situación física presente en la producción de Higgs y, de acuerdo a esta, se podrán realizar distintas aproximaciones que facilitaran el cálculo del coeficiente A .

Las aproximaciones más recurridas en la literatura son las de campo magnético débil y campo magnético intenso. Estas aproximaciones se dan cuando se tienen la siguientes jerarquías entre el campo magnético y la masa de los fermiones $|qB| \ll m_f^2$ y $|qB| \gg m_f^2$, respectivamente⁷.

En el presente trabajo de tesis, dado el contexto físico de la producción de Higgs que se contempla en la introducción, la aproximación que se emplea en la Ec. (4.43) es de campo débil. Para ello, se tiene que tomar en cuenta que

⁷ $10^{14} \text{Gauss} \sim \frac{1}{2e} \text{MeV}^2$, con e el módulo de la carga del electrón.

la principal contribución a las integrales sobre los tiempos propios s_i provienen de la región $qBs_i \ll 1$ [84–86] debido a que el integrando es altamente oscilatorio y está modulado por factores decrecientes en dicha región. Con esto en mente, es posible realizar una expansión en Taylor en las distintas funciones que contienen términos de qB en su argumento.

Las escalas físicas restantes, los momentos de los gluones, que aparecen en (4.43) también juegan un papel importante y deben de ser consideradas al realizar cualquier aproximación. Particularmente, la componente transversa de los momentos de los gluones es de vital importancia.

4.3.2. Aproximación de campo débil para momentos transversos bajos

En las aproximaciones de campo débil se considera que la escala de energía qB es mucho menor que la masa de las partículas con las cuales interactúa el campo magnético, es decir, $|qB| \ll m_f^2$. En este régimen de energías, es posible hacer un desarrollo en Taylor sobre la variable qB sobre todos los términos de la expresión (4.43). Sin embargo, se tiene que tener cuidado con el término exponencial que aparece en $G_{(A/B)}$ debido a que combina el momento transversal de los gluones con el campo magnético.

Si el momento transversal de los gluones es mayor que la masa (*cross field approximation* [87,88]), $p_{i\perp} \gg m_f$, el desarrollo de Taylor de dicho término no es válido y es necesario preservar el factor exponencial [64]. Por el contrario, si la componente transversal del momento de los gluones es del mismo orden de la masa de los quarks, $p_{i\perp} \lesssim m_f$, el desarrollo en Taylor de este factor sí es válido [64].

Por simplicidad, se restringirá el análisis a la región de momentos transversos bajos $p_{i\perp} \lesssim m_f$, de este modo, al realizar la expansión de Taylor completa de la expresión (4.43) da como resultado

$$\begin{aligned}
A = & \frac{i(1-i)^d 2^{2-\frac{3d}{2}} m g_s^2 g_f}{3\pi^{\frac{d}{2}}} (p_1 \cdot p_2) \int_0^1 dv \int_0^{1-v} du (1-4uv) \\
& \times \int_0^\infty ds \left(\frac{1}{s}\right)^{\frac{d}{2}-1} e^{-is(m^2-2uv(p_1 \cdot p_2))} \\
& \times \left[-6 - 2i(qB)^2 s^3 \left((u-1)^2 u^2 p_{1\perp}^2 + (v-1)^2 v^2 p_{2\perp}^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 2uv(2u^2 + 3v(u-1) - 3u + 2v^2 - 1)(p_1 \cdot p_2)_\perp \right) \right. \\
& \quad \left. + (qB)^2 s^2 \left(6v^2 \left(d + 2s^2(u-1)^2 u^2 (p_1 \hat{F} p_2)^2 - 1 \right) + 6du^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 6(d-1)(u-1)v - 6du + d - 6u^2 + 6u + 1 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 12s^2 u^2 v^3 (v + 2(u-1)) (p_1 \hat{F} p_2)^2 \right) \right], \tag{4.44}
\end{aligned}$$

donde se han usado los cambios de variable dados por (3.42). Nótese que el límite de campo cero se recupera fácilmente al evaluar en $qB = 0$ y el resultado coincide con el caso del vacío.

El cálculo explícito de las integrales de la expresión (4.44) se realiza con mayor detalle en el Apéndice E.3.4. Ahora, de la forma de la expresión (3.67)

$$\tilde{A} = \frac{g_s^2 m_H^2}{2\sqrt{2}\pi^2 v} \tau N_A(\tau),$$

para el coeficiente A en el caso del vacío, es conveniente reescribir el resultado final como

$$\begin{aligned}
A &\equiv \frac{g_s^2 m_H^2}{2\sqrt{2}\pi^2 v} \tau N_A^{qB}(\tau) \\
&= \frac{g_s^2 m_H^2}{2\sqrt{2}\pi^2 v} \tau \left[\frac{1}{4} \left(\text{Li}_2 \left(\frac{2}{1 - \sqrt{1 - \tau}} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{2}{1 + \sqrt{1 - \tau}} \right) \right) \right. \\
&\quad \times \left((\tau - 1) + 24 \frac{(qB)^2}{m_H^4} \left(1 - 2 \frac{p_{1\perp} p_{2\perp}}{m_H^2} \cos \Theta \right. \right. \\
&\quad \quad \quad \left. \left. - 16 \frac{p_{1\perp}^2 p_{2\perp}^2}{m_H^4} \sin^2 \Theta \right) \right) \\
&\quad + \frac{(qB)^2}{6m_H^4} \frac{1}{\tau^2 (\tau - 1)^{3/2}} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{\tau - 1}} \right) \\
&\quad \times \left(\tau^2 (5\tau - 8) \frac{p_{1\perp}^2 + p_{2\perp}^2}{m_H^4} - 2(\tau - 1)(\tau + 2)(9\tau - 10) \right. \\
&\quad \quad + ((6\tau^2 (7\tau - 8) - 32\tau) + 32) \frac{p_{1\perp} p_{2\perp}}{m_H^2} \cos \Theta \\
&\quad \quad \quad \left. + 2(\tau - 1)12(\tau(8 - 9\tau) + 8) \frac{p_{1\perp}^2 p_{2\perp}^2}{m_H^4} \sin^2 \Theta \right) \\
&\quad + \frac{1}{18\tau^3} \left(9\tau^3 + 6 \frac{(qB)^2}{m_H^4} \tau (45\tau + 26) \right. \\
&\quad \quad \quad \left. - 72 \frac{(qB)^2}{m_H^4} \tau (57\tau + 14) \frac{p_{1\perp}^2 p_{2\perp}^2}{m_H^4} \sin^2 \Theta \right) \\
&\quad + \frac{(qB)^2}{18m_H^4} \frac{1}{\tau^3 (\tau - 1)} \left((\tau(\tau(14 - 15\tau) + 8) - 16) \frac{p_{1\perp}^2 + p_{2\perp}^2}{m_H^2} \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + 6\tau(\tau(58 - 93\tau) + 32) \frac{p_{1\perp} p_{2\perp}}{m_H^2} \cos \Theta \right) \left. \right], \tag{4.45}
\end{aligned}$$

donde v es el valor de expectación del bosón de Higgs en el vacío y Θ es el ángulo entre $p_{1\perp}$ y $p_{2\perp}$.

La expresión anterior presenta problemas en el punto $\tau = 1$, es decir $4m_f^2 = m_H^2$, donde algunos términos⁸⁹ presentan divergencias. Estas divergencias son aparentes y no están presentes en realidad ya que, para que la

⁸Todos están asociados al campo magnético.

⁹La divergencia proviene de los polinomios en τ ya que tanto los dilogaritmos como la arcotangente son “bien comportados” en el punto $\tau = 1$.

aproximación de campo débil sea consistente, se requiere que el campo magnético tienda a cero más rápidamente que estos términos de umbral¹⁰ [64]. Esto se debe a que en la ecuación (4.43), el parámetro de la expansión es $qB/(t-1) \sim qB/(4m_f^2 - m_H^2)$. La expresión (4.44) en ausencia de campo magnético tiene dos escalas energéticas m_f y $(t-1) \sim (4m_f^2 - m_H^2)$, que corresponden a los valores extremos del argumento de la exponencial

$$\exp \left[-is \left(m_f^2 - 2uv(p_1 \cdot p_2) \right) \right].$$

Esta última escala es la relevante en el desarrollo de la parte imaginaria del coeficiente A , como se detalla en el Apéndice E.3.3.

Finalmente, al sustituir la expresión (4.45) en la ecuación (4.40), se obtiene la contribución del coeficiente A a la sección eficaz no polarizada

$$\sigma_{LO, \text{parcial}}^{qB}(gg \rightarrow H) = \frac{|A|^2}{128m_H^2} 2\pi \delta(\mathcal{S} - m_H^2). \quad (4.46)$$

Con lo anterior se da por concluido el cálculo de la contribución del coeficiente A a la sección eficaz no polarizada

$$gg \rightarrow H$$

en presencia de un campo magnético externo. En el siguiente capítulo se estudian los efectos del campo en este proceso.

¹⁰El umbral, a nivel árbol, para la producción de Higgs se ubica en el punto $m_H = 2m_f$.

Capítulo 5

Efectos del campo magnético en la sección eficaz

En este capítulo, se comparan los resultados obtenidos en los Capítulos 3 y 4 para la tasa de decaimiento y se presenta una breve discusión sobre los resultados obtenidos con el apoyo de gráficas utilizadas, así como su interpretación física.

Antes que nada, vale la pena notar que la aproximación de campo débil puede dar a entender que se refiere a campos magnéticos “pequeños” pero esto no siempre es cierto. Debido a que esta aproximación se toma cuando¹ $qB \ll m_f^2$, el límite máximo de la intensidad del campo magnético está determinado por el quark que sea elegido para hacer el análisis. En la Tabla 5.1 se muestran los valores máximos de campo magnético permitidos para que la aproximación de campo débil sea válida.

Para tener un punto de comparación, el campo máximo que se crea en las colisiones de iones pesados relativistas está dado por

$$eB_{max} \simeq 10m_\pi^2 \sim 2 \times 10^4 \text{ MeV}^2 = 2 \times 10^{-2} \text{ GeV}^2.$$

Entonces, el campo magnético de las etapas iniciales de colisiones de iones pesados relativistas puede considerarse “débil” para los quarks pesados pero no para los demás.

¹A partir de este punto se escribe solamente qB pero se está haciendo referencia a $|qB|$.

Sabor	Carga eléctrica [e]	qB_{max} [GeV ²]
Up (u)	2/3	$\sim 10^{-6}$
Down (d)	-1/3	$\sim 4.4 \times 10^{-6}$
Strange (s)	-1/3	$\sim 2 \times 10^{-3}$
Charm (c)	2/3	~ 0.3
Bottom (b)	-1/3	~ 3.5
Top (t)	2/3	$\sim 6 \times 10^3$

Tabla 5.1: Orden del campo magnético máximo a partir de la cual la aproximación de campo débil pierde validez, se toma $qB_{max} = 0.2m_f^2$.

5.1. Coeficiente A

En la presente sección se lleva a cabo el análisis del comportamiento del coeficiente A . Antes de comenzar, es conveniente delimitar la regiones de validez de la aproximación de campo débil en términos de la masa del Higgs y la masa de los quarks. Los quarks que se toman en cuenta durante este estudio son el top y el bottom entonces, a partir de sus masas correspondientes, se deduce fácilmente la vecindad² alrededor de la cual la aproximación de campo débil se rompe³

$$\begin{aligned} \text{Top: } m_H^{\text{crítica}} &\sim 346.2 \text{ GeV,} \\ \text{Bottom: } m_H^{\text{crítica}} &\sim 8.4 \text{ GeV.} \end{aligned}$$

Por otra parte, si se toma fija la masa del bosón de Higgs $m_H = 125.1$ GeV, la aproximación de campo débil no es válida alrededor del punto

$$m_f^{\text{crítica}} \sim 62.5 \text{ GeV.}$$

Si la intensidad del campo magnético está dada por $qB = Nm_f^2$ con $N \ll 1$ y la variable es m_H , el intervalo alrededor de $m_H^{\text{crítica}}$ donde la apro-

²Para la masa del Higgs.

³Esta corresponde a $\tau = 1$.

aproximación de campo débil no es válida es $m_H^{\text{crítica}} \pm \Delta m$, con

$$\Delta m > \sqrt{N}m_f, \quad (5.1)$$

y al tomar como el campo máximo $qB_{max} = 0.2m_f^2$, corresponde a

$$\begin{aligned} \text{Top: } \Delta m &> 78 \text{ GeV,} \\ \text{Bottom: } \Delta m &> 2 \text{ GeV.} \end{aligned}$$

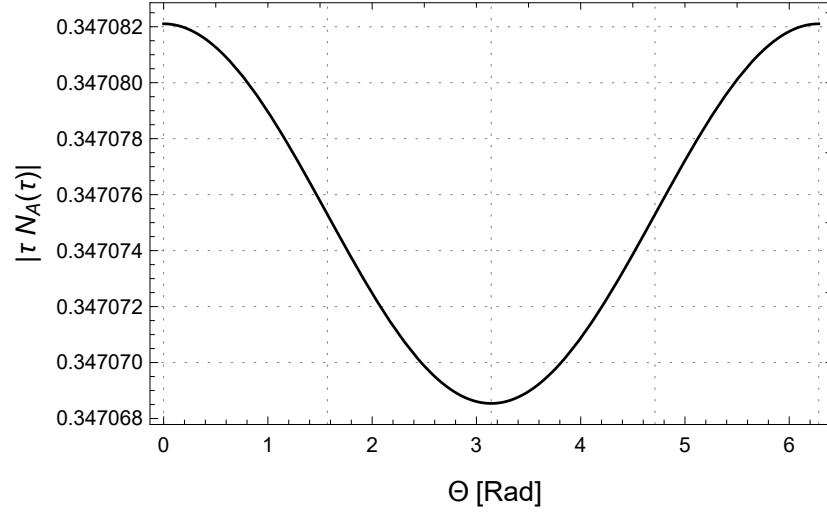
Por otra parte, si la masa del Higgs está fija y la variable es la masa de los quarks, el intervalo alrededor de $m_f^{\text{crítica}}$ donde la aproximación de campo débil no es válida es $m_f^{\text{crítica}} \pm \Delta m$, con

$$\Delta m > \frac{\sqrt{N}}{2}m_H,$$

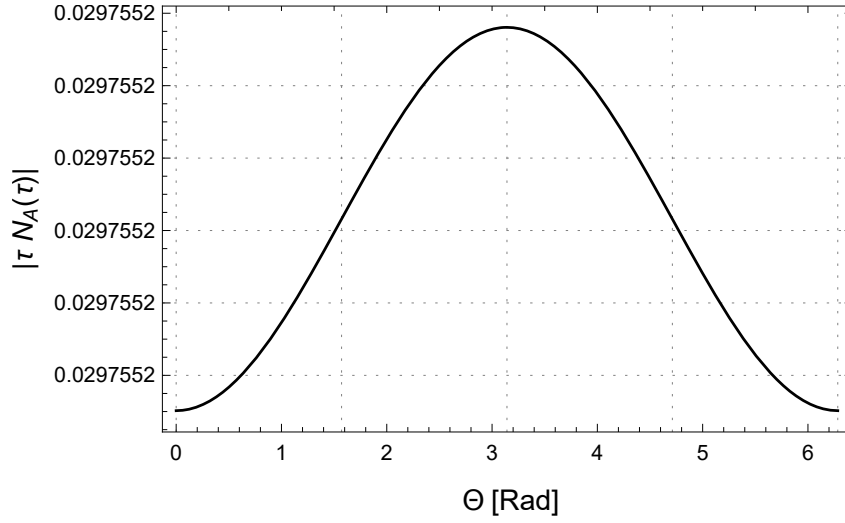
mismo que al tomar como campo máximo $qB_{max} = 0.2m_f^2$, corresponde a

$$\Delta m > 28 \text{ GeV.}$$

En la Figura 5.1 se muestra el comportamiento de la combinación $\tau N_A(\tau)$ como función del ángulo entre las componentes transversas del momento de los gluones Θ . Mientras que para el quark top la contribución máxima se alcanza en $\Theta = 0$ (los momentos transversos de los gluones son paralelos), para el caso del quark bottom esta se tiene en $\Theta = \pi$ (los momentos transversos de los gluones son antiparalelos).



(a) Quark top.



(b) Quark bottom.

Figura 5.1: Comportamiento de la combinación $\tau N_A(\tau)$ dada por (4.45) en función del ángulo entre las componentes transversas del momento de los gluones Θ para los quarks top ($m_t = 173.1$ GeV) y bottom ($m_b = 4.18$ GeV) tomando $m_H = 125.1$ GeV, $p_{i\perp} = 0.5m_f$ y $qB = 0.1m_f^2$.

En las Figuras 5.2-5.4 se muestra el valor absoluto y las partes reales e imaginarias para el quark top. En cada una de estas gráficas se observa una región donde las curvas que contienen el efecto del campo magnético no se muestran. Esto es debido a que en la vecindad de $m_H^{\text{crítica}} \sim 346.2$ GeV, como se analizó al inicio de este capítulo, la aproximación empleada no es válida así que se ha omitido en las gráficas.

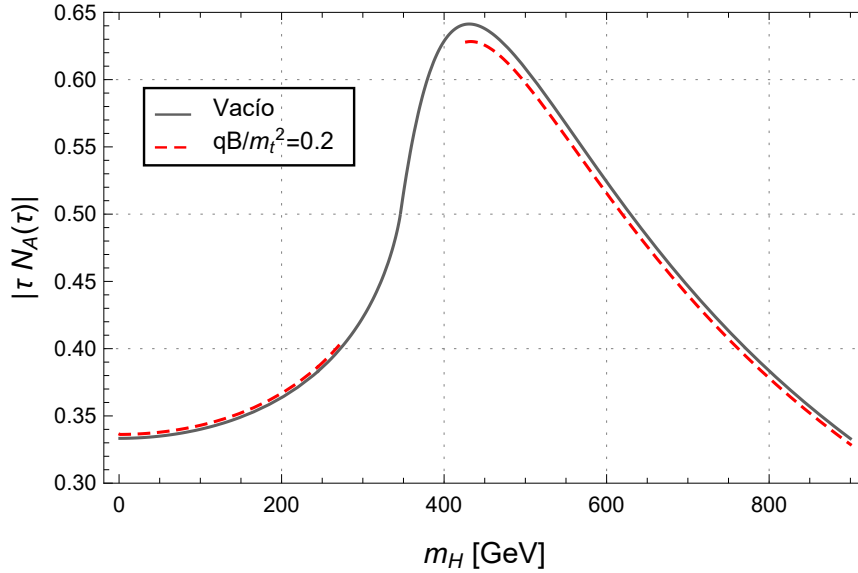


Figura 5.2: Comportamiento de la magnitud de $\tau N_A(\tau)$ en función de la masa del bosón de Higgs m_H para el quark top, tomando $\Theta = \pi$, $p_{i\perp} = 0.1m_f$ y $qB = 0.2m_f^2$.

En la Figura 5.2 se muestra el comportamiento del valor absoluto de $\tau N_A(\tau)$ como función de la masa del bosón de Higgs. Se observa que en la región de m_H que va de 0 a 280 GeV, la presencia del campo magnético tiende a aumentar esta combinación con respecto al caso del vacío, mientras que en el intervalo de 420 a 900 GeV, el efecto del campo es opuesta.

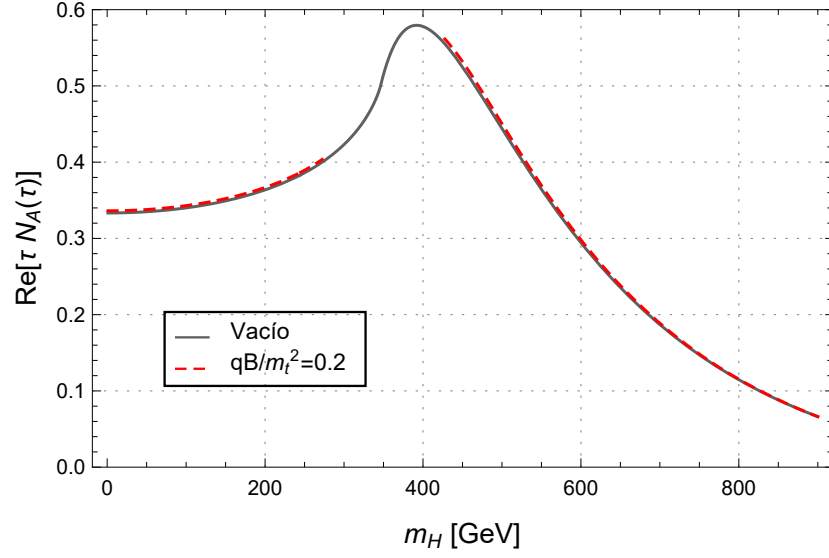


Figura 5.3: Comportamiento de la parte real de $\tau N_A(\tau)$ en función de la masa del bosón de Higgs m_H para el quark top, tomando $\Theta = \pi$, $p_{i\perp} = 0.1m_f$ y $qB = 0.2m_f^2$.

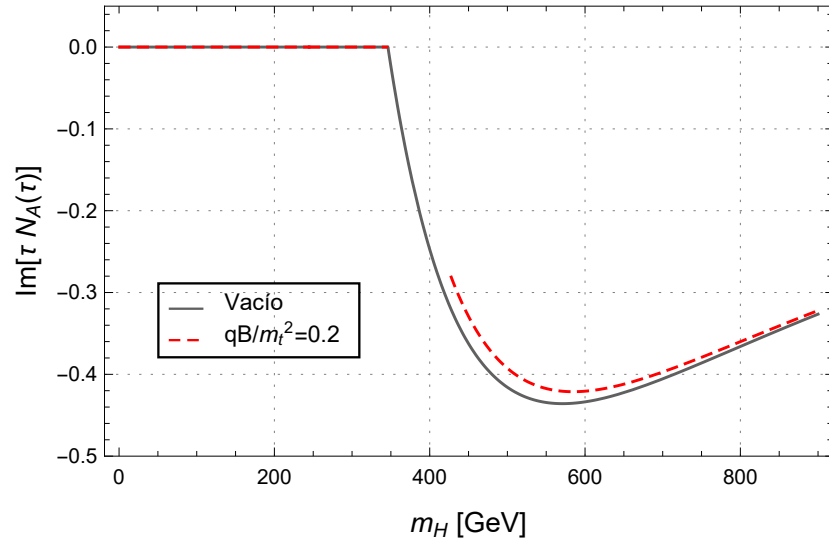


Figura 5.4: Comportamiento de la parte imaginaria de $\tau N_A(\tau)$ en función de la masa del bosón de Higgs m_H para el quark top, tomando $\Theta = \pi$, $p_{i\perp} = 0.1m_f$ y $qB = 0.2m_f^2$.

En la Figura 5.3 se muestra el comportamiento de la parte real de $\tau N_A(\tau)$ como función del campo magnético. En esta se observa que aumenta con la presencia del campo magnético respecto al vacío en ambas regiones (tanto antes como después del punto crítico) y tiene asintóticamente al caso del vacío a medida que la masa del Higgs aumenta.

El comportamiento de la parte imaginaria de $\tau N_A(\tau)$ se muestra en la Fig. 5.4 como función del campo magnético. Esta es nula en la región anterior al punto crítico así que el caso con campo coincide con el vacío, además se observa que al pasar el punto crítico el valor de la parte imaginaria aumenta pero su magnitud disminuye, esto se ve reflejado en el valor absoluto de $\tau N_A(\tau)$ que se mostró en la Figura 5.2.

En las Figuras 5.5-5.7 se muestra el valor absoluto y las partes reales e imaginarias para el quark bottom. De forma análoga al quark top, se observa un intervalo donde no está la curva que presenta el efecto del campo magnético en la vecindad de $m_H^{\text{crítica}} \sim 8.4$ GeV debido a que en este región la aproximación no es válida como ya se ha mencionado.

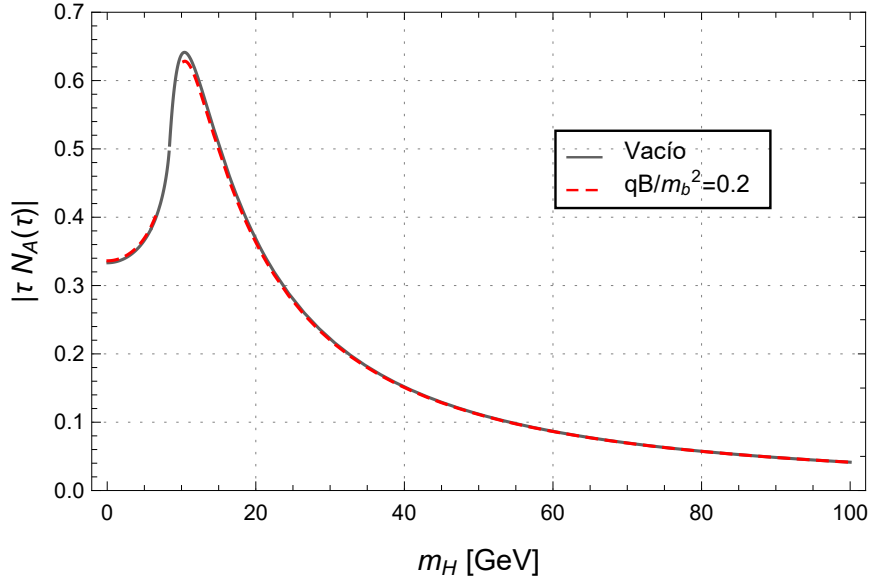


Figura 5.5: Comportamiento de la magnitud de $\tau N_A(\tau)$ en función de la masa del bosón de Higgs m_H para el quark bottom, tomando $\Theta = \pi$, $p_{i\perp} = 0.1m_f$ y $qB = 0.2m_f^2$.

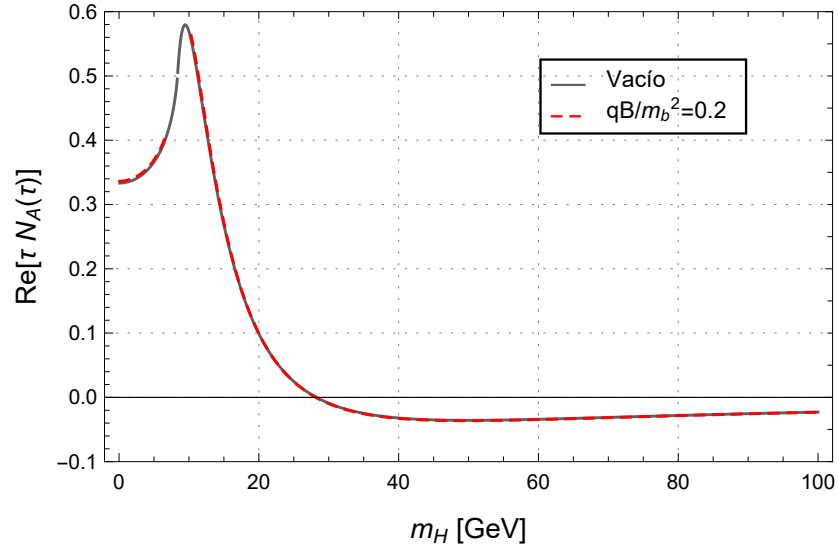


Figura 5.6: Comportamiento de la parte real de $\tau N_A(\tau)$ en función de la masa del bosón de Higgs m_H para el quark bottom, tomando $\Theta = \pi$, $p_{i\perp} = 0.1m_f$ y $qB = 0.2m_f^2$.

