Universidad Nacional Autónoma de México
Programa de Maestría y Doctorado en Filosofía
Facultad de Filosofía y Letras
Instituto de Investigaciones Filosóficas

La computabilidad clásica desde un enfoque estructural. Un resultado acerca de la existencia de morfismos no computables

Tesis que para optar por el grado de
Maestro en Filosofía

presenta

Francisco Netzahualcóyotl Martínez Aviña

Tutor:
Dr. Luis Estrada González
Instituto de Investigaciones Filosóficas

Ciudad de México, Agosto de 2020

Resumen

Los resultados básicos de la Teoría Clásica de la Recursión, usualmente presentados en el marco de ZFC, pueden ser recuperados sin mayores cambios en el marco de una teoría estructural de conjuntos, como aquella axiomatizada en el topos **Set**. Un resultado importante de esta teoría es que existen funciones no computables (en términos de máquinas de Turing y formulaciones equivalentes). Puesto que al menos una de las pruebas usuales para dicho teorema tiene que ver exclusivamente con cuestiones de cardinalidad (hay estrictamente *más* funciones no computables que funciones computables), uno puede preguntarse si la existencia de dichas funciones es un rasgo estructural de la noción clásica de computabilidad. En este texto defiendo una respuesta negativa a dicha pregunta. De manera más precisa, argumento que la existencia de *morfismos* no computables no es una propiedad estructural de la noción clásica de computabilidad. Utilizo la teoría de categorías para dar un criterio técnico de lo que es una propiedad estructural y para proponer una definición de "categoría computable" relativa a la noción clásica de computabilidad. A partir de ello, presento dos categorías computables (**Asm** y **Eff**) y muestro que hay un isomorfismo entre el $Hom(N, N)$ de estas categorías y el conjunto de funciones recursivas en **Set**. Después defino una propiedad que captura la existencia de morfismos no computables, y muestro que dicha propiedad no puede formar parte de la caracterización de *morfismo computable* en términos de propiedades universales. Así, la conclusión es que dicha propiedad no es estructural.

Índice

Agradecimientos

Son muchas las personas a las que debo agradecer por haberme motivado, ayudado y acompañado en la elaboración de este trabajo. Para empezar, a mi asesor, Luis Estrada González. Mi mamá diría que se va a ir al cielo por toda la paciencia que me ha tenido a lo largo de estos años que nos hemos conocido. Gracias por supervisar mi aprendizaje de teoría de categorías y por enseñarme tanto de filosofía de las matemáticas y de la lógica.

Gracias a los miembros del jurado que evaluó esta tesis, no sólo por tomarse el tiempo de leerla sino también por reunirse conmigo para discutirla y poder mejorarla: Cristian Gutiérrez Ramírez, Atocha Aliseda Llera, Mario Gómez Torrente y Francisco Hernández Quiroz.

A mi mamá, por estar siempre ahí, apoyándome con todo su ser. A mi hermano Jorge, por ser una inspiración permanente. A las niñas, Fri y Naty, por ser parte de los momentos más felices que he pasado en familia.

A Erika Torres, por tanto amor y tanta confianza, por escucharme hablar una y otra vez de computabilidad y categorías sin aburrirse, justo lo necesario para concluir este proyecto. A mi gran amigo Lenin, por tantas discusiones importantes y triviales, académicas y no académicas (éstas sin duda han sido las mejores). A los amigos que he hecho en el instituto y con quienes he contado para discutir esta tesis: Dubian Cañas, Afra Montero, Daniel Garibay, Diego Rodríguez y José Navarro. A la gente de los seminarios de Filosofía de las Matemáticas, Filosofía de la Lógica y FiCiForTes, con quienes he compartido buena parte de este proyecto previamente, en particular a Carlos César Jiménez, Manuel Tapia, Javier Gómez, Oscar Monroy, Elisángela Ramírez, Claudia Tanus, Fernando Cano, Gabrielle Ramos y Luis Estrada.

A Maris, que viviendo tan lejos no ha dejado de estar al pendiente de todo lo que me pasa. A Montse, por ser una gran amiga en las buenas y en las malas. A mis amigos de la vida, Fer, Toño e Itzcóatl.

Este trabajo fue escrito gracias al apoyo del Programa de Becas Nacionales del CONACyT, dentro del Programa de Estudiantes Asociados del Instituto de Investigaciones Filosóficas de la UNAM, y en el marco del proyecto PAPIIT IN403719: "Intensionalidad hasta el final, un nuevo plan para la relevancia lógica". Agradezco a los tres programas por el apoyo material sin el cual no existiría este trabajo.

1. Introducción

La pregunta general de mi tesis es la siguiente: ¿Cuáles son las propiedades estructurales y las no estructurales de la noción de computabilidad clásica? En particular, ¿es tan estrecha la conexión entre las nociones de computabilidad e incomputabilidad como nos dice la Teoría Clásica de la Recursión?[1]

La tesis que defiendo es que su conexión no es estructural. De manera más precisa, mi tesis es que la existencia de morfismos no computables no es una propiedad estructural de la noción de computabilidad clásica. A continuación explicaré qué son las propiedades estructurales de un objeto, por qué conocerlas es importante, y motivaré la idea de que una muy buena teoría para estudiarlas es la Teoría de Categorías, la cual usaré como marco teórico principal en esta tesis.

Ordinariamente, las propiedades estructurales de un objeto o situación se piensan como aquellas propiedades que son permanentes, necesarias o esenciales de tal objeto o situación. Piénsese por ejemplo en la relación entre las líneas del metro y su representación pictórica. Las imágenes que vemos para orientarnos no plasman con exactitud las distancias entre una estación del metro y otra, y muchas veces ni siquiera se exhiben las rectas y curvas que de hecho ocurren en el camino. En este caso, lo que importa es que la representación preserve el orden en que aparecen las estaciones: si en el trayecto real la estación A está entre las estaciones B y C, un buen mapa del metro debe representar a la estación A entre las estaciones B y C; si las estaciones D y E son las estaciones terminales de una línea, esto también debe ser representado. Tanto la línea real del metro como su

[1]De acuerdo con dicha teoría, dada la caracterizacion estándar de función computable como un tipo particular de función numérica, para cualquier función computable siempre hay al menos una función no computable.

representación pictórica comparten cierta estructura, a saber, el orden de sus nodos. Para muchos propósitos, todo lo que nos interesa saber acerca del metro es dicha estructura.

En matemáticas la situación no es muy distinta. En muchas ocasiones, las únicas propiedades que nos importan de un objeto son sus propiedades estructurales. Por ejemplo, es indiferente si definimos a los números reales como clases de equivalencia de secuencias de Cauchy (de números racionales) o como cortes de Dedekind. Una vez que han sido caracterizados como un campo ordenado completo, básicamente todas las matemáticas relevantes relacionadas con los reales son aquellas que tienen que ver con esa estructura de campo, pues cualquier campo ordenado completo es isomorfo a los reales.

Tanto el ejemplo de la línea del metro como el de los números reales sirven para ilustrar lo que se entiende más precisamente, aunque todavía informalmente, como una propiedad estructural: se dice que una propiedad P de un objeto x es estructural si dicha propiedad se mantiene salvo isomorfismo. En otras palabras, si P es estructural y x es isomorfo a y, entonces x tiene la propiedad P si y sólo si y tiene la propiedad P. En el primer ejemplo, la línea real del metro es isomorfa al mapa del metro con respecto a la relación de orden que hay entre sus nodos (las estaciones reales y sus representaciones respectivas). Así, la propiedad "ser de color azul" claramente no es estructural en este caso, pues bien puede ocurrir que el mapa sea de hecho azul y la línea real sea de cualesquiera otros colores (o viceversa), sin que eso afecte el orden de las estaciones y sus representaciones.

Por supuesto, el que haya acuerdo acerca de si una propiedad es estructural o no depende de lo que se entienda por isomorfismo. La definición estándar que se utiliza actualmente proviene de la Teoría de Categorías.

Una categoría consiste de dos tipos de cosas, objetos y morfismos (o flechas), los cuales satisfacen algunos axiomas básicos. Más adelante precisaré los detalles técnicos, pero por ahora es útil pensar a los objetos de una categoría como objetos que comparten el mismo tipo de estructura, y a los morfismos como ciertas transformaciones que preservan dicha estructura.

Por ejemplo, tenemos la categoría de los conjuntos parcialmente ordenados (**Pos**), cuyos objetos son órdenes parciales y cuyos morfismos son las funciones monótonas entre ellos.[2] Algunos objetos de dicha categoría son los números reales ordenados mediante la relación de menor o igual estándar $(\mathbb{R}, \leq)$, o los naturales junto con la relación de divisibilidad $(\mathbb{N}, |)$, pero también la línea del metro y el mapa de la línea del metro. Sólo algunos de los objetos de la categoría **Pos** son isomorfos entre sí.

De acuerdo con la teoría de categorías, dos objetos A y B son isomorfos (escrito $A \cong B$) si existe un isomorfismo entre ellos, esto es, una flecha $f : A \to B$ tal que existe otra flecha $g : B \to A$ y se cumple lo siguiente: si aplicamos f y después aplicamos g, el resultado es la identidad en A ($g \circ f = 1_A$), y si aplicamos g y después aplicamos f, el resultado es la identidad en B ($f \circ g = 1_B$). Podemos pensar un isomorfismo como un camino de ida y vuelta entre dos lugares tal que, al final del camino, terminamos exactamente en el mismo lugar en el que habíamos iniciado. Los isomorfismos preservan *toda* la estructura de cierto tipo.

[2] Un conjunto parcialmente ordenado se compone de un conjunto O equipado de una relación binaria sobre O que es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Dados dos órdenes parciales $(O, \leq_O)$ y $(P, \leq_P)$, una función $f : (O, \leq_O) \to (P, \leq_P)$ es monótona si, para cualesquiera elementos o_1 y o_2 de O,

$$o_1 \leq_O o_2 \Rightarrow f(o_1) \leq_P f(o_2).$$

Para cualquier orden parcial X, existe una función monótona $f : X \to X$ que manda a cada elemento x de X a sí mismo ($x = f(x)$), preservando trivialmente el orden original. Las funciones monótonas preservan la estructura de orden parcial en el sentido de que la imagen de un orden parcial bajo una función monótona es un orden parcial.

En el ejemplo de **Pos**, la línea real del metro es isomorfa a su mapa (en cuanto órdenes parciales), pues es posible trazar una correspondencia uno a uno entre las estaciones físicas y sus representaciones pictóricas preservando todo el orden en que están organizadas. En cambio, ninguno de los dos es isomorfo a $(\mathbb{R}, \leq)$ ni a $(\mathbb{N}, |)$. Basta con notar que las bases de estos órdenes, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$, son conjuntos infinitos, mientras que las estaciones físicas y sus representaciones forman colecciones finitas, por lo que no puede haber una función biyectiva entre ambos.[3]

Buena parte de la explicación de por qué la noción categorista de isomorfismo es tan útil es que la teoría de categorías trata a los objetos matemáticos en términos estructurales de manera automática. Esto quiere decir que el lenguaje y los métodos categoristas hacen abstracción de la "composición interna" de los objetos matemáticos, y los describen únicamente a partir de las relaciones que tienen unos con otros. Steve Awodey expresa esto de la siguiente manera:

> [Las definiciones categoristas] son caracterizaciones de propiedades de objetos y flechas en una categoría exclusivamente en términos de otros objetos y flechas, esto es, justamente en el lenguaje de la teoría de categorías. [...] La idea es que los objetos y flechas están determinados por el rol que juegan en la categoría a través de sus relaciones con otros objetos y flechas, esto es, por su posición en una estructura y

[3]La manera estándar de definir un isomorfismo de orden entre dos órdenes $(O, \leq_O)$ y $(P, \leq_P)$ es diciendo que se trata de una función biyectiva $f : O \to P$ tal que

$$o_1 \leq_O o_2 \Leftrightarrow f(o_1) \leq_P f(o_2),$$

para cualesquiera o_1 y o_2 de O. Hay que notar que este requisito es más fuerte que el de pedir que exista una función monotónica biyectiva entre ambos órdenes. En otras palabras, aunque exista una función monotónica biyectiva entre dos órdenes, eso no implica que ellos sean isomorfos. La noción categorista de isomorfismo captura adecuadamente esa situación.

