



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CUANTIZACIÓN DE UN CAMPO ESCALAR EN
GRAVEDAD DE GAUSS-BONNET

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

OSCAR ADRIÁN RAMÍREZ KANTUN

TUTOR

DR. MARIANO CHERNICOFF MINSBERG



CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO, 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Resumen

La mecánica cuántica ha cambiado la forma de percibir la física. Ésta nos muestra las leyes de la naturaleza del universo microscópico y surge debido a la necesidad de explicar problemas que no podían ser explicados por la física clásica ya desarrollada. En el contexto de la mecánica cuántica cantidades físicas, como la energía, dejan de ser tratadas como continuas para convertirse en cantidades discretas o, bien, cuantos de éstas. Los experimentos por su parte nos han mostrado que coinciden con las predicciones que da la mecánica cuántica.

Casi a la par de que se comenzó a estudiar la mecánica cuántica se desarrolló la relatividad especial que postula que la velocidad de la luz, c , es constante para cualquier observador y representa una cota superior para la velocidad de cualquier objeto. La relatividad especial además, revolucionó la forma de ver el espacio y el tiempo, juntando ambas nociones en una sola: el espacio-tiempo.

De esta manera, conocer las dos ideas anteriores será nuestro punto de partida en esta tesis. Comenzamos nuestro estudio por la relatividad general que surge de la necesidad de generalizar lo propuesto por la relatividad especial, es decir, el estudio de la física en un sistema de referencia arbitrario. Einstein se dió cuenta de la equivalencia que existe entre un sistema acelerado y el campo gravitacional, lo cual generó una revolución en cómo percibimos a la gravedad. Así, el campo gravitacional deja de ser tratado como una fuerza y en su lugar es visto como una modificación en la geometría del espacio-tiempo influenciada por la materia (energía). Esta nueva forma de entender la gravedad trajo consigo descubrimientos que en la actualidad siguen siendo objeto de estudio como el caso de las ondas gravitacionales cuya evidencia experimental fue encontrada recientemente.

Por otro lado, se encuentra la teoría cuántica de campos que a través de la mecánica cuántica y la relatividad especial nos dio una nueva forma de describir a la naturaleza. Por medio de la cuantización de los diferentes tipos de campos para describir a las partículas elementales que conforman el universo. Esta forma de entender la física es la base para entender los procesos detras de los aceleradores de partículas y del modelo estándar.

A pesar de los avances en estas dos áreas no existe una teoría que nos de la naturaleza cuántica detras de la gravedad. Un acercamiento a la naturaleza cuántica de este problema está en estudiar la cuantización de campos en geometrías curvas. Esta teoría, aunque no pretenda ser una teoría fundamental de la naturaleza, busca darnos idea del comportamiento cuántico de los campos en el regimen donde no hay

efectos cuánticos gravitacionales. Lo anterior nos permitirá estudiar la cuantización de un campo escalar cerca de un agujero negro, no quedándonos con aquellos que surgen de la acción de Einstein-Hilbert. En particular, para aquellos agujeros negros que surgen de la teoría de Gauss Bonnet.

Esta tesis se encuentra dividida en 4 capítulos. En el primero haremos un estudio de la relatividad general, partiendo de la acción que da lugar a las ecuaciones de movimiento para finalizar con los términos de frontera. Posteriormente, estudiaremos las soluciones de vacío, centrándonos en los agujeros negros. Luego veremos la teoría cuántica de campos y el proceso de cuantización canónica para el campo escalar en un fondo plano.

En el segundo capítulo, nos centraremos a estudiar la cuantización nuevamente de un campo escalar con la diferencia de que esta vez será en un espacio-tiempo arbitrario, estudiando las posibles complicaciones que esto conlleva. Nuestro siguiente paso será estudiar el efecto Unruh, que aunque sigamos trabajando en el espacio-tiempo plano, resulta ser un primer acercamiento para aplicar los conceptos que obtendremos de estudiar la teoría cuántica de campos en fondos curvos. En el efecto Unruh compararemos la cuantización del campo escalar desde el punto de vista de un observador en reposo con el de un observador con aceleración propia constante. Posteriormente haremos el estudio de la cuantización del campo escalar cerca de un agujero negro que deja de ser una geometría plana. Para encontrarnos como resultado final el espectro térmico de un agujero negro y su respectiva temperatura de Hawking.

Durante el tercer capítulo, estudiaremos la acción de Gauss-Bonnet y como ésta modifica la acción de Einstein-Hilbert, vista en el primer capítulo, de la cual deduciremos las ecuaciones de movimiento y los términos de frontera correspondientes. Luego veremos las soluciones de agujero negro procedentes de esta nueva teoría. Para finalizar con la cuantización en la geometría de un agujero negro en 5 dimensiones, encontrándonos con una generalización para la temperatura de Hawking de un agujero negro con simetría esférica y estática.

Finalmente, en el cuarto capítulo daremos las conclusiones de lo visto a lo largo de la tesis.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes matemáticos	1
1.2. La acción de Einstein Hilbert	8
1.3. Agujeros negros en la teoría de Einstein Hilbert	19
1.4. Cuantización del campo escalar en el espacio-tiempo de Minkowski	30
1.4.1. Cuantización del campo escalar real en el espacio-tiempo de Minkowski	32
1.4.2. Cuantización del campo escalar complejo en el espacio-tiempo de Minkowski	38
2. Cuantización en fondos curvos y Radiación de Hawking	41
2.1. Cuantización del campo escalar en un fondo curvo	41
2.2. Efecto Unruh	48
2.3. Radiación de Hawking y termodinámica de agujeros negros	55
3. Cuantización del campo escalar en la teoría de Gauss Bonnet	69
3.1. La acción de Gauss Bonnet	69
3.2. Agujeros negros en la gravedad de Einstein-Gauss-Bonnet	72
3.3. Radiación de Hawking en el agujero negro de Schwarzschild-Tangherini	76
4. Conclusiones	83

Capítulo 1

Introducción

En la actualidad existen dos ramas fundamentales de la física que describen a la naturaleza de maneras muy diferentes. Por un lado esta la mecánica cuántica, que es la encargada de describir sistemas a escalas pequeñas. Ésta revoluciona la forma en que estudiamos los sistemas físicos. Pues, en contraste con la física clásica, la física cuántica deja de ser determinista, volviéndose en una noción probabilística [1]. En ese sentido los estados físicos dejan de ser trayectorias en el espacio y se convierten en funciones de onda. Además, cantidades importantes en la física clásica, como la posición y el momento de una partícula, no pueden ser medidas con precisión.

Del otro lado se encuentra la relatividad general, que estudia objetos a grandes escalas como estrellas masivas, galaxias, o bien agujeros negros. En un principio se creía que la gravedad era una fuerza, pues gracias Newton, a través de la formulación de la ley de gravitación universal, la humanidad fue capaz de predecir la dinámica del sistema solar. Sin embargo, la relatividad especial nos enseñó que esta forma de describir a la naturaleza no era del todo correcta. Por su parte la relatividad general se centra en el estudio de los objetos que mencionamos al principio de este párrafo como las fuentes del campo gravitacional. Las escalas energéticas de dichos objetos modifican la geometría del espacio-tiempo, cambiando la forma en que los observadores perciben nociones como el tiempo o la distancia [2, 3].

En este primer capítulo veremos los fundamentos de la relatividad general, definiendo la acción de Einstein Hilbert para encontrar la ecuación de campo de Einstein. Posteriormente, nos centramos a estudiar la solución de agujero negro de Schwarzschild. Para finalizar con la cuantización del campo escalar en el espacio-tiempo de Minkowski.

1.1. Antecedentes matemáticos

Antes de comenzar con los temas más importante de esta tesis conviene dar un breve vistazo a la formulación matemática que nos será de gran utilidad para entender la relatividad general. Para ello, si nuestro objeto de interés es el espacio-tiempo podemos identificar una correspondencia con el espacio en cuatro dimensiones (\mathbb{R}^4),

es decir, que podemos caracterizar un evento con cuatro números. En relatividad especial asumimos que dicha correspondencia es global pues todos los eventos en el espacio-tiempo se corresponden continuamente con \mathbb{R}^4 . En relatividad general la estructura global de la geometría del espacio-tiempo puede ser diferente a \mathbb{R}^4 , por lo que es necesario introducir el concepto de *variedad*. Ésta localmente, es decir, en la vecindad de cualquier punto podemos verla (en general) como \mathbb{R}^n pero con otras propiedades globales [5]. Para esta sección, seguiremos las ideas presentadas en las referencias [4, 5].

Podemos definir a una variedad real, M , n -dimensional, C^∞ (infinitamente y continuamente diferenciable) si para una colección de subconjuntos $\{O_\alpha\}$ satisfacen que:

1. Para cada $p \in M$ se encuentre en al menos un O_α , es decir, que $\{O_\alpha\}$ cubra a M .
2. Para cada α , exista un mapeo $\psi_\alpha : O_\alpha \rightarrow U_\alpha$ uno-a-uno y sobreyectivo, donde U_α son subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^n .
3. Si dos conjuntos O_α y O_β están sobrepuestos, es decir, $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$ (donde \emptyset es el conjunto vacío). El mapeo $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : U_\alpha \rightarrow U_\beta$ es C^∞ .

Al par $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ se conoce como *carta* en el contexto de matemáticas y *sistema de coordenadas* para física.

Otro concepto que debemos estudiar para una geometría curva es el de vector. En este nuevo contexto la estructura de espacio vectorial cambia ya que, por ejemplo la noción de sumar dos vectores desaparece. Sin embargo, podemos recuperar la estructura del espacio vectorial para “desplazamientos infinitesimales” alrededor de un punto en la variedad. En una variedad los vectores tangentes se definen a través del vector tangente a una curva en M . Para definir al vector tangente necesitamos primero de una curva $C : (a, b) \rightarrow M$, donde (a, b) es un intervalo abierto en \mathbb{R} y una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ que es C^∞ . Así, definimos al vector tangente en $p = C(0) \in M$ ($t = 0 \in (a, b)$) como la derivada direccional de la función $f(C(t))$ a lo largo de la curva C en $t = 0$, es decir,

$$\left. \frac{d(f(C(t)))}{dt} \right|_{t=0}. \quad (1.1)$$

Al elegir un conjunto de coordenadas $\phi(p) = x^\mu$ podemos reescribir la ecuación (1.1) como

$$\sum_{\mu} \frac{\partial f \circ \phi^{-1}(x)}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(C(t))}{dt} \Big|_{t=0} = X^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = X^\mu \partial_\mu f, \quad (1.2)$$

donde $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ denota la derivada parcial con respecto a x^μ y $X^\mu = dx^\mu(C(t))/dt|_{t=0}$. En la ecuación (1.2) utilizamos la *convención de suma de Einstein* que consiste en suprimir los símbolos de sumatoria siempre y cuando existan índices repetidos. De esta forma, la ecuación (1.1) se obtiene al aplicar el operador diferencial $X = X^\mu \partial_\mu$ a la función f . Por otro lado, el operador diferencial X define al vector tangente a $p \in M$. Como se menciona en [5] la colección de vectores tangentes definen un espacio

vectorial que llamamos *el espacio tangente* y denotamos como V_p . Más aún, si definimos $e_\mu = \partial_\mu$ es posible demostrar que forman una base para V_p . La base e_μ recibe el nombre de *base coordenada*. Para un vector $V = V^\mu e_\mu$, definimos a V^μ como las componentes de V con respecto a e_μ . Si tomamos ahora una nueva carta $\phi'(p) = \{x'^\alpha\}$ es fácil ver que las componentes de un vector V^μ y V'^α se relacionan de la siguiente forma

$$V'^\mu = V^\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}. \quad (1.3)$$

La ecuación (1.3) es conocida como la ley de transformación de vectores y como se menciona en [2] esta da una primera definición de vector en relatividad especial.

Consideremos ahora el espacio dual de V_p denotado por V_p^* , es decir, la colección de funciones lineales $f : V_p \rightarrow \mathbb{R}$ que, a su vez, define un espacio vectorial. De esta manera, dada la base $\{e_\mu\}$ del espacio tangente V_p definimos a *la base dual* $\{dx^\mu\}$ tal que

$$dx^\nu(e_\mu) = \delta_\mu^\nu, \quad (1.4)$$

donde δ_μ^ν es la delta de Kronecker. Al espacio dual también se le conoce como *el espacio cotangente* y a los vectores duales como *1-formas* o *covectores*. Dicho esto, un covector en general puede ser escrito como $\omega = \omega_\mu dx^\mu$, donde ω_μ definen las componentes de la 1-forma. Definimos también el producto interno entre un vector V y una 1-forma ω de la siguiente manera

$$\langle V, \omega \rangle = V^\mu \omega_\nu \langle \partial_\mu, dx^\nu \rangle = V^\mu \omega_\mu. \quad (1.5)$$

A partir de la ecuación (1.5) podemos encontrar como se relacionan las componentes de una 1-forma para diferentes cartas $\{x^\mu\}$ y $\{x'^\nu\}$, encontrando

$$\omega'_\nu = \omega_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}. \quad (1.6)$$

Podemos considerar ahora al espacio dual de V_p^* , es decir, el doble dual de V_p que denotamos por V_p^{**} . De esta forma, por definición, un elemento $v^{**} \in V_p^{**}$ es una función lineal tal que $v^{**} : V_p^* \rightarrow \mathbb{R}$. Como se menciona en [5], el espacio V_p^{**} es naturalmente isomorfo a V_p . Esto quiere decir que para cada vector $v \in V_p$, podemos definir la función v^{**} tal que para $\omega^* \in V_p^*$, $v^{**}(\omega^*) = \omega^*(v)$, que es biyectiva y, por tanto, nos permite identificar V_p^{**} con V_p . Lo anterior nos permite definir a un *tensor*, T , de tipo (k, l) sobre V_p como una función multilineal

$$T : \underbrace{V_p^* \times \dots \times V_p^*}_k \times \underbrace{V_p \times \dots \times V_p}_l \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.7)$$

Así, al tomar k -covectores y l -vectores la función T nos arroja un número real. Es claro que a partir de la definición de tensor, que un tensor de tipo $(0,1)$ corresponde a un covector y uno de tipo $(1,0)$ a un elemento de V_p^{**} que, debido a que podemos identificar a los elementos de V_p^{**} con V_p , concluimos que un tensor de tipo $(1,0)$ corresponde a un vector. Una operación importante entre tensores es el *producto*

exterior; ésto lo podemos definir dado dos tensores T de tipo (k, l) y otro T' de tipo (k', l') , el producto exterior de estos, es decir, $T \otimes T'$ es un tensor de tipo $(k+k', l+l')$, por lo que dado $k+k'$ covectores $v^{1*}, \dots, v^{k+k'*}$ y $l+l'$ vectores $w_1, \dots, w_{l+l'}$ [5]

$$\begin{aligned} T \otimes T'(v^{1*}, \dots, v^{k+k'*}; w_1, \dots, w_{l+l'}) \\ = T(v^{1*}, \dots, v^{k*}; w_1, \dots, w_l) T'(v^{k+1*}, \dots, v^{k+k'*}; w_{l+1}, \dots, w_{l+l'}). \end{aligned} \quad (1.8)$$

El producto exterior nos permite dar una definición de tensor a partir del producto exterior de vectores y covectores. En ese sentido, si tomamos una base $\{v_\mu\}$ de V_p y su correspondiente base dual $\{v^{\nu*}\}$ entonces, es fácil ver que $\{v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{\nu_1*} \otimes \dots \otimes v^{\nu_l*}\}$ es una base para los tensores de tipo (k, l) . Así, podemos expresar un tensor de tipo (k, l) de la siguiente manera

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} v_{\mu_1} \otimes \dots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{\nu_1*} \otimes \dots \otimes v^{\nu_l*}, \quad (1.9)$$

donde $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$ son las componentes del tensor T respecto a la base $\{v_\mu\}$. Dichas componentes se transforman para diferentes cartas de la siguiente manera

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_l} = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu'_l}}. \quad (1.10)$$

La ecuación (1.10) se le conoce como la ley de transformación de tensores.

Un concepto importante que desarrollaremos en esta tesis es el de la métrica espaciotemporal que nos da una noción de distancia infinitesimal en la variedad. Una *métrica pseudo-Riemanniana* se define como un tensor de tipo $(0,2)$ que es *simétrica*, es decir, para dos vectores U y V en V_p $g(U, V) = g(V, U)$, y *no degenerada*, por lo que si $g(U, V_1) = 0$ para cualquier vector $U \in V_p$ entonces $V_1 = 0$. Como se menciona en [5], estas propiedades nos permiten definir un producto interno en V_p (para cada punto $p \in M$), veremos esto a continuación. Dada una carta de M podemos escribir a la métrica como

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu. \quad (1.11)$$

De la ecuación (1.11) es claro que $g(\partial_\mu, \partial_\nu) = g_{\mu\nu}$. Una propiedad interesante de la métrica es como relaciona los vectores y covectores, por lo que al considerar un vector $V = V^\mu \partial_\mu$

$$g(\cdot, V) = g_{\mu\nu} V^\mu dx^\nu = \omega_\nu dx^\nu, \quad (1.12)$$

donde $g_{\mu\nu} V^\mu = \omega_\nu$ define las componentes de un covector. Este resultado nos permite comparar con el producto interno que definimos para covectores y vectores en la ecuación (1.5), obteniendo

$$\omega_\mu V^\mu = \langle \omega, V \rangle = g(U_\omega, V), \quad (1.13)$$

donde U_ω es un vector que se relaciona con la 1-forma ω a través de $g_{\mu\nu} U_\omega^\nu = \omega_\mu$.

Las componentes de la métrica $g_{\mu\nu}$ usualmente se relacionan con las entradas de una matriz, por lo que si esta matriz es invertible definimos a la métrica inversa $g^{\mu\nu}$

tal que $g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda} = \delta_{\mu}^{\lambda}$. De esta forma, podemos establecer un isomorfismo entre V_p y V_p^* a través de la siguiente relación

$$V_{\mu} = \omega_{\mu} = g_{\mu\nu}V^{\nu} ; \omega^{\mu} = U^{\mu} = g^{\mu\nu}\omega_{\nu}. \quad (1.14)$$

Dada una métrica siempre podemos encontrar una base ortonormal $\{v_{\mu}\}$ que cumpla: $g(v_{\mu}, v_{\nu}) = 0$ para $\mu \neq \nu$ y $g(v_{\mu}, v_{\mu}) = \pm 1$. El número de signos \pm definen a la signatura de la métrica. Las métricas que estudiaremos en esta tesis tienen signatura $(-, +, \dots, +)$ y son conocidas como *métricas Lorentzianas* (con un solo signo negativo). Definimos en este contexto la métrica de Minkowski dada por $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$. Por otro lado, las métricas con signatura $(+, \dots, +)$ son conocidas como *métricas Riemannianas*. Definimos también al intervalo como

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}, \quad (1.15)$$

donde a partir de ahora, y a menos que se especifique, omitiremos el símbolo de producto exterior \otimes .

Con lo visto hasta ahora estamos en condiciones para hablar de la curvatura para el espacio-tiempo. La noción de curvatura a la que estamos acostumbrados refiere a superficies dos dimensionales que se sitúan en el espacio tridimensional. En ese sentido, una superficie es curva ya que podemos encajarla en un espacio de dimensión más alta. En este caso esta noción no es la que nos interesa pues nos gustaría dar una noción de curvatura sin la necesidad de tener que definir un espacio de dimensión más alta que se conoce como *curvatura intrínseca*. Para desarrollar lo anterior, necesitamos definir el transporte paralelo. Este intuitivamente lo podemos definir como el movimiento de un vector a lo largo de una curva manteniendo su dirección. Como se menciona en [5], podemos caracterizar una geometría plana si al transportar paralelamente cualquier vector a lo largo de cualquier curva cerrada, el vector final coincide con el vector inicial. En general, podemos caracterizar la curvatura intrínseca de una variedad en como se transportan paralelamente los vectores a lo largo de una curva.

No es difícil imaginarse que la noción de transporte paralelo a lo largo de una curva se relaciona con como definimos las derivadas para un campo vectorial. Por lo que un vector es transportado paralelamente si la derivada de este a lo largo de una curva es cero. Así, nuestro siguiente objetivo es dar una definición de las derivadas para un tensor. Como se menciona en [5], aunque podamos definir el operador de derivada $\partial_{\mu} = \partial/\partial x^{\mu}$, es decir, la derivada parcial ordinaria, esta depende de como elijamos la carta (coordenadas) para la variedad, y por tanto, no se asocia naturalmente con la estructura de la variedad. Lo anterior nos conduce a la necesidad de definir al operador diferencial ∇ (a veces llamada *derivada covariante*) en una variedad M como una función tal que para dos campos vectoriales X y Y , $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$ satisface las siguientes condiciones:

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z, \quad (1.16)$$

$$\nabla_{X+Y}(Z) = \nabla_X Z + \nabla_Y Z, \quad (1.17)$$

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y, \quad (1.18)$$

$$\nabla_X(fY) = X[f]\nabla_X Y + f\nabla_X Y, \quad (1.19)$$

donde f es una función escalar y X , Y y Z campos vectoriales definidos sobre la variedad.

Dada una carta $x = \phi(p)$ sobre M , definimos a las funciones $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$, también conocidos como los *coeficientes de la conexión*, de la siguiente forma

$$\nabla_\nu e_\mu = \nabla_{e_\nu} e_\mu = e_\lambda \Gamma_{\nu\mu}^\lambda. \quad (1.20)$$

La ecuación (1.20) nos dice que los coeficientes de la conexión definen como cambian los vectores base punto a punto. Por otro lado, definido ya como actúa el operador de derivada sobre la base, podemos ver qué sucede para cualquier vector. Así, dado $V = V^\mu e_\mu$ y $U = U^\nu e_\nu$ vectores en V_p

$$\nabla_V U = V^\mu \nabla_\mu (U^\nu e_\nu) = V^\mu (e_\mu [U^\nu] e_\nu + U^\nu \nabla_\mu e_\nu) = V^\mu (\partial_\mu U^\lambda + U^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) e_\lambda. \quad (1.21)$$

Es claro de la ecuación (1.21) que la derivada covariante es una función que manda dos vectores en un nuevo vector, por lo que la componente λ es $V^\mu \nabla_\mu U^\lambda$, donde

$$\nabla_\mu U^\lambda = \partial_\mu U^\lambda + U^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \quad (1.22)$$

notemos que la expresión (1.22) define la componente λ del vector $\nabla_\mu U$ y no la derivada de U^λ . Sin embargo, para esta tesis utilizaremos esta notación cuando hablemos de la derivada covariante de un vector.

Como se menciona en [4], definimos la derivada covariante para el campo vectorial X de una función escalar f como

$$\nabla_X f = X[f], \quad (1.23)$$

es decir, como la derivada direccional ordinaria que definimos anteriormente. De esta manera, la ecuación (1.19) define una regla de Leibnitz para fX , por lo que si ahora queremos generalizar la derivada covariante para tensores en general, necesitamos que para dos tensores arbitrarios T_1 y T_2 sea válida la regla de Leibnitz, es decir,

$$\nabla_X(T_1 \otimes T_2) = (\nabla_X T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_X T_2). \quad (1.24)$$

De está forma, podemos calcular la derivada covariante para las componentes de un covector ω_λ , encontrando

$$\nabla_\mu \omega_\lambda = \partial_\mu \omega_\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\nu \omega_\nu. \quad (1.25)$$

Así, es fácil generalizar la derivada covariante para las componentes de un tensor de tipo (k, l) , obteniendo

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = & \partial_\mu T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu_1} T^{\alpha \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} + \dots \\ & + \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu_k} T^{\mu_1 \dots \alpha}_{\nu_1 \dots \nu_l} - \Gamma_{\mu\nu_1}^\alpha T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\alpha \dots \nu_l} - \dots \\ & - \Gamma_{\mu\nu_l}^\alpha T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \alpha}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Regresando a los coeficientes de la conexión, ahora debemos hablar sobre como estos transforman para diferentes cartas. Esta transformación se encuentra dada por [4]

$$\Gamma_{\beta'\lambda'}^{\alpha'} = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^{\lambda'}} \Gamma_{\nu\gamma}^\mu + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^{\beta'} \partial x'^{\lambda'}} \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\sigma}. \quad (1.27)$$

La ecuación (1.27) nos dice que la conexión no transforma como la ecuación (1.10) y, por tanto, como se menciona en [2] no define a un tensor. Sin embargo, $\partial_\mu v^\nu + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu v^\alpha$ si define a las componentes de uno.

En este punto estamos en condiciones para definir el transporte paralelo en términos de la derivada covariante. Así, decimos que $V \in V_p$ es transportado paralelamente a lo largo de la curva $c(t) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ si para todo $t \in (a, b)$ se cumple la siguiente condición

$$\nabla_X(V)|_{c(t)} = 0, \quad (1.28)$$

donde X es el vector tangente a la curva $c(t)$.

Como se menciona en [4], si nuestra variedad tiene una métrica podemos dar condiciones razonables para encontrar los coeficientes de conexión. De esta forma, imponemos que el producto interno para dos vectores transportados paralelamente a lo largo de cualquier curva se conserve. Esta condición se traduce a que la métrica sea covariantemente conservada, es decir,

$$\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0. \quad (1.29)$$

A partir de la ecuación (1.29), es fácil obtener una ecuación para los coeficientes de la conexión que son compatibles con la métrica, encontrando

$$\Gamma_{\mu\nu}^\kappa = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\kappa + \frac{1}{2}(T_{\nu\mu}^\kappa + T_{\mu\nu}^\kappa + T_{\mu\nu}^\kappa), \quad (1.30)$$

donde $T_{\mu\nu}^\kappa = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha$, es el tensor de torsión y

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\kappa = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}), \quad (1.31)$$

define a los símbolos de Christoffel. Por otro lado, decimos que la conexión es la *conexión de Levi-Civita* si es libre de torsión, es decir, $T_{\mu\nu}^\alpha = 0$. Esta condición es relevante para la relatividad general, pues como podemos ver en [4] la única conexión compatible con la métrica para una variedad pseudo-Riemanianna es la conexión de Levi-Civita. Así,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\kappa = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\kappa = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \quad (1.32)$$

A partir de ahora cuando escribamos los coeficientes de la conexión nos referiremos a los símbolos de Christoffel, es decir, la conexión de Levi-Civita.

Como anticipamos la noción de curvatura en la que estamos interesados, es la diferencia de un vector trasladado paralelamente a través de una curva cerrada con el vector inicial. Se puede probar [2, 4] que para curvas cerradas infinitesimales la

diferencia entre estos dos vectores se encuentra codificada por el *tensor de Riemann*. Dada una carta, expresamos las componentes de este como

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu}. \quad (1.33)$$

Otros tensor útil que podemos obtener a partir del Riemann es el *tensor de Ricci* que definimos como

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}, \quad (1.34)$$

finalmente definimos al escalar de curvatura como la traza del tensor de Ricci, es decir,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.35)$$

Así, como bien anticipamos una variedad es plana si para cualquier vector transportado paralelamente a lo largo de cualquier curva cerrada coincide con el vector original. Por lo que la variedad es plana si y solo si todas las componentes del tensor de Riemann son cero, es decir, $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = 0$ [2]. Para finalizar esta sección, es importante notar que las expresiones (1.33) (1.34) y (1.35) son función a lo más de segundas derivadas de la métrica.

Con las herramientas que ya desarrollamos estamos en condiciones para estudiar la física del espacio-tiempo. Para ello, es necesario introducir *la acción de Einstein-Hilbert* que nos dará las ecuaciones de movimiento que describen la dinámica del espacio-tiempo.

1.2. La acción de Einstein Hilbert

La relatividad general nos permite describir la geometría del espacio-tiempo sin la necesidad de escoger un conjunto particular de coordenadas. Hoy en día sabemos que la gravitación Newtoniana es insuficiente para describir algunos fenómenos ya observados (como la precesión del perihelio de Mercurio [6]), además de ser incompatible con algunas de las ideas de la relatividad especial. La principal razón de esta incompatibilidad es que, en la teoría Newtoniana, la interacción gravitatoria es instantánea, es decir, más veloz que la luz. De esta manera es claro que la teoría de Newton debe ser modificada. Einstein, basado en lo anterior, llegó a la teoría de la relatividad general a través de diversas ideas. Entre ellas están *el principio de covarianza*, que nos dice que toda ley física debe tener la misma forma para cualquier observador. Otra fue *el principio de equivalencia*, es decir, que todos los cuerpos caen con la misma aceleración dentro de un campo gravitacional sin importar su masa. Finalmente *el principio de Mach*, propuesto por Ernst Mach, que en contraste con lo postulado por la relatividad especial, toda la materia en el universo contribuye localmente a los sistemas de referencia inerciales [5].

Para incorporar lo ya dicho, Einstein en 1915 tuvo que postular *la teoría de la relatividad general*, en ella la gravedad deja de ser una fuerza y es tratada más bien como una curvatura en la geometría del espacio-tiempo, que en principio, es debida a la presencia de materia y/o alguna fuente de energía. Así, el espacio-tiempo lo

definimos como una variedad pseudo-Riemanianna cuyas propiedades intrínsecas (es decir independientes de los observadores) deben ser descritas a través de la métrica $g_{\mu\nu}$. Para el resto de esta sección los desarrollos fueron extraídos, en su mayoría, del recurso [6] de la bibliografía.

