



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA
ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

**“INVARIANTES EN GRÁFICAS Y MATROIDES ASOCIADOS AL
POLINOMIO DE TUTTE”**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

PEDRO ALBERTO ANTONIO SOTO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. CRIEL MERINO LÓPEZ

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM.

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

DR. GILBERTO CALVILLO VIVES

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM.

DRA. LAURA ELENA CHÁVEZ LOMELÍ

CIENCIAS BÁSICAS, UAM.

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., AGOSTO DE 2020.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

En primer lugar quiero dar las gracias al profesor Criel Merino López por haber sido mi tutor y asesor de tesis, por el tiempo invaluable que compartió conmigo para que este trabajo se llevara a cabo, por su paciencia y apoyo durante todos estos años. Gracias por sus enseñanzas, por su confianza y la oportunidad que me dio.

Le debo un agradecimiento especial a los profesores Laura Elena Chávez Lomelí y Gilberto Calvillo Vives por haber sido parte de mi comité tutor durante el doctorado, gracias por el tiempo que dedicaron, por todas las pláticas y consejos que me alentaron a seguir adelante.

También, estoy muy agradecido con los profesores Laura Elena Chávez Lomelí, María Guadalupe Rodríguez Sánchez, Juan José Montellano Ballesteros y Eduardo Rivera Campo por haber dedicado su tiempo a la revisión de este trabajo, muchas gracias por sus acertados comentarios y correcciones que ayudaron en gran medida a mejorar estas páginas.

Gracias a mis padre, hermanos y a Citlalliy por su apoyo incondicional, gracias a toda mi familia y amigos que siempre me dieron ánimos, aunque no mencione sus nombres en el desarrollo de la tesis, sin ellos no hubiera sido posible su realización.

Agradezco al CONACYT por la beca que me otorgó para realizar mis estudios de doctorado, así como al instituto de matemáticas de la UNAM y a la coordinación de posgrado en ciencias matemáticas por todo el apoyo brindado.

Investigación realizada gracias al Programa UNAM-PAPIIT IN100219: Estructuras algebraicas y combinatorias asociadas a las gráficas y los matroides. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Índice general

Agradecimientos	I
Introducción	v
1. Preliminares	1
1.1. Gráficas	1
1.2. Matroides	5
1.3. El polinomio de Tutte	7
2. El polinomio de Tutte y los diagramas de cuerdas	11
2.1. Diagramas de cuerdas	12
2.2. Árboles y bosques crecientes pares	14
2.3. Sobre permutaciones	33
2.4. Conclusiones	35
3. Polimatroides y la conjetura de Stanley	37
3.1. El h -vector de un matroide y las O -sucesiones	37
3.2. Sobre la conjetura de Stanley	40
3.3. Polimatroides y flujos en gráficas bipartitas	42
3.4. Conclusiones	61
4. Multicomplejos extremales	63
4.1. Gráficas de monomios	63
4.2. Multicomplejos extremales	67
4.3. Conclusiones	77

Bibliografía

79

Introducción

Este escrito está dedicado principalmente al estudio del polinomio de Tutte y sus interpretaciones, este polinomio de dos variables fue introducido por W. T. Tutte en [27] originalmente como un invariante polinomial en gráficas que contaba estructuras cromáticas, en la actualidad se sabe que de forma más general es un invariante matroidal. Quizá la línea de investigación más fructífera de este polinomio es estudiar las interpretaciones que tiene cuando es evaluado sobre puntos o a lo largo de curvas algebraicas en el plano. Por ejemplo, dada una gráfica conexa G , su polinomio de Tutte, denotado $T(G; x, y)$, cuenta el número de árboles generadores, orientaciones acíclicas, orientaciones acíclicas con una única fuente predeterminada y orientaciones totalmente cíclicas de G cuando es evaluado en los puntos $(1, 1)$, $(2, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 2)$ respectivamente. También, a lo largo de las curvas $y = 0$ y $x = 0$ el polinomio de Tutte se especializa en el polinomio cromático y de flujos respectivamente. Para un matroide M , su polinomio de Tutte, denotado $T(M; x, y)$, cuenta el número de bases, conjuntos independientes y conjuntos generadores cuando es evaluado en los puntos $(1, 1)$, $(2, 1)$ y $(1, 2)$, a lo largo de la curva $y = 0$ el polinomio de Tutte se especializa en el polinomio característico de M .

Este trabajo se distribuye de la siguiente manera: En el Capítulo 1 damos una breve introducción a la teoría de gráficas, matroides y el polinomio de Tutte con el fin de presentar los conceptos y la notación que utilizaremos durante el desarrollo de este escrito. En el Capítulo 2 estudiamos el polinomio de Tutte de las gráficas $K_n + \overline{K_m}$ evaluado en los puntos $(1, -1)$ y $(2, -1)$, de forma precisa, probamos que estas evaluaciones cuentan el número de árboles y bosques generadores crecientes pares respectivamente, además, para ciertos valores de m utilizamos las evaluaciones mencionadas anteriormente para contar permutaciones alternantes. En el Capítulo 3 estudiamos una conjetura planteada por R. P. Stanley en [25] que

relaciona el h -vector de un matroide con O -sucesiones puras, esta conjetura es de relevancia para nuestra investigación ya que el h -vector de un matroide M está relacionado con su polinomio de descascarillado y este polinomio es una especialización del polinomio de Tutte de M a lo largo de la curva $y = 1$. Sobre esta conjetura se conocen diversos resultados parciales para ciertas familias de matroides, por ejemplo, matroides cográficos [17, 2], matroides cotransversales [22, 24], matroides de empedrado [19], matroides con rango o co-rango fijo [14, 10], gráficas con ápice [11, 12], entre otros. Nuestro enfoque en este capítulo es intentar englobar algunos de los resultados anteriores en un solo marco con el fin de desarrollar una teoría que pudiera ser útil para probar la conjetura de Stanley en nuevas familias de matroides, aunque no pudimos obtener dichos resultados, encontramos nuevas pruebas para algunas de las familias mencionadas anteriormente. Finalmente, en el Capítulo 4 estudiamos más a fondo la demostración de la conjetura de Stanley para matroides de empedrado que aparece en [19], en este artículo se comienza a estudiar multicomplejos con propiedades extremales y se establece una conjetura sobre su estructura, cabe mencionar que estos multicomplejos extremales pueden ser muy útiles en investigaciones futuras sobre la conjetura de Stanley y de ahí la importancia que tiene su estudio. En este Capítulo logramos caracterizar algunos de estos multicomplejos extremales, confirmando la conjetura de [19] para estos casos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Gráficas

En esta sección daremos una muy breve introducción a la teoría de gráficas, nuestro objetivo es presentar la notación que utilizaremos durante el desarrollo de este trabajo y no así, dar un tratamiento extensivo de la teoría, invitamos al lector interesado en consultar el libro de R. Diestel [5] donde podrá encontrar una explicación más profunda de los temas que trataremos a continuación.

Por una *gráfica* entendemos una pareja ordenada $G = (V, E)$, donde V es un conjunto finito y E es una colección de parejas de elementos en V . A los elementos en V se les llama vértices y a los elementos en E se les llama aristas. Dada una gráfica G , $V(G)$ y $E(G)$ denotan el conjunto de vértices y aristas de la gráfica G respectivamente. Dada una arista $e = \{u, v\} \in E(G)$, también denotada uv , decimos que e es incidente a los vértices u y v , además, decimos que los vértices u y v son adyacentes o que u es vecino de v . Para un vértice v , el conjunto de vecinos de v contenido en $V(G) \setminus v$ es llamado la *vecindad* de v y se denota como $N(v)$. El grado de v , denotado como $d(v)$, es el número de aristas en $E(G)$ que son incidentes a v .

Como es usual en distintas áreas de matemáticas, es conveniente definir una noción de subestructura, en el caso de las gráficas decimos que G' es una subgráfica de G si $V(G') \subseteq V(G)$, $E(G') \subseteq E(G)$ y G' es una gráfica por sí misma, si además se cumple que $V(G') = V(G)$, decimos que G' es una subgráfica *generadora*. Particularmente estamos interesados en cierto

tipo de subgráficas llamadas *inducidas*, dada una gráfica G y un subconjunto de vértices $U \subseteq V(G)$, definimos la subgráfica inducida por los vértices en U como $G[U] = (U, E')$, donde $E' = \{uv \in E : u, v \in U\}$, cuando la gráfica subyacente G este bien determinada escribiremos solamente $[U]$.

Una *trayectoria* es una gráfica de la forma $P = (V, E)$, donde $V = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ y $E = \{v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{k-1}v_k\}$, de forma más precisa, P es una trayectoria de longitud k , a los vértices v_0 y v_k se les llama extremos de la trayectoria. Dada P una $k - 1$ -trayectoria con $k \geq 3$, la gráfica $C = (V(P), E(P) \cup v_{k-1}v_0)$ es un *ciclo* de longitud k . Una gráfica G se dice *conexa* si para cualesquier par de vértices $u, v \in V(G)$ existe una trayectoria (como subgráfica de G) con extremos u y v , una componente conexa de G es una subgráfica maximalmente conexa, es decir, es una subgráfica conexa a la que no podemos agregar ni vértices ni aristas de G conservando la conexidad de dicha subgráfica. Un *árbol* es una gráfica conexa que no contiene ciclos y un *árbol enraizado* es simplemente un árbol con un vértice especial llamado *raíz*.

Otro concepto que utilizaremos en el desarrollo de este trabajo es el de coloración, dada una gráfica $G = (V, E)$, una λ -coloración es una función σ que asigna a cada vértice de la gráfica un color en $\{1, 2, \dots, \lambda\}$. Una λ -coloración se dice *propia* si siempre que tenemos dos vértices u, v adyacentes, entonces $\sigma(u) \neq \sigma(v)$. Uno de los problemas clásicos en coloración de gráficas es encontrar para una gráfica G el menor entero λ para el cual exista una λ -coloración propia de G , a este número se le llama *número cromático* de G y se denota por $\chi(G)$. Un problema más general es encontrar para todo entero positivo λ el número de λ -coloraciones propias de G , de hecho, se sabe que existe un polinomio que cuenta dichas coloraciones, este polinomio se llama *polinomio cromático* de G y se denota por $\chi(G; \lambda)$.

Dada una gráfica G , por una *orientación* \mathcal{O} de G entendemos una asignación de dirección en cada arista, es decir, para cada $e = \{u, v\} \in E(G)$ escogemos exactamente una dirección entre (u, v) o (v, u) , si escogemos la dirección (u, v) la arista e se convierte en una *flecha* de u hacia v , también decimos que u y v son los vértices inicial y final de e . Un vértice se llama *fuentes* si es el vértice inicial de todas las flechas incidentes a él, de forma análoga un vértice se llama *sumidero* si es el vértice final de todas las flechas incidentes a él, en la Figura 1.1 se puede apreciar una gráfica y una orientación de la misma. Dada G y una orientación \mathcal{O} , un *ciclo dirigido* es un ciclo de G y donde además las flechas están dirigidas de

forma congruente, cuando una orientación no posee ciclos dirigidos se denomina *orientación acíclica*, por el contrario, si cada flecha pertenece a un ciclo dirigido entonces la orientación se llama *totalmente cíclica*.

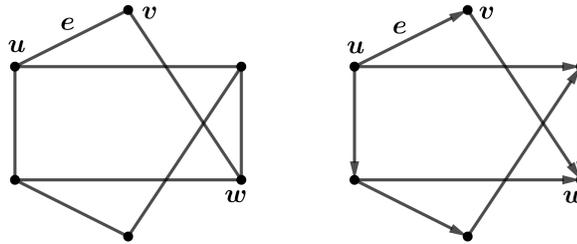


Figura 1.1: A la izquierda se puede apreciar una gráfica G y a la derecha una orientación de la misma, donde el u y v son el vértice inicial y final de e respectivamente. En la orientación u es una fuente mientras que w es un sumidero.

También podemos definir operaciones en gráficas, una de estas es el complemento de una gráfica $G = (V, E)$, denotado y definido por $\overline{G} = (V, E')$ donde $E' = \{uv : uv \notin E\}$. Otra operación que utilizaremos más adelante es la suma de gráficas, dadas dos gráficas G y H con $V(G) \cap V(H) = \emptyset$, denotamos la suma de estas como $G + H$ cuyo conjunto de vértices es $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ y su conjunto de aristas es $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv : u \in V(G) \text{ y } v \in V(H)\}$. De igual forma introduciremos algunas familias de gráficas con las que trabajaremos a lo largo de este escrito, la primer familia son las gráficas completas, dado un número natural n , denotamos por K_n a la gráfica completa en n vértices cuyo conjunto de vértices es $\{1, 2, \dots, n\}$ y cada par de vértices es adyacente. Otra familia conocida que utilizaremos en el siguiente capítulo son las *piñatas*, que son gráficas definidas mediante la suma $K_n + \overline{K_m}$. Si k es un número natural fijo, definimos la familia de k -piñatas como el conjunto $\{K_n + \overline{K_k}\}_{n \geq 1}$.

Dado que nos interesa estudiar el polinomio de Tutte, es necesario presentar una generalización a la noción de gráfica. Una *multigráfica* es una tripleta $G = (V, E, \sigma)$, donde V y E son conjuntos finitos disjuntos y $\sigma : E \rightarrow V \times V$ es una función que asigna a cada elemento de E una pareja de elementos en V . De la misma forma que antes V y E son los conjuntos de vértices y aristas respectivamente. Observe que está noción permite que existan aristas múltiples entre una pareja de vértices y, además, permite que existan aristas cuyos dos ex-

tremos sean el mismo vértice, este último tipo de aristas reciben el nombre de *lazos*. Observe que cuando se permiten aristas múltiples pueden existir ciclos de longitud 2 y los lazos son considerados ciclos de longitud 1. Cabe mencionar que cuando trabajamos con multigráficas los lazos contribuyen 2 unidades en el grado de su vértice incidente. Todas las definiciones que vimos para gráficas puede trasladarse al lenguaje de multigráficas fácilmente, por esta razón durante el desarrollo de este trabajo nos referiremos a las multigráficas simplemente como gráficas.

Las siguientes dos operaciones son esenciales en el estudio de invariantes en gráficas provenientes del polinomio de Tutte que es uno de las líneas principales de este escrito. La primer operación es el borrado de aristas, dada una gráfica $G = (V, E)$ y una arista $e \in E$, $G \setminus e = (V, E \setminus \{e\})$ denota al borrado de la arista e en la gráfica G . La segunda operación es la contracción de aristas, dada $e = ab$ una arista de $G = (V, E)$, G/e denota a la contracción de la arista e en G y está definida como $G/e = (V', E')$ donde $V' = V \setminus \{a, b\} \cup v_{ab}$ y $E' = \{uv \in E : u \neq a, b \text{ y } v \neq a, b\} \cup \{uv_{ab} : ua \in E \text{ o } ub \in E\}$. Ahora que tenemos las nociones de conexidad y borrado de aristas podemos introducir un concepto muy importante en la teoría que desarrollaremos más adelante, para una gráfica G , una arista $e \in E(G)$ es un *istmo* si $G \setminus e$ tiene más componentes conexas que G , cabe mencionar que este tipo de aristas comúnmente se llaman puentes, sin embargo, elegimos el término de istmo ya que estudiaremos a las gráficas dentro del contexto de los matroides. En la Figura 1.2 se puede apreciar un ejemplo de borrado y contracción de aristas.

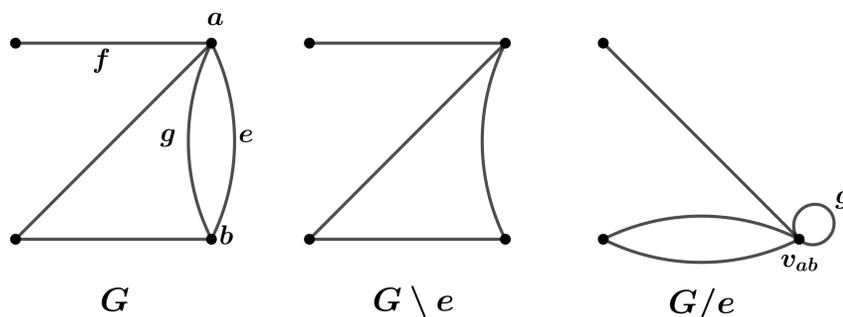


Figura 1.2: Borrado y contracción de $e = ab$. Observe que la arista f es un istmo mientras que g es un lazo en la gráfica G/e .

1.2. Matroides

La teoría de Matroides es un área de las matemáticas cuya motivación surge en gran medida del álgebra lineal y la teoría de las gráficas, fueron introducidos en el trabajo seminal [30] por Whitney en 1935. Daremos a continuación una breve introducción sobre esta teoría, no sin antes persuadir al lector en consultar el libro de J. G. Oxley [23] donde podrá encontrar un extenso estudio de esta teoría.

Un *matroide* es un par ordenado $M = (E, \mathcal{I})$, donde E es un conjunto finito e \mathcal{I} es una colección de subconjuntos de E que satisface las siguientes propiedades:

- $\emptyset \in \mathcal{I}$.
- Si $I \in \mathcal{I}$ e $I' \subseteq I$, entonces $I' \in \mathcal{I}$.
- Si $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ son tales que $|I_1| < |I_2|$, entonces existe un elemento $e \in I_2 \setminus I_1$ tal que $I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

El conjunto E se llama *conjunto base*, mientras que a los conjuntos en \mathcal{I} se les llama conjuntos independientes y los subconjuntos de E que no pertenecen a \mathcal{I} se denominan dependientes. Una de las características más interesante de los matroides es que existen muchas definiciones equivalentes, por ejemplo, un matroide puede definirse en término de sus conjuntos dependientes, pues estos determinan por completo a los conjuntos independientes. Algunas otras caracterizaciones de matroides pueden formularse en términos de los siguientes conceptos:

Sean $M = (E, \mathcal{I})$ un matroide y $P(E)$ el conjunto potencia de E .

- La función de rango de M es la función $r : P(E) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$, tal que $r(X) = \max\{|Y| : Y \subseteq X, Y \text{ es independiente en } M\}$.
- La función cerradura se define como la función $Cl : P(E) \rightarrow P(E)$, tal que $Cl(X) = \{e \in E : r(X \cup e) = r(X)\}$.
- Si $X \subseteq E$ es tal que $Cl(X) = X$ decimos que X es cerrado en M .
- Si $X \subseteq E$ es independiente maximal decimos que X es una base de M .
- Si $X \subseteq E$ es dependiente minimal decimos que X es un circuito de M .

Un matroide puede definirse en términos de cualquiera de las estructuras anteriores, es decir, basta conocer el conjunto de bases o circuitos; o la función de rango o cerradura para construir un matroide, cabe mencionar que cada estructura tiene un conjunto de axiomas que las definen. Por esta razón conviene tener una notación general para referirnos a un matroide, sin importar las estructuras que lo definen denotaremos un matroide por $M(E)$ entendiendo que su conjunto base es E y, cuando no haya confusión escribiremos solamente M .

Al igual que en muchas áreas de las matemáticas en teoría de matroides también existe el concepto de dualidad. Sea $M(E)$ un matroide sobre E . Definimos el matroide dual de M , denotado M^* , como el matroide cuyas bases están formadas por los complementos de las bases de M , es decir, el conjunto de bases de M^* es $\mathcal{B}^* = \{E \setminus B : B \text{ es base de } M\}$. Con la noción de dualidad en la teoría podemos hablar de las estructuras del objeto dual; sin embargo, dado que durante el estudio de matroides estas estructuras aparecen con mucha frecuencia conviene tener una terminología para dichas estructuras duales. De esta forma cuando hablemos de una estructura en el matroide dual M^* , diremos que es una co-estructura en nuestro matroide M . Por ejemplo, para un circuito C de M^* , diremos que C es un co-circuito de M , así también para bases, independientes y demás estructuras del matroide dual.

Dado un matroide $M(E)$ y una base B de M , entonces para cualquier elemento fuera de la base, digamos $p \in E \setminus B$, existe un único circuito contenido en $B \cup p$ y que contiene a p , a este circuito lo llamamos un *circuito fundamental* y lo denotamos $cf(B, p)$. De forma dual, para cualquier elemento en la base, digamos $b \in B$, existe un único co-circuito contenido en $(E \setminus B) \cup b$ el cual se denomina *co-circuito fundamental* y se denota $ccf(B, b)$.

Como ocurre con las gráficas, en matroides también existen las operaciones de borrado y contracción, estas operaciones son fundamentales para el desarrollo de la teoría de menores y también para estudiar el polinomio de Tutte que es nuestro principal objeto de estudio. Sean $M = (E, \mathcal{I})$ un matroide, $e \in E$ un elemento de M y r la función de rango en M .

Definimos $M \setminus e = (E \setminus e, \mathcal{I}')$ como el borrado de e en el matroide M , donde $\mathcal{I}' = \{I \in \mathcal{I} : I \subseteq E \setminus e\}$.

Definimos $M/e = (E \setminus e, \mathcal{I}'')$ como la contracción de e en el matroide M , donde $\mathcal{I}'' = \{I \setminus e : e \in I \in \mathcal{I}\}$ si $r(e) = 1$. Si $r(e) = 0$ se define $M/e = M \setminus e$.

Puede probarse que $M \setminus e$ y M/e son matroides cuyo conjunto base es $E \setminus e$, además de satisfacer $(M \setminus e)/e' = (M/e) \setminus e'$ para cualesquiera elementos $e, e' \in E$. De esta forma

podemos decir que dado un matroide M , un *menor* de M es un matroide N obtenido al realizar una sucesión de borrados y contracciones en M . Además de la definición de menor necesitamos definir dos tipos de elementos importantes en un matroide. Sean $M = (E, \mathcal{I})$ un matroide y $e \in E$ un elemento de M . Decimos que e es un lazo si no pertenece a ninguna base y decimos que e es un istmo si está en toda base de M .

Existe muchos ejemplos de familias de matroides, una de ellas es la familia de matroides representables que fue introducida en el trabajo seminal de Whitney en 1935 [30] y a esta familia se debe el nombre de matroides ya que estos consisten en aquellos matroides que son representados por matrices y cuyo conjunto base puede indexarse mediante las columnas de dicha matriz. Otra familia muy conocida son los matroides gráficos, dado que esta familia es de particular interés para nosotros daremos una breve explicación de dichos matroides. Dada una gráfica $G = (V, E)$ podemos considerar el matroide que tiene como conjunto base a las aristas de la gráfica y cuyos conjuntos independientes son aquellos subconjuntos de aristas que no forman un ciclo en G , este matroide se denota por $M(G)$. Cabe mencionarse que los circuitos del matroide corresponden a los subconjuntos de aristas que forman ciclos en G , también, los conceptos de istmos y lazos corresponden en ambas teorías, es decir, una arista $e \in E$ es un istmo (lazo) de G si y sólo si e es un istmo (lazo) de $M(G)$.

1.3. El polinomio de Tutte

En esta sección introduciremos uno de los conceptos principales de este trabajo llamado *polinomio de Tutte*, el cual es un invariante en matroides. Nos basaremos en [4] donde se puede encontrar un estudio extenso de este polinomio. Este invariante fue introducido por W. T. Tutte en 1967 (ver [27]) y desde entonces ha sido de gran interés por su relación con la teoría de nudos, física estadística y teoría de códigos (ver [29]), además, una de sus riquezas radica en las múltiples definiciones que existe de este polinomio, nosotros daremos una definición basada en borrado y contracción dada la naturaleza de nuestro trabajo.

Dado un matroide $M(E)$ y un elemento $e \in E$ que no es lazo ni istmo, entonces el *polinomio de Tutte* de M , denotado $T(M; x, y)$, está definido por la siguiente relación:

$$T(M; x, y) = T(M \setminus e; x, y) + T(M/e; x, y).$$

Si M no contiene tal elemento e , entonces M está formado únicamente por lazos e istmos,

digamos i lazos y j istmos, en este caso su polinomio de Tutte está definido como:

$$T(M; x, y) = x^i y^j.$$

Para una gráfica G , es posible definir el polinomio de Tutte de G , denotado $T(G; x, y)$, copiando la definición anterior en términos de gráficas, ya que hemos introducido anteriormente las nociones de lazos e istmos de una gráfica y el borrado y contracción de aristas en gráficas. Otra posible definición de $T(G; x, y)$ es calcular el polinomio de Tutte del matroide gráfico $M(G)$, es decir, se tiene que $T(M(G); x, y) = T(G; x, y)$.

A continuación mencionaremos algunas propiedades del polinomio de Tutte. Una de estas es la relación que guardan el polinomio de un matroide con el polinomio de su matroide dual, para todo matroide M se tiene que $T(M^*; x, y) = T(M; y, x)$. Además, el polinomio de Tutte tiene muchas interpretaciones cuando es evaluado en puntos o a lo largo de curvas en el plano, por ejemplo, si $b(M)$, $i(M)$ y $s(M)$ denotan el número de bases, conjuntos independientes y conjuntos generadores de $M(E)$ respectivamente, entonces:

- i) $b(M) = T(M; 1, 1)$,
- ii) $i(M) = T(M; 2, 1)$,
- iii) $s(M) = T(M; 1, 2)$ y
- iv) $2^{|E|} = T(M; 2, 2)$.