> no por lo que "son" o por "aquello de que están hechos" en algún sentido absoluto. [3, p. 29]

Resumiendo lo que he dicho hasta ahora, las propiedades estructurales de un objeto son aquellas que se mantienen salvo isomorfismo. Ellas son importantes porque, una vez que un objeto ha sido caracterizado estructuralmente, ya sabemos mucho, y en ocasiones todo, de lo que hay que saber matemáticamente acerca de dicho objeto. La teoría de categorías es un buen marco teórico (y, en opinión de muchos, el mejor)[4] para estudiar propiedades estructurales, debido a que su lenguaje y métodos ponen el énfasis en

[4]La teoría de categorías no es la única teoría (matemática) acerca de las estructuras matemáticas. Entre las alternativas más notorias se encuentran la proveniente de la teoría de modelos, la proveniente del grupo Bourbaki y, más recientemente, la proveniente del programa de Fundaciones Univalentes (UF)/Teoría Homotópica de Tipos (HoTT). Hacer una comparación entre todas ellas excede los propósitos de este texto, pero al menos puedo decir lo siguiente:

- Las limitaciones de las dos primeras (es decir, de la teoría de estructuras de la teoría de modelos y de la teoría del grupo Bourbaki), así como las ventajas de la teoría de categorías sobre ellas, están discutidas, por ejemplo, en [1], [2] y [13].
- El debate acerca de si UF/HoTT es "más estructuralista" que la teoría de categorías es un debate en curso actualmente. En cualquier caso, los defensores de UF/HoTT no niegan que la teoría de categorías sea una buena teoría acerca de las estructuras matemáticas; lo que sostienen es que su propia propuesta busca ser máximamente estructuralista, en el sentido de hacer imposible, a nivel de la sintaxis de su teoría, hablar de propiedades no estructurales. Cf., por ejemplo, [4, pp. 62–63] y [45, p. 3584]. En todo caso, no creo que sea polémico afirmar que la teoría de categorías sigue siendo el marco dominante para llevar a cabo el estudio de las propiedades estructurales de los objetos matemáticos. El programa de UF/HoTT apenas está en sus inicios, de manera que hacer una evaluación adecuada de su propuesta no es algo sencillo. En contraste, los métodos y herramientas de la teoría de categorías están ampliamente difundidos y tienen una legitimidad considerable por parte de la comunidad matemática.

el rol que juegan los objetos en un sistema de relaciones con otros objetos, tratando a los objetos que son isomorfos entre sí como indistinguibles.

Ahora bien, la mejor herramienta categorista para caracterizar objetos estructuralmente es la definición de propiedades universales. Estas propiedades establecen cómo se comporta un objeto o flecha de manera única (salvo isomorfismo) con todos los objetos de una categoría. Su relevancia tiene que ver con el hecho de que ciertos objetos y construcciones matemáticas aparecen una y otra vez en distintos contextos (en distintas categorías), y las propiedades universales nos dicen exactamente qué es lo que tienen en común todas esas ejemplificaciones.

Consideremos el caso de la noción de producto. En la categoría de los conjuntos y las funciones entre ellos, el producto de dos conjuntos A y B, usualmente llamado *producto cartesiano*, es el conjunto de pares ordenados tales que su primer componente es un elemento de A y su segundo componente es un elemento de B. En la lógica proposicional intuicionista vista como una categoría, es decir, tomando como objetos a las oraciones del lenguaje y como flechas a las deducciones del sistema, el producto de dos oraciones p y q es su *conjunción*.

A primera vista ambas construcciones, el producto cartesiano de dos conjuntos y la conjunción de dos oraciones, son muy distintas. Sin embargo, ambas satisfacen cierta propiedad universal: dados dos conjuntos A y B y dadas dos oraciones p y q, tanto el producto cartesiano $A \times B$ como la conjunción $p \wedge q$ tienen dos mapas "naturales" hacia cada uno de sus componentes, es decir, mapas

$$A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$$

y

$$p \xleftarrow{\pi_1} p \wedge q \xrightarrow{\pi_2} q$$

La teoría de categorías nos dice exactamente en qué sentido ambos mapas son naturales, y ello explica la universalidad de la construcción. De manera general, dada una categoría arbitraria $\mathbf{C}$ y dos objetos X y Y de $\mathbf{C}$, un diagrama de producto para X y Y consiste de un objeto P de $\mathbf{C}$ junto con dos flechas π_1 y π_2 como se muestra en el siguiente diagrama

$$X \xleftarrow{\pi_1} P \xrightarrow{\pi_2} Y,$$

tales que, para cualquier objeto T de $\mathbf{C}$ y flechas $h : T \to X$ y $k : T \to Y$, existe una única flecha $u : T \to P$ tal que $\pi_1 \circ u = h$ y $\pi_2 \circ u = k$, lo cual equivale a decir que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, dotted, "u"] \arrow[dr, "k"] & \\ X & P \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & Y \end{tikzcd}$$

Es fácil revisar que tanto el producto cartesiano de los conjuntos como la conjunción de oraciones en el cálculo de proposiciones intuicionista satisfacen esta propiedad *de manera única* salvo isomorfismo. En otras palabras, dados dos conjuntos A y B, existe un único conjunto, $A \times B$ (equipado con dos funciones hacia A y hacia B), que tiene la propiedad anterior; dadas dos oraciones p y q del cálculo de proposiciones intuicionista, existe una única proposición, $p \wedge q$ (equipada con dos deducciones hacia p y hacia q), que tiene la propiedad anterior. Dado que las propiedades universales caracterizan a un objeto de manera única salvo isomorfismo, éstas nos dicen todo lo que tenemos que saber de los productos cartesianos y de las conjunciones *en términos estructurales*.

Como mencioné al inicio, el tema central de mi tesis es la relación entre las nociones clásicas de computabilidad e incomputabilidad. Aunque estas nociones han sido estudiadas principalmente en un contexto conjuntista (i.e., en la categoría de los conjuntos), su examen no está limitado a dicho contexto. En categorías tales como la de los conjuntos finitos y las funciones totales entre ellos, la de los ensamblajes y las funciones realizadas entre ellos, o en el topos efectivo, uno puede ver que sus morfismos son computables en un sentido clásico.

Así, dado que podemos tener morfismos computables en distintas categorías, una buena caraterización estructural de los mismos debería ser "transcategórica", es decir, independiente de cualquier categoría particular. Como también mencioné, en teoría de categorías estas caracterizaciones se ofrecen mediante propiedades universales. El argumento de mi tesis tiene como paso crucial mostrar que una caracterización de la noción de morfismo computable en términos de propiedades universales *no puede incluir* como uno de sus componentes la existencia de morfismos no computables. La conclusión es que la existencia de morfismos no computables no es una propiedad estructural de la noción de computabilidad clásica. Para que esto quede mucho más claro, el argumento general de mi tesis es el siguiente:

(1) La teoría de categorías es nuestra mejor teoría de las estructuras matemáticas.

(2) La mejor manera de hablar de propiedades estructurales en teoría de categorías es mediante propiedades universales.

(3) La caracterización de los morfismos computables en términos de propiedades universales no pued

e incluir la existencia de morfismos no computables.

∴ La existencia de morfismos no computables no es una propiedad estructural de los morfismos computables.

La organización de mi trabajo es la siguiente: en la sección 2 presento las definiciones y resultados básicos de teoría de categorías que utilizo en el resto del texto. En la sección 3 presento la teoría clásica de la recursión en términos categoristas, es decir, en el topos **Set**, poniendo énfasis en los dos argumentos tradicionales que demuestran la existencia de funciones no computables en esta categoría. En la sección 4 defino la noción de "categoría computable" y presento dos ejemplos ampliamente estudiados, la categoría de los ensamblajes **Asm** y el topos efectivo **Eff**, en los cuales vale la Tesis Fuerte de Church, que afirma que todos los morfismos de los naturales a los naturales son computables. En la sección 5 reúno los resultados de las secciones anteriores para formular un argumento a favor de la premisa (3) de mi argumento general. En las conclusiones discuto algunas objeciones y preguntas abiertas que deja mi propuesta.

2. Teoría de Categorías

2.1. Axiomas básicos de categorías y diagramas conmutativos

Una categoría se compone de dos tipos de cosas:[5] *objetos*, que en general denotaré con las letras mayúsculas $A, B, C, \ldots$, y *flechas* (o *morfismos*), que en general denotaré con las letras minúsculas $f, g, h, \ldots$ Cada flecha tiene asociados exactamente dos objetos de la categoría, no necesariamente distintos, uno de los cuales es llamado su *dominio* y el otro su *codominio*; para representar que cierta flecha f tiene como dominio el objeto A y como codominio el objeto B, la notación estándar es $f : A \longrightarrow B$, aunque también, sobre todo al usar diagramas,

$$A \xrightarrow{f} B.$$

Para cualesquiera dos flechas f y g, si el codominio de f es igual al dominio de g, decimos que f y g son *componibles*. Si f y g son componibles, la flecha *compuesta* será representada como $g \circ f$. Cada objeto A tiene asociada una *flecha identidad*, representada como 1_A. Los axiomas para una categoría son los siguientes:

- Para cada par de flechas componibles f y g, la compuesta $g \circ f$ tiene como dominio el dominio de f, y como codominio el codominio de g.
- Para cada objeto A, la flecha identidad 1_A tiene como dominio y codominio a A. Para cualesquiera objetos A y B y cualquier flecha $f : A \longrightarrow B$, $1_B \circ f = f = f \circ 1_A$.

[5]El texto en el que baso la mayor parte de mi exposición es [34], particularmente los capítulos 1–2, 4–6 y 13.

- La composición de flechas es asociativa. Esto quiere decir que, para cualesquiera tres flechas $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Hay una anécdota famosa según la cual Hilbert, al comentar sus axiomas para la geometría euclidiana, mencionó que en lugar de "puntos", "líneas" y "planos", uno debería ser capaz de poner "mesas", "sillas" y "tarros de cerveza". La idea es que sin importar qué cosas sean los puntos, las líneas y los planos, cualquier cosa que satisfaga los axiomas dados por Hilbert debería considerarse como un sistema geométrico. De manera análoga, podemos decir que *cualquier cosa que satisfaga los axiomas básicos de teoría de categorías puede ser vista como una categoría.*

En teoría de categorías es muy común hacer uso de diagramas "conmutativos" para representar ecuaciones, y en este trabajo seguiré dicha costumbre. Un diagrama es conmutativo si se cumple lo siguiente: todos los caminos dirigidos que comparten el mismo nodo inicial y el mismo nodo final representan la misma flecha.

Como ejemplo, tomemos el axioma que dice que la composición de flechas es asociativa. Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ tres flechas, cuya representación diagramática sería la siguiente:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[rr, "h\circ g"] \arrow[dr, "g"] & & D \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"] & & C \arrow[ur, "h"] & \end{tikzcd}$$

Decir que el diagrama anterior conmuta significa exactamente decir que $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, esto es, que el camino que va desde A hacia D pasando por B representa la misma flecha que el camino que va de A hacia D pasando por C.

Los diagramas pueden no ser conmutativos, y en general, a menos de que contemos con información que nos diga que lo son, no debemos asumir que lo son. Para poner un ejemplo, supongamos que sabemos que existen las siguientes cuatro flechas con sus respectivos dominios y codominios: $f : A \to B, g : A \to C, h : B \to D, k : C \to D$. Podemos representar dichas flechas con el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d, "h"] \\ C \arrow[r, "k"] & D \end{tikzcd}$$

Sin más información, no podemos saber si el diagrama anterior conmuta. Para que conmute, es necesario y suficiente que $h \circ f = k \circ g$. Esto último indica que a partir de ciertas ecuaciones podemos construir diagramas conmutativos, y a la inversa, de diagramas conmutativos podemos obtener ciertas ecuaciones.

2.2. Nociones categoristas básicas

En esta sección presento las definiciones de varias flechas y objetos distinguidos que aparecen a lo largo de mi texto. Como mencioné en la introducción, estas definiciones pueden pensarse como externas, relacionales o estructurales, en el sentido de que no se preocupan por cómo están compuestos "internamente" los objetos y flechas definidas. Además, hay que notar que su especificación depende de la categoría particular en la que estemos trabajando. Por ejemplo, el hecho de que dos objetos matemáticos sean isomorfos es *relativo a* la categoría en la que los estudiemos. $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ son isomorfos en la categoría de los conjuntos, pues hay al menos una función biyectiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, y ésa es la noción apropiada de isomorfismo entre conjuntos. En cambio, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ no son isomorfos en la categoría de los grupos, pues $\mathbb{N}$ no es un grupo, de manera que no puede existir un homomorfismo biyectivo de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$, y éste es el tipo de isomorfismo apropiado entre grupos.

Isomorfismos Una flecha $f : A \to B$ es un *isomorfismo* si existe una $g : B \to A$ tal que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$. En otras palabras, si $f : A \to B$ es un isomorfismo, entonces los siguientes dos diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "1_A"] & & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "f"] & \\ B \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "1_B"] & & B \end{tikzcd}$$

En ese caso, g es única, y la llamamos el *inverso* de f, o $f^{-1} : B \to A$. Si hay un isomorfismo de A a B, decimos que A es isomorfo a B, con la notación $A \cong B$. Dos objetos *isomorfos* en una categoría tienen las mismas propiedades categoriales.