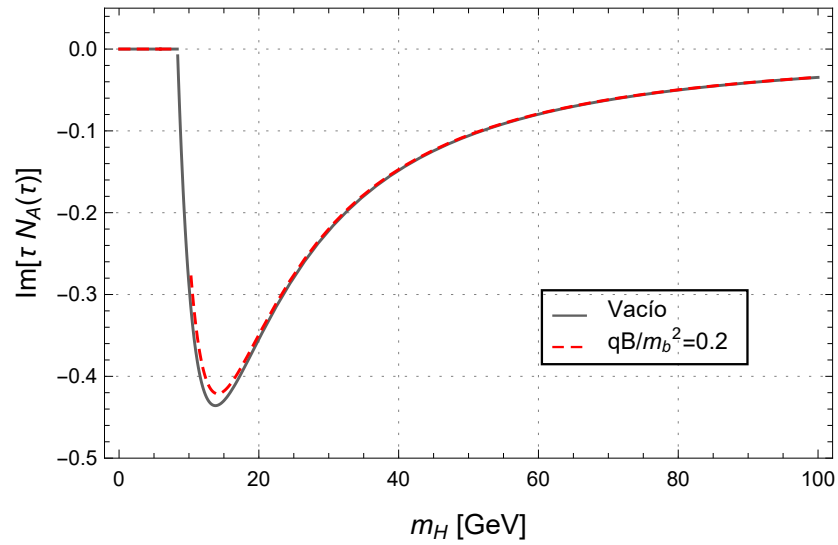


Figura 5.7: Comportamiento de la parte imaginaria de $\tau N_A(\tau)$ en función de la masa del bosón de Higgs m_H para el quark bottom, tomando $\Theta = \pi$, $p_{i\perp} = 0.2m_f$ y $qB = 0.2m_f^2$.

El comportamiento general del valor absoluto (Fig. 5.5), de la parte real (Fig. 5.6) y de la parte imaginaria (Fig. 5.7) para el quark bottom es el mismo que para el quark top. Vale la pena resaltar que en este caso la desviación del caso con campo magnético con respecto del vacío es menor que en el caso del quark top.

5.2. Sección eficaz parcial

En esta sección se lleva a cabo el análisis del comportamiento de la sección eficaz parcial y su comparación respecto al caso del vacío.

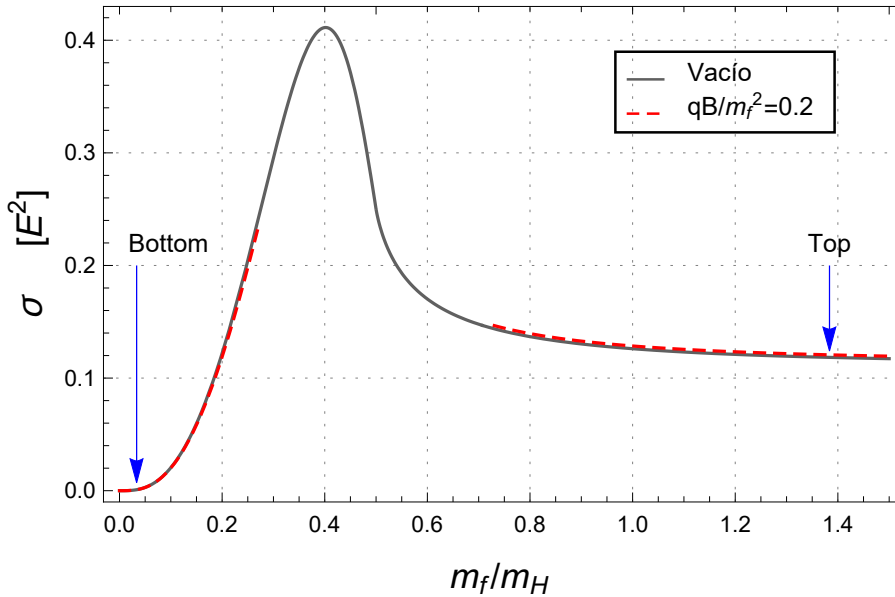


Figura 5.8: Comportamiento de la sección eficaz parcial dada por la expresión (4.46) como función de la masa de los quarks dentro del lazo fermiónico, tomando $\Theta = \pi$, $p_{i\perp} = 0.5m_f$ y $qB = 0.2m_f^2$.

En la Figura 5.8 se muestra el comportamiento de la sección eficaz parcial en función de la masa de los quarks a un ángulo fijo entre los momentos transversos de los gluones y manteniendo una proporción fija de los momentos transversos y la intensidad de campo magnético con la masa de los quarks. La masa del bosón de Higgs se ha fijado en el valor $m_H = 125.1$ GeV. Nótese

que, de la Ec. (5.1), el intervalo en donde no es válida la aproximación es $m_f/m_H \in (0.25, 0.75)$.

En la Figura 5.8 se observa que en la región que va de 0 a 0.25 para m_f/m_H , pareciese que el campo magnético disminuye la sección eficaz y se pega al caso del vacío a medida que la masa del quark tiende a cero, el efecto de campo se hace cada vez menor. Por otra parte, por encima de $m_f/m_H = 0.75$, el campo magnético tiende a aumentar la sección eficaz. Nótese que tanto el campo magnético como los momentos transversos aumentan en proporción a la masa de los quarks, por lo que en esta gráfica se resalta el efecto de diferentes sabores de los quarks sujetos a la misma jerarquía de escalas; siendo el quark top el que domina.

Para cuantificar de forma más precisa el efecto, tanto del campo magnético como del momento transverso de los gluones, es conveniente definir

$$\Delta\sigma \equiv \frac{\sigma_{LO, \text{parcial}}^{qB}}{\sigma_{LO, \text{vacío}}} - 1. \quad (5.2)$$

En las Figuras 5.9 y 5.10 se muestra el comportamiento de la respuesta del sistema respecto a la intensidad de campo magnético para distintos valores del momento transverso para los quarks top y bottom respectivamente. En ambos casos se eligió $p_{1\perp} = p_{2\perp}$, esto es porque la expresión (4.45) es simétrica ante el intercambio de $p_{1\perp}$ y $p_{2\perp}$, entonces el efecto de cualquiera de los momentos transversos es el mismo.

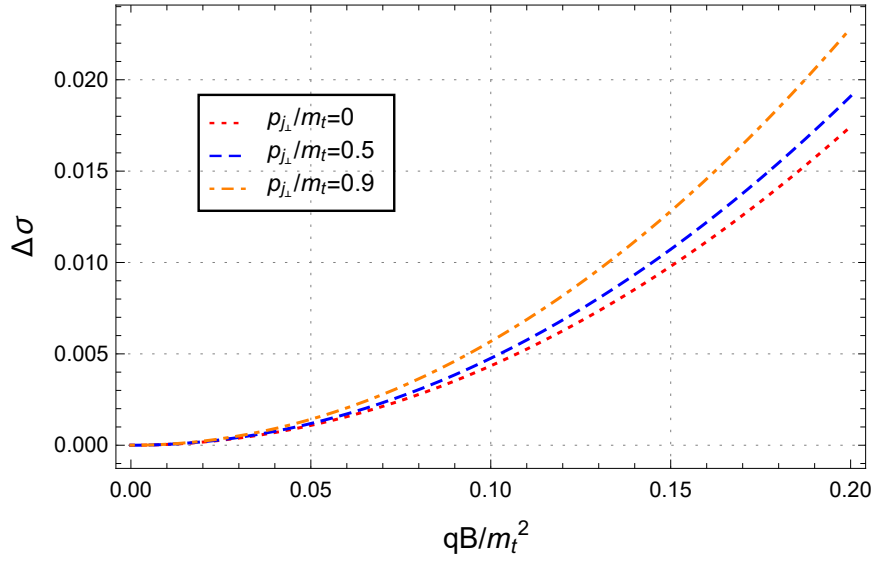


Figura 5.9: Comportamiento de la respuesta de la sección eficaz dada por la expresión (5.2) como función del campo magnético para el quark top, tomando diferentes valores del momento transverso y $\Theta = \pi$.

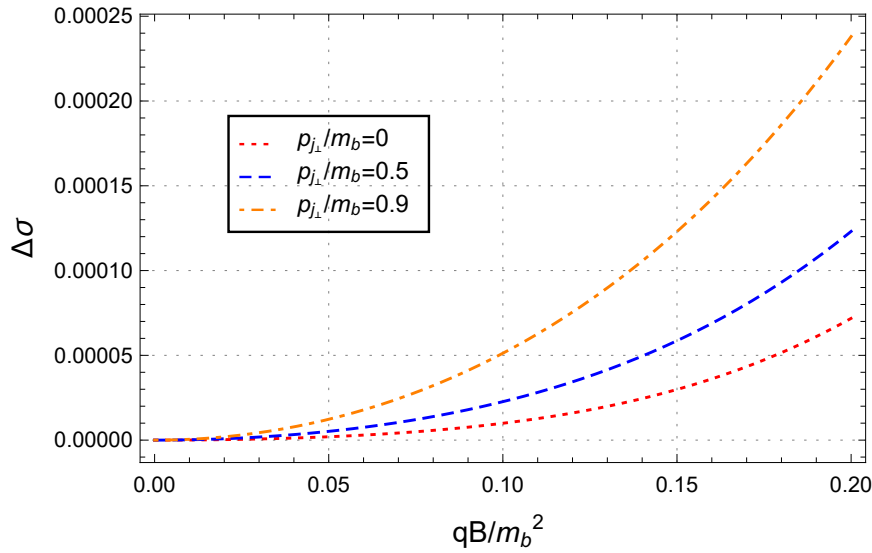


Figura 5.10: Comportamiento de la respuesta de la sección eficaz dada por la expresión (5.2) como función del campo magnético para el quark bottom, tomando diferentes valores del momento transverso y $\Theta = \pi$.

En la Figura 5.9 se observa que tanto el campo magnético como el momento transverso de los gluones aumentan la sección eficaz. El cambio máximo que se observa corresponde alrededor del 2% de la sección eficaz del vacío.

En la Figura 5.10 se observa el mismo comportamiento, tanto el campo magnético y el momento transverso de los gluones aumentan la sección eficaz. En este caso, el cambio máximo que se observa corresponde alrededor del 0.02% de la sección eficaz en el vacío.

En las Figuras 5.11 y 5.12 se muestra el comportamiento de la respuesta del sistema respecto al momento transverso de uno de los gluones, tomando distintas intensidades de campo magnético para los quarks top y bottom respectivamente. En ambas figuras se observa el mismo comportamiento que en las gráficas anteriores, la intensidad de campo magnético y el momento transverso de los gluones aumentan la sección eficaz del vacío.

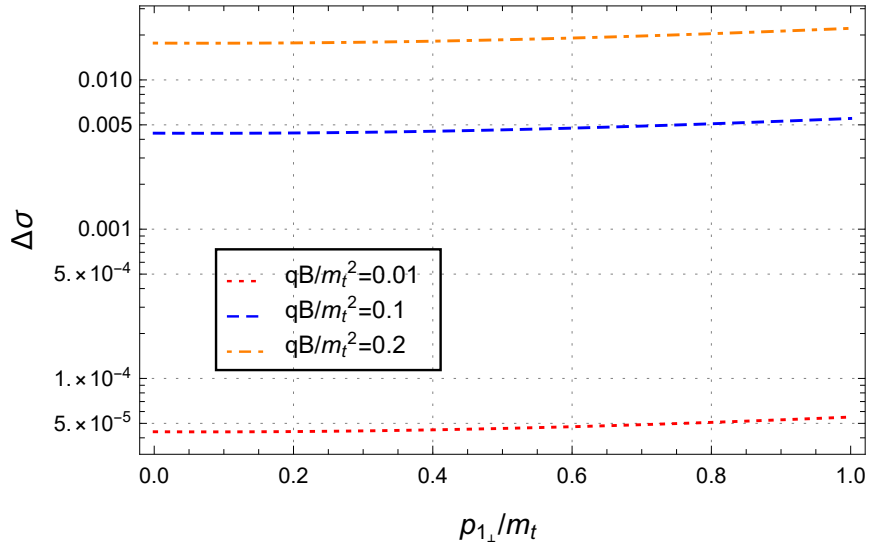


Figura 5.11: Comportamiento de la respuesta de la sección eficaz en función de $p_{1\perp}$ para el quark top tomando diferentes valores para el campo magnético, $p_{2\perp} = 0.2m_f$ y $\Theta = \pi$.

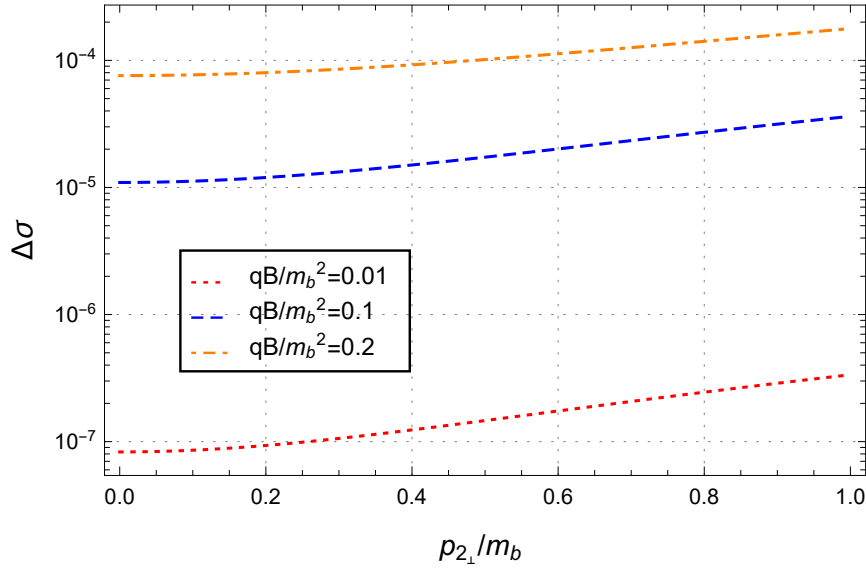


Figura 5.12: Comportamiento de la respuesta de la sección eficaz en función de $p_{2\perp}$ para el quark bottom tomando diferentes valores para el campo magnético, $p_{1\perp} = 0.2m_f$ y $\Theta = \pi$.

En las cuatro gráficas anteriores se realiza el análisis tomando distintos valores para la magnitud de los momentos transversos de los gluones de tal forma que siempre van aumentando. Como el momento transverso se conserva durante todo el proceso, esto es

$$p_{1\perp} + p_{2\perp} = p_{3\perp},$$

entonces, si el momento transverso de Higgs ($p_{3\perp}$) está fijo, es relevante hacer una análisis del comportamiento de la sección eficaz respecto a la distribución de los momentos de los gluones que mantienen la conservación de momento transverso de forma explícita.

En las Figuras 5.13-5.16 se lleva a cabo este análisis tomando

$$p_{1\perp} + p_{2\perp} = p_{3\perp} = m_f, \quad (5.3)$$

donde m_f del quark en el lazo.

En las Figuras 5.13-5.14 se muestra el comportamiento de la respuesta del sistema respecto a la intensidad de campo magnético para distintos valores del momento transverso de uno de los gluones incidentes, para los quarks top y bottom respectivamente.

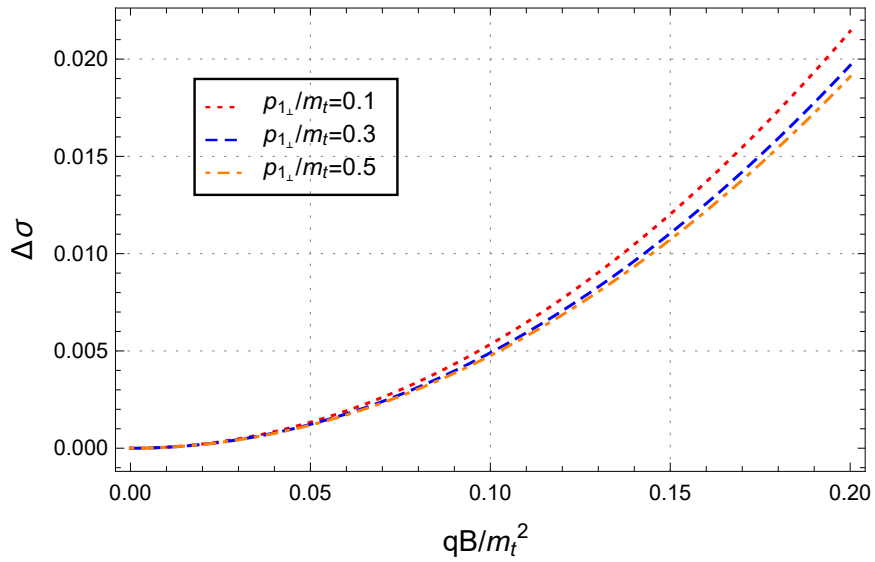


Figura 5.13: Comportamiento de la respuesta de la sección eficaz en función del campo magnético para el quark top, tomando diferentes combinaciones para los valores del momento transverso y $\Theta = \pi$.

En la Figura 5.13 se observa que el campo magnético aumenta la sección eficaz donde el cambio máximo que se observa corresponde alrededor del 2% de ésta. Por otra parte, al ser el momento transverso total fijo, se observa que la menor contribución se obtiene cuando la magnitud de los momentos transversos asociados a cada gluón son iguales y aumenta a medida que la diferencia $|p_{1\perp} - p_{2\perp}|$ crece.

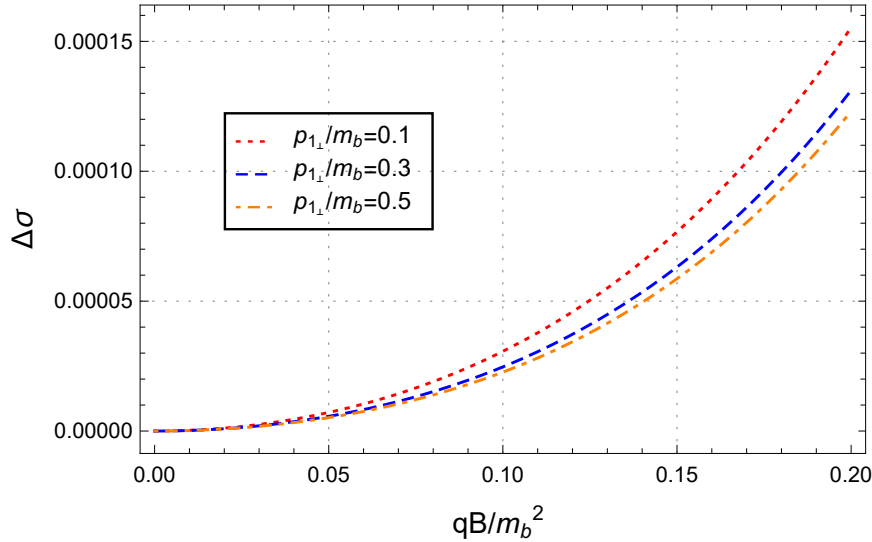


Figura 5.14: Comportamiento de la respuesta de la sección eficaz en función del campo magnético para el quark bottom, tomando diferentes combinaciones para los valores del momento transverso y $\Theta = \pi$.

En la Figura 5.14 se observa el mismo comportamiento: el campo magnético incrementa la sección eficaz donde el cambio máximo que se observa corresponde alrededor del 0.015 %. Nuevamente, la mayor contribución se da cuando la magnitud $|p_{1\perp} - p_{2\perp}|$ es máxima.

En las Figuras 5.15 y 5.16 se muestra el comportamiento de la respuesta del sistema respecto al momento transverso de los gluones tomando distintas intensidades de campo magnético para los quarks top y bottom respectivamente. En ambas figuras se observa el mismo comportamiento que en las gráficas anteriores, la intensidad de campo magnético y la magnitud $|p_{1\perp} - p_{2\perp}|$ aumentan la sección eficaz.

En estas gráficas se puede notar que la sección eficaz es simétrica ante el intercambio de $p_{1\perp}$ y $p_{2\perp}$. Las curvas muestran un punto mínimo en el centro, el cual corresponde a $p_{1\perp} = p_{2\perp} = 0.5m_f$, y son crecientes simétricas alrededor de dicho punto hasta alcanzar un máximo en $p_{i\perp} = 0$ y $p_{j\perp} = m_f$.

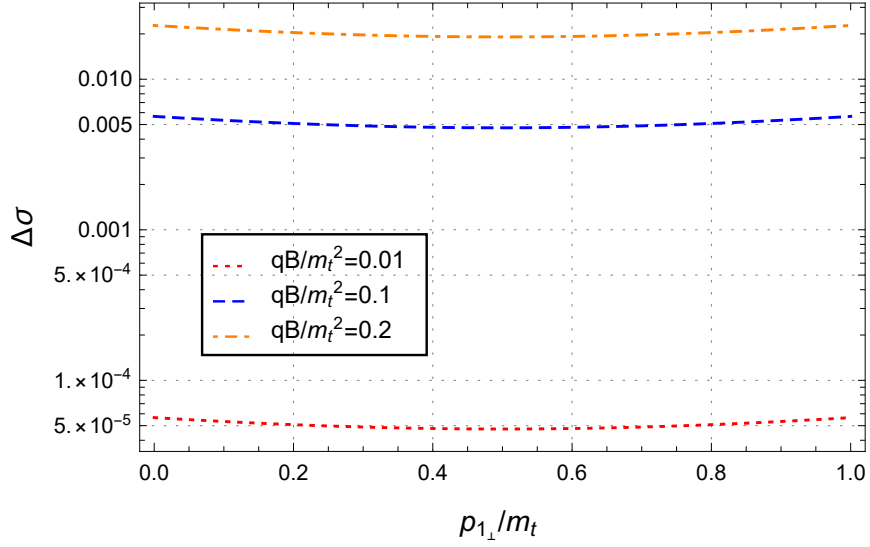


Figura 5.15: Comportamiento de la respuesta de la sección eficaz en función de $p_{1\perp}$ para el quark top, tomando diferentes valores para el campo magnético, $p_{2\perp} = m_t - p_{1\perp}$ y $\Theta = \pi$.

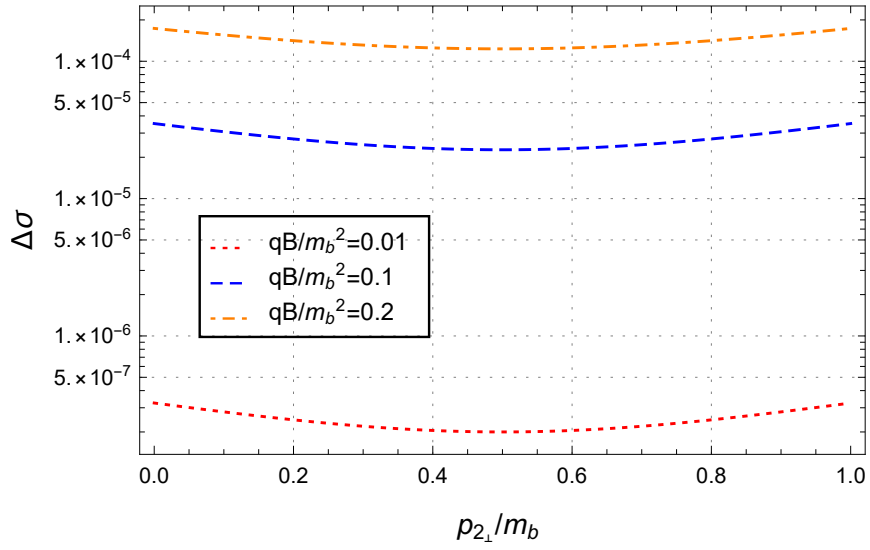


Figura 5.16: Comportamiento de la respuesta de la sección eficaz en función de $p_{2\perp}$ para el quark bottom, tomando diferentes valores para el campo magnético, $p_{1\perp} = m_b - p_{2\perp}$ y $\Theta = \pi$.

Vale la pena notar que las intensidades de campo que se manejan en esta sección son mayores que la intensidad máxima que se ha registrado en las colisiones de iones pesados relativistas así que el análisis anterior es puramente teórico. Si se considera una intensidad de campo magnético del orden $qB = 5m_\pi^2 \sim 0.01 \text{ GeV}^2$, así como $p_{1\perp} = p_{2\perp} = 0.9m_f$ y $\Theta = \pi$ se obtienen los siguientes valores para la respuesta del sistema

$$\begin{aligned}\Delta\sigma^{\text{top}} &\sim 8 \times 10^{-14}, \\ \Delta\sigma^{\text{bottom}} &\sim 2 \times 10^{-9}.\end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que tener en mente que el análisis realizado en esta sección corresponde a la contribución pura del coeficiente A en la sección eficaz. Entonces los resultados aquí presentados son parciales y es necesario considerar los otros 12 coeficientes para poder concluir de forma satisfactoria el análisis de la producción de bosones de Higgs mediante fusión de gluones en presencia de un campo magnético externo.

Capítulo 6

Conclusiones

En el presente trabajo de tesis se realizó un análisis acerca de los efectos de un campo magnético uniforme en la tasa de producción del bosón de Higgs mediante fusión de gluones. Este estudio puede ser de gran interés debido a que recientemente se ha encontrado que es posible detectar una señal en el canal de Higgs en las colisiones de iones pesados relativistas, tanto en los aceleradores que se manejan en la actualidad como en los futuros.

El análisis se centró en comparar los resultados obtenidos para la sección eficaz en el caso del vacío y la contribución equivalente (asociada a la misma estructura tensorial) en presencia de campo magnético para los quarks top y bottom, es decir, en este sentido se trabaja una sección eficaz parcial con campo magnético. El cálculo de esta sección eficaz parcial se realizó con la aproximación de campo magnético débil para momentos transversos bajos.

Se encontró que tanto la intensidad de campo magnético como la magnitud del momento transversal de los gluones aumentan la sección eficaz parcial. El aumento de la sección eficaz parcial podría deberse al campo magnético, pues este provoca una reducción dimensional del espacio fase. Esta reducción de espacio fase propicia la interacción de los quarks dentro del lazo y, con ello, el aumento de la tasa de producción. Por otra parte, el aumento debido al momento transversal puede deberse a que hay más energía disponible para el proceso y esto facilita la producción.

Al considerar una cantidad de momento transversal total fija pero que distribuye de forma distinta entre los gluones, se encontró que los resultados varían. La mayor contribución se da cuando la diferencia $|p_{1\perp} - p_{2\perp}|$ es máxima. Es decir, la cinemática de los gluones juega un rol importante en el

proceso.