También, se sabe que el polinomio de Tutte es una generalización de otros invariantes polinomiales en matroides, por ejemplo, a lo largo de la recta $y = 0$ se especializa en el polinomio característico de un matroide y, a lo largo de la recta $y = 1$ el polinomio de Tutte se especializa en el polinomio de descascarillado, este último polinomio es de gran importancia en el Capítulo 3 donde estudiaremos más a fondo esta relación.

En el caso de gráficas, el polinomio de Tutte también tiene muchas interpretaciones combinatorias, por ejemplo, si G es una gráfica conexa, el número de árboles generadores corresponde al número de bases del matroide gráfico $M(G)$, es decir, las relaciones mencionadas anteriormente nos garantizan que este número es igual a $T(G; 1, 1)$. Otras interpretaciones dentro de las más conocidas son las siguientes, $T(G; 2, 0)$, $T(G; 1, 0)$ y $T(G; 0, 2)$ cuentan el número de orientaciones acíclicas, orientaciones acíclicas con una única fuente predeterminada y orientaciones totalmente cíclicas de G respectivamente.

También, se sabe que el polinomio cromático de G es una especialización de su polinomio de Tutte a lo largo de la recta $y = 0$, de hecho, si G tiene κ componentes conexas se cumple que

$$\chi(G; \lambda) = \lambda^\kappa (-1)^{|V(G)| - \kappa} T(G; 1 - \lambda, 0).$$

Capítulo 2

El polinomio de Tutte y los diagramas de cuerdas

Nuestro objetivo en este capítulo es presentar algunas interpretaciones combinatorias del polinomio de Tutte evaluado en los puntos $(2, -1)$ y $(1, -1)$ para las gráficas $K_n + \overline{K_m}$. Como se mencionó en la Sección 1.3 el polinomio de Tutte tiene diversas interpretaciones combinatorias, por ejemplo, se sabe que para una gráfica G predeterminada, $T(G; 2, 0)$ y $T(G; 1, 0)$ cuentan el número de orientaciones acíclicas y orientaciones acíclicas con una única fuente respectivamente, con estas interpretaciones podemos obtener fácilmente la siguiente igualdad $T(K_n; 2, 0) = T(K_{n+1}; 1, 0)$. Estas relaciones sobre evaluaciones del polinomio de Tutte en distintos puntos son interesantes porque pueden darnos información del comportamiento de la gráfica (o del matroide en general), además, no se conocen muchas relaciones de este tipo. Una relación similar fue encontrada por C. Merino [18] en los puntos $(2, -1)$ y $(1, -1)$ para las gráficas completas, a saber, se tiene que $T(K_n; 2, -1) = T(K_{n+2}; 1, -1)$, esta relación fue ampliamente estudiada en [9] y se encontró una generalización de la misma obteniendo condiciones suficientes para una gráfica G y vértices $u, v \in V(G)$ de tal forma que se cumpla $T(G; 1, -1) = T(G \setminus \{u, v\}; 2, -1)$, este resultado es relevante para nosotros porque las gráficas piñata $K_n + \overline{K_m}$ satisfacen dichas condiciones, de hecho, tenemos la siguiente relación:

$$T(K_n + \overline{K_m}; 2, -1) = T(K_{n+1} + \overline{K_{m+1}}; 1, -1). \quad (2.1)$$

2.1. Diagramas de cuerdas

Los diagramas de cuerdas han sido estudiados en diversos ámbitos y se conocen muchas propiedades de ellos, es este trabajo nuestro interés es utilizar un enfoque introducido por Tomoki Nakamigawa en [20], donde el concepto básico es la expansión de un diagrama de cuerdas.

Por un *diagrama de cuerdas* entendemos una colección de segmentos de recta, llamados cuerdas, cuyos extremos están sobre una circunferencia, de tal manera que ningún par de segmentos comparten puntos extremos. Dadas dos cuerdas del diagrama, decimos que forman un *cruce* si los segmentos de rectas se intersectan. A un diagrama de cuerdas D podemos asociarle naturalmente una gráfica G_D que tiene como conjunto de vértices a las cuerdas del diagrama y dos vértices son adyacentes si sus cuerdas asociadas forman un cruce en D , ver Figura 2.1. Las gráficas que pueden obtenerse mediante este proceso se llaman gráficas circulares y existen muchas propiedades y caracterizaciones de las mismas, sin embargo, en este trabajo solamente utilizaremos el hecho de que la gráfica $K_n + \overline{K_m}$ es circular.

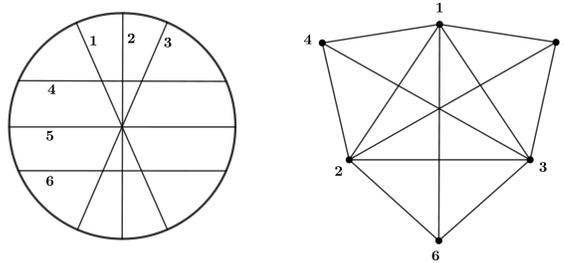


Figura 2.1: Diagrama de cuerdas con su gráfica circular asociada.

Denotemos a una cuerda del diagrama como xy , donde x, y son los puntos extremos de la cuerda que están sobre la circunferencia. Sea D un diagrama de cuerdas y $S = \{x_1x_3, x_2x_4\}$ un cruce del diagrama, la expansión de D respecto a S se define como reemplazar D con dos nuevos diagramas $D_1 = (D \setminus S) \cup S_1$ y $D_2 = (D \setminus S) \cup S_2$, donde $S_1 = \{x_2x_3, x_1x_4\}$ y $S_2 = \{x_1x_2, x_3x_4\}$, ver Figura 2.2.

En [20] T. Nakamigawa prueba que al realizar una expansión el número de cruces en los diagramas obtenidos siempre es menor o igual al número de cruces del diagrama original, más

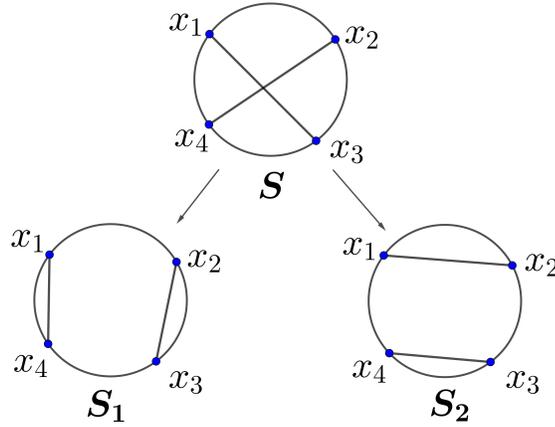


Figura 2.2: Expansión del diagrama respecto a S .

aún, podemos realizar una sucesión de expansiones hasta obtener solamente diagramas sin cruces, este multiconjunto de diagramas se denota como $\text{NCD}(D)$, el siguiente resultado nos asegura que el multiconjunto está bien definido.

Teorema 2.1.1. (*Nakamigawa, 2016*) *Sea D un diagrama de cuerdas. Entonces, el multiconjunto $\text{NCD}(D)$ de diagramas sin cruce que se obtiene al realizar una serie de expansiones es independiente del orden en el que las expansiones son hechas.*

Dado que el multiconjunto $\text{NCD}(D)$ está bien definido, podemos hablar de la función $f(D) = |\text{NCD}(D)|$. Una vez definida f es natural preguntarse por los valores para ciertas familias de diagramas, denotemos por \mathcal{C}_n un n -cruce, que consiste en n cuerdas donde cada par de ellas forma un cruce, T. Nakamigawa prueba en [20] que $f(\mathcal{C}_n) = \mathcal{E}_{n+1}$, donde \mathcal{E}_n es el número de Euler que cuenta el número de permutaciones alternantes en $\{1, 2, \dots, n\}$. Con esto en mente podemos dar una primera relación entre el polinomio de Tutte y los diagramas de cuerdas, recordemos la identidad encontrada por C. Merino [18]: $T(K_{n+2}; 1, -1) = T(K_n; 2, -1)$, también, es conocido que la evaluación $T(K_n; 1, -1)$ es igual al número de Euler \mathcal{E}_{n-1} , ver [13]. Es decir, tenemos las siguientes igualdades.

$$f(\mathcal{C}_n) = \mathcal{E}_{n+1} = T(K_{n+2}; 1, -1) = T(K_n; 2, -1).$$

Basta observar que la gráfica asociada al n -cruce es la gráfica completa K_n para tener la siguiente igualdad.

$$f(\mathcal{C}_n) = T(G_{\mathcal{C}_n}; 2, -1).$$

Esta relación fue generalizada para cualquier diagrama de cuerdas por T. Nakamigawa y T. Sakuma [21], es decir, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.1.2. (*Nakamigawa & Sakuma, 2017*) *Sea D un diagrama de cuerdas. Entonces $f(D) = T(G_D; 2, -1)$.*

Una simple aplicación de los Teoremas 2.1.1 y 2.1.2 nos dice que para cualquier diagrama de cuerdas D y cualquier cruce S , si D_1 y D_2 denotan a los diagramas obtenidos al realizar la expansión de D respecto a S entonces se cumple:

$$T(G_D; 2, -1) = T(G_{D_1}; 2, -1) + T(G_{D_2}; 2, -1). \tag{2.2}$$

2.2. Árboles y bosques crecientes pares

Dado un árbol T cuyos vértices tienen etiquetas $v_1 < v_2 < \dots < v_n$, donde $n = |V(T)|$, definimos la raíz del árbol a ser el vértice v_1 . Decimos que T es *creciente* si para todo vértice v_i , el camino desde v_1 hacia v_i es creciente y, decimos que T es *par* si cualquier vértice diferente de v_1 tiene un número par de hijos. De la misma forma, dado un bosque etiquetado F , decimos que F es un bosque creciente par si cada componente conexa de F es un árbol creciente par.

Nos interesa contar el número de árboles y bosques generadores crecientes pares de dos familias de gráficas introducidas en la Sección 1.1, la primer familia son las gráficas completas K_n cuyas etiquetas son $\{1, 2, \dots, n\}$ y la segunda familia son las piñatas $K_n + \overline{K_m}$ cuyas etiquetas son $\{1, 2, \dots, n\}$ en los vértices que pertenecen a K_n y $\{n+1, n+2, \dots, n+m\}$ en los vértices de $\overline{K_m}$. Para las gráficas completas estos números se encontraron en [9], a saber,

tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.2.1. (*Goodall, Merino, de Mier & Noy, 2013*) *Para todo $n \geq 1$ el número de árboles y bosques generadores crecientes pares de K_n es igual a $T(K_n; 1, -1)$ y $T(K_n; 2, -1)$ respectivamente.*

Cabe mencionar que estos números fueron utilizados para encontrar una prueba combinatoria de la relación $T(K_n; 2, -1) = T(K_{n+2}; 1, -1)$ encontrada por C. Merino, es decir, la relación anterior nos dice que el número de bosques generadores crecientes pares de K_n es igual al número de árboles generadores crecientes pares de K_{n+2} . Resumimos esta biyección encontrada en [9] en la siguiente proposición para utilizarla en una sección posterior.

Proposición 2.2.2. (*Goodall, Merino, de Mier & Noy, 2013*) *Existe una biyección entre los bosques generadores crecientes pares de K_n y los árboles generadores crecientes pares de K_{n+2} .*

Demostración. Dado un árbol generador creciente par de K_{n+2} podemos borrar todas las aristas en el único camino que existe entre los vértices 1 y $n + 2$, si además eliminamos los vértices 1 y $n + 2$ tenemos un bosque creciente par en los vértices $\{2, 3, \dots, n + 1\}$, basta disminuir cada etiqueta en 1 para obtener un bosque generador creciente par de K_n .

De forma similar, dado un bosque generador creciente par F de K_n podemos incrementar las etiquetas en 1 para obtener un bosque creciente par en los vértices $2, 3, \dots, n + 1$. Las componentes conexas de F pueden ser particionadas en dos conjuntos, el primer conjunto está formado por aquellas componentes cuya raíz tiene grado par, digamos que r_1, r_2, \dots, r_l son dichas raíces; el segundo conjunto son aquellas componentes cuya raíz tiene grado impar, digamos $s_1 < s_2 < \dots < s_k$. Basta agregar los vértices 1, $n + 2$ y las aristas $\{1, r_1\}, \{1, r_2\}, \dots, \{1, r_l\}, \{1, s_1\}, \{s_1, s_2\}, \{s_2, s_3\}, \dots, \{s_k, n + 2\}$ para obtener un árbol generador creciente par de K_{n+2} . \square

Antes de continuar con los resultados de esta sección y para facilitar las pruebas de los mismos haremos algunas observaciones, primero, recordemos que las gráficas piñatas $K_n + \overline{K_m}$ son circulares, es decir, existe un diagrama de cuerdas que la representa, en la Figura 2.3 podemos ver dicho diagrama, además, utilizaremos el diagrama a la derecha codificando las cuerdas

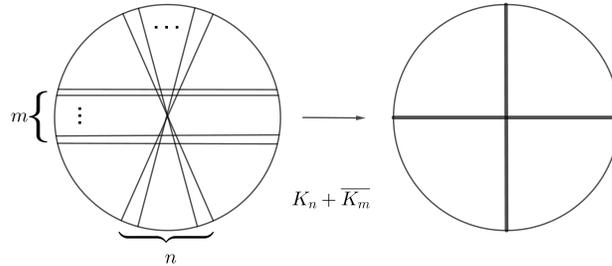


Figura 2.3: Diagrama de cuerdas de $K_n + \overline{K}_m$ y su codificación.

que representan los $n + m$ vértices de $K_n + \overline{K}_m$. Cabe mencionar que en algunas ocasiones utilizaremos notación como $K_n + \overline{K}_1$ o $K_n + \overline{K}_0$ en lugar de K_{n+1} y K_n respectivamente, la razón se hará clara durante la prueba del Teorema 2.2.5, haciendo nuestra notación consistente. También, de aquí en adelante cuando sea conveniente llamaremos bosques (árboles) a los bosques (árboles) generadores crecientes pares y, $\mathcal{F}(G)$ representa el conjunto de bosques generadores crecientes pares de la gráfica G .

Podemos ahora empezar con los resultados de esta sección, los siguientes dos lemas nos ayudarán a probar uno de los teoremas principales.

Lema 2.2.3. (Merino & Antonio, 2020) *Para todo $n \geq 1$, el número de bosques generadores crecientes pares de $K_n + \overline{K}_2$ es igual a $T(K_n + \overline{K}_2; 2, -1)$.*

Demostración. Consideremos la expansión del diagrama en la Figura 2.4, utilizando la Ecuación (2.2) obtenemos $T(K_{n+2} + \overline{K}_0; 2, -1) = T(K_n \cup K_1 \cup K_1; 2, -1) + T(K_n + \overline{K}_2; 2, -1)$. Observe que el polinomio de Tutte de una gráfica G es igual al polinomio de Tutte de cualquier gráfica obtenida a partir de G añadiendo vértices aislados, luego, la relación anterior es equivalente a:

$$T(K_{n+2} + \overline{K}_0; 2, -1) = T(K_n; 2, -1) + T(K_n + \overline{K}_2; 2, -1). \tag{2.3}$$

Analicemos ahora al conjunto $\mathcal{F}(K_{n+2} + \overline{K}_0)$, podemos particionar este conjunto en dos clases, la primera clase \mathcal{F}_1 formada por los bosques que contienen a la arista $\{n + 1, n + 2\}$ y la segunda clase \mathcal{F}_2 formada por los bosques que no contienen dicha arista. Observe que en cualquier bosque de \mathcal{F}_1 la arista $\{n + 1, n + 2\}$ debe ser por sí misma una componente

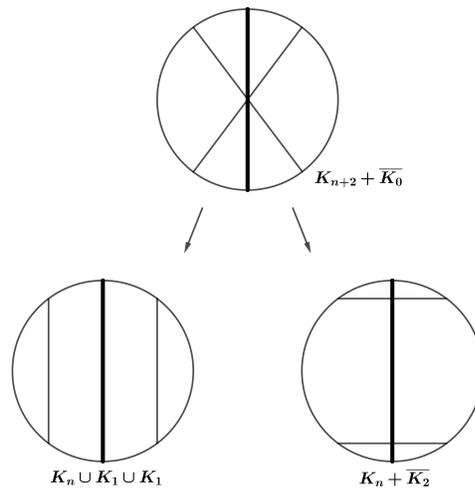


Figura 2.4: Expansión de $K_{n+2} + \overline{K_0}$.

conexa, ya que el vértice $n + 2$ no puede tener más vértices adyacentes por ser un bosque creciente y, el vértice $n + 1$ no puede tener más vértices adyacentes por ser un bosque par. Luego, el conjunto \mathcal{F}_1 está en biyección con $\mathcal{F}(K_n)$, pues eliminando la arista $\{n + 1, n + 2\}$ y ambos vértices la identidad sería una biyección entre estos conjuntos. Para el conjunto \mathcal{F}_2 , la identidad funciona como una biyección con el conjunto $\mathcal{F}(K_n + \overline{K_2})$, obteniendo la siguiente igualdad:

$$|\mathcal{F}(K_{n+2} + \overline{K_0})| = |\mathcal{F}(K_n)| + |\mathcal{F}(K_n + \overline{K_2})|. \quad (2.4)$$

El Teorema 2.2.1 nos garantiza que $T(K_{n+2} + \overline{K_0}; 2, -1) = |\mathcal{F}(K_{n+2} + \overline{K_0})|$, junto con las ecuaciones (2.3) y (2.4) tenemos:

$$T(K_n; 2, -1) + T(K_n + \overline{K_2}; 2, -1) = |\mathcal{F}(K_n)| + |\mathcal{F}(K_n + \overline{K_2})|$$

y dado que $T(K_n; 2, -1) = |\mathcal{F}(K_n)|$ finalmente obtenemos:

$$T(K_n + \overline{K_2}; 2, -1) = |\mathcal{F}(K_n + \overline{K_2})|.$$

□

Lema 2.2.4. (Merino & Antonio, 2020) Para todo $n \geq 1$, el número de bosques generadores crecientes pares de $K_n + \overline{K_3}$ es igual a $T(K_n + \overline{K_3}; 2, -1)$.

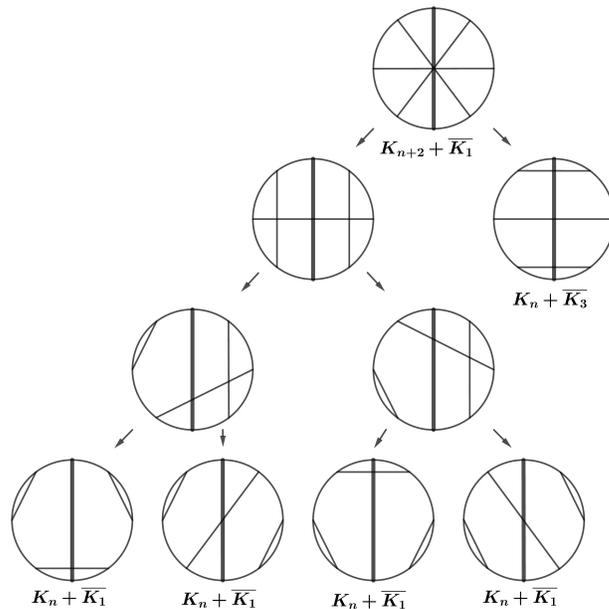


Figura 2.5: Expansión de $K_{n+2} + \overline{K_1}$.

Demostración. Como en el lema anterior, utilizando la Figura 2.5 y la ecuación (2.2) tenemos que

$$T(K_{n+2} + \overline{K_1}; 2, -1) = T(K_n + \overline{K_3}; 2, -1) + 4T(K_n + \overline{K_1} \cup K_1 \cup K_1; 2, -1).$$

La ecuación anterior es equivalente a

$$T(K_{n+2} + \overline{K_1}; 2, -1) = T(K_n + \overline{K_3}; 2, -1) + 4T(K_n + \overline{K_1}; 2, -1). \tag{2.5}$$

Analicemos ahora el conjunto $\mathcal{F}(K_{n+2} + \overline{K_1})$, podemos dar una partición de este conjunto dependiendo de la subgráfica inducida por los vértices $n + 1$, $n + 2$ y $n + 3$. Definimos los conjuntos \mathcal{F}_i para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ indexados según la Figura 2.6, por ejemplo, si un bosque de $K_{n+2} + \overline{K_1}$ no tiene ninguna arista entre los tres vértices mencionados, entonces la subgráfica inducida es la primer gráfica que aparece en la Figura 2.6 y este bosque pertenece al conjunto \mathcal{F}_1 . Es fácil ver que cualquier bosque de $K_{n+2} + \overline{K_1}$ pertenece exactamente a un conjunto, pues estas cinco son las únicas opciones de subgráficas inducidas que provienen de bosques crecientes pares.

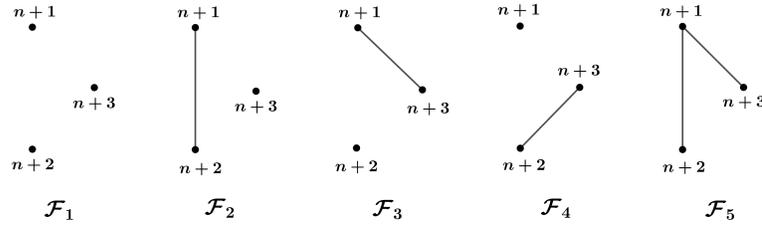


Figura 2.6: Partición de los bosques de $K_{n+2} + \overline{K_1}$.

Una vez dada la partición podemos dar biyecciones entre estos conjuntos y los bosques de ciertas gráficas completas. Para \mathcal{F}_1 observe que estos bosques están en biyección con los bosques de la gráfica $K_n + \overline{K_3}$, siendo la identidad una biyección entre ambos conjuntos. Para \mathcal{F}_2 forzosamente tenemos que la arista $\{n + 1, n + 2\}$ debe ser por sí misma una componente conexa del bosque de $K_{n+2} + \overline{K_1}$, de lo contrario no se tendría la condición de ser un bosque creciente par, eliminando la arista $\{n + 1, n + 2\}$ junto con sus vértices y reetiquetando el vértice $n + 3$ como $n + 1$ tenemos un bosque de $K_n + \overline{K_1}$, claramente esta es una biyección entre los bosques en \mathcal{F}_2 y los bosques de $K_n + \overline{K_1}$. Una biyección similar se puede utilizar para los casos de \mathcal{F}_3 y \mathcal{F}_4 . Finalmente, dado un bosque en \mathcal{F}_5 , borrando las aristas $\{n + 1, n + 2\}$, $\{n + 1, n + 3\}$ y los vértices $n + 2, n + 3$ obtenemos un bosque de $K_n + \overline{K_1}$ y de la misma forma tenemos una biyección entre los bosques de \mathcal{F}_5 y los bosques de $K_n + \overline{K_1}$.

La partición y biyecciones anteriores nos dan la siguiente ecuación en términos de las cardinalidades de los bosques, tenemos que:

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(K_{n+2} + \overline{K_1})| &= \sum_{i=1}^5 |\mathcal{F}_i| \\ &= |\mathcal{F}(K_n + \overline{K_3})| + 4|\mathcal{F}(K_n + \overline{K_1})| \end{aligned}$$

Por el Teorema 2.2.1 sabemos que $|\mathcal{F}(K_{n+2} + \overline{K_1})| = T(K_{n+2} + \overline{K_1}; 2, -1)$, utilizando la ecuación (2.5) obtenemos:

$$|\mathcal{F}(K_n + \overline{K_3})| + 4|\mathcal{F}(K_n + \overline{K_1})| = T(K_n + \overline{K_3}; 2, -1) + 4T(K_n + \overline{K_1}; 2, -1).$$

Nuevamente, por el Teorema 2.2.1 sabemos que $|\mathcal{F}(K_n + \overline{K_1})| = T(K_n + \overline{K_1}; 2, -1)$ y simpli-

ficando la ecuación anterior tenemos

$$|\mathcal{F}(K_n + \overline{K_3})| = T(K_n + \overline{K_3}; 2, -1).$$

□

Ahora estamos listos para presentar uno de los resultados principales de esta sección.

Teorema 2.2.5. *(Merino & Antonio, 2020)* Para todo $n, m \geq 1$, el número de bosques generadores crecientes pares de $K_n + \overline{K_m}$ es igual a $T(K_n + \overline{K_m}; 2, -1)$.