Monomorfismos Una flecha $f : A \to B$ es un *monomorfismo* si para cualquier objeto T y flechas $h : T \to A$ y $k : T \to A$, si $f \circ h = f \circ k$, entonces $h = k$. Se dice entonces que f es *cancelable por la izquierda*. La representación de este tipo de flechas es la siguiente:

$$T \underset{k}{\overset{h}{\rightrightarrows}} A \overset{f}{\rightarrowtail} B$$

Epimorfismos Una flecha $f : A \to B$ es un *epimorfismo* si para cada objeto T y flechas $h : B \to T$ y $k : B \to T$, si $h \circ f = k \circ f$, entonces $h = k$. Decimos que f es *cancelable por la derecha*; escribimos $f : A \twoheadrightarrow B$ para señalar que f es epi. Su representación es la siguiente:

$$A \overset{f}{\twoheadrightarrow} B \underset{k}{\overset{h}{\rightrightarrows}} T$$

Elemento generalizado Un *elemento generalizado* de A en una categoría $\mathbf{C}$ es cualquier flecha con A como su codominio, por ejemplo: $x : B \to A$. En este caso, decimos que B es la etapa de definición (de x), o simplemente que x es un elemento-B de A. Dado que pensamos en cualquier flecha $y : A \to B$ como un elemento-A de B, podemos usar la notación $y \in_A B$ para referirnos a dicha flecha. Pensando en $y \in_A B$ como un elemento generalizado de B, para cualquier $f : B \to C$ podemos escribir $f(y)$ para la composición $f \circ y$. Así, para cada $y \in_A B$ y $f : B \to C$, existe $f(y) \in_A C$. En cada etapa de la definición A, f toma elementos-A de B y los manda a elementos-A de C.

Elemento global Un *elemento global* de A en una categoría **C** es un elemento generalizado cuya etapa de definición es un objeto terminal: $h : 1 \to A$. En **Set**, por ejemplo, para cualquier conjunto A existe una flecha $x : \{*\} \to A$ por cada $x \in A$.

Subobjeto Un *subobjeto* de A en una categoría **C** es una flecha mono con codominio A, por ejemplo, $i : S \rightarrowtail A$.[6]

Miembro Un elemento-T de A ($x \in_T A$) es un *miembro* de i si x factoriza a través de i, esto es, si existe una $h : T \to S$ que hace conmutar al diagrama:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "x"'] & S \arrow[d, tail, "i"] \\ & A \end{tikzcd}$$

A veces abusamos de la notación y en lugar de escribir $x \in i$ escribimos $x \in S$.

[6]Los teóricos de las categorías a veces definen a un 'subobjeto' de A no simplemente como una flecha mono con codominio A, sino como una clase de equivalencia de dichas flechas.

Inclusión Dadas las flechas mono $i : A \rightarrowtail C$ y $j : B \rightarrowtail C$, escribimos $i \subseteq j$, o decimos que i *está incluido en* j si i factoriza a través de j, esto es, si existe una $s : A \to B$ que hace conmutar al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, tail, "i"] & & B \arrow[dl, tail, "j"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Equivalencia Decimos que i es *equivalente a* j, o escribimos $i \equiv j$, si se cumple que $i \subseteq j$ y $j \subseteq i$. Tenemos además los siguientes dos resultados: (a) $i \equiv j$ implica que los dominios de i y j son isomorfos; (b) dados subobjetos $i : A \rightarrowtail C$ y $j : B \rightarrowtail C$, tenemos $i \subseteq j$ sii cada miembro de i es un miembro de j.

Functor Un *functor* $\mathbf{F}$ de una categoría $\mathbf{A}$ a una categoría $\mathbf{B}$, denotado, $\mathbf{F} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, asigna a cada objeto A de $\mathbf{A}$ un objeto $\mathbf{F}A$ de $\mathbf{B}$, y a cada flecha f de $\mathbf{A}$ una flecha $\mathbf{F}f$ de $\mathbf{B}$, tal que se cumple lo siguiente:

1. $\mathbf{F}$ preserva dominios y codominios, esto es, dada $f : A \to B$ en $\mathbf{A}$, tenemos $\mathbf{F}f : \mathbf{F}A \to \mathbf{F}B$.
2. $\mathbf{F}$ preserva identidades: Dada cualquier A en $\mathbf{A}$, $\mathbf{F}(1_A) = 1_{\mathbf{F}A}$.
3. $\mathbf{F}$ preserva composición: Si f y g son componibles en $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{F}(g \circ f) = \mathbf{F}g \circ \mathbf{F}f$, y el segundo compuesto está en $\mathbf{B}$.

Si pensamos en una categoría $\mathbf{A}$ como una red de flechas entre objetos, podemos pensar que un functor $\mathbf{F} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ produce un retrato de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$, y el retrato de cualquier diagrama conmutativo también conmuta, pues si aplicamos $\mathbf{F}$ a todos los objetos y flechas en un diagrama conmutativo en **A** obtenemos un diagrama conmutativo en **B**:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ \mathbf{A} \arrow[dd, "\mathbf{F}"] & & C \\ & & \mathbf{F}B \arrow[d, "\mathbf{F}g"] \\ \mathbf{B} & \mathbf{F}A \arrow[ur, "\mathbf{F}f"] \arrow[r, "\mathbf{F}(g\circ f)"'] & \mathbf{F}C \end{tikzcd}$$

Dados dos functores $\mathbf{F} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ y $\mathbf{G} : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$, el functor compuesto $\mathbf{G} \circ \mathbf{F} : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ está definido como sigue: $(\mathbf{G} \circ \mathbf{F})A = \mathbf{G}(\mathbf{F}A)$ y $(\mathbf{G} \circ \mathbf{F})f = \mathbf{G}(\mathbf{F}f)$. Dado que para cualquier categoría **A** existe el functor identidad $1_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$, tenemos otro ejemplo de una categoría: la categoría de las categorías, **Cat**, cuyos objetos son categorías y cuyas flechas son los functores entre ellas.

2.3. Categorías cartesianas cerradas

Las tres categorías que presento en este trabajo (**Set**, **Asm** y **Eff**) son categorías cartesianas cerradas, aunque también cuentan con cierta estructura adicional. Lo relevante de este tipo de categorías son las construcciones que se pueden realizar en ellas, especialmente los productos y exponenciales.[7] Precisamente, una manera de definir este tipo de categorías es diciendo que se trata de categorías que tienen todos los productos finitos y exponenciales para cualesquiera dos objetos.

[7]En términos lógicos, dichas categorías son modelos (al menos) del fragmento $\wedge, \Rightarrow$ del cálculo de proposiciones intuicionista.

Una categoría tiene todos los productos finitos si y sólo si tiene un *objeto terminal* y *productos binarios* para cualesquiera dos objetos de la categoría:

Objeto terminal Un objeto terminal en una categoría $\mathbf{C}$ es un objeto, usualmente denotado como "1", tal que, para cualquier objeto X de $\mathbf{C}$, existe una única flecha $f : X \to 1$. Dado que la flecha es única, la notación usual para la misma (dado un objeto arbitrario X) es

$$!_X : X \to 1$$

Productos binarios Decimos que una categoría tiene (todos los) productos binarios si, para cualesquiera dos objetos A y B, existe otro objeto P y flechas $p_1 : P \to A$ y $p_2 : P \to B$, tales que, para cualquir objeto T y flechas $h : T \to A$ y $k : T \to A$ existe una única flecha $u : T \to P$ tal que $p_1 \circ u = h$ y $p_2 \circ u = k$. En ese caso se dice que P es un producto binario de A y B. Dado que los productos están determinados salvo isomorfismo, es usual tomar cualquiera (si es que existe) y denotarlo como '$A \times B$'; las flechas p_1 y p_2 se denominan *flechas proyección*. Una manera gráfica de poner lo anterior es diciendo que, si

$$A \xleftarrow{p_1} A \times B \xrightarrow{p_2} B$$

es un diagrama de producto para A y B, entonces para cualquier T y flechas h y k como se muestra:

$$A \xleftarrow{h} T \xrightarrow{k} B,$$

existe una única flecha $u : T \to A \times B$ que hace conmutar al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, dotted, "u"] \arrow[dr, "k"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

Una categoría que tiene objeto terminal y todos los productos binarios tiene *(todos los) productos finitos*, esto es, productos para cualquier número finito de objetos.

Exponenciales Dados dos objetos A, B, un *exponencial de B por A* consiste de un objeto I y una flecha $e : I \times A \to B$ con la siguiente propiedad: Para cualquier objeto C y flecha $g : C \times A \to B$ hay una única flecha $\bar{g} : C \to I$ que hace conmutar al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} I & I \times A \arrow[r, "e"] & B \\ C \arrow[u, dotted, "\bar{g}"] & C \times A \arrow[u, "\bar{g}\times 1_A"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

La notación que usaremos es la siguiente:

$$\begin{tikzcd} B^A & B^A \times A \arrow[r, "ev_{A,B}"] & B \\ C \arrow[u, dotted, "\bar{g}"] & C \times A \arrow[u, "\bar{g}\times 1_A"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Recapitulando, una categoría que tiene todos los productos finitos así como exponenciales para cualesquiera dos objetos es una categoría cartesiana cerrada.

2.4. La noción de topos

Existen distintas maneras equivalentes de definir lo que es un topos elemental. Una de ellas, haciendo uso de las definiciones que ya se han mencionado, es diciendo que se trata de una categoría cartesiana cerrada que cuenta con un *clasificador de subobjetos* y con *igualadores*.[8] Sólo dos de las categorías que presento más adelante son topos: **Set** y **Eff**.

En este tipo de categorías es posible interpretar fórmulas de lenguajes de orden superior, es decir, fórmulas en las que se cuantifica no sólo sobre individuos, sino también sobre predicados, sobre predicados de predicados, etcétera. Pero no sólo eso: cada topos elemental es un modelo de la lógica intuicionista de orden superior, en el sentido de que una fórmula de esta lógica es un teorema sólo si su interpretación es verdadera en cada topos elemental.

Igualadores Dadas dos flechas paralelas[9] $f : A \longrightarrow B$ y $g : A \longrightarrow B$, un igualador es una flecha $e : E \longrightarrow A$ tal que $f \circ e = g \circ e$ y para cualquier T y $h : T \longrightarrow A$, si $f \circ h = g \circ h$, entonces existe una única flecha $u : T \longrightarrow E$ tal que $h = e \circ u$. En diagramas:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[d, dotted, "u"] \arrow[dr, "h"] & & \\
E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

El igualador puede pensarse como 'la parte de A en la que $f = g$'.

Para definir la noción de clasificador de subobjetos es útil dar primero la definición de 'producto fibrado' o *pullback*:

[8] Una lista equivalente de condiciones (axiomas) para que una categoría **C** sea un topos elemental es la siguiente: (1) **C** debe contar con todos los límites finitos; (2) **C** debe tener un clasificador de subobjetos; (3) para cada objeto B de **C**, debe existir un objeto potencia PB, idéntico al exponencial Ω^B. Para una prueba de que ambas colecciones de axiomas son equivalentes, cf. [31, cap. IV].

[9] Se denominan flechas paralelas a aquellas que comparten el mismo dominio y codominio.

Pullback Un *pullback* (o *producto fibrado*) para dos flechas con el mismo codominio, por ejemplo, $f : A \to C$ y $g : B \to C$, consiste de un objeto P y dos flechas como se muestra en el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"] & C
\end{tikzcd}$$

con la siguiente propiedad: el diagrama anterior conmuta y, para cualquier objeto T y flechas $h : T \to A$ y $k : T \to B$, si $f \circ h = g \circ k$, entonces existe una única $u : T \to P$ tal que $p_1 \circ u = h$ y $p_2 \circ u = k$:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dotted, "u"] \arrow[drr, "k"] \arrow[ddr, "h"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"] & C
\end{tikzcd}$$

Denominamos a dos flechas con el mismo codominio como una *esquina* de flechas. La notación para un pullback para las flechas f y g es la siguiente:

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[drr, bend left, "k"] \arrow[dr, dotted, "\langle h,k \rangle"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\
& A \times_C B \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"] & C
\end{tikzcd}
$$

Clasificador de subobjetos Un clasificador de subobjetos es un objeto Ω y una flecha $t : 1 \to \Omega$ tal que para cualquier monomorfismo $s : S \rightarrowtail A$ existe una única flecha $\chi_s : A \to \Omega$ que el siguiente diagrama sea un pullback:

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r] \arrow[d, tail, "s"] & 1 \arrow[d, "t"] \\
A \arrow[r, "\chi_s"] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

A la flecha χ_s se le llama *flecha clasificadora* para s, o *flecha característica* para s.

3. Teoría Clásica de la Recursión

Piergiorgio Odifreddi [41, pp. 1–2] menciona dos sentidos en los que uno puede hablar de una teoría *clásica* de la recursión: por un lado, su objeto de estudio son las funciones numéricas, es decir, funciones del tipo $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$; por otro lado, su formalización se da en un marco teórico-conjuntista clásico (usualmente ZF o ZFC), es decir, uno cuya lógica subyacente es clásica.

Hay al menos dos diferencias importantes entre las teorías de conjuntos "materiales" basadas en la noción de pertenencia (como ZF), y las teorías de conjuntos basadas en la noción de función (llamadas usualmente "estructurales", tales como ETCS): por una parte, las teorías materiales definen una relación de pertenecia global, lo cual quiere decir que para cualesquiera dos objetos A y B, uno puede preguntarse si A pertenece a B. En cambio, aunque las teorías estructurales también permiten definir la relación de pertenencia, ésta siempre es local. Esto quiere decir que no tiene sentido tomar dos objetos arbitrarios A y B y preguntarse si uno pertenece al otro; lo que sí tiene sentido es preguntar, una vez que sabemos que A pertenece a B, si es que A pertenece a algún subconjunto de B, y a cuál.

