



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA
APLICADA

**El teorema de rigidez de Mostow para variedades hiperbólicas completas y
de volumen finito**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
Juan Camilo Arosemena Serrato

DIRECTOR:
Max Neumann Coto
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

CIUDAD DE MEXICO, AGOSTO DE 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Agradecimientos	4
Introducción	5
1. Prerrequisitos	8
1.1. Geometría Hiperbólica	8
1.1.1. Modelos del espacio hiperbólico	8
1.1.2. Isometrías del espacio hiperbólico	9
1.1.3. Geodésicas del espacio hiperbólico	14
1.1.4. Frontera del espacio hiperbólico	16
1.1.5. Horoesferas y horobolas	18
1.1.6. Combinaciones convexas	19
1.2. (X, G) -variedades	21
1.2.1. Variedades euclidianas e hiperbólicas	21
1.2.2. (X, G) -variedades	24
1.2.3. Función desarrollante	25
2. Pseudoisometrías	29
2.1. Pseudoisometrías inducidas	29
2.2. Extensión de pseudoisometrías a $\partial\mathbb{H}^n$	33
3. Simplejos ideales	43
3.1. Simplejos ideales	43
3.2. Volumen de simplejos hiperbólicos	45
4. Norma de Gromov	47
4.1. Norma de Gromov	47
4.1.1. Clase fundamental de una variedad suave cerrada	47
4.1.2. Definición norma de Gromov	48
4.2. Norma de Gromov de una variedad hiperbólica	50
4.2.1. $\ M\ \geq \text{Vol}(M)/v_n$	50
4.2.2. Unimodularidad de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$	53
4.2.3. $\ M\ \leq \text{Vol}(M)/v_n$	53

5. Conclusión de la demostración en el caso cerrado y algunas consecuencias	67
5.1. Conclusión de la demostración	67
5.2. Algunas consecuencias y observaciones	71
6. Lema de Margulis y descomposición delgada/gruesa	76
6.1. Partes delgada y gruesa de una variedad hiperbólica y lema de Margulis	76
6.2. Descomposición delgada/gruesa	78
7. El teorema de rigidez de Mostow para variedades hiperbólicas completas y de volumen finito	83
7.1. Pseudoisometrías	83
7.2. Norma de Gromov de variedades hiperbólicas completas y de volumen finito	89
7.3. Conclusión de la demostración	95
7.4. Algunas consecuencias	99
8. Nudos hiperbólicos	103
8.1. Nudos	103
8.2. Dominios de Ford	106
A. Unimodularidad de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^3)$	113

Agradecimientos

Agradezco a los Estados Unidos Mexicanos por abrirme sus puertas para formarme y permitirme ser parte de su educación pública. Agradezco al CONACYT la ayuda económica durante los dos años que viví en México. También agradezco infinitamente a la Universidad Nacional Autónoma de México por darme el honor de ser uno de sus estudiantes, siempre la llevaré en mi corazón. Al Instituto de Matemáticas por darme un espacio y por darme acceso a su biblioteca de Babel. También agradezco al pueblo mexicano por hacerme sentir en cada iteración bien recibido.

Quiero agradecer al profesor Max Neumann Coto toda la ayuda que me brindó al escribir esta tesis, al sacarme de dudas y de callejones sin salidas, por siempre escuchar y valorar mis ideas, por enseñarme tantas cosas, y por ser tan comprensivo y paciente. También quiero agradecerle por el excelente curso de variedades 3-dimensionales que impartió, el cual eventualmente llevó a mi interés en los temas del presente documento. Finalmente le agradezco la ayuda que me ha brindado fuera de la tesis.

Agradezco al profesor Marcelo Alberto Aguilar González de la Vega por ser mi tutor durante esta maestría, por siempre ser una buena guía durante este camino, por las excelentes pláticas de matemáticas que tuvimos, y por lo que me enseñó en su curso.

Agradezco a los profesores Pierre Py, Mario Eudave Muñoz y Alberto León Kushner Schnur por todo lo que me enseñaron.

Agradezco a mi amiga Paula Cartagena toda la ayuda que me brindó para aplicar a este programa, y por la ayuda al comienzo.

Last but not least, agradezco a mi mamá, Nury Serrato Manger, todo el apoyo que me ha dado este año y medio, sin el cual no hubiera podido terminar este documento.

Introducción

En 1968, ver [Mos68], el matemático George Mostow descubrió un fenómeno bastante sorprendente sobre la geometría hiperbólica:

Teorema (Teorema de Rigidez de Mostow). *Si los grupos fundamentales de dos variedades hiperbólicas cerradas, orientadas y de dimensión mayor que o igual a 3 son isomorfos, entonces estas variedades son isométricas.*

Esto por un lado concuerda con algunos otros hechos de geometría hiperbólica que ya se conocían, como por ejemplo que los polígonos hiperbólicos regulares están isométricamente determinados por sus ángulos internos, pero va en contravía de otros resultados como el de que cualquier superficie cerrada de género mayor que uno tiene una cantidad no numerable de métricas hiperbólicas no isométricas entre sí.

El teorema de rigidez de Mostow tiene un papel relevante en la teoría de 3-variedades. Por ejemplo, podemos usar invariantes hiperbólicos de este tipo de variedades para diferenciarlas entre sí.

Uno de estos invariantes es el volumen de una variedad hiperbólica cerrada, el cual es bastante útil en el estudio de estas. Por ejemplo, ver el teorema de Thurston-Jørgensen [Thu+80, Capítulo 6], el conjunto de volúmenes de todas las variedades hiperbólicas cerradas de dimensión 3 es un subconjunto contable infinito de \mathbb{R} no acotado, con puntos de acumulación, y cada real positivo es el volumen de a lo más un número finito de variedades hiperbólicas cerradas, salvo isometría.

En 1974 Albert Marden, ver [Mar74], generalizó este hecho para variedades hiperbólicas completas de volumen finito y de dimensión igual a 3, y un año antes de manera independiente, Gopal Prasad, ver [Pra73], demostró un teorema en términos de grupos de Lie que tiene como consecuencia que el teorema de rigidez de Mostow también vale para variedades hiperbólicas completas y de volumen finito de dimensión mayor que 2.

Estos resultados cobraron aún más importancia con las investigaciones de Robert Riley y de William Thurston a finales de los años setenta y comienzos de los ochenta en teoría de nudos y la teoría de 3-variedades. Riley observó que el complemento del nudo figura ocho posee una estructura de variedad hiperbólica completa y de volumen finito, ver [Ril75a], y luego, usando computadores, ver [Ril75b], Riley encontró más ejemplos de nudos cuyos complementos poseían estructuras hiperbólicas completas de volumen finito, ver [Ril75b]. Riley se dio cuenta de la importancia de estos ejemplos ya que por el teorema de rigidez de Mostow en el caso de variedades no compactas se podían hallar invariantes hiperbólicos de los complementos de los nudos. Riley conjeturó qué tipo de nudos tenían una estructura hiperbólica completa y de volumen finito, lo cual posteriormente demostró Thurston en un contexto más general, ver [Thu86]. Este resultado de Thurston combinado con el teorema de rigidez de Mostow ha tenido un gran impacto en la teoría de nudos, ya que hay invariantes hiperbólicos

muy potentes, y la mayoría de nudos con un número “bajo” de cruces tienen complementos hiperbólicos, esto se discutirá en el último capítulo de este documento.

En dimensiones mayores que 3, el teorema de rigidez de Mostow también es importante. Si $n \geq 4$, denotemos por $H_n(V)$ el número de variedades hiperbólicas completas de volumen a lo más V . Entonces, aunque para cada $V > 0$ el número $H_n(V)$ es finito, ver [Wan72], en [Bur+02] se demuestra que existen $a(n), b(n) > 0$ tales que para todo $V > 0$ lo suficientemente grande tenemos

$$V^{a(n)V} \leq H_n(V) \leq V^{b(n)V},$$

es decir, $H_n(V)$ crece superexponencialmente cuando $V \rightarrow \infty$.

Esta monografía consiste de dos partes.

En la primera parte, vamos a estudiar la demostración que se da del teorema de rigidez de Mostow para variedades hiperbólicas cerradas en el texto [BP92], el cual se basa a su vez en una demostración dada en el texto [Thu+80]. Sin embargo varias de las demostraciones serán diferentes a las dadas en el texto, y además se dará una demostración completa de casi todas las afirmaciones, lo que se hará será dar una demostración completa del caso de dimensión 3 del teorema, pero se omitirán algunos detalles del caso dimensión mayor que 3 y se darán las referencias de las respectivas afirmaciones. La primera parte consiste de cinco capítulos:

En el primer capítulo, haremos una introducción rápida a la geometría hiperbólica, donde daremos las definiciones y hechos que se necesitarán en el resto del documento. Luego daremos una introducción a las (X, G) -variedades.

En el segundo capítulo demostraremos que para cualquier isomorfismo entre los grupos fundamentales de dos variedades hiperbólicas cerradas de la misma dimensión n existe una pseudoisometría $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ que induce al isomorfismo dado. Luego se demostrará que esta función $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ se puede extender a una función continua $\overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$, donde $\overline{\mathbb{H}^n}$ es la clausura del espacio hiperbólico de dimensión n , al demostrar que esto se puede hacer para cualquier pseudoisometría $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$.

En el tercer capítulo hablaremos brevemente sobre los simplejos ideales de \mathbb{H}^3 , y veremos que de entre todos los simplejos ideales de \mathbb{H}^3 los de volumen maximal son los simplejos ideales regulares, esto se puede ver en el caso dimensión 3 usando la función de Lobachevsky, esto también vale para todas las dimensiones $n > 3$.

En el cuarto capítulo introduciremos la noción de norma de Gromov y veremos que la norma de Gromov de una variedad hiperbólica cerrada es proporcional a su volumen. Luego usaremos este hecho para demostrar que la función de $\overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$ del capítulo 2 envía vértices de un simplejo ideal regular en los vértices de un simplejo del mismo tipo.

En el quinto capítulo demostraremos finalmente que las variedades hiperbólicas cerradas cuyos grupos fundamentales son isomorfos, son isométricas, usando la propiedad de la pseudoisometría $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ con respecto a los simplejos ideales regulares que se demostró en el capítulo anterior. Luego veremos que el teorema de rigidez de Mostow implica que el grupo isometrías de cualquier variedad cerrada hiperbólica de dimensión mayor que 2 es finito e isomorfo al grupo de automorfismos exteriores de su grupo fundamental.

En la segunda parte del documento adaptaremos la demostración que estudiamos en la primera parte para dar una demostración de lo siguiente:

Teorema (Prasad, Marsden). *Si los grupos fundamentales de dos variedades hiperbólicas completas, orientadas, de volumen finito y de dimensión mayor que 3 son isomorfos, entonces estas variedades*

son isométricas.

Esta segunda parte consistirá de tres capítulos:

En el primer capítulo usaremos el lema de Margulis para variedades hiperbólicas para dar una idea de porqué toda variedad hiperbólica completa de volumen finito se divide en dos partes, de las cuales una es compacta y la otra consiste de componentes conexas que son “sencillas geométricamente”, y esto implicará que toda variedad hiperbólica completa de volumen finito no compacta es homeomorfa al interior de una variedad compacta.

En el segundo capítulo usaremos la descomposición que se verá en el capítulo anterior para adaptar la demostración del teorema de rigidez en el caso de variedades cerradas, demostrando que si M es una variedad hiperbólica completa que es el interior de una variedad compacta \tilde{M} , entonces la norma de Gromov de esta variedad compacta es proporcional al volumen de M , y con este hecho se concluye la demostración como en el caso de variedades cerradas. Al final del capítulo hablaremos de algunas aplicaciones del teorema de rigidez de Mostow en el caso no compacto.

En el tercer capítulo se estudiará el dominio de Ford de un nudo hiperbólico, el cual es un invariante hiperbólico completo de este tipo de nudos.

Finalmente el documento tiene un apéndice donde daremos una demostración de la unimodularidad del grupo de Lie de isometrías de \mathbb{H}^3 , usando herramientas básicas de geometría diferencial.

El objetivo de escribir este documento es el de armar una demostración lo más elemental y completa posible, para alguien que sepa topología algebraica y geometría diferencial de variedades suaves, del teorema de rigidez de Mostow para variedades hiperbólicas completas y de volumen finito, en especial en el caso de dimensión 3. No he hallado en la literatura una demostración que cumpla esta tarea, tal vez el lugar donde más se acercan a este objetivo es en [Thu+80, Capítulo 6], sin embargo esta demostración a pesar de ser muy corta es algo difícil de comprender. En esta labor el texto [BP92] es la fuente más importante, ya que la primera parte de esta monografía es una adaptación del capítulo 3 de este texto, y la demostración que se da en este texto del teorema de rigidez de Mostow en el caso de variedades cerradas es lo suficientemente clara y bien hecha para adaptarse a una demostración al caso más general que expondremos en este texto. También los textos [Thu+80], [Bon09], [Pur20], [Lac00a] y [Lac00b] y el artículo [Tuk85] han sido de gran ayuda. Hay que notar que la demostración dada en este texto del teorema de rigidez de Mostow para variedades completas y de volumen finito difiere de la demostración dada en [Mar74], que usa herramientas de análisis y de la teoría de 3-variedades, de la demostración dada en [Pra73] que en realidad muestra un resultado para grupos de Lie que tiene como caso particular el teorema de rigidez de Mostow, y de la demostración dada en [Thu+80, Capítulo 6] que usa una modificación de la norma de Gromov con homologías de medidas.

Capítulo 1

Prerrequisitos

En este capítulo daremos algunos conceptos y hechos básicos de geometría hiperbólica y de (X, G) -estructuras que se usaran en el resto del documento. La mayoría de los hechos no tendrán demostración o sólo se dará la idea de cómo demostrarlos con sus respectivas referencias.

Las fuentes principales de este capítulo son [BP92], [Thu+80], [Lac00a] y [Lac00b]

1.1. Geometría Hiperbólica

1.1.1. Modelos del espacio hiperbólico

Sea n un número natural fijo. Se construirán diferentes modelos de una variedad riemanniana de dimensión n que se denota por \mathbb{H}^n , la cual llamaremos **espacio hiperbólico de dimensión n** , estos modelos serán isométricos entre sí. Usaremos diferentes símbolos para denotar cada uno de estos modelos.

Construcción 1.1.1 (Modelo del Hiperboloide). En \mathbb{R}^{n+1} considere la forma bilineal estándar de signatura $(n, 1)$:

$$\langle x|y \rangle_{(n,1)} := \sum_{j=1}^n x_j \cdot y_j - x_{n+1} \cdot y_{n+1}$$

y consideremos la subvariedad de \mathbb{R}^{n+1} dada por

$$I^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, x \rangle_{(n,1)} = -1, x_{n+1} > 0\},$$

note que -1 es un valor regular de la función $x \mapsto \langle x, x \rangle_{(n,1)}$, y el conjunto de arriba es una componente conexa de la preimagen de este valor regular. En particular I^n es una subvariedad de dimensión n . Para $x \in I^n$ tendremos entonces que

$$T_x I^n = \{v \in T_x \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, v \rangle_{(n,1)} = 0\} = \{x\}^\perp,$$

ya que $\ker(d_x(y \mapsto \langle y, y \rangle_{(n,1)})) = \ker(v \mapsto \langle v, x \rangle_{(n,1)})$, de donde como $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(n,1)}$ es de signatura $(n, 1)$, este producto interno es definido positivo y no degenerado en $\{x\}^\perp = T_x I^n$, ya que $\langle x, x \rangle_{(n,1)} = -1$, de donde obtenemos una métrica riemanniana sobre I^n . A I^n junto con esta métrica lo llamaremos el **modelo del hiperboloide del espacio hiperbólico de dimensión n** , y lo denotaremos por \mathbb{I}^n .

Construcción 1.1.2. (Modelo del Disco de Poincaré) Sea π la restricción a I^n de la proyección estereográfica con respecto a $(0, \dots, 0, -1)$ de $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} > 0\}$ sobre $\mathbb{R}^n \times \{0\}$, omitimos la última coordenada de $\mathbb{R}^n \times \{0\}$:

$$\pi(x) = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 + x_{n+1}}.$$

Es fácil verificar que π es un difeomorfismo de I^n sobre el disco unidad D^n de $\mathbb{R}^n \times \{0\}$. La variedad D^n junto con la métrica que hereda de \mathbb{I}^n por medio del difeomorfismo π la llamaremos el **modelo del disco de Poincaré del espacio hiperbólico de dimensión n** , y lo denotaremos por \mathbb{D}^n .

Construcción 1.1.3. (Modelo del semiespacio) Considere la función diferenciable $i : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$x \mapsto 2 \frac{x + e_n}{\|x + e_n\|^2} - e_n,$$

donde $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ y $\|\cdot\|$ denota la métrica euclidiana de \mathbb{R}^n . Se puede verificar que i es la inversión euclidiana con centro $-e_n$ y radio $\sqrt{2}$, en la definición 1.1.8 se define la noción de inversión euclidiana. Es fácil verificar que i es un difeomorfismo de D^n sobre el semiespacio $\Pi^{n,+} := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} > 0\}$. Esta última variedad junto con la métrica que hereda de \mathbb{D}^n por medio del difeomorfismo i la llamaremos **modelo del semiespacio del espacio hiperbólico de dimensión n** y la denotaremos por $\Pi^{n,+}$.

Construcción 1.1.4. (Modelo de Klein) Sea p la restricción a I^n de la proyección canónica de \mathbb{R}^{n+1} sobre el espacio proyectivo real $\mathbb{R}P^n$. Se puede demostrar que p es un difeomorfismo sobre un abierto de $\mathbb{R}^n P$ difeomorfo al disco unidad. Esto da otra métrica sobre D^n isométrica a \mathbb{H}^n , la cual llamaremos **modelo de Klein del espacio hiperbólico de dimensión n** .

Este último modelo lo usaremos muy pocas veces durante el resto del documento, por lo que no daremos demostraciones de las afirmaciones acerca de él.

1.1.2. Isometrías del espacio hiperbólico

Necesitamos clasificar los grupos de isometrías de los tres modelos de \mathbb{H}^n que construimos anteriormente. Para lograr esto, necesitaremos el siguiente hecho de geometría riemanniana que se demuestra en el documento corto [Lac00c, Teorema 1.5] y también en [BP92, Proposición A.2.1], ambas demostraciones usan los conceptos de geodésica y de mapa exponencial de variedades Riemannianas los cuales se encuentran en [Lac00c].

Teorema 1.1.5 (Rigidez riemanniana). Sean M y N dos variedades riemannianas, con M conexa. Sean $f, g : M \rightarrow N$ isometrías locales sobre sus imágenes. Suponga que para algún $x \in M$ tenemos que $f(x) = g(x)$ y $d_x f = d_x g$. Entonces $f = g$.

Sea V un espacio vectorial con una forma bilineal no degenerada \langle, \rangle . Si $x \in V$, considere la descomposición de V dada por $V = \langle x \rangle \oplus \{x\}^\perp$. A la función $V \rightarrow V$ dada por $a \cdot x + v \mapsto -ax + v$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $v \in \{x\}^\perp$ la llamaremos **la reflexión de V con respecto a x** .

Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Sea \langle, \rangle una forma bilineal sobre V . Definimos

$$O(V, \langle, \rangle) = \{A \in GL(V) : \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in V\}.$$

Denotaremos por $O(I^n)$ el subconjunto de elementos de $O(\mathbb{R}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{(n,1)})$ que respetan a I^n , y por $SO(I^n)$ la intersección de $O(I^n)$ con $SL(n+1, \mathbb{R})$.

Si M es una variedad riemanniana, denotamos por $\mathcal{I}(M)$ el grupo de isometrías, con respecto a la composición, de M sobre sí misma. Denotamos por $\mathcal{I}^+(M)$ al subgrupo de $\mathcal{I}(M)$ de elementos que preservan la orientación de M , si M está orientada.

Teorema 1.1.6. *Para cada $n > 0$:*

1. $O(I^n)$ se genera por las reflexiones de $(\mathbb{R}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{(n,1)})$ con respecto a elementos de I_n .
2. Los grupos $O(I^n)$ e $\mathcal{I}(I^n)$ son isomorfos por medio de la función $\delta \rightarrow \delta \upharpoonright I^n$.

Idea de la demostración: La demostración completa está en la proposición A.2.3 y el teorema A.2.4 de [BP92].

Para demostrar la primera afirmación, se comienza por demostrar que para todo espacio vectorial V y toda forma bilineal no degenerada $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de V se tiene que $O(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se genera por reflexiones con respecto a puntos de V , luego con esto se demuestra que $O(I^n)$ se genera por reflexiones con respecto a puntos de I^n .

Para demostrar la segunda afirmación, se toma $f \in \mathcal{I}(I^n)$ y se demuestra que $f \in O(I^n)$ de la siguiente manera: se toma $x \in I^n$ arbitrario, y luego se demuestra que la función $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}x \oplus \{x\}^\perp \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dada por $\lambda x + v \rightarrow \lambda f(x) + d_x f(v)$ es un elemento de $O(I_n)$ y que es igual a f usando el teorema 1.1.5. Que la función indicada en el segundo inciso es isométrica sale del hecho de que los elementos de $O(I^n)$ son funciones lineales y de que el subespacio generado por I^n es \mathbb{R}^{n+1} . \square

De manera similar se demuestra la siguiente afirmación:

Teorema 1.1.7. $\mathcal{I}(S^n) = \{A \upharpoonright S_n : A \in O(n+1)\}$

$$\mathcal{I}(\mathbb{R}^n) = \{Ax + b : A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n\}$$

Donde consideramos sobre S^n y sobre el espacio euclidiano \mathbb{R}^n sus métricas Riemannianas estándar.

La clasificación de los elementos de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ se hará usando inversiones euclidianas:

Definición 1.1.8. Sean $a \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha > 0$. **La inversión euclidiana de \mathbb{R}^n con centro en a y radio α ,** denotada por i_a^α , es la biyección $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ tal que $a \mapsto \infty$, $\infty \mapsto a$ y para todo $x \neq a, \infty$, $d_{\mathbb{R}^n}(y, a) \cdot d_{\mathbb{R}^n}(i_a^\alpha(y), a) = \alpha^2$. Se puede demostrar que i_a^α tiene la forma

$$x \mapsto \alpha^2 \frac{x - a}{\|x - a\|^2} + a.$$

Si M una variedad Riemanniana, denotamos por $\text{Conf}(M)$ el grupo, bajo la composición, de todos los difeomorfismos conformes $M \rightarrow M$. Si M es orientada, $\text{Conf}^+(M)$ es el subgrupo de $\text{Conf}(M)$ de difeomorfismos que preservan la orientación.

Vamos a considerar sobre D^n y $\mathbb{R}^{n,+}$ la estructura conforme que heredan como subvariedades de la variedad Riemanniana \mathbb{R}^n . Vamos a ver más adelante que $\mathcal{I}^+(\mathbb{D}^n) = \text{Conf}^+(D^n)$. Para lograr esto necesitamos clasificar los elementos del grupo $\text{Conf}^+(D^n)$. Para el caso $n = 2$ esto se hace con variable compleja, y el caso $n \geq 3$ se hace con otras técnicas.

Teorema 1.1.9.

$$\text{Conf}^+(D^2) = \left\{ \left(z \mapsto e^{i\theta} \cdot \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right) : \theta \in \mathbb{R}, \alpha \in D^2 \right\},$$

$$\text{Conf}^+(\Pi^{2,+}) = \left\{ \left(z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2; \mathbb{R}) \right\}$$

Demostración. Sea $f \in \text{Conf}^+(D^2)$. Se debe tener que $d_x f$ es de la forma $g(x)A(x)$ para algún $g(x) \in \mathbb{R}^*$ y $A(x) \in SO(2)$, de donde el $d_x f$ cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann, y por lo tanto f es analítica.

Podemos suponer, componiendo a f con una función de la forma $z \mapsto (z - \alpha)/(1 - \bar{\alpha}z)$ si es necesario, que f fija al origen. Por el lema de Schwarz se sigue entonces que f es una rotación que preserva la orientación.

$\Pi^{2,+}$ es biholomorficamente equivalente a D^2 por medio de la función $z \mapsto (z - i)/(z + i)$, y se puede mostrar usando esta función que la segunda igualdad del teorema sale de la primera. \square

Usando este último teorema, y algunos cálculos, se puede demostrar lo siguiente:

Teorema 1.1.10. 1. El grupo $\text{Conf}(D^2)$ consiste exactamente de todos los difeomorfismos de la forma $A \circ i$, donde $A \in O(2)$, y donde i es o bien la identidad, o bien una inversión euclidiana con respecto a una circunferencia de \mathbb{R}^2 ortogonal a ∂D^2 .

2. $\text{Conf}(\Pi^{2,+})$ consiste de todas las funciones de la forma

$$x \mapsto \lambda \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} i(x) + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde $\lambda > 0$, $u \in O(1) = \{\pm 1\}$, i es la identidad o es una inversión euclidiana centrada en $\mathbb{R} \times \{0\}$, y $b \in \mathbb{R}$.

Idea de la demostración: En ambos casos se demuestra que el conjunto indicado de funciones pertenece al grupo respectivo de funciones conformes. Luego se demuestra con la representación de los elementos de los grupos de funciones conformes del teorema anterior que ambos grupos de funciones conformes tienen la forma indicada de nuestro teorema. \square

Para clasificar los elementos de $\text{Conf}(D^n)$ y de $\text{Conf}(\Pi^{n,+})$, para $n \geq 3$, necesitamos el siguiente resultado:

Teorema 1.1.11 (Teorema Conforme de Liouville). Sea $n \geq 3$. Todo difeomorfismo conforme entre dos dominios de \mathbb{R}^n es de la forma

$$x \mapsto \lambda A i(x) + b,$$

donde $\lambda > 0$, $A \in O(n)$, $b \in \mathbb{R}^n$, y donde i es o bien la identidad, o bien una inversión euclidiana de \mathbb{R}^n .

Hay una demostración, algo extensa, de este hecho en [BP92, Teorema A.3.7]. Note que este teorema es completamente falso en el caso $n = 2$, cualquier función holomorfa entre dominios de \mathbb{C} es una función conforme si su derivada es distinta de cero en todos los elementos de su dominio.

A pesar de las diferencias entre las funciones conformes entre dominios de \mathbb{R}^2 y las funciones conformes entre dominios de dominios de \mathbb{R}^n para $n \geq 3$, los grupos $\text{Conf}(D^n)$ y $\text{Conf}(\Pi^{n,+})$ para $n \geq 3$ tienen una descripción análoga a los respectivos grupos para el caso $n = 2$.

Teorema 1.1.12. Sea $n \geq 2$.

1. $\text{Conf}(D^n)$ consiste de todas las funciones de la forma

$$x \mapsto Aix,$$

donde $A \in O(n)$, e i es una inversión euclidiana de \mathbb{R}^n con respecto a una esfera que interseca ortogonalmente a ∂D^n .

2. $\text{Conf}(\mathbb{H}^n)$ consiste de las funciones de la forma

$$x \mapsto \lambda \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} i(x) + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde $\lambda > 0$, $A \in O(n)$, i es la identidad o una inversión euclidiana, y $b \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Idea de la demostración: Primero se demuestra que las funciones con la forma indicada pertenecen a los respectivos grupos de funciones conformes. Luego se demuestra que las funciones que tienen la forma indicada en el teorema de funciones conformes de Liouville y que se restringen a funciones de los dominios indicados en sí mismos tienen las respectivas formas indicadas. \square

Notación 1.1.13. Si M es una variedad riemanniana, denotamos por $\mathcal{I}(M)$ el grupo de difeomorfismos de M en sí misma que son isometrías, y por $\mathcal{I}^+(M)$ al subgrupo de $\mathcal{I}(M)$ de elementos que preservan la orientación.

Con el resultado anterior ya podemos determinar los elementos de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$:

Teorema 1.1.14. Tenemos que

1. $\mathcal{I}(\mathbb{D}^n) = \text{Conf}(D^n)$.
2. $\mathcal{I}(\mathbb{H}^{n,+}) = \text{Conf}(\mathbb{H}^{n,+})$.

En particular estos grupos actúan transitivamente sobre D^n y $\mathbb{H}^{n,+}$ respectivamente.

Idea de la demostración: Recordemos que estamos considerando sobre D^n la estructura conforme que hereda de la variedad riemanniana \mathbb{R}^n . Vamos a considerar sobre I^n la estructura conforme que hereda de la métrica de \mathbb{H}^n .

Se demuestra primero que la función $\pi : \mathbb{H}^n \rightarrow D^n$ de 1.1.2 con la que se construye la métrica de \mathbb{D}^n es una función conforme. Luego si $f \in \mathcal{I}(D^n)$, como π por construcción es una isometría tendremos que $\pi^{-1} \circ f \circ \pi \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n) \subseteq \text{Conf}(\mathbb{H}^n)$, de donde como π también es una función conforme, obtenemos que $f \in \text{Conf}(D^n)$, de donde obtenemos \subseteq en la primera igualdad del teorema. La otra contención se obtiene de la primera parte de los teoremas 1.1.10 y 1.1.12, y al demostrar que cada $A \in O(n)$ y cada inversión euclidiana con respecto a una esfera (en S^n) ortogonal a ∂D^n pertenecen a $\mathcal{I}(\mathbb{D}^n)$.

Recordemos que el difeomorfismo $i : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{H}^{n,+}$ con el que definimos la métrica de $\mathbb{H}^{n,+}$ es una función conforme, donde consideramos sobre $\mathbb{H}^{n,+}$ la estructura conforme que hereda de \mathbb{R}^n . Por lo tanto la segunda igualdad sale de la primera.

Que las respectivas acciones son transitivas salen de los teoremas 1.1.10 y 1.1.12. \square

Corolario 1.1.15. *Un difeomorfismo de \mathbb{H}^n es una isometría si y sólo si es una función conforme.*

Con el teorema anterior podemos hallar una expresión para las métricas de \mathbb{D}^n y de $\Pi^{n,+}$.

Teorema 1.1.16. *Para $x \in \mathbb{D}^n$, $(y, t) \in \Pi^{n,+}$ y $v \in \mathbb{R}^n$ tenemos que las métricas vienen dadas por*

$$ds_x^2(v) = \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right)^2 \|v\|^2,$$

$$ds_{(y,t)}^2(v) = \frac{\|v\|^2}{t^2}.$$

Idea de la demostración: Sea $\pi : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{D}^n$ la función de 1.1.2. Note que para $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$, $T_{e_{n+1}}\mathbb{I}_n = \mathbb{R}^n \times \{0\}$, y que la diferencial de π en e_{n+1} es la mitad de la función identidad, de donde obtenemos

$$ds_{\bar{0}}^2(v) = 4\|v\|^2, \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Luego para $x \in D^n$ se puede demostrar que la diferencial en 0 de la inversión euclidiana respecto a la esfera con centro $x/\|x\|^2$ ortogonal a ∂D^n que lleva a 0 a x es un operador ortogonal multiplicado por $1 - \|x\|^2$, de donde obtenemos la métrica indicada para \mathbb{D}^n .

El diferencial en $\bar{0}$ del difeomorfismo i es 2 veces la matriz diagonal con diagonal $[1, \dots, 1, -1]$, de donde

$$ds_{e_{n+1}}^2(v) = \|v\|^2, \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Luego, como en $\Pi^{n,+}$ podemos enviar un punto en otro por medio de homotecias y translaciones paralelas a $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, y como el diferencial en $(\bar{0}, 1)$ de la dilatación con coeficiente $t > 0$ es t veces la identidad, obtenemos entonces la segunda igualdad del teorema. \square

Proposición 1.1.17. $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ e $\mathcal{I}^+(\mathbb{H}^n)$ *actúan transitivamente sobre el conjunto*

$$\{(x, v) : x \in \mathbb{H}^n, v \in T_x\mathbb{H}^n, ds_x^2(v) = 1\}.$$

Demostración. Ya vimos del teorema 1.1.14 que estos dos conjuntos actúan transitivamente sobre \mathbb{H}^n . Que estos grupos actúan transitivamente sobre nuestro conjunto sale del hecho de que $SO(n)$ actúa transitivamente sobre S^{n-1} y que en el modelo del disco la métrica hiperbólica sobre $T_{\bar{0}}\mathbb{D}^n$ es un múltiplo de la métrica euclidiana. \square

Proposición 1.1.18. *La función distancia de $\Pi^{n,+}$ es igual a la función*

$$D(\bar{x}, \bar{y}) := 2 \operatorname{arcsenh} \left(\frac{\|\bar{x} - \bar{y}\|}{2\sqrt{x_n y_n}} \right).$$

Demostración. Es fácil demostrar que la función D es invariante bajo todas las homotecias, inversiones euclidianas y rotaciones de \mathbb{R}^{n+1} que dejan fijo a x_{n+1} , de donde por el teorema 1.1.12 obtenemos que D es invariante bajo elementos de $\mathcal{I}(\Pi^{n,+})$.

Ahora si $x, y \in \mathbb{H}^n$, sea γ la geodésica maximal que pasa por estos dos puntos. Sea v el vector unitario de x que es tangente a γ . Entonces por la proposición 1.1.17, existe $f \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ tal que $f(x) = e_n = (0, \dots, 0, 1)$ y $df_x(v)$ es el vector unitario de $T_{e_n}\Pi^{n,+}$ que es paralelo a e_n . Luego $f(\gamma)$ es una línea euclidiana perpendicular a $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, de donde, por lo que hicimos en el párrafo

anterior, basta demostrar la igualdad para puntos de $\mathbb{I}^{n,+}$ que estén en la misma línea euclidiana vertical.

Note que por el teorema 1.1.16 se sigue que si $x, y \in \mathbb{I}^{n,+}$ están en la misma línea euclidiana perpendicular a $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, entonces como esta línea euclidiana es una geodésica de $\mathbb{I}^{n,+}$, obtenemos de la forma de la métrica de $\mathbb{I}^{n,+}$ dada en el teorema 1.1.16 que $d_{\mathbb{I}^{n,+}}(x, y) = |\ln(x_n/y_n)|$. Luego la demostración termina al probar la identidad

$$\operatorname{arcsenh} \left(\frac{y-x}{2\sqrt{xy}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{y}{x} \right)$$

para cualesquiera $x > y > 0$. □

1.1.3. Geodésicas del espacio hiperbólico

Ahora vamos a hallar las geodésicas de los tres modelos de \mathbb{H}^n que hemos construido.

Proposición 1.1.19. *Sean $x \in \mathbb{I}^n$ y $w \in T_x \mathbb{I}^n$ tales $\langle w, w \rangle_{(n,1)} = 1$. Entonces la geodésica que sale de x con velocidad w viene parametrizada por*

$$t \mapsto \cosh(t)x + \sinh(t)w, t \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

En particular, es igual a la intersección de \mathbb{I}^n con el subespacio vectorial de \mathbb{R}^{n+1} generado por x y w .

Demostración. Sea W el subespacio vectorial de \mathbb{R}^{n+1} generado por x y w . Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, luego como $w \in T_x(\mathbb{I}^n)$ tenemos que $\langle \lambda x + \mu w, \lambda x + \mu w \rangle_{(n,1)} = \mu^2 - \lambda^2$, de donde $\lambda x + \mu w \in \mathbb{I}^n$ si y sólo si $\mu^2 - \lambda^2 = -1$, y esto sucede si y sólo si existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda = \cosh(t)$ y $\mu = \sinh(t)$. Por lo tanto la curva (1.1) es la intersección de W con \mathbb{I}^n .

Sin embargo, tenemos que si $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}^n$ es la curva dada en (1.1) es tal que $\gamma'(t) = \sinh(t)x + \cosh(t)w$, de donde $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_{(n,1)} = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, de donde γ tiene rapidez constante, y por lo tanto γ es la geodésica de \mathbb{I}^n que pasa por x con velocidad w . □

El teorema de Hopf-Rinow implica entonces que \mathbb{H}^n , como espacio métrico, es completo:

Corolario 1.1.20. \mathbb{H}^n es una variedad riemanniana completa.

También obtenemos:

Corolario 1.1.21. *Entre cualesquiera dos puntos de \mathbb{H}^n existe una única geodésica maximal que pasa por ellos.*

Demostración. En la proposición anterior demostramos que cualquier geodésica maximal de \mathbb{I}^n es la intersección de \mathbb{I}^n y un subespacio de \mathbb{R}^{n+1} de dimensión 2, de donde si $x, y \in \mathbb{I}^n$, basta considerar el subespacio de \mathbb{R}^{n+1} de dimensión 2 que contiene a ambos puntos, note que \mathbb{I}^n contiene a lo más un elemento de cada subespacio de \mathbb{R}^{n+1} de dimensión 1. □

Definición 1.1.22. Llamaremos a un subconjunto $N \subseteq \mathbb{H}^n$ un **subespacio hiperbólico** si contiene la geodésica maximal que pasa por cualesquiera dos de sus puntos.

La proposición anterior implica lo siguiente:

Corolario 1.1.23. $N \subseteq \mathbb{I}^n$ es un subespacio hiperbólico si y sólo si es la intersección con \mathbb{I}^n con un subespacio lineal de \mathbb{R}^{n+1} .

Vamos a determinar los subespacios hiperbólicos de los modelos \mathbb{D}^n y $\mathbb{I}^{n,+}$. Para esto vamos a considerar esferas de \mathbb{R}^n que no necesariamente son de codimensión 1, es decir, vamos a considerar intersecciones de esferas de codimensión 1 con hiperplanos de \mathbb{R}^n de cualquier dimensión menor que o igual a n que pasan por su centro.

Proposición 1.1.24. 1. Los subespacios hiperbólicos de \mathbb{D}^n se obtienen a partir de intersectar con D^n subespacios lineales de \mathbb{R}^n o esferas de \mathbb{R}^n ortogonales a ∂D^n . En particular las geodésicas maximales de \mathbb{D}^n son diámetros o circunferencias ortogonales a ∂D^n .

2. Los subespacios hiperbólicos de $\mathbb{I}^{n,+}$ son la intersección de $\mathbb{I}^{n,+}$ con esferas de \mathbb{R}^n que intersectan a $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ ortogonalmente, o son de la forma $A \times \mathbb{R}^+$, donde A es un subconjunto afín de \mathbb{R}^{n-1} .

Idea de la demostración: Considere la función $\pi : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ con la que se construyó la métrica de \mathbb{D}^n , recuerde la construcción 1.1.2. Es fácil ver que la proyección de la cual π es restricción envía a cualquier subespacio lineal de \mathbb{R}^{n+1} a un subespacio lineal de \mathbb{R}^n , de donde por el corolario anterior se sigue que π envía subespacios hiperbólicos de \mathbb{I}^n que pasan por $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$ a intersecciones de D^n con subespacios lineales de \mathbb{R}^n .

Ahora, si $x \in D^n$ no es el origen, se puede demostrar que existe una inversión euclidiana que se restringe a una isometría de \mathbb{D}^n que envía al origen en x . También se puede demostrar que toda inversión euclidiana envía subespacios afines y esferas de \mathbb{R}^n en subconjuntos de alguno de estos tipos, de donde el caso general sale del caso que ya demostramos de subespacios hiperbólicos de \mathbb{D}^n que pasan por el origen. Que las esferas y subespacios afines son ortogonales salen de lo anterior y del hecho de que cualquier subespacio lineal intersecta a ∂D^n ortogonalmente y de que las inversiones euclidianas son conformes.

El caso del modelo del semiespacio sale del caso anterior, ya que la función $i : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{I}^{n,+}$ con la que se construyó la métrica del modelo del semiespacio es una inversión, y de la afirmación de que cualquier inversión euclidiana envía esferas y subespacios afines en subconjuntos del mismo tipo, y de que las inversiones son funciones conformes. \square

Nota 1.1.25. Se puede demostrar que las geodésicas del modelo de Klein son arcos de líneas euclidianas contenidas en el disco unidad.

El siguiente corolario justifica el nombre “subespacio hiperbólico”.

Corolario 1.1.26. Cualquier subespacio hiperbólico de \mathbb{H}^n es isométrico a \mathbb{H}^m para algún $m \leq n$.

Demostración. Note que cualquier subespacio hiperbólico de \mathbb{D}^n es isométrico a un subespacio hiperbólico de este mismo modelo que pasa por el origen, ya que por lo que vimos en la demostración anterior las isometrías de este modelo actúan transitivamente sobre él. También podemos usar un elemento de $O(n)$ para suponer que este subespacio es la intersección de D^n con $\mathbb{R}^m \times \{0\}$, usando la proposición anterior. Sin embargo por la forma de la métrica de este modelo, dada en la definición 1.1.16, la métrica de este subespacio y la de \mathbb{D}^m coinciden. \square

1.1.4. Frontera del espacio hiperbólico

Vamos a considerar ahora la noción de frontera del espacio hiperbólico. Daremos primero una construcción intrínseca geométrica y luego veremos que este objeto es homeomorfo de manera natural tanto a ∂D^n como a $\partial \Pi^{n,+}$, en el último espacio estamos tomando la frontera en $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.

Construcción 1.1.27. Sea S el conjunto de rayos geodésicos de \mathbb{H}^n parametrizados por longitud de arco. Definimos una relación en S por

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow \sup_{t \geq 0} d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) < \infty.$$

Es fácil ver que esta es una relación de equivalencia. Definimos la **frontera de \mathbb{H}^n** como el conjunto $\partial \mathbb{H}^n := S / \sim$. También definimos $\overline{\mathbb{H}^n} := \mathbb{H}^n \cup \partial \mathbb{H}^n$. Vamos a definir una topología sobre $\overline{\mathbb{H}^n}$, de manera que \mathbb{H}^n sea abierto y herede la topología que ya teníamos sobre él. Sea $p \in \partial \mathbb{H}^n$. Tomemos cualquier representante γ de p y sea x su punto inicial. Sea V una vecindad abierta de $\dot{\gamma}(0)$ en la esfera unitaria de $T_x \mathbb{H}^n$, y sea $r > 0$. Definimos

$$U(\gamma, V, r) := \{\gamma_1(t) : \gamma_1 \in S, t > r, \gamma_1(0) = x, \dot{\gamma}_1(0) \in V\} \cup \{\langle \gamma_1 \rangle \sim : \gamma_1 \in S, \gamma_1(0) = x, \dot{\gamma}_1(0) \in V\}.$$

No es difícil convencerse que la colección de estos conjuntos, cuando γ_1, V, r y $p \in \partial \mathbb{H}^n$ varían, junto con la colección de todos los abiertos de \mathbb{H}^n forman una base para una topología, por ejemplo esto se puede ver en el modelo del disco.

Proposición 1.1.28. $\partial \mathbb{H}^n$ es homeomorfo a S^{n-1} y $\overline{\mathbb{H}^n}$ a $\overline{D^n}$. Aun más, si consideramos el modelo del medio plano $\Pi^{n,+}$, entonces $\overline{\mathbb{H}^n}$ se identifica canónicamente con la clausura de $\overline{\Pi^{n,+}}$ en $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.

Idea de la demostración: Note que cualquier rayo geodésico de $\Pi^{n,+}$ o es un semiarco con un extremo en $\Pi^{n,+}$ y un extremo en $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ o una semilínea euclidiana con un extremo en $\Pi^{n,+}$ y un extremo en $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \cup \{\infty\}$. Se puede ver que en la construcción de $\partial \mathbb{H}^n$ tenemos que dos rayos geodésicos de $\Pi^{n,+}$ están relacionados por medio de \sim si y sólo si tienen el mismo extremo en $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \cup \{\infty\}$:

Sean $\gamma_1, \gamma_2 \in S$. En caso de que el extremo de γ_1 en $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \cup \{\infty\}$ no sea ∞ podemos usar inversiones euclidianas con centro en $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ para suponer que uno de los extremos de γ_1 es ∞ . Luego es fácil ver por la forma de la métrica de $\Pi^{n,+}$ que $\lim_{t \rightarrow \infty} d_{\Pi^{n,+}}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = \infty$ si y sólo si el extremo de γ_2 en $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \cup \{\infty\}$ también es ∞ , y en el caso de que esto suceda este límite de hecho tiende a 0.

Finalmente es fácil ver que bajo esta identificación los conjuntos $U(\gamma, V, r)$ se envían a abiertos de la clausura de $\Pi^{n,+}$ en $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, y también es fácil ver que los abiertos de este último espacio topológico son unión de abiertos de este tipo. \square

Como la extensión a $\overline{\Pi^{n,+}}$ de la inversa de i envía a $\partial \Pi^{n,+}$ sobre ∂D^n en \mathbb{R}^n , también obtenemos una identificación natural entre $\overline{\mathbb{H}^n}$ y la clausura de D^n en \mathbb{R}^n .

Llamaremos a los puntos de $\partial \mathbb{H}^n$ **puntos en el infinito de \mathbb{H}^n** . Dada una geodésica maximal, la cual supondremos parametrizada por longitud de arco, γ de \mathbb{H}^n y $p \in \partial \mathbb{H}^n$, diremos que p es un **extremo** de γ si $\gamma \upharpoonright [0, \infty)$ ó $\gamma \upharpoonright (-\infty, 0]$ pertenece a la clase de p . Es fácil verificar por la proposición anterior que toda geodésica maximal tiene dos extremos, y que dados $p, q \in \partial \mathbb{H}^n$ distintos existe una única geodésica cuyos extremos son estos dos puntos.

Ahora vamos a estudiar el grupo de isometrías de \mathbb{H}^n y su relación con $\partial \mathbb{H}^n$.

Proposición 1.1.29. 1.) Toda isometría de \mathbb{H}^n se extiende a un homeomorfismo de $\overline{\mathbb{H}^n}$, y por lo tanto tienen un punto fijo en $\partial\mathbb{H}^n$. La restricción de esta función a $\partial\mathbb{H}^n$ es una función en $\partial\mathbb{H}^n$ que llamaremos **traza** de la isometría.

2.) $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ y $\mathcal{I}^+(\mathbb{H}^n)$ actúan transitivamente sobre $\partial\mathbb{H}^n$.

3.) Un elemento de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ está unívocamente determinado por su traza.

Demostración. 1.) Esto sale de inmediato de la proposición 1.1.28 y de la caracterización de las isometrías del modelo del semiplano dada en los teoremas 1.1.12 y 1.1.14. La afirmación acerca del punto fijo sale del teorema de punto fijo de Brower.

2.) Tenemos que para cualesquiera par de puntos de $\partial D^n = S^{n-1}$ existe un elemento de $SO(n-1)$ que envía a uno en el otro, de donde la afirmación sale del teorema 1.1.14 y del teorema 1.1.12.

3.) Sea $f \in \mathcal{I}(\Pi^{n,+})$. Si $f(\infty) = a$, entonces si i_a^1 es la restricción a $\Pi^{n,+}$ de la inversión euclidiana de \mathbb{R}^n centrada en a de radio 1, se sigue que $i_a^1 \circ f$ fija a ∞ , luego $i_a^1 \circ f$ es de la forma $x \mapsto \lambda Ax + b$ para algunos $\lambda > 0$, $A \in O(n)$ y $b \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ por el teorema conforme de Liouville, y la restricción de la extensión de esta función a $\partial\Pi^{n,+} = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \cup \{\infty\}$ la determinan estos elementos, y como a también determina a f , obtenemos que f está determinada por su traza. □

Ahora clasificaremos las isometrías de \mathbb{H}^n con respecto a sus puntos fijos en $\overline{\mathbb{H}^n}$.

Proposición 1.1.30. Si $\phi \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$, entonces algunas de las siguientes debe suceder:

1. ϕ tiene puntos fijos en \mathbb{H}^n .

2. ϕ no tiene puntos fijos en \mathbb{H}^n , y ϕ tiene exactamente un punto fijo en $\partial\mathbb{H}^n$.

3. ϕ no tiene puntos fijos en \mathbb{H}^n , y ϕ tiene exactamente dos puntos fijos en $\partial\mathbb{H}^n$.

Demostración. Sea $\phi \in \mathcal{I}(\Pi^{n,+})$. Suponga que ϕ no tiene puntos fijos. Sean $a, b \in \partial\mathbb{H}^n$ puntos fijos distintos de la traza de ϕ . Si $a \neq \infty$, podemos conjugar a ϕ con una inversión euclidiana centrada en a para suponer que $a = \infty$, y si $b \neq 0$, podemos conjugar a ϕ con una translación horizontal de \mathbb{R}^n para suponer que $b = 0$, de donde por el teorema 1.1.12 y el teorema 1.1.14 obtenemos que ϕ debe ser de la forma $x \mapsto \lambda Ax$, para algunos $\lambda > 0$ y $A \in O(n)$. Como ϕ no tiene puntos fijos en $\Pi^{n,+}$, se sigue entonces que $\lambda \neq 1$, es fácil ver entonces que ϕ no tiene más puntos fijos en $\partial\Pi^{n,+}$ aparte de 0 e ∞ . □

Definición 1.1.31. Usando la proposición anterior definimos:

- Decimos que ϕ es una isometría **elíptica** si cumple 1.
- Decimos que ϕ es una isometría **loxodrómica** si cumple 2.
- Decimos que ϕ es una isometría **parabólica** si cumple 3.

1.1.5. Horoesferas y horobolas

Definición 1.1.32. Sea $p \in \partial\mathbb{H}^n$. Una **horoesfera centrada en p** es una subvariedad N (sin frontera) de \mathbb{H}^n de codimensión 1 tal que toda geodésica maximal que tenga a p como extremo la interseca en un solo punto de manera ortogonal.

En el modelo del semiespacio tenemos que como los rayos geodésicos que tienen a ∞ como extremos son de la forma $\{t\} \times \mathbb{R}^+$ para algún $t \in \mathbb{R}^{n-1}$, se sigue entonces que todas las horoesferas de este modelo centradas en ∞ son de la forma $\mathbb{R}^{n-1} \times \{t_0\}$ para algún $t_0 > 0$, y viceversa.

Proposición 1.1.33. 1. Las horoesferas del modelo $\Pi^{n,+}$ centradas en un punto $p \in \partial\Pi^{n,+}$ distinto de ∞ son la colección de todos los subconjuntos de la forma $S \setminus p$, donde S es una esfera de \mathbb{R}^n que interseca a $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ exactamente en p y está contenida en $\overline{\Pi^{n,+}}$. Las horoesferas de este modelo centradas en ∞ son la colección de todas las subvariedades de la forma $\mathbb{R}^{n-1} \times \{t_0\}$.

2. Las horoesferas del modelo \mathbb{D}^n centradas en un punto $p \in \partial\mathbb{D}^n$ son la colección de todos los conjuntos de la forma $S \setminus p$ donde S es una esfera de \mathbb{R}^n que interseca a $\partial\mathbb{D}^n$ exactamente en p y está contenida en $\overline{\mathbb{D}^n}$.

Demostración. La primera parte de la primera afirmación sale de la clasificación de las horoesferas centradas en ∞ que ya hicimos, de que para cualquier $x \in \partial\Pi^{n,+}$ cualquier inversión euclidiana centrada en x se restringe a una isometría de $\Pi^{n,+}$, de que las esferas e hiperplanos de \mathbb{R}^n se envían a conjuntos del mismo tipo bajo inversiones euclidianas, y que ∞ es el único punto límite de las horoesferas centradas en este punto en $\partial\Pi^{n,+}$.

Como la función $i : \mathbb{D}^n \rightarrow \Pi^{n,+}$ con la que $\Pi^{n,+}$ hereda su métrica es restricción de una inversión euclidiana, entonces la segunda afirmación sale usando los mismos argumentos que dimos para demostrar la primera afirmación. \square

Note que de lo anterior tenemos que cualquier horoesfera de \mathbb{H}^n divide a este espacio en dos componentes conexas. Con esta observación hacemos la siguiente definición:

Definición 1.1.34. Sea $p \in \partial\mathbb{H}^n$. Diremos que B es una **horobola** centrada en $p \in \partial\mathbb{H}^n$ si existe una horoesfera S centrada en p tal que B es la componente conexa de $\mathbb{H}^n \setminus S$ tal que para cualquier rayo geodésico, $r : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{H}^n$, cuyo extremo en $\partial\mathbb{H}^n$ es p , entonces existe $b \geq a$ tal que la imagen de $r \upharpoonright [b, \infty)$ está contenida en B .

Note que por ejemplo en el modelo \mathbb{D}^n las horobolas son el interior de esferas euclidianas que intersecan a $\partial\mathbb{D}^n$ exactamente en un punto, mientras que en el modelo $\Pi^{n,+}$ las horobolas centradas en puntos de $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ son el interior de esferas euclidianas que intersecan a $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ en exactamente un punto, y las horobolas centradas en ∞ son semiplanos superiores de la forma $\mathbb{R}^{n-1} \times (t, \infty)$ para algún $t > 0$.

Haremos una última observación acerca de las horoesferas.

Proposición 1.1.35. Si S es una horoesfera de \mathbb{H}^n , entonces S con la métrica que hereda es isométrica a \mathbb{R}^{n-1} salvo un múltiplo.

Demostración. Podemos suponer que en el modelo $\mathbb{I}^{n,+}$ la horoesfera está centrada en el punto ∞ , de donde S es de la forma $\mathbb{R}^{n-1} \times \{t\}$ para algún $t > 0$. Entonces la métrica que hereda S de $\mathbb{I}^{n,+}$ viene dada por

$$\frac{dx_1^2 + \cdots + dx_{n-1}^2}{t^2},$$

de donde S es isométrica a \mathbb{R}^{n-1} salvo un múltiplo. \square

1.1.6. Combinaciones convexas

Sea I_+^n el subconjunto cerrado de \mathbb{R}^{n+1} que consiste de todos los puntos que están en el paraboloide \mathbb{I}^n o encima de él. Considere la función $P^n : I_+^n \rightarrow I^n$ tal que para todo $x \in I_+^n$, $P^n(x)$ es el punto de intersección de la recta que pasa por x y el origen, esto está bien definido porque cualquier línea que pase por el origen sólo corta a I^n una vez. Claramente $P^n \upharpoonright I^n = \text{Id}_{I^n}$.

Proposición 1.1.36. *La función P^n es suave.*

Demostración. Es fácil ver que P^n viene dada por

$$(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto \sqrt{\frac{-1}{x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2}} \cdot (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}),$$

de donde esta función se puede extender a un función C^∞ definida en una vecindad de I_+^n . \square

Definición 1.1.37. Sea X un subconjunto de \mathbb{H}^n . Diremos que X es convexo si X contiene el arco geodésico entre cualesquiera dos de sus puntos. Si A es un subconjunto de \mathbb{H}^n , llamaremos al subconjunto convexo más pequeño que contiene a A la **envolvente convexa de A** , y lo denotaremos por $\langle A \rangle$.

Definición 1.1.38. Sean $u_0, \dots, u_m \in \mathbb{I}^n$. Definimos las **combinaciones convexas** de u_0, \dots, u_m como la función $\sigma_{(u_0, \dots, u_m)} : \Delta^m \rightarrow \mathbb{I}^n$ dada por

$$(t_0, \dots, t_m) \mapsto P^n \left(\sum_{i=0}^m t_i u_i \right),$$

donde estamos tomando la suma de \mathbb{R}^{n+1} .