Así, debemos describir la dinámica del espacio-tiempo a partir de ecuaciones de movimiento para la métrica espacio-temporal. Para ello, como dicta la teoría clásica de campos (de la cual hablaremos más adelante), debemos iniciar nuestro estudio a partir de una acción. Dicha acción debe contener las simetrías que representan las leyes de conservación, reproducir las ecuaciones de movimiento buscadas y debe ser un escalar. Por otro lado, conviene que sea función de la métrica: $g_{\mu\nu}$; $\partial_\alpha g_{\mu\nu}$; y a lo más $\partial_\beta \partial_\alpha g_{\mu\nu}$, esto con el fin de evitar patologías en esta teoría. De la misma forma nos gustaría que las ecuaciones de movimiento que aparezcan sean de segundo orden en la métrica. Por todo lo anterior el escalar más simple (y se podría probar que el único), es el escalar de curvatura (escalar de Ricci), por lo que definimos *la acción de Einstein Hilbert* dada por

$$S_{EH} = \int \sqrt{-g} d^4x R, \quad (1.36)$$

con el factor $g = \det(g_{\mu\nu})$ para tener invarianza en un cambio de coordenadas a nivel de la acción y R el escalar de curvatura. Ahora para encontrar dichas ecuaciones de movimiento debemos calcular la variación de esta acción para el campos $g_{\mu\nu}$. De la definición del escalar de curvatura (1.35)

$$\delta S_{EH} = \int d^4x [\delta \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta}]. \quad (1.37)$$

Notemos que estamos variando $g^{\alpha\beta}$, la métrica inversa, que para fines operativos nos dará las ecuaciones de movimiento correctas. Es fácil ver que la relación con $\delta g_{\mu\nu}$ está dada por

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma}) = \delta(\delta_\gamma^\alpha) \\ &= \delta g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} + g^{\alpha\beta} \delta g_{\beta\gamma} \end{aligned} \quad (1.38)$$

encontrando que

$$\delta g^{\alpha\rho} = -g^{\alpha\beta} \delta g_{\beta\gamma} g^{\gamma\rho}. \quad (1.39)$$

Ahora debemos obtener la variación del término $\sqrt{-g}$, por lo que al utilizar nuevamente la regla de la cadena

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta(-g).$$

El determinante por su parte, lo podemos definir a partir de la matriz de menores (ignorando la convención de suma de Einstein) de la siguiente forma

$$-g = - \sum_{\nu} (-1)^{\mu+\nu} g_{\mu\nu} \det(m_{\mu\nu}), \quad (1.40)$$

donde $m_{\mu\nu}$ representa la matriz menor que es el resultado de quitar la fila μ y la columna ν de la métrica. De la expresión (1.40), podemos calcular explícitamente la variación de $-g$, obteniendo

$$\delta(-g) = - \sum_{\nu} (-1)^{\mu+\nu} \delta g_{\mu\nu} \det(m_{\mu\nu}). \quad (1.41)$$

Además, a partir de la misma ecuación (1.40) podemos deducir otra ecuación igualmente útil para la métrica inversa

$$\begin{aligned} gg^{\lambda\mu} &= \sum_{\nu} (-1)^{\mu+\nu} g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} \det(m_{\mu\nu}) \\ &= \sum_{\nu} (-1)^{\mu+\nu} \delta_{\nu}^{\lambda} \det(m_{\mu\nu}) = (-1)^{\mu+\lambda} \det(m_{\mu\lambda}) \\ g^{\lambda\mu} &= \frac{(-1)^{\mu+\lambda}}{g} \det(m_{\mu\lambda}). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Visto lo anterior, al combinar las ecuaciones (1.41) y (1.42) obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \delta(-g) &= - \sum_{\nu} (-1)^{\mu+\nu} \delta g_{\mu\nu} \det(m_{\mu\nu}) \\ &= - \sum_{\nu} \delta g_{\mu\nu} g g^{\nu\mu} \\ &= -g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Así, la variación de la raíz del determinante de la métrica está dada por

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta(-g) = \frac{-g}{2\sqrt{-g}} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \quad (1.44)$$

que al sustituir lo encontrado en la ecuación (1.39) en (1.44) obtenemos

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\alpha} \delta g^{\alpha\beta} g_{\nu\beta} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}. \quad (1.45)$$

Finalmente, sustituyendo en la ecuación (1.37), la expresión deducida en (1.45), la variación de la acción de Einstein Hilbert puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= \int d^4x [\delta\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}] + \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \left[-\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \right] + \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Al pedir que $\delta S_{EH} = 0$, obtenemos dos términos. El que representa a la segunda integral veremos que se puede ver como un término de frontera que no afecta a la dinámica de la geometría del interior, y el de la primera integral que define la ecuación de Euler Lagrange correspondiente, que esta dada por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0, \quad (1.46)$$

que corresponde a la ecuación de movimiento para el campo gravitacional que representan toda la dinámica del espacio-tiempo en vacío (ausencia de materia). La ecuación (1.46) es conocida como la ecuación de campo de Einstein, y fueron publicadas en 1915.

Ahora toca estudiar el segundo término de la integral (1.2) o bien, la variación de $\delta R_{\mu\nu}$. Nuevamente como la variación cumple la regla de Leibnitz y conmuta con las parciales, la variación del tensor de Ricci, la podemos expresar como la variación de los símbolos de Christoffel, obteniendo

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \delta \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \Gamma_{\nu\mu}^\rho + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \delta \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \delta \Gamma_{\lambda\mu}^\rho. \quad (1.47)$$

Aunque $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ no sea un tensor (pues no transforma como uno), demostraremos que $\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ es un tensor. De esta manera, calculamos la variación como

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \delta g^{\alpha\lambda} \Gamma_{\lambda\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\mu \delta g_{\lambda\nu} + \partial_\nu \delta g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda \delta g_{\mu\nu}),$$

que al definir $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = g^{\alpha\lambda} \Gamma_{\lambda\mu\nu}$ y usar la ecuación (1.39) encontramos que

$$\begin{aligned} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= \frac{1}{2} (g^{\alpha\lambda} (\partial_\mu \delta g_{\lambda\nu} + \partial_\nu \delta g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda \delta g_{\mu\nu}) - g^{\alpha\rho} \delta g_{\rho\sigma} g^{\sigma\lambda} 2(\Gamma_{\lambda\mu\nu})) \\ &= \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\mu \delta g_{\lambda\nu} + \partial_\nu \delta g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda \delta g_{\mu\nu}) - g^{\alpha\lambda} \delta g_{\lambda\sigma} 2(\Gamma_{\mu\nu}^\sigma) \\ &= \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\mu \delta g_{\lambda\nu} + \partial_\nu \delta g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda \delta g_{\mu\nu} - 2\Gamma_{\mu\nu}^\sigma \delta g_{\lambda\sigma}). \end{aligned}$$

Por otro lado, utilizando las propiedades de la métrica y los símbolos de Christoffel obtenemos

$$\begin{aligned} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\mu \delta g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \delta g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \delta g_{\lambda\sigma} + \partial_\nu \delta g_{\mu\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \delta g_{\sigma\lambda} \\ &\quad - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \delta g_{\mu\sigma} - \partial_\lambda \delta g_{\mu\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma \delta g_{\mu\sigma} + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \delta g_{\sigma\nu}). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Que se puede reescribir como

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\nabla_\mu \delta g_{\lambda\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\lambda} - \nabla_\lambda \delta g_{\mu\nu}), \quad (1.49)$$

Así, reescribimos la variación en el tensor de Ricci como

$$\delta R_{\mu\nu} = (\nabla_\lambda (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)). \quad (1.50)$$

De esta forma, a partir de la ecuación (1.50) podemos calcular la cantidad que necesitamos, es decir,

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} (\nabla_\lambda \delta(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu \delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) \\ &= (\nabla_\lambda (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)), \end{aligned}$$

cambiando índices en el segundo término ν por λ , obtenemos:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= (\nabla_\lambda (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\lambda (g^{\mu\lambda} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\nu)) \\ &= \nabla_\lambda (g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\nu). \end{aligned} \quad (1.51)$$

La ecuación (1.51), nos muestra que la segunda integral en la ecuación (1.2) es la divergencia de un tensor, que en virtud del teorema de la divergencia¹ podemos expresarla como una integral de superficie en la frontera, que no afecta a la dinámica de la métrica en el interior de ésta. Así, nos gustaría imponer condiciones de frontera de Dirichlet o Neumann dependiendo de la situación de nuestro interés [6]. Para aplicar alguna de estas condiciones de frontera, conviene expresar $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$ en términos de $\delta g_{\mu\nu}$. Al sustituir la ecuación (1.49) en la expresión (1.51), obtenemos

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \nabla_\lambda (g^{\mu\nu} \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (\nabla_\mu \delta g_{\alpha\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\alpha} - \nabla_\alpha \delta g_{\mu\nu}) \\ &\quad - g^{\mu\lambda} \frac{1}{2} g^{\nu\alpha} (\nabla_\nu \delta g_{\alpha\mu} + \nabla_\mu \delta g_{\nu\alpha} - \nabla_\alpha \delta g_{\mu\nu})) \\ &= \frac{1}{2} (\nabla^\alpha \nabla^\nu \delta g_{\alpha\nu} + \nabla^\alpha \nabla^\mu \delta g_{\mu\alpha} - g^{\mu\nu} \nabla^\alpha \nabla_\alpha \delta g_{\mu\nu} \\ &\quad - \nabla^\mu \nabla^\alpha \delta g_{\alpha\mu} - g^{\nu\alpha} \nabla_\mu \nabla^\mu \delta g_{\nu\alpha} + \nabla^\mu \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (1.52)$$

encontrando finalmente que

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \nabla^\mu \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} - g^{\mu\nu} (\nabla_\alpha \nabla^\alpha) \delta g_{\mu\nu}. \quad (1.53)$$

Si definimos ahora $g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta = \square$, como el operador D'alambertiano, para una derivada covariante, podemos reescribir la variación de la acción de Einstein Hilbert como

$$\delta S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla^\mu \nabla^\nu - g^{\mu\nu} \square) \delta g_{\mu\nu}, \quad (1.54)$$

que expresado en términos de la divergencia de un tensor, está dada por

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \\ &\quad + \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\lambda (g^{\mu\lambda} g^{\alpha\nu} - g^{\mu\nu} g^{\lambda\alpha}) \nabla_\alpha \delta g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

¹El teorema de Gauss o Teorema de la divergencia para espacios curvos podemos escribirlo para un vector, A^μ , como

$$\int_{\mathcal{V}} \sqrt{-g} \nabla_\mu A^\mu d^4x = \int_{\partial\mathcal{V}} A^\mu ds_\mu,$$

donde \mathcal{V} es una región del espacio-tiempo, $\partial\mathcal{V}$ frontera de la región \mathcal{V} y ds_ν el diferencial de la superficie [7].

Esto lo podemos reescribir como

$$\delta S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\lambda (\Delta B)^\lambda, \quad (1.56)$$

donde de la ecuación (1.55) podemos identificar

$$\Delta B^\lambda = (g^{\lambda\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\lambda\nu} g^{\alpha\beta}) \nabla_\nu \delta g_{\alpha\beta}. \quad (1.57)$$

Tomando ahora el segundo término de la integral en la ecuación (1.56), encontramos que

$$\int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\lambda (\Delta B)^\lambda = \oint ds_\lambda (\Delta B)^\lambda = h_r \oint d^3y \sqrt{-h} n_\lambda (\Delta B)^\lambda, \quad (1.58)$$

donde ds_λ es el diferencial de superficie que define a la frontera del espacio-tiempo, h_r es un parametro el cual discutiremos más adelante, n_λ es el vector normal a la superficie y h_{ij} es la métrica inducida de dicha superficie. Además, al simplificar vemos que

$$n_\lambda (\Delta B)^\lambda = (n^\alpha g^{\mu\nu} - n^\mu g^{\alpha\nu}) \nabla_\mu \delta g_{\alpha\nu}. \quad (1.59)$$

Usando la definición de un proyector en el espacio tiempo (que proyecta tensores definidos en el espacio-tiempo en la dirección tangencial en la superficie que nos interesa [6]) podemos escribir a la métrica como

$$g^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + h_r n^\mu n^\nu, \quad (1.60)$$

el parametro h_r viene a partir de la relación: $n^\mu n_\mu = h_r$, y por tanto, define la clase del vector, es decir, temporaloide ($h_r = -1$), espacialoide ($h_r = 1$) o nulo ($h_r = 0$). Dicho esto, supondremos superficies no nulas [7]. Así, sustituyendo la ecuación (1.60) en (1.59)

$$\begin{aligned} n_\lambda (\Delta B)^\lambda &= (n^\alpha (h^{\mu\nu} - h_r n^\mu n^\nu) - n^\mu (h^{\alpha\nu} - h_r n^\alpha n^\nu)) \nabla_\mu \delta g_{\alpha\nu} \\ &= (n^\alpha h^{\mu\nu} - n^\mu h^{\alpha\nu}) \nabla_\mu \delta g_{\alpha\nu}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Escrita la variación como en la ecuación (1.61), estamos en condiciones para imponer nuestras condiciones de frontera. Tomando así las condiciones de Dirichlet, que matemáticamente traducimos como $\delta g_{\mu\nu}|_{frontera} = 0$ y considerando además que su derivada tangencial nos deja en la frontera, el cambio en forma tangencial es cero, es decir, $h^{\mu\nu} \nabla_\mu \delta g_{\rho\nu}|_{frontera} = 0$. Por otro lado debemos notar que la derivada normal definida por: $n^\mu \nabla_\mu \delta g_{\rho\nu}$ no es necesariamente cero pues esa información la desconocemos y hacerla cero significaría imponer condiciones de Neumann, que implicaría sobredefinir nuestro problema.

Así, al imponer condiciones de frontera de Dirichlet, implica

$$-n^\mu h^{\rho\nu} \nabla_\mu \delta g_{\rho\nu} = -n^\mu h^{\rho\nu} (\partial_\mu \delta g_{\rho\nu} - \Gamma_{\mu\rho}^\beta \delta g_{\beta\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\beta \delta g_{\rho\beta}) = -n^\mu h^{\rho\nu} \partial_\mu \delta g_{\rho\nu},$$

y por tanto al reescribir la variación de Einstein Hilbert encontramos que

$$\delta S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + h_r \oint d^3y \sqrt{-h} (-h^{\rho\nu} n^\mu \partial_\mu \delta g_{\rho\nu}). \quad (1.62)$$

Es claro de la ecuación (1.62), que al aplicar únicamente las condiciones de frontera de Dirichlet no reproduce las ecuaciones de movimiento buscadas pues aún quedan términos de frontera diferentes de cero. Sin embargo, para arreglar lo anterior conviene definir una nueva acción que no modifique la dinámica del interior, es decir, que conduzca a la misma ecuación de movimiento que S_{EH} .

Sabemos, de lo hecho en [6], que la acción de Einstein-Hilbert puede ser reescrita de la siguiente forma

$$S_{EH} = 2 \int d^4x \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} (\Gamma_{\nu\alpha}^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\nu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\nu\mu}^\nu) + \int d^4x \partial_\lambda (\sqrt{-g} B^\lambda), \quad (1.63)$$

donde

$$B^\lambda = g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \Gamma_{\nu\mu}^\nu. \quad (1.64)$$

que aunque no sea un tensor cumple que

$$\sqrt{-g} \nabla_\lambda B^\lambda = \partial_\lambda (\sqrt{-g} B^\lambda), \quad (1.65)$$

y por tanto podemos definir a la acción de Einstein como

$$S_E = S_{EH} - \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\lambda B^\lambda = 2 \int d^4x \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} (\Gamma_{\nu\alpha}^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\nu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\nu\mu}^\nu). \quad (1.66)$$

Vale la pena decir que esta nueva acción cumple las condiciones ya dichas, pues este solo ha agregado un término de frontera y que por definición no afecta a la dinámica del interior [6]. Por lo que ahora en concreto habría que estudiar la variación de la acción de Einstein que se traduce en variar únicamente el término que hemos agregado. De esta forma, obtenemos que

$$\delta \left(h_r \oint d^3y \sqrt{-h} n_\lambda (B)^\lambda \right) = h_r \oint d^3y \sqrt{-h} n_\lambda \delta (B)^\lambda, \quad (1.67)$$

así al calcular la variación de B^λ a partir de la ecuación (1.64), aplicar condiciones de Dirichlet y comparar con la ecuación (1.51) y (1.57), simplificamos obteniendo

$$\delta B^\lambda = g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\nu\mu}^\nu = (g^{\lambda\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\lambda\nu} g^{\alpha\beta}) \nabla_\nu \delta g_{\alpha\beta} |_{frontera} = \Delta B^\lambda |_{frontera}. \quad (1.68)$$

Finalmente al extremizar la acción, es decir, $\delta S_E = 0$ encontramos que

$$\begin{aligned} 0 = \delta S_E &= \int d^4x \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + h_r \oint d^3y \sqrt{-h} (-h^{\rho\nu} n^\mu \partial_\mu \delta g_{\rho\nu}) \\ &\quad - h_r \oint d^3y \sqrt{-h} (-h^{\rho\nu} n^\mu \partial_\mu \delta g_{\rho\nu}) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1.69)$$

que reproduce las ecuaciones de movimiento buscadas, es decir, $G_{\mu\nu} = 0$.

Hasta ahora no hemos incorporado la parte que codifica a la materia en las ecuaciones de Einstein. Para ello debemos agregar a la acción de Einstein Hilbert el término S_{mat} que corresponde a la materia que se encuentra en el espacio-tiempo que deseamos estudiar (esta puede venir de un campo escalar, vectorial, tensorial, etc.). Por lo que la acción con el término de materia está dada por

$$S = \frac{1}{\kappa} S_{EH} + S_{mat}(\phi, \partial_\mu \phi, A_\nu, \dots), \quad (1.70)$$

donde κ es una constante que agregamos por unidades. A partir de este momento y a menos que se especifique, en el resto de este texto tomaremos unidades naturales, es decir, $G = 1$ y $c = 1$. Así, variando el nuevo término tenemos

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{mat}}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (1.71)$$

obteniendo las siguientes ecuaciones de movimiento,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (1.72)$$

Ahora para encontrar el valor de κ , recordemos la ecuación de Newton para el potencial gravitacional, dada por

$$\nabla^2 \phi = 4\pi\rho, \quad (1.73)$$

donde ρ es la densidad de materia que es fuente del campo gravitacional. La expresión (1.73) es una ecuación de segundo orden para el potencial gravitacional conocida como la ecuación de Poisson. Debemos notar que la ecuación de Newton tiene del lado izquierdo una ecuación de segundo orden para el potencial y en su lado derecho la fuente del campo. Por otro lado, como mencionamos anteriormente la ecuación de movimiento hallada en (1.72) en su lado izquierdo tiene ecuaciones de segundo orden para la métrica que representan la dinámica de la geometría del espacio-tiempo y del lado derecho el término que codifica a la materia. Por lo que haciendo una comparación de las dos ideas anteriores en el límite Newtoniano podemos asociar a la métrica $g_{\mu\nu}$ con el potencial newtoniano ϕ y encontrar la siguiente ecuación

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.74)$$

hallando que $\kappa = 8\pi$ [2]. Permitiendo reescribir la ecuación (1.70) como

$$S = \frac{1}{8\pi} S_{EH} + S_{mat}. \quad (1.75)$$

Como hemos dicho, la presencia de materia influye en la estructura del espacio-tiempo y esto se ve reflejado en cómo escojamos $T_{\mu\nu}$, pues comparando con electromagnetismo, no es lo mismo describir el campo eléctrico producido por una densidad

de carga puntual que el campo descrito por una placa con densidad de carga. De la misma forma podemos describir diversos tensores de energía-momento para distintas situaciones físicas, que cambiarían la estructura del espacio-tiempo. En una teoría clásica de campos el tensor de energía-momento, codifica la densidad y la densidad de corriente, de energía y momento. Dicho tensor tiene el mismo papel de la densidad de materia en la ecuación (1.73), es decir, la fuente del campo gravitacional [2]. Éste por definición cumple la siguiente condición

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

Cabe recalcar que dicha expresión es válida para un espacio-tiempo plano. Por tanto, en espacios-tiempos curvos se debe modificar sustituyendo por la derivada covariante, obteniendo [8]

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

Con esto en mente, la ecuación de campo debe cumplir la condición de conservación de energía y momento. De esta forma, partiendo de la ecuación de movimiento

$$G^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu},$$

la conservación se dará si y solo si la divergencia del tensor de Einstein es cero. Pero antes de hacer ese cálculo engorroso debemos notar dos cosas importantes: el tensor de Einstein está formado de contracciones del tensor de Riemann $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ que a su vez posee propiedades interesantes, entre ellas está una de las identidades de Bianchi. En concreto, ésta relaciona las componentes de la derivada covariante del tensor de Riemann, y manipulando dichas identidades podemos probar que efectivamente se cumple que $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$, [2] y, por tanto, la ecuación de campo conserva la energía y momento. Vale la pena mencionar que una forma heurística de deducir la ecuación de campo es a partir del desarrollo anterior que fue como el mismo Einstein dedujo la forma final de su ecuación.

Algunos ejemplos de tensores de energía-momento, es el que describe un campo escalar ϕ con masa, o también conocido como campo de Klein-Gordon del cual hablaremos más adelante

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(m^2\phi^2 + \partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi), \quad (1.76)$$

donde m es la masa del campo [2]. Otro tensor de energía momento importante y muy utilizado para modelos cosmológicos, es el que describe a un fluido perfecto, dicho tensor está dado por

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (1.77)$$

donde p es la presión, ρ la densidad de masa del fluido y u_μ la cuadrivelocidad de los elementos del fluido [9]. Por último otro tensor de energía momento importante es el que describe al campo electromagnético. Dicho tensor está dado por

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\beta} F_{\nu}^{\beta} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right), \quad (1.78)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$, es el tensor de Faraday con A_{μ} el cuadripotencial electromagnético [2].

Dicho esto, es claro que llegar a la ecuación de Einstein a través de la conservación de $T_{\mu\nu}$, nos permite agregar un termino al lado izquierdo de la ecuación de campo. De esa manera, sabiendo que [2]

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0,$$

en particular

$$\nabla_{\mu} g^{\mu\nu} = 0 \quad (1.79)$$

por lo que siguiendo la deducción anterior, si colocamos al tensor de Einstein en la ecuación de campo por el hecho de que tiene divergencia cero, podríamos modificar la ecuación de campo agregando que

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.80)$$

donde Λ es una constante. Es fácil ver que (1.80) sigue teniendo divergencia cero, por lo que agregar este nuevo término no modifica la condición para $T_{\mu\nu}$. Pero a cambio hemos sacrificado que Minkowski deje de ser solución para $\Lambda \neq 0$. Físicamente Λ tiene mucha relevancia, pues tomando un tensor de energía momento adecuado, como el descrito por la ecuación (1.77), es posible modelar la geometría del universo, obteniendo como resultado que esta no es estática en contraste a lo que pensaba el mismo Einstein [6]. Por lo que para arreglar este gran problema incorporó este término para eliminar la dinámica predicha en su ecuación. Por ello a Λ se le conoce como la *constante cosmológica*. Cabe mencionar que podemos modificar la acción de Einstein-Hilbert para incluir esta constante, así escribimos

$$S_{EH,\Lambda} = \int d^4x \sqrt{-g} [R - 2\Lambda], \quad (1.81)$$

cuyas ecuaciones de movimiento son las dadas en (1.80).

Para finalizar la discusión sobre la acción de Einstein Hilbert, notemos que aunque hemos deducido correctamente las ecuaciones de movimiento a partir del principio variacional, existe un detalle con el término B^{λ} : este no tiene ningún significado físico. Veamos que el término de frontera lo podríamos modificar, partiendo del hecho de que este no es único pues siempre podemos agregar cantidades que se cancelan pidiendo las condiciones de Dirichlet. En particular podemos agregar términos que tienen que ver con la geometría extrínseca [6] que aparece por encajar una superficie de una dimensión menor en otra de dimensión mayor. Así, definimos el término de frontera de *Gibbons-Hawking-York* como

$$S_{GHY} = 2h_r \oint d^3y \sqrt{h} K, \quad (1.82)$$

K es la traza del tensor de curvatura extrínseca $K_{\mu\nu}$, que podemos definir como

$$K_{\alpha\beta} = h_{\alpha}^{\gamma} h_{\beta}^{\delta} \nabla_{\gamma} n_{\delta}. \quad (1.83)$$

La curvatura extrínseca nos da una medida de cómo encajamos las superficies tri-dimensionales en el espacio-tiempo de tres dimensiones espaciales y una temporal a través de como cambia el vector normal al transportarse paralelamente en la superficie. De esta manera, escribimos a la traza como

$$\begin{aligned} K &= h^{ij} K_{ij} = h^{ij} h_i^{\gamma} h_j^{\delta} \nabla_{\gamma} n_{\delta} = h^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} n_{\beta} \\ &= (g^{\alpha\beta} - h_r n^{\alpha} n^{\beta}) \nabla_{\alpha} n_{\beta} = g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} n_{\beta} \\ &= \nabla_{\alpha} n^{\alpha}, \end{aligned} \quad (1.84)$$

donde hemos utilizado que, $n_{\beta}(\nabla_{\alpha} n^{\beta}) = 0$ [6]. Así, podemos calcular la variación de K como [7]

$$\delta K = \delta(h^{\mu\nu}(\nabla_{\mu} n_{\nu})) = \delta h^{\mu\nu}(\nabla_{\mu} n_{\nu}) + h^{\mu\nu}(\partial_{\mu} \delta n_{\nu} - \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} n_{\beta} - \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} \delta n_{\beta}).$$

Si pedimos ahora que la variación de $h_{\mu\nu}$ y n_{μ} en la frontera sea cero, obtenemos

$$\begin{aligned} \delta K &= -h^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} n_{\beta} \\ &= -\frac{1}{2} h^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} (\partial_{\mu} \delta g_{\nu\alpha} + \partial_{\nu} \delta g_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha} \delta g_{\mu\nu}) n_{\beta} \\ &= -\frac{1}{2} h^{\mu\nu} (\partial_{\mu} \delta g_{\nu\alpha} + \partial_{\nu} \delta g_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha} \delta g_{\mu\nu}) n^{\alpha}, \end{aligned}$$

que al imponer la condición de Dirichlet, podemos reescribir a δK de la siguiente forma

$$\delta K = \frac{1}{2} h^{\mu\nu} n^{\alpha} (\partial_{\alpha} \delta g_{\mu\nu}). \quad (1.85)$$

Por otro lado, como variar $\sqrt{-h}$ implica variar h_{ij} , entonces escribimos δS_{GHY} como [7]

$$\begin{aligned} \delta S_{GHY} &= 2h_r \oint d^3y \sqrt{-h} \left(\frac{1}{2} h^{\mu\nu} n^{\alpha} (\partial_{\alpha} \delta g_{\mu\nu}) \right) \\ &= h_r \oint d^3y \sqrt{-h} h^{\mu\nu} n^{\alpha} (\partial_{\alpha} \delta g_{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (1.86)$$

que es justo la expresión de la segunda integral que encontramos en la ecuación (1.62). Así, al sumarle el término S_{GHY} a S_{EH} , obtenemos

$$\begin{aligned} S_E &= S_{EH} + S_{GHY} \\ \delta S_E &= \delta S_{EH} + \delta S_{GHY} = \int d^4x \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

que reproducen nuevamente las ecuaciones de movimiento buscadas, al imponer únicamente condiciones de Dirichlet. Pero ahora a partir de una acción que es función de la curvatura intrínseca y extrínseca.

1.3. Agujeros negros en la teoría de Einstein Hilbert

Una vez deducidas las ecuaciones de movimiento para la métrica, debemos estudiar algunas de las soluciones más importantes para los fines de esta tesis. En concreto las que representan a agujeros negros.

Antes de ello, conviene definir dos conceptos que usaremos a lo largo de este estudio. El primero corresponde al significado de una *geodésica*, las cuales definen las trayectorias más rectas posibles y temporaloides que traza una partícula con masa (en Minkowski estas corresponden a líneas rectas) [2]. Físicamente representan a las partículas que están en caída libre, es decir, que se encuentran moviéndose en presencia de un campo gravitacional que, como ya hemos dicho, modifica la geometría del espacio-tiempo. Para encontrar la ecuación diferencial que siguen estas curvas, sabemos que el vector tangente a una curva está dado por

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (1.87)$$

donde λ es un parámetro afín que caracteriza a la curva $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ en el espacio-tiempo. Notemos que si $\lambda = \tau$, es decir, que parametrizamos a la curva con el tiempo propio de la partícula, el vector tangente coincide con la definición de cuadrivelocidad. La acción de una partícula libre con masa m está dada por [6]

$$S = -m \int ds = -m \int \left[-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right]^{1/2} d\lambda, \quad (1.88)$$

Que al pedir $\delta S = 0$, obtenemos las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \quad (1.89)$$

que en términos del vector tangente queda escrita como

$$v^\alpha \nabla_\alpha v^\mu = 0. \quad (1.90)$$

La ecuación diferencial (1.89) define a las curvas geodésicas. Otra definición de geodésica que podemos dar a partir de la ecuación (1.90) es como la curva cuyo vector tangente es transportado paralelamente a lo largo de si misma [5]. Por otro lado, es fácil ver que cualquier parametrización afín a λ la cumple, en particular para los fines de esta tesis, conviene parametrizar con el tiempo propio τ . Vale la pena mencionar que la ecuación diferencial (1.89), que como ya hemos mencionado, representa las trayectorias de partículas de prueba puntuales, libres y en presencia de un campo gravitacional. Por lo que en cierto límite debemos retomar a la ecuación de movimiento de mecánica Newtoniana. En este caso al tomar el espacio-tiempo de Minkowski y el límite de mecánica Newtoniana, es decir, $v \ll 1$, y por tanto $\tau \approx t$, nos recupera la ecuación de movimiento para una partícula libre, en mecánica Newtoniana. En el

límite de campo débil (límite newtoniano) la métrica del espacio-tiempo se encuentra determinada por el potencial newtoniano ϕ , dicha métrica puede ser escrita como [2]

$$ds^2 = -(1 + 2\phi)dt^2 + (1 - 2\phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (1.91)$$

encontrando la siguiente ecuación de movimiento para las partículas

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\partial^i \phi. \quad (1.92)$$

De esta manera, la ecuación (1.92) reproduce la segunda ley de Newton para una partícula en presencia de un campo gravitacional.