La segunda diferencia es que las teorías de conjuntos estructurales toman a los conjuntos isomorfos como indistinguibles. Esto quiere decir, por ejemplo, que dado un conjunto arbitrario A, las teorías estructurales no hacen distinciones entre 2^A (el conjunto de funciones de A hacia "el" conjunto 2, que tiene sólo dos elementos) y $\wp A$ (el conjunto potencia de A), puesto que 2^A es isomorfo a $\wp A$. Las teorías materiales sin duda distinguen entre ambos conjuntos.

En esta sección presento las definiciones y resultados básicos de la teoría clásica de la recursión formulados en una teoría de conjuntos estructural, aquella que describe al topos **Set**. Dicha teoría es clásica en los dos sentidos de Odifreddi, pues tiene como objeto de estudio a las funciones numéricas y su lógica subyacente es clásica.

Quizá la única diferencia más o menos notoria en relación con su formulación en las teorías materiales es que, cuando se hable de los elementos de un conjunto, hay que entender que se trata de los *elementos globales* de dicho conjunto. Así, por ejemplo, cuando decimos que $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$, formalmente esto quiere decir que existen los morfismos $0 : 1 \to \mathbb{N}, 1 : 1 \to \mathbb{N}, 2 : 1 \to \mathbb{N}$, etc. Igualmente, cuando nos referimos al "sucesor de n" (para algún $n \in \mathbb{N}$), nos referimos a la composición:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "n"] \arrow[rr, bend left, "s(n)"] & \mathbb{N} \arrow[r, "s"] & \mathbb{N} \end{tikzcd}$$

A continuación presento los axiomas de **Set** y más adelante la teoría de la recursión formulada sobre esta categoría.

3.1. El topos Set

Existen distintas axiomatizaciones (no equivalentes) de lo que es "la" categoría de los conjuntos y las funciones entre ellos. La diferencia tiene que ver con la elección de las propiedades que se le atribuyen a los conjuntos, por ejemplo si su lógica es clásica o intuicionista, si la categoría debe validar el axioma de elección y los de reemplazo, etc.

Mi presentación de **Set** está basada principalmente en [34, cap. 22]. Dicha presentación puede pensarse como una formulación en términos categoristas de la teoría de conjuntos (clásica) ZFC con cuantificadores acotados. En particular, se asumirá que **Set** valida el axioma de elección y que su lógica es booleana.

El topos **Set** satisface los siguientes axiomas (además de los axiomas para un topos elemental):

(a) Buena puntuación (1 es generador): para cualquier par de morfismos paralelos $f, g : A \to B$ se cumple que o bien $f = g$ o bien existe algún $c : 1 \to A$ tal que $f \circ c \neq g \circ c$.

(b) No trivialidad: 1 (el objeto terminal) no es iso a $\emptyset$ (el objeto inicial).

(c) Infinito: hay un objeto de números naturales $\mathbb{N}$.

(d) Elección (los epimorfismos dividen): para cualquier epimorfismo $f : A \twoheadrightarrow B$ existe una función $\sigma : B \to A$ tal que $f \circ \sigma = 1_B$ (σ es una *sección de* f, esto es, un inverso derecho):[10]

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\sigma"] \arrow[rr, bend left, "f\circ\sigma=1_B"] & A \arrow[r, two heads, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Una característica importante de **Set** es que es un topos booleano, es decir, su lógica subyacente es clásica.[11]

A continuación presentaré las nociones de objeto terminal, objeto inicial, productos, igualadores, exponenciales, productos fibrados, clasificador de subobjetos y objeto potencia para la categoría **Set**. Presento algunos diagramas internos[12] para dichas definiciones y también algunas pruebas de que de hecho se satisfacen las definiciones categoristas.

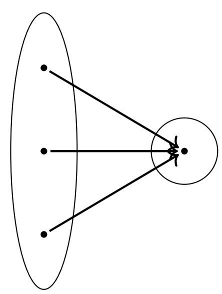
[10]Esto recupera la siguiente versión tradicional del axioma de elección: toda función suprayectiva tiene un inverso derecho.

[11]Otras maneras equivalentes de decir que un topos **E** es booleano son las siguientes: (a) cada subobjeto en **E** tiene complementos, esto es, para cualquier subobjeto $i : I \rightarrowtail A$ existe un subobjeto $j : J \rightarrowtail A$ tal que $i \cap j \equiv \emptyset$ y $i \cup j \equiv 1_A$; (b) Ω es decidible, esto es, la diagonal $\Delta_\Omega : \Omega \rightarrowtail \Omega \times \Omega$ tiene un complemento; (c) la lógica booleana es correcta para **E**. Para la prueba de que todas estas condiciones son equivalentes (y para la presentación de otras condiciones equivalentes) cf. [34, p. 162].

[12]Un diagrama interno en **Set** muestra exactamente qué elementos del dominio de una función son asociados con qué elemento de su codominio. En contraste, los diagramas externos sólo muestran cuál es el dominio y cuál el codominio de una flecha.

- Objeto terminal: en **Set**, un objeto terminal es un conjunto con un solo punto, es decir, un unitario ($1 = \{*\}$). Un objeto terminal se ve así en **Set**:

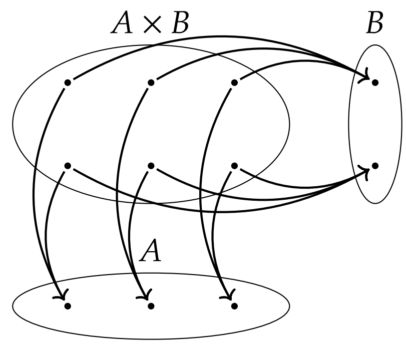
  Tomando un conjunto unitario arbitrario podemos ver que se satisface la propiedad universal del objeto terminal:



  en el sentido de que sin importar cuántos puntos tenga nuestro objeto arbitrario (el dominio), existe una única manera de asociarle a cada punto un único punto en el objeto terminal (el codominio).

- Objeto inicial: en **Set**, un objeto inicial es un conjunto sin puntos, es decir, el conjunto vacío ($\emptyset$). Para cualquier conjunto A, existe una única función $\emptyset \to A$, de modo que se satisface la definición categorista de objeto inicial.

- Productos: dados dos conjuntos A y B de **Set**, el producto $A \times B$ es el producto cartesiano "usual", esto es, $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$:



- Exponenciales: Dados dos conjuntos A y B en **Set**, el exponencial de B por A es el conjunto

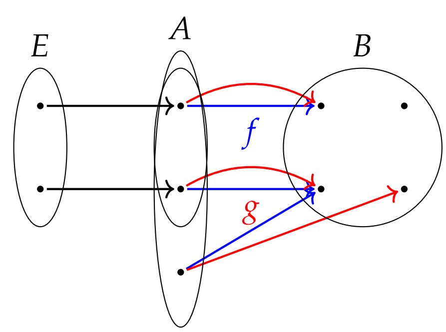
$$B^A = \{f : dom(f) = A \wedge cod(f) = B\},$$

  es decir, el conjunto de todas las funciones de A hacia B.

- Igualadores: Dadas dos funciones paralelas $f, g : A \to B$, un igualador en **Set** es el conjunto

$$E = \{x : f(x) = g(x)\} \subseteq A,$$

  esto es, el subconjunto de A para el cual coinciden f y g:

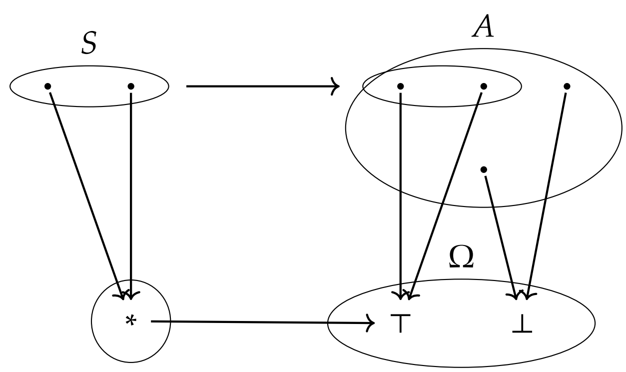


- Productos fibrados (*pullbacks*): Dadas dos funciones $f : A \to C$ y $g : B \to C$ en **Set**, un producto fibrado para f y g es el conjunto

$$A \times_C B = \{(a, b) \in A \times B : f(a) = g(b)\}.$$

  Una manera equivalente de definir un producto fibrado para f y g es diciendo que se trata de un igualador para las funciones paralelas $f \circ p_1, g \circ p_2 : A \times B \to C$, con $A \times B$ el producto cartesiano de A por B, y p_1, p_2 sus proyecciones naturales. (En la siguiente definición se muestra el diagrama para un producto fibrado.)

- Clasificador de subobjetos: En **Set**, un clasificador de subobjetos es un conjunto de dos puntos, digamos $\Omega = \{\top, \bot\}$, junto con una función $\top : 1 \to \Omega$, tales que, para cualquier conjunto A y cualquier $s : S \rightarrowtail A$ existe una única función $\chi_S : A \to \Omega$ que hace que el siguiente diagrama sea un producto fibrado para χ_S y $\top$:



3.2. Teoría de la recursión en Set

Informalmente, una función $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ es computable si existe algún algoritmo para calcular sus valores, esto es, un conjunto de reglas o instrucciones tales que, al seguirlas con valores de entrada $(x_1, ..., x_n)$, el procedimiento termina eventualmente y nos devuelve el valor de salida $f(x_1, ..., x_n)$. Hay distintas maneras de hacer precisa la noción de función computable; en este texto presento una de las más conocidas, debida a los trabajos de Herbrand, Gödel y Kleene: la de función recursiva.

La clase de las funciones recursivas es la menor clase que contiene a la función *sucesor*, las funciones *cero*, las funciones *proyección*, y que está cerrada bajo las operaciones de composición, recursión primitiva y búsqueda. A continuación explicaré con detalle cada una de estas nociones.[13]

3.2.1. Funciones primitivas recursivas

Las funciones primitivas recursivas son una subclase de las funciones recursivas. Esta subclase se compone de lo siguiente:

1. Las funciones *cero*, esto es, las funciones constantes f cuyo valor de salida es siempre 0 para cualquier valor de entrada $(x_1, ..., x_k)$:

$$f(x_1, ..., x_k) = 0$$

2. La función *sucesor*, que a cada número le asigna el que le sigue en la serie de los números naturales.

3. Las funciones *proyección*: para cualesquiera n, k tal que $1 \leq n \leq k$,

$$I_n^k(x_1, ..., x_k) = x_n.$$

Estas funciones son llamadas usualmente las funciones *iniciales*. La clase que las incluye a todas y que está cerrada bajo las siguientes dos operaciones (composición y recursión primitiva) es la clase de las funciones primitivas recursivas:

[13]Mi exposición de estos temas sigue de cerca las presentaciones de [24], particularmente el capítulo III, de [17], particularmente los capítulos 1, 2 y 4, y de [18], particularmente los capítulos 11 y 14–16.

1. Composición: dadas dos funciones f y g, si $dom(g) = cod(f)$, entonces existe una función h, denotada usualmente como $g \circ f$, tal que toma como valores de entrada los valores de entrada de f y devuelve como valores de salida ciertos valores de salida de g (aquellos que son imágenes bajo f). De manera más general, una función h de k lugares se obtiene por composición de la función g de n lugares y las funciones $f_1, ..., f_n$ de k lugares si la siguiente ecuación se sostiene para todo valor de entrada $(x_1, ..., x_k)$:

$$h(x_1, ..., x_k) = g(f_1(x_1, ..., x_k), ..., f_n(x_1, ..., x_k)).$$

2. Recursión primitiva. Tenemos dos casos:

    - Una función h de un lugar se obtiene de la función g de dos lugares mediante recursión primitiva al usar el número m si el siguiente par de ecuaciones se sostiene para todo y:

    $$h(0) = m$$

    $$h(y + 1) = g(h(y), y)$$

    - Para $k > 0$: Una función h de $k + 1$ lugares se obtiene mediante recursión primitiva de la función f de k lugares y de la función g de $k + 2$ lugares si el siguiente par de ecuaciones se sostiene para todo $x_1, ..., x_k$ y para todo y:

    $$h(x_1, ..., x_k, 0) = f(x_1, ..., x_k)$$

    $$h(x_1, ..., x_k, y + 1) = g(h(x_1, ..., x_k, y), x_1, ..., x_k, y)$$

Las operaciones de composición y de recursión primitiva cierran la clase de las funciones primitivas recursivas en el sentido de que, si denotamos esta clase mediante '$\mathscr{C}$', entonces en cualquier caso en que una función f es obtenida ya sea mediante composición o mediante recursión primitiva a partir de funciones en $\mathscr{C}$, f misma pertenece a $\mathscr{C}$.