Esto está bien definido ya que I_+^n es un subconjunto convexo de \mathbb{R}^{n+1} con la métrica usual, ya que toda línea euclidiana de \mathbb{R}^{n+1} intersecta a I^n en a lo más dos puntos, y cuando la intersección consiste en dos puntos el segmento de recta entre estos dos puntos está contenido en I_+^n .

Note que la imagen de $\sigma_{(u_0, \dots, u_m)}$ es la envolvente convexa de los puntos u_0, \dots, u_m , esto se puede demostrar por inducción sobre m al notar que si x e y están en \mathbb{I}^n , la función $t \mapsto P^n(ty + (1-t)x)$ es una parametrización del arco geodésico que va de x a y .

Note que P^n se puede extender a una función C^∞ en una vecindad de I_+^n , y por lo tanto como el subespacio lineal generado por u_0, \dots, u_m es \mathbb{R}^{n+1} , obtenemos que $\sigma_{(u_0, \dots, u_m)}$ se puede extender a una función suave en una vecindad de I_+^n , de donde $\sigma_{(u_0, \dots, u_m)}$ es suave. También obtenemos que la asignación $(\mathbb{I}_n)^{m+1} \times \Delta^m \rightarrow \mathbb{I}_n$ dada por $(u_0, \dots, u_m, \bar{t}) \mapsto \sigma_{(u_0, \dots, u_m)}(\bar{t})$ es suave.

Note que si $u, v \in \mathbb{H}^n$, entonces por la construcción de la función $\sigma_{(u,v)}$ se sigue que la asignación $t \in [0, 1] \mapsto tu + (1-t)v$ es una parametrización del arco geodésico $[u, v]$, recuerde que en el

modelo \mathbb{I}^n la geodésica maximal que pasa por u y v es la intersección del subespacio vectorial de \mathbb{R}^{n+1} generado por u y v con I^n .

Proposición 1.1.39. *Las combinaciones convexas de puntos de \mathbb{H}^n son invariantes bajo isometrías de \mathbb{H}^n .*

Demostración. Sean $u_0, \dots, u_m \in I^n$ y $(t_0, \dots, t_m) \in \Delta^m$. Sea $\varphi \in \mathcal{I}(\mathbb{I}^n)$. Luego $\varphi \upharpoonright I^n = A \upharpoonright I^n$ para algún $A \in GL(n+1; \mathbb{R})$.

Tenemos que $x := \sigma_{(u_0, \dots, u_m)}(t_0, \dots, t_m)$ es la intersección entre I^n y la línea L que pasa por la combinación euclidiana $\sum_{i=0}^m t_i u_i$ y el origen, de donde como A es lineal, invertible, y preserva a I^n se sigue que la línea que pasa por $A(\sum_{i=0}^m t_i u_i)$ y el origen es igual a $A(L)$. Sin embargo $A(L)$ sólo intersecta a I^n en un punto, de donde esta intersección es igual a $A(x) = \varphi(x)$, pero

$$A \left(\sum_{i=0}^m t_i u_i \right) = \sum_{i=0}^m t_i A(u_i) = \sum_{i=0}^m t_i \varphi(u_i),$$

de donde $\varphi(x)$ es el punto de intersección entre I^n y la línea que pasa por la combinación euclidiana $\sum_{i=0}^m t_i \varphi(u_i)$ y el origen, i.e.,

$$\varphi(x) = \pi^n \left(\sum_{i=0}^m t_i \varphi(u_i) \right) = \sigma_{(\varphi(u_0), \dots, \varphi(u_m))}(t_0, \dots, t_m).$$

□

Notación 1.1.40. Concluimos de todo esto que las combinaciones convexas de puntos de \mathbb{H}^n están bien definidas. Entonces de ahora en adelante, a menos que se diga lo contrario, denotaremos al elemento

$$\sigma_{(u_0, \dots, u_m)}(t_0, \dots, t_m)$$

por

$$\sum_{i=0}^m t_i u_i \tag{1.2}$$

para todo $u_0, \dots, u_m \in \mathbb{H}^n$ y todo $(t_0, \dots, t_m) \in \Delta^m$, es decir, notaremos las combinaciones convexas de los puntos $u_0, \dots, u_m \in \mathbb{H}^n$ con pesos t_0, \dots, t_m de esta manera. Note que, por construcción, claramente bajo esta notación tenemos que para cada permutación σ de $\{0, \dots, m\}$

$$\sum_{i=0}^m t_i u_i = \sum_{i=0}^m t_{\sigma i} u_{\sigma i}. \tag{1.3}$$

Ahora queremos ver para cuáles puntos u_0, \dots, u_m la función $\sigma_{(u_0, \dots, u_m)}$ es un encaje suave.

Definición 1.1.41. Decimos que los puntos $u_0, \dots, u_m \in \mathbb{H}^n$ están en posición general si no están contenidos en un subespacio hiperbólico de dimensión menor que o igual a $m-1$.

Note que $u_0, \dots, u_m \in \mathbb{I}^n$ estén en posición general es equivalente a que sean un subconjunto linealmente independiente de \mathbb{R}^{n+1} por el corolario 1.1.23.

Proposición 1.1.42. Si $u_0, \dots, u_m \in \mathbb{H}^n$ están en posición general, entonces $\sigma_{(u_0, \dots, u_m)}$ es un encaje suave.

Demostración. Por una observación anterior sabemos que $\sigma_{(u_0, \dots, u_m)}$ es una función suave.

Si $t, t' \in \Delta^m$ son distintos, entonces las combinaciones euclidianas $\sum_{i=0}^m t_i u_i$ y $\sum_{i=0}^m t'_i u_i$ son linealmente independientes entre sí ya que $\{u_0, \dots, u_m\}$ es linealmente independiente en \mathbb{R}^{n+1} . Por lo tanto la líneas que pasan por cada uno de ellos y también pasan por el origen intersectan a I_n en puntos distintos, de donde π^n es inyectiva en el conjunto de combinaciones afines de u_0, \dots, u_m . Sin embargo $t \in \Delta^m \mapsto \sum_{i=0}^m t_i u_i$ es inyectiva, por lo tanto $\sigma_{(u_0, \dots, u_m)}$ es inyectiva. Por lo tanto, como Δ^m es compacto se sigue que $\sigma_{(u_0, \dots, u_m)}$ es un encaje topológico.

Sea P un hiperplano de \mathbb{R}^{n+1} que contenga a todas las combinaciones euclidianas afines de los puntos u_0, \dots, u_m . Entonces si U es el abierto de \mathbb{R}^{n+1} que consiste de todos los puntos x tales que la línea que pasa por x y el origen intersecta a P , la función f que envía a cada $x \in U$ a este punto de intersección de P es suave e $\text{Im}(\sigma_{(u_0, \dots, u_m)})$ está contenida en U . Por lo tanto, como I^n es subvariedad de \mathbb{R}^{n+1} , se sigue que $f \upharpoonright \text{Im}(\sigma_{(u_0, \dots, u_m)})$ es diferenciable, y como es claramente la inversa de $\sigma_{(u_0, \dots, u_m)}$ obtenemos finalmente que $\sigma_{(u_0, \dots, u_m)}$ es un encaje suave. \square

1.2. (X, G) -variedades

1.2.1. Variedades euclidianas e hiperbólicas

Note que el toro se puede obtener como el cociente de \mathbb{R}^2 por medio de la acción de \mathbb{Z}^2 como subgrupo. Entonces podemos considerar la colección $\{\phi^{-1} : \phi \text{ es la restricción de la proyección } \pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \text{ a una bola abierta de radio } 1/2\}$, la cual es un atlas sobre $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ cuyos cambios de coordenadas son elementos de la forma $(x, y) \mapsto (x + n, y + m)$ para algún $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$. En particular estos cambios de coordenadas son isometrías de \mathbb{R}^2 .

Note que podemos construir un atlas cuyos cambios de coordenadas sean también translaciones de \mathbb{R}^2 para la botella de Klein al considerar el subgrupo de $\mathcal{I}(\mathbb{R}^2)$ generado por las isometrías $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ y $(x, y) \mapsto (-x, y + 1)$. También podemos hacer lo mismo con un cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$, ya que éste espacio es el cociente de la franja $[0, 1] \times \mathbb{R}$ al identificar $\{0\} \times \mathbb{R}$ con $\{1\} \times \mathbb{R}$ bajo la translación de \mathbb{R}^2 dada por $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$. Podemos también hacer lo mismo con la banda abierta de Möbius si usamos la franja $[0, 1] \times \mathbb{R}$ y la translación de \mathbb{R}^2 dada por $(x, y) \mapsto (1 + x, -y)$.

Los ejemplos anteriores ilustran la siguiente definición:

Definición 1.2.1. Una variedad topológica M^n es una **variedad euclidiana** si posee un atlas $\{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{\alpha \in \Lambda}$ tal que sus cambios de coordenadas $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ son restricciones de isometrías de \mathbb{R}^n , con su producto interno usual, en cada una de las componentes de sus dominios.

Sin embargo, el doble toro no tiene una estructura de variedad euclidiana por el siguiente argumento:

Suponga que S es una superficie cerrada que tiene una estructura de variedad euclidiana. Entonces, por el teorema 1.2.18, para S junto con esta estructura, existe una cubriente $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ que es una isometría local. Luego el grupo $G := \pi_1(S)$ es isomorfo al grupo de transformaciones cubrientes de π , y por lo tanto G actúa sobre \mathbb{R}^2 por medio de isometrías, de manera libre y propiamente discontinua. Se puede adaptar la demostración de la proposición 2.1.5 para ver que el dominio de Dirichlet D de $G \curvearrowright \mathbb{R}^2$ es un polígono convexo que es un dominio fundamental de esta acción.

Note que S es homeomorfo al cociente de D que se obtiene al pegar sus aristas y vértices por medio de elementos de G . Entonces si v es el número de clases de equivalencia del cociente de los vértices de D por medio de la relación de identificación por medio de elementos de G . Entonces la característica de Euler de S es igual a

$$1 - n + v, \quad (1.4)$$

donde n es tal que $2n$ es el número de lados de D . Si $\{v_1, \dots, v_m\}$ es una clase de equivalencia de los vértices, y θ_i es el ángulo interno de D en el vértice v_i , obtenemos que como $G \curvearrowright D$ da lugar a una teselación de \mathbb{R}^2 , entonces $\theta_1 + \dots + \theta_m = 2\pi$. Por lo tanto obtenemos que como la suma de los ángulos internos de D es igual a $(2n - 2)\pi$, entonces $2\pi v = (2n - 2)\pi$, y así

$$2\pi\chi(S) = 2\pi(v - n + 1) = 2\pi v + 2\pi(1 - n) = 0,$$

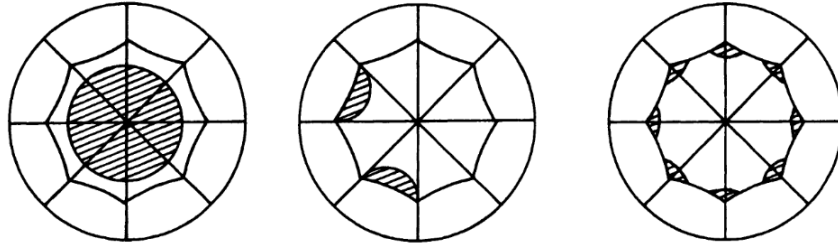
con lo que $\chi(S) = 0$.

Sin embargo, el doble toro es una variedad hiperbólica:

Definición 1.2.2. Una variedad topológica M^n es una **variedad hiperbólica** si existe un atlas $\{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{H}^n\}_{\alpha \in \Lambda}$ de M tal que sus cambios de coordenadas son restricciones de isometrías de \mathbb{H}^n en cada una de las componentes conexas de su dominio.

Se puede dar un argumento similar al anterior, usando que la suma de los ángulos internos de un polígono hiperbólico regular de n lados es menor que $(n - 2)\pi$, para ver que toda superficie cerrada que es hiperbólica tiene característica de Euler negativa. Vamos a ver que todas las superficies cuya característica de Euler sea negativa es hiperbólica:

Ejemplo 1.2.3. Se puede demostrar, ver [BP92, Página 59-60], que en el plano hiperbólico existe un octágono regular cuyos ángulos internos midan todos $\pi/4$, el cual es único salvo isometría, y así podemos construir un atlas del doble toro cuyos cambios de coordenadas sean isometrías de \mathbb{H}^2 :



Atlas de $T^2 \# T^2$ con octágono regular con ángulos internos de $\pi/4$ en el modelo del disco, imagen tomada de [BP92, p. 60].

Ejemplo 1.2.4. Suponga que M^n es una variedad hiperbólica y $N \xrightarrow{\pi} M$ es un cubrimiento de M , entonces N también es una variedad hiperbólica. Esto se debe a que si $\{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{H}^n\}_{\alpha \in \Lambda}$ es un atlas que vuelve a M en una variedad hiperbólica, entonces podemos armar un atlas de N al tomar la colección de todas las funciones $(\pi \upharpoonright U) \circ \phi_\alpha$, donde esté definida esta función por supuesto, tales que U es un abierto de N donde $\pi \upharpoonright U$ es un difeomorfismo sobre $\pi(U)$. Entonces los cambios de coordenadas de este atlas de N son iguales a restricciones de cambios de cartas de M . Por lo tanto N es también una variedad hiperbólica.

Ejemplo 1.2.5. Del ejemplo anterior se sigue que todas las superficies cerradas, conexas y orientables de género mayor que o igual a 2 son variedades hiperbólicas, ya que todas estas superficies son espacios cubrientes del doble toro, aunque esto también se puede hacer demostrando que en \mathbb{H}^2 hay un $4g$ -ágono regular cuyos ángulos internos suman 2π para todo $g \geq 2$.

Ejemplo 1.2.6. Ver [TL97, Ejemplo 1.4.5] para más detalles. Considere el dodecaedro a la izquierda de la siguiente figura:

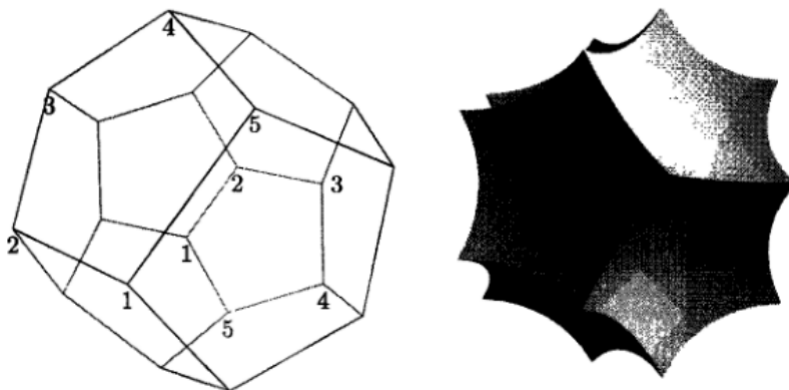
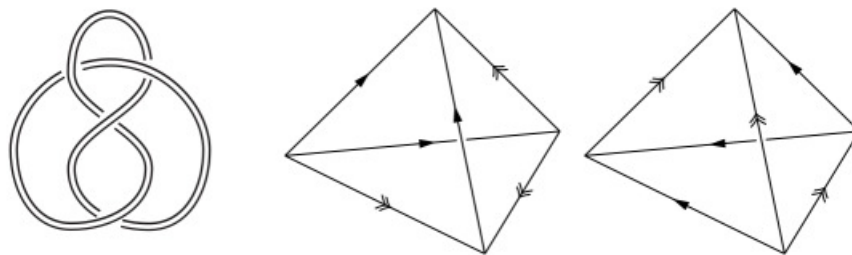


Imagen tomada de [TL97, Página 37].

Si identificamos las caras opuestas de este dodecaedro con una rotación de $3/10$ de un giro completo, entonces se puede demostrar que se obtiene una 3-variedad cerrada. Se puede ver también que bajo esta identificación, las aristas de este dodecaedro quedan identificadas en seis grupos de cinco elementos. También se puede demostrar que existe un dodecaedro hiperbólico regular cuyos ángulos diédricos son todos de 72° , ver la figura de la derecha de la imagen anterior, y se puede demostrar que como las aristas quedan identificadas en grupos de 5 elementos que esto da una estructura de variedad hiperbólica a la 3-variedad cerrada que se construyó anteriormente.

Ejemplo 1.2.7. Tal vez la variedad hiperbólica más importante sea el complemento del nudo figura ocho. Se puede demostrar que el complemento de este nudo en S^3 es homeomorfo a pegar dos tetraedros sin sus vértices, como se muestra a la derecha de la figura siguiente

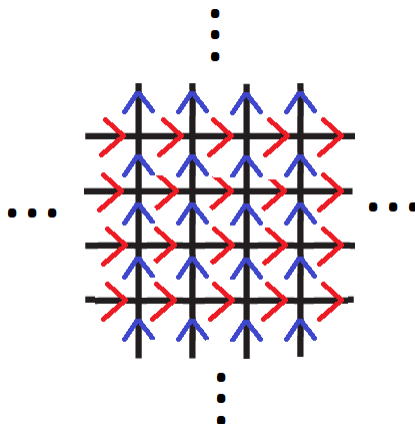


ver [TL97, Ejemplo 1.4.8] o [Lac00b, Capítulo 7].

Se pueden usar dos tetraedros regulares ideales, ver la definición 3.1.3, y se puede demostrar que al pegar estos dos tetraedros con los pegamientos indicados, usando isometrías adecuadas entre las caras, se obtiene una estructura hiperbólica completa sobre el complemento del nudo figura ocho, ver [TL97, Ejemplo 3.4.16].

1.2.2. (X,G)-variedades

Consideremos un cuadrado euclidiano en \mathbb{R}^2 e identifiquemos sus lados por medio de translaciones para obtener un toro. Ahora, tomemos cuatro copias de este cuadrado junto con estas identificaciones y peguémoslas al cuadrado original. Si continuamos este proceso indefinidamente obtendremos un mosaico del plano:



Podemos también obtener mosaicos similares de \mathbb{R}^2 usando las identificaciones que usamos para el cilindro y la banda de Möbius abiertos. También podemos obtener un mosaico del plano hiperbólico con la identificación del octágono regular hiperbólico que usamos obtenemos un mosaico del plano hiperbólico:

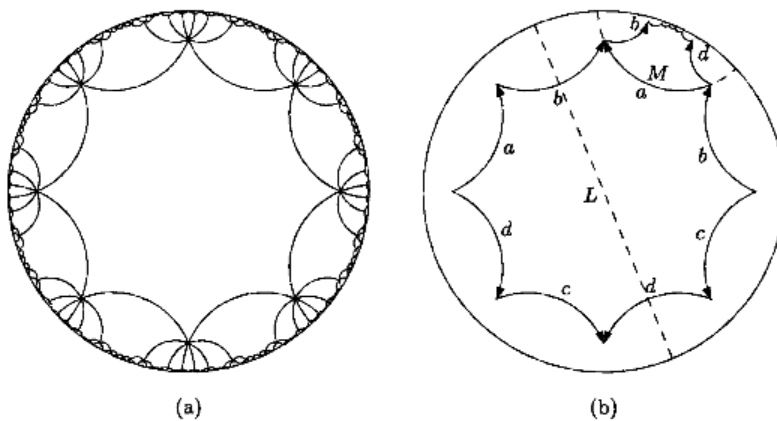


Imagen tomada de [Thurston/Levy]

En cada ejemplo anterior de variedades euclidianas M obtenemos entonces de los mosaicos funciones $\mathbb{R}^2 \rightarrow M$ que son isometrías locales, y que aun más son funciones cubrientes. También del mosaico del octágono hiperbólico obtenemos una isometría local $\mathbb{H}^2 \rightarrow T^2 \# T^2$ que es también una función cubriente.

Vamos a demostrar que, en cada caso respectivo, esto también sucede para cualquier variedad euclidiana y cualquier variedad hiperbólica, es decir, si M^n es una variedad euclidiana o una variedad hiperbólica entonces existe una isometría local $\mathbb{R}^n \rightarrow M$ o $\mathbb{H}^n \rightarrow M$, respectivamente, que es

una función cubriente, la cual está determinada por cualquier restricción a un abierto de \mathbb{R}^n o \mathbb{H}^n , respectivamente.

Antes de demostrar esto necesitamos algunas definiciones y conceptos que serán una generalización de lo que hemos estudiado hasta ahora en esta sección.

Definición 1.2.8. Sea X una variedad suave conexa y G un grupo de difeomorfismos de X . Suponga que M es una variedad topológica. Una colección $\{(U_i, \varphi_i)\}_i$ es un (X, G) -**atlas** de M si se cumplen las siguientes condiciones

- Las U_i son un cubrimiento abierto de M .
- Cada φ_i es un homeomorfismo $\varphi_i : U_i \rightarrow \varphi_i(U_i) \subseteq X$ tal que $\varphi_i(U_i)$ es un abierto de X .
- Para cada i, j tenemos que la restricción en cada componente conexa de $\text{dom}(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})$ de $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ es la restricción de un elemento de G .

Claramente cada (X, G) -atlas de M está contenido en un único (X, G) -atlas maximal. A un elemento de este atlas maximal lo llamaremos una (X, G) -**carta** de M .

Definición 1.2.9. Llamaremos a una variedad topológica M junto con un (X, G) -atlas una (X, G) -**variedad**.

Ejemplo 1.2.10. Si $n > 0$, entonces la colección de todas las $(\mathbb{R}^n, \mathcal{I}(\mathbb{R}^n))$ -variedades es exactamente la colección de todas las variedades euclidianas de dimensión n .

Ejemplo 1.2.11. Si $n > 0$, entonces la colección de todas las $(\mathbb{H}^n, \mathcal{I}(\mathbb{H}^n))$ -variedades es exactamente la colección de todas las variedades hiperbólicas de dimensión n .

Ejemplo 1.2.12. Si $n > 1$, la esfera n -dimensional S^n es naturalmente una variedad riemanniana al heredar su métrica de la métrica usual de \mathbb{R}^{n+1} . Decimos que una variedad topológica es una **variedad esférica** si es una $(S^n, \mathcal{I}(S^n))$ -variedad para algún $n > 1$.

Definición 1.2.13. Dadas dos (X, G) -variedades M y N , diremos que una función continua $f : M \rightarrow N$ es un (X, G) -**morfismo** si para cada $x \in M$ existen una (X, G) -carta (U, φ) de M y una (X, G) -carta (V, ψ) de N tales que $x \in U$, $f(x) \in V$ y la restricción de la composición $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ a la componente conexa de su dominio que contiene a x es restricción de un elemento de G .

Definición 1.2.14. Diremos que dos (X, G) -variedades son (X, G) -isomorfas si existe un homeomorfismo entre estas dos variedades tal que tanto como el homeomorfismo como su inversa son (X, G) -morfismos.

1.2.3. Función desarrollante

¡Nota importante! 1.2.15. Para efectos prácticos, vamos a suponer de ahora en adelante que X es una variedad riemanniana y que G es un grupo de isometrías de X . Note que en este caso entonces toda (X, G) -variedad hereda una estructura de variedad riemanniana por medio de su (X, G) -estructura, dado que los cambios de cartas de un (X, G) -atlas son isometrías de X por convención. También note que en este caso un (X, G) -morfismo es una isometría local.

En los ejemplos de variedades euclidianas e hiperbólicas vimos que \mathbb{R}^n y \mathbb{H}^n eran espacios cubrientes de estas variedades respectivamente por medio de una función que era una isometría local. En ambos ejemplos esto lo hicimos “desdoblado” las (X, G) -variedades en la variedad riemanniana simplemente conexa X para obtener un “mosaico” de X con el que conseguimos una cubriente $X \rightarrow M$ que fuera un (X, G) -morfismo.

Vamos a ver que si X es simplemente conexa y M es una (X, G) -variedad, entonces si $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ es la cubriente universal de M y consideramos la estructura de (X, G) -variedad que \tilde{M} hereda con la función π , entonces \tilde{M} y X son (X, G) -isomorfas. El primer paso para ver esto es el siguiente teorema.

Teorema 1.2.16 (Función de Desarrollo). *Sea M una (X, G) -variedad simplemente conexa. Si U_0 es un abierto conexo de M y $\varphi_0 : U_0 \rightarrow X$ es una (X, G) -carta, entonces existe un único (X, G) -morfismo $D : M \rightarrow X$ que extiende a φ_0 .*

En este teorema no suponemos que X es simplemente conexo.

Idea de la demostración: La demostración es la misma que la del teorema de monodromía para dominios simplemente conexos de análisis complejo, y esto se puede hacer gracias a lo siguiente:

1. Por las suposiciones que hicimos sobre X , M es entonces una variedad riemanniana y por lo tanto tiene una métrica que induce la misma topología. Luego podemos usar el lema del número de Lebesgue para extender a φ_0 a lo largo de curvas. Estas extensiones son únicas por el teorema de rigidez de variedades riemannianas 1.1.5.
2. Para construir D se fija $x_0 \in U_0$ y para cualquier $x \in M$ tomamos un camino $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ que vaya de x_0 a x , luego extendemos φ_0 a x al extender φ_0 a lo largo de α con respecto a U_0 y al definir $D(x)$ como el valor de x en esta extensión. Que esto está bien definido sale del hecho de que M es simplemente conexo.

□

Definición 1.2.17. Diremos que D es la **función de desarrollo** de φ_0 .

Recuerde lo dicho en la nota 1.2.15.

Teorema 1.2.18. *Suponga que X es simplemente conexa. Sea M una (X, G) -variedad simplemente conexa y que es completa como variedad riemanniana. Entonces si D es una función de desarrollo de M , D es un (X, G) -isomorfismo. En particular D es una isometría.*

Antes de demostrar el teorema vamos a necesitar algunos resultados:

Teorema 1.2.19 (Teorema de aproximación de Whitney). *Sean M y N variedades diferenciables y $F : M \rightarrow N$ una función continua. Entonces F es homotópica a una función diferenciable $M \rightarrow N$. Aún más, si F es suave en un subconjunto cerrado A la homotopía se puede hacer relativa a A .*

Teorema 1.2.20. *Sean $F, G : M \rightarrow N$ dos funciones diferenciables entre dos variedades suaves. Si F, G son homotópicas, entonces existe una homotopía diferenciable $M \times I \rightarrow N$ entre F y G , al considerar a $M \times I$ como subconjunto cerrado de $M \times \mathbb{R}$. Aun más, si la homotopía es relativa a un subconjunto cerrado A , también existe una homotopía diferenciable relativa a A .*

Demostración del teorema 1.2.18: Sea D como en la hipótesis del teorema. Vamos a demostrar la siguiente afirmación:

(\star): Dada una función diferenciable $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ con $\gamma(0) \in D(M)$, existe entonces una única función diferenciable $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow M$ tal que $\gamma = D \circ \hat{\gamma}$.

Note que esta afirmación implica de inmediato que D es sobreyectiva.

Veamos que también implica que D es inyectiva. Sean $x, y \in M$ tales que $D(x) = D(y)$. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ una función diferenciable tal que $0 \mapsto x$ y $1 \mapsto y$, es fácil ver que tal función existe gracias al teorema de aproximación de Whitney. Entonces $D \circ \gamma$ es un lazo basado en $D(x) = D(y)$. Luego por el teorema 1.2.20 y dado que X es simplemente conexo existe una homotopía diferenciable $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que $H(0, -) = D \circ \gamma$, $H(1, -) \equiv D(x) = D(y)$ y $H(-, 0) \equiv D(x) = D(y) \equiv H(-, 1)$. Tenemos que $H(-, 1) : [0, 1] \rightarrow X$ es un camino constante tal que $H(0, 1) \in D(M)$, de donde por la afirmación tenemos que existe una única $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ tal que $D \circ \alpha = H(-, 1)$. Sin embargo como D es localmente una isometría, esto implica que como $H(-, 1)$ es constante, α es localmente constante. Pero dado que $[0, 1]$ es conexo esto sólo puede suceder si y sólo si α es constante, de donde $x = y$, por la unicidad del camino α .

Ahora vamos a demostrar la afirmación (\star). Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) \in D(M)$. Fijemos $x_0 \in D^{-1}(\gamma(0))$. Considere

$$t_0 := \sup\{t \in [0, 1] : \forall 0 \leq s \leq t, \exists! \hat{\gamma}_s \in C^\infty([0, s], M) \text{ tal que } \hat{\gamma}_s(0) = x_0, D \circ \hat{\gamma}_s = \gamma \upharpoonright [0, s]\}. \quad (1.5)$$

Como D es una isometría local, existe una vecindad abierta U de x_0 tal que $D \upharpoonright U$ es una isometría sobre $D(U)$, y $D(U)$ es abierto. Sea $0 < t \leq 1$ tal que $\gamma([0, t]) \subseteq D(U)$. Entonces si $0 \leq s \leq t$ se sigue que si $\hat{\gamma}_s := (D \upharpoonright U)^{-1} \circ (\gamma \upharpoonright [0, s])$, $\hat{\gamma}_s$ es el único elemento de $C^\infty([0, s], M)$ tal que $\hat{\gamma}_s(0) = x_0$ y $D \circ \hat{\gamma}_s = \gamma \upharpoonright [0, s]$, de donde $t_0 > 0$.

Para ver que $t_0 = 1$ basta demostrar que t_0 es un elemento del conjunto por el argumento que acabamos de dar para mostrar que $t_0 > 0$.

Sea $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente de elementos del conjunto (1.5) que converge a t_0 . Sea $\alpha := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \hat{\gamma}_{s_n}$, entonces $\alpha : [0, t_0) \rightarrow M$ es una función bien definida por la condición de unicidad en (1.5), que es diferenciable.

Veamos que la sucesión $\alpha(s_n)$ es una sucesión de Cauchy de M . Si demostramos esto podemos tomar $\hat{\gamma}_{t_0} : [0, t_0] \rightarrow M$ dada por $\hat{\gamma}_{t_0} \upharpoonright [0, t_0) = \alpha$ y $\hat{\gamma}_{t_0}(t_0) := x$ donde $x := \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(s_n)$. Luego $\hat{\gamma}_{t_0}$ va a ser una función continua, ya que definimos $\hat{\gamma}_{t_0}(t_0) = x$, que cumple la relación $D \circ \hat{\gamma}_{t_0} = \gamma \upharpoonright [0, t_0]$, y así como D es una isometría local, esto va a implicar que $\hat{\gamma}_{t_0}$ va a ser diferenciable.

Suponga que la sucesión indicada no es de Cauchy. Luego existe una sucesión creciente de naturales n_1, n_2, \dots tal que para todo $k \geq 0$ tenemos que $d_M(\alpha(s_{n_{2k+1}}), \alpha(s_{n_{2k+2}})) \geq \epsilon$ para un $\epsilon > 0$ fijo. Entonces

$$\begin{aligned} l(\gamma \upharpoonright [0, t_0]) &= l(D \circ \gamma \upharpoonright [0, t_0]) = l(\alpha) \\ &\geq \sum_{k=0}^{\infty} l(\alpha \upharpoonright [s_{n_{2k+1}}, s_{n_{2k+2}}]), \end{aligned} \quad (1.6)$$

sin embargo $l(\alpha \upharpoonright [s_{n_{2k+1}}, s_{n_{2k+2}}]) \geq d_M(\alpha(s_{n_{2k+1}}), \alpha(s_{n_{2k+2}})) \geq \epsilon$ para cada $k = 0, 1, \dots$, luego $\gamma \upharpoonright [0, t_0)$ no tiene longitud finita. Pero esto es una contradicción ya que $\gamma \upharpoonright [0, t_0]$ es diferenciable,

y como $[0, t_0]$ es compacto esto implica que esta curva tiene longitud finita, de donde por lo que observamos anteriormente esto implica que $t_0 = 1$. Como ya observamos que t_0 está en el conjunto (1.5), se sigue entonces que $\hat{\gamma}_1 \in C^\infty([0, 1], X)$ es única tal que $D \circ \hat{\gamma}_1 = \gamma$. \square

De esto obtenemos de inmediato el siguiente hecho importante, recuerde la nota 1.2.15:

Corolario 1.2.21. *Sea M una (X, G) -variedad que es completa como variedad riemanniana. Entonces existe una función cubriente $X \rightarrow M$ que es una isometría local.*

Recordemos que si M es una variedad topológica conexa y $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ es su cubriente universal, entonces su grupo de transformaciones cubrientes, el cual denotaremos por $\text{Aut}(\pi)$, es isomorfo a $\pi_1(M)$. Recuerde que si M es una (X, G) -variedad conexa, su cubriente universal $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ hereda de manera canónica una estructura de (X, G) -variedad por medio de π . Recordemos que $\text{Aut}(\pi)$ actúa sobre \tilde{M} de manera libre y propiamente discontinua sobre \tilde{M} . Tenemos la siguiente proposición que demostraremos más adelante:

Proposición 1.2.22. *$\text{Aut}(\pi)$ es un subgrupo de G .*

En particular $\pi_1(M)$ se puede identificar con un subgrupo de G que actúa sobre X de manera libre y propiamente discontinua. Antes de demostrar la proposición necesitamos el siguiente lema que es un caso particular del lema de Hopf-Rinow:

Lema 1.2.23. *Suponga que M es una variedad Riemanniana y $p : N \rightarrow M$ es una función cubriente. Si M es completa, entonces N , con su métrica heredada por medio de p , es completa.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de N . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que la sucesión de Cauchy $\{p(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ está contenida en un subconjunto compacto de un abierto regular de M , regular con respecto a la función cubriente p , esto se puede hacer ya que M es completa. Sea $y \in M$ el límite de la sucesión $\{p(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Como $N \xrightarrow{p} M$ es una función cubriente que es isometría en los abiertos regulares, existe $\epsilon > 0$ tal que $\overline{B_N(x, \epsilon)}$ está contenido en un abierto regular de N para cada $x \in \pi^{-1}(y)$. Luego si $x_1, x_2 \in \pi^{-1}(y)$ son distintos, los cerrados $\overline{B_N(x_1, \epsilon)}$ y $\overline{B_N(x_2, \epsilon)}$ son compactos y disjuntos. Entonces si $w \in p^{-1}(y)$ es el único elemento de $p^{-1}(y)$ tal que $\overline{B_N(w, \epsilon)}$ contiene una cola final de la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, se debe tener que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a w . \square

Demostración de la proposición 1.2.22: Por el lema anterior tenemos que \tilde{M} es completa, luego por el teorema 1.2.18 podemos suponer que $\tilde{M} = X$ y que π es un (X, G) -morfismo. Sea $\tau \in \text{Aut}(\pi)$. Como π es un (X, G) -morfismo y un homeomorfismo local, y τ es un homeomorfismo, se sigue de $\pi \circ \tau = \pi$ que τ es un (X, G) -morfismo, es decir, localmente es igual a restricciones de elementos de G , de donde τ es una isometría de X . Como τ es un (X, G) -morfismo se sigue que existe un abierto no vacío U de X y $g \in G$ tales que $\tau \upharpoonright U = g \upharpoonright U$, y así por el teorema 1.1.5 se sigue que $\tau = g$. \square

Corolario 1.2.24. *Sea M una (X, G) -variedad conexa y completa. Entonces existe un subgrupo Γ de G , isomorfo a $\pi_1(M)$, que actúa de manera libre y propiamente discontinua sobre X tal que $X/\Gamma \cong M$ como (X, G) -variedades.*

Capítulo 2

Pseudoisometrías

Ya podemos enunciar el teorema del que trata la tesis:

Teorema 2.0.1 (Teorema de Rigidez de Mostow para variedades cerradas). *Sean $M_1 \cong \mathbb{H}^n/\Gamma_1$ y $M_2 \cong \mathbb{H}^n/\Gamma_2$ dos variedades cerradas e hiperbólicas ambas de dimensión ≥ 3 . Entonces si $\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ es un isomorfismo, existe una isometría $M_1 \rightarrow M_2$ que lo induce.*

En este capítulo daremos el primer paso para demostrar este teorema, el cual es mostrar que dado un isomorfismo $\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$, existe una pseudoisometría $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ que lo induce, ya definiremos estos dos conceptos. Luego mostraremos que esta pseudoisometría se extiende a una función continua $\overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$ que se restringe a un homeomorfismo $\partial\mathbb{H}^n \rightarrow \partial\mathbb{H}^n$. En los capítulos siguientes se usará este homeomorfismo para construir una isometría entre M_1 y M_2 .

2.1. Pseudoisometrías inducidas

En el capítulo anterior vimos que si M^n es una variedad hiperbólica existe una función cubriente $p : \mathbb{H}^n \rightarrow M$ que es una isometría local, ver corolario 1.2.21.

Definición 2.1.1. Sean $M_1 \cong \mathbb{H}^n/\Gamma_1$ y $M_2 \cong \mathbb{H}^n/\Gamma_2$ variedades hiperbólicas, y sean $p_j : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma_j$ las proyecciones correspondientes. Suponga que $\Gamma_1 \xrightarrow{\phi} \Gamma_2$ es un homomorfismo. Decimos que $\mathbb{H}^n \xrightarrow{f} \mathbb{H}^n$ **induce** a ϕ si

$$f \circ g = \phi(g) \circ f, \forall g \in \Gamma_1.$$

Definición 2.1.2. Sean X e Y espacios métricos. Diremos que una función $f : X \rightarrow Y$ es una **pseudoisometría** si existen $b, c > 0$ tal que

$$\frac{1}{c} \cdot d_X(x, y) - b \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y), \forall x, y \in X.$$

No hay que confundir esta definición con la noción de *cuasiisometría*, la cual pide que la función cumpla la desigualdad

$$\frac{1}{c} \cdot d_X(x, y) - b \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y) + b, \forall x, y \in X,$$

note que este tipo de función no es necesariamente continua, mientras que una pseudoisometría sí lo es.

Proposición 2.1.3. Sean $M_1 \cong \mathbb{H}^n/\Gamma_1$ y $M_2 \cong \mathbb{H}^n/\Gamma_2$ dos variedades hiperbólicas. Sean $\mathbb{H}^n \xrightarrow{p_j} M_j$ las funciones cubrientes respectivas. Suponga que $\Gamma_1 \xrightarrow{\psi} \Gamma_2$ es un homomorfismo. Entonces existe una pseudoisometría $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ que induce a ψ .

Antes de demostrar esta proposición necesitamos definir la noción de dominio fundamental de una variedad hiperbólica. Las baldosas de los mosaicos que vimos en la sección anterior son ejemplos de este concepto.

Definición 2.1.4. Suponga que un grupo G actúa sobre un espacio topológico X . Sea D un cerrado de X , diremos que D es un **dominio fundamental para G** si

- $\bigcup_{g \in G} g(D) = X$,
- $g(D) \cap D \subseteq \partial D, \forall g \in G$.

Proposición 2.1.5. Sean $M \cong \mathbb{H}^n/\Gamma$ una variedad hiperbólica y $x_0 \in \mathbb{H}^n$. Entonces el **dominio de Dirichlet con respecto a x_0** de la acción $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}^n$:

$$D := \{x \in \mathbb{H}^n : d(x, x_0) \leq d(x, \gamma(x_0)) \forall \gamma \in \Gamma\}$$

es un dominio fundamental para Γ . Aun más, D es convexo, $\text{Vol}(D) = \text{Vol}(M)$, y D es un poliedro geodésico compacto si M es cerrada.

Demostración. Note que para cualesquiera puntos $x, y, z \in \mathbb{H}^n$ tales que $d(x, y) = d(x, z)$ existe un elemento en $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ que envía a y en z , esto es fácil de demostrar en el modelo \mathbb{D}^n al tomar $x = \bar{0}$, de donde si $x, y \in \Pi^{n,+}$ podemos suponer que x e y están a la misma altura, y por lo tanto por la proposiciones 1.1.24 y 1.1.18 se sigue que

$$\{z \in \mathbb{H}^n : d(z, x) = d(z, y)\}$$

es un subespacio hiperbólico de \mathbb{H}^n , de donde D es la intersección de una colección de semiespacios hiperbólicos, de donde D es cerrado. Note que para todo $\gamma \in \Gamma$ tenemos

$$\gamma(D) = \{x \in \mathbb{H}^n : d(x, \gamma(x_0)) \leq d(x, \delta(x_0)), \forall \delta \in \Gamma\}.$$

Como la acción de Γ es propiamente discontinua se sigue que si $x \in \mathbb{H}^n$, entonces el conjunto

$$\{d(x, \delta(x_0)) : \delta \in \Gamma\}$$

tiene un mínimo, y por lo tanto los conjuntos $\gamma(D)$ cubren a \mathbb{H}^n .

Note que

$$\gamma(D) \cap D = \{x \in \mathbb{H}^n : d(x, x_0) = d(x, \gamma(x_0))\},$$

de donde $\gamma(D) \cap D \subseteq \partial D$. Por lo tanto D es un dominio fundamental de Γ .

Como la proyección $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma$ es una isometría local y es inyectiva en D° , D° tiene imagen densa y es sobre en D , obtenemos que como $\text{Vol}(\partial D) = 0$, $\text{Vol}(D) = \text{Vol}(D^\circ) = \text{Vol}(M)$.

Suponga ahora que M es compacto. Como M contiene un subconjunto denso isométrico a D° , se sigue que D es de diámetro finito, y por lo tanto es un subconjunto cerrado y acotado, y como \mathbb{H}^n es completo, se sigue que D es compacto. Sea $r := \text{Diam}(D)$. Luego el conjunto

$$\{\delta \in \Gamma : d(x_0, \gamma(x_0)) < r\}$$

es un conjunto finito $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$. Veamos que

$$D = \{x \in \mathbb{H}^n : d(x, x_0) \leq d(x, \gamma_i(x_0)), \forall i = 0, \dots, n\}. \quad (2.1)$$

Para cada $\gamma \in \Gamma$ sean

$$H_\gamma := \{x \in \mathbb{H}^n : d(x, x_0) = d(x, \gamma(x_0))\},$$

$$S_\gamma := \{x \in \mathbb{H}^n : d(x, x_0) \leq d(x, \gamma(x_0))\}.$$

Veamos que

$$D = \bigcap \{S_\gamma : H_\gamma \cap B_{2r}(x_0) \neq \emptyset\}.$$

Que D está contenido en la intersección de la izquierda sale de la definición de D . Suponga que x pertenece al conjunto de la derecha. Note que si $\gamma \in \Gamma$ es tal que $H_\gamma \cap B_{2r}(x_0) = \emptyset$ se debe tener que como $D \subseteq S_\gamma$, $B_{2r}(x_0) \subseteq S_\gamma^\circ$, de donde tenemos que $x \in S_\gamma$ para todos estos $\gamma \in \Gamma$, de donde $x \in S_\gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$, i.e., $x \in D$.

Finalmente, como $H_\gamma \cap B_{2r}(x_0) \neq \emptyset$ implica que $d(x_0, \gamma(x_0)) < 4r$, obtenemos entonces (2.1), y por lo tanto D es un poliedro finito compacto. \square

Ahora que hemos definido la noción de dominio fundamental y hemos mostrado una forma de construirlo para cualquier $\Gamma \leq \mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ que actúa de manera libre y propiamente discontinua sobre \mathbb{H}^n , daremos una manera de triangular a la variedad \mathbb{H}^n/Γ , sin embargo no daremos una descripción completa de esta construcción ya que es algo engorrosa.

Nota 2.1.6. En este documento las triangulaciones simpliciales que consideraremos de variedades suaves tendrán sus simplejos encajados.

Teorema 2.1.7. *Toda variedad hiperbólica cerrada tiene una triangulación simplicial suave.*

Idea de la demostración: Dados $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{H}^n$, podemos construir el baricentro de estos puntos usando combinaciones hiperbólicas convexas como el punto $\sum_{i=1}^m \frac{1}{m} u_i$, y como las combinaciones convexas son invariantes bajo isometrías, este punto también es invariante bajo isometrías.

Ahora, dada una variedad hiperbólica cerrada M^n , existe una isometría local $\pi : \mathbb{H}^n \rightarrow M$ que es una función cubriente. Sea D el dominio fundamental con respecto a esta función como se construyó en la proposición 2.1.5, luego D es un poliedro convexo. La triangulación simplicial de D se va construyendo por inducción sobre las dimensiones de sus caras: si ya se han construido las triangulaciones de todas las caras de cierta dimensión, de manera canónica, para construir la triangulación de una cara de la dimensión siguiente se toma el baricentro de esta cara y se consideran los simplejos que se obtienen al tomar las envolventes convexas de conjuntos que se obtienen al unir este baricentro con simplejos de las triangulaciones de sus caras. Esta triangulación es suave dado que estamos usando combinaciones hiperbólicas convexas, y estas funciones son suaves.

Luego se puede demostrar que al tomar sucesivas subdivisiones baricéntricas obtenemos una triangulación simplicial. \square

La demostración de la proposición 2.1.3 que daremos a continuación se basa en ideas dadas en [Tuk85, Lema 3.4].

Demostración de la proposición 2.1.3: Sea L una triangulación simplicial C^∞ de M_1 . Luego esta triangulación se levanta por medio de p_1 a una triangulación K de \mathbb{H}^n . Vamos a construir una pseudoisometría $F_1 : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ que induce a ψ al definirla en cada uno de los simplejos de K

Podemos definir F_1 en los vértices de K de manera arbitraria, sólo teniendo en cuenta la condición de inducción $F_1 \circ g(v) = \psi(g) \circ F_1(v)$, esto se puede hacer al definir a F_1 de manera arbitraria en un subconjunto finito de los vértices de K tales que cualquier otro vértice se obtiene a partir de una translación de un vértice de este subconjunto con un elemento de Γ , y que este subconjunto sea minimal con respecto a esta propiedad.

Ya que hemos definido a F_1 en los vértices de K , vamos a usar esto para definir a F_1 en σ para cada $\sigma \in K$ de dimensión m mayor que 0: para cada $(t_0, \dots, t_m) \in \Delta^m$ definimos

$$F_1(\sigma(t_0, \dots, t_m)) := \sum_{i=0}^m F_1(\sigma(e_i)),$$

donde a la derecha de esta definición estamos usando coordenadas hiperbólicas convexas, recuerde la definición 1.1.38 y la notación (1.1.40). Como la condición de inducción $F_1 \circ g = \psi(g) \circ F_1$ se tiene en los vértices de K y como las combinaciones convexas hiperbólicas son invariantes bajo isometrías, ver el lema 1.1.39, se sigue que la condición de inducción se cumple para F_1 definida así sobre todo \mathbb{H}^n , de donde F_1 induce a ψ .

Veamos finalmente que F_1 es una pseudoisometría. Note que F_1 restringida a cada elemento de K es suave, donde cada simplejo, que es convexo, tiene la estructura diferencial que hereda como subconjunto de algún \mathbb{R}^n , ya que la función de combinaciones convexas es suave, de donde existe una cota superior $c > 0$ del diferencial de F_1 restringida al simplejo. Por lo tanto si tomamos dos puntos x, y de este simplejo, tendremos que como el arco geodésico entre estos dos puntos está contenido en el simplejo, se sigue que $d(F_1(x), F_1(y)) \leq c \cdot d(x, y)$.

Sea D_1 un dominio fundamental para Γ_1 . Por la demostración del teorema 2.1.7 la triangulación K de \mathbb{H}^n se construye a partir de levantar una triangulación de M_1 por medio de p_1 , de donde K es invariante bajo la acción de Γ_1 , i.e., para todo $\sigma \in K$ y todo $g \in \Gamma_1$ tenemos $g \circ \sigma \in K$, de donde si $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ son simplejos de K que cubren a D , tendremos que $\{g(\sigma_i) : g \in \Gamma_1, i = 1, \dots, n\}$ cubre a \mathbb{H}^n .

Sea $c > 0$ lo suficientemente grande de manera que $d(F_1(x), F_1(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ para todo $x, y \in \sigma_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, de donde si $\sigma \in K$, $\sigma = g(\sigma_i)$ para algunos i y $g \in \Gamma_1$, con lo que para todo $x, y \in \sigma_i$

$$d(F_1(g(x)), F_1(g(y))) = d(\psi(g)(F_1(x)), \psi(g)(F_1(y))) = d(F_1(x), F_1(y)) \leq c \cdot d(x, y),$$

y así tendremos que para todo $\sigma \in K$ y para todo $x, y \in \sigma$ tendremos $d(F_1(x), F_1(y)) \leq c \cdot d(x, y)$, de donde si $x, y \in \mathbb{H}^n$, el arco geodésico entre estos dos puntos se puede dividir en un número finito de subarcos de manera que cada uno de ellos esté contenido en algún elemento de K , de donde obtenemos así que $d(F_1(x), F_1(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ para todo $x, y \in \mathbb{H}^n$, es decir, F_1 es c -Lipschitz.

El mismo argumento demuestra que existe una función F_2 que induce a ψ^{-1} , y que para un $c > 0$ lo suficientemente grande F_1 y F_2 son c -Lipschitz.

Note que existe $b > 0$ tal que $d(F_2 \circ F_1(x), x) < b$ para todo $x \in \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_m$, de donde como $F_2 \circ F_1$ conmuta con los elementos de Γ_1 se sigue entonces que $d(F_2 \circ F_1(x), x) < b$ para todo

$x \in \mathbb{H}^n$. Con lo que

$$\begin{aligned} d(F_2 \circ F_1(x), F_2 \circ F_1(y)) &\geq d(x, y) - d(x, F_2 \circ F_1(x)) - d(y, F_2 \circ F_1(y)) \\ &\geq d(x, y) - 2b, \end{aligned}$$

para todo $x, y \in \mathbb{H}^n$ y así

$$d(F_1(x), F_1(y)) \geq \frac{1}{c} d(F_2 \circ F_1(x), F_2 \circ F_1(y)) \geq \frac{1}{c} d(x, y) - \frac{2b}{c}.$$

Por lo tanto F_1 es una pseudoisometría. \square

Proposición 2.1.8. *Considere las funciones de la demostración anterior. Existen funciones únicas $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$ y $M_2 \xrightarrow{f_2} M_1$ que hacen conmutar el diagrama*

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{H}^n & \xrightarrow{F_1} & \mathbb{H}^n & \xrightarrow{F_2} & \mathbb{H}^n \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 & & \downarrow \pi_1 \\ \mathbb{H}^n/\Gamma_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{H}^n/\Gamma_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{H}^n/\Gamma_1. \end{array}$$

Aún más, estas funciones son equivalencias homotópicas y son inversas homotópicas entre sí. En particular M_1 y M_2 son homotópicamente equivalentes.

Demostración. Es obvio que hay que definir f_j por $[x] \mapsto [F_j(x)]$, para $j = 1, 2$. Esta función está bien definida ya que si $x, y \in \mathbb{H}^n$ son tales que $y = \gamma(x)$ para algún $\gamma \in \Gamma_1$, entonces $F_1(y) = F_1(\gamma(x)) = \phi(\gamma)(F_1(x))$. f_2 se define similarmente. Es claro que f_1 y f_2 son únicas.

Considere la homotopía $H : [0, 1] \times \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ que se construye usando combinaciones hiperbólicas convexas por medio de:

$$(t, x) \mapsto (1 - t)(F_2 \circ F_1(x)) + t \cdot x.$$

Note que $H(0, -) \equiv F_2 \circ F_1$ y que $H(1, -) \equiv id_{\mathbb{H}^n}$. Además, H induce una homotopía entre $f_2 \circ f_1$ e id_{M_1} , y esto se debe a que si $(t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{H}^n$ y $\gamma \in \Gamma_1$, entonces

$$\begin{aligned} H(t, \gamma(x)) &= (1 - t) \cdot (F_2 \circ F_1(\gamma(x))) + t \cdot \gamma(x) \\ &= (1 - t) \cdot \gamma(F_2 \circ F_1(x)) + t \cdot \gamma(x) \\ &= \gamma((1 - t) \cdot (F_2 \circ F_1(x)) + t \cdot x) \\ &= \gamma(H(t, x)). \end{aligned}$$

Donde la segunda igualdad sale del hecho de que $F_2 \circ F_1$ induce a id_{Γ_1} , y la tercer igualdad sale del hecho de que las combinaciones hiperbólicas convexas son invariantes bajo isometrías. Que $f_1 \circ f_2$ es homotópica a id_{M_2} se demuestra de manera similar. \square

2.2. Extensión de pseudoisometrías a $\partial\mathbb{H}^n$

Ahora que demostramos esta afirmación, el resto del capítulo nos concentraremos en demostrar este hecho:

Proposición 2.2.1. *Suponga que $P : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ es una pseudoisometría. Entonces existe una única extensión continua $\overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$ de P .*

Para demostrar esta afirmación necesitamos varias definiciones y hechos sobre la geometría de \mathbb{H}^n .

Proposición 2.2.2. *Sea α una geodésica (completa) de \mathbb{H}^n y $p \in \mathbb{H}^n \setminus \alpha$. Entonces existe una única geodésica (completa) β que pasa por p y corta perpendicularmente a α . El punto de intersección entre α y β es el punto más cercano de α a p .*

Demostración. Note que por la clasificación de los subespacios hiperbólicos que vimos del modelo \mathbb{H}^n en 1.1.23 existe un subespacio hiperbólico de \mathbb{H}^n de dimensión 2 que contiene a α y a p . Por el corolario 1.1.26 tenemos que este subespacio es isométrico a \mathbb{H}^2 y por lo tanto basta demostrar la afirmación en este caso

En el modelo $\Pi^{2,+}$ podemos suponer que α es una línea vertical perpendicular a $\mathbb{R} \times \{0\}$, esto se puede hacer suponiendo que en un punto de α el vector unitario tangente a esta geodésica es un múltiplo no cero del vector $(0, 1)$, esto se puede hacer por la proposición 1.1.17. Podemos aun más suponer que α es la línea imaginaria superior de \mathbb{C} al usar una translación. Al usar una homotecia podemos suponer que p está en $S^1 \subseteq \mathbb{C}$, de donde la parte superior de S^1 es la geodésica que pasa por p y corta a α perpendicularmente. Note que estas geodésicas se cortan en la unidad imaginaria i . Finalmente usando la proposición 1.1.18 se puede ver que i es el punto de α más cercano a p , hay que usar que α es la línea imaginaria y que $p \in S^1$. \square

Definición 2.2.3. El punto de α cuya existencia demuestra la proposición anterior se llama **la proyección ortogonal de p en α** , y lo denotaremos por $\pi_\alpha(p)$. Diremos que la **distancia de p a α** es la longitud del arco geodésico que va de p a $\pi_\alpha(p)$ y la denotaremos por $d(p, \alpha)$.

Definición 2.2.4. Si γ es una geodésica maximal y $r > 0$, definimos la **vecindad tubular de γ de radio r** por

$$N_r(\gamma) = \{x \in \mathbb{H}^n : d(x, \gamma) < r\}$$

Notación 2.2.5. Si $a, b \in \mathbb{H}^n$, denotaremos por $[a, b]$ el arco geodésico entre a y b . Si $a, b \in \overline{\mathbb{H}^n}$ Denotaremos por $\gamma(a, b)$ la geodésica maximal orientada que pasa por a y b , cuya orientación va de a a b que está parametrizada por longitud de arco.

Lema 2.2.6. *Sea $s > 0$. Entonces en el modelo $\Pi^{n,+}$ tenemos que $N_s(\gamma(\overline{0}, \infty))$ es el cono*

$$\{z \in \Pi^{n,+} : \text{el ángulo entre la línea euclidiana que va del origen a } z \text{ y } \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \text{ está en el intervalo } (\theta_s, \pi/2]\}$$

donde θ_s es el único elemento de $(0, \pi/2)$ tal que $\csc(\theta_s) = \cosh(s)$.