Por razones de tiempo, este estudio se limitó a una aproximación válida sólo para momentos transversos bajos. Tal como se ha mostrado en las distintas gráficas, la cinemática en presencia de campo magnético es relevante para el proceso [64]. Entonces, el no poder considerar magnitudes arbitrarias para el momento transverso, limita el alcance de los resultados aquí presentados. Típicamente una colisión en el LHC se ha da energías del orden de TeV, entonces, es de esperarse que el momento transverso pueda llegar a ser de este mismo orden de magnitud, muy por encima de lo que aquí se ha planteado. Para llevar a cabo un análisis que considere un momento transverso arbitrario, es necesario trabajar con una aproximación de campo débil ligeramente distinta [64].

Cabe mencionar que el presente trabajo solamente es una primera aproximación al problema. Para llevar a cabo el análisis completo se debe de calcular la sección eficaz total en presencia de campo magnético y trabajar con diferentes aproximaciones que permitan estudiar un intervalo arbitrario para las magnitudes de las componentes transversas del momento. Otro punto que se debe de tener en cuenta es que para poder analizar las contribuciones de los quarks ligeros se debe de trabajar con una aproximación de campo intenso.

En el tipo de situaciones físicas, en las que el presente estudio es relevante, existen otros “agentes externos” que pueden repercutir en la producción de un bosón escalar. Por ello, un análisis más completo debe de incluir los efectos de temperatura y densidad finitas.

Si bien el trabajo realizado se centró en el proceso de producción de Higgs mediante fusión de gluones

$$gg \longrightarrow H,$$

otro proceso por el cual se puede producir el bosón de Higgs es mediante un proceso de dispersión

$$g \longrightarrow gH,$$

el cual se puede obtener mediante simetría de cruce. Por tanto, el presente análisis representa solo una parte del trabajo que se continua desarrollando.

Con todo lo anterior, la perspectiva del trabajo a futuro de este estudio es prometedora y podría ser relevante en la física de alta precisión del bosón de Higgs tanto en la actualidad como en el futuro.

Por otra parte, el QGP que se crea en las colisiones de iones pesados relativistas se puede utilizar como un modelo para el Universo temprano inmediatamente después del Big Bang y, por tanto, también tiene implicaciones para la cosmología [89]. De tal forma que investigar y comprender los efectos del QGP sobre el bosón de Higgs podría ayudar a comprender distintos procesos que se dieron en las etapas tempranas del Universo. Además, debido a que el campo de Higgs se describe mediante un campo escalar neutro; los resultados obtenidos a lo largo de la investigación pueden generalizarse y ser aplicados a diversos procesos físicos donde el campo escalar juegue un rol central. Ejemplo de esto son la inflación (el campo inflatónico [90]), el estudio de objetos astrofísicos compactos (superfluidez de color [91]) o la producción de alguna otra partícula (pseudo)escalar en colisiones de iones pesados relativistas, como mesones π , B , D , etc.

Apéndice A

Trazas espinoriales

En el presente apéndice se discute con mayor detalle la forma para calcular las trazas sobre espines que se presentan en los Capítulos 3 y 4.

A.1. Matrices de Dirac en d dimensiones

La traza de una sola matriz de Dirac es nula debido a que cumple con un álgebra de Clifford d -dimensional. Para el caso $d = 4$ en base de Weyl, esto es

$$\text{Tr}[\gamma^\mu] = \text{Tr} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

donde σ^μ son las matrices de Pauli.

La relación principal del álgebra de Clifford es la relación de anticonmutación entre sus elementos

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbf{I}, \tag{A.1}$$

donde \mathbf{I} representa la matriz identidad de $d \times d$, la cual generalmente no se escribe explícitamente. La operación de traza tiene el significado físico de sumar sobre todos los posibles valores de espín en el lazo cerrado, por lo que ésta actúa sobre los índices espinoriales y no sobre los espacio-temporales.

En d dimensiones se siguen cumpliendo las relaciones básicas para las trazas de matrices de Dirac

$$\begin{aligned}
Tr[\mathbf{I}] &= d, \\
Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] &= 4g^{\mu\nu}, \\
Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho] &= 4(g^{\mu\nu} g^{\sigma\rho} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}), \\
Tr[\# \text{ impar } \gamma\text{'s}] &= 0.
\end{aligned} \tag{A.2}$$

La traza espinorial que aparece en la expresión (3.16) para el vértice efectivo se puede calcular sin mayor dificultad al utilizar las relaciones anteriores y da como resultado

$$\begin{aligned}
&Tr[\gamma^\mu(\not{d} + m_f)\gamma^\nu(\not{d} - \not{p}_2 + m_f)(\not{p}_1 + \not{d} + m_f)] \\
&= 4m_f[g^{\mu\nu}(m_f^2 - a^2 - p_1 \cdot p_2) + 4a^\mu a^\nu + 2a^\mu p_2^\nu \\
&\quad - 2a^\nu p_1^\mu + p_2^\mu p_1^\nu - p_1^\mu p_2^\nu].
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Ahora, la relevancia de que se considere en una dimensión arbitraria d surge al trabajar con el álgebra de matrices de Dirac. Algunas relaciones útiles se muestran a continuación

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu \gamma_\mu &= d\mathbf{I}, \\
\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma_\mu &= (2 - d)\gamma^\alpha, \\
\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_\mu &= 4g^{\alpha\beta} + (d - 4)\gamma^\alpha \gamma^\beta, \\
\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma_\mu &= -2\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta + (4 - d)\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

A.2. Algunas relaciones relevantes

De acuerdo a las definiciones (4.4) y la siguiente convención para la métrica de Minkowski

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

se tiene que

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a \cdot b)_{\parallel} + (a \cdot b)_{\perp}, \\ (a \cdot b)_{\parallel} &= a^0 b^0 - a^3 b^3, \\ (a \cdot b)_{\perp} &= -a^1 b^1 - a^2 b^2. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$g_{\mu\nu} a^{\mu} b^{\nu} = a_{\nu} b^{\nu} = (a \cdot b) = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3,$$

es posible separar a la métrica en su parte paralela y perpendicular

$$g^{\mu\nu} = g_{\parallel}^{\mu\nu} + g_{\perp}^{\mu\nu}, \quad (\text{A.6})$$

con

$$g_{\parallel}^{\mu\nu} = \text{diag}(1, 0, 0, -1), \quad (\text{A.7})$$

$$g_{\perp}^{\mu\nu} = \text{diag}(0, -1, -1, 0). \quad (\text{A.8})$$

Tomando en cuenta el tensor electromagnético dado por (4.11) y las definiciones anteriores, se puede mostrar que se cumplen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} p_{\parallel}^{\mu} &= 0, \\ F_{\mu\nu} p^{\mu} &= F_{\mu\nu} p_{\perp}^{\mu}, \\ F_{\alpha\mu} F^{\alpha}_{\nu} &= B^2 g_{\mu\nu}^{\perp}, \\ F_{\mu\nu} \text{Tensor simétrico}^{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Ahora, existen otras relaciones que serán de gran utilidad al manipular el propagador fermiónico con campo magnético (4.3). La parte espinorial de la expresión mencionada está dada por

$$(m + \not{p}_{\parallel}) e^{-iqBs\Sigma_3} + \tilde{\not{p}}_{\perp}. \quad (\text{A.10})$$

donde se ha usado la notación

$$\tilde{\not{p}} \equiv \frac{\not{p}}{\cos(qBs)}. \quad (\text{A.11})$$

La matriz Σ_3 definida por (4.6) se puede reescribir de la siguiente forma

$$\Sigma_3 = -\frac{i}{2} \hat{F}_{\mu\nu} \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} = -\frac{\hat{F}_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}}{2}, \quad (\text{A.12})$$

donde

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]. \quad (\text{A.13})$$

De forma que, se puede escribir el factor exponencial en la expresión (A.10) como

$$-iqBs\Sigma_3 = is \frac{qF_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}}{2}. \quad (\text{A.14})$$

De aquí se puede ver que este factor acopla¹ entre el espín de los fermiones y el campo magnético externo. Es posible reescribir este término exponencial de la siguiente forma [92]

¹Cuantifica la interacción.

$$e^{(s_j)} \equiv e^{-iqBs_j\Sigma_3} = \mathbf{I} \cos(qBs_j) - i\Sigma_3 \sin(qBs_j), \quad (\text{A.15})$$

donde se ha introducido notación para compactificar los resultados posteriores. Nótese que ambos términos cuentan con un número par² de matrices γ , esto será de mucho utilidad al calcular las trazas espinoriales en la siguiente sección. Además, debido a que sólo contiene a las matrices γ^1 y γ^2 , se puede mostrar que conmuta con los momentos paralelos, es decir

$$\not{p}_{\parallel} e^{(s_j)} = e^{(s_j)} \not{p}_{\parallel}. \quad (\text{A.16})$$

Haciendo uso de identidades trigonométricas simples se llega a que

$$e^{(s_i)} e^{(s_j)} = e^{(s_i+s_j)}. \quad (\text{A.17})$$

Las identidades presentadas en esta sección serán de gran utilidad para el cálculo explícito de la traza sobre espines cuando se considera un campo magnético externo, este análisis se presenta en la siguiente sección.

A.3. Y ahora, ¿qué se hace con el campo magnético?

Al escribir de forma explícita los propagadores fermiónicos en la traza sobre espines de la expresión (4.20), se obtiene

²Se está llamando par al 0 pero esto es sólo por conveniencia.

$$\begin{aligned}
& Tr \left[\gamma^\mu S_f^{qB}(a) \gamma^\nu S_f^{qB}(b) S_f^{qB}(c) \right] \\
&= \int_0^\infty \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{\cos(qBs_1) \cos(qBs_2) \cos(qBs_3)} e^{-is_1 \left(m^2 - a_\parallel^2 - a_\perp^2 \frac{\tan(qBs_1)}{qBs_1} \right)} \\
&\quad \times e^{-is_2 \left(m^2 - b_\parallel^2 - b_\perp^2 \frac{\tan(qBs_2)}{qBs_2} \right)} e^{-is_3 \left(m^2 - c_\parallel^2 - c_\perp^2 \frac{\tan(qBs_3)}{qBs_3} \right)} \\
&\quad \times Tr \left[\gamma^\mu \left((m + \not{a}_\parallel) e^{(s_1)} + \tilde{\not{a}}_\perp \right) \gamma^\nu \left((m + \not{b}_\parallel) e^{(s_2)} + \tilde{\not{b}}_\perp \right) \right. \\
&\quad \quad \quad \left. \times \left((m + \not{c}_\parallel) e^{(s_3)} + \tilde{\not{c}}_\perp \right) \right], \tag{A.18}
\end{aligned}$$

donde se han omitido los subíndices f y las variables \tilde{p} están referidas a su tiempo propio correspondiente³. De tal forma que, la traza correspondiente está dada por

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu} = Tr \left[\gamma^\mu \left((m + \not{a}_\parallel) e^{(s_1)} + \tilde{\not{a}}_\perp \right) \gamma^\nu \left((m + \not{b}_\parallel) e^{(s_2)} + \tilde{\not{b}}_\perp \right) \right. \\
\quad \left. \times \left((m + \not{c}_\parallel) e^{(s_3)} + \tilde{\not{c}}_\perp \right) \right]. \tag{A.19}
\end{aligned}$$

Desarrollando la expresión anterior, se encuentra que consta de 125 términos diferentes a los cuales se les debe de tomar la traza. Haciendo uso de las identidades de la sección anterior y analizando el número de matrices γ de cada término, la traza se puede escribir como

$${}^3\tilde{a}_\perp = \frac{a_\perp}{\cos(qBs_1)}, \tilde{b}_\perp = \frac{b_\perp}{\cos(qBs_2)} \text{ y } \tilde{c}_\perp = \frac{c_\perp}{\cos(qBs_3)}.$$

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu} = \text{Tr} \left[& m^3 \gamma^\mu e^{(s_1)} \gamma^\nu e^{(s_2+s_3)} + m \gamma^\mu e^{(s_1)} \gamma^\nu \not{b}_\parallel \not{c}_\parallel e^{(s_2+s_3)} \right. \\
& + m \gamma^\mu e^{(s_1)} \gamma^\nu \not{b}_\perp \not{c}_\parallel e^{(s_3)} + m \gamma^\mu e^{(s_1)} \gamma^\nu e^{(s_2)} \not{b}_\parallel \not{c}_\perp \\
& + m \gamma^\mu e^{(s_1)} \gamma^\nu \not{b}_\perp \not{c}_\perp + m \gamma^\mu \not{d}_\parallel e^{(s_1)} \gamma^\nu e^{(s_2+s_3)} \not{b}_\parallel \\
& + m \gamma^\mu \not{d}_\parallel e^{(s_1)} \gamma^\nu \not{b}_\perp e^{(s_3)} + m \gamma^\mu \not{d}_\parallel e^{(s_1)} \gamma^\nu e^{(s_2+s_3)} \not{c}_\parallel \\
& + m \gamma^\mu \not{d}_\parallel e^{(s_1)} \gamma^\nu e^{(s_2)} \not{c}_\perp + m \gamma^\mu \not{d}_\perp \gamma^\nu \not{b}_\parallel e^{(s_2+s_3)} \\
& + m \gamma^\mu \not{d}_\perp \gamma^\nu \not{b}_\perp e^{(s_3)} + m \gamma^\mu \not{d}_\perp \gamma^\nu \not{c}_\parallel e^{(s_2+s_3)} \\
& \left. + m \gamma^\mu \not{d}_\perp \gamma^\nu e^{(s_2)} \not{c}_\perp \right]. \tag{A.20}
\end{aligned}$$

La descomposición anterior es de gran utilidad debido a que cada uno de los 13 términos⁴ cuenta con una estructura de momentos diferente y, por ello, corresponden a integrales Gaussianas distintas. Por ejemplo, el tercer término se reescribe como

$$T_{(3)}^{\mu\nu} = m \tilde{b}_{\perp\alpha} c_{\parallel\beta} \text{Tr} [\gamma^\mu e^{(s_1)} \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta e^{(s_3)}]. \tag{A.21}$$

De este modo, las integrales Gaussianas a realizar se identifican de forma inmediata. La forma explícita de la traza se obtiene al sustituir la expresión (A.15) para las exponenciales y escribir a Σ_3 en términos del tensor electromagnético⁵ (A.12). Por ejemplo, el primer término⁶ da como resultado

⁴Cada uno de estos 13 términos se expande al sustituir explícitamente $e^{(s_i)}$.

⁵Este punto es importante ya que si se usa la definición explícita, dada por (4.6), la forma de la traza ya no es covariante. Es decir, aparecen explícitamente los índices de Lorentz 1 y 2.

⁶Este es el término más simple debido a que no tiene momentos.

$$\begin{aligned}
T_{(1)}^{\mu\nu} &= m^3 \text{Tr} [\gamma^\mu e^{(s_1)} \gamma^\nu e^{(s_2+s_3)}] \\
&= m^3 \cos(s_1) \cos(s_2 + s_3) \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] \\
&\quad - \frac{m^3}{2} \cos(s_1) \sin(s_2 + s_3) \hat{F}_{\alpha\beta} \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta] \\
&\quad - \frac{m^3}{2} \sin(s_1) \cos(s_2 + s_3) \hat{F}_{\alpha\beta} \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu] \\
&\quad + \frac{m^3}{4} \sin(s_1) \sin(s_2 + s_3) \hat{F}_{\alpha\beta} \hat{F}_{\delta\sigma} \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^\delta \gamma^\sigma] \\
&= 4m^3 \left[\cos(s) g_{\parallel}^{\mu\nu} + \cos(s_1 - s_2 - s_3) g_{\perp}^{\mu\nu} - \sin(s_1 - s_2 - s_3) \hat{F}^{\mu\nu} \right],
\end{aligned} \tag{A.22}$$

donde se está usando la notación $f(s_j) \equiv f(qBs_j)$ y $s = s_1 + s_2 + s_3$. Para poder obtener el resultado de la traza completa se tienen que sumar cada uno de los términos y simplificar, a pesar de esto el resultado final para toda la traza es muy extenso pues contiene más de 1000 términos. De ahí la importancia de las estructuras tensoriales que nos permiten extraer las contribuciones principales como se discute en el Apéndice C.2, entonces es de mayor utilidad desarrollar un procedimiento para poder identificar estos términos en la expresión final de la traza como se muestra en la Sección 4.3.1.

Apéndice B

Conjugación de carga

En el presente apéndice se discute alrededor de la operación de conjugación de carga que se menciona a lo largo de este trabajo. Además de que se muestran ciertas propiedades que son de gran utilidad.

B.1. Conjugación de carga para un campo fermiónico

En teoría cuántica de campos, cuando se trabaja con un campo complejo existe una posible simetría discreta. Esta es una simetría interna ya que transforma directamente las propiedades de los campos y no las propiedades espacio-temporales como la hacen la paridad y la inversión temporal.

A esta transformación se le conoce como conjugación de carga, \mathcal{C} , y consiste en intercambiar las partículas con sus antipartículas correspondientes sin modificar su momento y su espín.

En el formalismo de la teoría cuántica de campos, esta transformación se implementa mediante un operador lineal y unitario \hat{C} . Esencialmente intercambia a los operadores de creación y aniquilación para las partículas y antipartículas. Por ejemplo, si se trabaja con un campo escalar complejo, esto se vería reflejado al hacer el intercambio

$$\hat{\Phi}(x) \longleftrightarrow \hat{\Phi}^*(x).$$

Y en el caso de un campo fermiónico como con el que se está trabajando, el intercambio sería

$$\hat{\psi}(x) \longleftrightarrow \hat{\psi}(x)^T,$$

donde el superíndice T indica el espinor transpuesto.

Se tiene que proceder de forma cuidadosa debido a que los espinores $\hat{\psi}$ y $\hat{\psi}^T$ transforman de forma diferente ante el grupo de Lorentz.

Para garantizar que estos espinores transformen bajo Lorentz de la misma forma, es necesario encontrar una matriz C de 4×4 tal que los generadores de la representación espinorial¹ transformen de acuerdo con

$$CS^{\mu\nu}C^{-1} = -(S^{\mu\nu})^T, \quad (\text{B.1})$$

donde los generadores están dados por

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (\text{B.2})$$

La relación (B.1) se traduce en que

$$C[\gamma^\mu, \gamma^\nu]C^{-1} = [(\gamma^\mu)^T, (\gamma^\nu)^T], \quad (\text{B.3})$$

la cual se satisface si

$$C\gamma^\mu C^{-1} = \pm(\gamma^\mu)^T. \quad (\text{B.4})$$

¹Es la representación unitaria e irreducible del grupo de Poincaré para partículas con espín $\frac{1}{2}$.

B.1. CONJUGACIÓN DE CARGA PARA UN CAMPO FERMIÓNICO 117

La regla de transformación ante la conjugación de carga establece que

$$\hat{\psi} \xrightarrow{c} C\hat{\psi}^T \equiv \hat{\psi}^c, \quad (\text{B.5})$$

donde el superíndice c denota el espinor conjugado de carga. De esta forma se sigue que

$$C\hat{\psi}^c \xrightarrow{c} C\overline{(C\hat{\psi}^T)}^T = C\left(\hat{\psi}^T\gamma^0C^\dagger\gamma^0\right)^T = \pm\gamma^0CC^*\gamma^0\hat{\psi}, \quad (\text{B.6})$$

donde el signo \pm proviene de conmutar γ^0 con C y no conocer la forma explícita de ésta última. Al aplicar la operación de conjugación de carga dos veces el resultado debe de ser el inicial, es decir

$$\left(\hat{\psi}^c\right)^c = \hat{\psi}, \quad (\text{B.7})$$

porque el operador de conjugación de carga cumple con $\hat{C}^2 = 1$. Entonces de (B.6) y (B.7) es posible deducir la siguiente condición para la matriz C

$$CC^* = \pm\mathbf{I}. \quad (\text{B.8})$$

Partiendo de esta ecuación es sencillo mostrar que la forma explícita de C es [93]

$$C = i\gamma^2\gamma^0, \quad (\text{B.9})$$

y tiene las siguientes propiedades

$$C = C^* = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^T. \quad (\text{B.10})$$

Esta definición para la matriz C fija las dos condiciones que no se definieron univocamente (B.4) y (B.8) a

$$C\gamma^\mu C^{-1} = -(\gamma^\mu)^T, \quad (\text{B.11})$$

$$CC^* = -\mathbf{I}. \quad (\text{B.12})$$

Con el análisis anterior se ha mostrado la forma en que transforma un campo fermiónico ante la conjugación de carga

$$\hat{\mathcal{C}}\hat{\psi}(x)\hat{\mathcal{C}}^{-1} = \hat{\psi}^c(x) = C\hat{\psi}^T(x). \quad (\text{B.13})$$

Vale la pena aclarar que la transformación de conjugación de carga, al cambiar partículas y antipartículas, conjuga todas las cargas asociadas a estas. Es decir, transforma la carga eléctrica, la carga de color, etc. Este análisis sólo se ha enfocado en la carga eléctrica debido a que es el parámetro relevante para este caso.

B.2. Propagador fermiónico en el vacío

Para poder simplificar las trazas espinoriales será de gran utilidad ver como se transforma el propagador fermiónico con las matriz C de que implementa la conjugación de carga. En particular, la siguiente conjugación

$$\begin{aligned} CS_F(p)C^{-1} &= C \left(\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right) C^{-1} \\ &= \frac{i(C\not{p}C^{-1} + mCC^{-1})}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{i(-\not{p}^T + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = S_F(-p)^T. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Esta propiedad es muy interesante y es de gran ayuda a la hora de calcular las trazas como se muestra a continuación.

La matriz de conjugación de carga C es de gran utilidad para obtener ciertas identidades sobre las trazas de matrices γ . Por ejemplo, si se tiene la traza de n matrices² γ , es posible insertar una matriz identidad junto a cada matriz que junto con la propiedad (B.11) dan el resultado siguiente

$$\begin{aligned}
Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \dots \gamma^\sigma] &= Tr[C^{-1} C \gamma^\mu C^{-1} C \gamma^\nu C^{-1} C \dots C^{-1} C \gamma^\sigma] \\
&= Tr[C \gamma^\mu C^{-1} C \gamma^\nu C^{-1} C \dots C^{-1} C \gamma^\sigma C^{-1}] \\
&= Tr[(-\gamma^\mu)^T (-\gamma^\nu)^T \dots (-\gamma^\sigma)^T] \\
&= (-1)^n Tr[(\gamma^\sigma \dots \gamma^\nu \gamma^\mu)^T] \\
&= Tr[\gamma^\sigma \dots \gamma^\nu \gamma^\mu]
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Este es un procedimiento estándar para simplificar los resultados de trazas espinoriales [68] y es de gran utilidad en este caso.

Considérese la traza espinorial de la ecuación (3.14), entonces es posible seguir el procedimiento que se muestra en (B.15) al “introducir” de forma conveniente matrices identidad

$$\begin{aligned}
Tr[\gamma^\mu S_F(a) \gamma^\nu S_F(b) S_F(c)] &= Tr[C^{-1} C \gamma^\mu C^{-1} C S_F(a) C^{-1} C \gamma^\nu C^{-1} C S_F(b) C^{-1} C S_F(c)] \\
&= Tr[C \gamma^\mu C^{-1} C S_F(a) C^{-1} C \gamma^\nu C^{-1} C S_F(b) C^{-1} C S_F(c) C^{-1}] \\
&= Tr[(-\gamma^\mu)^T S_F(-a)^T (-\gamma^\nu)^T S_F(-b)^T S_F(-c)^T] \\
&= Tr[(S_F(-c) S_F(-b) \gamma^\nu S_F(-a) \gamma^\mu)^T] \\
&= Tr[S_F(-c) S_F(-b) \gamma^\nu S_F(-a) \gamma^\mu] \\
&= Tr[\gamma^\nu S_F(-a) \gamma^\mu S_F(-c) S_F(-b)].
\end{aligned}$$

El resultado anterior se ha obtenido haciendo uso de las propiedades habituales de la traza junto con las identidades (B.11) y (B.14). Esto ha permitido mostrar la igualdad

$$Tr[\gamma^\mu S_F(a) \gamma^\nu S_F(b) S_F(c)] = Tr[\gamma^\nu S_F(-a) \gamma^\mu S_F(-c) S_F(-b)], \tag{B.16}$$

² n debe de ser par para que la traza no sea nula.

de donde se reconoce el miembro derecho de la ecuación anterior como la traza espinorial en la ecuación (3.22), es decir, la traza del diagrama conjugado de carga. Por tanto, las trazas sobre espines de ambos diagramas son idénticas.

B.3. Propagador fermiónico en presencia de un campo magnético externo

Para llevar a cabo el mismo análisis de la sección anterior al caso donde se tiene la presencia de un campo magnético externo, es necesario ver como se transforma el propagador fermiónico con campo magnético dado por (4.3)

$$S^{qB}(p) = \int_0^\infty \frac{ds}{\cos(qBs)} \exp \left[-is \left(m^2 - p_\parallel^2 - p_\perp^2 \frac{\tan(qBs)}{qBs} \right) \right] \times \left[(m + \not{p}_\parallel) e^{-iqBs\Sigma_3} + \frac{\not{p}_\perp}{\cos(qBs)} \right], \quad (\text{B.17})$$

ante la conjugación por la matriz C , es decir, encontrar el análogo a la expresión (B.14).