El segundo concepto se trata de de un *campo vectorial de Killing*. Dichos campos representan simetrías en el espacio-tiempo que guardan una estrecha relación con cantidades conservadas [3]. Para encontrar la ecuación diferencial que satisfacen dichos campos, debemos definir la derivada de Lie que describe el “arrastre” de una cantidad vectorial o tensorial a lo largo de una curva identificada por su vector tangente. La derivada de Lie de un campo tensorial de tipo (0,2) se puede escribir como

$$\mathcal{L}_\xi T_{\mu\nu} = \xi^\alpha \partial_\alpha T_{\mu\nu} + T_{\mu\alpha} \partial_\nu \xi^\alpha + T_{\alpha\nu} \partial_\mu \xi^\alpha, \quad (1.93)$$

donde $\xi = \xi^\mu e_\mu$ es el vector tangente que define el arrastre. Con la definición de la ecuación (1.93), un vector de Killing k , es aquel que cumple

$$\mathcal{L}_k g_{\mu\nu} = 0. \quad (1.94)$$

Interpretamos de esta manera que al hacer el arrastre de la métrica a través de un vector de Killing, ésta es invariante. Ahora falta calcular la forma explícita de la ecuación diferencial correspondiente al campo vectorial de Killing. Para ello, reescribimos la ecuación (1.94) como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k g_{\mu\nu} &= k^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\mu\alpha} \partial_\nu k^\alpha + g_{\alpha\nu} \partial_\mu k^\alpha \\ &= k^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} + [\partial_\nu (g_{\mu\alpha} k^\alpha) - k^\alpha \partial_\nu g_{\mu\alpha}] + [\partial_\mu (k^\alpha g_{\alpha\nu}) - k^\alpha \partial_\mu g_{\alpha\nu}] \\ &= k^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} + [\partial_\nu k_\mu - k^\alpha \partial_\nu g_{\mu\alpha}] + [\partial_\mu k_\nu - k^\alpha \partial_\mu g_{\alpha\nu}] \\ &= \partial_\nu k_\mu - k^\alpha \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \\ &\quad + \partial_\mu k_\nu - k^\alpha \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \\ &= \partial_\nu k_\mu - k^\alpha \Gamma_{\alpha\mu\nu} + \partial_\nu k_\mu - k^\alpha \Gamma_{\alpha\mu\nu} \\ &= \partial_\nu k_\mu - k_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \partial_\nu k_\mu - k_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \\ &= \nabla_\nu k_\mu + \nabla_\mu k_\nu, \end{aligned}$$

por lo que la ecuación para el campo de Killing es

$$\nabla_\nu k_\mu + \nabla_\mu k_\nu = 0. \quad (1.95)$$

Notemos que la ecuación diferencial (1.95) es lineal, por lo que la suma de dos campos de Killing sigue siendo un campo de Killing. Además se puede probar que el conmutador² de dos campos vectoriales de Killing sigue siendo un campo de Killing [6].

Por otro lado, al tomar un sistema de coordenadas específico, podemos calcular la ecuación de Killing para el vector $k = \frac{\partial}{\partial \xi}$, donde ξ es una coordenada espacio-temporal y k representa al vector base en dicha dirección. Así, la ecuación (1.94) se simplifica obteniendo

$$\mathcal{L}_k g_{\mu\nu} = \partial_\xi g_{\mu\nu}. \quad (1.97)$$

Si la métrica $g_{\mu\nu}$ no depende de la coordenada ξ , es claro que k es un vector de Killing.

Estos vectores se relacionan con cantidades conservadas. Por tanto, si definimos la cantidad

$$K = p^\mu k_\mu, \quad (1.98)$$

donde $p^\mu = mu^\mu$ es el cuádrimomento de la partícula. Podemos probar que la cantidad en (1.98) es en efecto una cantidad conservada para curvas que representan geodésicas. Para ello, escribimos

$$\begin{aligned} \frac{d(p^\mu k_\mu)}{d\tau} &= k_\mu \frac{dp^\mu}{d\tau} + p^\mu \frac{dk_\mu}{d\tau} = mk_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} + p^\mu \frac{dk_\mu}{d\tau} \\ &= mk_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} + mu^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \partial_\alpha k_\mu \\ &= mk_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} + mu^\mu u^\alpha (\nabla_\alpha k_\mu + \Gamma_{\alpha\mu}^\beta k_\beta) \\ &= mk_\mu \left(\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta \right) + mu^\mu u^\alpha \nabla_\alpha k_\mu, \end{aligned}$$

y de la ecuación (1.95),

$$0 = u^\mu u^\alpha (\nabla_\mu k_\alpha + \nabla_\alpha k_\mu) = 2u^\mu u^\alpha \nabla_\alpha k_\mu,$$

además como $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$:

$$\frac{d(p^\mu k_\mu)}{d\tau} = mk_\mu \left(\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \right) = 0, \quad (1.99)$$

y por tanto, para una partícula que sigue una geodésica conserva la cantidad (1.98). Más adelante veremos que para el espacio-tiempo de Schwarzschild dichas cantidades conservadas representan a la energía y el momento de dichas partículas.

²Este conmutador se encuentra en el contexto de geometría diferencial, por lo que si tenemos el campo vectorial $X = X^\mu e_\mu$ y $Y = Y^\mu e_\mu$ con e_μ la base del espacio-tiempo, definimos al conmutador de estos dos campos como el campo vectorial [4, 6]

$$[X, Y] = (X^\mu \partial_\mu Y^\nu - Y^\mu \partial_\mu X^\nu) e_\nu. \quad (1.96)$$

Una vez vistos los conceptos anteriores, estamos listos para estudiar las soluciones de las ecuaciones de Einstein. Como ya hemos dicho queremos encontrar las soluciones que corresponden a agujeros negros. Por tanto, debemos estudiar en concreto las soluciones en ausencia de materia de las ecuaciones de Einstein, es decir, con $T_{\mu\nu} = 0$. Es fácil ver qué podemos simplificar la ecuación de movimiento. Así, recordando la ecuación de campo sin constante cosmológica

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu},$$

en ausencia de materia podemos calcular la traza del tensor de Einstein, obteniendo

$$G = g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) = R - 2R = 0,$$

que implica

$$R = 0,$$

y por tanto, podemos reescribir la ecuación de movimiento como

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{1.100}$$

La ecuación (1.100) es útil para obtener la métrica de un agujero negro.

Ya con la ecuación de movimiento simplificada, debemos hablar de la solución más sencilla que representa un agujero negro. Esta se trata de la *solución de Schwarzschild*. Además, corresponde a la primera solución de la ecuación de campo de Einstein y fue hallada por el físico Karl Schwarzschild en 1916. La solución de Schwarzschild describe una región sin materia, con simetría esférica y estática. Qué en otras palabras interpretamos, como el campo gravitacional en la región exterior de un cuerpo completamente esférico que no evoluciona en el tiempo.

Ahora, como mencionamos anteriormente, la solución de Schwarzschild contiene 2 simetrías: esférica y estática. Veamos en qué consiste cada una. Por su parte la simetría esférica aparece en aquellas métricas que son invariantes bajo rotaciones. En ese sentido la métrica espacio temporal debe estar relacionada en cada órbita con múltiplos de la métrica correspondiente a la 2-esfera, esta cantidad en coordenadas esféricas (θ, ϕ) la definimos como [6]

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \tag{1.101}$$

Las 2-esferas están completamente caracterizadas por su área A , por lo que conviene definir la coordenada r como

$$r = \left(\frac{A}{4\pi} \right)^{1/2}, \tag{1.102}$$

así el elemento de línea para cada órbita de la 2-esfera esta dado por:

$$ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \tag{1.103}$$

La simetría estática se encuentra en métricas que son invariantes bajo una reflexión temporal, es decir, $t \rightarrow -t$. Físicamente dicha simetría se rompe cuando hay movimientos de rotación involucrados (como por ejemplo en el agujero negro de Kerr [11]), pues al aplicar dicha reflexión temporal implica un cambio en la dirección de rotación. Por otro lado, la simetría estática implica que el espacio-tiempo tiene simetría estacionaria. Ésta se encuentra presente en métricas que no tienen dependencia explícita en el tiempo, y por tanto invariantes bajo traslaciones temporales, es decir, $t' \rightarrow t + a$. Esto lo podemos resumir con la siguiente condición: $\partial_t g_{\mu\nu} = 0$.

Ahora, para escribir el elemento de línea más general con estas 3 simetrías eligiendo coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) , debemos recordar la métrica de relatividad especial en dichas coordenadas que se define como

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.104)$$

por lo que si conservamos la forma de la métrica de la ecuación (1.104) y tomando las consideraciones sobre las otras simetrías, la forma más simple y general para el elemento de línea es

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + C(r)d\Omega^2. \quad (1.105)$$

Definimos una nueva coordenada $C(r') = r^2$ que nos permite reescribir la ecuación (1.105) como

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.106)$$

Así, al introducir esta métrica en la ecuación (1.100), obtenemos las siguientes expresiones para A y B [10]

$$\begin{aligned} B(r) &= \frac{K}{A(r)} \\ A(r) &= \left(1 + \frac{C}{r}\right), \end{aligned} \quad (1.107)$$

donde K y C son constantes de integración. Para hallar dichos valores debemos estudiar el comportamiento asintótico del espacio-tiempo. Para ello, debemos considerar las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica Λ que deducimos en la anteriormente, es decir,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0.$$

Vale la pena decir, que agregar dicha constante tiene fuertes implicaciones en las soluciones de la ecuación de campo. Debido a esto, podemos definir tres geometrías diferentes. La primera representa a $\Lambda = 0$, resultando geometrías asintóticamente planas, es decir, que para $r \rightarrow \infty$ debe recuperarse el espacio-tiempo de Minkowski. Sin embargo, al tener $\Lambda \neq 0$, el espacio-tiempo de Minkowski deja de ser solución, obteniendo dos diferentes geometrías: *de Sitter* para $\Lambda > 0$ y *anti-de Sitter* para $\Lambda < 0$.

Retomando la discusión sobre las constantes de integración C y K , para la solución de Schwarzschild, hemos tomado $\Lambda = 0$, por lo que tenemos una geometría

asintóticamente plana, que nos fija la constante, $K = 1$ [6]. Ahora para hallar C , debemos analizar el comportamiento de una partícula prueba en el régimen de campo débil, es decir, $r \rightarrow \infty$. Encontrando que: $C = -2M$ (recuperando G y c , el valor de $C = -\frac{2GM}{c^2}$), donde M es la masa Newtoniana que provoca esta geometría medida desde un observador (en este caso, la partícula prueba) en infinito. Así el elemento de línea de Schwarzschild en coordenadas de Schwarzschild está dado por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.108)$$

Recuperar el espacio-tiempo de Minkowski en $r \rightarrow \infty$, implica que las coordenadas t y r corresponden a observadores en infinito.

Ahora de la ecuación (1.108) debemos ver que hay dos valores para r que son preocupantes: $r = 0$ y $r = 2M$. Estos representan potencialmente divergencias en la métrica. Como hemos dicho la relatividad general nos da la libertad de escoger las coordenadas, por lo que estas singularidades podrían depender de la mala elección del sistema de coordenadas. Para averiguarlo debemos preguntarnos acerca de cantidades que no dependan del sistema de coordenadas, dichos objetos son los escalares. El escalar de curvatura de la solución de Schwarzschild es cero en todos el espacio-tiempo, por lo que no nos puede dar la información que necesitamos, y como el tensor de Ricci también es cero debemos construir otro escalar con el tensor de Riemann (diferente de cero pues la geometría no es plana). En particular, podemos definir el escalar de Krestchmann como [11]

$$I = R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (1.109)$$

que en el caso de la solución de Schwarzschild es

$$I = \frac{48M^2}{r^6}. \quad (1.110)$$

De la ecuación (1.110), es claro que el único lugar que realmente es una patología real está en $r = 0$ que representa lo que definimos como una singularidad física y no depende de la elección de coordenadas. La superficie $r = 2M$ representa una singularidad debido a la elección de coordenadas; más adelante veremos que efectivamente un cambio de coordenadas elimina dicho problema.

Para interpretar físicamente la región $r = 2M$, definimos dos conceptos a partir de los vectores de Killing. El primero es el concepto de *observador estacionario*. Se define como aquel que se mueve siguiendo una trayectoria temporal cuyo vector tangente es un campo vectorial de Killing. El segundo corresponde a un *observador estático*, decimos que un observador estacionario es estático respecto a otro observador estacionario si ambos siguen una trayectoria dada por el mismo campo de Killing [11].

El siguiente análisis fue hecho en base al recurso [11] de la bibliografía. Podemos calcular los vectores de Killing asociados a la métrica de Schwarzschild a partir de la ecuación (1.97). Notemos que debido a que la métrica no depende de ϕ y t existen dos vectores de Killing triviales: $k_\phi^\mu = e_\phi = (0, 0, 0, 1)$ y $k_t^\mu = e_t = (1, 0, 0, 0)$. Con

estos vectores de Killing podemos calcular las cantidades conservadas a partir de la ecuación (1.98), obteniendo

$$l_z = k_\phi^\mu p_\mu = g_{\mu\nu} k_\phi^\nu p^\mu = m u^\phi g_{\phi\phi} = m r^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi} \quad (1.111)$$

$$-E = k_t^\mu p_\mu = g_{\mu\nu} k_t^\nu p^\mu = m u^t g_{tt} = -m \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}, \quad (1.112)$$

que identificamos como el momento angular en la dirección z y la energía de la partícula. No es difícil imaginarse que los otros dos vectores de Killing representan a la conservación de l_x y l_y sin embargo, en las coordenadas de Schwarzschild no tienen expresiones triviales.

Ahora con los vectores de Killing ya calculados podemos definir a los observadores mencionados anteriormente. Gracias a la simetría esférica podemos pensar en un movimiento paralelo al plano ecuatorial, por lo que el vector más general para un observador estacionario es

$$u^\mu = \frac{1}{N} (k_t^\mu + \omega k_\phi^\mu), \quad (1.113)$$

donde N es una constante de normalización y ω la velocidad angular asociada a la coordenada ϕ . Siguiendo la definición de un observador estacionario, la ecuación (1.113) debe representar a la cuadrivelocidad de una partícula, por lo que debemos pedir que u^μ sea temporal o nulo, es decir,

$$u^\mu u_\mu = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = g_{tt} u^t u^t + g_{\phi\phi} u^\phi u^\phi = g_{tt} + \omega^2 g_{\phi\phi}, \quad (1.114)$$

imponer que el vector sea temporal implica que $u_\mu u^\mu < 0$, encontrando la siguiente relación para ω :

$$\omega < \sqrt{\frac{-g_{tt}}{g_{\phi\phi}}}. \quad (1.115)$$

Dado que ω representa una cantidad física medible esta debe ser un número real, por lo que si

$$\omega < \sqrt{\frac{r - 2M}{r^3 \sin^2(\theta)}}, \quad (1.116)$$

ω será un número complejo si $r < 2M$. Este resultado muestra que no existen observadores estacionarios después de la región que representa $r = 2M$.

Ahora, si deseáramos escribir la forma más general para un observador estático dada la definición anterior debemos escribir

$$u_{est}^\mu = \frac{1}{N_{est}} k_t^\mu, \quad (1.117)$$

donde N_{est} es una constante de normalización. Dicho observador es estático respecto a otro estacionario, definido en la ecuación (1.113). Al pedir que este vector sea temporal encontramos que la superficie límite donde ningún observador puede

permanecer estático respecto a un sistema referencia inercial es $r = 2M$, que coincide con la superficie ya encontrada.

Estas propiedades nos ayudan a definir a la superficie $r = 2M$ como aquella donde ningún observador puede ser estacionario ni estático y donde el movimiento es hacia la singularidad física $r = 0$. Esto último lo veremos a continuación. Para ello, debemos observar la estructura causal de este espacio-tiempo calculando las geodésicas radiales nulas, es decir, las trayectorias tipo luz. Así, omitiendo la parte angular debemos anular el elemento de línea, por lo que al tomar $ds = 0$ encontramos que [3]

$$0 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2. \quad (1.118)$$

De esta manera, vemos que ecuación diferencial de las geodésicas nulas está dada por

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \quad (1.119)$$

por tanto, al integrar obtenemos que

$$t = \pm \left[r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \right] + C, \quad (1.120)$$

donde el signo positivo corresponde a geodésicas entrantes, el negativo a las salientes y C es una constante de integración. Con la ecuación (1.120) podemos graficar los conos de luz correspondientes al espacio-tiempo de Schwarzschild. La posición de estos se puede ver en la figura (1.1). En ésta, podemos notar que $r = 2M$ separa dos zonas. Por un lado en el lado izquierdo los conos de luz están totalmente degenerados y apuntan hacia la singularidad física, por lo que cualquier partícula que traspase (o este dentro de) la superficie $r = 2M$ estará obligada a alcanzar a la singularidad física en $r = 0$. Del otro lado, tenemos que mientras más nos alejamos de $r = 2M$ los conos de luz se asemejan más a los de relatividad especial, que es un resultado esperado ya que hemos pedido que la métrica sea asintóticamente plana. Finalmente, al acercarse a $r = 2M$, comienzan a cerrarse influyendo causalmente en menos zonas del espacio-tiempo [14]. Lo anterior nos permite concluir que las dos zonas están desconectadas causalmente. Por su parte, los conos de luz en la región $r = 2M$, que ahora en adelante llamaremos *horizonte de eventos*, se encuentran totalmente cerrados, por lo que los rayos de luz no pueden salir hacia infinito y no nos da información de aquellos rayos que se adentran al interior del horizonte. Ésto se debe principalmente a que empleamos coordenadas de Schwarzschild para describir los conos de luz de la figura (1.1) [14]. Para hacer más evidente dicho efecto conviene analizar nuevamente a la métrica, a partir del elemento de línea, es decir,

$$-ds^2 = d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2, \quad (1.121)$$

donde hemos considerado radios constantes, además de eliminar la parte angular. Al integrar dicha expresión obtenemos

$$\Delta\tau = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\Delta t. \quad (1.122)$$

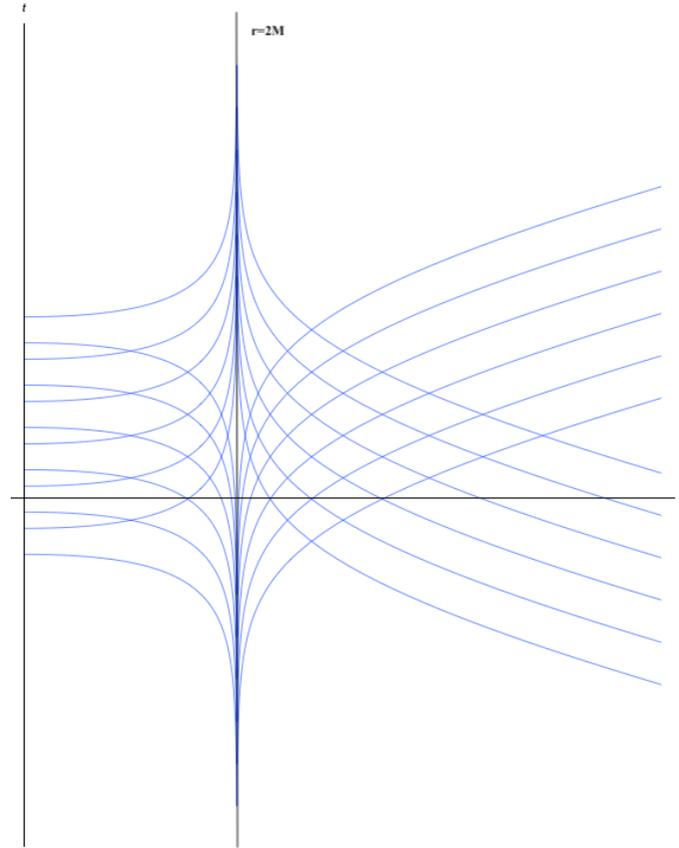


Figura 1.1: Gráfica de geodésicas radiales nulas en la métrica de Schwarzschild en coordenadas de Schwarzschild. Que nos dan la orientación de los conos de luz.

La ecuación (1.122) nos da una comparación entre el tiempo propio de un observador estático y el tiempo coordenado (tiempo propio de un observador estático en $r \rightarrow \infty$) [6]. Si suponemos un observador que cae y envía una señal de periodo $\Delta\tau$, podemos comparar las señales que recibe un observador en infinito a partir de la ecuación (1.122). Notemos que cuando dicho observador se encuentra en el horizonte de eventos la señal Δt tiende a infinito. Esto significa que el observador en infinito nunca verá a los objetos atravesar la superficie del horizonte, pues las señales emitidas por estos no son capaces de llegar en un tiempo finito [14]. De esta manera, concluimos que dos eventos separados por el horizonte de eventos están causalmente desconectados. Por otro lado, sabiendo que el periodo se relacionan con las frecuencias de dichas señales podemos comparar las frecuencias emitidas y recibidas para distintos radios, encontrando que estas señales sufren un corrimiento al rojo gravitacional. Lo anterior nos permite deducir que la región $r = 2M$ corresponde a una superficie con corrimiento al rojo infinito [6].

Llegado a este punto nuestra siguiente tarea consiste en estudiar lo ya anticipado, es decir, que $r = 2M$ corresponde a una singularidad de coordenadas. Para ello,

definimos a r^* como

$$r^* = 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) + r, \quad (1.123)$$

Por su parte si $2M < r < \infty$ entonces $-\infty < r^* < \infty$, en particular $r \rightarrow 2M$ implica $r^* \rightarrow -\infty$. Además, es claro que para C una constante, la ecuación $t \pm r^* = C$ corresponde a geodésicas nulas entrantes y salientes respectivamente [15]. De esta forma, podemos definir la siguiente coordenada

$$u = t + r^* - r, \quad (1.124)$$

como la coordenada temporal recorre $-\infty < u < \infty$. Es fácil ver que la nueva métrica está dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) du^2 + \frac{4M}{r} du dr + \left(1 + \frac{2M}{r} \right) dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.125)$$

donde con este cambio de variable hemos evidenciado que $r = 2M$ corresponde a una singularidad debido a las coordenadas, ya que esta superficie deja de ser singular en la métrica (1.125). Ahora al buscar las geodésicas radiales nulas para describir la estructura de los conos de luz, encontramos las siguientes expresiones para las geodésicas

$$u = -r + C, \quad (1.126)$$

donde C es una constante de integración y corresponde a las geodésicas salientes. Por otro lado

$$u = r + 4M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| + D, \quad (1.127)$$

siendo D otra constante, y define a las geodésicas entrantes. Podemos ver la nueva orientación de los conos en la figura (1.2). En ella logramos ver cómo ahora en estas nuevas coordenadas los rayos de luz pueden atravesar el horizonte de eventos del agujero negro y como nuevamente al atravesarlo, las partículas se mueven inevitablemente a la singularidad física. Por otro lado, al igual que para las coordenadas anteriores al alejarnos del horizonte los conos de luz tienden a ser los de relatividad especial.

Notemos que en este conjunto de coordenadas nos dan la información de los rayos de luz que atraviesan el horizonte de eventos. Estas coordenadas reciben el nombre de *coordenadas de Eddington Finkelstein avanzadas*. Por otro lado, aunque no haremos el análisis a fondo podemos definir las coordenadas de *Eddington Finkelstein retrasadas* que están dadas por [14]

$$v = t - r^* + r. \quad (1.128)$$

Que ahora describe a la coordenada temporal de geodésicas radiales nulas de fotones salientes. Lo interesante de esto, es que los conos de luz nos dicen que las partículas pueden salir del horizonte de eventos e ir hacia infinito. En contraste, éstas no pueden volver al interior de este. Por lo que decimos que este conjunto de coordenadas describe a la solución de Schwarzschild en forma de un *agujero blanco*.

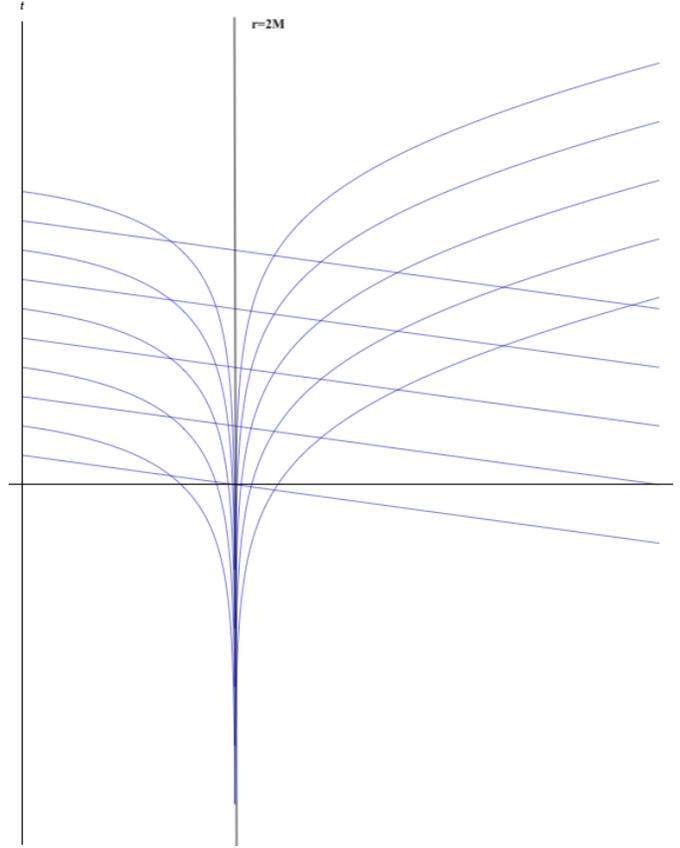


Figura 1.2: Gráfica de geodésicas radiales nulas en el espacio-tiempo de Schwarzschild, en las coordenadas de la métrica (1.125).

Para finalizar la discusión sobre el agujero negro de Schwarzschild vale la pena preguntarnos si esta solución es única. De esta manera, podemos escribir el siguiente elemento de línea

$$ds^2 = -A(r, t)dt^2 + B(r, t)dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (1.129)$$

donde A y B son funciones de t y r . Notemos que en este sentido, a diferencia de cuando dedujimos la métrica de Schwarzschild, en esta ocasión solo pedimos simetría esférica. Por lo que al resolver la ecuación de campo, obtenemos la siguiente métrica [3]

$$ds^2 = -e^{2f(t)} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.130)$$

donde $f(t)$ es una función arbitraria del tiempo. Pero si definimos a t' como

$$t' = \int e^{f(t)} dt, \quad (1.131)$$

obtenemos nuevamente la métrica de Schwarzschild. A este resultado se le conoce como el *teorema de Birkhoff*. Dicho teorema lo podemos enunciar de la siguiente manera, *Toda solución en vacío, es decir, $T_{\mu\nu} = 0$ con simetría esférica de las ecuaciones*

de Einstein, es estática y asintóticamente plana [3]. En particular dicha descripción coincide con el espacio-tiempo de Schwarzschild. Por lo que la única solución con simetría esférica y en vacío de las ecuaciones de Einstein: es Schwarzschild.

Una vez estudiados los aspectos más importantes de la solución de Schwarzschild, debemos mencionar que en la teoría de Einstein Hilbert existen más soluciones que describen agujeros negros. De esta manera, podemos definir a la solución de Kerr que describe un agujero negro con momento angular. Más aún todos los agujeros negros que son solución de las ecuaciones de Einstein-Maxwell (al agregar el campo electromagnético) están completamente caracterizadas por 3 parámetros: la masa M , la carga q y el momento angular a . Este resultado es conocido como el *teorema de no-pelo*. Además, el elemento de línea de un agujero negro con carga y momento angular está dado por [16]

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{R^2}(dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{R^2}((r^2 + a^2)d\phi - a dt)^2 + \frac{R^2}{\Delta} dr^2 + R^2 d\theta^2, \quad (1.132)$$

donde $R^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ y $\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr + q^2$. A la métrica (1.132) se le conoce como la *métrica de Kerr-Newmann*.

1.4. Cuantización del campo escalar en el espacio-tiempo de Minkowski

Una vez vistas las características principales de la relatividad general debemos estudiar la teoría cuántica de campos. Como ya hemos mencionado, esta surge de la incompatibilidad que hay entre la mecánica cuántica usual y la relatividad especial.

En esta sección nos basaremos en las ideas extraídas recurso [17] de la bibliografía. Para comenzar con el estudio de la teoría cuántica de campos hace falta ver el formalismo detrás de la teoría clásica de campos. En principio, en esta teoría debemos identificar al campo $\varphi(x, t)$, que es función del espacio-tiempo, como la variable dinámica. Por otro lado, sabemos que en mecánica clásica la cantidad fundamental es la acción, que escribimos como

$$S = \int dt L, \quad (1.133)$$

donde L es el lagrangiano de la teoría. En este punto todo es completamente analogo a mecánica clásica, con la diferencia en que ahora el campo $\varphi(t, \vec{x})$ es la variable dinámica (como anticipamos). Por lo que en ese sentido podemos expresar al lagrangiano como

$$L = \int d^3x \mathcal{L}, \quad (1.134)$$

donde \mathcal{L} es la densidad lagrangiana. Esta cantidad debe ser un funcional del campo $\varphi(x, t)$ y únicamente de las primeras derivadas, es decir, $\partial_\mu \varphi(x, t)$. Reescribiendo a la acción como

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi). \quad (1.135)$$

Una vez construida la acción debemos calcular las ecuaciones de movimiento al extremizar la acción, es decir, $\delta S = 0$ (como ya lo hemos hecho para la acción de Einstein Hilbert). De esta manera, obtenemos la siguiente ecuación de movimiento [17]

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0, \quad (1.136)$$

que corresponde a la ecuación de Euler Lagrange dado \mathcal{L} . Debemos notar que la deducción anterior esté contenida en el formalismo Lagrangiano que se encuentra acorde a la relatividad especial, pues es claro que las expresiones (1.135) y (1.136) son invariantes de Lorentz. Sin embargo, una de las cantidades más importantes en mecánica cuántica es el Hamiltoniano. Para los fines de esta tesis es importante estudiar la teoría cuántica de campos abordando el formalismo Hamiltoniano en el contexto de campos. Así, definimos al momento canónico conjugado de φ como

$$\pi(x, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}, \quad (1.137)$$

donde $\dot{\varphi} = \partial_t \varphi$. Podemos escribir a la densidad Hamiltoniana \mathcal{H} como

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\varphi} - \mathcal{L}, \quad (1.138)$$

que se relaciona con el Hamiltoniano H a través de

$$H = \int d^3x \mathcal{H}. \quad (1.139)$$

Otro punto importante, del cual ya hemos hablado cuando estudiamos el tensor de energía momento, es el *teorema de Noether*. Éste nos da una relación entre las simetrías continuas del sistema y cantidades conservadas. En concreto, por cada simetría continua en la que la densidad Lagrangiana no se modifique (que se traduce en que la física del sistema no cambie), el teorema de Noether nos permite deducir la cantidad conservada. Así, considerando las siguientes transformaciones infinitesimales [17]

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad (1.140)$$

donde x^μ es la coordenada espacio temporal, x'^μ es la coordenada transformada, y δx^μ corresponde a la transformación infinitesimal de las coordenadas.

$$\varphi'(x') = \varphi(x) + \delta \varphi(x), \quad (1.141)$$

Con $\delta \varphi(x)$ que corresponde a la transformación infinitesimal del campo.

$$\mathcal{L}(x') = \mathcal{L}(x) + \delta \mathcal{L}(x), \quad (1.142)$$

de la cual $\delta \mathcal{L}(x)$ se trata de la transformación infinitesimal de la densidad Lagrangiana. Las transformaciones anteriores nos permiten calcular la corriente conservada de Noether que está dada por

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) \delta x^\nu, \quad (1.143)$$

si además, el campo y sus derivadas se anulan suficientemente rápido en infinito, podemos escribir la siguiente cantidad conservada

$$Q = \int_V d^3x J^0, \quad (1.144)$$

donde V corresponde al volumen de integración. La cantidad (1.144) cumple que

$$\frac{dQ}{dt} = 0, \quad (1.145)$$

y en efecto define una cantidad conservada. Por ejemplo podemos calcular la cantidad conservada para la invarianza ante traslaciones espaciotemporales, es decir, al tomar la transformación de coordenadas

$$x'^{\mu} = x^{\mu} - \epsilon^{\mu}, \quad (1.146)$$

e identificar a la variación infinitesimal como

$$\delta x_{\nu}^{\mu} = -\delta_{\nu}^{\mu}. \quad (1.147)$$

Además si el campo no cambia ante traslaciones, es decir, $\delta\varphi_a = 0$, la corriente conservada está dada por

$$J_{\nu}^{\mu} = T_{\nu}^{\mu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi)}\partial_{\nu}\varphi - \delta_{\nu}^{\mu}\mathcal{L}. \quad (1.148)$$

Es claro que la corriente en la ecuación (1.148) corresponde al tensor de energía momento. Notemos que en este caso tenemos 4 cantidades conservadas asociadas a la energía y el momento. Que a partir de la ecuación (1.144) encontramos que están dadas por

$$P_{\nu} = \int_V d^3x T^0_{\nu}, \quad (1.149)$$

que corresponden al cuádrimomento del campo.