Demostración. Como para todo punto de $\Pi^{n,+}$ existe un único subespacio hiperbólico de dimensión 2 que contiene a este punto y a $\gamma(\overline{0}, \infty)$, que es el único semiplano perpendicular a $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ que los contiene a ambos, vemos entonces que basta demostrar la afirmación para $\Pi^{2,+}$, es decir, hay que demostrar que en modelo $\Pi^{2,+}$ tenemos:

$$N_s(\gamma(0, \infty)) = \{re^{i\theta} : \theta_s < \theta < \pi - \theta_s\} \quad (2.2)$$

Sea $r > 0$ y $0 < \theta < \pi/2$. Tenemos que $\pi_{\gamma_0}(re^{i\theta}) = ri$, ya que la geodésica maximal

$$\{re^{it} : 0 < t < \pi\}$$

corta a γ_0 perpendicularmente en ri , de donde

$$\begin{aligned} s &= d_{\mathbb{H}^2,+}(re^{i\theta}, \gamma) = d_{\mathbb{H}^2,+}(re^{i\theta}, ri) = \int_{\theta}^{\pi/2} \left\| \frac{d(\cos(t), \sin(t))}{dt} \right\|_{\mathbb{H}^2,+} dt \\ &= \int_{\theta}^{\pi/2} \|(-\sin(t), \cos(t))\|_{\mathbb{H}^2,+} dt = \int_{\theta}^{\pi} \frac{r}{r \sin(t)} dt = -\ln(\csc \theta + \cot \theta). \end{aligned}$$

Es fácil ver que $s = -\ln(\csc \theta + \cot \theta)$ es equivalente a $\cosh(s) = \csc \theta$.

Similarmente, si $0 < \theta < \pi/2$, tenemos que

$$s = \int_{\pi/2}^{\pi-\theta} \left\| \frac{d(re^{it})}{dt} \right\|_{\mathbb{H}^2,+} dt = \ln(\csc \theta - \cot \theta),$$

y esto también implica que $\cosh(s) = \csc \theta$. Por lo tanto obtenemos la igualdad (2.2). \square

Lema 2.2.7. Sean $s > 0$ y γ una geodésica maximal de \mathbb{H}^n . Suponga que el arco geodésico $[a, b]$ está contenido en $(N_s(\gamma))^c$. Entonces

$$d(a, b) \geq \cosh(s) \cdot d(\pi_{\gamma}(a), \pi_{\gamma}(b)). \quad (2.3)$$

Demostración. Durante esta demostración consideraremos para cada $a, b \in \mathbb{H}^n$ a $\gamma(a, b)$ como la geodésica maximal que pasa por a y b , con la orientación que va de a a b , que está parametrizada por longitud de arco, y es tal que $0 \mapsto a$.

En el modelo \mathbb{H}^n , γ es la intersección de I^n con un subespacio vectorial L de \mathbb{R}^{n+1} de dimensión 2. Sea W el complemento ortogonal de L con respecto al producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(n,1)}$, este será el único producto interno al que nos referiremos durante la demostración.

Note que si η es una geodésica de \mathbb{H}^n parametrizada por longitud de arco, y esta geodésica corta a γ perpendicularmente en un punto x , con $\eta(t) = x$, entonces por la proposición 1.1.19 tenemos que el vector unitario $\eta'(t)$ pertenece a W , ya que si $s = \gamma^{-1}(x)$, tenemos que $\gamma'(s) \in L$, de donde si S es la esfera unitaria de W , obtenemos una función

$$\mathbb{H}^n \setminus \gamma \xrightarrow{\psi} \gamma \times (0, \infty) \times S,$$

$$z \mapsto (\pi_{\gamma}(z), d(z, \gamma), (\gamma(z), \pi_{\gamma}(z)))'(d(z, \gamma))),$$

la cual es una biyección por el teorema de existencia y unicidad local de geodésicas. Note que también es una función suave, y que además es un difeomorfismo ya que su inversa viene dada por $(x, t, v) \mapsto \cosh(t)x + \sinh(t)v$ para todo $(x, t, v) \in \gamma \times (0, \infty) \times S$, a esta última función la denotaremos por ϕ .

Suponga que $(x, t, v) \in \gamma \times (0, \infty) \times S$ y que $(u', t', v') \in T_x \gamma \times T_t(0, \infty) \times T_v S$. Tendremos que $x \in L$, $v \in S \subseteq W = L^{\perp}$, $u' \in L \cap \{x\}^{\perp}$ y $v' \in W \cap \{v\}^{\perp}$, de donde como

$$\begin{aligned} d_{(x,t,v)} \phi(u', t', v') &= \cosh(t)u' + \sinh(t)v' \\ &\quad + \sinh(t)t'x + \cosh(t)t'v, \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\|d_{(x,t,v)}\phi(u', t', v')\|^2 &= \cosh^2(t)\|u'\|^2 + \sinh^2(t)\|v'\|^2 \\
&\quad + \sinh^2(t)t'^2\langle x, x \rangle + \cosh^2(t)t'\|v\|^2 \\
&= \cosh^2(t)\|u'\|^2 + \sinh^2(t)\|v'\|^2 \\
&\quad - \sinh^2(t)t'^2 + \cosh^2(t)t'^2 \\
&= \cosh^2(t)\|u'\|^2 + \sinh^2(t)\|v'\|^2 + t'^2 \\
&\geq \cosh^2(t)\|u'\|^2.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Sea $\beta : I \rightarrow [a, b]$ una parametrización del arco geodésico $[a, b]$. Note que $\tilde{\beta} := \pi_\gamma \circ \beta$ es una parametrización del arco geodésico $[\pi_\gamma(a), \pi_\gamma(b)]$. Tenemos de lo anterior

$$\begin{aligned}
d(a, b) &= \int_I \|\beta'(t)\| dt = \int_I \|(\phi \circ (\psi \circ \beta))'(t)\| dt \\
&= \int_I \|D_{\psi \circ \beta(t)}\phi((\psi \circ \beta)'(t))\| dt \\
&\geq \int_I \cosh(d(\beta(t), \gamma)) \|(\pi_\gamma \circ \beta)'(t)\| dt \\
&\geq \int_I \cosh(s) \|(\pi_\gamma \circ \beta)'(t)\| dt = \cosh(s) d(\pi_\gamma(a), \pi_\gamma(b))
\end{aligned}$$

donde la primera desigualdad sale de que $(\psi \circ \beta)(t)$ es de la forma $(\pi_\gamma(\beta(t)), d(\beta(t), \gamma), v)$, donde v es la derivada de $\gamma(\beta(t), \pi_\gamma(\beta(t)))$ en el tiempo $d(\beta(t), \gamma)$ y de la desigualdad (2.4), y la segunda desigualdad sale de que $[a, b] \subseteq (N_s(\gamma))^c$. \square

El siguiente hecho es el paso principal de la construcción de la extensión de P a $\overline{\mathbb{H}^n}$:

Proposición 2.2.8. *Sea P una pseudoisometría de \mathbb{H}^n en sí mismo. Entonces existe una constante $r > 0$, que depende de las constantes de P , tal que para toda geodésica completa β de \mathbb{H}^n , existe una única geodésica completa $A(\beta)$ tal que $P(\beta) \subseteq N_r(A(\beta))$.*

Para demostrar este hecho necesitamos algunos lemas y algunas definiciones.

Lema 2.2.9. *Sean $s > 0$ y $\gamma(a, b)$ una geodésica maximal de \mathbb{H}^n . Entonces para todo $c > 0$ existe una familia $\{X_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ de cerrados contenidos en $N_s(\gamma)$ que cumplen:*

1. $\text{Diam}(X_m) = \text{Diam}(X_l) < \infty$ para todo $m, l \in \mathbb{Z}$.
2. Tenemos que $d_{\mathbb{H}^n}(x, y)$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{H}^n$ tales que $x \in X_m, y \in X_l$ con $|m - l| \geq 2$.
3. La familia $\{X_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ cubre a $\overline{N_s(\gamma)}$.
4. El único punto de acumulación de $\bigcup_{n \geq 0} X_n$ en $\partial \mathbb{H}^n$ es b , y el único punto de acumulación de $\bigcup_{n \geq 0} X_{-n}$ en $\partial \mathbb{H}^n$ es a .

Demostración. Podemos suponer que, en el modelo $\Pi^{n,+}$, a es el origen y $b = \infty$. Sean $x, y \in \Pi^{n,+}$, y suponga que $x_n > y_n$, luego

$$\begin{aligned} d_{\Pi^{n,+}}(x, y) &= 2 \sinh^{-1} \left(\frac{d_{\mathbb{R}^n}(x, y)}{2\sqrt{x_n y_n}} \right) \geq 2 \sinh^{-1} \left(\frac{x_n - y_n}{2\sqrt{x_n y_n}} \right) \\ &= 2 \sinh^{-1} \left(\frac{x_n}{2\sqrt{x_n y_n}} - \frac{y_n}{2\sqrt{x_n y_n}} \right) = 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\sqrt{x_n}}{2\sqrt{y_n}} - \frac{\sqrt{y_n}}{2\sqrt{x_n}} \right), \end{aligned}$$

de donde si x_n es lo suficientemente grande y $0 < y_n \leq 1$ tendremos que $d_{\Pi^{n,+}}(x, y) \geq c$, digamos que $x_n \geq \lambda$.

Por la forma de "cono" que tiene $\overline{N_s(\gamma)}$ por el lema 2.2.6, se sigue entonces fácilmente que existe $\mu > \lambda$ tal que para todo $x \in \overline{N_s(\gamma)} \cap (\mathbb{R}^n \setminus B_{\mathbb{R}^n}(\bar{0}, \mu))$ tenemos que $x_n \geq \lambda$.

Considere la homotecia P de $\Pi^{n,+}$ dada por $x \mapsto \mu x$, y sea

$$X_0 := \{x \in \overline{N_s(\gamma)} : 1 \leq \|x\|_{\mathbb{R}^n} \leq \mu\}.$$

Definimos la familia $\{X_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ por $X_m := P^m(X_0)$. Es claro que $\text{diam}(X_0) < \infty$, de donde como P es una P es una isometría de $\Pi^{n,+}$, se sigue que la familia $\{X_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ cumple las tres primeras condiciones de nuestro lema. Que también cumple la última condición sale de la forma del conjunto $\overline{N_s(\gamma)}$. \square

Definición 2.2.10. Considere una sucesión de geodésicas maximales orientadas $\{\gamma_n = \gamma(x_n, y_n)\}$, donde $x_n, y_n \in \partial\mathbb{H}^n$. Sea $\gamma = \gamma(x, y)$ otra geodésica maximal orientada con $x, y \in \partial\mathbb{H}^n$. Decimos que $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **converge a** γ , y lo notamos $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \gamma$, si tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ en $\partial\mathbb{H}^n$.

Lema 2.2.11. Sean $a, b \in \overline{\mathbb{H}^n}$ distintos. Suponga que $\{a_m\}_m$ y $\{b_m\}_m$ son sucesiones de elementos de $\overline{\mathbb{H}^n}$ tales que $a_m \rightarrow a$ y $b_m \rightarrow b$. Entonces la familia de geodésicas maximales orientadas $\{\gamma(a_m, b_m)\}_m$ converge a la geodésica orientada $\gamma(a, b)$.

Demostración. En el modelo $\Pi^{n,+}$ dados dos puntos distintos $a, b \in \overline{\Pi^{n,+}}$ que no estén en la línea vertical, podemos construir la circunferencia euclidiana que intersecta a $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ ortogonalmente y que contiene a a y a b , al considerar la intersección de $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ con la línea euclidiana que intersecta ortogonalmente a la línea euclidiana que va de a a b en el punto medio euclidiano de estos dos puntos, y tomar la circunferencia euclidiana cuyo centro es este punto de intersección y cuyo radio es igual a la distancia euclidiana de este punto de intersección a a o a b . Es claro que esta construcción, a saber los extremos de la circunferencia, depende de manera continua de parejas de puntos de $\Pi^{n,+}$ que no estén en la misma línea euclidiana vertical, de donde como a y b no están en la misma línea euclidiana vertical, podemos suponer lo mismo para a_m y b_m para todo $m \in \mathbb{N}$, de donde $\gamma(a_m, b_m) \rightarrow \gamma(a, b)$. \square

Lema 2.2.12. Supongamos que $\{\gamma_m\}_m$ es una sucesión de geodésicas maximales orientadas de \mathbb{H}^n que converge a una geodésica maximal orientada γ . Supongamos que $K \subseteq \mathbb{H}^n$ es compacto. Entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \in K \cap \gamma_m} d(x, \gamma) = 0$$

Demostración. Podemos suponer que en el modelo $\mathbb{H}^{n,+}$ tenemos que $\gamma = \gamma(\bar{0}, \infty)$. Note que como K es un compacto en \mathbb{H}^n y la topología del modelo $\mathbb{H}^{n,+}$ es igual a la topología que hereda de \mathbb{R}^n , entonces es claro que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \in K \cap \gamma_m} d_{\mathbb{R}^n}(x, \gamma) = 0,$$

dada la forma de las geodésicas, por la definición de convergencia de geodésicas maximales de \mathbb{H}^n y por la suposición que hicimos sobre γ . Sea $M := \min\{x_n : x \in K\}$. Si $\epsilon > 0$ es arbitrario, existe $N > 0$ tal que $d_{\mathbb{R}^n}(x, \gamma) < \epsilon$ para todo $m \geq N$ y todo $x \in K \cap \gamma_m$. Como $\gamma = \gamma(\bar{0}, \infty)$, tenemos que para todo $x \in \mathbb{H}^n$, $(\pi_\gamma(x))_n \geq x_n$, ya que $\pi_\gamma(x)$ es la intersección del rayo geodésico que sale de x y corta a $\gamma = \gamma(\bar{0}, \infty)$ ortogonalmente, de donde si $m \geq N$, $x \in K \cap \gamma_m$ y $y := \pi_\eta(x)$ obtenemos:

$$d_{\mathbb{H}^{n,+}}(x, \eta) = d_{\mathbb{H}^{n,+}}(x, y) = 2 \sinh^{-1} \left(\frac{d_{\mathbb{R}^n}(x, y)}{2\sqrt{x_n y_n}} \right) \leq 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\epsilon}{2x_n} \right) \leq 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\epsilon}{2M} \right),$$

ya que $y_n \geq x_n$, de donde obtenemos el límite del lema. \square

Lema 2.2.13. *Supongamos que $\{\gamma_m\}$ es una sucesión de geodésicas maximales orientadas de \mathbb{H}^n que convergen a una geodésica orientada γ . Sea $s > 0$. Si $x \in \mathbb{H}^n$ es tal que $x \in N_s(\gamma_m)$ para todo $m \in \mathbb{N}$, entonces $x \in N_s(\gamma)$*

Demostración. Sea \bar{B} la bola cerrada de radio s centrada en x . Sea $\epsilon > 0$, luego existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, \gamma) < \epsilon$ para todo $x \in K \cap \gamma_m$. Sin embargo como $d(x, \pi_{\gamma_m}(x)) = d(x, \gamma_m) < s$, tenemos que $\pi_{\gamma_m}(x) \in \bar{B}$. Con lo que si $y := \pi_{\gamma_m}(x)$, obtenemos que $d(\pi_\gamma(y), y) < \epsilon$, de donde

$$d(x, \gamma) \leq d(x, \pi_\gamma(y)) \leq d(x, y) + d(y, \pi_\gamma(y)) < s + \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ fue arbitrario, obtenemos la afirmación. \square

Lema 2.2.14. *Sea P una pseudoisometría de \mathbb{H}^n en sí mismo. Existe $t > 0$, que depende solamente de las constantes asociadas de P , tal que para todo $q_1, q_2 \in \mathbb{H}^n$ tenemos*

$$P([q_1, q_2]) \subseteq N_t(\gamma(P(q_1), P(q_2))).$$

Demostración. Sea $\gamma := \gamma(P(q_1), P(q_2))$. Sea s_0 el único positivo tal que $\cosh(s_0) = c_1^2 + 1$. El $t > 0$ que hallaremos será mayor que s_0 . Veamos que las longitudes de las componentes conexas de

$$[q_1, q_2] \cap (P^{-1}(N_{s_0}(\gamma)))^c,$$

donde el complemento se toma en \mathbb{H}^n , están acotadas superiormente por un λ que depende solamente de c_1 y c_2 . Si hallamos un tal λ , tendremos dos casos para cada $x \in [q_1, q_2]$. Si $P(x) \in N_{s_0}(\gamma)$, habremos acabado ya que $t > s_0$, y así $P(x) \in N_t(\gamma)$.

En caso de que tengamos que $P(x) \notin N_{s_0}(\gamma)$, sea $[a, b]$ la componente de $[q_1, q_2] \cap (P^{-1}(N_{s_0}(\gamma)))^c$ que contiene a x . Como $P(a)$ y $P(b)$ están en la frontera de $N_{s_0}(\gamma)$, se sigue que $d(P(a), \gamma) = s_0 = d(P(b), \gamma)$. Luego tendremos

$$\begin{aligned} d(P(x), \gamma) &= d(P(x), \pi_\gamma(P(x))) \leq d(P(x), \pi_\gamma(P(a))) \\ &\leq d(P(x), P(a)) + d(P(a), \pi_\gamma(P(a))) \\ &= d(P(x), P(a)) + d(P(a), \gamma) \leq c_1 d(x, a) + s_0 \\ &\leq c_1 d(a, b) + s_0 \leq c_1 \lambda + s_0 \end{aligned}$$

luego podremos tomar $t := c_1 \lambda + s_0 + 1$.

Vamos a demostrar que un tal λ existe. Sea $[a, b]$ una componente conexa de $[q_1, q_2] \cap (P^{-1}(N_{s_0}(\gamma)))^c$. Usamos la desigualdad (2.2.7):

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_1} d(a, b) - c_2 &\leq d(P(a), P(b)) \leq d(P(a), \pi_\gamma(P(a))) + d(\pi_\gamma(P(a)), \pi_\gamma(P(b))) + d(P(b), \pi_\gamma(P(b))) \\ &\leq 2s_0 + d(\pi_\gamma(P(a)), \pi_\gamma(P(b))) \leq 2s_0 + \frac{d(P(a), P(b))}{\cosh(s_0)} \leq 2s_0 + \frac{c_1 \cdot d(a, b)}{c_1^2 + 1}, \end{aligned}$$

donde la penúltima desigualdad sale del lema 2.2.7, de donde obtenemos

$$d(a, b) \leq (2s_0 + c_2) \left[\frac{1}{c_1} - \frac{c_1}{c_1^2 + 1} \right]^{-1} =: \lambda.$$

□

Demostración de la proposición 2.2.8: Dada una geodésica maximal orientada $\beta = \gamma(a, b)$, con $a, b \in \partial\mathbb{H}^n$, se construye una geodésica maximal $A(\beta)$ que cumple las condiciones de la proposición de la siguiente manera: sea $\{q_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ una familia de puntos de β tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = a$ y $\lim_{n \rightarrow -\infty} q_n = b$ en $\overline{\mathbb{H}^n}$. Vamos a demostrar que existen $\overline{P}(a), \overline{P}(b) \in \partial\mathbb{H}^n$ tales que:

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(q_n) = \overline{P}(a)$ y $\lim_{n \rightarrow -\infty} P(q_n) = \overline{P}(b)$
2. si $\{q'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es otra sucesión de β con las mismas propiedades que $\{q_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(q'_n) = \overline{P}(a)$ y $\lim_{n \rightarrow -\infty} P(q'_n) = \overline{P}(b)$
3. $\overline{P}(a) \neq \overline{P}(b)$.
4. Existe $r > 0$ tal que si $A(\beta)$ es la geodésica maximal orientada de \mathbb{H}^n igual a $\gamma(\overline{P}(a), \overline{P}(b))$, entonces $P(\beta) \subseteq N_r(A(\beta))$.

Vamos a demostrar cada uno de estos incisos en los siguientes pasos respectivos:

Paso 1. Tenemos que como P es una pseudoisometría, en particular es una función propia, de donde como tanto $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como $\{q_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ divergen en \mathbb{H}^n , se sigue que $\{P(q_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{P(q_{-n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ divergen en \mathbb{H}^n . Por lo tanto los puntos de acumulación de ambas sucesiones en $\overline{\mathbb{H}^n}$ están contenidos en $\partial\mathbb{H}^n$. Afirmamos que ambas sucesiones tiene sólo un punto de acumulación.

Que los puntos de acumulación existen salen del hecho de que $\overline{\mathbb{H}^n}$ es homeomorfo a $\overline{D^n}$.

Suponga que $\{P(q_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene al menos dos puntos de acumulación $x, y \in \partial\mathbb{H}^n$. Luego existen dos subsucesiones $\{P(q'_n)\}_n$ y $\{P(q''_n)\}$ que convergen a x y a y respectivamente. Fijemos $q \in \beta$. Por los lemas 2.2.13 y 2.2.14 tenemos entonces que $P(\gamma(q, b)) \subseteq \overline{N_t(\gamma(P(\beta), x))}$ y que $P(\gamma(q, b)) \subseteq \overline{N_t(\gamma(P(\beta), y))}$. Sin embargo como $x \neq y$ son puntos distintos de $\partial\mathbb{H}^n$ se sigue que las geodésicas $\gamma(P(q), x)$ y $\gamma(P(q), y)$ son distintas con un punto en común, de donde las vecindades tubulares $\overline{N_s(\gamma(P(q), x))}$ y $\overline{N_s(\gamma(P(q), y))}$ se intersectan en un compacto, se puede demostrar en el modelo del disco que si dos geodésicas son distintas pero se intersectan en un punto, entonces se intersectan en un compacto, basta suponer que en este modelo la intersección de las dos geodésicas es el origen. Sin embargo esto contradice el hecho que $P(\gamma(q, b))$ está contenido en la intersección de estas vecindades, ya que este conjunto es no acotado dado que P es una pseudoisometría. De manera similar se demuestra que $\{q_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ sólo tiene un punto de acumulación. Por lo tanto obtenemos el inciso 1.).

Paso 2. Suponga que $\{q'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una familia tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = a$ y $\lim_{n \rightarrow -\infty} q_n = b$. Entonces podemos unir las dos familias $\{q_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ y $\{q'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ para obtener otra familia $\{q''_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ con las mismas propiedades, de manera que del paso anterior obtenemos 2.).

Paso 3. Suponga, para obtener una contradicción, que $\overline{P(a)} = \overline{P(b)}$. Podemos suponer que en el modelo $\Pi^{n,+}$ el punto $\overline{P(a)} = \overline{P(b)}$ en $\partial\Pi^{n,+}$ es el origen.

Sea $t > 0$ como en el lema 2.2.14. Fijemos $q \in \beta$. Podemos suponer que $q \in [q_{-n}, q_n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $a_n, b_n \in \partial\mathbb{H}^n$ tales que $\gamma(q_{-n}, q_n) = \gamma(a_n, b_n)$. También como P es una pseudoisometría, podemos suponer que $P(q_{-n}) \neq P(q_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $a_n, b_n \in \partial\mathbb{H}^n$ distintos tales que $\gamma(P(q_{-n}), P(q_n)) = \gamma(a_n, b_n)$ como geodésicas orientadas. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que existen $x, y \in \partial\mathbb{H}^n$ tales que $a_n \rightarrow x$ y $b_n \rightarrow y$, recuerde que $\partial\mathbb{H}^n$ es compacto. Hay dos casos:

- $x = y$. En el modelo $\Pi^{n,+}$ podemos suponer que $x = y$ es el origen de \mathbb{R}^n . Como $a_m, b_m \rightarrow \bar{0}$, es fácil ver que la cúspide de la semicircunferencia euclidiana de \mathbb{R}^n que es igual a $\gamma(a_m, b_m)$ converge al origen cuando $m \rightarrow \infty$. Sea c_m esta cúspide. Entonces el punto de $\overline{N_t(\gamma(a_m, b_m))}$ con más altura en \mathbb{R}^n es el punto y_m que está en la línea euclidiana perpendicular a $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ que pasa por c_m , que está encima de c_m y es tal que $d_{\Pi^{n,+}}(c_m, y_m) = t$. Sin embargo como c_m y y_m están en la misma línea vertical, tenemos de la proposición 1.1.18 que $d_{\Pi^{n,+}}(c_m, y_m) = \ln((y_m)_n) - \ln((c_m)_n)$, ya que $(y_m)_n > (c_m)_n$, de donde $\ln((y_m)_n) = \ln((c_m)_n) + t$, con lo que como $c_m \rightarrow \bar{0}$, se sigue que $(y_m)_n \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$. Entonces como las primeras $n-1$ coordenadas de c_m y y_m en \mathbb{R}^n son iguales, obtenemos que $y_m \rightarrow \bar{0}$ cuando $m \rightarrow \infty$. Sin embargo, esto contradice el hecho de que $P(q) \in N_t(\gamma(P(q_{-m}), P(q_m))) = N_t(\gamma(a_m, b_m))$ para todo $m \in \mathbb{N}$.
- $x \neq y$. Por los lemas 2.2.11 y 2.2.14 tendremos entonces que $P(q_m) \in \overline{N_t(\gamma(x, y))}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Como las sucesiones $\{P(q_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ y $\{P(q_{-m})\}_{m \in \mathbb{N}}$ convergen a $\overline{P(a)} = \overline{P(b)}$, se debe tener que $\overline{P(a)} = \overline{P(b)}$ es igual a x o a y , digamos que a x .

Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ una familia cubriente de $\overline{N_t(\gamma(x, y))}$ que cumple las propiedades del lema con respecto a $c_1 + 1$, recordemos que c_1 y c_2 son las constantes de la pseudoisometría P . Por el paso 2 podemos tomar a la familia $\{q_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ de manera que cumpla que $d(q_m, q_l) = |m - l|$ para todo $m, l \in \mathbb{Z}$.

Sea $N \in \mathbb{Z}$ tal que $P(q_0) \in X_N$. Afirmamos que $X_l \cap \{P(q_m)\}_{m \in \mathbb{N}} \neq \emptyset$ para todo $l \geq N$. Suponga que no. Sea entonces M el mínimo $> N$ tal que $X_M \cap \{P(q_m)\}_{m \in \mathbb{N}} = \emptyset$. Como x es punto de acumulación de $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m$, $\{P(q_m)\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq \overline{N_t(\gamma(x, y))}$ y $\lim_{m \rightarrow \infty} P(q_m) = x$, existe entonces un $l \in \mathbb{N}$ minimal tal que $P(q_l) \in \bigcup_{m > M} X_m$, de donde por la definición de M se debe tener que $P(q_{l-1}) \in \bigcup_{m < M} X_m$, de donde por la construcción de la familia $\{X_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ debemos tener que $d(P(q_{l-1}), P(q_l)) \geq c_1 + 1$, pero esto contradice que $d(P(q_{l-1}), P(q_l)) \leq c_1 d(q_{l-1}, q_l) = c_1$. Similarmente se demuestra que para todo $m > 0$ tenemos que $X_m \cap \{P(q_{-m})\}_{m \in \mathbb{N}} \neq \emptyset$.

Sea $m > 0$ tal que

$$\frac{2m}{c_1} - c_2 > \text{Diam}(X_0).$$

Luego si tomamos $k_1, k_2 \geq m$ tales que $P(q_{k_1}), P(q_{-k_2}) \in X_l$ para algún $l \geq N$ obtenemos

$$\begin{aligned} d(P(q_{k_1}), P(q_{-k_2})) &\geq \frac{k_1 + k_2}{c_1} - c_2 \geq \frac{2m}{c_1} - c_2 \\ &> \text{Diam}(X_0) = \text{Diam}(X_l). \end{aligned}$$

Esta contradicción final demuestra que $\overline{P}(a)$ y $\overline{P}(b)$ son distintos.

Paso 4. Sea $q \in \beta$. Como $\overline{P}(a) \neq \overline{P}(b)$, $P(q_m) \rightarrow \overline{P}(a)$ y $P(q_{-m}) \rightarrow \overline{P}(b)$, tenemos que $q \in [q_{-m}, q_m]$ para todo $m > 0$ lo suficientemente grande, y así $P(q) \in N_t([P(q_{-m}), P(q_m)])$, de donde obtenemos del lema 2.2.13 que $P(q) \in \overline{N_t(\gamma(\overline{P}(a), \overline{P}(b)))}$. Por lo tanto si $A(\beta)$ es la geodésica maximal orientada $\gamma(\overline{P}(a), \overline{P}(b))$, se sigue que si $r := t + 1$, entonces

$$P(\beta) \subseteq \overline{N_t(A(\beta))} \subseteq N_r(A(\beta)).$$

□

La proposición 2.2.8 vale gracias a la curvatura particular de \mathbb{H}^n . Esto se refleja en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.2.15. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) := (x + |y|/2, y)$. Veamos que f es una pseudoisometría.

Tenemos

$$\begin{aligned} d(f(x, y), f(x', y')) &= d\left(\left(x + \frac{|y|}{2}, y\right), \left(x' + \frac{|y'|}{2}, y'\right)\right) \\ &\leq \left|x - x' + \frac{|y|}{2} - \frac{|y'|}{2}\right| + |y - y'| \\ &\leq |x - x'| + 1/2||y| - |y'|| + |y - y'| \\ &\leq |x - x'| + 1/2|y - y'| + |y - y'| \\ &\leq 3/2(|x - x'| + |y - y'|) \\ &\leq \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot d((x, y), (x', y')). \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} d(f(x, y), f(x', y')) &= d\left(\left(x + \frac{|y|}{2}, y\right), \left(x' + \frac{|y'|}{2}, y'\right)\right) \\ &\geq \max\left\{\left|x - x' + \frac{|y|}{2} - \frac{|y'|}{2}\right|, |y - y'|\right\} \\ &\geq \max\left\{|x - x'| + \frac{1}{2}|y - y'|, |y - y'|\right\} \\ &\geq \max\left\{\frac{1}{2}|x - x'|, \frac{1}{2}|y - y'|\right\} \\ &\geq \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} d((x, y), (x', y')). \end{aligned}$$

Por lo tanto f es una pseudoisometría.

Sin embargo, es claro que la imagen de la línea $x = 0$ se envía a un subconjunto de \mathbb{R}^2 que no está contenido en ninguna vecindad tubular de ninguna línea de \mathbb{R}^2 .

Ahora podemos demostrar el resultado principal de este capítulo:

Demostración de la proposición 2.2.1: Ya definimos una función $\bar{P} : \partial\mathbb{H}^n \rightarrow \partial\mathbb{H}^n$, con la cual definimos una función $\bar{P} : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ como la unión de P y de $\bar{P} \upharpoonright \partial\mathbb{H}^n$. Afirmamos que \bar{P} es continua. Como P es continua al ser una pseudoisometría, hay que verificar que \bar{P} es continua en $\partial\mathbb{H}^n$.

Suponga, para obtener una contradicción, que existe $x \in \partial\mathbb{H}^n$ y una sucesión $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ de elementos de \mathbb{H}^n que convergen a x pero que $\bar{P}(x_m) \not\rightarrow \bar{P}(x)$. Como \mathbb{H}^n es homeomorfo a \bar{D}^n podemos suponer sin pérdida de generalidad que la sucesión $\bar{P}(x_m)$ converge a un $y \in \partial\mathbb{H}^n$ distinto de $\bar{P}(x)$.

Fijemos $q \in \mathbb{H}^n$ arbitrario. Por los lemas 2.2.13 y 2.2.14 se sigue que si η es el rayo geodésico que sale de q y termina en x , entonces $P(\eta) \subseteq \overline{N_t(\gamma(P(q), y))} \subseteq N_r(\gamma(P(q), y))$, ya que $\bar{P}(x_m) \rightarrow y$ y $r > t$, de donde si $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de η que converge a x , por los incisos 1 y 2 de la demostración de la proposición 2.2.8 tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} P(q_n) = \bar{P}(x)$, de donde como $\{P(q_n)\} \subseteq N_r(\gamma(P(q), y))$, se debe tener que $\bar{P}(x)$ es punto límite de $N_r(\gamma(P(q), y))$, con lo que $\bar{P}(x)$ debe ser un extremo de $\gamma(P(q), y)$, y como $\bar{P}(x)$ e y son distintos, tendremos que $\gamma(P(q), y) = \gamma(\bar{P}(x), y)$, de donde como $q \in \mathbb{H}^n$ fue arbitrario, se sigue que

$$P(\mathbb{H}^n) \subseteq N_r(\gamma(\bar{P}(x), y)). \quad (2.5)$$

Como $\bar{P} \upharpoonright \partial\mathbb{H}^n$ es inyectiva, por el paso 3 de la demostración de la proposición 2.2.8, existen $z_1, z_2 \in \partial\mathbb{H}^n$ tales que $\#\{\bar{P}(x), y, \bar{P}(z_1), \bar{P}(z_2)\} = 4$.

Luego las vecindades tubulares $N_r(\gamma(\bar{P}(x), y))$ y $N_r(\gamma(\bar{P}(z_1), \bar{P}(z_2)))$ se intersectan en a lo más en subconjunto acotado. Sin embargo $P(\gamma(z_1, z_2))$ es un subconjunto no acotado de $N_r(\gamma(\bar{P}(z_1), \bar{P}(z_2)))$, lo cual contradice (2.5).

Esta contradicción demuestra entonces que $\bar{P} : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ es continua. \square

Capítulo 3

Simplejos ideales

En este capítulo veremos una característica particular de la geometría hiperbólica, la cual es que la colección de volúmenes de los simplejos hiperbólicos ideales de dimensión n de \mathbb{H}^n tiene un máximo. Vamos a ilustrar el caso $n = 3$, el caso $n = 2$ es trivial, ya que todos los simplejos ideales no degenerados de dimensión 2 de \mathbb{H}^2 tienen área π , ver [BP92, lema A.6.5]. El caso general se demuestra en [Rat06, sección 11.4].

3.1. Simplejos ideales

Definición 3.1.1. Un subconjunto X de $\overline{\mathbb{H}^n}$ es **convexo** si para cualesquiera par de puntos $x, y \in X$, el arco geodésico de \mathbb{H}^n que sale de x y termina en y está contenido en X .

Note que la frontera de los subconjuntos convexos de $\overline{\mathbb{H}^2}$ consiste de geodésicas, y se puede demostrar por inducción sobre $n \geq 2$ que la frontera de un subconjunto convexo de $\overline{\mathbb{H}^n}$ consiste de la unión de simplejos hiperbólicos de \overline{H} , la clausura que se toma en $\overline{\mathbb{H}^n}$, donde H es un subespacio hiperbólico de \mathbb{H}^n de dimensión $n - 1$.

Definición 3.1.2. Un **simplejo hiperbólico de $\overline{\mathbb{H}^n}$** es un subconjunto convexo de $\overline{\mathbb{H}^n}$ cuya frontera es la unión de un número finito de hipercaras, cuyos únicos puntos que pertenecen a $\partial\mathbb{H}^n$ son sus vértices, y que como poliedro es combinatoriamente equivalente a Δ^n .

Note que si $u_0, \dots, u_n \in \mathbb{H}^n$, entonces la imagen de la función de combinaciones convexas de estos puntos, es decir, de la función $\sigma_{(u_0, \dots, u_n)}$, recuerde la definición 1.1.38 y la nota 1.1.40.

Definición 3.1.3. 1. Un simplejo hiperbólico de $\overline{\mathbb{H}^n}$ es **ideal** si todos sus vértices pertenecen a $\partial\mathbb{H}^n$.

2. Un simplejo hiperbólico de $\overline{\mathbb{H}^n}$ es **regular** si cualquier permutación de sus vértices es la restricción de una extensión $\overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$ de una isometría de \mathbb{H}^n .

Observación 3.1.4. Note que todo simplejo hiperbólico contenido en \mathbb{H}^n está contenido en un simplejo ideal, esto se debe a que en el modelo de Klein los simplejos hiperbólicos de \mathbb{H}^n son simplejos euclidianos, y todo simplejo euclidiano contenido en el disco unidad está contenido en un simplejo euclidiano cuyos vértices están en la frontera de este disco.

Lema 3.1.5. *Sea σ un simplejo ideal de $\Pi^{n,+}$ cuyos vértices son p_1, \dots, p_n e ∞ . Entonces σ es un simplejo regular si y sólo si p_1, \dots, p_n forman un $(n-1)$ -simplejo euclidiano regular.*

Demostración. (\Rightarrow) Veamos que los puntos p_1, \dots, p_n distan lo mismo en \mathbb{R}^n . Basta demostrar que $d_{\mathbb{R}^n}(p_1, p_j)$ es constante para $j = 2, \dots, n$. Podemos usar una translación por medio de un elemento de $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, si es necesario, para suponer que p_1 es el origen. Si $i, j = 2, \dots, n$ son distintos, entonces existe $g \in \mathcal{I}(\Pi^{n,+})$ que fija a ∞ y a $p_k, \forall k \neq i, j$. En particular, como g fija a ∞ , g es igual a la composición de una isometría euclidiana ϕ con una homotecia con valor $\lambda > 0$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\lambda > 1$, de otra manera tomamos la inversa de g . Como g fija al origen, ϕ también debe fijarlo, y por lo tanto ϕ debe ser un elemento de $O(n-1)$. Por lo tanto $d_{\mathbb{R}^n}(p_1, p_i) = d_{\mathbb{R}^n}(p_1, p_j)$.

(\Leftarrow) Si $i, j = 1, \dots, n$ son distintos, podemos tomar una isometría de $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ en sí mismo que envíe a p_i en p_j y que deje a los demás p_k fijos. Luego podemos extender esta isometría a un único homeomorfismo $\overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$, que a su vez se restringe a una isometría de \mathbb{H}^n , y que fija a ∞ .

Finalmente, si tomamos $i = 1, \dots, n$, consideremos la inversión euclidiana i de \mathbb{R}^n centrada en p_i y cuyo radio es la distancia de p_i a cada uno de los demás p_1, \dots, p_n . Entonces i intercambia a ∞ con p_i y fija a los demás puntos p_1, \dots, p_n distintos de p_i .

De los dos párrafos anteriores concluimos que p_1, \dots, p_n, ∞ forman los vértices de un simplejo ideal regular. \square

Ahora vamos a “parametrizar” a la colección de todos los simplejos ideales de \mathbb{H}^3 , salvo translación por una isometría. Sea \mathcal{T} la colección de todas las clases por similitud de triángulos de \mathbb{R}^2 . Entonces \mathcal{T} se puede considerar de manera natural como el cociente del conjunto

$$A := \{(\alpha, \beta, \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = \pi\}$$

bajo la acción canónica del grupo de permutaciones S_3 sobre este conjunto.

Vamos a ver que hay una biyección entre \mathcal{T} y la colección de clases de simplejos ideales de \mathbb{H}^3 salvo isometría.

Sea σ un simplejo ideal de \mathbb{H}^3 . Sea p un vértice de σ . En el modelo \mathbb{D}^3 consideremos una horoesfera S centrada en p que sólo intersekte a las caras de σ que son adyacentes a p . Entonces la intersección de S con σ con la métrica que hereda de \mathbb{H}^3 es isométrica a un triángulo euclidiano, esto se puede ver al usar el modelo $\Pi^{3,+}$ al mover con una isometría p a ∞ . Luego los ángulos internos de la intersección $S \cap \sigma$ suman π , y estos ángulos internos no dependen de la horobola que cumpla la condición anterior que se elija, y son invariantes bajo traslaciones por isometrías, a estos ángulos los llamaremos **ángulos diédricos** de σ en p . Por lo tanto se determina un único elemento T_p^σ de \mathcal{T} .

Se puede demostrar que para cualquier simplejo ideal σ de \mathbb{H}^3 tenemos que $T_p^\sigma = T_q^\sigma$ en \mathcal{T} para todos los vértices p y q de σ , ver [BP92, Sección C.2], de donde obtenemos una biyección entre la colección de clases de simplejos ideales bajo translación por isometrías, y \mathcal{T} , dada por

$$[\sigma] \mapsto [(\alpha(\sigma), \beta(\sigma), \gamma(\sigma))],$$

donde $(\alpha(\sigma), \beta(\sigma), \gamma(\sigma))$ son los ángulos diedrales de cualquier vértices de σ , los cuales de ahora en adelante llamaremos **ángulos diedrales** de σ .

3.2. Volumen de simplejos hiperbólicos

Recordemos que toda variedad riemanniana orientada M tiene asociada una medida de volumen. Es fácil ver de la fórmula de la forma volumen en términos locales de una métrica riemanniana, que la forma volumen del modelo $\Pi^{n,+}$ viene dada por

$$dv_{\Pi^{n,+}} = \frac{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n}{x_n^n}.$$

Además recordemos que el volumen de un boreliano $A \subseteq \Pi^{n,+}$ viene dado por

$$\text{Vol}_{\Pi^{n,+}}(A) = \int_A \frac{dx_1 \cdots dx_n}{x_n^n}.$$

Entonces por el teorema de representación de Riesz-Markov-Kakutani obtenemos que Vol es una medida de Radon sobre los borelianos de M .

Note que para todo abierto $A \subseteq \Pi^{n,+}$ tenemos que

$$\text{Vol}_{\Pi^{n,+}}(A) = \int_A \frac{dx_1 \cdots dx_n}{x_n^n} \quad (3.1)$$

donde la integral se toma con los coeficientes estándar de \mathbb{R}^n .

El volumen de cualquier simplejo ideal de \mathbb{H}^3 se puede calcular en términos de sus ángulos diedrales usando la función de Lobachevsky:

Definimos para cada $\theta \in \mathbb{R}$

$$\Lambda(\theta) := - \int_0^\theta \log |2 \sin(t)| dt,$$

la cual llamamos **función de Lobachevsky**.

Note que esta función está bien definida, ya que su convergencia se puede comparar con la convergencia de la integral $-\int_0^\theta \log(t) dt$.

Se puede demostrar que la función de Lobachevsky tiene las siguientes propiedades:

Proposición 3.2.1. 1. Λ es continua.

2. Λ es diferenciable en todo \mathbb{R} menos en los múltiplos enteros de π .

3. Λ tiene periodo π .

La demostración de esto está en [BP92, Proposición C.2.7].

Teorema 3.2.2 (Fórmula de Lobachevsky). *Suponga que σ es un tetraedro ideal de \mathbb{H}^3 cuyos ángulos diédricos son α, β y γ . Entonces*

$$\text{Vol}(\sigma) = \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\gamma).$$

La demostración de este hecho también está en [BP92, Proposición C.2.8], esto lo demostró Milnor en [Thu+80, Capítulo 7], y lo publicó bajo su nombre en [Mil82]. Aunque la demostración no es difícil, sólo son cuentas de cálculo vectorial, es algo tediosa y poco ilustrativa.

Teorema 3.2.3. *De entre todos los simplejos hiperbólicos de \mathbb{H}^3 los simplejos ideales regulares son los de volumen maximal.*

Demostración. Note que cada simplejo hiperbólico está contenido en un simplejo hiperbólico ideal, sea σ un simplejo hiperbólico de \mathbb{H}^n con vértices v_0, \dots, v_n , fijemos p en el interior de σ , entonces si consideramos el extremo $v'_i \in \partial\mathbb{H}^n$ del rayo geodésico que sale de p y pasa por v_i , entonces el simplejo hiperbólico ideal cuyos vértices son v'_0, \dots, v'_n contiene a σ , esto es inmediato en el modelo de Klein si suponemos que p es el origen.

Queremos hallar el máximo de la función $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\gamma)$ para todos los $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ tales que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Esto es equivalente a hallar el máximo de la función $(\alpha, \beta) \mapsto \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\pi - \alpha - \beta)$ definida en el conjunto $\{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta \leq \pi\}$. Note que esta función es al menos C^1 y positiva en el interior de su dominio, el cual es compacto, y esta función es cero en la frontera de su dominio, de donde esta función tiene máximo en el interior de su dominio, y además para hallarlo hay que encontrar los puntos del interior de su dominio donde su gradiente se anula. Tenemos que este gradiente se anula en el punto (α, β) , del interior del dominio, si y sólo si se cumple que

$$\begin{cases} \Lambda'(\alpha) = \Lambda'(\pi - \alpha - \beta) \\ \Lambda'(\beta) = \Lambda'(\pi - \alpha - \beta), \end{cases}$$

y esto sucede, por la construcción de Λ , si y sólo si

$$\begin{cases} \text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\pi - \alpha - \beta) \\ \text{sen}(\beta) = \text{sen}(\pi - \alpha - \beta), \end{cases}$$

y como $0 < \alpha, \beta < \pi$, esto sucede si y sólo si $\alpha = \pi/3 = \beta$, de donde obtenemos nuestra afirmación. \square

También se puede demostrar, para cada $n \geq 2$, que un simplejo regular ideal de \mathbb{H}^n es un simplejo hiperbólico de $\overline{\mathbb{H}^n}$ de volumen maximal, esto se demuestra en [Rat06, Sección 11.4], y se demostró por primera vez en [HM81].

Notación 3.2.4. Para cada $n \geq 2$, denotaremos por v_n el volumen de cualquier simplejo ideal regular de \mathbb{H}^n .

Para finalizar, enunciamos un resultado que usaremos más adelante:

Teorema 3.2.5. *La función $(\overline{\mathbb{H}^n})^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ que asigna a cada tupla (v_0, \dots, v_n) el volumen del simplejo hiperbólico cuyos vértices son los puntos de esta tupla es una función continua.*

Una demostración de esta afirmación se encuentra en [Rat06, Teorema 11.4.2].

Capítulo 4

Norma de Gromov

En este capítulo daremos el siguiente paso de la demostración del teorema de rigidez de Mostow usando la noción de norma de Gromov:

Proposición 4.0.1. *Sean $M_1 \cong \mathbb{H}^n/\Gamma_1$ y $M_2 \cong \mathbb{H}^n/\Gamma_2$ variedades hiperbólicas compactas. Suponga que $P : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ es una pseudoisometría que induce una equivalencia homotópica $M_1 \rightarrow M_2$. Entonces la extensión $\bar{P} : \overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$ envía vértices de simplejos ideales regulares en vértices de simplejos ideales regulares.*

En capítulos posteriores veremos que $\bar{P} \upharpoonright \partial\mathbb{H}^n \rightarrow \partial\mathbb{H}^n$ es la signatura de una isometría de \mathbb{H}^n , y con esta isometría construiremos la isometría entre M_1 y M_2 .

La mayoría del material que aparece en este capítulo se toma de [BP92, Capítulo C], la cual a su vez se basa en la demostración dada en [Thu+80, Capítulo 6]. Sin embargo, hay muchas afirmaciones dadas en este capítulo de este texto, sobre todo hechos acerca de la geometría de \mathbb{H}^n , y en este capítulo hemos hecho un esfuerzo por demostrar todas las afirmaciones que se han encontrado en el camino.

Hemos decidido basarnos en esta demostración en vez de la de [Thu+80], ya que esta última, la cual es mucho más corta, no es nada elemental.

La demostración de la existencia de la pseudoisometría en la proposición anterior se basa en [Tuk85, Lema 3.4].

4.1. Norma de Gromov

4.1.1. Clase fundamental de una variedad suave cerrada

Recordemos que si M^n es una variedad hiperbólica cerrada orientada, entonces M tiene una triangulación simplicial C^∞ , para nosotros, en las triangulaciones simpliciales los simplejos están encajados. Esto es un caso particular de un teorema mucho más general:

Teorema 4.1.1 (Cairns, Whitehead). *Cualquier variedad suave tiene una triangulación simplicial C^∞ , y cualquier triangulación C^∞ de la frontera de una variedad suave se puede extender a una triangulación simplicial C^∞ de toda la variedad.*

Sea M^n una variedad C^∞ compacta, orientada, con frontera no necesariamente vacía. Sea K una

triangulación simplicial C^∞ de M . Considere la cadena de M dada por

$$c_K := \sum_{\substack{\sigma \in K \\ \dim(\sigma)=n}} \text{sgn}(\sigma) \cdot \sigma,$$

donde

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} + & \text{si } \sigma \text{ como función } \Delta_n \rightarrow M \text{ preserva orientación.} \\ - & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Esto está bien definido porque cada simplejo de K está encajado de manera suave en M .

Sea τ un simplejo de K de dimensión $n - 1$ que no está contenido en ∂M . Entonces τ es la cara de dos elementos de K σ_1 y σ_2 de dimensión n . Se puede demostrar que τ aparece con signos opuestos en $\partial\sigma$ por la construcción de c_K teniendo en cuenta los signos de sus simplejos, de lo cual se deduce que c_K es un ciclo de la homología simplicial de $(K, \partial K)$, donde ∂K es la subtriangulación de K de ∂M . También se puede demostrar que si c es una cadena de $C_n(K, \partial K)$, entonces c es un ciclo si y sólo si es un múltiplo entero de c_K , ver [Mor01, Capítulo 3], de donde $H_n(K, \partial K) \cong \mathbb{Z}$ y la clase de c_K en $H_n(K, \partial K)$ es un generador. Como la inclusión del complejo de cadenas de la triangulación simplicial en el complejo de cadenas singulares de $(M, \partial M)$ induce un isomorfismo en homología, se sigue que la clase de c_K en $H_n(M, \partial M)$ es un generador de este grupo.

Definición 4.1.2. Definimos la **clase fundamental de M** , la cual denotamos por $[M]$, como la clase en $H_n(M, \partial M)$ de c_K .

Note que en principio $[M]$ parece depender de la triangulación K de M , sin embargo, si L es otra triangulación simplicial de M , y construimos la clase c_L como se indicó anteriormente teniendo en cuenta la orientación de M . Note que tanto $[c_K]$ y $[c_L]$ son generadores de $H_n(M, \partial M) \cong \mathbb{Z}$, de donde $[c_K] = \pm[c_L]$. Sin embargo, es fácil ver con la definición de integración sobre cadenas que

$$\int_{c_K} dv_M = \text{Vol}(M) = \int_{c_L} dv_M,$$

con lo que $[c_K] = [c_L]$, y por lo tanto $[M]$ está bien definida y sólo depende de su orientación. Note que $[-M] = -[M]$.

4.1.2. Definición norma de Gromov

Sea X un espacio topológico. Llamaremos **norma de Gromov** a la norma l^1 del espacio vectorial $C_k(X; \mathbb{R})$ con respecto a la base de todas las funciones continuas $\Delta^n \rightarrow X$, y la denotaremos por $\|c\|$ para cada $c \in C_k(X; \mathbb{R})$.

Ahora dado $k \geq 0$ y X un espacio topológico, si $z \in H_k(X; \mathbb{R})$, definimos la **norma de Gromov de z** como

$$\|z\| := \inf\{\|c\| : c \in Z_k(X; \mathbb{R}) \text{ y } [c] = z\}.$$

Note que en este caso $\|\cdot\|$ es sólo una seminorma.

Ahora, sea M^n una variedad suave. Como \mathbb{R} es un grupo abeliano divisible, se sigue que $\text{Tor}(G, \mathbb{R}) = 0$ para todo grupo abeliano G ; ver [Bre93, Sección V.6], de donde por el teorema de coeficientes universales, ver [Bre93, Sección V.7], obtenemos que la función

$$H_n(M, \partial M; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R} \rightarrow H_n(M, \partial M; \mathbb{R})$$

$$\sum_i [\alpha_i] \otimes r_i \mapsto \sum_i [r_i \cdot \alpha_i]$$

es un isomorfismo, de donde podemos considerar a $[M] \in H_n(M; \partial M)$ como el elemento de $H_n(M, \partial M; \mathbb{R})$ que es imagen de $[M] \otimes 1$ bajo la función de arriba.

La **norma de Gromov** de una variedad suave orientada M se define como la norma de Gromov de la clase fundamental de M , y la denotamos por $\|M\|$, es decir, $\|M\| := \|[M]\|$.

Note que si M^n es una variedad compacta orientada y K es una triangulación, entonces para el ciclo c_K , cuya clase pertenece a $H_n(M, \partial; \mathbb{R})$, tenemos que $\|c_K\|$ es igual al número de simplejos de K de dimensión n , de donde podemos ver a la norma de Gromov de M como “el número óptimo de simplejos” de los ciclos de M que representan a la clase fundamental de M .

Podemos calcular la norma de Gromov de algunas variedades suaves orientadas usando los siguientes hechos:

Observación 4.1.3. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua entre dos espacios topológicos y $z \in H_k(X; \mathbb{R})$, entonces

$$\|f_*(z)\| \leq \|z\|.$$

Esto se debe a que si $c = \sum_i a_i \sigma_i$ es una cadena de X tal que $[c] = z$, entonces $\sum_i a_i (\sigma_i \circ f)$ es una cadena que representa a $f_*(z)$, de donde obtenemos la desigualdad.

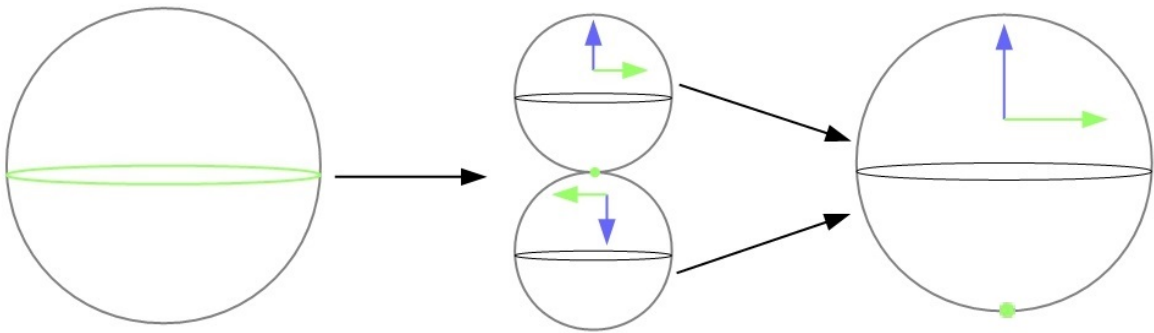
Proposición 4.1.4. Si M es una variedad topológica, orientada y cerrada, y existe una función $f : M \rightarrow M$ tal que $|\text{grado}(f)| \geq 2$, entonces $\|M\| = 0$.

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} \|M\| &= \|[M]\| \geq \|f_*([M])\| \\ &= \|\text{grad}(f) \cdot [M]\| = |\text{grado}(f)| \cdot \|[M]\| \\ &\geq 2 \cdot \|[M]\|, \end{aligned}$$

note que la igualdad de la segunda línea vale dado que \mathbb{R} es un grupo divisible. □

Ejemplo 4.1.5. La función $S^1 \rightarrow S^1$ dada por $z \mapsto z^2$ es una función de grado 2, y así $\|S^1\| = 0$. Para todo $n \geq 2$ existe una función de S^n en sí mismo de grado 2:



y así $\|S^n\| = 0$ para todo $n \geq 2$.

Ejemplo 4.1.6. Para cada $n \geq 2$ tenemos que el n -toro \mathbb{T}^n es un espacio cubriente doble de sí mismo, dado que S^1 es un espacio cubriente doble de sí mismo. Por lo tanto $\|\mathbb{T}^n\| = 0$ para todo $n \geq 2$.