El propagador fermiónico con campo magnético (B.17) está compuesto por una parte escalar y una parte espinorial. La conjugación por la matriz C sólo afectará a la parte espinorial, entonces se considera solamente

$$CS^{qB}(p)C^{-1} \propto C \left[(m + \not{p}_\parallel) e^{-iqBs\Sigma_3} + \frac{\not{p}_\perp}{\cos(qBs)} \right] C^{-1}.$$

En este caso surge la necesidad de trabajar con la matriz Σ_3 , para ello es útil usar la relación (A.15)

$$e^{-iqBs\Sigma_3} = \mathbf{I} \cos(qBs) - i\Sigma_3 \sin(qBs). \quad (\text{B.18})$$

Además, al escribir las definiciones explícitas para Σ_3 y C , (4.6) y (B.9), se puede mostrar fácilmente que estas anticonmutan

$$\{C, \Sigma_3\} = 0, \quad (\text{B.19})$$

así como con los momentos paralelos

$$\not{p}_{\parallel} \Sigma_3 = \Sigma_3 \not{p}_{\parallel}, \quad (\text{B.20})$$

y que

$$\Sigma_3^T = \Sigma_3. \quad (\text{B.21})$$

Con las propiedades anteriores se puede llevar a cabo el análisis de la transformación de la parte espinorial del propagador fermiónico con campo magnético

$$\begin{aligned} & C \left[(m + \not{p}_{\parallel}) e^{-iqBs\Sigma_3} + \frac{\not{p}_{\perp}}{\cos(qBs)} \right] C^{-1} \\ &= \cos(qBs) C (m + \not{p}_{\parallel}) C^{-1} - i \sin(qBs) C (m + \not{p}_{\parallel}) \Sigma_3 C^{-1} + \frac{C \not{p}_{\perp} C^{-1}}{\cos(qBs)} \\ &= \cos(qBs) (m - \not{p}_{\parallel})^T + i \sin(qBs) [\Sigma_3 (m - \not{p}_{\parallel})]^T + \frac{-\not{p}_{\perp}^T}{\cos(qBs)} \\ &= \left[\cos(qBs) (m - \not{p}_{\parallel}) + i \sin(qBs) (m - \not{p}_{\parallel}) \Sigma_3 + \frac{-\not{p}_{\perp}}{\cos(qBs)} \right]^T \\ &= \left[\cos(-qBs) (m - \not{p}_{\parallel}) - i \sin(-qBs) (m - \not{p}_{\parallel}) \Sigma_3 + \frac{-\not{p}_{\perp}}{\cos(-qBs)} \right]^T, \end{aligned}$$

donde la última línea se ha usado que el coseno y el seno son funciones par e impar respectivamente. De tal forma se tiene que

$$C \left[(m + \not{p}_{\parallel}) e^{-iqBs\Sigma_3} + \frac{\not{p}_{\perp}}{\cos(qBs)} \right] C^{-1} = \left[(m - \not{p}_{\parallel}) e^{iqBs\Sigma_3} + \frac{-\not{p}_{\perp}}{\cos(-qBs)} \right]^T. \quad (\text{B.22})$$

De esta manera, el propagador fermiónico en presencia de campo magnético transforma de la siguiente forma ante la conjugación por la matriz C

$$\begin{aligned}
CS^{qB}(p)C^{-1} &= \int_0^\infty \frac{ds}{\cos(qBs)} \exp \left[-is \left(m^2 - p_\parallel^2 - p_\perp^2 \frac{\tan(qBs)}{qBs} \right) \right] \\
&\quad \times \left[(m - \not{p}_\parallel) e^{iqBs\Sigma_3} + \frac{-\not{p}_\perp}{\cos(-qBs)} \right]^T \\
&= \int_0^\infty \frac{ds}{\cos(-qBs)} \exp \left[-is \left(m^2 - (-p_\parallel)^2 - (-p_\perp)^2 \frac{\tan(-qBs)}{-qBs} \right) \right] \\
&\quad \times \left[(m - \not{p}_\parallel) e^{-i(-qB)s\Sigma_3} + \frac{-\not{p}_\perp}{\cos(-qBs)} \right]^T,
\end{aligned} \tag{B.23}$$

donde nuevamente se han usado la paridad de las funciones trigonométricas. De forma más compacta el resultado que se tiene es el siguiente

$$CS^{qB}(p)C^{-1} = S^{-qB}(-p)^T. \tag{B.24}$$

Llevando a cabo el mismo proceso que se realizó en la sección anterior, es posible mostrar de forma simple que las trazas sobre espín de los diagramas A y B que aparecen en las expresiones (4.20) y (4.21) son equivalentes

$$Tr \left[\gamma^\mu S_f^{qB}(a) \gamma^\nu S_f^{qB}(b) S_f^{qB}(c) \right] = Tr \left[\gamma^\nu S_f^{-qB}(-a) \gamma^\mu S_f^{-qB}(-c) S_f^{-qB}(-b) \right]. \tag{B.25}$$

B.4. Teorema de Furry

En esta sección se discute un resultado relevante para el cálculo que se está llevando a cabo debido a la inclusión de un campo magnético externo³.

³Este campo magnético no se considera cuántico pero, en las aproximaciones que se tomarán más adelante, se puede interpretar como inserciones de fotones en los diagramas.

A partir de la manera en que se transforma el propagador fermiónico en el espacio de momentos (B.14), es posible mostrar que el propagador en el espacio de configuraciones cumple que

$$CS(x, y)C^{-1} = S(y, x)^T. \quad (\text{B.26})$$

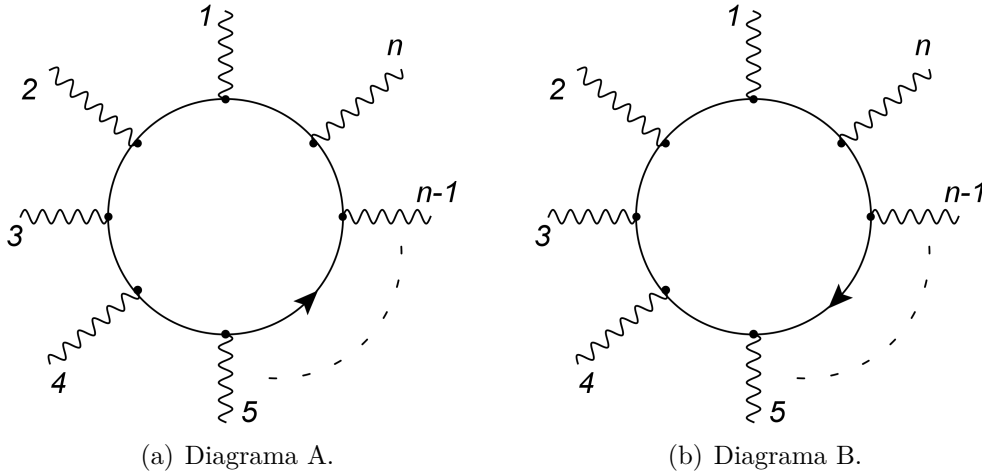


Figura B.1: Diagramas de Feynman conjugados de carga con n patas de fotones.

En la Figura B.1 se tienen dos diagrama de Feynman con n inserciones de fotones, éstos son diagramas conjugados de carga debido a que la carga fluye en sentido contrario.

A partir del vértice de interacción entre fermiones cargados y fotones, es posible escribir la amplitud para cada uno de estos diagramas. Para el diagrama A se tiene que⁴

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{(A)} \propto & (-iq\gamma_{ab}^{\mu_1})S_{bc}(x_1, x_n)(-iq\gamma_{cd}^{\mu_n})S_{de}(x_n, x_{n-1})\dots \\ & \times \dots(-iq\gamma_{op}^{\mu_3})S_{pq}(x_3, x_2)(-iq\gamma_{qr}^{\mu_2})S_{ra}(x_2, x_1), \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

donde q es la carga eléctrica del fermión y los subíndices i, j representan las índices espinoriales de las matrices. Como el diagrama tiene un lazo de fer-

⁴Se denota la ubicación de los vértices como x_i .

miones, el primer índice está contraído con el último, esto indica que se tiene que tomar la traza sobre espín. Por tanto, la amplitud para el diagrama A se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{(A)} \propto & Tr[(-iq\gamma^{\mu_1})S(x_1, x_n)(-iq\gamma^{\mu_n})S(x_n, x_{n-1})\dots \\ & \times \dots(-iq\gamma^{\mu_3})S(x_3, x_2)(-iq\gamma^{\mu_2})S(x_2, x_1)]. \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

De forma análoga, se llega a la siguiente expresión para el diagrama B

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{(B)} \propto & Tr[(-iq\gamma^{\mu_1})S(x_1, x_2)(-iq\gamma^{\mu_2})S(x_2, x_3)\dots \\ & \times \dots(-iq\gamma^{\mu_{n-1}})S(x_{n-1}, x_n)(-iq\gamma^{\mu_n})S(x_n, x_1)]. \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Siguiendo el procedimiento que se desarrolla en las dos secciones previas, es posible manipular la expresión para el diagrama B de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{(B)} \propto & Tr[C(-iq\gamma^{\mu_1})C^{-1}CS(x_1, x_2)C^{-1}C(-iq\gamma^{\mu_2})C^{-1}CS(x_2, x_3)C^{-1}\dots \\ & \times \dots C^{-1}C(-iq\gamma^{\mu_{n-1}})C^{-1}CS(x_{n-1}, x_n)C^{-1}C(-iq\gamma^{\mu_n})C^{-1} \\ & \times CS(x_n, x_1)C^{-1}] \\ \propto & (-1)^n Tr[(-iq\gamma^{\mu_1})^T S(x_2, x_1)^T (-iq\gamma^{\mu_2})^T S(x_3, x_2)^T \dots \\ & \times \dots (-iq\gamma^{\mu_{n-1}})^T S(x_n, x_{n-1})^T (-iq\gamma^{\mu_n})^T S(x_1, x_n)^T] \\ \propto & (-1)^n Tr\left[\left(S(x_1, x_n)(-iq\gamma^{\mu_n})S(x_n, x_{n-1})(-iq\gamma^{\mu_{n-1}})\dots \right. \right. \\ & \left. \left. \times \dots S(x_3, x_2)(-iq\gamma^{\mu_2})S(x_2, x_1)(-iq\gamma^{\mu_1}) \right)^T \right] \\ \propto & (-1)^n Tr[S(x_1, x_n)(-iq\gamma^{\mu_n})S(x_n, x_{n-1})(-iq\gamma^{\mu_{n-1}})\dots \\ & \times \dots S(x_3, x_2)(-iq\gamma^{\mu_2})S(x_2, x_1)(-iq\gamma^{\mu_1})] \\ \propto & (-1)^n Tr[(-iq\gamma^{\mu_1})S(x_1, x_n)(-iq\gamma^{\mu_n})S(x_n, x_{n-1})(-iq\gamma^{\mu_{n-1}})\dots \\ & \times \dots S(x_3, x_2)(-iq\gamma^{\mu_2})S(x_2, x_1)]. \end{aligned}$$

De tal forma que se tiene

$$\mathcal{M}_{(B)} = (-1)^n \mathcal{M}_{(A)}. \quad (\text{B.30})$$

Por tanto, al sumar las amplitudes de ambos diagramas se obtiene lo siguiente

$$\mathcal{M}_{(A+B)} = \mathcal{M}_{(A)} + (-1)^n \mathcal{M}_{(A)} = \begin{cases} 2\mathcal{M}_{(A)} & \text{si } n \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \quad (\text{B.31})$$

Nótese que si el número n de patas de fotones es par, los diagramas tienen la misma contribución. Mientras que si es impar, las contribuciones son contrarias y se anulan.

Una explicación razonable para esta última implicación es la siguiente: en un lazo cerrado de fermiones puede circular tanto la partícula como su antipartícula y, debido a que estas interactúan con el campo electromagnético con cargas opuestas, la contribución neta para un número impar de fotones es cero porque se cancelan entre sí. A este resultado se le conoce como teorema de Furry.

Teorema de Furry [94]: Todos los diagramas que contengan un lazo “pu-ro” de fermiones y un número impar de vértices de interacción con fotones pueden ser omitidos en el cálculo de amplitudes, correladores, funciones de Green, etc.

El teorema de Furry se sigue de la invariancia del Lagrangiano bajo la conjugación de carga

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(x) &\longrightarrow \hat{\mathcal{C}}\hat{\psi}(x)\hat{\mathcal{C}}^{-1} = \hat{\psi}^c(x), \\ \hat{A}^\mu(x) &\longrightarrow \hat{\mathcal{C}}\hat{A}^\mu(x)\hat{\mathcal{C}}^{-1} = -\hat{A}^\mu(x). \end{aligned}$$

Este resultado es análogo a que, en la teoría ϕ^4 , los correladores con un número impar de patas del campo ϕ son nulos debido a que el Lagrangiano es invariante bajo la transformación discreta $\phi \longrightarrow -\phi$ [69].

En el presente trabajo se tienen fotones⁵ y gluones. Debido a que el vértice de interacción entre los quarks y los gluones contiene una matriz γ^6 , el teorema de Furry puede ser generalizado para incluir inserciones tanto de fotones como de gluones.

⁵Debido al campo magnético externo.

⁶La forma de ambos vértices es la misma, salvo la inclusión de las matrices de Gell-Mann en el caso de gluones pero éstas (al tener índices de color) corresponden a un espacio distinto.

Apéndice C

Estructura tensorial del vértice efectivo

En el presente apéndice se analiza la estructura tensorial del vértice efectivo. Para el caso del vacío se profundiza en el método de proyectores mientras que para el caso de un campo magnético externo se lleva a cabo el análisis completo de la estructura tensorial del vértice efectivo.

C.1. Método de proyectores

En la expresión (3.24) se muestra la forma general de la estructura tensorial del vértice efectivo

$$\Gamma^{\mu\nu}(p_1, p_2) = Ag^{\mu\nu} + Bp_1^\mu p_2^\nu + Cp_1^\nu p_2^\mu + Dp_1^\mu p_1^\nu + Ep_2^\mu p_2^\nu. \quad (\text{C.1})$$

Al contraer cada una de las estructuras tensoriales que aparecen en (C.1) con el vértice efectivo¹ se obtienen las siguientes ecuaciones

¹En una dimensión arbitraria d .

$$g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}(p_1, p_2) = dA + (p_1 \cdot p_2)(B + C), \quad (\text{C.2})$$

$$p_1^\mu p_2^\nu \Gamma_{\mu\nu}(p_1, p_2) = A(p_1 \cdot p_2) + C(p_1 \cdot p_2)^2, \quad (\text{C.3})$$

$$p_1^\nu p_2^\mu \Gamma_{\mu\nu}(p_1, p_2) = A(p_1 \cdot p_2) + B(p_1 \cdot p_2)^2, \quad (\text{C.4})$$

$$p_1^\mu p_1^\nu \Gamma_{\mu\nu}(p_1, p_2) = E(p_1 \cdot p_2)^2, \quad (\text{C.5})$$

$$p_2^\mu p_2^\nu \Gamma_{\mu\nu}(p_1, p_2) = D(p_1 \cdot p_2)^2, \quad (\text{C.6})$$

donde se han considerado a los gluones en capa de masa $p_1^2 = p_2^2 = 0$. El sistema de ecuaciones resultante (C.2)-(C.4) se puede resolver fácilmente y se obtienen las siguientes expresiones para los coeficientes

$$A = \frac{(p_1 \cdot p_2)g^{\mu\nu} - p_1^\mu p_2^\nu - p_2^\mu p_1^\nu}{(d-2)(p_1 \cdot p_2)} \Gamma_{\mu\nu}(p_1, p_2), \quad (\text{C.7})$$

$$B = -\frac{(p_1 \cdot p_2)g^{\mu\nu} - p_1^\mu p_2^\nu - (d-1)p_2^\mu p_1^\nu}{(d-2)(p_1 \cdot p_2)^2} \Gamma_{\mu\nu}(p_1, p_2), \quad (\text{C.8})$$

$$C = -\frac{(p_1 \cdot p_2)g^{\mu\nu} - (d-1)p_1^\mu p_2^\nu - p_2^\mu p_1^\nu}{(d-2)(p_1 \cdot p_2)^2} \Gamma_{\mu\nu}(p_1, p_2). \quad (\text{C.9})$$

Nótese que no se pudieron obtener expresiones para los coeficientes D y E debido a que se está trabajando con gluones reales, esto hace que las ecuaciones de desacoplen entre sí.

Una forma de interpretar las expresiones (C.7)-(C.9) es que se pueden obtener los coeficientes al “proyectar” al vértice efectivo sobre ciertos subespacios linealmente independientes, las estructuras tensoriales que aparecen en estas ecuaciones son los proyectores asociados a cada coeficiente/estructura tensorial del vértice efectivo.

C.2. Estructura tensorial del vértice efectivo en presencia de un campo magnético externo

Al igual que en el caso del vacío, se llevará a cabo un análisis de las estructuras tensoriales que constituyen el vértice efectivo en presencia de campo

magnético.

La estructura del vértice efectivo ahora es mucho más diversa a comparación con el caso del vacío. Anteriormente se contaba solamente con dos cuadvectores y una estructura tensorial linealmente independientes p_1^μ, p_2^μ y $g^{\mu\nu}$, pero en presencia de un campo electromagnético se cuenta con cuatro estructuras tensoriales linealmente independientes [95]

$$g^{\mu\nu}, F^{\mu\nu}, F^\mu{}_\alpha F^{\alpha\nu} \text{ y } F^\mu{}_\alpha F^\alpha{}_\beta F^{\beta\nu},$$

donde $F^{\mu\nu}$ está asociado a un campo electromagnético arbitrario. Si la configuración es tal sólo exista campo eléctrico ó campo magnético, se tiene que

$$F^\mu{}_\alpha F^\alpha{}_\beta F^{\beta\nu} = -2\mathcal{F}F^{\mu\nu}, \quad (\text{C.10})$$

donde \mathcal{F} está dada por

$$\mathcal{F} \equiv \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (\text{C.11})$$

Por tanto, el número estructuras tensoriales linealmente independientes se ve reducido a tres. Este análisis de las estructuras tensoriales también se puede llevar a cabo en términos del tensor electromagnético dual

$$F_{\mu\nu}^* \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\gamma\delta} F^{\gamma\delta}, \quad (\text{C.12})$$

y es equivalente [96].

Debido a la presencia de estas dos nuevas estructuras tensoriales, el número de cuadvectores linealmente independientes que se tienen a disposición aumenta a seis [95,97]

$$p_j^\mu, F^\mu p_j \text{ y } F^{2\mu} p_j,$$

con $j = 1, 2$ y donde se ha implementado la notación

$$\begin{aligned} F^\mu p &\equiv F^{\mu\nu} p_\nu, \\ F^{2\mu} p &\equiv F^\mu{}_\alpha F^{\alpha\nu} p_\nu. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

A partir de estos seis cuadvectores linealmente independientes es posible generar 36 estructuras tensoriales diferentes

$$\left(\begin{array}{cccccc} p_1^\mu p_1^\nu & p_1^\nu p_2^\mu & p_1^\nu F^\mu p_1 & p_1^\nu F^\mu p_2 & p_1^\nu F^{2\mu} p_1 & p_1^\nu F^{2\mu} p_2 \\ p_1^\mu p_2^\nu & p_2^\mu p_2^\nu & p_2^\nu F^\mu p_1 & p_2^\nu F^\mu p_2 & p_2^\nu F^{2\mu} p_1 & p_2^\nu F^{2\mu} p_2 \\ p_1^\mu F^\nu p_1 & p_2^\mu F^\nu p_1 & F^\mu p_1 F^\nu p_1 & F^\nu p_1 F^\mu p_2 & F^\nu p_1 F^{2\mu} p_1 & F^\nu p_1 F^{2\mu} p_2 \\ p_1^\mu F^\nu p_2 & p_2^\mu F^\nu p_2 & F^\mu p_1 F^\nu p_2 & F^\mu p_2 F^\nu p_2 & F^\nu p_2 F^{2\mu} p_1 & F^\nu p_2 F^{2\mu} p_2 \\ p_1^\mu F^{2\nu} p_1 & p_2^\mu F^{2\nu} p_1 & F^\mu p_1 F^{2\nu} p_1 & F^\mu p_2 F^{2\nu} p_1 & F^{2\mu} p_1 F^{2\nu} p_1 & F^{2\nu} p_1 F^{2\mu} p_2 \\ p_1^\mu F^{2\nu} p_2 & p_2^\mu F^{2\nu} p_2 & F^\mu p_1 F^{2\nu} p_2 & F^\mu p_2 F^{2\nu} p_2 & F^{2\mu} p_1 F^{2\nu} p_2 & F^{2\mu} p_2 F^{2\nu} p_2 \end{array} \right).$$

Si a esto se suman las tres estructuras tensoriales dadas inicialmente

$$g_{\mu\nu}, F_{\mu\nu} \text{ y } F_{\mu\nu}^2,$$

se tiene un total de 39 estructuras posibles para construir al vértice efectivo. Al comparar esto con la expresión para el caso del vacío (3.24) se puede observar que ahora se tienen 33 estructuras nuevas debido a la presencia del campo magnético.

Los coeficientes asociados a cada una de estas estructuras tensoriales deben de ser invariantes de Lorentz. En este caso, sólo se tienen cinco tipos de escalares independientes²

$$p_1 \cdot p_2, p_2 F p_1, p_i^\mu F_{\mu\nu}^2 p_j^\nu, \mathcal{F} \text{ y } \mathcal{G} \equiv \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^*.$$

Nótese que cuatro de los coeficientes tienen un número par de $F^{\mu\nu}$'s, la excepción es el segundo coeficiente $p_2 F p_1$.

²En el caso donde sólo existe campo eléctrico o campo magnético, como en el presente cálculo, se tiene que $\mathcal{G} = 0$ [95].

A partir del teorema de Furry³, se deduce que la estructura del vértice efectivo no puede tener términos con un número impar $F^{\mu\nu}$'s. Esto se debe a que cada línea externa de fotón está asociada a un tensor electromagnético dentro del lazo y sólo puede haber un número par de estas líneas externas [95, 98]. Entonces los coeficientes asociados y las estructuras tensoriales correspondientes deben de tener en total un número par de $F^{\mu\nu}$'s.

Es posible separar al vértice efectivo basándose en el número de $F^{\mu\nu}$'s de las estructuras tensoriales, la parte par está dada por

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{qB, \text{ par}}^{\mu\nu} = & C_{(1,1)} p_1^\mu p_1^\nu + C_{(1,2)} p_1^\nu p_2^\mu + C_{(1,5)} p_1^\nu \hat{F}^{2\mu} p_1 + C_{(1,6)} p_1^\nu \hat{F}^{2\mu} p_2 \\
 & + C_{(2,1)} p_1^\mu p_2^\nu + C_{(2,2)} p_2^\mu p_2^\nu + C_{(2,5)} p_2^\nu \hat{F}^{2\mu} p_1 + C_{(2,6)} p_2^\nu \hat{F}^{2\mu} p_2 \\
 & + C_{(3,3)} \hat{F}^\mu p_1 \hat{F}^\nu p_1 + C_{(3,4)} \hat{F}^\nu p_1 \hat{F}^\mu p_2 + C_{(4,3)} \hat{F}^\mu p_1 \hat{F}^\nu p_2 \\
 & + C_{(4,4)} \hat{F}^\mu p_2 \hat{F}^\nu p_2 + C_{(5,1)} p_1^\mu \hat{F}^{2\nu} p_1 + C_{(5,2)} p_2^\mu \hat{F}^{2\nu} p_1 \\
 & + C_{(5,5)} \hat{F}^{2\mu} p_1 \hat{F}^{2\nu} p_1 + C_{(5,6)} \hat{F}^{2\nu} p_1 \hat{F}^{2\mu} p_2 + C_{(6,1)} p_1^\mu \hat{F}^{2\nu} p_2 \\
 & + C_{(6,2)} p_2^\mu \hat{F}^{2\nu} p_2 + C_{(6,5)} \hat{F}^{2\mu} p_1 \hat{F}^{2\nu} p_2 + C_{(6,6)} \hat{F}^{2\mu} p_2 \hat{F}^{2\nu} p_2 \\
 & + C_0(p_1 \cdot p_2) g^{\mu\nu} + C_2(p_1 \cdot p_2) \hat{F}^{2\mu\nu},
 \end{aligned} \tag{C.14}$$

mientras que la parte impar está dada por

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{qB, \text{ impar}}^{\mu\nu} = & C_{(1,3)} p_1^\nu \hat{F}^\mu p_1 + C_{(1,4)} p_1^\nu \hat{F}^\mu p_2 + C_{(2,3)} p_2^\nu \hat{F}^\mu p_1 + C_{(2,4)} p_2^\nu \hat{F}^\mu p_2 \\
 & + C_{(3,1)} p_1^\mu \hat{F}^\nu p_1 + C_{(3,2)} p_2^\mu \hat{F}^\nu p_1 + C_{(3,5)} \hat{F}^\nu p_1 \hat{F}^{2\mu} p_1 \\
 & + C_{(3,6)} \hat{F}^\nu p_1 \hat{F}^{2\mu} p_2 + C_{(4,1)} p_1^\mu \hat{F}^\nu p_2 + C_{(4,2)} p_2^\mu \hat{F}^\nu p_2 \\
 & + C_{(4,5)} \hat{F}^\nu p_2 \hat{F}^{2\mu} p_1 + C_{(4,6)} \hat{F}^\nu p_2 \hat{F}^{2\mu} p_2 + C_{(5,3)} \hat{F}^\mu p_1 \hat{F}^{2\nu} p_1 \\
 & + C_{(5,4)} \hat{F}^\mu p_2 \hat{F}^{2\nu} p_1 + C_{(6,3)} \hat{F}^\mu p_1 \hat{F}^{2\nu} p_2 + C_{(6,4)} \hat{F}^\mu p_2 \hat{F}^{2\nu} p_2 \\
 & + C_1(p_1 \cdot p_2) \hat{F}^{\mu\nu},
 \end{aligned} \tag{C.15}$$

donde se ha usado el tensor electromagnético normalizado $\hat{F}^{\mu\nu}$ por conveniencia.

³Ver Apéndice B.4.

Al igual que en el caso del vacío, el vértice efectivo debe de cumplir la condición de simetría ante el intercambio de los gluones (3.30) y las condiciones de transversalidad (3.28) y (3.29). Para aplicar la primera condición se tiene que tener cuidado ya que hay pequeñas sutilezas: los coeficientes de las estructuras impares contienen un número impar de F 's, así que el escalar $p_2 \hat{F} p_1$ aparece un número impar de veces y este cambia de signo al intercambiar p_1 y p_2 . En cambio, los coeficientes de las estructuras pares también pueden contener al escalar $p_2 \hat{F} p_1$ pero en un número par de ocasiones así que no cambian de signo al intercambiar p_1 y p_2 .