Antes de empezar la prueba conviene explicar cómo funciona la demostración, también, para simplificar la notación definimos $F_{n,m} = T(K_n + \overline{K_m}; 2, -1)$. La idea es mostrar que utilizando expansiones de diagramas es posible encontrar relaciones entre las evaluaciones del polinomio de Tutte de distintas piñatas, las primeras relaciones son las siguientes.

$$\begin{aligned} F_{n+2,0} &= F_{n,2} + F_{n,0} \\ F_{n+2,1} &= F_{n,3} + 4F_{n,1} \\ F_{n+2,2} &= F_{n,4} + 9F_{n,2} + 4F_{n,0} \\ F_{n+2,3} &= F_{n,5} + 16F_{n,3} + 24F_{n,1} \\ F_{n+2,4} &= F_{n,6} + 25F_{n,4} + 80F_{n,2} + 16F_{n,0} \\ F_{n+2,5} &= F_{n,7} + 36F_{n,5} + 200F_{n,3} + 128F_{n,1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

También, analizando los bosques mediante las gráficas inducidas por los vértices $n+1, n+2, \dots, n+m$ podemos encontrar biyecciones que nos garanticen relaciones similares a las anteriores en términos de cardinalidades, es decir, podemos obtener las siguientes relaciones.

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(K_{n+2} + \overline{K_0})| &= |\mathcal{F}(K_n + \overline{K_2})| + |\mathcal{F}(K_n)| \\ |\mathcal{F}(K_{n+2} + \overline{K_1})| &= |\mathcal{F}(K_n + \overline{K_3})| + 4|\mathcal{F}(K_n + \overline{K_1})| \\ |\mathcal{F}(K_{n+2} + \overline{K_2})| &= |\mathcal{F}(K_n + \overline{K_4})| + 9|\mathcal{F}(K_n + \overline{K_2})| + 4|\mathcal{F}(K_n)| \\ |\mathcal{F}(K_{n+2} + \overline{K_3})| &= |\mathcal{F}(K_n + \overline{K_5})| + 16|\mathcal{F}(K_n + \overline{K_3})| + 24|\mathcal{F}(K_n + \overline{K_1})| \\ |\mathcal{F}(K_{n+2} + \overline{K_4})| &= |\mathcal{F}(K_n + \overline{K_6})| + 25|\mathcal{F}(K_n + \overline{K_4})| + 80|\mathcal{F}(K_n + \overline{K_2})| + 16|\mathcal{F}(K_n)| \\ |\mathcal{F}(K_{n+2} + \overline{K_5})| &= |\mathcal{F}(K_n + \overline{K_7})| + 36|\mathcal{F}(K_n + \overline{K_5})| + 200|\mathcal{F}(K_n + \overline{K_3})| + 128|\mathcal{F}(K_n + \overline{K_1})| \\ &\vdots \end{aligned}$$

Observe que las primeras dos relaciones en cada bloque son las que se obtuvieron en el Lema 2.2.3 y Lema 2.2.4. En la prueba de los lemas combinamos estas relaciones para obtener el resultado de las 2-piñatas y 3-piñatas. Para las 4-piñatas podemos igualar $F_{n+2,2} = |\mathcal{F}(K_{n+2} + \overline{K_2})|$ por el Lema 2.2.3, equivalentemente, tenemos la igualdad

$$F_{n,4} + 9F_{n,2} + 4F_{n,0} = |\mathcal{F}(K_n + \overline{K_4})| + 9|\mathcal{F}(K_n + \overline{K_2})| + 4|\mathcal{F}(K_n)|$$

y al cancelar términos obtenemos $F_{n,4} = |\mathcal{F}(K_n + \overline{K_4})|$. Para las 5-piñatas podemos igualar $F_{n+2,3} = |\mathcal{F}(K_{n+2} + \overline{K_3})|$ por el Lema 2.2.4, es decir, tenemos

$$F_{n,5} + 16F_{n,3} + 24F_{n,1} = |\mathcal{F}(K_n + \overline{K_5})| + 16|\mathcal{F}(K_n + \overline{K_3})| + 24|\mathcal{F}(K_n + \overline{K_1})|$$

cancelando términos obtenemos $F_{n,5} = |\mathcal{F}(K_n + \overline{K_5})|$. Podemos continuar con este proceso para tener el resultado general, observe que para probar el resultado para las m -piñatas suponemos cierto el resultado para las j -piñatas con $j \in \{m-2, m-4, \dots, 0\}$ si m es par y $j \in \{m-2, m-4, \dots, 1\}$ si m es impar.

Una observación muy importante es mencionar que durante la prueba no se obtienen explícitamente los coeficientes que aparecen en las relaciones, únicamente se muestra la existencia de dichas expresiones y que las expresiones en términos del polinomio de Tutte son congruentes con las expresiones en términos de los bosques, es decir, los coeficientes en ambas expresiones son los mismos. También, cabe mencionar que los coeficientes de las relaciones aparecen en la sucesión **A123583** de la *On-line Encyclopedia of Integer Sequences*, esta sucesión está relacionada con los polinomios de Chebyshev y un problema muy interesante sería estudiar más a fondo esta notable coincidencia.

Demostración del Teorema 2.2.5. Haremos inducción sobre m , tomando como casos base los Lemmas 2.2.3 y 2.2.4. Supongamos que el resultado se cumple para todo par n, j con $n \geq 1$ y $0 \leq j < m+4$. Nuestro objetivo es mostrar que utilizando expansiones en el diagrama de cuerdas de la gráfica $K_{n+2} + \overline{K_{m+2}}$ se obtiene una expresión de la forma:

$$F_{n+2,m+2} = F_{n,m+4} + \alpha_1 F_{n,m+2} + \alpha_2 F_{n,m} + \alpha_3 F_{n,m-2} + \dots \quad (2.6)$$

y que existe una partición de $\mathcal{F}(K_{n+2} + \overline{K_{m+2}})$ tal que cada clase de la partición es equicardinal a $\mathcal{F}(K_n + \overline{K_j})$ para algún $0 \leq j \leq m+4$, más aún, mostraremos que se puede obtener una expresión de la forma:

$$|\mathcal{F}(K_{n+2} + \overline{K_{m+2}})| = |\mathcal{F}(K_n + \overline{K_{m+4}})| + \alpha_1 |\mathcal{F}(K_n + \overline{K_{m+2}})| + \alpha_2 |\mathcal{F}(K_n + \overline{K_m})| + \alpha_3 |\mathcal{F}(K_n + \overline{K_{m-2}})| + \dots \quad (2.7)$$

Una vez mostradas las Ecuaciones (2.6) y (2.7) podemos combinarlas y usar la hipótesis de inducción para concluir $F_{n,m+4} = |\mathcal{F}(K_n + \overline{K_{m+4}})|$ probando el resultado.

Lo primero que haremos es describir la partición de $\mathcal{F}(K_{n+2} + \overline{K_{m+2}})$: dos bosques están en la misma clase si y sólo si las subgráficas inducidas por los vértices $n+1, n+2, \dots, n+m+4$ en ambos bosques son iguales, con esta definición podemos indexar a cada clase mediante dicha subgráfica, más aún, esta subgráfica nos da información sobre la cardinalidad de la clase que representa, por ejemplo, supongamos que la subgráfica inducida es como se muestra en la parte izquierda de la Figura 2.7, el vértice $n+1$ es raíz con grado 1 y $n+2$ es raíz con grado 2, luego, para todo bosque contenido en esta clase ningún vértice en $\{1, 2, \dots, n\}$ puede ser adyacente a $n+1$ ni a su hijo ni a los hijos de $n+2$ por ser un bosque creciente par, así, podemos borrar los vértices marcados en rojo junto a las aristas incidentes a estos y reetiquetar los vértices restantes como se muestra en la parte derecha de la Figura 2.7. Es decir, para cualquier bosque en esta clase se puede obtener un bosque de $\mathcal{F}(K_n + \overline{K_m})$, es fácil ver que esta asignación es una biyección.

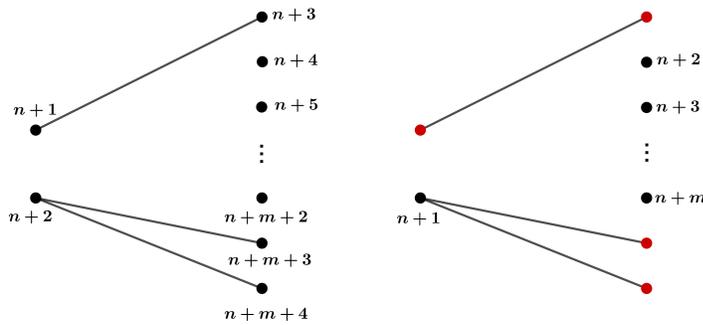


Figura 2.7: La clase indexada por la subgráfica en la izquierda es equicardinal a $\mathcal{F}(K_n + \overline{K_m})$, al borrar los vértices marcados en rojo se reetiquetan los vértices restantes como se muestra en la parte izquierda.

El ejemplo anterior se puede generalizar fácilmente, en la subgráfica inducida $[n+1, \dots, n+m+4]$ los únicos vértices que pueden ser raíz de componentes conexas no triviales (con más de un vértice) son $n+1$ y $n+2$, cuando uno de estos vértices es raíz y tiene grado impar, entonces ningún vértice en $\{1, 2, \dots, n\}$ puede ser adyacente a él ni a sus hijos y podemos

borrar todos los vértices de la componente conexa; por otro lado, si alguno de los vértices $n+1$ o $n+2$ es raíz de grado par, entonces ningún vértice en $\{1, 2, \dots, n\}$ puede ser adyacente a sus hijos y podemos borrar a los hijos de este vértice, finalmente, si en total borramos j vértices (observe que j siempre es par), entonces después de reetiquetar los vértices restantes obtenemos un bosque de $\mathcal{F}(K_n + \overline{K_{m+4-j}})$ y esta asignación será una biyección. Con estas biyecciones podemos decir que una subgráfica H representa a $K_n + \overline{K_{m+4-j}}$ si la clase de H es equicardinal al conjunto $\mathcal{F}(K_n + \overline{K_{m+4-j}})$. En la Figura 2.8 se muestran dos subgráficas, ambas clases representan a la piñata $K_n + \overline{K_{m+4-2(k+l+1)}}$.

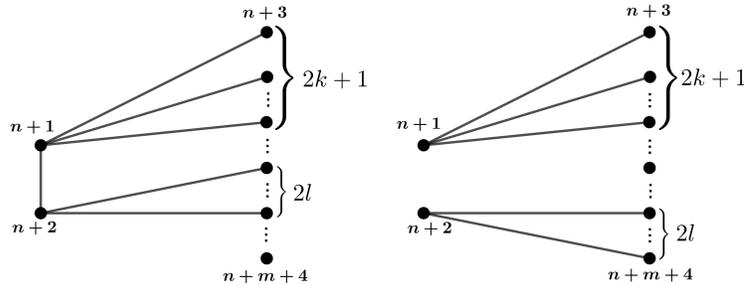


Figura 2.8: Ambas subgráficas representan a $K_n + \overline{K_{m+4-j}}$ ya que ambas clases son equicardinales al conjunto $\mathcal{F}(K_n + \overline{K_{m+4-j}})$.

La partición construida como antes nos garantiza la Ecuación 2.7, note que la única subgráfica que representa a $\mathcal{F}(K_n + \overline{K_{m+4}})$ es la subgráfica trivial en los vértices $\{n+1, n+2, \dots, n+m+4\}$, es decir, la subgráfica sin aristas. Para probar la Ecuación (2.6) daremos un emparejamiento entre las subgráficas que indexan la partición y los diagramas de cuerdas obtenidos al realizar expansiones en el diagrama de $K_{n+2} + \overline{K_{m+2}}$, más aún, este emparejamiento lo construiremos de tal manera que cada subgráfica H esté emparejada con un diagrama que represente a la misma piñata que H , esto nos garantizará que los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ ciertamente son iguales en ambas Ecuaciones (2.6) y (2.7). Comencemos analizando la sucesión de expansiones en la Figura 2.9, el diagrama A en esta figura lo emparejamos con la subgráfica trivial, esta subgráfica representa a la piñata $K_n + \overline{K_{m+4}}$ al igual que el diagrama A ; el diagrama B de la Figura 2.9 lo emparejamos con la subgráfica que tiene únicamente a la arista $\{n+1, n+2\}$, esta subgráfica representa a la piñata $K_n + \overline{K_{m+2}}$ al igual que el diagrama B . Ahora nos interesa estudiar el comportamiento de los diagramas C, D y E

en la Figura 2.9, note que los diagramas C y D son equivalentes, así que basta analizar el comportamiento de los diagramas C y E , a estos diagramas los llamamos de tipo $I(m + 1)$ y $II(m + 1)$ respectivamente.

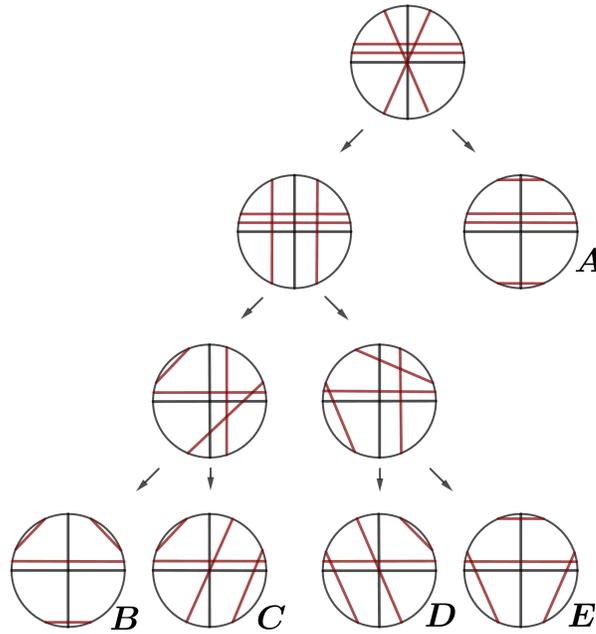


Figura 2.9: Expansión de $K_{n+2} + \overline{K_{m+2}}$.

Para las subgráficas que no han sido emparejadas definimos una partición formada por los conjuntos $BI(m + 1)$ y $BII(m + 1)$, donde $BI(m + 1)$ está formado por las subgráficas inducidas que contienen al menos una componente conexa cuya raíz tiene grado impar y $BII(m + 1)$ está formado por las subgráficas inducidas que tienen en cada componente conexa una raíz de grado par. La notación que elegimos sugiere que los diagramas obtenidos al realizar la expansión del diagrama $I(m + 1)$ sean emparejados con el conjunto $BI(m + 1)$, mientras que los diagramas obtenidos de $II(m + 1)$ sean emparejados con $BII(m + 1)$, esto es precisamente lo que haremos.

Antes de proceder conviene hacer una aclaración sobre el conjunto $BI(m + 1)$. Estas subgráficas tienen una involución ilustrada en la Figura 2.10 que consiste en intercambiar las vecindades de los vértices $n + 1$ y $n + 2$, además, observe que si H y H' están relacionadas por la involución, entonces H y H' representan a la misma piñata. Por convención definimos una

mitad de $BI(m+1)$, la denotamos por $BI'(m+1)$ y está definida por las siguientes subgráficas:

- Las subgráficas en $BI(m+1)$ donde los vértices $n+1$ y $n+2$ son raíces y tienen grado impar y par respectivamente.
- Las subgráficas en $BI(m+1)$ donde los vértices $n+1$ y $n+2$ son raíces y ambos tienen grado impar, pero $n+1$ es adyacente al vértice más pequeño en la unión de las vecindades de $n+1$ y $n+2$.
- Las subgráficas en $BI(m+1)$ que contienen a la arista $\{n+1, n+2\}$ y $n+1$ es adyacente al vértice más pequeño en la unión de las vecindades de $n+1$ y $n+2$ sin contar estos dos últimos vértices.

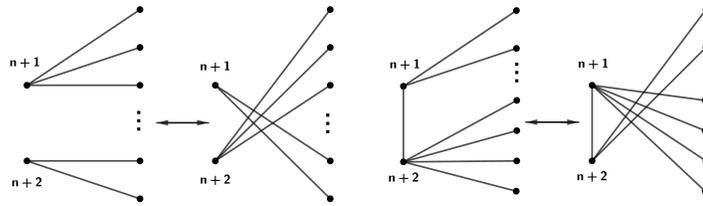


Figura 2.10: Involución de las subgráficas $BI(m+1)$.

Para mostrar los emparejamientos probaremos las siguientes dos afirmaciones.

Afirmación 1. Para el diagrama $I(m+1)$ existe una sucesión de expansiones tal que los diagramas finales A_1, A_2, \dots están emparejados con las subgráficas $BI'(m+1) = \{B_1, B_2, \dots\}$. Es decir, para todo $i \geq 1$: A_i está emparejado con B_i y además ambos representan a la misma piñata.

Afirmación 2. Para el diagrama $II(m+1)$ existe una sucesión de expansiones tal que los diagramas finales C_1, C_2, \dots están emparejados con las subgráficas $BII(m+1) = \{D_1, D_2, \dots\}$. Es decir, para todo $i \geq 1$: C_i está emparejado con D_i y además ambos representan a la misma piñata.

Probaremos por inducción sobre m las afirmaciones 1 y 2. Para los casos base observe la Figura 2.11, el diagrama $I(0)$ representa la piñata $K_n + \overline{K_1}$ así que no es necesario realizar expansiones, este diagrama se puede emparejar con la única subgráfica contenida en $BI'(0)$ que también representa a $K_n + \overline{K_1}$. También, el diagrama $II(0)$ representa la piñata $K_n + \overline{K_1}$ y

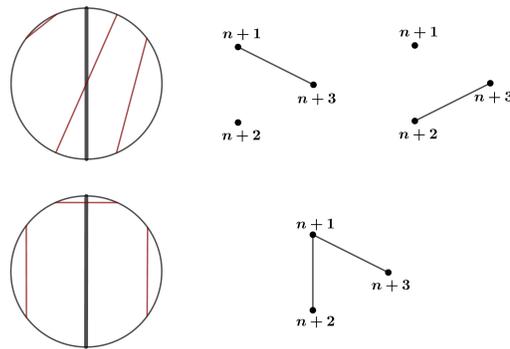


Figura 2.11: Arriba, el diagrama tipo I(0) y a su derecha las subgráficas BI(0), todos ellos representan a $K_n + \overline{K_1}$. Abajo, el diagrama tipo II(0) y a su derecha la subgráfica BII(0), ambos representan a $K_n + \overline{K_1}$.

no es necesario realizar expansiones, este diagramas se puede emparejar con la única subgráfica contenida en BII(0) que también representa a $K_n + \overline{K_1}$.

Supongamos que las Afirmaciones 1 y 2 se satisfacen para los diagramas I(m) y II(m). Comenzaremos probando la Afirmación 2. En la Figura 2.12 podemos ver una serie de expansiones del diagrama II($m + 1$) cuyos diagramas finales están relacionados con los diagramas I(m) y II(m). De forma precisa, observe que los diagramas A y D son simplemente I(m) con la cuerda verde agregada. Por hipótesis de inducción, al remover la cuerda verde de los diagramas A y D podemos realizar expansiones de tal forma que los diagramas finales estén emparejados con BI(m) y además en cada pareja formada por un diagrama y una subgráfica ambos representan la misma piñata, al añadir la cuerda verde podemos conservar el emparejamiento agregando a cada subgráfica de BI(m) el vértices aislado $n + m + 4$. De igual forma, para el diagrama C podemos obtener una serie de expansiones de tal forma que los diagramas finales estén emparejados con BII(m) agregando a cada subgráfica el vértice aislado $n + m + 4$.

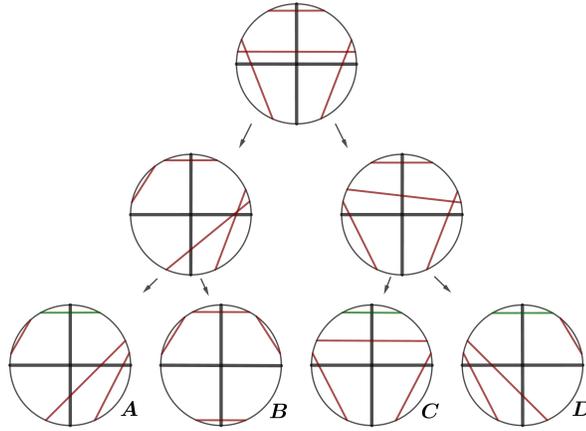


Figura 2.12: Expansión del diagrama $\text{II}(m+1)$.

Para construir el emparejamiento del diagrama $\text{II}(m+1)$ con $\text{BII}(m+1)$ utilizaremos los emparejamientos descritos anteriormente para los diagramas A , C y D .

- (i) Los diagramas finales del diagrama C pueden emparejarse con las subgráficas de $\text{BII}(m+1)$ que tienen al vértice $n+m+4$ aislado.
- (ii) Los diagramas finales de A y D están emparejados con $\text{BI}(m)$ donde a cada subgráfica se le agrega el vértice aislado $n+m+4$, transformaremos estas subgráficas para obtener las subgráficas de $\text{BII}(m+1)$ donde $n+m+4$ tiene una arista incidente:
 - Si en la subgráfica los vértices $n+1$ y $n+2$ son raíces y tienen grado $2k+1$ y $2l$ respectivamente, entonces agregamos la arista $\{n+1, n+m+4\}$. Observe que esta transformación conserva el emparejamiento, ya que ambas subgráficas representan a $K_n + \overline{K_{m+2-2(k+l)}}$, ver Figura 2.13.
 - Análogamente, si $n+1$ y $n+2$ son raíces y tienen grado $2l$ y $2k+1$ respectivamente, agregamos la arista $\{n+2, n+m+4\}$.
 - Si en la subgráfica los vértices $n+1$ y $n+2$ son raíces y tienen grado $2k+1$ y $2l+1$ respectivamente, agregamos las aristas $\{n+1, n+2\}$ y $\{n+2, n+m+4\}$. En este caso la transformación conserva el emparejamiento ya que ambas subgráficas representan a $K_n + \overline{K_{m-2(k+l)}}$, ver Figura 2.14.

- Si en la subgráfica los vértices $n+1$ y $n+2$ son adyacentes y tienen grado $2k+1$ y $2l$ respectivamente, agregamos la arista $\{n+1, n+m+4\}$. La transformación conserva el emparejamiento ya que ambas subgráficas representan a $K_n + \overline{K_{m+2-2(k+l)}}$, ver Figura 2.15.

(iii) La única subgráfica que no se obtiene de los casos anteriores es la que contiene únicamente a las aristas $\{n+1, n+2\}$ y $\{n+1, n+m+4\}$ (ver Figura 2.16), sin embargo, observe que esta subgráfica puede emparejarse con el diagrama B en la Figura 2.12.

El emparejamiento así construido de los diagramas finales de $\text{II}(m+1)$ con las subgráficas $\text{BII}(m+1)$ termina la prueba de la Afirmación 2.

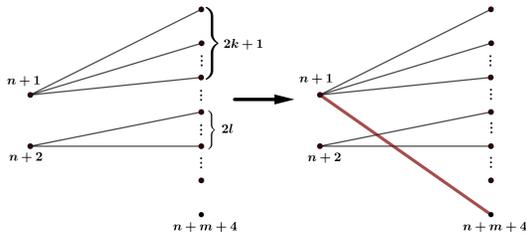


Figura 2.13: $n+1$ tiene grado $2k+1$ y $n+2$ tiene grado $2l$. Ambas subgráficas representan a $K_n + \overline{K_{m+2-2(k+l)}}$.

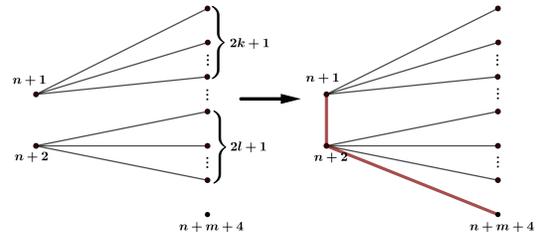


Figura 2.14: $n+1$ tiene grado $2k+1$ y $n+2$ tiene grado $2l+1$. Ambas subgráficas representan a $K_n + \overline{K_{m-2(k+l)}}$.

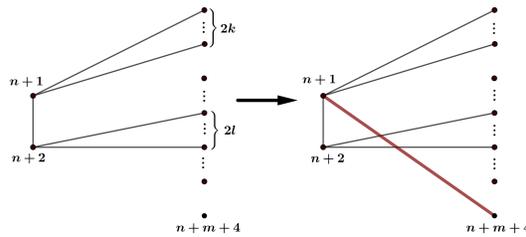


Figura 2.15: $n+1$ tiene grado $2k+1$ y $n+2$ tiene grado $2l$. Ambas subgráficas representan a $K_n + \overline{K_{m+2-2(k+l)}}$.

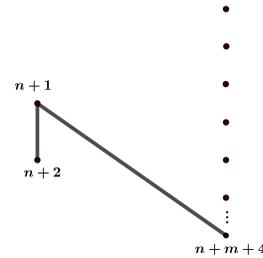


Figura 2.16: Esta subgráfica representa a $K_n + \overline{K_{m+2}}$ y está emparejada con el diagrama B de la Figura 2.12.

