UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

ARCOS Y DENDRITAS EN LÍMITES INVERSOS GENERALIZADOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA
MIGUEL ÁNGEL CORONA GARCÍA

TUTOR
DRA. MARÍA ISABEL PUGA ESPINOSA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

COMITÉ TUTOR
DR. SERGIO MACÍAS ÁLVAREZ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

DRA. PATRICIA PELLICER COVARRUBIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, JUNIO DE 2020

Índice general

"Puedes, deberías, y si eres lo suficientemente valiente para empezar, lo harás."

Stephen King

Agradecimientos

¿Cómo empezar a agradecer o a quienes agradecer? Si bien es una tarea sencilla, las palabras para hacerlo pueden faltar. Durante mi vida, al menos hasta el día de hoy, recuerdo a muchas personas que de manera directa y/o indirectamente han influido en muchas de las decisiones que he tomado. Desde mi infancia tuve la gran fortuna de encontrarme con maestros que me motivaron y empujaron hacia nuevas metas y sobre todo, muchos retos. De mis maestras de primaria, a quien más recuerdo y con mucho cariño, a Lupita, cómo se me acercaba para darme lápiz y papel para dibujar, mi segunda pasión. Mis maestros de secundaria, el eterno Isidro quien jamás dejaba la mezclilla azul y nos cambiaba calificaciones por resultados del Cruz Azul, hoy sería el niño más feliz con él. Mi divertida maestra de Inglés del CCH, quien muy originalmente me llamaba *Chelitas*, ya saben, por lo de Corona. Fue allí donde tal vez mi amor por las matemáticas se hizo más evidente, descubrí el Cálculo, aunque la Facultad me volteara la cara de una bofetada después con el verdadero cálculo. Allí fue el inicio de todo y bueno, casi 15 años y sigo con ellas, ¿alguien dijo masoquismo? Ya en la facultad, mi amada Facultad de Ciencias, no puedo dejar pasar a Guillermo Grabinsky, a Jorge Ortíz Espejel, a Ángel Tamariz y a Sergio Macías; el Dr. Macías quien tuvo que aguantarme durante toda la Maestría. A todos y cada unos de mis maestros hasta hoy, ¡GRACIAS!

Pero, sin duda alguna quien fue un parte aguas, y porque un simple gracias no basta, a mi tutora y madrina de anillos, Bety Puga. Recuerdo un día, después de haber concluído la Licenciatura, fui a su cubículo para que me diera un consejo. Le platiqué que tenía planeado irme a estudiar una segunda carrera, Contaduría (vaya si tenía la cabeza revuelta). Porque estaba preocupado por las posibilidades de encontrar trabajo. Me miró y dijo: “No te preocupes por eso, estudia la maestría, te va a ir bien en la vida, te lo juro”.

Y pues sí, me ha ido muy bien. Hoy, no me imagino detrás de un escritorio haciendo cuenta tras cuenta. No encuentro las palabras para agradecerle el apoyo durante tanto tiempo.

A mi familia, que creció en los últimos años. Mi hermosa madre, Anita que sólo con la vida podría pagarte y te salgo debiendo, gracias, te amo. A *Don Moi*, el mayor y, posiblemente, único necaxista de México, mi padre Abraham tú también eres pilar en mi vida. A mi hermano Abraham, sabes que te quiero y siempre serás parte de mi vida. A mi hermana linda, guapa y ¡LOCA! Lo siento, lo tenía que decir Ángeles. Aunque al principio me caías mal, ya después no tanto. ¿Imagínate si me hubieras matado aquel día con tus patadas de mula? Pero falta la revancha. Guarda tus energías porque con los bodoques que te tocaron harán falta. Pero sé también que Emmanuel será tu socio en esta travesía. A mis tías Lulú y Vero, por su interés para hacer de mí una mejor persona.

Durante el tiempo que trabajé en el Doctorado, mi vida dio un giro de 180 grados. Jamás habría imaginado que la persona responsable de ello estaría en un salón de clase. Te culpo a ti, por tu culpa llegaba a las 10 de la noche a casa, por ti caminaba desde la Facultad hasta Copilco y conocí sus ensaladas, por ti me iba hasta Perisur para comprar regalos, por ti crecí intelectualmente, por ti crecí también a los lados, por culpa de tu deliciosa comida, es por ti que soy un duende cómplice del viento... perdón, perdón me dejé llevar. No, si a alguien debo de culpar realmente son a esos panditas rojos, ¡*ojalá se mueran algún día*! Pequeña hermosa, mi vaquita girasol, ¡Alita! ¿Qué te digo? Que te amo, ¡si ya lo sabes! Por ti me volvería a quitar aquellos audífonos. Gracias por estar a mi lado, por tu apoyo, por tu cariño, por tus abrazos, por tus mordidas. *Pero, sin embargo*, ¡TE AMO! A mis suegros Ismael, Antonia y, a la mejor cuñada, Nanny, gracias por las risas, su tiempo y consejos.

A mis sinodales, Enrique Castañeda Alvarado, Gerardo Acosta García, Jorge Martínez Montejano y Sergio Macías, gracias por el tiempo invertido en la lectura y corrección de este trabajo. Así como sus observaciones para su mejoramiento.

Agradezco al CONACYT por el apoyo económico brindado durante la realización de este trabajo.

Introducción

Los límites inversos generalizados fueron definidos por W. S. Mahavier en 2004, [9] como sigue:

> *Dada una colección* $\mathbf{M} = \left\{M_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ *de subconjuntos cerrados del cuadrado* $[0,1]^2$*, se define el límite inverso generalizado,* $\varprojlim \mathbf{M}$*, como la colección de elementos* $\boldsymbol{x}$ *en* $\prod_{k=1}^{\infty}[0,1]_k$ *tales que* $(x_{k+1}, x_k) \in M_k$*, para cada* $k \in \mathbb{N}$*.*

Desde su definición, este tema ha sido una gran fuente de investigación y ha crecido como *espuma de cerveza*.

Como era de esperarse, y para no perder las buenas costumbres entre los matemáticos (sin mencionar a los topólogos), tal definición no tardó en adaptarse para una familia de continuos en general. Para ello fue necesario el uso de funciones conjunto valuadas; aquellas funciones $f : X \to \mathcal{H}(Y)$ que parten de un continuo X al hiperespacio $\mathcal{H}(Y)$ de otro continuo Y, como pueden ser los subcontinuos de Y $(C(Y))$ o, en menor medida, sus subconjuntos cerrados (2^Y). Estas funciones vitales son mejor conocidas como funciones semicontinuas superiormente (scs). La nueva versión de la definición de W. S. Mahavier conviene empezar a escribirla como sigue:

> *Dadas dos sucesiones, una de continuos* $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ *y otra de funciones* $f_k : X_{k+1} \to 2^{X_k}$ *para cada* $k \in \mathbb{N}$*, se define el límite inverso generalizado, denotado por* $\varprojlim\mathrm{g}\ \{X_k, f_k\}$*, como la colección de puntos* $\boldsymbol{x} \in \prod_{k=1}^{\infty} X_k$ *tales que* $x_k \in f_k(x_{k+1})$*, para todo* $k \in \mathbb{N}$*.*

Debido a la importancia que representan las funciones scs, en la parte inicial, formalizamos su definición, así como sus principales propiedades.

También hacemos un breve, pero importante, repaso por los límites inversos *clásicos*, ya que de ellos obtenemos características importantes como la condición de ser tipo árbol y tipo arco.

Una vez establecida la definición general, el primer rumbo que siguió esta nueva herramienta, fue garantizar en principio la compacidad y la conexidad. La segunda ha sido un poco más *rebelde*; es decir, se han establecido condiciones suficientes para garantizar conexidad, como lo son que cada X_k sea un continuo y toda $f_k : X_{k+1} \to C(X_k)$ sea una función scs, pero hasta hoy, (algún mes de 2020) se sigue estudiando en aras de reducir las hipótesis.

Durante el recorrido ha habido quien se *desvió* hacia nuevas aventuras, dígase, decidir cuándo el continuo que se obtiene es descomponible o indescomponible ([5], [19] y [20]). Otros *aventureros* decidieron intentar clasificar tanto a los continuos que se pueden obtener, como a los que no, como el límite inverso generalizado de una sola función scs definida en el intervalo $[0, 1]$. Se ha establecido que no es posible obtener una curva cerrada simple [4] y que la única gráfica finita que es posible obtener es el arco [16]. También se ha caracterizado a las dendritas con un número finito de puntos de ramificación [10]. También se handado caracterizaciones para ser tipo árbol, entre otras propiedades. En fin, el camino si bien no es sencillo promete *tesoros* y asombrosos descubrimientos, *una Nueva España*.

Al desenvolver el nuevo *juguete*, como alguien así lo describiera en la audiencia de aquella ocasión, cuando éste *vio la luz*, entre los primeros ejemplos que seguramente se trabajaron, está el identificar qué se obtiene si cada M_k, en la definición original de W. S. Mahavier, es $([0, 1] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$. Éste resulta ser un arco, fin de la historia... pero pero pero, ¿Realmente lo es?; es decir, ¿qué pasa cuando en lugar de tratar con sólo una línea vertical y una horizontal, contamos con una cantidad finita de éstas?, ¿cómo son estos continuos?, ¿se sigue obteniendo un arco?, lo cual parecería ser muy poco probable. Y si no son arcos, ¿qué les podemos pedir para que sí lo sean? ¿qué pasa con su dimensión? En este trabajo abordamos tales interrogantes. Este tipo de conjuntos corresponden a la gráfica de funciones scs $f : [0, 1] \to C([0, 1])$, a las que llamamos *funciones escalera.* En el Capítulo 2, abordamos sus propiedades básicas y le damos forma a los límites inversos generalizados que se obtienen. Por ejemplo, si f y f^2 son funciones escalera, su límite inverso es tipo árbol y con condiciones aún más especiales, es tipo arco. En este mismo *episodio*, establecemos cotas para su dimensión, la cual no nos gustaría que se nos *fuera de las manos.*

Continuando con el Capítulo 2, dado que todo el trabajo está con base a las funciones escalera, les dedicamos este capítulo por completo. Para descubrir las propiedades que serán de utilidad para concluir teoremas importantes en el Capítulo 3, en el que desarrollamos propiedades acerca de funciones escalera f tales que la composición con ella misma, dígase f^2, también es una función escalera, obtenemos resultados para las funciones scs que definimos como libres de diagonal, superiores e inferiores. Y dada la similitud de ambas, nuestras pruebas las haremos únicamente para las superiores. Para la parte final de este capítulo, trabajamos con la dimensión de los límites inversos generalizados que se pueden obtener con ellas. Previo a la Sección 2.4, obtenemos los siguientes resultados originales: los lemas 2.29, 2.35, los teoremas 2.11, 2.16, 2.21, 2.31, 2.37, las proposiciones 2.9, 2.10, 2.15, 2.25, 2.26, 2.28, 2.38 y los corolarios 2.12, 2.13, 2.17, 2.18, 2.30.

Para el Capítulo 3, acompañada de una función escalera f *libre de diagonal* llega la propiedad *estrella*: la conexidad local. Este resultado junto con la condición de que f^2 es una función escalera, llevan a descubrir dendritas así como arcos en el límite inverso generalizado. Y lo *¡ideal se da!,* ¡estos teoremas tienen regreso! Ya sabiendo que trabajamos con dendritas vamos un poco más allá. Investigamos el comportamiento de sus puntos de ramificación, así como el orden de sus puntos de corte y sus subcontinuos. Muchos de estos resultados vienen acompañados de ejemplos, esperando que sean de utilidad para el lector.

Haremos una pausa, ¡se me olvidaba!, también en el Capítulo 3. Así como se extendió la definición para una colección de continuos, no conformes con eso, también se adaptó para un conjunto dirigido, o al menos bien ordenado [18] y [21]. Por ejemplo los números enteros o los números enteros negativos. Debido a que trabajamos con este último par de conjuntos, no está de más decir lo que significa esto:

> *Dadas dos sucesiones, una de continuos* $\{X_k\}_{-\infty}^{\infty}$ *y otra de funciones scs* $\{f_k : X_{k+1} \to 2^{X_k}\}_{-\infty}^{\infty}$*, se define el límite inverso generalizado sobre los enteros, denotado por* $\varprojlim\text{g}\{X_k, f_k\}$*, como la*

colección de puntos $\boldsymbol{x} \in \prod_{k=-\infty}^{\infty} X_k$ *tales que* $x_k \in f_k(x_{k+1})$, *para todo* $k \in \mathbb{Z}$.

Ahora sí. Para la parte final, pero no menos importante, llevamos nuestras funciones escalera al terreno de esta nueva definición. Trasladamos nuestros resultados a dichos límites inversos generalizados y, como es de esperarse, ocupamos toda la herramienta desarrollada en los primeros tres capítulos. Obtenemos también que éstos resultan ser dendritas así como, bajo ciertas condiciones, arcos. En la última parte, se agrega un anexo donde se compilan los resultados obtenidos durante todo el trabajo, en su versión de las funciones scs libres de diagonal inferior.

Esperando que la lectura sea de agrado para el lector. ¡Empecemos!

Capítulo 1

Antecedentes

Comenzamos este trabajo dividiendo el presente capítulo de presentación en varias secciones según nuestra necesidad. Para comenzar, introducimos algunas notaciones clásicas que generalmente son dadas en un primer curso de Topología, en caso de *emergencia* para recordarlas se recomiendan [2] y [22]. Después, avanzamos un poco y nos envolvemos dentro de la Teoría de los Continuos y, aunque ésta contempla toda una gama de posibilidades, nuestro estudio se enfoca en los continuos conocidos como dendritas. En caso de que el lector anhele profundizar en estos tópicos se recomienda la *Biblia* de los continuos [11]. Luego, nos sumergimos en una rama de los continuos denominada como límites inversos y en las funciones semicontinuas superiormente; en caso de que el lector así lo decida, puede profundizar más en ellos en la misma Biblia, así como en [8]. Ya para finalizar, pero no menos importante, introducimos el concepto sobre el cuál se basa gran parte de nuestro trabajo, los límites inversos generalizados, el tema de *moda*, para el cuál recomiendo los libros [5] y [7] para una buena lectura de los mismos temas. La mayoría de los resultados que se enuncian a continuación no se prueban, pero dejamos una referencia al lector en caso de que quiera verificar tal resultado.

1.1. Espacios topológicos y productos

Denotamos por $\mathbb{N}$, el conjunto de los números naturales. Dados un espacio topológico X y un subconjunto A de X, denotamos por $\mathrm{Cl}(A)$ a la cerradura de A, $\mathrm{Int}(A)$ al interior de A y $\mathrm{Fr}(A)$ a la frontera de A. Si $A \subset Z \subset X$, los símbolos $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Z}}(A)$, $\mathrm{Int}_{\mathrm{Z}}(A)$ y $\mathrm{Fr}_{\mathrm{Z}}(A)$ denotan la cerradura, el interior y la frontera de A relativas al subespacio Z de X, respectivamente.

Dados un espacio métrico X, con métrica d, $p \in X$ y $r > 0$, definimos la bola abierta de radio r con centro en p como:

$$B(p, r) = \big\{q \in X : d(q, p) < r\big\}.$$

Para un subconjunto A de X tal que $p \in A$, definimos la bola abierta de radio r con centro en p relativa a A como:

$$B_A(p, r) = \big\{q \in A : d(q, p) < r\big\} = B(p, r) \cap A. \tag{1.1}$$

Dada una colección de espacios topológicos $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ e I un conjunto de índices, denotamos en negrita a los elementos $\boldsymbol{x}$ del producto cartesiano $\prod\limits_{\alpha\in I} X_\alpha$. Si $\alpha \in I$, entonces, x_α es la proyección de $\boldsymbol{x}$ bajo la función $\pi_\alpha : \prod\limits_{i\in I} X_i \to X_\alpha$; es decir, $\pi_\alpha(\boldsymbol{x}) = x_\alpha$. Para una colección numerable de espacios métricos $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ con métricas d_k, respectivamente, consideramos en $\prod\limits_{k=1}^{\infty} X_k$ la métrica D definida para $\boldsymbol{x} = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ y $\boldsymbol{y} = (y_k)_{k=1}^{\infty}$ como sigue:

$$D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k(x_k, y_k)}{2^k}. \tag{1.2}$$

Dado que es muy común el uso del producto $\prod\limits_{k=1}^{m} [0, 1]_k$ durante nuestro trabajo, denotamos por D_m a la métrica en este espacio, definida para $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ como sigue:

$$D_m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{|x_k - y_k|}{2^k}. \tag{1.3}$$

Para fines prácticos definimos $X_k = [0,1]$ con la métrica usual, para cada $k \in \mathbb{N}$. Dados $n, m \in \mathbb{N}$, con $n \geq m$, consideramos las funciones $P_m^n : \prod_{k=1}^{n} [0,1]_k \to \prod_{k=1}^{m} [0,1]_k$ y $P_m : \prod_{k=1}^{\infty} [0,1]_k \to \prod_{k=1}^{m} [0,1]_k$ definidas como

$$P_m^n(\boldsymbol{x}) = (x_1, ..., x_m) \tag{1.4}$$

y

$$P_m(\boldsymbol{x}) = (x_1, ..., x_m), \tag{1.5}$$

respectivamente. Para cada $t \in [0,1]$ y cada $n \in \mathbb{N}$, $\bar{\boldsymbol{t}}_n$ representará al elemento del espacio $\prod_{k=1}^{n} [0,1]_k$ tal que $t_k = t$, para toda $k = 1, ..., n$. Del mismo modo, $\bar{\boldsymbol{t}}$ representará al elemento del espacio $\prod_{k=1}^{\infty} [0,1]_k$, tal que $t_k = t$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Antes de continuar con espacios topológicos más específicos, damos por entendido que el lector está familiarizado con el conjunto de Cantor; sin embargo, puede consultar [11, Capítulo 7, Sección 2] donde podrá encontrar muchas cosas interesantes sobre este conjunto, entre las que destacamos las siguientes:

Teorema 1.1. *Todo espacio métrico compacto es la imagen continua del conjunto de Cantor.* [11, Teorema 7.7, p. 106]

Teorema 1.2. *Un espacio métrico compacto X es homeomorfo al conjunto de Cantor si y sólo si es compacto, perfecto y totalmente disconexo.* [11, Teorema 7.14, p. 109]

En caso de que sea conveniente hacer un repaso de las definiciones de espacios perfectos o totalmente disconexos, recomiendo al lector consultar [11, p. 108–109]. A continuación enunciamos una proposición que va en este sentido.

Proposición 1.3. *Sea $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos tal que X_k es finito y no degenerado, para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces $X = \prod_{k=1}^{\infty} X_k$ es homeomorfo al conjunto de Cantor.*

Demostración. Dado que X_k es finito, no degenerado y métrico, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que X_k es compacto y totalmente disconexo, para cada $k \in \mathbb{N}$. De modo que, por [22, Teoremas 17.8 y 29.3], X es compacto y totalmente disconexo, respectivamente. Resta mostrar que X es perfecto. Sean $\boldsymbol{x} \in X$ y $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $z_k \in X_k$ y $x_k \neq z_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$; donde x_k es la k-ésima proyección de $\boldsymbol{x}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Definimos en X la sucesión $\{\boldsymbol{x}^k\}_{k=1}^{\infty}$ como sigue:

$$x_i^k = \begin{cases} z_k, & k = i; \\ x_k, & k \neq i. \end{cases},$$

Entonces, $\boldsymbol{x}^k \neq \boldsymbol{x}^n$, para cualesquiera k y n en $\mathbb{N}$ con $k \neq n$ y, dada la definición de la métrica D en (1.2), se sigue que $D(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{x}) \leq \frac{1}{2^k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$; por lo tanto $\{\boldsymbol{x}^k\}_{k=1}^{\infty}$ converge a $\boldsymbol{x}$. Esto muestra que X es perfecto. Así, puesto que X es compacto, perfecto y totalmente disconexo, por el Teorema 1.2, X es homeomorfo al conjunto de Cantor. □

1.2. Continuos

Definición 1.4. *Dados un espacio topológico X y $p \in X$, decimos que X es localmente conexo en p si para cada abierto U tal que $p \in U$, existe un abierto y conexo V tal que $p \in V \subset U$. Decimos que X es localmente conexo si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.*

Definición 1.5. *Dados un espacio topológico X y $p \in X$, decimos que X es conexo en pequeño en p si para cada abierto U tal que $p \in U$, existe un conjunto conexo K tal que $p \in \operatorname{Int}(K) \subset U$. Decimos que X es conexo en pequeño si es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos.*

Definición 1.6. *Un espacio topológico no degenerado X es un continuo si posee una métrica que hace de él un espacio compacto y conexo. Si $K \subset X$ es cerrado, no vacío y conexo, decimos que K es un subcontinuo de X.*

Teorema 1.7. *Sea $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de continuos no vacíos tal que $X_{k+1} \subset X_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces $\bigcap_{k=1}^{\infty} X_k$ es un continuo.*[11, Teorema 1.8, p. 6]

Es claro, dadas las Definiciones 1.4 y 1.5, que todo espacio localmente conexo es conexo en pequeño. Ahora bien, la otra implicación es válida y la enunciamos a continuación.

Teorema 1.8. *Todo continuo X conexo en pequeño es localmente conexo.*[22, Teorema 27.16, p. 201]

Teorema 1.9. *Un continuo X no puede fallar en ser conexo en pequeño para uno, o incluso, para una cantidad numerable de puntos; más aún, si X no es conexo en pequeño en p, existe un subcontinuo no degenerado K de X tal que X no es conexo en pequeño en ninguno de los puntos de K.* [11, Corolario 5.13, p. 78]

Como consecuencia de los Teoremas 1.8 y 1.9, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.10. *Un continuo X no puede fallar en ser localmente conexo para uno o incluso, una cantidad numerable de puntos.*

Aunque hay toda una variedad de continuos nosotros sólo trabajamos con un puñado de ellos. A continuación presentamos la lista de los *convocados*, aquéllos que nos acompañarán durante toda esta *travesía*:

Definición 1.11. *Decimos que un continuo X, se dice que es:*

- *Un arco si es homeomorfo al espacio $[0,1]$, con la topología usual.*
- *Un triodo simple si es homeomorfo a la unión de tres arcos que comparten un solo punto en común.*
- *Una curva cerrada simple si es homeomorfo al subcontinuo del plano $S^1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$, cuya topología es la usual.*
- *Una n-celda si es homeomorfo a $\prod_{k=1}^{n} [0,1]_k$, donde $[0,1]_k = [0,1]$, para toda $k \in \{1, ..., n\}$.*

- *Una gráfica finita si puede expresarse como la unión finita de arcos cuya intersección dos a dos es vacía o coinciden en a lo más sus puntos extremos.*
- *Un árbol si es una gráfica finita que no contiene curvas cerradas simples.*
- *Una dendrita si es localmente conexo y no contiene curvas cerradas simples.*

El presente trabajo se centra en las dendritas y, en particular, en propiedades de ellas. Para describirlas, necesitamos de las siguientes nociones.

Definición 1.12. *Sea X una dendrita, $p \in X$ y β un número cardinal. Decimos que p es de orden menor o igual a β, denotado por $\theta_X(p) \leq \beta$ si, para cada abierto U de X tal que $p \in U$, existe un abierto V de X tal que $|\mathrm{Fr}(V)| \leq \beta$. Decimos que p tiene orden β en X si $\theta_X(p) \leq \beta$ y $\theta_X(p) \nleq \alpha$, para cualquier número cardinal $\alpha < \beta$. Denotamos por $Ram(X)$, a la colección de elementos de X cuyo orden sea mayor o igual a 3. A los puntos de orden 1 se les llama puntos extremos de X.*

Definición 1.13. *Sean X un continuo y $p \in X$. Decimos que p es un punto de corte de X, si $X \setminus \{p\}$ es disconexo.*

Definición 1.14. *Dado un continuo X, decimos que X es unicoherente si para cada par de subcontinuos H y K de X tales que $X = H \cup K$, $H \cap K$ es conexo. Decimos que X es hereditariamente unicoherente si todo subcontinuo de X es unicoherente.*

Teorema 1.15. *Toda dedrita es un continuo hereditariamente unicoherente.* [11, Teorema 10.35, p. 180]

Teorema 1.16. *Todo continuo X localmente conexo es arco conexo.*[11, Teorema 8.23, p. 130]

Proposición 1.17. *Sean X y Y dos espacios métricos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva tal que X es un continuo localmente conexo. Entonces Y es un continuo localmente conexo.* [11, Proposición 8.16, p. 127]

Enseguida y para finalizar esta sección, mencionamos algunos teoremas sobre los continuos antes mencionados, los cuales usamos durante este trabajo.

Teorema 1.18. *Todo subcontinuo de una dendrita (un árbol) es una dendrita (un árbol).* [11, Corolario 10.6, p. 167]

Teorema 1.19. *Un continuo X es una dendrita si y sólo si cada elemento de X es un punto de corte o bien un punto extremo.* [11, Teorema 10.7, p. 168]

Teorema 1.20. *Un continuo de Peano X es una dendrita si y sólo si X hereditariamente unicohorente.* [11, Teorema 10.35, p. 180]

Teorema 1.21. *Un continuo X es un arco si y sólo si X posee exactamente dos puntos que no son de corte.*[11, Teorema 6.17, p. 96]

1.3. Dimensión

La noción de dimensión para espacios topológicos puede llegar a ser un poco ambigua debido a la variedad de espacios en que se puede trabajar. Por ejemplo, en [3] se manejan diversas definiciones, desde dimensión débil hasta dimensión fuerte, pasando por bases y demás cosas. Sin embargo, todas estas concurren cuando se trabaja con espacios métricos separables; es decir, aquellos espacios que poseen un conjunto denso y numerable. Afortunadamente para nuestra causa, estos espacios son los que nos interesan. La definición que a continuación establecemos es la dada en [12], y unifica estas definiciones para los espacios separables.

Definición 1.22. *Sean X un espacio métrico y $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de X. Se define la malla de $\mathcal{A}$, denotada por* $\mathrm{mesh}(\mathcal{A})$*, como sigue:*

$$\mathrm{mesh}(\mathcal{A}) = \sup\left\{ \mathit{diám}(A) : A \in \mathcal{A} \right\}.$$

Si $\mathcal{A}$ es la colección vacía se dice que $\text{mesh}(\mathcal{A}) = 0$. Si $\mathcal{A}$ es un conjunto finito y sus elementos son subconjuntos no vacíos de X, se define el orden de $\mathcal{A}$, denotado por $ord(\mathcal{A})$, como el natural más grande n para el cual existen $n+1$ elementos de $\mathcal{A}$ cuya intersección total es distinta del vacío. Si $\mathcal{A}$ es vacía $ord(\mathcal{A}) = -1$.

Definición 1.23. *Sean X un espacio métrico separable y $n \in \mathbb{N}$. Decimos que* $\dim(X) \leq n$ *si para toda $\epsilon > 0$, existe una cubierta abierta de X con malla menor a ϵ y con orden a lo más n. Decimos que* $\dim(X) = n$ *si* $\dim(X) \leq n$ *pero no se cumple que* $\dim(X) \leq n - 1$.

Teorema 1.24. *Sean X un espacio métrico separable, $Y \subset X$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que* $\dim(X) \leq n$. *Entonces* $\dim(Y) \leq n$. [12, Teorema 3.2, p. 15]

Teorema 1.25. *Sean X y Y dos espacios métricos separables tales que X es homeomorfo a Y. Entonces* $\dim(X) = \dim(Y)$.[12, Teorema 1.2, p. 6]

Teorema 1.26. *Sean $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una colección de conjuntos cerrados y $m \in \mathbb{N}$ tales que* $\dim(E_n) \leq m$, *para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces* $\dim\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq m$. [12, Teorema 7.1, p. 33]

Teorema 1.27. *Para cada $n \in \mathbb{N}$,* $\dim\left(\prod_{k=1}^{n} [0,1]_k\right) = n$.[12, Teorema 9.5, p. 49]

1.4. Límites inversos

A continuación enunciamos la definición clásica de los límites inversos que fueron muy estudiados hasta antes del 2004, cuando W. S. Mahavier vino a darle un giro a este tópico. También complementamos con algunos resultados que serán relevantes a lo largo de nuestro trabajo. En la mayoría de ellos se proporciona una referencia para que el lector ávido de este tema, pueda profundizar en sus demostraciones y más propiedades.

Definición 1.28. *Una sucesión inversa es una doble sucesión* $\{X_k, f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *tal que* X_k *es un continuo y* $f_k : X_{k+1} \to X_k$ *es una función continua, para cada* $k \in \mathbb{N}$. *Si* $\{X_k, f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es una sucesión inversa. Definimos y denotamos el límite inverso generado por* $\{X_k, f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *como el siguiente conjunto:*

$$\varprojlim \{X_k, f_k\}_{k=1}^{\infty} = \Big\{\boldsymbol{x} \in \prod_{k=1}^{\infty} X_k : x_k = f_k(x_{k+1}) \text{ para cada } k \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Una exposición completa de este tema aparece en [8] y [11]. A continuación enunciamos los resultados que se tomarán en cuenta para este trabajo.

Teorema 1.29. *Sea* $\{X_k, f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *una sucesión inversa tal que* X_k *es un continuo y* $f_k : X_{k+1} \to X_k$ *es una función continua, para cada* $k \in \mathbb{N}$. *Entonces* $\varprojlim \{X_k, f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es un continuo.* [8, Proposición 2.1.8, p. 71]

Teorema 1.30. *Sea* $\{X_k, f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *una sucesión inversa tal que* X_k *es hereditariamente unicoherente y* f_k *es suprayectiva, para cada* $k \in \mathbb{N}$. *Entonces* $\varprojlim \{X_k, f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es hereditariamente unicoherente.* [8, Corolario 2.1.26, p. 81]

Definición 1.31. *Dados dos continuos* X *y* Y *y una función continua y suprayectiva* $f : X \to Y$, *decimos que* f *es monótona si* $f^{-1}(y)$ *es conexo, para cada* $y \in Y$.

Teorema 1.32. *Sea* $\{X_k, f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *una sucesión inversa tal que* X_k *es localmente conexo y* f_k *es monótona, para cada* $k \in \mathbb{N}$. *Entonces* $\varprojlim \{X_k, f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es localmente conexo.* [8, Corolario 2.1.14, p. 75]

Definición 1.33. *Dado un continuo* X, *decimos que* X *es tipo árbol (tipo arco) si existe una sucesión inversa* $\{X_k, f_k\}$ *tal que, para cada* $k \in \mathbb{N}$, X_k *es un árbol (arco) y* f_k *es suprayectiva, y* X *es homeomorfo a* $\varprojlim \{X_k, f_k\}$.

Teorema 1.34. *Un continuo* X *es tipo árbol si y sólo si para cada* $\epsilon > 0$ *existen un árbol* T_ϵ *y una* ϵ*-función continua y suprayectiva* $f_\epsilon : X \to T_\epsilon$. [8, Teorema 2.5.13, p. 123]

Teorema 1.35. *Sea* X *es un continuo tipo arco (tipo árbol). Entonces* X *no contiene curvas cerradas simples.* [8, Corolario 2.1.29, p. 82]

Teorema 1.36. *Toda dendrita es un continuo tipo árbol.* [11, Teorema 10.32, p. 179]

A partir de los Teoremas 1.35 y 1.36, se puede concluir el siguiente resultado.

Teorema 1.37. *Un continuo es tipo árbol y localmente conexo si y sólo si es una dendrita.*

Teorema 1.38. *Un continuo es tipo arco y localmente conexo si y sólo si es un arco.* [11, Corolario 12.6, p. 233]

Teorema 1.39. *Sean* $\{X_k, f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *una sucesión inversa y* $m \in \mathbb{N}$ *tales que* $\dim(X_k) \leq m$*, para cada* $k \in \mathbb{N}$*. Entonces* $\dim\left(\varprojlim \{X_k, f_k\}_{k=1}^{\infty}\right) \leq m$. [14, Remark 27-9, p. 161]

1.5. Funciones scs

Las funciones semicontinuas superiormente son pieza clave para los límites inversos generalizados , los cuales presentamos en la próxima sección. Al igual que en las secciones pasadas sólo mencionamos los resultados que ocupamos en el trabajo, por supuesto, con sus respectivas referencias.

La noción de función scs depende del hiperespacio de subconjuntos cerrados de un continuo. Debido a ello presentamos la siguiente definición.

Definición 1.40. *Dado un continuo* X*, definimos:*

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\};$$
$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}.$$

Definición 1.41. *Sean* X *y* Y *dos continuos,* $f : X \to 2^Y$ *una función y* $p \in X$*. Decimos que* f *es semicontinua superiormente (scs) en* p *si para todo abierto* $V \subset Y$ *tal que* $f(p) \subset V$*, el conjunto* $\{x \in X : f(x) \subset V\}$ *es abierto en* X*. Decimos que* f *es scs si lo es en cada punto de* X*.*

Definición 1.42. *Dados un espacio topológico X, una función $f : X \to 2^Y$ y $E \subset X$. Definimos y denotamos a la imagen de E bajo f como sigue:*

$$f(E) = \bigcup_{x \in E} f(x).$$

Decimos que f es suprayectiva si $f(X) = Y$.

Teorema 1.43. *Sean X, Y dos continuos, $f : X \to 2^Y$ una función scs y $E \in 2^X$. Entonces $f(E) \in 2^Y$.* [1, Teorema 2.6]

Definición 1.44. *Sean X, Y dos continuos y $f : X \to 2^Y$ una función. Definimos y denotamos la gráfica de la función f como:*

$$\mathcal{G}(f) = \big\{(x, y) \in X \times Y : y \in f(x)\big\}.$$

Proposición 1.45. *Sean X, Y dos espacios métricos compactos y $\mathcal{M} \subset X \times Y$ tales que para cada $x \in X$, existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \in \mathcal{M}$. Entonces $\mathcal{M}$ es cerrado en $X \times Y$ si y sólo si existe una función scs $f : X \to 2^Y$ tal que $\mathcal{M} = \mathcal{G}(f)$.* [5, Teorema 1.2, p. 3]

Definición 1.46. *Sean X, Y dos continuos y $f : X \to 2^Y$ y $g : Y \to 2^Z$ dos funciones. Definimos la función composición $g \circ f : X \to 2^Z$ para cada $x \in X$, como:*

$$(g \circ f)(x) = \bigcup_{y \in f(x)} g(y).$$

Cabe notar que $(g \circ f)(x) = g(E)$ donde $E = f(x)$. En el caso que $X = Y = Z$ y $g = f$ en lugar de escribir $f \circ f$, lo abreviamos como f^2. De manera inductiva si $f : X \to 2^X$ definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^n : X \to 2^X$ como la función obtenida de componer n veces la función f.