4.2. Norma de Gromov de una variedad hiperbólica

Sin embargo, para las variedades hiperbólicas cerradas tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.2.1. *Si M es una variedad hiperbólica, orientada y cerrada, entonces*

$$\|M\| = \frac{\text{Vol}(M)}{v_n}. \quad (4.1)$$

Recordemos que v_n es el volumen de cualquier simplejo ideal regular de $\overline{\mathbb{H}^n}$, y que este volumen es maximal entre la colección de todos los volúmenes de todos los simplejos hiperbólicos de $\overline{\mathbb{H}^n}$.

Este teorema lo demostraremos a lo largo de una buena porción del capítulo.

Este hecho implica que el volumen es un invariante topológico entre variedades hiperbólicas cerradas de la misma dimensión. Usando esta igualdad, vamos a demostrar el hecho principal de este capítulo que es la proposición 4.0.1.

4.2.1. $\|M\| \geq \text{Vol}(M)/v_n$

Para demostrar que $\|M\| \geq \text{Vol}(M)/v_n$, debemos definir el enderezamiento de un simplejo de \mathbb{H}^n .

Recordemos la definición de combinaciones convexas que vimos en el primer capítulo (ver definición 1.1.38), recordemos que si $u_0, \dots, u_m \in \mathbb{H}^n$, la función de combinaciones convexas hiperbólicas de estos puntos la denotamos por $\sigma_{(u_0, \dots, u_m)} : \Delta^m \rightarrow \mathbb{H}^n$.

Sea $M \cong \mathbb{H}^n/\Gamma$ una variedad hiperbólica completa, con proyección correspondiente $\pi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma$.

Definición 4.2.2. Un simplejo $\varphi : \Delta^m \rightarrow M$ es **recto** si $\varphi = \pi \circ \sigma_{(u_0, \dots, u_m)}$ para algunos $u_0, \dots, u_m \in \mathbb{H}^n$. Un elemento de $C_m(M; \mathbb{R})$ es **recto** si se puede escribir como combinación lineal de simplejos rectos.

Veremos que todo ciclo de M es homólogo a un ciclo recto usando la siguiente construcción:

Definición 4.2.3. Sea $\sigma : \Delta^m \rightarrow M$ continua. Sea $\hat{\sigma} : \Delta^m \rightarrow \mathbb{H}^n$ un levantamiento de σ por medio de la función cubriente π , esto se puede hacer porque Δ^m es simplemente conexo. Sea $u_i := \hat{\sigma}(e_i)$ para cada $i = 0, \dots, m$. Definimos entonces el **enderezamiento** de σ como $\tilde{\sigma} := \pi \circ \sigma_{(u_0, \dots, u_m)}$. Si $C_m(M; \mathbb{R}) \ni c = \sum_i a_i \sigma_i$ es una cadena de M , definimos el **enderezamiento** de c como la cadena $\tilde{c} := \sum_i a_i \tilde{\sigma}_i$.

Proposición 4.2.4. *La definición del enderezamiento de un simplejo $\sigma : \Delta^m \rightarrow M$ no depende del levantamiento $\Delta^m \rightarrow \mathbb{H}^n$ de σ que se use.*

Demostración. Sean $\hat{\sigma}, \bar{\sigma} : \Delta^m \rightarrow \mathbb{H}^n$ dos levantamientos de σ . Luego existe $\gamma \in \pi_1(M)$ tal que $\hat{\sigma} = \gamma \circ \bar{\sigma}$. Sean $\hat{u}_i := \hat{\sigma}(e_i)$ y $\bar{u}_i := \bar{\sigma}(e_i)$ para cada $i = 0, \dots, m$. Luego $\hat{u}_i = \gamma(\bar{u}_i)$. Para cada $(t_0, \dots, t_m) \in \Delta^m$ tenemos por la proposición 1.1.39 que

$$\gamma \circ \sigma_{(\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_m)} = \sigma_{(\gamma(\hat{u}_0), \dots, \gamma(\hat{u}_m))} = \sigma_{(\bar{u}_0, \dots, \bar{u}_m)},$$

de donde

$$\pi \circ \sigma_{(\bar{u}_0, \dots, \bar{u}_m)} = \pi \circ \gamma \circ \sigma_{(\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_m)} = \pi \circ \sigma_{(\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_m)}.$$

□

Recordemos las funciones de cara $F^i : \Delta^{m-1} \rightarrow \Delta^m$ dadas por

$$(t_0, \dots, t_{m-1}) \mapsto (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{m-1})$$

para cada $i = 0, \dots, m$. Entonces la imagen de F^i es la i -ésima cara de Δ^m , la cual notaremos por C^i . Cada F^i es un encaje topológico.

Observación 4.2.5. Si $\varphi = \pi \circ \sigma_{(u_0, \dots, u_n)}$ es un simplejo recto, tendremos que como π es una isometría local, $\left| \int_{\varphi} dv_M \right| = \text{Vol}(\sigma_{(u_0, \dots, u_n)}) \leq v_n$ por el teorema 3.2.3.

Proposición 4.2.6. *Suponga que $c \in C_m(M; \mathbb{R})$ es un ciclo. Entonces \tilde{c} es un ciclo de M homólogo a c .*

Demostración. Como el enderezamiento de cualquier simplejo $\sigma : \Delta^m \rightarrow M$ sólo depende de los puntos $\sigma(e_i) \in M$ para $i = 0, \dots, m$, se sigue entonces que para cualquier cadena $c \in C_*(M; \mathbb{R})$ tenemos que $\tilde{\partial}c = \partial\tilde{c}$. Por lo tanto si c es un ciclo, \tilde{c} también lo es.

Sea $\sigma : \Delta^m \rightarrow M$ continua. Sea $\hat{\sigma} : \Delta^m \rightarrow \mathbb{H}^n$ un levantamiento de σ . Sea $u_i = \hat{\sigma}(e_i)$ para cada $i = 0, \dots, m$. Entonces tenemos la siguiente homotopía entre $\sigma_{(u_0, \dots, u_m)}$ y σ , usando combinaciones convexas hiperbólicas:

$$(\bar{t}, s) \mapsto \pi((1-s)\tilde{\sigma}(\bar{t}) + s\sigma_{(u_0, \dots, u_m)}(\bar{t})), \quad (4.2)$$

aquí estamos usando la notación de combinaciones convexas (1.1.40), para todo $(\bar{t}, s) \in \Delta^m \times [0, 1]$.

Suponga que $c = \sum_{i=1}^k a_i \varphi_i$, con $\varphi_i \neq \varphi_j$ si $i \neq j$. Considere el CW-complejo \tilde{X} que viene dado como el espacio cociente de la unión disyunta

$$X := \bigcup_{i=1}^k \Delta^m \times \{i\},$$

al pegar la cara k del simplejo i con la cara l del simplejo j si y sólo si $\varphi_i \circ F^k = \varphi_j \circ F^l$, por medio de la composición

$$C_k \times \{i\} \xrightarrow{F_k^{-1}} \Delta^{m-1} \xrightarrow{F_l} C_l \times \{j\}.$$

Considere para cada $i = 1, \dots, k$ la función ι_i que es la composición $\Delta^m \xrightarrow{\text{Id}} \Delta^m \times \{i\} \xrightarrow{\pi} \tilde{X}$, donde π es la función cociente $X \rightarrow \tilde{X}$. Por la forma en que se construyó \tilde{X} tenemos entonces que como c es un ciclo de $C_m(M; \mathbb{R})$, la cadena $c' := \sum_{i=1}^k a_i \iota_i$ es un ciclo de $C_m(\tilde{X}; \mathbb{R})$; dos elementos en $\partial c'$ se anulan si los elementos correspondientes de ∂c se anulan.

Considere las funciones $X \xrightarrow{f, g} M$ dadas por $f := \cup_{i=1}^k \varphi_i$ y $g := \cup_{i=1}^k \tilde{\varphi}_i$. Por la construcción de \tilde{X} y de cada $\tilde{\varphi}_i$ se sigue que f, g pasan al cociente como funciones $f, \tilde{g} : \tilde{X} \rightarrow M$, note que $\tilde{\varphi}_i \circ F^k = \tilde{\varphi}_j \circ F^l$ si $\varphi_i \circ F^k = \varphi_j \circ F^l$.

Es fácil ver que $\tilde{f}_{\#}([c']) = [c]$ y $\tilde{g}_{\#}([c']) = [\tilde{c}]$ en $H_m(M; \mathbb{R})$. También es fácil ver que las homotopías (4.2) dan una homotopía entre las funciones f y g , y esta homotopía pasa a una homotopía entre las funciones $\tilde{f}, \tilde{g} : \tilde{X} \rightarrow M$, esta homotopía "pasa" al cociente \tilde{X} dado que \tilde{f} y \tilde{g} "pasan" a este cociente por la forma que tiene la homotopía (4.2).

Por lo tanto $[c] = \tilde{f}_{\#}([c']) = \tilde{g}_{\#}([c']) = [\tilde{c}]$. □

Observación 4.2.7. Para demostrar la desigualdad $\|M\| \geq \frac{\text{Vol}(M)}{v_n}$ basta demostrar que $\|c\| \geq \frac{\text{Vol}(M)}{v_n}$ para cualquier ciclo recto $c \in H_n(M; \mathbb{R})$ tal que $[c] = [M]$, ya que si $c = \sum_{i=1}^k a_i \varphi_i$ con $\varphi_i \neq \varphi_j$ si $i \neq j$, tendremos que $[\tilde{c}] = [c] = [M]$ por la proposición anterior, y

$$\|c\| = \left\| \sum_{i=1}^k a_i \varphi_i \right\| \geq \left\| \sum_{i=1}^k a_i \tilde{\varphi}_i \right\| = \|\tilde{c}\|,$$

donde la última desigualdad sale de que puede pasar que $\tilde{\varphi}_i = \tilde{\varphi}_j$ para algunos $i \neq j$.

Proposición 4.2.8. Para toda variedad cerrada hiperbólica M tenemos

$$\|M\| \geq \frac{\text{Vol}(M)}{v_n}. \quad (4.3)$$

Demostración. Por la observación anterior tomamos $c \in C_n(M; \mathbb{R})$ un ciclo recto homólogo a $[M]$ arbitrario. Si $c = \sum_i a_i \varphi_i$, con $\varphi_j \neq \varphi_k$ si $j \neq k$, tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(M) &= \int_{[M]} dv_M = \int_c dv_M \\ &= \sum_i a_i \int_{\varphi_i} dv_M = \left| \sum_i a_i \int_{\varphi_i} dv_M \right| \\ &\leq \sum_i |a_i| \left| \int_{\varphi_i} dv_M \right| \leq \sum_i |a_i| \cdot v_n \\ &= \|c\| \cdot v_n. \end{aligned}$$

Donde la desigualdad de la tercera línea sale del teorema 4.2.5. □

De esta desigualdad obtenemos las siguientes consecuencias topológicas interesantes, las cuales no usaremos durante el documento.

Corolario 4.2.9. Si M es una variedad cerrada, orientable e hiperbólica, entonces para todo $f \in C^0(M, M)$ tenemos $|\deg(f)| \leq 1$.

Demostración. Esto es consecuencia de la proposición anterior y la proposición 4.1.4. □

Corolario 4.2.10. Las colecciones $\{3\text{-variedades cerradas de Seifert}\}$ y $\{3\text{-variedades cerradas hiperbólicas}\}$ son disjuntas.

Demostración. Si M es una 3-variedad de Seifert cerrada y orientada, entonces usando una de sus fibriciones podemos construir un homeomorfismo de ella en sí misma de grado con valor absoluto ≥ 2 . Por lo tanto M no puede ser hiperbólica.

Si M es una variedad de Seifert no orientable, su doble cubierta orientable \tilde{M} es también de Seifert [JS79, Lema II.6.1]. Por lo tanto obtenemos el resultado del párrafo y la proposición anteriores. □

4.2.2. Unimodularidad de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$

Para demostrar la desigualdad $\|M\| \leq \text{Vol}(M)/v_n$ necesitamos usar la medida de Haar invariante por la izquierda de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ y demostrar que también es invariante por la derecha, estamos considerando la estructura de grupo de Lie, en el apéndice veremos que $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ tiene una estructura de grupo de Lie de manera que para todo $x \in \mathbb{H}^n$ la función $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n) \rightarrow \mathbb{H}^n$ de evaluación en el punto x sea diferenciable.

Recordemos algunas nociones de grupos de Lie:

Una **medida de Haar de G invariante por la izquierda** es una medida de Radon sobre G que cumple

$$\mu(gX) = \mu(X), \forall g \in G, \forall X \in \text{Borel}(G).$$

De manera similar se puede definir una medida de Haar invariante por la derecha.

En el apéndice se verá que todo grupo de Lie tiene una medida de Haar invariante por la izquierda, que es única salvo múltiplo.

G es **unimodular** si tiene una medida de Haar que es invariante por la izquierda y por la derecha.

Proposición 4.2.11. $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ es un grupo de Lie unimodular.

En [BP92, Proposición C.4.11] se demuestra este teorema usando algunos hechos de grupos de Lie. En el apéndice de este documento demostraremos los casos $n = 2, 3$ de este teorema usando geometría diferencial básica.

Fijemos entonces una medida unimodular μ de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$.

Teorema 4.2.12. Podemos tomar una medida unimodular μ de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ que cumpla que

$$\mu\{\delta \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n) : \delta(x) \in A\} = \text{Vol}(A)$$

para todo $x \in \mathbb{H}^n$ y para cada boreliano A de \mathbb{H}^n .

Demostración. Para cada $x \in \mathbb{H}^n$, sea $\mathcal{I}_x(\mathbb{H}^n)$ el estabilizador de x de la acción de evaluación $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n) \curvearrowright \mathbb{H}^n$. Es fácil ver, usando el modelo del disco de Poincaré y la clasificación de sus isometrías, ver los teoremas 1.1.12 y 1.1.14, que $\mathcal{I}_x(\mathbb{H}^n)$ es isomorfo a $O(n)$.

Note que el homeomorfismo $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)/\mathcal{I}_x(\mathbb{H}^n) \rightarrow \mathbb{H}^n$ dado por $[g] \mapsto g(x)$, respecta la acción de clases laterales izquierdas $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n) \curvearrowright \mathcal{I}(\mathbb{H}^n)/\mathcal{I}_x(\mathbb{H}^n)$ y la acción $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n) \curvearrowright \mathbb{H}^n$ de evaluación.

Como $\mathcal{I}_x(\mathbb{H}^n)$ es un subgrupo compacto de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$, entonces es unimodular por el corolario A.0.6, y como $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$, se sigue que, salvo múltiplo positivo, existe una única medida de Radon sobre $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)/\mathcal{I}_x(\mathbb{H}^n)$ invariante bajo la acción de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$, ver [Kna02, Teorema 8.36]. Como las dos medidas indicadas en la igualdad de este teorema son ambas invariantes por la izquierda, se sigue entonces que las medidas μ y Vol difieren sólo por multiplicación por un real positivo. \square

4.2.3. $\|M\| \leq \text{Vol}(M)/v_n$

Para demostrar esta desigualdad, durante el resto de esta subsección construiremos para cada $\epsilon > 0$ un ciclo que cumpla las condiciones de la siguiente observación:

Lema 4.2.13. Para demostrar que $\|M\| \leq \frac{\text{Vol}(M)}{v_n}$, basta demostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe un ciclo recto $\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$ que representa a $[M]$ tal que

$$\text{sgn}(a_i) \int_{\varphi_i} dv_M \geq v_n - \epsilon, \forall i.$$

Demostración. Tenemos

$$\text{Vol}(M) = \sum_{i=1}^n a_i \int_{\varphi_i} dv_M = \sum_{i=1}^n |a_i| \text{signo}(a_i) \int_{\varphi_i} dv_M \geq (v_n - \epsilon) \sum_{i=1}^n |a_i| \geq (v_n - \epsilon) \|M\|.$$

Donde la primera igualdad sale del hecho de que $[M] = [\sum_i a_i \varphi_i]$, de la definición del volumen de una variedad riemanniana orientada, y del corolario del teorema de Stokes para cadenas, de donde como $\epsilon > 0$ fue arbitrario, obtenemos la desigualdad. \square

En lo que resta del capítulo se demostrará que para todo $\epsilon > 0$, existe un ciclo recto que cumple las condiciones del lema anterior. Antes de demostrar esto, necesitamos varios preliminares.

Proposición 4.2.14. Sean $x, y \in \mathbb{H}^n$ distintos. Entonces el conjunto

$$\{z \in \mathbb{H}^n : d(x, z) = d(y, z)\}$$

es un subespacio hiperbólico de \mathbb{H}^n de dimensión $n - 1$.

Demostración. En el modelo \mathbb{D}^n suponemos que $x = \bar{0}$. Si y' es tal que $d(\bar{0}, y) = d(\bar{0}, y')$, entonces existe $A \in O(n)$ tal que $A(y) = y'$, de donde en \mathbb{H}^n tenemos que para todo $x, y, y' \in \mathbb{H}^n$ tales que $d(x, y) = d(x, y')$ existe $f \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ tal que $f(x) = x$ y $f(y) = y'$, de donde como en el modelo $\Pi^{n,+}$ existe y' tal que $d(x, y) = d(x, y')$ y tal que y' está la misma altura de x , entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que x e y tienen la misma altura en el modelo $\Pi^{n,+}$.

En $\Pi^{n,+}$ sea H el hiperplano superior euclidiano de dimensión $n - 1$ perpendicular a $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ que pasa por el punto medio del arco geodésico $[x, y]$ y que es perpendicular a este arco.

Entonces H es también el hiperplano euclidiano superior de \mathbb{R}^n de dimensión $n - 1$ que pasa por el punto medio del arco euclidiano $[x, y]$ y que es perpendicular a este arco, recuerde que x e y tienen la misma altura, de donde H es igual al conjunto

$$\{z \in \Pi^{n,+} : \|x - z\|_{\mathbb{R}^n} = \|y - z\|_{\mathbb{R}^n}\}.$$

Como $x_n = y_n$, obtenemos entonces de la fórmula de la distancia del modelo $\Pi^{n,+}$, ver proposición 1.1.18, que entonces H es igual al conjunto

$$\{z \in \Pi^{n,+} : d_{\Pi^{n,+}}(x, z) = d_{\Pi^{n,+}}(y, z)\},$$

y esto demuestra la afirmación. \square

Proposición 4.2.15. Sean $u_0, \dots, u_n \in \mathbb{H}^n$. Entonces la envolvente convexa de estos puntos es un simplejo regular si y sólo si $d(u_i, u_j)$ es constante para $i \neq j$.

Demostración. (\Rightarrow) Trivial.

(\Leftarrow) Sean $i, j = 0, \dots, n$ distintos. Sea H el subespacio hiperbólico de \mathbb{H}^n de dimensión $n - 1$ que consiste de todos los $z \in \mathbb{H}^n$ tales que $d(z, u_i) = d(z, u_j)$. Entonces $\{u_k : k \neq i, j\} \subseteq H$. Luego si φ es la reflexión de \mathbb{H}^n con respecto al hiperplano H , tendremos que $\varphi(u_i) = u_j$ y $\varphi(u_k) = u_k$ para $k \neq i, j$. \square

Para cada $R > 0$ considere

$$S(R) := \{(u_0, \dots, u_n) \in (\mathbb{H}^n)^{n+1} : d(u_i, u_j) = R, \forall i \neq j\}.$$

Entonces tenemos una acción de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ sobre $S(R)$ dada por

$$g \cdot (u_0, \dots, u_n) \mapsto (g(u_0), \dots, g(u_n)),$$

$\forall g \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n), \forall (u_0, \dots, u_n) \in S(R)$.

Sean $w_0, \dots, w_n \in \partial\mathbb{D}^n$ los vértices de un simplejo euclidiano regular centrado en el origen. Ahora, para cada $R > 0$, sea $(u_0^R, \dots, u_n^R) \in (\mathbb{D}^n)^{n+1}$ el único elemento de $S(R)$ tal que u_i^R pertenece al rayo geodésico $[0, w_i)$, para todo $i = 0, \dots, n$. Note entonces que la combinación convexa hiperbólica

$$\frac{1}{n+1}u_0^R + \dots + \frac{1}{n+1}u_n^R \quad (4.4)$$

es el origen, ya que hay un único punto de \mathbb{D}^n que fijan todas las extensiones de las permutaciones de los puntos u_0^R, \dots, u_n^R a elementos de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$, y por la construcción de estos puntos se debe tener que es el origen, recuerde que como los pesos de la combinación convexa son iguales, este punto es invariante bajo las isometrías que permuten a los puntos u_0^R, \dots, u_n^R por la proposición 1.1.39. Veamos algunas propiedades de los elementos de $S(R)$.

Proposición 4.2.16. *La acción $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n) \curvearrowright S(R)$ es transitiva.*

Demostración. Sea $(u_0, \dots, u_n) \in S(R)$. En el modelo \mathbb{D}^n podemos tomar usar una isometría para suponer que la combinación convexa hiperbólica

$$c := \frac{1}{n+1}u_0 + \dots + \frac{1}{n+1}u_n$$

sea el origen.

Cualquier permutación de los puntos u_0, \dots, u_n es restricción de una isometría de \mathbb{H}^n por la proposición anterior. Cada una de estas isometrías fijan a c por la proposición 1.1.39, i.e., fijan al origen, de donde cada una de estas isometrías son restricciones a \mathbb{D}^n de elementos de $O(n)$ por las proposiciones 1.1.12 y 1.1.14. Por lo tanto los puntos dados son los vértices de un simplejo regular euclidiano centrado en el origen en \mathbb{R}^n .

Finalmente, podemos tomar los vértices de este simplejo y usar un elemento $O(n)$ para mover la tupla (u_0, \dots, u_n) a la tupla (u_0^R, \dots, u_n^R) . \square

Proposición 4.2.17. *Si $(u_0, \dots, u_n) \in S(R)$, entonces los puntos u_0, \dots, u_n están en posición general.*

Demostración. Como (u_0^R, \dots, u_n^R) son los vértices de un hipertetraedro regular euclidiano, entonces los puntos u_0^R, \dots, u_n^R están en posición general en \mathbb{R}^n , i.e., no pertenecen a un subespacio vectorial de dimensión $\leq n-1$.

Entonces los puntos u_0^R, \dots, u_n^R deben estar en posición general en \mathbb{H}^n . De otra manera, sea H un subespacio hiperbólico de dimensión $\leq n-1$ que contenga a estos puntos. Por (4.4) tenemos entonces que el origen está contenido en H , de donde por la proposición 1.1.24 H es la intersección de \mathbb{D}^n con un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n de dimensión $\leq n-1$, pero esto contradiría la primera parte de la demostración.

Finalmente, si $(u_0, \dots, u_n) \in S(R)$, (u_0, \dots, u_n) se obtiene a partir de (u_0^R, \dots, u_n^R) por medio de una isometría, de donde u_0, \dots, u_n están en posición general. \square

Proposición 4.2.18. *La acción $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n) \curvearrowright S(R)$ es libre.*

Demostración. Suponga que $(u_0, \dots, u_n) \in S(R)$ y que $g \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ son tales que $g \cdot (u_0, \dots, u_n) = (u_0, \dots, u_n)$.

En el modelo \mathbb{I}^n , los puntos u_0, \dots, u_n forman un subconjunto linealmente independiente de \mathbb{R}^{n+1} por la proposición anterior. Como g es la restricción de un elemento de $GL(n+1; \mathbb{R})$, esto implica que este elemento debe ser la identidad. \square

Para cada $R > 0$ sea $V(R)$ el volumen de la envolvente convexa de cualesquiera puntos u_0, \dots, u_n tales que $(u_0, \dots, u_n) \in S(R)$, por la proposición 4.2.18, este real está bien definido.

Para cada $R > 0$ y para cada $(u_0, \dots, u_n) \in S(R)$ tenemos por la proposición 4.2.17 y la proposición 1.1.42 que la función $\sigma_{(u_0, \dots, u_n)} : \Delta^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ preserva o invierte la orientación. Definimos

$$S_+(R) := \{(u_0, \dots, u_n) \in S(R) : \sigma_{(u_0, \dots, u_n)} \text{ preserva orientación}\}.$$

De manera análoga se define $S_-(R)$.

Proposición 4.2.19. *Tenemos que en \mathbb{H}^n , $\lim_{R \rightarrow \infty} V(R) = v_n$.*

Demostración. Indicamos dos maneras de demostrar esta afirmación.

La primera es notar que por la construcción que hicimos tenemos que $u_i^R \rightarrow w_i$ en $\overline{\mathbb{H}^n}$ para cada i , y luego usar el teorema 3.2.5.

Otra manera es notar que la construcción de las tuplas (u_0^R, \dots, u_n^R) en el modelo de Klein dan las mismas tuplas que en el modelo del disco. En el modelo de Klein tenemos que el simplejo hiperbólico con vértices u_0^R, \dots, u_n^R es igual al simplejo euclidiano con los mismos vértices, y lo mismo sucede para los puntos w_0, \dots, w_n . Es fácil ver entonces que en este modelo tenemos que el interior del simplejo hiperbólico cuyos vértices son w_0, \dots, w_n es igual a la unión de todos los simplejos hiperbólicos cuyos vértices son u_0^R, \dots, u_n^R cuando R recorre todos los reales positivos, de donde como las caras de cualquier simplejo hiperbólico tienen medida cero, obtenemos entonces la afirmación. \square

Recordemos que tenemos una medida de Haar μ sobre el grupo de Lie $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$, que es invariante por la izquierda y por la derecha. Definimos una medida m sobre $S(R)$ por

$$m(A) := \mu(\{g \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n) : (g(u_0^R), \dots, g(u_n^R)) \in A\},$$

para $A \subseteq S(R)$ adecuados. Note que como μ es unimodular y $\Gamma \curvearrowright S(R)$ es transitiva, obtenemos la misma medida si tomamos otro elemento de $S(R)$.

Nota 4.2.20. Note que esta definición sólo tiene sentido cuando $\{g \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n) : (g(u_0^R), \dots, g(u_n^R)) \in A\}$ es un boreliano de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$.

Ya podemos terminar la demostración del teorema 4.2.1:

Proposición 4.2.21. *Para toda variedad cerrada hiperbólica orientada M^n tenemos*

$$||M|| \leq \frac{\text{Vol}(M)}{v_n}.$$

Demostración. Sea $\Gamma \leq \mathcal{I}^+(\mathbb{H}^n)$ tal que $M \cong \mathbb{H}^n/\Gamma$, y sea $\pi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma$ la proyección correspondiente. Tenemos una acción $\Gamma \curvearrowright \Gamma^{n+1}$ dada por

$$\gamma \cdot (\gamma_0, \dots, \gamma_n) := (\gamma\gamma_0, \dots, \gamma\gamma_n).$$

Sea Ω el cociente de Γ^{n+1} con respecto a esta acción.

Sea D un subconjunto compacto convexo de \mathbb{H}^n que sea un dominio fundamental con respecto al subgrupo Γ de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$. Como M es compacto, entonces obtenemos que D es un convexo compacto. Denotamos su diámetro por d . Fijamos un punto $w \in \text{Int}(D)$.

Para $\omega = [(\gamma_0, \dots, \gamma_n)]$, definimos

$$\sigma_\omega := \pi \circ \sigma_{(\gamma_0(w), \dots, \gamma_n(w))}.$$

La demostración de la proposición 4.2.4 prueba que σ_ω no depende del representante de ω . Definimos también para cada $R > 0$ un número real $a_+^R(\omega) \geq 0$ dado por

$$a_+^R(\omega) := m(\{(u_0, \dots, u_n) \in S_+(R) : u_i \in \gamma_i(D), \forall i\}).$$

De manera análoga se define $a_-(R)$. Note que

$$m(\{(u_0, \dots, u_n) \in S_+(R) : u_i \in \gamma_i(D), \forall i\}) = \mu(\{g \in \mathcal{I}^+(\mathbb{H}^n) : g(u_i^R) \in \gamma_i(D), \forall i\}),$$

y el conjunto de la derecha es un cerrado de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$, y por lo tanto es medible. La definición de $a_+^R(\omega)$ no depende del representante de ω ya que si $\gamma \in \Gamma$ tenemos

$$\begin{aligned} m(\{(u_0, \dots, u_n) \in S_+(R) : u_i \in \gamma\gamma_i(D), \forall i\}) &= \mu(\{g \in \mathcal{I}^+(\mathbb{H}^n) : g(u_i^R) \in \gamma\gamma_i(D)\}) \\ &= \mu(\{g \in \mathcal{I}^+(\mathbb{H}^n) : \gamma^{-1}g(u_i^R) \in \gamma_i(D)\}) = \mu(\{\gamma^{-1}g \in \mathcal{I}^+(\mathbb{H}^n) : \gamma^{-1}g(u_i^R) \in \gamma_i(D)\}) \\ &= \mu(\{\gamma^{-1}g \in \mathcal{I}^+(\mathbb{H}^n) : \gamma^{-1}g(u_i^R) \in \gamma_i(D)\}) = \mu(\{g \in \mathcal{I}^+(\mathbb{H}^n) : g(u_i^R) \in \gamma_i(D)\}) \\ &= m(\{(u_0, \dots, u_n) \in S_+(R) : u_i \in \gamma_i(D), \forall i\}), \end{aligned}$$

note que utilizamos la invarianza de μ por la izquierda.

Finalmente $a_+^R(\omega) < \infty$, ya que

$$\{g \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n) : g(u_i^R) \in \gamma_i(D), \forall i\} \quad (4.5)$$

es compacto dado que claramente es cerrado y dado que cada $\gamma_i(D)$ es compacto, y como en \mathbb{H}^n la familia de puntos u_0^R, \dots, u_n^R es una base de \mathbb{R}^{n+1} , se sigue que los elementos de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ que pertenecen al conjunto (4.5) son en particular matrices cuyas entradas están acotadas.

El mismo argumento demuestra que $a_-^R(\omega) < \infty$.

Definimos

$$a^R(\omega) := a_+^R(\omega) - a_-^R(\omega).$$

En lo que sigue vamos a demostrar que dado R , $a^R(\omega) \neq 0$ sólo para un número finito de $\omega \in \Omega$, de donde podremos considerar la cadena

$$z_R := \sum_{\omega \in \Omega} a^R(\omega) \sigma_\omega$$

de $C_n(M)$.

Dado $\epsilon > 0$, vamos a demostrar que existen $R > 0$ y un número real k tal que $k \cdot z_R$ es un ciclo que representa a $[M]$ y que cumple las hipótesis del lema 4.2.13 con respecto a ϵ .

La demostración se divide en varios pasos:

Paso 1. z_R es una suma finita.

Suponga que $a^R(\omega) \neq 0$. Entonces para $\omega = [(\text{id}, \gamma_1, \dots, \gamma_n)]$, existe $(u_0, \dots, u_n) \in S(R)$ tal que $u_0 \in D$ y $u_i \in \gamma_i(D)$ para $i = 1, \dots, n$. Recordemos que fijamos un elemento $w \in D$. Luego para cada i tenemos

$$\begin{aligned} d(w, \gamma_i(w)) &\leq d(w, u_i) + d(u_i, \gamma_i(w)) \\ &\leq d(w, u_0) + d(u_0, u_i) + d(u_i, \gamma_i(w)) \\ &\leq d + R + d = 2d + R, \end{aligned}$$

de donde sólo puede haber un número finito de $\omega \in \Omega$ que cumplan que $a^R(\omega) \neq 0$, ya que la acción $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}^n$ es propiamente discontinua.

Paso 2. z_R es un ciclo

Por la forma en que construimos cada σ_ω y cada z_R , tenemos que ∂z_R es una suma formal de la forma

$$\sum_{[(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1})] \in \Gamma^n / \Gamma} b(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}) \cdot (\pi \circ \sigma_{(\gamma_0(w), \dots, \gamma_{n-1}(w))})$$

Veamos que $b(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}) = 0$ para todo $(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}) \in \Gamma^n$.

Es claro que

$$b(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \sum_{\gamma \in \Gamma} a^R([\gamma_0, \dots, \gamma_{j-1}, \gamma, \gamma_j, \dots, \gamma_{n-1}]), \quad (4.6)$$

note que si $\gamma \neq \gamma'$, entonces $[(\gamma_0, \dots, \gamma_{j-1}, \gamma, \gamma_j, \dots, \gamma_{n-1})] \neq [(\gamma_0, \dots, \gamma_{j-1}, \gamma', \gamma_j, \dots, \gamma_{n-1})]$.

Vamos a demostrar que el sumando $j = n$ de la suma de la derecha es 0; que los demás sumandos son también iguales a 0 se demuestra de manera análoga.

Tenemos

$$\begin{aligned} &\sum_{\gamma \in \Gamma} a_+^R([\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}, \gamma]) = \\ &\sum_{\gamma \in \Gamma} m(\{(u_0, \dots, u_n) \in S_+(R) : u_i \in \gamma_i(D) \text{ para } i < n, u_n \in \gamma(D)\}) = \\ &\sum_{\gamma \in \Gamma} \mu(\{g \in \mathcal{I}^+(\mathbb{H}^n) : g(u_i^R) \in \gamma_i(D) \text{ para } i < n, g(u_n^R) \in \gamma(D)\}) = \\ &\mu \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \{g \in \mathcal{I}^+(\mathbb{H}^n) : g(u_i^R) \in \gamma_i(D), \text{ para } i < n \text{ y } g(u_n^R) \in \gamma(D)\} \right) = \\ &\mu(\{g \in \mathcal{I}^+(\mathbb{H}^n) : g(u_i^R) \in \gamma_i(D) \text{ para } i < n\}), \end{aligned}$$

La última igualdad sale de que D es un dominio fundamental de la acción $\text{Aut}(\pi) \curvearrowright \mathbb{H}^n$. La penúltima igualdad sale de que si $\gamma, \gamma' \in \text{Aut}(\pi)$ son distintos, entonces $\mu\{g \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n) : g(u_n^R) \in \gamma(D) \cap \gamma'(D)\} = \text{Vol}(\gamma(D) \cap \gamma'(D))$ por el corolario 4.2.12, sin embargo este número real es 0 ya que $\gamma(D) \cap \gamma'(D) \subseteq \partial\gamma(D)$, y $\partial\gamma(D)$ está contenido en un subespacio hiperbólico de dimensión $n - 1$, y por lo tanto debe tener volumen nulo.

Cambiando el signo en el argumento anterior también obtenemos:

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} a_-^R([\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}, \gamma]) = \mu(\{g \in \mathcal{I}^-(\mathbb{H}^n) : g(u_i^R) \in \gamma_i(D) \text{ para } i < n\}).$$

Sin embargo, si g_0 es el único elemento de $\mathcal{I}^-(\mathbb{H}^n)$ tal que $g(u_i^R) = u_i^R$ para todo $i < n$, entonces

$$\begin{aligned} \{g \in \mathcal{I}^+(\mathbb{H}^n) : g(u_i^R) \in \gamma_i(D) \text{ para } i < n\} \cdot g_0 = \\ \{g \in \mathcal{I}^-(\mathbb{H}^n) : g(u_i^R) \in \gamma_i(D) \text{ para } i < n\}, \end{aligned}$$

de donde como μ es invariante por la derecha obtenemos de las tres igualdades anteriores que

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} a_+^R([\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}, \gamma]) = \sum_{\gamma \in \Gamma} a_-^R([\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}, \gamma]),$$

con lo que

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} a^R([\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}, \gamma]) = \sum_{\gamma \in \Gamma} a_+^R([\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}, \gamma]) - \sum_{\gamma \in \Gamma} a_-^R([\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}, \gamma]) = 0,$$

y así hemos demostrado que el término $j = n$ de la suma en (4.6) es 0.

Por lo tanto, como un argumento análogo sirve para demostrar que los demás términos de la suma (4.6) son 0, obtenemos entonces que z_R es un ciclo.

Paso 3. Tenemos $a_+^R(\omega) \cdot a_-^R(\omega) = 0, \forall \omega$, para todo $R > 0$ lo suficientemente grande.

Vamos a demostrar que para todo $R > 0$ lo suficientemente grande y todo $\omega = [(\gamma_0, \dots, \gamma_n)] \in \Omega$ que si existe $(u_0, \dots, u_n) \in S_+(R)$ tal que $u_i \in \gamma_i(D)$ para todo $i = 0, \dots, n$, entonces cualquier otro $(v_0, \dots, v_n) \in S(R)$ que cumpla esta condición también debe pertenecer a $S_+(R)$, de donde si $a_+^R(\omega) \neq 0$ para algún $R > 0$ lo suficientemente grande, se debe tener que $a_-^R(\omega) = 0$.

Primero demostremos la siguiente afirmación:

Afirmación 4.2.22. Existe $R > 0$ tal que para cualesquiera $u_0, \dots, u_n \in \mathbb{H}^n$ en posición general tales que $d(u_0, u_n) \geq R$ y $u \in \mathbb{H}^n$ tal que $d(u, u_n) \leq d$ tenemos que si $\sigma_{(u_0, \dots, u_n)}$ preserva(invierte) la orientación, entonces $\sigma_{(u_0, \dots, u_{n-1}, u)}$ también preserva(invierte) la orientación.

Lo mismo vale para cualquier $j = 0, \dots, n$ en vez de $j = n$, y la demostración es la misma.

Demostración. Si T es un triángulo hiperbólico con lados de longitud a, b, c , y con ángulos opuestos respectivos α, β, γ , entonces tenemos la siguiente relación:

$$\cos(\alpha) = \frac{\cosh b \cosh c - \cosh a}{\sinh b \sinh c},$$

ver [Ser08, Página 40]. En el modelo \mathbb{D}^n , sea S el subconjunto de $T_0\mathbb{D}^n$ de todos los elementos de norma 1, con la métrica hiperbólica de \mathbb{D}^n por supuesto. Entonces S es un subconjunto compacto del espacio topológico $T_0\mathbb{D}^n = \mathbb{R}^n$, de donde existe $\epsilon > 0$ tal que para cualesquiera $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n \in S$ tales que $\|v_i - w_i\|_{\mathbb{D}^n} < \epsilon$ para todo $i = 1, \dots, n$ tenemos que $\det(v_1, \dots, v_n)$ y $\det(w_1, \dots, w_n)$ tienen el mismo signo, el determinante lo estamos calculando con una base ordenada fija de $T_0\mathbb{D}^n$ que viene dada con la orientación estándar de $T_0\mathbb{D}^n$.

Existe $\alpha > 0$ tal que si $v, w \in S$ son tales que el ángulo entre v y w es menor que α , entonces $\|v - w\|_{\mathbb{D}^n} < \epsilon$. Sea $R' > 0$ tal que para todo $t, t' \geq R'$ tenemos

$$\arccos \left(\frac{\cosh t \cosh t' - \cosh d}{\sinh t \sinh t'} \right) < \alpha, \quad (4.7)$$

note que la expresión dentro del arccoseno tiende a 1 cuando t y t' tienden a infinito, y estamos considerando a \arccos como una función $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$.

Sea $R := R' + d$. Este es el número real que estamos buscando.

Sean u_0, \dots, u_n y u como en la hipótesis de la afirmación. Suponga que $\sigma_{(u_0, \dots, u_n)}$ preserva la orientación. Para cada $i = 1, \dots, n$ sea v_i el vector unitario de $T_{u_0} \mathbb{D}^n$ de la geodésica que va de u_0 a u_i , tendremos que $\det(v_1, \dots, v_n) > 0$. Sea v el vector unitario de $T_{u_0} \mathbb{D}^n$ de la geodésica que va de u_0 a u .

Note que $d(u_0, u) \geq d(u_0, u_n) - d(u, u_n) \geq R - d = R'$, de donde por (4.7) se sigue que el ángulo entre v_n y v es menor que α , con lo que $\|v - v_n\| < \epsilon$, y así $\det(v_1, \dots, v_{n-1}, v) > 0$ dado que $\det(v_1, \dots, v_n) > 0$, de donde $\sigma_{(u_0, \dots, u_{n-1}, u)}$ preserva la orientación.

El caso en el que $\sigma_{(u_0, \dots, u_n)}$ invierte la orientación es análogo. \square

Ahora supongamos que $R > 0$ lo suficientemente grande es tal que $a_+^R(\omega) \neq 0$. Entonces existe $(u_0, \dots, u_n) \in S_+(R)$ tal que $u_i \in \gamma_i(D)$, para todo $i = 0, \dots, n$, donde $\omega = [(\gamma_0, \dots, \gamma_n)]$. Sea $(v_0, \dots, v_n) \in S(R)$ tal que $v_i \in \gamma_i(D), \forall i = 0, \dots, n$. Entonces si aplicamos sucesivamente la afirmación anterior tendremos que

$$\begin{aligned} (u_0, \dots, u_n) \in S_+(R) &\Rightarrow (u_0, \dots, u_{n-1}, v_n) \in S_+(R) \\ &\Rightarrow (u_0, \dots, u_{n-2}, v_{n-1}, v_n) \in S_+(R), \\ \dots &\Rightarrow (v_0, \dots, v_n) \in S_+(R). \end{aligned}$$

Por lo tanto en particular $a_-^R(\omega) = 0$.

Paso 4. Dado $\epsilon > 0$, entonces para todo $R > 0$ lo suficientemente grande tenemos que $\left| \int_{\sigma_\omega} dv_M \right| \geq v_n - \epsilon$ si $a^R(\omega) \neq 0$.

Para demostrar esto necesitamos primero el siguiente hecho:

Proposición 4.2.23. Sean $x \in \partial \mathbb{H}^n$ y $r > 0$. Si U es una vecindad de x en $\overline{\mathbb{H}^n}$, entonces existe otra vecindad V de x tal que para todo $y \in \mathbb{H}^n$ tenemos que si existe $z \in V$ tal que $d(z, y) \leq r$, entonces $y \in U$.

Demostración. En el modelo $\Pi^{n,+}$ podemos suponer que x es el origen. Suponga que S_1 y S_2 son dos semiesferas superiores de \mathbb{R}^n centradas en el origen. Entonces tendremos que

$$d_{\Pi^{n,+}}(S_1, S_2) = d_{\Pi^{n,+}}(x_1, x_2), \quad (4.8)$$

donde x_i es el polo norte de S_i para $i = 1, 2$, esto es verdad ya que para todo $x \in S_1$ y $y \in S_2$ tenemos $\|x_1 - x_2\| \leq \|x - y\|$, $(x)_n \leq (x_1)_n$ y $(y)_n \leq (x_2)_n$, de donde

$$d_{\Pi^{n,+}}(x_1, x_2) = 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\|x_1 - x_2\|}{2\sqrt{(x_1)_n(x_2)_n}} \right) \leq 2 \sinh^{-1} \left(\frac{\|x - y\|}{2\sqrt{(x)_n(y)_n}} \right) = d_{\Pi^{n,+}}(x, y).$$

Ahora suponga que U es una vecindad de $\bar{0} \in \partial\Pi^{n,+}$ en $\overline{\Pi^{n,+}}$. Entonces existe una semibola B superior centrada en $\bar{0}$ contenida en U . Sea B' una semibola superior centrada en $\bar{0}$ cuyo polo norte dista del polo norte de B una distancia mayor que un $r > 0$ dado. Entonces por (4.8) se sigue que si $x \in \Pi^{n,+}$ es tal que $d_{\Pi^{n,+}}(x, y) \leq r$ para algún $y \in B'$, se tendrá que $x \in B$. \square

En $\overline{\mathbb{D}^n}$ elijamos vecindades W_0, \dots, W_n de w_0, \dots, w_n respectivamente tales que $\text{Vol}(\sigma_{(x_0, \dots, x_n)}) \geq v_n - \epsilon$ si $x_i \in W_i$ para todo $i = 0, \dots, n$, recuerde el teorema 3.2.5. Por la proposición anterior podemos también elegir vecindades V_0, \dots, V_n de w_0, \dots, w_n respectivamente tales que para todo $x \in V_i$ y todo $y \in \mathbb{H}^n$ tal que $d(x, y) \leq d$, entonces $y \in W_i$, en particular $V_i \subseteq W_i$, de donde si $R > 0$ es lo suficientemente grande de manera que $u_i^R \in V_i$ para todo i , entonces para todo $\omega = [(\gamma_0, \dots, \gamma_n)] \in \Omega$ tal que $a^R(\omega) \neq 0$ existe $g \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ tal que $g(u_i^R) \in \gamma_i(D)$ para todo i . Luego como $\gamma_i(w) \in \gamma_i(D)$ para todo i , se sigue que $d(g(u_i^R), \gamma_i(w)) \leq d$ para todo i , con lo que como $g(u_i^R) \in g(V_i)$ para todo i , obtenemos $\gamma_i(w) \in g(W_i)$ para todo i , con lo que por la construcción de las vecindades W_i se sigue que $\text{Vol}(\sigma_{(\gamma_0(w), \dots, \gamma_n(w))}) \geq v_n - \epsilon$.

Por la construcción de la medida Vol de \mathbb{H}^n tenemos que

$$\left| \int_{\sigma_{(\gamma_0(w), \dots, \gamma_n(w))}} dv_{\mathbb{H}^n} \right| = \text{Vol}(\sigma_{(\gamma_0(w), \dots, \gamma_n(w))})$$

Sin embargo como π es una isometría local obtenemos que

$$\int_{\sigma_{(\gamma_0(w), \dots, \gamma_n(w))}} dv_{\mathbb{H}^n} = \int_{\sigma_\omega} dv_M,$$

ya que $\sigma_\omega = \pi \circ \sigma_{(\gamma_0(w), \dots, \gamma_n(w))}$. Por lo tanto obtenemos que $\left| \int_{\sigma_\omega} dv_M \right| \geq v_n - \epsilon$.

Paso 5. Si $R > 0$ es lo suficientemente grande y $a^R(\omega) \neq 0$, entonces $a^R(\omega) \cdot \int_{\sigma_\omega} dv_M > 0$.

Suponga que $\omega = [(\gamma_0, \dots, \gamma_n)]$. Como $R > 0$ lo suficientemente grande, podemos suponer que $a_-^R(\omega) = 0$, luego todos los $(u_0, \dots, u_n) \in S(R)$ tales que $u_i \in \gamma_i(D) \forall i = 0, \dots, n$ también pertenecen a $S_+(R)$, de donde $\sigma_\omega = \pi \circ \sigma_{(\gamma_0(w), \dots, \gamma_n(w))}$ preserva la orientación por el paso 3, de donde $\int_{\sigma_\omega} dv_M > 0$. Como $R > 0$ lo suficientemente grande, tenemos que $0 \neq a^R(\omega) = a_+^R(\omega)$, y así $a^R(\omega) > 0$, con lo que $a^R(\omega) \cdot \int_{\sigma_\omega} dv_M > 0$ en este caso.

El caso donde todos los $(u_0, \dots, u_n) \in S(R)$ tales que $u_i \in \gamma_i(D)$ pertenecen a $S_-(R)$ es similar.

Paso 6. Si $R > 0$ es lo suficientemente grande, entonces $\int_{z_R} dv_M > 0$, y esto implica que z_R es un ciclo no trivial.

Tomemos $(u_0, \dots, u_n) \in S(R)$. Luego existen $\gamma_0, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ tales que $u_i \in \gamma_i(D)$ para $i = 0, \dots, n$. Si perturbamos un poco los puntos u_0, \dots, u_n , y si es necesario, al cambiar algunos de los γ_i 's, podemos suponer que

$$u_i \in \gamma_i(\overset{\circ}{D}),$$

para $i = 0, \dots, n$. Como la acción $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}^n$ es transitiva, se sigue que el conjunto

$$\{g \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n) : g(u_i^R) \in \gamma_i(\overset{\circ}{D}) \forall i\} \tag{4.9}$$

es no vacío. Veamos que este conjunto es un abierto de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$. Suponga que g pertenece a este conjunto. Luego existe $\epsilon > 0$ tal que en el modelo \mathbb{H}^n tenemos que $B_\epsilon^{\mathbb{R}^{n+1}}(g(u_i^R)) \cap \mathbb{H}^n \subseteq \gamma_i(\overset{\circ}{D}), \forall i$. Sin embargo es claro que existe un abierto A de $GL(n+1; \mathbb{R})$ tal que $g \in A$ y tal que $h(u_i^R) \in B_\epsilon^{\mathbb{R}^{n+1}}(g(u_i^R))$ para todo $h \in A$ y todo $i = 0, \dots, n$ ya que u_0^R, \dots, u_n^R es una base de \mathbb{R}^{n+1} , de donde $A \cap \mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ es un abierto de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ que contiene a g y está contenido en el conjunto (4.9), de donde el conjunto (4.9) es un abierto no vacío de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} & m(\{(u_0, \dots, u_n) \in S(R) : u_i \in \gamma_i(D) \forall i\}) \\ &= \mu(\{g \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n) : g(u_i^R) \in \gamma_i(D) \forall i\}) \neq 0, \end{aligned}$$

de donde para $\omega_0 := [(\gamma_0, \dots, \gamma_n)]$ tendremos que $a_+^R(\omega_0) \neq 0$ o $a_-^R(\omega_0) \neq 0$, y como $a_+^R(\omega_0) \cdot a_-^R(\omega_0) = 0$, ya que $R > 0$ es lo suficientemente grande, se sigue entonces que $a^R(\omega) \neq 0$. Por lo tanto como del paso anterior tenemos que $a_R(\omega) \cdot \int_{\sigma_\omega} dv_M \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$, obtenemos de lo anterior que

$$\int_{z_R} dv_M = \sum_{\omega \in \Omega} a^R(\omega) \int_{\sigma_\omega} dv_M > 0.$$

Con lo que z_R debe ser un elemento no trivial de $H_n(M; \mathbb{R})$, ya que de otra manera si z_R fuera un elemento trivial en $H_n(M; \mathbb{R})$ obtendríamos que la integral de z_R sobre cualquier forma diferencial de dimensión maximal sería nula por el teorema de Stokes.

Paso 7. Conclusión de la demostración

Sea $\epsilon > 0$. Por los pasos 4 y 5 tenemos que para $R > 0$ lo suficientemente grande, $\text{sng}(a^R(\omega)) \int_{\sigma_\omega} dv_M \geq v_n - \epsilon$, para los $\omega \in \Omega$ tales que $a^R(\omega) \neq 0$.

Por el paso 6, existe un real $k \neq 0$ tal que $[z_R] = k[M]$. Note entonces que $0 < \int_{z_R} dv_M = \int_{k[M]} dv_M = k \text{Vol}(M)$, y así $k > 0$. Luego

$$[M] = (1/k)[z_R] = \sum_{\omega \in \Omega} (1/k)a^R(\omega)\sigma_\omega,$$

con $\text{sgn}((1/k)a^R(\omega)) \int_{\sigma_\omega} dv_M \geq v_n - \epsilon$.

Como $\epsilon > 0$ fue arbitrario, obtenemos del lema 4.2.13 la desigualdad $\|M\| \leq \frac{\text{Vol}(M)}{v_n}$.

Esto termina la demostración de la proposición 4.2.21. □

Por fin obtenemos:

Teorema 4.2.24. *Sea M^n una variedad hiperbólica cerrada. Entonces*

$$\|M\| = \frac{\text{Vol}(M)}{v_n}.$$

Ahora podemos demostrar el teorema principal de este capítulo:

Demostración del teorema 4.0.1: Recordemos que tenemos una pseudoisometría $P : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$, con extensión continua $\bar{P} : \overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$, que induce una equivalencia homotópica $M_1 = \mathbb{H}^n/\Gamma_1 \xrightarrow{P} \mathbb{H}^n/\Gamma_2 = M_2$. Sean $\pi_j : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma_j$ las proyecciones asociadas.

Vamos a suponer, para obtener una contradicción, que existe un símplice ideal regular que se envía bajo \hat{f} a un símplice ideal no regular.

Recuerde que durante el capítulo hemos fijado w_0, \dots, w_n , en el modelo del disco \mathbb{D}^n , tales que son los vértices de un símplice regular ideal, y que para cada $R > 0$ tenemos que $(u_0^R, \dots, u_n^R) \in (\mathbb{D}^n)^{n+1}$ es el único elemento de $S(R)$ tal que u_i^R pertenece al rayo geodésico $[0, w_i)$.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el símplice ideal $\sigma(w_0, \dots, w_n)$ se envía bajo \bar{P} a un símplice ideal no regular. Luego tendremos para algún $\epsilon > 0$ que $\text{Vol}(\sigma(\bar{P}(w_0), \dots, \bar{P}(w_n))) = v_n - 2\epsilon$. Por la continuidad de la función Vol en $(\mathbb{H}^n)^{n+1}$, existen vecindades disjuntas U_0, \dots, U_n de w_0, \dots, w_n respectivamente en $\overline{\mathbb{H}^n}$ tales que

$$\text{Vol}(\sigma(\bar{P}(x_0), \dots, \bar{P}(x_n))) \leq v_n - \epsilon, \quad (4.10)$$

si $x_i \in U_i$ para $i = 0, \dots, n$.

Sea $\Gamma_1 \leq \mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ tal que $M_1 \cong \mathbb{H}^n/\Gamma_1$, y sea $\pi_1 : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma_1$ la proyección asociada. Vamos a tomar, usando la notación de la demostración anterior, $\Omega := \Gamma^{n+1}/\Gamma$, y para cada $\omega = [(\gamma_0, \dots, \gamma_n)] \in \Omega$ tomamos $\sigma_\omega := \pi_1 \circ \sigma(\bar{P}(x_0), \dots, \bar{P}(x_n))$.

Definimos entonces

$$\Omega' := \{\omega \in \Omega : \exists \gamma_0, \dots, \gamma_n \in \Gamma_1 \text{ t.q. } \omega = [(\gamma_0, \dots, \gamma_n)] \text{ y } \gamma_i(w) \in U_i \forall i\}.$$

Para cada $R > 0$ sea

$$c_R := \sum_{\omega \in \Omega'} a^R(\omega) \sigma_\omega.$$

Afirmación 4.2.25. *Existen $\alpha, \beta > 0$ tales que $\|z_R\| = \alpha$ y $\|c_R\| \geq \beta$ para todo $R > 0$ lo suficientemente grande.*

Antes de demostrar esto, veamos cómo esto termina la demostración.

Tenemos que $p_*([M_1]) = \pm[M_2]$, dado que p es una equivalencia homotópica, de donde $\|M_1\| = \|M_2\|$, y así por la igualdad de Gromov, $\text{Vol}(M_1) = \text{Vol}(M_2)$. Sea $R > 0$ lo suficientemente grande de manera que $u_i^R \in U_i, \forall i = 0, \dots, n$. Recordemos también que como $R > 0$ lo suficientemente grande, $[z_R] = k[M_1]$ para algún $k > 0$, lo cual implica que $p_*([z_R]) = \pm k[M_2]$. Note que el enderezamiento z'_R del ciclo $p_*([z_R]) = [p \circ z_R]$ bajo la cubriente $\mathbb{H}^n \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{H}^n/\Gamma_2$ viene dado por

$$z'_R = \sum_{\omega = [(\gamma_0, \dots, \gamma_n)] \in \Omega} a^R(\omega) \cdot (\pi_2 \circ \sigma(\bar{P}(\gamma_0(w)), \dots, \bar{P}(\gamma_n(w)))).$$

Como $[z_R] = k[M_1]$ y $[z'_R] = f_*([z_R]) = \pm k[M_2]$, obtenemos

$$\int_{z_R} dv_{M_1} = \int_{k[M_1]} dv_{M_1} = k \text{Vol}(M_1),$$

$$\int_{z'_R} dv_{M_2} = \int_{\pm k[M_2]} dv_{M_2} = \pm k \text{Vol}(M_2),$$

con lo que como $\text{Vol}(M_1) = \text{Vol}(M_2)$ por el teorema 4.2.24, ya que M_1 y M_2 son homotópicamente equivalentes, con lo que obtenemos que $\int_{z_R} dv_{M_1} = \pm \int_{z'_R} dv_{M_2}$.