3.2.2. Búsqueda

La clase de las funciones recursivas primitivas no comprende a todas las funciones computables, aunque sí a una buena parte de ellas. Para obtener a las restantes, añadimos a las operaciones de clausura la *búsqueda*. Decimos que una función h de k lugares es obtenida a partir de la función g de $k+1$ lugares mediante búsqueda si para cada $(x_1, ..., x_k)$, el valor $h(x_1, ..., x_k)$:

- o bien es el número y tal que $g(x_1, ..., x_k, y) = 0$ y para todo $t < y$, $g(x_1, ..., x_k, t)$ está definido y es distinto de 0, si tal y existe,
- o bien no está definido, si no existe tal y.

La notación usual es la siguiente:

$$h(x_1, ..., x_k) = \mu y[g(x_1, ..., x_k, y) = 0].$$

La idea detrás del operador-μ es buscar al menor número y que es la solución para alguna ecuación, probando sucesivamente $y = 0, 1, 2, ...$.

Recapitulando, tenemos que una función es recursiva si puede ser construida a partir de las funciones sucesor, cero y proyección, permitiendo el uso de las operaciones de composición, recursión primitiva y búsqueda.

3.2.3. Enumeración de las funciones parciales recursivas

Al inicio mencioné que la noción informal de función computable nos dice que éstas son aquellas para las que existe un algoritmo para calcular sus valores. En general, dado un conjunto de instrucciones, existen varios métodos para codificar dicho conjunto en términos de números naturales. Asumamos que tenemos uno a la mano. Entonces podemos definir, para cualquier n positivo, una función "universal" parcial computable $\Phi^{(n)}$ de $n + 1$ lugares tal que, para cualquier función parcial computable f de n

lugares, existe un número e tal que:

$$\Phi^{(n)}(e, x_1, \ldots, x_n) \simeq f(x_1, \ldots, x_n),$$

para toda tupla $(x_1, \ldots, x_n)$. (El símbolo '$\simeq$' indica que o bien ambas funciones están definidas para el input $(x_1, \ldots, x_n)$ y son iguales, o bien ninguna está definida para ese input.) La idea es que, si e es el número que codifica las instrucciones para computar f, el significado intuitivo de la función $\Phi^{(n)}$ es el siguiente:

$$\Phi^{(n)}(e, x_1, \ldots, x_n) = \text{el resultado de aplicar las instrucciones codificadas por } e \text{ al input } (x_1, \ldots, x_n)$$

Así, podemos dejar que $[\![e]\!]^{(n)}$ sea la función parcial computable definida por la ecuación

$$[\![e]\!]^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \Phi^{(n)}(e, x_1, \ldots, x_n),$$

con lo cual es posible obtener una enumeración completa de las funciones parciales computables de n lugares:

$$[\![0]\!]^{(n)}, [\![1]\!]^{(n)}, [\![2]\!]^{(n)}, \ldots$$

La enumeración de las funciones parciales recursivas nos permite definir la función parcial "diagonal":

$$d(x) = [\![x]\!](x) + 1$$

La numeración de las funciones parciales recursivas es computable (cf. [18, pp. 103–104]), por lo que la función diagonal también lo es. Entonces, $d \simeq [\![e]\!]$ para algún índice e. Esto quiere decir que

$$[\![x]\!](x) + 1 \simeq d(x) \simeq [\![e]\!](x),$$

para todo x. En especial, cuando tenemos que $x = e$, se cumple que

$$[\![e]\!](e) + 1 \simeq d(e) \simeq [\![e]\!](e)$$

Aunque esto se vea raro, ello no implica que exista un número l (en este caso $[\![e]\!](e)$) tal que $l = l + 1$; recordemos que el símbolo '$\simeq$' no es una identidad. Al contrario, lo que sí implica es que la función d no puede ser extendida a una función total recursiva. Esto último quiere decir que no existe una función total recursiva f tal que cuandoquiera que $d(x)$ está definida entonces $f(x) = d(x)$.

3.2.4. El problema de la detención en Set

En esta sección doy una presentación del problema de la detención en **Set**, la cual es esencialmente la misma que da Yanofsky en [48]. La gran diferencia es que su argumento asume que la categoría en la que se presenta el problema de la detención es un "universo computable"; en particular, asume que

(a) $\mathbb{N}$ y **2** son objetos de la categoría;

(b) todos los objetos de la categoría son conjuntos numerables isomorfos, esto es, que para cada objeto C de la categoría existe un isomorfismo $e_C : \mathbb{N} \rightarrow C$;[14]

[14]En realidad, Yanofsky parece confundir dos requisitos bastante distintos: por un lado, pide que para cada objeto C de la categoría exista algún tipo de enumeración de sus elementos, de modo que cada C sea "un conjunto de cosas computables"; por otra parte, define una enumeración como "un isomorfismo total $e_C : \mathbb{N} \rightarrow C$" [48, p.373]. A excepción del caso trivial en que la categoría tiene un solo objeto y una sola flecha salvo isomorfismo, el primer requisito permite que los conjuntos de la categoría sean conjuntos finitos, mientras que el segundo requisito lo prohibe. Dado que otro de sus requisitos es que **2** sea un objeto de la categoría (entendiendo a **2** simplemente como un conjunto con dos elementos), lo más viable es modificar su noción de enumeración, y pedir que

(c) todas las flechas $f : C \to C'$ (con C y C' objetos de la categoría) son funciones computables, o, lo que es lo mismo, que para toda $f : C \to C'$ existe un número $\bar{f} \in \mathbb{N}$ (el número que corresponde al programa que computa f).

El requisito (a) se cumple en **Set**, pero (b) y (c) no. Es fácil ver, por ejemplo, que en **Set**, $\mathbb{N} \ncong \wp(\mathbb{N})$ o que $\mathbb{N} \ncong 1$. También tenemos que no existe una función suprayectiva $\mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$, de modo que hay al menos una $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a la que no es posible asignar una $\bar{f} \in \mathbb{N}$ en **Set**. Esto es lo que he llamado anteriormente como "el argumento de la cardinalidad":

(1) Las funciones computables tienen dominio y codominio en $\mathbb{N}$, y forman un conjunto numerable.

(2) El conjunto $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ no es numerable.

$\therefore$ El conjunto de las funciones computables es un subconjunto propio de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

$\therefore$ Hay estrictamente más funciones no computables que funciones computables.

En cualquier caso, la conclusión del argumento de Yanofsky es que la función $halt$ (que defino a continuación) no puede ser total, y dicho argumento puede recuperarse para **Set**.

Definamos a $halt : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbf{2}$ de la siguiente manera:

$$halt(n, m) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in W_m \\ 0 & \text{si } n \notin W_m \end{cases}$$

para cada objeto C de la categoría exista una función parcial suprayectiva $\mathbb{N} \rightharpoonup C$. En el apartado acerca de la categoría de los ensamblajes digo algo más acerca de esta noción.

donde W_m es el conjunto recursivamente enumerable correspondiente a m. Además, definamos la función $\alpha : \mathbf{2} \to \mathbf{2}$ de la siguiente manera: $\alpha(0) = 1$ y $\alpha(1) \uparrow$. Finalmente, definamos una función $g : \mathbb{N} \to \mathbf{2}$ a partir del siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "halt"] & \mathbf{2} \arrow[d, "\alpha"] \\
\mathbb{N} \arrow[u, "\Delta_{\mathbb{N}}"] \arrow[r, "g"] & \mathbf{2}
\end{tikzcd}$$

En otras palabras, $g = \alpha \circ halt \circ \Delta_{\mathbb{N}}$. La función $halt$ no es total, pues no está definida para $(\bar{g}, \bar{g})$: por un lado,

1. supongamos que $halt(\bar{g}, \bar{g}) = 0$.

2. Entonces, $\alpha(halt(\Delta_{\mathbb{N}}(\bar{g}))) = 1$ (pues $\Delta_{\mathbb{N}}(\bar{g}) = (\bar{g}, \bar{g})$ y $\alpha(0) = 1$).

3. Entonces, $g(\bar{g}) = 1$ (pues $g = \alpha \circ halt \circ \Delta_{\mathbb{N}}$).

4. Entonces, $\bar{g} \in W_{\langle g \rangle}$.

5. Por tanto, $halt(\bar{g}, \bar{g}) = 1$ (por la definición de $halt$).

Tenemos entonces que

$$halt(\bar{g}, \bar{g}) = 0 \;\Rightarrow\; halt(\bar{g}, \bar{g}) = 1$$

El otro lado de la implicación se obtiene de manera análoga. Así, $halt$ no puede ser total en **Set**.

Hay dos cosas que me interesan destacar de lo que he dicho en este apartado:

(a) Hay dos pruebas distintas de que (TFC) no es válida en **Set**: la primera tiene que ver exclusivamente con cuestiones de cardinalidad (en el sentido de que hay *más* funciones de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en **Set** que funciones computables); la segunda tiene que ver con la lógica de **Set**, pues supone la validez de tercero excluido para la definición de $halt$ (y para la prueba por reducción al absurdo de que $halt$ no puede ser total).

(b) A menos de que uno piense que la noción de computabilidad en términos de máquinas de Turing (y equivalentes) deba estar atada ya sea a la estructura de los conjuntos (al menos como es descrita en **Set**) o a la lógica clásica, no es evidente por qué debería ser esencial a la noción de función computable el que existan funciones no computables.

En las siguientes secciones presento dos categorías (**Asm** y **Eff**) en las que tenemos todos los morfismos computables de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en **Set** (algo que más adelante denominaré como "Computabilidad plena"), y en las que a la vez todo morfismo de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es computable en el sentido de la teoría clásica de la recursión (lo que he mencionado en la introducción como la Tesis Fuerte de Church).

La lógica de dichas categorías no es clásica. Así, podría plantearse que el cambio de lógica es lo que hace que dichos resultados valgan en tales categorías. Sin embargo, como mostraré en las siguientes secciones, el orden de la explicación es el inverso: las propiedades específicas de los objetos y morfismos de **Asm** y **Eff** es lo que hace imposible que la lógica de estas categorías sea la lógica clásica.

4. Categorías computables

En el lenguaje de la teoría de categorías podemos dar una definición de "categoría computable" basándonos en la noción de computabilidad descrita en el apartado anterior:

Categoría computable$_{MT}$ Una categoría **C** es computable relativa a la noción de computabilidad MT (por máquina de Turing) si sus objetos y morfismos son computables en términos de la noción clásica de computabilidad.[15]

Esta definición está inspirada en la definición de "universo computable" de Yuri I. Manin en [32] y [33]. La definición que yo propongo es más general que la suya al menos en los siguientes tres aspectos:

(I) Manin pide que los objetos de la categoría sean conjuntos numerados (finitos o infinitos). La noción de "categoría computable" no impone este requisito. Por ejemplo, en **Asm** los objetos son ensamblajes. Aunque el concepto de ensamblaje es similar al de conjunto numerado

[15] Podemos generalizar la definición de categoría computable$_{MT}$ para abarcar otras nociones de computabilidad del siguiente modo:

Categoría computable$_X$ Una categoría **C** es computable relativa a la noción de computabilidad X si sus objetos y morfismos son computables en términos de X.

Hay al menos dos razones para considerar esta versión general. Por un lado, como mencionan John Longley y Dag Norman, "[m]ientras que para funciones ordinarias de primer orden sobre los números naturales (i.e. funciones de tipo $\mathtt{N} \to \mathtt{N}$) hay un único concepto razonable de computabilidad, este no es el caso para operaciones de tipos más complejos como $((\mathtt{N} \to \mathtt{N}) \to \mathtt{N})$" [28, p. 2]. Por otro lado, mucho trabajo en teoría de la computabilidad ha consistido en reemplazar a la estructura de los números naturales por otras estructuras matemáticas en las cuales formular las nociones básicas de la teoría (Cf. [12, p. 183]).

(en realidad es su generalización), no son idénticos: todos conjuntos numerados son ensamblajes, pero no todos los ensamblajes son conjuntos numerados.[16]

(ii) Manin pide que los morfismos de la categoría sean funciones computables. Nuevamente, esto no es impuesto por la noción de "categoría computable". Por ejemplo, en **Eff** los morfismos entre objetos son relaciones funcionales, pero no exactamente funciones.

(iii) Manin pide que uno de los objetos de la categoría sea el conjunto de los números naturales. Hay dos cosas que decir al respecto: la primera es que no es lo mismo pedir que el *conjunto* de los números naturales sea un objeto de la categoría, a pedir que la categoría tenga un objeto de números naturales (NNO). En **Mod**, **Asm** y **Eff** se cumple el segundo requisito (esto es, todas ellas tienen un NNO), pero no el primero (pues el conjunto de los números naturales no es uno de sus objetos). En segundo lugar, quisiera dejar abierta la posibilidad de definir una categoría computable sin NNO. Ésa es precisamente la propuesta de Macedo, Haeusler y Garcia en [29].

En esta sección presento dos categorías computables$_{MT}$: la categoría de los ensamblajes **Asm** y el topos efectivo **Eff**. Lo que me interesa de este tipo de categorías es que en ellas es válida la Tesis Fuerte de Church (TFC):

(TFC) Todo morfismo del tipo $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es computable.[17]

Además, en algunas, pero no en todas, las categorías computables$_{MT}$ es válido lo siguiente:

[16] En el apartado acerca de la categoría **Asm** explico con detalle la diferencia.