Proposición 1.47. *Sean X, Y y Z tres continuos, $f : X \to 2^Y$ y $g : Y \to 2^Z$ dos funciones scs. Entonces $f \circ g : X \to 2^Z$ es scs.*[5, Teorema 1.4, p. 4]

Observemos que la composición definida en el enunciado de la Proposición 1.47, está bien definida debido al Teorema 1.43.

Definición 1.48. *Sea $f : X \to 2^Y$ una función scs tal que $f(x)$ es un conjunto degenerado, para cada $x \in X$. Definimos $f^* : X \to Y$ como sigue $f^*(x)$ es el único punto de $f(x)$.*

Proposición 1.49. *Sean X, Y dos continuos y $f : X \to 2^Y$ una función scs tal que $f(x)$ es el conjunto degenerado $\{c_x\}$, para cada $x \in X$. Entonces la función $f^* : X \to Y$ definida por $f^*(x) = c_x$ es continua.* [11, Lema 7.2, p. 103]

Como consecuencia de las Proposiciones 1.47 y 1.49, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1.50. *Sean X, Y dos continuos, $f : X \to 2^Y$ una función scs y $h : Z \to X$ una función continua. Entonces $f \circ h : Z \to 2^Y$ es scs.*

1.6. Límites inversos generalizados

En el año 2004, W. S. Mahavier, en [9] revoluciona el concepto de límite inverso clásico al definirla para subconjuntos cerrados del cuadrado unitario $[0,1]^2$. Desde entonces ha dado pie a resultadosmmuy interesantes así como al presente trabajo. Su definición es la siguiente:

Definición 1.51. *Sea $\mathbf{M} = \left\{M_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ una colección de subconjuntos cerrados del cuadrado $[0,1]^2$. El conjunto $\underleftarrow{\operatorname{límg}}\, \mathbf{M}$ denota la colección de elementos $\boldsymbol{x} = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ en $\prod_{k=1}^{\infty} [0,1]_k$ tales que $(x_{k+1}, x_k) \in M_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$.*

En el caso en que $M = M_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$, simplemente escribimos $\underleftarrow{\operatorname{límg}}\, M$.

A lo largo de esta sección, así como hemos hecho con las secciones pasadas, presentamos los principales resultados que vamos a ocupar en este trabajo. Para algunos de ellos escribimos su prueba y para otros no, esperando hacer la lectura de la misma más ligera. Sin embargo, dejamos al lector la debida referencia en caso de que prefiera revisar su demostración.

Definición 1.52. *Una sucesión inversa generalizada es una doble sucesión* $\{X_k, f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *tal que* X_k *es un continuo y* $f_k : X_{k+1} \to 2^{X_k}$ *es una función scs, para cada* $k \in \mathbb{N}$. *Si* $\{X_k, f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *es una sucesión inversa. Definimos y denotamos el límite inverso generalizado dado por* $\{X_k, f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *como sigue:*

$$\underleftarrow{\text{límg}}\,\{X_k, f_k\} = \Big\{\boldsymbol{x} \in \prod_{k=1}^{\infty} X_k : x_k \in f_k(x_{k+1}) \text{ para todo } k \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Si $n \geq 1$, *definimos los siguientes conjuntos:*

$$G^*(f_1, ..., f_n) = \Big\{\boldsymbol{x} \in \prod_{k=1}^{\infty} X_k : x_k \in f_k(x_{k+1}), \quad \textit{para todo } \ 1 \leq k \leq n\Big\} \quad (1.6)$$

$$G(f_1, ..., f_n) = \Big\{\boldsymbol{x} \in \prod_{k=1}^{n+1} X_k : x_k \in f_k(x_{k+1}), \ \textit{para todo } \ 1 \leq k \leq n\Big\}. \quad (1.7)$$

Sin temor a causar alguna confusión, en el caso en que $f = f_k$ y $X = X_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$, simplemente escribimos G_n^* para representar al conjunto $G^*(f_1, ..., f_n) = G^*(f, ..., f)$, G_n en lugar de $G(f_1, ..., f_n) = G(f, ..., f)$ y por $\underleftarrow{\text{límg}}\,\boldsymbol{f}$ al límite inverso generalizado obtenido bajo esta función en común.

Antes de enunciar y probar propiedades básicas sobre este concepto, lo practicamos un poco con un par de ejemplos.

Ejemplo 1.53. *Sea* $f : [0, 1] \to 2^{[0,1]}$ *la función dada por* $f(t) = \big\{0, 1\big\}$, *para todo* $t \in [0, 1]$. *Entonces* $\underleftarrow{\text{límg}}\,\boldsymbol{f}$ *es homeomorfo al conjunto de Cantor.*

Demostración. Para hacer notar esto, veamos la estructura de los elementos del límite inverso generalizado. Sea $\boldsymbol{x} \in \underleftarrow{\text{límg}}\,\boldsymbol{f}$. Puesto que $x_1 \in f(x_2)$, por la definición de f, $x_1 \in \big\{0, 1\big\}$. De la misma manera, dado que $x_2 \in f(x_3)$ se sigue que $x_2 \in \big\{0, 1\big\}$ y así sucesivamente. De modo que, para cualquier $\boldsymbol{x} \in \underleftarrow{\text{límg}}\,\boldsymbol{f}$, $x_k \in \big\{0, 1\big\}$, para cada $k \in \mathbb{N}$; es decir, $\underleftarrow{\text{límg}}\,\boldsymbol{f} \subset \prod_{k=1}^{\infty} \big\{0, 1\big\}_k$. Debido a la definición de la función f, tenemos que $f(0) = \big\{0, 1\big\}$ y $f(1) = \big\{0, 1\big\}$. De aquí se sigue que, para cada $\boldsymbol{x} \in \prod_{k=1}^{\infty} \big\{0, 1\big\}_k$, $x_k \in \big\{0, 1\big\}$; es

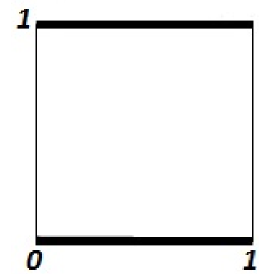

Figura 1.1: Gráfica del Ejemplo 1.53.

decir, $x_k \in f(x_{k+1})$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Así, $\prod_{k=1}^{\infty} \{0,1\}_k \subset \varprojlim \boldsymbol{f}$ y, así, hemos mostrado que $\varprojlim \boldsymbol{f} = \prod_{k=1}^{\infty} \{0,1\}_k$. Es bien conocido que $\prod_{k=1}^{\infty} \{0,1\}_k$ es homeomorfo al conjunto de Cantor [2, **4.1**, p. 104] o bien, el lector puede concluirlo mediante la Proposición 1.3. $\square$

Ejemplo 1.54. *Sea $f : [0,1] \to 2^{[0,1]}$ la función dada por:*

$$f(t) = \begin{cases} \{\frac{t}{2}\}, & si\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ \{\frac{1}{2} + \frac{t}{2}\}, & si\ 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Entonces $\varprojlim \boldsymbol{f} = \{\overline{\mathbf{0}}, \overline{\mathbf{1}}\}$.

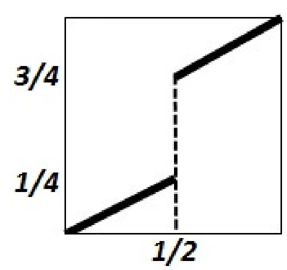

Figura 1.2: Gráfica del Ejemplo 1.54.

Demostración. Al igual que en el ejemplo previo, examinemos la estructura de los elementos de límite inverso generalizado. Sea $\boldsymbol{x} \in \underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$. Dado que $x_1 \in f(x_2)$ y por la definición de f, $x_1 \in [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$. Si $x_1 \in [0, \frac{1}{4}]$, por definición de f, $x_2 = 2x_1$ y $x_2 \leq \frac{1}{2}$. Si $x_2 \leq \frac{1}{4}$ se sigue que $x_3 = 2x_2$ y, si $\frac{1}{4} < x_2$ obtenemos, por la definición de f, ya no puede existir un x_3 que cumpla con la definición del límite inverso generalizado. Procediendo de este modo, notamos que, cada vez que existe x_{k+1} para x_k, debe suceder que $x_{k+1} = 2x_k$ y, a su vez $x_k \leq \frac{1}{4}$. Esto únicamente pasa, debido a la naturaleza de la función $2t$, cuando $x_1 = 0$. Ahora, si $x_1 = 0$, por definición de f, $x_k = 0$, para cada $k \in \mathbb{N}$; es decir, $\boldsymbol{x} = \overline{\mathbf{0}}$. Analicemos ahora el otro caso para x_1. Si $x_1 \in [\frac{3}{4}, 1]$, por la definición de f, $x_2 = 2x_1 - 1$ y $x_2 \in [\frac{1}{2}, 1]$. Si $x_2 \leq \frac{3}{4}$ se tiene que $x_3 = 2x_2 - 1$ y, si $\frac{1}{2} \leq x_2 < \frac{3}{4}$ entonces, por la definición de f, ya no puede existir un x_3 que cumpla con la definición del límite inverso generalizado. Procediendo de este modo, notamos que, cada vez que existe x_{k+1} para x_k, debe suceder que $x_{k+1} = 2x_k - 1$ y a su vez $x_k \in [\frac{3}{4}, 1]$. Lo cual sólo es posible, debido a la naturaleza de la función $2t - 1$, cuando $x_1 = 1$. Ahora, si $x_1 = 1$ por la definición de f, $x_k = 1$, para cada $k \in \mathbb{N}$; es decir, $\boldsymbol{x} = \overline{\mathbf{1}}$. Con este análisis concluimos que $\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f} = \left\{\overline{\mathbf{0}}, \overline{\mathbf{1}}\right\}$. $\square$

Si el lector desea conocer más modelos de límites inversos generalizados, puede encontrar en la tesis de Carlos Oldair, [17], una lista de más de 20 ejemplos bien detallados. Bueno, ahora demos inicio a algunas propiedades importantes.

Teorema 1.55. *Sea $\{X_k, f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión inversa generalizada. Entonces $\underleftarrow{\text{límg}}\, \{X_k, f_k\}$ es compacto.* [7, Teorema 111, p. 81]

El siguiente teorema trata la conexidad de un límite inverso inverso generalizado. Su prueba se sigue de lo realizado en [5, Lemas 2.1 y 2.2, Teoremas 2.6 y 2.7, p.17–18].

Teorema 1.56. *Sea $\{X_k, f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión inversa generalizada. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- *$G^*(f_1, ..., f_n)$ es conexo, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

- $\varprojlim \{X_k, f_k\}$ *es conexo.*
- $G(f_1, ..., f_n)$ *es conexo, para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.57. *Sea* $f : X \to C(Y)$ *una función scs, con* X *un continuo y* Y *un compacto. Entonces* $f(X)$ *es un continuo.* [5, Teorema 2.4, p. 16]

Teorema 1.58. *Sean* $X_1, ..., X_{n+1}$ *una colección finita de continuos y* $f_k : X_{k+1} \to C(X_k)$ *funciones scs, para cada* $1 \leq k \leq n$. *Entonces* $G(f_1, ..., f_n)$ *es conexo.*

Demostración. Procedamos por inducción. Para $n = 1$, notemos que $G(f_1)$ es homeomorfo a $\mathcal{G}(f_1)$, por el homeomorfismo que intercambia coordenadas; a decir, la primera por la segunda y viceversa. Por tanto, del Teorema 1.59, $G(f_1)$ es conexo. Supongamos que el resultado se cumple para cualquier colección de n funciones scs. Sean $f_1, ..., f_{n+1}$ funciones scs. Definimos $\mathcal{F} : G(f_2, ..., f_{n+1}) \to C(X_1)$ como sigue:

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{x}) = f_1 \circ \left(\pi_2|_{G(f_2,...,f_{n+1})}\right)(\boldsymbol{x}) = f_1(x_2).$$

Dado que f_1 es una función scs y π_2 es una función continua, por el Corolario 1.50, $\mathcal{F}$ es una función scs. Observemos que $(x_2, ..., x_{n+2}, x_1) \in \mathcal{G}(\mathcal{F})$ si y sólo si $(x_1, x_2, ..., x_{n+2}) \in G(f_1, ..., f_{n+1})$; es decir, $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ es homeomorfa a $G(f_1, ..., f_{n+1})$. Así, por el Teorema 1.59, $G(f_1, ..., f_{n+1})$ es conexo. □

Teorema 1.59. *Sea* $f : X \to C(Y)$ *una función scs, con* X *un continuo y* Y *un compacto. Entonces* $\mathcal{G}(f)$ *es un continuo.* [7, Teorema 118, p. 86]

La siguiente definición se utiliza a menudo en el Capítulo 4, cuando trabajemos el límite inverso generalizado cuyos índices corren sobre los números enteros y los números enteros negativos.

Definición 1.60. *Sean* X *y* Y *dos continuos y* $f : X \to 2^Y$ *una función. Dado* $y \in Y$, *definimos la función inversa de* f, *denotada por* $f^{-1} : Y \to 2^X$, *como sigue:*

$$f^{-1}(y) = \left\{x \in X : y \in f(x)\right\}.$$

Teorema 1.61. *Sean X un continuo y $f : [0,1] \to 2^{[0,1]}$ una función scs. Entonces $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es conexo si y sólo si $\varprojlim \boldsymbol{f}^{-1}$ es conexo.* [5, Teorema 2.3, p.16]

Combinando los Teoremas 1.55, 1.56 y 1.58, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.62. *Sea $\{X_k, f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión inversa generalizada tal que $f_k : X_{k+1} \to C(X_k)$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces $\varprojlim \{X_k, f_k\}$ es un continuo.*

Demostración. El resultado se sigue de los Teoremas 1.55, 1.56 y 1.58. $\square$

El siguiente resultado es base en la primera parte de nuestro trabajo y sólo abordamos funciones del intervalo en su hiperespacio de subcontinuos, lo probamos en general para una colección de continuos.

Sea $\{X_k, f_k\}$ una sucesión inversa generalizada. Sean P_n^m y P_n las funciones definidas en (1.4) y (1.5). Para toda $k \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto $\mathcal{G}_k = G(f_1, ..., f_k)$ de $\prod_{i=1}^{k} X_i$ así como la restricción g_k de P_{k+1}^{k+2} a $\mathcal{G}_{k+1}$. Entonces $g(\mathcal{G}_{k+1}) \subset \mathcal{G}_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$, por lo que $\{\mathcal{G}_k, g_k\}$ es una sucesión inversa. Vamos a utilizar esta sucesión inversa para probar el siguiente resultado.

Teorema 1.63. *Sea $\{X_k, f_k\}$ una sucesión inversa generalizada tal que f_k es una función suprayectiva, para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces $\varprojlim \{X_k, f_k\}$ es homeomorfo a $\varprojlim \{\mathcal{G}_k, Q_k^{k+1}\}$.*

Demostración. Sea $H : \varprojlim \{X_k, f_k\} \to \varprojlim \{\mathcal{G}_k, Q_k^{k+1}\}$ definida como sigue:

$$H(\boldsymbol{x}) = (Q_1(\boldsymbol{x}), Q_2(\boldsymbol{x}), ...) = ((x_1, x_2), (x_1, x_2, x_3), ...)$$

donde Q_k representa a la restricción de la función P_{k+1} sobre $\varprojlim \{X_k, f_k\}$ y P_k es la función definida en (1.5). No es difícil observar que H está bien definida; es decir, para cada $\boldsymbol{x} \in \varprojlim \{X_k, f_k\}$ se tiene que $H(\boldsymbol{x}) \in \varprojlim \{\mathcal{G}_k, Q_k^{k+1}\}$.

Por los Teoremas 1.29 y 1.62, sabemos que $\varprojlim \{X_k, f_k\}$ y $\varprojlim \{\mathcal{G}_k, Q_k^{k+1}\}$ son continuos, respectivamente; por tanto, sólo es necesario mostrar que H es continua y biyectiva. Veamos que H es inyectiva. Sean $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ elementos diferentes de $\varprojlim \{X_k, f_k\}$. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \neq y_k$; por tanto, $(x_1, ..., x_k) \neq (y_1, ..., y_k)$. De modo que, por la definición de H, $H(\boldsymbol{x}) \neq H(\boldsymbol{y})$. Y esto concluye la prueba. Veamos que H es suprayectiva. Sea $\boldsymbol{z} \in \varprojlim \{\mathcal{G}_k, Q_k^{k+1}\}$. Definimos $\boldsymbol{x} \in \varprojlim \{X_k, f_k\}$ tal que $x_n = \pi_n(z_n)$. Así, por construcción, la n-ésima coordenada de $H(\boldsymbol{x})$ es igual a z_n, para cada $n \in \mathbb{N}$. Para finalizar, veamos la continuidad. Puesto que la k-ésima función coordenada Q_k de H, corresponde a la restricción de la función continua P_{k+1} al conjunto $\varprojlim \{X_k, f_k\}$, resulta que Q_k es una función continua y por lo tanto, H es continua [2, Teorema 2.2, p. 101]. □

La prueba hecha previamente permanece válida si suponemos a la sucesión de funciones $\{f_k : X_{k+1} \to 2^{X_k}\}_{k=1}^{\infty}$; es decir, no es necesario que las funciones vayan al hiperespacio de $C(X_k)$.

Teorema 1.64. *Sea $\{X_k, f_k\}$ una sucesión inversa generalizada tal que $f_k^{-1} : X_k \to C(X_{k+1})$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces $\varprojlim \{X_k; f_k\}$ es localmente conexo si y sólo si $G(f_1, ..., f_k)$ es localmente conexo, para cada $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Supongamos que $\varprojlim \{X_k, f_k\}$ es un continuo localmente conexo. Sea $k \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 1.17 y dado que $P_{k+1}(\varprojlim \{X_k, f_k\}) = G(f_1, ..., f_k)$, se sigue que $G(f_1, ..., f_k)$ es localmente conexo.

Supongamos que $G(f_1, ..., f_k)$ es localmente conexo, para cada $k \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 1.63, $\varprojlim \{X_k, f_k\}$ es homeomorfo a $\varprojlim \{\mathcal{G}_k, Q_k^{k+1}\}$. Por otro lado. Sea $\boldsymbol{x} \in \mathcal{G}_k$, entonces

$$(Q_k^{k+1})^{-1}(\boldsymbol{x}) = \left\{\boldsymbol{x}' \in \mathcal{G}_{k+1} : Q_k^{k+1}(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{x}\right\} = \left\{\boldsymbol{x}\right\} \times f_k^{-1}(x_k).$$

Dado que $f_k^{-1}(x_k)$ es conexo, $(Q_k^{k+1})^{-1}(\boldsymbol{x})$ es un conjunto conexo; es decir, $Q_k^{k+1} : \mathcal{G}_{k+1} \to \mathcal{G}_k$ es monótona, para cada $k \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 1.32, $\varprojlim \{\mathcal{G}_k, Q_k^{k+1}\}$ es localmente conexo y, por ende, $\varprojlim \{X_k, f_k\}$ es localmente conexo. □

Aun con continuos localmente conexos X_1 y X_2 y $f : X_2 \to C(X_1)$ una función scs, puede suceder que G_1 no sea localmente conexo. El siguiente ejemplo es muestra de ello. Antes de empezar, vale la pena hacer notar que, dada una función $f : [0,1] \to 2^{[0,1]}$, $\mathcal{G}(f^{-1}) = G_1$.

Ejemplo 1.65. *Sea $f : [0,1] \to C([0,1])$ la función scs dada por:*

$$f(t) = \begin{cases} \{|sen\left(\frac{1}{t}\right)|\}, & t \neq 0; \\ [0,1], & t = 0. \end{cases}$$

Entonces G_1 no es localemente conexo.

Demostración. Notemos primero que $\mathcal{G}(f)$ corresponde al continuo llamado la *curva topológica* la cual no es locamente conexo. Ahora, por la definición, $G_1 = \big\{(x_1, x_2) \in [0,1]^2 : x_1 \in f(x_2)\big\}$; es decir, G_1 corresponde al resultado de intercambiar la primera coordenada por la segunda coordenada y viceversa en $\mathcal{G}(f)$. De este modo, G_1 no es localmente conexo. □

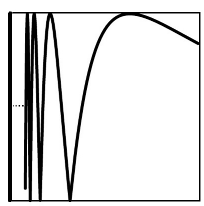

Figura 1.3: Gráfica de la función del Ejemplo 1.65.

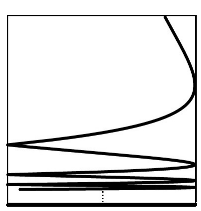

Figura 1.4: Representación gráfica del conjunto G_1 del Ejemplo 1.65.

Capítulo 2

Árboles y funciones escalera

En este capítulo presentamos la definición de las funciones escalera $f : [0,1] \to C([0,1])$ y trabajamos con sus propiedades, tanto inmediatas como para algunos subespacios del producto finito de intervalos y en el límite inverso generalizado. Una propiedad importante sobre este tipo de funciones es saber cuándo, dada una función escalera f, podemos asegurar que f^2 también sea una función escalera. Es por ello que les dedicamos una sección completa para estudiar esta propiedad, así como las consecuencias que tienen. Para concluir el capítulo, trabajamos un poco sobre la dimensión y obtenemos un par de resultados interesantes en subespacios y el límite inverso generalizado, ocupando la herramienta hasta ese momento construida.

2.1. Árboles en funciones scs

Empezamos esta sección estableciendo resultados sobre las funciones scs cuyas gráficas son árboles. Para ello hacemos uso de las funciones que definimos como funciones *escalera*. Comencemos con un lema y le recomendamos al lector retomar la Definición 1.48.

Proposición 2.1. *Sea $h : T \to C([0,1])$ una función scs donde T es un árbol y $h(x)$ es no degenerado sólo para un conjunto finito de puntos, $\mathcal{N}$, de T. Supongamos que, para cada componente C de $T \setminus \mathcal{N}$, la función $(h|_C)^* : C \to [0,1]$ tiene una extensión continua a la cerradura de C. Entonces $\mathcal{G}(h)$ es un árbol.*

Demostración. Sea $\mathcal{N} = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ el subconjunto de T para el cual $h(t_i)$ es no degenerado. Dividimos nuestra prueba en dos casos:

Caso I. $T = [0,1]$.

Sin perder generalidad, supongamos que $t_1 = 0$, $t_n = 1$ y que $t_i < t_{i+1}$, para cada $i = 1, ..., n-1$.

Sea $h_i : [t_i, t_{i+1}] \to [0,1]$ la extensión continua de $(h|_{(t_i,t_{i+1})})^*$, para cada $i = 1, ..., n-1$. Dado que h_i es continua, la gráfica $\mathcal{G}(h_i)$ es un arco, para cada $i = 1, ..., n-1$. Por otro lado,

$$\mathcal{G}(h) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{G}(h_i) \cup \bigcup_{i=1}^{n} \left[\{t_i\} \times h(t_i)\right]. \tag{2.1}$$

Exploremos las intersecciones entre los conjuntos de (2.1),

- Sean $i, j \in \{1, ..., n\}$. Suceden los siguientes casos:
  - $\mathcal{G}(h_j) \cap \mathcal{G}(h_i) = \emptyset$ si $|i-j| > 1$.
  - $\mathcal{G}(h_j) \cap \mathcal{G}(h_i) = \emptyset$ si $j = i+1$ y $h_i(t_{i+1}) \neq h_{i+1}(t_{i+1})$.
  - $\mathcal{G}(h_j) \cap \mathcal{G}(h_i) = h(t_{i+1})$ si $j = i+1$ y las funciones h_i y h_{i+1} coinciden en el extremo t_{i+1}.
- Para cualesquiera $i, j = 1, ..., n$, $[\{t_i\} \times h(t_i)] \cap [\{t_j\} \times h(t_j)] = \emptyset$ si y sólo si $i \neq j$. Para $i = j$, la intersección es el arco $h(t_i)$.
- Para cada $i = 1, ..., n$, $[\{t_i\} \times h(t_i)] \cap \mathcal{G}(h_i) = \{(t_i, h_i(t_i))\}$.
- Para cada $i = 2, ..., n$, $[\{t_i\} \times h(t_i)] \cap \mathcal{G}(h_{i-1}) = \{(t_i, h_{i-1}(t_i))\}$.

Como $\mathcal{G}(h)$ es la unión finita de arcos cuyas intersecciones dos a dos son un punto, un arco o el conjunto vacío, concluimos que $\mathcal{G}(h)$ es un árbol.

En caso de que 0 o bien 1 no sean parte de $\mathcal{N}$, definimos $\overline{h} : [0,1] \to C([0,1])$ como sigue: $\overline{h}(0) = [0,1]$, $\overline{h}(1) = [0,1]$ y $\overline{h}(t) = h(t)$ para los demás puntos. Cabe notar que la función $\overline{h}$ es scs pues, por la Proposición 1.45, estamos añadiendo una colección finita de cerrados a $\mathcal{G}(h)$; a decir, $\{0\} \times [0,1]$ y $\{1\} \times [0,1]$. Al mismo tiempo, dado que $\mathcal{G}(h)$ es un subcontinuo de $\mathcal{G}(\overline{h})$ y

$\mathcal{G}(\overline{h})$ es un árbol, se tiene que $\mathcal{G}(h)$ es un árbol.

Caso II. T es un árbol tal que $T = \bigcup\limits_{s=1}^{m} I_s$ donde I_s es un arco e $I_s \cap I_k$ es a lo más un punto, para cualesquiera $k \neq s$.

Dada $s = 1, ..., m$, $\mathcal{N} \cap I_s$ es un conjunto finito, así que, por el Caso I, $\mathcal{G}(h|_{I_s})$ es un árbol. Además:

$$\mathcal{G}(h) = \bigcup_{s=1}^{m} \mathcal{G}(h|_{I_s}). \tag{2.2}$$

De nuevo, veamos las posibles intersecciones entre los conjuntos de (2.2):

- Si $I_s \cap I_j = \emptyset$, se tiene que $\mathcal{G}(h|_{I_s}) \cap \mathcal{G}(h|_{I_j}) = \emptyset$.
- Si $I_s \cap I_j = \{z\}$, donde $z \notin \mathcal{N}$, entonces $h(z)$ es un conjunto degenerado. Por el Teorema 1.59, $\mathcal{G}(h)$ es un conjunto conexo. De modo que $\mathcal{G}(h|_{I_s}) \cap \mathcal{G}(h|_{I_j}) = \{(z, h(z))\}$; es decir, $h|_{I_s}$ y $h|_{I_j}$ deben de coincidir en este punto.
- Si $I_s \cap I_j = \{t_s\}$ para algún $t_s \in \mathcal{N}$, entonces $\mathcal{G}(h|_{I_s}) \cap \mathcal{G}(h|_{I_j}) = \{t_s\} \times h(t_s)$.

De este modo, $\mathcal{G}(h)$ está expresado como una unión finita de árboles cuyas intersecciones dos a dos resultan en el conjunto vacío, un punto o un arco; es decir, $\mathcal{G}(h)$ es un árbol. □

El siguiente ejemplo muestra que el lema anterior es falso sin la condición de que cada componente tenga una extensión continua.

Ejemplo 2.2. *Sea* $h : [0,1] \to C([0,1])$ *la función scs dada por:*

$$h(t) = \begin{cases} \{|sen\left(\frac{1}{t}\right)|\}, & t \neq 0; \\ [0,1], & t = 0. \end{cases}$$

Entonces $(h|_{(0,1]})^*$ *no tiene una extensión continua a* $[0,1]$.

Demostración. Como se muestra en la figura, h es scs pues su gráfica es un subconjunto cerrado de $[0,1]^2$. Por otro lado, $\mathcal{G}(h|_{(0,1]})$ no tiene una extensión continua al intervalo $[0,1]$ y $\mathcal{G}(h)$ no es un árbol. □

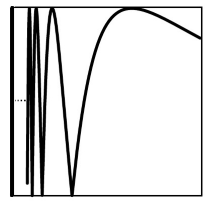

Figura 2.1: Gráfica del Ejemplo 2.2.

Teorema 2.3. *Sea $h : T \to C([0,1])$ una función scs donde T es un árbol. Supongamos que $h(x)$ es no degenerado solo para un conjunto finito de puntos, $\mathcal{N}$, de T y $h(C)$ es degenerado, para cada componente C de $T \setminus \mathcal{N}$. Entonces $\mathcal{G}(h)$ es un árbol.*

Demostración. Sea C una componente de $T \setminus \mathcal{N}$. Por la Proposición 2.1, será suficiente con mostrar que la función $(h|_C)^*$ tiene una extensión continua a $\mathrm{Cl}(C)$. Supongamos que $h(C)$ es el conjunto degenerado $\{\alpha_C\}$. Definimos la función $\mathcal{H} : \mathrm{Cl}(C) \to [0,1]$ como sigue:

$$\mathcal{H}(w) = \alpha_C,$$

para cada $w \in \mathrm{Cl}(C)$. Entonces H es una función continua, pues es una función constante, que extiende a $(h|_C)^*$ sobre $\mathrm{Cl}(C)$. Así, por la Proposición 2.1, $\mathcal{G}(h)$ es un árbol. $\square$

A continuación presentamos un resultado sencillo respecto a cuándo una función scs tiene como gráfica a un arco.

Corolario 2.4. *Sea $h : [0,1] \to C([0,1])$ una función scs tal que $h(x)$ es no degenerado sólo para un conjunto finito de puntos $\mathcal{N} = \{t_1 < t_2 < \cdots < t_n\}$. Supongamos que, para cada intervalo (t_k, t_{k+1}), con t_k y t_{k+1} en $\mathcal{N}$, la función $(h|_{(t_k,t_{k+1})})^*$ tiene una extensión continua $h_k : [t_k, t_{k+1}] \to [0,1]$. Entonces $\mathcal{G}(h)$ es un arco si y sólo si $h_{k-1}(t_k)$ y $h_k(t_k)$ corresponden a los extremos del arco $h(t_k)$, para cada $t_k \in \mathcal{N}$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{G}(h)$ es un arco. Sean $t_k \in \mathcal{N}$ y h_{k-1} la extensión continua de $(h|_{(t_k,t_{k+1})})^*$. Como h_k es una función continua, $\mathcal{G}(h_k)$ es un arco. Supongamos que $h_k(t_{k+1})$ no es un extremo del intervalo $h(t_{k+1})$;

es decir, que $h_k(t_{k+1}) \in \mathrm{Int}(h(t_{k+1}))$. Entonces $\mathcal{G}(h)$ contiene al triodo simple $\mathcal{G}(h_k) \cup [\{t_{k+1}\} \times h(t_{k+1})]$; lo cual es una contradicción. Análogamente, si $h_{k+1}(t_{k+1})$ no es un extremo del intervalo $h(t_{k+1})$, se tiene que $\mathcal{G}(h)$ contiene el triodo simple $\mathcal{G}(h_{k+1}) \cup [\{t_{k+1}\} \times h(t_{k+1})]$, que de nuevo presenta una contradicción. Ahora, si ambos límites coinciden con un extremo del intervalo $h(t_{k+1})$, entonces $\mathcal{G}(h)$ contiene al triodo simple $\mathcal{G}(h_k) \cup \mathcal{G}(h_{k+1}) \cup [\{t_{k+1}\} \times h(t_{k+1})]$, lo cual de nuevo es una contradicción; por lo tanto, $h_k(t_{k+1})$ y $h_{k+1}(t_{k+1})$ son los extremos del intervalo $h(t_{k+1})$.

Para finalizar, supongamos ahora que $h_k(t_{k+1})$ y $h_{k+1}(t_{k+1})$ coinciden con los extremos de intervalo $h(t_{k+1})$, para cada $t_{k+1} \in \mathcal{N}$. Recordemos que,

$$\mathcal{G}(h) = [\{t_1\} \times h(t_1)] \cup \mathcal{G}(h_1) \cup [\{t_2\} \times h(t_2)] \cup \cdots \cup \mathcal{G}(h_{n-1}) \cup [\{t_n\} \times h(t_n)].$$

Dado que esta es una colección finita de arcos los cuales se van pegando mediante sus puntos extremos, podemos concluir que $\mathcal{G}(h)$ es un arco. $\square$

2.2. Funciones escalera

El propósito de esta sección es definir las funciones que son la base de nuestro estudio: *las funciones escalera* y a partir de sus propiedades podremos concluir propiedades del límite inverso generalizado.

Definición 2.5. *Decimos que una función scs y suprayectiva $f : [0,1] \to C([0,1])$ es escalera si existe un subconjunto finito $\mathcal{N} = \{t_1 < t_2 < \cdots < t_n\}$ de $[0,1]$ tal que, para cualesquiera t y t' en la misma componente de $[0,1]\setminus\mathcal{N}$, $f(t)$ es un conjunto degenerado y $f(t) = f(t')$.*

Antes de proseguir con más definiciones y resultados, hagamos una breve pausa. Durante la mayor parte de este trabajo, y como el lector ya habrá notado, uno de los conceptos clave es el de función scs. Una primera pregunta que nos podemos plantear es: ¿Puede una función satisfacer las condiciones de la Definición 2.5 sin ser scs? La respuesta es sí. El siguiente ejemplo muestra tal necesidad.

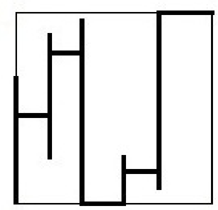

Figura 2.2: Gráfica de una función escalera.

Ejemplo 2.6. *Sea $f : [0,1] \to C([0,1])$ la función dada por:*

$$f(t) = \begin{cases} [3/4, 1], & t = 0, 1; \\ [0, 1/4], & t = 1/2; \\ \{0\}, & t \neq 0, 1/2, 1; \end{cases}$$

Entonces f es suprayectiva y existe un subconjunto finito $\mathcal{N} = \{t_1 < t_2 < \cdots < t_n\}$ de $[0,1]$ tal que para cualesquiera t y t' en la misma componente de $[0,1] \setminus \mathcal{N}$, $f(t) = f(t')$ pero f no es scs.

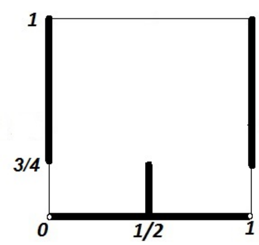

Figura 2.3: Gráfica del Ejemplo 2.6.

Demostración. Claramente f satisface las condiciones que se establecen en la Defnción 2.5, sin embargo, f no es scs pues no es un subconjunto cerrado de $[0,1]^2$. Es por este tipo de funciones que agregamos la condición de scs a la definición de función escalera. □

Definición 2.7. *Dada $f : [0,1] \to C([0,1])$ una función scs. Decimos que f es libre de diagonal si $t \notin f(t)$ para ninguna $0 < t < 1$.*

Al igual que en la Definición 2.5, agregamos la condición de ser scs para nuestros propósitos. El Ejemplo 2.6 proporciona un ejemplo de una función no scs que satisface las condiciones de ser libre de diagonal pero no es scs.