Por un lado tenemos de los pasos 3 y 5 de la demostración de la proposición 4.3 que para cualquier $\delta > 0$ tenemos que para todo $R > 0$ lo suficientemente grande

$$\begin{aligned} \int_{z_R} dv_{M_1} &= \sum_{\omega=[(\gamma_0, \dots, \gamma_n)] \in \Omega} |a^R(\omega)| \left| \int_{\sigma_\omega} dv_{M_1} \right| \\ &\geq \sum_{\omega=[(\gamma_0, \dots, \gamma_n)] \in \Omega} |a^R(\omega)| \cdot (v_n - \delta) \\ &= \|z_R\| (v_n - \delta) = \alpha (v_n - \delta). \end{aligned}$$

Por otro lado para todo $R > 0$

$$\begin{aligned} \int_{z_R} dv_{M_1} &= \sum_{\omega=[(\gamma_0, \dots, \gamma_n)] \in \Omega} |a^R(\omega)| \left| \int_{\sigma_\omega} dv_{M_1} \right| \\ &\leq \sum_{\omega=[(\gamma_0, \dots, \gamma_n)] \in \Omega} |a^R(\omega)| \cdot v_n = \|z_R\| \cdot v_n \\ &= \alpha \cdot v_n, \end{aligned}$$

Juntando estas dos desigualdades obtenemos

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{z_R} dv_{M_1} = \alpha \cdot v_n. \quad (4.11)$$

Sin embargo, como $\|c_R\| \geq \beta$ para todo $R > 0$ lo suficientemente grande, de (4.10) obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{z'_R} dv_{M_2} \right| &= \left| \sum_{\omega=[(\gamma_0, \dots, \gamma_n)] \in \Omega} a^R(\omega) \int_{\sigma_{(\bar{P}(x_0), \dots, \bar{P}(x_n))}} dv_{M_2} \right| \\ &\leq \sum_{\omega=[(\gamma_0, \dots, \gamma_n)] \in \Omega} |a^R(\omega)| \left| \int_{\sigma_{(\bar{P}(x_0), \dots, \bar{P}(x_n))}} dv_{M_2} \right| \\ &= \sum_{\omega=[(\gamma_0, \dots, \gamma_n)] \in \Omega} |a^R(\omega)| \text{Vol} \left(\sigma_{(\bar{P}(x_0), \dots, \bar{P}(x_n))} \right) \\ &= \sum_{\omega=[(\gamma_0, \dots, \gamma_n)] \in \Omega'} |a^R(\omega)| \text{Vol} \left(\sigma_{(\bar{P}(x_0), \dots, \bar{P}(x_n))} \right) \\ &\quad + \sum_{\omega=[(\gamma_0, \dots, \gamma_n)] \in \Omega \setminus \Omega'} |a^R(\omega)| \text{Vol} \left(\sigma_{(\bar{P}(x_0), \dots, \bar{P}(x_n))} \right) \\ &\leq \sum_{\omega=[(\gamma_0, \dots, \gamma_n)] \in \Omega'} |a^R(\omega)| (v_n - \epsilon) + \sum_{\omega=[(\gamma_0, \dots, \gamma_n)] \in \Omega \setminus \Omega'} |a^R(\omega)| v_n \\ &= \|c_R\| (v_n - \epsilon) + (\|z_R\| - \|c_R\|) v_n \\ &= \|z_R\| v_n - \|c_R\| \epsilon \\ &\leq \alpha v_n - \beta \epsilon, \end{aligned} \quad (4.12)$$

de donde

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \int_{z_R} dv_{M_1} = \limsup_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{z'_R} dv_{M_2} \right| \leq \alpha v_n - \beta \epsilon$$

lo cual contradice (4.11).

Sólo falta verificar la afirmación 4.2.25:

Demostración de la afirmación 4.2.25: Primero verificaremos la afirmación acerca de $\|z_R\|$.

Si $R > 0$ lo suficientemente grande de manera que $a_+^R(\omega) \cdot a_-^R(\omega) = 0$ para todo $\omega \in \Omega$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|z_R\| &= \sum_{\omega \in \Omega} |a^R(\omega)| \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} a_+^R(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} a_-^R(\omega) \\
&= \sum_{[(id, \gamma_1, \dots, \gamma_n)] \in \Omega} m\{(u_0, \dots, u_n) \in S_+(R) : u_0 \in D, u_i \in \gamma_i(D)\} \\
&\quad + \sum_{[(id, \gamma_1, \dots, \gamma_n)] \in \Omega} m\{(u_0, \dots, u_n) \in S_-(R) : u_0 \in D, u_i \in \gamma_i(D)\} \\
&= \sum_{[(id, \gamma_1, \dots, \gamma_n)] \in \Omega} \mu\{\delta \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n) : \delta(u_0^R) \in D, \delta(u_i^R) \in \gamma_i(D)\} \\
&= \mu\left(\bigcup_{\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma} \{\delta \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n) : \delta(u_0^R) \in D, \delta(u_i^R) \in \gamma_i(D)\}\right) \\
&= \mu\{\delta \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n) : \delta(u_0^R) \in D\} = \text{Vol}(D),
\end{aligned}$$

donde la última igualdad sale del corolario 4.2.12, y como $\text{Vol}(D)$ es un número finito positivo, podemos tomar $\alpha := \text{Vol}(D)$.

Para demostrar la afirmación sobre $\|c_R\|$, necesitamos primero una observación.

Sea V_i para cada $i = 0, \dots, n$ una vecindad de w_i tal que para cualesquiera $x \in V_i$ e $y \in \mathbb{H}^n$ tenemos que si $d(x, y) \leq d$, entonces $y \in U_i$, donde $d := \text{Vol}(D)$, por la proposición 4.2.23.

Si usamos el argumento con el que hallamos el valor de $\|z_R\|$ para todo $R > 0$ lo suficientemente grande, entonces tenemos que para todo $R > 0$ lo suficientemente grande

$$\|c_R\| = \sum_{[(\gamma_0, \dots, \gamma_n)] \in \Omega, \gamma_i(u) \in U_i} \mu\{\delta \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n) : \delta(u_i^R) \in \gamma_i(D)\},$$

con lo que

$$\begin{aligned}
\|c_R\| &= \sum_{[(\gamma_0, \dots, \gamma_n)] \in \Omega, \gamma_i(u) \in U_i} \mu\{\delta \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n) : \delta(u_i^R) \in \gamma_i(D)\} \\
&= \mu\left(\bigcup_{[(\gamma_0, \dots, \gamma_n)] \in \Omega, \gamma_i(u) \in U_i} \{\delta \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n) : \delta(u_i^R) \in \gamma_i(D)\}\right) \\
&= \mu\{\delta \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n) : \exists \gamma_0, \dots, \gamma_n \in \Gamma, \delta(u_i^R) \in \gamma_i(D), \gamma_i(w) \in U_i \forall i\} \\
&\geq \mu\{\delta \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n) : \delta(u_i^R) \in V_i \forall i\},
\end{aligned} \tag{4.13}$$

donde la última desigualdad sale de que si $\delta \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ es tal que $\delta(u_i^R) \in V_i \forall i$, podemos elegir $\gamma_0, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ tales que $\delta(u_i^R) \in \gamma_i(D) \forall i$, y como $\text{diam}(\gamma_i(D)) = \text{diam}(D) = d$, obtenemos

$d(\delta(u_i^R), \gamma_i(w)) \leq d, \forall i$, recuerde que $w \in D$, y así por la construcción de los abiertos V_i se sigue que $\gamma_i(w) \in U_i \forall i$.

Vamos a demostrar que existe $\beta > 0$ que es menor que el último real de la desigualdad (4.13) para todo $R > 0$ lo suficientemente grande.

Consideremos la función $\phi : \Pi^{n,+} \times \Pi^{n,+} \setminus \Delta \Pi^{n,+} \rightarrow \partial \Pi^{n,+}$ tal que a cada pareja (a, b) de puntos de $\Pi^{n,+}$ se les asigna el extremo en $\partial \Pi^{n,+}$ del rayo geodésico de $\Pi^{n,+}$ que sale de a y pasa por b . Es claro que ϕ es continua.

Note que por la construcción de los u_i^R 's tenemos que $u_i^R \in V_i$ para $i = 0, \dots, n$ para todo $R > 0$ lo suficientemente grande, de donde podemos tomar $0 << R_1 < R_2$ tales que $u_{R_j}^i \in V_i$ para $j = 1, 2$ e $i = 0, \dots, n$. Claramente $\phi(u_i^{R_1}, u_i^{R_2}) = w_i$ para $i = 0, \dots, n$, de donde existen vecindades abiertas disyuntas A_i^1 y A_i^2 de $u_i^{R_1}$ y $u_i^{R_2}$ respectivamente, ambas contenidas en V_i , tales que $\phi(x, y) \in V_i$ para cualesquiera $x \in A_i^1$ e $y \in A_i^2$ para todo $i = 0, \dots, n$.

Ahora, si $\delta \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ es tal que $\delta(u_i^{R_j}) \in V_i$ para todo $i = 0, \dots, n$ y todo $j = 1, 2$, obtenemos que $\phi(\delta(u_i^{R_1}), \delta(u_i^{R_2})) \in V_i$, de donde como $\phi(\delta(u_i^{R_1}), \delta(u_i^{R_2})) = \phi(w_i)$, se sigue que el rayo geodésico $\phi([u_i^{R_1}, w_i])$ está contenido V_i , ya que V_i es convexo en $\overline{\mathbb{H}^n}$, i.e., $\phi(u_i^R) \in V_i$ para todo $R > R_1$ y todo $i = 0, \dots, n$. Por lo tanto

$$\{\delta \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n) : \delta(u_i^{R_j}) \in A_i^j, \forall i, \forall j\} \subseteq \{\delta \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n) : \delta(u_i^R) \in V_i, \forall i\}. \quad (4.14)$$

Note que el conjunto de la izquierda en (4.14) es un abierto en la topología de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ que hereda de $GL(n+1; \mathbb{R})$, y que además contiene a la identidad, de donde si β es la medida, con respecto a μ , del conjunto de la izquierda en (4.14), tendremos que $\beta > 0$ y que es menor que o igual al último real de la desigualdad (4.13), con lo que $\|c_R\| \geq \beta$ para todo $R > 0$ lo suficientemente grande.

Esto termina la demostración de la afirmación 4.2.25. □

Esto termina la demostración de la proposición 4.0.1. □

Capítulo 5

Conclusión de la demostración en el caso cerrado y algunas consecuencias

Si juntamos lo que se ha hecho en los capítulos anteriores tenemos que dadas dos variedades hiperbólicas $M_1 = \mathbb{H}^n/\Gamma_1$ y $M_2 = \mathbb{H}^n/\Gamma_2$ compactas, tales que existe un isomorfismo $\phi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$, entonces existe una pseudoisometría $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ que induce a ψ , que induce una equivalencia homotópica $M_1 \rightarrow M_2$, que se extiende a una función continua $\overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$, que se restringe a una función $\partial\mathbb{H}^n \rightarrow \partial\mathbb{H}^n$ que envía los vértices de cualquier simplejo regular ideal, en los vértices de un simplejo del mismo tipo. Usando esto último vamos a construir una isometría entre M_1 y M_2 .

Para hacer esto, necesitamos mostrar que si $n \geq 3$, $P : \partial\mathbb{H}^n \rightarrow \partial\mathbb{H}^n$ es continua y envía vértices de cualquier simplejo ideal regular en los vértices de un simplejo del mismo tipo, entonces P es la signatura de una isometría $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$, es decir, la extensión a $\partial\mathbb{H}^n$ de una isometría. Esta es la única parte de la demostración del teorema de rigidez de Mostow donde se usa la hipótesis $n \geq 3$, note que cualesquiera 3 puntos de $\partial\mathbb{H}^2$ son vértices de un simplejo ideal regular, y por lo tanto cualquier función continua $\partial\mathbb{H}^2 \rightarrow \partial\mathbb{H}^2$ cumple la condición anterior. Antes de demostrar esto necesitamos algunos lemas.

5.1. Conclusión de la demostración

Fijemos una función $P : \partial\mathbb{H}^n \rightarrow \partial\mathbb{H}^n$ con las propiedades de arriba. Note que necesariamente P debe ser inyectiva, de otra manera se podría construir un simplejo regular ideal que se envíe a un simplejo ideal degenerado.

Lema 5.1.1. *Sea $n \geq 1$. Sea $X = \mathbb{S}^n, \mathbb{R}^n$. Sea P un poliedro compacto de X . Sea G el subgrupo de $\mathcal{I}(X)$ generado por todas las reflexiones de las hipercaras de P . Entonces*

$$X = \bigcup \{gP : g \in G\}. \quad (5.1)$$

Demostración. Sea Y la unión en (5.1). Vamos a demostrar la afirmación por inducción sobre $n \geq 1$.

La afirmación para $n = 1$ es obvia.

Supongamos que la afirmación es cierta para un $n - 1 \geq 1$. Sea P un poliedro compacto de X . Vamos a demostrar primero que Y es abierto y luego que es cerrado.

Para ver que Y es abierto, basta demostrar que Y es una vecindad de P , ya que Y es invariante bajo G .

Sea $x \in P$, note que $P^\circ \subseteq Y^\circ$. Supongamos que $x \in \partial P$. Sea S una esfera en la métrica de X centrada en x de radio muy pequeño de manera que S sólo intersecte a las caras adyacentes de x en P . Entonces si consideramos sobre S la métrica que hereda de X , entonces esta variedad riemanniana es isométrica salvo escalar a \mathbb{S}^{n-1} , y obtenemos que $P \cap S$ es un poliedro de S . Sea $G(x)$ el subgrupo de G generado por todas las reflexiones de las hipercaras de P que contienen a x . Entonces $G(x)|_S$ es el subgrupo de las isometrías de S generado por las reflexiones de las hipercaras del poliedro $P \cap S$. Por la hipótesis inductiva sobre \mathbb{S}^{n-1} tenemos que

$$S = \bigcup \{g(S \cap P) : g \in G(x)\},$$

y esto implica que si B es la bola de X tal que $\partial B = S$, entonces $B \subseteq \bigcup \{g(B \cap P) : g \in G(x)\}$, ya que $g(x) = x \forall g \in G(x)$, y por lo tanto Y es una vecindad de x . Por lo tanto Y es abierto.

Como P es compacto, obtenemos entonces que existe $r > 0$ tal que $N(P, r) := \{x \in X : \exists y \in P (d_X(x, y) < r)\}$ está contenido en Y . Suponga que $x \in \bar{Y}$. Luego existe $g \in G$ tal que $x \in N(gP, r)$, de donde $x \in N(gP, r) \subseteq Y$ ya que Y es invariante bajo G y los elementos de G son isometrías. Por lo tanto Y también es cerrado.

Por lo tanto $Y = X$ ya que X es conexo, y así obtenemos la igualdad de la afirmación. \square

Lema 5.1.2. *Sea $n \geq 2$. Sea Δ un simplejo ideal regular de \mathbb{H}^n . Sea G el subgrupo de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ generado por las reflexiones de las hipercaras de Δ . Entonces*

$$\mathbb{H}^n = \bigcup \{g\Delta : g \in G\}. \quad (5.2)$$

Demostración. Sea Y el conjunto de la derecha en la igualdad de este lema.

Durante toda la demostración vamos a trabajar en el modelo $\Pi^{n,+}$. Suponemos que uno de los vértices de Δ es ∞ .

Vamos a demostrar que existe un $r > 0$ tal que $N(\Delta, r) \subseteq Y$. Como en la demostración del lema anterior esto implicará que Y es abierto y cerrado, y por lo tanto se obtendrá la igualdad (5.2).

Dado $x \in \Pi^{n,+}$, las esferas centradas en x se pueden describir por

$$\left\{ y \in \Pi^{n,+} : \frac{\|x - y\|}{\sqrt{x_n y_n}} = s \right\}$$

para algún $s > 0$, de donde, al completar el cuadrado, obtenemos que cualquier esfera de \mathbb{H}^n centrada en x es una esfera euclidiana contenida en $\Pi^{n,+}$ y centrada en un punto que está en la misma línea euclidiana que pasa por x perpendicular a $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.

Sea $x \in \partial\Delta$ distinto a los vértices ideales. Como uno de los vértices de Δ es ∞ , tenemos que Δ es la intersección de $n + 1$ semiespacios hiperbólicos, n de los cuales son generados por hiperplanos euclidianos perpendiculares a $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, sean E_1, \dots, E_n estos semiespacios y P_1, \dots, P_n los hiperplanos euclidianos que los generan. Usando una isometría podemos suponer que $x \in \bigcup_{i=1}^n P_i$. Sean P_{i_1}, \dots, P_{i_m} los hiperplanos que contienen a x , entonces podemos tomar r lo suficientemente pequeño de manera que

$$\bar{B}_{\mathbb{H}^n}(r, x) \cap (E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_m}) = \bar{B}_{\mathbb{H}^n}(r, x) \cap \Delta.$$

Entonces cada E_{i_j} interseca a $S := S_{\mathbb{H}^n}(r, x)$ en un semiespacio esférico, aquí estamos considerando sobre S la métrica que hereda de la métrica euclidiana de \mathbb{R}^n , ya que cada P_{i_j} es un hiperplano euclidiano que contiene el centro euclidiano de la esfera euclidiana S , de donde $S \cap \Delta$ es un polígono esférico.

Sea $G(x)$ el subgrupo de G generado por las reflexiones de las hipercaras de Δ que contienen a x . Entonces todos los elementos de $G(x)$ son isometrías euclidianas de \mathbb{R}^n que respetan a S , dado que los hiperplanos P_{i_1}, \dots, P_{i_m} pasan por el centro euclidiano de S . Luego por el lema anterior tenemos que

$$S = \bigcup \{g(S \cap \Delta) : g \in G(x)\},$$

y esto implica que $B_{\mathbb{H}^n}(r, x) \subseteq \bigcup \{g\Delta : g \in G\}$

Sean v_1, \dots, v_n, v_{n+1} los vértices de Δ . Para cada $j = 1, \dots, n+1$ sea B_j una horobola centrada en v_j lo suficientemente cercana a este punto de manera que sólo intersekte las caras de Δ adyacentes a v_j . Si para cada j tenemos que S_j es la horoesfera que es frontera de la horobola B_j , S_j con la métrica heredada de \mathbb{H}^n es una variedad euclidiana y $S_j \cap \Delta$ es poliedro de S_j , esto es claro si suponemos que el vértice es el punto ∞ por la forma de las horoesferas centradas en este punto y también la forma de los simplejos ideales regulares.

Para cada j sea $G(v_j)$ el subgrupo de G generado por las reflexiones de las hipercaras de Δ que son adyacentes a v_j . Entonces $G(v_j)$ respetan a la horoesfera S_j , y además $G(v_j)|_{S_j}$ es el grupo de isometrías de S_j generado por las reflexiones de los lados del poliedro $S_j \cap \Delta$. Por el lema anterior tenemos que

$$S_j = \bigcup \{g(\Delta \cap S_j) : g \in G(v_j)\},$$

de donde obtenemos que $B_j \subseteq \bigcup \{g(B_j \cap \Delta) : g \in G(v_j)\} \subseteq Y$.

Tenemos que $K := \Delta \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_{n+1})$ es compacto. Luego por lo hecho anteriormente tenemos que existe $r > 0$ tal que $N(K, r) \subseteq Y$. Sea B'_j una horobola centrada en v_j tal que $N(B'_j, r) \subseteq B_j$, esto se puede demostrar en $\Pi^{n,+}$ suponiendo que v_j es ∞ . Sea $K' := \Delta \setminus (B'_1 \cup \dots \cup B'_{n+1})$. Entonces existe $0 < s \leq r$ tal que $N(K', s) \subseteq Y$, de donde obtenemos

$$\begin{aligned} N(\Delta, s) &= N(K', s) \cup N\left(\bigcup_{j=1}^{n+1} B'_j, s\right) \subseteq N(K', r) \cup N\left(\bigcup_{j=1}^{n+1} B'_j, r\right) \\ &\subseteq N(K', s) \cup \bigcup_{j=1}^{n+1} N(B'_j, s) \subseteq N(K', s) \cup \bigcup_{j=1}^{n+1} B_j \subseteq Y. \end{aligned}$$

De esta contención deducimos que Y es abierto y cerrado como en la demostración del lema anterior, y esto a su vez implica la igualdad (5.2). \square

Recordemos que la signatura de una isometría $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ es la restricción $\partial\mathbb{H}^n \rightarrow \partial\mathbb{H}^n$ de la extensión continua $\overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$ de una isometría.

Proposición 5.1.3. *Sea $n \geq 3$. Suponga que $P : \partial\mathbb{H}^n \rightarrow \partial\mathbb{H}^n$ es continua y envía los vértices de cualquier simplejo ideal regular en los vértices de un simplejo regular ideal. Entonces P es la signatura de una isometría de \mathbb{H}^n .*

Demostración. Suponga que $v_0, \dots, v_n \in \partial\Pi^{n,+}$ son los vértices de un simplejo ideal regular. Entonces existe un único $v'_n \in \partial\Pi^{n,+}$ distinto de v_n tal que $v_0, \dots, v_{n-1}, v'_n$ generan un simplejo ideal regular, esto se puede demostrar en $\Pi^{n,+}$ suponiendo que $v_0 = \infty$ y usando el hecho de que si $w_1, \dots, w_n \in \partial\Pi^{n,+} \setminus \{\infty\}$, estos puntos junto con ∞ forman un simplejo ideal regular sí y sólo si los w_i 's forman un simplejo regular euclidiano de $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, por la proposición 3.1.5.

Podemos componer a P con la signatura de una isometría para suponer que P fija los vértices de un simplejo regular ideal Δ , esto se puede hacer dado que podemos mandar uno de los vértices de Δ al punto ∞ y además cualesquiera dos simplejos regulares euclidianos de \mathbb{R}^{n-1} se pueden enviar el uno al otro por medio de una composición de translaciones, rotaciones y homotecias.

Sean v_0, \dots, v_n los vértices de Δ . Entonces si v'_0 es la reflexión de v_0 con respecto a cara de Δ que contiene a v_1, \dots, v_n , entonces v'_0, v_1, \dots, v_n son los vértices de un simplejo ideal regular, y como $P(v_j) = v_j$ para todo $j = 1, \dots, n$, entonces por la observación anterior tenemos que $P(v'_0) \in \{v_0, v'_0\}$, de donde como $P(v_0) = v_0$ y P es inyectiva, obtenemos que $P(v'_0) = v'_0$. Si hacemos este argumento con los demás vértices de Δ , y luego iteramos este proceso, obtenemos que si G es el subgrupo de $\mathcal{I}(\Pi^{n,+})$ generado por las reflexiones de las caras de Δ , obtenemos que P fija a cada elemento del conjunto

$$D := \{gv : g \in G, v = v_0, \dots, v_n\}, \quad (5.3)$$

aquí estamos considerando a cada $g \in G$ como su única extensión $\overline{\Pi^{n,+}} \rightarrow \overline{\Pi^{n,+}}$.

Note que si $x \in \partial\Pi^{n,+} \setminus \{\infty\}$ y tomamos una semibola superior abierta B de \mathbb{R}^n centrada en x , entonces por la forma que tienen las geodésicas maximales de \mathbb{H}^n se sigue que $\overline{\Pi^{n,+}} \setminus B$ es convexo, de donde si σ es cualquier n -simplejo de $\overline{\Pi^{n,+}}$ tal que $\sigma \cap B \neq \emptyset$, entonces uno de los vértices de σ debe estar en B .

Por el lema anterior tenemos que $\Pi^{n,+} = \bigcup \{g\Delta : g \in G\}$, de donde existe $g \in G$ tal que $g(\Delta) \cap B \neq \emptyset$, y así $gv \in B$ para algún $v = v_0, \dots, v_n$.

Por lo tanto el conjunto D en (5.3) es denso en $\partial\Pi^{n,+}$, de donde obtenemos que como P es continua y la identidad en D , entonces P es la identidad en $\partial\Pi^{n,+}$. Luego como la función original la compusimos con la signatura de una isometría, esto implica que nuestra función original es la signatura de una isometría. \square

Este es el último paso de la demostración del teorema de Rigidez de Mostow, teorema 2.0.1:

Demostración del Teorema de Rigidez De Mostow: Veamos primero que si M_1 y M_2 tienen dimensión diferente, entonces sus grupos fundamentales no son isomorfos. Sea m_j la dimensión de M_j para $j = 1, 2$. Digamos que $m_1 < m_2$. Como la cubriente universal de M_j es \mathbb{H}^{m_j} , y este último espacio topológico es contraíble, se sigue que M_j es un espacio de Eilenberg-Maclane. Como $H_{m_2}(M_1) = 0$ y $H_{m_2}(M_2) \cong \mathbb{Z}$, se sigue que los grupos m_2 -ésimos de homología de los grupos $\pi_1(M_1)$ y $\pi_1(M_2)$ son distintos, y por lo tanto estos últimos grupos no son isomorfos.

Ahora veamos el caso $n := \dim(M_1) = \dim(M_2)$. Juntando lo que hemos hecho en la tesis hasta ahora, sabemos que si $M_1 \cong \mathbb{H}^n/\Gamma_1$ y $M_2 \cong \mathbb{H}^n/\Gamma_2$ son variedades hiperbólicas compactas tales que existe un isomorfismo $\Gamma_1 \xrightarrow{\psi} \Gamma_2$, entonces:

1. Existe una pseudoisometría $P : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ que induce a ψ , con respecto a las funciones de proyección $\pi_j : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma_j$,

2. P se extiende a una función continua $\overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$, cuya restricción $\partial\mathbb{H}^n \rightarrow \partial\mathbb{H}^n$ es igual a la signatura de una isometría q de \mathbb{H}^n .

Como P induce a ψ , es decir, $P \circ \gamma = \psi(\gamma) \circ P$ para todo $\gamma \in \Gamma_1$, obtenemos que esta relación vale para las extensiones de P y de γ a $\overline{\mathbb{H}^n}$, i.e., $\overline{P} \circ \gamma = \psi(\gamma) \circ \overline{P}$ en $\overline{\mathbb{H}^n}$, de donde $q \circ \gamma = \psi(\gamma) \circ q$ en $\partial\mathbb{H}^n$, con lo que como las isometrías de \mathbb{H}^n están determinadas por sus signaturas, recuerde la proposición 1.1.29, se sigue que

$$q \circ \gamma = \psi(\gamma) \circ q \text{ en todo } \mathbb{H}^n. \quad (5.4)$$

Definimos una función $F : M_1 \rightarrow M_2$ por medio de $F(\pi_1(x)) = \pi_2(q(x))$ para todo $x \in \mathbb{H}^n$. Tenemos:

1. F está bien definida porque q induce a ψ por medio de las cubrientes π_1 y π_2 .
2. F es inyectiva: suponga que $x, x' \in \mathbb{H}^n$ son tales que $\pi_2(q(x)) = \pi_2(q(x'))$. Luego existe $\eta \in \Gamma_2$, tal que $\eta(q(x)) = q(x')$. Como ψ es un isomorfismo, existe $\gamma \in \Gamma_1$ con $\eta = \psi(\gamma)$, de donde $\psi(\gamma)(q(x)) = q(x')$, y como la relación (5.4) vale en todo \mathbb{H}^n obtenemos que $q(\gamma(x)) = q(x')$, de donde $\gamma(x) = x'$, y así $\pi_1(x) = \pi_1(x')$.
3. F es sobre: si $x \in \mathbb{H}^n$, $\pi_2(q(x)) = F(\pi_1(q^{-1}(x)))$.
4. F es una isometría: esto sale del hecho de que q es una isometría y de que q por construcción induce a F y que q y los elementos de Γ_1 y Γ_2 son todos isometrías de \mathbb{H}^n .

□

5.2. Algunas consecuencias y observaciones

Veamos ahora que las hipótesis del teorema de rigidez de Mostow para variedades cerradas son necesarias.

Este teorema no vale en dimensión 2:

Se puede demostrar que dados $l_1, l_2, l_3 > 0$ existe un hexágono hiperbólico que tiene tres lados no contiguos L_1, L_2, L_3 de longitudes l_1, l_2, l_3 , cuyos ángulos internos son rectos, y cualesquiera dos hexágonos que cumplan estas condiciones son isométricos, ver [BP92, Proposición 4.13].

Ahora, dados tres reales positivos l_1, l_2, l_3 , tomemos un hexágono hiperbólico H que tiene tres lados L_1, L_2, L_3 no contiguos con longitudes respectivas $l_1/2, l_2/2, l_3/2$, y con ángulos internos rectos.

Luego podemos tomar una copia de H y pegar ambos hexágonos a lo largo de los lados de H que no son L_1, L_2, L_3 , de manera que L_1, L_2, L_3 y los lados respectivos de la copia de H queden frente a frente, y así obtener un pantalón topológico con una estructura hiperbólica de manera que su frontera consista de geodésicas de longitud l_1, l_2, l_3 , note que el hecho de que los ángulos internos de los hexágonos sean rectos implica que las componentes de la frontera del pantalón sean geodésicas.

Finalmente, si tomamos dos pantalones hiperbólicos con fronteras geodésicas de longitudes l_1, l_2, l_3 , entonces podemos pegar los dos pantalones por medio de una isometría de las fronteras de los pantalones para obtener un doble toro con una estructura hiperbólica. Se puede demostrar que si se perturban

un poco a l_1, l_2, l_3 se obtienen métricas hiperbólicas del doble toro que no son isométricas, ver [BP92, Sección B.4].

Ahora veamos que el teorema de rigidez no necesariamente vale para variedades hiperbólicas abiertas:

Sea $\lambda > 1$. Considere el subgrupo Γ_λ infinito cíclico generado por la isometría de $\Pi^{3,+}$ dada por $x \mapsto \lambda x$. Entonces $\Gamma_\lambda \curvearrowright \Pi^{3,+}$ es libre y propiamente discontinua, y así $\Pi^{3,+}/\Gamma_\lambda$ es una variedad hiperbólica completa homeomorfa a $\mathbb{R}^2 \times S^1$. Note que

$$D := \{x \in \Pi^{3,+} : 1 \leq \|x\|_{\mathbb{R}^3} \leq \lambda\}$$

es un dominio fundamental de $\Gamma_\lambda \curvearrowright \Pi^{3,+}$, de donde la imagen bajo la proyección $\Pi^{3,+} \rightarrow \Pi^{3,+}/\Gamma_\lambda$ de la geodésica $\{(\bar{0}, t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ es el único lazo geodésico de $\Pi^{3,+}/\Gamma_\lambda$, ya que esta la única geodésica maximal de $\Pi^{3,+}$ que intersecta a las dos componentes conexas de ∂D transversalmente con el mismo ángulo en ambas. Note que este lazo geodésico de $\Pi^{3,+}/\Gamma_\lambda$ tiene longitud igual a

$$d_{\Pi^{3,+}}((\bar{0}, 1), (\bar{0}, \lambda)) = \ln \lambda,$$

por la proposición 1.1.18, de donde para todo $1 < \lambda < \lambda'$ las variedades hiperbólicas $\Pi^{3,\lambda}/\Gamma_\lambda$ y $\Pi^{3,\lambda'}/\Gamma_{\lambda'}$ son homeomorfas pero no isométricas.

Ya que hemos demostrado el teorema de rigidez de Mostow para variedades cerradas, vamos a ver algunas consecuencias importantes. Para ver esto necesitamos algunos preliminares.

Lema 5.2.1. *Suponga que f_1, f_2 son isometrías de \mathbb{H}^n tales que existe $R > 0$ tal que $d_{\mathbb{H}^n}(f_1(x), f_2(x)) \leq R$ para todo $x \in \mathbb{H}^n$. Entonces $f_1 = f_2$.*

Demostración. Si r es un rayo geodésico de \mathbb{H}^n parametrizado por longitud de arco, entonces tendremos que $f_1 \circ r$ y $f_2 \circ r$ son rayos geodésicos del mismo tipo tales que $d(f_1 \circ r(t), f_2 \circ r(t)) \leq R$ para todo $t \in [0, \infty)$. Entonces las signaturas, i.e., las restricciones a $\partial\mathbb{H}^n$ de las extensiones de f_1 y f_2 a $\overline{\mathbb{H}^n}$ son iguales, de donde por la proposición 1.1.29 se sigue que $f_1 = f_2$. \square

Corolario 5.2.2. *Suponga que $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ es una variedad hiperbólica cerrada. Cualquier isomorfismo $\Gamma \rightarrow \Gamma$ se induce por una única isometría de \mathbb{H}^n .*

Demostración. Sea $\Gamma \xrightarrow{\psi} \Gamma$ un isomorfismo. Por la demostración del teorema de Rigidez de Mostow sabemos que existe una isometría q de \mathbb{H}^n que induce a ψ .

Suponga que q' es otra isometría de \mathbb{H}^n que induce a ψ . Entonces $q^{-1} \circ q'$ induce a la función identidad de Γ . Si D es un dominio fundamental de la acción $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}^n$, entonces D es compacto, y existe $R > 0$ tal que $d(q^{-1} \circ q'(x), x) \leq R$ para todo $x \in D$, de donde para todo $x \in D$ y todo $\gamma \in \Gamma$ tenemos que

$$d(q^{-1} \circ q'(\gamma(x)), \gamma(x)) = d(\gamma(q^{-1} \circ q'(x)), \gamma(x)) = d(q^{-1} \circ q'(x), x) \leq R,$$

de donde $d(q^{-1} \circ q'(x), x) \leq R$ para todo $x \in \mathbb{H}^n$, y así por el lema 5.2.1 obtenemos que $q^{-1} \circ q' = \text{id}_\Gamma$, es decir, $q' = q$. \square

La primera consecuencia que veremos del teorema de rigidez de Mostow es que el grupo de isometrías de una variedad hiperbólica compacta está determinado por su topología. De manera más

específica, vamos a ver que es isomorfo al grupo de automorfismos exteriores de su grupo fundamental.

Recordemos que si G es un grupo, denotamos por $\text{Out}(G)$ su **grupo de automorfismos exteriores** el cual viene dado por

$$\text{Out}(G) = \text{Aut}(G)/\text{Inn}(G),$$

donde $\text{Aut}(G)$ es el grupo de isomorfismos de G sobre sí mismo e $\text{Inn}(G)$ es el grupo de automorfismos internos de G , es el decir el subgrupo de $\text{Aut}(G)$ de todos los elementos de la forma $g \mapsto aga^{-1}$ para algún $a \in G$.

Sea M una variedad topológica conexa, y sea $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ su cubriente universal. Sea Γ el grupo de transformaciones cubrientes de π .

Sea $f \in \text{Homeo}(M)$, luego existe $\tilde{M} \xrightarrow{F} \tilde{M}$ levantamiento de f , note que F debe ser un homeomorfismo. Sea $x \in \tilde{M}$ arbitrario. Para cada $\gamma \in \Gamma$ existe un único $\phi_F(\gamma) \in \Gamma$ tal que $F(\gamma(x)) = \phi_F(\gamma)(F(x))$. Note en particular que $F \circ \gamma$ y $\phi_F(\gamma) \circ F$ son levantamientos de f que coinciden en un punto, de donde $F \circ \gamma = \phi_F(\gamma) \circ F$.

Queremos ver que la función ϕ_F es un isomorfismo $\Gamma \rightarrow \Gamma$. Sean $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$. Tenemos

$$\begin{aligned} \phi_F(\gamma_1 \circ \gamma_2)(F(x)) &= F(\gamma_1 \circ \gamma_2(x)) = \phi_F(\gamma_1)(F(\gamma_2(x))) \\ &= \phi_F(\gamma_1) \circ \phi_F(\gamma_2)(F(x)), \end{aligned}$$

de donde $\phi_F(\gamma_1 \circ \gamma_2) \circ F = \phi_F(\gamma_1) \circ \phi_F(\gamma_2) \circ F$, con lo que como F es un homeomorfismo se sigue que $\phi_F(\gamma_1 \circ \gamma_2) = \phi_F(\gamma_1) \circ \phi_F(\gamma_2)$.

También tenemos que

$$\begin{aligned} F(x) &= F \circ \gamma_1^{-1}(\gamma_1(x)) = \phi_F(\gamma_1^{-1})(F(\gamma_1(x))) \\ &= \phi_F(\gamma_1^{-1}) \circ \phi_F(\gamma_1)(F(x)), \end{aligned}$$

de donde $F = \phi_F(\gamma_1^{-1}) \circ \phi_F(\gamma_1) \circ F$, y así $\phi_F(\gamma_1^{-1}) \circ \phi_F(\gamma_1) = \text{id}_{\tilde{M}}$, por lo tanto $\phi_F(\gamma_1^{-1}) = \phi_F(\gamma_1)^{-1}$.

De todo lo anterior obtenemos que ϕ_F es un homomorfismo. Para ver que ϕ_F es un isomorfismo recordemos que F es un homeomorfismo de \tilde{M} sobre sí mismo, y es claro que F^{-1} es un levantamiento de f^{-1} , de donde para cualquier $\gamma \in \Gamma$ tenemos

$$\begin{aligned} \phi_{F^{-1}}(\phi_F(\gamma))(x) &= \phi_{F^{-1}}(\phi_F(\gamma))(F^{-1} \circ F(x)) = F^{-1}(\phi_F(\gamma)(F(x))) \\ &= F^{-1}(F(\gamma(x))) = \gamma(x), \end{aligned}$$

con lo que como $\phi_{F^{-1}}(\phi_F(\gamma))$ y γ son transformaciones cubrientes de π que coinciden en un punto, se sigue que $\phi_{F^{-1}}(\phi_F(\gamma)) = \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Similarmente se demuestra que $\phi_F \circ \phi_{F^{-1}} = \text{id}_{\Gamma}$, de donde ϕ_F y $\phi_{F^{-1}}$ son inversas entre sí, con lo que en particular ϕ_F es un isomorfismo.

Ahora vamos a comparar a ϕ_F y $\phi_{F'}$ para levantamientos F y F' de f :

Tenemos que existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que $F'(x) = \gamma_0 \circ F(x)$, luego como F' y $\gamma_0 \circ F$ son levantamientos de f , se sigue que $F' = \gamma_0 \circ F$, de donde para cualquier $\gamma \in \Gamma$ tenemos

$$\begin{aligned} \gamma_0 \circ \phi_F(\gamma) \circ F &= \gamma_0 \circ F \circ \gamma = F' \circ \gamma \\ &= \phi_{F'}(\gamma) \circ F' = \phi_{F'}(\gamma) \circ \gamma_0 \circ F, \end{aligned}$$

y así como $\gamma \in \Gamma$ fue arbitrario se sigue que $\gamma_0 \circ \phi_F = \phi_{F'} \circ \gamma_0$, es decir, $\phi_{F'} = \gamma_0 \circ \phi_F \circ \gamma_0^{-1}$. Por lo tanto de toda esta construcción obtenemos un homomorfismo

$$\begin{aligned} \text{Homeo}(M) &\xrightarrow{\text{Out}(M)} \text{Out}(\Gamma) \\ f &\longmapsto \langle \phi_{\hat{f}} \rangle \end{aligned}$$

donde \hat{f} es cualquier levantamiento de f por medio de la proyección cubriente $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma$.

Si S es una superficie sin frontera a la cual se le puede asignar una estructura de variedad hiperbólica \mathbb{H}^2/Γ , se puede demostrar que el homomorfismo anterior induce un isomorfismo

$$\text{Homeo}(S)/\text{Homeo}^0(S) \rightarrow \text{Out}(\Gamma),$$

ver [FM11, teorema 8.1], donde $\text{Homeo}^0(S)$ es la colección de homeomorfismos de S en sí mismo que son isotópicos a la identidad, el cual es un subgrupo normal de $\text{Homeo}(S)$. $\text{Homeo}(S)/\text{Homeo}^0(S)$ es el **grupo modular de la superficie** S . Para variedades hiperbólicas de dimensión mayor tenemos lo siguiente:

Teorema 5.2.3. *Si M^n es una variedad hiperbólica cerrada, conexa y con $n \geq 3$, entonces tenemos que $\text{Out}(M)$ restringida a $\mathcal{I}(M)$ es un isomorfismo sobre $\text{Out}(\Gamma)$.*

Demostración. Suponga que $M \cong \mathbb{H}^n/\Gamma$ con cubriente $\pi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma$.

Si $\langle \psi \rangle \in \text{Out}(\Gamma)$, por la demostración del teorema de rigidez de Mostow tenemos que existe una isometría q de \mathbb{H}^n que induce a ψ . Sea \hat{q} la función $M \rightarrow M$ que induce q por medio de π , en particular \hat{q} es un levantamiento de q . Luego es claro por la construcción de la función $\text{Out}(M)$ y la definición de inducción que $\phi_{\hat{q}} = \psi$. Por lo tanto $\text{Out}(M)$ es sobre $\text{Out}(\Gamma)$ al restringirla a $\mathcal{I}(M)$.

Ahora suponga que $f \in \mathcal{I}(M)$ es tal que $\langle \phi_{\hat{f}} \rangle = \langle \text{id} \rangle$ en $\text{Out}(\Gamma)$, para algún levantamiento \hat{f} de f . Entonces existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que $\phi_{\hat{f}}(-) = \gamma_0^{-1} \circ - \circ \gamma_0$, de donde obtenemos que $\hat{f} \circ \gamma = \gamma_0^{-1} \circ \gamma \circ \gamma_0 \circ \hat{f}$ para todo $\gamma \in \Gamma$, i.e., $\gamma_0 \circ \hat{f}$ conmuta con todos los elementos de Γ , i.e., induce a la identidad de Γ , de donde por el corolario 5.2.2 se sigue que $\gamma_0 \circ \hat{f} = \text{id}_{\mathbb{H}^n}$, y como $\gamma_0 \circ \hat{f}$ es un levantamiento de f , entonces $f = \text{id}_M$. \square

Para finalizar veremos que el grupo de isometrías de una variedad hiperbólica cerrada de dimensión ≥ 3 es finito. Esto también vale para superficies, pero se demuestra con otros métodos:

Teorema 5.2.4. *Suponga que S es una superficie hiperbólica cerrada. Si g es el género de S , entonces $\mathcal{I}(S)$ es finito, y aun más $|\mathcal{I}^+(S)| \leq 84(g-1)$.*

Una demostración de este hecho se encuentra en [FM11, Teorema 7.4].

En contraste con el caso $\dim(M) \geq 3$, para el cual vamos a obtener como consecuencia que $\text{Out}(\pi_1(M))$ es finito, tenemos que si S es una superficie hiperbólica cerrada, entonces su grupo modular es infinito, y así en particular $\text{Out}(\pi_1(S))$ es infinito, ver [BP92, Teorema B.4.22].

Necesitamos primero una observación general:

Lema 5.2.5. *Sea M una variedad topológica, con cubriente universal $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$, y grupo de transformaciones cubrientes Γ . Si $f_1, f_2 \in \text{Homeo}(M)$ son homotópicas, entonces en $\text{Out}(\Gamma)$ tenemos que $\langle \phi_{\hat{f}_1} \rangle = \langle \phi_{\hat{f}_2} \rangle$.*

Demostración. Es claro que $\pi \times \text{id}_{[0,1]}$ es una cubriente de $M \times [0, 1]$ cuyas transformaciones cubrientes son el grupo $\{\gamma \times \text{id}_{[0,1]} : \gamma \in \Gamma\}$. Sea $h : M \times [0, 1] \rightarrow M$ una homotopía de f_0 a f_1 , sea H un levantamiento de h por medio de π .

Sea $x \in \hat{M}$. Para cada $\gamma \in \Gamma$ existe $\psi(\gamma) \in \Gamma$ tal que $H(\gamma(x), 0) = \psi(\gamma)(H(x, 0))$. Note que $H(\gamma(-), t)$ y $\psi(\gamma)(H(-, t))$ son levantamientos de h que coinciden en un punto, de donde son iguales. En particular obtenemos que si definimos $F_j := H(-, j)$ para $j = 0, 1$, obtenemos que F_j es un levantamiento de f_j tal que $F_j \circ \gamma = \psi(\gamma) \circ F_j$. Por lo tanto $\psi = \phi_{F_j}$ para cada $j = 0, 1$, y en particular $\phi_{F_0} = \phi_{F_1}$, de donde por la buena definición de $\text{Out}(M)$ obtenemos que $\langle \phi_{\hat{f}_1} \rangle = \langle \phi_{\hat{f}_2} \rangle$. \square

Corolario 5.2.6. *Sea $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ una variedad hiperbólica cerrada. Suponga que $f_1, f_2 \in \mathcal{I}(M)$ son homotópicos, entonces $f_1 = f_2$.*

Demostración. De lo anterior tenemos que $\langle \phi_{\hat{f}_1} \rangle = \langle \phi_{\hat{f}_2} \rangle$, de donde por el teorema 5.2.3 se sigue que $f_1 = f_2$. \square

Teorema 5.2.7. *Si M^n es una variedad hiperbólica cerrada con $n \geq 3$, entonces $\mathcal{I}(M)$ es finito.*

Demostración. Consideremos el conjunto $\mathcal{I}_{met}(M)$ de todas las isometrías de M en sí mismo como espacio métrico, entonces $\mathcal{I}(M) \subseteq \mathcal{I}_{met}(M)$, de hecho se puede demostrar que estas dos colecciones son iguales para cualquier variedad riemanniana usando la función exponencial de la variedad, no es necesario usar este hecho en esta demostración.

Consideramos la métrica

$$d(f_1, f_2) = \sup_{x \in M} d_M(f_1(x), f_2(x)),$$

sobre el conjunto, $C^0(M, M)$, de funciones continuas $M \rightarrow M$. Entonces por el teorema de Arzelà-Ascoli tenemos que $\mathcal{I}_{met}(M)$ es un subespacio compacto, este conjunto es claramente cerrado, note que no es igual de trivial demostrar que $\mathcal{I}(M)$ es un cerrado de este espacio, y es una familia equicontinua porque consiste de isometrías métricas. Veamos que $\mathcal{I}(M)$ es un subespacio discreto de $\mathcal{I}_{met}(M)$, luego esto implicará que $\mathcal{I}(M)$ es finito ya que $\mathcal{I}_{met}(M)$ es compacto.

Como M es compacto, por el lema del número de Lebesgue existe $\rho > 0$ tal que para todo $x \in M$ la bola $B_M(x, \rho)$ es isométrica a una bola del mismo radio en \mathbb{H}^n , de donde para cualesquiera $x, y \in M$ tales que $d_M(x, y) < \rho$, existe un único arco geodésico de M que va de x a y .

Sean $f_1, f_2 \in \mathcal{I}_{met}(M)$ tales que $d(f_1, f_2) < \rho$. Entonces podemos construir una homotopía $H : [0, 1] \times M \rightarrow M$ que envía a (t, x) al punto del arco geodésico que va de $f_1(x)$ a $f_2(x)$ que dista $t \cdot d_M(f_1(x), f_2(x))$ de $f_1(x)$. Entonces f_1 y f_2 son homotópicas, de donde por el corolario anterior deben ser iguales. Entonces por lo dicho anteriormente concluimos que $\mathcal{I}(M)$ es finito. \square

Capítulo 6

Lema de Margulis y descomposición delgada/gruesa

Para generalizar el teorema de rigidez de Mostow a variedades hiperbólicas completas y de volumen finito necesitamos una propiedad notable acerca de las variedades hiperbólicas completas, que es el teorema de descomposición delgada/gruesa. Para demostrar este teorema necesitamos otro resultado importante de geometría hiperbólica que es el lema de Margulis hiperbólico. La fuente de este capítulo es [BP92, Capítulo D] y [Pur20, Capítulo 5].

6.1. Partes delgada y gruesa de una variedad hiperbólica y lema de Margulis

Sea $M \cong \mathbb{H}^n/\Gamma$ una variedad hiperbólica completa. Recordemos que la proyección $\pi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma = M$ es una cubriente y por lo tanto una isometría local, i.e., cada $x \in \mathbb{H}^n$ tiene una bola abierta donde π es una isometría sobre su imagen, de donde si Γ es un grupo no trivial, se sigue que para todo $x \in \mathbb{H}^n$ el real

$$\sup\{\delta > 0 : \pi \upharpoonright: \overline{B_{\mathbb{H}^n}(x, \delta)} \rightarrow M \text{ es un encaje } C^\infty\}$$

es un número finito real positivo.

Definición 6.1.1. Suponga que $M \cong \mathbb{H}^n/\Gamma$ es una variedad hiperbólica completa, con proyección asociada $\pi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma$, y que $x \in M$. Sea $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$. El **radio de inyectividad de x** , el cual denotamos $\text{injrad}(x)$, es el real positivo dado por

$$2 \cdot \sup\{\delta > 0 : \pi \upharpoonright: \overline{B_{\mathbb{H}^n}(\tilde{x}, \delta)} \rightarrow M \text{ es un encaje } C^\infty\},$$

note que $\text{injrad}(x)$ no depende del levantamiento de x que se elija.

Lema 6.1.2. Suponga que $M \cong \mathbb{H}^n/\Gamma$ es una variedad hiperbólica completa con proyección $\pi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma$. Sea $x \in M$ y $\hat{x} \in \mathbb{H}^n$ un levantamiento de x . Entonces

$$\text{injrad}(x) = \inf\{d(\hat{x}, A\hat{x}) : A \neq Id \in \Gamma\}. \quad (6.1)$$

Aun más, este ínfimo es un mínimo.

Demostración. Este ínfimo es un mínimo porque la acción de Γ sobre \mathbb{H}^n es propiamente discontinua. Elija $A \in \Gamma$ que realice este mínimo. Sea r igual a este mínimo. Entonces, $\overline{B(\hat{x}, r/2)} \cap \overline{B(A\hat{x}, r/2)} \neq \emptyset$, ya que el punto medio entre \hat{x} y $A\hat{x}$ está en esta intersección, de donde como $A(\overline{B(\hat{x}, r/2)}) = \overline{B(A\hat{x}, r/2)}$, se sigue que $\pi \upharpoonright: \overline{B_{\mathbb{H}^n}(\tilde{x}, \delta)} \rightarrow M$ no es un encaje, y así $r \geq \text{injrads}(x)$. Si $0 < \delta < r$, tendremos que $\overline{B(\hat{x}, \delta/2)} \cap \overline{B(A\hat{x}, \delta/2)} = \emptyset$ para todo $A \neq Id \in \Gamma$, lo cual implica que $\pi \upharpoonright \overline{B(\hat{x}, \delta/2)}$ es un encaje, y así $\delta \leq \text{injrads}(x)$. Por lo tanto $r = \text{injrads}(x)$. \square

Definición 6.1.3. Sea M una variedad hiperbólica completa, y sea $\epsilon > 0$. Defina la **parte ϵ -delgada** de M , la cual denotamos por $M^{<\epsilon}$, como el conjunto

$$M^{<\epsilon} := \{x \in M : \text{injrads}(x) < \epsilon\}.$$

Similarmente, la **parte ϵ -gruesa** de M , la cual denotamos por $M^{>\epsilon}$, se define por

$$M^{>\epsilon} := \{x \in M : \text{injrads}(x) > \epsilon\}.$$

También se definen $M^{\leq\epsilon}$, $M^{\geq\epsilon}$ y $M^{=\epsilon}$ de manera análoga.

Observación 6.1.4. Por el lema 6.1.2 se sigue de inmediato que tenemos las siguientes igualdades

$$M^{<\epsilon} = \{x \in M : \forall[\alpha] \in \pi_1(M, x) \setminus \{[c_x]\}, l(\alpha) < \epsilon\}, \text{ y ,}$$

$$M^{\leq\epsilon} = \{x \in M : \exists[\alpha] \in \pi_1(M, x) \setminus \{[c_x]\}, l(\alpha) \geq \epsilon\},$$

de donde en particular las partes ϵ gruesa y delgada de una variedad hiperbólica completa depende sólo de su métrica y su topología.

Vamos a enunciar el lema de Margulis para variedades hiperbólicas, el cual implicará que si M es una variedad hiperbólica completa y $\epsilon > 0$ es lo suficientemente pequeño, entonces las componentes conexas $M^{<\epsilon}$ tienen una estructura sencilla.

Definición 6.1.5. Sea G un grupo.

1. La **serie central descendente** de G es una sucesión $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \dots$, dada por $G_i := [G, G_{i-1}]$ para cada $i \geq 1$, donde para cualesquiera $H, K \leq G$, $[H, K]$ es el subgrupo de G que se genera por la colección $\{hkh^{-1}k^{-1} : h \in H, k \in K\}$.
2. G es **nilpotente** si su serie central es eventualmente trivial, i.e., si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que G_i es el grupo trivial para todo $i \geq N$.
3. G es **virtualmente nilpotente** si tiene un subgrupo de índice finito que es nilpotente.

Teorema 6.1.6 (Lema de Margulis para variedades hiperbólicas). *Para cada $n \geq 2$ existe una constante $\epsilon_n > 0$ que cumple la siguiente propiedad: Sea $M \cong \mathbb{H}^n/\Gamma$ una variedad hiperbólica completa con proyección asociada $\pi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma$. Entonces para cada $x \in M$ y cada $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ tenemos que el subgrupo de Γ generado por el conjunto*

$$\{A \in \Gamma : d(\tilde{x}, A\tilde{x}) \leq \epsilon_n\}$$

es virtualmente nilpotente.

Una demostración de este teorema se puede encontrar en [BP92, Teorema D.1.1].

A ϵ_n lo llamaremos **constante de Margulis de dimensión n** .

6.2. Descomposición delgada/gruesa

Vamos a hacer la descripción de las variedades sencillas en las cuales se descompone $M^{\leq \epsilon}$ para $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño y M una variedad hiperbólica completa. Primero necesitamos algunos preliminares.

Lema 6.2.1. *Suponga que g es una isometría parabólica de $\Pi^{n,+}$ que fija a ∞ . Entonces g es de la forma $(x, s) \mapsto (\phi(x), s)$, donde ϕ es una isometría de \mathbb{R}^{n-1} .*

Demostración. Como g es una isometría parabólica de $\Pi^{n,+}$ que fija a ∞ se sigue, por el lema 1.1.12, que g es de la forma $x \mapsto \lambda \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + b$ para algunos $R \in O(n-1)$, $\lambda > 0$ y $b \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.