Para probar la Afirmación 1 usaremos una idea análoga a la que usamos en la Afirmación 2, sin embargo, en lugar de considerar la expansión del diagrama $\text{I}(m+1)$ utilizaremos la

expansión que aparece en la Figura 2.17 que corresponde a agregar la cuerda verde en la expansión del diagrama $I(m+1)$. Analicemos el diagrama B , este diagrama corresponde a $I(m)$ con dos cuerdas extras, por hipótesis de inducción podemos realizar expansiones en el diagrama B y emparejar los diagramas finales con $BI'(m)$ añadiendo a cada subgráfica los vértices aislados $n+m+4$ y v . El diagrama C de la Figura 2.17 corresponde a $II(m)$ ya que las cuerdas aisladas no interfieren, por hipótesis de inducción podemos realizar expansiones en el diagrama C y emparejar los diagramas finales con $BII(m)$. Observe que el diagrama D es equivalente a C y vale el mismo argumento. Recuerde que los emparejamientos deben satisfacer que para cada pareja formada por un diagrama y una subgráfica estas deben representar la misma piñata.

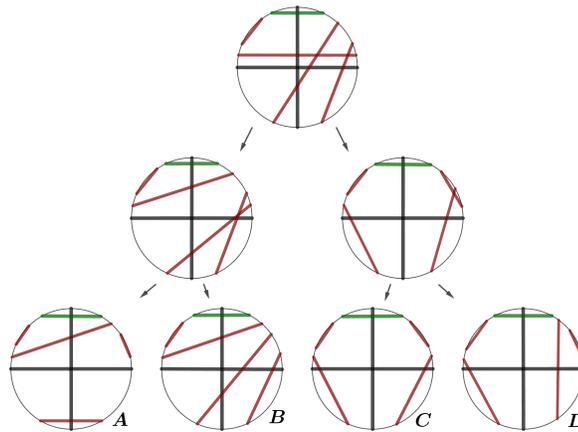


Figura 2.17: Expansión del diagrama $I(m+1)$ añadiendo la cuerda verde.

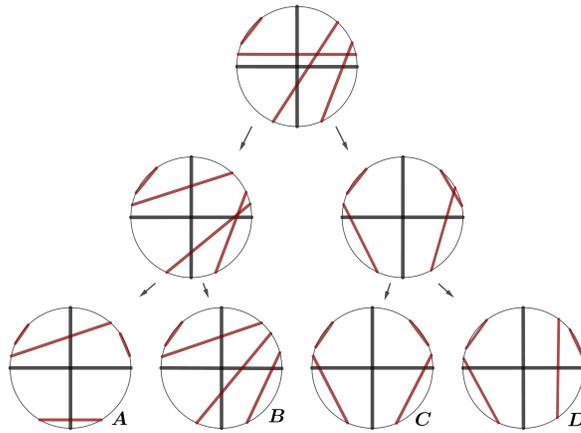


Figura 2.18: Expansión del diagrama $I(m + 1)$.

Al remover la cuerda verde de la Figura 2.17 obtenemos la expansión de $I(m + 1)$, dado que es esta expansión la que nos interesa trasladaremos los emparejamientos a dicha expansión, ver Figura 2.18. El emparejamiento del diagrama A puede conservarse simplemente borrando el vértice v de cada subgráfica, en los emparejamientos de los diagramas C y D al remover la cuerda verde las parejas pierden la propiedad de representar la misma piñata, de forma precisa, si una subgráfica representa a la piñata $K_n + \overline{K_{n+m+3-j}}$ entonces su pareja es un diagrama que representa a $K_n + \overline{K_{n+m+3-(j+1)}}$, veremos que este problema se soluciona transformando las subgráficas. Ahora tenemos los emparejamientos correspondientes a la Figura 2.18 y los utilizaremos para construir el emparejamiento del diagrama $I(m + 1)$ con $BI'(m + 1)$.

- (i) Los diagramas finales del diagrama B pueden emparejarse con las subgráficas de $BI'(m + 1)$ que tienen al vértice $n + m + 4$ aislado.
- (ii) Los diagramas finales de C y D están emparejados con dos copias de las subgráficas $BII(m)$, dado que C y D son equivalentes daremos dos reglas para transformar las subgráficas $BII(m)$ y obtener las subgráficas $BII(m + 1)$ donde $n + m + 4$ tiene una arista incidente.

- Si en la subgráfica los vértices $n + 1$ y $n + 2$ son raíces y tienen grado $2k$ y $2l$ respectivamente las construcciones son las siguientes:
 - La primer regla consiste en añadir la arista $\{n + 1, n + m + 4\}$, ver Figura 2.20.

- Para la segunda regla tenemos dos casos. Si $l \geq 1$, quitamos el vecino más grande de $n + 2$ y lo hacemos adyacente a $n + 1$, después añadimos la arista $\{n + 2, n + m + 4\}$, ver Figura 2.21. Si $l = 0$, quitamos el vecino más grande de $n + 1$ y lo hacemos adyacente a $n + 2$, después añadimos la arista $\{n + 2, n + m + 4\}$, ver Figura 2.22.
- Si en la subgráfica inducida los vértices $n + 1$ y $n + 2$ son adyacentes y tienen grado $2k + 2$ y $2l + 1$ respectivamente las construcciones son las siguientes:
 - La primer regla consiste en añadir la arista $\{n + 1, n + m + 4\}$, ver Figura 2.23.
 - La segunda regla consiste en añadir la arista $\{n + 2, n + m + 4\}$ y borrar la arista $\{n + 1, n + 2\}$, ver Figura 2.24.

En este caso es posible que las construcciones den como resultado un bosque que no pertenezca a $BI'(m + 1)$, si esto sucede basta aplicar la involución descrita en la Figura 2.10.

Note que en las construcciones descritas en las Figuras 2.20-2.24 la subgráfica de la izquierda representa a una piñata con exactamente un pico más que la subgráfica a la derecha, recuerde que esto se debe a retirar la cuerda verde en la expansión de la Figura 2.17 y de hecho estas construcciones devuelven la propiedad de que en cada pareja formada por un diagrama y una subgráfica ambas representen a la misma piñata, cumpliendo las condiciones de la Afirmación 2.

- (iii) La única subgráfica que no se obtiene de los casos anteriores es la que contiene únicamente a la arista $\{n + 1, n + m + 4\}$ (ver Figura 2.19), sin embargo, observe que esta subgráfica puede emparejarse con el diagrama A de la Figura 2.18.

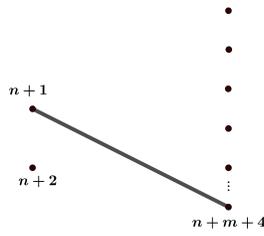


Figura 2.19: Esta subgráfica representa a $K_n + \overline{K_{m+2}}$ y está emparejada con el diagrama A de la Figura 2.17.

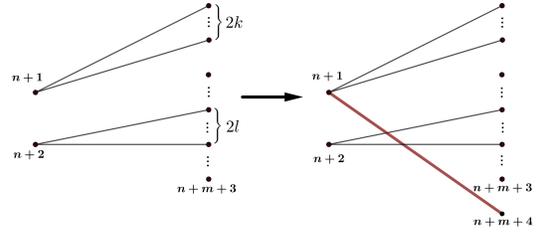


Figura 2.20: La subgráfica a la izquierda representa a $K_n + \overline{K_{m+3-2(k+l)}}$ mientras que la subgráfica a la derecha representa a $K_n + \overline{K_{m+2-2(k+l)}}$.

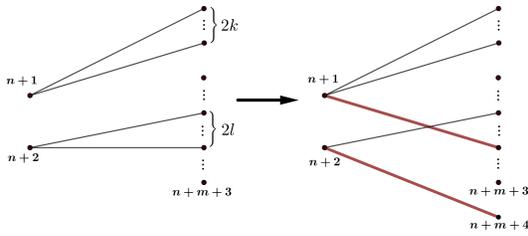


Figura 2.21: La subgráfica a la izquierda representa a $K_n + \overline{K_{m+3-2(k+l)}}$ mientras que la gráfica a la derecha representa a $K_n + \overline{K_{m+2-2(k+l)}}$.

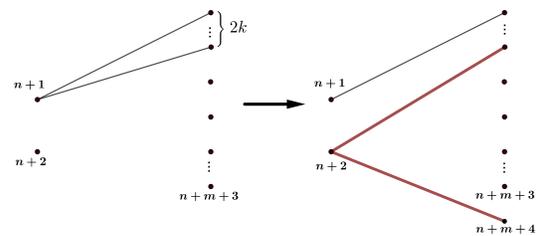


Figura 2.22: La subgráfica a la izquierda representa a $K_n + \overline{K_{m+3-2k}}$ mientras que la subgráfica a la derecha representa a $K_n + \overline{K_{m+2-2k}}$.

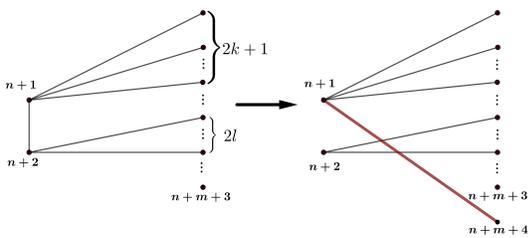


Figura 2.23: La subgráfica a la izquierda representa a $K_n + \overline{K_{m+1-2(k+l)}}$ mientras que la subgráfica a la derecha representa a $K_n + \overline{K_{m-2(k+l)}}$.

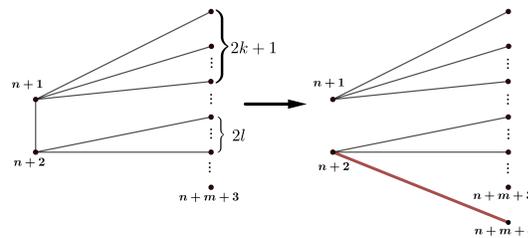


Figura 2.24: La subgráfica a la izquierda representa a $K_n + \overline{K_{m+1-2(k+l)}}$ mientras que la subgráfica a la derecha representa a $K_n + \overline{K_{m-2(k+l)}}$.

El emparejamiento de los diagramas finales de $I(m+1)$ con las subgráficas $BI'(m+1)$

construido de esta forma termina la prueba de la Afirmación 1 y también la prueba del teorema. \square

Corolario 2.2.6. (*Merino & Antonio, 2020*) Para todo $n, m \geq 1$, el número de árboles generadores crecientes pares de $K_n + \overline{K_m}$ es igual a $T(K_n + \overline{K_m}; 1, -1)$.

Demostración. Es fácil verificar que la biyección en la Proposición 2.2.2 (página 15) puede extenderse a las gráficas $K_n + \overline{K_m}$, es decir, existe una biyección entre los árboles generadores crecientes pares de $K_{n+1} + \overline{K_{m+1}}$ y los bosque generadores crecientes pares de $K_n + \overline{K_m}$. Además, por la Ecuación (2.1) tenemos $T(K_n + \overline{K_m}; 2, -1) = T(K_{n+1} + \overline{K_{m+1}}; 1, -1)$, utilizando el Teorema anterior obtenemos el resultado. \square

El corolario anterior es un resultado muy interesante por sí mismo, a pesar de ser una consecuencia directa del Teorema 2.2.5. Recuerde que para las gráficas completas $T(K_n; 2, -1)$ y $T(K_n; 1, -1)$ cuentan el número de bosques y árboles generadores crecientes pares respectivamente, el Teorema 2.2.5 y su corolario extienden estos resultados a la familia de las piñatas $K_n + \overline{K_m}$.

2.3. Sobre permutaciones

Como se menciona en la Sección 2.1 se sabe que la evaluación $T(K_n; 1, -1)$ cuenta el número de permutaciones alternantes en $\{1, 2, \dots, n\}$, teniendo los resultados de la Sección anterior es natural preguntarse si las evaluaciones $T(K_n + \overline{K_m}; 2, -1)$ y $T(K_n + \overline{K_m}; 1, -1)$ cuentan algún tipo de permutaciones, en esta sección daremos algunos resultados relacionados con esta pregunta. Recordemos que \mathcal{E}_n denota el número de permutaciones alternantes en $\{1, 2, \dots, n\}$. Denotemos por $a(n, k)$ el número de permutaciones alternantes en $\{1, 2, \dots, n+1\}$ que comienzan con $k+1$, esta sucesión se conoce como números de Euler-Bernoulli o números de Entringer, a continuación mencionamos una propiedad que utilizaremos en los siguientes resultados, la prueba puede encontrarse en [13].

Proposición 2.3.1.

$$a(n, k) = \begin{cases} \mathcal{E}_n & \text{si } n = k; \\ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} (-1)^i \binom{n-k}{2i} \mathcal{E}_{n-2i} & \text{si } k < n. \end{cases} \quad (2.8)$$

Tenemos los siguientes resultados.

Proposición 2.3.2. (*Merino & Antonio, 2020*) $T(K_{n-3} + \overline{K}_2; 2, -1) = a(n, n-2)$.

Demostración. Tomando $k = n-2$ en la ecuación (2.8) obtenemos

$$\begin{aligned} a(n, n-2) &= \binom{2}{0} \mathcal{E}_n - \binom{2}{2} \mathcal{E}_{n-2} \\ &= \mathcal{E}_n - \mathcal{E}_{n-2} \\ &= T(K_{n-1} + \overline{K}_0; 2, -1) - T(K_{n-3} + \overline{K}_0; 2, -1) \end{aligned}$$

En el Lema 2.2.3 obtuvimos la ecuación (2.4) que puede escribirse como

$$T(K_n + \overline{K}_2; 2, -1) = T(K_{n+2} + \overline{K}_0; 2, -1) - T(K_n + \overline{K}_0; 2, -1).$$

Luego

$$\begin{aligned} T(K_{n-3} + \overline{K}_2; 2, -1) &= T(K_{n-1} + \overline{K}_0; 2, -1) - T(K_{n-3} + \overline{K}_0; 2, -1) \\ &= a(n, n-2). \end{aligned}$$

□

Corolario 2.3.3. (*Merino & Antonio, 2020*) $T(K_{n-2} + \overline{K}_3; 1, -1) = a(n, n-2)$.

Proposición 2.3.4. (*Merino & Antonio, 2020*) $T(K_{n-4} + \overline{K}_3; 2, -1) = a(n, n-3) - \mathcal{E}_{n-2}$.

Demostración. Tomando $k = n-3$ en (2.8) obtenemos

$$\begin{aligned} a(n, n-3) &= \binom{3}{0} \mathcal{E}_n - \binom{3}{2} \mathcal{E}_{n-2} \\ &= \mathcal{E}_n - 3\mathcal{E}_{n-2}. \end{aligned}$$

Por otro lado, de la ecuación (2.5) sabemos que $T(K_{n+2} + \overline{K}_1; 2, -1) = T(K_n + \overline{K}_3; 2, -1) + 4T(K_{n+1} + \overline{K}_0; 2, -1)$, equivalentemente tenemos

$$\begin{aligned} T(K_n + \overline{K}_3; 2, -1) &= T(K_{n+2} + \overline{K}_1; 2, -1) - 4T(K_{n+1} + \overline{K}_0; 2, -1) \\ &= T(K_{n+3}; 2, -1) - 4T(K_{n+1}; 2, -1) \\ &= T(K_{n+5}; 1, -1) - 4T(K_{n+3}; 1, -1) \\ &= \mathcal{E}_{n+4} - 4\mathcal{E}_{n+2} \\ &= a(n+4, n+1) - \mathcal{E}_{n+2}. \end{aligned}$$

Observe que la tercer igualdad se sigue de la ecuación (2.1). \square

Corolario 2.3.5. (*Merino & Antonio, 2020*) $T(K_{n-3} + \overline{K}_4; 1, -1) = a(n, n-3) - \mathcal{E}_{n-2}$.

Proposición 2.3.6. (*Merino & Antonio, 2020*) $T(K_{n-5} + \overline{K}_4; 2, -1) = a(n, n-5)$.

Demostración. Haciendo $k = n - 5$ en (2.8) obtenemos

$$\begin{aligned} a(n, n-5) &= \binom{5}{0} \mathcal{E}_n - \binom{5}{2} \mathcal{E}_{n-2} + \binom{5}{4} \mathcal{E}_{n-4} \\ &= \mathcal{E}_n - 10\mathcal{E}_{n-2} + 5\mathcal{E}_{n-4}. \end{aligned}$$

De las ecuaciones obtenidas en la prueba del Teorema 2.2.5 sabemos que

$$T(K_{n+2} + \overline{K}_2; 2, -1) = T(K_n + \overline{K}_4; 2, -1) + 9T(K_n + \overline{K}_2; 2, -1) + 4T(K_n; 2, -1)$$

equivalentemente

$$\begin{aligned} T(K_n + \overline{K}_4; 2, -1) &= T(K_{n+2} + \overline{K}_2; 2, -1) - 9T(K_n + \overline{K}_2; 2, -1) - 4T(K_n; 2, -1) \\ &= (T(K_{n+4} + \overline{K}_0; 2, -1) - T(K_{n+2} + \overline{K}_0; 2, -1)) \\ &\quad - 9(T(K_{n+2} + \overline{K}_0; 2, -1) - T(K_n + \overline{K}_0; 2, -1)) \\ &\quad - 4T(K_n; 2, -1) \\ &= \mathcal{E}_{n+5} - 10\mathcal{E}_{n+3} + 5\mathcal{E}_{n+1} \\ &= a(n+5, n). \end{aligned}$$

Donde en la segunda igualdad utilizamos la ecuación (2.3). \square

Corolario 2.3.7. (*Merino & Antonio, 2020*) $T(K_{n-4} + \overline{K}_5; 1, -1) = a(n, n-5)$.

La prueba de los Corolarios 2.3.3, 2.3.5 y 2.3.7 se sigue de la ecuación (2.1).

2.4. Conclusiones

La primer interpretación del polinomio de Tutte en los puntos $(1, -1)$ y $(2, -1)$ como árboles y bosques generadores crecientes pares aparece en [9] para gráficas completas, en este capítulo logramos extender el resultado para gráficas piñata que contienen propiamente a las gráficas completas. Un problema muy interesante es preguntarse para qué otras familias de

gráficas puede extenderse el resultado. Por ejemplo, considere la siguiente construcción, dada una gráfica G con etiquetas $1, 2, \dots, n$ que satisface la relación $|\mathcal{F}(G)| = T(G; 2, -1)$, podemos agregar vértices $n+1, n+2, \dots, n+k$ haciéndolos adyacentes únicamente al vértice 1, esta nueva gráfica G' también cumplirá la relación $|\mathcal{F}(G')| = T(G'; 2, -1)$, pero esta construcción parece poco útil y artificial. También estudiamos la familia de gráficas umbral (*Threshold graphs* en inglés), pues esta familia contiene a las gráfica piñata y pertenece a las gráficas estudiadas en [9], sin embargo el resultado no puede extenderse a dicha familia, puede probarse que para la gráfica umbral G en la Figura 2.25 sin importa cómo se etiqueten los vértices el número de bosques generadores crecientes pares no coincide con $T(G; 2, -1)$.

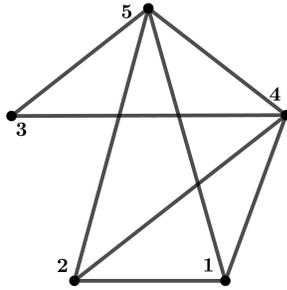


Figura 2.25: Gráfica umbral G que no satisface la relación $|\mathcal{F}(G)| = T(G; 2, -1)$ para ninguna etiquetación de sus vértices.

El resultado obtenido por T. Nakamigawa en [21] relacionando los diagramas de cuerdas con el polinomio de Tutte es uno de los ingredientes principales en la prueba del Teorema 2.2.5, también cabe resaltar de la prueba de este Teorema las expresiones obtenidas al realizar expansiones de diagramas, además, sabemos que estas expresiones aparecen en la sucesión **A123583** de la *On-line Encyclopedia of Integer Sequences* y más aún, estas expresiones están ligadas a las expansiones de los diagramas $I(m)$ e $II(m)$, estudiar a fondo estas relaciones podría darnos resultados interesantes y quizá nuevas interpretaciones del polinomio de Tutte.

Finalmente, dadas las Proposiciones 2.3.2, 2.3.4 y 2.3.6 junto con sus Corolarios es natural preguntarse si estos resultados se satisfacen en general, igual que antes, entender en general estos resultados depende de estudiar más a fondo las sucesiones y las reglas de recurrencia que se obtienen mediante las expansiones de diagramas.

Capítulo 3

Polimatroides y la conjetura de Stanley

En este capítulo estudiaremos una conjetura planteada por R. P. Stanley en [25] que relaciona el h -vector de un matroide con O -sucesiones puras. De esta conjetura se conocen muchas pruebas parciales para ciertas familias de matroides en donde se utilizan diversas técnicas, nuestro enfoque es intentar englobar gran parte de estas pruebas en una sola teoría esperando que se puedan encontrar nuevas familias de matroides para las cuales la conjetura de Stanley sea cierta.

3.1. El h -vector de un matroide y las O -sucesiones

Comenzamos definiendo algunos conceptos necesarios para el desarrollo de la teoría, el lector interesado puede encontrar un estudio de estos temas en [3] donde vienen las pruebas de los resultados que mencionaremos, también, [10] es un excelente artículo para comprender el concepto clave de descascarillado (*Shelling* en inglés). Un *complejo simplicial* Δ sobre un conjunto de vértices $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ es una colección de subconjuntos de V que satisface las siguientes propiedades:

- i) $\{x_i\} \in \Delta$ para todo i .
- ii) Si $F \in \Delta$ y $F' \subset F$, entonces $F' \in \Delta$.

Los conjuntos en Δ se llaman *caras* y su *dimensión* es i si tienen $i + 1$ elementos, las caras maximales de un complejo simplicial se llaman *caretas* y la dimensión de Δ , denotada $\dim(\Delta)$, es el máximo entre las dimensiones de sus caras. Para un complejo simplicial Δ definimos su numerador de caras como el polinomio

$$f_{\Delta}(x) = \sum_{i=0}^d f_i x^{d-i},$$

donde f_i es el número de caras con i elementos, es decir, de dimensión $i - 1$. Cuando todas las caretas de Δ tienen la misma dimensión decimos que Δ es un *complejo simplicial puro*. Dado un orden lineal en el conjunto de caretas de Δ , digamos F_1, \dots, F_t , definimos el sub-complejo simplicial Δ_j como el conjunto de todas las caras en Δ contenidas en alguna careta F_i para algún $i \leq j$. Para un complejo simplicial puro Δ , un *descascarillado* es un orden lineal F_1, \dots, F_t de tal forma que para cada par de caretas F_i, F_j con $1 \leq i < j \leq t$ existe una careta F_k con $1 \leq k < j$ y un elemento $x \in F_j$ tales que $F_i \cap F_j \subset F_k \cap F_j = F_j \setminus x$. De esta forma decimos que un complejo es *descascarillable* si admite un descascarillado. La idea intuitiva de un descascarillado es que podemos construir el complejo d -dimensional Δ paso a paso, introduciendo una careta a la vez, de tal forma que se pegue al complejo previamente construido y que la intersección sea topológicamente una bola $d - 1$ -dimensional. Para $1 \leq l \leq t$ definimos el conjunto $R(F_l) = \{x \in F_l : F_l \setminus x \in \Delta_{l-1}\}$, donde por convención $\Delta_0 = \emptyset$. De forma intuitiva, cuando la careta F_i es agregada al complejo Δ_{i-1} en el proceso de descascarillado, $R(F_i)$ es la única cara minimal de F_i que es “nueva” en Δ_i , es decir, que está en $\Delta_i \setminus \Delta_{i-1}$. Asociado al descascarillado de un complejo Δ tenemos el *polinomio de descascarillado* $h_{\Delta}(x)$ definido como:

$$h_{\Delta}(x) = \sum_{i=1}^t x^{|F_i \setminus R(F_i)|}.$$

Sea Δ un complejo descascarillable con polinomio de descascarillado $h_{\Delta}(x) = h_0 + h_1 x + \dots + h_l x^l$, definimos su *h-vector* como (h_0, h_1, \dots, h_l) . El primer resultado que nos interesa es una relación que existe entre el polinomio de descascarillado y el polinomio numerador de caras, a saber, se tiene que:

$$h_{\Delta}(1 + x) = f_{\Delta}(x).$$

Más aún, esta relación nos dice que el *h-vector* no depende del orden en el descascarillado, pues el polinomio numerador de caras no depende de ningún orden.

Ahora estamos en condiciones de pasar a la teoría de matroides, dado un matroide $M(E)$, el conjunto de independientes del matroide forma un complejo simplicial de dimensión $r(M)-1$ y lo denotamos por $\Delta(M)$, estos complejos simpliciales son llamados *complejos matroidales* y es fácil ver que todos son puros, más aún, puede mostrarse que todo complejo matroidal es descascarillable, ver [3]. Más aún, sabemos que el polinomio de descascarillado de un matroide es una especialización de su polinomio de Tutte, a saber, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.1.1. *Sea M un matroide y $\Delta = \Delta(M)$ su complejo matroidal asociado. Entonces*

$$h_{\Delta}(x) = T(M; x, 1).$$

Antes de continuar es conveniente mencionar algunas propiedades del h -vector de un matroide, esto con el fin de facilitar el desarrollo de la teoría que veremos más adelante. Sean M y M' matroides tal que M se obtiene al borrar un istmo de M' , entonces sus h -vectores están relacionados de la siguiente manera, si el h -vector de M es (h_0, h_1, \dots, h_r) entonces el h -vector de M' es igual a $(h_0, h_1, \dots, h_r, 0)$. También, si M es un matroide que contiene un lazo, entonces su polinomio de descascarillado es igual al polinomio del matroide obtenido al borrar el lazo, por estas razones en lo subsecuente sólo consideramos matroides sin lazos ni istmos. También, si M es un matroide con n elementos, de rango r y que no contiene lazos ni istmos, entonces su h -vector es de la forma (h_0, h_1, \dots, h_r) con $h_0 = 1$, $h_1 = n - r$, $h_r \neq 0$ y $\sum_{i=0}^r h_i = b(M)$. Recuerde que $b(M)$ denota el número de bases de M .