Ahora, dada una función libre de diagonal f, como $f(t)$ es un conexo, para cada $t \in [0,1]$, por el Teorema 1.59, tenemos que $\mathcal{G}(f)$ debe ser un continuo; por tanto, se pueden distinguir dos casos:

- Si $f(t) \subset [0,t)$, para cada $t \in (0,1)$, las llamamos libres de diagonal *inferior*.
- Si $f(t) \subset (t,1]$, para cada $t \in (0,1)$, las llamamos libres de diagonal *superior*.

Así como hicimos en la Proposición 2.1, nos referimos al conjunto de puntos donde la función f es no degenerada como $\mathcal{N} = \{t_1 < t_2 < \cdots < t_n\}$ y denotamos por:

$$f(t_i) = [p_i, q_i], \quad \text{para cada } t_i \in \mathcal{N}. \tag{2.3}$$

Un ejemplo sencillo de una función escalera y libre de diagonal superior es el siguiente.

Ejemplo 2.8. *Sea* $F^* : [0,1] \to C([0,1])$ *la función scs definida por:*

$$F^*(t) = \begin{cases} [0,1], & t = 0; \\ \{1\}, & 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Entonces F^* *es escalera superior libre de diagonal superior.*

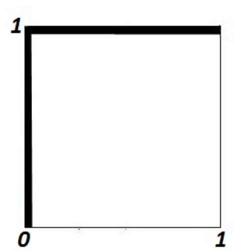

Figura 2.4: Gráfica del Ejemplo 2.8.

Las primeras propiedades básicas de las funciones escalera se dan a continuación.

Proposición 2.9. *Sea f una función escalera. Los siguientes enunciados se satisfacen:*

i) Para cualesquiera $a < b$, existen $[c, d] \subset [a, b]$, con $c < d$, y $t \in [0, 1]$ tales que $[c, d] \subset f(t)$; más aún, existen a' y b' tales que $a < a', b' < b$, así como t y t' en $\mathcal{N}$ tales que $[a, a'] \subset f(t)$ y $[b', b] \subset f(t')$.

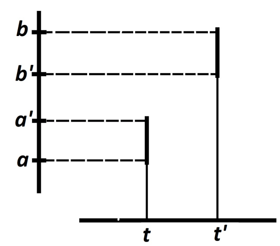

Figura 2.5: Representación de la Proposición 2.9 *i*).

ii) Para cada $E \subset [0, 1] \setminus \mathcal{N}$ no finito, existen a y b en E, con $a < b$, tales que $f|_{[a,b]}$ es constante.

Demostración. Mostremos *i*). Sean a y b en $[0, 1]$, con $a < b$. Como f es una función suprayectiva, escalera y hemos definido en (2.3) que $f(t_i) = [p_i, q_i]$, para cada $t_i \in \mathcal{N}$, se sigue que:

$$[0, 1] = \bigcup_{t_i \in \mathcal{N}} f(t_i) = \bigcup_{t_i \in \mathcal{N}} [p_i, q_i]. \tag{2.4}$$

Por (2.4), existe $t_j \in \mathcal{N}$ para el cual $[a, b] \cap f(t_j)$ es un arco no degenerado $[c, d]$. Esto muestra la primera parte de *i*). Para mostrar la segunda parte, definimos:

$$I = \{i \in \{1, 2, ..., n\} : a \geq p_i\}.$$

Por (2.4), existe $p_{i_0} = 0$, para algún $t_{i_0} \in \mathcal{N}$; por tanto $I \neq \emptyset$.

Afirmación 1. Existe $t_j \in I$ tal que $a < q_j$.

Supongamos que $q_j \leq a$, para cada $t_j \in I$. Entonces

$$[0,1] = \bigcup_{t_i \in \mathcal{N}} [p_i, q_i] = \bigcup_{i \in I} [p_i, q_i] \cup \bigcup_{i \notin I} [p_i, q_i] \subset [0, a] \cup [p_s, 1],$$

donde $p_s = \text{mín}\{p_k : k \notin I\}$. Si $\text{mín}\{p_k : k \notin I\}$ es un conjunto vacío, se obtiene que, por la contención mostrada arriba, $[0,1] \subset [0,a]$ con $a < 1$, lo cual es una contradicción. Si $\text{mín}\{p_k : k \notin I\}$ no es un conjunto no vacío, por la definición de I, $a < p_k$, para cada $k \notin I$. Como I es un conjunto finito, $a < p_s$. Lo cual implica que el intervalo $[0,1]$ está contenido en la unión de dos cerrados ajenos; lo cual es una contradicción. Así, existe $j \in I$ tal que $p_j \leq a < q_j$. Para $a' = \text{mín}\{b, \frac{a+q_j}{2}\}$ obtenemos que $[a, a'] \subset f(t_j)$.

Ahora definimos

$$J = \big\{ i \in \{1, 2, ..., n\} : b \leq q_i \big\}.$$

Por (2.4), existe $q_{i_1} = 1$ para algún $t_{i_1} \in \mathcal{N}$; por tanto $J \neq \emptyset$.

Afirmación 2. Existe $j \in J$ tal que $b > p_j$.

Supongamos que $b \leq p_j$, para cada $j \in J$. Entonces

$$[0,1] = \bigcup_{t_i \in \mathcal{N}} [p_i, q_i] = \bigcup_{i \in J} [p_i, q_i] \cup \bigcup_{i \notin J} [p_i, q_i] \subset [0, q_s] \cup [b, 1],$$

donde $q_s = \text{máx}\{q_k : k \notin J\}$. Si $\text{máx}\{q_k : k \notin J\}$ es un conjunto vacío. Por la contención mostrada arriba, $[0,1] \subset [b,1]$ con $0 < b$, lo cual es una contradicción. Si $\text{máx}\{q_k : k \notin J\}$ no es un conjunto vacío, por la definición de J, $b > q_k$ para cada $k \notin J$. Como J es un conjunto finito, $b > q_s$. De nuevo, esto implica que el intervalo $[0,1]$ no es conexo. Así, existe $j \in J$ tal que $p_j < b \leq q_j$. Para $b' = \text{máx}\{a, \frac{b+p_j}{2}\}$ obtenemos que $[b', b] \subset f(t_j)$.

Mostremos ii). Sea $E \subset [0,1] \backslash \mathcal{N}$ un conjunto no finito. Dado que $E \cap \mathcal{N} = \emptyset$, existen a, b en E, con $a < b$ y t_j, t_{j+1} en $\mathcal{N}$, para los cuales $t_j < a < b < t_{j+1}$. Puesto que f es una función escalera, $f|_{[a,b]}$ es constante. $\square$

Para el segundo inciso de la Proposición 2.9, es claro que no es necesario pedir que E sea infinito, ya que la misma conclusión es posible para cualquier conjunto con una cardinalidad mayor a $\mathcal{N}$ más 2.

De ahora en adelante sólo trabajamos con funciones libres de diagonal superior. Los resultados que obtenemos, así como sus pruebas, se pueden adaptar sin problema para las funciones libres de diagonal inferior. Por esta razón, omitimos tales demostraciones y enunciamos los resultados correspondientes al final de este trabajo.

Para el siguiente teorema necesitamos hacer una pequeña observación. En el momento que definimos a las funciones libres de diagonal, sólo tomamos en cuenta a los términos t en $(0,1)$, esto da pie a varias posibilidades sobre $f(0)$ y $f(1)$. Observemos que puede suecdeer que $f(1) = [0,1]$ y la función siga siendo libre de diagonal. A continuación mostramos un par de resultados que están encaminados en este sentido.

Proposición 2.10. *Sea f una función escalera y libre de diagonal superior. Entonces $f(1) = f^n(1)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea C la componente de $[0,1] \setminus \mathcal{N}$ tal que $1 \in \mathrm{Cl}(C)$. Dado que f es una función escalera, se sigue que $f(C)$ es un conjunto degenerado, digamos $\{t_0\}$. Por otro lado, como f es libre de diagonal superior, $f(t) \subset (t,1]$ para cada $t \in C$. De modo que $t_0 > t$, para cada $t \in C$, lo cual sólo es posible si $t_0 = 1$. Con esto hemos mostrado que $f(t) = \big\{1\big\}$, para cada $t \in C$. Así, dado que f es scs, $1 \in f(1)$.

Sea a el mínimo elemento de $f(1)$; es decir, $f(1) = [a,1]$. Como f es libre de diagonal superior, se sigue que $f(t) \subset [a,1]$, para cada $t \in f(1)$ y, dado que $1 \in f(1)$, podemos concluir que $f^2(1) = f(1)$. Haciendo uso de la inducción se tiene que $f(1) = f^n(1)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. □

El siguiente teorema establece cómo se comportan las gráficas de las iteraciones de una función escalera y libre de diagonal.

Teorema 2.11. *Sea f una función escalera y libre de diagonal superior. Entonces existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{G}(f^s) = (\{0\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times f(1))$.*

Demostración. Sean f una función escalera y libre de diagonal superior y $z \neq 0$. Por la Proposición 2.10, basta con probar que $f^m(z) = \big\{1\big\}$, para algún $m \in \mathbb{N}$. Para ello, denotemos por z_n al mínimo elemento de $f^n(z)$. Dado que f es libre de diagonal superior, $y > t$, para todo $y \in f(t)$. Más aún, observemos que si $t' > t$, se sique que $y > t$, para todo $y \in f(t')$. De este modo, siempre que $z_n \neq 1$, $z_n < z_{n+1}$. Ahora, supongamos que $z_n < 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente; por tanto, la sucesión es convergente a algún $z^* \in [0,1]$. Sean C la componente de $[0,1] \setminus \mathcal{N}$ y $M \in \mathbb{N}$ tales que $z_k \in C$, para cada $k \geq M$. Como f es una función escalera, $f(z_k)$ es un conjunto degenerado y $f(z_k) = f(z_M)$, para cada $k \geq M$. Sea y_0 el único elemento de $f(z_M)$. Entonces $y_0 \in f^{k+1}(z)$, para cada $k \geq M$. Esto implica que $[z_{k+1}, y_0] \subset f^{k+1}(z)$, para cada $k \geq M$. Ahora, dado que f es scs y $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a z^*, se tiene que $y_0 \in f(z^*)$ y por tanto, $y_0 > z^*$. Observemos que para todo $t \in [z_{k+1}, z^*)$, $f(t) = \big\{y_0\big\}$ para todo $t \geq y_0$, $f(t) \subset [y_0, 1]$. Debido a que z_{M+2} es el mínimo elemento de $f^{M+2}(z)$ y $z_{M+2} < y_0$, existe $t^* \in [z^*, y_0]$ tal que $z_{M+2} \in f(t^*)$. Concluyendo así que $z_{M+2} \in f^k(z)$, para cada $k \geq M$, lo cual es una contradicción pues $z_{M+2} < z_{M+3}$.

Si $z = 0$. Como f es scs, por el Teorema 1.59, $\mathcal{G}(f)$ es un continuo. Dado que f es una función libre de diagonal superior, 0 solo puede estar en $f(0)$ o bien en $f(1)$. Por la Proposición 2.9 *i*), existe a' tal que $[0, a'] \subset f(0)$, o bien, $[0, a'] \subset f(1)$. Procedamos por casos.

Caso 1. Si $0 \notin f(0)$.

Entonces $0 \in f(1)$, de forma que, por la Proposición 2.10, $f(1) = [0, 1]$. Sea z_0 es el mínimo elemento de $f(0)$. Por lo hecho previamente, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{m_0}(z_0) = \big\{1\big\}$; por tanto, $f^{m_0+1}(0) = [0, 1]$.

Caso 2. Si $0 \notin f(1)$.

Entonces $0 \in f(0)$, $f(0)$ es un conjunto no degenerado. Sea $z^* \in f(0)$, con $z^* \neq 0$. Por lo hecho previamente, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{m_0}(z^*) = \big\{1\big\}$. Así $\{0, 1\}$ está contenido en el conexo $f^{m_0+1}(0)$, lo cual implica que, $f^{m_0+1}(0) = [0, 1]$.

Para concluir. Sea m_C el número natural tal que $f^{m_C}(z) = \big\{1\big\}$, para todo elemento $z \in C$, donde C es una componente del conjunto $[0, 1] \setminus \mathcal{N}$. Sea n_j un número natural tal que $f^{n_j}(t_j) = \big\{1\big\}$, para cada elemento $t_j \in \mathcal{N}$ y sea m_0 un número natural tal que $f^{m_0+1}(0) = [0, 1]$. Dado que $[0, 1] \setminus \mathcal{N}$ posee un número finito de componentes y $\mathcal{N}$ es un conjunto finito, elegimos $s = \text{máx}\ \{m_C, n_j + 1, m_0 + 1\}$. Entonces $f^{s+1}(t) = f(1)$, para todo $t \neq 0$ y $f^{s+1}(0) = [0, 1]$. Lo cual concluye nuestra prueba. $\square$

Corolario 2.12. *Sea f una función escalera y libre de diagonal superior. Entonces existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{G}(f^n) = (\{0\} \times [0, 1]) \cup ((0, 1] \times f(1))$, para cada $n \geq s$.*

Demostración. Por el Teorema 2.11, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{G}(f^s) = (\{0\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times f(1))$. Por la Proposición 2.10, $f^n(1) = f(1)$, para toda $n \in \mathbb{N}$ y, como f es suprayectiva, $f^n(0) = [0,1]$, para cada $n \geq 1$; por tanto, $f^n(t) = f(1)$, para cada $t \in (0,1]$ y $n \geq s$. Lo cual concluye nuestra prueba. □

Corolario 2.13. *Sea f una función escalera. Entonces f es libre de diagonal superior con $f(1) = \{1\}$ si y sólo si existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $f^s = F^*$, donde F^* es la función definida en el Ejemplo 2.8.*

Demostración. Sea f una función escalera. Si f es libre de diagonal superior tal que $f(1) = \{1\}$, la existencia del natural s tal que $f^s = F^*$ es una consecuencia inmediata del Teorema 2.11 y la definición del Ejemplo 2.8.

Sea $s \in \mathbb{N}$ tal que $f^s = F^*$. Notemos que si $t \in [0,1]$, es tal que $t \in f(t)$, entonces $t \in f^n(t)$, para cada $n \in \mathbb{N}$; por tanto, si $t \in f(t)$ y $f^s = F^*$, por la definición de F^* del Ejemplo 2.8, se sigue que $t = 0$ o bien $t = 1$. De este modo, para cualquier $t \in (0,1)$, ya que $f(t)$ es conexo y $t \notin f(t)$, $f(t) \subset (t,1]$ o bien $f(t) \subset [0,t)$. Supongamos que existen t y t' en $(0,1)$, con $t < t'$, tales que $f(t) \subset [0,t)$ y $f(t') \subset (t',1]$. Por el Teorema 2.3, la gráfica $\mathcal{G}(f|_{[t,t']})$ es arcoconexa. De manera que existe $t < t'' < t'$, tal que $t'' \in f(t'')$, lo cual, como hemos mencionado es imposible. Si $f(t) \subset [0,t)$, para cada $t \in [0,1)$, en particular, $f(1/2) \subset [0,1/2)$. Así, para cada $t \in f(1/2)$, $f(t) \subset [0,1/2)$. De modo que $f^2(1/2) \subset [0,1/2)$ y utilizando inducción obtenemos que $f^n(1/2) \subset [0,1/2)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradicción pues $f^s(1/2) = F^*(1/2) = \{1\}$. Por lo tanto, $f(t) \subset (t,1]$, para todo $t \in (0,1)$; es decir, f es libre de diagonal superior. Como $f^s = F^*$, $f^s(1) = \{1\}$, de modo que por la Proposición 2.10, $f(1) = \{1\}$. Esto concluye nuestra prueba. □

Reflexionando un poco. El Corolario 2.13 tiene una doble implicación cuando se supuso la existencia de $s \in \mathbb{N}$ que hacía que $f^s = F^*$. La pregunta natural sería: ¿El Teorema 2.11 también la tiene?, ¿Si f es una función escalera y existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{G}(f^s) = (\{0\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times f(1))$. Entonces f es libre de diagonal superior? La respuesta es negativa. El siguiente ejemplo señala esta situación.

Ejemplo 2.14. *Sea $f : [0,1] \to C([0,1])$ la función scs definida por:*

$$f(t) = \begin{cases} \{1/2\}, & 0 \leq t < 1/2; \\ \{0\}, & 1/2 < t < 1; \\ [0,1]\,, & t = 1/2, 1; \end{cases}$$

Entonces existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{G}(f^s) = (\{0\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times f(1))$, pero, f no es libre de diagonal superior.

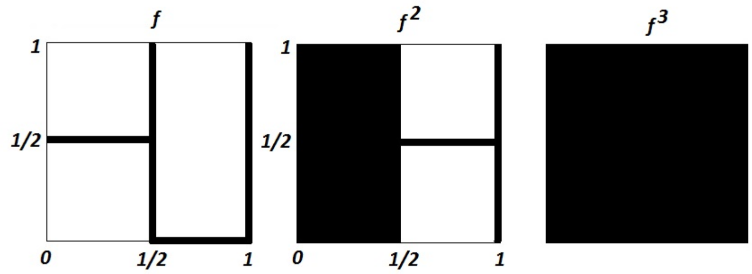

Figura 2.6: Gráfica del Ejemplo 2.14.

Demostración. En la figura de la función del Ejemplo 2.14 se muestran las primeras tres iteraciones de la función escalera f. Observemos que $\mathcal{G}(f^3) = (\{0\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times f(1))$ miéntras que f no es libre de diagonal superior pues $1/2 \in f(1/2)$. □

En la siguiente proposición construimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, una función escalera f_n para la cual $\mathcal{G}(f_n)^{n+1} = (\{0\}\times[0,1])\cup([0,1]\times f(1))$, pero $\mathcal{G}(f_n)^n \neq (\{0\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times f(1))$. Esto es con el fin de que el lector conozca que no hay cotas superior para el valor del número natural s que establece el Corolario 2.13.

Proposición 2.15. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una función escalera f_n tal que $(f_n)^{n+1} = F^*$ pero $(f_n)^n \neq F^*$.*

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ la sucesión de números reales dada por $a_k = \frac{k}{k+1}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Definimos $f_n : [0,1] \to C([0,1])$ como:

$$f_n(t) = \begin{cases} [0,1] & \text{si } t = 0; \\ [a_{k+1}, 1] & \text{si } t = a_k, \text{ para cada } k = \{1, ...n\}; \\ \{1\} & \text{en otro caso;} \end{cases}$$

Observemos que $a_1 = 1/2$ y $a_{k+1} \in f_n(a_k)$, para cada $k \leq n$. De manera inductiva, obtenemos que $(f_n)^n(1/2) = [a_{n+1}, 1]$. Así, $(f_n)^n \neq F^*$ y dado que $f_n|_{[a_{n+1},1]} = \big\{1\big\}$, se tiene que $(f_n)^{n+1} = F^*$. □

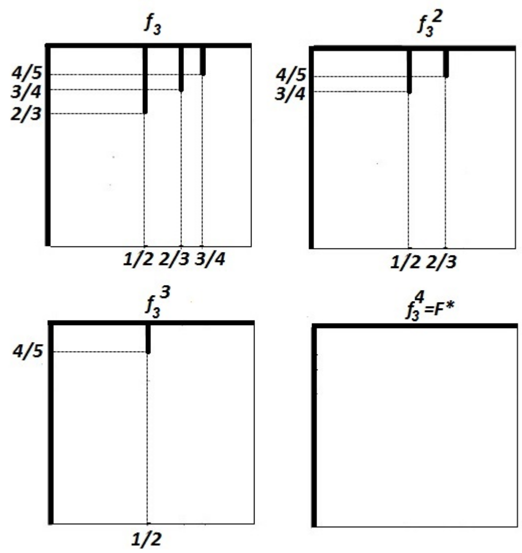

Figura 2.7: Las primeras 3 iteraciones de f_3.

Obtengamos las primeras propiedades de los límites inversos generalizados con este tipo de funciones.

Teorema 2.16. *Sean f una función escalera y libre de diagonal superior tal que $f(1) = \{1\}$ y un subconjunto cerrado H de $\varprojlim \boldsymbol{f}$ tales que $\overline{\boldsymbol{1}} \notin H$. Entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{\boldsymbol{1}_n} \notin P_n(H)$, para ninguna $n \geq M$; donde P_n es la función definida en (1.5); más aún, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $\boldsymbol{x} \in H$, $x_n = 0$, para cada $n \geq N$; donde x_n representa la n-ésima proyección del elemento $\boldsymbol{x}$.*

Demostración. Supongamos que el teorema es falso; por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $\boldsymbol{x}^n \in H$ y $m_n \geq n$ tales que $P_{m_n}(\boldsymbol{x}^n) = \overline{\mathbf{1}_{m_n}}$. De modo que $P_n(\boldsymbol{x}^n) = \overline{\mathbf{1}_n}$. Es claro que la sucesión $\{\boldsymbol{x}^n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ converge a $\overline{\mathbf{1}}$ y como H es un subconjunto cerrado, $\overline{\mathbf{1}} \in H$; lo cual es una contradicción.

Para la segunda parte. Supongamos, de nuevo, que la afirmación es falsa; por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $\boldsymbol{x}^n \in H$ y $m_n \geq n$, para los cuales $x^n_{m_n} \neq 0$, donde $x^n_{m_n}$ representa la m_n-ésima proyección del elemento $\boldsymbol{x}^n$. Como f es libre de diagonal superior, suprayectiva y $f(1) = \{1\}$, 0 sólo pertenece a la imagen de $f(0)$, de modo que $x^n_n \neq 0$. Por el Corolario 2.13, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $f^s = F^*$. Así, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande,

$P_{n-s}(\boldsymbol{x}^n) = \overline{\mathbf{1}_{n-s}}$. Lo que implica, de nuevo, que la sucesión $\{\boldsymbol{x}^n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\overline{\mathbf{1}}$, lo cual es una contradicción. Esto demuestra nuestro Teorema. $\square$

Corolario 2.17. *Sean f una función escalera, libre de diagonal superior tal que $f(1) = \{1\}$ y H un subconjunto cerrado de $\underleftarrow{\mathrm{límg}}\, \boldsymbol{f}$ tales que $\overline{\mathbf{1}} \notin H$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que H es homeomorfo a $P_n(H)$, para cada $n \geq N$.*

Demostración. Por el Teorema 2.16, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $\boldsymbol{x} \in H$, $x_n = 0$, para cada $n \geq N$. Consideremos $P_n|_H : H \to P_n(H)$, con $n \geq N$. Así, para cualesquiera $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ en H con $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, $x_k \neq y_k$, para algún $k < n$; ya que para todos los índices mayores a N son 0,; por tanto, $P_n|_H$ es biyectiva. Puesto que las proyecciones P_n son continuas y H es compacto, $P_n|_H$ es un homemorfismo, para cada $n \geq N$. $\square$

Corolario 2.18. *Sea f una función escalera y libre de diagonal superior tal que $f(1) = \{1\}$. Entonces $\overline{\mathbf{1}}$ no es un punto de corte de $\underleftarrow{\mathrm{límg}}\, \boldsymbol{f}$.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos:

$$E_n = \left\{\boldsymbol{x} \in \underleftarrow{\mathrm{límg}}\, \boldsymbol{f} : x_m = 0, \text{ para cada } \ m \geq n\right\}.$$

Entonces:

- $\underleftarrow{\mathrm{límg}}\, \boldsymbol{f} \setminus \{\overline{\mathbf{1}}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Sea $\boldsymbol{x} \in \underleftarrow{\mathrm{límg}}\, \boldsymbol{f} \setminus \{\overline{\mathbf{1}}\}$. Si hacemos $H = \{\boldsymbol{x}\}$, obtenemos que H es un conjunto cerrado tal que $\overline{\mathbf{1}} \notin H$. Así, por el Teorema 2.16, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $\boldsymbol{x} \in H$, $x_n = 0$, para cada $n \geq N$; por lo tanto, $\boldsymbol{x} \in E_N$. Por la definición de los conjunto E_n se tiene que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \underleftarrow{\mathrm{límg}}\, \boldsymbol{f}$.
- E_n es conexo, para cada $n \in \mathbb{N}$. En este punto es conveniente recordar las Definiciones dada en (1.6) y (1.7) en la Definición 1.52 y hacer notar lo siguiente: Para cada $\boldsymbol{x} \in E_n$, se tiene que $x_{n-1} \in f(0)$. En otras palabras $E_n = G(f_1, f_2, ..., f_{n-1})$ donde $f_i = f$, para cada $i = 1, ..., n-2$ y $f_{n-1} = f|_{f(0)}$. Dado que cada f_i es scs y $f(0)$ es conexo, por los Teoremas 1.56 y 1.58, tenemos que E_n es conexo.
- $E_n \subset E_{n+1}$. Se sigue de la definición del conjunto E_n.

Por lo tanto, $\underleftarrow{\mathrm{límg}}\, \boldsymbol{f} \setminus \{\overline{\mathbf{1}}\}$ es conexo. $\square$

Definición 2.19. *Sea* $n \in \mathbb{N}$. *Definimos* $\kappa_n : \prod_{k=1}^{n} [0,1]_k \to \prod_{k=1}^{n} [0,1]_k$ *como la función tal que:*

$$\kappa_n(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_n, ..., x_2, x_1) \tag{2.5}$$

Es decir, la k-ésima coordenada de $\kappa_n(\boldsymbol{x})$ es x_{n+1-k}, para cada $k = 1, ..., n$. Es inmediato observar que κ_n es un homeomorfismo, para cada $n \in \mathbb{N}$. Dadas una función scs $f : [0,1] \to C([0,1])$ y $n \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto:

$$A_n = \Big\{\boldsymbol{x} \in \prod_{k=1}^{n+1}[0,1]_k : x_{j+1} \in f(x_j), \text{ para cada } j = 1, ..., n\Big\}. \tag{2.6}$$

Sea $h_n : \prod_{k=1}^{n+1}[0,1]_k \to C([0,1])$ que en $\boldsymbol{x}$ toma el valor:

$$h_n(\boldsymbol{x}) = f(x_{n+1}), \tag{2.7}$$

y denotamos al producto finito y numerable del conjunto $\mathcal{N}$, respectivamente, por:

$$\mathcal{N}^n \quad \text{y} \quad \mathcal{N}^\infty. \tag{2.8}$$

Proposición 2.20. *Sea* $f : [0,1] \to C([0,1])$ *una función scs. Entonces:*

i) $\mathcal{G}(f) = A_1$.

ii) A_n *es un continuo,* h_n *es scs y* $\mathcal{G}(h_n|_{A_n}) = A_{n+1}$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

iii) $\kappa_{n+1}(A_n) = G_n$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$; *donde* G_n *es el conjunto definido en (1.7).*

Demostración. Mostremos i).

$$A_1 = \big\{\boldsymbol{x} \in [0,1]^2 : x_2 \in f(x_1)\big\} = \big\{(x,y) \in [0,1]^2 : y \in f(x)\big\} = \mathcal{G}(f).$$

Mostremos ii). Como f es suprayectiva:

$$\begin{aligned}
A_{n+1} &= \{\boldsymbol{x} \in \prod_{k=1}^{n+2}[0,1]_k : x_{j+1} \in f(x_j), \text{ para cada } j = 1, ..., n+1\} \\
&= \{\boldsymbol{x} \in \prod_{k=1}^{n+2}[0,1]_k : x_{n+2} \in f(x_{n+1}) \text{ y } \boldsymbol{x}' = (x_1, ..., x_{n+1}) \in A_n\} \\
&= \{\boldsymbol{x} \in \prod_{k=1}^{n+1}[0,1]_k : x_{n+2} \in h_n(\boldsymbol{x}') \text{ y } \boldsymbol{x}' \in A_n\} \\
&= \{(\boldsymbol{x}', y) \in A_n \times [0,1] : y \in h_n(\boldsymbol{x}')\} \\
&= \mathcal{G}(h_n|_{A_n})
\end{aligned}$$

Dado que f es una función scs, por el Teorema 1.59, A_1 es un continuo. Como las funciones proyección son continuas, por el Corolario 1.50, h_n es una función scs. Ahora bien, como $A_{n+1} = \mathcal{G}(h_n|_{A_n})$, por el Teorema 1.59 y haciendo uso de la inducción se sigue que A_n es un continuo, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Mostremos *iii*). Dado que la función κ_n intercambia las coordenadas del elemento $\boldsymbol{x}$, donde la k-ésima coordenada la manda a la $(n+1-k)$-ésima coordenada, entonces, si $x_{k+1} \in f(x_k)$ se tiene que la k-ésima coordenada de $\kappa_n(\boldsymbol{x}$ pertenece a la imagen de la $k+1$ésima coordenada de $\kappa_n(\boldsymbol{x}$. Por tanto:

$$\begin{aligned}
\kappa_{n+1}(A_n) &= \{\kappa_{n+1}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in A_n\} \\
&= \{\boldsymbol{x} \in \prod_{k=1}^{n+1}[0,1]_k : x_j \in f(x_{j+1}), \text{ para cada } j = 1, ..., n\} \\
&= G_n
\end{aligned}$$

□

Más propiedades del conjunto A_n se enuncian a continuación cuando f es una función escalera.

Teorema 2.21. *Sea f una función escalera. Entonces A_n es localmente conexo, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Hagamos la prueba por inducción sobre n. Para $n = 1$. Por las Proposiciones 2.20 y 2.1, $\mathcal{G}(f)$ es un árbol. De modo que $A_1 = \mathcal{G}(f)$ es localmente conexo. Supongamos que A_n es localmente conexo. Mostremos que A_{n+1} es localmente conexo. Sean U un abierto de A_{n+1} y $\boldsymbol{x} \in U$. Sin perder generalidad, supongamos que $U = V \cap A_{n+1}$, donde $V = \prod_{k=1}^{n+2} I_k$ e I_k es abierto en $[0,1]$, para cada $k = 1, ..., n+2$. Para cada $t_i \in \mathcal{N}$, definimos:

$$\boldsymbol{x}' = P_{n+1}^{n+2}(\boldsymbol{x}) \text{ y } V' = P_{n+1}^{n+2}(V) = \prod_{k=1}^{n+1} I_k \text{ y } \mathcal{E}^i = \big\{\boldsymbol{z} \in A_n : z_{n+1} = t_i\big\}.$$

Entonces, por definición de A_n, $\boldsymbol{x}'$ está en A_n. Se satisfacen las siguientes propiedades:

- $\mathcal{E}^i$ es cerrado en A_n, para cada $t_i \in \mathcal{N}$. Esto se debe a que A_n es cerrado y sus elementos tienen la entrada $n+1$ constante.
- $\mathcal{E}^i \cap \mathcal{E}^j = \emptyset$, siempre que $i \neq j$. Esta propiedad se sigue de inmediato por la definición de los conjuntos $\mathcal{E}^i$.

Sea

$$\mathcal{E} = \bigcup_{t_i \in \mathcal{N}} \mathcal{E}^i.$$

Dado que cada $\mathcal{E}^i$ es cerrado y $\mathcal{N}$ es un conjunto finito, $\mathcal{E}$ es cerrado. Anali-

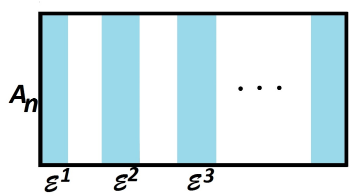

Figura 2.8: Representación de A_n.

cemos los posibles casos para el elemento $\boldsymbol{x}'$ de A_n:

Caso 1. $\boldsymbol{x}' \in A_n \setminus \mathcal{E}$.

Dado que $\boldsymbol{x}'$ no pertenece a $\mathcal{E}$, se sigue que x'_{n+1} no pertenece a $\mathcal{N}$. Sea C la componente abierta de $[0,1] \setminus \mathcal{N}$ tal que $x'_{n+1} \in C$. Como A_n es localmente conexo y las proyecciones son continuas, existe un abierto y conexo O en A_n tal que $\boldsymbol{x}' \in O$ y $z_{n+1} \in C$, para cada $\boldsymbol{z} \in O$. Por otro lado, dado que f es una función escalera, $f(t) = f(t')$, para cualesquiera t y t' en C; por tanto, de la definición de h_n, se tiene que $h_n(\boldsymbol{z}) = h_n(\boldsymbol{x}')$, para cada $\boldsymbol{z} \in O$. De este modo:

$$O \times \{h_n(\boldsymbol{x}')\} = [O \times I_{n+2}] \cap A_{n+1} \subset [V' \times I_{n+2}] \cap A_{n+1} = U,$$

donde $[O \times I_{n+2}] \cap A_{n+1}$ es un abierto en A_{n+1}; por lo tanto, $O \times \{h_n(\boldsymbol{x}')\}$ es un abierto y conexo que contiene a $\boldsymbol{x}$ y está contenido en U.

Caso 2. $\boldsymbol{x}' \in \mathrm{Int}_{A_n} \mathcal{E}^j$, para algún $t_j \in \mathcal{N}$.

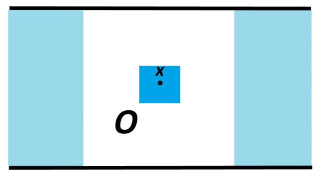

Figura 2.9: Caso 1.

Dado que A_n es localmente conexo, existe un abierto y conexo O en A_n tal que $\boldsymbol{x}' \in O \subset [\mathrm{Int}_{A_n} \mathcal{E}^j \cap V']$; por tanto, de la definición de $\mathcal{E}^j$, $z_{n+1} = t_j$, para cada $\boldsymbol{z} \in O$. Elegimos un conjunto abierto y conexo J en $f(t_j)$ tal que $x_{n+2} \in J \subset [I_{n+2} \cap f(t_j)]$. Entonces $O \times J$ es un conexo y abierto en A_{n+1} que contiene a $\boldsymbol{x}$ y está contenido en U.

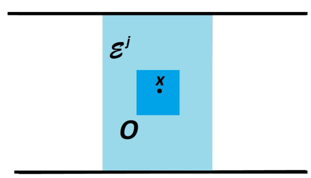

Figura 2.10: Caso 2.

Caso 3. $\boldsymbol{x}' \in \mathrm{Fr}_{A_n}(\mathcal{E}^j)$, para algún $t_j \in \mathcal{N}$.