1.4.1. Cuantización del campo escalar real en el espacio-tiempo de Minkowski

Anteriormente hemos hablado de la teoría clásica de campos para un campo escalar. Ahora, debemos enfocarnos en la cuantización de éste. Recalcando que nos centraremos en esta tesis en la cuantización de un campo escalar, pues es el tipo de campo más simple que podemos encontrar en la teoría cuántica de campos. En esa dirección, conviene iniciar nuestro estudio por el campo escalar real.

Para comenzar a estudiar la dinámica del campo escalar real debemos comenzar con una densidad Lagrangiana. La más sencilla, cuyo término potencial es estable y produzca ecuaciones de movimiento lineales, está dado por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\varphi\partial_{\nu}\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2, \quad (1.150)$$

donde m es la masa del campo, cuya interpretación veremos más adelante. A partir de la ecuación (1.136) encontramos que

$$(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - m^2)\varphi = (\partial_\mu\partial^\mu - m^2)\varphi = 0, \quad (1.151)$$

corresponde a la ecuación de movimiento. A la ecuación (1.150) se le conoce como el *lagrangiano de Klein-Gordon*, y a la expresión (1.151) como la *ecuación de Klein-Gordon*.

Si ahora queremos construir el Hamiltoniano, el primer paso es escribir el momento canónico conjugado. De la ecuación (1.137) obtenemos que

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \dot{\varphi}, \quad (1.152)$$

que nos permitirá construir a partir de la ecuación (1.138) la densidad Hamiltoniana. Ésta se puede escribir como [17]

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\pi^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2), \quad (1.153)$$

donde $\nabla\varphi$, se refiere al vector gradiente de φ .

Una vez construidas las cantidades anteriores, podemos comenzar con el proceso de cuantización. El método que usaremos a lo largo de esta tesis es conocido como *cuantización canónica*. En analogía a la mecánica cuántica donde existe una relación de conmutación entre el operador de momento y de posición [1]. Así, debemos promover a operadores al campo φ y su momento canónico conjugado π que denotaremos ahora en adelante como $\hat{\varphi}$ y $\hat{\pi}$. Siguiendo la analogía imponemos las siguientes relaciones de conmutación

$$[\hat{\varphi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (1.154)$$

y

$$[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}] = [\hat{\pi}, \hat{\pi}] = 0, \quad (1.155)$$

es importante recalcar que todos los conmutadores deben ser evaluados a mismos tiempos. Por otro lado, aunque ya sabemos que la ecuación de movimiento clásica está dada por la ecuación de Klein-Gordon debemos corroborar que esta coincide con la ecuación de movimiento cuántica. Para ello, recordemos que en el cuadro de Heisenberg los operadores son los que evolucionan en el tiempo, a diferencia del cuadro de Schrödinger donde son las funciones de onda. De esta manera, la ecuación de movimiento para un operador $\hat{O}(t)$ está dada por [18]

$$i\partial_t\hat{O} = [\hat{O}, \hat{H}], \quad (1.156)$$

donde \hat{H} es el operador Hamiltoniano. A la ecuación (1.156) se le conoce como la *ecuación de Heisenberg*. Así, a partir de la densidad Hamiltoniana para el campo de

Klein Gordon deducida en (1.153) escribimos

$$\begin{aligned}
i\partial_t\hat{\varphi}(\vec{x}, t) &= \left[\hat{\varphi}(\vec{x}, t), \int d^3y \frac{1}{2} (\hat{\pi}^2(\vec{y}, t) + (\nabla\hat{\varphi}(\vec{y}, t))^2 + m^2\hat{\varphi}^2(\vec{y}, t)) \right] \\
&= \frac{1}{2} \int d^3y [\hat{\varphi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}^2(\vec{y}, t)] \\
&= \frac{1}{2} \int d^3y \{ \hat{\pi}(\vec{y}, t) [\hat{\varphi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t)] + [\hat{\varphi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t)] \hat{\pi}(\vec{y}, t) \} \\
&= i \int d^3y \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \hat{\pi}(\vec{y}, t) = i\hat{\pi}(\vec{x}, t),
\end{aligned}$$

por lo que la ecuación de movimiento para $\hat{\varphi}$ es

$$\partial_t\hat{\varphi}(\vec{x}, t) = \hat{\pi}(\vec{x}, t). \quad (1.157)$$

Si seguimos un procedimiento análogo podemos llegar a que la ecuación de movimiento para $\hat{\pi}$ está dada por

$$\partial_t\hat{\pi}(\vec{x}, t) = -(-\nabla^2 + m^2)\hat{\varphi}(\vec{x}, t), \quad (1.158)$$

donde ∇^2 es el operador laplaciano. Finalmente, al juntar las ecuaciones (1.157) y (1.158), obtenemos

$$(-\partial_t^2 + \nabla^2 - m^2)\hat{\varphi}(\vec{x}, t) = (\partial_\mu\partial^\mu - m^2)\hat{\varphi}(\vec{x}, t) = 0, \quad (1.159)$$

concluyendo que la ecuación de movimiento cuántica coincide con la ecuación de Klein-Gordon [18].

Con la ecuación de movimiento para el operador de campo, nuestro siguiente objetivo es resolver la ecuación de Klein-Gordon. Que esta ecuación sea lineal nos permite expandir en modos de Fourier, por lo que podemos escribir

$$\hat{\varphi}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} N_p e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \hat{a}_p(t), \quad (1.160)$$

donde \vec{p} corresponde al vector de onda de la expansión, N_p es un factor de normalización y $\hat{a}_p(t)$ es un coeficiente de Fourier dependiente del tiempo que da caracter de operador al operador de campo $\hat{\varphi}$. Si sustituimos la expansión de Fourier en la ecuación (1.159), obtenemos la siguiente ecuación de movimiento para $\hat{a}_p(t)$

$$(\partial_t^2 + |\vec{p}|^2 + m^2)\hat{a}(\vec{p}, t) = 0. \quad (1.161)$$

Si definimos la relación de dispersión relativista, la energía E_p está dada por

$$E_p = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}, \quad (1.162)$$

y es claro que podemos escribir a $\hat{a}_p(t)$ como

$$\hat{a}_p(t) = \hat{a}_p^{(1)} e^{-iE_p t} + \hat{a}_p^{(2)} e^{iE_p t}, \quad (1.163)$$

con $\hat{a}_p^{(1)}$ y $\hat{a}_p^{(2)}$ son operadores independientes del tiempo. Así, al sustituir en la ecuación (1.160) y simplificando haciendo un cambio de variable de \vec{p} a $-\vec{p}$ en el segundo término obtenemos que

$$\hat{\varphi}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} N_p (\hat{a}_p^{(1)} e^{ip \cdot x} + \hat{a}_{-p}^{(2)} e^{-ip \cdot x}) \Big|_{p^0=E_p}, \quad (1.164)$$

donde $p \cdot x = p_\mu x^\mu$. Como hemos dicho al principio, nos interesa cuantizar un campo escalar real, por lo que se debe cumplir que $\varphi = \varphi^*$. Dicha condición se traduce a que el operador de campo sea hermítico, es decir, $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}^\dagger$ de esta forma $\hat{a}_{-p}^{(2)} = (\hat{a}_p^{(1)})^\dagger = \hat{a}_p^\dagger$. Además, el valor de N_p lo fijamos de tal forma que $\hat{\varphi}(\vec{x}, t)$ sea un invariante relativista. Así, encontramos que al operador de campo lo podemos escribir como

$$\hat{\varphi}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (\hat{a}_p e^{ip \cdot x} + \hat{a}_p^\dagger e^{-ip \cdot x}) \Big|_{p^0=E_p}, \quad (1.165)$$

y por tanto, el momento canónico conjugado está dado por

$$\hat{\pi}(\vec{x}, t) = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_p}{2}} (\hat{a}_p e^{ip \cdot x} - \hat{a}_p^\dagger e^{-ip \cdot x}) \Big|_{p^0=E_p}. \quad (1.166)$$

En este punto hay varias cosas a recalcar: primero es que a partir de la ecuación (1.165) podemos definir los modos de frecuencia positiva y negativa a partir del tiempo t , con $\omega > 0$ y $\omega < 0$ [20]. Otra cosa es que la ecuación de movimiento en (1.161) corresponde a la de un oscilador armónico con frecuencia E_p [18]. Esto significa que cuantizar un campo libre es obtener el espectro para osciladores armónicos desacoplados en cada punto del espacio-tiempo. Por otro lado, recordando la relación de dispersión dada en (1.162), es claro que la podemos reescribir de la siguiente forma

$$p_\mu p^\mu = -m^2, \quad (1.167)$$

qué escrita como en la última expresión podemos verlo como un invariante relativista construido por el cuadrimento p^μ de una partícula con masa m . Más adelante veremos qué quiere decir este resultado.

Ahora centrémonos en los operadores \hat{a}_p y \hat{a}_p^\dagger . Como hemos mencionado la ecuación de movimiento para $\hat{a}_p(t)$ corresponde a la de un oscilador armónico desacoplado, por lo que los operadores \hat{a}_p y \hat{a}_p^\dagger tienen la forma de ser operadores de creación y aniquilación. De esta forma, dichos operadores deberían tener ciertas reglas de conmutación características de un oscilador armónico [17]. Para verlo sustituimos las ecuaciones (1.165) y (1.166) en el conmutador (1.154), obteniendo

$$\begin{aligned} [\hat{\varphi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t)] = & -i \int \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{4E_p E_q}} ([\hat{a}_p, \hat{a}_q] e^{i(p \cdot x + q \cdot y)} - [\hat{a}_p, \hat{a}_q^\dagger] e^{i(p \cdot x - q \cdot y)} \\ & + [\hat{a}_p^\dagger, \hat{a}_q] e^{i(-p \cdot x + q \cdot y)} - [\hat{a}_p^\dagger, \hat{a}_q^\dagger] e^{-i(p \cdot x + q \cdot y)}). \end{aligned} \quad (1.168)$$

Si sabemos que $[\hat{\varphi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$, es fácil ver que se debe de cumplir que [18]

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_q^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \quad (1.169)$$

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_q] = [\hat{a}_p^\dagger, \hat{a}_q^\dagger] = 0, \quad (1.170)$$

donde las expresiones (1.169) y (1.170) son las relaciones de conmutación de los operadores de creación y aniquilación de un oscilador armónico. De esta manera, las excitaciones del campo están caracterizadas por el espectro de osciladores en cada punto del espacio-tiempo.

Una vez definidos los operadores \hat{a}_p y \hat{a}_p^\dagger , nuestra siguiente tarea es construir el espacio de Fock, que representa la suma directa de productos tensoriales de espacios de Hilbert de n partículas. Para ello definimos el vacío $|0\rangle$ tal que, para todo p se cumple lo siguiente

$$\hat{a}_p |0\rangle = 0. \quad (1.171)$$

Por lo que para este estado no existe ningún oscilador excitado. Posteriormente debemos definir al estado $|\vec{p}\rangle$ como

$$|\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_p} \hat{a}_p^\dagger |0\rangle, \quad (1.172)$$

donde $\sqrt{2E_p}$ es un factor que agregamos por normalización. Al estado (1.172) se le conoce como el estado de una partícula. Más adelante veremos que dicho nombre hace referencia a que estos estados describen a una partícula bosónica, con momento \vec{p} , energía E_p y espín cero. Lo anterior nos dice que las excitaciones del campo escalar producen partículas con dichas características. Finalmente debemos definir los estados multipartícula que para n partículas están dados por

$$|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle = \prod_{i=1}^n \sqrt{2E_{p_i}} \hat{a}_{p_i}^\dagger |0\rangle. \quad (1.173)$$

Ya con los estados de partícula, nuestro siguiente objetivo es estudiar el espectro de los eigenestados del Hamiltoniano. Para ello debemos encontrar una expresión del Hamiltoniano en términos de los operadores de creación y aniquilación. Al sustituir las expresiones (1.165) y (1.166), en la ecuación (1.153) obtenemos

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{2} (\hat{a}_p \hat{a}_p^\dagger + \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p). \quad (1.174)$$

La ecuación (1.174) es un resultado esperado, pues tiene la forma del Hamiltoniano de un oscilador armónico. Sin embargo, debemos notar que hay un problema pues un oscilador armónico cuántico posee una energía de vacío diferente de cero. En ese sentido dicha energía se suma por cada oscilador, por lo que sí hay uno por cada punto del espacio-tiempo esta energía es infinita. Para ver esto hace falta calcular el

eigenvalor de la energía del estado $|0\rangle$. De esta manera, encontramos

$$\begin{aligned}\hat{H}|0\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{2} (\hat{a}_p \hat{a}_p^\dagger + \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p) |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{2} \hat{a}_p \hat{a}_p^\dagger |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{2} (2\pi)^3 \delta^3(0) |0\rangle,\end{aligned}$$

donde usamos la relación de conmutación (1.169). De la ecuación (1.4.1) podemos ver lo anticipado, es decir, que la energía diverge. Lo anterior, aunque sea problemático tiene una solución y está en el hecho de que nosotros medimos las diferencias de energía de los eigenestados. Por tanto, para resolver, debemos reordenar los niveles de energía con respecto a la energía de vacío. Así, el Hamiltoniano después del reordenamiento está dado por

$$H - E_{vac} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p, \quad (1.175)$$

donde $E_{vac} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{2} (2\pi)^3 \delta^3(0)$.

Para evitar este tipo divergencias conviene definir al orden normal, que simplemente coloca todos los operadores de aniquilación a la derecha y nos permite medir ya las diferencias de cualquier cantidad. De esta manera, definimos al Hamiltoniano en orden normal como [18]

$$\begin{aligned}: \hat{H} : &:= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{2} (: \hat{a}_p \hat{a}_p^\dagger : + : \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p :) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{2} (\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \hat{a}_p \hat{a}_p^\dagger) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p\end{aligned} \quad (1.176)$$

Por otro lado, podemos escribir al operador de momento $: \hat{P}^\mu :$ (ya en orden normal), a partir de la ecuación (1.149), nuevamente en términos de los operadores de creación y aniquilación. Al sustituir como hicimos en el caso anterior, podemos ver que

$$: \hat{P}^\mu := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^\mu \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p. \quad (1.177)$$

Finalmente, a partir de las relaciones de conmutación es posible encontrar lo siguiente

$$: \hat{P}^\mu : |\vec{p}\rangle = p^\mu |\vec{p}\rangle \quad (1.178)$$

$$: \hat{H} : |\vec{p}\rangle = E_p |\vec{p}\rangle, \quad (1.179)$$

que corrobora que $|\vec{p}\rangle$ es un eigenestado de la energía y del momento. Por tanto corresponden a estados de partículas con momento \vec{p} y energía E_p . Para comprobar que efectivamente dichas partículas tienen espín cero hace falta construir el operador de momento angular \hat{J} . Como se puede ver en la referencia [17], la única contribución

del operador de momento angular es el momento angular orbital \hat{L} , concluyendo que la contribución de espín es nula y, por tanto, las partículas que estudiamos durante esta sección tienen espín cero.

Ahora, hace falta definir al *propagador de Feynman*, el cual nos da una medida de como evolucionan los estados de partícula. Esto lo podemos ver calculando el siguiente valor de expectación

$$D_F(x - y) = \langle 0 | T \{ \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(y) \} | 0 \rangle, \quad (1.180)$$

donde

$$T \{ \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(y) \} = \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \hat{\varphi}(y) \hat{\varphi}(x) | 0 \rangle,$$

define al orden temporal y $\theta(x)$ es la función de Heavyside dada por [18]

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La expresión (1.180) nos da la amplitud la probabilidad de que una partícula que está en x se propague a y . Al desarrollar la expresión (1.180) obtenemos [18]

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}, \quad (1.181)$$

donde ϵ es un término que agregamos por hacer una integral de contorno y evitar a los polos en $\pm E_p$.

1.4.2. Cuantización del campo escalar complejo en el espacio-tiempo de Minkowski

Ya estudiado el campo escalar real, nos enfocaremos ahora en estudiar el campo escalar complejo. En general, sabemos que un campo escalar complejo cumple que $\hat{\varphi} \neq \hat{\varphi}^\dagger$, es decir, un campo no hermítico, por lo que en principio $\hat{\varphi}$ y $\hat{\varphi}^\dagger$ son dos campos independientes.

Como ya hicimos con el campo escalar real, debemos partir de una densidad lagrangiana que conviene escribir de la siguiente manera

$$\mathcal{L} = -\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \hat{\varphi} \partial_\nu \hat{\varphi}^\dagger - m^2 \hat{\varphi} \hat{\varphi}^\dagger. \quad (1.182)$$

Con la ecuación (1.182) es posible encontrar los momentos canónicos conjugados, obteniendo

$$\hat{\pi} = \dot{\hat{\varphi}}^\dagger, \quad (1.183)$$

$$\hat{\pi}^\dagger = \dot{\hat{\varphi}}. \quad (1.184)$$

Gracias a las ecuaciones (1.183) y (1.184), hallamos que el Hamiltoniano está dado por [19]

$$H = \int d^3 x (\hat{\pi}^\dagger \hat{\pi} + \partial_i \hat{\varphi}^\dagger \partial^i \hat{\varphi} + m^2 \hat{\varphi}^\dagger \hat{\varphi}). \quad (1.185)$$

Es claro que la expresión (1.185) corresponde a un operador hermitiano, es decir, $H = H^\dagger$. Con ayuda del Hamiltoniano y de la ecuación de Heisenberg, podemos calcular las siguientes ecuaciones de movimiento

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \hat{\varphi} = 0, \quad (1.186)$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \hat{\varphi}^\dagger = 0. \quad (1.187)$$

Dicho lo anterior, debemos imponer relaciones de conmutación como ya hicimos, encontrando

$$[\hat{\varphi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t)] = [\hat{\varphi}^\dagger(\vec{x}, t), \hat{\pi}^\dagger(\vec{y}, t)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (1.188)$$

Por otro lado, los otros conmutadores son cero.

En analogía con el campo escalar real, nuestro siguiente objetivo consiste en estudiar la expansión del campo. Así, es fácil ver que

$$\hat{\varphi}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(\hat{a}_p e^{-ip \cdot x} + \hat{b}_p^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0=E_p}, \quad (1.189)$$

$$\hat{\varphi}(\vec{x}, t)^\dagger = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(\hat{a}_p^\dagger e^{ip \cdot x} + \hat{b}_p e^{-ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0=E_p}. \quad (1.190)$$

De las ecuaciones (1.189) y (1.190), podemos notar que existen dos conjuntos de operadores de creación y aniquilación \hat{a}_p y \hat{b}_p , siendo una consecuencia inmediata de que el operador no sea hermítico. Es posible demostrar que estos operadores siguen las siguientes relaciones de conmutación

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}^\dagger] = [\hat{b}_p, \hat{b}_{p'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (1.191)$$

con las otras relaciones de conmutación cero.

El significado físico de estos dos operadores son dos partículas independientes con la misma masa m . Para ver como se relacionan estos tipos de partículas hace falta analizar una simetría en el lagrangiano que no se encuentra en el campo escalar real. Para ello, debemos tomar las siguientes transformaciones

$$\hat{\varphi}' \rightarrow \hat{\varphi} e^{i\alpha} \quad (1.192)$$

$$\hat{\varphi}'^\dagger \rightarrow \hat{\varphi}^\dagger e^{-i\alpha}, \quad (1.193)$$

donde α es una parámetro de la variación. Como ya vimos podemos encontrar una corriente conservada

$$J^\mu = -i[(\partial^\mu \hat{\varphi}^\dagger) \hat{\varphi} - (\partial^\mu \hat{\varphi}) \hat{\varphi}^\dagger], \quad (1.194)$$

con el respectivo operador de carga

$$\hat{Q} = \int d^3x J^0 = -i \int d^3x (\hat{\pi} \hat{\varphi} - \hat{\pi}^\dagger \hat{\varphi}^\dagger). \quad (1.195)$$

Si calculamos en términos de los operadores de creación y aniquilación el operador de carga (en orden normal) encontramos

$$: \hat{Q} := \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p - \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p). \quad (1.196)$$

El operador $: \hat{Q} :$ conmuta con el Hamiltoniano, encontrando que estas partículas tienen un número cuántico extra: la carga. Por tanto, las partículas asociadas a \hat{a}_p tienen energía E_p , momento \vec{p} , espín cero y carga $+1$. Por su parte, las asociadas a \hat{b}_p difieren únicamente en tener carga -1 . Definimos así, a las partículas asociadas a \hat{b}_p como las *antipartículas* de las partículas asociadas a \hat{a}_p . Para finalizar hace falta escribir el operador de cuadrimento en los operadores de creación y aniquilación. Así

$$\hat{P}^\mu = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p^\mu (\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p). \quad (1.197)$$

Vale la pena mencionar la existencia de otros tipos de campos, el espinorial y el vectorial. Estos campos al cuantizarse describen partículas de espín $1/2$ (fermiones) y de espín 1 (bosones) respectivamente. Dando una descripción ahora de partículas como los electrones y los fotones. [17, 18]

Capítulo 2

Cuantización en fondos curvos y Radiación de Hawking

En este capítulo estudiaremos la cuantización de un campo escalar en una geometría arbitraria, viendo las grandes diferencias que existen con respecto al caso plano. La principal diferencia radica en las diversas nociones de vacío que aparecen de las diferentes formas de expansión del campo, que a través de las transformaciones de Bogoliubov podemos conectar. Para ver lo anterior utilizaremos el proceso de cuantización canónica que desarrollamos en el primer capítulo.

Más adelante podemos aplicar la cuantización canónica en fondos curvos para dos ejemplos concretos: El efecto Unruh y la radiación de Hawking, siendo este último el resultado más importante de la teoría cuántica de campos en fondos curvos [20].

2.1. Cuantización del campo escalar en un fondo curvo

En el capítulo anterior hemos utilizado el proceso de cuantización canónica de un campo escalar en el espacio-tiempo de Minkowski. Nuestro siguiente objetivo es utilizar dicho método en una geometría arbitraria. Conviene esbozar de forma general los pasos a seguir. En principio debemos modificar la densidad Lagrangiana intercambiando la métrica $\eta^{\mu\nu}$ por $g^{\mu\nu}$ (una métrica de la cual más adelante hablaremos). Por otro lado, para obtener invarianza bajo cambios de coordenadas a nivel de la acción agregamos a ésta la raíz del determinante de las componentes de la métrica, $\sqrt{-g}$. También, sustituimos a las derivadas parciales ∂_μ por derivadas covariantes ∇_μ . Con estos cambios en la acción, estamos en condiciones para obtener las ecuaciones de movimiento a nivel clásico y encontrar la expresión del campo. El siguiente paso es definir el momento canónico conjugado y el Hamiltoniano que nos serán de gran ayuda para el proceso de cuantización canónica del campo escalar, en el cual procederemos de manera análoga al capítulo anterior, es decir, promover a operadores al campo y su respectivo momento para imponer las relaciones de conmutación entre

estos operadores. Finalmente, seguimos con la construcción del espacio de Fock, que consiste en definir el vacío y los estados de partícula a partir de los operadores de creación. En este último punto se encuentra la gran diferencia con respecto al caso plano. Pues como veremos más adelante, al no existir las simetrías del espacio-tiempo plano (invarianza de Poincaré), tenemos que tener cuidado para definir los estados de partícula y el vacío. [21, 22, 23].

De esta manera, con los pasos que ya hemos mencionado podemos generalizar la acción de Klein-Gordon para una métrica $g_{\mu\nu}$, como [21]

$$S = - \int d^4x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi + m^2 \varphi), \quad (2.1)$$

donde m corresponde nuevamente a la masa del campo. Por su parte, la ecuación de movimiento obtenida de la acción (2.1) está dada por

$$(g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu - m^2) \varphi = 0. \quad (2.2)$$

A la ecuación de movimiento (2.2) se le conoce como *acoplamiento mínimo*, pues corresponde a la expresión más sencilla que incluye la interacción del campo φ y al campo gravitacional $g_{\mu\nu}$.

En este punto debemos mencionar que la ecuación (2.2) tendrá una formulación de valores iniciales bien comportada (es decir, dadas las condiciones iniciales del campo se pueda determinar de forma única la evolución de este) en un espacio-tiempo globalmente hiperbólico. Esto quiere decir que siempre podemos hacer una foliación del espacio-tiempo en hipersuperficies espaciales, o bien llamadas *hipersuperficies de Cauchy*, que se encuentran caracterizadas por un tiempo t y denotamos por Σ_t [24].

Si definimos a la métrica espacial tridimensional h_{ij} asociada a la hipersuperficie Σ_t . Hace falta únicamente describir el espacio-tiempo entre dichas foliaciones. Para ello, debemos definir al vector t^μ que conecta a las rebanadas de la foliación. En general dicho vector no es ortogonal a Σ_t , ya que las coordenadas espaciales no son necesariamente invariantes al ser transportadas a lo largo de este vector. Por tanto, conviene separar al vector ∂_t en su parte normal y tangencial a Σ_t , obteniendo [24]

$$t^\mu = \alpha N^\mu + \beta^\mu, \quad (2.3)$$

donde α es un escalar conocido como *función de lapso*, N^μ es el vector unitario normal a Σ_t y β^μ el *vector de corrimiento* que es tangencial a la misma superficie. Por su parte la métrica puede ser escrita en función de α, β^i, h_{ij} de la siguiente forma [9]

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + h_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.4)$$

Si definimos la función escalar t que caracteriza a cada foliación, el vector normal está dado por $N_\mu = -\alpha \nabla_\mu t$ [9] y, por tanto

$$N_\mu = (-\alpha, 0, 0, 0), \quad N^\mu = (1/\alpha, -\beta^i/\alpha). \quad (2.5)$$

Un concepto útil que no abordamos durante la cuantización del campo escalar en el espacio-tiempo de Minkowski, es el producto interno de dos soluciones (incluyendo soluciones complejas) de Klein-Gordon que está dado por [24, 25]

$$(\varphi, \phi)_{\Sigma_t} = i \int_{\Sigma_t} d\Sigma^\mu \sqrt{h} (\varphi^* \nabla_\mu \phi - (\nabla_\mu \varphi^*) \phi), \quad (2.6)$$

donde φ y ϕ son soluciones de la ecuación de Klein-Gordon, h es el determinante de la métrica inducida h_{ij} y $d\Sigma^\mu = d^3x N^\mu$ el elemento diferencial de la hipersuperficie. Veamos ahora que este producto interno no depende de la hipersuperficie elegida, por lo que al escribir

$$\begin{aligned} (\varphi, \phi)_{\Sigma_1} - (\varphi, \phi)_{\Sigma_2} &= i \int_{\Sigma_1} d\Sigma^\mu \sqrt{h} (\varphi^* \nabla_\mu \phi - (\nabla_\mu \varphi^*) \phi) \\ &\quad - i \int_{\Sigma_2} d\Sigma^\mu \sqrt{h} (\varphi^* \nabla_\mu \phi - (\nabla_\mu \varphi^*) \phi). \end{aligned}$$

Si además, estas se anulan en el infinito espacial, podemos reescribir la expresión anterior como [21]

$$(\varphi, \phi)_{\Sigma_1} - (\varphi, \phi)_{\Sigma_2} = i \int_{\partial V} d\Sigma^\mu \sqrt{h} (\varphi^* \nabla_\mu \phi - (\nabla_\mu \varphi^*) \phi),$$

donde V es el volumen confinado por las hipersuperficies Σ_1 y Σ_2 , ∂V denota a la frontera de todo el volumen. A partir del teorema de Gauss hallamos que

$$\begin{aligned} (\varphi, \phi)_{\Sigma_1} - (\varphi, \phi)_{\Sigma_2} &= i \int_V d^4x \sqrt{-g} \nabla^\mu (\varphi^* \nabla_\mu \phi - (\nabla_\mu \varphi^*) \phi) \\ &= i \int_V d^4x \sqrt{-g} (\varphi^* m^2 \phi - m^2 \varphi^* \phi) \\ &= 0, \end{aligned}$$

probando que este producto interno no depende de la hipersuperficie tomada, por lo que ahora en adelante omitiremos el subíndice de la hipersuperficie.

Gracias al producto interior, es natural definir $\{f_i, f_j^*\}$ como una base ortonormal del espacio de soluciones, es decir, que cumple las siguientes reglas de ortonormalización

$$(f_i, f_j) = \delta_{ij}, \quad (f_i^*, f_j^*) = -\delta_{ij}, \quad (f_i, f_j^*) = 0, \quad (2.7)$$

donde el índice i definirá el número cuántico que etiqueta a la base [23] que para este caso denotarán números discretos. Posteriormente, cambiaremos dicho índice a uno continuo como hicimos en el primer capítulo, y este denotará el momento p .