A continuación introduciremos los multicomplejos con el fin de presentar la conjetura de Stanley que es nuestro objeto de estudio en este capítulo, para esto utilizaremos a los monomios dotados de la siguiente relación de orden: decimos que $m' \leq m$ si $m'|m$. Podemos ahora definir los objetos que necesitamos, un *multicomplejo* es un conjunto no vacío de monomios M tal que: si $m \in M$ y $m'|m$, entonces $m' \in M$. Un multicomplejo M se dice *puro* si todos sus elementos maximales son del mismo grado. Una sucesión $h = (h_0, h_1, \dots)$ de enteros es una *O-sucesión* si existe un multicomplejo que contiene exactamente h_i monomios de grado i . Una *O-sucesión* es *pura* si el multicomplejo asociado es puro. Ahora estamos en condiciones de presentar la conjetura de Stanley establecida en [25].

Conjetura 3.1.2. (Stanley, 1977) *El h -vector de un complejo matroidal es una O-sucesión pura.*

3.2. Sobre la conjetura de Stanley

Una vez presentada la Conjetura de Stanley mencionaremos algunas de las familias para las cuales se ha probado dicha conjetura, para determinadas familias daremos una idea de cómo se obtiene el resultado, esto cuando sea posible ya que algunas de las pruebas necesitan mucha teoría para poder presentarlas en forma.

La primer familia que presentaremos son los matroides cográficos, formada por aquellos matroides M tal que su matroide dual M^* es un matroide gráfico, es decir, existe una gráfica G tal que $M^* = M(G)$. La prueba de que esta familia satisface la Conjetura 3.1.2 aparece implícitamente en un trabajo de N. Biggs [2] y una prueba explícita puede encontrarse en un trabajo de C. Merino [17], a continuación daremos algunas de las ideas principales en dicha prueba para dar una construcción de la O -sucesión pura asociada al matroide, no sin antes invitar al lector interesado en consultar [17] para entender a fondo las nociones que mencionaremos enseguida.

Observe que para un matroide cográfico M se cumple que existe una gráfica G tal que $M(G) = M^*$ y además $T(G; x, y) = T(M; y, x)$, el Teorema 3.1.1 nos garantiza que estudiar el h -vector de M es equivalente a estudiar el polinomio $T(G; 1, y)$, C. Merino prueba en [16] que este último polinomio es la función generatriz de las configuraciones críticas del Chip-firing-game de G , se sabe que las configuraciones críticas mínimas están en correspondencia con las orientaciones acíclicas con una única fuente predeterminada de G , de forma precisa, supongamos que $V(G) = \{q, x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $\mathbf{c} = (d(x_1) - 1, \dots, d(x_m) - 1)$ y para una orientación acíclica \mathcal{O} de G con única fuente q , definimos $a_{\mathcal{O}} = (a_1, \dots, a_m)$ donde a_i es el grado de salida de x_i en \mathcal{O} , entonces (a_1, \dots, a_m) es una configuración crítica mínima, es decir, cuya suma de entradas es mínima. Ahora el conjunto de vectores $\{\mathbf{c} - a_{\mathcal{O}}\}$ definen los monomios maximales de un multicomplejo puro cuya O -sucesión corresponde al h -vector de M . Observe que lo anterior nos da una receta para calcular el multicomplejo puro a partir de la gráfica G asociada al matroide cográfico, esta construcción la utilizaremos más adelante.

La segunda familia corresponde a las gráficas con ápice, consideremos la siguiente construcción, dada una gráfica G , definimos la gráfica \hat{G} obtenida a partir de G añadiendo un vértice p adyacente a todos los vértices en G , el vértice p se llama ápice de \hat{G} . W. Kook [11, 12] prueba que esta familia de gráficas satisfacen la Conjetura 3.1.2, para presentar una idea de dicha prueba introduciremos algunos conceptos. Primero, un *bosque con aristas-enraizadas* es un

bosque donde cada componente conexa contiene una arista marcada y, un *bosque con aristas-enraizadas parcial* es un bosque en donde cada componente conexa puede o no tener una arista marcada, las componentes conexas que no contienen una arista marcada se denominan componentes simples. El siguiente paso es probar que existe una biyección entre los bosques con arista-enraizada parciales de G y los árboles generadores de \hat{G} , recuerde que los árboles generadores de \hat{G} corresponden a las bases del matroide $M(\hat{G})$, luego, utilizando la actividad externa definida por Tutte [4, 26] es posible construir un multicomplejo con los bosques con arista-enraizada parciales, finalmente se tiene que la O -sucesión de este último corresponde al h -vector del matroide $M(\hat{G})$.

Ahora presentaremos algunas familias que se construyen fijando el rango o co-rango de los matroides. Cuando un matroide tiene rango o co-rango pequeño es posible construir de forma explícita el multicomplejo puro que realiza su h -vector, esto se debe en gran medida a que el comportamiento de estos matroides no refleja la complejidad combinatoria del problema en general, por ejemplo, para matroides de rango a lo más 2, encontrar dichos multicomplejos se reduce a un problema aritmético. De Loera et. al. [14] prueban la Conjetura 3.1.2 para matroides de rango a lo más 3 y co-rango 2 construyendo explícitamente los multicomplejos puros. Un avance considerable en esta dirección aparece en [10], donde S. Klee y J. A. Samper prueban la Conjetura 3.1.2 para matroides de rango 3 y 4, además, puede verse que la complejidad de construir los multicomplejos aumenta para matroides de rango 3 y aún más para los matroides de rango 4.

Otra familia para la cual se ha demostrado la validez de la Conjetura 3.1.2 son los matroides de empedrado, estos matroides se caracterizan por el tamaño de sus circuitos, un matroide de empedrado de rango r sólo puede tener circuitos de tamaño r o $r + 1$. En el siguiente capítulo describiremos más a fondo esta familia de matroides.

Por último, mencionaremos a la familia de matroides cotransversales, esta familia está formada por los duales de los matroides transversales. La primer prueba de la Conjetura 3.1.2 que se conoce para esta familia fue hecha por S. Oh [22], también se puede encontrar una prueba en [24] por C. Sarmiento, donde se utiliza la representación transversal del matroide dual, una representación transversal de un matroide $M^*(E)$ es una gráfica bipartita G con bipartición (E, X) y los conjuntos independientes de M^* son caracterizados por los emparejamientos en G , además, si M^* tiene rango r se puede encontrar una representación transversal en donde

$|X| = r$, una vez construida la gráfica bipartita se obtiene una representación matricial de M^* y con esta matriz se construye un ideal $\mathcal{J}(M^*) \subset R[x_1, x_2, \dots, x_r]$ de tal forma que el cociente $R[x_1, x_2, \dots, x_r]/\mathcal{J}(M^*)$ es un multicomplejo puro cuya O -sucesión corresponde al h -vector de M .

3.3. Polimatroides y flujos en gráficas bipartitas

En esta sección intentaremos englobar algunas de las pruebas mencionadas en la sección anterior en una sola teoría, para esto utilizaremos el concepto de polimatroides y flujos en gráficas. Los polimatroides fueron introducidos por J. Edmonds en 1970, ver [6], para dar la definición original de Edmonds es necesario introducir algunos conceptos. Dado un conjunto finito S , denotamos por \mathbb{R}_+^S el espacio de vectores con valores reales no negativos indexados por S . Para $x \in \mathbb{R}_+^S$ y $s \in S$, x_s denota la s -ésima coordenada de x . También, si $x, y \in \mathbb{R}_+^S$ decimos que x es un subvector de y si $x_s \leq y_s$ para todo $s \in S$. El *módulo* de x está definido como $|x| = \sum_{s \in S} |x_s|$. Un *polimatroide* \mathbb{P} es un par (S, P) donde S es un conjunto no vacío y finito llamado *conjunto base* de \mathbb{P} y, P es un subconjunto de \mathbb{R}_+^S compacto y no vacío llamado *conjunto de vectores independientes* de \mathbb{P} que satisface:

- i) Todo subvector de un vector independiente es independiente.
- ii) Para todo $x \in \mathbb{R}_+^S$, cada subvector independiente de x tiene el mismo módulo.

Al conjunto P también se le conoce como politopo de \mathbb{P} , además, un polimatroide es *entero* si todos los vértices de su politopo tienen coordenadas enteras. Nuestro interés en estas estructuras es la siguiente observación: Dado un polimatroide $\mathbb{P} = (S, P)$, entonces el conjunto $P \cap \mathbb{Z}_+^S$ es un multicomplejo puro. Desafortunadamente la relación anterior no es recíproca, considere el multicomplejo puro formado por los monomios $\{1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_1x_2, x_3x_4\}$, el politopo obtenido al tomar su cerradura convexa no proviene de ningún polimatroide. Cabe mencionar que la O -sucesión pura $(1, 4, 2)$ no corresponde a ningún h -vector de un matroide, por lo que es natural preguntarse si para toda O -sucesión asociada a un complejo matroidal puede obtenerse un multicomplejo cuya cerradura convexa defina un politopo asociado a un polimatroide. El lector interesado en polimatroides puede consultar [6, 28] para un tratamiento más extenso del tema.

Ahora veremos una construcción introducida por C. McDiarmid en [15]. Sea $G = (V, E)$ una gráfica bipartita con bipartición (X, Y) , un *flujo* es un subconjunto de aristas $F \subset E$ tal que los vértices en Y son incidentes a lo más a una arista en F . Estos flujos pueden codificarse mediante su vector característico, es decir, un vector indexado por los elementos en X de tal manera que la entrada que corresponde a $x_i \in X$ es igual al grado de x_i en la subgráfica inducida por F . Observe que distintos flujos pueden tener el mismo vector característico. Además, C. McDiarmid prueba que los vectores característicos de estos flujos definen un polimatroide entero cuyo politopo está contenido en \mathbb{R}^X , a los polimatroides construidos de esta forma los llamamos *polimatroides de flujo-bipartita*.

Definiremos un algoritmo llamado **Flujo de orden máximo** en una gráfica bipartita. Sea G una gráfica bipartita conexa con bipartición (X, Y) tal que $|X| = n$, tomamos un orden fijo en los vértices de X , digamos (x_1, x_2, \dots, x_n) y definimos los conjuntos $VM \subset X$ (vértices marcados), $VL \subset X$ (vértices listos) y $VA \subset Y$ (vértices alcanzados).

- 1 Inicializamos los conjuntos $VM = VL = VA = \emptyset$.
- 2 Maximizamos el flujo a través de x_1 utilizando todas las aristas incidentes a él, añadimos al conjunto VA todos los vértices que fueron alcanzados por x_1 y añadimos x_1 a VM .
- 3 Para cada $i = 2, 3, \dots, n$:
 - 3.1 $VL = \{x \in X : x \text{ es adyacente a algún vértice en } VA\}$.
 - 3.2 Si $x_i \in VL$, maximizamos el flujo a través de x_i utilizando todas las aristas que son adyacentes a él pero no son adyacentes a ningún vértice en VA . Añadimos x_i a VM .
- 4 Si $VA \neq Y$, regresamos al paso 3. En otro caso terminamos.

Al finalizar el algoritmo obtenemos un flujo máximo en el sentido de McDiarmid, sabemos que los vectores característicos de estos flujos corresponden a vectores maximales en el polimatroide definido anteriormente. También podemos definir el algoritmo **Flujo máximo**, la definición de este algoritmo es similar al anterior, basta quitar la condición $x_i \in VL$ del paso 3.2.

Con estos algoritmos podemos encontrar una prueba de la Conjetura 3.1.2 para los matroides cográficos y las gráficas con ápice utilizando flujos en gráficas bipartitas.

Proposición 3.3.1. (*Merino & Antonio, 2020*) Sea $G = (V, E)$ una gráfica conexa y $q \in V$, definimos la gráfica bipartita $\vec{B} = \vec{B}_q(G)$ cuya bipartición es $(V \setminus q, E')$, donde $E' = \{e \in E : e \text{ no es incidente a } q\}$ y las aristas de \vec{B} son $\{ve : e \text{ es incidente a } v\}$. Entonces, los vectores característicos de los flujos obtenidos por **Flujo de orden máximo** aplicado a \vec{B} corresponden a los elementos maximales de un multicomplejo puro cuya O -sucesión coincide con el h -vector $M^*(G)$.

Proposición 3.3.2. (*Merino & Antonio, 2020*) Sea G una gráfica con ápice q , definimos la gráfica bipartita $\overleftarrow{B} = \overleftarrow{B}_q(G)$ cuya bipartición es $(E', V \setminus q)$, donde $E' = \{e \in E : e \text{ no es incidente a } q\}$ y las aristas de \overleftarrow{B} son $\{ev : e \text{ es incidente a } v\}$. Entonces, los vectores característicos de los flujos obtenidos por **Flujo máximo** aplicado a \overleftarrow{B} corresponden a los elementos maximales de un multicomplejo puro cuya O -sucesión coincide con el h -vector $M(G)$.

Corolario 3.3.3. (*Merino & Antonio, 2020*) Sea G una gráfica con ápice q . Entonces el algoritmo **Flujo máximo** aplicado a las gráficas $\vec{B}_q(G)$ y $\overleftarrow{B}_q(G)$ obtiene a los elementos maximales de un multicomplejo puro cuya O -sucesión coincide con el h -vector de $M^*(G)$ y $M(G)$ respectivamente.

Analicemos un momento el corolario anterior, ya que nos interesa trasladar estas ideas de las gráficas a los matroides. De forma precisa, analizaremos la construcción de la gráfica \overleftarrow{B} , ya que la construcción de \vec{B} es equivalente pero utilizando co-estructuras, es decir, se construye para el matroide $M^*(G)$. Observe que si G es una gráfica con ápice q , entonces la subgráfica inducida por el conjunto de aristas incidentes a q es un árbol generador de G , este corresponde a una base del matroide $M(G)$. Además, si $e = uv$ es una arista de G donde $u, v \neq q$, entonces en \overleftarrow{B} las aristas $a = qu$ y $b = qv$ serán adyacentes a u y v respectivamente, más aún, observe que las aristas a, b, e forman un ciclo en G y, este ciclo es de hecho el circuito fundamental $cf(B, e)$ en el matroide $M(G)$ donde B es la base formada por las aristas incidentes a q . En la Figura 3.1 puede verse un ejemplo de dicha construcción.

Resumiendo lo anterior, para un matroide $M(E)$ y una de sus base B es posible construir la gráfica bipartita $G(M; B)$ de la siguiente manera: la bipartición de $G(M; B)$ es $(E \setminus B, B)$ y su conjunto de aristas es $\{ef : e \in E \setminus B, f \in B \text{ y } e \in cf(B, f)\}$. Una vez construida la gráfica nos interesa encontrar alguna estrategia para escoger los flujos que realicen multicomplejos

puros cuyas O -sucesiones coincidan con el h -vector del matroide.

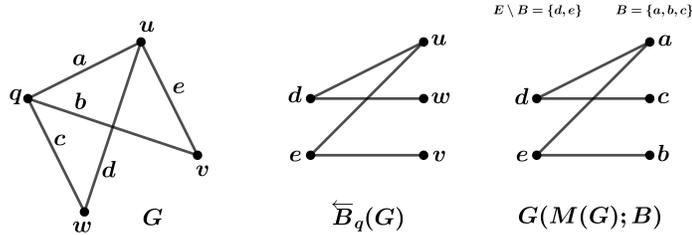


Figura 3.1: $\overleftarrow{B}_q(G)$ está construida en el contexto de gráficas, mientras que $G(M(G); B)$ se utiliza en el contexto de matroides.

A continuación veremos que para los matroides de rango o co-rango 1 es posible encontrar los multicomplejos puros asociados a sus h -vectores utilizando flujos en gráficas bipartitas. Dado un matroide $M(E)$ de rango 1 sin lazos ni istmos, entonces necesariamente M es un matroide uniforme $U_{1,m}$ con $m \geq 2$, supongamos además que $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. El h -vector de M es $(1, m - 1)$. Podemos tomar cualquier elemento como base, digamos $e_1 \in E$ y consideremos la gráfica bipartita $G(M; e_1)$ mostrada a la izquierda en la Figura 3.2, es fácil ver que los flujos máximos en esta gráfica tienen como vectores característicos al conjunto $\{(\underbrace{1, 0, \dots, 0}_{m-1}), (\underbrace{0, 1, 0, \dots, 0}_{m-1}), \dots, (\underbrace{0, \dots, 0, 1}_{m-1})\}$ que son los elementos maximales de un multicomplejo puro con O -sucesión $(1, m - 1)$. Dado un matroide de co-rango 1 con m elementos y sin lazos ni istmos, entonces necesariamente es isomorfo al matroide gráfico $M(G)$, donde $G = C_m$ es un ciclo de longitud m , además, su h -vector es igual a $(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_m)$. En la parte derecha de la Figura 3.2 se puede apreciar la gráfica bipartita $G(M(C_m); \{e_2, e_3, \dots, e_m\})$ que tiene exactamente un flujo máximo cuyo vector característico es igual a $(m - 1)$ y este vector define un multicomplejo puro con O -sucesión $(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_m)$. Con esto tenemos pruebas de la Conjetura 3.1.2 para matroides de rango o co-rango 1 utilizando flujos en gráficas bipartitas.

Ahora estudiaremos el caso de los matroides de rango 2, recuerde que podemos suponer que los matroides no tienen lazos ni istmos. En este caso utilizaremos la representación geométrica de dichos matroides, esta representación es muy útil cuando se trabaja con matroides de rango pequeño ya que podemos obtener algunas propiedades a través de sus dibujos, dado que no utilizaremos todo el potencial de estas representaciones no daremos la definición formal, el

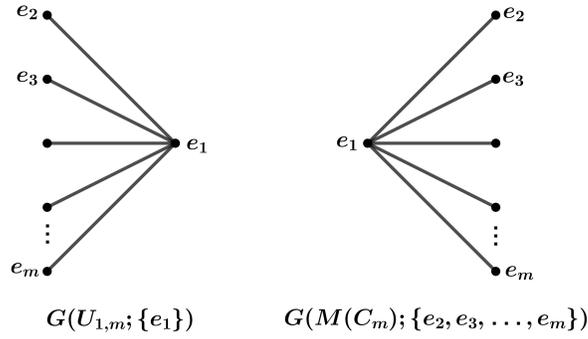


Figura 3.2: Gráficas bipartitas obtenidas para matroides de rango y co-rango 1.

lector interesado puede encontrar dicha descripción en [23]. En la Figura 3.3 se puede apreciar una representación geométrica de un matroide de rango 2 con $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ elementos, aquí, cada conjunto de puntos alineado verticalmente forma una clase en paralelo de elementos, es decir, cualquier par de elementos en el mismo conjunto forman un circuito, además, las bases de este matroide están formadas por aquellos pares e, f donde e y f no pertenecen a la misma clase en paralelo. Observe que podemos caracterizar a estos matroides únicamente con la cardinalidad de las clases en paralelo ya que el orden de las clases y el orden de los elementos en cada clase no influyen en la estructura del matroide, usaremos $M(n_1, \dots, n_k)$ para denotar dicho matroide y la etiquetación que aparece en la Figura 3.3, esta etiquetación de los elementos garantizan que $B = \{1, 2\}$ sea una base del matroide.

Sea $b = b(M(n_1, \dots, n_k))$ el número de bases de $M(n_1, \dots, n_k)$, sabemos que el h -vector de este matroide es igual a $(1, n-2, b-n+1)$. Nuestro objetivo es construir un multicomplejo puro cuya O -sucesión coincida con $(1, n-2, b-n+1)$, más aún, haremos esta construcción utilizando flujos en la gráfica bipartita $G(M(n_1, \dots, n_k); B)$ mostrada en la Figura 3.4. Con esto en mente, asociaremos a cada base del matroide un flujo del tal forma que el conjunto de sus vectores característicos formen el multicomplejo deseado. La primer base que consideraremos es $\{1, 2\}$ asociándola con el flujo vacío cuyo vector característico es $(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-2})$. Para cada $i \in \{n_1+2, n_1+3, \dots, n\}$ a la base $\{1, i\}$ le asociamos el flujo cuya única arista es $\{i, 2\}$, observe que esta arista pertenece a la gráfica $G(M(n_1, \dots, n_k); B)$ para cada i , además, el vector característico de dicho flujo es $(\underbrace{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0}_{n-2})$ donde el 1 aparece en la i -ésima posición.

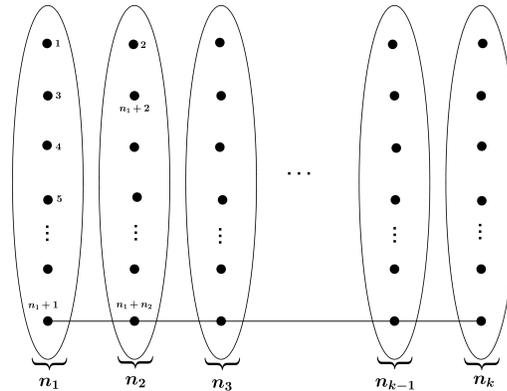


Figura 3.3: Representación geométrica de un matroide de rango 2 sin lazos ni istmos, denotado $M(n_1, \dots, n_k)$.

Para cada $i \in \{3, 4, \dots, n_1 + 1\}$ a la base $\{2, i\}$ le asociamos el flujo cuya única arista es $\{i, 1\}$, de forma similar al caso anterior, el vector característico obtenido es $(0, \dots, 0, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_{n-2})$ donde el 1 aparece en la i -ésima posición. Para cada $i \in \{n_1 + n_2 + 1, n_1 + n_2 + 2, \dots, n\}$ a la base $\{2, i\}$ le asociamos el flujo formado por las aristas $\{i, 1\}$ e $\{i, 2\}$ cuyo vector característico es $(0, \dots, 0, \underbrace{2, 0, \dots, 0}_{n-2})$ donde el 2 aparece en la posición i -ésima. Las bases restantes son de la forma $\{i, j\}$ con $\{i, j\} \cap \{1, 2\} = \emptyset$ y además i, j no están en la misma clase en paralelo, a cada una de estas bases podemos asociarle el flujo con las aristas $\{i, 1\}$ y $\{j, 2\}$ o el flujo $\{i, 2\}$ y $\{j, 1\}$, al menos uno de estos es realizable en la gráfica $G(M(n_1, \dots, n_k); B)$, sin importar la elección del flujo su vector característico es $(0, \dots, 0, \underbrace{1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0}_{n-2})$ donde los 1's aparecen en las posiciones i y j . Es fácil verificar que los vectores característicos obtenidos forman un multicomplejo puro cuya O -sucesión es $(1, n - 2, b - n + 1)$.

Para los matroides de co-rango 2 podemos mostrar que existe un multicomplejo puro realizable mediante flujos. Utilizaremos el siguiente resultado de S. Klee y J. A. Samper [10].

Teorema 3.3.4. (Klee & Samper, 2018) Sea M un matroide cuyo conjunto base es $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ y tal que $[d] = \{1, 2, \dots, d\}$ es una base de M . Entonces

$$h_M(x) = \sum x^{|I|} h_{\Gamma_I}(x). \tag{3.1}$$

Donde la suma es sobre los conjuntos independientes I tales que $I \cap [d] = \emptyset$ y $\Gamma_I = (M/I)|_{[d]}$.

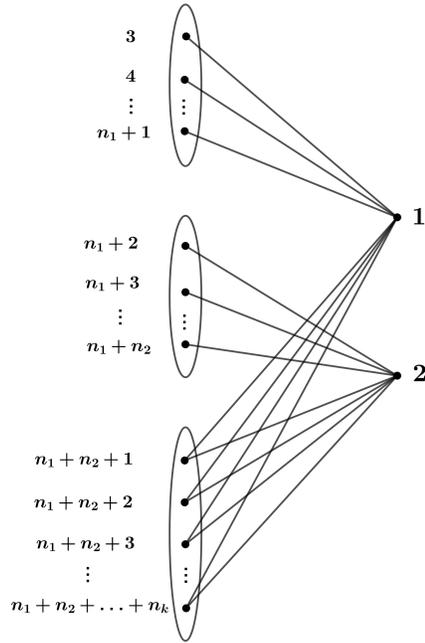


Figura 3.4: Gráfica bipartita $G(M(n_1, \dots, n_k); B)$, donde $B = \{1, 2\}$.