Como cada $\mathcal{E}^i$ es cerrado, es posible elegir un abierto V' de tal forma que $[V' \cap A_n] \cap \mathcal{E}^k = \emptyset$, si $k \neq j$. Como A_n es localmente conexo, existe un abierto y conexo O en A_n tal que $\boldsymbol{x}' \in O \subset V' \cap A_n$. Dada la elección de V', se sigue que $O \setminus \mathcal{E}^j = O \setminus \mathcal{E}$ y, argumentando del mismo modo que el Caso 1, se sigue que $h_n(O \setminus \mathcal{E}^j)$ es un conjunto finito. Por el Teorema 1.57, $\mathcal{G}(h_n|_{A_n})$ es conexa; por tanto, $h_n(O \setminus \mathcal{E}^j) \subset f(t_j)$. Por el Caso 2, existe un abierto y conexo $J \subset I_{n+2}$ de $f(t_j)$ tal que $x_{n+2} \in J$ y $h_n(O \setminus \mathcal{E}^j) \subset J$. De modo que:

$$[O \times J] \cap A_{n+1} = \left[(O \setminus \mathcal{E}^j) \times h_n(O \setminus \mathcal{E}^j)\right] \cup \left[(\mathcal{E}^j \cap O) \times J\right]$$

es un abierto y conexo en A_{n+1} que contiene a $\boldsymbol{x}$ y está contenido en U.

Por lo tanto, A_{n+1} es localmente conexo. $\square$

El siguiente ejemplo ilustra a los conjuntos definidos en el Teorema 2.21

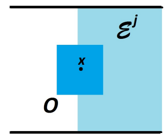

Figura 2.11: Caso 3.

en el espacio A_2. Expresamos a los conjuntos $\mathcal{E}^i$, así como a sus interiores, respectivamente. Esperando que sea de utilidad para el lector.

Ejemplo 2.22. *Sea* $f : [0,1] \to C([0,1])$ *la función dada por:*

$$f(t) = \begin{cases} [0,1/2], & t = 0; \\ \{1/2\}, & 0 < t < 1/2; \\ [1/2,1]\,, & t = 1/2, 1; \\ \{1\}, & 1/2 < t < 1. \end{cases}$$

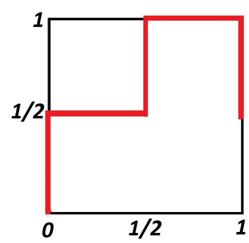

Figura 2.12: Gráfica de f del Ejemplo 2.22 (A_1).

En este ejemplo, $\mathcal{N} = \{t_1, t_2, t_3\}$, donde $t_1 = 0, t_2 = 1/2$ y $t_3 = 1$. Entonces:

$$\mathcal{E}^1 = \{(0,0,0)\};$$

$$\mathcal{E}^2 = \{(\{0\} \times [0,1/2]) \cup ([0,1/2] \times \{1/2\}) \cup ([1/2,1] \times \{1\})\} \times \{1/2\};$$

$$\mathcal{E}^3 = \{\mathcal{G}(f) \setminus (\{0\} \times [0,1/2))\} \times \{1\}.$$

Para los cuáles:

$$\mathrm{Int}_{A_2}\, \mathcal{E}^1 = \emptyset;$$

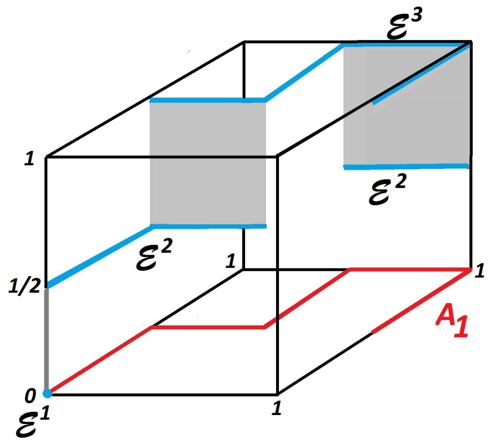

Figura 2.13: A_2 para el Ejemplo 2.22.

$$\mathrm{Int}_{A_2}\, \mathcal{E}^2 = \{0\} \times [0,1/2] \times \{1/2\};$$
$$\mathrm{Int}_{A_2}\, \mathcal{E}^3 = \{1/2\} \times [1/2,1] \times \{1\}.$$

Como se puede notar, los conjuntos $\mathcal{E}^i$ no siempre resultan en conjuntos conexos.

2.3. ¿Y si f y f^2 son funciones escalera?

Una pregunta que el lector pudo haberse hecho es la siguiente: ¿Dada una función escalera f, será que f^2 es una función escalera? A continuación, presentamos un ejemplo que responde de manera negativa.

Ejemplo 2.23. *Sea $f : [0,1] \to C([0,1])$ la función escalera definida por:*

$$f(t) = \begin{cases} [0,1], & t = 0; \\ \{0\}, & 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Entonces f^2 no es una función escalera.

Demostración. Dado que $f(0) = [0,1]$, $f^2(0) = [0,1]$. Por otro lado, si $t \in (0,1]$, $f(t) = \{0\}$, de donde $f^2(t) = f(f(t)) = f(\{0\}) = [0,1]$; es decir,

$f^2(t) = [0,1]$, para toda $t \in [0,1]$. La cual no cumple la definición de ser una función escalera, debido a que f^2 tiene una cantidad infinita de valores donde nos arroja un conjunto no degenerado. $\square$

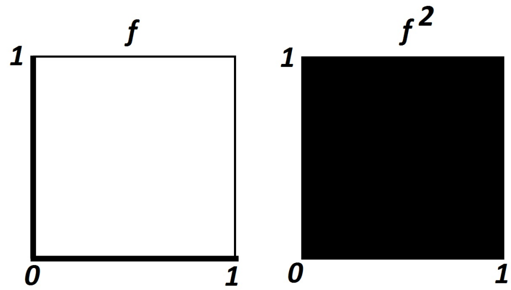

Figura 2.14: Gráficas de f (izquierda) y f^2 (derecha) del Ejemplo 2.23.

Tenemos entonces un ejemplo de una función escalera f tal que f^2 no es una función escalera. Ahora bien, ¿Y al revés? ¿Si f^2 es una función escalera. Entonces f es una función escalera? La respuesta también es negativa y la ilustramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.24. *Sea $f : [0,1] \to C([0,1])$ la función scs definida por:*

$$f(t) = \begin{cases} [0,1], & t = 0; \\ [3/4, 1], & 0 < t \leq 1/2; \\ \{1\}, & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Entonces f^2 es una función escalera pero f no es una función escalera.

Demostración. Dado que $f([3/4,1]) = \{1\}$ y $f(1) = \{1\}$, entonces $f^2 = F^*$; donde F^* es la función definida en el Ejemplo 2.8, la cual es una función escalera. Sin embargo f no es una función escalera, pues contiene una infinidad de puntos t en el intervalo $[0,1]$ para los cuales $f(t)$ es un conjunto no degenerado. $\square$

Sin embargo, basta con que f y f^2 sean funciones escalera para que f^n sea una función escalera, para cada $n \in \mathbb{N}$. A continuación enunciamos y probamos tal afirmación.

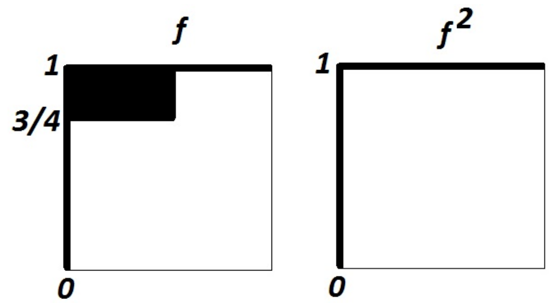

Figura 2.15: Gráficas de f (izquierda) y f^2 (derecha) del Ejemplo 2.24

Proposición 2.25. *Sea f una función escalera tal que f^2 es una función escalera. Los siguientes enunciados se satisfacen:*

i) Si $t_i \in f(t)$, para algún $t_i \in \mathcal{N}$. Entonces $t \in \mathcal{N}$. En palabras, los elementos del conjunto $\mathcal{N}$ sólo pueden pertenecer a la imagen de los elementos de $\mathcal{N}$.

ii) f^n es una función escalera, para cada $n \geq 3$.

Demostración. Hagamos la prueba del primer enunciado. Sea $t_i \in \mathcal{N}$ tal que $t_i \in f(t)$. Supongamos que $t \notin \mathcal{N}$. Sea C^* la componente de $[0,1] \setminus \mathcal{N}$ para la cual $t \in C^*$. Como f es una función escalera, por la Proposición 2.9, $f(t) = f(t')$, para cualquier t' en C^*. Así, $t_i \in f(t')$, para cada $t' \in C^*$, o bien, $(t', s) \in \mathcal{G}(f^2)$, para cada $t' \in C^*$ y $s \in f(t_i)$; es decir, el conjunto $C^* \times f(t_i) \subset \mathcal{G}(f^2)$; lo cual es una contradicción pues por el Teorema 2.3, $\mathcal{G}(f^2)$ es un árbol; por lo tanto, $t \in \mathcal{N}$.

Hagamos la prueba del segundo enunciado. Para mostrar que cada iteración de la función f es una función escalera, será suficiente con exhibir que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un conjunto finito de puntos del intervalo $[0,1]$, para los que la función f^k es un conjunto no degenerado. De hecho, mostramos que, para cada una de las componentes C de $[0,1] \setminus \mathcal{N}$, $f^k(C)$ es un conjunto degenerado. Sean C una de tales componentes y $z \in C$. Supongamos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(z)$ es no un conjunto degenerado, donde m es el mínimo número natural con tal cualidad; por tanto, $f(z), \ldots, f^{m-1}(z)$ son conjuntos degenererados y $f^m(z)$ no lo es. Dado que f es una función escalera, $f^{m-1}(z) \in \mathcal{N}$. Continuando de esta forma y dado que vamos en forma regresiva, llegamos a la conclusión de que $z \in \mathcal{N}$; lo cual es una contradicción, por la elección de z. De este modo, f^n es una función escalera, para cada $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Para la siguiente proposición es necesario recordar que, en (2.3), se estableció que $f(t_k) = [p_k, q_k]$, para cada $t_k \in \mathcal{N}$ y que cada función escalera considerada en los enunciados son funciones suprayectivas.

Proposición 2.26. *Sea f una función escalera tal que f^2 es una función escalera. Entonces para cada $t_i \in \mathcal{N}$, con $0 < t_i < 1$, existe $t_s \in \mathcal{N}$ tal que $t_i \in (p_s, q_s)$.*

Demostración. Sea $t_i \in \mathcal{N}$ tal que $0 < t_i < 1$. El enunciado se sigue de inmediato si existe $t_s \in \mathcal{N}$, tal que $f(t_s) = [0, 1]$. Supongamos que $f(t_s) \neq [0, 1]$, para toda $t_s \in \mathcal{N}$. Supongamos que el resultado es falso. Como f es suprayectiva, $t_i \in f(t)$, para algún $t \in [0, 1]$ y, por la Proposición 2.25, $t \in \mathcal{N}$. Así por (2.3), t_i es un punto extremo del intervalo $[p_k, q_k]$, para algun $t_k \in \mathcal{N}$ tal que $t_i \in f(t_k)$. Definimos:

$$\mathcal{L} = \big\{k \in \{1, 2, ..., n\} : t_i = p_k\big\} \quad \text{y} \quad \mathcal{R} = \big\{k \in \{1, 2, ..., n\} : t_i = q_k\big\}.$$

Cabe notar que t_i no puede ser el extremo derecho ni el extremo izquierdo de todos los intervalos $[p_k, q_k]$. Si t_i fuera el extremo derecho de todos estos intervalos, obtenemos que $[p_k, q_k] \subset [0, t_i]$ y ya que, de (2.4), $[0, 1] = \bigcup_{t_k \in \mathcal{N}} [p_k, q_k] \subset [0, t_i]$ tenemos una contradicción. Si t_i fuera el extremo izquierdo de todos estos intervalos, entonces $[p_k, q_k] \subset [t_i, 1]$ y ya que, de(2.4), $[0, 1] = \bigcup_{t_k \in \mathcal{N}} [p_k, q_k] \subset [t_i, 1]$ tenemos una contradicción. Observemos que para ambos casos, la contradicción recae en el hecho de que $0 < t_i < 1$; por lo tanto, $\mathcal{L} \neq \emptyset$ y $\mathcal{R} \neq \emptyset$. Una vez que sabemos que $\mathcal{L}$ es no vacío, elijamos $m_0 \in \mathcal{L}$ (Se procede de manera similar si se elije $m_0 \in \mathcal{R}$). Alguno de los siguientes casos se cumple:

Caso 1. $\mathcal{R} \cap \{k \in \{1, 2, ..., n\} : m_0 \leq k\} \neq \emptyset$.

Sea s el mínimo en esta intersección. Entonces $t_i = p_{s-1}$ y, como pertenece a $\mathcal{R}$, $t_i = q_s$. Dado que f es una función escalera, $f(z) = \big\{t_i\big\}$, para cada $t_{s-1} < z < t_s$. De modo que $f^2(z) = f(t_i)$, para cada $z \in (t_{s-1}, t_s)$. Así para

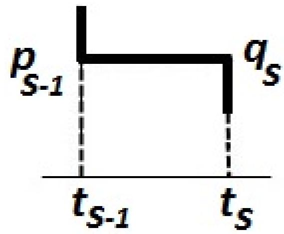

Figura 2.16: $\mathcal{R} \cap \{k \in \{1, 2, ..., n\} : k \geq m_0\} \neq \emptyset$.

cualquier $z \in (t_{s-1}, t_s)$, se tiene que $f^2(z)$ es un conjunto no degenerado; lo cual es una contradicción pues f^2 es una función escalera.

Caso 2. $\mathcal{R} \cap \{k \in \{1, 2, ..., n\} : k \leq m_0\} \neq \emptyset$.

Sea s el máximo en esta intersección. Entonces $t_i = p_{s+1}$ y, como pertenece a $\mathcal{R}$, $t_i = q_s$. Dado que f es una función escalera, $f(z) = \{t_i\}$, para cada $t_s < z < t_{s+1}$. De modo que $f^2(z) = f(t_i)$, para cada $z \in [t_s, t_{s+1}]$. Así para cualquier $z \in (t_s, t_{s+1})$, se tiene que $f^2(z)$ es un conjunto no degenerado; lo cual es una contradicción pues f^2 es una función escalera.

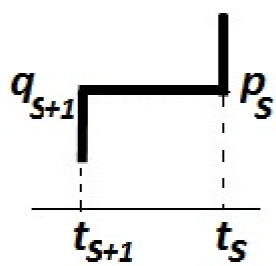

Figura 2.17: $\mathcal{R} \cap \{k \in \{1, 2, ..., n\} : k \leq m_0\} \neq \emptyset$.

De lo anterior obtenemos que $t_i \in (p_s, q_s)$, para alguna $t_s \in \mathcal{N}$. Esto concluye nuestra prueba. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que el recíproco de la Proposición 2.26 es falsa.

Ejemplo 2.27. *Sea $f : [0,1] \to C([0,1])$ la función escalera definida por:*

$$f(t) = \begin{cases} \{0\}, & 0 \leq t < 1/3; \\ [0, 2/3], & t = 1/3; \\ \{2/3\}, & 1/3 < t < 2/3; \\ [1/2, 1], & t = 2/3; \\ \{1\}, & 2/3 < t \leq 1. \end{cases}$$

Entonces para cada $t_i \in \mathcal{N}$, con $0 < t_i < 1$, existe $t_s \in \mathcal{N}$ tal que $t_i \in (p_s, q_s)$, pero f^2 no es una función escalera.

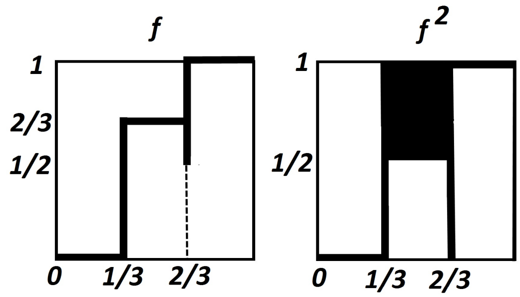

Figura 2.18: Gráficas de f (izquierda) y f^2 (derecha) del Ejemplo 2.27.

Demostración. Para esta función, $1/3 \in (0, 2/3)$ y $2/3 \in (1/2, 1)$. Sin embargo f^2 no es una función escalera pues, para cada $t \in (1/3, 2/3)$, $f^2(t) = f(\{2/3\}) = [1/2, 1]$; es decir, para f^2 hay una infinidad de valores para los cuales es no degenerada. $\square$

Proposición 2.28. *Sean f una función escalera tal que f^2 es una función escalera y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{\boldsymbol{x} \in A_n : x_{n+1} \in \mathcal{N}\}$ es finito, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in A_n : x_{n+1} \in \mathcal{N}\}$. Dado que $\boldsymbol{x} \in A_n$, $x_{n+1} \in f(x_n)$. Como $x_{n+1} \in \mathcal{N}$, por la Proposición 2.25, obtenemos que $x_n \in \mathcal{N}$ y asi, de manera regresiva, obtenemos que $x_k \in \mathcal{N}$, para cada $k = 1, \ldots, n+1$; es decir, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{N}^{n+1}$. Por tanto, $\{\boldsymbol{x} \in A_n : x_{n+1} \in \mathcal{N}\} \subset \mathcal{N}^{n+1}$. Puesto que $\mathcal{N}^{n+1}$ es un conjunto finito, se sigue que $\{\boldsymbol{x} \in A_n : x_{n+1} \in \mathcal{N}\}$ es un conjunto finito. $\square$

Antes de continuar le recomendamos al lector retomar la definición de la funcion scs h_n definida en (2.7).

Lema 2.29. *Sea f una función escalera tal que f^2 es una función escalera. Entonces los siguientes enunciados se satisfacen:*

i) Para cualesquiera $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ en A_n tales que u_1 y v_1 pertenecen a $f(0)$, existe un único arco $\Lambda \subset A_n$ que va de $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ tal que $\pi_1(\Lambda) \subset f(0)$.

ii) A_n es un árbol, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Mostremos i) por inducción sobre n. Para $n = 1$. Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ en A_1 tales que u_1 y v_1 pertenecen a $f(0)$ y, sin perder generalidad, supongamos que $u_2 < v_2$. Se cumple alguno de los siguientes casos:

Caso 1. $u_1 = v_1$.

Entonces $\Lambda = \{u_1\} \times J$, donde J es el intervalo con extremos en u_2 y v_2 es el arco buscado. Recordemos que la unicidad del arco se sigue debido a que, por el Teorema 2.3, $\mathcal{G}(f)$ es un árbol.

Caso 2. $u_1 \neq v_1$.

Sin perder generalidad, supongamos que $u_1 < v_1$. Como $f(0)$ es un arco que tiene a u_1 y v_1, $[u_1, v_1] \subset f(0)$. Sea $E = [u_1, v_1] \cap \mathcal{N}$, dado que $\mathcal{N}$ es finito, E es finito. Por el Teorema 2.3, $\mathcal{G}(f|_{[u_1,v_1]})$ es un árbol y, por construcción, $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ pertenecen a éste. De modo que existe un único arco Λ que va de $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ y, $\pi_1(\Lambda) = [u_1, v_1] \subset f(0)$.

Supongamos válido el enunciado i) para A_n. Mostraremos que A_{n+1} también lo satisface. Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ en A_{n+1} tales que u_1 y v_1 pertenecen a $f(0)$. Denotemos por $\boldsymbol{u}^* = P_{n+1}(\boldsymbol{u})$ y $\boldsymbol{v}^* = P_{n+1}(\boldsymbol{v})$. Así, $\boldsymbol{u}^*$ y $\boldsymbol{v}^*$ pertenecen a A_n y, dado que $u_1 = u_1^*$ y $v_1 = v_1^*$, se tiene que u_1^* y $v_1^* \in f(0)$. Se cumple alguno de los siguientes casos:

Caso A. $\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{v}^*$.

Entonces $\Lambda^* = \{\boldsymbol{u}^*\} \times J$, donde J es el intervalo determinado por u_{n+2} y v_{n+2}, es el arco deseado.

Caso B. $\boldsymbol{u}^* \neq \boldsymbol{v}^*$.

Observemos que $h_n(\boldsymbol{u}^*) = u_{n+2}$ y $h_n(\boldsymbol{v}^*) = v_{n+2}$. Por hipótesis de inducción, existe un único arco Λ contenido en A_n que va de $\boldsymbol{u}^*$ a $\boldsymbol{v}^*$ tal que $\pi_1(\Lambda) \subset f(0)$. Sea $\mathcal{N}^* = \{\boldsymbol{z} \in \Lambda : z_{n+1} \in \mathcal{N}\}$. Por la Proposición 2.28, $\mathcal{N}^*$ es finito y, por la Proposición 2.1, $\mathcal{G}(h_n|_\Lambda)$ es un árbol que contiene a $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$; por tanto, existe un único arco Λ_0 que va de $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$. Como $\pi_1(\Lambda_0) = \pi_1(\Lambda)$, obtenemos que $\pi_1(\Lambda_0) \subset f(0)$.

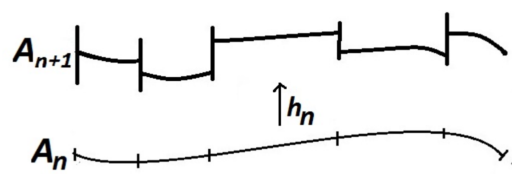

Figura 2.19: Obtención de A_{n+1} a partir de A_n.

Haremos la prueba de *ii*) también por inducción. Para $n = 1$. Por el Teorema 2.3, $\mathcal{G}(f)$ es un árbol. Por la Proposición 2.20, $A_1 = \mathcal{G}(f)$, de modo que, A_1 es un árbol. Supongamos que A_n es un árbol. Mostremos que A_{n+1} es un árbol. Por la Proposición 2.28, $\{\boldsymbol{x} \in A_n : x_{n+1} \in \mathcal{N}\}$ es finito, por la Proposición 2.1, $A_{n+1} = \mathcal{G}(h_n|_{A_n})$ y, por la Proposición 2.20, se sigue que A_{n+1} es un árbol. $\square$

Cabe mencionar que en el inciso *ii*) del Lema 2.29, es posible reemplazar $f(0)$ por $f(t)$, para cualquier $t \in \mathcal{N}$. Para el siguiente resultado, le sugerimos al lector retome la definición establecida en (1.7) y en (2.5).

Corolario 2.30. *Sea f una función escalera tal que f^2 es una función escalera. Entonces* $\underset{\longleftarrow}{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$ *es un continuo tipo árbol.*

Demostración. Por el inciso *ii*) de Lema 2.29, A_n es un árbol, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 2.20, $G_n = \kappa_{n+1}(A_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Dado que κ_{n+1} es un homeomorfismo, G_n es un árbol, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, por el Teorema 1.63, $\underset{\longleftarrow}{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$ es un continuo tipo árbol. $\square$

La versión para continuos en general del Corolario 2.30 puede encontrarla en [6, Teorema 4.2]. Nosotros dimos una prueba más sencilla ocupando las herramientas que hemos construido.

Otro de los que se pueden considerar es determinar condiciones bajo las cuáles si $f : [0,1] \to C([0,1])$ es una función escalera, $f^2 : [0,1] \to C([0,1])$ también es una función escalera. El siguiente resultado es una aportación en este sentido. Más adelante, en el Teorema 3.2, damos otras condiciones para que f^2 sea una función escalera.

Teorema 2.31. *Sea f una función escalera cuya gráfica es un arco. Entonces f^2 es una función escalera si y sólo si A_n es un arco, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea f una función escalera tal que f^2 es una función escalera. Procedamos por inducción sobre n. Para $n = 1$. Por la Proposición 2.20, $A_1 = \mathcal{G}(f)$ y, por hipótesis, la gráfica de f es un arco. Supongamos que A_n es un arco. Mostremos que A_{n+1} es un arco. Por la Proposición 2.28, el conjunto $\tilde{\mathcal{N}} = \{\boldsymbol{x} \in A_n : x_{n+1} \in \mathcal{N}\}$ es finito. Dado que A_n es un arco, $A_n \setminus \tilde{\mathcal{N}}$ sólo tiene un número finito de componentes. Garantizamos a continuación que, para cada $\boldsymbol{x} \in \tilde{\mathcal{N}}$ y las componentes C y C' de $A_n \setminus \tilde{\mathcal{N}}$ tales que $\mathrm{Cl}(C) \cap \mathrm{Cl}(C') = \{\boldsymbol{x}\}$, los arcos $C \times h_n(C)$ y $C' \times h_n(C')$ se unen en extremos distintos del arco $\{\boldsymbol{x}\} \times h_n(\boldsymbol{x})$. En efecto, por la definición de $\tilde{\mathcal{N}}$, para cada componente K de $A_n \setminus \tilde{\mathcal{N}}$, $h_n(K)$ es un conjunto degenerado; por lo tanto, $K \times h_n(K)$ es homeomorfo a K, para cada componente K de $A_n \setminus \tilde{\mathcal{N}}$. Sean C y C' dos componentes de $A_n \setminus \tilde{\mathcal{N}}$ tales que $\mathrm{Cl}(C) \cap \mathrm{Cl}(C') = \{\boldsymbol{x}\}$ con $\boldsymbol{x} \in \tilde{\mathcal{N}}$. Como $x_{n+1} \in f(x_n)$, por la Proposición 2.25, $x_n \in \mathcal{N}$. Dado que $\mathcal{G}(f)$ es un arco y $x_{n+1} \in \mathcal{N}$ y f^2 es una función escalera, se tiene que x_{n+1} es un punto interior del arco definido por $f(x_n)$. De este modo, $\boldsymbol{x}$ es un punto interior del arco $P_n^{n+1}(\boldsymbol{x}) \times h_{n-1}(P_n^{n+1}(\boldsymbol{x}))$.

Sin perder generalidad, supongamos que $x_n = t_s$ y que $x_{n+1} = t_j$, donde t_s y t_j son elementos de $\mathcal{N}$. Entonces $P_n^{n+1}(\boldsymbol{x}) \times h_{n-1}(P_n^{n+1}(\boldsymbol{x})) = P_n^{n+1}(\boldsymbol{x}) \times [p_s, q_s]$ con $x_{n+1} \in (p_s, q_s)$ y $h_n(\boldsymbol{x}) = [p_j, q_j]$. Dado que C y C' son las componentes cuyas cerraduras coinciden en $\boldsymbol{x}$, sucede sólo uno de los siguientes casos:

Caso 1. Si $P_n^{n+1}(\boldsymbol{x}) \times (p_s, x_{n+1}) \cap C \neq \emptyset$ y $P_n^{n+1}(\boldsymbol{x}) \times (x_{n+1}, q_s) \cap C' \neq \emptyset$.

Entonces $h_n(C) = \{p_j\}$ y $h_n(C') = \{q_j\}$. De este modo, $h_n(C)$ y $h_n(C')$ corresponden a los puntos extremos del arco $h_n(\boldsymbol{x})$.

Caso 2. Si $P_n^{n+1}(\boldsymbol{x}) \times (p_s, x_{n+1}) \cap C' \neq \emptyset$ y $P_n^{n+1}(\boldsymbol{x}) \times (x_{n+1}, q_s) \cap C \neq \emptyset$.

Entonces $h_n(C) = \{q_j\}$ y $h_n(C') = \{p_j\}$. De este modo, $h_n(C)$ y $h_n(C')$ corresponden a los puntos extremos del arco $h_n(\boldsymbol{x})$; por lo tanto, A_{n+1} es un arco.

Supongamos que A_n es un arco, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sean C una componente de $[0,1] \setminus \mathcal{N}$ y $z \in C$. Entonces $\mathrm{Cl}(C) \times \{f(z)\} \times \{f^2(z)\}$ es un continuo en A_2. Como A_2 es un arco, $\mathrm{Cl}(C) \times \{f(z)\} \times \{f^2(z)\}$ es un arco. Debido a que $\mathrm{Cl}(C)$ es un arco, $f^2(z)$ debe ser un conjunto degenerado. Por lo tanto, $f^2(t)$ es un conjunto no degenerado para a lo más un conjunto finito de puntos t en el intervalo $[0,1]$; es decir, f^2 es una función escalera. $\square$

Como podemos observar basta que A_2 sea un arco para que f^2 sea una función escalera. Los siguientes ejemplos muestran funciones escalera f, cuya gráfica es un arco, f^2 es una función escalera pero, la gráfica de f^2 contiene un triodo simple; es decir, el hecho de que una función escalera f satisfaga que f^2 sea una función escalera y su gráfica $\mathcal{G}(f)$ sea un arco, no garantiza que $\mathcal{G}(f^2)$ también sea un arco.

Ejemplo 2.32. *Sea $f : [0,1] \to C([0,1])$ la función escalera dada por:*

$$f(t) = \begin{cases} [0,1], & t = 0; \\ \{1/2\}, & 1/8 < t < 1/4; \\ [1/2,1]\,, & t = 1/8, 1/4; \\ \{1\}, & t \in (0,1/8) \cup (1/4, 9/16) \cup (5/8, 1]; \\ \{3/4\}, & t \in (9/16, 5/9); \\ [3/4,1]\,, & t = 9/16, 5/8. \end{cases}$$

Entonces f^2 es una función escalera y $\mathcal{G}(f)$ es un arco pero, $\mathcal{G}(f^2)$ no es un arco.

Demostración. Por la definición de f, observamos que $f([0,1/4]) = [1/2,1]$ y $f([1/2,1]) = [3/4,1]$; por tanto, $[0,1/4] \times \{1\}$ y $\{1/8\} \times [3/4,1]$ son subconjuntos de $\mathcal{G}(f^2)$. De este modo, el triodo simple $[[0,1/4] \times \{1\}] \cup [\{1/8\} \times [3/4,1]]$, está contenido en $\mathcal{G}(f^2)$. Más aún $f^3 = F^*$; donde F^* es la función definida en el Ejemplo 2.8, pues $f([3/4,1]) = \{1\}$. Como $f(1) = \{1\}$ podemos afirmar que $f^n = F^*$, para cada $n \geq 3$. $\square$

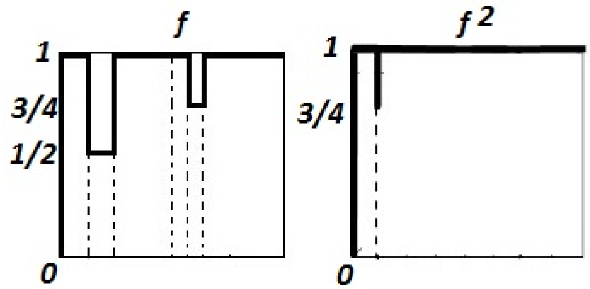

Figura 2.20: Gráficas de f (izquierda) y f^2 (derecha) del Ejemplo 2.32.

Ejemplo 2.33. *Sea $f : [0,1] \to C([0,1])$ la función escalera dada por:*

$$f(t) = \begin{cases} [1/4, 1], & t = 0; \\ \{1/4\}, & 0 < t < 1/2; \\ [1/4, 3/4]\,, & t = 1/2; \\ \{3/4\}, & 1/2 < t < 1; \\ [0, 3/4]\,, & t = 1. \end{cases}$$

Entonces f^2 es una función escalera y $\mathcal{G}(f)$ es un arco pero, $\mathcal{G}(f^2)$ no es un arco.

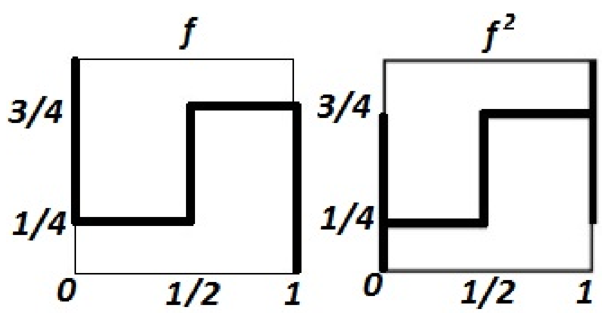

Figura 2.21: Gráficas de f (izquierda) y f^2 (derecha) del Ejemplo 2.33.

Demostración. Por la defininción de f, observamos que $f([1/4, 1]) = [0, 3/4]$, $f([1/4, 3/4]) = [1/4, 3/4]$ y $f([0, 3/4]) = [1/4, 1]$; por tanto, $\{0\} \times [0, 1/2]$ y $[0, 1/2] \times \{1/4\}$, están contenidos en la gráfica de f^2. Esto implica que el triodo simple $[\{0\} \times [0, 1/2]] \cup [[0, 1/2] \times \{1/4\}]$, está contenido en la gráfica de f^2. $\square$

Si el lector dispone de un poco de tiempo, logrará notar que $f^{2n} = f^2$ y $f^{2n+1} = f$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Nuestro siguiente objetivo es obtener la estructura que tiene el límite inverso generalizado de una función escalera f tal que f^2 es una función escalera. Para ello definimos un par de subconjuntos que nos facilitan esta tarea.

Definición 2.34. *Sean f una función escalera y $n \in \mathbb{N}$. Definimos los conjunto:*

$$\mathcal{N}_n = \big\{t \in [0,1] : f^n(t) \textit{ s un conjunto no degenerado}\big\}$$

$$\Gamma(f^n) = \big\{y : f^n(C) = \big\{y\big\}, \textit{ para alguna componente } C \textit{ de } [0,1] \setminus \mathcal{N}_n\big\}.$$

Lema 2.35. *Sea f una función escalera tal que f^2 es una función escalera. Entonces se cumplen los siguientes enunciados:*

i) $\mathcal{N}_{n+1} \subset \mathcal{N}_n$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

ii) $\Gamma(f^{n+1}) \subset \Gamma(f^n)$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *Más aún* $\Gamma(f^{n+1}) = f(\Gamma(f^n))$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

iii) $\mathcal{N}_n \cap \Gamma(f^m) = \emptyset$, *para cualesquiera* n *y* m *en* $\mathbb{N}$.