Hasta ahora el proceso de cuantización ha sido completamente análogo al caso plano sin embargo, llegado a este punto debemos hacer ciertas consideraciones. En principio, cuando construimos la teoría cuántica de campos en el espacio tiempo de Minkowski, tal como se menciona en [23], la invarianza de Poincaré juega un papel clave. Pues elegimos una representación (para las relaciones de conmutación canónicas)

preferencial en la cual se tiene un estado de vacío invariante ante transformaciones de Poincaré. Por su parte, en un espacio-tiempo curvo no existe un criterio similar, por lo que en principio no existe ningún criterio para elegir entre bases [27]. Otro factor a tomar en cuenta es que en un espacio-tiempo general no existe un operador de traslaciones temporales, en contraste con el espacio-tiempo plano. Como se menciona en [27], la interpretación de partículas y de vacío dependen fuertemente de descomponer al campo en modos de frecuencia positiva y negativa que, a su vez, depende de la existencia de una simetría ante traslaciones temporales en el espacio-tiempo de Minkowski. Lo anterior implica que en un espacio-tiempo arbitrario sin simetrías no existe una noción natural de partículas o de un estado de vacío.

Por otro lado, es fácil ver que el momento canónico conjugado está dado por

$$\pi = \sqrt{-g}g^{\mu 0}\partial_\mu\varphi, \quad (2.8)$$

que en términos del vector normal reescribimos como

$$\pi = \sqrt{h}N^\mu\partial_\mu\varphi. \quad (2.9)$$

El Hamiltoniano por su parte se puede escribir como

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \left(\frac{\pi}{g^{00}} \left(\frac{\pi}{\sqrt{-g}} - g^{0i}\partial_i\varphi \right) - \sqrt{-g}g^{\mu i}\partial_\mu\varphi\partial_i\varphi + \sqrt{-g}m^2\varphi^2 \right). \quad (2.10)$$

De forma análoga podemos iniciar el proceso de cuantización al promover a operadores las variables dinámicas e imponer las siguientes relaciones de conmutación

$$[\hat{\varphi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.11)$$

$$[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}] = [\hat{\pi}, \hat{\pi}] = 0. \quad (2.12)$$

Retomemos a la base $\{f_i, f_j^*\}$. En analogía con lo hecho para el caso plano definimos el operador de aniquilación, \hat{a}_j , como [24]

$$(f_j, \varphi) = \hat{a}_j, \quad (2.13)$$

y el correspondiente operador de creación, \hat{a}_i^\dagger , de la siguiente forma

$$-(f_j^*, \varphi) = \hat{a}_j^\dagger. \quad (2.14)$$

Es claro que en las ecuaciones (2.13) y (2.14) los operadores \hat{a}_i y \hat{a}_i^\dagger se encuentran en función del operador de campo y del momento. Por lo que a partir de las relaciones de conmutación entre éstos, es posible ver que se traducen para \hat{a}_i y \hat{a}_i^\dagger como [24]

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = [(f_i, \varphi), -(f_j^*, \varphi)] = -i \int_\Sigma d^3x \sqrt{h} N^\mu (f_i^* (\nabla_\mu f_j) - (\nabla_\mu f_i^*) f_j) = (f_i, f_j) = \delta_{ij}. \quad (2.15)$$

Por otro lado, es fácil ver que

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0, \quad (2.16)$$

y corresponden nuevamente a las relaciones de conmutación de un oscilador armónico.

Antes de definir concretamente el correspondiente espacio Fock, en el cual actuarán los operadores \hat{a}_i y \hat{a}_i^\dagger , mencionamos la importancia de la invarianza de Poincaré para definir el estado de vacío y de partículas. En particular, la invarianza ante traslaciones temporales que nos permite definir modos de frecuencia positiva. Esto último lo podemos ver explícitamente al tomar los modos que utilizamos en el capítulo anterior, pues es fácil ver que cumplen la siguiente ecuación de eigenvalores [26]

$$\partial_t u_p = -iE_p u_p, \quad (2.17)$$

donde u_p está dado por

$$u_p = \frac{1}{\sqrt{2E_p}} e^{ip \cdot x}, \quad (2.18)$$

con $E_p > 0$, y donde el operador ∂_t es el generador de traslaciones temporales. De esta forma, para el caso plano, definimos los modos de frecuencia positiva, que como anticipamos, se relacionan directamente en como definimos el estado de vacío y los posteriores estados de partícula [28]. En contraste, cuando trabajamos en un espacio-tiempo arbitrario tenemos condiciones diferentes. El espacio-tiempo deja de ser invariante bajo transformaciones de Poincaré, en particular, la invarianza ante bajo traslaciones temporales desaparece y, por tanto, el generador asociado. En general, no podemos definir modos de frecuencia positivos correctamente, por lo que no existe una noción de vacío única. Más aún, al no existir una elección de vacío preferencial, tenemos la libertad de definir una nueva base de modos $\{\psi_i, \psi_j^*\}$ que induce un nuevo estado de vacío y adquiere la misma importancia que la usada anteriormente [26]. Así, concluimos que la elección de los modos de la expansión del campo no es única. Más adelante veremos que condiciones necesitamos para generalizar la noción de vacío y partículas.

Si ahora definimos a una nueva base de soluciones $\{\psi_i, \psi_j^*\}$, los nuevos operadores de creación y aniquilación están dados por

$$(\psi_j, \varphi) = \hat{b}_j, \quad (2.19)$$

$$-(\psi_j^*, \varphi) = \hat{b}_j^\dagger, \quad (2.20)$$

donde \hat{b}_j^\dagger y \hat{b}_j son los operadores de creación y aniquilación respectivamente. El campo por su parte, es claro que lo podemos escribir en términos de $\{f_i, f_j^*\}$ y $\{\psi_i, \psi_j^*\}$ como

$$\varphi = \sum_i (\hat{a}_i f_i + \hat{a}_i^\dagger f_i^*) = \sum_j (\hat{b}_j \psi_j + \hat{b}_j^* \psi_j^*). \quad (2.21)$$

Notemos que en este punto se pueden definir dos estados de vacío dadas las dos expansiones. De esta manera, escribimos al vacío $|0_f\rangle$, tal que

$$\hat{a}_i |0_f\rangle = 0, \quad (2.22)$$

y al vacío $|0_\psi\rangle$ como aquel que cumple

$$\hat{b}_i |0_\psi\rangle = 0, \quad (2.23)$$

para todo i . Posteriormente, los estados de partícula se definen a partir de los operadores de creación actuando en los vacíos correspondientes. Por tanto, vemos que la noción del vacío no es única tal como anticipamos [21, 23].

Antes de continuar, debemos discutir sobre la unicidad del vacío y la existencia de estados de partícula. Como ya hemos dicho en un espacio-tiempo curvo general no existe ninguna simetría, por lo que no podemos hablar de una representación preferencial donde, para el caso plano, elegimos un estado invariante de Poincaré. Sin embargo, podemos hacer una excepción al tener una geometría estacionaria. Un espacio-tiempo estacionario tiene un vector de Killing k^μ temporal [24, 26]. Así, existe una simetría ante traslaciones temporales y generaliza la noción de un vacío único y de partículas como mencionamos para el espacio-tiempo de Minkowski. Esto se debe a que podemos definir los modos de frecuencia positiva, por lo que construiremos el espacio de Fock a partir de los modos $\{\phi_i, \phi_i^*\}$ que cumplan la siguiente condición [26]

$$k^\mu \partial_\mu \phi_i = -iE_p \phi_i, \quad (2.24)$$

es decir, aquellas que son eigenfunciones de la direccional con respecto al vector k^μ que ahora define el operador de traslaciones temporales. Es claro que la ecuación (2.24) en el caso de Minkowski se convierte en (2.17). Sabemos que de forma general no existe esta situación en un espacio-tiempo arbitrario, por lo que es común tratar este problema suponiendo que la geometría es estacionaria durante algunos intervalos de tiempo, es decir, en el pasado asintótico o bien el futuro asintótico. Esta aproximación define al concepto de partícula como estados asintóticos. Sin embargo, esto puede significar que los modos no sean los mismos de una sección a otra, permitiendo una mezcla entre los modos de frecuencia positiva y negativa [26].

Ya hemos hablado de cómo podemos expandir al operador con diferentes bases, por lo que es natural preguntarnos acerca de las transformaciones que conectan a ambas bases. Éstas se conocen como *Transformaciones de Bogoliubov*. Así, dada una base expresamos al elemento ψ_j en términos de la base $\{f_i, f_i^*\}$ como [21]

$$\psi_j = \sum_i (\alpha_{ji} f_i + \beta_{ji} f_i^*), \quad (2.25)$$

donde α_{ji} y β_{ji} son coeficientes complejos conocidos como coeficientes de Bogoliubov. Usando el producto interno de Klein-Gordon es fácil ver que [23]

$$(f_i, \psi_j) = \alpha_{ji}, \quad (2.26)$$

$$(f_i^*, \psi_j) = -\beta_{ji}, \quad (2.27)$$

Por otro lado, es fácil demostrar a partir de las relaciones de ortonormalización y utilizando la definición explícita del producto interno, que los coeficientes de Bogoliubov

cumplen lo siguiente [21, 23]

$$\sum_l (\alpha_{jl} \alpha_{il}^* - \beta_{jl} \beta_{il}^*) = \delta_{ji}, \quad (2.28)$$

$$\sum_l (\alpha_{jl} \alpha_{il} - \beta_{jl} \beta_{ik}) = 0. \quad (2.29)$$

Gracias a esto podemos calcular la transformación inversa, encontrando que

$$f_i = \sum_j (\alpha_{ji}^* \psi_j - \beta_{ji} \psi_j^*). \quad (2.30)$$

Es claro que con estas expresiones, si $\beta_{ji} = 0$, los modos de frecuencias positivas bajo estas transformaciones mandan a modos de frecuencias positivas, con el entendido de que trabajamos en un espacio-tiempo estacionario.

Además, es posible relacionar ambos conjuntos de operadores de aniquilación a partir de los coeficientes de Bogoliubov, encontrando [23]

$$\hat{a}_i = \sum_j (\hat{b}_j \alpha_{ji} + \hat{b}_j^\dagger \beta_{ji}^*), \quad (2.31)$$

$$\hat{b}_j = \sum_i (\hat{a}_i \alpha_{ji}^* - \hat{a}_i^\dagger \beta_{ji}^*). \quad (2.32)$$

Como ya hemos dicho, las dos expansiones del campo definen dos espacios de Fock. Por tanto, podemos calcular cómo actúan los operadores de aniquilación en el vacío correspondiente a los otros modos, es decir [23],

$$\hat{a}_i |0_\psi\rangle = \sum_j (\hat{b}_j \alpha_{ji} + \hat{b}_j^\dagger \beta_{ji}^*) |0_\psi\rangle = \sum_j \beta_{ji}^* \hat{b}_j^\dagger |0_\psi\rangle \neq 0, \quad (2.33)$$

que es diferente de cero siempre y cuando exista algún $\beta_{ji} \neq 0$. Si ahora definimos al operador de número como $\hat{N}_{f_i} = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$, encontramos que el valor de expectación de este operador en el estado de vacío $|0_\psi\rangle$ es [21]

$$\langle 0_\psi | \hat{N}_{f_i} | 0_\psi \rangle = \sum_j |\beta_{ji}|^2. \quad (2.34)$$

Nuevamente es claro que si $\beta_{ji} = 0$, el número de partículas es cero y, por tanto, ambas nociones de vacío coinciden. En contraste, $\beta_{ji} \neq 0$ nos dice que estado de vacío para los modos ψ_i se percibe como un estado excitado en el espacio de Fock que definen los modos f_i .

Como mencionamos en el espacio-tiempo de Minkowski la invarianza ante transformaciones de Poincaré nos permite definir al espacio de Fock y los estados de partícula para todos los observadores inerciales [23]. En principio, esto sucede cuando los modos están conectados a partir de una transformación de Lorentz o bien un cambio de

coordenadas que mantengan la condición $\beta_{ij} = 0$ [26]. También, podemos generalizar esta definición para un espacio-tiempo estacionario, por lo que en ésta tesis nos enfocaremos a cuantizar el campo escalar en geometrías con esta simetría. Sin embargo, un paso intermedio es el *Efecto Unruh* que aunque en este no estemos trabajando en un espacio-tiempo curvo (seguimos en Minkowski) podemos comparar dos nociones de vacío que aparecen por utilizar diferentes generadores de traslaciones temporales [27].

2.2. Efecto Unruh

Anteriormente estudiamos el proceso de cuantización canónica de un campo escalar libre en un espacio-tiempo curvo bajo ciertas condiciones. Sin embargo, antes de aplicarlo para una métrica concreta, conviene dar un paso intermedio, por lo que ahora estudiaremos el efecto Unruh. Éste predice la detección de partículas cuando el campo está en el estado de vacío en el sistema inercial en comparación con un observador que se encuentra en aceleración propia constante, dentro del espacio-tiempo de Minkowski. Más aún, en dicha detección el observador mide una distribución de Bose-Einstein correspondiente a un baño térmico con temperatura proporcional a la aceleración propia [22].

Vale la pena recalcar que todo el desarrollo que haremos se encuentra en el espacio-tiempo plano con la diferencia de que ahora estudiaremos la cuantización desde un sistema de coordenadas cuyo significado físico está en relación con observadores acelerados [20]. Así, encontramos que para este caso existen dos nociones de vacío que no coinciden.

Esta sección está basada en su mayoría por la referencia [22] de la bibliografía. Dicho esto, nuestro primer objetivo es describir la trayectoria de una partícula moviéndose con aceleración propia constante, es decir, la que se encuentra medida desde el sistema de referencia de la misma partícula. Ésta es la definición de un movimiento uniformemente acelerado en relatividad especial. Se debe recordar que la aceleración, es decir, $d\vec{v}/dt$ no puede ser constante, ya que la velocidad debe cumplir $v < 1$. Por otro lado, del capítulo anterior la cuadrivelocidad u^μ está dada por

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (2.35)$$

donde x^μ es la línea de mundo de los objetos acelerados y τ el tiempo propio. Además, u^μ cumple la siguiente condición

$$u_\mu u^\mu = -1. \quad (2.36)$$

De igual manera definimos a la cuatriaceleración

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}. \quad (2.37)$$

Por otro lado, a partir de la ecuación (2.36) es posible encontrar que

$$u^\mu a_\mu = 0, \quad (2.38)$$

si consideramos ahora el sistema de referencia comóvil $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$, es claro que $a_0 = 0$. Así, tenemos que

$$a_\mu a^\mu = -a^2, \quad (2.39)$$

donde a es la magnitud del vector tridimensional asociado a la aceleración propia. Al integrar estas ecuaciones diferenciales e imponer condiciones iniciales la línea de mundo de un observador uniformemente acelerado está dada por

$$x(\tau) = x_0 - \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \cosh(a\tau) ; t(\tau) = t_0 + \frac{1}{a} \sinh(a\tau). \quad (2.40)$$

Si además pedimos que el movimiento sea en la dirección x , es claro que las coordenadas y y z se mantienen idénticas. Por otro lado, si escogemos las siguientes condiciones iniciales $x(0) = a^{-1}$ y $t(0) = 0$ podemos ver que las líneas de mundo son ramas de hipérbola, donde la asíntota de dicha familia de hipérbolas corresponde al cono de luz en el espacio-tiempo de Minkowski. Por lo ya dicho y simplicidad conviene escribir al espacio-tiempo en 1+1 dimensiones.

Para describir la cuantización desde el sistema de referencia uniformemente acelerado hace falta definir las coordenadas del sistema de referencia inercial (t, x) , y las correspondientes al sistema acelerado con las coordenadas (τ, ξ) , donde ξ es la distancia medida por el observador acelerado. Cabe señalar que en las coordenadas dadas en la ecuación (2.40) corresponden a $\xi = 0$. De esta manera, es posible demostrar que en general las coordenadas de un observador acelerado (τ, ξ) (dadas las condiciones iniciales mencionadas anteriormente) se pueden escribir como

$$t(\tau, \xi) = \frac{1 + a\xi}{a} \sinh(a\tau), \quad (2.41)$$

$$x(\tau, \xi) = \frac{1 + a\xi}{a} \cosh(a\tau). \quad (2.42)$$

Con las expresiones (2.41) y (2.42), es fácil ver que τ y ξ obedecen que $-\infty < \tau < \infty$ y $-a^{-1} < \xi < \infty$. Por otro lado, notemos que las coordenadas anteriores sólo cubren una cuarta parte del espacio-tiempo de Minkowski. En concreto $x > |t|$, que llamamos *cuña derecha de Rindler*. Podemos definir a la *cuña izquierda de Rindler* a través del siguiente cambio de variable

$$t(\tau, \xi) = \frac{1 + a\xi}{a} \sinh(a\tau), \quad (2.43)$$

$$x(\tau, \xi) = -\frac{1 + a\xi}{a} \cosh(a\tau), \quad (2.44)$$

que cubre ahora otra cuarta parte del espacio-tiempo de Minkowski ($x < -|t|$). Las otras dos zonas definen al universo de Kasner en expansión y el universo de Kasner

en contracción [20, 23]. De esta forma vemos que un observador acelerado no puede acceder a todas las secciones del espacio-tiempo de Minkowski. De hecho, cada una de las 4 secciones que hemos definido están separadas causalmente. Para ver esto hace falta ver la estructura causal de la métrica con estas coordenadas. Así, el elemento de línea está dado por

$$ds^2 = -(1 + a\xi)^2 d\tau^2 + d\xi^2. \quad (2.45)$$

Si ahora hacemos el siguiente cambio de variable,

$$\rho = \frac{(1 + a\xi)}{a}, \quad (2.46)$$

es claro que podemos expresar la ecuación diferencial de las geodésicas tipo luz como

$$d\tau = \pm(a\rho)^{-1} d\rho \quad (2.47)$$

e integrando obtenemos,

$$\tau = \pm \frac{1}{a^2} \ln |\rho| + C, \quad (2.48)$$

donde C es una constante de integración el signo positivo y negativo corresponden a las geodésicas entrantes y salientes, respectivamente. De esta manera, al gráficar podemos ver que los conos de luz de esta métrica comienzan a cerrarse cuando $\rho \rightarrow 0$, por lo que se asemeja al horizonte de eventos de un agujero negro. Dicha condición nos dice que este horizonte se encuentra en las asíntotas, definidas por $x = |t|$ para la cuña derecha y para $x = -|t|$ en la cuña izquierda. A esta zona, debido a su naturaleza se le conoce como *horizonte de aceleración*. Este horizonte, como ya hemos dicho, desconecta causalmente las 4 regiones mencionadas y representa al cono de luz en el espacio-tiempo de Minkowski. Otro detalle importante a mencionar es que mientras $\rho \rightarrow 0$, de la ecuación (2.46), vemos que la aceleración propia $a \rightarrow \infty$. Esto quiere decir que para el caso de la luz, las hipérbolas se degeneran a las asíntotas. El análisis anterior puede verse gráficamente en la figura (2.1).

Para nuestros fines, conviene utilizar otro cambio de coordenadas [22]

$$\tau \rightarrow \tau, \quad (2.49)$$

$$\chi \rightarrow \frac{1}{a} \ln(1 + \xi), \quad (2.50)$$

donde $-\infty < \chi < \infty$. Así, el elemento de línea correspondiente está dado por

$$ds^2 = e^{2a\chi} (-d\tau^2 + d\chi^2). \quad (2.51)$$

De la métrica (2.51), notemos que esta no depende de la coordenada τ . Esto implica que el vector ∂_τ es un vector de Killing que define a las traslaciones temporales. Por otro lado, es fácil ver que este vector es temporal en las regiones de la cuña derecha y izquierda y, por tanto, al restringir el espacio-tiempo de Minkowski en alguna de estas cuñas encontramos un espacio-tiempo estático y globalmente hiperbólico que

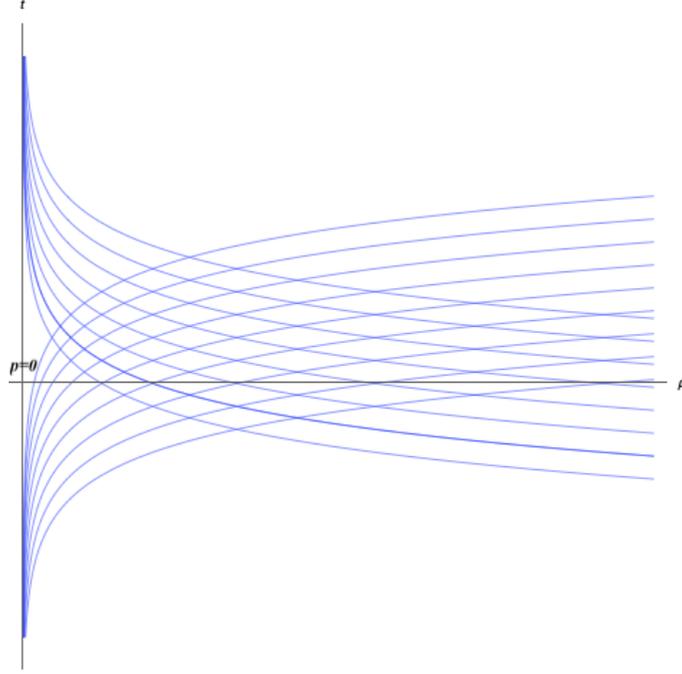


Figura 2.1: Gráfica de geodésicas radiales nulas en las coordenadas de rindler que nos dan la orientación de los conos de luz. Es claro que para $\rho \rightarrow 0$ los conos de luz comienzan a cerrarse, por lo que esta superficie define un *horizonte de aceleración*.

llamaremos *espacio-tiempo de Rindler* [27]. La ecuación (2.51) también es útil pues nos simplifica el proceso de cuantización, ya que esta expresión de la métrica es conforme a Minkowski. En general, decimos que una métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$, es conforme a $g_{\mu\nu}$ si y solo si [22]

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \gamma(x)g_{\mu\nu}, \quad (2.52)$$

donde γ es una función escalar diferente de cero que es conocida como *factor conforme*. Las métricas conformes además, preservan los ángulos entre dos vectores [23]. Por otro lado, una métrica es *conformemente plana* si en la definición anterior $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Dicha condición para nuestros fines es importante pues las ecuaciones de movimiento para el campo son idénticas a las vistas durante el primer capítulo. En otras palabras el campo, que deseamos cuantizar, queda totalmente desacoplado del campo gravitacional.

De esta manera, si tomamos por simplicidad un campo escalar sin masa, podemos escribir a la acción como

$$\begin{aligned} S &= \int d^2y \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi = \int d^2y e^{2a\chi} (-e^{-2a\chi} \partial_\tau \varphi \partial_\tau \varphi + e^{-2a\chi} \partial_\chi \varphi \partial_\chi \varphi) \\ &= \int d^2y (-\partial_\tau \varphi^2 + \partial_\chi \varphi^2), \end{aligned} \quad (2.53)$$

donde $y = (\tau, \chi)$. La ecuación de movimiento está dada por

$$(\partial_\tau^2 - \partial_\chi^2)\varphi(\tau, \chi) = 0, \quad (2.54)$$

que es la misma forma de la ecuación diferencial, que encontramos para la métrica de Minkowski en coordenadas usuales.

Como vimos en la sección anterior la ecuación de movimiento clásica coincide con su análoga cuántica y, por tanto, la ecuación de movimiento dada en (2.54) se mantiene al promover a operador al campo $\varphi(\tau, \chi)$. Por otro lado, al ser el espacio-tiempo de Rindler estático nos permite definir el espacio de Fock y los correspondientes operadores de creación y aniquilación $\{\hat{b}_p, \hat{b}_p^\dagger\}$. Así, podemos escribir al operador de campo como [22]

$$\hat{\varphi}(\tau, \chi) = \int \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{E_p}} (e^{ip \cdot y} \hat{b}_p + e^{-ip \cdot y} \hat{b}_p^\dagger) \Big|_{p^0=E_p}. \quad (2.55)$$

En este punto, debemos mencionar que durante la cuantización nos centraremos únicamente en resolver para la cuña derecha, ya que la izquierda es completamente análoga. Además, notemos que la expresión (2.55) separa los modos de frecuencia positivos y negativos con respecto al generador ∂_τ . Por otro lado, escribimos al operador de campo en coordenadas (t, x) , encontrando que

$$\hat{\varphi}(t, x) = \int \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{E_p}} (e^{ip \cdot x} \hat{a}_p + e^{-ip \cdot x} \hat{a}_p^\dagger) \Big|_{p^0=E_p}. \quad (2.56)$$

A partir de las expansiones (2.55) y (2.56) podemos obtener los dos vacíos correspondientes. Definimos al vacío de Minkowski $|0_M\rangle$, tal que

$$\hat{a}_p |0_M\rangle = 0, \quad (2.57)$$

y al vacío de Rindler $|0_R\rangle$ de forma que

$$\hat{b}_p |0_R\rangle = 0, \quad (2.58)$$

para todo p . Los posteriores estados de partícula se definen a partir de los operadores de creación actuando en sus respectivos vacíos. Una vez establecido lo anterior, nuestro siguiente objetivo es calcular el valor de expectación del operador de número $\hat{N}_{R\omega} = \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i$ con respecto al vacío de Minkowski, es decir, $\langle 0_M | \hat{N}_{R\omega} | 0_M \rangle$. Para ello, definimos las coordenadas del cono de luz

$$u = t - x, v = t + x; \quad \bar{u} = \tau - \chi, \bar{v} = \tau + \chi, \quad (2.59)$$

que se relacionan entre sí a partir la siguiente ecuación

$$u = -a^{-1} e^{-a\bar{u}}; \quad v = a^{-1} e^{a\bar{v}}. \quad (2.60)$$

Reescribiendo al operador de campo encontramos que

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (e^{-iE_p t + px} \hat{a}_p + e^{iE_p t - px} \hat{a}_p^\dagger) \Big|_{p^0=E_p} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (e^{-iE_p t + px} \hat{a}_p + e^{iE_p t - px} \hat{a}_p^\dagger) \Big|_{p^0=E_p} \\ &\quad + \int_0^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (e^{-iE_p t - px} \hat{a}_{-p} + e^{iE_p t + px} \hat{a}_{-p}^\dagger) \Big|_{p^0=E_p},\end{aligned}$$

donde hemos cambiado de variable de p a $-p$. Además de la relación de dispersión relativista, $p_\mu p^\mu = -E_p^2 + \vec{p}^2 = 0$ y tomando $\omega = p$, escribimos al campo como

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(t, x) &= \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (e^{-i\omega u} \hat{a}_\omega + e^{i\omega u} \hat{a}_\omega^\dagger) \\ &\quad + \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (e^{-i\omega v} \hat{a}_{-\omega} + e^{i\omega v} \hat{a}_{-\omega}^\dagger).\end{aligned}\tag{2.61}$$

Haciendo un procedimiento similar, encontramos la siguiente expresión

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\tau, \chi) &= \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (e^{-i\omega \bar{u}} \hat{b}_\omega + e^{i\omega \bar{u}} \hat{b}_\omega^\dagger) \\ &\quad + \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (e^{-i\omega \bar{v}} \hat{b}_{-\omega} + e^{i\omega \bar{v}} \hat{b}_{-\omega}^\dagger).\end{aligned}\tag{2.62}$$

Es claro de las ecuaciones (2.61) y (2.62) que podemos separar el campo de la siguiente forma [22]

$$\hat{\varphi} = \hat{A}(u) + \hat{B}(v) = \hat{P}(\bar{u}) + \hat{Q}(\bar{v}),\tag{2.63}$$

y en conjunto con la transformación dada en la ecuación (2.60), concluimos que podemos relacionar estas partes del operador de campo de la siguiente manera

$$\hat{A}(u(\bar{u})) = \hat{P}(\bar{u}),\tag{2.64}$$

$$\hat{B}(v(\bar{v})) = \hat{Q}(\bar{v}).\tag{2.65}$$

Nos centraremos a resolver la ecuación (2.64), pues la otra es completamente análoga. Así,

$$\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (e^{-i\omega u} \hat{a}_\omega + e^{i\omega u} \hat{a}_\omega^\dagger) = \int_0^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} (e^{-i\Omega \bar{u}} \hat{b}_\Omega + e^{i\Omega \bar{u}} \hat{b}_\Omega^\dagger),\tag{2.66}$$

que al multiplicar por el factor $\frac{d\bar{u}}{2\pi} e^{i\Omega \bar{u}}$ e integrar con respecto a \bar{u} , obtenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{u}}{2\pi} e^{i\Omega \bar{u}} \hat{A}(u) = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{u}}{4\pi^2} (e^{i\Omega \bar{u} - i\omega u} \hat{a}_\omega + e^{i\Omega \bar{u} + i\omega u} \hat{a}_\omega^\dagger),\tag{2.67}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{u}}{2\pi} e^{i\Omega\bar{u}} \hat{P}(\bar{u}) = \begin{cases} \hat{b}_{\Omega} & \text{si } \Omega > 0, \\ \hat{b}_{|\Omega|} & \text{si } \Omega < 0. \end{cases} \quad (2.68)$$

Si tomamos que $\Omega > 0$, tenemos la siguiente relación

$$\hat{b}_{\Omega} = \int_0^{\infty} d\omega (\alpha_{\omega\Omega} \hat{a}_{\omega} + \beta_{\omega\Omega} \hat{a}_{\omega}^{\dagger}), \quad (2.69)$$

donde

$$\alpha_{\omega\Omega} = \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{u}}{4\pi^2} e^{i\Omega\bar{u} - i\omega u} = \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} T_{\omega\Omega}, \quad (2.70)$$

$$\beta_{\omega\Omega} = \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{u}}{4\pi^2} e^{i\Omega\bar{u} + i\omega u} = \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} T_{-\omega\Omega}, \quad (2.71)$$

son los coeficientes de Bogoliubov y

$$T_{\omega\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{u}}{4\pi^2} e^{i\Omega\bar{u} - i\omega u}. \quad (2.72)$$

La ecuación (2.69) representa la transformación de Bogoliubov correspondiente. La transformación inversa la podemos encontrar a partir de las ecuaciones (2.28) y (2.29), hallando que

$$\hat{a}_{\omega} = \int_0^{\infty} d\Omega (\alpha_{\omega\Omega}^* \hat{b}_{\Omega} - \beta_{\omega\Omega} \hat{b}_{\Omega}^{\dagger}). \quad (2.73)$$