[17] En las categorías computables$_X$ es válida una versión generalizada de la Tesis Fuerte de Church, a saber, que todo morfismo en ellas es computable relativo a X.

(Computabilidad plena) Todo morfismo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que es computable en **Set** corresponde a un morfismo del NNO al NNO de dichas categorías.

Este resultado vale tanto en **Asm** como en **Eff**. No es válido, por ejemplo en **FinSet**.[18]

4.1. La categoría de los ensamblajes Asm

Esta sección está dividida en tres partes: en la primera presento la categoría **Asm**, cuyos objetos son los ensamblajes y cuyas flechas son las funciones realizadas entre ellos, explicando la equivalencia entre las distintas definiciones de ensamblaje que hay en la literatura; en la segunda presento algunas construcciones categoriales definibles en **Asm**, y en la tercera, tras presentar el objeto de números naturales de **Asm**, explico por qué en dicha categoría vale la (TFC) y (Computabilidad plena).

Parte de la teoría de la recursión que utilizaré en esta sección es la siguiente: contamos con una enumeración de las funciones parciales recursivas, y escribimos $n(m)$ para referirnos al valor en m de la de la n-sima función, siempre y cuando m esté en el dominio de n. Contamos también con una función recursiva de emparejamiento $(\_,\_) : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y funciones recursivas $\ell : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que, para cualesquiera

[18]Los objetos de **FinSet** son conjuntos finitos, y sus morfismos son las funciones totales entre ellos. Dados dos conjuntos finitos A y B, (la gráfica de) una función $f : A \to B$ será necesariamente un conjunto finito de pares ordenados; dado que hay varias maneras de definir un programa que decida la pertenecia a dichos conjuntos (cf. [17, p. 2]), f es computable por una máquina de Turing. Aunque (TFC) no es válida estrictamente en **FinSet** (pues esta categoría no cuenta con un objeto de números naturales), en ella sí vale su versión generalizada, a saber, que todos los morfismos de **FinSet** son computables en términos de máquinas de Turing. Sin embargo, estrictamente ningún morfismo de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en **Set** corresponde a un morfismo en **FinSet** (pues los morfismos de **Set** son funciones totales definidas sobre el conjunto de los naturales, el cual es infinito).

números naturales n y m, $\ell(n, m) = n$, $r(n, m) = m$ y $n = (\ell n, r n)$. Así, (n, m) es un número natural que codifica al par compuesto por n y m, con ℓ y r sus proyecciones.

4.1.1. Conjuntos numerados y ensamblajes

Para Church, Turing y Gödel, los objetos que fungen como valores de entrada y de salida de un procedimiento efectivo son objetos *finitos*, ya sean ristras de símbolos de cierto alfabeto (finito), o bien números naturales. Una pregunta importante en teoría de la computabilidad es *cómo representar* otras entidades matemáticas en términos de dichos objetos finitos, de manera que podamos realizar cómputos sobre ellas. Esto se logra mediante la noción de numeración.

Un *conjunto numerado* (A, ν_A) consiste de un conjunto A y una función parcial suprayectiva $\nu_A : \mathbb{N} \rightharpoonup A$, llamada *numeración*. Decimos que $|A| = \{n \in \mathbb{N} : \nu_A(n) \downarrow\}$ es el "dominio" de ν_A. Dado cualquier elemento $x \in A$, si $x = \nu_A(n)$, decimos que *n es el nombre de x*, o que *n representa a x*.

Una *función realizada* $f : (A, \nu_A) \to (B, \nu_B)$ es una función $f : A \to B$ para la que existe una función parcial recursiva $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \in |A|$, $f(\nu_A(n)) = \nu_B(p(n))$. En tal caso, decimos que *p rastrea* o *realiza f*.

Ahora bien, a partir de la función de numeración ν_A podemos definir una *relación de realizabilidad* $\Vdash_A$, correspondiente al conjunto numerado (A, ν_A), como la gráfica de ν_A, esto es, para toda $x \in A$:

$$\nu_A(n) = x \Leftrightarrow n \Vdash_A x,$$

y decimos que *n realiza* a x.

Puesto que ν_A y $\Vdash_A$ se determinan mutuamente, podemos dar la siguiente definición de conjunto numerado, la cual es equivalente a la definición anterior: un conjunto numerado $(A, \Vdash_A)$ consiste de un conjunto A

y una relación $\Vdash_A$ subconjunto de $\mathbb{N} \times A$, la cual satisface las siguientes dos propiedades:

(1) Es suprayectiva, esto es:

$$(\forall x \in A)(\exists n \in \mathbb{N})(n \Vdash_A x).$$

(2) Es monovaluada, esto es:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x, y \in A)((n \Vdash_A x \wedge n \Vdash_A y) \Rightarrow x = y)$$

Hay que notar que puede darse el caso de que $n \Vdash_A x$ y $m \Vdash_A x$, con $n \neq m$, esto es, un mismo objeto puede tener varias representaciones (o varios realizadores). En teoría de la realizabilidad, otro nombre para los conjuntos numerados es el de *conjuntos modestos*. Una noción más general que ésa es la de *ensamblaje*: un ensamblaje $(A, \Vdash_A)$ consiste de un conjunto A y una relación $\Vdash_A$ subconjunto de $\mathbb{N} \times A$, cuyo único requisito es que sea suprayectiva (y no necesariamente monovaluada). Esto quiere decir que, tal como ocurre con los conjuntos modestos, dado cualquier $a \in A$ es posible que más de un número natural sea su representante, pero, a diferencia de los conjuntos modestos, también es posible que un solo número natural represente a más de un elemento en A. De aquí en adelante, cuando escriba '$\Vdash_A$' para referirme a la relación de realizabilidad de un conjunto A, asumiré que se trata de esta noción más general.

Así, podemos reformular la definición de función realizada (para ensamblajes) en términos de la relación de realizabilidad diciendo que, dados dos ensamblajes $(A, \Vdash_A)$ y $(B, \Vdash_B)$, una función realizada $f : (A, \Vdash_A) \to (B, \Vdash_B)$ consiste de una función $f : A \to B$ para la cual existe una función parcial recursiva $p : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ tal que:

$$n \Vdash_A x \Rightarrow p(n) \Vdash_B f(x).$$

Si pensamos a las funciones recursivas en términos de los programas que las computan, podemos decir que el programa p opera sobre códigos del mismo modo que f opera sobre los elementos correspondientes. La categoría que tiene como objetos a los ensamblajes y como flechas a las funciones realizadas entre ellos suele denotarse como **Asm**.

En la literatura suelen darse al menos otras dos definiciones distintas (pero equivalentes) de lo que es un ensamblaje. Dado que ambas son más comunes que la mencionada más arriba, daré una presentación de ambas y una breve explicación de por qué son todas equivalentes.

La primera aparece, por ejemplos, en los trabajos de van Oosten [47], Stekelenburg [44], Menni [40]. De acuerdo con esta definición, un ensamblaje es un par (X, α), donde X es un conjunto y $\alpha : X \to \wp(\mathbb{N})$ es una función valuada en subconjuntos no vacíos de $\mathbb{N}$. La idea es que α le asigna a cada $x \in X$ el conjunto de sus representantes o realizadores, y para cada $x \in X$ hay al menos uno de ellos. Por un lado, esto empata con la idea de que las numeraciones sobre conjuntos son funciones (parciales) suprayectivas, de modo que a cada elemento de un conjunto numerado le corresponde al menos un número natural, y nada impide que haya elementos del conjunto numerado a los que les correspondan más de un número natural. Por otro lado, a diferencia de los conjuntos numerados o modestos, dado que no se imponen restricciones sobre α para que sea una función inyectiva o para que los subconjuntos de $\mathbb{N}$ asignados a cada $x \in X$ sean disjuntos, se permite que existan elementos de X que compartan representantes.

Dados dos ensamblajes (X, α) y (Y, β), un *morfismo total* $(X, \alpha) \to (Y, \beta)$ es una función $f : X \to Y$ para la cual existe una función parcial recursiva $p : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ tal que para cada $x \in X$ y $n \in \alpha(x)$, n está en el dominio de p y $p(n) \in \beta(f(x))$. La noción de morfismo total corresponde con la de función realizada mencionada anteriormente, por lo que podemos definir **Asm** como la categoría de los ensamblajes y los morfismos totales entre ellos.

La segunda formulación aparece en los trabajos de Carboni, Freyd, Scedrov y McLarty. De acuerdo con esta versión, un ensamblaje (A) es un par $(A, \{Y_n\}_{n\geq 0})$, donde A es un conjunto y $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ es una secuencia de subconjuntos $Y_n \subseteq A$, llamados los *caucuses*, y denotados $A|_n$. Los caucuses no son necesariamente disjuntos, es decir, dados cualesquiera dos caucuses es posible que su intersección no sea vacía. El *portador* de un ensamblaje (A) es un conjunto $|A| = \bigcup_n A|_n$ (la unión de los caucuses), el cual no necesita ser todo A. En este caso, la idea es que para cada $a \in A|_n$, n es el realizador de a; puesto que no se pide que los caucuses sean unitarios, es posible que $a \in A|_n$, $b \in A|_n$, y $a \neq b$, esto es, que a y b compartan un mismo realizador (en este caso, n). Además, dado que los caucuses no son necesariamente disjuntos, es posible que $a \in A|_n$ y $a \in A|_m$, con $n \neq m$, esto es, que un solo elemento tenga más de un realizador o representante.

Una flecha entre ensamblajes $f : (A) \to (B)$ es una función $f : |A| \to |B|$ entre los portadores para la cual existe al menos un *módulo*, esto es, una función parcial recursiva $p : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ tal que, para todo $x \in |A|$: si $x \in A|_n$ entonces $p(n)$ está definida y $f(x) \in B|_{p(n)}$. Nuevamente, esta definición empata con las de función realizada y morfismo total entre ensamblajes.

En lo que sigue, utilizaré la notación de Carboni, *et. al.* para referirme a los ensamblajes, es decir, utilizaré la notación '(A)' para referirme al ensamblaje cuyo portador es $|A|$ y cuyo n-simo caucus es $A|_n$, con las definiciones de portador y de caucus mencionadas arriba.

4.1.2. Construcciones en Asm

Las construcciones que se necesitan para mostrar que la tesis fuerte de Church vale en **Asm** son las siguientes: objeto terminal, productos binarios, exponenciales y objeto de números naturales. En esta sección presentaré las primeras tres, y en la siguiente hablaré del objeto de números naturales en **Asm**.

Para empezar, recordemos que un objeto terminal en una categoría $\mathbf{C}$ es un objeto $1_{\mathbf{C}}$ tal que, para todo objeto X de $\mathbf{C}$ hay una única flecha de X a $1_{\mathbf{C}}$. En **Asm**, podemos definir al objeto terminal $1_{\mathbf{Asm}} = (1)$ como el ensamblaje cuyo portador es un conjunto unitario arbitrario 1 $(\{*\})$, y a ese mismo conjunto para cada caucus, esto es:

$$1|_1 = 1|_2 = \ldots = 1|_n = \ldots = 1$$

Para ver que este ensamblaje es de hecho un objeto terminal en **Asm**, consideremos a un ensamblaje arbitrario (A) y a dos flechas $f : (A) \to (1)$ y $f' : (A) \to (1)$ en **Asm**. Así, existen funciones parciales recursivas e y e' tales que, para cualquier $a \in A|_n$, $e(n) \downarrow$, $e'(n) \downarrow$ y $f(a) \in 1|_{e(n)}$ y $f'(a) \in 1|_{e'(n)}$. Pero sabemos que $1|_{e(n)} = 1 = 1|_{e'(n)}$, por lo cual $f(a) = f'(a)$. Por tanto, (1) es un terminal en **Asm**.

Para el producto, sean (A) y (B) dos ensamblajes. Definimos su producto $(A)\times(B) = (A\times B)$ como el ensamblaje cuyo portador $|A\times B|$ es el producto cartesiano usual de A y B, y cuyo n-simo caucus $(A \times B)|_n$ es $A_{\ell(n)} \times B_{r(n)}$. Para entender por qué ésta definición es adecuada, sea (n, m) el realizador del par (a, b), esto es, $(a, b) \in (A \times B)|_{(n,m)}$. La idea es que (n, m) debe contener suficiente información para que sea posible recuperar los nombres de a y de b, y no más información que esa. Sea lo que sea el ensamblaje $(A \times B)$, sus proyecciones $p_1 : (A \times B) \to (A)$ y $p_2 : (A \times B) \to (B)$ deben ser realizadas por funciones parciales recursivas $q_1 : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ y $q_2 : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$. Dado $(a, b) \in (A \times B)|_{(n,m)}$, lo anterior implica que $q_1(n, m) \downarrow$ y $a \in A_{q_1(n,m)}$ y que $q_2(n, m) \downarrow$ y $b \in B_{q_2(n,m)}$. Pero ya contamos con ciertas funciones recursivas que hacen el trabajo de q_1 y q_2, a saber, las proyecciones izquierda (ℓ) y derecha (r) con respecto a la función recursiva de emparejamiento $(\_,\_) : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, de modo que tenemos que $a \in A_{\ell(n,m)} = A|_n$ y $b \in B_{r(n,m)} = B|_m$.