Demostración. Mostremos i). Por el inciso ii) de la Proposición 2.25, f^n es una función escalera, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $t \in \mathcal{N}_{n+1}$. Supongamos que t no es un elemento de $\mathcal{N}_n$; es decir, $f^n(t)$ es un conjunto degenerado, digamos $\{c\}$. Como $f(c) = f^{n+1}(t)$ y $t \in \mathcal{N}_{n+1}$, se sigue que $f(c)$ es un conjunto no degenerado; es decir, $c \in \mathcal{N}$. Por el inciso i) de la Proposición 2.25, dado que $c \in f^n(t)$ tenemos que $f^{n-1}(t) \in \mathcal{N}$, de forma que $f(f^{n-1}(t)) = f^n(t)$ es un conjunto no degenerado, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $t \in \mathcal{N}_n$. Con esto hemos mostrado que $\mathcal{N}_{n+1} \subset \mathcal{N}_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Mostremos ii). Sean $y \in \Gamma(f^{n+1})$ y C^* una componente del conjunto $[0,1] \setminus \mathcal{N}_{n+1}$ tales que $f^{n+1}(C^*) = \big\{y\big\}$. Dado que $C^* \setminus \mathcal{N}$ es no vacío, elijamos $z^* \in C^* \setminus \mathcal{N}$ tal que $f^{n+1}(z^*) = \big\{y\big\}$. Como z^* no pertenece a $\mathcal{N}$, por el inciso i) de la Proposición 2.25, $f^k(z^*)$ es un conjunto degenerado, para cada $k \in \mathbb{N}$. Denotemos por z_1 el elemento del conjunto degenerado $f(z^*)$ y C_1 la componente de C_1 de $[0,1] \setminus \mathcal{N}_n$ tal que $z_1 \in C_1$. Como f es una función escalera, $f^n(C_1) = f^n(z_1) = f^{n+1}(z^*) = \big\{y\big\}$; es decir, $y \in \Gamma(f^n)$. Por lo tanto, $\Gamma(f^{n+1}) \subset \Gamma(f^n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Para la segunda parte, sea C una componente de $[0,1] \setminus \mathcal{N}_n$. Por el inciso i), existe una componente C^* de $[0,1] \setminus \mathcal{N}_{n+1}$ tal que $C \cap C^* \neq \emptyset$ y, dado que C y C^* son conexos,

$f^k(C) = f^k(C^*)$, para cada $k \in \mathbb{N}$, o bien, $f^{n+1}(C^*) = f(f^n(C))$. De igual forma, si C^* es una componente de $[0,1] \setminus \mathcal{N}_{n+1}$. Por el inciso i), existe una componente C de $[0,1] \setminus \mathcal{N}_n$ tal que $C \subset C^*$ y, dado que C y C^* son conexos, $f^k(C) = f^k(C^*)$, para cada $k \in \mathbb{N}$; es decir, $f^{n+1}(C^*) = f(f^n(C))$. Por lo tanto, $\Gamma(f^{n+1}) = f(\Gamma(f^n))$.

Mostremos iii). Supongamos que existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $\mathcal{N}_n \cap \Gamma(f^m) \neq \emptyset$. Sin perder generalidad, supongamos que $n > m$. Por el inciso ii) tenemos que $\mathcal{N}_m \cap \Gamma(f^m) \neq \emptyset$. Sea c_0 un elemento en la intersección $\mathcal{N}_m \cap \Gamma(f^m)$. Dado que $c_0 \in \Gamma(f_m)$, existe una componente C de $[0,1] \setminus \mathcal{N}_m$ tal que $f^m(C) = \{c_0\}$ y, dado que $c_0 \in \mathcal{N}_m$, $f(c_0)$ es un conjunto no degenerado. De aquí que $f^{m+1}(C) = f(c_0)$. Esto implica que $\mathcal{N}_{m+1}$ no es unconjunto finito; lo cual es una contradicción por la Proposición 2.25. Esto concluye la prueba Lema. □

La siguiente proposición es, hasta cierto punto, un caso particular del Teorema 3.4, el cual expondremos en el siguiente capítulo. Sin embargo, para este último necesitamos más condiciones. Además, de que la prueba resulta ser un poco más extensa.

Proposición 2.36. *Sean f una función escalera tal que f^2 es una función escalera y $|\mathcal{N}| = 1$; es decir, sólo hay un punto donde f es no degenerada. Entonces* $\varprojlim \boldsymbol{f}$ *es una dendrita.*

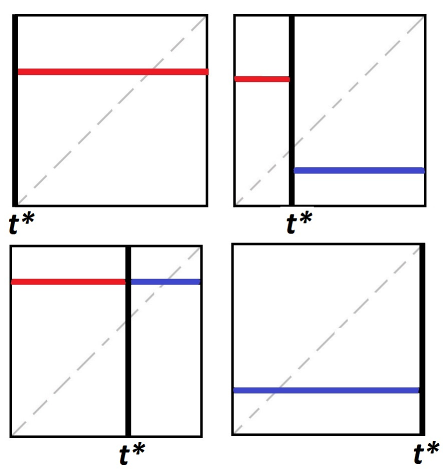

Figura 2.22: Posibles casos para la funcion f de la Proposición 2.36.

Demostración. Sea t^* el único elemento de $\mathcal{N}$ para el cual $f(t^*)$ es no degenerada. Dado que f es suprayectiva, $f(t^*) = [0,1]$. Por el Corolario 2.30, $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es un continuo tipo árbol. Por otro lado, como f es escalera, $f^{-1}(c)$ es un conjunto conexo, para cada $c \in \Gamma(f)$. Por los Teoremas 1.32 y 1.64, $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es localmente conexo; por lo tanto, del Teorema 1.37, se sigue que $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es un dendrita. □

En la figura de la Proposición 2.36, la línea vertical **negra** señala el punto t^* donde la función escalera f satisface que $f(t^*) = [0,1]$ y las líneas horizontales, marcadas con los colores **rojo** y **azul**, pueden seleccionarse a cualquier altura siempre y cuando se conserve que f^2 sea una función escalera. El siguiente teorema establece la forma en que se puede describir al límite inverso generalizado generado por una función escalera f para la cual f^2 es una función escalera. Antes de continuar le recomendamos al lector recordar la Definición 2.34.

Teorema 2.37. *Sean f una función escalera tal que f^2 es una función escalera y $f(t_i) = [0,1]$, para cada $t_i \in \mathcal{N}$. Entonces:*

$$\varprojlim \boldsymbol{f} = F \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n,$$

donde F es un conjunto finito, $D_n = T_n \times C$, con T_n un árbol o un punto, y C es el conjunto de Cantor o un punto; más aún:

$$\mathrm{Fr}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) = F.$$

Demostración. Sea f es una función escalera tal que f^2 es una función escalera. Por la Proposición 2.25, f^n es una función escalera, para cada $n \in \mathbb{N}$. De modo que $\Gamma(f^n)$ es un conjunto finito y, claramente, no vacío, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 2.35, $\Gamma(f^{n+1}) \subset \Gamma(f^n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. De modo que existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $\Gamma(f^N) = \Gamma(f^k)$, para cada $k \geq N$. Denotemos por

$$\Gamma(f^N) = \{c_1, ..., c_m\} \tag{2.9}$$

Afirmación A. Para cualesquiera c_i y c_j en $\Gamma(f^N)$, con $c_i \neq c_j$, se tiene que $f(c_i) \neq f(c_j)$.

De no ser así, $\Gamma(f^{N+1})$ estaría contenido propiamente en $\Gamma(f^N)$; lo cual es una contradicción, dada la condición de N. Esto concluye la prueba de esta afirmación.

Afirmación B. Para cada $c_i \in \Gamma(f^N)$, existe $s_i \in \mathbb{N}$ tal que $\{c_i\} = f^{s_i}(c_i)$ y $\{c_i\} \neq f^l(c_i)$, para ninguna $l < s_i$.

Sea $c_i \in \Gamma(f^N)$. Tomemos las iteraciones de c_i bajo f. Dado que $\Gamma(f^N)$ es finito, existen n_i y k_i en $\mathbb{N}$, con $n_i < k_i$, tales que $f^{n_i}(c_i) = f^{k_i}(c_i)$ y son mínimos con esta propiedad; es decir, para cada $n_i < s < k_i$, $f^s(c_i) \neq f^{n_i}(c_i)$. Por la Afirmación A, $f^{n_i-1}(c_i) = f^{k_i-1}(c_i)$ y continuando de forma regresiva se tiene que $\{c_i\} = f^{k_i-n_i}(c_i)$. Esto concluye la prueba de ésta afirmación.

Denotemos por:

$$\Gamma(\underset{\longleftarrow}{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}) = \left\{\boldsymbol{x} \in \underset{\longleftarrow}{\text{límg}}\, \boldsymbol{f} : x_n \in \Gamma(f), \quad \text{para cada} \ \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Afirmación C. Para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(\underset{\longleftarrow}{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}) = \left\{\boldsymbol{x} \in \underset{\longleftarrow}{\text{límg}}\, \boldsymbol{f} : x_n \in \Gamma(f^m), \ \text{para cada} \ \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Sean $m \in \mathbb{N}$ y $\boldsymbol{x} \in \Gamma(\underset{\longleftarrow}{\text{límg}}\, \boldsymbol{f})$. Por la definición del límite inverso generalizado, $x_n \in f^{m-1}(x_{n+m-1})$, para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$. Dado que $x_{n+m-1} \in \Gamma(f)$, se tiene que $f^{m-1}(x_{n+m-1}) \in f^{m-1}(\Gamma(f))$. Por el inciso ii) del Lema 2.35, $f^{m-1}(\Gamma(f)) = \Gamma(f^m)$. De este modo, tenemos que $x_n \in \Gamma(f^m)$. Esto concluye la prueba de ésta afirmación.

Sea M el mínimo común múltiplo entre los números naturales s_i con las propiedades de la Afirmación B, para los elementos c_i de $\Gamma(f^N)$ y donde N es el número natural definido en (2.9); por tanto, $\{c_i\} = f^{kM}(c_i)$, para cualesquiera $c_i \in \Gamma(f^N)$ y $k \in \mathbb{N}$.

Afirmación D. $\Gamma(\underset{\longleftarrow}{\text{límg}}\, \boldsymbol{f})$ es finito.

Supongamos que la afirmación es falsa. Sea $\{\boldsymbol{x}^n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\Gamma(\underset{\longleftarrow}{\text{límg}}\, \boldsymbol{f})$ tal que $\boldsymbol{x}^n \neq \boldsymbol{x}^m$ siempre que $n \neq m$. Por el Teorema 1.55,

$\varprojlim \boldsymbol{f}$ es compacto; por tanto, podemos suponer que la sucesión $\{\boldsymbol{x}^n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente a un elemento $\boldsymbol{x} \in \varprojlim \boldsymbol{f}$. Como π_1 es una función continua, la sucesión $\{x_1^n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x_1. Por la Afirmación C, $\{x_1^n : n \in \mathbb{N}\} \subset \Gamma(f^N)$ y, dado que $\Gamma(f^N)$ es un conjunto finito, existe L_1 en $\mathbb{N}$ tal que $x_1^r = x_1$, para cualquier $r \geq L_1$. Además, dada la elección de M, se tiene que $x_{1+kM}^r = x_1$, para cualesquiera $k \in \mathbb{N}$ y $r \geq L_1$.

Por el mismo argumento, para cada una de las proyecciones π_j, con $1 < j \leq M$, existe $L_j \in \mathbb{N}$ tal que $x_{j+kM}^r = x_j$, para cualesquiera $r \geq L_j$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Ahora, si L es el máximo entre los números naturales $L_1, ..., L_M$ obtenemos que $x_n^r = x_n$, para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $r \geq L$; es decir, $\boldsymbol{x}^r = \boldsymbol{x}$, para cualquier $r \geq L$, lo cual es una contradicción. Esto concluye la prueba de esta afirmación.

Dado que $f(t_i) = [0,1]$, para cada $t_i \in \mathcal{N}$ tenemos que $\mathcal{N}^{\infty}$ es un subconjunto de $\varprojlim \boldsymbol{f}$. Como $\mathcal{N}$ es finito, por la Proposición 1.3, $\mathcal{N}^{\infty}$ es homeomorfo al conjunto de Cantor o es un punto, dependiendo si $\mathcal{N}$ tiene más de un punto o es degenerado, respectivamente.

Antes de definir a los conjuntos D_n, que mencionamos en el enunciado del teorema. Observemos lo siguiente. Si $\boldsymbol{x} \in \varprojlim \boldsymbol{f} \setminus \Gamma(\varprojlim \boldsymbol{f})$, existe un mínimo número natural m tal que $x_m \in \Gamma(f)$ y $x_{m+1} \notin \Gamma(f)$. Dado que $x_{m+1} \in f(x_{m+2})$, se sigue de la definición de $\Gamma(f)$ que x_{m+2} no puede pertenecer a ninguna componente de $[0,1] \setminus \mathcal{N}$; por tanto $x_{m+2} \in \mathcal{N}$. Como $x_k \in f(x_{k+1})$ y $x_{m+2} \in \mathcal{N}$, por la Proposición 2.25, $x_k \in \mathcal{N}$, para cada $k \geq m+2$.

Definimos

$$D_n = \left\{\boldsymbol{x} \in \varprojlim \boldsymbol{f} : x_k \in \mathcal{N}, \text{ para cada } k \geq n\right\}.$$

Se cumplen las siguientes propiedades:

- $D_n \subset D_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto se debe a la Proposición 2.25.

- Para cada $n > 2$:

$$D_1 = \mathcal{N}^\infty, \quad D_2 = [0,1] \times \mathcal{N}^\infty \quad y \quad D_n = G_{n-2} \times \mathcal{N}^\infty,$$

  donde G_{n-2} corresponde al conjunto de la Definición 1.52. Antes de analizar estas igualdades, por la Proposición 2.25, para cada $\boldsymbol{x} \in \underleftarrow{\text{lím}}\, \mathbf{g}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $x_n \in \mathcal{N}$, se tiene que $x_k \in \mathcal{N}$, para cada $k \geq n$. Para D_2, dado que $f(t_i) = [0,1]$, para todo $t_i \in [0,1]$, la primera coordenada de todo elemento de D_2 puede tomar cualquier valor entre $[0,1]$; por tanto, $D_2 = [0,1] \times \mathcal{N}^\infty$. Mostremos la tercera igualdad por doble contención. Sea $\boldsymbol{x} \in D_n$. Dado que $x_m \in f(x_{m+1})$ y $x_n \in \mathcal{N}$, por la Proposición 2.25 se tiene que $x_k \in \mathcal{N}$, para toda $k \geq n$. Así, $P_{n-1}(\boldsymbol{x}) \in G_{n-2}$ y $x_k \in \mathcal{N}$, para toda $k \geq n$. De este modo $D_n \subset G_{n-2} \times \mathcal{N}^\infty$. La segunda contención es inmediata observando que $f(t_i) = [0,1]$, para todo $t_i \in \mathcal{N}$.

Por lo tanto, para $F = \Gamma(\underleftarrow{\text{lím}}\, \boldsymbol{f})$, se sigue que $\underleftarrow{\text{lím}}\, \boldsymbol{f} = F \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$.

Para concluir, mostremos que se cumplen todas las propiedades. Por la Proposición 2.20 y el Lema 2.29 se sigue que G_k es un árbol, para cada $k \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 1.62, $\underleftarrow{\text{lím}}\, \boldsymbol{f}$ es un continuo. Ahora bien, dado que F es un conjunto finito y por tanto cerrado, y $F \cap \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} D_n \right) = \emptyset$, se sigue que

$$\operatorname{Fr}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \right) = \operatorname{Fr}\left(\underleftarrow{\text{lím}}\, \boldsymbol{f} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \right) = \operatorname{Fr}(F) = F.$$

Esto concluye la prueba del Teorema. □

Proposición 2.38. *Sean f una función escalera como en el Teorema 2.37, $\boldsymbol{q} \in \underleftarrow{\text{lím}}\, \boldsymbol{f} \setminus F$, $\boldsymbol{p} \in F$ y $\epsilon > 0$. Entonces existen un arco $\mathcal{A}_\epsilon$ y $\boldsymbol{p}_\epsilon$ en $\underleftarrow{\text{lím}}\, \boldsymbol{f}$ tales que $\boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{p}_\epsilon$ pertenecen al arco $\mathcal{A}_\epsilon$ y $D(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_\epsilon) < \epsilon$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y elijamos $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=N_0}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \epsilon$. Como $\boldsymbol{q} \in \underleftarrow{\text{lím}}\, \boldsymbol{f} \setminus F$, existe N_1 tal que $q_k \in \mathcal{N}$, para cada $k \geq N_1$. Sea N_2 el máximo valor entre los números naturales N_0 y N_1. Definimos $\boldsymbol{p}_\epsilon \in \underleftarrow{\operatorname{límg}} \boldsymbol{f}$ tal que $P_{N_2}(\boldsymbol{p}_\epsilon) = P_{N_2}(\boldsymbol{p})$ y la n-ésima coordenada de $\boldsymbol{p}_\epsilon$ es igual a q_n, para cada $n > N_2$. Dado que la N_2-ésima coordenada de $P_{N_2}(\boldsymbol{p}_\epsilon)$ y $P_{N_2}(\boldsymbol{q})$ pertenecen a $f(q_{N_2+1})$, por la Proposición 2.20 y el Lema 2.29, existe un arco I en G_{N_2-1} que va de $P_{N_2}(\boldsymbol{p}_\epsilon)$ a $P_{N_2}(\boldsymbol{q})$ tal que $\pi_{N_2}(I) \subset f(q_{N_2+1})$. Por lo tanto, dado que $q_{N_2} \in \mathcal{N}$ y $f(q_{N_2}) = [0,1]$, el arco definido por $\mathcal{A}_\epsilon = I \times \prod_{k \geq N_2} \{q_k\}$ está contenido en $\underleftarrow{\operatorname{límg}} \boldsymbol{f}$, contiene a $\boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{p}_\epsilon$ y por la elección de N_2, $D(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_\epsilon) < \epsilon$. □

2.4. Un poco de dimensión

Durante esta sección trabajamos con funciones escalera y libres de diagonal superior. Abordamos un poco la dimensión de los límites inversos generalizados que éstas generan.

Proposición 2.39. *Sean f una función escalera y $n \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$A_n = \bigcup \mathcal{E}^j \cup \bigcup \mathcal{F}^k,$$

donde $\pi_{2l}(\mathcal{E}^j)$ y $\pi_{2l-1}(\mathcal{F}^k)$ son conjuntos degenerados, para cualesquiera j y k, respectivamente, y $l = 1, ..., \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, donde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota al menor entero menor o igual; siendo los conjuntos $\mathcal{E}^j$ y $\mathcal{F}^k$ una colección finita de cerrados de A_n; más aún, $\dim(A_n) \leq \frac{n+1}{2}$.

Demostración. La idea base de la prueba es la siguiente observación. Para cada intervalo cerrado $J \subset [0,1]$, se tiene que:

$$\mathcal{G}(f|_J) = \left[\bigcup_{t_i \in \mathcal{N}'} \{t_i\} \times f(t_i)\right] \cup \left[\bigcup_{C \in \mathcal{B}} \mathrm{Cl}(C) \times \{f(C)\}\right],$$

donde $\mathcal{N}' = \mathcal{N} \cap J$ y $\mathcal{B} = \{C : C \text{ es una componente de } J \setminus \mathcal{N}'\}$. Dado que f es una función escalera, $\pi_1(\{t_i\} \times f(t_i))$ y $\pi_2(\mathrm{Cl}(C) \times \{f(C)\})$ son conjuntos degenerados, para cualesquiera $t_i \in \mathcal{N}'$ y $C \in \mathcal{B}$. Aplicando este proceso para intervalo cerrado $f(t_i)$ con $t_i \in \mathcal{N}$, se tiene que:

$$\mathcal{G}(f|_{f(t_i)}) = \bigcup \mathcal{P}_i^j \cup \bigcup \mathcal{I}_i^k, \tag{2.10}$$

donde $\pi_1(\mathcal{I}_i^k)$ y $\pi_2(\mathcal{P}_i^j)$ son conjuntos degenerados, para cualesquiera índices j y k, respectivamente. Por otro lado:

$$A_2 = \left[\bigcup_{t_i\in\mathcal{N}} \big(\{t_i\} \times \mathcal{G}(f|_{f(t_i)})\big)\right] \cup \left[\bigcup_{C\in\mathcal{C}} \big(\mathrm{Cl}(C) \times f(C) \times f^2(C)\big)\right], \tag{2.11}$$

donde $\mathcal{C}$ es el conjunto formado por las componentes de $[0,1]\setminus\mathcal{N}$. Por (2.10) se sigue que:

$$\{t_i\} \times \mathcal{G}(f|_{f(t_i)}) = \left[\bigcup \{t_i\} \times \mathcal{P}_i^j\right] \cup \left[\bigcup \{t_i\} \times \mathcal{I}_i^k\right].$$

Observemos que $\pi_1(\{t_i\} \times \mathcal{P}_i^j)$, $\pi_3(\{t_i\} \times \mathcal{P}_i^j)$ y $\pi_2(\{t_i\} \times \mathcal{I}_i^k)$ son conjuntos degenerados. De nuevo, como f es una función escalera, $\pi_2(\mathrm{Cl}(C) \times f(C) \times f^2(C))$ es un conjunto degenerado. Renombrando a estos conjuntos y catalogándolos según la cardinalidad de sus proyecciones podemos reescribir A_2 como sigue:

$$A_2 = \bigcup \mathcal{P}^j \cup \bigcup \mathcal{I}^k,$$

donde cada $\mathcal{P}^j$ y $\mathcal{I}^k$ son conjuntos cerrados tales que $\pi_{2l}(\mathcal{P}^j)$ y $\pi_{2l+1}(\mathcal{I}_k)$ son conjuntos degenerados, para cada $l = 0, 1$.

Del mismo modo, y debido a la confusión que pueden llegar a ser los índices, es posible adaptar la prueba para cada conjunto A_n, de forma que:

$$A_n = \bigcup \mathcal{P}^j \cup \bigcup \mathcal{I}^k, \tag{2.12}$$

donde cada $\mathcal{P}^j$ y $\mathcal{I}^k$ son conjuntos cerrados tales que $\pi_{2l}(\mathcal{P}^j)$ y $\pi_{2l+1}(\mathcal{I}^k)$ son conjuntos degenerados, para cualesquiera j, k y para cada $l = 0, 1, ..., \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$.

Así, garantizamos que, por lo menos $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ de las proyecciones de cada uno de estos conjuntos cerrados es un conjunto degenerado. Por tanto, es posible exhibir un encaje de cada uno de estos conjuntos en el producto $\prod_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} [0,1]_k$, en el que no se consideren aquellas coordenadas donde las proyecciones de

$\mathcal{P}^j$ o $\mathcal{I}^k$ sean conjuntos degenerados. Por el Teorema 1.27, se sigue que $\mathcal{P}^j$ y $\mathcal{I}^k$ tienen dimensión de a los más $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. Para concluir, por el Teorema 1.26 y, dado que en la igualdad (2.12) se trata de una unión finita de conjuntos cerrados, se sigue que $\dim(A_n) \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. Lo que completa nuestra prueba. □

El Teorema 2.40 es de utilidad para garantizar que dada una función escalera y libre de diagonal superior f, la dimensión del límite inverso generalizado obtenido con f, está acotada. El valor de la cota la obtenemos con el Teorema 2.11. Para dar claridad en los encajes que damos en la prueba usamos la representación de un punto como una n-ada. De igual forma le sugerimos al lector que retome el enunciado establecido en el Corolario 2.13 ya que lo necesitamos para los siguientes resultados.

Teorema 2.40. *Sea f una función escalera y libre de diagonal superior tal que $f(1) = \{1\}$. Si $m \in \mathbb{N}$ es el mínimo número natural tal que $f^m = F^*$; donde F^* es la función definida en el Ejemplo 2.8. Entonces* $\dim(A_n) \leq \frac{m+1}{2}$, *para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea f una función escalera y libre de diagonal superior tal que $f(1) = \{1\}$. Por el Corolario 2.13, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m = F^*$ y tal que es el menor número natural con esta propiedad. Por la definición de F^*, para cada $t \neq 0$ tal que $t \in f^m(t')$, $t' = 0$. Por el Proposición 2.39, si $n \leq m$, $\dim(A_n) \leq \frac{m+1}{2}$. Sea $n > m$, definimos:

$$E_1 = \{\boldsymbol{x} \in A_n \ : \ x_{m+1} = 1\}.$$

Como cada $(m+1)$-ésima coordenada de todos los elementos de E_1 es constante, E_1 es un subconjunto cerrado. Dado que $f(1) = \{1\}$, si $\boldsymbol{x} \in E_1$, $x_k = 1$, para cada $k \geq m+1$. Sea $e_1 : E_1 \to A_m$ la función dada por:

$$e_1((x_1, ..., x_{n+1})) = (x_1, ..., x_{m+1}).$$

Entonces e_1 representa un encaje, debido a que las coordenadas de todos los elementos de E_1 coinciden con 1 a partir del índice $m+1$. Así, por la Proposición 2.39 y los Teoremas 1.24 y 1.25, $\dim(E_1) \leq \frac{m+1}{2}$. Para cada $s \geq m+3$, definimos el conjunto:

$$E_s = \{\boldsymbol{x} \in A_n \ : \ x_s = 1 \text{ y } x_{s-1} \neq 1\}.$$

Sea $\boldsymbol{x} \in E_s$. Así como lo justificamos para E_1, se sigue que E_s es un conjunto cerrado. Por definición de los conjuntos A_n, $x_{s-1} \in f^m(x_{s-1-m})$. Por otro lado, ya que $x_{s-1} \neq 1$ y $f^m = F^*$, tenemos que $x_{s-m-1} = 0$. Dado que f es una función libre de diagonal superior, $x_i = 0$, para cada $i \leq s - m - 1$. Por lo tanto, para cualquier elemento de E_s, cada una de sus coordenadas mayores a $s - 1$ coincide con 1, miéntras que cada una de sus coordenadas menores a $s - m - 1$ coincide con 0. Sea $e_s : E_s \to A_m$ la función definida por:

$$e_s((x_1, ..., x_{n+1})) = (x_{s-m-1}, ..., x_{s-1}).$$

Entonces e_s es un encaje. Por la Proposición 2.39 y los Teoremas 1.24 y 1.25, $\dim(E_s) \leq \lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor$.

Ahora, definimos $E_0 = A_n \setminus \left[E_1 \cup \bigcup_{s=m+3}^{n+1} E_s \right]$. Veamos la forma que tienen los elementos de E_0. Sea $\boldsymbol{x} \in E_0$. Dado que $\boldsymbol{x}$ no pertenece a E_1, $x_{m+2} \neq 1$. Como f es libre de diagonal superior, $x_i \neq 1$, para cada $i \leq m+2$. Como $\boldsymbol{x}$ no pertenece a E_{m+3}, $x_{m+3} \neq 1$. Continuando de esta forma, se sigue que $x_i \neq 1$, para cada $i = 1, ..., n + 1$. Por otro lado, si x_k fuera distinto de 0, para algún $k \leq n + 1 - m$. Dado que $x_{k+m} \in f^m(x_k)$ y $f^m = F^*$, se tiene que $x_{k+m} = 1$, lo cual es una contradicción. De manera que, $P^{n+1}_{n+1-m}(\boldsymbol{x}) = \overline{\mathbf{0}_{n+1-m}}$, para cualquier $\boldsymbol{x} \in E_0$. Sea $e_0 : E_0 \to A_m$ la función dada por:

$$e_0(x_1, ..., x_{n+1})) = (x_{n+2-m}, ..., x_{n+1}).$$

Entonces e_0 es un encaje. Por la Proposición 2.39 y los Teoremas 1.24 y 1.25, se tiene que $\dim(E_0) \leq \frac{m+1}{2}$.

Para concluir, mostremos que E_s es un conjunto F_σ, para cada $s \geq m+3$; es decir, es posible representar a E_s como la unión numerable de conjuntos cerrados, para cada $s \geq m + 3$. Como f es una función escalera, $\{t \in [0, 1] : f(t) = 1\}$ tiene un número finito de componentes $J_1, ..., J_q$; más aún, como f es libre de diagonal superior, podemos numerar estas componentes del tal forma que J_q sea la componente que tiene a 1. Asumamos que $J_q = [a, 1]$. Sea $(a_k)_{k=1}^\infty$ sucesión creciente tal que $a \leq a_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$ y convergente a 1. De modo que $[a, 1) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [a, a_k]$. Por lo tanto, $\{t \in [0, 1] : f(t) = 1\} \setminus \{1\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ donde $B_k = J_k$, para cada $k = 1, ..., q - 1$ y $B_k = [a, a_k]$, para todo $k \geq q$. Sea $F_k = \{\boldsymbol{x} \in A_n : x_{s-1} \in B_k\}$. Entonces F_k es cerrado, para cada $k \in \mathbb{N}$, y $E_s = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. Debido a que $\dim(E_s) \leq \lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor$, por la Proposición

1.24, $\dim(F_k) \leq \lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor$, para cada $k \in \mathbb{N}$. De este modo, por el Teorema 1.26, $\dim(A_n) \leq \lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor$. Esto concluye nuestra prueba. $\square$

Corolario 2.41. *Sea f una función escalera y libre de diagonal superior tal que $f(1) = \{1\}$. Si m es el mínimo número natural tal que $f^m = F^*$. Entonces* $\dim\left(\varprojlim \boldsymbol{f}\right) \leq \lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor$.

Demostración. Sea f una función escalera y libre de diagonal superior tal que $f(1) = \{1\}$. Por el Corolario 2.13, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m = F^*$ y tal que es el menor número natural con esta propiedad. Por los Teoremas 1.25 y 2.40 y la Proposición 2.20, $\dim(G_k) \leq \frac{m+1}{2}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Por los Teoremas 1.39 y 1.63, se tiene que $\dim\left(\varprojlim \boldsymbol{f}\right) \leq \lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor$. $\square$

Capítulo 3

Arcos y dendritas

En esta sección demostramos que para toda f función escalera y libre de diagonal superior tal que $f(1) = \{1\}$, $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es localmente conexo. Con este resultado, el Teorema 1.37 y el Corolario 2.30, establecemos que $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es una dendrita. Garantizamos condiciones para las cuales $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es un arco. Para la segunda sección extendemos los resultados del Capítulo 2 junto con los de la próxima sección a los límites inversos generalizados definidos para el conjuntos de los números enteros $\mathbb{Z}$ y los números enteros negativos. Para concluir el capítulo, enunciamos los resultados que obtuvimos para las funciones escaleras y libres de diagonal superior para el caso de las funciones escalera libres de diagonal inferior.

Lema 3.1. *Sea f una función escalera y libre de diagonal superior tal que $f(1) = \{1\}$. Entonces $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es localmente conexo.*

Demostración. Mostremos que $\varprojlim \boldsymbol{f} \setminus \{\overline{\mathbf{1}}\}$ es localmente conexo. Sea $\boldsymbol{p} \in \varprojlim \boldsymbol{f} \setminus \{\overline{\mathbf{1}}\}$. Dado que f es una función escalera, libre de diagonal superior y $f(1) = \{1\}$, por el Teorema 2.16, existe un número natural m, tal que $p_k = 0$, para cada $k \geq m$, donde p_k representa la k-ésima coordenada del punto $\boldsymbol{p}$ y m es el menor número natural con esta condición. Sea un conjunto abierto U de $\varprojlim \boldsymbol{f}$ tal que $\boldsymbol{p} \in U$. Los siguientes casos son posibles:

Caso I. $\boldsymbol{p} \neq \overline{\mathbf{0}}$.

Como f es una función escalera, libre de diagonal superior, y $f(1) = \{1\}$ se tiene que $0 \in \mathcal{N}$. De modo que si $y \in f(t)$ con $t \in \mathcal{N}$ y $t \neq 0$, $y > 0$. Esto implica que existe un abierto W_1 tal que $0 \in W_1$ y $W_1 \cap f(t) = \emptyset$, para cada $t \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$. Sea $W = W_1 \times W_2$ un abierto en $[0,1]^2$ con las siguientes propiedades:

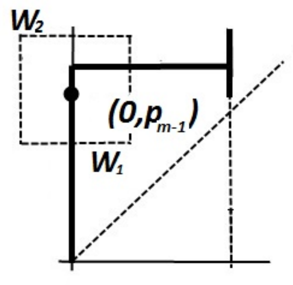

Figura 3.1: Forma del abierto W en el Lema 3.1.

i) $(0, p_{m-1}) \in W$.

ii) Siempre que $y \in W_1$, con $y \in f(x)$, se tiene que $x = 0$.

Definimos $W' = \pi_m^{-1}(W_1) \cap \pi_{m-1}^{-1}(W_2)$, donde $\pi_m, \pi_{m-1} : \prod_{k=1}^{\infty} [0,1]_k \to [0,1]$ son las correspondientes funciones proyección. Entonces $U \cap W'$ es un abierto en $\varprojlim \boldsymbol{f}$ con $\boldsymbol{p} \in U \cap W'$ y tal que:

iii) $\pi_{m-1}(U \cap W') \subset W_2$. Debido a que $U \cap W' \subset \pi_{m-1}^{-1}(W_2)$.

iv) $\pi_m(U \cap W') \subset W_1$. Debido a que $U \cap W' \subset \pi_m^{-1}(W_1)$.

v) $\pi_{m+1}(U \cap W') = \{0\}$. Debido a que, si $\boldsymbol{z} \in U \cap W'$, como $z_m \in f(z_{m+1}) \cap W_1$ y, por iv), $z_m \in W_1$ y de ii), se tiene que $z_{m+1} = 0$.

Por lo tanto:

$$U \cap W' = P_m(U \cap W') \times \prod_{k \geq m+1} \{0\}_k \tag{3.1}$$

Los siguientes enunciados se satisfacen:

vi) $P_m(U \cap W')$ es un abierto en G_{m-1}; donde G_m corresponde al conjunto dado en (1.7). Sea $\boldsymbol{q} \in P_m(U \cap W')$. Por (3.1), el elemento $\boldsymbol{q}^* \in \prod_{k=1}^{\infty}[0,1]_k$, para el cual $P_m(\boldsymbol{q}^*) = \boldsymbol{q}$ y $q_k^* = 0$, para cada $k \geq m+1$, pertenece a $U \cap W'$; y por tanto, a $\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$. Como $U \cap W'$ es abierto de $\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B^D_{\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}}(\boldsymbol{q}^*, \epsilon) \subset U \cap W'$. Mostremos que existe un abierto O en G_{m-1} tal que $\boldsymbol{q} \in O \subset P_m(U \cap W')$. Sea $O = B^{D_m}_{G_{m-1}}(\boldsymbol{q}, \epsilon) \cap \{x \in G_{m-1} : x_m \in W_1\}$, dado que $\{x \in G_{m-1} : x_m \in W_1\}$ es un abierto en G_{m-1}, O es un abierto en G_{m-1}. Puesto que $\boldsymbol{q} \in P_m(U \cap W')$, por ii), $q_m \in W_1$, de modo que, $\boldsymbol{q} \in O$. Mostremos que $O \subset P_m(U \cap W')$. Sea $\boldsymbol{z} \in O$, definimos $\boldsymbol{z}^* \in \prod_{k=1}^{\infty}[0,1]_k$ tal que $P_m(\boldsymbol{z}^*) = \boldsymbol{z}$ y $z_k^* = 0$, para $k \geq m+1$. Como $z_m^* \in W_1$ y $z_{m+1} = 0$, se tiene que $z_m \in f(z_{m+1})$. Así, $\boldsymbol{z} \in \underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$. Observemos que $D_m(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{q}) = D(\boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{q}^*)$ y $D(\boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{q}^*) < \epsilon$. Por lo tanto, $\boldsymbol{z}^* \in U \cap W'$ y, por (3.1), $\boldsymbol{z} \in P_m(U \cap W')$. Esto concluye que $O \subset P_m(U \cap W')$.