Aplicaremos el teorema anterior al caso particular de los matroides de co-rango 2, dado que no podemos representar un matroide de co-rango 2 utilizaremos la representación geométrica del matroide dual. Sea $M(E)$ un matroide de co-rango 2 sin lazos ni istmos, B una base de M y supongamos que $\{e, f\} = E \setminus B$ es la cobase asociada a B , entonces los únicos conjuntos independientes disjuntos de B son \emptyset , $\{e\}$, $\{f\}$ y posiblemente $\{e, f\}$, por simplicidad utilizaremos la notación $e = \{e\}$, $f = \{f\}$ y $ef = \{e, f\}$. El teorema anterior nos garantiza que podemos descomponer $h_M(x)$ como una suma de 3 o 4 polinomios y, con ayuda de esta descomposición construiremos el multicomplejo puro. Ilustraremos la idea con el siguiente ejemplo, considere el matroide M de co-rango 2 asociado al $(n - 1)$ -ciclo más una arista en paralelo extra, ver Figura 3.5, en este caso la descomposición de $h_M(x)$ utiliza 3 polinomios ya que los únicos conjuntos independientes contenidos en la cobase $\{e, f\}$ son \emptyset , e y f . Tenemos que Γ_\emptyset es el matroide uniforme $U_{n-2, n-2}$ cuyo polinomio de descascarillado es $h_{\Gamma_\emptyset}(x) = x^{n-2}$, Γ_e es el matroide asociado al $(n - 2)$ -ciclo cuyo polinomio de descascarillado es $h_{\Gamma_e}(x) = x^{n-3} + \dots + x + 1$ y de la misma forma Γ_f tiene como polinomio de descascarillado a $h_{\Gamma_f}(x) =$

$x^{n-3} + \dots + x + 1$, es decir, la descomposición está formada por x^{n-2} , $x^{n-3} + \dots + x + 1$ y $x^{n-3} + \dots + x + 1$. Para construir el multicomplejo identificamos a x^{n-2} con el monomio 1, el primer polinomio $x^{n-3} + \dots + x + 1$ lo identificamos con los monomios $x_1, x_1^2, \dots, x_1^{n-2}$ y el segundo polinomio $x^{n-3} + \dots + x + 1$ lo identificamos con los monomios $x_2, x_2^2, \dots, x_2^{n-2}$ como se muestra en la Figura 3.5. Como veremos a continuación, cuando ef resulta ser independiente el multicomplejo puro obtenido para Γ_{ef} se anida de manera consistente.

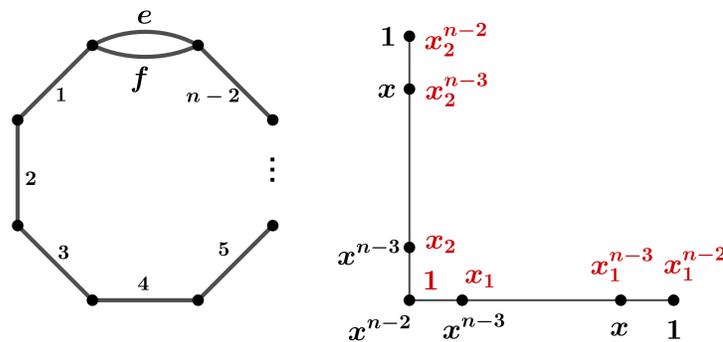


Figura 3.5: M es el matroide gráfico asociado al $(n - 1)$ -ciclo más una arista en paralelo extra. Los elementos en rojo forman el multicomplejo puro asociado a su h -vector $\underbrace{(1, 2, \dots, 2)}_{n-1}$, estos elementos están codificados mediante la descomposición del polinomio de descascarillado.

Supongamos que M es un matroide de co-rango 2 sin lazos ni istmos, tal que M^* tiene k clases en paralelo de tamaño $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$ respectivamente y además $n_1 + \dots + n_k = n + 2$. Realizaremos la descomposición dependiendo de la representación geométrica de M^* .

Caso 1: M^* tiene una representación geométrica como en la Figura 3.6. Entonces tenemos que $\Gamma_\emptyset = U_{n,n}$, $\Gamma_e = \Gamma_f = M(C_n)$, $h_{\Gamma_\emptyset}(x) = x^n$, $h_{\Gamma_e}(x) = h_{\Gamma_f}(x) = x^{n-1} + \dots + x + 1$. En este caso ef es independiente, sin embargo Γ_{ef} es un matroide de co-rango 2 con n elementos. Recursivamente podemos obtener un multicomplejo puro codificado con monomios de grado a lo más $n - 2$, este multicomplejo se muestra en la Figura 3.7 en la parte sombreada y además puede anidarse consistentemente para formar un multicomplejo puro cuya O -sucesión realice al h -vector de M .

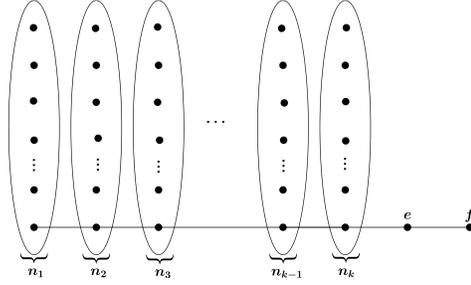


Figura 3.6: Representación geométrica de M^* , aquí $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$ y $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

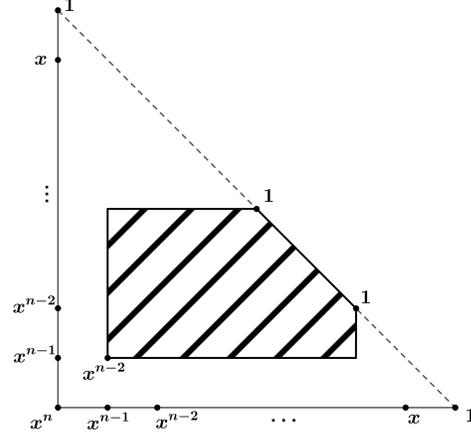


Figura 3.7: El multicomplejo construido recursivamente para Γ_{ef} puede anidarse congruentemente.

Caso 2: M^* tiene una representación geométrica como en la Figura 3.8. Entonces tenemos que $\Gamma_\emptyset = U_{n,n}$, $\Gamma_e = M(C_n)$, $\Gamma_f = M(C_{n-n_k}) \oplus U_{n_k, n_k}$, $h_{\Gamma_\emptyset}(x) = x^n$, $h_{\Gamma_e}(x) = x^{n-1} + \dots + x + 1$ y $h_{\Gamma_f}(x) = x^{n-1} + \dots + x^{n_k}$. En este caso $(\Gamma_{ef})^*$ tiene una representación geométrica como en la Figura 3.9, necesitamos ver que el multicomplejo puro construido para Γ_{ef} se anida de forma consistente, tomemos e' y f' como en la Figura 3.9, con respecto al matroide Γ_{ef} tenemos que $\Gamma_\emptyset = U_{n-2, n-2}$, $\Gamma_{e'} = M(C_{n-n_k-1}) \oplus U_{n_k-1, n_k-1}$, $\Gamma_{f'} = M(C_{n-n_{k-1}-1}) \oplus U_{n_{k-1}-1, n_{k-1}-1}$, $h_{\Gamma_\emptyset}(x) = x^{n-2}$, $h_{\Gamma_{e'}}(x) = x^{n-3} + \dots + x^{n_k-1}$ y $h_{\Gamma_{f'}}(x) = x^{n-3} + \dots + x^{n_{k-1}-1}$. Observe que los términos correspondientes a los polinomios $h_{\Gamma_f}(x)$ y $h_{\Gamma_{e'}}(x)$ se pueden poner juntos para completar un multicomplejo puro, ver Figura 3.10. La O -sucesión de este multicomplejo realiza el h -vector de M para el Caso 2.

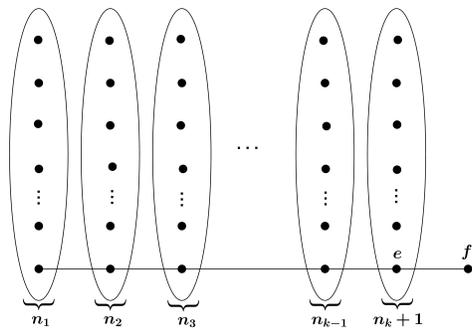


Figura 3.8: Representación geométrica de M^* , aquí $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_{k-1} \geq n_k + 1$ y $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

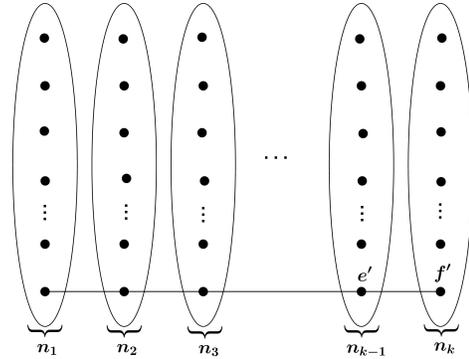


Figura 3.9: Representación geométrica de $(\Gamma_{ef})^*$, aquí $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$ y $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

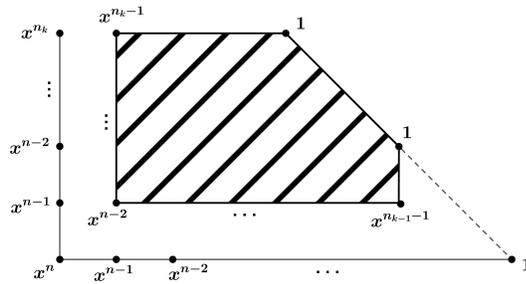


Figura 3.10: El multicomplejo construido recursivamente para Γ_{ef} mostrado en la parte sombreada puede anidarse congruentemente.

Caso 3: M^* tiene una representación geométrica como en la Figura 3.11. Entonces tenemos que $\Gamma_\emptyset = U_{n,n}$, $\Gamma_e = M(C_{n-n_k}) \oplus U_{n_k,n_k}$, $\Gamma_f = M(C_{n-n_{k-1}}) \oplus U_{n_{k-1},n_{k-1}}$, $h_{\Gamma_\emptyset}(x) = x^n$, $h_{\Gamma_e}(x) = x^{n-1} + \dots + x^{n_k}$ y $h_{\Gamma_f}(x) = x^{n-1} + \dots + x^{n_{k-1}}$. En este caso $(\Gamma_{ef})^*$ tiene una representación geométrica como en la Figura 3.12. Igual que antes mostraremos que el multicomplejo puro construido para Γ_{ef} se anida de forma consistente. Tomemos e' y f' como en la Figura 3.12, con respecto al matroide Γ_{ef} tenemos que $\Gamma_\emptyset = U_{n-2,n-2}$, $\Gamma_{e'} = M(C_{n-n_{k-1}}) \oplus U_{n_{k-1},n_{k-1}}$, $\Gamma_{f'} = M(C_{n-n_{k-1}-1}) \oplus U_{n_{k-1}-1,n_{k-1}-1}$, $h_{\Gamma_\emptyset}(x) = x^{n-2}$, $h_{\Gamma_{e'}}(x) = x^{n-3} + \dots + x^{n_{k-1}}$ y $h_{\Gamma_{f'}}(x) = x^{n-3} + \dots + x^{n_{k-1}-1}$. Observe que podemos anidar de forma consistente el multicomplejo de Γ_{ef} alineando $h_{\Gamma_e}(x)$ con $h_{\Gamma_{e'}}(x)$ y $h_{\Gamma_f}(x)$ con $h_{\Gamma_{f'}}(x)$ como se muestra en la Figura 3.13.

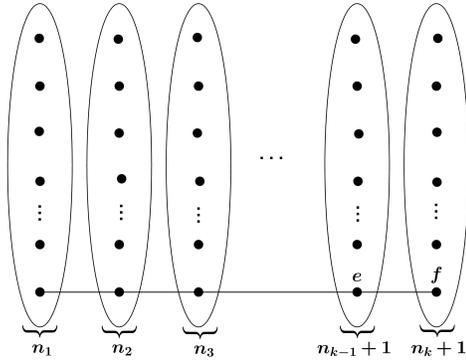


Figura 3.11: Representación geométrica de M^* , aquí $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_{k-2} \geq n_{k-1} + 1 \geq n_k + 1$ y $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

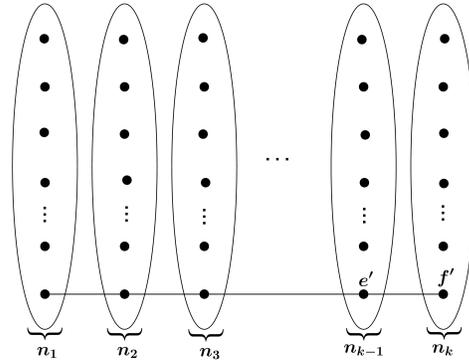


Figura 3.12: Representación geométrica de $(\Gamma_{ef})^*$, aquí $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$ y $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

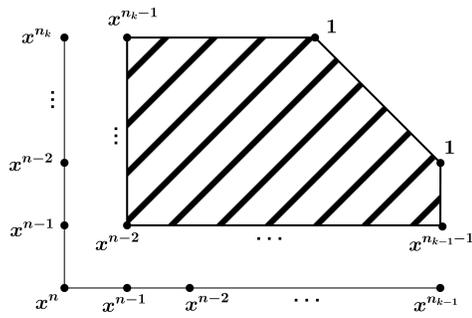


Figura 3.13: El multicomplejo construido recursivamente para Γ_{ef} puede anidarse congruentemente.

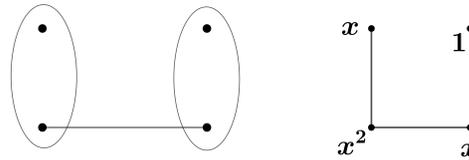


Figura 3.14: Representación geométrica del primer caso base junto a su multicomplejo puro asociado.

Este procedimiento se puede realizar hasta obtener alguno de los 3 matroides que aparecen en las Figuras 3.14, 3.15 y 3.16, donde se muestran sus multicomplejos codificados mediante la descomposición del polinomio de descascarillado.

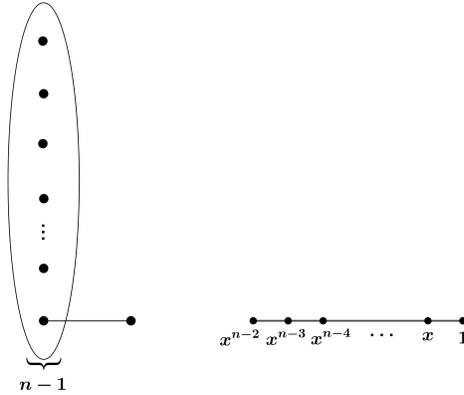


Figura 3.15: Representación geométrica del segundo caso base junto a su multicomplejo puro asociado.

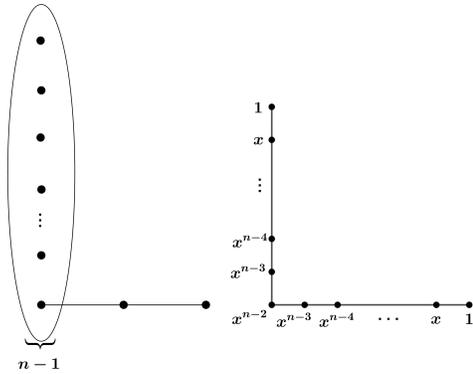


Figura 3.16: Representación geométrica del tercer caso base junto a su multicomplejo puro asociado.

Hasta ahora hemos visto que este procedimiento produce un multicomplejo puro asociado al h -vector de M . A continuación veremos que estos multicomplejos son realizables mediante flujos, únicamente mostraremos que esto sucede para el Caso 2, los Casos base, 1 y 3 se obtienen de forma similar. Consideremos un matroide M tal que M^* tiene una representación geométrica como en la Figura 3.8, para construir la gráfica $G(M; B)$ observe que los cocircuitos de M^* se obtienen al tomar el complemento de una clase en paralelo, luego, el circuito fundamental $cf(B, e)$ es el complemento de $\{f\}$; mientras que $cf(B, f)$ está formado por el complemento de la clase en paralelo a la que pertenece e . La gráfica $G(M; B)$ se muestra en la Figura 3.17. Observe que el flujo formado por todas las aristas incidentes a e tiene como vector característico a $(n, 0)$, mientras que el flujo formado por las todas las aristas incidentes a f , junto con las últimas n_k aristas incidentes a e , tiene como vector característico a $(n - n_k, n_k)$, estos dos vectores son vértices del polimatroide encontrado por C. McDiarmid y este polimatroide contiene al multicomplejo puro construido con el proceso descrito anteriormente, es decir, para cada punto (p_1, p_2) del multicomplejo existe un flujo en $G(M; B)$ cuyo vector característico es igual a (p_1, p_2) .

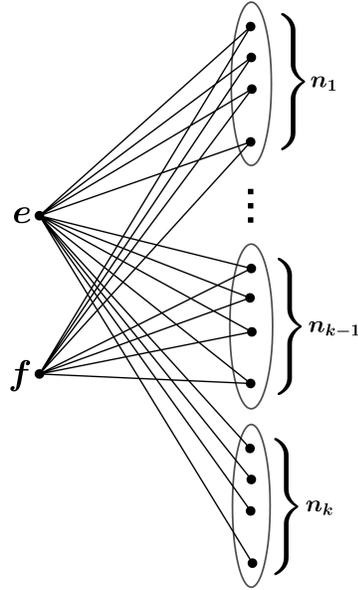


Figura 3.17: .

Finalmente analizaremos los matroides simples de rango 3. Dado un matroide simple M de rango 3 sin lazos ni istmos, probaremos que existe un multicomplejo puro \mathcal{M} contenido en un polimatroide de flujo-bipartita tal que la O -sucesión de \mathcal{M} coincide con el h -vector de M . Utilizaremos fuertemente herramientas presentadas por S. Klee y J. A. Samper en [10]. Un *matroide basado* es una tripleta $(M, B, <)$ donde M es un matroide, B una de sus bases y $<$ es un orden total en $E(M) \setminus B$, además, para un conjunto independiente I tal que $I \cap B = \emptyset$ recuerde que Γ_I denota al matroide $(M/I)|_B$. Dos matroides basados $(M, B, <)$ y $(M', B', <')$ son isomorfos si existe un isomorfismo de matroides $f : M \rightarrow M'$ tal que $f(B) = B'$ y f preserva el orden $<$ en $E \setminus B$.

Conjetura 3.3.5. (Klee & Samper, 2018) Sea $r > 1$ un entero fijo y sea \mathcal{A}^r la familia de matroides basados de rango r . Existe una función \mathcal{F} de \mathcal{A}^r a la familia de los multicomplejos puros tal que para cada matroide basado $(M, B, <)$ satisfacen las siguientes condiciones:

- Las variables de $\mathcal{F}(M, B, <)$ son $\{x_i : i \in E(M) \setminus B\}$.
- Cada monomio en $\mathcal{F}(M, B, <)$ tiene soporte en un conjunto de la forma $\{x_i : i \in I\}$ para algún conjunto independiente I disjunto de B .

- Para cada conjunto independiente I disjunto de B hay exactamente $h_{\Gamma_I}^j$ monomios en $\mathcal{F}(M, B, <)$ cuyo grado es $|I| + j$ y soporte $\{x_i : i \in I\}$, donde $h_{\Gamma_I}^j$ es el coeficiente de x^j en $h_{\Gamma_I}(x)$.
- Para cada conjunto independiente I disjunto de B la restricción de $\mathcal{F}(M, B, <)$ a las variables $\{x_i : i \in I\}$ es $\mathcal{F}(M|_{B \cup I}, B, <)$.
- Si $\mathcal{F}(M', B', <')$ es un matroide basado y $f : \mathcal{F}(M, B, <) \rightarrow \mathcal{F}(M', B', <')$ es un isomorfismo, entonces $\mathcal{F}(M, B, <)$ es naturalmente isomorfo a $\mathcal{F}(M', B', <')$ etiquetando los índices de cada variable en $\mathcal{F}(M, B, <)$ bajo la imagen de f .

Teorema 3.3.6. (Klee & Samper, 2018) Sea \mathcal{U}_r el subconjunto de \mathcal{A}^r que consiste de aquellos matroides con a lo más $2r$ elementos. Si existe una función \mathcal{G} de \mathcal{U}_r a la familia de multicomplejos puros tal que $\mathcal{G}(M, B, <)$ satisface las condiciones de la Conjetura 3.3.5 para cada $M \in \mathcal{U}_r$, entonces existe una función \mathcal{F} que satisface las condiciones de la Conjetura 3.3.5 tal que $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}_r} = \mathcal{G}$.

El Teorema 3.3.6 nos garantiza que para probar la Conjetura 3.3.5 en los matroides de rango r basta probarla únicamente para los matroides en \mathcal{U}_r , la idea es que dado un matroide M de rango r , entonces para cada conjunto independiente I disjunto de B el matroide $M|_{B \cup I}$ pertenece a \mathcal{U}_r , si para cada uno de estos matroides construimos un multicomplejo puro que satisfaga los requerimientos de la Conjetura 3.3.5, entonces podemos “pegar” estos multicomplejos y obtener un multicomplejo puro más grande cuya O -sucesión coincida con el h -vector de M . S. Klee y J. A. Samper mostraron que la Conjetura 3.3.5 es válida para los matroides de rango 3 y 4, a continuación trasladaremos esta idea al lenguaje de flujos para los matroides simples de rango 3.

En los siguientes cuadros se representan los matroides simples basados de rango 3, sin istmos y con a lo más 6 elementos, además, podemos suponer que $[3] = \{1, 2, 3\}$ es una base del matroide. En cada cuadro podemos encontrar la representación geométrica del matroide M seguida por la gráfica bipartita $G(M; [3])$ y finalmente los multicomplejos puros encontrados por Klee y Samper que satisfacen las condiciones de la Conjetura 3.3.5, en cada caso se puede verificar que los monomios maximales (y por lo tanto todos los monomios) de estos multicomplejos son realizables mediante flujos en la gráfica $G(M; [3])$. Los únicos matroides

que no enlistamos en los cuadros son $U_{3,4}$, $U_{3,5}$ y $U_{3,6}$ ya que estos tienen multicomplejos puros triviales. También, observe que en algunos casos hay más de un multicomplejo representado, ya que si cambiamos el orden total en $E(M) \setminus [3]$ es posible obtener un matroide basado diferente y esto influye en la elección de los monomios maximales del multicomplejo.

Representación geométrica de M	$G(M; [3])$	Multicomplejo puro asociado

Cuadro 3.1: El h -vector de $M = M(K_4 \setminus e)$ es $(1, 2, 3, 2)$.

Representación geométrica de M	$G(M; [3])$	Multicomplejo puro asociado

Cuadro 3.2: El h -vector de M es $(1, 2, 3, 3)$.

Representación geométrica de M	$G(M; [3])$	Multicomplejo puro asociado

Cuadro 3.3: El h -vector de $M = W^3$ es $(1, 3, 6, 7)$.

Representación geométrica de M	$G(M; [3])$	Multicomplejo puro asociado

Cuadro 3.4: El h -vector de $M = Q_6$ es $(1, 3, 6, 8)$.

Representación geométrica de M	$G(M; [3])$	Multicomplejo puro asociado

Cuadro 3.5: El h -vector de M es $(1, 3, 6, 5)$.

Representación geométrica de M	$G(M; [3])$	Multicomplejo puro asociado

Cuadro 3.6: El h -vector de $M = M(K_4)$ es $(1, 3, 6, 6)$.

Representación geométrica de M	$G(M; [3])$	Multicomplejo puro asociado

Cuadro 3.7: El h -vector de $M = R_6$ es $(1, 3, 6, 7)$.

Representación geométrica de M	$G(M; [3])$	Multicomplejo puro asociado

Cuadro 3.8: El h -vector de $M = P_6$ es $(1, 3, 6, 9)$.

Con la lista completa de los matroides simples basados, sin istmos y de rango 3 podemos mostrar la existencia del multicomplejo puro cuya O -sucesión coincide con el h -vector de M y que además es realizable mediante flujos en $G(M; B)$. Sea M un matroide simple de rango

3 sin istmos, después de reetiquetar los elementos de M podemos suponer que su conjunto base es $[n]$ y que $B = [3]$ es una base, también podemos dotar a $[n] \setminus [3]$ del orden natural proveniente de sus etiquetas. Para cada conjunto independiente I disjunto de B el matroide $M|_{B \cup I}$ debe ser alguno de los matroides uniformes $U_{3,4}$, $U_{3,5}$, $U_{3,6}$ o algún matroide mostrado en los Cuadros 3.1-3.8. Sea \mathcal{M}_I el multicomplejo puro asociado a $M|_{[3] \cup I}$ encontrado por S. Klee y J. A. Samper, entonces $\mathcal{M} = \cup \mathcal{M}_I$ es un multicomplejo puro cuya O -sucesión coincide con el h -vector de M , más aún, observe que para cada I la gráfica bipartita $G(M|_{[3] \cup I}; B)$ es exactamente la subgráfica inducida por los vértices $B \cup I$ en $G(M; B)$, es decir, al “pegar” las gráficas bipartitas $G(M|_{[3] \cup I}; B)$ obtenemos la gráfica $G(M; B)$, esto nos garantiza que los monomios maximales de \mathcal{M} son realizables mediante flujos en $G(M; B)$, es decir, \mathcal{M} está contenido en el polimatroide de flujo-bipartita asociado a $G(M; B)$.