Al considerarse lo anterior, los coeficientes pares se relacionan entre sí de la siguiente forma

$$\begin{aligned} C_{(1,1)} &= C_{(2,2)}, & C_{(1,5)} &= C_{(6,2)}, & C_{(2,5)} &= C_{(6,1)}, \\ C_{(3,3)} &= C_{(4,4)}, & C_{(5,1)} &= C_{(2,6)}, & C_{(5,2)} &= C_{(1,6)}, \\ & & C_{(5,5)} &= C_{(6,6)}, & & \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

y a los impares

$$\begin{aligned} C_{(1,3)} &= -C_{(4,2)}, & C_{(2,3)} &= -C_{(4,1)}, \\ C_{(3,1)} &= -C_{(2,4)}, & C_{(3,2)} &= -C_{(1,4)}, \\ C_{(3,5)} &= -C_{(6,4)}, & C_{(4,5)} &= -C_{(6,3)}, \\ C_{(5,3)} &= -C_{(4,6)}, & C_{(5,4)} &= -C_{(3,6)}. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Nótese que todos los coeficientes de la parte impar deben de incluir (al menos una vez) la estructura $p_2 \hat{F} p_1$, así que es conveniente factorizarla y escribir

$$C_{\text{impar}} = (p_2 \hat{F} p_1) \tilde{C}_{\text{impar}}. \quad (\text{C.18})$$

Con estas redefiniciones de los coeficientes, las condiciones de transversalidad dadas por las Ecs. (3.28)-(3.29) imponen que

$$\begin{aligned}
 C_{(6,1)} &= C_{(6,2)} = \tilde{C}_{(6,3)} = \tilde{C}_{(6,4)} = C_{(6,5)} = C_{(6,6)} = 0, \\
 C_{(2,2)} &= \tilde{C}_{(2,4)} \frac{(p_2 \hat{F} p_1)^2}{p_1 \cdot p_2} - C_{(2,6)} \frac{p_2 \hat{F}^2 p_1}{p_1 \cdot p_2}, \\
 \tilde{C}_{(4,2)} &= \frac{C_{(4,4)}}{p_1 \cdot p_2} - \tilde{C}_{(4,6)} \frac{p_2 \hat{F}^2 p_1}{p_1 \cdot p_2}, \\
 C_0 &= \tilde{C}_{(1,4)} \frac{(p_2 \hat{F} p_1)^2}{p_1 \cdot p_2} - C_{(1,6)} \frac{p_2 \hat{F}^2 p_1}{p_1 \cdot p_2} - C_{(1,2)}, \\
 \tilde{C}_1 &= \tilde{C}_{(3,6)} \frac{p_2 \hat{F}^2 p_1}{p_1 \cdot p_2} - \frac{C_{(3,4)}}{p_1 \cdot p_2} - \tilde{C}_{(1,4)}, \\
 C_2 &= -\tilde{C}_{(3,6)} \frac{(p_2 \hat{F} p_1)^2}{p_1 \cdot p_2} - C_{(5,6)} \frac{p_2 \hat{F}^2 p_1}{p_1 \cdot p_2} - C_{(1,6)}.
 \end{aligned} \tag{C.19}$$

Al aplicarse estas constricciones, a la estructura tensorial del vértice efectivo en presencia de un campo magnético externo, se obtiene

$$\begin{aligned}
\Gamma_{aB}^{\mu\nu} = & C_{(1,2)}(p_1 \cdot p_2) \left[g^{\mu\nu} - \frac{p_1^\nu p_2^\mu}{p_1 \cdot p_2} \right] + C_{(2,1)} p_1^\mu p_2^\nu \\
& + C_{(2,6)} \left[p_1^\mu \hat{F}^{2\nu} p_1 + p_2^\nu \hat{F}^{2\mu} p_2 - \left(p_2 \hat{F}^2 p_1 \right) \frac{p_1^\mu p_1^\nu + p_2^\mu p_2^\nu}{p_1 \cdot p_2} \right] \\
& + C_{(4,3)} \hat{F}^\mu p_1 \hat{F}^\nu p_2 + C_{(5,6)} \left[\hat{F}^{2\nu} p_1 \hat{F}^{2\mu} p_2 - \left(p_2 \hat{F}^2 p_1 \right) \hat{F}^{2\mu\nu} \right] \\
& - C_{(1,6)} \left[\left(p_2 \hat{F}^2 p_1 \right) g^{\mu\nu} + (p_1 \cdot p_2) \hat{F}^{2\mu\nu} - p_2^\mu \hat{F}^{2\nu} p_1 - p_1^\nu \hat{F}^{2\mu} p_2 \right] \\
& + \tilde{C}_{(1,4)} \left[g^{\mu\nu} \left(p_2 \hat{F} p_1 \right)^2 \right. \\
& \quad \left. - \left(p_2 \hat{F} p_1 \right) \left((p_1 \cdot p_2) \hat{F}^{\mu\nu} + p_2^\mu \hat{F}^\nu p_1 - p_1^\nu \hat{F}^\mu p_2 \right) \right] \\
& + \tilde{C}_{(2,4)} \left(p_2 \hat{F} p_1 \right) \left[\left(p_2 \hat{F} p_1 \right) \frac{p_1^\mu p_1^\nu + p_2^\mu p_2^\nu}{p_1 \cdot p_2} - p_1^\mu \hat{F}^\nu p_1 + p_2^\nu \hat{F}^\mu p_2 \right] \\
& + C_{(3,4)} \left[\hat{F}^\nu p_1 \hat{F}^\mu p_2 - \left(p_2 \hat{F} p_1 \right) \hat{F}^{\mu\nu} \right] \\
& - \tilde{C}_{(4,1)} \left(p_2 \hat{F} p_1 \right) \left[p_2^\nu \hat{F}^\mu p_1 - p_1^\mu \hat{F}^\nu p_2 \right] \\
& + C_{(4,4)} \left[\hat{F}^\mu p_1 \hat{F}^\nu p_1 + \hat{F}^\mu p_2 \hat{F}^\nu p_2 - \left(p_2 \hat{F} p_1 \right) \frac{p_1^\nu \hat{F}^\mu p_1 - p_2^\mu \hat{F}^\nu p_2}{p_1 \cdot p_2} \right] \\
& + \tilde{C}_{(3,6)} \left(p_2 \hat{F} p_1 \right) \left[\left(p_2 \hat{F}^2 p_1 \right) \hat{F}^{\mu\nu} - \left(p_2 \hat{F} p_1 \right) \hat{F}^{2\mu\nu} \right. \\
& \quad \left. - \hat{F}^\mu p_2 \hat{F}^{2\nu} p_1 + \hat{F}^\nu p_1 \hat{F}^{2\mu} p_2 \right] \\
& + \tilde{C}_{(4,6)} \left(p_2 \hat{F} p_1 \right) \left[- \hat{F}^\mu p_1 \hat{F}^{2\nu} p_1 + \hat{F}^\nu p_2 \hat{F}^{2\mu} p_2 \right. \\
& \quad \left. + \left(p_2 \hat{F}^2 p_1 \right) \frac{p_1^\nu \hat{F}^\mu p_1 - p_2^\mu \hat{F}^\nu p_2}{p_1 \cdot p_2} \right]. \tag{C.20}
\end{aligned}$$

Al emplear la relación (A.9)

$$\hat{F}_{\mu\nu}^2 = \hat{F}_{\mu\alpha}\hat{F}_\nu^\alpha = -g_{\mu\nu}^\perp,$$

es posible reescribir el vértice efectivo como

$$\begin{aligned} \Gamma_{qB}^{\mu\nu}(p_1, p_2) = & A \left[g^{\mu\nu} - \frac{p_1^\nu p_2^\mu}{p_1 \cdot p_2} \right] + B \frac{p_1^\mu p_2^\nu}{p_1 \cdot p_2} + C \frac{\hat{F}^\mu p_1 \hat{F}^\nu p_2}{p_1 \cdot p_2} \\ & + D \left[g_\perp^{\mu\nu} - \frac{p_{1\perp}^\nu p_{2\perp}^\mu}{(p_1 \cdot p_2)_\perp} \right] + E \left[\frac{p_1^\mu p_1^\nu + p_2^\mu p_2^\nu}{p_1 \cdot p_2} - \frac{p_{1\perp}^\mu p_{1\perp}^\nu + p_{2\perp}^\mu p_{2\perp}^\nu}{(p_1 \cdot p_2)_\perp} \right] \\ & + G \left[g^{\mu\nu} + \frac{(p_1 \cdot p_2) g_\perp^{\mu\nu} - p_{1\perp}^\nu p_{2\perp}^\mu - p_{2\perp}^\mu p_{1\perp}^\nu}{(p_1 \cdot p_2)_\perp} \right] \\ & + H \left(p_2 \hat{F} p_1 \right) \left[g^{\mu\nu} \frac{p_2 \hat{F} p_1}{(p_1 \cdot p_2)^2} - \frac{(p_1 \cdot p_2) \hat{F}^{\mu\nu} + p_2^\mu \hat{F}^\nu p_1 - p_1^\nu \hat{F}^\mu p_2}{(p_1 \cdot p_2)^2} \right] \\ & + I \left[\left(p_2 \hat{F} p_1 \right)^2 \frac{p_1^\mu p_1^\nu + p_2^\mu p_2^\nu}{(p_1 \cdot p_2)^3} - \left(p_2 \hat{F} p_1 \right) \frac{p_1^\mu \hat{F}^\nu p_1 - p_2^\nu \hat{F}^\mu p_2}{(p_1 \cdot p_2)^2} \right] \\ & + J \left[\frac{\hat{F}^{\mu\nu} p_2 \hat{F} p_1}{p_1 \cdot p_2} - \frac{\hat{F}^\mu p_2 \hat{F}^\nu p_1}{p_1 \cdot p_2} \right] + K \left(p_2 \hat{F} p_1 \right) \frac{p_1^\mu \hat{F}^\nu p_2 - p_2^\nu \hat{F}^\mu p_1}{p_1 \cdot p_2} \\ & + L \left[\frac{\hat{F}^\mu p_1 \hat{F}^\nu p_1 + \hat{F}^\mu p_2 \hat{F}^\nu p_2}{p_1 \cdot p_2} - \left(p_2 \hat{F} p_1 \right) \frac{p_1^\nu \hat{F}^\mu p_1 - p_2^\mu \hat{F}^\nu p_2}{(p_1 \cdot p_2)^2} \right] \\ & + M \left(p_2 \hat{F} p_1 \right) \left[g_\perp^{\mu\nu} \frac{p_2 \hat{F} p_1}{(p_1 \cdot p_2)^2} \right. \\ & \quad \left. - (p_1 \cdot p_2)_\perp \frac{\hat{F}^{\mu\nu} + p_{2\perp}^\mu \hat{F}^\nu p_1 - p_{1\perp}^\nu \hat{F}^\mu p_2}{(p_1 \cdot p_2)^2} \right] \\ & + N \left(p_2 \hat{F} p_1 \right) \left[\frac{p_{1\perp}^\nu \hat{F}^\mu p_1 - p_{2\perp}^\mu \hat{F}^\nu p_2}{(p_1 \cdot p_2)^2} \right. \\ & \quad \left. + (p_1 \cdot p_2)_\perp \frac{p_2^\mu \hat{F}^\nu p_2 - p_1^\nu \hat{F}^\mu p_1}{(p_1 \cdot p_2)^3} \right], \end{aligned} \tag{C.21}$$

donde se observan 11 nuevas estructuras en comparación al vacío (3.33).

Apéndice D

Método de integración Gaussiana

En este apéndice se dan algunos resultados generales para las integrales Gaussianas que son de gran utilidad para calcular las integrales que aparecen en las secciones 3.1.3 y 4.2.2.

D.1. Integrales Gaussianas generales

El resultado general para las integrales Gaussianas es

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}}, \quad (\text{D.1})$$

con la condición de que $\Re(A) > 0$.

Integrando por partes y haciendo algunos cambios de variable adecuados, es fácil mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-Ax^2} dx = 0, \quad (\text{D.2})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-Ax^2} dx = \frac{1}{2A} \sqrt{\frac{\pi}{A}}, \quad (\text{D.3})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-A(x \pm B)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}}, \quad (\text{D.4})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-A(x \pm B)^2} dx = \mp B \sqrt{\frac{\pi}{A}}, \quad (\text{D.5})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-A(x \pm B)^2} dx = \frac{1}{2A} \sqrt{\frac{\pi}{A}} + B^2 \sqrt{\frac{\pi}{A}}. \quad (\text{D.6})$$

Es posible manipular una exponencial tipo $e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$ a una forma Gaussiana completando el cuadrado, esto es

$$e^{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = \exp\left[\gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}\right] \exp\left[\alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2\right]. \quad (\text{D.7})$$

Se puede observar que la primera exponencial es independiente de la integración y sale como un factor constante. Llevando a cabo la identificación

$$A = -\alpha, \quad (\text{D.8})$$

$$B = \frac{\beta}{2\alpha}, \quad (\text{D.9})$$

es inmediato aplicar los resultados (D.2)-(D.6). La condición para la integración Gaussiana $\Re(A) > 0$ toma la forma $\Re(\alpha) < 0$.

D.2. Integrales Gaussianas en el vacío

Las integraciones Gaussianas que se presentan en el caso del vacío (sobre el momento indeterminado en el lazo a) presentan ciertas sutilezas debido a que la exponencial tiene la forma

$$e^{\alpha a^\mu a_\mu + \beta^\mu a_\mu + \gamma},$$

así que debe de tenerse cuidado al manipular dichas variables. Éstas representan que hay distintas integrales Gaussianas, en principio cuatro, y tienen signos relativos entre ellas¹. En esta sección se dan los resultados de las integrales Gaussianas², de la expresión de vértice efectivo, en 4 dimensiones y se generalizan a d dimensiones.

Las integrales a calcular están dadas por (3.40)

$$I^{\mu\nu}(p_1, p_2) = \int \frac{d^d a}{(2\pi)^d} e^{\alpha \left(a + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2} \left[g^{\mu\nu} (m^2 - a^2 - p_1 \cdot p_2) + 4a^\mu a^\nu + 2a^\mu p_2^\nu - 2a^\nu p_1^\mu + p_2^\mu p_1^\nu - p_1^\mu p_2^\nu \right], \quad (\text{D.10})$$

donde el término $\left(a + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ representa

$$\left(a + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \left(a^\mu + \frac{\beta^\mu}{2\alpha}\right) \left(a_\mu + \frac{\beta_\mu}{2\alpha}\right).$$

A partir de las definiciones (3.37)-(3.37) se llega a que

$$\alpha \left(a + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = i s \left(a + \frac{s_3 p_1 - s_2 p_2}{s}\right)^2,$$

¹Debido al signo relativo entre la parte temporal y la parte espacial.

²Un cálculo explícito, componente a componente, de este tipo de integrales Gaussianas se presenta con detalle en [92].

donde se ha introducido la notación $s = s_1 + s_2 + s_3$.

Para poder realizar la integración Gaussiana es necesaria la condición de que $\Re(\alpha) < 0$ pero en este caso no se cumple. Debido a que los tiempos propios de Schwinger son puramente reales, α es un número imaginario puro. Al considerar el término “ $+i\epsilon$ ” que se “guardó” en la masa m_ϵ^2 , se puede hacer una maniobra para redefinir

$$\alpha = (i - \tilde{\epsilon})s,$$

donde se elige $\tilde{\epsilon} > 0$ de forma adecuada³ a partir de ϵ . Esta nueva elección del parámetro α ya cumple con la condición de $\Re(\alpha) < 0$. Una forma alternativa de interpretar esta manipulación es equivalente a pensar que ahora el tiempo propio de Schwinger desarrolla una pequeña componente imaginaria $\tilde{\epsilon}$ que, desde el punto de vista de la integral asociada, es pedir que la integración sobre el tiempo propio ya no sea puramente sobre el eje real sino que se tenga una pequeña rotación en el plano complejo.

De la expresión (D.10) se pueden reconocer fácilmente cuatro tipos integrales Gaussianas diferentes

$$\begin{aligned} \int d^4a e^{\alpha\left(a+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2} &= \sqrt{\frac{\pi}{-is}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{is}}\right)^3 \\ &\xrightarrow{d} \sqrt{\frac{\pi}{-is}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{is}}\right)^{d-1}, \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

$$\begin{aligned} \int d^4a e^{\alpha\left(a+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2} a^\mu &= \sqrt{\frac{\pi}{-is}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{is}}\right)^3 \left(\frac{s_3 p_1^\mu - s_2 p_2^\mu}{s}\right) \\ &\xrightarrow{d} \sqrt{\frac{\pi}{-is}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{is}}\right)^{d-1} \left(\frac{s_3 p_1^\mu - s_2 p_2^\mu}{s}\right), \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

³Ver detalles en [92].

$$\begin{aligned}
 \int d^4 a e^{\alpha(a+\frac{\beta}{2\alpha})^2} a^2 &= \sqrt{\frac{\pi}{-is}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{is}} \right)^3 \left(\frac{4i}{2s} + \frac{(s_3 p_1 - s_2 p_2)^2}{s^2} \right) \\
 &\xrightarrow{d} \sqrt{\frac{\pi}{-is}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{is}} \right)^{d-1} \left(\frac{di}{2s} + \frac{(s_3 p_1 - s_2 p_2)^2}{s^2} \right),
 \end{aligned} \tag{D.13}$$

$$\begin{aligned}
 \int d^4 a e^{\alpha(a+\frac{\beta}{2\alpha})^2} a^\mu a^\nu &= \sqrt{\frac{\pi}{-is}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{is}} \right)^3 \left(\frac{ig^{\mu\nu}}{2s} + \frac{s_3 p_1^\mu - s_2 p_2^\mu}{s} \frac{s_3 p_1^\nu - s_2 p_2^\nu}{s} \right) \\
 &\xrightarrow{d} \sqrt{\frac{\pi}{-is}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{is}} \right)^{d-1} \left(\frac{ig^{\mu\nu}}{2s} + \frac{s_3 p_1^\mu - s_2 p_2^\mu}{s} \frac{s_3 p_1^\nu - s_2 p_2^\nu}{s} \right).
 \end{aligned} \tag{D.14}$$

Incorporando los resultados (D.11)-(D.14) en la ecuación (D.10) se obtiene

$$\begin{aligned}
 I^{\mu\nu}(p_1, p_2) &= -i \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}d}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{s^{d/2}} \\
 &\times \left[g^{\mu\nu} \left(m^2 - p_1 \cdot p_2 + \frac{i}{s} \left(2 - \frac{d}{2} \right) - \frac{(s_3 p_1 - s_2 p_2)^2}{s^2} \right) \right. \\
 &\quad - \frac{4s_2 s_3}{s^2} p_1^\nu p_2^\mu + p_2^\nu \frac{(s^2 p_1^\mu - 2s_2 p_2^\mu (s - 2s_2))}{s^2} \\
 &\quad \left. + p_1^\mu \frac{(2s_3 - s) (2s_3 p_1^\nu + p_2^\nu (s - 2s_2))}{s^2} \right].
 \end{aligned} \tag{D.15}$$

D.3. Integrales Gaussianas en presencia de un campo magnético externo

La presencia de un campo magnético externo separara las componentes del momento paralelas y transversas, de tal forma que integrales Gaussianas

correspondientes tienen factores diferentes y se pueden calcular de forma separada.

De acuerdo con la discusión de la Sección 4.2.2, sólo es necesario realizar tres tipos de integrales diferentes para el caso con campo magnético (4.26). Los resultados a estas integrales se obtienen fácilmente de la sección anterior de este apéndice y son los siguientes

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} da \exp [\alpha a^\mu a_\mu + \beta^\mu a_\mu + \gamma] &= \exp \left[\gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha} \right] \sqrt{\frac{\pi}{-\alpha}}, \\
 \int_{-\infty}^{\infty} da \exp [\alpha a^\mu a_\mu + \beta^\mu a_\mu + \gamma] a^\sigma &= \exp \left[\gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha} \right] \sqrt{\frac{\pi}{-\alpha}} \left(-\frac{\beta^\sigma}{2\alpha} \right), \\
 \int_{-\infty}^{\infty} da \exp [\alpha a^\mu a_\mu + \beta^\mu a_\mu + \gamma] a^\sigma a^\rho &= \exp \left[\gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha} \right] \sqrt{\frac{\pi}{-\alpha}} \left(\frac{g^{\sigma\rho}}{2\alpha} + \frac{\beta^\sigma \beta^\rho}{2\alpha \cdot 2\alpha} \right).
 \end{aligned}
 \tag{D.16}$$

Nótese que todos los resultados anteriores tienen un factor común. Así que el cálculo de la integral Gaussiana de un polinomio de la forma

$$A + Ba^\sigma + Ca^\sigma a^\rho,$$

se podría llevar a cabo de la siguiente forma: primero se multiplica a todo el polinomio por el factor común

$$\exp \left[\gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha} \right] \sqrt{\frac{\pi}{-\alpha}} [A + Ba^\sigma + Ca^\sigma a^\rho],$$

posteriormente, se hacen los reemplazos necesarios

$$\begin{aligned}
 a^\sigma a^\rho &\longrightarrow \frac{g^{\sigma\rho}}{2\alpha} + \frac{\beta^\sigma \beta^\rho}{2\alpha \cdot 2\alpha}, \\
 a^\sigma &\longrightarrow -\frac{\beta^\sigma}{2\alpha}.
 \end{aligned}$$

Este es el método que se empleará para calcular las integrales Gaussianas que surgen en el vértice efectivo en presencia de un campo magnético.

El factor de integración Gaussiano para el diagrama A, Ec. (4.23), está dado por

$$\begin{aligned}
 G_{(A)} = & (2\pi)^4 e^{-ism^2} \int \frac{d^d a}{(2\pi)^d} \frac{d^d b}{(2\pi)^d} \frac{d^d c}{(2\pi)^d} e^{i \frac{2}{qB} (p_1 + a - c) \hat{F} (p_2 + b - a)} \\
 & \times e^{-is_1 \left(-a_{\parallel}^2 - a_{\perp}^2 \frac{\tan(qBs_1)}{qBs_1} \right)} e^{-is_2 \left(-b_{\parallel}^2 - b_{\perp}^2 \frac{\tan(qBs_2)}{qBs_2} \right)} \\
 & \times e^{-is_3 \left(-c_{\parallel}^2 - c_{\perp}^2 \frac{\tan(qBs_3)}{qBs_3} \right)} \delta^{(2)} (p_1 + a - c)_{\parallel} \\
 & \times \delta^{(2)} (p_2 + b - a)_{\parallel},
 \end{aligned} \tag{D.17}$$

mientras que para el diagrama B, Ec. (4.24), está dado por

$$\begin{aligned}
 G_{(B)} = & (2\pi)^4 e^{-ism^2} \int \frac{d^d a}{(2\pi)^d} \frac{d^d b}{(2\pi)^d} \frac{d^d c}{(2\pi)^d} e^{-i \frac{2}{qB} (p_1 + a - c) \hat{F} (p_2 + b - a)} \\
 & \times e^{-is_1 \left(-a_{\parallel}^2 - a_{\perp}^2 \frac{\tan(qBs_1)}{qBs_1} \right)} e^{-is_2 \left(-b_{\parallel}^2 - b_{\perp}^2 \frac{\tan(qBs_2)}{qBs_2} \right)} \\
 & \times e^{-is_3 \left(-c_{\parallel}^2 - c_{\perp}^2 \frac{\tan(qBs_3)}{qBs_3} \right)} \delta^{(2)} (p_1 + a - c)_{\parallel} \\
 & \times \delta^{(2)} (p_2 + b - a)_{\parallel},
 \end{aligned} \tag{D.18}$$

donde nuevamente se está usando la notación $s = s_1 + s_2 + s_3$. El factor e^{-ism^2} no afecta a la integración y sólo se ha escrito para recordar el factor $+i\epsilon$, que se “escondió” en m_{ϵ}^2 , permite llevar a cabo la integración Gaussiana.

Se puede observar que no existen términos que mezclen las componentes paralelas y perpendiculares, así que es posible separar la integración por componentes⁴.

D.3.1. Integración de las componentes paralelas

En la ecuación (D.17) se puede observar que existen dos deltas de Dirac en las componentes paralelas, así que esta es la parte sencilla de la integración.

⁴Se debe de tener en cuenta que el factor de la forma xFy sólo tiene componentes perpendiculares aunque no esté escrito explícitamente.

Definiendo

$$G_{\parallel}^{(A)} = (2\pi)^4 \int \frac{d^2 a_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{d^2 b_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{d^2 c_{\parallel}}{(2\pi)^2} \exp [i s_1 a_{\parallel}^2] \exp [i s_2 b_{\parallel}^2] \exp [i s_3 c_{\parallel}^2] \quad (\text{D.19})$$

$$\times \delta^{(2)}(p_1 + a - c)_{\parallel} \delta^{(2)}(p_2 + b - a)_{\parallel},$$

se observa que dos integrales son inmediatas y sólo hay una integración Gaussiana asociada al momento a . De forma directa se llega a que

$$G_{\parallel}^{(A)} = \int \frac{d^2 a_{\parallel}}{(2\pi)^2} \exp [i s_1 a_{\parallel}^2] \exp [i s_2 (p_2 - a)_{\parallel}^2] \exp [i s_3 (p_1 + a)_{\parallel}^2] \quad (\text{D.20})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \exp \left[\gamma_{[A, \parallel]} - \frac{\beta_{[A, \parallel]}^2}{4\alpha_{[A, \parallel]}} \right] \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_{[A, \parallel]}}} \sqrt{\frac{\pi}{-\alpha_{[A, \parallel]}}},$$

con

$$\alpha_{[A, \parallel]} = i s,$$

$$\beta_{[A, \parallel]}^{\mu} = 2i (s_3 p_{1, \parallel}^{\mu} - s_2 p_{2, \parallel}^{\mu}), \quad (\text{D.21})$$

$$\gamma_{[A, \parallel]} = i s_2 p_{2, \parallel}^2 + i s_3 p_{1, \parallel}^2,$$

donde el subíndice $[A, \parallel]$ hace referencia a la parte paralela de la integración Gaussiana diagrama A. Las expresiones para los diferentes diagramas (D.17) y (D.18) sólo difieren por una exponencial que depende de los momentos transversos, la integración paralela asociada al diagrama B es exactamente la misma

$$G_{\parallel}^{(A)} = G_{\parallel}^{(B)}, \quad (\text{D.22})$$

de tal forma que es conveniente remover el subíndice asociado al diagrama de los coeficientes (D.21)

$$\begin{aligned}\alpha_{\parallel} &= is, \\ \beta_{\parallel}^{\mu} &= 2i \left(s_3 p_{1\parallel}^{\mu} - s_2 p_{2\parallel}^{\mu} \right), \\ \gamma_{\parallel} &= is_2 p_{2\parallel}^2 + is_3 p_{1\parallel}^2.\end{aligned}\tag{D.23}$$

El resultado final está dado por

$$G_{\parallel} = \frac{1}{4\pi s} \exp \left[\frac{i}{s} \left((s_1 + s_2) s_3 p_{1\parallel}^2 + (s_1 + s_3) s_2 p_{2\parallel}^2 + 2s_2 s_3 (p_1 \cdot p_2)_{\parallel} \right) \right].\tag{D.24}$$

D.3.2. Integración de las componentes perpendiculares

Falta por hacer las integrales Gaussianas en la parte perpendicular, para simplificar el cálculo vale la pena introducir la notación

$$\begin{aligned}p\hat{F}^{\mu} &\equiv p_{\nu}\hat{F}^{\nu\mu} = p_{\perp\nu}\hat{F}^{\nu\mu}, \\ \hat{F}^{\mu}p &\equiv \hat{F}^{\mu\nu}p_{\nu} = \hat{F}^{\mu\nu}p_{\perp\nu}, \\ p\hat{F}q &\equiv p_{\mu}\hat{F}^{\mu\nu}q_{\nu} = p_{\perp\mu}\hat{F}^{\mu\nu}q_{\perp\nu}.\end{aligned}\tag{D.25}$$

La parte perpendicular de las integrales Gaussianas para el diagrama A está dada por

$$\begin{aligned}G_{\perp}^{(A)} &= \int \frac{d^{d-2}a_{\perp}}{(2\pi)^{d-2}} \frac{d^{d-2}b_{\perp}}{(2\pi)^{d-2}} \frac{d^{d-2}c_{\perp}}{(2\pi)^{d-2}} e^{i\frac{2}{qB}(p_1+a-c)\hat{F}(p_2+b-a)} \\ &\quad \times e^{ia_{\perp}^2 \frac{\tan(qBs_1)}{qB}} e^{ib_{\perp}^2 \frac{\tan(qBs_2)}{qB}} e^{ic_{\perp}^2 \frac{\tan(qBs_3)}{qB}}.\end{aligned}\tag{D.26}$$