Luego la matriz $\lambda \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - I_n$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda R - I_{n-1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \lambda - 1 \end{pmatrix}.$$

Queremos ver que $\lambda = 1$. Suponga que no. Luego $\lambda R - I_n$ debe ser invertible, de otra manera existiría $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ no nulo tal que $\lambda R x = x$, lo cual contradiría que $R \in O(n-1)$, de donde como $\lambda - 1 \neq 0$, la ecuación $\lambda \tilde{R} x + b = x$ tiene una solución en $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, y g no es entonces una isometría parabólica. Contradicción. Por lo tanto $\lambda = 1$. $b \neq 0$, ya que de otra manera g fijaría a $\bar{0}$ también, de donde g es de la forma $x \mapsto \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + b$ para algunos $R \in O(n-1)$ y $b \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ no nulo, y por lo tanto es de la forma indicada en el lema. \square

Notación 6.2.2. Suponga que $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ es una variedad hiperbólica completa. Suponga que $G \leq \Gamma$. Si $A \subseteq \mathbb{H}^n$, diremos que $\mathbf{A}/\mathbf{G} = \mathbf{A}/\Gamma$ si tenemos que para todo $x, y \in A$

$$\exists \gamma \in \Gamma(\gamma(x) = y) \Leftrightarrow \exists \gamma \in G(\gamma(x) = y).$$

Definición 6.2.3. Sea $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ una variedad hiperbólica completa. Una **cúspide** de M es una subvariedad de la forma B/Γ , donde B es una horobola centrada en un punto $v \in \partial\mathbb{H}^n$ tal que $B/\Gamma = B/\Gamma_v$, donde Γ_v es el subgrupo de Γ generado por todos los elementos parabólicos de Γ que fijan a v .

Note que si B/Γ es una cúspide de la variedad hiperbólica completa \mathbb{H}^n/Γ , entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que B es una horobola centrada en ∞ , de donde por el lema anterior tenemos que B/Γ es homeomorfa a $(S/\Gamma_\infty) \times (0, \infty)$, donde $S = \partial B$.

Teorema 6.2.4. *Sea M^n una variedad hiperbólica completa de volumen finito. Entonces para todo $\epsilon > 0$ tenemos que $M^{\geq \epsilon}$ es compacto.*

Demostración. Suponga que $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$, con proyección cubriente asociada $\pi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma$.

No es difícil ver por la definición de la función injrad que $M^{\geq \epsilon}$ es cerrado, note que $M^{\geq \epsilon}$ es la colección de los $x \in M$ tales que si \hat{x} es un levantamiento de x , $\pi \upharpoonright B_\epsilon(\hat{x}, \epsilon/2)$ es un encaje. Entonces basta ver que también es acotado, ya que M es completa.

Como $M^{\geq \epsilon} = \{x \in M : \text{injrad}(x) \geq \epsilon\}$, tenemos que si $x \in M^{\geq \epsilon}$, la bola $B_M(x, \epsilon/4)$ es isométrica a una bola de \mathbb{H}^n de radio $\epsilon/4$, ya que como $\pi \upharpoonright B_{\mathbb{H}^n}(\tilde{x}, \epsilon/4) \rightarrow M$ es un encaje, en

particular es una isometría sobre su imagen ya que π es una isometría local, de donde para $x \in M^{\geq \epsilon}$ el real positivo $\text{Vol}(B_M(x, \epsilon/4))$ es una constante V .

Sea S un subconjunto contable denso de $M^{\geq \epsilon}$. Considere el conjunto

$$\mathcal{M} := \{Y \subseteq S : d_M(s_1, s_2) \geq \epsilon, \forall s_1, s_2 \in Y\}.$$

Entonces \mathcal{M} está parcialmente ordenado por inclusión, de donde como S es contable, podemos construir por inducción sobre S un elemento $Y_0 \in \mathcal{M}$ que sea maximal. Como las bolas

$$\{B_M(s, \epsilon/4) : s \in Y_0\}$$

son disjuntas entre sí, se sigue que

$$\#Y_0 \leq \frac{\text{Vol}(M)}{V} < \infty.$$

La condición de maximalidad de Y_0 y el hecho de que S es denso implica que

$$M^{\geq \epsilon} \subseteq \bigcup \{B_M(s, \epsilon) : s \in Y_0\},$$

y por lo tanto $M^{\geq \epsilon}$ es acotado. □

Lema 6.2.5. *Suponga que $\psi, \phi \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ no son isometrías elípticas y conmutan entre sí. Entonces ψ es una isometría loxodrómica(parabólica) si y sólo si ϕ también lo es. Aun más, fijan los mismos puntos de $\partial\mathbb{H}^n$.*

Demostración. Suponga que ψ es una isometría loxodrómica y que fija a los dos puntos $v, w \in \partial\mathbb{H}^n$. Entonces como ψ y ϕ conmutan, es fácil ver que ψ también fija a los puntos $\phi(v), \phi(w)$, con lo que $\{\phi(v), \phi(w)\} = \{v, w\}$. Se debe tener que $\phi(v) = v$ y $\phi(w) = w$, ya que de otra manera ϕ fijaría un punto de la geodésica maximal que va de v a w , y ϕ sería una isometría elíptica.

Si ψ es una isometría parabólica, ϕ también debe serlo ya que como no es una isometría elíptica en otro caso tendríamos que sería una isometría loxodrómica, y por lo anterior esto implicaría que ψ fuera una isometría loxodrómica. Que ψ y ϕ fijan los mismos puntos de $\partial\mathbb{H}^n$ sale como en el caso anterior. □

Lema 6.2.6. *Sea G un subgrupo no trivial de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ sin isometrías elípticas, virtualmente nilpotente y que actúa de manera propiamente discontinua sobre \mathbb{H}^n . Entonces o G se genera por una isometría loxodrómica y $G \cong \mathbb{Z}$, o G consiste de isometrías parabólicas que fijan todas a un mismo punto de $\partial\mathbb{H}^n$.*

Demostración. Sea H un subgrupo nilpotente de G de índice finito. Al ser H nilpotente, tiene centro no trivial, de donde todos los elementos no triviales de H son isometrías parabólicas que fijan a un punto en $\partial\mathbb{H}^n$ o todos fijan a una geodésica maximal de \mathbb{H}^n . Si $\gamma \in G$, existe $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $\gamma^k \in H$. Hay dos casos.

1. Si H consiste de isometrías parabólicas que fijan el mismo punto, tenemos que como $\gamma^k \in H$ y γ y γ^k conmutan, entonces γ es una isometría parabólica que fija el mismo punto que fijan todos los elementos de H .

2. Si todos los elementos de H son isometrías loxodrómicas que fijan la misma geodésica maximal, como $\gamma^k \in H$ y γ^k y γ conmutan, γ debe fijar la misma geodésica maximal, de donde como G no es trivial y actúa de manera propiamente discontinua y libre sobre una geodésica maximal, entonces $G \cong \mathbb{Z}$, ya que las geodésicas maximales de \mathbb{H}^n son isométricas a \mathbb{R} , y \mathbb{Z} es el único grupo que actúa de manera libre y propiamente discontinua sobre \mathbb{R} .

□

Teorema 6.2.7. *Suponga que $M^n \cong \mathbb{H}^n/\Gamma$ es una variedad hiperbólica completa, con función cubriente $\pi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma$. Si $0 < \epsilon \leq \epsilon_n$; donde ϵ_n es la constante de Margulis de dimensión n , entonces las componentes conexas de $M^{<\epsilon}$ consisten de vecindades tubulares de lazos geodésicos de longitud $< \epsilon$, o de cúspides.*

Idea de la demostración: La idea de la demostración de este hecho se toma de la demostración de esta afirmación dada en [BP92, Teorema D.3.3].

Sea $x \in M^{<\epsilon}$ y sea $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$. Por el lema 6.1.2 tenemos que el grupo $\Gamma_\epsilon(\tilde{x})$ es no trivial. $\Gamma_\epsilon(\tilde{x})$ es virtualmente nilpotente por el lema de Margulis, ya que es subgrupo de $\Gamma_{\epsilon_n}(\tilde{x})$. Hay dos casos por el lema 6.2.6:

Si $\Gamma_{\epsilon_n}(\tilde{x})$ es infinito cíclico generado por una isometría loxodrómica γ , podemos suponer que en el modelo $\Pi^{n,+}$ fija al origen y a ∞ . Sea Γ_0 el subgrupo de Γ de elementos que fijan a 0 y a ∞ . Entonces como Γ_0 actúa de manera propiamente discontinua sobre la geodésica que va del origen a ∞ , Γ_0 es infinito cíclico generada por una isometría loxodrómica γ_0 , de donde como $\gamma \in \Gamma_0$, se sigue que γ es una potencia de γ_0 .

Considere el conjunto

$$N := \{y \in \Pi^{n,+} : \exists k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, d(y, \gamma^k(y)) < \epsilon\},$$

entonces es fácil ver que N es una vecindad tubular de la geodésica que va del origen a ∞ y que $\tilde{x} \in N$. Luego se demuestra que si $g \in \Gamma$ es tal que $g(N) \cap N \neq \emptyset$, entonces $g \in \Gamma_0$. Esto implica, ya que toda una isometría loxodrómica que fija al origen y a ∞ es la extensión de una rotación de $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ que

$$\pi(N) = N/\Gamma_0.$$

Luego se demuestra, usando esta igualdad, que $\pi(N)$ es una vecindad del lazo geodésico $\pi((0, \infty))$, esto no es trivial. Es claro que $x \in \pi(N)$, y es fácil ver que $\pi(N) \subseteq M^{<\epsilon}$.

Ahora suponga que $\Gamma_\epsilon(\tilde{x})$ consiste de la identidad y de isometrías parabólicas que fijan todas al mismo punto de $\partial\mathbb{H}^n$. Podemos suponer en $\Pi^{n,+}$ que este punto es ∞ . Se considera al subgrupo, Γ_∞ , de todos los elementos parabólicos de Γ que fijan a ∞ . Se considera el conjunto

$$N = \{y \in \Pi^{n,+} : \exists \gamma \in \Gamma_\infty \setminus \{\text{id}\}, d(y, \gamma(y)) < \epsilon\},$$

se demuestra que N es una horobola, y que si $g \in \Gamma$, entonces $g(N) \cap N \neq \emptyset$ si y sólo si $g \in \Gamma_\infty$. Esto implica que

$$\pi(N) = N/\Gamma_\infty.$$

Es claro entonces que $\pi(N)$ es una cúspide de $M^{<\epsilon}$ que contiene a x .

□

De este último argumento obtenemos lo siguiente:

Proposición 6.2.8. *Sea $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ una variedad hiperbólica completa con proyección $\pi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma$. Entonces para todo $0 < \epsilon < \epsilon_M$ tenemos que $\pi^{-1}(M^{<\epsilon})$ es una unión disyunta de horobolas.*

Demostración. Sea B una horobola de \mathbb{H}^n tal que B/Γ es una cúspide de $M^{<\epsilon}$. Sea $v \in \partial\mathbb{H}^n$ el centro de B . Entonces por la idea de la demostración del teorema 6.2.7 tenemos que si $x \in B$, entonces existe una isometría parabólica $A \in \Gamma$ que fija a v y $d(Ax, x) < \epsilon$, que cualquier otro elemento de Γ que haga lo mismo debe ser una isometría parabólica que fije a v , de donde si B' es otra horobola tal que B'/Γ es una cúspide $M^{<\epsilon}$, luego como $B' \neq B$, tienen centros diferentes, y entonces $B \cap B' = \emptyset$, ya que de otra manera existiría x en esta intersección y cualquier elemento $A \in \Gamma$ tal que $d(Ax, x) < \epsilon$ debe fijar tanto el centro de B como el centro de B' y debe ser una isometría parabólica, lo cual es una contradicción. \square

De todo lo anterior obtenemos lo siguiente:

Corolario 6.2.9. *Sea $M \cong \mathbb{H}^n/\Gamma$ una variedad hiperbólica completa de volumen finito. Entonces existe un $0 < \epsilon_M \leq \epsilon_n$ tal que $M^{<\epsilon_M}$ consiste sólo de cúspides. Esto sucede también para todos los $0 < \epsilon \leq \epsilon_M$.*

Demostración. Las fronteras de las vecindades tubulares de los lazos geodésicos que están contenidas en $M^{<\epsilon_n}$ son componentes conexas de la variedad compacta $M^{=\epsilon} = \partial M^{\geq\epsilon}$, de donde hay un número finito de tales vecindades, y podemos tomar $\epsilon_M > 0$ que sea menor que las longitudes de los lazos geodésicos asociadas a las vecindades tubulares, y así obtendremos que $M^{<\epsilon_M}$ consiste sólo de cúspides. \square

Corolario 6.2.10. *Sean $0 < \epsilon' < \epsilon \leq \epsilon_M$. Entonces $M^{\geq\epsilon}$ es un retracto por deformación de $M^{\geq\epsilon'}$ y de M . Aun más, $M^{>\epsilon}$ es homeomorfo a M .*

Demostración. Suponga que $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$. Que $M^{\geq\epsilon}$ es retracto por deformación sale de inmediato del hecho de que si N es una cúspide de la forma B/Γ , entonces existe un homeomorfismo entre \bar{N} y $(S/\Gamma_v) \times [0, \infty)$, que envía a la frontera de N en $(S/\Gamma_v) \times \{0\}$, donde v es el centro de la horobola B , y $S = \partial B$.

Que $M^{\geq\epsilon}$ es un retracto por deformación de $M^{\geq\epsilon'}$ sale de que si B es una horobola centrada en un punto $v \in \partial\mathbb{H}^n$ de manera que B/Γ es una cúspide y una componente conexa de $M^{<\epsilon}$, entonces existe otra horobola B' centrada v contenida en B de manera que B'/Γ es una cúspide y una componente conexa de $M^{<\epsilon'}$, esto se puede ver en el modelo $\Pi^{n,+}$ suponiendo que $v = \infty : (x, t) \in B$, existe $A \in \Gamma$ tal que $d_{\Pi^{n,+}}((x, t), A(x, t)) < \epsilon$, luego existe un $s > t$ lo suficientemente grande de manera que $d_{\Pi^{n,+}}((x, s), A(x, s)) < \epsilon'$, esto sale de la forma de $d_{\Pi^{n,+}}$ dada en la proposición 1.1.18, de donde $(x, s) \in \pi^{-1}(M^{<\epsilon'}) \cap \pi^{-1}(M^{<\epsilon})$, de donde por la proposición 6.2.8 se sigue que existe una horobola B' centrada en ∞ tal que B'/Γ es una cúspide y una componente conexa de $M^{<\epsilon'}$. \square

Corolario 6.2.11. *Si M es una variedad hiperbólica completa y de volumen finito, entonces M es homeomorfa al interior de una variedad topológica compacta cuya frontera consiste de variedades euclidianas cerradas.*

Demostración. Si $0 < \epsilon < \epsilon_M$, $M^{\geq\epsilon}$ es una variedad compacta de la cual $M^{>\epsilon}$ es su interior, y esta última variedad es homeomorfa a M .

Las fronteras de $M^{\geq\epsilon}$ son las fronteras de las cúspides de $M^{<\epsilon}$, las cuales son de la forma $S/\Gamma_v = S/\Gamma$, donde S es una esfera centrada en un punto v de $\partial\mathbb{H}^n$, y Γ_v es un grupo generado por isometrías

parabólicas que fijan a v , de donde por la proposición 1.1.35 y el lema 6.2.1 tenemos que S/Γ_v es una variedad euclidiana ya que Γ_v consiste de isometrías de S , y S hereda una estructura de variedad euclidiana de la métrica de \mathbb{H}^n . \square

Por último necesitamos el siguiente concepto:

Definición 6.2.12. Sea M una variedad hiperbólica completa y de volumen finito. Entonces si $0 < \epsilon < \epsilon_M$, recordemos que $M^{\geq \epsilon}$ es una variedad compacta cuyo interior es homeomorfo a M , y que $M^{< \epsilon}$ sólo consiste de cúspides. Definimos al **número de cúspides de M** como la cantidad de componentes conexas de $M^{< \epsilon}$, para algún $0 < \epsilon < \epsilon_M$.

Note que este número es finito porque $M^{\geq \epsilon}$ es compacta, y además está bien definido ya que este número es simplemente la cantidad de componentes conexas de la variedad compacta de la cual M es interior.

También note que si $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ es una variedad hiperbólica compacta de volumen que tenga sólo una cúspide, entonces la acción de Γ sobre los puntos cúspides de este grupo es transitiva, ya que para todo punto cúspide v existe una horobola B centrada en v tal que $B/\Gamma_v = B/\Gamma$ es igual a $M^{< \epsilon}$.

Capítulo 7

El teorema de rigidez de Mostow para variedades hiperbólicas completas y de volumen finito

En este capítulo daremos una demostración del siguiente teorema:

Teorema 7.0.1 (Teorema de Rigidez de Mostow para Variedades Hiperbólicas Completas y de Volumen Finito). *Sean M_1 y M_2 dos variedades sin frontera, hiperbólicas, conexas, orientadas, completas, de volumen finito, y ambas de dimensión ≥ 3 . Entonces si los grupos fundamentales de estas variedades son isomorfos, las variedades son isométricas.*

La demostración se hará adaptando los pasos del caso cerrado junto con los resultados que vimos en el capítulo anterior.

Este teorema lo demostró Marden en 1974, [Mar74], en el caso de dimensión 3, y un año antes Prasad, [Pra73], demostró un resultado mucho más general que implica el teorema anterior en todas las dimensiones ≥ 3 .

El paso principal del argumento que se da en este capítulo para demostrar el teorema anterior es demostrar que si M es una variedad hiperbólica completa, y \tilde{M} es una variedad compacta de la cual M es su interior, entonces el volumen de M es proporcional a la norma de Gromov de \tilde{M} . Este hecho aparece en [Thu+80, Teorema 6.5.4] y se demuestra de una manera diferente, sin embargo, usaremos algunas ideas de esta demostración.

Otra idea importante que usamos es el argumento dado en [Tuk85, Lema 3.4], que ya usamos en el capítulo 2, para demostrar que si \mathbb{H}^n/Γ_j son variedades hiperbólicas completas y de volumen finito para $j = 1, 2$, tales que existe un isomorfismo $\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$, entonces existe una pseudoisometría que lo induce.

7.1. Pseudoisometrías

El primer paso para demostrar el teorema de rigidez de Mostow en el caso abierto es obtener una pseudoisometría $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ inducida por un isomorfismo $\pi_1(M_1) \rightarrow \pi_1(M_2)$. El siguiente resultado lo demostraremos, más adelante, usando ideas de [Tuk85, Lema 3.4]:

Proposición 7.1.1. Sean M_1 y M_2 dos variedades hiperbólicas orientadas, completas y de volumen finito, con $M_j \cong \mathbb{H}^n/\Gamma_j$ para $j = 1, 2$. Si existe un isomorfismo $\Gamma_1 \xrightarrow{\phi} \Gamma_2$, entonces existe una pseudoisometría $\mathbb{H}^n \xrightarrow{\tilde{\phi}} \mathbb{H}^n$ que lo induce.

Recordemos que ψ sea una pseudoisometría significa que se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\frac{1}{c_1}d(\psi(x), \psi(y)) - c_2 \leq d(x, y) \leq c_1d(\psi(x), \psi(y)), \forall x, y \in \mathbb{H}^n,$$

donde $c_1, c_2 > 0$ son constantes. También recordemos que si $M_1 \cong \mathbb{H}^n/\Gamma_1$ y $M_2 \cong \mathbb{H}^n/\Gamma_2$, entonces que ψ induzca a ϕ significa que $\psi(g(x)) = \phi(g)(\psi(x))$ para todo $g \in \Gamma_1$ y $x \in \mathbb{H}^n$.

Antes de empezar la demostración del teorema debemos hacer un análisis de las cúspides de las variedades hiperbólicas, completas y de volumen finito.

Definición 7.1.2. Sea Γ un subgrupo de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ que actúe sobre \mathbb{H}^n de manera libre y propiamente discontinua, luego $M := \mathbb{H}^n/\Gamma$ es una variedad hiperbólica completa, con proyección asociada $\pi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma$. Decimos que $v \in \partial\mathbb{H}^n$ es un **punto cúspide** de Γ si existe una horobola B centrada en v de manera que B/Γ es una cúspide de M .

Ahora queremos demostrar que si \mathbb{H}^n/Γ_1 y \mathbb{H}^n/Γ_2 son variedades hiperbólicas completas tales que existe un isomorfismo $\Gamma_1 \xrightarrow{\phi} \Gamma_2$, entonces existe una biyección entre los puntos cúspides de Γ_1 y Γ_2 que se puede describir geoméricamente usando a ϕ . Para definir esta biyección necesitamos el primer teorema de Bieberbach:

Recordemos que hay un isomorfismo entre $\mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ y el producto semidirecto $O(n) \rtimes \mathbb{R}^n$.

Teorema 7.1.3 (Primer teorema de Bieberbach). Sea Γ un subgrupo de $\mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ que actúa de manera libre y propiamente discontinua sobre \mathbb{R}^n , y es tal que \mathbb{R}^n/Γ es compacto. Entonces $\Gamma \cap (\{I_n\} \times \mathbb{R}^n)$ es isomorfo a \mathbb{Z}^n y es un subgrupo de G de índice finito.

Una demostración de este teorema se encuentra en las primeras páginas del texto [Szc12].

Sea $n \geq 3$. Suponga que $M \cong \mathbb{H}^n/\Gamma$ es un variedad hiperbólica completa de volumen finito. Si v es un punto cúspide de Γ , considere el subgrupo Γ_v de Γ generado por todos los elementos parabólicos de Γ que fijan a v , note que Γ_v es no trivial por la definición de cúspide hiperbólica y de punto cúspide. En el modelo $\mathbb{H}^{n,+}$ podemos suponer que $v = \infty$, luego Γ_v actúa de manera libre y propiamente discontinua sobre $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ por medio de isometrías euclidianas, y $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}/\Gamma_\infty$ es compacto, recuerde la demostración del corolario 6.2.11, de donde este grupo tiene un subgrupo de índice finito isomorfo a \mathbb{Z}^{n-1} por el primer teorema de Bieberbach. Aun más, Γ_v es un subgrupo virtualmente abeliano maximal de Γ , ya que si estuviera encajado en otro subgrupo virtualmente abeliano, todos los elementos de este grupo fijarían a v por el lema 6.2.5. Note que como $n \geq 3$, entonces G no puede ser isomorfo a \mathbb{Z} .

De manera recíproca suponga que G es un subgrupo de Γ virtualmente abeliano maximal no isomorfo a \mathbb{Z} . Entonces por el lema 6.2.6 se sigue que G debe consistir de isometrías parabólicas que fijan todas a un mismo punto $v_G \in \partial\mathbb{H}^n$, ya que $n \geq 3$, y por lo tanto hay una horobola centrada en v_G tal que $B/\Gamma = B/\Gamma_v$ es una cúspide de $M^{<\epsilon}$, por la demostración del teorema 6.2.7, de donde si \mathcal{C}_Γ es la colección de puntos cúspides de Γ y \mathcal{A}_Γ es la colección de subgrupos de G virtualmente abelianos maximales no isomorfos a \mathbb{Z} , obtenemos de lo anterior dos funciones

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\Gamma &\rightarrow \mathcal{A}_\Gamma & \mathcal{A}_\Gamma &\rightarrow \mathcal{C}_\Gamma \\ v &\mapsto \Gamma_v & G &\mapsto v_G, \end{aligned}$$

las cuales son inversas entre sí. De lo anterior, el siguiente hecho sale de inmediato:

Proposición 7.1.4. *Sea $n \geq 3$. Sean $M_j \cong \mathbb{H}^n/\Gamma_j$ para $j = 1, 2$ variedades hiperbólicas completas y de volumen finito. Suponga que existe un isomorfismo de grupos $\Gamma_1 \xrightarrow{\phi} \Gamma_2$. Considere la función $\mathcal{C}_{\Gamma_1} \xrightarrow{\hat{\phi}} \mathcal{C}_{\Gamma_2}$ tal que a cada punto cúspide v de Γ_1 se le asigna el único punto fijo de $\partial\mathbb{H}^n$ del subgrupo $\phi((\Gamma_1)_v) \in \mathcal{A}_{\Gamma_2}$ de Γ_2 . Entonces esta función es una biyección.*

Observación 7.1.5. Note que la función $\hat{\phi}$ cumple por construcción que $\phi((\Gamma_1)_v) = (\Gamma_2)_{\hat{\phi}(v)}$ para todo $v \in \mathcal{C}_{\Gamma_1}$.

Note que esta proposición es falsa en dimensión $n = 2$: los grupos fundamentales del toro agujerado y del pantalón hiperbólico son isomorfos a $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, sin embargo la acción asociada de este grupo sobre los puntos cúspides del toro agujerado es transitiva, mientras que la acción correspondiente sobre los puntos del pantalón hiperbólico tiene tres órbitas.

Demostración de la proposición 7.1.1: Si $\pi_i : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma_i$ son las proyecciones, tendremos por la proposición 6.2.8 que para algún $0 < \epsilon \leq \epsilon_{M_1}, \epsilon_{M_2}$ las variedades $\pi_1^{-1}(M_1^{<\epsilon})$ y $\pi_2^{-1}(M_2^{<\epsilon})$ son la unión disyunta

$$\cup\{B_v : v \in \mathcal{C}(\Gamma_1)\}, \text{ y}$$

$$\cup\{U_w : w \in \mathcal{C}(\Gamma_2)\},$$

respectivamente, donde cada B_v y U_w es la horobola maximal centrada en v y w , respectivamente, contenidas en $\pi_1^{-1}(M_1^{<\epsilon})$ y $\pi_2^{-1}(M_2^{<\epsilon})$ respectivamente, es decir, estas horobolas son las componentes conexas de cada uno de estos espacios respectivos.

Tenemos que estas horobolas cumplen las siguientes propiedades para $v \in \mathcal{C}_{\Gamma_1}$ y $w \in \mathcal{C}_{\Gamma_2}$:

- 1.) $B_{g(v)} = g(B_v)(U_{g(w)} = g(U_w))$, para todo $g \in \Gamma_1(g \in \Gamma_2)$;
- 2.) Las familias $\{B_v : v \in \mathcal{C}_{\Gamma_1}\}$ y $\{U_w : w \in \mathcal{C}_{\Gamma_2}\}$ constan de elementos disyuntos entre sí;
- 3.) $B_v/G_v = B_v/\Gamma_1$ y $U_w/G_w = U_w/\Gamma_2$.

1.) vale ya que $\pi_i(M_i^{<\epsilon})$ es invariante bajo Γ_i . 2.) vale por la elección de ϵ y la proposición 6.2.8. Finalmente 3.) vale por la segunda parte de la demostración del teorema 6.2.7.

Sean $H_1 := \pi_1^{-1}(M_1^{\geq\epsilon}) = \mathbb{H}^n \setminus \pi_1^{-1}(M_1^{<\epsilon})$ y $H_2 := \pi_2^{-1}(M_2^{\geq\epsilon})$. Entonces la frontera de H_1 es la unión de las horoesferas S_v que se definen como las fronteras de cada B_v , $v \in \mathcal{C}_{\Gamma_1}$, ∂H_2 es la unión de las horoesferas $T_w := \partial U_w$ cuando w recorre \mathcal{C}_{Γ_2} .

Paso 1. Construcción de la pseudoisometría

Sea T una triangulación C^∞ de $M_1^{\geq\epsilon}$ que se restringe a una triangulación de $\partial M_1^{\geq\epsilon}$. Como la función $\pi_1 : \mathbb{H}^n \rightarrow M$ es una cubierta, se sigue que T se levanta a una triangulación, K , C^∞ de $H_1 = \pi_1^{-1}(M_1^{\geq\epsilon})$. Entonces K es una triangulación Γ_1 -invariante de H_1 . Sea K' la subdivisión baricéntrica de K . Usando K' construiremos una función $F_1 : H_1 \rightarrow \mathbb{H}^n$ de la siguiente manera. Primero definimos F_1 en los vértices de K' . Fijemos D un dominio fundamental de la acción de Γ_1 sobre \mathbb{H}^n . Primero definimos F_1 en los vértices de K' que están contenidos en D , esto lo podemos hacer de manera arbitraria pero vamos a tener en cuenta las condiciones $x \in S_v$ si y sólo si $F_1(x) \in T_{\hat{\phi}(v)}$, y $F_1(g(x)) = \phi(g)(F_1(x))$. Como todos los vértices de K' son traslaciones de los vértices

de K' contenidos en D por medio de elementos de Γ_1 , podemos definir F_1 en estos puntos mediante $F_1(g(x)) = \phi(g)(F_1(x))$ para todo $g \in \Gamma_1$, para los vértices x de K' contenidos en D , de donde F_1 , como se ha definido hasta ahora en los vértices de K' , induce a ϕ , esto está bien definido porque la acción de Γ_1 sobre \mathbb{H}^n es libre.

Ahora extenderemos F_1 a cada $\sigma \in K'$ tal que $\sigma \subseteq \partial H_1$. Recuerde que cada T_w con la métrica que hereda de \mathbb{H}^n es isométrica, salvo múltiplo, a \mathbb{R}^{n-1} con su métrica usual, y que cada $(\Gamma_2)_w$ actúa por medio de isometrías sobre T_w . En particular T_w tiene una estructura afín. Sea $\sigma \in K'$ contenido en ∂H_1 . Como σ es un simplejo, σ tiene una estructura afín asociada, al ser un simplejo de \mathbb{R}^{n+1} . Como $\sigma \subseteq \partial H_1$, existe $v \in \mathcal{C}_{\Gamma_1}$ tal que $\sigma \subseteq S_v$. Como $T_{\hat{\phi}(v)}$ también tiene una estructura afín y F_1 está definida en los vértices de este simplejo y la imagen bajo F_1 de estos vértices está contenida en $T_{\hat{\phi}(v)}$ por construcción, podemos entonces extender F_1 a una función afín $\sigma \rightarrow T_{\hat{\phi}(v)}$ usando las dos estructuras afines de estos dos espacios. Esta nueva extensión de F_1 a todo ∂H_1 induce a ϕ ya que K' es Γ_1 -invariante, y además si $v \in \mathcal{C}_{\Gamma_1}$ y $g \in \Gamma_1$, tendremos que $\phi(g)$ se restringe a una isometría de $T_{\hat{\phi}(v)}$ sobre $T_{\hat{\phi}(gv)}$, y en particular respeta las estructuras afines, de donde como F_1 restringida a los vértices de K' induce a ϕ , se sigue entonces que la nueva extensión de F_1 también induce a ϕ en ∂H_1 .

Finalmente, extendemos F_1 a todos los demás $\sigma \in K'$ por inducción sobre $\dim(\sigma)$. Sea $\sigma \in K'$ que no está contenido en ∂H_1 . Como estamos tomando la subdivisión baricéntrica de K , existe un vértice a de σ que no está contenido en ∂H_1 . Por la suposición inductiva tenemos que ya se ha definido F_1 en σ' , donde σ' es la cara de σ opuesta a a . Para cada $x \in \sigma \setminus \sigma'$, sea s_x la línea en la estructura afín de σ que va de a a un punto de σ' y que pasa por el punto x . Entonces definimos a $F_1 \upharpoonright s_x$ como la función afín que va de s_x a la geodésica hiperbólica $[F_1(x), F_1(a)]$ tal que $x \mapsto F_1(x)$ y $a \mapsto F_1(a)$. Continuando con la inducción de esta manera podemos extender F_1 a todo $H_1 = \pi_1^{-1}(M_1^{\geq \epsilon})$. Note que F_1 induce a ϕ en H_1 ya que F_1 ya inducía a ϕ en los elementos de K' contenidos en la frontera de H_1 y en los vértices de K' , y dado que la extensión se construye usando la estructura afín de \mathbb{H}^n y que cada $\phi(g)$ es una isometría de \mathbb{H}^n . Note que la construcción se hizo de manera que

$$F_1(S_v) \subseteq T_{\hat{\phi}(v)}, \forall v \in \mathcal{C}_{\Gamma_1} \quad (7.1)$$

Note que podemos tomar un subconjunto finito de \mathcal{C}_{Γ_1} , $\{v_1, \dots, v_m\}$ tal que todo elemento de \mathcal{C}_{Γ_1} es un trasladado de un elemento de Γ_1 por un elemento de este subconjunto, y que este subconjunto sea minimal con esta propiedad, esto se puede hacer ya que una variedad hiperbólica completa de volumen finito tiene un número finito de cúspides, entonces basta tomar los centros de las horobolas de una colección de preimágenes de todas las cúspides de M cuyo cardinal sea el número de cúspides de M .

En el modelo $\Pi^{n,+}$, para cada $i = 1, \dots, m$ elija isometrías α_i y β_i de este modelo de manera que $\alpha_i(S_{v_i}) = \mathbb{R}^{n-1} \times \{1\} = \beta_i(T_{\hat{\phi}(v_i)})$. Luego obtenemos una función de $\mathbb{R}^{n-1} \times \{1\}$ en sí mismo dada por

$$\varphi_i := (\beta_i \circ F_1 \circ \alpha_i^{-1}) \upharpoonright \mathbb{R}^{n-1} \times \{1\}.$$

Extendemos F_1 a todo B_{v_i} , para cada $i = 1, \dots, m$, $\beta_i \circ F_1 \circ \alpha_i^{-1}$ en $\mathbb{R}^{n-1} \times [1, \infty)$ que sea de la forma $(x, t) \mapsto (y, t)$ y que sea consistente con la definición de F_1 que teníamos en H_1 .

Afirmamos que F_1 definida así induce a $\phi \upharpoonright (\Gamma_1)_{v_i}$ en B_{v_i} , para cada $i = 1, \dots, m$. Podemos suponer por la construcción que $v_i = \infty$ y que $B_{v_i} = \mathbb{R}^{n-1} \times [1, \infty) = U_{\hat{\phi}(v_i)}$, de donde F_1 viene dada por $(x, t) \mapsto (F_1(x, 1), t)$ en $\mathbb{R}^{n-1} \times [1, \infty)$. Esta función induce a $\phi \upharpoonright (\Gamma_1)_{v_i}$ en $\mathbb{R}^{n-1} \times [1, \infty)$, ya que primero F_1 como la hemos construido de antes induce a $\phi \upharpoonright (\Gamma_1)_{v_i}$ en S_{v_i} ya que F_1 induce a ϕ

en todo H_1 y además $(\Gamma_1)_{v_i}$ y $(\Gamma_2)_{\hat{\phi}(v_i)}$ están compuestas de isometrías parabólicas que fijan a ∞ y así no mueven la última componente de los puntos de $\mathbb{R}^{n-1} \times [1, \infty)$, y dado que $(\Gamma_2)_{\hat{\phi}(v_i)} = \phi((\Gamma_1)_{v_i})$ por la observación 7.1.5.

Finalmente, extendemos F_1 a todo \mathbb{H}^n al definir F_1 en cada B_v , con $v \in \mathcal{C}_{\Gamma_1}$, como sigue. Sea $v \in C(\Gamma_1)$, entonces existe un único $i = 1, \dots, m$ y una única clase lateral $g(\Gamma_1)_{v_i}$ tales que $v = g(v_i)$, y así podemos definir F_1 en B_v por

$$F_1(g(x)) := \phi(g)(F_1(x)), \forall x \in B_{v_i}. \quad (7.2)$$

Esto está bien definido ya que F_1 induce a $\phi \upharpoonright (\Gamma_1)_{v_i}$ en B_{v_i} como ya vimos. Esta observación también implica de inmediato que esta construcción de F_1 induce a ϕ en todo $\cup\{B_v : v \in \mathcal{C}_{\Gamma_1}\}$, de donde como

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^n &= \pi_1^{-1}(M_1^{\geq \epsilon}) \cup \pi_1^{-1}(M_1^{< \epsilon}) \\ &= \pi_1^{-1}(M_1^{\geq \epsilon}) \cup \bigcup\{B_v : v \in C(\Gamma_i)\}, \end{aligned} \quad (7.3)$$

juntando todos los pasos anteriores obtenemos una función $F_1 : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ que induce a ϕ .

Paso 2. F_1 es Lipschitz en $\pi_1^{-1}(M_1^{\geq \epsilon})$.

Note que como la triangulación K con la que se construyó $F_1 \upharpoonright \pi_1^{-1}(M_1^{\geq \epsilon})$ es Γ_1 -invariante, se sigue que si D es un dominio fundamental con respecto a la cubierta $\pi_1 : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma_1$, entonces para todo elemento $\sigma \in K$ existe $\sigma' \in K$ contenido en D y $g \in \Gamma_1$ tales que $g(\sigma') = \sigma$. Sin embargo, es fácil ver de la construcción de cada $F_1 \upharpoonright \sigma$ con $\sigma \in K'$, que cada una de estas funciones es Lipschitz, ya que K es una triangulación C^∞ y $F_1 \upharpoonright \sigma : \sigma \rightarrow \mathbb{H}^n$ es afín \mathbb{H}^n de donde cada $F_1 \upharpoonright \sigma$ con $\sigma \in K$ es C^∞ , y en particular Lipschitz ya que σ es compacto, y así como hay un número finito de elementos de K contenidos en D y todos los elementos de K son trasladados bajo elementos de Γ_1 de estos elementos, que son isometrías, se sigue que F_1 es Lipschitz en $\pi_1^{-1}(M_1^{\geq \epsilon})$.

Paso 3. F_1 es Lipschitz en $\pi_1^{-1}(M_1^{< \epsilon})$

Sea $v \in \mathcal{C}_{\Gamma_1}$. Por la construcción de F_1 en B_v podemos suponer que $v = \infty$, que $B_v = \mathbb{R}^{n-1} \times (1, \infty)$ y que $F_1 \upharpoonright B_\infty$ viene dada por $(x, t) \mapsto (F_1(x, 1), t)$, note el abuso de notación.

La métrica de $\Pi^{n,+}$ se restringe a $\mathbb{R}^{n-1} \times \{1\}$ a la métrica estándar euclidiana de \mathbb{R}^{n-1} , por el teorema 1.1.16. Además $(\Gamma_1)_\infty$ actúa por medio de isometrías sobre $\mathbb{R}^{n-1} \times \{1\}$ de manera que el cociente que se obtiene es una variedad cerrada, esto es consecuencia de la demostración del corolario 6.2.11. Sea T un dominio fundamental de la acción $(\Gamma_1)_\infty \curvearrowright \mathbb{R}^{n-1} \times \{1\}$. Entonces T es compacto.

Note que la función $H : [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H(t, x, y) := \begin{cases} \operatorname{arcsenh}(tx) / \operatorname{arcsenh}(ty) & \text{si } t \neq 0 \\ x/y & \text{de otra manera,} \end{cases}$$

es continua.

Sea $\lambda > 1$ arbitrario. Tenemos que tanto $\frac{\|(x,t)-(y,s)\|}{2\sqrt{ts}}$ y $\frac{\|(F_1(x,1),t)-(F_1(y,1),s)\|}{2\sqrt{ts}}$ están acotadas superiormente en $T \times [1, \lambda]$ por un $R > 0$, ya que este último conjunto es compacto. Por la continuidad de H , existe $L > 0$ tal que H está acotado superiormente por L en $[0, 1] \times [0, R] \times [0, R]$.

Afirmamos que F_1 es L -Lipschitz en $T \times [1, \infty)$.

Note que $T \times (0, \infty)$ es un dominio fundamental de la acción, de donde $T \times (0, \infty)$ es un subconjunto convexo de $\Pi^{n,+}$, y por lo tanto $T \times [1, \infty)$ es convexo.

Sean $(a, t), (b, t) \in T \times [1, \infty)$. Como el arco geodésico entre estos dos puntos está contenido en $T \times [1, \infty)$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $|t - s| \leq \lambda - 1$, al dividir este arco geodésico en pedazos lo suficientemente cortos. Podemos tomar $h_1, h_2 \in [1, \lambda]$ tales que $h_1 \leq t$, $h_2 \leq s$ y $|t - s| = |h_1 - h_2|$. Tendremos entonces

$$\begin{aligned} \frac{d((a, s), (b, t))}{d(F_1(a, s), F_1(b, t))} &= \frac{2 \operatorname{arcsenh} \left(\frac{\|(a, s) - (b, t)\|}{2\sqrt{st}} \right)}{2 \operatorname{arcsenh} \left(\frac{\|(F_1(a, 1), s) - (F_1(b, 1), t)\|}{2\sqrt{st}} \right)} \\ &= \frac{\operatorname{arcsenh} \left(\frac{\|(a, s) - (b, t)\|}{2\sqrt{st}} \right)}{\operatorname{arcsenh} \left(\frac{\|(F_1(a, 1), h_1) - (F_1(b, 1), h_2)\|}{2\sqrt{st}} \right)} \\ &= \frac{\operatorname{arcsenh} \left(\frac{\|(a, s) - (b, t)\| \sqrt{h_1 h_2}}{2\sqrt{h_1 h_2} \sqrt{st}} \right)}{\operatorname{arcsenh} \left(\frac{\|(F_1(a, 1), h_1) - (F_1(b, 1), h_2)\| \sqrt{h_1 h_2}}{2\sqrt{h_1 h_2} \sqrt{st}} \right)} \leq L \end{aligned}$$

donde la última igualdad salen de la construcción de R y de L ya que $\sqrt{st}/\sqrt{h_1 h_2} > 1$. Por lo tanto F_1 es Lipschitz en todo $T \times [1, \infty)$.

Como $T \times [1, \infty)$ es un dominio fundamental de la acción $(\Gamma_1)_\infty \curvearrowright \mathbb{R}^{n-1} \times [1, \infty) = B_\infty$, se sigue que como F_1 induce a ϕ , entonces F_1 es Lipschitz en todo $\mathbb{R}^{n-1} \times \{1\} = B_\infty = B_v$.

Finalmente tomamos $L > 0$ lo suficientemente grande de manera que F_1 sea L -Lipschitz en las horobolas B_{v_1}, \dots, B_{v_n} . Luego de la construcción de F_1 se sigue que F_1 es L -Lipschitz en B_v para todo $v \in \mathcal{C}_{\Gamma_1}$.

Paso 4. F_1 es una pseudoisometría.

Juntando los pasos anteriores se sigue que F_1 es Lipschitz.

Usando los pasos anteriores obtenemos también una función $F_2 : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ que induce a ϕ^{-1} y que es Lipschitz.

Como $\pi_1^{-1}(M_1^{\geq \epsilon})/\Gamma \cong M_1^{\geq \epsilon}$ es compacto y $F_2 \circ F_1$ induce a la función identidad de Γ_1 , obtenemos entonces que existe $R > 0$ tal que $d(F_2 \circ F_1(x), x) \leq R$ para todo $x \in \pi_1^{-1}(M_1^{\geq \epsilon})$. Por la construcción de F_1 y F_2 se sigue que para cada $v \in \mathcal{C}(\Gamma_1)$ tenemos que $F_2 \circ F_1$ envía a B_v en sí mismo, y si $x \in S_v$, entonces por las construcciones de F_1 y F_2 tendremos que $F_2 \circ F_1 \upharpoonright [x, v)$ es una isometría sobre $[F_2 \circ F_1(x), v)$, de donde como $d(F_2 \circ F_1(x), x) \leq R$ para todo $x \in S_v$, si suponemos sin pérdida de generalidad que $v = \infty$ en el modelo $\Pi^{n,+}$ obtendremos por la proposición 1.1.18 que $d(F_2 \circ F_1(y), y) \leq R$ para todo $y \in [x, v)$, de donde por (7.3) obtenemos

$$d(F_2 \circ F_1(x), x) \leq R, \forall x \in \mathbb{H}^n.$$

Como F_1 y F_2 son Lipschitz, de esta última observación obtenemos de la demostración de la proposición 2.1.3 que F_1 es una pseudoisometría. \square

Es fácil ver de la construcción de la pseudoisometría anterior que tenemos lo siguiente:

Corolario 7.1.6. *Dado un $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, existe $\delta_\epsilon > 0$ de manera que la restricción de la pseudosisometría F_1 a $\pi_1^{-1}(M_1^{\geq \epsilon})$ induce una equivalencia homotópica $M_1^{\geq \epsilon} \rightarrow M_2^{\geq \delta_\epsilon}$. En particular M_1 y M_2 son homotópicas.*

Idea de la demostración: Esto sale porque tanto F_1 como F_2 se construyeron con la condición (7.1), de que para $0 < \epsilon \ll 1$ tenemos que $\pi_1^{-1}(M_1^{< \epsilon})$ consiste de horobolas disjuntas, y de que $F_1 \circ F_2$ induce a la identidad de Γ , y con esto se puede construir una homotopía entre $id_{\pi_1^{-1}(M^{\geq \epsilon})}$ y $F_1 \circ F_2$.

Que M_1 y M_2 son homotópicamente equivalentes sale de si $\epsilon > 0$ es lo suficientemente pequeño también tendremos que $0 < \delta_\epsilon$ será muy pequeño, y por lo tanto M_1 será homotópicamente equivalente a $M_1^{\geq \epsilon}$ y M_2 será homotópicamente equivalente a $M_2^{\geq \delta_\epsilon}$. \square

Como ya sabemos del capítulo 2 tenemos que esta pseudoisometría se extiende a una función continua $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$.

7.2. Norma de Gromov de variedades hiperbólicas completas y de volumen finito

Sea M^n una variedad hiperbólica, orientada, completa y de volumen finito. Por el corolario 6.2.10 tenemos que para $0 < \epsilon < \epsilon_M$, M es homeomorfo a $M^{> \epsilon}$, de donde como $M^{> \epsilon}$ es el interior de la n -variedad $M^{\geq \epsilon}$, obtenemos que M es el interior de una n -variedad \tilde{M} . Note que como M es orientada y $\tilde{M} \cong M^{\geq \epsilon}$, \tilde{M} también es orientada y compacta, de donde por lo visto en el capítulo 4 \tilde{M} tiene norma de Gromov. El objetivo de esta sección es demostrar la siguiente igualdad

$$\|\tilde{M}\| = \frac{\text{Vol}(M)}{v_n},$$

donde recordemos que v_n es el volumen de un simplejo ideal regular de \mathbb{H}^n .

Esta igualdad saldrá de demostrar que un término es mayor o igual que el otro y viceversa. Como en el caso de variedades hiperbólicas cerradas hay una desigualdad que sale del teorema de Stokes para integrales sobre cadenas, y de la construcción de la función de enderezamiento.

Recuerde la construcción de enderezamiento $c \mapsto \tilde{c}$ dada en la definición 4.2.3.

Construcción 7.2.1. Sea $0 < \epsilon \leq \epsilon_M$. Note que si $c \in C_n(M^{\geq \epsilon})$ los simplejos del enderezamiento \tilde{c} de c no necesariamente está contenido en $M^{\geq \epsilon}$. Sin embargo, si $c = \sum_i a_i \sigma_i$, la cadena

$$\text{end}_\epsilon(c) := \sum_i a_i \cdot (\rho_\epsilon \circ \tilde{\sigma}_i)$$

pertenece a $C_n(M^{\geq \epsilon})$.

Lema 7.2.2. *Sea M^n una variedad hiperbólica, completa, orientada y de volumen finito, con $M \cong \mathbb{H}^n/\Gamma$ y proyección $\pi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma$. Sea $0 < \epsilon < \epsilon_M$. Sea $c \in Z_n(M^{\geq \epsilon}, \partial M^{\geq \epsilon})$, con $c = \sum_i a_i \sigma_i$. Entonces $\text{end}_\epsilon(c)$ pertenece a $Z_n(M^{\geq \epsilon}, \partial M^{\geq \epsilon})$ y es homóloga a c .*

Demostración. Note que como $\tilde{\sigma}$ depende sólo de $e_i \mapsto \sigma(e_i)$, tenemos que para cualquier cadena c de $C_n(M)$, $\partial(\tilde{c}) = \tilde{\partial}c$, de donde si τ es un simplejo de ∂c contenido en $\partial M^{\geq \epsilon} = M^\epsilon$, tendremos que

como $\pi^{-1}(M^{\leq \epsilon})$ es unión de horobolas disjuntas, entonces $\tilde{\tau}$ va a estar contenido en $M^{\leq \epsilon}$, ya que la envolvente convexa de los vértices de un levantamiento de τ va a estar contenida en $\pi^{-1}(M^{\leq \epsilon})$, ya que este último conjunto es convexo en \mathbb{H}^n , de donde si $c \in Z_n(M^{\geq \epsilon}, M^\epsilon)$, entonces $\text{end}_\epsilon(c) \in Z_n(M^{\geq \epsilon}, M^\epsilon)$.

En el lema 4.2.6 demostramos que existe un CW-complejo Y , funciones homotópicas $Y \xrightarrow{f,g} M$ y un ciclo n -dimensional c' de Y tal que $c' \circ f = c$ y $c' \circ g = \tilde{c}$, de donde como $\rho_\epsilon : M \rightarrow M^{\geq \epsilon}$ es una equivalencia homotópica que es la identidad en $M^{\geq \epsilon}$, obtenemos que c y $\text{end}_\epsilon(c)$ son homólogos en $H_n(M^{\geq \epsilon}, M^\epsilon)$. \square

Note que como ρ_ϵ es en particular una retracción, se sigue que si σ es un simplejo de M , entonces

$$\text{Vol}(\text{end}_\epsilon(\sigma)) = \left| \int_{\text{end}_\epsilon(\sigma)} dv_M \right| \leq \left| \int_{\tilde{\sigma}} dv_M \right| = \text{Vol}(\tilde{\sigma}). \quad (7.4)$$

Similarmente a la desigualdad $\|\tilde{M}\| \geq \text{Vol}(M)/v_n$ en el caso de variedades hiperbólicas cerradas, tenemos el siguiente hecho:

Proposición 7.2.3. *Sea M^n una variedad hiperbólica completa, orientada y de volumen finito, la cual es el interior de la frontera compacta \tilde{M} . Entonces*

$$\|\tilde{M}\| \geq \frac{\text{Vol}(M)}{v_n}.$$

Demostración. Sea $c = \sum_i a_i \sigma_i \in Z_n(\tilde{M}, \partial\tilde{M}; \mathbb{R})$ tal que $[c] = [\tilde{M}]$ en $H_n(\tilde{M}, \partial\tilde{M}; \mathbb{R})$. Sea $0 < \epsilon < \epsilon_M$. Como \tilde{M} y $M^{\geq \epsilon}$ son homeomorfos, y la norma de un ciclo no cambia bajo homeomorfismo, podemos suponer que c es un ciclo relativo de $(M^{\geq \epsilon}, M^\epsilon)$. Como la forma de volumen de $M^{\geq \epsilon}$ es la restricción de la forma volumen de M , tenemos por la definición de volumen de una variedad riemanniana compacta orientada que

$$\begin{aligned} \text{Vol}(M^{\geq \epsilon}) &= \int_{[M^{\geq \epsilon}]} \text{Vol}_M \\ &= \int_c \text{Vol}_M = \int_{\text{end}_\epsilon(c)} \text{Vol}_M \\ &= \left| \sum_i a_i \int_{\text{end}_\epsilon(\sigma_i)} \text{Vol}_M \right| \leq \sum_i |a_i| \text{Vol}(\text{end}_\epsilon(\sigma_i)) \\ &\leq \sum_i |a_i| \text{Vol}(\tilde{\sigma}_i) \leq \sum_i |a_i| v_n = v_n \|c\|, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad sale del teorema 3.2.3. Como c fue arbitrario, se sigue que $\text{Vol}(M^{\geq \epsilon}) \leq \|\tilde{M}\| v_n$. Pero $0 < \epsilon < \epsilon_M$ también fue arbitrario, de donde

$$\text{Vol}(M) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{Vol}(M^{\geq \epsilon}) \leq \|\tilde{M}\| \cdot v_n.$$

\square

Como en el caso cerrado demostrar la otra desigualdad es más delicado. Sin embargo se hará una demostración similar.

Recordemos que $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ es un grupo de Lie unimodular, i.e., tiene una medida de Haar invariante por ambos lados. Sea μ una medida de este tipo como en el corolario 4.2.12. Recordemos que en el modelo \mathbb{D}^n hemos fijado los vértices $w_0, \dots, w_n \in \partial\mathbb{D}^n$ de un tetraedro regular euclidiano, y para cada $R > 0$ fijamos un elemento $(u_0^R, \dots, u_n^R) \in S(R)$ tal que $u_i^R \in [\bar{0}, w_i]$ para cada i .

Entonces si $R > 0$, recordemos que podemos poner una medida sobre el conjunto

$$S(R) = \{(u_0, \dots, u_n) \in \mathbb{H}^{n+1} : d(u_i, u_j) = R\}$$

al fijar $(u_0^R, \dots, u_n^R) \in S(R)$ y tomar para $A \subseteq S(R)$

$$m(A) := \mu\{\delta \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n) : (\delta(u_0^R), \dots, \delta(u_n^R)) \in A\}.$$

Tenemos que $M \cong \mathbb{H}^n/\Gamma$. Sobre el conjunto Γ^{n+1} consideramos la acción $\Gamma \curvearrowright \Gamma^{n+1}$ dada por $g \cdot (g_0, \dots, g_n) := (gg_0, \dots, gg_n)$. Sea $\Omega := \Gamma^{n+1}/\Gamma$. También recordemos que si $u_0, \dots, u_n \in \mathbb{H}^n$, denotamos por $\sigma_{(u_0, \dots, u_n)}$ la función afín $\Delta_n \rightarrow \mathbb{H}^n$ tal que $e_i \mapsto u_i$.

Recordemos que si M es una variedad hiperbólica completa, entonces ϵ_M es el supremo de todos los $\epsilon > 0$ tales que las componentes conexas de $M^{<\epsilon}$ son cúspides de M .

Vamos a construir para cada $R > 0$ y cada $0 < \epsilon < \epsilon_M$ un ciclo $z_{R,\epsilon} \in Z_n(M^{\geq\epsilon}, M^{=\epsilon}; \mathbb{R})$.

Sea D un dominio fundamental de la acción $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}^n$ que se construye con el grupo Γ . Existe una familia $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos cerrados de D que cumplen las siguiente propiedades:

- 1.) $D = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$;
- 2.) Si $i \neq j$, entonces el conjunto $X_i \cap X_j$ tiene volumen cero;
- 3.) La familia $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es localmente finita;
- 4.) $X_i = \overline{\text{int}(X_i)}$;
- 5.) $\text{diam}(X_i) \leq d$ para algún $d > 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Una colección con estas características se puede construir usando una variedad hiperbólica cerrada al tomar una teselación de \mathbb{H}^n con un dominio fundamental de esta variedad, y tomar los elementos de esta teselación cuyos interiores intersectan a D .

Para cada $i \in \mathbb{N}$ fijamos $y_i \in \text{int}(X_i)$.

Para cada $R > 0$, cada $\omega \in \Omega$ y cada $\bar{j} \in \mathbb{N}^{n+1}$, definimos

$$a_R^+(\omega, \bar{j}) := m\{(u_0, \dots, u_n) \in S(R) : u_i \in \gamma_i(X_{j_i}) \text{ para } i = 0, \dots, n\}, \quad (7.5)$$

donde $\bar{j} = (j_0, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ y $\omega = [(\gamma_0, \dots, \gamma_n)]$, este real no negativo no depende del representante de ω por la unimodularidad de la medida. Similarmente se define $a_R^-(\omega, \bar{j})$. Definimos entonces $a_R(\omega, \bar{j}) := a_R^+(\omega, \bar{j}) - a_R^-(\omega, \bar{j})$. También definimos

$$\sigma_{\omega, \bar{j}} := \pi \circ \sigma_{(\gamma_0(y_{j_0}), \dots, \gamma_n(y_{j_n}))},$$

donde recordemos que $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ con proyección $\pi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma$.