3.4. Conclusiones

La conjetura de Stanley ha sido motivo de mucho interés y esfuerzo combinado en los últimos años para lograr resolverla, además, en los casos particulares donde se conoce su validez se han utilizado una gran diversidad de técnicas. Quizá la esencia del problema radique en la enorme complejidad estructural de los matroides y para resolver este problema sea necesario comprender más a profundidad dichas estructuras. La aproximación mediante polimatroides asociados a las gráficas bipartitas $G(M; B)$ parece prometer buenos resultados ya que muchas de las pruebas pueden ser trasladadas a este lenguaje, el siguiente paso es encontrar nuevas familias de matroides donde se pueda dar una descripción explícita de los flujos que realicen los multicomplejos deseados, sin embargo, creemos que una prueba del problema general aún está muy lejos de ser obtenida. Otra posible evidencia de la utilidad de los polimatroides de flujo-bipartita es la siguiente: tomemos un matroide M sin lazos, una de sus bases B y un elemento e fuera de B , entonces el grado de e en la gráfica bipartita $G(M; B)$ es igual al número de bases del matroide $(M/e)|_B$, digamos b_e , luego, los flujos obtenidos tendrán a lo más b_e aristas incidentes a e y en el multicomplejo la variable x_e tendrá grado a lo más b_e , esto es justo lo que sucede en los resultados obtenidos por S. Klee y J. A. Samper en [10] para los matroides de rango 3 y 4, siendo estas familias de las más representativas para las cuales se ha comprobado la conjetura de Stanley.

Capítulo 4

Multicomplejos extremales

Nuestro objetivo en este capítulo es estudiar ciertos multicomplejos que satisfacen propiedades extremales en el número de elementos maximales, estos multicomplejos son de gran importancia para el estudio de la conjetura de Stanley y también son muy interesantes por sí mismos. En [19] C. Merino et. al. presentan una conjetura sobre la estructura de estos multicomplejos, en este capítulo presentaremos resultados que confirman dicha conjetura para algunos casos.

4.1. Gráficas de monomios

Como se mencionó en el capítulo anterior, se conocen algunas familias de matroides para las cuales la conjetura de Stanley se satisface, una de estas familias es la de matroides de empedrado, donde un matroide M es de *empedrado* si sus circuitos tienen al menos $r(M)$ elementos. La prueba de la conjetura de Stanley para matroides de empedrado puede encontrarse en [19], comenzaremos dando algunas de las ideas presentadas en dicha prueba con la finalidad de introducir el problema de este capítulo. La idea central de la prueba es observar que para un matroide de empedrado $M(E)$ se pueden obtener las primeras entradas de su h -vector, ya que cualquier subconjunto de E con menos de $r(M)$ elementos es independiente. De hecho, si $M(E)$ es un matroide de empedrado con n elementos y de rango r , entonces su h -vector es de la forma (h_0, h_1, \dots, h_r) , donde $h_i = \binom{n-r+i-1}{i}$ para $i = 0, \dots, r-1$ y $h_r = b(M) - \binom{n-1}{r-1}$, donde $b(M)$ es el número de bases de M . Teniendo esto en mente, se introduce el multicomplejo $\mathcal{M}_{r,d}$ formado por todos los monomios mónicos en las d variables x_0, x_1, \dots, x_{d-1} y de grado a lo más r . Este multicomplejo es muy importante ya que $\mathcal{M}_{r-1,d}$

realiza la O -sucesión pura $(h_0, h_1, \dots, h_{r-1})$ donde $h_i = \binom{d+i-1}{i}$, es decir, coincide con las primeras entradas del h -vector de cualquier matroide de empedrado de rango r y $n = d + r$ elementos. También, diremos que un monomio m cubre a m' si $m'|m$, de forma análoga diremos que un conjunto de monomios M cubre a M' si cualquier monomio en M' es cubierto por al menos un monomio en M .

Podemos ahora introducir la siguiente función $f(r, d) = \min\{h_r | (h_0, \dots, h_r) \text{ es la } O\text{-sucesión de algún multicomplejo puro } \mathcal{M} \supset \mathcal{M}_{r-1,d}\}$. Es decir, $f(r, d)$ es el mínimo número de monomios de grado r en las variables x_0, \dots, x_{d-1} que son necesarios para cubrir a los monomios de grado $r-1$ en las mismas variables. El problema de encontrar el conjunto mínimo que satisfaga la función $f(r, d)$ puede atacarse introduciendo una familia de gráficas $G_{r,d}$ cuyos vértices son todos los monomios de grado r en las d variables x_0, \dots, x_{d-1} y existe una arista entre dos monomios m y m' si $m = \frac{x_i}{x_j} m'$ para $i \neq j$. Para la gráfica $G_{r,d}$ definimos la *coloración estándar* $\rho_{r,d}$ que asigna al monomio $x_0^{t_0} \cdots x_{d-1}^{t_{d-1}}$ el color $0(t_0) + \dots + (d-1)t_{d-1} \pmod d$, puede probarse que esta coloración es propia, es decir, monomios adyacentes reciben colores distintos. Además, para esta coloración se define la función $\bar{f}(r, d)$ a ser el tamaño de la clase cromáticas más pequeña en $\rho_{r,d}$.

También daremos algunas propiedades combinatorias de estas gráficas, ya que su estudio es esencial en el problema principal de este capítulo. La primer propiedad que podemos dar es referente a los clanes, para $G_{r,d}$ es fácil ver que su número de clan es 1 si $r = 1$ y es d si $r > 1$, más aún, podemos caracterizar a los clanes que aparecen en $G_{r,d}$ en dos tipos:

- El primer tipo de clan es llamado *clan ascendente*, estos clanes están formados por conjuntos de monomios que tienen la forma $\{mx_0, mx_1, \dots, mx_{d-1}\}$, donde m es un monomio en $G_{r-1,d}$, es decir, los clanes ascendentes aparecen en $G_{r,d}$ si $r > 1$.
- El segundo tipo de clan es llamado *clan descendente*, estos clanes están formados por conjuntos de monomios que tienen la forma $\{m/x_0, m/x_1, \dots, m/x_{d-1}\}$, donde m es un monomio en $G_{r+1,d}$ divisible por $x_0 x_1 \cdots x_{d-1}$. Estos clanes aparecen en $G_{r,d}$ si $r \geq d-1$.

En la Figura 4.1 se puede observar un ejemplo de una gráfica de monomios. También tenemos la siguiente proposición referente a estas gráficas y su coloración estándar.

Proposición 4.1.1. (*Merino & Antonio, 2020*) Sean $r, d \geq 1$ y $0 \leq i \leq d-1$ enteros, y sea T_i la clase cromática de color i en la coloración estándar de $G_{r,d}$, entonces

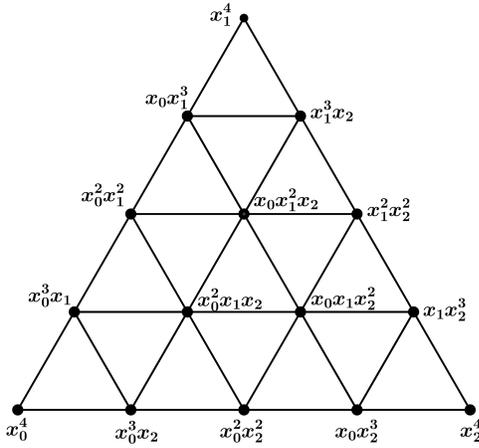


Figura 4.1: Gráfica $G_{4,3}$, los clanes ascendentes corresponden a los triángulos apuntando hacia arriba, mientras que los clanes descendentes corresponden a los triángulos apuntando hacia abajo.

- i) T_i cubre a todos los monomios en $G_{r-1,d}$, es decir, para todo monomio $m' \in G_{r-1,d}$ existe un monomio $m \in T_i$ tal que $m'|m$.
- ii) Para todo par $m_1, m_2 \in T_i$ de monomios distintos, definamos $M_1 = \{m \in G_{r-1,d} : m \leq m_1\}$ y $M_2 = \{m \in G_{r-1,d} : m \leq m_2\}$ como los monomios cubiertos por m_1 y m_2 respectivamente. Entonces M_1 y M_2 son disjuntos.

Demostración. i) Para cualquier $m \in G_{r-1,d}$ podemos considerar su clan ascendente C en $G_{r,d}$, dado que la colocación estándar es una d coloración existe un monomio de color i en C que cubre a m .

ii) Sea $0 \leq i \leq d-1$ y supongamos que para un par de monomios $m_1, m_2 \in T_i$ existe $m_3 \in M_1 \cap M_2$, entonces existen $0 \leq j_1, j_2 \leq d$ tales que $m_1 = m_3x_{j_1}$ y $m_2 = m_3x_{j_2}$, luego $x_{j_1}m_2 = x_{j_2}m_1$ y m_1 es adyacente a m_2 , lo cual no sucede ya que la coloración estándar es propia. \square

Las gráficas $G_{r,d}$ fueron estudiadas independientemente por A.V. Geramita et al. en [8] en el contexto de Geometría Algebraica y por C. Merino et al. en [19] en Combinatoria, también, en estos artículos fue introducido el invariante $f(r, d)$ de forma independiente con definiciones

equivalentes. El problema que nos interesa en este capítulo es la siguiente conjetura introducida en [19].

Conjetura 4.1.2. (*Merino, Noble, Ramírez-Ibañez & Villarroel-Flores, 2012*) $f(r, d) = L_2(r, d) = \bar{f}(r, d)$.

Donde $L_2(r, d)$ es el número de collares binarios aperiódicos con r perlas blancas y d negras, se conoce una fórmula explícita para el número de estos collares.

Proposición 4.1.3. $L_2(r, d) = \frac{1}{r+d} \sum_{k|(r+d,d)} \mu(k) \binom{r+d/k}{d/k}$, donde μ es la función de Möbius en los naturales.

Con la fórmula de $L_2(r, d)$ podemos ver que la segunda igualdad de la conjetura 4.1.2 es cierta. En este punto debemos hacer un reconocimiento y un agradecimiento a *Tristram Bogart* por habernos comentado acerca del artículo [7] donde se da una fórmula explícita para el número $a_k(n, m)$ de soluciones del sistema

$$\sum_{j=0}^{n-1} j\lambda_j \equiv k \pmod{n}; \quad \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i = m; \quad (4.1)$$

donde k y λ_i son enteros no negativos.

Teorema 4.1.4. (*Elashvili, Jibladze & Pataraiia, 1999*) Para todos los enteros $k, n, m \geq 0$ se cumple

$$a_k(n, m) = \frac{1}{n+m} \sum_{d|(n,m)} c_d(k) \binom{n/d + m/d}{n/d}.$$

En particular $a_k(n, m) = a_k(m, n)$.

El teorema anterior nos dice que el número de monomios en $G_{r,d}$ con color k es exactamente $a_k(d, r) = a_k(r, d)$. Ahora, para conocer el valor de la función \bar{f} basta encontrar el mínimo en $\{a_k(n, m) \mid k = 1, \dots, n\}$. Sin embargo, en [7] tenemos el siguiente resultado que nos dice que la clase cromática del 1 es de tamaño mínimo y por lo tanto su tamaño nos da el valor que buscamos de la función \bar{f} .

Proposición 4.1.5. (*Elashvili, Jibladze & Pataraiia, 1999*) Para todos los enteros $k, n, m \geq 0$ se cumple

$$a_k(n, m) = \sum_{d'|(n,m,k)} a_1(n/d', m/d').$$

Ahora tenemos las herramientas necesarias para probar la segunda igualdad de la conjetura 4.1.2.

Proposición 4.1.6. *Para todo $r, d \geq 1$ se cumple $L_2(r, d) = \bar{f}(r, d)$.*

Demostración.

$$\bar{f}(r, d) = a_1(r, d) = \frac{1}{r+d} \sum_{k|(r+d, d)} \mu(k) \binom{r+d/k}{d/k} = L_2(r, d).$$

□

4.2. Multicomplejos extremales

Con la segunda igualdad de la conjetura 4.1.2 probada, el siguiente paso es estudiar la función $f(r, d)$ para intentar probar el resultado completo. Antes de presentar los resultados obtenidos haremos algunas observaciones. La primer propiedad en la Proposición 4.1.1 nos dice que toda clase cromática en $G_{r,d}$ cubre a los monomios de grado $r-1$, particularmente estamos interesados en la clase cromática del 1, al cubrimiento inducido por esta clase cromática lo llamamos *cubrimiento estándar*. Respecto a la segunda propiedad en la Proposición 4.1.1, nos referimos a esta diciendo que los cubrimientos inducidos por clases cromáticas son disjuntos, en particular el cubrimiento estándar. Esta propiedad la utilizaremos para probar los resultados de este capítulo ya que en algunos casos podemos describir los cubrimientos óptimos con argumentos similares al algoritmo glotón. Cabe aclarar que si la Conjetura 4.1.2 es cierta, entonces el multicomplejo $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{r-1,d} \cup \{m \in G_{r,d} : \rho_{r,d}(m) = 1\}$ sería un multicomplejo puro, y dado que tienen el mínimo número de monomios de grado máximo los llamamos *multicomplejos extremales*.

El siguiente resultado muestra que la primer igualdad de la conjetura es válida cuando r o d son iguales a 1 o 2.

Proposición 4.2.1. *(Merino, Noble, Ramírez-Ibañez & Villarroel-Flores, 2012)*

Para todo $r, d \geq 1$ se tiene

$$i) f(r, 1) = 1 = L_2(r, 1),$$

$$ii) f(1, d) = 1 = L_2(1, d),$$

$$iii) f(r, 2) = \lceil r/2 \rceil = L_2(r, 2) \text{ y}$$

$$iv) f(2, d) = \lceil d/2 \rceil = L_2(2, d).$$

Demostración. En este caso la función L_2 es fácil de calcular, así que mostraremos los valores correspondientes de la función f .

Para probar *i)* basta observar que sólo se tiene la variable x_0 , de donde x_0^r es divisible por todos los monomios de menor grado con esta única variable.

Para *ii)* basta tomar cualquiera de las d variables, pues cualquier x_i es divisible por el monomio constante 1.

Para *iii)* queremos que el multicomplejo puro contenga a $\mathcal{M}_{r-1,2}$, este último tiene como elementos maximales a $\{x_0^{r-1}, x_0^{r-2}x_1, \dots, x_0x_1^{r-2}, x_1^{r-1}\}$, tomando los monomios $x_0^{r-1}x_1$, $x_0^{r-3}x_1^3, \dots, x_0x_1^{r-1}$ en caso de que r sea par y a los monomios $x_0^{r-1}x_1, x_0^{r-3}x_1^3, \dots, x_0^2x_1^{r-2}, x_1^r$ si r es impar. Además, dado que sólo hay dos variables, cada monomio sólo puede dividirse por alguna de estas, de donde a lo más puede ser divisible por dos monomios de grado exactamente uno menos, de donde no es posible mejorar el número de monomios para formar el multicomplejo puro.

Para el caso *iv)* tenemos a los monomios de grado 1 en d variables, es decir, tenemos exactamente a las variables x_0, \dots, x_{d-1} . Basta tomar los monomios $x_0x_1, x_2x_3, \dots, x_{d-2}x_{d-1}$ si d es par y a los monomios $x_0x_1, x_2x_3, \dots, x_{d-1}x_{d-2}, x_{d-1}^2$ si d es impar. Al igual que en el caso anterior no es posible que un monomio sea divisible por más de 2 monomios de grado menor, de donde no puede mejorarse el número de monomios. \square

Teorema 4.2.2. (*Merino & Antonio, 2020*) Para todo $r \geq 1$ se cumple $f(r, 3) = L_2(r, 3) = \bar{f}(r, 3)$.

Demostración. Por simplicidad en los índices probaremos el caso $r + 1$. Nuestro enfoque para probar el teorema es el siguiente, mostraremos que cualquier cubrimiento de la gráfica $G_{r,3}$ no puede utilizar menos elementos de los que utiliza el cubrimiento estándar y por lo tanto este último es óptimo. Antes de avanzar es conveniente dar una partición de los monomios en $G_{r,3}$ para referirnos a ellos más fácilmente, a los monomios divisibles por $x_0x_1x_2$ los llamamos monomios internos, al resto los llamamos monomios externos.

Observe que para cada monomio m en $G_{r+1,3}$, el conjunto de monomios cubiertos por m están en uno de los siguientes tres casos:

- El primer caso consiste de un sólo punto y corresponde al caso donde $m = x_i^{r+1}$.
- El segundo caso consiste en un segmento de línea en los bordes de $G_{r,3}$ y corresponde al caso donde $m = x_i^{r+1-k}x_j^k$.
- El tercer caso consiste en un clan descendente y corresponde al caso donde m es divisible por $x_0x_1x_2$.

Nuestro problema se reduce a cubrir la gráfica $G_{r,3}$ utilizando estos tres elementos. Es fácil ver que el cubrimiento estándar sigue el patrón que se observa en la Figura 4.2, donde para continuar el patrón basta agregar un nivel más en la parte superior derecha del triángulo en la Figura 4.2.

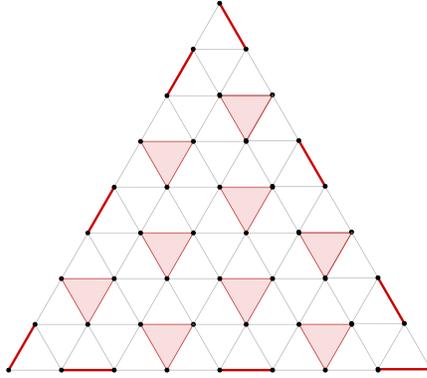


Figura 4.2: Cubrimiento estándar de la gráfica $G_{8,3}$, los monomios x_0^8 y x_2^8 corresponden a los vértices en la parte inferior izquierda y derecha respectivamente, mientras que el vértice superior corresponde al monomio x_1^8 .

Observe que la subgráfica inducida por los monomios divisibles por $x_0x_1x_2$ es isomorfa a $G_{r-3,3}$, más aún, cuando restringimos el cubrimiento estándar de $G_{r,3}$ a esta subgráfica el cubrimiento que obtenemos coincide con el cubrimiento estándar de $G_{r-3,d}$, luego podemos proceder por inducción. Lo primero que probaremos es que el cubrimiento estándar utiliza el menor número de clanes descendentes para cubrir a los monomios internos en $G_{r,3}$. Supongamos que esto se cumple para $G_{r-3,3}$ y tomemos cualquier cubrimiento \mathcal{C} de $G_{r,3}$, al tomar el cubrimiento inducido por la restricción a la gráfica $G_{r-3,3}$ \mathcal{C} no puede utilizar más clanes descendentes de los que utiliza el cubrimiento estándar en $G_{r-3,3}$, además, los únicos monomios

que quedan por cubrir son los que se encuentran en el exterior y no es posible cubrir tres de estos con un sólo monomio en $G_{r,3}$, por la Proposición 4.1.1 el cubrimiento estándar es disjunto y podemos garantizar que no existe ningún cubrimiento con menos clanes descendentes que el cubrimiento estándar.

Ahora probaremos que para los casos $r \equiv 1, 2 \pmod{3}$ el cubrimiento estándar utiliza el máximo número de clanes descendentes sin que exista alguna intersección entre estos. En la Figura 4.3 podemos observar que esto sucede para todo $r \neq 5$ (el caso $r = 5$ corresponde a la configuración en la izquierda de la Figura 4.3 suponiendo que no está en el interior de ninguna gráfica, este caso puede verificarse por inspección), ya que si no se utiliza el patrón del cubrimiento estándar entonces los puntos señalados en rojo no pueden cubrirse sin usar un clan descendente que interseccione a alguno previamente usado. Para terminar la prueba de los casos $r \equiv 1, 2 \pmod{3}$, observe que si un cubrimiento utiliza $l \geq 1$ clanes descendentes adicionales a los del cubrimiento estándar, entonces tiene al menos l intersecciones y no puede mejorar el número de monomios cubiertos aunque utilice más clanes descendentes. Por último, por la Proposición 4.1.1 el cubrimiento estándar es disjunto y utiliza el mayor número de líneas para cubrir los monomios restantes, de donde no es posible mejorar el número de elementos que utiliza el cubrimiento estándar.

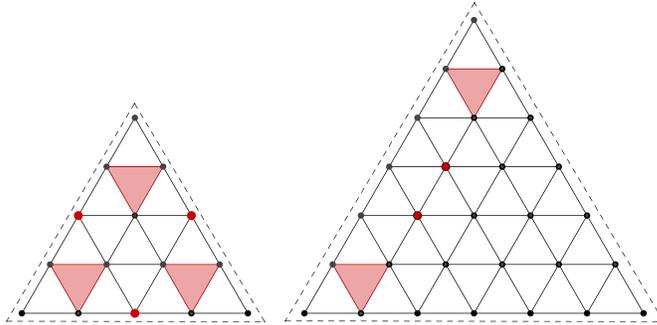


Figura 4.3: Ambas configuraciones están en el interior de gráficas más grandes. Los puntos resaltados no pueden ser cubiertos utilizando clanes descendentes sin que exista una intersección con algún clan descendente ya utilizado.

Para el caso $r \equiv 0 \pmod{3}$, podemos ver que existe una configuración que utiliza exactamente un clan descendente más que el cubrimiento estándar, en la Figura 4.4 podemos ver

un ejemplo, sin embargo, esta configuración obliga a utilizar 3 elementos extras para cubrir a los monomios de la forma x_i^r y no mejora el número de elementos que utiliza el cubrimiento estándar. Cualquier otra configuración que utilice $l \geq 2$ clanes descendentes extras tendrá l intersecciones y no mejora el número de elementos utilizados por el cubrimiento estándar. Para finalizar el caso $r \equiv 0 \pmod 3$, podemos ver que los monomios restantes son cubiertos de manera óptima ya que se utilizan solamente líneas. \square

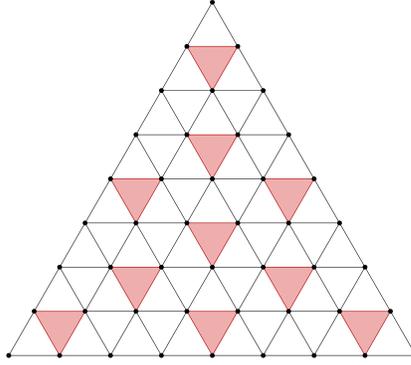


Figura 4.4: Configuración con exactamente un clan descendente extra al cubrimiento estándar para cubrir a los monomios internos de $G_{8,3}$.

Teorema 4.2.3. (Merino & Antonio, 2020) Para todo $d \geq 1$ se cumple $f(3, d) = L_2(3, d) = \bar{f}(3, d)$.

Demostración. Procedemos como antes mostrando que el cubrimiento estándar es óptimo utilizando el menor número de elementos para cubrir a la gráfica $G_{2,d}$. Observe que los monomios x_i^2 sólo pueden cubrirse con monomios de la forma x_i^3 o $x_i^2 x_j$ ($i \neq j$). Dado que la congruencia $3i \equiv 1 \pmod d$ tiene a lo más una solución, el cubrimiento estándar utiliza a lo más un monomio de la forma x_i^3 . Después de cubrir los monomios de la forma x_i^2 sólo queda cubrir monomios de la forma $x_i x_j$ ($i \neq j$), digamos que quedan l de estos monomios, estos monomios son cubiertos de forma óptima por el cubrimiento estándar pues utiliza exactamente $\lceil l/3 \rceil$ monomios de la forma $x_i x_j x_k$ (i, j, k todos distintos) ya que el cubrimiento es disjunto (Proposición 4.1.1). \square

Teorema 4.2.4. (Merino & Antonio, 2020) Para todo $r \geq 1$ par se cumple $f(r, 4) = L_2(r, 4) = \bar{f}(r, 4)$.

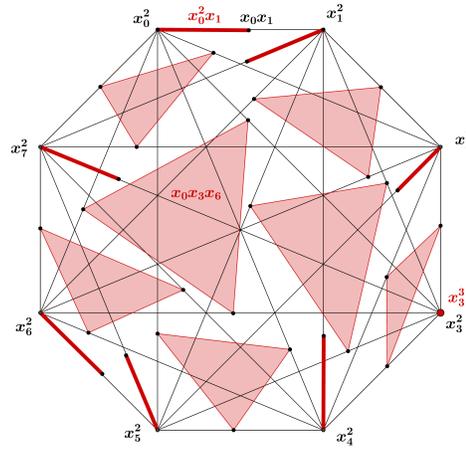


Figura 4.5: Cubrimiento estándar de la gráfica $G_{2,8}$, los elementos en rojo representan a los conjuntos cubiertos por algún monomio de la clase cromática del 1, por ejemplo, el monomio $x_0 x_3 x_6$ tiene color 1 en $G_{3,8}$.