Llevando a cabo la integración sobre c_\perp se obtiene

$$\begin{aligned}
G_\perp^{(A)} &= \frac{1}{(2\pi)^{d-2}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha_{[A,c,\perp]}}} \right)^{d-2} \int \frac{d^{d-2}a_\perp}{(2\pi)^{d-2}} \frac{d^{d-2}b_\perp}{(2\pi)^{d-2}} \exp \left[\gamma_{[A,c,\perp]} - \frac{\beta_{[A,c,\perp]}^2}{4\alpha_{[A,c,\perp]}} \right] \\
&= \frac{(-iqB \cot(s_3))^{\frac{d}{2}-1}}{2^{d-2} \pi^{\frac{d}{2}-1}} \int \frac{d^{d-2}a_\perp}{(2\pi)^{d-2}} \frac{d^{d-2}b_\perp}{(2\pi)^{d-2}} e^{\frac{i}{qB}(a_\perp^2 \tan(s_1) + b_\perp^2 \tan(s_2))} \\
&\quad \times e^{-\frac{i}{qB}(\cot(s_3)(a-b-p_2)_\perp^2 - 2a\hat{F}(b+p_1+p_2) - 2p_1\hat{F}(b+p_2))}, \tag{D.27}
\end{aligned}$$

donde se ha introducido la notación para las funciones trigonométricas $f(qBs_i) \equiv f(s_i)$, y con

$$\begin{aligned}
\alpha_{[A,c,\perp]} &= i \frac{\tan(qBs_3)}{qB}, \\
\beta_{[A,c,\perp]}^\mu &= \frac{2i}{qB} \hat{F}^\mu(a-b-p_2), \\
\gamma_{[A,c,\perp]} &= \frac{i}{qB} \left(a_\perp^2 \tan(qBs_1) + b_\perp^2 \tan(qBs_2) \right. \\
&\quad \left. + 2a\hat{F}(b+p_1+p_2) + 2p_1\hat{F}(b+p_2) \right). \tag{D.28}
\end{aligned}$$

Prosiguiendo con la integración sobre la variable b_\perp se llega a que

$$\begin{aligned}
G_\perp^{(A)} &= \frac{1}{(2\pi)^{2d-4}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha_{[A,c,\perp]}}} \right)^{d-2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha_{[A,b,\perp]}}} \right)^{d-2} \\
&\quad \times \int \frac{d^{d-2}a_\perp}{(2\pi)^{d-2}} \exp \left[\gamma_{[A,b,\perp]} - \frac{\beta_{[A,b,\perp]}^2}{4\alpha_{[A,b,\perp]}} \right] \\
&= \frac{(4\pi)^{2-d}}{(qB)^2} \frac{\cos(s_2+s_3)}{\cos(s_2)\cos(s_3)} \left(\frac{(qB)^2 \cot(s_3)}{\cot(s_3) - \tan(s_2)} \right)^{\frac{d}{2}} \\
&\quad \times \int \frac{d^{d-2}a_\perp}{(2\pi)^{d-2}} e^{\frac{i}{qB}a_\perp^2 \tan(s_1)} e^{\frac{i}{qB} \frac{\tan(s_3)}{\cot(s_3) - \tan(s_2)} (\cot(s_3)(a-p_2)_\perp^2 + (a+p_1)_\perp^2)} \\
&\quad \times e^{\frac{i}{qB} \frac{\tan(s_3)}{\cot(s_3) - \tan(s_2)} (-2a\hat{F}(p_1+p_2) + 2p_1\hat{F}p_2)}, \tag{D.29}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \alpha_{[A,b,\perp]} &= -i \frac{\cot(qBs_3) - \tan(qBs_2)}{qB}, \\
 \beta_{[A,b,\perp]}^\mu &= \frac{2i}{qB} \left(\cot(qBs_3) (a_\perp^\mu - p_{2\perp}^\mu) + (a + p_1) \hat{F}^\mu \right), \\
 \gamma_{[A,b,\perp]} &= \frac{i}{qB} \left(\cot(qBs_3) (-a_\perp^2 - p_{2\perp}^2 + 2(a \cdot p_2)_\perp) \right. \\
 &\quad \left. + a_\perp^2 \tan(qBs_1) + 2a \hat{F}(p_1 + p_2) + 2p_1 \hat{F} p_2 \right).
 \end{aligned} \tag{D.30}$$

Finalmente, la integración sobre la variable a_\perp da como resultado

$$\begin{aligned}
 G_\perp^{(A)} &= \frac{1}{(2\pi)^{3d-6}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha_{[A,c,\perp]}}} \right)^{d-2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha_{[A,b,\perp]}}} \right)^{d-2} \\
 &\quad \times \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha_{[A,a,\perp]}}} \right)^{d-2} \exp \left[\gamma_{[A,a,\perp]} - \frac{\beta_{[A,a,\perp]}^2}{4\alpha_{[A,a,\perp]}} \right] \\
 &= \frac{8^{2-d}}{\pi^{\frac{3d}{2}-3}} \left(\frac{-iqB \cos(s_1) \cos(s_1 + s_2)}{\sin(s)} \right)^{\frac{d}{2}-1} \left(\frac{(qB)^2 \cot(s_3)}{\cot(s_3) - \tan(s_2)} \right)^{\frac{d}{2}-1} \\
 &\quad \times e^{\frac{i}{qB} \frac{\cos(s_1) \cos(s_2) \sin(s_3)}{\sin(s)} \left[\tan(s_1) (\tan(s_2) \cot(s_3) p_{2\perp}^2 + p_{1\perp}^2) + \tan(s_2) (p_1 + p_2)_\perp^2 \right]} \\
 &\quad \times e^{-\frac{2i}{qB} \frac{\cos(s_1) \cos(s_2) \sin(s_3)}{\sin(s)} \tan(s_1) \tan(s_2) p_1 \hat{F} p_2},
 \end{aligned} \tag{D.31}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \alpha_{[A,a,\perp]} &= i \frac{\sec(qBs_1) \sec(qB(s_3 + s_3)) \sin(qBs)}{qB}, \\
 \beta_{[A,a,\perp]}^\mu &= \frac{2i}{qB} \frac{p_{1\perp}^\mu - \tan(qBs_2) \left(\hat{F}^\mu p_2 - p_1 \hat{F}^\mu + \cot(qBs_3) p_{2\perp}^\mu \right)}{\cot(qBs_3) - \tan(qBs_2)}, \\
 \gamma_{[A,a,\perp]} &= \frac{i}{qB} \frac{p_{1\perp}^2 + \tan(qBs_2) \left(\cot(qBs_3) p_{2\perp}^2 - 2p_1 \hat{F} p_2 \right)}{\cot(qBs_3) - \tan(qBs_2)}.
 \end{aligned} \tag{D.32}$$

Es posible llevar a cabo un procedimiento análogo para el diagrama B y el resultado final toma la siguiente forma

$$\begin{aligned}
G_{\perp}^{(B)} &= \frac{1}{(2\pi)^{3d-6}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha_{[B,c,\perp]}}} \right)^{d-2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha_{[B,b,\perp]}}} \right)^{d-2} \\
&\quad \times \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha_{[B,a,\perp]}}} \right)^{d-2} \exp \left[\gamma_{[B,a,\perp]} - \frac{\beta_{[B,a,\perp]}^2}{4\alpha_{[B,a,\perp]}} \right] \\
&= \frac{8^{2-d}}{\pi^{\frac{3d}{2}-3}} \left(\frac{-iqB \cos(s_1) \cos(s_1 + s_2)}{\sin(s)} \right)^{\frac{d}{2}-1} \left(\frac{(qB)^2 \cot(s_3)}{\cot(s_3) - \tan(s_2)} \right)^{\frac{d}{2}-1} \\
&\quad \times e^{\frac{i}{qB} \frac{\cos(s_1) \cos(s_2) \sin(s_3)}{\sin(s)} [\tan(s_1) (\tan(s_2) \cot(s_3) p_{2\perp}^2 + p_{1\perp}^2) + \tan(s_2) (p_1 + p_2)_{\perp}^2]} \\
&\quad \times e^{\frac{2i}{qB} \frac{\cos(s_1) \cos(s_2) \sin(s_3)}{\sin(s)} \tan(s_1) \tan(s_2) p_1 \hat{F} p_2},
\end{aligned} \tag{D.33}$$

donde ahora se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\alpha_{[c,\perp]} &= i \frac{\tan(qBs_3)}{qB}, \\
\alpha_{[b,\perp]} &= -i \frac{\cot(qBs_3) - \tan(qBs_2)}{qB}, \\
\alpha_{[a,\perp]} &= i \frac{\sec(qBs_1) \sec(qB(s_3 + s_3)) \sin(qBs)}{qB}, \\
\beta_{[B,c,\perp]}^{\mu} &= -\frac{2i}{qB} \hat{F}^{\mu} (a - b - p_2), \\
\beta_{[B,b,\perp]}^{\mu} &= \frac{2i}{qB} \left(\cot(qBs_3) (a_{\perp}^{\mu} - p_{2\perp}^{\mu}) - (a + p_1) \hat{F}^{\mu} \right), \\
\beta_{[B,a,\perp]}^{\mu} &= \frac{2i}{qB} \frac{p_{1\perp}^{\mu} + \tan(qBs_2) \left(\hat{F}^{\mu} p_2 - p_1 \hat{F}^{\mu} - \cot(qBs_3) p_{2\perp}^{\mu} \right)}{\cot(qBs_3) - \tan(qBs_2)}, \\
\gamma_{[B,a,\perp]} &= \frac{i}{qB} \frac{p_{1\perp}^2 + \tan(qBs_2) \left(\cot(qBs_3) p_{2\perp}^2 + 2p_1 \hat{F} p_2 \right)}{\cot(qBs_3) - \tan(qBs_2)}.
\end{aligned} \tag{D.34}$$

Se ha retirado el subíndice que indica el diagrama B a los coeficientes α 's debido a que son idénticos a los obtenidos en el diagrama A. Por otro lado, los coeficientes β 's sí conservan el subíndice del diagrama porque no coinciden⁵

Otro punto importante es que al compararse los resultados obtenidos de la integración Gaussiana en la parte perpendicular para ambos diagramas, expresiones (D.31) y (D.33), se observa que son idénticos salvo el signo en la última exponencial. Este término corresponde al factor

$$p_1 \hat{F} p_2,$$

que tiene el signo opuesto incluso antes de llevar a cabo la integración Gaussiana debido a que los diagramas tienen una fase contraria que proviene de la integración en el espacio de configuraciones de las fases de Schwinger. Entonces, los resultados para ambos diagramas sólo cambian por una fase.

Ya teniendo los resultados de las integrales tanto en la parte paralela como en la perpendicular, es posible escribir el resultado final de acuerdo con

$$\begin{aligned} G_{(A)} &= e^{-ism^2} G_{\parallel} G_{\perp}^{(A)}, \\ G_{(B)} &= e^{-ism^2} G_{\parallel} G_{\perp}^{(B)}. \end{aligned} \quad (D.35)$$

De tal forma, se obtiene que

$$\begin{aligned} G_{(A)} &= \frac{2^{4-3d}}{s\pi^{\frac{3d}{2}-2}} \left(\frac{-iqB \cos(s_1) \cos(s_1 + s_2)}{\sin(s)} \right)^{\frac{d}{2}-1} \left(\frac{(qB)^2 \cot(s_3)}{\cot(s_3) - \tan(s_2)} \right)^{\frac{d}{2}-1} \\ &\quad \times e^{\frac{i}{qB} \frac{\cos(s_1) \cos(s_2) \sin(s_3)}{\sin(s)} \left[\tan(s_1) (\tan(s_2) \cot(s_3) p_{2\perp}^2 + p_{1\perp}^2) + \tan(s_2) (p_1 + p_2)_{\perp}^2 \right]} \\ &\quad \times e^{-ism^2} e^{\frac{i}{s} \left((s_1 + s_2) s_3 p_{1\parallel}^2 + (s_1 + s_3) s_2 p_{2\parallel}^2 + 2s_2 s_3 (p_1 \cdot p_2)_{\parallel} \right)} \\ &\quad \times e^{-\frac{2i}{qB} \frac{\cos(s_1) \cos(s_2) \sin(s_3)}{\sin(s)} \tan(s_1) \tan(s_2) p_1 \hat{F} p_2}, \end{aligned} \quad (D.36)$$

⁵Nótese que la forma de todos los términos es la misma pero se tienen algunos cambios de signo.

y

$$\begin{aligned}
G_{(B)} = & \frac{2^{4-3d}}{s\pi^{\frac{3d}{2}-2}} \left(\frac{-iqB \cos(s_1) \cos(s_1 + s_2)}{\sin(s)} \right)^{\frac{d}{2}-1} \left(\frac{(qB)^2 \cot(s_3)}{\cot(s_3) - \tan(s_2)} \right)^{\frac{d}{2}-1} \\
& \times e^{\frac{i}{qB} \frac{\cos(s_1) \cos(s_2) \sin(s_3)}{\sin(s)} [\tan(s_1) (\tan(s_2) \cot(s_3) p_{2\perp}^2 + p_{1\perp}^2) + \tan(s_2) (p_1 + p_2)_{\perp}^2]} \\
& \times e^{-ism^2} e^{\frac{i}{s} \left((s_1 + s_2) s_3 p_{1\parallel}^2 + (s_1 + s_3) s_2 p_{2\parallel}^2 + 2s_2 s_3 (p_1 \cdot p_2)_{\parallel} \right)} \\
& \times e^{\frac{2i}{qB} \frac{\cos(s_1) \cos(s_2) \sin(s_3)}{\sin(s)} \tan(s_1) \tan(s_2) p_1 \hat{F} p_2} .
\end{aligned} \tag{D.37}$$

Estos son los resultados para las integraciones Gaussianas de un término sin inserciones de momento como lo es la primera integral en (D.16). Como se discutió anteriormente, para calcular integrales Gaussianas que sí tengan inserciones de momentos sólo hace falta multiplicar los factores anteriores y hacer las sustituciones de los momentos; estos reemplazos están dados en términos de los coeficientes α 's y β 's que ya se determinaron, de tal forma que es posible calcular cualquiera de las 13 integrales Gaussianas que aparecen en la traza espinorial (A.20).

D.3.3. Dependencia de la fase

Como se discute en el apéndice F.2, el resultado de integrar las fases de Schwinger sobre el espacio de configuraciones depende del orden de integración (F.20)-(F.22). Al elegir uno de estos resultados en particular se obtuvieron las expresiones (4.20) y (4.21) para el vértice efectivo asociados a los diagramas A y B respectivamente. Debido a esto las expresiones (D.17) y (D.18) para la integración Gaussiana dependen de la elección de uno de estos resultados.

¿Cómo es posible confiar en el resultado que se ha obtenido si para llegar a este fue elegida una “fase” particular? A priori, no es posible.

Por ello, el siguiente paso debe de ser calcular nuevamente las integrales Gaussianas pero ahora considerando cada una de las respectivas fases (F.20)-(F.22) y comparar los resultados obtenidos. Como esta fase sólo involucra las componentes perpendiculares de los momentos, la integración Gaussiana de la parte paralela queda intacta.

Es posible repetir esta integración⁶ y los resultados que se obtienen son idénticos. Tanto las expresiones finales (D.31) y (D.33), como las definiciones de todos los coeficientes α 's y β 's.

Esto da la certeza de que los resultados que se han obtenido hasta ahora, (D.36) y (D.37), son correctos y la elección de la fase que se llegó a hacer en algún punto es irrelevante.

⁶Es decir, hacer las integrales Gaussianas sobre los momentos perpendiculares con otras dos fases distintas para cada uno de los diagramas.

Apéndice E

Algunas integrales interesantes

En este apéndice se dan las herramientas matemáticas necesarias y se hace el cálculo explícito de ciertas integrales que aparecen a lo largo de este trabajo de tesis.

E.1. Función Gamma

La función Gamma se define como [99]

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = 2 \int_0^{\infty} t^{2z-1} e^{-t^2} dt, \quad (\text{E.1})$$

con la condición de que $\Re(z) > 0$.

Además de que cumple con las siguientes propiedades

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad (\text{E.2})$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (\text{E.3})$$

en donde n es un número natural. La segunda de estas propiedades permite hacer una continuación analítica de la función Gamma a todo el plano complejo a excepción de los puntos $z \in \{0, -1, -2, \dots\}$ donde la función adquiere

polos simples [99].

Por otro lado, existen diferentes expansiones para la función Gamma usadas frecuentemente en teoría cuántica de campos. Si δ es un parámetro lo infinitesimal, entonces se tiene que [69]:

$$\Gamma(\delta) \simeq \frac{1}{\delta} - \gamma + \left[\frac{\gamma^2}{2!} + \frac{\zeta(2)}{2} \right] + \dots, \quad (\text{E.4})$$

$$\Gamma(\delta - 1) \simeq -\frac{1}{\delta} + (\gamma - 1) + \dots, \quad (\text{E.5})$$

en donde γ es la constante de Euler-Mascheroni y $\zeta(x)$ la función Zeta de Riemann.

E.2. Funciones polilogarítmicas

Existen ciertos tipos de funciones que surgen frecuentemente al evaluar las integrales sobre los parámetros de Feynman¹ [100], estas son los polilogaritmos y funciones más generales²; todas estas funciones son generalizaciones del logaritmo.

Se define al polilogaritmo como la siguiente serie [101]

$$\text{Li}_n(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^n}, \quad (\text{E.6})$$

con $n \in \mathbb{N}$; esta converge en el disco unitario centrado en 0. Nótese que

$$\text{Li}_1(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l} = -\ln(1 - z), \quad (\text{E.7})$$

¹En este caso surgen en la integración sobre los parámetros de Schwinger.

²Como los polilogaritmos armónicos, logaritmos múltiples, etc.

de donde se observa que las funciones polilogarítmicas son generalizaciones del logaritmo.

Ahora, considérese el dilogaritmo

$$\text{Li}_2(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^2}. \quad (\text{E.8})$$

Es posible escribir una fórmula integral para el dilogaritmo, válida únicamente dentro del disco unitario, a partir de diferenciar la serie

$$\text{Li}_2(z) = - \int_0^z \frac{\ln(1-z)}{z} dz = - \int_0^1 \frac{\ln(1-zt)}{z} dt, \quad (\text{E.9})$$

donde se ha tomando un contorno de integración arbitrario con punto inicial en 0 y punto final en z . Si se retira el intervalo real $[1, \infty)$ del plano complejo y se usa el valor principal del logaritmo, es posible extender la definición (E.9) para el dilogaritmo para cualquier valor z en el plano complejo a excepción del intervalo $[1, \infty)$; la función resultante de esta extensión analítica será referida como “valor principal del dilogaritmo”.

Como la función está definida en el dominio $\mathbb{C} - [1, \infty)$, no incluye al punto $(1,0)$. Pero es de gran utilidad definir $\text{Li}_2(1)$ como el valor límite en dicho punto aunque, como se mostrará mas adelante, es un punto ramal (o de ramificación). La función $\text{Li}_2(z)$ puede ser evaluada de forma cerrada en las siguientes puntos

$$\text{Li}_2(-1) = -\frac{\pi^2}{12}, \quad (\text{E.10})$$

$$\text{Li}_2(0) = 0, \quad (\text{E.11})$$

$$\text{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2(2)}{12}, \quad (\text{E.12})$$

$$\text{Li}_2(1) = \frac{\pi^2}{6}, \quad (\text{E.13})$$

donde se ha incluido el valor límite $\text{Li}_2(1)$.

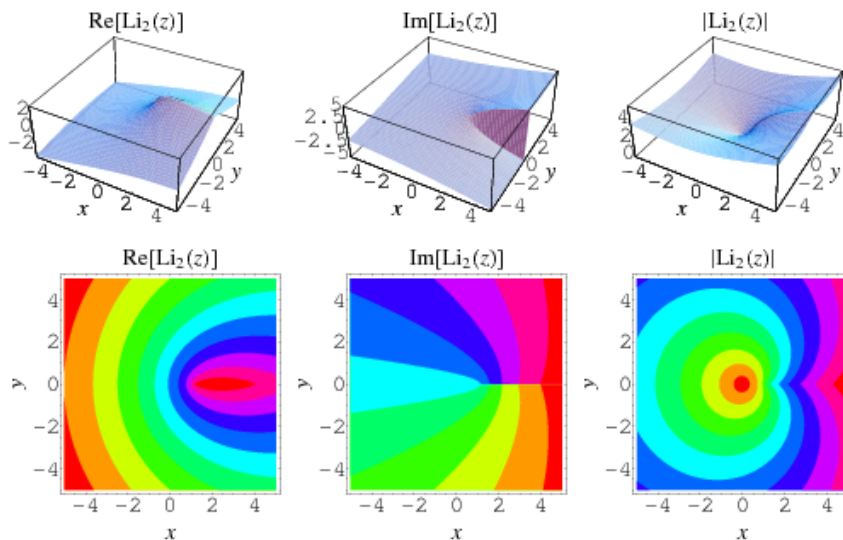


Figura E.1: Gráficas de la función $\text{Li}_2(z)$ en el plano complejo. Imagen tomada de [102].

La estructura analítica del dilogaritmo se puede analizar a partir de su forma integral (E.9). Se observa que existe un punto ramal en $z = 1$; adicionalmente para todas las hojas, excepto para la rama principal, existe una singularidad logarítmica en el punto $z = 0$. De tal forma, si se quiere analizar a la función fuera de la rama principal es necesario remover el intervalo real $[-\infty, 0]$.

La discontinuidad que se presenta en la parte imaginaria del dilogaritmo cuando se atraviesa el corte $(1, \infty)$ para cualquier punto $z > 1$ en la dirección contraria a las manecillas del reloj está dada por

$$\text{Li}_2(z + i\epsilon) - \text{Li}_2(z - i\epsilon) = 2\pi i \ln(z). \quad (\text{E.14})$$

Nótese que, a diferencia de la discontinuidad de la parte imaginaria del logaritmo, esta depende del punto donde se cruce el punto z . La discontinuidad en las otras hojas en el punto $z = 0$ es la discontinuidad usual del logaritmo.

Finalmente, para acabar con el análisis del dilogaritmo, las siguientes son algunas identidades básicas que satisface

$$\text{Li}_2(z) + \text{Li}_2(-z) = \frac{1}{2}\text{Li}_2(z^2), \quad (\text{E.15})$$

$$\text{Li}_2(1-z) + \text{Li}_2(1-z^{-1}) = -\frac{\ln^2(z)}{2}, \quad (\text{E.16})$$

$$\text{Li}_2(z) + \text{Li}_2(1-z) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(z)\ln(1-z), \quad (\text{E.17})$$

$$\text{Li}_2(-z) - \text{Li}_2(1-z) + \frac{1}{2}\text{Li}_2(1-z^2) = -\frac{\pi^2}{12} - \ln(z)\ln(1+z). \quad (\text{E.18})$$

E.3. Algunas integrales interesantes

E.3.1. Integrales sobre el tiempo propio de Schwinger

Las integrales sobre el tiempo propio s de la expresión (3.43) para el vértice efectivo están dadas por

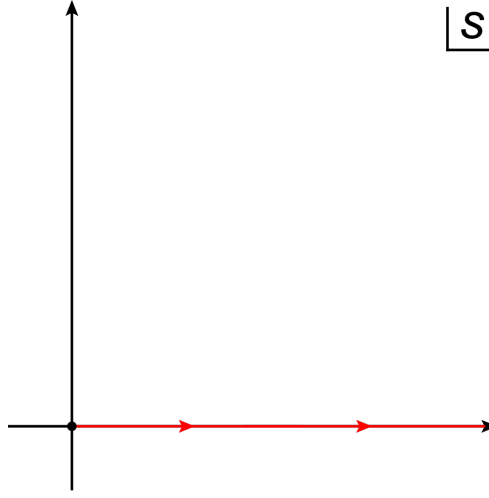
$$\int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{d}{2}-2}} e^{-i\Delta^2 s}, \quad (\text{E.19})$$

$$\int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{d}{2}-1}} e^{-i\Delta^2 s}, \quad (\text{E.20})$$

con $\Delta^2 \equiv m^2 - uv(p_1 + p_2)^2 - (1-u-v)(vp_1^2 - up_2^2)$.

Ambas integrales presentan una divergencia aparente en la región donde $s \rightarrow 0$, las singularidades aparecen los términos de la forma³ $\frac{1}{s^n}$ con $n \in \mathbb{N}$. Las integrales (E.19) y (E.20) se pueden resolver de manera sencilla al llevar a cabo una extensión analítica al plano complejo de s [98]. Al aplicar el cambio de variable $t = i\Delta^2 s$ es posible identificarlas con funciones Gamma

³Es conocido que este tipo de singularidades son removibles siempre y cuando $n \neq 1$.

Figura E.2: Contorno de integración en el plano complejo de s .

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} s^{1-\frac{d}{2}} e^{-i\Delta^2 s} ds &= (i\Delta^2)^{\frac{d}{2}-2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \\ &= \frac{(i\Delta^2)^{\frac{d}{2}-2}}{2 - \frac{d}{2}} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right), \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

$$\int_0^{\infty} s^{2-\frac{d}{2}} e^{-i\Delta^2 s} ds = (i\Delta^2)^{\frac{d}{2}-3} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right). \quad (\text{E.22})$$

Nótese que, como ya se había observado anteriormente, la única divergencia se presenta en la primera integral en el límite cuando $d \rightarrow 4$.

Los resultados anteriores se pueden generalizar de la siguiente forma

$$\int_0^{\infty} s^{n-\frac{d}{2}} e^{-i\Delta^2 s} ds = (i\Delta^2)^{\frac{d}{2}-(n+1)} \Gamma\left(n+1 - \frac{d}{2}\right), \quad (\text{E.23})$$

con $n \in \mathbb{N}$.