Sea finalmente

$$z_{R,\epsilon} := \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \bar{j} \in \mathbb{N}^{n+1}, \sigma_{\omega, \bar{j}} \cap M^{\geq \epsilon} \neq \emptyset}} a_R(\omega, \bar{j}) \cdot \left(\rho_\epsilon \circ \sigma_{\omega, \bar{j}} \right), \quad (7.6)$$

donde recordemos que ρ_ϵ es un retracts $M \rightarrow M^{\geq \epsilon}$ que viene de un retracts por deformación, y por la forma de las cúspides hiperbólicas este retracts se puede tomar de manera que $\rho_\epsilon(M^{< \epsilon}) \subseteq M^{= \epsilon}$, recuerde la demostración del corolario 6.2.10.

Vamos a demostrar que para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_M$ y para todo $R > 0$ lo suficientemente grande el ciclo $z_{R,\epsilon}$ tiene clase no trivial en $H_n(M^{\geq \epsilon}, M^{= \epsilon}; \mathbb{R})$. Usaremos este hecho para demostrar la desigualdad $v_n \|\tilde{M}\| \leq \text{Vol}(M)$.

Proposición 7.2.4. *Sea M una variedad hiperbólica completa, orientada, y de volumen finito. Entonces*

$$\|\tilde{M}\| \leq \frac{\text{Vol}(M)}{v_n}.$$

Demostración. La demostración consiste en adaptar los pasos de la demostración de la afirmación análoga en el caso cerrado. En la demostración de esta proposición usamos algunas ideas de la demostración de [Thu+80, Teorema 6.5.4]. Tomamos $0 < \epsilon \leq \epsilon_M$.

Paso 1. *Para cada $R > 0$ existe un número finito de $\omega \in \Omega$ y $\bar{j} \in \mathbb{N}^{n+1}$ tales que $\pi \circ \sigma_{(\gamma_0(y_{j_0}), \dots, \gamma_0(y_{j_n}))}$ interseca a $M^{\geq \epsilon}$.*

Sea D un dominio fundamental de $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}^n$. Note que $D \cap \pi^{-1}(M^{\geq \epsilon})$ es compacto ya que es un dominio fundamental de la acción $\Gamma \curvearrowright \pi^{-1}(M^{\leq \epsilon})$. Luego existe una vecindad compacta de $D \cap \pi^{-1}(M^{\geq \epsilon})$, donde $\text{injr}ad \circ \pi$ es acotada por abajo por un positivo, tal que si $\sigma \in S(R)$ interseca a $D \cap \pi^{-1}(M^{\geq \epsilon})$, entonces σ está contenido en esta vecindad, de donde existe una vecindad de $\pi^{-1}(M^{\geq \epsilon})$, donde $\text{injr}ad \circ \pi$ está acotado por abajo por un positivo, tal que si $\sigma \in S(R)$ interseca a $\pi^{-1}(M^{\geq \epsilon})$, entonces σ está en esta vecindad. Por lo tanto existe $0 < \epsilon' < \epsilon$ tal que si un elemento de $S(R)$ interseca a $\pi^{-1}(M^{\geq \epsilon})$, entonces el simplejo está contenido en $\pi^{-1}(M^{\geq \epsilon'})$.

Suponga que $\omega \in \Omega$ es tal que $\pi \circ \sigma_{\omega, \bar{j}}$ interseca a $M^{\geq \epsilon}$ para algún $\bar{j} \in \mathbb{N}^{n+1}$. Entonces tendremos que si $\omega = [(id, \gamma_1, \dots, \gamma_n)]$, existe $(u_0, \dots, u_n) \in S(R)$ tal que $u_0 \in X_{i_0} \subseteq D$ y $u_j \in \gamma_j(X_{i_j}) \subseteq \gamma_j(D)$ para $j = 1, \dots, n$. Por la observación del párrafo anterior tendremos que $u_j \in \pi^{-1}(M^{\geq \epsilon'})$ para cada $j = 1, \dots, n$, de donde $u_1, \dots, u_n \in \pi^{-1}(M^{\geq \epsilon'})$ son tales tales que $d(D \cap \pi^{-1}(M^{\geq \epsilon'}), u_j) \leq R$ para $j = 1, \dots, n$ con $u_j \in \gamma_j(D \cap \pi^{-1}(M^{\geq \epsilon'}))$. Por lo tanto si existiera un número infinito de $\omega \in \Omega$ con esta propiedad, podríamos construir una sucesión infinita $\{\eta_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Gamma$ tal que

$$\overline{N(D \cap \pi^{-1}(M^{\geq \epsilon'}), R)} \cap \eta_n [D \cap \pi^{-1}(M^{\geq \epsilon'})] \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$$

lo cual contradiría el hecho de la acción de Γ sobre \mathbb{H}^n es propiamente discontinua ya que $D \cap \pi^{-1}(M^{\geq \epsilon'})$ y $\overline{N(D \cap \pi^{-1}(M^{\geq \epsilon'}), R)}$ son compactos.

Finalmente, para cada $\omega \in \Omega$ sólo hay un número finito de $(j_0, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tales que $\pi \circ \sigma_{\omega, \bar{j}}$ interseca a $M^{\geq \epsilon}$, ya que para cada $i = 0, \dots, n$ hay un número finito de $j \in \mathbb{N}$ tales $\gamma_i(X_j) \cap \gamma_i(D) \cap \pi^{-1}(M^{\geq \epsilon}) \neq \emptyset$, ya que la familia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es localmente finita y $\gamma_i(D) \cap \pi^{-1}(M^{\geq \epsilon})$ es compacto.

Paso 2. *$z_{R,\epsilon}$ es un ciclo de $Z_n(M^{\geq \epsilon}, M^{= \epsilon}; \mathbb{R})$*

Si $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1} \in \Gamma$ e $i_0, \dots, i_{n-1} \in \mathbb{N}$ son tales que $\sigma_{(\gamma_0(y_{i_0}), \dots, \gamma_{n-1}(y_{i_{n-1}}))}$ no interseca a $\pi^{-1}(M^{\geq \epsilon})$, entonces el simplejo $\rho_\epsilon \circ \pi \circ \sigma_{(\gamma_0(y_{i_0}), \dots, \gamma_{n-1}(y_{i_{n-1}}))}$ es cero en $C_n(M^{\geq \epsilon}, M^{=\epsilon}; \mathbb{R})$, recuerde que $\rho_\epsilon(M^{< \epsilon}) \subseteq M^{=\epsilon} = \partial M^{\geq \epsilon}$.

Sean $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1} \in \Gamma$ e $i_0, \dots, i_{n-1} \in \mathbb{N}$ tales que $\sigma_{(\gamma_0(y_{i_0}), \dots, \gamma_{n-1}(y_{i_{n-1}}))}$ interseca a $\pi^{-1}(M^{\geq \epsilon})$, entonces el coeficiente de $\rho_\epsilon \circ \pi \circ \sigma_{(\gamma_0(y_{i_0}), \dots, \gamma_{n-1}(y_{i_{n-1}}))}$ en $\partial z_{R, \epsilon}$ es

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \sum_{\gamma \in \Gamma, i \in \mathbb{N}} a_R([\gamma_0, \dots, \gamma_j, \gamma, \gamma_{j+1}, \dots, \gamma_{n-1}], (i_0, \dots, i_j, i, i_{j+1}, \dots, i_n))$$

esta suma es finita por el paso anterior, y se puede demostrar como en el caso cerrado que para $j = 0, \dots, n$

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in \Gamma, i \in \mathbb{N}} a_R^s([\gamma_0, \dots, \gamma_j, \gamma, \gamma_{j+1}, \dots, \gamma_{n-1}], (i_0, \dots, i_j, i, i_{j+1}, \dots, i_n)) \\ &= \mu\{g \in \mathcal{I}^s(\mathbb{H}^n) : g(u_l^R) \in \gamma_l(X_{i_l}) \forall l \neq j\} \leq d < \infty, \end{aligned} \quad (7.7)$$

para $s = +, -$, de donde si tomamos el elemento $h \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ que invierte la orientación y que fija a cada u_l^R con $l \neq j$, tendremos por la invarianza de la medida μ que el número a la derecha de (7.7) es el mismo para los dos valores $s = +, -$, y así obtenemos que $\partial z_{R, \epsilon} = 0$, de donde por la construcción de $z_{R, \epsilon}$, entonces obtenemos que esta cadena es un ciclo de $Z_n(M^{\geq \epsilon}, M^{=\epsilon}; \mathbb{R})$.

Paso 3. Para todo $R > 0$ lo suficientemente grande, $a_R^+(\omega, \vec{i}) \cdot a_R^-(\omega, \vec{i}) = 0$.

Si $\omega = [(\gamma_0, \dots, \gamma_n)] \in \Omega$ y $\vec{j} \in \mathbb{N}^{n+1}$ son tales que $a_R^+(\omega, \vec{j}) \neq 0$, entonces existe $(u_0, \dots, u_n) \in S^+(R)$ es tal que $u_i \in \gamma_i(X_{j_i})$ para cada $i = 0, \dots, n$, de donde si $(u'_0, \dots, u'_n) \in S(R)$ tiene las mismas propiedades, se sigue que como $\text{diam}(X_{j_i}) \leq d$, entonces $d(u_i, u'_i) \leq d$ para todo i , y luego por lo hecho en el paso 3 de la demostración del hecho análogo en el caso cerrado, se sigue que entonces $(u'_0, \dots, u'_n) \in S^+(R)$, y por lo tanto $a_R^-(\omega, \vec{j}) = 0$.

Paso 4. Dado $\delta > 0$, entonces para todo $R > 0$ lo suficientemente grande tenemos que $\left| \int_{\sigma(\omega, \vec{j})} dv_M \right| \geq v_n - \delta$ si $a_R(\omega, \vec{i}) \neq 0$.

Como $\text{diam}(\gamma(X_i)) \leq d$ para todo $\gamma \in \Gamma$ y todo $i \in \mathbb{N}$ y como definimos a $a_R^s(\omega, \vec{i})$ por (7.5), entonces podemos usar la demostración del paso análogo del caso cerrado junto al paso anterior para ver que si $a_R(\omega, \vec{i}) \neq 0$, entonces $\left| \int_{\sigma(\omega, \vec{j})} dv_M \right| \geq v_n - \delta$.

Paso 5. Para todo $R > 0$ lo suficientemente grande tenemos que si $a_R(\omega, \vec{i}) \neq 0$, entonces $a_R(\omega, \vec{i}) \cdot \int_{\sigma(\omega, \vec{j})} dv_M > 0$.

La demostración sale del hecho de que la integral $\int_{\sigma(\omega, \vec{j})} \text{Vol}_M$ es positiva (ó negativa) si y sólo si $\sigma(\omega, \vec{j})$ preserva (ó invierte) la orientación si y sólo si $a_R(\omega, \vec{i}) = a_R^+(\omega, \vec{i})$ (ó $a_R(\omega, \vec{i}) = -a_R^-(\omega, \vec{i})$), por el paso 3.

Paso 6. Si $R > 0$ es lo suficientemente grande, entonces $\int_{z_{R, \epsilon}} dv_M > 0$, de donde $z_{R, \epsilon}$ tiene clase no trivial en $H_n(M^{\geq \epsilon}, M^{=\epsilon}; \mathbb{R})$.

Sólo hay que tomar un elemento de $S(R)$ cuyo interior intersekte a $D \cap \pi^{-1}(M^{\geq \epsilon})$, el cual existe ya que $D \cap \pi^{-1}(M^{\geq \epsilon})$ tiene interior no vacío. Esto implica que $a_R(\omega, \bar{i}) \neq 0$ para algunos $\omega \in \Omega$ y $\bar{i} \in \mathbb{N}^{n+1}$, de donde por el paso anterior se sigue que $\int_{z_{R,\epsilon}} dv_M > 0$, y del teorema de Stokes para variedades compactas con frontera obtenemos que $z_{R,\epsilon}$ tiene clase no nula en $H_n(M^{\geq \epsilon}, M^\epsilon; \mathbb{R})$.

Paso 7. Demostración de la desigualdad

Note que en los pasos anteriores donde dijimos que se podía tomar R lo suficientemente grande esta elección era independiente de $0 < \epsilon < \epsilon_M$. Luego podemos fijar $R_0 > 0$ de manera que las afirmaciones de los pasos anteriores valgan para todo $R \geq R_0$.

Sea $0 < \epsilon \leq \epsilon_M$. Fijemos $0 < \epsilon' < \epsilon$ de manera que si un elemento de $S(R)$ intersekte a $\pi^{-1}(M^{\geq \epsilon})$, entonces este elemento está contenido en $\pi^{-1}(M^{\geq \epsilon'})$ como en la demostración del paso 1. Sea entonces

$$\hat{z}_{R,\epsilon} := \sum \{a_R(\omega, \bar{j}) \cdot \sigma_{\omega, \bar{j}} : \sigma_{\omega, \bar{j}} \cap M^{\geq \epsilon} \neq \emptyset\},$$

luego $z_{R,\epsilon}$ y $\hat{z}_{R,\epsilon}$ tienen la misma norma de Gromov, y además

$$\begin{aligned} z_{R,\epsilon} &= \sum \{a_R(\omega, \bar{j}) \cdot (\rho_{\epsilon'} \circ \sigma_{\omega, \bar{j}}) : \sigma_{\omega, \bar{j}} \cap M^{\geq \epsilon} \neq \emptyset\} \\ &\quad + \sum \{a_R(\omega, \bar{j}) \cdot (\rho_{\epsilon'} \circ \sigma_{\omega, \bar{j}}) : \sigma_{\omega, \bar{j}} \cap M^{\geq \epsilon} = \emptyset\} \\ &= \sum \{a_R(\omega, \bar{j}) \cdot \sigma_{\omega, \bar{j}} : \sigma_{\omega, \bar{j}} \cap M^{\geq \epsilon} \neq \emptyset\} \\ &\quad + \sum \{a_R(\omega, \bar{j}) \cdot (\rho_{\epsilon'} \circ \sigma_{\omega, \bar{j}}) : \sigma_{\omega, \bar{j}} \cap M^{\geq \epsilon} = \emptyset\} \\ &= \hat{z}_{R,\epsilon} + \sum \{a_R(\omega, \bar{j}) \cdot (\rho_{\epsilon'} \circ \sigma_{\omega, \bar{j}}) : \sigma_{\omega, \bar{j}} \cap M^{\geq \epsilon} = \emptyset\}, \end{aligned}$$

donde la primera igualdad sale de que si un elemento de $S(R)$ intersekte a $\pi^{-1}(M^{\leq \epsilon})$, está contenido en $\pi^{-1}(M^{\leq \epsilon'})$. Sea $c := z_{R,\epsilon'} - \hat{z}_{R,\epsilon}$.

Sea $R > 0$ lo suficientemente grande. Por el paso 6 tenemos que $\int_{z_{R,\epsilon'}} \text{Vol}_M > 0$, se sigue que como $H_n(M^{\geq \epsilon'}, \partial M^{\leq \epsilon'}; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, entonces $[z_{R,\epsilon'}] = (1/k)[M^{\geq \epsilon'}]$ para algún $k > 0$. Si consideramos la retracción ρ de $M^{\epsilon'}$ a M^ϵ dada en la proposición 6.2.10, entonces es claro que $\rho_*(z_{R,\epsilon'}) = z_{R,\epsilon}$. Además ρ es una equivalencia homotópica, de donde $\rho_*([M^{\geq \epsilon'}]) = \pm[M^{\geq \epsilon}]$. Por lo tanto $[M^{\geq \epsilon}] = \pm \rho_*([M^{\geq \epsilon'}]) = \pm \rho_*(k \cdot [z_{R,\epsilon'}]) = \pm k \cdot [z_{R,\epsilon}]$, de donde $\|k \cdot z_{R,\epsilon}\| \geq \|M^{\geq \epsilon}\| = \|M\|$.

De lo anterior obtenemos de los pasos 4 y 5 que

$$\begin{aligned} \text{Vol}(M) &> \text{Vol}(M^{\geq \epsilon'}) = \int_{[M^{\geq \epsilon'}]} dv_M = \int_{kz_{R,\epsilon'}} dv_M \\ &= k \cdot \int_{z_{R,\epsilon'}} dv_M = k \cdot \int_{\hat{z}_{R,\epsilon}} dv_M + k \cdot \int_c dv_M \end{aligned} \tag{7.8}$$

$$\begin{aligned}
&= k \cdot \sum \left\{ a_R(\omega, \bar{j}) \cdot \int_{\sigma(\omega, \bar{j})} dv_M : \sigma(\omega, \bar{j}) \cap M^{\geq \epsilon} \neq \emptyset \right\} + k \cdot \int_c dv_M \\
&= k \cdot \sum \left\{ |a_R(\omega, \bar{j})| \cdot \left| \int_{\sigma(\omega, \bar{j})} dv_M \right| : \sigma(\omega, \bar{j}) \cap M^{\geq \epsilon} \neq \emptyset \right\} + k \cdot \int_c dv_M \\
&\geq k \cdot \|\tilde{z}_{R,\epsilon}\|(v_n - \delta) + k \cdot \int_c dv_M \geq k \cdot \|\tilde{z}_{R,\epsilon}\|(v_n - \delta) \\
&= k \cdot \|z_{R,\epsilon}\|(v_n - \delta) = \|k \cdot z_{R,\epsilon}\|(v_n - \delta) \geq \|M\| \cdot (v_n - \delta)
\end{aligned}$$

Donde la primera desigualdad sale de que en el paso 5 se demostró que la integral de dv_M sobre cada uno de los sumandos de $z_{R,\epsilon}$ es positiva, y la segunda desigualdad sale de que $\int_{\text{end}_\epsilon(\sigma)} dv_M \leq \int_{\text{end}(\sigma)} dv_M$, de donde como $\delta > 0$ fue arbitrario, obtenemos la desigualdad de la proposición. \square

Teorema 7.2.5. *Sea M una variedad hiperbólica, completa, orientada y de volumen finito, que es el interior de una variedad compacta \tilde{M} , entonces*

$$\|\tilde{M}\| = \frac{\text{Vol}(M)}{v_n}.$$

Demostración. Ya demostramos que ambas cantidades son mayores que o iguales a la otra. \square

En particular el volumen es un invariante homotópico entre variedades hiperbólicas completas de volumen finito.

7.3. Conclusión de la demostración

Recordemos que tenemos dos variedades hiperbólicas, completas, orientadas y de volumen finito $M_1 \cong \mathbb{H}^n/\Gamma_1$ y $M_2 \cong \mathbb{H}^n/\Gamma_2$, junto con un isomorfismo $\phi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$, y que construimos una pseudoisometría $F_1 : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ que lo inducía. También demostramos que M_1 y M_2 son homotópicamente equivalentes, de donde por el teorema 7.2.5 tendremos entonces que $\text{Vol}(M_1) = \text{Vol}(M_2)$.

Recordemos que como F_1 es una pseudoisometría, por lo visto en el capítulo 2 tenemos que esta función se extiende a una función continua $\overline{F_1} : \overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$. Como en el caso cerrado vamos a demostrar la siguiente afirmación:

Proposición 7.3.1. *La función $\overline{F_1}$ envía los vértices de cualquier simplejo ideal regular en los vértices de un simplejo ideal regular.*

Demostración. Recordemos que en el modelo \mathbb{D}^n hemos fijado los vértices $w_0, \dots, w_n \in \partial\mathbb{D}^n$ de un tetraedro regular euclidiano, y para cada $R > 0$ fijamos un elemento $(u_0^R, \dots, u_n^R) \in S(R)$ tal que $u_i^R \in [\overline{0}, w_i)$ para cada i .

Suposición 7.3.2. Supongamos que $\overline{F_1}$ envía a los vértices de un simplejo ideal regular a los vértices de un ideal que no es regular. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los vértices w_0, \dots, w_n se envían por medio de $\overline{F_1}$ a los vértices de un simplejo ideal que no es regular.

Entonces existen vecindades abiertas U_0, \dots, U_n de w_0, \dots, w_n respectivamente tales que para algún $r > 0$ tenemos

$$\text{Vol}(\sigma_{(\overline{F_1}(x_0), \dots, \overline{F_1}(x_n))}) \leq v_n - r,$$

si $x_i \in U_i$ para todo i .

Fijemos para cada $i \in \mathbb{N}$ un punto $y_i \in X_i$. Definimos

$$P := \{(\omega, \vec{j}) \in \Omega \times \mathbb{N}^{n+1} : \exists \gamma_0, \dots, \gamma_n \in \Gamma_1 \text{ t.q. } \omega = [(\gamma_0, \dots, \gamma_n)] \text{ y } \gamma_i(y_{j_i}) \in U_i \forall i\}.$$

Para cada $R > 0$ y $\epsilon > 0$ sea

$$c_{R,\epsilon} := \sum_{\substack{(\omega, \vec{j}) \in P \\ \sigma_{\omega, \vec{j}} \cap M^{\geq \epsilon} \neq \emptyset}} a_R(\omega, \vec{j}) \cdot \left(\rho_\epsilon \circ \sigma_{\omega, \vec{j}} \right),$$

Usando la demostración de la afirmación análoga en el caso compacto, proposición 4.0.1, es fácil ver que tenemos la primera igualdad del siguiente argumento: para $R > 0$ lo suficientemente grande, de manera que $a_R^+(\omega, \vec{j}) \cdot a_R^-(\omega, \vec{j}) = 0$ y para todo $\omega \in \Omega$ y $\vec{j} \in \mathbb{N}^{n+1}$, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \|z_{R,\epsilon}\| &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_{\substack{[(id, \gamma_1, \dots, \gamma_n)] \in \Omega, \vec{j} \in \mathbb{N}^{n+1} \\ \sigma_{\omega, \vec{j}} \cap \pi^{-1}(M^{\geq \epsilon}) \neq \emptyset}} \mu\{\delta \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n) : \delta(u_0^R) \in X_{j_0}, \delta(u_i^R) \in \gamma_i(X_{j_i}), \forall i\} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mu \left(\bigcup_{\substack{\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma, \vec{j} \in \mathbb{N}^{n+1} \\ \sigma_{\omega, \vec{j}} \cap \pi^{-1}(M^{\geq \epsilon}) \neq \emptyset}} \{\delta \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n) : \delta(u_0^R) \in X_{j_0}, \delta(u_i^R) \in \gamma_i(X_{j_i}), \forall i\} \right) \\ &= \mu \left(\bigcup_{\substack{\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma, \vec{j} \in \mathbb{N}^{n+1} \\ \sigma_{\omega, \vec{j}} \cap \pi^{-1}(M^{\geq \epsilon}) \neq \emptyset, \epsilon > 0}} \{\delta \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n) : \delta(u_0^R) \in X_{j_0}, \delta(u_i^R) \in \gamma_i(X_{j_i}), \forall i\} \right) \\ &= \mu \left(\bigcup_{\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma} \{\delta \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n) : \delta(u_0^R) \in D, \delta(u_i^R) \in \gamma_i(D), \forall i\} \right) \\ &= \mu\{\delta \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n) : \delta(u_0^R) \in D\} = \text{Vol}(D) < \infty \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad sale del corolario 4.2.12 y que si $(\gamma, j), (\gamma', j') \in \Gamma \times \mathbb{N}$ son distintos, entonces el volumen de la intersección $\gamma(X_i) \cap \gamma'(X_i)$ es cero, la última igualdad sale del corolario 4.2.12, y la desigualdad sale de que como D es un dominio fundamental de $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}^n$, y por lo tanto $\text{Vol}(D) = \text{Vol}(M) < \infty$ por hipótesis. Las otras igualdades salen de la regularidad de la medida μ , de donde existe $\alpha > 0$ tal que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \|z_{R,\epsilon}\| = \alpha$ para todo $R > 0$ lo suficientemente grande. Con lo que existe α tal que para todo $0 < \epsilon \ll 1$ y todo $R > 0$ tenemos que $\|z_{R,\epsilon}\| \leq \alpha$.

Por la proposición 4.2.23 tenemos que existen vecindades V_i de cada w_i tales que para todo $x, y \in \mathbb{H}^n$ tales que $x \in V_i$ y $d_{\mathbb{H}^n}(x, y) \leq d$ tenemos que $y \in U_i$. Usando uno de los argumentos

dados en la demostración de la afirmación 4.2.25 obtenemos la primera igualdad de la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \|c_{R,\epsilon}\| &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_{\substack{\omega=[(\gamma_0, \dots, \gamma_n)] \in \Omega, \bar{j} \in \mathbb{N}^{n+1} \\ \gamma_i(y_{j_i}) \in U_i \forall i, \sigma(\omega, \bar{j}) \cap \pi^{-1}(M \geq \epsilon) \neq \emptyset}} \mu\{\delta \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n) : \delta(u_i^R) \in \gamma_i(X_{j_i}), \forall i\} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mu \left(\bigcup_{\substack{[(\gamma_0, \dots, \gamma_n)] \in \Omega, \bar{j} \in \mathbb{N}^{n+1} \\ \gamma_i(y_{j_i}) \in U_i \forall i, \sigma(\omega, \bar{j}) \cap \pi^{-1}(M \geq \epsilon) \neq \emptyset}} \{\delta \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n) : \delta(u_i^R) \in \gamma_i(X_{j_i}), \forall i\} \right) \\
&= \mu \left(\bigcup_{\substack{[(\gamma_0, \dots, \gamma_n)] \in \Omega, \bar{j} \in \mathbb{N}^{n+1} \\ \gamma_i(y_{j_i}) \in U_i \forall i}} \{\delta \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n) : \delta(u_i^R) \in \gamma_i(X_{j_i}), \forall i\} \right) \\
&= \mu\{\delta \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n) : \exists \gamma_0, \dots, \gamma_n \in \Gamma, \exists \bar{j} \in \mathbb{N}^{n+1}, \delta(u_i^R) \in \gamma_i(X_{j_i}), \gamma_i(y_{j_i}) \in U_i \forall i\} \\
&\geq \mu\{\delta \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n) : \delta(u_i^R) \in V_i \forall i\}
\end{aligned}$$

donde la última igualdad sale de la construcción de las vecindades V_i y de que $\text{diam}(X_i) \leq d$ para todo $i \in \mathbb{N}$. De la demostración de la afirmación 4.2.25 sabemos entonces que existe $\beta > 0$ que es cota inferior de la última ecuación para todo $R > 0$ lo suficientemente grande, de donde para todo $0 < \epsilon \ll 1$ y todo $R > 0$ lo suficientemente grande tenemos que $\|c_{R,\epsilon}\| \geq \beta$.

Vamos a usar estas cotas para llegar a una contradicción de la suposición 7.3.2. Sea $0 < \epsilon$ lo suficientemente pequeño. Por el corolario 7.1.6 sabemos que F_1 induce una equivalencia homotópica $f_1 : M_1^{\geq \epsilon} \rightarrow M_2^{\geq \delta_\epsilon}$. Es claro entonces que

$$\text{end}_{\delta_\epsilon}(p_*(z_{R,\epsilon})) = \sum_{\substack{(\omega, \bar{j}) \in \Omega \times \mathbb{N}^{n+1} \\ \sigma(\omega, \bar{j}) \cap M_1^{\geq \epsilon} \neq \emptyset}} a^R(\omega, \bar{j}) \cdot (\rho_{\delta_\epsilon} \circ \pi_2 \circ \sigma_{(F_1(\gamma_0(y_{j_0}), \dots, F_1(\gamma_n(y_{j_n})))}),$$

por la construcción de p y la definición de la cadena $z_{R,\epsilon}$. Por la demostración la proposición 7.2.4 tenemos que existe $k > 0$ tal que $k[z_{R,\epsilon}] = [M_1^\epsilon]$ para todo $R > 0$ lo suficientemente grande. Como f_1 es una equivalencia homotópica, por el lema 7.2.2 obtenemos que para todo $R > 0$ lo suficientemente grande

$$\pm(1/k)[M_2^{\delta_\epsilon}] = (1/k)p_*([M_1^{\geq \epsilon}]) = p_*([z_{R,\epsilon}]) = [\text{end}_{\delta_\epsilon}(p_*(z_{R,\epsilon}))],$$

de donde

$$\int_{z_{R,\epsilon}} dv_{M_1} = (1/k) \int_{[M_1^{\geq \epsilon}]} dv_{M_1} = (1/k) \text{Vol}(M_1^{\geq \epsilon})$$

y

$$\int_{\text{end}_{\delta_\epsilon}(p_*(z_{R,\epsilon}))} dv_{M_2} = (1/k) \int_{\pm[M_2^{\geq \delta_\epsilon}]} dv_{M_2} = \pm(1/k) \text{Vol}(M_2^{\geq \delta_\epsilon}),$$

y del corolario 7.1.6 y como $\text{Vol}(M_1) = \text{Vol}(M_2)$ por el teorema 7.2.5, obtenemos que como $\delta_\epsilon \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \rightarrow 0^+$, se sigue entonces que

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow \infty}} \int_{z_{R,\epsilon}} dv_{M_1} = (1/k) \text{Vol}(M_1) = (1/k) \text{Vol}(M_2) = \pm \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\text{end}_{\delta_\epsilon}(p_*(z_{R,\epsilon}))} dv_{M_2}.$$

de la desigualdad (7.8) y del teorema 7.2.5 tenemos que

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow \infty}} \int_{z_{R,\epsilon}} dv_{M_1} = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0^+ \\ R \rightarrow \infty}} \|z_{R,\epsilon}\| v_n = \alpha \cdot v_n.$$

Sin embargo, usando la desigualdad (7.4) y adaptando el argumento dado en (7.4) obtenemos que

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0^+}} \left| \int_{\text{end}_{\delta_\epsilon}(p_*(z_{R,\epsilon}))} dv_{M_2} \right| \leq \alpha v_n - \beta r,$$

y esto contradice el límite anterior. Por lo tanto $\overline{F_1}$ debe mandar los vértices de cualquier simplejo ideal regular, en vértices del mismo tipo. \square

Ya podemos demostrar el teorema de rigidez de Mostow para variedades hiperbólicas completas y de volumen finito, sin embargo necesitamos la siguiente observación acerca de las variedades hiperbólicas compactas:

Lema 7.3.3. *Suponga que $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ es una variedad cerrada. Entonces todos los elementos de Γ son isometrías loxodrómicas.*

Demostración. Sea $\pi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma$ la función proyección. Como M es compacta, podemos usar el lema del número de Lebesgue para obtener un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in M$ y todo $\hat{x} \in \pi^{-1}(x)$ tenemos que $\pi \upharpoonright B(\hat{x}, \delta)$ es un encaje en M .

Como \mathbb{H}^n/Γ es una variedad, se debe tener que Γ no contiene isometrías elípticas. Suponga, para obtener una contradicción, que Γ contiene una isometría parabólica γ . En el modelo $\mathbb{H}^{n,+}$ podemos suponer que γ fija a ∞ . Por el lema 6.2.1 existe entonces una isometría ϕ de \mathbb{R}^{n-1} tal que γ es de la forma $(x, s) \mapsto (\phi(x), s)$. Para todo $t > 0$ tenemos que la distancia de $\gamma(\bar{0}, t)$ a $(\bar{0}, t)$, por la proposición 1.1.18, es igual a

$$2 \sinh^{-1} \left(\frac{d_{\mathbb{R}^{n-1}}(\bar{0}, \phi(\bar{0}))}{2t} \right),$$

de donde podemos tomar t lo suficientemente grande de manera esta distancia sea menor que δ , lo cual sería una contradicción. \square

Demostración de la proposición 7.0.1: Como anteriormente demostramos esta afirmación cuando M_1 y M_2 son variedades cerradas, entonces vamos a ver primero que si tenemos dos variedades hiperbólicas de dimensión ≥ 3 completas y de volumen, y una es cerrada y la otra no, entonces sus grupos fundamentales no son isomorfos.

Suponga que $M_j = \mathbb{H}^{m_j}/\Gamma_j$ para $j = 1, 2$.

Suponga que una de estas variedades es cerrada, pero la otra no, digamos que M_1 es cerrada y M_2 no lo es. Luego $M_2^{<\epsilon M_2}$ debe tener al menos una cúspide, de donde existe un punto cúspide $v \in \partial \mathbb{H}^{m_2}$ de Γ_2 . Luego por lo que vimos anteriormente sabemos que $(\Gamma_2)_v$, y por lo tanto también Γ_2 , tiene un subgrupo isomorfo a \mathbb{Z}^{m_2-1} . Entonces Γ_2 no puede ser isomorfo a Γ_1 , ya que como \mathbb{H}^n/Γ_1 es una variedad cerrada, todos los elementos no triviales de Γ_1 son isometrías loxodrómicas, por el lema anterior, y si Γ_1 tuviera un subgrupo isomorfo a \mathbb{Z}^{m_2-1} tendríamos que como $m_2 - 1 \geq 2$, entonces este subgrupo consistiría de isometrías parabólicas por el lema 6.2.6, lo cual sería una contradicción. Por lo tanto en este caso Γ_1 y Γ_2 no son isomorfos.

Entonces podemos suponer que M_1 y M_2 no son cerradas. Veamos que si M_1 y M_2 tienen dimensión distinta, entonces tienen grupos fundamentales no isomorfos. Por lo que hemos visto en este capítulo sabemos que cualquier subgrupo maximal virtualmente abeliano de Γ_j que no es isomorfo a \mathbb{Z} tiene un subgrupo de índice finito isomorfo a \mathbb{Z}^{m_j-1} , de donde como ambos grupos tienen tales subgrupos y $m_1 \neq m_2$, obtenemos que Γ_1 y Γ_2 no son isomorfos.

Por lo que nos falta ver el caso donde ambas variedades son no compactas y de la misma dimensión. Suponga entonces que $m_1 = m_2 =: n$.

En este capítulo hemos demostrado lo siguiente:

1. Existe una pseudoisometría $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ que induce al isomorfismo $\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$;
2. La extensión continua de esta pseudoisometría a una función $\overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$ envía los vértices de cualquier simplejo ideal regular en los vértices de un simplejo del mismo tipo.

Entonces podemos usar la demostración del teorema de rigidez de Mostow para variedades cerradas de la misma manera para concluir que M_1 y M_2 son isométricas. □

7.4. Algunas consecuencias

Veremos que se pueden generalizar, para las variedades hiperbólicas completas y de volumen finito, los resultados acerca del grupo de isometrías de una variedad hiperbólica cerrada que vimos en el capítulo 5. Antes de ver por qué, necesitamos unos lemas.

Recordemos que si Γ es un subgrupo de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$, entonces $v \in \partial\mathbb{H}^n$ es un punto cúspide de Γ si existe un elemento parabólico en Γ que fija a v .

Lema 7.4.1. *Si Γ es un subgrupo de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ que actúa de manera propiamente discontinua sobre \mathbb{H}^n , entonces Γ no puede contener una isometría loxodrómica y una isometría parabólica que tengan un punto fijo en común.*

Demostración. Esta demostración se encuentra en [BP92, Lema D.3.6]. Sean $\delta_1, \delta_2 \in \Gamma$ tales que en $\Pi^{n,+}$ tenemos que δ_1 y δ_2 fijan a ∞ , y que δ_2 fija a $\bar{0}$, con δ_1 parabólica y δ_2 loxodrómica. Tenemos que

$$\delta_1(x, t) = (Ax + b, t) \text{ y } \delta_2(x, t) = \lambda(Bx, t),$$

para algunos $A, B \in O(n-1)$, $b \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, y algún $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, donde la primera igualdad sale del lema 6.2.1 y la segunda igualdad sale de los teoremas 1.1.14 y 1.1.12. Vamos a suponer que $\lambda < 1$, si este no es el caso podemos reemplazar a δ_2 por su inversa. Se puede calcular directamente y observar que para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\delta_2^{-n} \circ \delta_1 \circ \delta_2^n(0, 1) = (\lambda^{-n} B^{-n} b, 1).$$

Sin embargo, el último punto de la igualdad anterior converge a $(\bar{0}, 1)$ cuando n tiende a infinito, y por lo tanto $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}^n$ no es propiamente discontinua. □

Lema 7.4.2. *Suponga que $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ es una variedad hiperbólica completa y de volumen finito que no es compacta. Entonces Γ tiene al menos dos puntos cúspides.*

Demostración. Por el corolario 6.2.9 tenemos que Γ tiene al menos un punto cúspide.

Suponga, para obtener una contradicción, que Γ sólo tiene un punto cúspide v . Entonces Γ no puede tener elementos loxodrómicos, ya que de otra manera si existiera una isometría loxodrómica $\gamma_1 \in \Gamma$ y si $\gamma_0 \in \Gamma$ es una isometría parabólica que fija a v , entonces $\gamma_1 \circ \gamma_0 \circ \gamma_1^{-1}$ es una isometría parabólica cuyo punto fijo es $\gamma_1(v)$, y por el lema anterior $\gamma_1(v) \neq v$, y esto contradiría nuestra suposición de que v es el único punto cúspide de Γ . Por lo tanto Γ debe consistir sólo de la identidad y de isometrías parabólicas que fijan a v . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que en el modelo $\Pi^{n,+}$ tenemos que $v = \infty$.

Luego por la proposición 6.2.1 se sigue que Γ actúa de manera libre y propiamente discontinua sobre $\mathbb{R}^{n-1} \times \{1\}$, de donde si $A \times \{1\}$ es un dominio fundamental de esta acción, se sigue entonces que $A \times (0, \infty)$ es un dominio fundamental de la acción $\Gamma \curvearrowright \Pi^{n,+}$, y así por la observación (3.1) tenemos que

$$\text{Vol}(M) = \text{Vol}(A \times (0, \infty)) = \int_{A \times (0, \infty)} \frac{dx_1 \cdots dx_n}{x_n^n} = \text{Vol}(A) \int_0^\infty \frac{dx_n}{x_n^n}$$

y esta última integral diverge, lo que contradice que M tiene volumen finito. Por lo tanto Γ tiene al menos dos puntos cúspides. \square

Lema 7.4.3. Sean $\phi, \psi \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$, y suponga que ϕ tiene un solo punto fijo v en $\overline{\mathbb{H}^n}$. Si estas dos isometrías conmutan, entonces ψ también fija a v .

Demostración. Tenemos que

$$\phi(\psi(v)) = \psi(\phi(v)) = \psi(v),$$

de donde se debe tener que $\psi(v) = v$. \square

Necesitamos la siguiente versión del teorema de Bieberbach.

Teorema 7.4.4 (Primer Teorema de Bieberbach segunda versión). *Suponga que Γ es un subgrupo de $\mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ que actúa de manera libre y propiamente discontinua sobre \mathbb{R}^n de manera que \mathbb{R}^n/Γ es compacto. Entonces Γ contiene n traslaciones de \mathbb{R}^n en direcciones linealmente independientes.*

Una demostración de este hecho se encuentra en [Szc12, Teorema A.1].

Lema 7.4.5. *Suponga que $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ es una variedad hiperbólica completa y de volumen finito. Suponga que $\gamma \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ conmuta con todos los elementos de Γ . Entonces γ es la identidad.*

Note que este lema es una generalización del corolario 5.2.2.

Demostración. Por el lema anterior existen $v_1, v_2 \in \partial\mathbb{H}^n$ distintos que son puntos cúspides de Γ . Usando la isotropía del espacio hiperbólico, podemos usar una isometría en el modelo $\Pi^{n,+}$ que envíe a v_1, v_2 en $\bar{0}, \infty$ respectivamente, para suponer que $\bar{0}, \infty$ son puntos cúspides de Γ , hay que enviar la geodésica que va de v_1 a v_2 a la geodésica que va de $\bar{0}$ a ∞ .

Por el teorema 7.4.4 y el lema 6.2.1 se sigue que entonces la acción Γ_∞ sobre $\mathbb{R}^{n-1} \times \{1\}$ tiene $n - 1$ traslaciones linealmente independientes. Si b_1, \dots, b_{n-1} son los puntos de $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ que corresponden a estas traslaciones, entonces b_1, \dots, b_{n-1} son puntos cúspides de Γ , si $\eta \in \Gamma$ es una isometría parabólica que fija a $\bar{0}$, y γ_i es la traslación asociada a b_i , entonces $\gamma_i \circ \eta \circ \gamma_i^{-1}$ es una isometría parabólica que fija a b_i .

Por el lema 7.4.3 obtenemos que γ fija a $\infty, \bar{0}, b_1, \dots, b_{n-1}$, de donde en particular por el lema 6.2.1 se sigue que γ es de la forma $(x, t) \mapsto (\phi(x), t)$ para alguna isometría ϕ de \mathbb{R}^{n-1} . Como ϕ fija al origen, entonces $\phi \in O(n-1)$. Por lo tanto, ϕ es la identidad ya que fija a la base b_1, \dots, b_{n-1} . Por lo tanto γ es la identidad de $\Pi^{n,+}$. \square

Dada una variedad topológica conexa M con cubriente universal $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$, y grupo de transformaciones cubrientes Γ , en el capítulo 5 definimos un homomorfismo $\text{Out}(M) : \text{Homeo}(M) \rightarrow \text{Out}(\Gamma)$, tal que $f \mapsto \langle \phi_{\hat{f}} \rangle$, donde \hat{f} es un levantamiento de f con respecto a π , y $\phi_{\hat{f}}$ es el isomorfismo de Γ tal que para todo $\gamma \in \Gamma$ tenemos que $\hat{f} \circ \gamma = \phi_{\hat{f}}(\gamma) \circ \hat{f}$.

Ya podemos demostrar las afirmaciones con respecto a $\mathcal{I}(M)$:

Teorema 7.4.6. *Suponga que M es una variedad hiperbólica completa y de volumen finito. Entonces la restricción de la función $\text{Out}(M)$ a $\mathcal{I}(M)$ es un isomorfismo sobre $\text{Out}(\Gamma)$.*

Demostración. Ver que $\text{Out}(M) \upharpoonright \mathcal{I}(M)$ es sobre $\text{Out}(\Gamma)$ se demuestra de la misma manera como se demostró en el teorema análogo 5.2.3 usando el teorema de rigidez de Mostow para variedades hiperbólicas completas y de volumen finito.

Ahora suponga que $f \in \mathcal{I}(M)$ es tal que $\langle \phi_{\hat{f}} \rangle = \langle \text{id} \rangle$ en $\text{Out}(\Gamma)$, para algún levantamiento \hat{f} de f . Entonces existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que $\phi_{\hat{f}}(-) = \gamma_0^{-1} \circ - \circ \gamma_0$, de donde obtenemos que $\hat{f} \circ \gamma = \gamma_0^{-1} \circ \gamma \circ \gamma_0 \circ \hat{f}$ para todo $\gamma \in \Gamma$, i.e., $\gamma_0 \circ \hat{f}$ conmuta con todos los elementos de Γ , de donde por el lema 7.4.5 se sigue que $\gamma_0 \circ \hat{f} = \text{id}_{\mathbb{H}^n}$, y como $\gamma_0 \circ \hat{f}$ es un levantamiento de f , entonces $f = \text{id}_M$. \square

Para finalizar, vamos a ver que si M es una variedad hiperbólica completa de volumen finito, entonces $\mathcal{I}(M)$ es finito.

Lema 7.4.7. *Suponga que $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ es una variedad hiperbólica completa y de volumen finito, con proyección cubriente $\pi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma$. Entonces si $0 < \epsilon < \epsilon_M$, tendremos que $\pi \upharpoonright : \pi^{-1}(M^{\geq \epsilon}) \rightarrow M^{\geq \epsilon}$ es la cubriente universal de $M^{\geq \epsilon}$, con grupo de transformaciones cubrientes dado por $\{\gamma \upharpoonright \pi^{-1}(M^{\geq \epsilon}) : \gamma \in \Gamma\}$.*

Demostración. De la demostración del corolario 6.2.10 se sigue que $\pi^{-1}(M^{\geq \epsilon})$ es un retracto por deformación de \mathbb{H}^n , y en particular $\pi^{-1}(M^{\geq \epsilon})$ es simplemente conexo. Que la restricción indicada es una función cubriente sale de la observación de que si $X \xrightarrow{f} Y$ es una función cubriente y S es un subespacio de Y , entonces $f \upharpoonright f^{-1}(S)$ es una función cubriente sobre S . La afirmación con respecto al grupo de transformaciones cubrientes es clara. \square

Lema 7.4.8. *Suponga que $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ es una variedad completa y de volumen finito. Sea $0 < \epsilon < \epsilon_M$. Si $f_1, f_2 \in \text{Homeo}(M^{\geq \epsilon})$ son tales que*

$$\sup_{x \in M^{\geq \epsilon}} d_M(f_1(x), f_2(x)) < \epsilon/2$$

entonces f_1 y f_2 son homotópicos en $M^{\geq \epsilon}$.

Demostración. Sea $\rho_\epsilon : M \rightarrow M^{\geq \epsilon}$ un retracto por deformación.

Si $x \in M^{\geq \epsilon}$, como $f_1(x) \in M^{\geq \epsilon}$ y $d_M(f_1(x), f_2(x)) < \epsilon/2$, entonces por la definición de $M^{\geq \epsilon}$ tendremos que existe un único arco geodésico en M que va de $f_1(x)$ a $f_2(x)$, de donde al considerar

la función $H : [0, 1] \times M^{\geq \epsilon} \rightarrow M$ tal que a (x, t) lo envía al punto del arco geodésico de M que va de $f_1(x)$ a $f_2(x)$ y que dista $t \cdot d_M(f_1(x), f_2(x))$ de $f_1(x)$, entonces H es una homotopía en M que va de f_1 a f_2 , y por lo tanto $\rho_\epsilon \circ H$ es una homotopía en $M^{\geq \epsilon}$ que va de f_1 a f_2 . \square

Teorema 7.4.9. *Suponga que M es una variedad hiperbólica completa y de volumen finito, entonces $\mathcal{I}(M)$ es finito.*

Demostración. Por el teorema de Arzelà-Ascoli es fácil ver que el grupo de isometrías $\mathcal{I}_{met}(M^{\geq \epsilon})$ del espacio métrico $(M^{\geq \epsilon}, d_M \upharpoonright)$, es compacto dado que $M^{\geq \epsilon}$ es compacto. Veamos que

$$\{f \upharpoonright M^{\geq \epsilon} : f \in \mathcal{I}(M)\}$$

es un subconjunto discreto de $\mathcal{I}_{met}(M^{\geq \epsilon})$. Luego como este espacio es compacto, esto implicará que $\mathcal{I}(M)$ es finito, ya que la asignación $\mathcal{I}(M) \rightarrow \mathcal{I}_{met}(M^{\geq \epsilon})$ dada por $f \mapsto f \upharpoonright M^{\geq \epsilon}$ es inyectiva por el teorema de rigidez riemanniana 1.1.5.

Sean $f_1, f_2 \in \mathcal{I}(M)$ tales que

$$\sup_{x \in M^{\geq \epsilon}} d_M(f_1(x), f_2(x)) < \epsilon/2. \quad (7.9)$$

Como $f_j \upharpoonright M^{\geq \epsilon} \in \mathcal{I}_{met}(M^{\geq \epsilon})$, se sigue entonces por el lema anterior que f_1 y f_2 son homotópicas en $M^{\geq \epsilon}$, como el grupo de transformaciones cubrientes de la cubriente $\pi : \pi^{-1}(M^{\geq \epsilon}) \rightarrow M$ son restricciones de los elementos de Γ , entonces por el lema 5.2.5 tenemos que $\langle \phi_{(f_1 \upharpoonright M^{\geq \epsilon})^\wedge} \rangle = \langle \phi_{(f_2 \upharpoonright M^{\geq \epsilon})^\wedge} \rangle$, en $\text{Out}(\Gamma)$, y es claro que esto implica que $\langle \phi_{\hat{f}_1} \rangle = \langle \phi_{\hat{f}_2} \rangle$, de donde por el teorema 7.4.6 se sigue que $f_1 = f_2$, y en particular $f_1 \upharpoonright M^{\geq \epsilon} = f_2 \upharpoonright M^{\geq \epsilon}$. Por lo tanto hemos demostrado que (7.4) es un subconjunto discreto de $\mathcal{I}_{met}(M^{\geq \epsilon})$, y por lo dicho anteriormente esto implica que $\mathcal{I}(M)$ es finito. \square

Capítulo 8

Nudos hiperbólicos

Tal vez el área de las matemáticas donde el teorema de rigidez de Mostow para variedades hiperbólicas completas y de volumen finito ha tenido más impacto es la teoría de nudos.

En los años setenta, Robert Riley descubrió que el complemento del nudo figura ocho tiene una estructura hiperbólica completa y de volumen finito. Luego, usando computadores, conjeturó para qué tipo de nudos sus complementos deberían tener una estructura hiperbólica completa y de volumen finito. Esta conjetura tiene una gran importancia ya que por el teorema de rigidez de Mostow para variedades hiperbólicas completas y de volumen finito podemos extraer invariantes que permitan diferenciar a los nudos entre sí. Esta conjetura la demostró William Thurston a comienzos de los 80's, ver [Thu86], al demostrar que toda 3-variedad de cierto tipo, de manera más específica las 3-variedades Haken atoroidales, siempre poseen una geometría de este tipo.

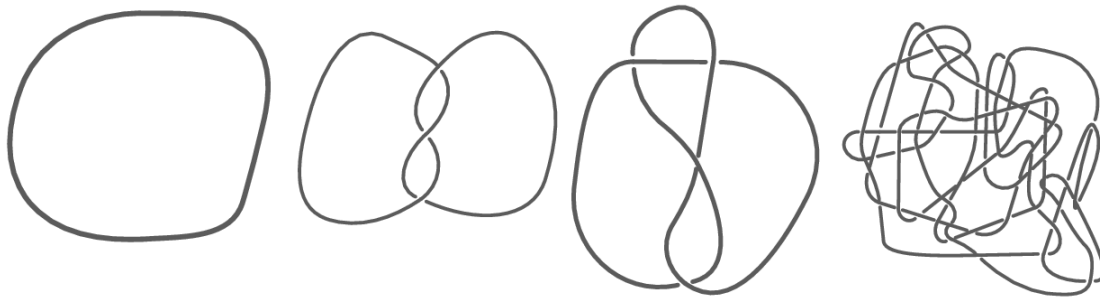
Un invariante importante entre nudos hiperbólicos es el volumen de su complemento, el cual permite diferenciar la mayoría de los nudos hiperbólicos, por ejemplo el volumen distingue todos los nudos hiperbólicos que tienen 10 o menos cruces, de estos nudos la gran mayoría son hiperbólicos. Otros invariantes hiperbólicos son las longitudes de geodésicas cerradas, el grupo de simetría, el cual es un grupo finito, el volumen de la cúspide maximal etcétera. Pero tal vez el invariante hiperbólico más importante de todos es el dominio de Ford ya que permite decidir, cuando se puede hallar, si cualesquiera dos nudos hiperbólicos son isomorfos o no. Estas herramientas que vienen de la geometría hiperbólica han servido de gran ayuda en la tabulación de nudos, ya que para nudos con número bajo de cruces la mayoría de nudos son hiperbólicos, por ejemplo entre todos los nudos primos de 19 cruces o menos hay 395 nudos que no son hiperbólicos y el número restante de nudos hiperbólicos, es de 352, 151, 858.

En este capítulo estudiaremos un invariante hiperbólico muy importante para este tipo de nudos, el cual no sólo sirve para diferenciar nudos equivalentes entre sí, sino también permite decidir si dos nudos hiperbólicos son equivalentes o no. Este invariante es el dominio de Ford, el cual veremos está bien definido gracias al teorema de rigidez de Mostow para variedades hiperbólicas completas y de volumen finito.

8.1. Nudos

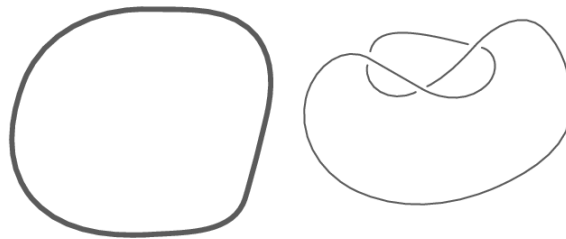
Definición 8.1.1. Un **nudo** es un encaje suave $\eta : S^1 \rightarrow S^3$.

Muchas veces confundiremos a un nudo con su imagen.



Algunos ejemplos de nudos. Imagenes creadas en SnapPy [Cul+].

Definición 8.1.2. Sean $\eta_0, \eta_1 : S^1 \rightarrow S^3$ dos nudos. Entonces estos nudos son **equivalentes** si existe una isotopía, es decir, una función diferenciable $H : [0, 1] \times S^3 \rightarrow S^3$ tal que para todo $t \in [0, 1]$ tenemos que $H(t, -)$ es un difeomorfismo de S^3 en sí misma, tal que $H(0, -) \cong \text{id}$, y $H(1, -) \circ \eta_0 = \eta_1$.



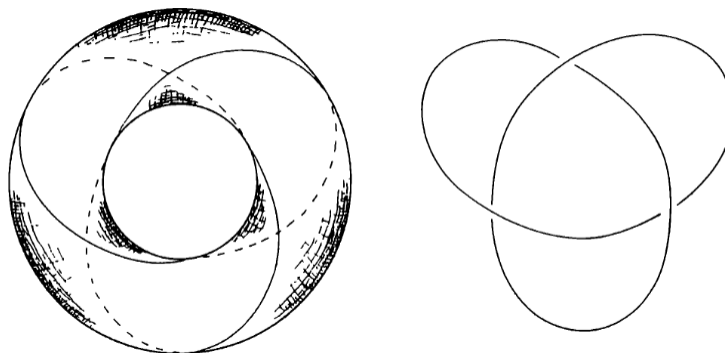
Ejemplo de nudos equivalentes. Imagenes creadas en SnapPy [Cul+].

Uno de los grandes objetivos de la teoría de nudos es poder decidir si cualesquiera dos nudos dados son equivalentes o no.

Se puede demostrar que dos nudos η_0, η_1 son equivalentes si y sólo si existe un difeomorfismo $S^3 \xrightarrow{f} S^3$ que preserve la orientación tal que $f \circ \eta_0 = \eta_1$.

Definición 8.1.3. Un nudo es trivial si es equivalente al círculo unidad de \mathbb{R}^2 , donde \mathbb{R}^2 está encajado en $\mathbb{R}^3 \subseteq S^3$ por medio de $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$.

Definición 8.1.4. Un nudo es **toroidal** si es equivalente a un nudo que está contenido en la frontera de una vecindad tubular de un nudo trivial.