Por la Proposición 2.20 y el Teorema 2.21, G_{m-1} es localmente conexo. Por lo tanto, existe un abierto y conexo V en G_{m-1} tal que:

vii) $P_m(\boldsymbol{p}) \in V \subset P_m(U \cap W')$.

Sea $\mathcal{V} = V \times \prod_{k \geq m+1}\{0\}$. Por (3.1), $\boldsymbol{p} \in \mathcal{V} \subset (U \cap W')$. Mostremos que $\mathcal{V}$ es un abierto en $\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$. Sea $\boldsymbol{w} \in \mathcal{V}$. Como V y $W_2 \times W_1$ son abiertos, existe $\epsilon > 0$ tal que $B^{D_m}_{G_{m-1}}(P_m(\boldsymbol{w}), \epsilon) \subset V$ y, para cualquier pareja ordenada (a, b) tal que $\frac{|w_{m-1}-b|}{2^{m-1}} + \frac{|w_m - a|}{2^m} < \epsilon$, $(a, b) \in W_2 \times W_1$. Mostremos que $B^D_{\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}}(\boldsymbol{w}, \epsilon) \subset \mathcal{V}$. Sea $\boldsymbol{w'} \in B^D_{\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}}(\boldsymbol{w}, \epsilon)$, por la definición de la métrica D_m se tiene que $D_m(P_m(\boldsymbol{w}),\, P_m(\boldsymbol{w'})) < \epsilon$ y $\frac{|w_{m-1}-w'_{m-1}|}{2^{m-1}} + \frac{|w_m - w'_m|}{2^m} < \epsilon$; por lo tanto, $(w'_{m-1}, w'_m) \in W_2 \times W_1$. Ahora, como $w'_m \in W_1$ y $w'_m \in f(w'_{m+1})$, por ii), se sigue que $w'_{m+1} = 0$ y, como 0 únicamente pertenece a $f(0)$, se sigue que $w_k = 0$, para cada $k \geq m+1$; por lo tanto, $\boldsymbol{w'} \in \mathcal{V}$. Con esto mostramos que $B^D_{\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}}(\boldsymbol{w}, \epsilon) \subset \mathcal{V}$ y con esto que $\mathcal{V}$ es un abierto en $\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$.

Caso II. $\boldsymbol{p} = \overline{\boldsymbol{0}}$.

Sean W_1 un abierto como en el Caso I y V_1 un abierto y conexo tal que $0 \in V_1 \subset W_1$. Sea $\mathcal{V} = V_1 \times \prod\limits_{k\geq 2}\{0\}$. Mostremos que $\mathcal{V} = V_1 \times \prod\limits_{k\geq 2}\{0\}$ es un abierto en $\varprojlim \boldsymbol{f}$. Por ii), $\mathcal{V} \subset \varprojlim \boldsymbol{f}$. Sean $\boldsymbol{w} \in \mathcal{V}$ y $\epsilon > 0$ tales que $(w_1 - 2\epsilon, w_1 + 2\epsilon) \subset V_1$. Veamos que $B^D_{\varprojlim \boldsymbol{f}}(\boldsymbol{w}, \epsilon) \subset \mathcal{V}$. Si $\boldsymbol{w}' \in B^D_{\varprojlim \boldsymbol{f}}(\boldsymbol{w}, \epsilon)$, por la definición de la métrica D, $\frac{|w_1 - w_1'|}{2} < \epsilon$. De modo que $w_1' \in V_1$ y, por construcción del abierto W_1, $w_k = 0$, para cada $k \geq 2$. De modo que $\boldsymbol{w}' \in \mathcal{V}$; por lo tanto, $\mathcal{V}$ es un conjunto abierto en $\varprojlim \boldsymbol{f}$.

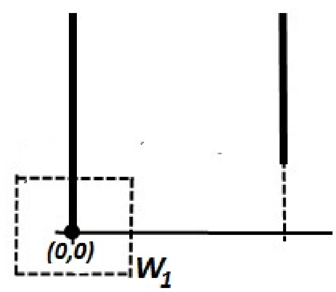

Figura 3.2: Forma del conjunto V_1, para el Caso II del Lema 3.1.

Es inmediato notar que, para ambos casos, $\mathcal{V}$ es un conjunto conexo tal que $\boldsymbol{p} \subset \mathcal{V} \subset U$; por lo tanto, $\varprojlim \boldsymbol{f} \setminus \{\overline{\mathbf{1}}\}$ es localmente conexo y, por el Teorema 1.10, se concluye que $\varprojlim \boldsymbol{f}$ localmente conexo. □

Los siguientes teoremas nos relacionan a las funciones escalera, libres de diagonal superior con su iteración f^2 y el límite inverso generalizado.

Teorema 3.2. *Sea f una función escalera tal que $\varprojlim \boldsymbol{f}$ no contiene curvas cerradas simples o $\dim(\varprojlim \boldsymbol{f}) = 1$. Entonces f^2 es una función escalera.*

Demostración. Para probar que f^2 es una función escalera, basta que para cada componente C de $[0,1] \setminus \mathcal{N}$, el conjunto $f^2(C)$ sea degenerado pues $\mathcal{N}$ es un conjunto finito.

Sea C^* una componente de $[0,1] \setminus \mathcal{N}$ y supongamos que $f^2(C^*)$ es un conjunto no degenerado. Como f es una función escalera, $f(C^*)$ es un conjunto degenerado, digamos $\{c_1\}$; de modo que $f^2(C^*) = f(c_1)$. Dado que

$\mathrm{Cl}(C^*)$ es un intervalo, por la Proposición 2.9, existen $t_s \in \mathcal{N}$ y un intervalo $[a,b]$, tales que $[a,b] \subset C^*$ y $[a,b] \subset f(t_s)$. Sea $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión tal que $\alpha_k \in f(\alpha_{k+1})$, para cada $k \geq 0$, donde $\alpha_0 = t_s$ .Definimos:

$$\Omega = \big\{(w, c_1, z)\ : w \in f(c_1) \text{ y } z \in [a,b]\big\} \times \prod_{k\geq 0}\{\alpha_k\}$$

.

Entonces Ω es una 2-celda contenida en $\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$; lo cual es una contradicción, pues $\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$ no contenga curvas cerradas simples o bien $\dim(\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}) = 1$; por tanto, $f^2(C)$ es un conjunto degenerado, para cada componente C, de $[0,1] \setminus \mathcal{N}$. Esto muestra que f^2 es una función escalera. $\square$

Lema 3.3. *Sea f una función escalera y libre de diagonal superior tal que f^2 es una función escalera. Entonces* $0 \in f(0)$ *y* $f(1) = \big\{1\big\}$.

Demostración. Sea C la componente de $[0,1] \setminus \mathcal{N}$ tal que $1 \in \mathrm{Cl}(C)$. Dado que f es una función escalera, $f(C)$ es un conjunto degenerado, digamos $\{t_0\}$. Por otro lado, como f es libre de diagonal superior, $f(t) \subset (t, 1]$. De modo que $t_0 > t$, para cada $t \in C$ pero esto sólo es posible cuando $t_0 = 1$. De este modo, se tiene que $f(t) = \big\{1\big\}$ para cada $t \in C$. Ahora, si $f(1)$ fuera es un conjunto no degenerado se sigue que $f^2(t)$ es un conjunto no degenerado, para cada $t \in C$, lo cual no es posible debido a que f^2 es una función escalera. Para concluir, dado que f es suprayectiva, libre de diagonal y $f(1) = \big\{1\big\}$, se tiene que $0 \in f(0)$. $\square$

Teorema 3.4. *Sea f una función escalera y libre de diagonal superior tal que f^2 es una función escalera. Entonces* $\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$ *es una dendrita.*

Demostración. Sea f es una función escalera y libre de diagonal superior tal que f^2 es una función escalera. Por el Corolario 2.30 y los Lemas 3.1 y 3.3 se sigue que $\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$ es un continuo tipo árbol y localmente conexo, respectivamente y, por el Teorema 1.37, se sique que $\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$ es una dendrita. $\square$

El siguiente corolario nos permite identificar a los tipos de subcontinuos de $\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$ para una función f con las características del Teorema 3.4. Los clasificamos según tengan al elemento $\overline{\mathbf{1}}$ o no lo tengan.

Corolario 3.5. *Sea f una función escalera y libre de diagonal superior tal que f^2 es una función escalera. Entonces todo subcontinuo $K \subset \varprojlim \boldsymbol{f}$ tal que $\overline{\mathbf{1}} \notin K$ es un árbol.*

Demostración. Sea K un subcontinuo de $\varprojlim \boldsymbol{f}$ tal que $\overline{\mathbf{1}} \notin K$. Por el Corolario 2.17, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que K es homeomorfo a $P_M(K)$. Por la Proposición 2.20 y el Lema 2.29 tenemos que G_{M-1} es un árbol y dado que $P_M(K)$ es un subcontinuo de G_{M-1}, por el Teorema 1.18, $P_M(K)$ es un árbol; por lo tanto, K es un árbol. □

Los siguientes dos ejemplos de funciones escalera muestran que las dos condiciones para el Teorema 3.4 son necesarias. En el primero omitimos la condición de que f^2 sea una función escalera. Para el segundo definimos una función escalera que no es libre de diagonal superior. Quiero agradecer al Profesor W. S. Charatonik por el segundo ejemplo.

Ejemplo 3.6. *Sea $f : [0,1] \to C([0,1])$ la función escalera definida por:*

$$f(t) = \begin{cases} [0,1], & t = 0; \\ \{1/2\}, & 0 < t < 1/4; \\ [1/2, 3/4], & t = 1/4; \\ \{3/4\}, & 1/4 < t < 1/2; \\ [3/4, 1], & t = 1/2; \\ \{1\}, & 1/2 < t \leq 1. \end{cases}$$

Entonces $\varprojlim \boldsymbol{f}$ no es una dendrita.

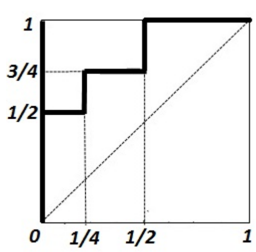

Figura 3.3: Gráfica del Ejemplo 3.6.

Demostración. Observemos que f es libre de diagonal superior y, por la definición de f, $[3/4, 1] \subset f^2(t)$, para cada $t \in [0, 1/4]$; es decir, f^2 no posee una cantidad finita de puntos t donde $f^2(t)$ no es un conjunto degenerado; por lo tanto, f^2 no es una función escalera. Por otro lado, como $f(1/2) = [3/4, 1]$, $1/2 \in f([0, 1/4])$ y $f(0) = [0, 1]$, el conjunto

$$[3/4, 1] \times \{1/2\} \times [0, 1/4] \times \prod_{k \geq 4} \{0\}$$

es una 2-celda contenida en $\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$; por tanto no puede ser una dendrita. $\square$

Ejemplo 3.7. *(W. S. Charatonik.) Sea* $f : [0, 1] \to C([0, 1])$ *la función escalera (función* H*) definida por:*

$$f(t) = \begin{cases} [0, 1], & t = 0, 1; \\ \{1/2\}, & 0 < t < 1. \end{cases}$$

Entonces $\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$ *no es una dendrita.*

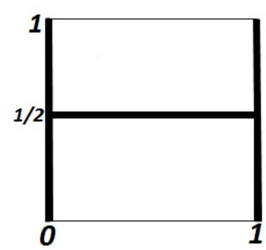

Figura 3.4: Gráfica del Ejemplo 3.7 (función H).

Demostración. Dado que $f(1/2) = \{1/2\}$ y $f(0) = f(1) = [0, 1]$ se sigue que $f^n = f$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Claramente, f no es libre de diagonal superior. Veamos ahora que $\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$ no es localmente conexo en el punto $\overline{\mathbf{0}}$. Para ello utilizamos la definición de la métrica D que definimos en (1.2). Sea $\boldsymbol{x} \in B^D_{\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}}(\overline{\mathbf{0}}, 1/8)$. Entonces $|x_1|/2 \leq D(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\mathbf{0}}) < 1/8$, de modo que $|x_1| < 1/4$; es decir, $x_1 \in [0, 1/4]$. Por la definición de f se sigue que $x_2 \in \{0, 1\}$ y, dado que $f^{-1}(\{0, 1\}) = \{0, 1\}$, obtenemos que $x_k \in \{0, 1\}$, para todo $k \geq 2$. De modo que $B^D_{\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}}(\overline{\mathbf{0}}, 1/8) \subset [0, 1/4] \times \prod_{k=2}^{\infty} \{0, 1\}_k$. Ahora bien, por la Proposición

1.3, $\prod_{k=2}^{\infty}\{0,1\}_k$ es homeomorfo al conjunto de Cantor y, dado que el conjunto de Cantor es totalmente disconexo, el conjunto $[0,1/4]\times\prod_{k=2}^{\infty}\{0,1\}_k$ no puede contener conjuntos conexos con interior no vacío; por lo tanto, no puede existir un conjunto abierto y conexo de $\underleftarrow{\lim}\,\boldsymbol{f}$ contenido en $B^{D}_{\underleftarrow{\lim}\,\boldsymbol{f}}(\overline{\mathbf{0}},1/8)$. De manera que, $\underleftarrow{\lim}\,\boldsymbol{f}$ no puede ser una dendrita. □

El siguiente resultado establece cuándo garantizamos que $\underleftarrow{\lim}\,\boldsymbol{f}$ es un arco con funciones escalera.

Corolario 3.8. *Sea f función una escalera y libre de diagonal superior tal que f^2 es una función escalera y $\mathcal{G}(f)$ es un arco. Entonces* $\underleftarrow{\lim}\,\boldsymbol{f}$ *es un arco.*

Demostración. Sea f una función escalera y libre de diagonal superior, tal que f^2 es una función escalera y $\mathcal{G}(f)$ es un arco. Por el Lema 3.1, $\underleftarrow{\lim}\,\boldsymbol{f}$ es localmente conexo. Por los Teoremas 1.63 y 2.31, $\underleftarrow{\lim}\,\boldsymbol{f}$ es un continuo tipo arco y, por el Teorema 1.38, se sigue que $\underleftarrow{\lim}\,\boldsymbol{f}$ es un arco. □

Para la prueba del siguiente corolario recordemos que dada una función escalera f, en (2.3), se estableció que $f(t_i)=[p_i,q_i]$, para cada $t_i\in\mathcal{N}$.

Corolario 3.9. *Sea f función una escalera tal que* $\underleftarrow{\lim}\,\boldsymbol{f}$ *es un arco. Entonces f^2 es una función escalera y $\mathcal{G}(f)$ es un arco.*

Demostración. Sea f una función escalera tal que $\underleftarrow{\lim}\,\boldsymbol{f}$ es un arco. Por el Teorema 3.2, f^2 es una función escalera. Supongamos que la gráfica de f contiene un triodo simple. Dada la definición de función escalera, los puntos de ramificación de la gráfica de f deben de ser de la forma (t_i,c), para algún $t_i\in\mathcal{N}$. Los siguientes casos son posibles:

Caso I. Si $c\in(p_i,q_i)$.

Como f es una función escalera, $f(z)=\{c\}$, para cada $z\in(t_{i-1},t_i)$ o $z\in(t_i,t_{i+1})$. Sin perder generalidad, supongamos que $f(z)=\{c\}$, para

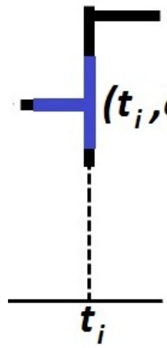

Figura 3.5: Punto de ramificación de $\mathcal{G}(f)$ (Caso I).

cada $z \in (t_{i-1}, t_i)$. Por la Proposición 2.9, existen $t_{i-1} < \alpha < t_i$ y $t_s \in \mathcal{N}$ tales que $[\alpha, t_i] \subset f(t_s)$. Sea $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de $[0,1]$ tal que $\alpha_0 = t_s$ y $\alpha_n \in f(\alpha_{n+1})$, para cada $n \geq 0$. Definimos:

$$T_1 = [\{(c,t) \ : \ t \in [\alpha, t_i]\} \cup \{(w, t_i) \ : \ w \in f(t_i)\}] \times \prod_{n \geq 0} \{\alpha_n\}.$$

Entonces T_1 es un triodo simple contenido en $\varprojlim \boldsymbol{f}$; lo cual es una contradicción.

Caso II. Si $c = p_i$ o $c = q_i$.

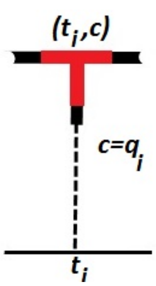

Figura 3.6: Punto de ramificación de $\mathcal{G}(f)$ (Caso II).

Sin perder generalidad, supongamos que $c = q_i$; por tanto, $f(z) = \{q_i\}$, para cada $z \in (t_{i-1}, t_{i+1})$ con $z \neq t_i$. De modo que, $0 < t_i < 1$. Por la Proposición 2.26, existe $t_s \in \mathcal{N}$ tal que $t_i \in (p_s, q_s)$. Sean $[a, b]$ un intervalo tal que $t_i \in (a,b) \subset (p_s, q_s) \cap (t_{i-1}, t_{i+1})$ y una sucesión $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ de $[0,1]$ tal que $\alpha_0 = t_s$ y $\alpha_n \in f(\alpha_{n+1})$, para cada $n \geq 0$. Definimos:

$$T_2 = [\{(w, t_i) \ : \ w \in f(t_i)\} \cup \{(q_i, z) \ : \ z \in [a,b]\}] \times \prod_{n\geq 0}\{\alpha_n\}$$

Entonces T_2 es un triodo simple contenido en $\varprojlim \boldsymbol{f}$, lo cual es una contradicción; por lo tanto, $\mathcal{G}(f)$ no puede contener puntos de ramificacón.

Por el Teorema 2.3 se tiene que $\mathcal{G}(f)$ es un árbol, de modo que $\mathcal{G}(f)$ es un arco. Esto concluye la prueba de nuestro corolario. $\square$

Teorema 3.10. *Sea f una función escalera y libre de diagonal superior tal que $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es una dendrita, la cual no es un arco. Entonces $\overline{\boldsymbol{1}}$ es el único punto límite del conjunto Ram$(\varprojlim \boldsymbol{f})$.*

Demostración. Sea f una función escalera tal que $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es una dendrita la cual no es un arco. Por el Teorema 3.2 y el Corolario 3.8, f^2 es una función escalera y $\mathcal{G}(f)$ contiene un triodo simple, respectivamente. Por lo establecido en la prueba del Corolario 3.9, un punto de ramificación de $\mathcal{G}(f)$ tiene la forma (t_i, c), para algún $t_i \in \mathcal{N}$. De nuevo, dos casos son posibles y son los mismos que para el Corolario 3.9. Definimos una sucesión de triodos simples $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenidos en $\varprojlim \boldsymbol{f}$ cuyos puntos de ramificación $\{\boldsymbol{p}^n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen a $\overline{\mathbf{1}}$.

Sean T_1 y T_2 los triodos simples definidos en la prueba del Corolario 3.9. Debido a que f^2 es una función escalera, $c \notin \mathcal{N}$. Como f es una función escalera, por el inciso *ii*) de la Proposición 2.9 existe, para ambos casos, un intervalo $[a', b'] \subset f(t_i)$ tal que $c \in [a', b']$ y $f([a', b'])$ es un conjunto degenerado, digamos que $f([a', b']) = \{\beta_0\}$.

Sean T_1^* y T_2^* los triodos simples obtenidos al reemplazar $f(t_i)$ por $[a', b']$ en cada caso. Dado que f^2 es una función escalera, $f^n(\beta_0)$ es un conjunto degenerado para cada $n \in \mathbb{N}$; digamos que $f^n(\beta_0) = \{\beta_n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

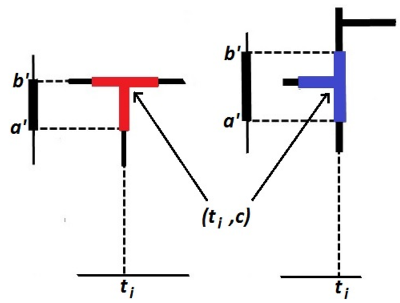

Figura 3.7: Triodos simples T_1^* (derecha) y T_2^* (izquierda) en $\mathcal{G}(f)$.

Definimos:

$$T_k^n = \big\{(\beta_n, ..., \beta_0)\big\} \times T_k^* \quad k = 1, 2. \tag{3.2}$$

Entonces T_k^n es un triodo simple para los cuales se cumple que $\varprojlim \boldsymbol{f}$ tal que $\boldsymbol{p}^n = (\beta_n, ..., \beta_1, c, t_i, t_s ...)$ es punto de ramificación de T_k^n, para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $k = 1, 2$; por tanto, $\boldsymbol{p}^n$ es un punto de ramificación de $\varprojlim \boldsymbol{f}$. Dado que f es libre de diagonal superior $\beta_0 \neq 0$. Por el Teorema 2.11 y el Lema 3.3, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\beta_k = 1$, para todo $k \geq m$, de modo que la sucesión $\{\boldsymbol{p}^n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\overline{\mathbf{1}}$.

Supongamos que existen un punto $\boldsymbol{q}$ en $\varprojlim \boldsymbol{f} \setminus \{\overline{\mathbf{1}}\}$ y $\{\boldsymbol{q}^n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que converge a $\boldsymbol{q}$ con $\boldsymbol{q}^n$ un punto de ramificación de $\varprojlim \boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{q}^n \neq \boldsymbol{q}^m$, para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$. Sea K un subcontinuo de $\varprojlim \boldsymbol{f}$ tal que $\boldsymbol{q} \in \ \mathrm{Int}\ (K)$. De modo que, para n suficientemente grande, $\boldsymbol{q}^k$ es un punto de ramificación de K, para cada $k \geq n$. Por el Corolario 3.5, K es un árbol. De forma que K tiene una infinidad de puntos de ramificación; lo cual es una contradicción. Esto concluye nuestra prueba. □

En [10], Vidal-Escobar, Ivon y Martinez-de-la-Vega, Veronica muestran que toda dendrita con una cantidad finita de puntos ramificación obtenida como límite inverso generalizado bajo una misma función scs satisface que éstos puntos pertenecen a un mismo arco. La pregunta natural sería: ¿Este resultado se sigue conservando sin la condición sobre los puntos de ramificación? La respuesta es negativa y se muestra en el siguiente ejemplo. Antes de analizar el ejemplo, tomemos en cuenta que si una dendrita tiene a todos sus puntos de ramificación en un mismo arco, entonces cualquier subcontinuo de ésta, que también sería una dendrita, satisface ésta misma condición. Con esto en mente, procedamos con nuestro ejemplo.

Ejemplo 3.11. *Sea $f : [0,1] \to C([0,1])$ la función escalera definida como sigue:*

$$f(t) = \begin{cases} [0,1], & t = 0; \\ \{1/2\}, & 0 < t < 1/8; \\ [1/2,1]\,, & t = 1/8; \\ \{1\}, & 1/8 < t < 3/4; \\ [7/8,1]\,, & t = 3/4; \\ \{1\}, & 3/4 < t \leq 1. \end{cases}$$

Entonces $\varprojlim \boldsymbol{f}$ *es una dendrita que tiene una infinidad de puntos de ramificación y no pertenecen a un mismo arco.*

Demostración. Observemos que f es una función escalera y libre de diagonal superior. Por la definición de f, se tiene que $f((0,1/8]) = [1/2,1]$ y $f([1/2,1]) = [7/8,1]$. De forma que, $f^2((0,1/8]) = [7/8,1]$ y $f^2([1/2,1]) = \{1\}$. Así, f^2 es una función escalera. Por estas mismas afirmaciones observemos que $f^3 = F^*$, donde F^* es la función definida en el Ejemplo 2.8. Por el Teorema 3.4, $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es una dendrita. Como f^2 es una función escalera, por el Lema 2.29, $\overleftarrow{A_2}$ es un árbol y tiene a $(0,3/4,1)$ como punto de ramificación y no pertenece al arco que va de $(0,0,0)$ a $(1,1,1)$.

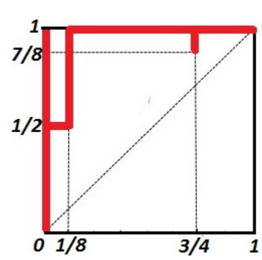

Figura 3.8: Gráfica del Ejemplo 3.11.

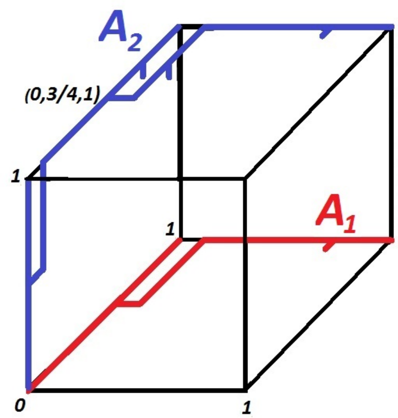

Figura 3.9: Gráfica de A_2 para la función del Ejemplo 3.11.

Por otro lado, dado que $f(0) = [0,1]$ y, por la Proposición 2.20, A_2 es homeomorfo a G_2, se tiene que el conjunto dado por $G_2 \times \prod_{k\geq 4} \{0\}_k$ es un subcontinuo de $\varprojlim \boldsymbol{f}$ que no contiene a sus puntos de ramificación dentro en el mismo arco. Esto implica que $\varprojlim \boldsymbol{f}$ tampoco los puede tener. Como mostramos en el Teorema 3.10, $\varprojlim \boldsymbol{f}$, tiene al menos una cantidad numerable de puntos de ramificación. Esto concluye nuestra afirmación. $\square$

Teorema 3.12. *Sean f una función escalera tal que f^2 es una función escalera y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\theta_{A_n}(\boldsymbol{p}) \leq 4$, para cada $\boldsymbol{p} \in A_n$.*

Demostración. Hagamos la prueba por inducción sobre n. Para $n = 1$. Por la Proposición 2.20, basta con mostrar que $\theta_{A_1}(\boldsymbol{p}) \leq 4$, para cada $\boldsymbol{p} \in \mathcal{G}(f)$. Analicemos los posibles casos:

Caso 1. Si $\boldsymbol{p} = (u, v)$, donde $u \in [0,1] \setminus \mathcal{N}$.

Entonces $\boldsymbol{p}$ pertenece al arco $\mathrm{Cl}(C) \times \{v\}$, donde C es la componente de $[0,1] \setminus \mathcal{N}$ tal que $u \in C$ y $f(C) = \big\{v\big\}$; es decir, $\theta_{A_1}(\boldsymbol{p}) = 2$.

Caso 2. Si $\boldsymbol{p} = (t_i, v)$.

Sean C y C^* las componentes de $[0,1] \setminus \mathcal{N}$ tales que $t_i \in \mathrm{Cl}(C) \cap \mathrm{Cl}(C^*)$, distinguimos aquí dos posibilidades:

Caso 2.1. Si $\{v\} \neq f(C)$ y $\{v\} \neq f(C^*)$.

Entonces $\boldsymbol{p}$ pertenece al interior del arco $\{t_i\}\times f(t_i)$, por lo que $\theta_{A_1}(\boldsymbol{p}) = 2$.

Caso 2.2. Si $\{v\} = f(C)$ o $\{v\} = f(C)$.

Entonces en el punto $\boldsymbol{p}$ salen a lo más los siguientes arcos $\mathrm{Cl}(C) \times \{v\}$, $\mathrm{Cl}(C^*) \times \{v\}$, $\{t_i\} \times [p_i, v]$ y $\{t_i\} \times [v, q_i]$, donde se definió que $f(t_i) = [p_i, q_i]$; por lo tanto, $\theta_{A_1}(\boldsymbol{p}) \leq 4$.

Esto concluye la prueba de la base de la inducción. Supongamos que el resultado es válido para A_{n-1}; es decir, que todo elemento de A_{n-1} tiene orden menor o igual a 4. Veamos que se sigue cumpliendo para A_n. Antes de continuar con la prueba. Dado que f^2 es una función escalera, por el Lema 2.29, A_n es un árbol, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\boldsymbol{p} \in A_n$. De nuevo consideramos dos casos:

Caso A. Si $\boldsymbol{p} \notin \mathcal{N}^{n+1}$.

Sea C la componente de $[0,1] \setminus \mathcal{N}$ tal que $f(C) = \big\{p_{n+1}\big\}$. Sea $V_1 \times V_2$ un abierto y conexo de $[0,1]^2$ tal que $(V_1 \times V_2) \cap \mathcal{G}(f) \subset C \times \{p_{n+1}\}$. Por la Proposición 2.21 y la continuidad de la función $\pi_n|_{A_{n-1}} : A_{n-1} \to [0,1]$, existe un conjunto abierto y conexo U en A_{n-1} tal que $P_n^{n+1}(\boldsymbol{p}) \in U$ y $x_n \in V_1$, para cada $\boldsymbol{x} \in U$.

Definimos $K = \mathrm{Cl}(U) \times \{p_{n+1}\}$. Por las características de U, se sigue que K es un subcontinuo contenido en A_n tal que $\boldsymbol{p} \in K$. Mostremos ahora que $\boldsymbol{p}$ es un punto interior de K. Para ello, veamos que $U \times \{p_{n+1}\} = (U \times V_2) \cap A_n$. Sólo es necesario verificar que $(U \times V_2) \cap A_n \subset U \times \{p_{n+1}\}$. Sea $\boldsymbol{q} \in (U \times V_2) \cap A_n$. Como $q_n \in V_1$ y $(q_n, q_{n+1}) \in \mathcal{G}(f)$, se tiene que $q_{n+1} = p_{n+1}$; por lo tanto, $\boldsymbol{q} \in U \times \{p_{n+1}\}$. Así, $\boldsymbol{p} \in \mathrm{Int}_{A_n}(K)$.

Por otro lado, dado que $\theta_{A_{n-1}}(P_n^{n+1}(\boldsymbol{p})) \leq 4$ y la $(n+1)$-ésima coordenada de cada elemento de K es p_{n+1}, se sique que $\theta_{A_n}(\boldsymbol{p}) \leq 4$.

Caso B. Si $\boldsymbol{p} \in \mathcal{N}^{n+1}$.

Dado que f^2 es una función escalera, se sigue que $\{p_{n+1}\} \neq f(C)$ y $\{p_{n+1}\} \neq f(C^*)$, donde C y C^* representan las componentes de $[0,1] \setminus \mathcal{N}$ tales que $\mathrm{Cl}(C) \cap \mathrm{Cl}(C^*) = \big\{p_n\big\}$. Sea $V_1 \times V_2$ un abierto y conexo de $[0,1]^2$

tal que $(V_1 \times V_2) \cap \mathcal{G}(f) \subset \{p_n\} \times f(p_n)$. Por otro lado, por el Teorema 2.21, la Proposición 2.28 y la continuidad de la función $\pi_n|_{A_{n-1}} : A_{n-1} \to [0,1]$, existe un abierto y conexo U de A_n tal que $U \cap \mathcal{N}^n = \left\{P_n^{n+1}(\boldsymbol{p})\right\}$ y $x_n \in V_1$, para cada $\boldsymbol{x} \in U$.

Definimos $K = P_n^{n+1}(\boldsymbol{p}) \times f(p_n)$. Entonces K es un subcontinuo de A_{n+1}. Mostremos que $\boldsymbol{p}$ es un punto interior de K. Para ello, veamos que $(U \times V_2) \cap A_n = P_n^{n+1}(\boldsymbol{p}) \times V_2$. Como se puede notar, sólo es necesario verificar que $(U \times V_2) \cap A_n \subset P_n^{n+1}(\boldsymbol{p}) \times V_2$. Sea $\boldsymbol{q} \in (U \times V_2) \cap A_n$. Como $q_n \in V_1$, $q_{n+1} \in V_2$ y $(q_n, q_{n+1}) \in \mathcal{G}(f)$, se sigue que $q_n = p_n$. Dado que $p_n \in \mathcal{N}$, por la Proposicion 2.25, se tiene que $q_k \in \mathcal{N}$, para cada $k \leq n$; es decir, $P_n^{n+1}(\boldsymbol{q}) \in \mathcal{N}^n$. Dada la elección de U, se sigue que $P_n^{n+1}(\boldsymbol{q}) = P_n^{n+1}(\boldsymbol{p})$; por lo tanto, $\boldsymbol{q} \in P_n^{n+1}(\boldsymbol{p}) \times V_2$. Así $\boldsymbol{p}$ pertenece al interior del arco $K \subset A_n$ y, dado que A_n es un árbol, $\theta_{A_n}(\boldsymbol{p}) \leq 2$. Esto concluye la prueba de nuestro teorema. $\square$

Corolario 3.13. *Sean f una función escalera tal que f^2 es una función escalera y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\theta_{G_n}(\boldsymbol{p}) \leq 4$, para cada $\boldsymbol{p} \in G_n$.*

Demostración. Este resultado es una consecuencia inmediata de la Proposición 2.20 y el Teorema 3.12. $\square$

Veamos qué sucede con el orden de cada uno de los puntos de la dendritas obtenidas con las funciones escalera con estas características.

Corolario 3.14. *Sea f una función escalera y libre de diagonal superior tal que $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es un dendrita. Entonces, $\theta_{\varprojlim \boldsymbol{f}}(\boldsymbol{p}) \leq 4$, para cada $\boldsymbol{p} \in \varprojlim \boldsymbol{f}$.*

Demostración. Sea $\boldsymbol{p} \in \varprojlim \boldsymbol{f} \setminus \{\overline{\mathbf{1}}\}$. Por el Teorema 3.2, f^2 es una función escalera y por el Lema 3.3, $f(1) = \left\{1\right\}$. Ahora, por el Teorema 2.16, el Lema 3.1 y el Corolario 3.5, existen un árbol K y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\boldsymbol{p} \in \operatorname{Int}(K) \subset K \subset \varprojlim \boldsymbol{f} \setminus \{\overline{\mathbf{1}}\}$ y K es homeomorfo a $P_N(K)$ con $P_N(K) \subset G_{N-1}$; por tanto, del Corolario 3.13, se concluye que $\theta_{\varprojlim \boldsymbol{f}}(\boldsymbol{p}) = \theta_{G_{N-1}}(P_N(\boldsymbol{p})) \leq 4$.

Para el caso de $\boldsymbol{p} = \overline{\mathbf{1}}$, por el Corolario 2.18, se tiene que $\overline{\mathbf{1}}$ no es de corte; es decir, $\theta_{\varprojlim \boldsymbol{f}}(\overline{\mathbf{1}}) = 1$. Esto concluye la prueba del corolario. $\square$

En resumen, lo que hicimos en esta sección es lo siguiente. Dada una función escalera y libre de diagonal f tal que f^2 es una función escalera, se concluye que $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es una dendrita. Ahora bien, si definimos:

$$\mathcal{A} = \left\{K \in C(\varprojlim \boldsymbol{f}) : \overline{\mathbf{1}} \notin K\right\} \quad y \quad \mathcal{B} = \left\{K \in C(\varprojlim \boldsymbol{f}) : \overline{\mathbf{1}} \in K\right\}.$$

Entonces

- $\overline{\mathbf{1}}$ es un punto extremo de la dendrita $\varprojlim \boldsymbol{f}$.
- $C(\varprojlim \boldsymbol{f}) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$
- Para todo $K \in \mathcal{A}$, K es un árbol.
- Para todo $K \in \mathcal{B}$, $\overline{\mathbf{1}}$ es el único punto límite de $Ram(K)$.