Veamos cómo podemos reescribir la expresión de $T_{\omega\Omega}$ al sustituir en términos únicamente de \bar{u} , es decir,

$$\begin{aligned} T_{\omega\Omega} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{u}}{4\pi^2} \exp \left[i\Omega\bar{u} + \frac{i}{a} \omega e^{-a\bar{u}} \right] \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{4\pi^2 a} \exp \left[\frac{i\omega}{a} x \right] e^{\bar{u}(a+i\Omega)} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{4\pi^2 a} \exp \left[\frac{i\omega}{a} x \right] x^{-1-i\Omega/a} \\ &= \frac{1}{4\pi^2 a} \int_0^{\infty} dx e^{i\omega x/a} x^{-i\Omega/a-1}, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el siguiente cambio de variable $x = e^{-a\bar{u}}$. Si utilizamos la definición de la función Gamma¹ encontramos que

$$T_{\omega\Omega} = \frac{1}{4\pi^2 a} \exp \left[\frac{i\Omega}{a} \ln \frac{\omega}{a} + \frac{\pi\Omega}{2a} \right] \Gamma \left[\frac{-i\Omega}{a} \right]. \quad (2.74)$$

¹La función Gamma se puede definir a partir de la siguiente integral [22]

$$\Gamma[x] = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{x-1}$$

Por su parte, es fácil ver que $T_{-\omega\Omega}$ se puede escribir como

$$T_{-\omega\Omega} = \frac{1}{4\pi^2 a} \exp \left[\frac{i\Omega}{a} \ln \frac{\omega}{a} - \frac{\pi\Omega}{2a} \right] \Gamma \left[\frac{-i\Omega}{a} \right]. \quad (2.75)$$

Con ambas expresiones, podemos hacer el cálculo explícito de $\langle 0_M | \hat{N}_{R\omega} | 0_M \rangle$. Así,

$$\begin{aligned} \langle 0_M | \hat{N}_{R\Omega} | 0_M \rangle &= \langle 0_M | \hat{b}_\Omega^\dagger \hat{b}_\Omega | 0_M \rangle \\ &= \langle 0_M | \int_0^\infty d\omega (\alpha_{\omega\Omega}^* \hat{a}_\Omega^\dagger + \beta_{\omega\Omega}^* \hat{a}_\Omega) \int_0^\infty d\omega' (\alpha_{\omega'\Omega} \hat{a}_\Omega + \beta_{\omega'\Omega} \hat{a}_\Omega^\dagger) | 0_M \rangle \\ &= \int_0^\infty d\Omega |\beta_{\omega\Omega}|^2, \end{aligned}$$

donde hemos usado la relación de conmutación $[\hat{a}_\omega, \hat{a}_{\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega')$. Al sustituir la expresión (2.71) encontramos que

$$\begin{aligned} \langle 0_M | \hat{N}_{R\Omega} | 0_M \rangle &= \int_0^\infty d\omega \frac{\Omega}{\omega} |T_{-\omega\Omega}|^2 \\ &= \frac{1}{16\pi^2 a^2} \Omega \exp \left[\frac{-\pi\Omega}{a} \right] \left| \Gamma \left[-\frac{i\Omega}{a} \right] \right|^2 \int_0^\infty d\omega \frac{1}{\omega} \left| \exp \left[\frac{i\Omega}{a} \ln \frac{\omega}{a} \right] \right|^2. \end{aligned}$$

Si definimos

$$I = \int_0^\infty d\omega \frac{1}{\omega} \left(\frac{\omega}{a} \right)^{i(\Omega - \Omega')/a}, \quad (2.76)$$

con el siguiente cambio de variable, $x = \ln(\omega/a)$, podemos reescribir a I como

$$I = \int_{-\infty}^\infty dx e^{ix(\Omega - \Omega')/a} = 2\pi a \delta(\Omega - \Omega'). \quad (2.77)$$

Así, es fácil concluir que

$$\int_0^\infty d\omega \frac{1}{\omega} \left| \exp \left[\frac{i\Omega}{a} \ln \frac{\omega}{a} \right] \right|^2 = 2\pi a \delta(0). \quad (2.78)$$

Por otro lado, sabemos que una de las propiedades de la función Gamma es $|\Gamma(ix)|^2 = \frac{\pi}{x \sinh \pi x}$ [22], que nos permite encontrar que

$$\langle 0_M | \hat{N}_{R\Omega} | 0_M \rangle = \frac{1}{16\pi^2 a^2} \Omega \exp \left[\frac{-\pi\Omega}{a} \right] \frac{\pi}{\frac{-\Omega}{a} \sinh \frac{-\pi\Omega}{a}} 2\pi a \delta(0) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\delta(0)}{e^{2\pi\Omega/a} - 1}. \quad (2.79)$$

La divergencia en la expresión (2.79) viene de la integración de todo el volumen, por lo que podemos interpretar a

$$\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{e^{2\pi\Omega/a} - 1} = \rho_\Omega, \quad (2.80)$$

como una densidad de partículas. Dicha densidad sigue la distribución de Bose-Einstein con temperatura $T = \frac{a}{2\pi}$, es decir, que es proporcional a la aceleración propia tal como anticipamos. A esta temperatura se le conoce como la *Temperatura de Unruh*. Por tanto, como vimos al principio de esta sección, el efecto Unruh consiste en que un observador acelerado detecta un baño térmico de partículas a una cierta temperatura proporcional a la aceleración propia, en contraste con uno que se encuentra en un sistema de referencia inercial.

Una vez estudiado el efecto Unruh estamos en condiciones para cuantizar un campo escalar real en un fondo curvo específico, el espacio-tiempo de Schwarzschild. En la siguiente sección estudiaremos los principales resultados de este hacer este procedimiento.

2.3. Radiación de Hawking y termodinámica de agujeros negros

En esta sección estudiaremos la radiación de Hawking producto de la cuantización de un campo escalar en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Éste, además, tiene cierta relación con la ya visto para el efecto Unruh. Sin embargo, conviene primero estudiar la termodinámica de agujeros negros.

En principio, ésta se basa en que podemos establecer leyes de la mecánica de agujeros negros que hacen analogía a las leyes de la termodinámica [5]. Como se menciona en [5, 31], Hawking demostró que el área del horizonte de eventos de un agujero negro no decrece en el tiempo bajo ciertas hipótesis. Por su parte, lo anterior corresponde directamente a la segunda ley de la termodinámica que hace referencia a que la entropía tampoco puede decrecer en cualquier proceso de la naturaleza que se encuentra en un sistema cerrado.

Para encontrar las mencionadas relaciones entre estas leyes hace falta definir la *gravedad superficial* κ , que puede ser definida en el horizonte de eventos de un agujero negro estacionario [5]. En esa dirección, primero definimos a una hipersuperficie nula \mathcal{N} , si cumple que [6]

$$v^\mu v_\mu = 0 \tag{2.81}$$

donde v^μ es un vector normal a \mathcal{N} . Además, de la definición (2.81) es claro que dicho vector es ortogonal a sí mismo. Físicamente esto significa que en una superficie nula las trayectorias tipo luz son normales y a la vez tangentes a ésta. A partir de lo anterior, podemos ahora definir a un *horizonte de Killing* \mathcal{K} , como una hipersuperficie nula cuyo vector normal χ^μ , es un vector de Killing.

Por otro lado, como un horizonte de killing es una hipersuperficie nula el vector de Killing χ^μ , es nulo en toda el horizonte; en particular, $\chi_\mu \chi^\mu$ es constante en el horizonte. Por lo que el cambio de la cantidad anterior tiene que ser normal a esta superficie, que en otras palabras significa que el vector $\nabla^\mu(\chi^\alpha \chi_\alpha)$ es normal a \mathcal{K} , es decir [5],

$$\nabla^\mu(\chi^\alpha \chi_\alpha) = -2\kappa \chi^\mu|_{\mathcal{K}}, \tag{2.82}$$

donde κ es una función que sirve como un reescalamiento entre ambos vectores. Además, es posible probar que cumple que [6]

$$\chi^\mu \partial_\mu \kappa = 0. \quad (2.83)$$

La ecuación (2.83) nos dice que la derivada direccional de κ es cero y, por tanto, es constante en las orbitas que define el vector χ^μ [5].

A la función κ se le conoce como *gravedad superficial* que podemos obtener directamente a partir de la siguiente expresión [5]

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}(\nabla^\mu \chi^\nu)(\nabla_\mu \chi_\nu). \quad (2.84)$$

Con las definiciones anteriores, debemos calcularlas utilizando a la métrica de Schwarzschild. Como vimos en el capítulo anterior, es fácil ver que Schwarzschild posee un vector de Killing temporal (en coordenadas de Schwarzschild) dado por

$$\chi = \partial_t. \quad (2.85)$$

Cuya norma la podemos escribir como

$$\chi_\mu \chi^\mu = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (2.86)$$

De la ecuación (2.86) es claro que en la superficie $r = 2M$, es decir, el horizonte de eventos, el vector de Killing es nulo. Por otro lado, es posible demostrar que el vector de Killing ∂_t es normal a \mathcal{K} y, por tanto, podemos concluir que el horizonte de eventos es también un horizonte de Killing [30]. De esa manera, la gravedad superficial es constante a lo largo de todo el horizonte de eventos. Así, con ayuda de la ecuación (2.84), encontramos que la gravedad superficial para el agujero negro de Schwarzschild está dada por [5]

$$\kappa = \frac{1}{4M}. \quad (2.87)$$

Recordemos que estamos en busca de una relación con la termodinámica. La gravedad superficial es una candidata a estar relacionada con la temperatura del sistema, pues dicha cantidad es constante a lo largo del horizonte de eventos, surgiendo una analogía a la temperatura T , que es constante para un cuerpo en equilibrio térmico.

Para ver esto, debemos enunciar un equivalente a la primera ley de la termodinámica. Para ello, debemos dar una definición de masa (energía) en relatividad general. Una de estas definiciones es *la masa de Komar* que definimos para una geometría estacionaria y asintóticamente plana. Ésta se encuentra dada por [5]

$$M = 2 \int_\Sigma \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) n^\mu \chi^\nu - \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{H}} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \nabla^\alpha \chi^\beta, \quad (2.88)$$

donde Σ es una hipersuperficie, H el horizonte de eventos, \mathcal{H} la intersección del horizonte con la 2-esfera, n^μ es un vector normal a la superficie Σ y $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ es el

símbolo de Levi-Civita² que nos ayuda a expresar el elemento de volumen. La masa de Komar se puede simplificar como

$$M = 2 \int_{\Sigma} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) n^{\mu} \chi^{\nu} + \frac{1}{4\pi} \kappa A, \quad (2.89)$$

donde A es el área del horizonte de eventos. Recordemos que para el agujero negro de Schwarzschild $T_{\mu\nu} = 0$, por lo que podemos simplificar la expresión (2.89), encontrando que

$$M = \frac{1}{4\pi} \kappa A. \quad (2.90)$$

En este punto, debemos ver que ha aparecido la gravedad superficial en esta expresión de la masa. A partir de la ecuación (2.90), nuestra siguiente tarea es escribirla en su forma diferencial. La discusión y los cálculos para llegar a ésta escapa de los fines de esta tesis, pero puede ser encontrada en la referencia [5] de la bibliografía. De ella encontramos que

$$dM = \frac{1}{8\pi} \kappa dA. \quad (2.91)$$

De esta manera, podemos comparar la ecuación (2.91) con la primera ley de la termodinámica (excluyendo el término mecánico $-pdV$) dada por

$$dE = T dS. \quad (2.92)$$

Si ahora consideramos lo que dijimos al principio de esta sección, es decir, que el área no puede decrecer en el tiempo. Concluimos que existe una clara correspondencia entre el área del horizonte y la entropía que nos permite relacionar la gravedad superficial con la temperatura.

Así, de lo que hemos discutido, estamos en condiciones para enunciar las siguientes leyes de la mecánica de agujeros negros:

- *Ley Cero*: La gravedad superficial κ es constante sobre el horizonte de eventos de un agujero negro estacionario
- *Primera Ley*: La masa M (o energía interna), se relaciona con el área del horizonte de eventos bajo la ecuación (2.91).
- *Segunda Ley*: El área de un agujero negro no puede decrecer en el tiempo en ningún proceso, es decir, siempre aumenta o se mantiene constante.

Los enunciados anteriores son comparables con las leyes de la termodinámica. Por lo que podemos concluir las siguientes relaciones [5]

$$E = M \quad (2.93)$$

²El símbolo de Levi-Civita se define como un tensor antisimétrico que toma el valor +1 para permutaciones pares, -1 para permutaciones impares y cero para índices iguales [6].

$$T = a\kappa \quad (2.94)$$

$$S = \frac{1}{8\pi a} A, \quad (2.95)$$

donde a es una constante que encontraremos su valor más adelante. Además, la ecuación (2.93) coincide con la relación de dispersión relativista $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, para $\vec{p} = 0$.

Con ayuda de las ideas anteriores, podemos intuir que los agujeros negros emiten una radiación térmica a temperatura (2.94), a pesar de que la relatividad general nos diga que los agujeros negros no emiten radiación y, por tanto, estos tengan $T = 0$ [5]. En 1975, Hawking demostró por medio de la teoría cuántica de campos, que la radiación proveniente de los agujeros negros se debe a un proceso de creación y aniquilación que resulta en una emisión de partículas efectiva. Este fenómeno se le conoce como *radiación de Hawking* [32].

Debemos mencionar que hasta ahora no hemos utilizado la teoría cuántica de campos, por lo que para probar la radiación de Hawking y encontrar el valor exacto de la temperatura y entropía tendríamos que usar la teoría cuántica de campos en la métrica de Schwarzschild.

Por simplicidad conviene estudiar nuevamente un campo escalar real sin masa. Además, debido a que el espacio-tiempo de Schwarzschild tiene simetría esférica podemos hacer una primera aproximación considerando al campo $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(t, r)$.

El siguiente desarrollo, en su mayoría, puede consultarse en la referencia [20] de la bibliografía. Para ello, reescribimos a la métrica de Schwarzschild en 3+1 dimensiones

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.96)$$

Si introducimos el siguiente cambio de variable

$$r^* = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right), \quad (2.97)$$

esta nueva coordenada r^* solo cubre la región exterior del agujero negro, es decir, $r > 2M$. La métrica por su parte está dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r(r^*)}\right) [-dt^2 + (dr^*)^2] + r(r^*)^2 d\Omega^2. \quad (2.98)$$

Notemos que si eliminamos la parte angular en la métrica (2.98) esta se vuelve conformemente plana.

Para escribir las ecuaciones de movimiento debemos seguir los pasos que hicimos al inicio de este capítulo a partir de la métrica (2.96), encontrando

$$\left[-\partial_t^2 + \partial_{r^*}^2 + \frac{2}{r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \partial_{r^*} \right] \hat{\varphi}(t, r^*) = 0. \quad (2.99)$$

De la ecuación (2.99) notemos que existe un término de primer orden en ∂_{r^*} , por lo que, en un inicio, no podemos reproducir exactamente una ecuación de onda. Para entender la naturaleza de este último término conviene escribir al campo de la siguiente forma

$$r^{-1}\hat{\phi}(t, r^*) = \hat{\varphi}(t, r^*), \quad (2.100)$$

que nos permite escribir la ecuación de movimiento como

$$\left[-\partial_t^2 + \partial_{r^*}^2 + \frac{2M}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \right] \hat{\phi}(t, r^*) = 0. \quad (2.101)$$

En comparación con las ecuaciones de movimiento que hemos estudiado, la ecuación (2.101) presenta un potencial efectivo dado por

$$V(r^*) = \frac{2M}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r} \right). \quad (2.102)$$

Por su parte, la presencia de este potencial genera un término de *backscattering* de los modos de expansión en esta métrica y, por tanto, corresponde a una barrera de potencial que evita la propagación libre de los modos. Este fenómeno modifica el espectro de emisión de un agujero negro en comparación con el que encontraremos más adelante. Es posible probar que estas diferencias en el espectro de emisión son pequeñas para altas frecuencias, por lo que no considerar este término de potencial efectivo es una buena aproximación [33]. De esta manera, la ecuación de movimiento puede ser escrita como

$$(-\partial_t^2 + \partial_{r^*}^2)\hat{\phi} = 0, \quad (2.103)$$

que corresponde a la ecuación de onda. Debemos mencionar que al tomar esta aproximación estamos considerando la métrica de Schwarzschild reducida en 1 + 1 dimensiones que es conformalmente plana.

Definimos ahora las coordenadas nulas

$$\bar{u} = t - r^* ; \bar{v} = t + r^*, \quad (2.104)$$

donde \bar{u} define las coordenadas nulas salientes y \bar{v} las entrantes. Podemos hacer un procedimiento similar a lo hecho para el efecto Unruh por tanto, es fácil ver que el operador de campo se puede expandir como

$$\hat{\phi}(t, r^*) = \hat{A}(\bar{u}) + \hat{B}(\bar{v}) = \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2p}} (\hat{b}_p e^{-ip\bar{u}} + \hat{b}_p^\dagger e^{ip\bar{u}}) + \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2p}} (\hat{b}_p e^{-ip\bar{v}} + \hat{b}_p^\dagger e^{ip\bar{v}}), \quad (2.105)$$

identificando a $\hat{A}(\bar{u})$ como los modos salientes y $\hat{B}(\bar{v})$ a los entrantes.

En este punto, faltaría expresar al campo $\hat{\phi}$ con otra base y calcular cómo difieren ambas nociones de vacío. Así, debemos enfocarnos en encontrar una forma de describir los estados de una con respecto a otra. De esa manera, podremos ver al estado de vacío como un estado de partículas. En ese sentido no es difícil imaginarse que la radiación de Hawking mencionada anteriormente se traduce a una radiación térmica

de partículas. Sin embargo, a partir de lo dicho en [20], para entender la radiación de Hawking debemos enfocarnos en el proceso dinámico que da lugar a un agujero negro, es decir, *el colapso gravitacional*. Como se menciona en [34], en un inicio la presión debida a las reacciones termonucleares dentro de una estrella se encuentran en equilibrio con el campo gravitacional. El colapso gravitacional inicia cuando el combustible detras de estas reacciones comienza a agotarse obteniendo un nuevo estado de equilibrio. En particular, una estrella con simetría esférica y radio mayor a $2M$ que comienza a colapsar disminuye su radio hasta convertirse en un agujero negro. Gráficamente podemos seguir el colapso gravitacional a partir de un diagrama de Penrose³, como se ve en la figura (2.2).

Al ser este un proceso dinámico sin una expresión analítica debemos utilizar la aproximación que hemos mencionado anteriormente. Es decir, suponer 3 secciones del espacio-tiempo: la primera corresponde a un espacio-tiempo estático asintóticamente plano, donde se encuentra la estrella previamente al colapso. Donde la región exterior a dicha estrella es la geometría de Schwarzschild y deja de ser válida en el interior de esta. Lo anterior se puede considerar gracias al teorema de Birkhoff pues, como se mencionó, Schwarzschild es la única solución con simetría esférica y en vacío. Por otro lado, el espacio-tiempo intermedio es dinámico y describe a la estrella durante el colapso gravitacional hasta la formación del agujero negro. Finalmente, tenemos otra geometría estática, con la diferencia de que ahora se encuentra el agujero negro [26, 36] Esta geometría se puede ilustrar en la figura (2.3).

Definido el escenario anterior, nos centraremos a cuantizar el campo escalar en la primera región estática del espacio-tiempo, es decir, previa al proceso de colapso. Si además, nos enfocamos en la región asintóticamente plana ($r \rightarrow \infty$), sabemos del capítulo anterior, que podemos expandir el campo de la siguiente forma

$$\hat{\phi}(t, r) = \hat{P}(u) + \hat{Q}(v) = \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2p}} (\hat{a}_p e^{-ipu} + \hat{a}_p^\dagger e^{ipu}) + \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2p}} (\hat{a}_{-p} e^{-ipv} + \hat{a}_{-p}^\dagger e^{ipv}), \quad (2.106)$$

donde $u = t - r$ y $v = t + r$ son las coordenadas nulas salientes y entrantes respectivamente.

Con las dos expresiones del campo estamos en condiciones para definir los espacios de Fock correspondientes. Así, definimos en el futuro asintótico al vacío $|0_{out}\rangle$ correspondiente a los modos de frecuencia (2.105). Análogamente el vacío $|0_{in}\rangle$ definido en el pasado asintótico a partir de los modos (2.106). Con los vacíos ya definidos nuestro siguiente objetivo consiste en encontrar las transformaciones de Bogoliubov, entre las dos expresiones del campo. Gracias a ellas podemos medir la detección de partículas vistas por un observador situado en el futuro asintótico, que proviene de propagar el campo desde el pasado asintótico.

Una vez dicho lo anterior, para obtener los coeficientes de Bogoliubov debemos comparar los modos en las dos regiones que ya mencionamos y encontrar la densidad

³Estos diagramas a grandes rasgos nos ayudan a estudiar la estructura causal de un espacio-tiempo. Estudiarlos a fondo escapan de los fines de esta tesis. Sin embargo, en la referencia [35] se pueden estudiar más a fondo estos.

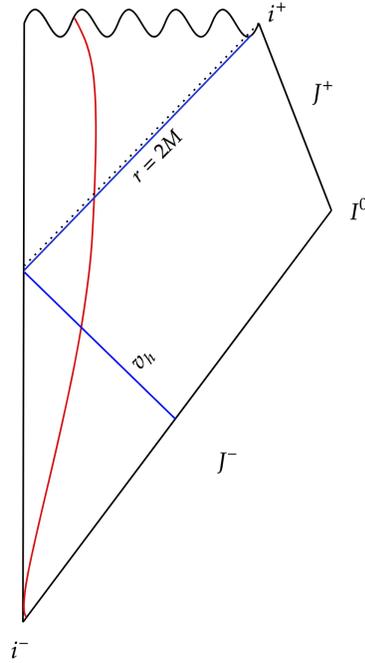


Figura 2.2: Diagrama de Penrose del colapso de una estrella. La región que cubre la curva roja representa la materia en colapso. J^+ el futuro nulo asintótico, J^- el pasado asintótico nulo, i^+ el infinito temporal futuro, i^- el infinito temporal pasado e I^0 el infinito radial. La línea punteada define el horizonte de eventos. Por su parte la línea azul es la geodésica entrante v_h que delimita el horizonte de eventos, pues esta es la última que escapa hacia el futuro asintótico nulo. La parte superior representa a la singularidad física.

de partículas provenientes del pasado asintótico que, en otras palabras, define la radiación emitida. Para ello, debemos propagar hacia atrás temporalmente los modos salientes que se encuentran definidos en el futuro asintótico y ver como se comportan esto en el pasado asintótico.

Esta propagación consta de las siguientes partes: La propagación desde el futuro asintótico hasta la zona donde la materia está en colapso (zona cubierta por la curva roja, en el diagrama de Penrose dado en (2.2)). Después, la propagación a través de la materia en colapso hasta llegar a la superficie $r = 0$, que representa el centro de la estrella y no la singularidad física. Finalmente, la propagación a partir de este último llegando al pasado asintótico.

Veamos cada paso en detalle. En principio, al concentrarnos mayormente en modos de alta frecuencia (capaces de atravesar el potencial efectivo) podemos hacer una

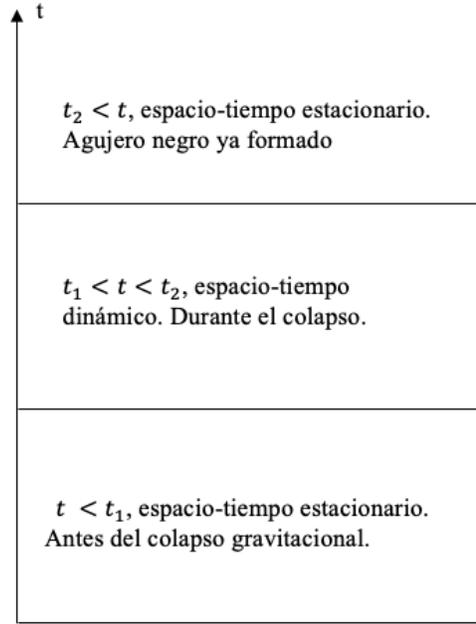


Figura 2.3: Diagrama que nos muestra las 3 regiones del espacio-tiempo durante el colapso gravitacional.

aproximación, que denominamos como *aproximación de óptica geométrica*. Esta consiste en hacer la propagación de los modos con ayuda de las geodésicas nulas [20, 32]. Si además, nos concentramos en la zona cerca del horizonte de eventos ($r \approx 2M$) podemos aproximar la coordenada r^* como

$$r^* \approx 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right), \quad (2.107)$$

ya que el logaritmo diverge y tiene mayor relevancia en dicho límite. En un inicio la primera parte de la propagación es libre, es decir, del futuro asintótico hasta la superficie de materia en colapso. Por otro lado, las altas frecuencias de los modos nos permiten considerar nuevamente una propagación libre a través de la materia en colapso hasta llegar a $r = 0$. Para finalizar, solo haría falta propagar estos modos al pasado asintótico donde haremos uso de la aproximación de óptica geométrica. Así, nos gustaría seguir a una geodésica entrante v y ver la geodésica saliente $\bar{u}(v)$ que le corresponde en su trayecto por el espacio-tiempo. Para ello, conviene definir a la distancia afín como la distancia entre las geodésicas nulas $\bar{u}(v_0)$ y $\bar{u}(v)$ y que podemos aproximar como el parámetro afín λ .

Con lo anterior, nuestro siguiente objetivo es calcular la parametrización afín de estas geodésicas. Por tanto, a partir de lo visto durante el primer capítulo, el elemento de línea para una trayectoria tipo luz está dada por [37]

$$0 = ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.108)$$

por lo que es fácil obtener la siguiente ecuación de movimiento

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, \quad (2.109)$$

donde λ es el parametro afín. De esta forma, como calculamos anteriormente, en la métrica de Schwarzschild tenemos las siguientes cantidades conservadas

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda} = E, \quad (2.110)$$

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = l_z, \quad (2.111)$$

identificando a E con la energía y l_z con el momento angular en la dirección z . Que debido a la conservación del momento angular hemos fijado el movimiento en el plano formado por el ángulo $\theta = \pi/2$. Por tanto, al sustituir estas cantidades y la métrica de Schwarzschild en (2.109) obtenemos

$$E^2 = \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad (2.112)$$

con L el momento angular total. Así, si pedimos que estas geodésicas sean radiales podemos reescribir la ecuación de movimiento, obteniendo que

$$\pm E = \left(\frac{dr}{d\lambda}\right), \quad (2.113)$$

donde el signo positivo corresponde a las geodésicas entrantes y el negativo a las salientes. Si usamos la coordenada radial r^* obtenemos las siguientes relaciones para las geodésicas nulas entrantes y salientes [37]

$$\frac{d}{d\lambda}(t - r^*) = \frac{d}{d\lambda}\bar{u} = 0, \quad (2.114)$$

$$\frac{d}{d\lambda}(t + r^*) = \frac{d}{d\lambda}\bar{v} = 0. \quad (2.115)$$

Dicho lo anterior, estamos en condiciones para estudiar el comportamiento de la geodésica saliente en el pasado asintótico. Así, definimos a la geodésica entrante v que se encuentra parametrizada por el parámetro afín λ . Por otro lado, la coordenada nula $u(\lambda)$ la podemos parametrizar a partir de la siguiente ecuación de movimiento

$$\frac{d\bar{u}}{d\lambda} = \frac{dt}{d\lambda} - \frac{dr^*}{d\lambda}. \quad (2.116)$$

Cabe recalcar que la ecuación (2.116) no está igualada a cero pues estamos haciendo la parametrización con el parámetro asociado a la geodésica v . A partir de la ecuación (2.110), y de la regla de la cadena podemos reescribir la ecuación diferencial como

$$\frac{d\bar{u}}{d\lambda} = 2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E. \quad (2.117)$$

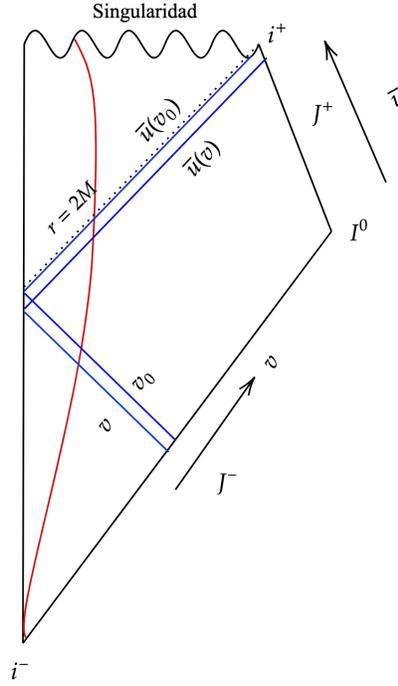


Figura 2.4: Trayectoria de las geodésicas v y v_0 en la geometría del colapso.

Por otro lado, a partir de la ecuación (2.113) y fijando la condición inicial $r(0) = 2M$ encontramos

$$r(\lambda) = 2M - E\lambda. \quad (2.118)$$

De esta manera gracias a la ecuación (2.118), encontramos la parametrización de \bar{u} a lo largo de la geodésica C , es decir,

$$\bar{u}(\lambda) = 2E\lambda - 4M \ln(\lambda/k_1), \quad (2.119)$$

donde k_1 es una constante de integración negativa elegida por conveniencia [37]. Ya con la ecuación (2.119) podemos estudiar su comportamiento en el límite adecuado. Por lo que si nos interesa estudiar las geodésicas cerca del horizonte de eventos hallamos

$$\bar{u}(\lambda) = -4M \ln(\lambda/k_1). \quad (2.120)$$

Como ya hemos visto, del diagrama de Penrose en la figura (2.4), es claro que las geodésicas nulas entrantes poseen una coordenada v constante. Éstas parten del infinito pasado nulo, llegan al centro del cuerpo en colapso, para convertirse en geodésicas nulas salientes con coordenada $\bar{u}(v)$ constante. En el mismo diagrama es claro que para la geodésica con coordenada nula $v > v_0$, estas alcanzan a la singularidad inevitablemente.