E.3.2. Integrales nulas

En la expresión (3.48) para el vértice efectivo

$$\begin{aligned}
 i\Gamma^{\mu\nu}(p_1, p_2) = & -\frac{ig_s^2 g_f m m_H^2 \delta^{ab}}{\pi^2} \int_0^1 dv \int_0^{1-v} \frac{du}{\tau - 4uv} \\
 & \times \left[\frac{m_H^2}{2} (4uv - 1) \left[g^{\mu\nu} - \frac{p_2^\mu p_1^\nu}{p_1 \cdot p_2} \right] - (1 - 2v)^2 p_1^\mu p_2^\nu \right. \\
 & \left. + 2v(2v - 1) p_1^\mu p_1^\nu + 2u(2u - 1) p_2^\mu p_2^\nu \right], \tag{E.24}
 \end{aligned}$$

es posible observar que se tienen cuatro estructuras tensoriales diferentes. Por otro lado, en la Sección 3.1.2 se llevó un análisis sobre las estructuras tensoriales del vértice efectivo y se concluye que sólo deben de ser dos (3.33)

$$\Gamma^{\mu\nu}(p_1, p_2) = A \left[g^{\mu\nu} - \frac{p_1^\nu p_2^\mu}{p_1 \cdot p_2} \right] + B p_1^\mu p_2^\nu. \tag{E.25}$$

Al comparar las expresiones (E.24) y (E.25) se concluye que las siguientes integrales deben de ser nulas

$$N_1 = \int_0^1 dv \int_0^{1-v} du \frac{v(2v - 1)}{\tau - 4uv}, \tag{E.26}$$

$$N_2 = \int_0^1 dv \int_0^{1-v} du \frac{u(2u - 1)}{\tau - 4uv}, \tag{E.27}$$

con $\tau \equiv 4m_f^2/m_H^2$. Nótese que el denominador de las integrales en (E.24) está dado por

$$\frac{1}{\tau - 4uv}.$$

Este se puede manejar como una función de la variable⁴ τ y analizar en diferentes regiones

$$\tau \lesseqgtr 4 \text{ si } \begin{cases} m_f < m_H \longrightarrow \text{Quarks ligeros.} \\ m_f > m_H \longrightarrow \text{Quark top.} \end{cases} \quad (\text{E.28})$$

Además, dependiendo de la región de integración para u y v , puede tener polos e incluso cortes ramales. Dada esta situación, es relevante llevar a cabo un análisis por regiones para obtener los resultados de las integrales [77, 78, 100].

En la presente tesis este análisis no se lleva cabo sino que se extiende analíticamente la función al plano complejo, se realizan las integrales indefinidas mediante el valor principal y posteriormente se evalúa la expresión en los límites de integración. Por ejemplo [78]

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \int_{-1}^1 \frac{du}{u - \Lambda} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{-1}^{\Lambda - \delta} \frac{du}{u - \Lambda} + \int_{\Lambda + \delta}^1 \frac{du}{u - \Lambda} \right] \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\ln \left(\frac{-\delta}{-1 - \Lambda} \right) + \ln \left(\frac{1 - \Lambda}{\delta} \right) \right] \\ &= \ln \left(\frac{1 - \Lambda}{1 + \Lambda} \right). \end{aligned}$$

Con esto en mente, las integrales de la expresión (E.26) son inmediatas

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} \int_0^1 dv (2v - 1) [\ln \tau - \ln (\tau - 4v - 4v^2)] \\ &= \frac{1}{16} [(\tau - 1) \ln (4v - 4v^2 - \tau) \\ &\quad + (2v - 1)^2 (1 + \ln \tau - \ln (\tau - 4v + 4v^2))] \Big|_0^1 \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{E.29})$$

⁴Es una variable real y positiva.

La integración sobre la variable u , de la expresión (E.27), es inmediata

$$N_2 = \frac{1}{32} \int_0^1 dv \left[\tau \frac{(2v - \tau) \ln(4v - 4v^2 - \tau) + (\tau - 2v) \ln(-\tau)}{v^3} - 4 \frac{(v - 1)(2v^2 - \tau)}{v^2} \right]. \quad (\text{E.30})$$

Mientras que en la integración sobre la variable v ya no es posible evaluar el límite inferior forma trivial sino que es necesario obtener el valor límite de la expresión cuando $v \rightarrow 0$. Llevando a cabo este procedimiento el resultado de la integral es el siguiente

$$N_2 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\tau - 1} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{\tau - 1}} \right) - \sqrt{1 - \tau} \operatorname{arctanh} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \tau}} \right) \right]. \quad (\text{E.31})$$

Este resultado se obtuvo de forma general para τ arbitrario en el plano complejo, así que se debe de llevar a cabo el análisis en las regiones de interés (E.28). Para ello, es de gran utilidad recordar que

$$\begin{aligned} \arctan(-i\tau) &= -i \operatorname{arctanh}(\tau), \\ \operatorname{arctanh}(-i\tau) &= -i \arctan(\tau). \end{aligned}$$

De tal forma, se tiene que para $\tau \geq 1$

$$\begin{aligned} N_2(\tau \geq 1) &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{\tau - 1} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{\tau - 1}} \right) - i\sqrt{\tau - 1} \operatorname{arctanh} \left(\frac{-i}{\sqrt{\tau - 1}} \right) \right] \\ &= \frac{\sqrt{\tau - 1}}{2} \left[\arctan \left(\frac{1}{\sqrt{\tau - 1}} \right) + i^2 \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{\tau - 1}} \right) \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Y para $\tau < 1$

$$\begin{aligned} N_2(\tau < 1) &= \frac{1}{2} \left[i\sqrt{1-\tau} \arctan \left(\frac{-i}{\sqrt{1-\tau}} \right) - \sqrt{1-\tau} \operatorname{arctanh} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau}} \right) \right] \\ &= \frac{\sqrt{1-\tau}}{2} \left[-i^2 \operatorname{arctanh} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau}} \right) - \operatorname{arctanh} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau}} \right) \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto

$$N_2 = 0. \quad (\text{E.32})$$

Con esto se ha mostrado que las integrales de los coeficientes de las estructuras tensoriales extras en la expresión (3.48) para el vértice efectivo son nulos.

E.3.3. Cálculo de los coeficientes A y B

Falta encontrar los coeficientes no nulos de la expresión (3.48), estos están dados por

$$A = \frac{g_s^2 g_f m_f \delta^{ab}}{2\pi^2} \int_0^1 dv \int_0^{1-v} du \frac{1-4uv}{\tau-4uv}, \quad (\text{E.33})$$

$$B = \frac{g_s^2 g_f m_f \delta^{ab}}{m_H^2 \pi^2} \int_0^1 dv \int_0^{1-v} du \frac{(1-2v)^2}{\tau-4uv}. \quad (\text{E.34})$$

En la Sección 3.2 se discute que el coeficiente B no contribuye a la sección eficaz pero se calcula por completez.

Para facilitar la notación, se definen las integrales

$$N_A = \int_0^1 dv \int_0^{1-v} du \frac{1-4uv}{\tau-4uv}, \quad (\text{E.35})$$

$$N_B = \int_0^1 dv \int_0^{1-v} du \frac{(1-2v)^2}{\tau-4uv}. \quad (\text{E.36})$$

Partiendo de la expresión (E.35), se puede llevar a cabo la integración sobre la variable u de forma directa

$$N_A = \frac{1}{4} \int_0^1 dv \left[(\tau - 1) \frac{\ln(\tau - 4v + 4v^2) - \ln \tau}{v} + 4(1 - v) \right]. \quad (\text{E.37})$$

En la expresión anterior hay varias integrales simples de realizar pero también aparecen combinaciones más complicadas pero muy particulares. A partir de la definición (E.9) se puede anticipar que el resultado va a estar dado por dilogaritmos.

El resultado final está dado por

$$N_A = \frac{1}{4} \left[2 - (\tau - 1) \text{Li}_2 \left(\frac{2}{1 - \sqrt{1 - \tau}} \right) - (\tau - 1) \text{Li}_2 \left(\frac{2}{1 + \sqrt{1 - \tau}} \right) \right]. \quad (\text{E.38})$$

De forma muy similar para la expresión (E.36), la integración sobre la variable u es

$$N_B = \frac{1}{4} \int_0^1 dv (1 - 2v)^2 \frac{\ln \tau - \ln(\tau - 4v - 4v^2)}{v}. \quad (\text{E.39})$$

Mientras que la integración sobre v da origen a dilogaritmos nuevamente

$$N_B = \frac{1}{4} \left[\text{Li}_2 \left(\frac{2}{1 - \sqrt{1 - \tau}} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{2}{1 + \sqrt{1 - \tau}} \right) + 4\sqrt{1 - \tau} \operatorname{arctanh} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \tau}} \right) - 4 \right]. \quad (\text{E.40})$$

De esta forma, los coeficientes asociados a las estructuras tensoriales están dados por

$$A = \frac{g_s^2 g_f m_f \delta^{ab}}{2\pi^2} N_A(\tau), \quad (\text{E.41})$$

$$B = \frac{g_s^2 g_f m_f \delta^{ab}}{m_H^2 \pi^2} N_B(\tau). \quad (\text{E.42})$$

Los acoplamientos tipo Yukawa de los quarks con el bosón de Higgs g_f son proporcionales a la masa del quark⁵

$$g_f = \sqrt{2} \frac{m_f}{v}, \quad (\text{E.43})$$

donde $v \sim 246$ GeV es el valor de expectación del Higgs en el vacío. De tal forma, la expresión (E.41) se puede reescribir como

$$A = \frac{g_s^2 m_f^2 \delta^{ab}}{\sqrt{2}\pi^2 v} N_A(\tau) = \frac{g_s^2 m_H^2 \delta^{ab}}{4\sqrt{2}\pi^2 v} \tau N_A(\tau). \quad (\text{E.44})$$

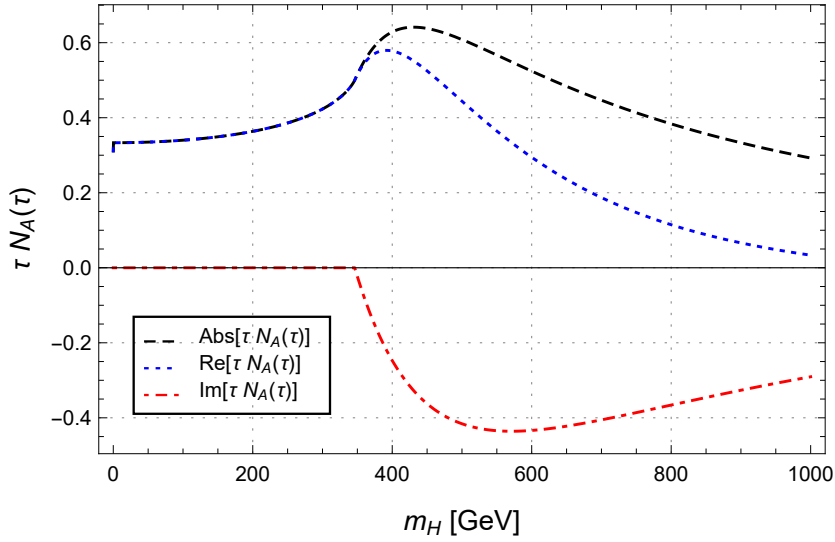
En la literatura, es frecuente definir al coeficiente A de una manera ligeramente distinta

$$A_{\text{tesis}} = (p_1 \cdot p_2) A_{\text{lit.}}, \quad (\text{E.45})$$

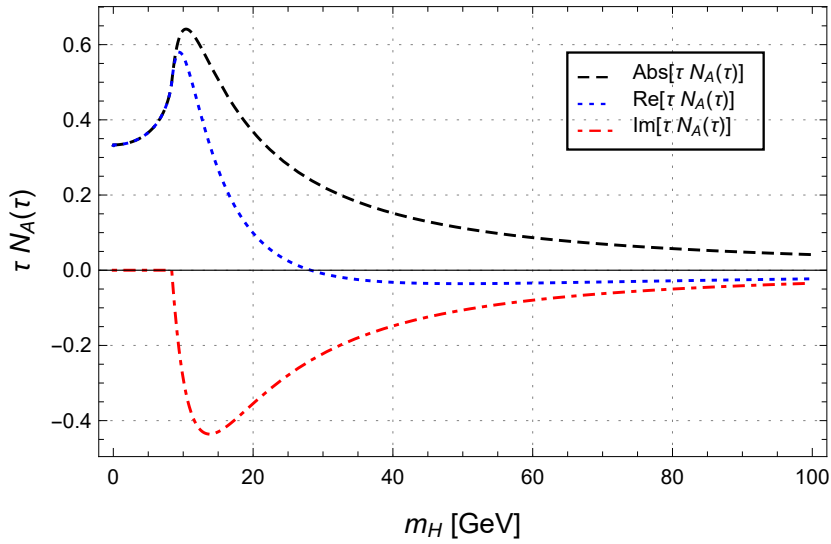
de tal forma que en la capa de masa se obtendría la siguiente expresión

$$A_{\text{lit.}} = \frac{g_s^2 \delta^{ab}}{2\sqrt{2}\pi^2 v} \tau N_A(\tau). \quad (\text{E.46})$$

⁵Para ser más precisos, la relación (E.43) es válida para las entradas inferiores de los dobletes de quarks. Para las entradas superiores hay un signo menos de por medio debido a que en ese caso los acoplamientos tipo Yukawa son negativos $g_f < 0$.



(a) Contribución del quark top.



(b) Contribución del quark bottom.

Figura E.3: Comportamiento de la combinación $\tau N_A(\tau)$ que se muestra en la expresión (E.44) como función de la masa del bosón de Higgs m_H para el quark bottom, $m_b = 4.18$ GeV, y para el quark top $m_t = 173.1$ GeV.

En la Figura E.3 se muestran las contribuciones de los quarks bottom y top a la combinación⁶ $\tau N_A(\tau) \propto A_{\text{lit.}}$ en función de la masa del bosón de Higgs y estas coinciden con el reportado en [100].

E.3.4. Cálculo del coeficiente A en presencia de campo magnético externo

En la expresión (4.44) para el coeficiente A en presencia de campo magnético

$$\begin{aligned}
A = & \frac{i(1-i)^d 2^{2-\frac{3d}{2}} m g_s^2 g_f}{3\pi^{\frac{d}{2}}} (p_1 \cdot p_2) \int_0^1 dv \int_0^{1-v} du (1-4uv) \\
& \times \int_0^\infty ds \left(\frac{1}{s}\right)^{\frac{d}{2}-1} e^{-is(m^2-2uv(p_1 \cdot p_2))} \\
& \times \left[-6 - 2i(qB)^2 s^3 \left((u-1)^2 u^2 p_{1\perp}^2 + (v-1)^2 v^2 p_{2\perp}^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 2uv(2u^2 + 3v(u-1) - 3u + 2v^2 - 1)(p_1 \cdot p_2)_\perp \right) \right. \\
& \quad \left. + (qB)^2 s^2 \left(6v^2 \left(d + 2s^2(u-1)^2 u^2 (p_1 \hat{F} p_2)^2 - 1 \right) + 6du^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 6(d-1)(u-1)v - 6du + d - 6u^2 + 6u + 1 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 12s^2 u^2 v^3 (v + 2(u-1)) (p_1 \hat{F} p_2)^2 \right) \right],
\end{aligned}$$

es posible identificar las siguientes potencias de la variable s

$$s^{2-\frac{d}{2}}, s^{3-\frac{d}{2}}, s^{4-\frac{d}{2}}, s^{5-\frac{d}{2}} \text{ y } s^{6-\frac{d}{2}}.$$

Nótese que ninguno de estos términos presenta una divergencia al tomar el límite $d \rightarrow 4$.

⁶Nótese que dicha combinación es adimensional.

Es posible realizar las integrales sobre s a partir de los resultados (E.21)-(E.23), de tal forma que en la capa de masa y tomando $d = 4$ se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
A = & \frac{g_s^2 g_f m_f}{\pi^2} \int_0^1 dv \int_0^{1-v} du \frac{1-4uv}{\tau-4uv} \\
& + \frac{256(qB)^2 g^2 g_f m_f}{3\pi^2} \int_0^1 dv \int_0^{1-v} du \frac{1-4uv}{(\tau-4uv)^5} \\
& \times \left[\frac{\tau^2}{16m_H^4} (18(u^2 + u(v-1) + v^2) - 18v + 5) \right. \\
& \quad - \frac{3(\tau-4uv)}{2m_H^6} \left((u-1)^2 u^2 p_{1\perp}^2 + (v-1)^2 v^2 p_{2\perp}^2 \right. \\
& \quad \quad \left. \left. - 2uv(2u^2 + 3(u-1)v - 3u + 2v^2 + 1) (p_1 \cdot p_2)_\perp \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{\tau-2uv}{2m_H^4} uv (18(u^2 + u(v-1) + v^2) - 18v + 5) \right. \\
& \quad \left. - \frac{144}{m_H^8} (u+v-1)^2 (p_1 \hat{F} p_2)^2 \right].
\end{aligned} \tag{E.47}$$

Nótese que al evaluar (E.47) en $qB = 0$ se obtiene trivialmente la expresión para el coeficiente A en el vacío (3.50) salvo por el factor $\frac{\delta_{ab}}{2}$ que se ha retirado en este caso.

Llevando a cabo el procedimiento que se mostró previamente para este tipo de integrales, el resultado final está dado por

$$\begin{aligned}
A = & \frac{2\sqrt{2}g_s^2}{9m_H^{12}\tau^2v\pi^2} \left[\frac{9m_H^6\tau^3}{32} \left(\text{Li}_2 \left(\frac{2}{1-\sqrt{1-\tau}} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{2}{1+\sqrt{1-\tau}} \right) \right) \right. \\
& \times \left((\tau-1)m_H^8 + 24(qB)^2(m_H^4 - 2m_H^2(p_1 \cdot p_2)_\perp \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. - 16(p_1 \hat{F} p_2)^2 \right) \right) \\
& + \frac{3(qB)^2}{16} \frac{\tau m_H^6}{(\tau-1)^{3/2}} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{\tau-1}} \right) \\
& \times \left(m_H^2 \tau^2 (5\tau-8) (p_{1\perp}^2 + p_{2\perp}^2) \right. \\
& \qquad - 2m_H^4 (\tau-1)(\tau+2)(9\tau-10) \\
& \qquad + m_H^2 ((6\tau^2(7\tau-8) - 32\tau) + 32)(p_1 \cdot p_2)_\perp \\
& \qquad \qquad \left. + 2(\tau-1)12(\tau(8-9\tau) + 8)(p_1 \hat{F} p_2)^2 \right) \\
& + \frac{m_H^6}{16} \left(9m_H^8 \tau^3 + 6(qB)^2 m_H^4 \tau (45\tau + 26) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - 72(qB)^2 \tau (57\tau + 14)(p_1 \hat{F} p_2)^2 \right) \\
& + \frac{(qB)^2}{16(\tau-1)} m_H^8 (\tau(\tau(14-15\tau) + 8) - 16) (p_{1\perp}^2 + p_{2\perp}^2) \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{(qB)^2}{16(\tau-1)} m_H^8 6\tau(\tau(58-93\tau) + 32)(p_1 \cdot p_2)_\perp \right].
\end{aligned} \tag{E.48}$$

donde v es el valor de expectación del bosón de Higgs en el vacío. Nuevamente, al evaluar en $qB = 0$ se obtiene el caso del vacío dado por la expresión (E.44).

Debido a que los momentos transversos de los gluones tiene dos componentes, estos están contenidos en un plano. De tal forma que es posible parametrizar ciertas combinaciones de los momentos transversos con el ángulo que se subtiende entre ellos

$$\begin{aligned} (p_1 \cdot p_2)_\perp &= |p_{1\perp}| |p_{2\perp}| \cos \Theta = p_{1\perp} p_{2\perp} \cos \Theta, \\ p_1 \hat{F} p_2 &= p_{1\perp} \times p_{2\perp} = p_{1\perp} p_{2\perp} \sin \Theta. \end{aligned} \quad (\text{E.49})$$

E.4. Divergencias en presencia de un campo magnético externo

Recuérdese la expresión (3.43) para el vértice efectivo en el caso del vacío

$$\begin{aligned} i\Gamma^{\mu\nu}(p_1, p_2) &= - \frac{4g_s^2 g_f m \delta^{ab} e^{-\frac{i\pi}{4}d}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dv \int_0^{1-v} du \int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{d}{2}-2}} e^{-i\Delta^2 s} \\ &\times \left[\frac{i}{s} \left(2 - \frac{d}{2} \right) g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} (m^2 - p_1 \cdot p_2 - (up_2 - vp_1)^2) \right. \\ &\quad + (2v - 1) p_1^\mu (2vp_1^\nu + (1 - 2u) p_2^\nu) \\ &\quad \left. + p_2^\mu ((1 - 4uv) p_1^\nu + 2u(2u - 1) p_2^\nu) \right], \end{aligned}$$

donde $\Delta^2 \equiv m^2 - uv(p_1 + p_2)^2 - (1 - u - v)(vp_1^2 - up_2^2)$. Como ya se mencionó anteriormente, los coeficientes correspondientes a $g^{\mu\nu}$ y a $p_1^\nu p_2^\mu$ coinciden una vez que se lleva a cabo la integración sobre la variable s .

Otro punto importante es que, mientras que el coeficiente asociado a la estructura $p_1^\nu p_2^\mu$ no presenta problemas a la hora de la integración, una parte del coeficiente asociado a la métrica $g^{\mu\nu}$ sí presenta una aparente singularidad. Esta es una divergencia logarítmica y se puede lidiar con ella debido a que las integrales Gaussianas sobre los momentos de lazo se realizaron en una dimensión arbitraria d . El punto importante es que las posibles divergencias están asociadas al coeficiente que acompaña a la métrica.

En el caso de campo magnético se llevó a cabo una manipulación simple (4.41)

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{\mu\nu}(p_1, p_2, p_{1\perp}, p_{2\perp}) = & -K_{(2)}(p_1 \cdot p_2) \left[g^{\mu\nu} - \frac{p_1^\nu p_2^\mu}{p_1 \cdot p_2} \right] \\ & + [K_{(38)} + K_{(2)}(p_1 \cdot p_2)] g^{\mu\nu} + \text{todo lo demás,} \end{aligned}$$

para poder identificar al coeficiente A . Debido a que se escogió usar el coeficiente $K_{(2)}$, inicialmente asociado a la estructura tensorial $p_1^\nu p_2^\mu$, no se presentan estas divergencias aparentes al llevar a cabo la integración sobre s . Las divergencias están asociadas al coeficiente $K_{(38)}$ que corresponde a la métrica.

A partir de la expresión obtenida mediante el software Mathematica 12.0 para la traza sobre espines ya integrada, es posible identificar las términos que podrían presentar una posible divergencia. Éstos cargan un factor $\frac{1}{s}$ global y están dados por

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\text{div.}}^{\mu\nu} = & \frac{4im}{s} g_\perp^{\mu\nu} \left[\frac{2i qB \cos^4(s_3) \tan^2(s_1)}{h_1} + \frac{qB \cos^4(s_2) (1 - i \tan^2(s_2))}{h_2} \right. \\ & + \frac{qB \cos^4(s_3) (1 - i \tan^2(s_3))}{h_3} \\ & + \cos^2(s_1) \cos^2(s_2) \cos^2(s_3) \left(-d_\perp \tan(s_2) \tan(s_3) \right. \\ & \left. \left. + \tan(s_1)(\tan(s_2) + \tan(s_3))(d - 2d_\perp) - 2 \right) \right] \\ & + \frac{m}{s} g^{\mu\nu} \left[2d_\perp qB \left(\frac{\cos^4(s_1) (\tan^2(s_1) + i)}{h_1} - \frac{\cos^4(s_2) (\tan^2(s_2) + i)}{h_2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\cos^4(s_3) (\tan^2(s_3) + i)}{h_3} \right) \right. \\ & - i \cos^2(s_1) \cos^2(s_2) \cos^2(s_3) (-d_\perp + d - 4) \\ & \left. \left. \times (d_\perp (\tan(s_2) \tan(s_3) + \tan(s_1)(\tan(s_2) + \tan(s_3)))) + 2 \right) \right], \end{aligned} \tag{E.50}$$

donde $d_\perp = d - 2$ y

$$h_i = \frac{\cos^2(s_i)}{s} (\tan(s_1) + \tan(s_2) + \tan(s_3) - \tan(s_1)\tan(s_2)\tan(s_3)). \quad (\text{E.51})$$

Nótese que estos términos están asociados tanto a la métrica $g^{\mu\nu}$ como a su componente transversa $g_\perp^{\mu\nu}$.

La parte aparentemente divergente del vértice efectivo en presencia de campo magnético está dada por

$$\begin{aligned} i\Gamma_{qB,\text{div.}}^{\mu\nu} &= -ig_s^2 g_f \mathbf{tr} [t^a t^b] \left(\frac{4\pi}{qB} \right)^{d-2} \\ &\times \int_0^\infty \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{\cos(qBs_1) \cos(qBs_2) \cos(qBs_3)} \tilde{T}_{\text{div.}}^{\mu\nu} (G_{(A)} + G_{(B)}). \end{aligned} \quad (\text{E.52})$$

Llevando a cabo el límite de campo débil para momentos transversos bajos se llega a la expresión

$$\begin{aligned} i\Gamma_{qB,\text{div.}}^{\mu\nu} &= -ig_s^2 g_f \mathbf{tr} [t^a t^b] \int_0^1 dv \int_0^{1-v} du \int_0^\infty ds e^{-is(m^2 - 2uv(p_1 \cdot p_2))} \\ &\times \left[\frac{W_1^{\mu\nu}}{s^{\frac{d}{2}-1}} + (qB)^2 \left(\frac{W_2^{\mu\nu}}{s^{\frac{d}{2}-2}} + \frac{W_3^{\mu\nu}}{s^{\frac{d}{2}-3}} + \frac{W_4^{\mu\nu}}{s^{\frac{d}{2}-4}} + \frac{W_5^{\mu\nu}}{s^{\frac{d}{2}-5}} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{E.53})$$

donde $W_i^{\mu\nu} = W_i^{\mu\nu}(p_1, p_2, p_{1\perp}, p_{2\perp})$. En el Apéndice E.3.1 se muestra que la única integral sobre s que presenta una singularidad corresponde a $s^{1-\frac{d}{2}}$, entonces, el único término que pudiera llegar a ser divergente es el que está asociado con $W_1^{\mu\nu}$

$$W_1^{\mu\nu} = -2^{2-\frac{d}{2}} \frac{(1-i)^d m}{(4\pi)^{d/2}} (d-4) g^{\mu\nu}, \quad (\text{E.54})$$

que efectivamente corresponde al término divergente del caso del vacío que aparece en la expresión (3.43). Es decir, las divergencias son exactamente las

mismas que en caso de vacío y, por ende, se trabajan con el mismo procedimiento.

La forma explícita de los demás términos $W_i^{\mu\nu}$ no se escribe explícitamente debido a que es larga y no son relevantes para el análisis de las divergencias. Sin embargo, es importante a destacar es que todos estos términos van multiplicados por $(qB)^2$, así que se anulan al tomar $qB = 0$.

Con este análisis se muestra que el campo magnético no tiene asociadas nuevas divergencias y, por ello, la metodología para trabajar con las singularidades es la misma que se tiene en el vacío.

Apéndice F

Sobre la fase de Schwinger

En este apéndice se presentan explícitamente los cálculos donde la fase de Schwinger juega un rol importante, así como las discusiones pertinentes a todos los detalles que surgen en estos procedimientos.

F.1. Fase de Schwinger

En la expresión (4.2) se muestra la forma explícita de la fase de Schwinger

$$\Omega_q(x', x'') = \exp \left(-iq \int_{x''}^{x'} A_\mu(x) dx^\mu \right). \quad (\text{F.1})$$

Ésta indica que una partícula cargada, en presencia de un potencial electromagnético $A^\mu(x)$ adquiere una fase al moverse de un punto a otro.