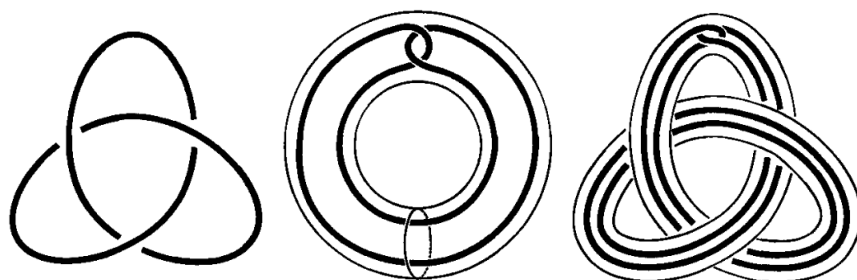


Ejemplo de nudo toroidal. Imagen tomada de [Bre93, P. 163].

Se puede demostrar que todo nudo toroidal, salvo equivalencia entre nudos, corresponde a un único elemento $(p, q) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \pi_1(\mathbb{T}^2)$ tales que p y q son coprimos, esto es porque un nudo encajado en \mathbb{T}^2 es una curva cerrada sin autointersecciones.

Definición 8.1.5. Un nudo es **satélite** si es equivalente a un nudo η encajado en la vecindad tubular T de un nudo no trivial γ de manera que se cumpla lo siguiente:

1. η no es equivalente a γ ;
2. No existe una isotopía $H : [0, 1] \times T \rightarrow T$ tal que $H(0, -) \cong \text{id}_T$ y $H(1, -) \circ \eta$ sea un nudo encajado topológicamente en una 3-bola encajada topológicamente en T , es decir, η está bien "esparcido":



Construcción nudo satélite. Imagen tomada de [Bon09, Página 321].

Definición 8.1.6. Un nudo N es **hiperbólico** si a $S^3 \setminus N$ se le puede asignar una estructura hiperbólica completa de volumen finito

La razón principal por la que la noción de nudo hiperbólico es tan importante es el siguiente teorema que demostró Thurston a comienzos de los ochenta:

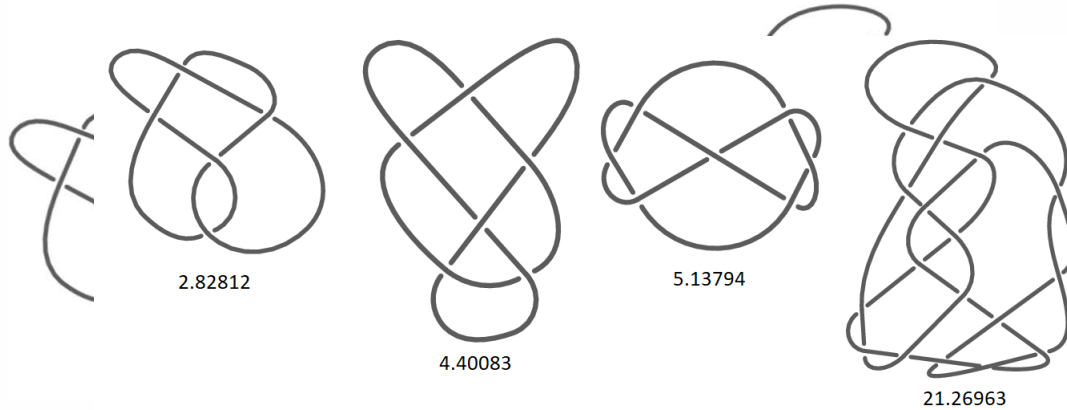
Teorema 8.1.7. [Teorema de Geometrización de Nudos de Thurston] *Todo nudo no trivial que no es toroidal ni satélite es hiperbólico.*

Por el teorema de rigidez de Mostow tenemos que la estructura hiperbólica completa y de volumen finito del complemento de un nudo hiperbólico no trivial es única salvo isometría, de donde podemos usar invariantes geométricos para diferenciar nudos hiperbólicos entre sí. Por ejemplo, dado un nudo hiperbólico, que tenga una cantidad razonable de cruces, el programa SnapPy [Cul+], que a su vez está basado en el programa Snappea de Jeff Weeks, intenta hallar una familia de simplejos ideales en \mathbb{H}^3 junto con una identificación entre sus caras para obtener una triangulación del complemento del nudo y así hallar su única estructura hiperbólica.

Un invariante hiperbólico importante entre este tipo de nudos es el volumen del complemento del nudo.

Por ejemplo, la única estructura hiperbólica completa y de volumen finito del complemento del nudo figura ocho se obtiene, como ya vimos en el ejemplo 1.2.7, de pegar de cierta manera las caras de dos simplejos ideales regulares, de donde por la fórmula de Lobachevsky obtenemos que el volumen de este nudo es igual a $6 \cdot \Lambda(\pi/3) \approx 2,0298832$.

Ejemplo 8.1.8. He aquí otros ejemplos de nudos hiperbólicos con sus respectivos volúmenes aproximados, estos dibujos se crearon usando SnapPy [Cul+]:



donde los nudos mostrados son en orden 5_2 , 6_2 , 7_4 en la tabla de Rolfsen, y el último es un nudo de 18 cruces que introduje a SnapPy por medio de dibujo libre y resultó ser hiperbólico, SnapPy tiene una interfaz donde se pueden introducir al programa nudos por medio de dibujo para que el programa los analice.

También hay otros invariantes geométricos de los nudos hiperbólicos como las longitudes de las geodésicas cerradas, el volumen de las cúspides maximales, el grupo de isometrías, el cual es finito y se puede expresar en términos del grupo fundamental por lo que vimos en el capítulo pasado, la clase de Chern-Simmons, entre otros, los cuales no discutiremos aquí.

8.2. Dominios de Ford

Hay un invariante geométrico que permite distinguir cualesquiera dos nudos hiperbólicos, el cual es el dominio de Ford, en realidad no sólo este invariante, sino él junto con cierta información asociada con su construcción, el cual introduciremos después de la siguiente definición.

El material que exponemos en esta sección lo tomamos de [Bon09, Capítulo 12] y [Pur20, Capítulo 14].

Vamos a definir el dominio de Ford para variedades hiperbólicas completas de volumen finito con una sola cúspide.

Recordemos que si Γ es un subgrupo de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ que actúa de manera libre y propiamente discontinua sobre \mathbb{H}^n y $x \in \mathbb{H}^n$, entonces un dominio fundamental de esta acción viene dado por el dominio de Dirichlet:

$$\{x \in \mathbb{H}^n : d(x, y) \leq d(x, \gamma(y)) \forall \gamma \in \Gamma\}.$$

Sea $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ una variedad hiperbólica completa de volumen finito con una sola cúspide. Para definir el dominio de Ford de Γ , primero debemos suponer que en el modelo $\Pi^{n,+}$ el punto ∞ es un punto parabólico de Γ , esto lo podemos hacer al tomar v un punto parabólico de Γ y tomar $\psi \in \mathcal{I}(\Pi^{n,+})$ tal que $v \mapsto \infty$, reemplazar a Γ por $\psi \circ \Gamma \circ \psi^{-1}$, y observar que M es isométrica al cociente de \mathbb{H}^n por este último grupo, note que ver esto no requiere del teorema de rigidez de Mostow.

Queremos definir el dominio de Ford de Γ como el conjunto de puntos de $\Pi^{n,+}$ tales que x está igual o más cerca de ∞ que $\gamma(\infty)$ para todo $\gamma \in \Gamma$, de manera similar a la definición del dominio de Dirichlet. Sin embargo, esto no tiene sentido ya que x dista tanto de ∞ como de $\gamma(\infty)$ una cantidad infinita. Sin embargo podemos reformular esta condición al considerar más bien a los puntos x tales

que "la distancia de x a ∞ " es "menor que o igual a la distancia de $\gamma^{-1}(x)$ a ∞ ", y esto lo podemos expresar en $\Pi^{n,+}$ en el siguiente sentido: si $(x, t), (y, s) \in \Pi^{n,+} \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$, entonces diremos que (x, t) está igual de o más cerca que (y, s) si y sólo si $t \geq s$. Definimos entonces el **dominio de Ford** de Γ , el cual denotamos por $\mathcal{F}(\Gamma)$, como la colección

$$\{(x, t) \in \Pi^{n,+} : (x, t) \text{ igual o más cerca de } \infty \text{ que } \gamma^{-1}(x, t), \forall \gamma \in \Gamma\}.$$

Note que si M es una variedad hiperbólica, de volumen finito y con una sola cúspide, *a priori* puede haber varios subgrupos Γ de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ tales que \mathbb{H}^n/Γ sea isométrica a M , y como la definición del dominio de Ford se hace usando uno de estos grupos, hay que ver que este dominio, en cierto sentido, está bien definido y no depende del grupo que se use.

El siguiente hecho muestra que $\mathcal{F}(-)$ está bien definido salvo una isometría de \mathbb{R}^n que respete a $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ y una homotecia, ya que las isometrías de $\Pi^{n,+}$ que preservan a ∞ son la composición de una extensión de una isometría de $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ y una homotecia.

Teorema 8.2.1. *Sean Γ_1 y Γ_2 dos subgrupos isomorfos que actúan de manera libre y propiamente discontinua sobre $\Pi^{n,+}$, que tienen a ∞ como punto parabólico y tales que $\Pi^{n,+}/\Gamma_j$ tiene una sola cúspide, para $j = 1, 2$. Entonces existe $\psi \in \mathcal{I}(\Pi^{n,+})$ tal que $\Gamma_2 = \psi \circ \Gamma_1 \circ \psi^{-1}$ y que fija a ∞ .*

Demostración. Sea $M_j := \Pi^{n,+}/\Gamma_j$ para $j = 1, 2$. Entonces por el teorema de rigidez 7.0.1 tenemos que existe una isometría $M_1 \xrightarrow{f} M_2$. Luego, $\epsilon_{M_1} = \epsilon_{M_2}$, y por hipótesis $M_j^{<\epsilon_{M_j}}$ consiste sólo de una cúspide, y además por la observación 6.1.4 tenemos que $f(M_1^{<\epsilon_{M_1}}) = M_2^{<\epsilon_{M_2}}$.

Sea $\pi_j : \Pi^{n,+} \rightarrow \Pi^{n,+}/\Gamma_j$ la función proyección para $j = 1, 2$. Entonces sea B_j la componente conexa de $\pi_j^{-1}(M_j^{<\epsilon_{M_j}})$ que es una horobola centrada en ∞ . Sea $x_1 \in B_1$. Luego $f(\pi_1(x_1)) \in M_2^{<\epsilon_{M_2}}$, de donde existe $x_2 \in B_2$ tal que $\pi_2(x_2) = f(\pi_1(x_1))$. Sea entonces F el levantamiento de f , con respecto a las cubrientes π_1 y π_2 , tal que $F(x_1) = x_2$.

Note que como F es un levantamiento de f , y por lo tanto una isometría de $\Pi^{n,+}$, entonces F define, de manera obvia, una biyección entre las componentes conexas de $\pi_1^{-1}(M_1^{<\epsilon_{M_1}})$ y de $\pi_2^{-1}(M_2^{<\epsilon_{M_2}})$, de donde como $F(x_1) = x_2$, y $x_j \in B_j$ para cada $j = 1, 2$, se sigue entonces que F envía a B_1 en B_2 , y por lo tanto F fija a ∞ . \square

De ahora en adelante consideraremos sólo variedades de dimensión 3.

Necesitamos saber algunas de las propiedades del grupo Γ_∞ :

Proposición 8.2.2. *Suponga que $\Pi^{3,+}/\Gamma$ es una variedad hiperbólica completa y orientable. Si $\gamma \in \Gamma$ es una isometría parabólica y fija a ∞ , γ es la extensión a $\Pi^{3,+}$ de una translación no trivial de $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.*

Demostración. Por la lema 6.2.1 tenemos que la restricción a $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ de la extensión de γ a $\overline{\Pi^{n,+}}$ es de la forma $x \mapsto Rx + b$ para un $R \in SO(2)$, ya que $\Pi^{3,+}/\Gamma$ es orientable, con $b \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ no cero. Entonces R debe ser una matriz de rotación de ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$. Luego $\det(R - Id) = 2(1 - \cos \theta)$, de donde como γ es una isometría parabólica y fija a ∞ , se debe tener que $R = Id$, ya que de otra manera $R - Id$ sería invertible y existiría $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $(R - Id)x = -b$, es decir, $Rx + b = x$. Por lo tanto γ es la extensión a $\Pi^{3,+}$ de la translación por el punto b , el cual debe ser no nulo ya que γ no es la identidad. \square

Proposición 8.2.3. *Suponga que $\Pi^{3,+}/\Gamma$ es una variedad hiperbólica completa, orientable, de volumen finito y tal que ∞ es un punto parabólico de Γ . Entonces Γ_∞ se genera por dos traslaciones de dos direcciones de $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ linealmente independientes.*

Demostración. Sea $M := \Pi^{3,+}/\Gamma$ con cubriente $\pi : \Pi^{3,+} \rightarrow \Pi^{3,+}/\Gamma$. Por la proposición 6.2.8 sabemos que existe una horobola B centrada en ∞ tal que $B/\Gamma = B/\Gamma_\infty$ es una cúspide de $M^{<\epsilon}$ para algún $\epsilon > 0$. Sea $S := \partial B$. Entonces $S/\Gamma = S/\Gamma_\infty$ y además S/Γ_∞ es la frontera de la cúspide B/Γ_∞ , de donde S/Γ_∞ es una variedad euclidiana cerrada, por el corolario 6.2.11, además de ser orientable. Con lo que $\Gamma_\infty \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Entonces por la proposición anterior cualesquiera dos generadores de Γ_∞ deben ser dos traslaciones por dos puntos $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, y b_1 y b_2 deben ser linealmente independientes, ya que si no lo fueran Γ_∞ actuaría sobre una línea euclidiana contenida en $\Pi^{3,+}$ paralela a la línea que fuera el espacio vectorial generado por b_1 y b_2 , y esta acción sobre esa línea euclidiana no podría ser propiamente discontinua porque $\Gamma_\infty \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. \square

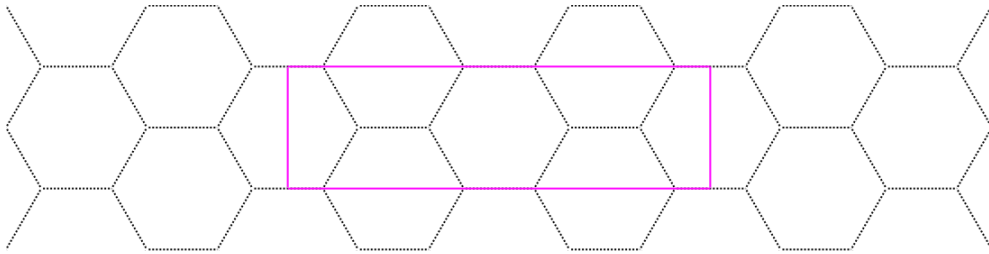
Lema 8.2.4. *Suponga que $\Pi^{3,+}/\Gamma$ es una variedad hiperbólica completa tal que ∞ es punto parabólico de Γ . Entonces para todo $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(\infty) \neq \infty$ tenemos que el conjunto de puntos (x, t) de $\Pi^{n,+}$ tales que (x, t) está al menos tan arriba como $\gamma^{-1}(x, t)$ es un semiespacio hiperbólico, el cual es el complemento de una horobola H_γ centrada en $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$.*

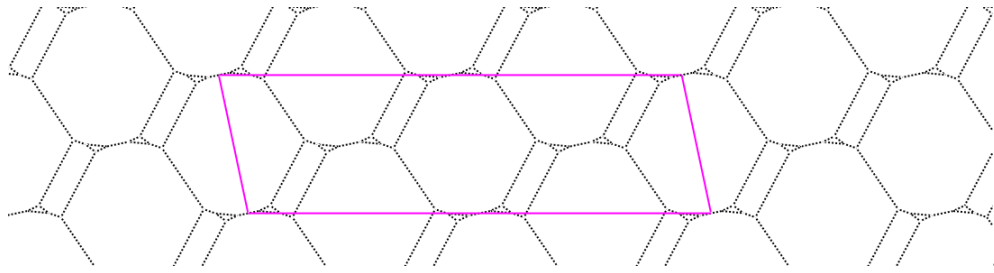
Proposición 8.2.5. *Suponga que $\Pi^{3,+}/\Gamma$ es una variedad hiperbólica completa de volumen finito, con una sola cúspide y tal que ∞ es un punto parabólico de Γ . Entonces $\mathcal{F}(\Gamma)$ es un poliedro convexo de $\overline{\Pi^{3,+}}$ localmente finito.*

Observación 8.2.6. Tenemos las siguientes observaciones acerca de $\mathcal{F}(\Gamma)$:

1. $\mathcal{F}(\Gamma)$ es igual a la intersección del complemento de una familia de semiesferas superiores centradas en puntos de $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, más precisamente tenemos que $\mathcal{F}(\Gamma) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_\infty} H_\gamma^c$, usando la notación del lema anterior.
2. $\mathcal{F}(\Gamma)$ es invariante bajo Γ_∞ .
3. Las caras de $\mathcal{F}(\Gamma)$ se proyectan a $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ a una familia de polígonos no degenerados localmente finita, esto es consecuencia tanto del lema y la proposición anteriores.
4. La proyección de $\mathcal{F}(\Gamma)$ a $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ está bien definida salvo una isometría euclidiana y una homotecia.

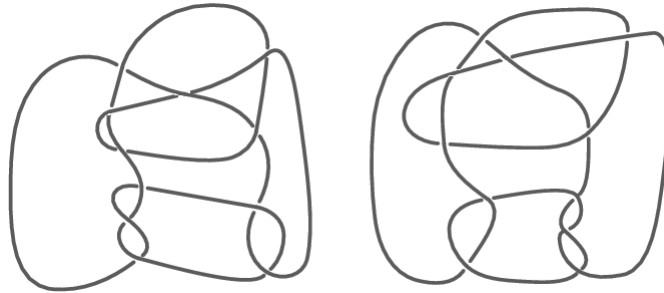
Ejemplo 8.2.7. Aquí tenemos la proyección a \mathbb{R}^2 de los dominios de Ford de los nudos 4_1 y 7_4 que calcula el programa SnapPy



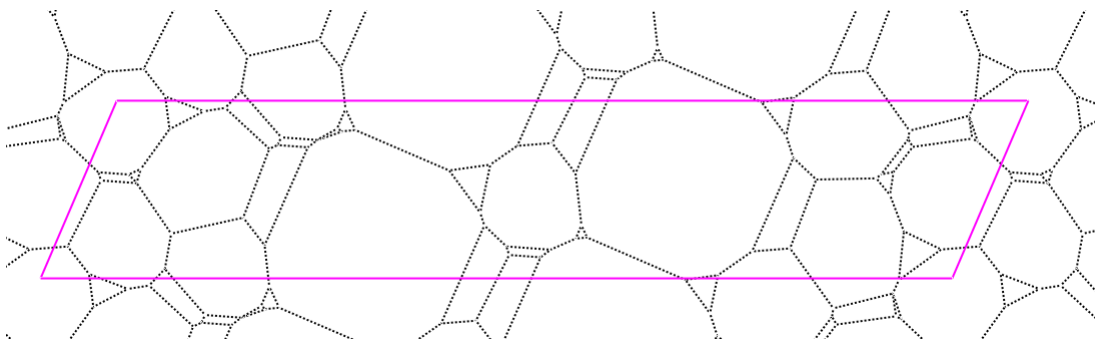


donde el paralelogramo púrpura son dos translaciones de \mathbb{R}^2 que generan a los respectivos grupos de isometrías parabólicas que fijan a ∞ , recuerde la proposición 8.2.3. Como las dos familias de polígonos de arriba claramente no se pueden transformar la una en la otra bajo una isometría junto con una homotecia de \mathbb{R}^2 , se sigue que estos nudos no son equivalentes.

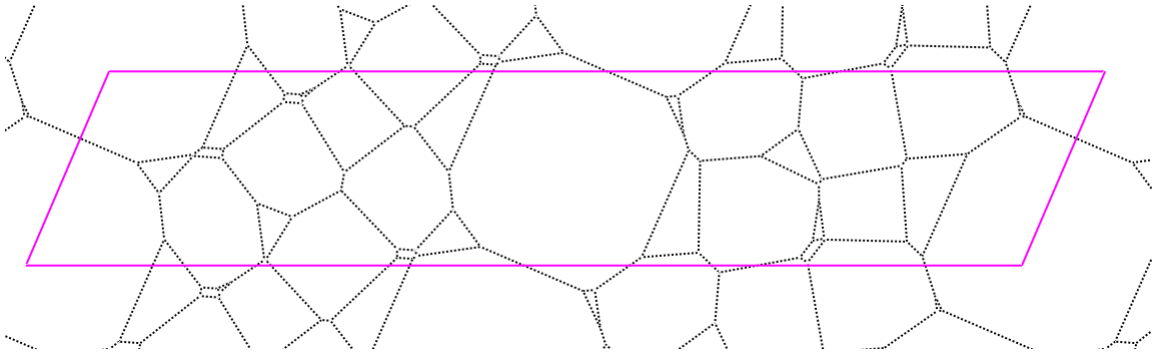
Un ejemplo mucho más interesante es el del nudo de Kinoshita–Terasaka y el nudo de Conway, los cuales están ilustrados a continuación:



Estos nudos son hiperbólicos, además de que son bastante similares lo cual se debe a que uno se obtiene del otro por un proceso llamado “mutación”. En [Rub87] se demuestra que dos nudos que se obtienen el uno del otro por medio de mutación deben tener la misma norma de Gromov, y por lo tanto deben tener el mismo volumen. Aun más, varios de los invariantes de estos dos nudos son iguales, como su número de Chern-Simons o los volúmenes de sus cúspides maximales. Sin embargo, a estos dos nudos los podemos distinguir por medio de sus respectivos dominios de Ford:



Parte de la proyección a \mathbb{R}^2 del dominio de Ford del nudo de Kinoshita-Terasaka

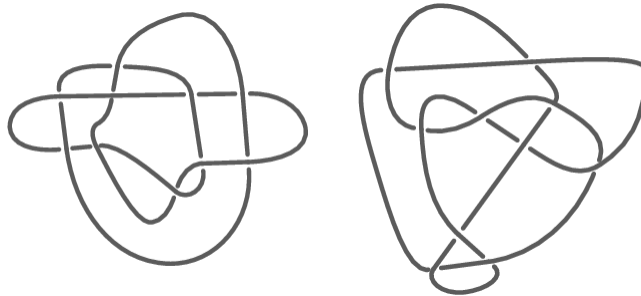


Parte de la proyección a \mathbb{R}^2 del dominio de Ford del nudo de Conway

Ambas imágenes fueron generadas en SnapPy [Cul+], ya que estas dos familias de polígonos de \mathbb{R}^2 no se pueden enviar la una a la otra por medio de una isometría junto con una homotecia de \mathbb{R}^2 .

Lo interesante de este ejemplo es que los invariantes combinatorios como los polinomios de Alexander, Jones, Kauffman o HOMFLY, o la homología de Khovanov no distinguen a estos dos nudos, ver la información acerca de los nudos $11n34$ y $11n42$ en la página web [LM].

Ahora considere el siguiente par de nudos



Entonces si metemos a estos dos nudos en el programa SnapPy [Cul+], vemos que estos nudos son hiperbólicos y se puede ver que los invariantes geométricos que da este programa son todos iguales, incluso sus dominios de Ford. Esto no es casualidad ya que estos dos nudos son equivalentes. Estos dos nudos son el par de Perko, los cuales fueron listados como nudos distintos en todas las tablas de nudos desde finales del siglo XIX hasta 1974 cuando Perko demostró en [Per74] que estos nudos son equivalentes.

Con los siguientes hechos acerca del dominio de Ford que el par de Perko son nudos equivalentes, y aun más, se puede decidir si cualesquiera dos nudos hiperbólicos son equivalentes o no salvo reflexión.

Nota 8.2.8. Suponga que $\Pi^{3,+}/\Gamma$ es una variedad hiperbólica completa de volumen finito tal que ∞ es un punto parabólico de Γ . Por la proposición 8.2.3 tenemos que Γ_∞ se genera por dos translaciones de \mathbb{R}^3 de dos elementos de $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ linealmente independientes, de donde podemos construir un dominio fundamental convexo de la acción $\Gamma_\infty \curvearrowright \Pi^{3,+}$ que sea la intersección de cuatro semiplanos euclidianos perpendiculares a $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, ya que podemos construir dominios fundamentales de la acción de $\Gamma_\infty \curvearrowright \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ que sean paralelogramos euclidianos. Llamaremos a uno de estos dominios fundamentales de la acción $\Gamma_\infty \curvearrowright \Pi^{3,+}$ un **dominio fundamental vertical** de Γ_∞ .

Proposición 8.2.9. *Sea $\mathbb{H}^{3,+}/\Gamma$ una variedad hiperbólica completa, de volumen finito, con una sola cúspide y tal que ∞ es un punto parabólico de Γ . Si D es un dominio fundamental vertical de Γ_∞ , entonces $D \cap \mathcal{F}(\Gamma)$ es un dominio fundamental de la acción $\Gamma \curvearrowright \mathbb{H}^{n,+}$.*

Esta proposición se demuestra en [Pur20, Proposición 14.21].

Definición 8.2.10. Sean \mathbb{H}^3/Γ_1 y \mathbb{H}^3/Γ_2 dos variedades hiperbólicas completas, de volumen finito, con una sola cúspide y tales que ∞ es un punto parabólico de Γ_j , para $j = 1, 2$. Suponga que hay una biyección entre las caras, aristas y vértices de $\mathcal{F}(\Gamma_1)$ y las caras, aristas y vértices, respectivamente, de $\mathcal{F}(\Gamma_2)$ que cumple lo siguiente:

1. Un vértice (arista) de $\mathcal{F}(\Gamma_1)$ está contenido en un arista (cara) si y sólo si él vértice(arista) correspondiente de $\mathcal{F}(\Gamma_2)$ está contenido en la arista(cara) correspondiente.
2. Dos vértices (aristas, caras) de $\mathcal{F}(\Gamma_1)$ se identifican por medio de un elemento de $(\Gamma_1)_\infty$ si y sólo si los correspondientes vértices (aristas, caras) de $\mathcal{F}(\Gamma_2)$ se identifican por medio de un elemento de $(\Gamma_2)_\infty$.
3. Dos vértices (aristas, caras) de $\mathcal{F}(\Gamma_1)$ se identifican por medio de un elemento de Γ_1 si y sólo si lo mismo sucede para los correspondientes vértices (aristas, caras) de $\mathcal{F}(\Gamma_2)$ por medio de un elemento de Γ_2 .

Entonces diremos que los dominios de Ford $\mathcal{F}(\Gamma_1)$ y $\mathcal{F}(\Gamma_2)$ son **combinatoriamente equivalentes**.

Teorema 8.2.11. *Sean \mathbb{H}^3/Γ_1 y \mathbb{H}^3/Γ_2 dos variedades hiperbólicas completas, de volumen finito, con una sola cúspide y tales que ∞ es un punto parabólico de Γ_j , para $j = 1, 2$. Suponga que $\mathcal{F}(\Gamma_1)$ y $\mathcal{F}(\Gamma_2)$ son combinatoriamente equivalentes. Entonces M_1 y M_2 son isométricas.*

Idea de la demostración: De las dos primeras condiciones de la definición anterior obtenemos un homeomorfismo entre las variedades hiperbólicas $\mathcal{F}(\Gamma_1)/(\Gamma_1)_\infty$ y $\mathcal{F}(\Gamma_2)/(\Gamma_2)_\infty$.

Note que las caras de un dominio de Ford $\mathcal{F}(\Gamma)$ vienen dadas por $F_\gamma := \partial H_\gamma = \{(x, t) \in \mathbb{H}^{n,+} : (x, t) \text{ está igual de alto que } \gamma^{-1}(x, t)\}$. Luego es claro que γ envía a $F_{\gamma^{-1}}$ en F_γ . Con el homeomorfismo anterior, obtenemos un homeomorfismo entre $\mathcal{F}(\Gamma_1)/\Gamma$ y $\mathcal{F}(\Gamma_2)/\Gamma$. Luego por la proposición 8.2.9 tenemos que $\mathcal{F}(\Gamma_j)/\Gamma_j$ es homeomorfa a M_j , de donde M_1 y M_2 son homeomorfas, y por lo tanto por el teorema de rigidez se sigue que estas dos variedades hiperbólicas son isométricas. \square

Definición 8.2.12. Sea ρ la función $S^3 \rightarrow S^3$ que es la extensión de la función $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_1, x_2, x_3)$. Sea $\eta : S^1 \rightarrow S^3$ un nudo. La **reflexión** de η es el nudo dado por $\rho \circ \eta$.

El último hecho que nos falta es el siguiente, ver [GL89]

Teorema 8.2.13 (Gordon, Luecke). *Sean η_0, η_1 nudos. Entonces si $S^3 \setminus \eta_0$ y $S^3 \setminus \eta_1$ son homeomorfas, η_0 y η_1 son equivalentes salvo reflexión.*

Esta afirmación es falsa para enlaces; un enlace es un encaje suave de una unión disyunta de círculos a la esfera tridimensional.

De lo anterior concluimos lo siguiente:

Corolario 8.2.14. *Dos nudos hiperbólicos son equivalentes salvo reflexión si y sólo si sus grupos fundamentales son isomorfos.*

Corolario 8.2.15. *Dos nudos hiperbólicos son equivalentes salvo reflexión si y sólo si sus correspondientes dominios de Ford son combinatoriamente equivalentes.*

Dado el primer corolario, podría preguntarse el lector si no es más fácil simplemente tomar dos nudos, calcular sus grupos fundamentales y ver si los grupos son isomorfos o no, en vez de usar dominios de Ford, invocando el teorema de rigidez de Mostow. Por ejemplo se puede utilizar la presentación de Wirtinger para hallar los grupos fundamentales y luego compararlos. Sin embargo decidir si dos grupos finitamente presentados son isomorfos o no es una tarea en general muy difícil, y resulta más fácil usar dominios de Ford.

Apéndice A

Unimodularidad de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^3)$

En este capítulo damos una demostración, que usa sólo geometría diferencial, de que $\mathcal{I}(\mathbb{H}^3)$ es un grupo de Lie unimodular. La demostración se basará en el argumento dado en [Lan75, Página 3] para ver que $SL_2(\mathbb{R})$ es unimodular.

Proposición A.0.1. $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ es un subgrupo de Lie de $GL(n+1; \mathbb{R})$.

Demostración. Primero hay que ver que $\mathcal{I}^+(\mathbb{H}^n)$ tiene una estructura de grupo de Lie. Veamos primero que $O(\mathbb{R}^{n+1}, \langle, \rangle_{(n,1)})$ es una subvariedad de $GL(n+1; \mathbb{R})$. Recuerde que $O(\mathbb{R}^{n+1}, \langle, \rangle_{(n,1)})$ es el subgrupo de todos los elementos A de $GL(n+1, \mathbb{R})$ tales que si \bar{a} es una fila de A , entonces $\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle_{(n,1)} = -1$, y si \bar{b} es otra fila, entonces $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle_{(n,1)} = 0$, de donde si J es el elemento de $GL(n+1, \mathbb{R})$ dado por

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

entonces un elemento A de $GL(n+1; \mathbb{R})$ pertenece a $O(\mathbb{R}^{n+1}, \langle, \rangle_{(n,1)})$ si y sólo $AJA^T = J$. Entonces para demostrar que $O(\mathbb{R}^{n+1}, \langle, \rangle_{(n,1)})$ hay sólo que demostrar que J es un valor regular de la función $GL(n+1; \mathbb{R}) \rightarrow \text{Sim}(n+1; \mathbb{R})$ dada por $A \mapsto AJA^T$, como en la demostración análoga de $O(n)$. Por lo tanto como $\mathcal{I}^+(\mathbb{H}^n)$ es una componente conexa de $O(\mathbb{R}^{n+1}, \langle, \rangle_{(n,1)})$, obtenemos que también es un grupo de Lie con la operación de multiplicación de matrices. \square

Necesitaremos la siguiente construcción de una medida de Haar de un grupo de Lie G invariante por la izquierda:

Proposición A.0.2. Todo grupo de Lie tiene una medida de Haar invariante por la izquierda, y esta medida es única salvo un múltiplo positivo.

Demostración. Note que para cada $g \in G$ hay un difeomorfismo natural L_g dados por $x \mapsto gx$, $\forall x \in G$.

Sea η_1, \dots, η_n una base ordenada de $T_{e_G}G$, donde la dimensión de G como variedad diferencial es n . Para cada $i = 1, \dots, n$ definimos una 1-forma λ_i de G dada por $(\lambda_i)_g = (L_{g^{-1}})^*\eta_i$ para todo $g \in G$. Note que entonces cada λ_i es invariante bajo L_g para todo $g \in G$, es decir, $L_g^*(\lambda_i) = \lambda_i$ para todo $g \in G$. Sea λ_G la n -forma diferencial de G dada por

$$\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_n.$$

Entonces por la definición de cada λ_i y dado que L_g es un difeomorfismo, obtenemos que λ_G es una n -forma de G que no se anula en ninguna parte de G . En particular G es orientable, y por lo tanto podemos suponer sin pérdida de generalidad que G está orientada y que para cada $g \in G$ tenemos que $(\lambda_1 \wedge \cdots \wedge \lambda_n)_g$ pertenece a la orientación de $T_g G$ dada por G .

Ahora podemos construir una medida de Haar de G invariante por la izquierda usando la forma diferencial λ_G de la siguiente manera:

Definimos para cada $A \subseteq G$ abierto

$$\mu_l(A) = \int_A \lambda_G$$

donde la integral se toma con respecto a la orientación de G . Finalmente si definimos

$$\mu_l(B) := \inf\{\mu_l(U) : B \subseteq U \text{ es abierto}\}$$

para todo boreliano B de G . Por el teorema de representación de Riesz-Markov-Kakutani, se sigue que esto define una medida de Radon sobre G .

Entonces μ_l es invariante por la izquierda, ya que si $A \subseteq G$ es un abierto y $g \in G$, tenemos por la fórmula de cambio de variables que

$$\mu_l(gA) = \int_{gA} \omega = \int_A L_g^* \omega = \int_A \omega = \mu_l(A).$$

La invariancia por la izquierda con respecto a los demás borelianos sigue de la definición de μ_l .

Se puede demostrar, de manera sencilla, con el teorema de Radon-Nikodym que dos medidas de Haar invariantes por la izquierda difieren solamente por un múltiplo positivo, ver [Kna02, Teorema 8.23]. \square

Análogamente, se puede construir una forma diferencial ρ_G de dimensión maximal, que no se anule en ninguna parte, que sea invariante por las funciones R_g dadas por $x \mapsto xg$, y que coincida en cada $g \in G$ con la orientación de G .

Ahora queremos “comparar” cuánto difieren las formas diferenciales λ_G y ρ_G , para lo cual necesitamos la siguiente función:

La **función de adjunción** Ad de G es la función $G \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$ dada por

$$g \mapsto D_e(R_g \circ L_{g^{-1}}),$$

es decir, $\text{Ad}(g)$ es la derivada del difeomorfismo $G \rightarrow G$ dado por $x \mapsto g^{-1}xg$ en el elemento neutro de G .

Proposición A.0.3. *La función $G \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$ dada por $g \mapsto \det(\text{Ad}(g))$ es un homomorfismo continuo.*

Demostración. Como $L_{g^{-1}}$ (resp. R_g) preserva la forma diferencial λ_G (resp. ρ_G), se sigue que $L_{g^{-1}}$ (resp. R_g) preserva la orientación de G , de donde $\det(\text{Ad}(g)) > 0$ para todo $g \in G$.

Como $L_{g^{-1}}$ (resp. R_g) es un homomorfismo, se sigue de la regla de la cadena que Ad es un homomorfismo, y por lo tanto la función de la proposición es un homomorfismo. \square

Proposición A.0.4. Para todo grupo de Lie G orientado tenemos, salvo un múltiplo positivo, que

$$\lambda_G = \det(\text{Ad}(g))\rho_G.$$

Demostración. Sean $\eta_1, \dots, \eta_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ y ρ_1, \dots, ρ_n como antes en la construcción de las formas λ_G y ρ_G . Para cada $i = 1, \dots, n$ y cada $g \in G$ tenemos

$$\begin{aligned} (\lambda_i)_g &= L_{g^{-1}}^* \eta_i = L_{g^{-1}}^* \circ R_g^* \circ R_{g^{-1}}^* \eta_i \\ &= (R_g \circ L_{g^{-1}})^*(R_{g^{-1}}^* \eta_i) = (R_g \circ L_{g^{-1}})^*((\rho_i)_g), \end{aligned}$$

de donde para cada $g \in G$ tenemos

$$\begin{aligned} (\lambda_G)_g &= (\lambda_1)_g \wedge \dots \wedge (\lambda_n)_g = (R_g \circ L_{g^{-1}})^*((\rho_1)_g) \wedge \dots \wedge (R_g \circ L_{g^{-1}})^*((\rho_n)_g) \\ &= (\rho_1)_g \circ D_e(R_g \circ L_{g^{-1}}) \wedge \dots \wedge (\rho_n)_g \circ D_e(R_g \circ L_{g^{-1}}) = (\rho_1)_g \circ \text{Ad}(g) \wedge \dots \wedge (\rho_n)_g \circ \text{Ad}(g) \\ &= \det(\text{Ad}(g))[(\rho_1)_g \wedge \dots \wedge (\rho_n)_g] = \det(\text{Ad}(g))(\rho_G)_g. \end{aligned}$$

□

Corolario A.0.5. Sea G un grupo de Lie. Entonces G es unimodular si y sólo si $\det \circ \text{Ad} \equiv 1$

Demostración. Note que G es unimodular si y sólo si λ_G y ρ_G difieren por un número positivo, y como $\det \circ \text{Ad}$ es un homomorfismo, esto sucede si y sólo si es igual al homomorfismo trivial. □

Corolario A.0.6. Todo grupo de Lie compacto es unimodular

Demostración. Esto sale del hecho de que como G es compacto la imagen de G bajo $\det \circ \text{Ad}$ es acotada en $\mathbb{R}_{\geq 0}$, con lo que como esta función también es un homomorfismo, obtenemos que es el homomorfismo trivial. □

Para demostrar la unimodularidad de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^2)$ y de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^3)$ necesitamos dar ciertos hechos que nos permitirán concluir la unimodularidad de ciertos grupos de Lie a partir de la modularidad de otros.

Para ver que $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ es unimodular, necesitamos algunos hechos.

Lema A.0.7. Sean G y H grupos de Lie tales que $G \times H$ y H son ambos unimodulares. Entonces G es también unimodular.

Demostración. Tenemos de la construcción de λ_- y de ρ_- que $\lambda_{G \times H} = \lambda_G \wedge \lambda_H$ y que $\rho_{G \times H} = \rho_G \wedge \rho_H$, de donde como podemos suponer que $\lambda_H = \rho_H$ y $\lambda_{G \times H} = \rho_{G \times H}$, se debe tener entonces que $\lambda_G = \rho_G$, de otra manera por lo que acabamos de ver $\lambda_{G \times H}$ y $\rho_{G \times H}$ no podrían diferir salvo un múltiplo. □

Lema A.0.8. Sean G y H dos grupos de Lie. Suponga que $G \xrightarrow{\pi} H$ es un morfismo de grupos de Lie que es un difeomorfismo local sobreyectivo. Entonces G es unimodular si y sólo si H es unimodular.

Demostración. Basta demostrar que

$$\det(\text{Ad}(g)) = 1 \iff \det(\text{Ad}(\pi(g))) = 1, (\forall g \in G). \quad (\text{A.1})$$

Tome $g \in G$ arbitrario. Sea U una vecindad abierta de e_G tal que $\pi \upharpoonright U$ es un difeomorfismo sobre su imagen. Sea V otra vecindad abierta de e_G contenida en U y que cumpla que $R_g \circ L_{g^{-1}}(V) \subseteq U$. Tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{R_{g^{-1}} \circ L_g \upharpoonright} & U \\ \pi \upharpoonright V \downarrow & & \uparrow (\pi \upharpoonright U)^{-1} \\ \pi(V) & \xrightarrow{R_{\pi(g)^{-1}} \circ L_{\pi(g)} \upharpoonright} & \pi(U). \end{array}$$

Luego

$$\begin{aligned} \text{Ad}(g) &= D_{e_G}(R_{g^{-1}} \circ L_g) = D_{e_G}((\pi \upharpoonright U)^{-1} \circ (R_{\pi(g)^{-1}} \circ L_{\pi(g)}) \circ \pi \upharpoonright V) \\ &= D_{e_H}((\pi \upharpoonright U)^{-1}) \circ D_{e_H}(R_{\pi(g)^{-1}} \circ L_{\pi(g)}) \circ D_{e_G}(\pi \upharpoonright V) \\ &= [D_{e_G}(\pi)]^{-1} \circ \text{Ad}(\pi(g)) \circ D_{e_G}(\pi), \end{aligned}$$

de esta igualdad se deduce la equivalencia (A.1). □

Proposición A.0.9. 1. La función $PSL(\mathbb{R}, 2) \rightarrow \mathcal{I}^+(\Pi^{2,+})$ dada por

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] \mapsto \left(z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right)$$

es un isomorfismo de grupos de Lie.

2. La función $PSL(2; \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{I}^+(\Pi^{3,+})$ tal que a cada

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] \in PSL(2; \mathbb{C})$$

le asigna la extensión conforme a $\overline{\Pi^{3,+}}$ de la función conforme $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dada por

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

es un isomorfismo de grupos de Lie.

Demostración. Estamos considerando la topología sobre $\mathcal{I}^+(\Pi^{n,+})$ que hereda de $\mathcal{I}^+(\mathbb{I}^n)$ por medio de la función $\mathcal{I}^+(\mathbb{I}^n) \rightarrow \mathcal{I}^+(\Pi^{n,+})$ dada por $g \mapsto \pi \circ g \circ \pi^{-1}$ donde $\pi : \mathbb{I}^n \rightarrow \Pi^{n,+}$ es alguna isometría.

1. Note que la función

$$\begin{aligned} SL(2; \mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{I}^+(\Pi^{2,+}) \\ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) &\mapsto \left(z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right), \end{aligned}$$

está bien definida y también es sobreyectiva ya que las funciones conformes de \mathbb{C} que se restringen a una función de $\Pi^{2,+}$ en sí mismo y que preservan la orientación son exactamente las

funciones de Möbius holomorfas con coeficientes reales. Claramente esta función es un homomorfismo, cuyo núcleo es el subgrupo $\{I_2, -I_2\}$. Por lo tanto la función indicada en el inciso es un morfismo biyectivo de grupos de Lie.

Para demostrar que esta función es suave fijemos tres puntos $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{I}^2$ que sean linealmente independientes en \mathbb{R}^3 . Ahora si tomamos un elemento de $PSL(\mathbb{R}, 2)$, obtenemos por medio de nuestra función un elemento de $\mathcal{I}^+(\mathbb{I}^n)$ por medio del homeomorfismo $\mathcal{I}^+(\mathbb{I}^n) \rightarrow \mathcal{I}^+(\mathbb{I}^{n,+})$, y con este elemento obtenemos una matriz en la base ordenada (x_1, x_2, x_3) , y usando un cambio de base obtenemos una matriz en la base estándar de \mathbb{R}^3 . Es claro que todo este proceso es suave.

Para demostrar que la función inversa de nuestra es también suave, hay que fijar tres puntos distintos $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{I}^{2,+}$. Es fácil demostrar que para cualesquiera otros puntos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ existe una única transformación de Möbius tal que $y_j \mapsto z_j$, y se puede demostrar que los coeficientes de esta transformación dependen de manera suave de los y_j 's y de los z_j 's. Esto implica que la inversa de la función indicada en el inciso es también suave, y por lo tanto también es un difeomorfismo.

Como claramente la función del inciso es un homomorfismo, obtenemos entonces que es un isomorfismo de grupos de Lie.

2. La demostración es similar pero usamos el hecho de que toda isometría de $\mathbb{I}^{3,+}$ está unívocamente determinada por la restricción $\partial\mathbb{I}^{3,+} \rightarrow \partial\mathbb{I}^{3,+}$ de su extensión a $\overline{\mathbb{I}^{3,+}}$, y que toda transformación de Möbius de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ holomorfa es la signatura de una isometría de $\mathbb{I}^{3,+}$ que preserva la orientación.

□

Daremos una prueba de que $\mathcal{I}(\mathbb{H}^2)$ es unimodular, luego adaptaremos este argumento para el caso $n = 3$.

Proposición A.0.10. *El grupo de Lie $\mathcal{I}(\mathbb{H}^2)$ es unimodular.*

Demostración. Primero veremos que $\mathcal{I}^+(\mathbb{H}^2)$ es unimodular. Por lo anterior hay que demostrar que $PSL(2; \mathbb{R})$ es unimodular.

Primero notemos que $GL^+(n; \mathbb{R})$ es unimodular, ya que la medida dada por

$$\mu(S) := \int_S \frac{dX}{\det^n(X)},$$

donde dX es la medida de Lebesgue de \mathbb{R}^{n^2} , es invariante por la derecha y por la izquierda.

La función

$$\begin{aligned} SL(n; \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow GL^+(n; \mathbb{R}) \\ (A, r) &\mapsto r \cdot A \end{aligned}$$

es un isomorfismo de grupos de Lie, ya que es suave, un homomorfismo, y la función

$$\begin{aligned} GL^+(n; \mathbb{R}) &\rightarrow SL(n; \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+ \\ X &\mapsto \left(\frac{X}{\sqrt[n]{\det X}}, \sqrt[n]{\det X} \right) \end{aligned}$$

es suave y es su inversa. Por lo tanto de la proposición A.0.7 obtenemos que $SL(n; \mathbb{R})$ es unimodular, (\mathbb{R}^+, \cdot) es unimodular porque es abeliano.

Como $\{I_n, -I_n\}$ actúa de manera libre y propiamente discontinua sobre $SL(n; \mathbb{R})$, se sigue que la proyección $SL(n; \mathbb{R}) \rightarrow SL(n; \mathbb{R})/\{I_n, -I_n\} = PSL(n; \mathbb{R})$ es una función cubriente, de donde por la proposición A.0.8 obtenemos que $PSL(n; \mathbb{R})$ es unimodular, y por lo tanto $\mathcal{I}^+(\mathbb{H}^2)$ es unimodular.

Note que $\mathcal{I}(\mathbb{H}^2)$ es la unión disyunta de $\mathcal{I}^+(\mathbb{H}^2)$ y de $\mathcal{I}^-(\mathbb{H}^2)$. Fijemos $g \in \mathcal{I}^-(\mathbb{H}^2)$ y una medida μ unimodular de $\mathcal{I}^+(\mathbb{H}^2)$. Podemos extender μ a una medida de Radon de todo $\mathcal{I}(\mathbb{H}^2)$ al definir para cada boreliano $B \subseteq \mathcal{I}^-(\mathbb{H}^2)$

$$\mu(B) := \mu(gB),$$

y es fácil ver que de la invarianza por la izquierda de μ en $\mathcal{I}^+(\mathbb{H}^2)$ que esta construcción no depende de g , y que esta medida sobre $\mathcal{I}(\mathbb{H}^2)$ es unimodular. \square

Proposición A.0.11. *El grupo de Lie $\mathcal{I}(\mathbb{H}^3)$ es unimodular.*

Demostración. Primero demostramos que $\mathcal{I}^+(\mathbb{H}^3)$ es unimodular. Hay que demostrar que el grupo de Lie $PSL(2, \mathbb{C})$ es unimodular.

Primero notemos que $GL(n; \mathbb{C})$ es unimodular ya que la medida dada por

$$\mu(S) := \int_S \frac{dX}{|\det(X)|^{2n}},$$

donde dX es la medida de Lebesgue de \mathbb{C}^{n^2} , es invariante por la izquierda y por la derecha.

Considere la función

$$\begin{aligned} SL(n; \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^* &\xrightarrow{\psi} GL(n; \mathbb{C}) \\ (A, z) &\mapsto z \cdot A. \end{aligned}$$

Veamos que esta función es un difeomorfismo local sobreyectivo. Sea $(A, z) \in SL(n; \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*$. Sea U un dominio de z donde una rama de $\sqrt[n]{\cdot}$, llamémosla r_n , esté definida. Entonces $\psi \upharpoonright SL(n; \mathbb{C}) \times U$ es un difeomorfismo sobre su imagen, ya que la función

$$\begin{aligned} U \cdot SL(n; \mathbb{C}) &\rightarrow SL(n; \mathbb{C}) \times U \\ X &\mapsto \left(\frac{X}{r_n(\det X)}, r_n(\det X) \right) \end{aligned}$$

es su inversa.

ψ es sobreyectiva, ya que si $X \in GL(n; \mathbb{C})$, podemos tomar $z \in \mathbb{C}^*$ tal que $z^n = \det X$, y así $\psi(X/z, z) = X$, de donde por el lema A.0.8 se sigue que $SL(n; \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*$ es unimodular, de donde como \mathbb{C}^* es unimodular, se sigue del lema A.0.7 que $SL(n; \mathbb{C})$ es unimodular.

Como mostramos en la proposición anterior, es fácil ver que $SL(n; \mathbb{C})$ es un espacio cubriente de $PSL(n; \mathbb{C})$, y así del lema A.0.8 obtenemos que $PSL(n; \mathbb{C})$ es unimodular. Por lo tanto $\mathcal{I}^+(\mathbb{H}^3)$ es unimodular.

Que $\mathcal{I}(\mathbb{H}^3)$ es unimodular se demuestra de manera análoga a como demostramos que $\mathcal{I}(\mathbb{H}^2)$ a partir de que $\mathcal{I}^+(\mathbb{H}^2)$ es unimodular. \square

Bibliografía

- [BP92] Ricardo Benedetti y Carlo Petronio. *Lectures on Hyperbolic Geometry*. Springer, 1992.
- [Bon09] Francis Bonahon. *Low-Dimensional Geometry: From Euclidean Surfaces to Hyperbolic Knots*. American Mathematical Society, 2009.
- [Bre93] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry*. Springer, 1993.
- [Bur+02] M Burger y col. “Counting hyperbolic manifolds”. En: *Geometric & Functional Analysis GFA* 12.6 (2002), págs. 1161-1173.
- [Cul+] Marc Culler y col. *SnapPy, a computer program for studying the geometry and topology of 3-manifolds*. Available at <http://snappy.computop.org> (02/03/2020).
- [FM11] Benson Farb y Dan Margalit. *A primer on mapping class groups*. Version 5.0. Princeton University Press, 2011.
- [GL89] C. McA. Gordon y J. Luecke. “Knots are determined by their complements”. En: *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 20.1 (ene. de 1989), págs. 83-87. URL: <https://projecteuclid.org:443/euclid.bams/1183554911>.
- [HM81] Uffe Haagerup y Hans J Munkholm. “Simplices of maximal volume in hyperbolic n - space”. En: *Acta Math.* 147 (1981), págs. 1-11. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02392865>.
- [JS79] William Jaco y Peter B. Shalen. “SEIFERT FIBERED SPACES IN 3-MANIFOLDS”. En: *Geometric Topology*. Ed. por JAMES C. CANTRELL. Academic Press, 1979, págs. 91-99. ISBN: 978-0-12-158860-1. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-158860-1.50013-7>.
- [Kna02] A.W. Knapp. *Lie Groups Beyond an Introduction*. Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston, 2002. ISBN: 9780817642594.
- [Lac00a] Marc Lackenby. *Hyperbolic Manifold, Chapters 0 to 5*. 2000. URL: <http://people.maths.ox.ac.uk/lackenby/hypox05.pdf>.
- [Lac00b] Marc Lackenby. *Hyperbolic Manifolds, Chapters 6 to 11*. 2000. URL: <http://people.maths.ox.ac.uk/lackenby/hypox611.pdf>.
- [Lac00c] Marc Lackenby. *Introductory chapter on Riemannian manifolds*. 2000. URL: <http://people.maths.ox.ac.uk/lackenby/intriem.pdf>.
- [Lan75] S. Lang. $SL_2(\mathbb{R})$. Springer, 1975.
- [LM] Charles Livingston y Allison H. Moore. *KnotInfo: Table of Knot Invariants*. URL: <http://www.indiana.edu/~knotinfo>.

- [Mar74] Albert Marden. “The geometry of finitely generated kleinian groups”. En: *Annals of Mathematics*. Second Series 99 (1974), págs. 383-462. DOI: <https://doi.org/10.2307/1971059>.
- [Mil82] John W. Milnor. “Hyperbolic geometry: The first 150 years”. En: *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 6.1 (ene. de 1982), págs. 9-24.
- [Mor01] Shigeyuki Morita. *Geometry of Differential Forms*. American Mathematical Society, 2001.
- [Mos68] George D. Mostow. “Quasi-conformal mappings in n -space and the rigidity of hyperbolic space forms”. En: *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 34 (1968), págs. 53-104.
- [Per74] Kenneth A. Perko. “On the Classification of Knots”. En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 45.2 (1974), págs. 262-266. ISSN: 00029939, 10886826. URL: <http://www.jstor.org/stable/2040074>.
- [Pra73] Gopal Prasad. “Strong rigidity of \mathbb{Q} -rank 1 lattices”. En: *Inventiones Mathematicae* 21 (1973), págs. 255-286. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01418789>.
- [Pur20] Jessica S. Purcell. *Hyperbolic Knot Theory*. 2020. URL: <http://users.monash.edu/~jpurcell/book/HypKnotTheory.pdf>.
- [Rat06] John G. Ratcliffe. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Second Edition. American Mathematical Society, 2006.
- [Ril75a] Robert Riley. “A quadratic parabolic group”. En: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 77.2 (1975), págs. 281-288. DOI: 10.1017/S0305004100051094.
- [Ril75b] Robert Riley. “Discrete parabolic representations of link groups”. En: *Mathematika* 22.2 (1975), págs. 141-150. DOI: 10.1112/S0025579300005982.
- [Rub87] D. Ruberman. “Mutation and volumes of knots in S^3 .” En: *Inventiones mathematicae* 90 (1987), págs. 189-216. URL: <http://eudml.org/doc/143507>.
- [Ser08] Caroline Series. *Hyperbolic Geometry*. 2008. URL: <http://homepages.warwick.ac.uk/~masbb/Papers/MA448.pdf>.
- [Szc12] Andrzej Szczepanski. *Geometry of Crystallographic Groups*. Volumen 4 de Algebra and discrete mathematics. World Scientific, 2012.
- [TL97] W.P. Thurston y S. Levy. *Three-dimensional Geometry and Topology*. Princeton mathematical series. Princeton University Press, 1997. ISBN: 9780691083049.
- [Thu86] William P. Thurston. “Hyperbolic Structures on 3-Manifolds I: Deformation of Acylindrical Manifolds”. En: *Annals of Mathematics* 124.2 (1986), págs. 203-246. ISSN: 0003486X.
- [Thu+80] William Thurston y col. *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*. 1980. URL: <http://library.msri.org/books/gt3m/>.
- [Tuk85] Pekka Tukia. “On isomorphisms of geometrically finite Möbius groups”. En: *Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Études Scientifiques* 61.1 (1985), págs. 171-214. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02698805>.
- [Wan72] Hsien Chung Wang. “Topics on totally discontinuous groups”. En: *Symmetric spaces (Short Courses, Washington Univ., St. Louis, Mo., 1969–1970)* 8 (1972), págs. 459-487.