Así, gracias a la aproximación de óptica de geométrica y con la ayuda de la figura (2.4), podemos considerar que dos modos salientes $\bar{u}(v_0)$ y $\bar{u}(v)$, mantienen la misma distancia afín a lo largo de todo el recorrido. En particular, la distancia afín entre las geodésicas entrantes v_0 y v en el pasado asintótico. Dicho lo anterior, en el pasado asintótico la distancia afín λ , la podemos expresar como la diferencia entre las coordenadas nulas, es decir,

$$v_0 - v = -a\lambda, \quad (2.121)$$

donde a es una constante. Lo anterior, nos permite escribir a la coordenada saliente \bar{u} de la siguiente forma

$$\bar{u}(v) = -4M \ln \left(\frac{a(v_0 - v)}{-k_1} \right) = -4M \ln \left(\frac{v_0 - v}{b} \right), \quad (2.122)$$

donde $b = -k_1/a$ y corresponde a una constante positiva. De esta forma, estamos en condiciones para hacer nuestra comparación, por lo que debemos calcular los coeficientes de Bogoliubov correspondientes.

Como ya vimos cuando estudiamos el efecto Unruh, para calcular el espectro térmico de los modos provenientes del pasado asintótico hace falta calcular la siguiente cantidad

$$\langle 0_{in} | \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p | 0_{in} \rangle,$$

que corresponde al número medio de partículas en el futuro asintótico. Por tanto, basta calcular el siguiente coeficiente de Bogoliubov $\beta_{pp'}$. A partir de la ecuación (2.27) podemos calcular el coeficiente $\beta_{pp'}$, encontrando que

$$\beta_{pp'} = -(f_{p'}^*, \psi_p), \quad (2.123)$$

donde

$$f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{2p}} e^{-ip\bar{u}}, \quad (2.124)$$

$$\psi_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{2p}} e^{-ipv}. \quad (2.125)$$

De esta forma, podemos calcular explícitamente el valor de $\beta_{pp'}$, encontrando que[37]

$$\begin{aligned} \beta_{pp'} &= -\frac{i}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{v_0} dv \left[\frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-ipv} \partial_v \left(\frac{e^{-ip'\bar{u}}}{\sqrt{2p'}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2p'}} e^{-ip'\bar{u}} \partial_v \left(\frac{e^{-ipv}}{\sqrt{2p}} \right) \right] \\ &= -\frac{i}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{v_0} \frac{1}{\sqrt{4pp'}} dv \left[2e^{-ipv} \partial_v (e^{-ip'\bar{u}}) - \partial_v (e^{-ip'\bar{u}} e^{-ipv}) \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{v_0} dv \sqrt{\frac{p'}{p}} \left[e^{-i(p'\bar{u}+pv)} \partial_v \bar{u} \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{v_0} dv \sqrt{\frac{p'}{p}} \left[e^{-ipv} \frac{4M}{b} \left(\frac{v_0 - v}{b} \right)^{4Mp'-1} \right], \end{aligned}$$

donde integramos sobre aquellos modos que no se quedan atrapados en el horizonte de eventos, es decir, $v < v_0$. Al hacer el cambio de variable $t = (v_0 - v)/b$ podemos reescribir la integral como

$$\beta_{pp'} = \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{\frac{p'}{p}} 4M e^{-iv_0} \int_{-\infty}^0 dt e^{ipbt} t^{4Mip'-1} = \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{\frac{p'}{p}} 4M e^{-iv_0} \left(\frac{i}{pb}\right)^{4Mip'} \Gamma[4Mip'].$$

Finalmente, encontramos que

$$\beta_{pp'} = \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{\frac{p'}{p}} 4M e^{-iv_0} \left(\frac{1}{pb}\right)^{4Mip'} e^{-2\pi Mp'} \Gamma[4Mip']. \quad (2.126)$$

A partir de la ecuación (2.126), podemos calcular la radiación térmica, sabiendo que

$$\begin{aligned} \langle 0_{in} | \hat{b}_{p'}^\dagger \hat{b}_{p'} | 0_{in} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dp |\beta_{pp'}|^2 \\ &= \frac{1}{16\pi^4} 16M^2 p' e^{-4\pi Mp'} |\Gamma[4Mip']|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{p} \left| \exp \left[4Mip' \ln \left(\frac{1}{pb} \right) \right] \right|^2 dp, \end{aligned} \quad (2.127)$$

que al usar las expresiones que vimos en el efecto Unruh encontramos que

$$\langle 0_{in} | \hat{b}_{p'}^\dagger \hat{b}_{p'} | 0_{in} \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\delta(0)}{e^{8\pi Mp'} - 1}. \quad (2.128)$$

Es claro de la ecuación (2.128) que volvemos a obtener un resultado con una densidad de partículas con una distribución de Bose-Einstein. Por otro lado, al ser un campo escalar sin masa sabemos que $p' = E_{p'} = \omega$, por lo que podemos identificar la temperatura de esta distribución, obteniendo

$$T = \frac{1}{8\pi M} = \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (2.129)$$

Así, concluimos que nuestro observador en el futuro asintótico mide una radiación de partículas con temperatura (2.129), que se conoce como *temperatura de Hawking*.

Más aún como ya habíamos dicho, con ayuda del resultado anterior es posible calcular la constante a que surgió al analizar la termodinámica de agujeros negros. Por lo que podemos hallar los valores exactos de la temperatura y entropía de un agujero negro.

Este resultado es interesante, ya que como vimos en el primer capítulo un agujero negro, tiene un horizonte de eventos, donde cualquier objeto que lo atravesase se desconecta causalmente con la región exterior a éste. En contraste, vemos que al estudiar un campo escalar sin masa, durante el proceso de colapso, nos encontramos que los agujeros emiten radiación. En principio, esta radiación es producto de la creación y aniquilación de pares de partículas que se da cerca del horizonte de eventos, por lo que

una de ellas se dirige hacia la singularidad y la otra, por su parte, logra escapar [38]. Lo anterior es una primera aproximación del fenómeno y más bien, como se menciona en [20], la radiación de Hawking se define como una radiación saliente detectada por observadores inerciales en el futuro asintótico nulo (tiempos tardíos tras el proceso de colapso).

Otro punto importante que se menciona en la referencia [20] es la relación logarítmica entre las coordenadas nulas que definimos para el efecto Unruh y la radiación de Hawking que nos permite hacer el cálculo. Cabe recalcar que para el caso de la radiación de Hawking dicha relación se cumple para tiempos tardíos tras el colapso, por lo que esto constituye una aproximación que, tal como se menciona en el mismo, resulta ser una buena aproximación.

Capítulo 3

Cuantización del campo escalar en la teoría de Gauss Bonnet

En el capítulo anterior estudiamos en detalle el espacio-tiempo de Schwarzschild además de la cuantización de un campo escalar en este. A raíz de esto, obtuvimos la radiación térmica que los agujeros negros producen durante el proceso de colapso. Por lo que es válido hacernos la pregunta sobre si estos resultados pueden generalizarse a cualquier solución de agujero negro, en particular, a aquellos que se encuentran en dimensiones mayores.

En este capítulo estudiaremos la teoría de Gauss Bonnet que generaliza la de Einstein Hilbert para dimensiones $D \geq 4$. En esta teoría se agregan términos cuadráticos en la curvatura que mantienen ecuaciones diferenciales de segundo orden para la métrica $g_{\mu\nu}$, recalando que para $D = 4$ la adición de este término se considera un invariante topológico que no afecta a la dinámica. También, veremos como se modifican las soluciones de agujero negro y la radiación térmica correspondiente a ellos.

3.1. La acción de Gauss Bonnet

Como vimos en el primer capítulo la relatividad general está descrita a partir de la acción de Einstein que, a su vez, da lugar a las ecuaciones de campo de Einstein. Por lo que a partir de la acción de Einstein

$$S_E = \int d^4x \sqrt{-g} R + S_{mat.GBY},$$

donde $S_{mat.GHY}$ incluye al término de frontera y el de materia. El término que involucra a la dinámica de la geometría es $\sqrt{-g}R$. Veamos como se modifican las ecuaciones de movimiento para el caso más sencillo que consiste en agregar el término R^2 a la

acción de Einstein-Hilbert¹. De esta forma, podemos escribir la acción como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda + aR^2), \quad (3.1)$$

donde a es una constante de acoplamiento. Al calcular las ecuaciones de movimiento correspondientes obtenemos que [40]

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + 2a[RR_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu \nabla_\nu)R] - a\frac{1}{2}R^2 g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.2)$$

De la ecuación (3.2) debemos notar dos cosas. La primera es que las soluciones de vacío que estudiamos durante el primer capítulo siguen siendo soluciones de esta nueva ecuación de movimiento ya que, como encontramos, estas siguen la ecuación de movimiento $R_{\mu\nu} = 0$, por lo que en principio en esta nueva teoría las soluciones de agujero negro persisten como soluciones [40]. Por otro lado, la ecuación (3.2) deja de ser una ecuación diferencial de segundo orden para $g_{\mu\nu}$, encontrando que en esta teoría podrían existir patologías como mencionamos en el primer capítulo. Por tanto, si buscamos agregar estos términos cuadráticos en la curvatura nos gustaría que esta nueva teoría mantenga la ecuaciones de segundo orden en la métrica.

Como se menciona en [41], podemos construir una teoría gravitacional en D dimensiones que mantenga ecuaciones de segundo orden. En principio, conviene pedir que el equivalente al tensor de Einstein $A_{\mu\nu}$, cumpla que

$$A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}, \quad (3.3)$$

$$A_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}(g_{\mu\nu}, \partial_\gamma g_{\mu\nu}, \partial_\gamma \partial_\lambda g_{\mu\nu}), \quad (3.4)$$

$$\nabla_\mu A^{\mu\nu} = 0, \quad (3.5)$$

además, la ecuación de movimiento en vacío está dada por

$$A_{\mu\nu} = 0. \quad (3.6)$$

Dicho esto, necesitamos construir una acción cuya ecuación de movimiento cumpla las propiedades anteriores. Por lo que definimos [40]

$$S = \int d^Dx \sqrt{-g} \sum_{n=0}^m a_n \mathcal{R}^n, \quad (3.7)$$

donde a_n son constantes cuyo significado físico discutiremos más adelante, D es la dimensión del espacio-tiempo y n, m son parámetros que cumplen: $n < m$, $D = 2m$ para dimensiones pares y $D = 2m + 1$ para dimensiones impares. Por otro lado, los

¹Tal como se menciona en [39], este término es conocido como el de Starobinsky y corresponde a una corrección cuántica para el régimen de altas energías de la acción de Einstein Hilbert.

términos \mathcal{R}^n corresponden a las densidades de Euler en $2n$ dimensiones que únicamente contribuyen a la dinámica cuando $2n < D$. Estos se pueden escribir como [40]

$$\mathcal{R}^n = \frac{1}{2^n} \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_n \beta_n}^{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n} \prod_{r=1}^n R^{\alpha_r \beta_r}_{\mu_r \nu_r}, \quad (3.8)$$

donde la cantidad $\delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_n \beta_n}^{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n}$ está dada por

$$\delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_n \beta_n}^{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_n \nu_n} = \frac{1}{n!} \delta_{[\alpha_1}^{\mu_1} \delta_{\beta_1}^{\nu_1} \dots \delta_{\alpha_n}^{\mu_n} \delta_{\beta_n}^{\nu_n]} \quad (3.9)$$

y se le conoce como la *delta de Kronecker generalizada*. Por otro lado, los corchetes definen la antisimetrización de los índices. La acción (3.7) para el espacio-tiempo en D dimensiones mantiene las ecuaciones de segundo orden en la métrica y generaliza la acción de Einstein-Hilbert vista en el primer capítulo. A este resultado se le conoce como el *Teorema de Lovelock* [40, 41].

Visto lo anterior, es fácil ver que para $D = 4$ la ecuación (3.7) se reduce a la acción de Einstein Hilbert con constante cosmológica [41]. Por otro lado, el término cuadrático se encuentra dado por

$$\mathcal{R}^2 = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (3.10)$$

y se le conoce como *el término de Gauss Bonnet* que en $D = 4$ define un invariante topológico que no se involucra en la dinámica. De esta manera, a partir del teorema de Lovelock, el término de Gauss Bonnet contribuirá en la dinámica si consideramos un espacio-tiempo en una dimensión $D \geq 5$ [42]. Por lo que definimos formalmente a la *acción de Gauss-Bonnet*² como

$$S = \int d^5x \sqrt{-g} [R - 2\Lambda + a(R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta})], \quad (3.11)$$

donde a es una constante de acoplamiento con unidades $[longitud]^{-1}$ que, en principio, define un parámetro libre. En el contexto de la teoría de cuerdas el término de Gauss Bonnet se considera una corrección a la relatividad general que se vuelve relevante para cortas distancias. La escala natural en la que se espera que aparezcan dichas correcciones es la longitud de Planck $l_p = \sqrt{16\pi G}$ y decimos que modifican a la teoría de Einstein Hilbert en el *regimen ultravioleta*. Éste hace referencia a que estamos estudiando la gravitación a energías más altas en comparación con las escalas estudiadas en relatividad general [40]. Por otro lado, la ecuación (3.11) notemos que ahora está integrada para $D = 5$.

Visto lo anterior, nuestro siguiente objetivo es obtener las ecuaciones de movimiento en vacío para esta nueva teoría. Así, al hacer la variación obtenemos que

²La acción de Gauss-Bonnet para $D \leq 4$ define un término de frontera que, como mencionamos, no se involucra en la dinámica [40].

[42]

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} + a \left[R_{\mu\eta\alpha\beta} R_{\nu}^{\eta\alpha\beta} - 4R_{\mu\alpha\nu\beta} R^{\alpha\beta} - 4R_{\mu\alpha} R_{\nu}^{\alpha} + 2RR_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R^2 - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}) \right] = 0. \quad (3.12)$$

La expresión (3.12) corresponde a la ecuación de movimiento en vacío que proviene de la teoría de Gauss Bonnet. Notemos además, tal como anticipamos, esta tiene como máximo ecuaciones diferenciales de segundo orden para la métrica.

Visto lo anterior, en analogía a lo hecho en el primer capítulo debemos hablar de los términos de frontera. Tal como se menciona en [44], podemos escribir al término de frontera como

$$S_M = \frac{h_r}{16\pi} \int_{\partial M} d^4x \sqrt{h} Q_{GB}, \quad (3.13)$$

donde h_r es la norma de los vectores normales no nulos, h_{ij} es la métrica espacial que induce a la hipersuperficie ∂M . Por otro lado, el factor Q_{GB} lo podemos escribir en términos de la curvatura extrínseca K_{ij} , de la siguiente manera

$$Q_{GB} = 4\delta_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{j_1 j_2 j_3 j_4} K_{j_1}^{i_1} \left(\frac{1}{2} R_{j_2 j_3}^{(h) i_2 i_3} - \frac{h_r}{3} K_{j_2}^{i_2} K_{j_3}^{i_3} \right), \quad (3.14)$$

con $R_{mn}^{(h)ij}$ el tensor de Riemann construido a partir de la métrica h_{ij} .

Por tanto, al juntar la acción en (3.11) con (3.13) obtenemos las ecuaciones de movimiento (3.12) (en vacío) únicamente imponiendo condiciones de frontera de Dirichlet. Obtenemos de esta forma, la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet que generaliza a la relatividad general cuando se trabaja en un espacio-tiempo con dimensión mayor a 5, por lo que debemos enfocarnos ahora en encontrar las soluciones en vacío de esta teoría.

3.2. Agujeros negros en la gravedad de Einstein-Gauss-Bonnet

Una vez construida la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet, el siguiente paso es encontrar las soluciones de vacío como hicimos en el primer capítulo. Para ello, consideraremos nuevamente geometrías con $\Lambda = 0$. Para esta sección nos basaremos principalmente en la referencia [40].

Queremos enfocarnos en aquellas soluciones con simetría esférica y estática. Como se menciona en [45], el elemento de línea más general con estas dos simetrías está dado por

$$ds^2 = -e^{2\phi} dt^2 + e^{2\psi} dr^2 + r^2 d\Omega_3^2, \quad (3.15)$$

donde ϕ y ψ son funciones únicamente de r y $d\Omega_3$ corresponde al elemento de línea de la 3-esfera que se define como

$$d\Omega_3^2 = d\xi^2 + \sin^2 \xi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (3.16)$$

con un nuevo ángulo ξ que recorre de 0 a π que se agrega en comparación a la 2-esfera que estudiamos en el primer capítulo. Notemos que esto significa que nuestra métrica es invariante ante rotaciones con la diferencia de que ahora consideramos un espacio-tiempo con 4 dimensiones espaciales.

Con lo anterior en mente es posible encontrar que la métrica que resuelve la ecuación (3.12), es decir, en ausencia de materia está dada por [45]

$$ds^2 = - \left[1 + \frac{r^2}{4a} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{16Ma}{r^4}} \right) \right] dt^2 + \left[1 + \frac{r^2}{4a} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{16Ma}{r^4}} \right) \right]^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_3^2. \quad (3.17)$$

donde el signo más y menos proviene de tener una ecuación diferencial de segundo orden cuadrática, que define al menos dos soluciones con simetría esférica. M es una constante de integración que representa nuevamente la masa de nuestra solución. La ecuación (3.17) representa a la solución más general con las simetrías ya mencionadas que proviene de la teoría de Einstein-Gauss-Bonnet y se le conoce como *la métrica de Boulware-Deser* [40, 45]. Notemos que para $M = 0$ encontramos dos soluciones: el espacio-tiempo plano y el anti-de Sitter. Este último describe un comportamiento diferente con respecto al espacio-tiempo plano, y puede ser estudiado en detalle en la referencia [14].

Veamos el comportamiento de la solución para cada signo y elección de parámetros. Primero tomemos el caso para $a > 0$ y el signo negativo, en ese caso existe una solución de agujero negro con un horizonte de eventos. Para ver esto, en analogía al primer capítulo conviene calcular las superficies singulares de la métrica. En principio, $r = 0$ no presenta una divergencia para la métrica (en cualquier caso) ya que

$$1 + \frac{r^2}{4a} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{16Ma}{r^4}} \right) \Big|_{r=0} = 1 \pm \sqrt{\frac{M}{a}}. \quad (3.18)$$

Sin embargo, como veremos más adelante el escalar de curvatura diverge en esta superficie, por lo que define una singularidad física. Por otro lado, para encontrar el horizonte de eventos debemos resolver la siguiente ecuación

$$1 + \frac{r^2}{4a} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{16Ma}{r^4}} \right) = 0. \quad (3.19)$$

Concluimos que para esta solución existen 3 puntos singulares $r_0 = 0$ y $r_{\pm} = \pm \sqrt{2(M-a)}$, siempre y cuando se cumpla que $M > a > 0$. Por su parte, r_- no tiene un significado físico y r_+ esperaríamos que corresponda al horizonte de eventos de este agujero negro. Para demostrarlo se debe hacer un análisis de los conos de luz para la solución asociada con esta elección de parámetros como hicimos anteriormente.

Por otra parte, tomando $a > 0$ y el signo positivo es claro que no existen otros puntos singulares. En este caso se trata de una singularidad desnuda, es decir, que no existe un horizonte de eventos que recubra a la singularidad física y, por tanto, no definen una solución de agujero negro. Como se menciona en [46], un espacio-tiempo que contiene singularidades desnudas tiene problemas de estabilidad, causalidad, etc.

Por lo problemático de esto, en 1969, Roger Penrose propuso una solución que consiste en postular la conjetura de *censura cosmica*, estableciendo que en la naturaleza no pueden existir singularidades sin un horizonte que las recubra [14].

El comportamiento asintótico también es diferente para cada signo. Para ver esto, debemos estudiar el comportamiento de la solución para $r \rightarrow \infty$, por lo que

$$-g_{00} = 1 + \frac{r^2}{4a} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{16Ma}{r^4}} \right) \approx 1 + \frac{r^2}{4a} \left(1 \pm \left[1 + \frac{8Ma}{r^4} \right] \right). \quad (3.20)$$

Si tomamos el signo positivo obtenemos

$$-g_{00} \approx 1 - \frac{2M}{r^2}, \quad (3.21)$$

que describe una solución asintóticamente plana; en contraste, para el signo negativo encontramos que

$$-g_{00} \approx 1 + \frac{r^2}{2a} + \frac{2M}{r^2}, \quad (3.22)$$

y describe una solución asintóticamente anti-de Sitter con una constante cosmológica $\Lambda_{eff} \sim -1/a$ [40, 45].

De igual forma, podemos hacer un análisis para el límite de relatividad general, es decir, $a \rightarrow 0$. En el cual encontramos un comportamiento similar al encontrado para la solución en la región asintótica .

Podemos concluir que a diferencia de la teoría de Einstein la solución en vacío con simetría esférica y estática dada en (3.17) nos arroja al menos una posibilidad extra para nuestro estudio. Mientras que en la teoría de Einstein la solución era únicamente el agujero negro de Schwarzschild.

Calculemos ahora el tensor de Riemann y el escalar de curvatura para esta métrica (3.17). Como ya hemos mencionado, el tensor de Riemann codifica que nuestra geometría tenga curvatura, por lo que basta calcular algunas de las componentes no nulas de este para ver que esta geometría es no plana. Así, al tomar la rama negativa obtenemos

$$R^t{}_{rtr} = \frac{16aM \left(\sqrt{1 + \frac{16aM}{r^4}} - 3 \right) + \left(\sqrt{1 + \frac{16aM}{r^4}} - 1 \right) r^4}{r^4 \left(1 + \frac{16aM}{r^4} \right)^{3/2} \left[r^2 \left(r^2 \sqrt{1 + \frac{16aM}{r^4}} - 1 \right) - 4a \right]}, \quad (3.23)$$

$$R^r{}_{\psi r \psi} = \frac{r^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{16aM}{r^4}} \right)}{4a \sqrt{1 + \frac{16aM}{r^4}}}, \quad (3.24)$$

$$R^\phi{}_{t\phi t} = \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{16aM}{r^4}} - 1 \right) \left(r^2 \sqrt{1 + \frac{16aM}{r^4}} - r^2 - 4a \right)}{16a^2 \sqrt{1 + \frac{16aM}{r^4}}}. \quad (3.25)$$

Por otro lado, para ver que efectivamente $r = 0$ define una singularidad física es necesario calcular el escalar de curvatura R , obteniendo

$$R = \frac{384aM^2 + 40aMr^4 \left(3 - 2\sqrt{1 + \frac{16aM}{r^4}} \right) - 5r^8 \left(\sqrt{1 + \frac{16aM}{r^4}} - 1 \right)}{ar^8 \left(1 + \frac{16aM}{r^4} \right)^{3/2}} \quad (3.26)$$

De la ecuación (3.26) es claro que en $r = 0$ el escalar de curvatura diverge, por lo que como anticipamos $r = 0$ es la singularidad física del agujero negro dado en la métrica (3.17).

Como se menciona en [40, 47], tomar el signo positivo describe una solución inestable, por lo que nos centraremos la solución con el signo negativo. En particular, el límite asintótico que se conoce como la solución de *Schwarzschild-Tangherini* o bien la solución de Schwarzschild en 5 dimensiones que fue encontrada por Tangherini en 1963 [48]. En general, podemos escribir a la métrica de Schwarzschild en D dimensiones como [48]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r^n} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r^n} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2, \quad (3.27)$$

donde $n = D - 3$ y $d\Omega_{D-2}^2$ corresponde a la métrica de $D - 2$ esfera.

De esta manera, conviene hacer una análisis de la solución para $D = 5$ que, en analogía al primer capítulo, conviene estudiar a las geodésicas radiales nulas. La ecuación diferencial de estas está dada por

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r^2} \right)^{-1} = \pm \left(1 + \frac{2M}{r^2 - 2M} \right), \quad (3.28)$$

donde identificamos los signos \pm que etiquetan a las geodésicas entrantes y salientes respectivamente. De esta manera, encontramos que

$$t(r) = \pm \left(r + \sqrt{\frac{M}{2}} \ln \left| \frac{r - \sqrt{2M}}{r + \sqrt{2M}} \right| \right) + C, \quad (3.29)$$

donde C es una constante de integración. A partir de la ecuación (3.29) podemos hacer el correspondiente análisis de los conos de luz como se muestra en la figura (3.1). Por lo que la orientación de estos vuelve a exhibir que $r = \sqrt{2M}$ corresponde al horizonte de eventos y $r = 0$ a la singularidad física que es inevitable una vez atravesado el horizonte de eventos.

Por otro lado, este análisis nos permite definir de forma análoga a la coordenada r^* que equivale a la denominada coordenada tortuga que vimos para el agujero negro de Schwarzschild. Para este caso la definimos como

$$r^* = r + \sqrt{\frac{M}{2}} \ln \left| \frac{r - \sqrt{2M}}{r + \sqrt{2M}} \right| \quad (3.30)$$

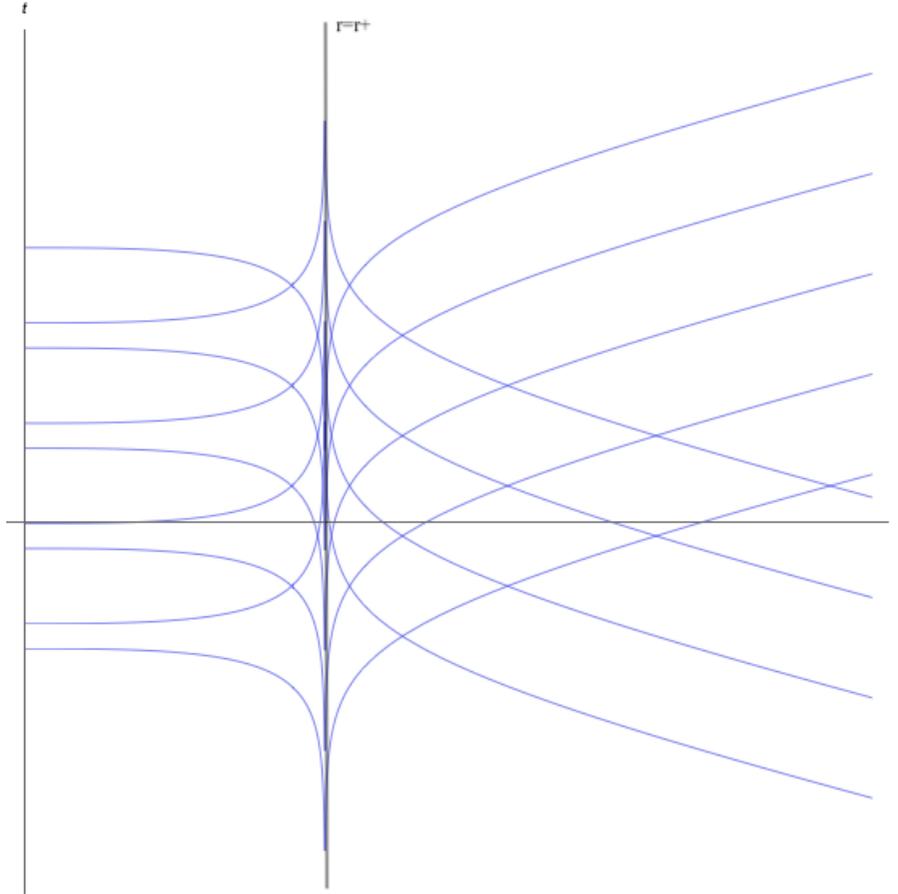


Figura 3.1: Orientación de los conos de luz en la geometría de Schwarzschild-Tangherini en $D=5$. La línea $r_+ = \sqrt{2M}$ representa el horizonte de eventos del agujero negro.

Dicho esto, nuestro siguiente objetivo es calcular nuevamente la radiación de Hawking proveniente del agujero negro de Schwarzschild-Tangherini y su respectiva temperatura.

Una vez vista la gravedad en la teoría de Gauss Bonnet, deberíamos estudiar ahora la cuantización de un campo escalar en un espacio-tiempo en $4+1$ dimensiones. Sin embargo, este proceso es exactamente análogo al ya visto en $3+1$ dimensiones. De esta manera, el único cambio se encuentra en aumentar las variables de integración.

3.3. Radiación de Hawking en el agujero negro de Schwarzschild-Tangherini

Dicho lo anterior, nuestro siguiente objetivo ahora es estudiar la cuantización de un campo escalar en la geometría dada en (3.27) para $n = 2$. De esta forma, encontraremos la radiación de Hawking para esta solución.

Como hicimos en el segundo capítulo, nos concentraremos a estudiar el campo escalar sin masa φ , y suponer que este campo tiene simetría esférica.

Por otro lado, conviene reescribir la métrica de Schwarzschild-Tangherini en términos de la variable r^* vista en (3.30). Por lo que podemos escribir a la métrica de forma conforme, encontrando que

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r^2(r^*)}\right) \left[-dt^2 + (dr^*)^2\right] + r^2 d\Omega_3^2. \quad (3.31)$$

Esto nos permite estudiar la acción del campo escalar y su correspondiente ecuación de movimiento dada por

$$\left[-\partial_t^2 + \partial_{r^*}^2 + \frac{3}{r} \left(1 - \frac{2M}{r^2(r^*)}\right) \partial_{r^*}\right] \hat{\varphi} = 0. \quad (3.32)$$

Notemos que nuevamente obtenemos una ecuación de onda salvo un término de primer orden. En analogía a lo hecho en el segundo capítulo debemos ver la naturaleza del último término de la ecuación (3.32). Para ello, es conveniente hacer el siguiente cambio de variable $r^{-3/2} \hat{\phi}(t, r^*) = \hat{\varphi}(t, r^*)$ [49], permitiendo reescribir la ecuación de movimiento como

$$\left[-\partial_t^2 + \partial_{r^*}^2 - \left\{\frac{6M}{r^4} \left(1 - \frac{2M}{r^2}\right) + \frac{3}{4r^2} \left(1 - \frac{2M}{r^2}\right)^2\right\}\right] \hat{\phi}(t, r^*) = 0, \quad (3.33)$$

donde podemos identificar nuevamente un potencial efectivo dado por

$$V(r) = \frac{6M}{r^4} \left(1 - \frac{2M}{r^2}\right) + \frac{3}{4r^2} \left(1 - \frac{2M}{r^2}\right)^2, \quad (3.34)$$

que funge como una barrera de potencial que, como ya hemos dicho, modifica el espectro de la radiación característica del agujero negro. Por otro lado, nuevamente serán los modos de alta frecuencia los que atraviesen este potencial efectivo, por lo que, en principio, podemos hacer caso omiso de este término. De esta manera, reescribimos la ecuación de movimiento como

$$[-\partial_t^2 + \partial_{r^*}^2] \hat{\phi}(t, r^*) = 0. \quad (3.35)$$

La ecuación (3.35) es claramente una ecuación de onda que hemos estudiado a lo largo de esta tesis. Por tanto, podemos hacer una expansión del campo como la hecha en el segundo capítulo. En términos de las coordenadas nulas $\bar{u} = t - r^*$ y $\bar{v} = t + r^*$, por lo que podemos escribir al campo como

$$\hat{\phi}(\bar{u}, \bar{v}) = \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2p}} (\hat{b}_p e^{-ip\bar{u}} + \hat{b}_p^\dagger e^{ip\bar{u}}) + \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2p}} (\hat{b}_p e^{-ip\bar{v}} + \hat{b}_p^\dagger e^{ip\bar{v}}), \quad (3.36)$$

donde \hat{b}_p^\dagger y \hat{b}_p son los operadores de creación y aniquilación respectivamente..