A partir de la definición del tensor electromagnético

$$F^{\mu\nu}(x) \equiv \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x), \quad (\text{F.2})$$

se puede escribir la forma que adquiere el cuadripotencial $A^\mu(x)$ que genera un campo magnético homogéneo en la dirección z en una norma completamente arbitraria

$$A^\mu(x) = \frac{1}{2}x_\nu F^{\nu\mu} + \partial^\mu \chi(x), \quad (\text{F.3})$$

donde $\chi(x)$ es una función arbitraria de clase \mathcal{C}^2 . Se ha removido la dependencia espacio-temporal del tensor electromagnético $F^{\mu\nu}$ debido a que es constante en la configuración que se ha considerado y está dado por (4.11).

Para obtener la fase que adquiere una partícula cargada que se mueve entre dos puntos arbitrarios en presencia de este cuadripotencial se requiere hacer la siguiente integral

$$\int_y^x A_\mu(\tau) d\tau^\mu.$$

El segundo término de la ecuación (F.3) se integra de forma trivial debido a que se está integrando una derivada total, entonces el resultado es la función evaluada en los extremos. Por otra parte, para integrar el primer término se tiene que elegir una trayectoria para que se realice la integral de línea, de acuerdo a Schwinger esta es una línea recta [81]. Realizando la parametrización

$$\tau^\mu = y^\mu - (x - y)^\mu t, \quad (\text{F.4})$$

con $t \in [0, 1]$. Se puede mostrar de forma simple que

$$\frac{1}{2} \int_y^x x_\nu F^{\nu\mu} d\tau_\mu = -\frac{1}{2} x_\mu F^{\mu\nu} y_\nu,$$

de tal forma que la fase total adquirida está dada por

$$\Omega_q(x, y) = e^{i\frac{qB}{2}x_\mu \hat{F}^{\mu\nu} y_\nu} e^{-iq(\chi(x) - \chi(y))}, \quad (\text{F.5})$$

donde $\hat{F}^{\mu\nu}$ es el tensor electromagnético unitario definido por (4.13). Escribiendo de forma explícita las componentes no nulas del tensor electromagnético dado por (4.11)

$$F^{21} = B \quad \text{y} \quad F^{12} = -B. \quad (\text{F.6})$$

La forma explícita de la fase está dada por

$$\Omega_q(x, y) = e^{i\frac{qB}{2}(x^1y_2 - x^2y_1)} e^{-iq(\chi(x) - \chi(y))}. \quad (\text{F.7})$$

Nótese que el resultado anterior no es invariante de norma, tiene una dependencia explícita de ella. Además, se puede observar que cumple la siguiente propiedad

$$\Omega_q(x, y) = -\Omega_q(y, x) = -\Omega_{-q}(x, y). \quad (\text{F.8})$$

A partir de la Ec. (F.5) se puede encontrar la forma del producto de las fases que aparecen en las ecuaciones (4.7) y (4.8)

$$\begin{aligned} \Omega_q(x, y)\Omega_q(y, z)\Omega_q(z, x) &= e^{i\frac{qB}{2}x_\mu \hat{F}^{\mu\nu} y_\nu} e^{i\frac{qB}{2}y_\mu \hat{F}^{\mu\nu} z_\nu} e^{i\frac{qB}{2}z_\mu \hat{F}^{\mu\nu} x_\nu} \\ &\quad \times e^{-iq(\chi(x) - \chi(y))} e^{-iq(\chi(y) - \chi(z))} e^{-iq(\chi(z) - \chi(x))} \\ &= e^{i\frac{qB}{2}\hat{F}^{\mu\nu}(x_\mu y_\nu + y_\mu z_\nu + z_\mu x_\nu)} \\ &= e^{i\frac{qB}{2}(-x_2y^1 + x_1y^2 - y_2z^1 + y_1z^2 - z_2x^1 + z_1x^2)}, \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

y análogamente

$$\begin{aligned} \Omega_q(y, x)\Omega_q(z, y)\Omega_q(x, z) &= e^{i\frac{qB}{2}\hat{F}^{\mu\nu}(x_\nu y_\mu + y_\nu z_\mu + z_\nu x_\mu)} \\ &= e^{-i\frac{qB}{2}\hat{F}^{\mu\nu}(x_\mu y_\nu + y_\mu z_\nu + z_\mu x_\nu)} \\ &= e^{-i\frac{qB}{2}(-x_2y^1 + x_1y^2 - y_2z^1 + y_1z^2 - z_2x^1 + z_1x^2)}. \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

Nótese que estos resultados sí son invariantes norma. Se puede mostrar que, para un lazo cerrado con un número arbitrario de propagadores donde todos cargan su respectiva fase, el resultado total es invariante de norma [83].

Otro punto importante es que los diagramas A y B tienen asociadas fases contrarias, esto causa términos de interferencia en la sección eficaz que en el caso del vacío no estaban presentes (debido a que la contribución de ambos diagramas era exactamente la misma).

F.2. Integración en el espacio de configuraciones

En la expresión (4.18) para el vértice efectivo del diagrama A, se tienen que llevar a cabo las integrales sobre la parte perpendicular del espacio de configuraciones

$$\begin{aligned}
i\Gamma_{qB(A)}^{\mu\nu}(p_1, p_2, p_3) = & -ig_f^2 g_H \mathbf{tr} [t^a t^b] (2\pi)^6 \int \frac{d^4 a}{(2\pi)^4} \frac{d^4 b}{(2\pi)^4} \frac{d^4 c}{(2\pi)^4} \\
& \times \delta^{(2)}(p_1 + a - c)_\parallel \delta^{(2)}(p_2 + b - a)_\parallel \delta^{(2)}(p_3 - c + b)_\parallel \\
& \times \int d^2 x_\perp d^2 y_\perp d^2 z_\perp e^{-i\frac{qB}{2}\xi} e^{-i(p_1+a-c)_\perp \cdot x_\perp} e^{-i(p_2+b-a)_\perp \cdot y_\perp} \\
& \times e^{-i(-p_3+c-b)_\perp \cdot z_\perp} \text{Tr} \left[\gamma^\mu S_f^{qB}(a) \gamma^\nu S_f^{qB}(b) S_f^{qB}(c) \right].
\end{aligned} \tag{F.11}$$

Este es el procedimiento que se llevará a cabo en la presente sección.

Por comodidad se definen las siguientes variables

$$\begin{aligned}
u &= p_1 + a - c, \\
v &= p_2 + b - a, \\
w &= -p_3 + c - b,
\end{aligned} \tag{F.12}$$

donde éstas cumplen que $u + v + w = p_1 + p_2 - p_3$. En términos de estas nuevas variables, la integral a calcular se escribe como

$$\begin{aligned}
\Lambda_{(A)} = & \int d^2 x_\perp d^2 y_\perp d^2 z_\perp e^{-iu_\perp \cdot x_\perp} e^{-iv_\perp \cdot y_\perp} e^{-iw_\perp \cdot z_\perp} \\
& \times e^{i\frac{qB}{2}(-x_2 y^1 + x_1 y^2 - y_2 z^1 + y_1 z^2 - z_2 x^1 + z_1 x^2)}.
\end{aligned} \tag{F.13}$$

Primero se llevan a cabo las integrales sobre x , por ello es útil manipular las exponenciales para obtener representaciones de la delta de Dirac de la forma

(3.15)

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{(A)} &= \int d^2 y_{\perp} d^2 z_{\perp} e^{-i v_{\perp} \cdot y_{\perp}} e^{-i w_{\perp} \cdot z_{\perp}} e^{i \frac{qB}{2} (y_2 z_1 - y_1 z_2)} \\
 &\quad \times \int d^2 x_{\perp} e^{-i (x_1 u^1 + x_2 u^2)} e^{i \frac{qB}{2} (x_2 y_1 - x_1 y_2 + z_2 x_1 - z_1 x_2)} \\
 &= \int d^2 y_{\perp} d^2 z_{\perp} e^{-i v_{\perp} \cdot y_{\perp}} e^{-i w_{\perp} \cdot z_{\perp}} e^{i \frac{qB}{2} (y_2 z_1 - y_1 z_2)} \\
 &\quad \times \int d^2 x_{\perp} e^{-i x_1 \left(u^1 + \frac{qB}{2} (-y_2 + z_2) \right)} e^{-i x_2 \left(u^2 + \frac{qB}{2} (y_1 - z_2) \right)} \\
 &= \int d^2 y_{\perp} d^2 z_{\perp} e^{-i v_{\perp} \cdot y_{\perp}} e^{-i w_{\perp} \cdot z_{\perp}} e^{i \frac{qB}{2} (y_2 z_1 - y_1 z_2)} \\
 &\quad \times (2\pi)^2 \left(\frac{qB}{2} \right)^2 \delta \left(\frac{2}{qB} u^1 - y_2 + z_2 \right) \delta \left(\frac{2}{qB} u^2 + y_1 - z_2 \right),
 \end{aligned} \tag{F.14}$$

donde se ha usado la propiedad [99]

$$\delta(g(x)) = \sum_j \frac{\delta(x - a_j)}{\left| \frac{dg}{dx}(a_j) \right|}. \tag{F.15}$$

Las deltas de Dirac resultantes tienen dos raíces distintas

$$\delta \left(\frac{2}{qB} u^1 - y_2 + z_2 \right) \longrightarrow \begin{cases} y_2 = \frac{2}{qB} u^1 + z_2, \\ z_2 = -\frac{2}{qB} u^1 + y_2. \end{cases} \tag{F.16}$$

$$\delta \left(\frac{2}{qB} u^2 + y_1 - z_2 \right) \longrightarrow \begin{cases} y_1 = -\frac{2}{qB} u^2 + z_1, \\ z_1 = \frac{2}{qB} u^2 + y_1. \end{cases} \tag{F.17}$$

Ahora se realizará la integración sobre las componentes perpendiculares de la variable y , esto es trivial ya que sólo hay que evaluar la expresión (F.14)

en las raíces correspondientes de (F.16) y (F.17). De esta forma, se obtiene

$$\begin{aligned}
\Lambda_{(A)} &= \left(\frac{4\pi}{qB}\right)^2 \int d^2 z_{\perp} e^{-iw_{\perp} \cdot z_{\perp}} e^{-i\left(-\frac{2}{qB}u^2+z_1\right)\left(v^1-\frac{qB}{2}z_2\right)} e^{-i\left(\frac{2}{qB}u^1+z_2\right)\left(v^2+\frac{qB}{2}z_1\right)} \\
&= \left(\frac{4\pi}{qB}\right)^2 e^{-i\frac{2}{qB}(u^1v^2-u^2v^1)} \int d^2 z_{\perp} e^{-i(u+v+w)_{\perp} \cdot z_{\perp}} \\
&= \left(\frac{4\pi}{qB}\right)^2 e^{-i\frac{2}{qB}(u_1v_2-u_2v_1)} (2\pi)^2 \delta^{(2)}(u+v+w)_{\perp} \\
&= \left(\frac{4\pi}{qB}\right)^2 e^{i\frac{2}{qB}u_{\mu}\hat{F}^{\mu\nu}v_{\nu}} (2\pi)^2 \delta^{(2)}(p_1+p_2-p_3)_{\perp}.
\end{aligned} \tag{F.18}$$

Nótese que aparece una delta de Dirac asociada a la conservación de momento global¹ en lugar de las deltas de conservación de momento en cada uno de los vértices que surgían en el caso del vacío o con las componentes paralelas (4.18).

Existen diferentes órdenes de integración posibles. Por ejemplo, es posible realizar las integrales en las componentes perpendiculares de z en la expresión (F.14). Tomando las raíces en z_{\perp} de (F.16) y (F.17) se llega a la expresión

$$\begin{aligned}
\Lambda_{(A)} &= \left(\frac{4\pi}{qB}\right)^2 \int d^2 y_{\perp} e^{-iv_{\perp} \cdot y_{\perp}} e^{-i\left(\frac{2}{qB}u^2+y_1\right)\left(w^1+\frac{qB}{2}y_2\right)} e^{-i\left(-\frac{2}{qB}u^1+y_2\right)\left(w^2-\frac{qB}{2}y_1\right)} \\
&= \left(\frac{4\pi}{qB}\right)^2 e^{-i\frac{2}{qB}(u^2w^1-u^1w^2)} \int d^2 y_{\perp} e^{-i(u+v+w)_{\perp} \cdot y_{\perp}} \\
&= \left(\frac{4\pi}{qB}\right)^2 e^{i\frac{2}{qB}w_{\mu}\hat{F}^{\mu\nu}u_{\nu}} (2\pi)^2 \delta^{(2)}(p_1+p_2-p_3)_{\perp}.
\end{aligned} \tag{F.19}$$

Las expresiones (F.18) y (F.19) no coinciden, esto indica que el resultado obtenido depende del orden de integración.

¹Del diagrama completo.

Al realizar todas las permutaciones posibles en el orden de integración se obtienen solamente tres resultados diferentes para la fase

$$\Theta_{xyz} = i \frac{2}{qB} u_\mu \hat{F}^{\mu\nu} v_\nu = i \frac{2}{qB} (p_1 + a - c)_\mu \hat{F}^{\mu\nu} (p_2 + b - a)_\nu, \quad (\text{F.20})$$

$$\Theta_{zxy} = i \frac{2}{qB} w_\mu \hat{F}^{\mu\nu} u_\nu = i \frac{2}{qB} (-p_3 + c - b)_\mu \hat{F}^{\mu\nu} (p_1 + a - c)_\nu, \quad (\text{F.21})$$

$$\Theta_{yzx} = i \frac{2}{qB} v_\mu \hat{F}^{\mu\nu} w_\nu = i \frac{2}{qB} (p_2 + b - a)_\mu \hat{F}^{\mu\nu} (-p_3 + c - b)_\nu. \quad (\text{F.22})$$

Nótese que los momentos contraídos con el primer índice del tensor electromagnético unitario corresponden al vértice de la variable sobre la que se realizó la primera integral mientras que los momentos asociados al vértice de la segunda variable de integración aparecen contraídos con el segundo índice.

Que el resultado dependa del orden de integración puede acarrear muchas dudas, ¿el resultado será correcto? ¿Cuál de estas tres fases es la que se debe de usar? Esto se aclara en el Apéndice D.3.3 dando el siguiente resultado

$$\Lambda_{(A)} = \left(\frac{4\pi}{qB} \right)^2 (2\pi)^2 \delta^{(2)}(p_1 + p_2 - p_3)_\perp e^{i \frac{2}{qB} (p_1 + a - c)_\mu \hat{F}^{\mu\nu} (p_2 + b - a)_\nu}. \quad (\text{F.23})$$

De forma análoga, se puede mostrar que para el diagrama B los resultados (F.20)-(F.22) cambian por un signo global y, con ello, las fases correspondientes a cada diagrama siguen siendo contrarias. El resultado correspondiente para el diagrama B está dado por

$$\Lambda_{(B)} = \left(\frac{4\pi}{qB} \right)^2 (2\pi)^2 \delta^{(2)}(p_1 + p_2 - p_3)_\perp e^{-i \frac{2}{qB} (p_1 + a - c)_\mu \hat{F}^{\mu\nu} (p_2 + b - a)_\nu}. \quad (\text{F.24})$$

Una última observación respecto a la notación: el tensor electromagnético sólo es no nulo al contraerse con componentes perpendiculares de los momentos, entonces se podría agregar el subíndice “ \perp ” en la fase de las expresiones (F.23) y (F.24) pero esto no se hace para facilitar la lectura.

Bibliografía

- [1] P. W. Higgs. *Phys. Rev. Lett.* **13**, 508, (1964).
- [2] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble. *Phys. Rev. Lett.* **13**, 585, (1964).
- [3] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration]. *Phys. Lett. B* **716**, 1, (2012).
- [4] S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration]. *Phys. Lett. B* **716**, 30, (2012).
- [5] C. Kao and J. Sayre. *Phys. Lett. B* **722**, 324, (2013).
- [6] [CMS Collaboration]. Report No. CMS-PAS-HIG-13-001, (2013).
- [7] [ATLAS Collaboration]. Report No. ATLAS-CONF-2013-012, (2013).
- [8] M. D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2014.
- [9] W. N. Cottingham and D. A. Greenwood. *An Introduction to the Standard Model of Particle Physics*. Cambridge University Press, 2007.
- [10] M. Bier *et al.* [TLEP Design Study Working Group]. *J. High Energy Phys.* **01**, 164, (2014).
- [11] A. Arbey *et al.* *Eur. Phys. J. C* **75**, 371, (2015).
- [12] M. Ahmed *et al.* [CEPC-SPPC Study Group]. Reports No. IHEP-CPEC-DR-2015-01, No. IHEP-EP.2015-01, (2015).
- [13] J. Schwinger. *Phys. Rev.* **73**, 416, (1948).

- [14] D. Hanneke, S. Fogwell Hoogerheide, and G. Gabrielse. *Phys. Rev. A* **83**, 052122, (2011).
- [15] T. Aoyama, T. Kinoshita, and M. Nio. *Phys. Rev. D* **97**, 036001, (2018).
- [16] L. Susskind. *J. Math. Phys.* **36**, 6377, (1995).
- [17] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. R. Dvali. *Phys. Rev. D* **59**, 086004, (1999).
- [18] M. Bonetti, K. Melnikov, and L. Tancredi. *Phys. Rev. D* **97**, 034004, (2018).
- [19] J. Braathen and S. Kanemura. *Eur. Phys. J. C* **80**, 227, (2020).
- [20] P. Basler, M. Mühlleitner, and J. Müller. arXiv:1912.10477 [hep-ph].
- [21] P. Huang and Y. H. Ng. arXiv:1910.13968 [hep-ph].
- [22] J. Braathen and S. Kanemura. arXiv:2002.05440 [hep-ph].
- [23] A. Sopczak *et al.* [ATLAS and CMS Collaborations]. In *PoS(FFK2019)*, 006, 2020.
- [24] A. M. Sirunyan *et al.* [CMS Collaboration]. *Phys. Lett. B* **778**, 101, (2018).
- [25] A. M. Sirunyan *et al.* [CMS Collaboration]. *Phys. Rev. Lett.* **121**, 121801, (2018).
- [26] M. Aaboud *et al.* [ATLAS Collaboration]. *J. High Energy Phys.* **11**, 085, (2018).
- [27] M. Spira, A. Djouadi, D. Graudenz, and R. M. Zerwas. *Phys. Lett. B* **453**, 17, (1995).
- [28] X. Chen, T. Gehrmann, E. W. N. Glover, and M. Jaquier. *Phys. Lett. B* **740**, 147, (2015).
- [29] G. Aad *et al.* [ATLAS and CMS Collaborations]. *J. High Energy Phys.* **08**, 045, (2016).

- [30] D. de Florian *et al.* [LHC Higgs Cross Section Working Group]. Reports No. FERMILAB-FN-1025-T, CERN-2017-002-M, (2016).
- [31] W. Greiner. *Quantum Chromodynamics*. Springer, 1994.
- [32] M. Tanabashi *et al.* [Particle Data Group]. *Phys. Rev. D* **98**, 030001, (2018) and 2019 update.
- [33] H. M. Georgi, S. L. Glashow, M. E. Machacek, and D. V. Nanopoulos. *Phys. Rev. Lett.* **40**, 692, (1978).
- [34] S. Dawson. *Nucl. Phys. B* **359**, 283, (1991).
- [35] D. Graudenz, M. Spira, and P. M. Zerwas. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1372, (1993).
- [36] C. Anastasiou and K. Melnikov. *Nucl. Phys. B* **646**, 220, (2002).
- [37] R. V. Harlander and W. B. Kilgore. *Phys. Rev. Lett.* **88**, 20180, (2002).
- [38] V. Ravindran, J. Smith, and W. L. van Neerven. *Nucl. Phys. B* **665**, 325, (2003).
- [39] C. Anastasiou, K. Melnikov, and F. Petriello. *Nucl. Phys. B* **724**, 197, (2005).
- [40] M. Grazzini. *J. High Energy Phys.* **0802**, 043, (2008).
- [41] K. G. Chetyrkin, B. A. Kniehl, and M. Steinhauser. *Nucl. Phys. B* **510**, 61, (1998).
- [42] K. G. Chetyrkin, J. H. Kuhn, and C. Sturm. *Nucl. Phys. B* **744**, 121, (2006).
- [43] Y. Schroder and M. Steinhauser. *J. High Energy Phys.* **01**, 051, (2006).
- [44] C. Anastasiou, C. Duhr, F. Dulat, F. Herzog, and B. Mistlberger. *Phys. Rev. Lett.* **114**, 212001, (2015).
- [45] B. Mistlberger. *J. High Energy Phys.* **05**, 028, (2018).
- [46] C. Duhr, F. Dulat, and B. Mistlberger. Reports No. CERN-TH-2019-052, CP3-19-19, MIT-CTP/5115, SLAC-PUB-17425, (2019).

- [47] C. Anastasiou, C. Duhr, F. Dulat, T. Gehrmann E. Furlan, F. Herzog, A. Lazopoulos, and B. Mistlberger. *Nucl. Phys. B* **737**, 325, (2014).
- [48] C. Anastasiou, C. Duhr, F. Dulat, T. Gehrmann E. Furlan, F. Herzog, A. Lazopoulos, and B. Mistlberger. *J. High Energy Phys.* **05**, 058, (2016).
- [49] C. Anastasiou, V. Del Duca, and E. Furlan *et al.* *J. High Energ. Phys.* **2019**, 162, (2019).
- [50] G. Gamow. *Phys. Rev.* **70**, 572, (1946).
- [51] R. A. Alpher, H. Bethe, and G. Gamow. *Phys. Rev.* **73**, 803, (1948).
- [52] N. Armesto and E. Scomparin. *Eur. Phys. J. Plus* **131**, 52, (2016).
- [53] E. Iancu. arXiv:1205.0579 [hep-ph].
- [54] T. Lappi and L. McLerran. *Nucl. Phys. A* **772**, 200, (2006).
- [55] E. L. Berguer, A. Jueid J. Gua, and H. Zhang. *Phys. Rev. Lett.* **122**, 041803, (2019).
- [56] D. d'Enterria, D. E. Martins, and P. R. Teles. *Phys. Rev. D* **101**, 033009, (2020).
- [57] D. E. Kharzeev, L. D. McLerran, and H. J. Warringa. *Nucl. Phys. A* **803**, 227, (2008).
- [58] V. V. Skokov, A. Yu. Illarionov, and V. D. Toneev. *Int. J. Mod. Phys. A* **24**, 5925, (2009).
- [59] J. Berges, K. Reygers, N. Tanji, and R. Venugopalan. *Nucl. Phys. A* **967**, 708, (2017).
- [60] M. Connors, C. Nattrass, R. Reed, and S. Salur. *Rev. Mod. Phys.* **90**, 025005, (2018).
- [61] R. Pasechnik and M. Sumbera. *Universe* **3**, 7, (2017).
- [62] C. Shen and U. Heinz. *Phys. Rev. C* **85**, 049903 ; **86**, 049903 (E), (2012).

- [63] G. Piccinelli and A. Sanchez. *Phys. Rev. D* **96**, 076014, (2017).
- [64] J. Jaber-Urquiza, G. Piccinelli, and A. Sánchez. *Phys. Rev. D* **99**, 056011, (2019).
- [65] A. Ayala, J. D. Castaño-Yepes, and I. Dominguez Jimenez *et al.* *Eur. Phys. J. A* **56**, 53, (2020).
- [66] D. Fraser and A. Koberinski. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **55**, 72, (2016).
- [67] <https://norenormalizable.files.wordpress.com/2012/06/rompimiento-simetria.pdf>. Consultado el 21 de julio de 2020.
- [68] M. Peskin and D. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley, 1995.
- [69] L. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1996.
- [70] S. Glashow. *Nucl. Phys.* **22**, 579, (1961).
- [71] S. Weinberg. *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264, (1967).
- [72] M. Veltman. *Nucl. Phys.* **123** , 89, (1977).
- [73] R. A. Diaz and R. Martinez. *Rev. Mex. Fis.* **47**, 489, (2001).
- [74] M. Rodríguez-Cahuantzi *et al.* [MEXnICA group]. *J. Phys. Conf. Ser.* **912**, 012016, (2017).
- [75] A. Andronic *et al.* *Nucl. Phys. A* **837**, 65, (2010).
- [76] <https://nica.jinr.ru/physics.php>. Consultado el 21 de julio de 2020.
- [77] S. Richter. *Notes on Higgs production via gluon fusion at next-to-leading order*. University College London, 2013.
- [78] S. Bentvelsen, E. Laenen, and P. Matylinski. *Notes on Higgs production through gluon fusion at leading order*. NIKHEF, 2005.
- [79] C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora. *Phys. Lett. B* **52**, 346, (1974).

- [80] C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora. *Phys. Ann.* **98**, 287, (1976).
- [81] J. Schwinger. *Phys. Rev.* **82**, 664, (1951).
- [82] A. Erdas. *Phys. Rev. D* **80**, 113004, (2009).
- [83] A. V. Kuznetsov and N. V. Mikheev. *Electroweak Processes in External Electromagnetic Fields*. Springer, 2003.
- [84] W. Tsai and T. Erber. *Phys. Rev. D* **10**, 492, (1974).
- [85] W. Tsai and T. Erber. *Phys. Rev. D* **12**, 1132, (1975).
- [86] L. F. Urrutia. *Phys. Rev. D* **17**, 085033, (1978).
- [87] A. V. Kuznetsov and N. V. Mikheev. *Yad. Fiz.* **70**, 1299, (2007), *Phys. At. Nucl.* **70**, 1258, (2007).
- [88] K. Bhaattacharya and S. Sahu. *Eur. Phys. J. C* **80**, 481, (2009).
- [89] U. Heinz and R. Snellings. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **63**, 123, (2013).
- [90] T. Matos, F. S. Guzmán, and L. A. Ureña-López. *Classical Quantum Gravity* **17**, 1707, (2000).
- [91] M. Alford, K. Rajagopal, and F. Wilczek. *Phys. Lett. B* **422**, 247, (1998).
- [92] J. Jaber-Urquiza. *Efectos de un campo magnético en la tasa de decaimiento de una partícula escalar neutra a fermiones cargados*. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2018.
- [93] W. Greiner. *Field Quantization*. Springer, 1996.
- [94] C. Itzykson. *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill, 1980.
- [95] I. A. Batalin and A. E. Shabad. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **60**, 894, (1971).
- [96] V. I. Ritus. *Ann. Phys.* **69**, 555, (1972).
- [97] H. Pérez-Rojas and A. E. Shabad. *Ann. Phys.* **121**, 432, (1979).
- [98] W. Dittrich and H. Gies. *Probing the Quantum Vacuum*. Springer, 2000.

- [99] E. Butkov. *Mathematical Physics*. Addison-Wesley, 1968.
- [100] T. Procházka. *Two-photon decay of the Higgs boson: precise predictions of the Standard Model*. Tesis de Doctorado, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova v Praze, 2007.
- [101] L. Leonard. *Polylogarithms and Associated Functions*. North Holland, 1981.
- [102] <https://mathworld.wolfram.com/Dilogarithm.html>. Consultado el 21 de julio de 2020.