Demostración. Como en el teorema anterior, a los monomios en $G_{r,4}$ que son divisibles por $x_0 x_1 x_2 x_3$ los llamamos internos, mientras que a los monomios que tienen a lo más dos variables los llamamos monomios arista, al resto los llamamos monomios cara que son aquellos divisibles por exactamente 3 variables. Es fácil ver que el número de monomios en $G_{r,4}$ es $(r^3 + 6r^2 + 11r + 6)/6$, además, el número de monomios internos es $I_r = (r^3 - 6r^2 + 11r - 6)/6$, el número de monomios cara es $F_r = (2r^2 - 6r + 4)$ y el número de monomios arista es $E_r = 6r - 2$. De forma similar al caso $f(r, 3)$ es fácil ver que el mínimo número de clanes descendentes (tetrahedros apuntando hacia abajo) necesarios para cubrir a los monomios internos es el que utiliza el cubrimiento estándar, es por esto que sólo consideramos cubrimientos con al menos este número de clanes descendentes.

Consideremos la configuración mostrada en la Figura 4.6, en general, esta configuración está formada por los clanes descendentes asociados a los monomios $x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} \in G_{r+1,4}$, donde $i_0, i_1, i_2, i_3 \in \{1, 3, 5, \dots\}$ e $i_0 + i_1 + i_2 + i_3 = r + 1$, observe que aquí utilizamos el hecho de que r sea par. Se puede probar por inducción que esta configuración utiliza el máximo número de clanes descendentes disjuntos para cubrir a los monomios internos. De hecho, esta configuración utiliza exactamente $(r^3 - 6r^2 + 11r - 6)/6$ clanes descendentes, dos más que el cubrimiento estándar, además, esta configuración cubre $(r^3 - 6r^2 + 11r - 6)/2$ monomios

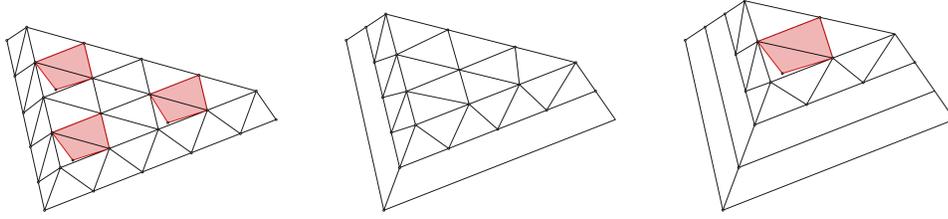


Figura 4.6: Configuración con el mayor número de clanes descendentes disjuntos en $G_{5,4}$, los clanes descendentes corresponden a los monomios cubiertos por $x_0^3x_1x_2x_3$, $x_0x_1^3x_2x_3$, $x_0x_1x_2^3x_3$ y $x_0x_1x_2x_3^3$.

cara, para cubrir el resto de los monomios cara necesitamos al menos $(r^3 - 6r^2 + 11r - 6)/6$ elementos. Resta cubrir los monomios arista para los cuales necesitamos al menos $3r - 1$ elementos. En total tendríamos un cubrimiento de $G_{r,4}$ que utiliza $(r^3 - 6r^2 + 11r - 6)/6 + (r^3 - 6r^2 + 11r - 6)/6 + 3r - 1 = (r^3 - 6r^2 + 20r - 9)/3$ elementos. Utilizando la fórmula obtenida en la Proposición 4.1.6 vemos que el cubrimiento estándar utiliza $\bar{f}(r, 4) = (r^3 + 6r^2 + 8r)/24$ elementos, es decir, menos elementos que el cubrimiento construido anteriormente, con lo cual dicho cubrimiento no mejora al cubrimiento estándar.

Consideremos ahora la configuración que utiliza exactamente un clan descendente más que el cubrimiento estándar, de hecho, esta configuración es única salvo simetrías y es la restricción del cubrimiento obtenido por los monomios en $G_{r+1,4}$ que pertenecen a la clase cromática del 2. De la Proposición 4.1.1 sabemos que este cubrimiento es disjunto y cubre los vértices restantes con el menor número de elementos. Sin embargo, sabemos que el cubrimiento estándar siempre utiliza el menor número de elementos y esta configuración tampoco mejora el número de elementos del cubrimiento estándar. Por último, consideremos los cubrimientos que utilizan $l \geq 3$ clanes descendentes más que el cubrimiento estándar, podemos probar por inducción que estos cubrimientos tienen al menos l intersecciones y no mejoran el número de elementos utilizados por el cubrimiento estándar. Para terminar la prueba observe que el cubrimiento estándar cubre de forma óptima a los monomios restantes, ya que el cubrimiento es disjunto. \square

Teorema 4.2.5. (Merino & Antonio, 2020) Para todo $d \geq 1$ se cumple $f(4, d) = L_2(4, d) = \bar{f}(4, d)$.

Demostración. Haremos la prueba separando los casos cuando d es par e impar. Cuando d es par las congruencias $4i \equiv 1 \pmod{d}$ y $2(i+j) \equiv 1 \pmod{d}$ no tienen solución, esto implica que los monomios de la forma x_i^4 y $x_i^2 x_j^2$ no pertenecen a la clase cromática del 1, luego, el cubrimiento estándar utiliza monomios de la forma x_i^3 y $x_i^2 x_j$ para cubrir a los monomios de la forma x_i^4 y $x_i^2 x_j x_k$ (i, j, k todos distintos) respectivamente. Esto nos garantiza que los monomios en $G_{4,d}$ son cubiertos de forma óptima, más aún, el cubrimiento estándar cubre al resto de los elementos utilizando monomios de la forma $x_i x_j x_k x_l$ (i, j, k, l todos distintos) y dado que este cubrimiento es disjunto podemos asegurar que no se puede mejorar el número de elementos que utiliza el cubrimiento estándar y por lo tanto es óptimo.

Cuando d es impar la congruencia $4i \equiv 1 \pmod{d}$ tiene exactamente una solución y la congruencia $2(i+j) \equiv 1 \pmod{d}$ puede tener muchas soluciones. Es decir, el cubrimiento estándar utiliza $d-1$ monomios de la forma $x_i^3 x_j$ y sólo un monomio de la forma x_i^4 , digamos que utiliza $x_{k_0}^4$. Ahora nos quedan monomios de la forma $x_i^2 x_j$ que no han sido cubiertos, estos monomios pueden cubrirse utilizando a monomios $x_i^2 x_j^2$ o $x_i^2 x_j x_k$ ($x_i^3 x_j$ ya han sido utilizados), dado que el segundo cubre 3 monomios es preferible utilizar el máximo posible de estos. Para cada $i \neq k_0$ hay $d-2$ monomios de la forma $x_i^2 x_j$ que no han sido cubiertos, dentro de todos ellos podemos cubrir a lo más $d-3$ disjuntamente pues $d-2$ es impar, es decir, necesitamos al menos $(d-1)(d-3)/2$ elementos. Para k_0 necesitamos al menos $(d-1)/2$ elementos. Esto nos da $(d^2 - 3d + 2)/2$ elementos en total. Del total de monomios de la forma $x_i^2 x_j$ hemos cubierto a lo más $d^2 - 3d + 2$, luego tenemos al menos $2\binom{d}{2} - (d^2 - 3d + 2) = 2(d-1)$ monomios restantes, para cubrir estos monomios necesitamos al menos $d-1$ elementos dado que ahora sólo podemos utilizar monomios de la forma $x_i^2 x_j^2$.

Quedan por analizar los monomios de la forma $x_i x_j x_k$ y hay al menos $\binom{d}{3} - (d^2 - 3n + 2)/2 = \frac{1}{6}(d^3 - 6d^2 + 11d - 6)$ que no han sido cubiertos, para cubrirlos necesitamos al menos $\frac{1}{24}(d^3 - 6d^2 + 11d - 6)$ monomios de la forma $x_i x_j x_k x_l$. Resumiendo lo anterior, tenemos una cota inferior para el número de elementos de cualquier cubrimiento que utilice exactamente un monomio de la forma x_i^4 , este número es $\frac{1}{24}(d^3 + 6d^2 + 11d + 6)$. Utilizando la fórmula para $\bar{f}(4, d)$ de la Proposición 4.1.6 tenemos que el número de elementos que utiliza el cubrimiento estándar es

$$\frac{1}{d+4} \sum_{h|(d+4,4)} \mu(h) \binom{d/h + 4/h}{4/h} = \frac{1}{d+4} \binom{d+4}{4} = \frac{1}{24}(d^3 + 6d^2 + 11d + 6),$$

de donde el cubrimiento estándar alcanza la cota inferior. Para terminar la prueba observe que el número de elementos del cubrimiento estándar no puede mejorarse aún utilizando d monomios de la forma $x_i^3 x_j$ ya que todos los demás monomios en la clase cromática del 1 cubren al menos a dos elementos en $G_{4,d}$. \square

El siguiente resultado que tenemos es para $f(5, d)$, es decir, tenemos d variables y utilizaremos los monomios de grado 5 para cubrir a la gráfica $G_{4,d}$. Primero daremos una partición de los monomios en $G_{4,n}$ en tres conjuntos: \mathcal{K}_d , \mathcal{T}_d^1 y \mathcal{T}_d^2 . El conjunto \mathcal{K}_d contiene todos los monomios de $G_{4,d}$ con a lo más dos variables, podemos verlo como una gráfica completa K_d cuyos vértices son los monomios de la forma x_i^4 y después hacemos tres subdivisiones en cada arista, de forma precisa, subdividimos la arista $\{x_i^4, x_j^4\}$ agregando los monomios $x_i^3 x_j$, $x_i^2 x_j^2$ y $x_i x_j^3$. El conjunto \mathcal{T}_d^1 contiene todos los monomios de la forma $x_i^2 x_j x_k$ (i, j, k todos distintos). Finalmente, el conjunto \mathcal{T}_d^2 contiene a los monomios de la forma $x_i x_j x_k x_l$ (i, j, k, l todos distintos). Observe que la gráfica $G_{4,d}$ también contiene aristas entre los conjuntos \mathcal{K}_d y \mathcal{T}_d^1 , y entre \mathcal{T}_d^1 y \mathcal{T}_d^2 . En la Figura 4.7 podemos ver como los monomios de grado 5 cubren a la gráfica $G_{4,d}$, existen 7 tipos de monomios de grado 5: monomios de la forma x_i^5 , $x_i^4 x_j$, $x_i^3 x_j^2$, $x_i^3 x_j x_k$, $x_i^2 x_j^2 x_k$, $x_i^2 x_j x_k x_l$ y $x_i x_j x_k x_l x_m$, llamamos a estos monomios de tipo 1, 2, \dots , 7 respectivamente.

Observe en la Figura 4.7 que cada tipo de monomios cubre de cierta manera a los monomios en $G_{4,d}$, los monomios de tipo 1, 2 y 3 cubren monomios en \mathcal{K}_d , monomios de tipo 4 y 5 cubren monomios en ambos conjuntos \mathcal{K}_d y \mathcal{T}_d^1 , monomios de tipo 6 cubren monomios en ambos conjuntos \mathcal{T}_d^1 y \mathcal{T}_d^2 , finalmente, los monomios de tipo 7 cubren únicamente monomios que están en \mathcal{T}_d^2 . Utilizaremos este comportamiento para mostrar el siguiente resultado.

Teorema 4.2.6. (*Merino & Antonio, 2020*) Para todo $d \geq 1$ impar se cumple $f(5, d) = L_2(5, d) = \bar{f}(5, d)$.

Demostración. La idea de la prueba es dar algunas cotas mínimas en el número de elementos para los cubrimientos de la gráfica $G_{4,d}$, después mostraremos que el cubrimiento estándar alcanza esta cota y por lo tanto es óptimo.

Primero consideremos el caso $d \equiv 0 \pmod{5}$. Observe que los monomios de la forma x_i^4 pueden ser cubiertos únicamente por monomios del tipo 1 o 2, dado que los monomios del tipo 2 cubren más elementos que los del tipo 1 cualquier cubrimiento de $G_{4,n}$ utiliza al menos

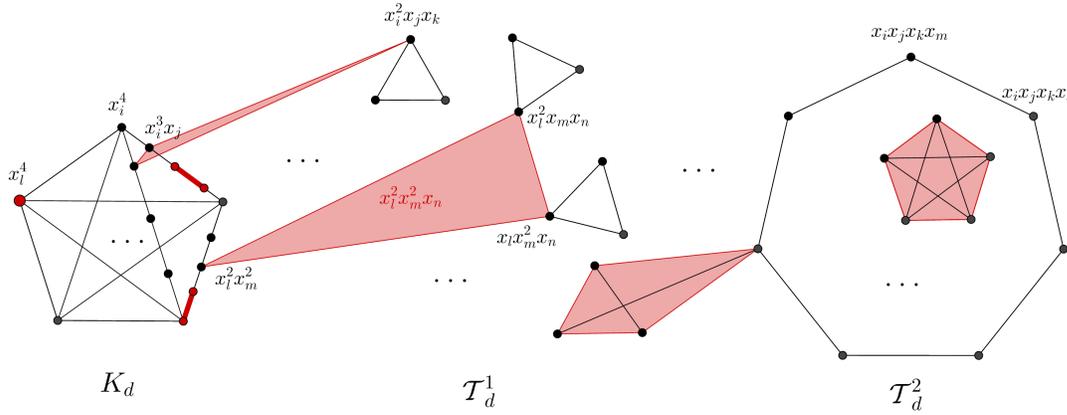


Figura 4.7: Comportamiento de los monomios de $G_{5,d}$ al cubrir a los monomios en los conjuntos \mathcal{K}_d , \mathcal{T}_d^1 y \mathcal{T}_d^2 que forman una partición de $G_{4,d}$.

d elementos para cubrir estos monomios y con estos monomios a lo más cubre $2d$ monomios. Analicemos ahora los monomios de la forma $x_i^3 x_j$; para cada $0 \leq i \leq d-1$ hay al menos $d-2$ monomios adyacentes a x_i^4 que aún no han sido cubiertos, estos monomios pueden cubrirse con monomios del tipo 3 y 4, dado que los monomios de tipo 4 cubren más podemos utilizar el mayor número de estos, podemos usar a lo más $(d-3)/2$ (porque $d-2$ es impar) monomios de tipo 4 para cada i , en total, a los más utilizamos $d(d-3)/2$ monomios tipo 4. Ahora, para cada i tenemos al menos un monomio de la forma $x_i^3 x_j$ que no ha sido cubierto, luego, al menos debemos usar un monomio tipo 3 para cada i y en total al menos d de estos. Después de utilizar los monomios tipo 3 y 4 tenemos al menos $\binom{d}{2} - d$ monomios de la forma $x_i^2 x_j^2$ que no han sido cubiertos, luego debemos usar al menos $\binom{d}{2} - d$ monomios de tipo 5 para cubrirlos.

Una vez cubierto el conjunto \mathcal{K}_d , el siguiente paso es cubrir el conjunto \mathcal{T}_d^1 , tenemos al menos $(d^3 - 3d^2 + 2d)/2 - (d^2 - 3d)/2 - 2((d^2 - d)/2 - d) = \frac{1}{2}(d^3 - 6d^2 + 11d)$ monomios que no han sido cubiertos, de donde debemos utilizar al menos $\frac{1}{6}(d^3 - 6d^2 + 11d)$ monomios de tipo 6 para cubrirlos, además estos monomios de tipo 6 cubren a lo más a $\frac{1}{2}(d^3 - 6d^2 + 11d)$ monomios en \mathcal{T}_d^2 . Para terminar de cubrir a $G_{4,d}$ resta cubrir al menos $\frac{1}{24}(d^4 - 6d^3 + 11d^2 - 6d) - \frac{1}{2}(d^3 - 6d^2 + 11d) = \frac{1}{24}(d^4 - 10d^3 + 35d^2 - 50d)$ monomios en \mathcal{T}_d^2 , para cubrirlos debemos usar al menos $\frac{1}{120}(d^4 - 10d^3 + 35d^2 - 50d)$ monomios de tipo 7.

Observe que en todos los pasos anteriores las cotas se obtienen suponiendo que el cubri-

miento construido (si existe) es disjunto, esto garantiza que el número de elementos utilizados no puede mejorarse y así obtenemos una cota inferior para cualquier cubrimiento de la gráfica $G_{4,d}$. Para terminar la prueba mostraremos que de hecho el cubrimiento estándar alcanza esta cota inferior y por lo tanto es óptimo. El número de monomios utilizados es d , $d(d-3)/2$, d , $\binom{d}{2} - d$, $\frac{1}{6}(d^3 - 6d^2 + 11d)$ y $\frac{1}{120}(d^4 - 10d^3 + 35d^2 - 50d)$ de tipo 2, 3, 4, 5, 6 y 7 respectivamente, es decir, el total de monomios utilizados es $\frac{1}{120}(d^4 + 10d^3 + 35d^2 + 50d)$. Por otro lado, la fórmula para $\bar{f}(n, 5)$ obtenida en la Proposición 4.1.6 nos da $\bar{f}(n, 5) = \frac{1}{120}(d^4 + 10d^3 + 35d^2 + 50d)$ y el resultado se sigue.

Consideremos ahora el caso $d \not\equiv 0 \pmod{5}$, la principal diferencia con el caso anterior es que el cubrimiento estándar utiliza un monomio de la forma x_i^5 para cubrir a x_i^4 dado que la congruencia $5i \equiv 1 \pmod{d}$ tiene exactamente una solución. Sin embargo, podemos utilizar el mismo argumento que antes ya que ningún cubrimiento que utilice un monomios de tipo 1 puede mejorar al cubrimiento estándar, pues todos los demás monomios en la clase cromática del 1 cubren al menos a 2 elementos en $G_{4,d}$. Para obtener la cota mínima en este caso utilizamos un monomio de tipo 1, $d-1$ monomios de tipo 2, $(d-1)(d-3)/2 + (d-1)/2$ monomios de tipo 4, $d-1$ monomios de tipo 3 y $\binom{d}{2} - (d-1)$ monomios de tipo 5 para cubrir a los monomios en \mathcal{K}_d , en total se utilizan $d^2 - d + 1$ monomios, más aún, estos monomios cubren a lo más $\frac{3}{2}(d^2 - 3d + 2)$ monomios en \mathcal{T}_d^1 . Luego, tenemos al menos $(d^3 - 3d^2 + 2d)/2 - \frac{3}{2}(d^2 - 3d + 2) = \frac{1}{2}(d^3 - 6d^2 + 11d - 6)$ monomios que no han sido cubiertos en \mathcal{T}_d^1 , así que necesitamos al menos $\frac{1}{6}(d^3 - 6d^2 + 11d - 6)$ monomios de tipo 6 para cubrirlos. Para terminar el cubrimiento tenemos al menos $\frac{1}{24}(d^4 - 6d^3 + 11d^2 - 6d) - \frac{1}{6}(d^3 - 6d^2 + 11d - 6) = \frac{1}{24}(d^4 - 10d^3 + 35d^2 - 50d + 24)$ monomios que no han sido cubiertos en \mathcal{T}_d^2 , así que necesitamos al menos $\frac{1}{120}(d^4 - 10d^3 + 35d^2 - 50d + 24)$ monomios de tipo 7 para cubrirlos. En total este cubrimiento utiliza $\frac{1}{120}(d^4 + 10d^3 + 35d^2 + 50d + 24)$, para terminar la prueba podemos ver que la fórmula obtenida en 4.1.6 para $\bar{f}(5, d)$ coincide con esta cota inferior y por lo tanto el cubrimiento estándar es óptimo. \square

4.3. Conclusiones

Los primeros valores de la función $f(r, d)$ ($r, d \leq 2$) aparecen en [19], en este capítulo avanzamos con algunos otros encontrando los valores exactos de la función $f(r, d)$ para $r = 4$

y todo d , para $d = 4$ y r par y, finalmente para $r = 5$ y d impar. Estos valores confirman la fórmula general conjeturada en [19].

Observe que los valores obtenidos para $f(r, d)$ señalan el hecho no trivial de la simetría de la función f , es decir, que se satisfaga $f(r, d) = f(d, r)$, este problema podría ser una línea de investigación futura encaminada a probar la conjetura 4.1.2 ya que esta implica $f(r, d) = f(d, r)$. Además, esto podría implicar una clase de involución en las gráficas $G_{r,d}$, sin embargo, no pudimos encontrar esta operación aún para los casos pequeños.

Las gráficas de monomios $G_{r,d}$ y sus invariantes han sido estudiadas en otros artículos y parecen ser muy interesantes por sí mismas. En [8] fueron estudiadas en el contexto de la Geometría Algebraica y se presentaron algunos otros invariantes como el número de independencia, cubiertas de la gráfica mediante clanes ascendentes, descendentes y combinaciones de ambos clanes; como mencionan en este artículo, encontrar el valor de estos invariantes sería muy útil para hallar cotas de conjeturas referentes a ideales. También, en [1] estudian el número de independencia y la cardinalidad mínima de una cubierta de $G_{r,d}$ mediante clanes ascendentes, aquí encontraron el valor exacto del número de independencia de $G_{r,4}$ y lo compararon con el número de matrices 2×2 con entradas enteras no negativas tal que la suma de sus entradas es igual a r . También, presentan un algoritmo que acota la cardinalidad mínima de una cubierta mediante clanes ascendentes.

Bibliografía

- [1] B. Babcock and A. T. Tuyl. Revisiting the spreading and covering numbers. *Australian Journal of Combinatorics*, 56:77 – 84, 2013.
- [2] N. Biggs. The tutte polynomial as a growth function. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 10(2):115–133, 1999.
- [3] A. Björner. *Matroid Applications*, volume 40 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge, 1992. Chapter Homology and shellability of matroids and geometric lattices.
- [4] T. Brylawski and J. Oxley. *Matroid Applications*, volume 40 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge, 1992. Chapter The Tutte Polynomial and its Applications.
- [5] R. Diestel. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, August 2005.
- [6] J. Edmonds. Submodular functions, matroids, and certain polyhedra. pages 11–26, 01 2001.
- [7] A. Elashvili, M. Jibladze, and D. Pataraiia. Combinatorics of necklaces and “hermite reciprocity”. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 10(2):173–188, 1999.
- [8] A.V. Geramita, D. Gregory, and L. Roberts. Monomial ideals and points in projective space. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 40:33 – 62, 1986.
- [9] A. J. Goodall, C. Merino, A. de Mier, and M. Noy. On the evaluation of the tutte polynomial at the points $(1, -1)$ and $(2, -1)$. *Annals of Combinatorics*, 17(2):311–332, Jun 2013.

- [10] S. Klee and J. A. Samper. Lexicographic shellability, matroids, and pure order ideals. *Advances in Applied Mathematics*, 67:1–19, 2015.
- [11] W. Kook. The h-vector of coned graphs. *Applied Mathematics Letters*, 24(4):528–532, 2011.
- [12] W. Kook. A multicomplex of partially edge-rooted forests. *European Journal of Combinatorics*, 33(4):505–509, 2012.
- [13] A. G. Kuznetsov, I. M. Pak, and A. E. Postnikov. Increasing trees and alternating permutations. *Russian Mathematical Surveys*, 49(6):79–114, dec 1994.
- [14] J. A. De Loera, Y. Kemper, and S. Klee. h-vectors of small matroid complexes. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 19, 2012.
- [15] C. McDiarmid. Rado’s theorem for polymatroids. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 78(2):263–281, 1975.
- [16] C. Merino. Chip firing and the tutte polynomial. *Annals of Combinatorics*, 1:253–259, 1997.
- [17] C. Merino. The chip-firing game. *Discrete Mathematics*, 302(1):188 – 210, 2005.
- [18] C. Merino. The number of 0-1-2 increasing trees as two different evaluations of the tutte polynomial of a complete graph. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 15, 07 2008.
- [19] C. Merino, S. D. Noble, M. Ramírez-Ibañez, and R. Villarroel-Flores. On the structure of the h-vector of a paving matroid. *European Journal of Combinatorics*, 33(8):1787 – 1799, 2012.
- [20] T. Nakamigawa. Enumeration problems on the expansion of a chord diagram. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 54(Complete):51–56, 2016.
- [21] T. Nakamigawa and T. Sakuma. The expansion of a chord diagram and the tutte polynomial. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 61(Supplement C):917–923, 2017. The European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EURO-COMB’17).

- [22] S. Oh. Generalized permutohedra, h -vector of cotransversal matroids and pure o -sequences. <https://arxiv.org/abs/1005.5586>, 2010.
- [23] J. G. Oxley. *Matroid Theory*. Oxford Graduate Texts in Mathematics. Oxford University Press, 1997.
- [24] C. Sarmiento. On power ideals of transversal matroids and their "parking functions". 05 2018.
- [25] R. P. Stanley. Cohen-macaulay complexes. *Higher Combinatorics*, Volume 31:51–62, 1977.
- [26] W. T. Tutte. A contribution to the theory of chromatic polynomials. *Canadian Journal of Mathematics*, 6:80–91, 1954.
- [27] W. T. Tutte. On dichromatic polynomials. *J. Combin. Theory*, 2:301–320, 1967.
- [28] D. J. A. Welsh. *Matroid theory*. Academic Press London, 1976.
- [29] D. J. A. Welsh. *Complexity: Knots, Colourings and Counting*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1993.
- [30] H. Whitney. On the abstract properties of linear dependence. *Amer. J. Math*, (57):509–533, 1935.