Finalmente, recordemos que, dada una categoría $\mathbf{C}$ que cuenta con productos binarios y objetos A y B de $\mathbf{C}$, un exponencial de B por A consiste de un objeto $E_{\mathbf{C}}$ y una flecha $ev_{A,B} : E \times A \to B$ tales que, para cualquier objeto C y flecha $g : C \times A \to B$ hay una única flecha $\bar{g} : C \to E$ que hace conmutar al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
E & E \times A \arrow[r, "ev_{A,B}"] & B \\
C \arrow[u, dotted, "\bar{g}"] & C \times A \arrow[u, "\bar{g}\times 1_A"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

La noción de exponencial es una generalización de la noción de espacio funcional, en el sentido de que un exponencial representa las flechas entre dos objetos de una categoría (en este caso las flechas de A hacia B), mientras que los espacios funcionales son colecciones de *funciones entre conjuntos*. De ahí que un exponencial de B por A suela denotarse como B^A.

En el caso de la categoría **Asm**, dados dos ensamblajes (A) y (B) de **Asm**, definimos al exponencial de (B) por (A) como el ensamblaje $(B^A) = (B)^{(A)}$ cuyo portador es el conjunto de flechas de (A) hacia (B) y cuyo n-simo caucus contiene las flechas cuyo módulo es n, esto es, $(B^A)|_n = \{f : (A) \to (B) : n : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ es una función parcial recursiva que realiza o rastrea a $f\}$. Para ver por qué esto funciona, consideremos lo siguiente. Dada la definición de exponencial, $ev : (B^A \times A) \to (B)$ es una función $ev : |B^A \times A| \to |B|$ con un módulo $u : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ tal que, para todo $(g, y) \in |B^A \times A|$,

$$(g, y) \in (B^A \times A)|_{(n,m)} \Rightarrow u(n, m) \downarrow \wedge\, ev(g, y) \in B|_{u(n,m)}.$$

Supongamos que $(g, y) \in (B^A \times A)|_{(n,m)}$. Así, $g \in B^A|_n$ y $y \in A|_m$. Entonces, $g : (A) \to (B)$ es una flecha en **Asm**, cuyo módulo es n (por la definición de caucus para un exponencial). Esto quiere decir que, para toda $k \in \mathbb{N}$ y para toda $a \in |A|$,

$$a \in A|_k \Rightarrow n(k) \downarrow \wedge\, g(a) \in B|_{n(k)}.$$

En particular, dado que $y \in A|_m$, tenemos que $n(m) \downarrow$ y $g(y) \in B|_{n(m)}$. Por un lado, esto indica que $ev : |B^A \times A| \to |B|$ debe ser la función de evaluación usual, definida por la ecuación $ev(g, y) = g(y)$. Por otro lado, necesitamos que se cumpla lo siguiente:

$$u(n, m) \simeq n(m).$$

Puesto que hemos asumido que contamos con una numeración de las funciones parciales recursivas tales que $n(m)$ es el valor en m de la n-sima función, podemos dejar que u sea la función parcial recursiva universal Φ, definida en el teorema utm informalmente como

$\Phi(x, y)$ = el resultado de aplicar las instrucciones codificadas por x a la entrada y

Ahora sólo falta mostrar que (B^A) y ev de hecho satisfacen la propiedad universal del exponencial, esto es, que dada una flecha $g : (C \times A) \to (B)$ existe una única $\bar{g} : (C) \to (B^A)$, ambas en **Asm**, tales que $g(z, x) = \bar{g}(z)(x)$, para toda $z \in |C|$ y $x \in |A|$.

Sea $g : (C \times A) \to (B)$ en **Asm**. Supongamos que $p : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ es un módulo para $g : |C \times A| \to |B|$. Así, tenemos que para todo $(z, x) \in |C \times A|$,

$$(z, x) \in (C \times A)|_{(k,m)} \Rightarrow p(k, m) \downarrow \wedge\, g(z, x) \in B|_{p(k,m)}$$

Sea $(z, x) \in (C \times A)|_{(k,m)}$. Así, tenemos que $z \in C|_k$ y $x \in A|_m$. Para mostrar que $cod(\bar{g}) = |B^A|$, necesitamos que el mapa $x \mapsto g(z, x)$ sea realizado computablemente para toda $z \in |C|$ y $x \in |A|$. Gracias al teorema utm mencionado arriba, dado $z \in C|_k$ y $x \in A|_m$, lo anterior se logra con $m \mapsto n(k, m)$. Así, se cumple que $\bar{g} : |C| \to |B^A|$ es una función. Para que $\bar{g}$ sea una flecha en **Asm**, necesitamos una función parcial recursiva $s : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ tal que, para toda $z \in |C|$,

$$z \in C|_k \Rightarrow s(k) \downarrow \wedge \bar{g}(z) \in (B^A)|_s(k).$$

En otras palabras, necesitamos una función parcial recursiva s tal que,

$$s(k)(m) \simeq p(k, m),$$

pero la existencia de dicha función s ya está garantizada por el teorema S_n^m.

4.1.3. (TFC) y (Computabilidad plena) en Asm

Un objeto de números naturales en una categoría **C** que cuenta con objeto terminal consiste de un objeto N y flechas $0 : 1 \to N$ y $s : N \to N$ de **C**, con la siguiente propiedad: para cualquier objeto A de **C** y flechas $q : 1 \to A$ y $f : A \to A$ de **C**, existe una única flecha $u : N \to A$ de **C** tal que $u \circ 0 = q$ y $u \circ s = f \circ u$:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "q"'] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, dotted, "u"] & N \arrow[d, dotted, "u"] \\
& A \arrow[r, "f"] & A
\end{tikzcd}$$

En parte, la idea es que si una categoría cuenta con objeto de números naturales, entonces podemos definir funciones recursivamente en dicha categoría. En el caso del diagrama anterior, tenemos que $u(0) = q$ (la base) y $u(s(n)) = f(u(n))$, con n en N (cláusula recursiva).

En **Asm**, el objeto números naturales es el ensamblaje $(N) = N_{\mathbf{Asm}}$, donde cada caucus $N|_n = \{n\}$, de manera que el portador de (N) es el conjunto de los naturales, $\mathbb{N}$. Así, podemos dejar que la flecha $0 : (1) \to (N)$

en **Asm** sea la función constante cero, y que $s : (N) \to (N)$ sea la función sucesor con ella misma como módulo.

Para ver que (N) es efectivamente un objeto números naturales en **Asm**, tomemos a un ensamblaje (A) cualquiera, con flechas $x : (1) \to (A)$ y $f : (A) \to (A)$ en **Asm**, cuyos módulos son p y q respectivamente. Las funciones x y f inducen una única $u : |N| \to |A|$ entre conjuntos, y los datos de recursión $\theta 0 = \phi 0$ y $\theta(n+1) = \psi\theta n$ dan una flecha recursiva θ, la cual sirve de módulo para u.

Entonces, tenemos que las flechas $f : (N) \to (N)$ en **Asm** son funciones recursivas. Este teorema puede ser expresado en términos de un bicondicional: Dada una flecha $f : (N) \to (N)$ en **Asm**, $f : |N| \to |N|$ tiene un módulo ϕ si y sólo si f es una función recursiva.

Un lado del bicondicional es trivial, pues si una función es recursiva, entonces podemos tomarla a ella misma como su módulo. Por ejemplo, sea s la función sucesor (la cual es recursiva); por la definición de módulo, s tiene un módulo si y sólo si existe una función parcial recursiva $p : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ tal que, para todo $x \in |N|$, si $x \in N|_n$, entonces $p(n) \downarrow$ y $s(x) \in N|_{p(n)}$. Veamos qué pasa si $s = p$. Sea $k \in N|_n$; dada la definición de los caucases, $k = n$. Puesto que s es una función total, $s(n) \downarrow$. Además, dado que los caucuses de (N) son unitarios, el único elemento que pertenece a $N|_{s(n)}$ es $s(n)$, y dado que $n = k$, tenemos que $s(k) \in N|_{s(n)}$. Por tanto, podemos tomar a s como su propio módulo.

Esto nos dice que en **Asm** tenemos al menos todas las funciones recursivas $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de **Set**, lo cual implica que (Computabilidad plena) es válida en **Asm**. Sin embargo, no es claro que tengamos solamente esas funciones. ¿Es posible que una función $f : |N| \to |N|$ tenga un módulo y no sea recursiva? A continuación explico por qué no.

Sea f una función de $|N| \to |N|$ que tiene un módulo ϕ. Entonces, por la definición de módulo, tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo

$x \in |N|$, si $x \in N|_n$ entonces $\phi(n)$ está definida y $f(x) \in N|_{\phi(n)}$. Sea $x \in N|_n$. Dado que $N|_n = \{n\}$, entonces $x = n$. Dado que ϕ es recursiva y dado que $\phi(n)$ está definida, tenemos un método para calcular $f(x)$. En este caso, $N|_{\phi(n)} = \{\phi(n)\}$. Por tanto, $f : |N| \to |N|$ es recursiva.

Así, tenemos que las flechas f en (N^N) son todas y únicamente las funciones recursivas. Esto es (informalmente) lo que nos dice la tesis fuerte de Church. Dicha tesis es inconsistente con la lógica clásica.

4.2. El topos efectivo Eff

Tal como ocurre con **Asm**, en la literatura existen distintas presentaciones del topos efectivo (**Eff**). En mi exposición sigo la formulación de Carboni, Freyd, Scedrov y McLarty (Cf. [6], [7] y [34, cap. 24]). Aunque dicha presentación difiere de la original introducida por Martin Hyland en [22], tiene la ventaja de que construye el topos directamente a partir de **Asm**. De manera imprecisa, los objetos de **Eff** son relaciones de equivalencia de ensamblajes, mientras que sus flechas son relaciones funcionales; de manera más precisa, existe un functor mono pleno $\mathbf{Asm} \rightarrowtail \mathbf{Eff}$ tal que cada relación de equivalencia $(R) \rightarrowtail (A \times A)$ en **Asm** tiene un cociente (A/R) en **Eff**, y cada objeto de **Eff** es el cociente de alguna relación de equivalencia en **Asm**. Dados dos objetos (A/R) y (B/R') en **Eff**, un morfismo $F : (A/R) \to (B/R')$ en **Eff** es una relación funcional definida de R a R' en **Asm**.

Siguiendo a McLarty, el plan de la exposición consistirá en construir una serie de "categorías de relaciones" a partir de **Asm**, de tal modo que **Asm** aparezca como una subcategoría de **Map**(**Asm**), la cual no es otra categoría que el topos efectivo **Eff**. **Eff** a su vez aparece como una subcategoría de **Eq**(**Asm**), todo lo cual está representado en el siguiente diagrama:[19]

[19]Este diagrama está tomado (con algunas modificaciones mínimas) de [34, p. 245]. El símbolo $\circ$ en medio de los functores en este diagrama representa el hecho de que el functor es pleno.

$$\begin{tikzcd} & & \mathbf{Eff} := \mathbf{Map}(\mathbf{Asm}) \arrow[d, tail] \\ \mathbf{Asm} \arrow[r, tail] \arrow[urr, tail, "\circ" marking] & \mathbf{Rel}(\mathbf{Asm}) \arrow[r, tail, "\circ" marking] & \mathbf{Eq}(\mathbf{Asm}) \end{tikzcd}$$

Una de las propiedades más importantes de la inclusión **Asm** $\rightarrowtail$ **Eff** es la preservación del objeto de números naturales, de modo que también en **Eff** las flechas de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$ son las funciones recursivas. Así, en **Eff** la tesis fuerte de Church también es válida.

4.2.1. Relaciones

En esta sección presentaré en términos categoristas ciertas definiciones concernientes al concepto de relación, pues **Rel(Asm)**, **Eq(Asm)** y **Map(Asm)** (el topos efectivo), son categorías cuyos objetos o morfismos son ciertas relaciones definidas sobre **Asm**.

Sea **C** una categoría con todos los límites finitos. Una *relación de A a B* es un subobjeto de $A \times B$, por ejemplo, $r : R \rightarrowtail A \times B$. Para cualquier objeto T y cualesquiera $x \in_T A$ y $y \in_T B$, x está en la relación r con y sii $\langle x, y\rangle \in r$. Cuando esto ocurre, usualmente escribiré xry. [20]

Toda relación $r : R \rightarrowtail A \times B$ tiene un *converso* $r^\circ : R \rightarrowtail B \times A$ definido al componerlo con la flecha torcida, $r^\circ = tw \circ r$. Así, para $y \in_T B$ y $x \in_T A$, $\langle y, x\rangle \in r^\circ$ sii $\langle x, y\rangle \in r$.