3.1. Enteros y negativos

En esta sección damos la definición de los límites inversos generalizados para un conjunto dirigido distinto de $\mathbb{N}$. Muchos resultados interesantes de esta definición se han encontrado desde entonces, algunos de ellos debido a S. Varagona [18] y más recientemente por P. Vernon [21]. Durante las siguientes páginas nos enfocamos en el comportamiento de las funciones escalera en los límites inversos generalizados definidos sobre los números enteros y los enteros negativos.

Representamos por $\mathbb{Z}^-$ al conjunto de los números negativos y en los productos $\prod_{k\in\mathbb{Z}}[0,1]_k$ y $\prod_{k\in\mathbb{Z}^-}[0,1]_k$, definimos las métricas:

$$D_Z : \prod_{k\in\mathbb{Z}}[0,1]_k \times \prod_{k\in\mathbb{Z}}[0,1]_k \to \mathbb{R} \quad y \quad D_{Z^-} : \prod_{k\in\mathbb{Z}^-}[0,1]_k \times \prod_{k\in\mathbb{Z}^-}[0,1]_k \to \mathbb{R},$$

de la siguiente manera:

$$D_Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|x_k - y_k|}{2^{|k|}} \quad y \quad D_{Z^-}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^-} \frac{|x_k - y_k|}{2^{|k|}}. \tag{3.3}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, en el producto $\prod\limits_{k=-n}^{n} [0,1]_k$ definimos la métrica $D_{-n,n}$: $\prod\limits_{k=-n}^{n} [0,1]_k \times \prod\limits_{k=-n}^{n} [0,1]_k \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$D_{-n,n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{|x_k - y_k|}{2^{|k|}}. \tag{3.4}$$

Observemos que la métrica $D_{-n,n}$ genera en $\prod\limits_{k=-n}^{n} [0,1]_k$ la topología usual. De modo que $\prod\limits_{k=-n}^{n} [0,1]_k$ sigue siendo compacto con $D_{-n,n}$.

Proposición 3.15. *Los espacios* $\left(\prod\limits_{k=-n}^{n} [0,1]_k, D_{-n,n}\right)$ *y* $\left(\prod\limits_{k=1}^{2n+1} [0,1]_k, D_{2n+1}\right)$ *son homeomorfos, para cada* $n \in \mathbb{N}$*.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Dado que ambos espacios son compactos basta con definir una función continua y biyectiva entre ellos. Sea

$$R_n : \left(\prod_{k=-n}^{n} [0,1]_k, D_{-n,n}\right) \to \left(\prod_{k=1}^{2n+1} [0,1]_k, D_{2n+1}\right)$$

dada por:

$$R_n((x_{-n}, ..., x_0, ..., x_n)) = (x'_1, x'_2, ..., x'_{2n+1}),$$

donde $x'_k = x_{k-(n+1)}$, para cada $k = 1, ..., 2n+1$. Es claro que R_n es biyectiva debido a que sólo se recorren los índices de $-n$ hasta 1 y de n hasta $2n+1$. Resta mostrar la continuidad de la función R_n. Para ello, dados $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{x}'$ en $\prod\limits_{k=-n}^{n} [0,1]_k$, se satisface que:

$$D_{2n+1}(R_n(\boldsymbol{x}), R_n(\boldsymbol{x}')) \leq 2^n D_{-n,n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'),$$

debido a que, para cualesquiera números reales no negativos $a_{-n}, ..., a_0, ..., a_n$ se tiene que:

$$\sum_{k=-n}^{n} \tfrac{a_k}{2^{|k|}} \leq 2^n \sum_{j=1}^{2n+1} \tfrac{b_j}{2^j}, \text{ donde } b_j = a_{j-(n+1)}.$$

Esta desigualdad muestra que R_n es una función continua. □

Definición 3.16. *Sea $f : [0,1] \to C([0,1])$ una función scs. Definimos y denotamos al límite inverso generalizado de f sobre $\mathbb{Z}^-$ como el conjunto de puntos:*

$$\varprojlim_{Z^-} \boldsymbol{f} = \left\{\boldsymbol{x} \in \prod_{k\in\mathbb{Z}^-} [0,1]_k : x_{k-1} \in f(x_k),\ \textit{para cada } k \in \mathbb{Z}^-\right\}$$

Definición 3.17. *Sea $f : [0,1] \to C([0,1])$ una función scs. Definimos y denotamos el límite inverso generalizado de f sobre $\mathbb{Z}$ como el conjunto de puntos:*

$$\varprojlim_{Z} \boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{x} \in \prod_{k\in\mathbb{Z}} [0,1]_k : x_{k-1} \in f(x_k),\ \textit{para cada}\ \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Hagamos un ejemplo del límite inverso generalizado con la Deinifición 3.16. Con este ejemplo mostramos que $\varprojlim \boldsymbol{f}$ y $\varprojlim_{Z} \boldsymbol{f}$ pueden ser conjuntos topológicamente distintos y lo realizamos con una función escalera f.

Ejemplo 3.18. *Sea $f : [0,1] \to C([0,1])$ la función dada por:*

$$f(t) = \begin{cases} [0,1], & t = 0; \\ \{1/2\}, & 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Entonces $\varprojlim \boldsymbol{f}$ y $\varprojlim_{Z} \boldsymbol{f}$ no son homeomorfos.

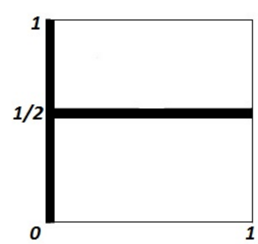

Figura 3.10: Gráfica del Ejemplo 3.18.

Demostración. Hagamos el modelo para $\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$.

Dado que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$, el elemento $\overline{\boldsymbol{\tfrac{1}{2}}} \in \underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$. Sean $\boldsymbol{x} \in \underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$ tal que $\boldsymbol{x} \neq \overline{\boldsymbol{\tfrac{1}{2}}}$ y $m \in \mathbb{N}$ mínimo tal que $x_{m+1} \neq 1/2$. Como $x_{m+1} \in f(x_{m+2})$, por la definición de f, $x_{m+2} = 0$. Dado que 0 sólo está en la imagen de 0, $x_k = 0$, para cada $k \geq m+2$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:

$$I_n = \left\{\boldsymbol{x} \in \underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f} : x_k = \frac{1}{2},\ \text{si } k \leq n-1 \text{ y, } x_k = 0,\ \text{si } k \geq n+1\right\}.$$

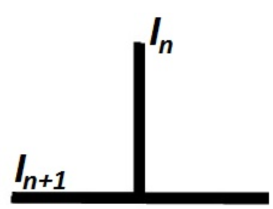

Figura 3.11: Intersección de I_n con I_{n+1} en el Ejemplo 3.18.

Observemos que, para cada elemento del conjunto I_n, sólo cambia en la n-ésima entrada. Por otro lado, dado que $f(0) = [0,1]$ y $\frac{1}{2} \in f(t)$, el conjunto I_n es un arco contenido en $\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$ y, por la definición de la métrica D, $\text{diám}(I_n) \leq \frac{1}{2^n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, para todo $\boldsymbol{x} \in I_n$, $x_k = \frac{1}{2}$, para cada $1 \leq k \leq n-1$ y $x_k = 0$, para cada $k \geq n+1$. Entonces $I_n \cap I_m \neq \emptyset$ si y sólo si $m = n$ o $m = n+1$; más aún, I_{n+1} intersecta I_n en su *punto medio*.

Por tanto, $\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f} = \{\overline{\boldsymbol{\tfrac{1}{2}}}\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.

Observemos que, dada la representación de $\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$, el conjunto de sus puntos de ramificación corresponde a la sucesión $\{\boldsymbol{p}^n\}_{n=1}^{\infty}$ donde $p_k^n = \frac{1}{2}$, para cada $k \leq n$ y $p_k^n = 0$, para cada $k \geq n+1$. Esto implica que el conjunto de los puntons de ramificación de $\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$ tiene a $\overline{\boldsymbol{\tfrac{1}{2}}}$ como único punto límite.

Veamos ahora el modelo de $\underleftarrow{\text{límg}}_{Z}\, \boldsymbol{f}$.

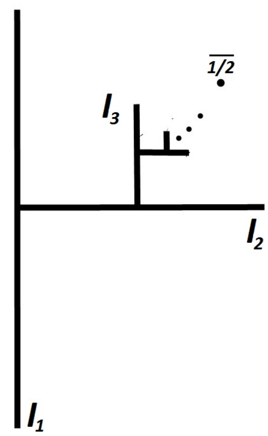

Figura 3.12: Modelo para $\varprojlim \boldsymbol{f}$ del Ejemplo 3.18.

Para ello, ocupamos algunos argumentos utilizados para hallar el modelo de $\varprojlim \boldsymbol{f}$. Primero, dado que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ y $0 \in f(0)$, se tiene que $\overline{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}$ y $\overline{\mathbf{0}}$ son elementos de $\varprojlim_Z \boldsymbol{f}$. Segundo, para cualquier $\boldsymbol{x} \in \varprojlim_Z \boldsymbol{f}$ con $\boldsymbol{x} \neq \overline{\mathbf{0}}$, existe un mínimo número entero N_1, tal que $x_{N_1} \neq 0$. Como $x_{N_1-1} \in f(x_{N_1})$ se tiene que $x_{N_1-1} = \frac{1}{2}$; por tanto, $x_k = \frac{1}{2}$, para cada $k \leq N_1 - 1$. Por otro lado, si $\boldsymbol{x} \in \varprojlim_Z \boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{x} \neq \overline{\frac{1}{2}}$, existe un mínimo número entero N_2, tal que $x_{N_2} \neq \frac{1}{2}$. Como $x_{N_2} \in f(x_{N_2+1})$ tenemos que $x_{N_2+1} = 0$ y dado que 0 sólo está en la imagen de 0, se sigue que $x_s = 0$, para cada $s \geq N_2$. Por último, para cada $n \in \mathbb{Z}$ definimos

$$\mathcal{I}_n = \left\{\boldsymbol{x} \in \varprojlim_Z \boldsymbol{f} : x_k = \frac{1}{2}, \text{ si } k \leq n-1 \text{ y}, \ x_k = 0, \text{ si } k \geq n+1\right\}.$$

Por el mismo argumento empleado para I_n, se sigue que $\mathcal{I}_n$ es un arco contenido en $\varprojlim_Z \boldsymbol{f}$ y, dada la definición de la métrica D_Z, diám$(\mathcal{I}_n) \leq \frac{1}{2^{|n|}}$, para cada $n \in \mathbb{Z}$. Entonces $\mathcal{I}_n \cap \mathcal{I}_m \neq \emptyset$ si y sólo si $m = n$ o $m = n+1$. Más aún $\mathcal{I}_{n+1}$ intersecta a $\mathcal{I}_n$ en su *punto medio*, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, $\varprojlim_Z \boldsymbol{f} = \left\{\overline{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}, \overline{\mathbf{0}}\right\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{I}_n$.

Al igual que con la representación de $\varprojlim \boldsymbol{f}$, notemos que $\varprojlim_Z \boldsymbol{f}$ tiene

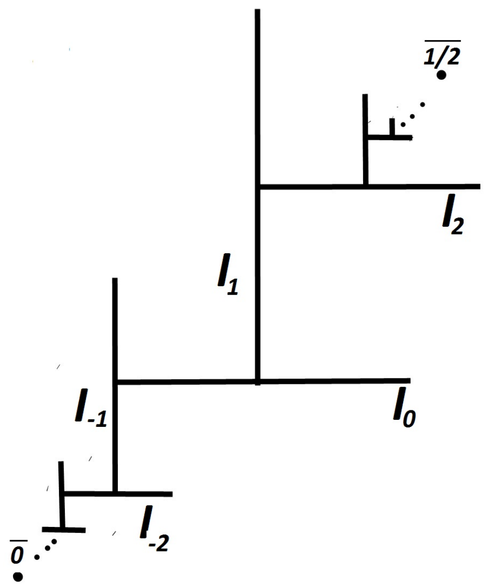

Figura 3.13: Modelo para $\varprojlim_Z \boldsymbol{f}$ del Ejemplo 3.18.

a $\overline{\frac{1}{2}}$ y $\overline{\mathbf{0}}$ como únicos puntos límite de sus puntos de ramificación. De modo que $\varprojlim \boldsymbol{f}$ y $\varprojlim_Z \boldsymbol{f}$ no pueden ser homeomorfos entre sí. $\square$

Una de las preguntas que se han hecho respecto al tema de los límites inversos generalizados es saber qué continuos pueden obtenerse mediante una sola función scs f. Por ejemplo, V. C. Nall muestra que no es posible obtener 2-celdas [15, Teorema 3.2, p. 1325], A. Illanes, muestra que no es posible obtener una curva cerrada simple [4, Teorema 1, p. 2990] y, el mismo V. C. Nall, muestra que la única gráfica finita que es posible obtener mediante esta forma es el arco [16, Teorema 13, p. 736]. En el caso de la definición del límite inverso generalizado en los enteros, algunos de estos resultados ya no continuan siendo válidos. P. Vernon, muestra que para la función $f : [0, 1] \to C([0, 1])$ definida por $f(1/2) = [0, 1/2]$, $f(1) = [1/2, 1]$, $f(x) = \lfloor 2x \rfloor /2$ en otro caso, $\varprojlim_Z \boldsymbol{f}$ es una 2 celda, donde $\lfloor \cdot \rfloor$ representa la función mayor entero menor igual que [21, Ejemplo 6].

A continuación, enunciamos los resultados sobre la compacidad y conexidad, respecto a los conjuntos que se obtienen de las Definiciones 3.16 y

3.17. Los teoremas que a continuación enunciamos están en términos de una función $f : [0,1] \to C([0,1])$ scs. Sin embargo, su prueba para una familia de continuos en general puede ser hallada en [18].

Teorema 3.19. *Sea f una función scs y suprayectiva. Entonces* $\underset{\longleftarrow\, Z}{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$ *y* $\underset{\longleftarrow\, Z^-}{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$ *son compactos y no vacíos.* [18, Teorema 2.1, p. 3]

Teorema 3.20. *Sea f una función scs y suprayectiva. Entonces* $\underset{\longleftarrow\, Z}{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$ *y* $\underset{\longleftarrow\, Z^-}{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$ *son conexos y no vacíos.* [18, Teorema 2.2, p. 4]

Teorema 3.21. *Sea f una función scs y suprayectiva. Entonces* $\underset{\longleftarrow\, Z}{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$ *es un continuo si y sólo* $\underset{\longleftarrow}{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$ *es un continuo.* [18, Teorema 2.2, p. 4]

Llegados a este punto, retomamos la Definición 1.60 y la adaptamos para una función scs $f : [0,1] \to C([0,1])$. Si $f : [0,1] \to C([0,1])$ es una función scs, la función $f^{-1} : [0,1] \to 2^{[0,1]}$ está dada por

$$f^{-1}(t) = \{x \in [0,1] : \ t \in f(x)\}.$$

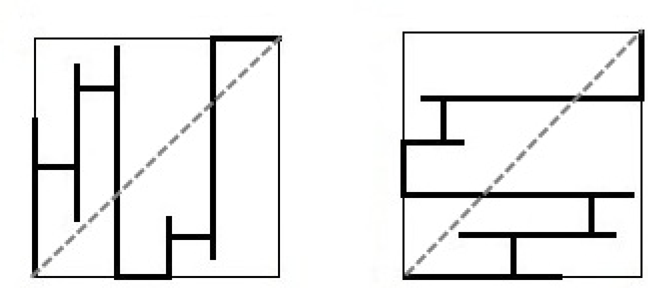

Figura 3.14: Gráficas de f (izquierda) y f^{-1} (derecha).

Geométricamente, la gráfica de la función f^{-1}, se obtiene mediante el reflejo de la gráfica de f con respecto a la diagonal. Por el Teorema 1.45, se sigue que f es scs si y sólo si f^{-1} es scs. Cabe mencionar que f^{-1} está bien definida sobre todo el intervalo $[0,1]$ debido a que f es una función suprayectiva.

Como el lector lo habrá notado, dadas las definiciones de f^{-1} y de los límites inversos generalizados sobre los enteros negativos existe una correspondencia entre las coordenadas de $\varprojlim_{Z^-} \boldsymbol{f}$ y $\varprojlim \boldsymbol{f}$. Establecemos formalmente esta relación.

Teorema 3.22. *Sea f una función scs. Entonces $\varprojlim \boldsymbol{f^{-1}}$ es homeomorfo a $\varprojlim_{Z^-} \boldsymbol{f}$.* [21, Teorema 3, p. 36]

Es momento de extender los resultados obtenidos en el Capítulo 2. Comenzamos con los conjuntos A_n de la siguiente manera:

$$\mathcal{A}_n = \Big\{ \boldsymbol{x} \in \prod_{k=-n}^{n} [0,1] : \ x_{k+1} \in f(x_k), \ \text{para cada } -n+1 \leq k \leq n \Big\}. \quad (3.5)$$

Proposición 3.23. *Sean f una función escalera y $n \in \mathbb{N}$. Los siguientes enunciados se satisfacen:*

i) *A_n es homeomorfo a $\mathcal{A}_{2n+1}$.*

ii) *$\mathcal{A}_n$ es localmente conexo.*

iii) *Si f^2 es una función escalera. Entonces $\mathcal{A}_n$ es un árbol.*

Demostración. Para el inciso i). La restricción $R_n|_{\mathcal{A}_n} : \mathcal{A}_n \to A_{2n+1}$ es un homeomorfismo, donde R_n es el homeomorfismo definido en la Proposición 3.15.

El inciso ii) es una consecuencia inmediata del inciso i) y el Teorema 2.21.

El inciso iii) se sigue de inmediato de i) y el Lema 2.29. Esto concluye la prueba de la Proposición. □

Teorema 3.24. *Sean f una función escalera, libre de diagonal superior tal que $f(1) = \{1\}$ y un subconjunto cerrado $K \subset \varprojlim_{Z} \boldsymbol{f} \setminus \{\overline{\mathbf{0}}, \overline{\mathbf{1}}\}$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $\boldsymbol{x} \in K$, $x_k = 0$ y $x_j = 1$, para cualesquiera $k \geq N$ y $j \leq -N$.*

Demostración. Por el Corolario 2.13, existe m un número natural tal que $f^m = F^*$, donde F^* es la función definida en el Ejemplo 2.8.

Mostremos que para todo $\boldsymbol{x} \in K$, existe N_1 tal que $x_k = 0$, para cada $k \geq N_1$. Supongamos que no. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $\boldsymbol{x}^n \in K$ y $s_n > n$ tales que $x_{s_n} \neq 0$. Como $x_{s_n - m} \in f^m(x_{s_n})$, por la elección de m, $x_{s_n - m} = 1$. Dado que $f(1) = \big\{1\big\}$, $x_k = 1$, para cada $k \leq s_n - m$. De modo que, por la definición de la métrica D_Z, $D_Z(\boldsymbol{x}^n, \overline{\mathbf{1}}) \leq \frac{1}{2^{s_n+1}}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Dado que s_n crece a infinito, m es fijo y K es cerrado, $\overline{\mathbf{1}} \in K$, lo cual es una contradicción.

Ahora vemos que para todo $\boldsymbol{x} \in K$, existe N_2 tal que, $x_k = 1$ para todo $x_k \leq -N_2$. Supongamos que no; por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $\boldsymbol{x}^n \in K$ y $s_n < -n$ tales que $x_{s_n} \neq 1$. Dada la elección de m y $x_{s_n} \in f^m(x_{s_n+m})$, se sigue que $x_{s_n+m} = 0$. Puesto que $f(1) = \big\{1\big\}$ y f es libre de diagonal superior, 0 sólo está en la imagen de 0 y se tiene que $x_k = 0$, para cada $k \geq s_n + m$. Así, por la definición de la métrica D_Z, $D_Z(\boldsymbol{x}^n, \overline{\mathbf{0}}) \leq \frac{1}{2^{|s_n+m|-1}}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Dado que m es fijo, s_n decrece a menos infinito y K es cerrado, se sigue que $\overline{\mathbf{0}} \in K$, lo cual es una contradicción.

Elegimos N el máximo entre los números N_1 y N_2, entonces para todo $\boldsymbol{x} \in K$, $x_k = 0$ y $x_j = 1$, para cualesquiera $k \geq N$ y $j \leq -N$. Esto concluye nuestro teorema. $\square$

Teorema 3.25. *Sea f una función escalera tal que f^2 es una función escalera. Entonces* $\underset{\longleftarrow Z^-}{\mathrm{límg}}\, \boldsymbol{f}$ *y* $\underset{\longleftarrow Z}{\mathrm{límg}}\, \boldsymbol{f}$ *son continuos tipo árbol.*

Demostración. Vemos que $\underset{\longleftarrow Z^-}{\mathrm{límg}}\, \boldsymbol{f}$ es un continuo tipo árbol. Por la Proposición 3.22, es suficiente con mostrar que $\underset{\longleftarrow}{\mathrm{límg}}\, \boldsymbol{f^{-1}}$ es un continuo tipo árbol. Para ello notemos que:

$$
\begin{aligned}
G_n(f^{-1}) = &\quad \{\boldsymbol{x} \in \prod_{k=1}^{n+1} [0,1]_k :\ x_k \in f^{-1}(x_{k+1}),\ \text{para cada}\ \ 1 \leq k \leq n\} \\
= &\quad \{\boldsymbol{x} \in \prod_{i=1}^{n+1} [0,1]_k :\ x_{k+1} \in f(x_k),\ \text{para cada}\ k \leq n\} \\
= &\quad A_n.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Por el Lema 2.29 tenemos que $G_n(f^{-1})$ es un árbol, para cada $n \in \mathbb{N}$ y por el Teorema 1.63 $\varprojlim \boldsymbol{f^{-1}}$ es un continuo tipo árbol.

Para mostrar que $\varprojlim_Z \boldsymbol{f}$ es un continuo tipo árbol, por el Teorema 1.34, basta con mostrar que dada $\epsilon > 0$, existen un árbol T_ϵ y una función continua y suprayectiva $F : \varprojlim_Z \boldsymbol{f} \to T_\epsilon$ tales que $\text{diám}(h^{-1}(z)) < \epsilon$, para cada $z \in T_\epsilon$.

Sean $\epsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\sum_{|k| \geq N} \frac{1}{2^{|k|}} < \epsilon$. Por la Proposición 3.23, $\mathcal{A}_N$ es un árbol. Definimos $F : \varprojlim_Z \boldsymbol{f} \to \mathcal{A}_N$ la función dada por:

$$F((..., x_{-N}, ..., x_0, ..., x_N, ...)) = (x_{-N}, ..., x_0, ..., x_N). \tag{3.7}$$

Es decir, la k-ésima coordenada de $F(\boldsymbol{x})$ corresponde con x_k, para cada $k = -N, ..., N$. Veamos que F satisface lo que deseado. Comencemos con la continuidad. Sean $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{x}'$ elementos de $\varprojlim_Z \boldsymbol{f}$. Por la definición de F y las métricas D_Z y $D_{-N,N}$, se tiene que:

$$D_{-N,N}(F(\boldsymbol{x}), F(\boldsymbol{x}')) \leq D_Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}').$$

Por lo tanto, F es continua. Ahora veamos el diámetro de cada preimagen. Sean $z \in \mathcal{A}_N$ y $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$ elementos de $F^{-1}(z)$. Por la definición de F, se sigue que $x_k = x'_k$, para cada $-N \leq k \leq N$. De modo que:

$$D_Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \sum_{|k| \geq N} \frac{|x_k - x'_k|}{2^{|k|}} \leq \sum_{|k| \geq N} \frac{1}{2^{|k|}} < \epsilon.$$

Por lo tanto $\text{diám}(F^{-1}(\boldsymbol{z})) < \epsilon$, para cada $z \in \mathcal{A}_N$.

Por lo tanto, $\varprojlim_Z \boldsymbol{f}$ es un continuo tipo árbol. $\square$

Teorema 3.26. *Sea f una función escalera tal que f^2 es una función escalera. Entonces* $\varprojlim_{Z^-} \boldsymbol{f}$ *es una dendrita.*

Demostración. Por el Teorema 3.25, $\varprojlim \boldsymbol{f^{-1}}$ es un continuo tipo árbol. Por la igualdad de (3.6) tenemos que $G_n(f^{-1}) = A_n$ y, por el Teorema 2.21,

$G_n(f^{-1})$ es un espacio localmente conexo, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, para cada $x \in [0,1]$:

$$(f^{-1})^{-1}(x) = \big\{t \in [0,1] : x \in f^{-1}(t)\big\} = \big\{t \in [0,1] : t \in f(x)\big\} = f(x).$$

Es decir, $(f^{-1})^{-1}$ es un conjunto conexo, para cada $x \in [0,1]$, de modo que, por el Teorema 1.64, $\varprojlim \boldsymbol{f^{-1}}$ es un espacio localmente conexo. Por el Teorema 1.37 y la Proposición 3.22, se tiene que $\varprojlim_{Z^{-1}} \boldsymbol{f}$ es una dendrita. $\square$

Teorema 3.27. *Sea f una función escalera tal que* $\varprojlim_{Z^-} \boldsymbol{f}$ *no contiene curvas cerradas simples o bien* $\dim\left(\varprojlim_{Z^-} \boldsymbol{f}\right) = 1$. *Entonces f^2 es una función escalera.*

Demostración. Supongamos f^2 no es una funcón escalera. Sea C una componente de $[0,1] \setminus \mathcal{N}$ tal que $f^2(C)$ no es degenerado. Por la Proposición 2.9, existe $[a,b] \subset f^2(C)$, con $a < b$, tal que $f([a,b])$ es un conjunto degenerado, digamos γ_0. Sean ζ_0 el elemento de $f(C)$ y $\{\gamma_j\}_{j=-1}^{-\infty}$ una sucesión tal que $\gamma_j \in f(\gamma_{j+1})$, para cada $j \leq -1$. Definimos:

$$\Omega = \big\{(..., \gamma_{-2}, \gamma_{-1}, \gamma_0, w, \zeta_0, z) : w \in [a,b], z \in \mathrm{Cl}(C)\big\}.$$

Entonces Ω es una 2-celda contenida en $\varprojlim_{Z^-} \boldsymbol{f}$, lo cual es una contradicción, para cualquiera de las suposiciones sobre $\varprojlim_{Z^-} \boldsymbol{f}$; por lo tanto, f^2 es una función escalera. $\square$

Para el siguiente Corolario, retomamos la notación y los triodos del Corolario 3.9, así como la definición dada en (2.3).

Corolario 3.28. *Sea f una función escalera. Entonces* $\varprojlim_{Z^-} \boldsymbol{f}$ *es un arco si y sólo si f^2 es una función escalera y $\mathcal{G}(f)$ es un arco.*

Demostración. Supongamos que f^2 es una función escalera y $\mathcal{G}(f)$ es un arco. Por el inciso *iii*) de la Proposición 3.23 y el Teorema 2.31, $\mathcal{A}_n$ es un arco para cada $n \in \mathbb{N}$. Imitando la prueba del Teorema 3.25 e intercambiando la palabra árbol por arco, se sigue que $\varprojlim \boldsymbol{f^{-1}}$ es un continuo tipo arco. Por el Teorema 3.26, $\varprojlim \boldsymbol{f^{-1}}$ es localmente conexo, de modo que, por el Teorema 1.38, $\varprojlim \boldsymbol{f^{-1}}$ es un arco.

Supongamos que $\varprojlim_{Z^-} \boldsymbol{f}$ es un arco. Dado que los arcos son dendritas, por el Teorema 3.26, f^2 es una función escalera. Supongamos que $\mathcal{G}(f)$ contiene un triodo simple con (t_i, c) un punto de ramificación. Observemos que para cada uno de los posibles triodos en el Corolario 3.9, por la Proposición 2.9, existe un intervalo $[a', b']$ tal que $[a', b'] \subset f(t_i)$ con $f([a', b'])$ un conjunto degenerado. Sean β_0 el elemento de $f([a', b'])$ y $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $f^n(\beta_0) = \left\{\beta_n\right\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Representamos por T a cualquiera de estos posibles triodos y definimos:

$$T_0 = T \times \prod_{k \geq 0} \{\beta_k\}.$$

Entonces T_0 es un triodo simple en $\varprojlim \boldsymbol{f^{-1}}$, lo cual es imposible por el Teorema 3.22; por lo tanto, $\mathcal{G}(f)$ es un arco. $\square$

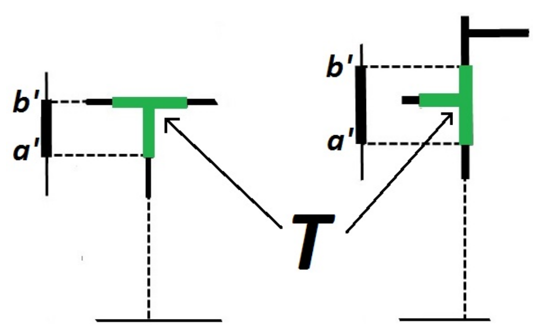

Figura 3.15: Posibles casos para el triodo simple T en el Corolario 3.28.

Definición 3.29. *Sean* $S, A : \prod_{k \in \mathbb{Z}} [0,1]_k \to \prod_{k \in \mathbb{Z}} [0,1]_k$ *las funciones dadas por:*

$$S((..., x_{-n}, ..., x_0, ..., x_n), ...) = (..., x'_{-n}, ..., x'_0, ..., x'_n, ...), \text{ donde } x'_{n+1} = x_n$$

y

$$A((\ldots, x_{-n}, \ldots, x_0, \ldots, x_n, \ldots)) = (\ldots, x'_{-n}, \ldots, x'_0, \ldots, x'_n, \ldots), \ \textit{donde } x'_n = x_{n+1},$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$.

En otras palabras la $(n+1)$-ésima coordenada de $S(\boldsymbol{x})$ es x_n y la n-ésima coordenada de $A(\boldsymbol{x})$ es x_{n+1}, para cada $k \in \mathbb{Z}$.

No es difícil observar que S como A son homeomorfismos y $S^{-1} = A$. Estas funciones son mejor conocidas como homeomorfismos de recorrimiento.

Proposición 3.30. *Sean f una función escalera y $\mathcal{N}^* \subset \mathcal{N}$. Definimos $\overline{f} : [0,1] \to C([0,1])$ como sigue:*

$$\overline{f}(t) = \begin{cases} f(t), & t \notin \mathcal{N}^*; \\ [0,1], & t \in \mathcal{N}^*. \end{cases}$$

Entonces $\overline{f}$ es una función escalera; más aún, si f^2 es una función escalera, $(\overline{f})^2$ es una función escalera.

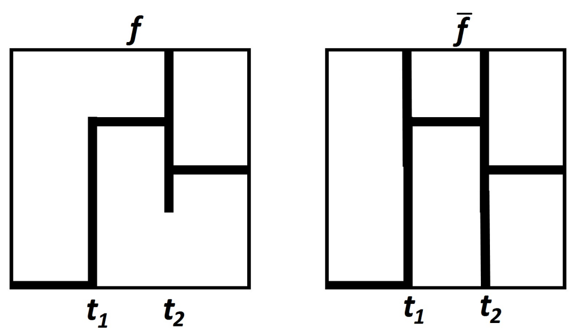

Figura 3.16: Gráficas de f (izquierda) y $\overline{f}$ (derecha), con $\mathcal{N}^* = \mathcal{N}$.

Demostración. La primera parte de la proposición es inmediata debido a que sólo se modifican los valores de f sobre $\mathcal{N}$. Para la segunda parte, por la definición de $\overline{f}$ y la Proposición 2.25, $(\overline{f})^2(z)$ es un conjunto degenerado, para todo $z \in [0,1] \setminus \mathcal{N}$. Dado que f es suprayectiva, $\overline{f}$ es suprayectiva. $\square$

Observemos que $\mathcal{G}(f) \subset \mathcal{G}(\overline{f})$. El siguiente teorema establece la forma como está descrito $\varprojlim_{Z} \boldsymbol{f}$ para una función escalera y libre de diagonal superior f tal que f^2 es una función escalera.

Teorema 3.31. *Sea f una función escalera y libre de diagonal superior tal que f^2 es una función escalera y $f(0) = [0,1]$. Entonces $\varprojlim_Z \boldsymbol{f}$ es una dendrita; más aún:*

$$\varprojlim_Z \boldsymbol{f} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_k \cup \{\overline{\mathbf{1}}\},$$

donde $\mathcal{D}_k$ es una dendrita y $\mathcal{D}_k \subset \mathcal{D}_{k+1}$, para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, definimos:

$$\mathcal{D}_k = \left\{\boldsymbol{x} \in \varprojlim_Z \boldsymbol{f} \ : x_m = 0, \text{ para cada } m \geq k\right\}.$$

Hacemos las siguientes afirmaciones:

Afirmación A. $\mathcal{D}_k \subset \mathcal{D}_{k+1}$, para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Sea $k \in \mathbb{Z}$. Esta afirmación se se sigue de inmediato de la definición de los conjuntos $\mathcal{D}_k$.

Afirmación B. $\mathcal{D}_k$ es homeomorfo a $\mathcal{D}_{k+1}$, para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Sea $k \in \mathbb{Z}$. La función $S|_{\mathcal{D}_k} : \mathcal{D}_k \to \mathcal{D}_{k+1}$ muestra un homeomorfismo entre los espacios donde S es la función definida en (3.29).

Afirmación C. $\mathcal{D}_k$ es homeomorfo a $\varprojlim \boldsymbol{f}^{-1}$, para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Por la Afirmación B, basta con mostrar el enunciado para $k = 0$. Sea $P_{\leq -1} : \prod_{m\in\mathbb{Z}} [0,1]_m \to \prod_{m\leq -1} [0,1]_m$ la función definida por:

$$P_{\leq -1}(..., x_{-1}, x_0, x_1, ...) = (..., x_{-2}, x_{-1}).$$

Es decir, la k-ésima cooordenada de $P_{\leq -1}(\boldsymbol{x})$ es x_k, para cada $k \leq -1$. Se puede notar que la definición de $P_{\leq -1}$ es muy parecida a las funciones P_n que definimos al inicio del Capítulo 1, sólo que está extendida sobre los números enteros y se puede notar fácilmente que $P_{\leq -1}$ es una función continua. Por la definición del conjunto $\mathcal{D}_0$, la función $(P_{\leq -1})|_{\mathcal{D}_0}$ es inyectiva. Como $x_m = 0$ para cada $m \geq 0$ con $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_0$ se tiene que $\mathcal{D}_0$ es un conjunto cerrado; y por tanto, compacto. De forma que la función $(P_{\leq -1})|_{\mathcal{D}_0} : \mathcal{D}_0 \to P_{\leq -1}(\mathcal{D}_0)$ es un encaje.