Con lo anterior, nuestro siguiente objetivo es estudiar el colapso gravitacional que da resultado al agujero negro que se encuentra descrito por la métrica (3.31). De esta forma, podemos estudiar la radiación emitida desde el pasado asintótico (previa al colapso).

Como se menciona en [45, 50], la región exterior en vacío de un cuerpo esférico y estático puede ser descrita a partir de la métrica (3.17). Por lo que tomando el límite $a \rightarrow 0$, podemos considerar a la métrica de Schwarzschild-Tangherini como el espacio-tiempo del exterior del cuerpo en colapso. Si consideramos que la radiación proviene de la región asintóticamente plana podemos aproximar la región exterior como el espacio-tiempo de Minkowski. Lo anterior nos permite expandir al campo como hicimos anteriormente, es decir, en términos de las coordenadas u y v , encontrando que

$$\hat{\phi}(u, v) = \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2p}} (\hat{a}_p e^{-ipu} + \hat{a}_p^\dagger e^{ipu}) + \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2p}} (\hat{a}_p e^{-ipv} + \hat{a}_p^\dagger e^{ipv}). \quad (3.37)$$

En esa dirección, el siguiente paso consiste en propagar un modo saliente del futuro asintótico hacia el pasado asintótico como hicimos en el segundo capítulo. Para ello, volvemos a utilizar la aproximación de óptica geométrica y, por tanto, utilizaremos las geodésicas radiales nulas para la propagación de los modos. De esta manera, podemos encontrar las siguientes cantidades conservadas [51]

$$E = \left(1 - \frac{2M}{r^2}\right) \frac{dt}{d\lambda} \quad (3.38)$$

$$l_z = r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda}. \quad (3.39)$$

y escribir la siguiente ecuación para la energía

$$E^2 = \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r^2}\right), \quad (3.40)$$

donde L corresponde al momento angular total. Si nos enfocamos a estudiar únicamente las geodésicas radiales encontramos

$$\frac{dr}{d\lambda} = \pm E. \quad (3.41)$$

Los signos positivo y negativo definen las geodésicas entrantes y salientes respectivamente. A partir de la ecuación (3.38) y (3.41) es posible llegar a que

$$\frac{d}{d\lambda}(t \pm r^*) = 0, \quad (3.42)$$

que corresponde nuevamente a la ecuación de movimiento de las coordenadas nulas en términos del parámetro afín λ .

Dicho esto, nuestra siguiente tarea consiste nuevamente en poder escribir a la geodésica saliente \bar{u} en términos de v . Para ello, debemos seguir el recorrido de una geodésica entrante que llamaremos v . Así, a partir de la ecuación (3.41) encontramos

$$r(\lambda) = -E\lambda + \sqrt{2M}, \quad (3.43)$$

dónde pedimos de condición inicial que $r(0) = \sqrt{2M}$. Por otro lado, en términos de la geodésica v la ecuación para \bar{u} se modifica, obteniendo

$$\frac{d\bar{u}}{d\lambda} = 2 \left(1 - \frac{2M}{r^2} \right)^{-1} E. \quad (3.44)$$

De esta manera, escribimos a la geodésica \bar{u} como

$$\bar{u}(\lambda) = 2E\lambda - \sqrt{2M} \ln \left| \frac{\lambda}{A} \right| - \sqrt{2M} \ln |2\sqrt{2M} - E\lambda|, \quad (3.45)$$

siendo A una constante negativa. Escrito lo anterior debemos estudiar el comportamiento de \bar{u} cerca del horizonte de eventos (lejos de la zona asintóticamente plana), es decir, para $\lambda \approx 0$. Esto nos permite reescribir \bar{u} como

$$\bar{u} \approx -\sqrt{2M} \ln \left| \frac{\lambda}{A} \right|. \quad (3.46)$$

La ecuación (3.46) nos recuerda a la que encontramos en el segundo capítulo y por tanto, para encontrar la expresión $\bar{u}(v)$ tenemos que hacer uso de la aproximación de óptica geométrica, que nos permite escribir a la geodésica v como

$$v = -B\lambda + v_0, \quad (3.47)$$

donde la geodésica v_0 define al horizonte de eventos y B es otra constante. Por lo que es claro que podemos escribir la geodésica \bar{u} en términos de v de la siguiente forma

$$\bar{u}(v) = -\sqrt{2M} \ln \left| \frac{v_0 - v}{K} \right|, \quad (3.48)$$

con K una constante.

A partir de la ecuación (3.48) debemos centrarnos en calcular la radiación proveniente de esta solución. Para ello, debemos calcular nuevamente el valor de expectación $\langle 0_{in} | \hat{N}_p^{out} | 0_{in} \rangle$. Hacer este cálculo consiste únicamente en encontrar el valor de $|\beta_{pp'}|^2$ de los coeficientes de Bogoliubov que relacionan las expansiones del campo (3.36) y (3.37). Así,

$$\begin{aligned} \beta_{pp'} &= -\frac{i}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{v_0} dv \left[\frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-ipv} \partial_v \left(\frac{e^{-ip'\bar{u}(v)}}{\sqrt{2p'}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2p'}} e^{-ip'\bar{u}(v)} \partial_v \left(\frac{e^{-ipv}}{\sqrt{2p}} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{v_0} dv \sqrt{\frac{p'}{p}} \left[e^{-i(p'\bar{u}+pv)} \partial_v \bar{u} \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{v_0} \sqrt{\frac{p'}{p}} e^{-ipv} \frac{\sqrt{2M}}{K} \left(\frac{v_0 - v}{K} \right)^{\sqrt{2M}ip' - 1} dv. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Es claro que por medio del mismo cambio de variable que utilizamos durante el segundo capítulo, podemos reescribir a $\beta_{pp'}$ como

$$\beta_{pp'} = \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{\frac{p'}{p}} \sqrt{2M} e^{-iv_0} \left(\frac{1}{pK} \right)^{\sqrt{2M}ip'} e^{-\pi\sqrt{\frac{M}{2}}p'} \Gamma[\sqrt{2M}ip'], \quad (3.50)$$

donde Γ es nuevamente la función Gamma. Finalmente, encontramos que

$$\begin{aligned} \langle 0_{in} | \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_{p'} | 0_{in} \rangle &= \int_0^\infty dp |\beta_{p'p}|^2 \\ &= \frac{2M}{16\pi^4} p' e^{-\pi\sqrt{2M}p'} |\Gamma[\sqrt{2M}ip']|^2 \int_0^\infty \frac{1}{p} \left| \exp[-\sqrt{2M}ip' \ln(pK)] \right|^2 dp \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\delta(0)}{e^{2\sqrt{2M}\pi p'} - 1}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Así, de la ecuación (3.51) encontramos que la radiación puede ser vista nuevamente como una densidad de partículas que sigue la distribución Bose-Einstein. En este caso la temperatura se encuentra dada por

$$T = \frac{1}{2\pi\sqrt{2M}} = \frac{1}{2\pi r_+}. \quad (3.52)$$

Lo anterior nos demuestra que este agujero negro, presenta el fenómeno de radiación. Sin embargo, podemos ver que en esta geometría la cuantización nos arrojó una nueva temperatura para la radiación de Hawking de un agujero negro, en comparación a la vista en el capítulo 2.

En este punto, podríamos buscar una relación general para estimar la temperatura de cualquier agujero negro con simetría esférica y estática. Por lo que es fácil corroborar de las dos métricas que hemos estudiado la expresión general de la temperatura está dada por

$$T = \frac{1}{4\pi} \left. \frac{df}{dr} \right|_{r_+}, \quad (3.53)$$

donde $f(r)$ es la función que define a la métrica del agujero negro y calculamos el valor de la gravedad superficial κ , es decir,

$$\kappa = \frac{1}{2} \left. \frac{df}{dr} \right|_{r=r_+}. \quad (3.54)$$

Así, si tomamos a la métrica de Schwarzschild-Tangherini en D dimensiones encontramos que la temperatura de este agujero negro está dada por

$$T = \frac{n}{4\pi(2M)^{1/n}}, \quad (3.55)$$

con $n = D - 3$. Por otro lado, con la ecuación (3.53) podríamos determinar la temperatura del agujero negro que corresponde a la métrica en (3.17), es decir, en la teoría de Gauss Bonnet. Así, encontramos que

$$T = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\sqrt{1 + 16aM/r^4} - 1}{2a\sqrt{1 + 16aM/r^4}} \right) r \Big|_{r_+} = \frac{1}{2\pi} \frac{r_+}{r_+^2 + 4a}, \quad (3.56)$$

que define la temperatura de este agujero negro. Notemos de la ecuación (3.56) que en el límite de relatividad general, es decir, $a \rightarrow 0$ retomamos nuevamente la temperatura que encontramos en la ecuación (3.52). Por otro lado, la temperatura que encontramos para esta solución coincide con la que aparece al utilizar otros métodos. Un método muy utilizado para verificarlo se le conoce como *identificación periódica*. Este podemos estudiarlo a detalle en las referencias [52, 54], obteniendo de este último método la temperatura dada en (3.56).

Visto lo anterior, podríamos considerar que cualquier agujero negro estático y con simetría esférica tiene una termodinámica. Ésta además tiene un origen cuántico pues proviene de la cuantización de campos en geometrías que describen agujeros negros. Por otro lado, no olvidemos que estos resultados pertenecen a un modelo semiclásico ya que las geometrías que utilizamos a lo largo de esta tesis aún son tratadas de manera clásica.

Capítulo 4

Conclusiones

Finalmente estamos en condiciones para escribir las conclusiones de esta tesis. En un inicio estudiamos la construcción de la acción de Einstein Hilbert, aprendiendo cómo variar los términos de esta para obtener las ecuaciones de campo de Einstein que describen la dinámica del espacio-tiempo. También, dimos un pequeño vistazo a los tensores de energía momento. Por otro lado, vimos la relevancia de añadir los términos de frontera para obtener satisfactoriamente las ecuaciones de movimiento y tener un principio variacional bien definido. A partir de la relatividad general, nuestra siguiente tarea fue estudiar las soluciones de vacío, en particular, el agujero negro de Schwarzschild; se logró definir en este espacio-tiempo el horizonte de eventos y la singularidad física, que constituyen dos conceptos importantes que aparecen en cualquier geometría que describa un agujero negro en una situación física.

Después de estudiar la gravitación de Einstein, nos concentramos en estudiar la teoría cuántica de campos para un campo escalar en un fondo plano. La teoría cuántica de campos además, es uno de los pilares de la física moderna, ya que gracias a ella hemos podido entender temas cada vez más complejos, por ejemplo, la construcción del modelo estándar. Sin hablar de las aplicaciones que surgen en diferentes ramas de la física. Así, primero exploramos las características clásicas del campo escalar real, entre ellas, el teorema de Noether donde aprendimos cómo las simetrías de un lagrangiano nos producen cantidades conservadas. Posteriormente, estudiamos cómo funciona esencialmente el proceso de cuantización canónica, del cual obtuvimos el espectro del hamiltoniano para hallar una similitud con el espectro característico de un oscilador armónico (uno por cada punto del espacio-tiempo). Sin embargo, el resultado más importante se encuentra en la expansión del campo, pues en ésta definimos los operadores de creación y aniquilación que nos permiten definir el estado de vacío y construir el espacio de Fock, mostrando que las excitaciones del campo corresponden a estados de partículas. De forma análoga, estudiamos el caso del campo escalar complejo donde encontramos dos partículas con la misma masa, que se diferencian a partir de un número cuántico que llamamos carga, dando pie a las definiciones de partícula y antipartícula. Vale la pena mencionar que en esta tesis estudiamos la cuantización únicamente para un campo escalar libre, sin tocar la física que surge de estudiar una teoría interactuante de campos de donde se obtienen los resultados más

importantes de la teoría cuántica de campos.

Aunque fue interesante e importante estudiar la relatividad general y la teoría cuántica de campos en un fondo plano, nos limitamos a estudiar estas ramas de la física a grandes rasgos, enfocándonos ahora en conectarlas a partir de la teoría cuántica de campos en fondos curvos. Este nuevo lenguaje nos permitió estudiar todo lo tratado a lo largo de esta tesis, siendo de esta manera, la que considero, la parte más importante de este trabajo y la más compleja de entender. En ese contexto, estudiamos la cuantización de un campo escalar libre en un espacio-tiempo que cumple ciertas propiedades. Entre ellas está que sea globalmente hiperbólico que, a grandes rasgos, aprendimos que es una propiedad importante para definir la evolución temporal, pues nos permite, dadas las condiciones iniciales, encontrarla de forma única. Por otro lado, está la importancia de que el espacio-tiempo sea estacionario pues, en resumen, nos permite definir correctamente los modos de frecuencia positiva y, por tanto, una definición preferencial de vacío y de partícula. Para casos generales, se mencionó la existencia de estados de partícula como estados asintóticos, en intervalos donde podemos aproximar que el espacio-tiempo sea estacionario. Lo anterior representó la principal diferencia de la cuantización con respecto al caso plano que, a su vez, fue la parte más complicada de entender a profundidad. Llegado a este punto fue necesario introducir las transformaciones de Bogoliubov que nos permiten relacionar los modos de expansión a diferentes intervalos de tiempos donde la geometría es estacionaria. Gracias a ellas se pudo encontrar el resultado que fue más importante para el estudio de esta tesis, es decir, el número medio de partículas de una base respecto a la noción de vacío de la otra base. Este resultado nos permitió encontrar los resultados más relevantes que surgen de la teoría cuántica de campos en fondos curvos: el efecto Unruh y la radiación Hawking. En el primero encontramos cómo difieren las nociones de vacío para un observador en reposo y otro con aceleración propia uniforme que se mueve a través del espacio-tiempo de Minkowski. Como se mencionó, esta diferencia se da pues tenemos diferentes generadores de traslaciones temporales, obteniendo distintas definiciones para los modos de frecuencia positiva con respecto a estos generadores. Así, mediante las transformaciones de Bogoliubov, encontramos que desde el punto de vista del observador acelerado, este detecta un baño térmico de partículas con temperatura $T = a/2\pi$, es decir, proporcional a la aceleración propia. El proceso de aprendizaje para encontrar este resultado fue importante para nuestro estudio, pues nos aterrizó las ideas que planteamos cuando comenzamos a estudiar la teoría cuántica de campos en un fondo curvo y nos sirvió como paso intermedio para poder estudiar en ejemplo concreto, el fenómeno conocido como radiación de Hawking.

Como ya mencionamos, los resultados anteriores nos sirvieron para estudiar la cuantización de un campo escalar libre en el espacio-tiempo de Schwarzschild, siendo uno de los principales objetivos de este trabajo. Para ello, fue necesario estudiar, a grandes rasgos, el colapso gravitacional de una estrella en donde partimos el espacio-tiempo en 3 intervalos: antes del colapso, durante el proceso de colapso y una vez formado el agujero negro. Así, nos interesamos en la cuantización de dicho campo en este escenario, estudiando la propagación de los modos desde el pasado asintótico, que

atravesan la superficie en colapso y se dirigen al futuro asintótico, pasando cerca del horizonte de eventos. Para dicha propagación, se tuvo que hacer uso de la aproximación de óptica geométrica, pues nos interesamos en aquellos modos de alta frecuencia que atraviesan sin mayor complicación la barrera de potencial. Esta aproximación quizás puede ser confusa si se escucha de ella por primera vez, por lo que en esta tesis se trató de estudiar de una forma detallada. Además, ésta fue crucial para nuestro estudio, pues nos permitió relacionar las coordenadas nulas en las diferentes regiones del espacio-tiempo y, por tanto, a partir de las transformaciones de Bogoliubov, encontrar la existencia de la radiación de Hawking. Este fenómeno define una radiación efectiva de partículas que siguen una distribución de Bose-Einstein a temperatura $T = 1/8\pi M$, es decir, inversamente proporcional a la masa M . Como mencionamos, este resultado es contradictorio con respecto a lo que establece la relatividad general. En ésta, todas las señales quedan atrapadas en el interior del horizonte de eventos y son incapaces de salir hacia el infinito nulo.

La radiación de Hawking es el resultado más importante de la teoría cuántica de campos en fondos curvos. Además, corresponde a un modelo semiclásico de la gravitación ya que, tal como se menciona en [27], estos desarrollos nos dan una idea del comportamiento cuántico de los campos en presencia de un campo gravitacional. Por tanto, estos fenómenos deberían ser recuperados para cierto límite de una teoría más fundamental, que trate a la geometría del espacio-tiempo de forma cuántica. Es así, como estos modelos nos presentan los fenómenos cuánticos cerca de, en este caso, un agujero negro en el régimen donde no hay efectos cuánticos gravitacionales. Por otro lado, la radiación de Hawking trae consigo una serie de implicaciones que aún en la actualidad son objeto de extensos debates, siendo uno de lo más interesantes el proceso de evaporación de un agujero negro que, a su vez, es la base del problema de la paradoja de la información [55]. A pesar de que este proceso no fue detallado durante esta tesis, es un resultado inmediato de lo ya visto, por lo que, en un futuro y con un mayor entendimiento en materia, es una posible continuación de lo tratado en esta tesis.

Finalmente nos remontamos al último capítulo, en el cual nos dedicamos a estudiar una generalización de la teoría de Einstein Hilbert para $D = 5$ pues, aunque un universo en 4 dimensiones espaciales y una temporal no esté confirmado en la actualidad, siempre es interesante estudiar la nueva física que aparece de modificar ciertos parámetros que siempre damos por hecho, en este caso, la dimensión del espacio-tiempo. En particular, enunciamos el teorema de Lovelock que generaliza la relatividad general en cualquier dimensión, especificando la existencia de términos que no participan en la dinámica y son considerados invariantes topológicos. Este es el caso para el término de Gauss-Bonnet, que define para $D = 4$ (relatividad general) un invariante topológico y que, a partir del teorema de Lovelock, aparece como un término dinámico para $D \geq 5$. Así, formalmente se definió la acción de Gauss Bonnet, agregando términos cuadráticos en la curvatura a la acción de Einstein Hilbert, pero que aún mantienen las ecuaciones de segundo orden en la métrica.

Una vez vista, a grandes rasgos, la teoría de Gauss Bonnet nos centramos pri-

mero a encontrar soluciones en ausencia de materia con simetría esférica y estática, en particular, aquellas que definan a un agujero negro. Así, encontramos la solución de Boulware-Deser, viendo que esta tenía al menos dos comportamientos asintóticos con respecto a la solución de Schwarzschild. Por un lado, obtuvimos una solución asintóticamente plana que, en el límite de relatividad general ($a \rightarrow 0$), encontramos la solución de Schwarzschild-Tangherini ($D = 5$) y, por otro lado, una solución asintóticamente anti-De Sitter que no tiene límite de relatividad general. Por tanto, a diferencia de la teoría de Einstein Hilbert, nos encontramos con dos comportamientos para una solución en vacío con simetría esférica, por lo que en la teoría de Gauss Bonnet no existe un equivalente al teorema de Birkhoff. En este nuevo contexto, determinamos nuevamente que $r = 0$ define una singularidad física. En contraste, para el horizonte de eventos nos encontramos que únicamente la rama asintóticamente plana de la solución de Boulware-Deser posee esta superficie y, por tanto, define a una solución de agujero negro. Lo anterior nos presenta una de las diferencias más interesantes de estudiar la teoría de Gauss Bonnet respecto a la relatividad general, pues tenemos más opciones para nuestro estudio de soluciones en esta teoría, en particular, vimos como el teorema de Birkhoff deja de ser válido en este contexto.

Así, llegamos a la parte final de este trabajo: obtener la temperatura de Hawking para estas soluciones de agujero negro. En principio, nuestra idea fue obtenerla por medio de la cuantización del campo escalar en el espacio-tiempo de Boulware-Deser, sin embargo, éste presentó dificultades para encontrar la relación logarítmica entre las coordenadas nulas que obtuvimos cuando estudiamos la cuantización en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Por tanto, decidimos encontrar la temperatura de Hawking de la solución de Boulware-Deser por otros métodos. Dicho esto, optamos primero en cuantizar un campo escalar para la solución de Schwarzschild-Tangherini en $D = 5$; en este proceso nos encontramos nuevamente con una barrera potencial que, al colocarnos cerca del horizonte de eventos y pedir modos de alta frecuencia, podemos despreciar sus efectos para los fines nuestro estudio. De manera similar, las consideraciones anteriores nos permitieron utilizar la aproximación de óptica geométrica y, por tanto, encontrar la relación logarítmica entre las coordenadas nulas en las dos regiones estáticas donde hicimos la cuantización. Así, encontramos la temperatura para el espacio-tiempo de Schwarzschild-Tangherini, que se pudo corroborar por medio de un método más avanzado conocido como identificación periódica. Más aún, este método nos da una expresión general para la temperatura de Hawking de cualquier agujero negro con simetría esférica y estática, por lo que pudimos usar este resultado y hallar la temperatura de Hawking para el agujero negro de Boulware-Deser. Para esta nueva temperatura encontramos la dependencia de esta con la constante de acoplamiento a , concluyendo que la presencia del término de Gauss Bonnet afecta directamente el espectro de emisión de un agujero negro y, por tanto, el proceso de evaporación y termodinámica de los mismos. Estos hechos son de nuestro interés pues, con una mayor comprensión de estos temas, es factible para ser una interesante continuación de este trabajo tesis.

Para finalizar, me gustaría hacer un reflexión final sobre este trabajo. Es im-

portante mencionar que este trabajo no supone un tema nuevo para la física en la actualidad, pues existen diversos estudios, inclusive más detallados, al respecto. Sin embargo, siempre es interesante estudiarlos debido a que son temas que aún no tienen todo nuestro entendimiento y, tal como mencionamos, sólo una teoría de la gravedad cuántica podría darnos el panorama completo de los fenómenos aquí presentados. Además, visitar este conocimiento, tal como me sucedió a mí al leer diferentes puntos de vista sobre esta temática, nos da nuevas herramientas para tener un mayor entendimiento o bien resolver algunas dudas que nos puedan surgir al respecto. Por todo esto, el aporte más grande de este trabajo a la física se encuentra en instruir a aquellas personas, tal como a mí en estos momentos, que quieran dar un primer vistazo a los temas que desarrollamos en esta tesis.

Bibliografía

- [1] Griffiths D. J., 1995, *Introduction to quantum mechanics*, Prentice Hall.
- [2] Shutz B., 2009, *A first course in general relativity*, Cambridge university press.
- [3] Misner C., Thorne K., 1973 *Gravitation* , San Francisco, W.H Freeman and Company
- [4] Nakahara M. (2003), *Geometry, topology and physics*, Institute of physics publishing Bristol and Philadelphia
- [5] Wald R. M., 1984, *General Relativity*, Chicago Univ. Press
- [6] Blau M., *Lecture Notes on General Relativity*. Institut für Theristische Physics, Univesität Bern, 11 de Junio 2018
- [7] Guarnizo A., *Modelos cosmológicos en teorías de gravedad modificada $f(R)$* , Universidad Nacional de Colombia
- [8] Forger M., *Currents and the Energy-Momentum Tensor in Classical Field Theory: A Fresh Look at an Old Problem*, Universidade de São Paulo, Marzo 2016
- [9] Alcubierre M. (2007) *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*, Oxford University Press
- [10] Oas G., *Full derivation of the Schwarzschild solution.*, EPGY Summer Institute, Recuperado de <https://web.stanford.edu/~oas/SI/SRGR/notes/SchwarzschildSolution.pdf>
- [11] Guerrero J., *El agujero negro de Kerr*, Universidad de Granada, Junio 2017
- [12] Larrañaga E., *Agujeros Negros Clásicos*, 28 de Agosto de 2008, Recuperado de <http://www.docentes.unal.edu.co/ealarranaga/docs/AgujerosClasicos.pdf>
- [13] *Radial Infall*, 14 de noviembre de 2007, Reed college, Recuperado de <https://www.reed.edu/physics/courses/Physics411/html/411/page2/files/Lecture.31.pdf>

- [14] Pérez J., *Estudio comparativo de diferentes tipos de agujeros negros*, Universidad de Granada, Junio 2016
- [15] Dowker F. *Black holes* Imperial College
- [16] Adamo T., *The Kerr-Newman metric: A review*, University of Cambridge, Noviembre 2016
- [17] Greiner W., Reinhardt J. (1996) *Field Quantization*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg
- [18] Peskin M., Schroeder D. (1995) *An introduction to quantum field theory*, Perseus Book
- [19] Eichmann G. (2015) *Quantum field theory*, Recuperado de <http://cftp.ist.utl.pt/~gernot.eichmann/2015-qft/>
- [20] Cortés Barbado L. (2014) *Percepción de las radiaciones de Hawking y Unruh por distintos observadores: aplicaciones de la función de temperatura efectiva*, Universidad de Granada, Febrero de 2014
- [21] L.H Ford (1997) *Quantum field theory in curved spacetime* Tufs University. <https://arxiv.org/pdf/gr-qc/9707062.pdf>
- [22] Mukhanov V., Winitzki S. (2005) *Introduction to Quantum Fields in Classical Backgrounds*, Ludwinf-Maximilians University.
- [23] A.A. Saharian *Quantum field theory in curved spacetime*, Yerevan State University. Recuperado de <http://training.hepi.tsu.ge/rtn/activities/sources/LectQFTrev.pdf>
- [24] Wipf A. (1998) *Quantum Fields near Black Holes*. <https://arxiv.org/abs/hep-th/9801025v1>
- [25] Rey J. *Cuantización en espacio-tiempos curvos y termodinámica de agujeros negros*, Universidad Simon Bolivar, Julio 2017.
- [26] Rubio J. *Teoría Cuántica de Campos y Cosmología*. Recuperado de <http://www.ft.uam.es/personal/rubio/campos.pdf>
- [27] Hollands S., Wald R. (2014) *Quantum fields in curved space*. <https://arxiv.org/abs/1401.2026>
- [28] Wald R. (2009) *The Formulation of Quantum Field Theory in Curved Spacetime*, University of Chicago <https://arxiv.org/abs/0907.0416v1>
- [29] Traschen J. *An Introduction to Black Hole Evaporation*, University of Massachusetts. Recuperado de <https://arxiv.org/abs/gr-qc/0010055>

- [30] Carroll S. 2004 *An introduction to General Relativity spacetime and geometry*, Addison Wesley.
- [31] Bekenstein J. (1973). *Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics* Physical Review D, 7(9).
- [32] Hawking S. (1975) *Particle Creation by Black Holes*. Commun. math. Phys 43.
- [33] Anderson N. (2001) *Scattering by black holes* University of Southampton <https://arxiv.org/abs/gr-qc/0011025>
- [34] Chakrabarti S. (2017) *Aspects of Gravitational Collapse and the formation of Spacetime Singularities* Indian Institute of Science Education and Research Kolkata. <https://arxiv.org/abs/1709.01512>
- [35] Strominger A. (1995) *Les Houches Lectures on Black Holes* University of California. <https://arxiv.org/abs/hep-th/9501071v1>
- [36] Lambert P. (2015) *Introduction to black hole evaporation* Université Libre de Bruxelles <https://arxiv.org/abs/1310.8312>
- [37] Parker L., Toms D., 2009, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime*, Cambridge University Press
- [38] Fernández J. (2010), *Radiación de Hawking*, Revista Mexicana de física E 56 (2) 213–226
- [39] Chatrabhuti A., Yingcharoenrat V. (2016), *Starobinsky Model in Rainbow Gravity* <https://arxiv.org/abs/1510.09113>
- [40] Gaston G. (2009) *The Lovelock Black Holes*. <https://arxiv.org/abs/0805.3575>
- [41] Lovelock D. (1971) *The Einstein tensor and its generalizations*, J. Math. Phys. 12 498
- [42] González M. 2017 *Soluciones Cosmológicas en la Gravedad de Gauss-Bonnet*, Universidad de Granada
- [43] Fuentes J. (2012) *Dualidad T y gravedad tipo Einstein Gauss Bonnet*, Departamento de física teórica y del cosmos, Universidad de Granada
- [44] Deruelle N. (2018) *Einstein-Gauss-Bonnet theory of gravity: the Gauss-Bonnet-Katz boundary term* CNRS-université Paris <https://arxiv.org/pdf/1709.06478.pdf>
- [45] D. Boulware y S. Deser (1985), *String-Generated gravity models*, Phys. Rev. Lett. 55 2656

- [46] Zhang H. (2017) *Naked singularity, firewall, and Hawking radiation*, Scientific report
- [47] D. Boulware y S. Deser (1986), *Effective gravity theories with dilatons*, Phys. Lett. B175 409
- [48] F. R. Tangherini (1963) *Schwarzschild Field in n Dimensions and the dimensionality of Space Problem*. Il Nuovo Cimento
- [49] Miao Y. Xu Z. (2017) *Hawking radiation of five-dimensional charged black holes with scalar fields*, Physics Letters B 772 542–546
- [50] Hansraj S. Chilambwe B. Maharaj S. (2015) *Exact EGB models for spherical static perfect fluids* Eur. Phys. J. C 75, 277 <https://arxiv.org/abs/1502.02219>
- [51] Newsome I (2018) *Geodesic structure in Schwarzschild geometry with extensions in higher dimensional spacetimes* Virginia Commonwealth University
- [52] Myers R. (1988) *Black-hole thermodynamics in Lovelock gravity*. Physical Review D38 2434
- [53] Xu H. (2019) *Black hole evaporation in Lovelock gravity with diverse dimensions*, Physics Letters B 794 77–82
- [54] P. K. Townsend (1997) *Black Holes* University of Cambridge <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9707012v1>
- [55] Cristinel O. (2018) *Revisiting the black hole entropy and the information paradox*, National Institute of Physics and Nuclear Engineering – Horia Hulubei, Bucharest, Rumania