Definimos $H : \prod_{m\leq 0} [0,1]_m \to \prod_{n=1}^{\infty} [0,1]_n$ la función dada por:

$$H(..., x_{-2}, x_{-1}) = (x'_1, x'_2, ...),$$

donde $x'_k = x_{-k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. En otras palabras, la k-ésima coordenada de $H(\boldsymbol{x})$ es x_{-n}, para cada $k \in \mathbb{N}$. Notemos que H es un homeomorfismo. Por la definición de $\varprojlim \boldsymbol{f^{-1}}$ y dado que $f(0) = [0,1]$, se sigue que $H\left(P_{\leq -1}(\mathcal{D}_0)\right) = \varprojlim \boldsymbol{f^{-1}}$; es decir, $\mathcal{D}_0$ es homeomorfo a $\varprojlim \boldsymbol{f^{-1}}$.

Afirmación D. $\mathcal{D}_k$ converge a $\{\overline{\mathbf{0}}\}$ si k tiende a $-\infty$.

Dado $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_k$, con $k \leq 0$, por la definición de la métrica D_Z, se tiene que $D_Z(\boldsymbol{x}, \overline{\mathbf{0}}) \leq \frac{1}{2^{-k}}$.

Afirmcación E. $\varprojlim_Z \boldsymbol{f} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_k \cup \{\overline{\mathbf{1}}\}$.

Dado que f^2 es una función escalera y libre de diagonal superior, por el Lema 3.3, $\overline{\mathbf{1}} \in \varprojlim_Z \boldsymbol{f}$. Así, $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{D}_k \cup \{\overline{\mathbf{1}}\} \subset \varprojlim_Z \boldsymbol{f}$. Sea $\boldsymbol{x} \in \varprojlim_Z \boldsymbol{f}$, con $\boldsymbol{x} \neq \overline{\mathbf{1}}$. Como f es una función escalera y libre de diagonal superior, por el Teorema 3.24, aplicado al conjunto cerrado $\{\boldsymbol{x}\}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_m = 0$, para cada $m \geq N$. Así, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_N$.

Mostremos que $\varprojlim_Z \boldsymbol{f} \setminus \{\overline{\mathbf{1}}\}$ es localmente conexo. Sean $\boldsymbol{p} \in U \subset \mathrm{Cl}(U) \subset \varprojlim_Z \boldsymbol{f} \setminus \{\overline{\mathbf{1}}\}$, con U abierto en $\varprojlim_Z \boldsymbol{f}$. Por las Afirmaciones A y E, existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que $U \subset \mathcal{D}_N$. Como $\mathcal{D}_N$ es homeomorfo a $\varprojlim \boldsymbol{f^{-1}}$, por la Proposición 3.22 y el Teorema 3.26, se tiene que $\mathcal{D}_N$ es localmente conexo. Sea V un abierto y conexo en $\mathcal{D}_N$ tal que $V \subset U$. Como U es un conjunto abierto en $\varprojlim_Z \boldsymbol{f}$ se sigue que V es abierto en $\varprojlim_Z \boldsymbol{f}$. De este modo, $\boldsymbol{p} \in V \subset U \subset \mathrm{Cl}(U) \subset \varprojlim_Z \boldsymbol{f} \setminus \{\overline{\mathbf{1}}\}$.

Así, por el Teorema 1.10, $\varprojlim_Z \boldsymbol{f}$ es localmente conexo. Por el Lema 3.25, $\varprojlim_Z \boldsymbol{f}$ es un continuo tipo árbol.

De forma que, por el Teorema 1.37 obtenemos que $\varprojlim_Z \boldsymbol{f}$ es una dendrita. $\square$

Corolario 3.32. *Sea f una función escalera y libre de diagonal superior tal que f^2 es una función escalera. Entonces* $\varprojlim_Z \boldsymbol{f}$ *es una dendrita.*

Demostración. Sea f una función escalera y libre de diagonal superior tal que f^2 es una función escalera. Por el Lema 3.3 tenemos que $0 \in \mathcal{N}$. Si $\mathcal{N}^* = \{0\}$, por la Proposición 3.30 obtenemos que $\overline{f}$ y $\overline{f}^2$ son funciones escalera. Dado que $\mathcal{G}(f) \subset \mathcal{G}(\overline{f})$ se sigue que $\varprojlim_Z \boldsymbol{f} \subset \varprojlim_Z \overline{\boldsymbol{f}}$.

Como $\overline{f}^2$ es una función escalera y libre de diagonal superior, por el Teorema 3.31, $\varprojlim_Z \overline{\boldsymbol{f}}$ es una dendrita. De este modo, por el Teorema 1.18, se sigue que $\varprojlim_Z \boldsymbol{f}$ es una dendrita. □

Los siguientes ejemplos de funciones escalera muestran que las dos condiciones del Teorema 3.31, libre de diagonal superior y que f^2 sea una función escalera, son necesarias. De hecho, estos ejemplos son los mismos que trabajamos para el caso del límite inverso generalizado sobre los naturales, los Ejemplos 3.6 y 3.7. Simplemente los adaptamos al límite inverso generalizado sobre los enteros.

Ejemplo 3.33. *Sea $f : [0,1] \to C([0,1])$ la función dada por:*

$$f(t) = \begin{cases} [0,1/2], & t = 0; \\ \{1/2\}, & 0 < t < 1/4; \\ [1/2,3/4]\,, & t = 1/4; \\ \{3/4\}, & 1/4 < t < 1/2; \\ [3/4,1]\,, & t = 1/2; \\ \{1\}, & 1/2 < t \leq 1. \end{cases}$$

Entonces $\varprojlim_Z \boldsymbol{f}$ *no es una dendrita.*

Demostración. Como se mencionó en el Ejemplo 3.6, f es una función escalera y libre de diagonal superior tal que f^2 no es una función escalera. Dado que $1 \in f([3/4,1])$, $[3/4,1] \subset f(1/2)$, $1/2 \in [0,1/4]$ y $0 \in [0,1/4]$, el conjunto dado por:

$$I^2 = \prod_{k \leq 0} \{1\}_k \times [3/4,1] \times \{1/2\} \times [0,1/4] \times \prod_{k \geq 4} \{0\}_k,$$

es una 2-celda contenida en $\varprojlim_Z \boldsymbol{f}$; de modo que $\varprojlim_Z \boldsymbol{f}$ no es una dendrita. $\square$

Ejemplo 3.34. *Sea $f : [0,1] \to C([0,1])$ la función dada por:*

$$f(t) = \begin{cases} [0,1], & t = 0, 1; \\ \{1/2\}, & 0 < t < 1. \end{cases}$$

Entonces $\varprojlim_Z \boldsymbol{f}$ no es una dendrita.

Demostración. Así como lo mencionamos en el Ejemplo 3.7, f es una función escalera tal que $f^n = f$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y no es libre de diagonal superior. En el Ejemplo 3.7 mostramos que $\varprojlim \boldsymbol{f}$ no es localmente conexo y lo hicimos mostrando que no era localmente conexo en $\overline{\mathbf{0}}$. Para el caso que nos concierne ocupamos esta condición. Definimos la función $\mathcal{P} : \varprojlim_Z \boldsymbol{f} \to \varprojlim \boldsymbol{f}$ dada por:

$$\mathcal{P}(..., x_{-1}, x_0, x_1, ...) = (x'_1, x'_2, ...),$$

donde $x'_k = x_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$; es decir, la k-ésima coordenada de $\mathcal{P}(\boldsymbol{x})$ es x_k, para cada $k \in \mathbb{N}$. Por la definición de las métricas D (dada en (1.2)) y D_Z (dada en (3.3)), se sigue que $D(\mathcal{P}(\boldsymbol{x}), \mathcal{P}(\boldsymbol{y})) \leq D_Z(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$; por tanto, $\mathcal{P}$ es una función continua. Como $1/2 \in f([0,1])$, $\mathcal{P}$ es una función suprayectiva, ya que podemos completar a cualquier elemento $\boldsymbol{x} \in \varprojlim \boldsymbol{f}$ colocando $1/2$, para todo ínidice en los negativos y así, poder exhibir $\boldsymbol{x}' \in \varprojlim_Z \boldsymbol{f}$ tal que $\mathcal{P}(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{x}$.

Dado que la propiedad de conexidad local se preserva bajo funciones continuas en espacios de Hausdorff y como $\varprojlim \boldsymbol{f}$ no es localmente conexo, se sigue que $\varprojlim_Z \boldsymbol{f}$ no es localmente conexo; de manera que $\varprojlim_Z \boldsymbol{f}$ no puede ser una dendrita. $\square$

A continuación le recomendamos al lector, en caso de creerlo necesario, revisar la Definición 1.12.

Teorema 3.35. *Sea f una función escalera y libre de diagonal superior tal que f^2 es una función escalera. Entonces todo subcontinuo $K \subset \varprojlim_Z \boldsymbol{f} \setminus \{\overline{\mathbf{0}}, \overline{\mathbf{1}}\}$ es un árbol; más aún, $\theta_{\varprojlim_Z \boldsymbol{f}}(\boldsymbol{p}) \leq 4$, para cada $\boldsymbol{p} \in \varprojlim_Z \boldsymbol{f} \setminus \{\overline{\mathbf{0}}, \overline{\mathbf{1}}\}$.*

Demostración. Sean f y K con tales características. Por el Teorema 3.24, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $\boldsymbol{x} \in K$, $x_k = 0$ y $x_j = 1$, para cualesquiera $k \geq N$ y $j \leq -N$. Sea F la función definida en (3.7) para el Teorema 3.25, debido a que $F|_K$ es una función continua, K es compacto y la elección de N se sigue que $F|_K$ es un encaje. Por el inciso *iii*) de la Proposición 3.23, $\mathcal{A}_N$ es un árbol. Dado que $F(K) \subset \mathcal{A}_n$ tenemos que $F(K)$ es un árbol; y por lo tanto, K es un árbol.

Para la segunda parte, si $\boldsymbol{p} \in \varprojlim_Z \boldsymbol{f} \setminus \{\overline{\mathbf{0}}, \overline{\mathbf{1}}\}$, por el Teorema 3.31, existe K^* continuo tal que $\boldsymbol{p} \in \mathrm{Int}(K^*) \subset K^* \subset \varprojlim_Z \boldsymbol{f} \setminus \{\overline{\mathbf{0}}, \overline{\mathbf{1}}\}$. Por lo hecho en la primera parte de este teorema, el Teorema 3.12 y la Proposición 3.23, $\theta_{\mathcal{A}_N}(F(\boldsymbol{p})) \leq 4$; de modo que $\theta_{\varprojlim_Z \boldsymbol{f}}(\boldsymbol{p}) \leq 4$ □

Teorema 3.36. *Sea f una función escalera y libre de diagonal superior tal que f^2 es una función escalera y $\mathcal{G}(f)$ contiene un triodo simple. Entonces existe una sucesión de triodos simples $\{\mathcal{T}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en $\varprojlim_Z \boldsymbol{f}$ tal que $\mathcal{T}^n$ converge a $\{\overline{\mathbf{0}}\}$ si n decrece a $-\infty$ y $\mathcal{T}^n$ converge a $\{\overline{\mathbf{1}}\}$ si n crece a ∞.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{G}(f)$ contiene un triodo simple. Aquí retomamos el Corolario 3.8 y los casos para el punto de ramificación del triodo simple en $\mathcal{G}(f)$ del Teorema 3.10. Sean T_1^* y T_2^* los triodos simples definidos en $\varprojlim \boldsymbol{f}$ para el Teorema 3.10, donde T_1^* se ocupaba en el primer caso y T_2^* para el segundo caso. Sean $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ las sucesiones que se ocuparon para definir estos triodos simples, las cuales satisfacen que $f(\beta_n) = \{\beta_{n+1}\}$ y $\alpha_n \in f(\alpha_{n+1})$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y que $\pi_s(T_k^*) = \{\alpha_s\}$, para cualesquiera $s \geq 3$ y $k = 1, 2$, donde π_s representa la función proyección sobre la coordenada s.

Definimos:

$$T_k^\infty = \prod_{n\le 0}\{\beta_{-n}\}\times T_k^*, \quad \text{para } k=1,2.$$

Representamos por T^∞ al triodo simple obtenido en cualquiera de los casos. Por definición, para cualquier $\boldsymbol{x}\in T^\infty$, $x_n=\alpha_{n-3}$, para cada $n\ge 3$ y $x_n=\beta_{-n}$, para cada $n\le 0$. Por la definición de la métrica D_Z, diám$(T^\infty)\le \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}$; dejamos expresado el valor del diámetro en forma de una suma de fracciones por motivos de la definición que damos a continuación. Sea $n\in\mathbb{N}$, definimos la siguiente sucesión de triodos simples $\{\mathcal{T}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ como sigue:

$$\mathcal{T}^n=\begin{cases} S^n(T^\infty), & n\ge 0;\\ A^{-n}(T^\infty), & n<0.\end{cases}$$

donde S^n y A^{-n} representan las composiciones de n veces las funciones S y A de la Definición 3.29 y donde S^0 representa la función identidad. Puesto que los homeomorfismos S y A recorren las coordenadas, por la definición de la métrica D_Z y la definición de cada $\mathcal{T}^n$, se tiene que diám$(\mathcal{T}^n)\le\frac{1}{2^{|n+1|}}+\frac{1}{2^{|n+2|}}$, para cada $n\in\mathbb{Z}$. Por otro lado, como f^2 es una función escalera, por el Corolario 2.13 y el Lema 3.3, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $\beta_s=1$ y $\alpha_s=0$, para todo $s\ge N$; por lo tanto, $\mathcal{T}^n$ converge a $\{\overline{\mathbf{1}}\}$ si n crece a ∞ y $\mathcal{T}^n$ converge a $\{\overline{\mathbf{0}}\}$ si n decrece a $-\infty$. Esto concluye la prueba del teorema. □

Concluyamos esta sección enunciando un resultado respecto a la dimensión de estos continuos obtenidos.

Corolario 3.37. *Sean f una función escalera y libre de diagonal superior y $m\in\mathbb{N}$ tales que $f^m=F^*$; donde F^* es la función definida en el Ejemplo 2.8. Entonces* $\dim\left(\underset{\longleftarrow\ Z^-}{\text{límg}}\ \boldsymbol{f}\right)\le\lfloor\frac{m+1}{2}\rfloor$.

Demostración. Por la igualdad obtenida en (3.6) de la Proposición 3.22, $G_n(f^{-1})=A_n$, para cada $n\in\mathbb{N}$. Por el Teorema 2.40, $\dim(G_n(f^{-1}))\le\lfloor\frac{m+1}{2}\rfloor$, para cada $n\in\mathbb{N}$ y, por los Teoremas 1.39 y 1.63, $\dim\left(\underset{\longleftarrow}{\text{límg}}\ \boldsymbol{f^{-1}}\right)\le\lfloor\frac{m+1}{2}\rfloor$. Por el Teorema 1.25 y la Proposición 3.22, se sigue que

$$\dim\left(\underset{\longleftarrow\ Z^-}{\text{límg}}\ \boldsymbol{f}\right)=\dim\left(\underset{\longleftarrow}{\text{límg}}\ \boldsymbol{f^{-1}}\right)\le\lfloor\frac{m+1}{2}\rfloor.$$

Esto concluye la prueba del corolario. □

3.2. Funciones libres de diagonal inferior

En esta sección recopilamos los resultados obtenidos durante el Capítulo 2 y anteriores secciones del éste Capítulo 3 correspondientes a las funciones $f : [0, 1] \to C([0, 1])$ que son escalera y libres de diagonal inferior. El orden en que están enunciados corresponden a la sección donde los establecimos y probamos. Debido a la naturaleza de las pruebas que ya realizamos para las funciones escalera y libres de diagonal superior, éstas pueden adaptarse con pocos cambios, es por ello que omitimos su respectiva demostración.

3.2.1. Funciones escalera

Al igual que en el Capítulo 2, comenzamos definiendo la siguiente función.

Ejemplo 3.38. *Sea $F_* : [0, 1] \to C([0, 1])$ la función scs definida por:*

$$F_*(t) = \begin{cases} [0,1], & t = 1; \\ \{0\}, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Entonces F_* es una función escalera y libre de diagonal inferior.

Proposición 3.39. *Sea f una función escalera y libre de diagonal inferior. Entonces $f(0) = f^n(0)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Teorema 3.40. *Sea f una función escalera y libre de diagonal inferior. Entonces existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{G}(f^s) = (\{1\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times f(0))$.*

Corolario 3.41. *Sea f una función escalera y libre de diagonal inferior. Entonces existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{G}(f^n) = (\{1\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times f(0))$, para cada $n \geq s$.*

Teorema 3.42. *Sea f una función escalera. Entonces f es libre de diagonal inferior con $f(0) = \big\{0\big\}$ si y sólo si existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $f^s = F_*$, donde F_* es la función definida en el Ejemplo 3.38.*

Proposición 3.43. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe f_n una función escalera tal que $(f_n)^{n+1} = F_*$ pero $(f_n)^n \neq F_*$, donde F_* es la función definida en el Ejemplo 3.38.*

Teorema 3.44. *Sean f una función escalera y libre de diagonal inferior tal que $f(0) = \{0\}$ y un subconjunto cerrado H de $\varprojlim \boldsymbol{f}$ tales que $\overline{\mathbf{0}} \notin H$. Entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{\mathbf{0}_n} \notin P_n(H)$, para cada $n \geq M$; donde P_n es la función definida en (1.5); más aún, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $\boldsymbol{x} \in H$, $x_n = 1$, para cada $n \geq N$.*

Corolario 3.45. *Sean f una función escalera, libre de diagonal inferior tal que $f(0) = \{0\}$ y un subconjunto cerrado H de $\varprojlim \boldsymbol{f}$ tales que $\overline{\mathbf{1}} \notin H$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que H es homeomorfo a $P_n(H)$, para cada $n \geq N$.*

Corolario 3.46. *Sea f una función escalera y libre de diagonal inferior tal que $f(0) = \{0\}$. Entonces $\overline{\mathbf{0}}$ no es un punto de corte de $\varprojlim \boldsymbol{f}$.*

3.2.2. Arcos y dendritas

En esta parte establecemos los resultados asociados con los continuos localmente conexos, tipo árbol y, por supuesto, dendritas equivalentes para las funciones escalera y libres de diagonal inferior.

Lema 3.47. *Sea f una función escalera y libre de diagonal inferior tal que $f(0) = \{0\}$. Entonces $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es localmente conexo.*

Lema 3.48. *Sea f una función escalera y libre de diagonal inferior tal que f^2 es una función escalera. Entonces $1 \in f(1)$ y $f(0) = \{0\}$*

Teorema 3.49. *Sea f una función escalera y libre de diagonal inferior tal que f^2 es una función escalera. Entonces $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es una dendrita.*

Corolario 3.50. *Sea f una función escalera y libre de diagonal inferior tal que f^2 es una función escalera. Entonces todo subcontinuo $K \subset \varprojlim \boldsymbol{f}$ tal que $\overline{\boldsymbol{0}} \notin K$ es un árbol.*

Corolario 3.51. *Sea f función una escalera y libre de diagonal inferior tal que f^2 es una función escalera y $\mathcal{G}(f)$ es un arco. Entonces $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es un arco.*

Lema 3.52. *Sea f una función escalera y libre de diagonal inferior tal que $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es una dendrita, la cual no es un arco. Entonces $\overline{\mathbf{0}}$ es el único punto límite de $Ram(\varprojlim \boldsymbol{f})$.*

Corolario 3.53. *Sea f una función escalera y libre de diagonal inferior tal que $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es un dendrita. Entonces $\theta_{\varprojlim \boldsymbol{f}}(\boldsymbol{p}) \leq 4$, para cada $\boldsymbol{p} \in \varprojlim \boldsymbol{f}$.*

3.2.3. Enteros y negativos

Ahora mencionamos los resultados obtenidos en la sección de los enteros y negativos.

Teorema 3.54. *Sean f una función escalera, libre de diagonal inferior tal que $f(0) = \{0\}$ y un subconjunto cerrado $K \subset \varprojlim_{Z} \boldsymbol{f} \setminus \{\overline{\mathbf{0}}, \overline{\mathbf{1}}\}$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $\boldsymbol{x} \in K$, $x_k = 1$ y $x_j = 0$, para cualesquiera $k \geq N$ y $j \leq -N$.*

Teorema 3.55. *Sea f una función escalera y libre de diagonal inferior tal que f^2 es una función escalera y $f(1) = [0, 1]$. Entonces $\varprojlim_{Z} \boldsymbol{f}$ es una dendrita; más aún:*

$$\varprojlim_{Z} \boldsymbol{f} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_k \cup \{\overline{\mathbf{0}}\},$$

donde $\mathcal{D}_k$ es una dendrita y $\mathcal{D}_k \subset \mathcal{D}_{k+1}$, para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Corolario 3.56. *Sea f una función escalera y libre de diagonal inferior tal que f^2 es una función escalera. Entonces $\varprojlim_{Z} \boldsymbol{f}$ es una dendrita.*

Teorema 3.57. *Sea f una función escalera y libre de diagonal inferior tal que f^2 es una función escalera. Entonces todo subcontinuo $K \subset \varprojlim_{Z} \boldsymbol{f} \setminus \{\overline{\mathbf{0}}, \overline{\mathbf{1}}\}$ es un árbol; más aún, $\theta_{\varprojlim_{Z} \boldsymbol{f}}(\boldsymbol{p}) \leq 4$, para cada $\boldsymbol{p} \in \varprojlim_{Z} \boldsymbol{f} \setminus \{\overline{\mathbf{0}}, \overline{\mathbf{1}}\}$.*

Teorema 3.58. *Sea f una función escalera y libre de diagonal inferior tal que f^2 es una función escalera y $\mathcal{G}(f)$ contiene un triodo simple. Entonces existe una sucesión de triodos simples $\{\mathcal{T}^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ en $\varprojlim_{Z} \boldsymbol{f}$ tal que $\mathcal{T}^n$ converge a $\{\overline{\mathbf{1}}\}$ si n decrece a $-\infty$ y $\mathcal{T}^n$ converge a $\{\overline{\mathbf{0}}\}$ si n crece a ∞.*

Corolario 3.59. *Sean f una función escalera y libre de diagonal inferior y $m \in \mathbb{N}$ tales que $f^m = F_*$ donde F_* es la función definida en el Ejemplo 3.38. Entonces* $\dim\left(\underset{\longleftarrow\ Z^-}{\text{límg}}\ \boldsymbol{f}\right) \leq \lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor$.

3.2.4. Un poco de dimensión

En este apartado abarcamos los resultados para dimensión, tanto para los límites inversos generalizados sobre lo naturales como para los enteros y los enteros negativos.

Teorema 3.60. *Sea f una función escalera y libre de diagonal inferior tal que $f(0) = \{0\}$. Si $m \in \mathbb{N}$ es el mínimo número natural tal que $f^m = F_*$; donde F_* es la función definida en el Ejemplo 3.38. Entonces* $\dim(A_n) \leq \lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor$, *para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Corolario 3.61. *Sea f una función escalera y libre de diagonal inferior tal que $f(0) = \{0\}$. Si $m \in \mathbb{N}$ es el mínimo número natural tal que $f^m = F_*$; donde F_* es la función definida en el Ejemplo 3.38. Entonces* $\dim\left(\underset{\longleftarrow}{\text{límg}}\ \boldsymbol{f}\right) \leq \lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor$.

Corolario 3.62. *Sean f una función escalera y libre de diagonal inferior y $m \in \mathbb{N}$ tales que $f^m = F_*$; donde F_* es la función definida en el Ejemplo 3.38. Entonces* $\dim\left(\underset{\longleftarrow\ Z^-}{\text{límg}}\ \boldsymbol{f}\right) \leq \lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor$.

Y ahora, ¿Qué sigue?

Todo aquel interesado en los límites inversos generalizados, es muy probable que comience su camino con los Ejemplos 1.53, 1.54 y el 2.8 o bien, con los libros [5] o [7]. Éste último ejemplo hizo que la primera pregunta que se me viniera a la mente fue:

> *¿Si $f : [0,1] \to C([0,1])$ es una función scs, conformada por una cantidad finita de líneas verticales y horizontales, su límite inverso generalizado seguirá siendo un arco?*

Más tardé en plantear la pregunta que en responderla, hubiera sido demasiado fácil, ¿No? Resulta que el límite inverso generalizado generado por la función $f : [0,1] \to C([0,1])$ dada por $f(t) = \big\{1\big\}$, para $t \neq 1$ y $f(1) = [0,1]$, contiene un subconjunto homeomorfo al cubo de Hilbert; a decir, $\mathcal{H} = [0,1] \times \{1\} \times [0,1] \times \{1\} \cdots$. Vale vale, si así como tal no es cierto: ¿Qué se puede pedir para que este enunciado sea cierto? Antes de empezar a investigar, primero fue necesario definir a las funciones escalera. Poco a poco obtuve varios resultados, muchos de ellos son básicamente los que planteamos aquí; sin embargo, entre tantas y tantas revisiones de sus pruebas se depuraron hasta conseguir enunciarlos como lo hicimos en este trabajo. Tal vez sea mal que yo lo diga (digo, escribí esta tesis), pero realmente me sorprendió conseguir estos resultados, no sólo establecimos condiciones para conseguir arcos mediante este tipo de funciones; sino también ¡dendritas! y, como mencionamos más adelante, estamos cerca de conseguir dendroides.

Cabe mencionar que tales condiciones son bastante sencillas de verificar para cualquier función scs f conformada por líneas verticales y horizontales.

Básicamente son dos: f^2 escalera, f libre de diagonal(ya sea superior o inferior); más aun, si queremos que el límite inverso sea un arco basta con añadir que $\mathcal{G}(f)$ sea un arco.

Trabajando con estas funciones surgieron algunas dudas que a mi parecer son interesantes y que por cuestiones de tiempo no se pudieron incluir en este escrito; sin embargo, me gustaría compartirlas en este apartado y es posible que usted mismo pueda tener la respuesta a alguna de ellas, si es así, por favor contactar a mglaglcra@yahoo.com.mx, ¡lo antes posible!.

Como mencionábamos, aunque no se abordaron aquí, se les dará su respectivo seguimiento pues, al final, como todo matemático que se jacte de serlo no estaré satisfecho hasta resolver estas preguntas o al menos intentarlas. Aquí una de estas dudas, definimos las funciones escalera f para el intervalo $[0,1]$; pero, esta definición se podría extender para árboles, o bien, ¿Por qué no hacerlo para un continuo X en general o una colección de continuos $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$?. Tal definición quedaría de la siguiente forma:

> **Definición.** *Dados dos continuos X y Y, decimos que una función scs $f : X \to C(Y)$ es **escalera** si existe subconjunto finito $\mathcal{N} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ de X tal que para cualesquiera t y t' en la misma componente de $X \setminus \mathcal{N}$, $f(t) = f(t')$.*

Por supuesto, también habría que considerar la definición de libre de diagonal para una función scs. Para el intervalo $[0,1]$, los elementos 0 y 1 son puntos que no son de corte de $[0,1]$. Por otro lado, sabemos que todo continuo X tiene al menos dos puntos que no son de corte. De modo que ésta sería tal definición:

> **Definición.** *Dados X un continuo y $f : X \to C(X)$ una función scs, decimos que f es **libre de diagonal** si $p \notin f(p)$, para todo $p \in X \setminus \mathcal{K}$, donde $\mathcal{K}$ es el conjunto de puntos que no son de corte.*

Ahora bien, una de las razones por las que es intersante empezar con árboles es para dar respuesta a la siguiente pregunta:

> *¿Si $\mathcal{A}$ es un árbol y $f : \mathcal{A} \to C(\mathcal{A})$ es una función escalera y libre de diagonal tal que f^2 es una función escalera. Entonces $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es una dendrita?*

Si el lector me pregunta, la respuesta sería sí; en la imaginaria he estado pensándolo y, salvo los detalles que habría que verificar, parece que la pregunta tiene respuesta afirmativa. Ahora bien, ¿Qué sucede con el orden de estas dendritas? Sería interesante responder:

> *¿Si $\mathcal{A}$ es un árbol, $f : \mathcal{A} \to C(\mathcal{A})$ es una función escalera y libre de diagonal tal que f^2 es una función escalera y $\theta_{\mathcal{G}(f)}(\boldsymbol{x}) \leq n$, para cada $\boldsymbol{x} \in \mathcal{G}(f)$. Entonces $\theta_{\underleftarrow{\mathit{límg}}\, \boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) \leq n$, para cada $\boldsymbol{x} \in \underleftarrow{\mathit{límg}}\, \boldsymbol{f}$?.*

En caso de que las respuestas sean afirmativas, sería interesante extender estos resultados hacia los enteros y enteros negativos.

Cuando trabajamos con el Ejemplo 3.7 concluímos que $\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$ no se trataba de una dendrita. Como el lector pudo notar, se trataba de un continuo arcoconexo pues se componía de una cantidad no numerable de arcos. El modelo que encontramos para $\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$ de este ejemplo entra en la categoria de los continuos llamados Dendroides. La definición de Dendroide no la incluí en este trabajo debido a que no la requería; pero, es la siguiente: Un dendroide es aquel continuo arcoconexo y hereditariamente unicoherente. La única condición que cumplía tal función escalera es que f^2 también es una función escalera. Cuando exploré más ejemplos con esta misma condición resultó que cada uno de los modelos del límite inverso generalizado que se generaban, ¡resultaban ser un dendroide!; pero, como se nos dice desde el primer semestre de la carrera *ejemplos no son pruebas y que funcione para unos cuántos no significa que funcione para todos.* Así que:

> *¿Si $f : [0, 1] \to C([0, 1])$ es una función escalera tal que f^2 es una función escalera. Entonces* $\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$ *es un dendroide?*

Un par de acercamientos hacia intentar responder a esta pregunta los encontramos en el Teorema 2.37 y la Proposición 2.38. Por ejemplo, el Teorema 2.37 nos dice que $\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$ se puede representar como la unión numerable de dendritas (conjuntos arco conexos) anidadas cuya unión es un conjunto conexo y cuya frontera es un conjunto finito. Mientras que la Proposición 2.38, nos dice basicamente, que $\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$ tiene un conjunto denso y arcoconexo. Estas propiedades no son suficientes para garantizar la arcoconexidad de $\underleftarrow{\text{límg}}\, \boldsymbol{f}$;

un ejemplo de un espacio que satisface estas dos propiedades es el *círculo de Varsovia*, tiene un conjunto denso y arcoconexo pero no es hereditariamente unicoherente.

Por otro lado, si f es una función escalera tal que f^2 es una función escalera, el espacio $\underleftarrow{\lim} \boldsymbol{f}$ tiene más propiedades que las que mostramos en este escrito. Por ejemplo, es un continuo descomponible y hereditariamente unicoherente y otras más que el lector quiera agregar son más que bienvenidas. Estas cualidades quizás sean de ayuda en el camino hacia la respuesta de la proposición antes mencionada, que no dije, me parece que es cierta.

Espero que la lectura de este trabajo haya sido de su agrado y quiero agradecer su tiempo invertido para la misma. Me despido de usted, esperando tener otra oportunidad de que me lea y deseándole lo mejor siempre, ¡GRACIAS!

Bibliografía

[1] M. Corona. *Aplicaciones topológicas con funciones continuas*. Tesis de Licenciatura. Facultad de Ciencias, UNAM (2009).

[2] J. Dugundji. *Topology*. Series in Advanced Mathematics, 12^a Edición. Allyn and Bacon, Inc., Boston (1978)

[3] W. Hurewicz y H. Wallman. *Dimension Theory*. Princeton Mathematical Series. Princeton university press (1948).

[4] A. Illanes. *A circle is not the generalized inverse limit of a subset of* $[0,1]^2$. Proc. Amer. Math. Soc. **139** (2011), 2987–2993.

[5] W. T. Ingram. *An Introduction to Inverse Limits with Set-valued Functions*. Springer Briefs in Mathematics. Springer, New York (2012).

[6] W. T. Ingram. *Concerning dimension and tree-likeness of inverse limits with set-valued functions*. Houston. J. Math. **40**, (2014), 621–623.

[7] W. T. Ingram y W. S. Mahavier. *Inverse Limits: From Continua to Chaos*. Springer-Verlag, New York (2012).

[8] S. Macías. *Topics on Continua*. Chapman and Hall/CRC. Pure and Applied Mathematics. Taylor and Francis (2005).

[9] W. S. Mahavier. *Inverse limits with subsets of* $[0,1] \times [0,1]$. Topology Appl. **141** (2004), 225–231.

[10] V. Martínez-de-la-Vega e I. Vidal-Escobar. *Dendrites on generalized inverse limits and finite Mahavier products*. Topology Appl. **222** (2017), 238–253.

[11] S. B. Nadler, Jr. *Continuum theory. An introduction.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 158. Marcel Dekker, Inc., New York (1992).

[12] S. B. Nadler, Jr. *Dimension Theory: An Introduction with Exercises.* Aportaciones Matematicas, Serie Textos vol. 18. Sociedad Matemática Mexicana, México (2002).

[13] S. B. Nadler, Jr. *Hyperspaces of sets: A Text with Research Questions.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 49. Marcel Dekker, Inc., New York (1978).

[14] K. Nagami. *Dimension theory.* Pure and Applied Mathematics, vol. 37. Academic Press, New York and London (1970).

[15] V. C. Nall. *Inverse limits with set valued functions.* Houston J. Math, **37** (2011), 1323–1332.

[16] V. C. Nall. *The only finite graph that is an inverse limit with a set valued function on* $[0, 1]$ *is an arc.* Topology Appl. **159** (2012), 733–736.

[17] C. Oldair. *Modelos de límites inversos generalizados.* Tesis de Licenciatura. Facultad de Ciencias, UNAM (2017).

[18] S. Varagona. *Generalized inverse limits indexed by totally ordered sets* (2015). Disponible en http://arxiv.org/abs/1511.00266.

[19] S. Varagona. *Inverse limits with upper semi-continuous bonding functions and indecomposability.* Houston J. Math. **37** (2011), 1017–1034.

[20] S. Varagona. *Simple Techniques for Detecting Decomposability or Indecomposability of Generalized Inverse Limits.* Tesis de Doctorado, 2012.

[21] P. Vernon. *Inverse limits of set-valued functions indexed by the integers.* Topology Appl. **171** (2014), 35–40.

[22] S. Willard. *General Topology.* Dover Publications, Inc.. New York, (2004).