Una relación $r : R \to A \times A$ es *reflexiva* si $\Delta_A \subseteq r$. En diagramas, el siguiente debe conmutar:

[20] Por ejemplo, la flecha diagonal de un objeto B cualquiera, $\Delta_B : B \rightarrowtail B \times B$, aparece como la relación de igualdad en B: para cada objeto T y $x \in_T B$ y $y \in_T B$, $\langle x, y\rangle \in \Delta_B$ sii $x = y$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr] \arrow[dr, tail, "\Delta_A"'] & & R \arrow[dl, tail, "r"] \\
& A \times A &
\end{tikzcd}$$

Una relación $r : R \to A \times A$ es *simétrica* si $r^\circ \subseteq r$:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr] \arrow[dr, tail, "r^\circ"'] & & R \arrow[dl, tail, "r"] \\
& A \times A &
\end{tikzcd}$$

Una relación r es *transitiva* si, para cualquier objeto T y cualesquiera $x \in_T A$, $y \in_T A$ y $z \in_T A$, si $\langle x, y \rangle \in r$ y $\langle y, z \rangle \in r$, entonces $\langle x, z \rangle \in r$.

Una relación $r : R \rightarrowtail A \times A$ es una relación de equivalencia sobre A sii es reflexiva, simétrica y transitiva.

4.2.2. Rel(Asm)

Rel(**Asm**) es la categoría cuyos objetos son los mismos que los objetos de **Asm** (es decir, ensamblajes), pero cuyas flechas son relaciones en **Asm**. Para construir **Rel**(**Asm**) a partir de **Asm**, lo primero es comprobar que **Asm** es una categoría regular, lo cual, informalmente, significa que hay algo así como un cálculo de relaciones "decente" en **Asm**.

Nuevamente, existen varias maneras equivalentes de definir lo que es una categoría regular; la que menciono a continuación no tiene ningún mérito particular. Una categoría **C** es *regular* sii cumple los siguientes tres requisitos:

1. **C** es finitamente completa (es decir, tiene todos los límites finitos).

2. Todo morfismo suryectivo (o suprayectivo) en **C** es estable.

3. Todo morfismo f en **C** tiene una imagen suryectiva.

En la sección anterior vimos que **Asm** cumple el primer requisito, pues tiene un objeto terminal, productos binarios, e igualadores (lo cual ocurre sii tiene todos los límites finitos). Para los requisitos 2 y 3, consideremos las siguientes definiciones:

- Una flecha $q : A \to Q$ es *suryectiva* si el menor subobjeto de Q a través del cual factoriza es 1_Q. Una flecha suryectiva $q : A \to Q$ es *estable* si para cada $s : Q \to Q'$ el pullback de q es suryectivo a Q'.

- Una *imagen suryectiva* para una flecha $f : A \to B$ es una factorización de imagen

$$A \xrightarrow{\quad q \quad} Q \xrightarrow{\quad i \quad} B,$$

  con q una flecha suryectiva e i un monomorfismo.

La prueba de que **Asm** satisface los requisitos 2 y 3 se encuentra en [34, p. 231].

Para mostrar que **Rel**(**Asm**) es de hecho una categoría, tenemos que mostrar que satisface los axiomas de categorías:

(a) Composición de morfismos. Dada una relación $(F) \rightarrowtail (A \times B)$ en **Asm**, decimos que A es el dominio y B el codominio de F en tanto morfismo de **Rel**(**Asm**). En ese sentido, dadas dos relaciones $(F) \rightarrowtail (A \times B)$ y $(G) \rightarrowtail (B \times C)$ en **Asm**, existe una única $(FG) \rightarrowtail (A \times C)$ (salvo equivalencia) tal que, para cualquier (T) y cualesquier elemento-(T) x de (A) y elemento-(T) z de (C), $x(FG)z$ sii hay alguna $s : (S) \to (T)$ suryectiva y alguna $y : (S) \to (B)$ en **Asm** tales que $(x \circ s)(F)y$ y $y(G)(z \circ s)$. La prueba de esto se encuentra en [34, p. 242]. En resumen, dadas $(F) \rightarrowtail (A \times B)$ y $(G) \rightarrowtail (B \times C)$ en **Asm**, existe una única $(FG) \rightarrowtail (A \times C)$ también en **Asm**, la cual aparece en **Rel**(**Asm**) como la composición de F y G.

(b) Morfismo identidad. Las diagonales $(A) \rightarrowtail (A \times A)$ en **Asm** se componen como identidades en **Rel**(**Asm**): para cualesquiera $(F) \rightarrowtail (C \times A)$ y $(G) \rightarrowtail (A \times B)$ en **Asm**, $(FA) \equiv (F)$ y $(G) \equiv (AG)$.

(c) Asociatividad. Para cualesquiera F, G, H componibles, tenemos que $F(GH) \equiv (FG)H$.

Es más o menos sencillo ver que **Asm** es una subcategoría de **Rel**(**Asm**). Para cualquier morfismo $f : (A) \to (B)$ en **Asm**, cuya gráfica es Γ_f, y para cualesquiera elementos-(T) x de (A) y y de (B), tenemos que $x\Gamma_f y$ sii $y = fx$. Así, cada $f : (A) \to (B)$ en **Asm** aparece como su gráfica $\Gamma_f \rightarrowtail A \times B$ en **Rel**(**Asm**). La composición de gráficas $\Gamma_f \Gamma_g$ en **Rel**(**Asm**) es la gráfica de la composición $g \circ f$ en **Asm**.

4.2.3. Eq(Asm)

Un objeto de **Eq**(**Asm**) es una relación de equivalencia $(R) \rightarrowtail (A \times A)$ de **Asm**. Cuando tomamos a R como un objeto de **Eq**(**Asm**), en general lo escribiré (nuevamente siguiendo a McLarty) como A/R, para sugerir que se trata del cociente de A por R. Dados dos objetos A/R y B/R' de **Eq**(**Asm**), una flecha $F : A/R \to B/R'$ es una relación F definida de R a R' en **Asm**.

Dadas dos relaciones de equivalencia $r : (R) \rightarrowtail (A \times A)$ y $r' : (R') \rightarrowtail (B \times B)$ en **Asm**, una relación $f : (F) \rightarrowtail (A \times B)$ *está definida de r a r'* (en **Asm**) sii:

$$rf \equiv f \equiv fr'.$$

Abusando de la notación, si identificamos a r, r' y f con sus dominios, tenemos que si xRy y yFz, entonces ya es el caso que xFz (y lo mismo con

R'). **Eq**(**Asm**) es una categoría:

(a) Composición: Dadas tres relaciones de equivalencia $R \rightarrowtail A \times A$, $R' \rightarrowtail B \times B$ y $R'' \rightarrowtail C \times C$, y dadas $F \rightarrowtail A \times B$ definida de R a R' y $G \rightarrowtail B \times C$ definida de R' a R'', FG es una relación definida de R a R''.

(b) Morfismo identidad: Dada cualquier $R \rightarrowtail A \times A$, ella está definida desde ella misma hacia sí misma (pues $RR \equiv R \equiv RR$). Además para cualquier $R' \rightarrowtail B \times B$ y $F \rightarrowtail A \times B$ definida de R a R', $RF \equiv F \equiv FR'$, de modo que cada relación de euivalencia se compone como la identidad.

(c) Asociatividad: Para cualesquiera F, G, H componibles, tenemos que $F(GH) \equiv (FG)H$.

Cada relación $(R) \rightarrowtail (A \times B)$ está definida de la diagonal de (A) a la diagonal de (B), pues $\Delta_{(A)}F \equiv F \equiv F\Delta_{(B)}$. Así, si identificamos a cada ensamblaje (A) con su cociente por su diagonal $(A)/\Delta_{(A)}$, vemos que **Rel**(**Asm**) es una subcategoría plena de **Eq**(**Asm**).

4.2.4. Map(Asm): el topos efectivo

Map(**Asm**) (el topos efectivo) es una subcategoría de **Eq**(**Asm**). Al igual que en **Eq**(**Asm**), un objeto de **Map**(**Asm**) es una relación de equivalencia $(R) \rightarrowtail (A \times A)$ de **Asm**; a diferencia de **Eq**(**Asm**), una flecha $F : A/R \to B/R'$ es una relación **funcional** F definida de R a R' en **Asm**.

Una relación es $R \rightarrowtail A \times B$ *funcional* si es monovaluada y está totalmente definida:

(1) R es *monovaluada* sii para cualquier T y cualesquiera $x \in_T A$, $y \in_T B$ y $y' \in_T B$, si Rxy y Rxy', entonces $y = y'$.

(2) R está *totalmente definida* sii para cualquier T y cualesquiera $x \in_T A$, existe una $y \in_T B$ tal que Rxy.

Así, una relación $R \rightarrowtail A \times B$ es funcional sii es equivalente a la gráfica de una flecha $f : A \to B$.

Una relación F definida de R a R' *es funcional de R a R'* sii

$$R \subseteq FF^\circ \text{ y } F^\circ F \subseteq R'$$

Una manera de pensar este tipo de relaciones es diciendo que se comportan como funciones parciales: para cada elemento en el dominio de F hay a lo más uno en su codominio.

Tenemos que si F es funcional de R a R', y G es funcional de R' a R'', entonces FG es funcional de R' a R''. Además, cualquier relación de equivalencia es funcional de ella misma hacia ella misma. Por tanto, la categoría está bien definida.

4.2.5. (TFC) y (Computabilidad plena) en Eff

En [22, prop. 3.2–3.3] y [34, pp. 231–232] se muestra que la inclusión **Asm** $\rightarrowtail$ **Set** preserva tanto el objeto de números naturales como los exponenciales, de manera que (TFC) y (Computabilidad plena) también son válidas en **Eff**.[21]

Aunque aquí no daré la prueba, no es tan complicado ver por qué esos resultados valen en **Eff**: cada objeto de **Asm** aparece en **Eff** identificado como su cociente por su diagonal; cada flecha de **Asm** aparece en **Eff** identificada con su gráfica. Esto vale, particularmente, para (N) (el objeto de números naturales de **Asm**) y para cada flecha $f : (N) \to (N)$ en **Asm**.

[21]De hecho, dicho functor preserva mucha más estructura: preserva todos los límites, incluidos los productos, igualadores, productos fibrados y los monomorfismos.

5. Morfismos no computables y propiedades universales

En esta sección presento un argumento para sostener que la caracterización de los morfismos computables en términos de propiedades universales no puede incluir como uno de sus componentes la existencia de morfismos no computables.

Existen distintos métodos para definir propiedades universales en teoría de categorías, por ejemplo mediante functores representables, functores adjuntos o extensiones de Kan. Todos estos métodos involucran detalles técnicos que son irrelevantes para mi argumento, así que dejaré todo a un nivel más o menos intuitivo.

A lo largo de mi texto he presentado varios tipos de objetos y flechas definidos mediante propiedades universales, entre los que se encuentran los objetos iniciales y terminales, los productos, los monomorfismos y epimorfismos, los igualadores y el objeto de números naturales. En todos ellos se exhiben tres características de las propiedades universales que son relevantes para mi argumento: (1) éstas definen un objeto o flecha de manera única, (2) son estructurales (pues la definición se da salvo isomorfismo) y (3) son "canónicas" o "transcategóricas" (como las he llamado en la introducción), es decir, aplicables a cualquier categoría bajo ciertas condiciones[22].

La teoría clásica de la recursión trata la noción de computabilidad en términos de funciones que van del conjunto de los naturales hacia sí mismo. Formulada en la teoría del topos **Set**, su definición ya es estructural. Sin embargo, ni los morfismos de una categoría arbitraria tienen que ser funciones, ni sus objetos tienen que ser conjuntos, ni su objeto de números

[22]Dos ejemplos: (a) para que haya un objeto de números naturales en una categoría es necesario que ésta cuente con un objeto terminal; (b) para que haya exponenciales en una categoría es necesario que ésta cuente con productos binarios.

naturales, si es que cuenta con uno, tiene que ser el conjunto de los números naturales. Así, una definición categorista de la noción de computabilidad clásica debería abstraer las particularidades del topos **Set**, si es que busca caracterizar esta noción en términos de propiedades universales.

Como vimos en la sección 3, un resultado de la teoría clásica de la recursión es la existencia de funciones numéricas no computables. Las funciones computables (de **Set**) satisfacen entonces el siguiente predicado:

$$I(x) := (\exists y)(y \text{ es del mismo tipo que } x \wedge y \text{ no es computable})$$[23]

Sin embargo, como vimos en la sección 4, tanto en **Asm** como en **Eff** es válida la Tesis Fuerte de Church: toda flecha de N a N es recursiva. Así, ninguna de estas flechas satisface el predicado I. Mi conclusión es que la existencia de morfismos no computables (expresado mediante I) no puede formar parte de la definición de *morfismo computable* en términos de propiedades universales.

Consideremos entonces el siguiente argumento:

1. Si la propiedad I fuera estructural, entonces I formaría parte de la propiedad universal de la noción de *morfismo computable*.

2. Si I formara parte de la propiedad universal de los morfismos computables, entonces para cualquier categoría **C** y para cualquier morfismo f de **C**, si f fuera computable entonces $I(f)$ sería el caso.

3. Hay al menos dos categorías muy bien estudiadas, **Asm** y **Eff**, tales que existen morfismos f computables en **Asm** y **Eff** pero no es el caso que $I(f)$.

[23]En otros términos,

$$I(x) := (\exists y)(dom(y) = dom(x) \wedge cod(y) = cod(x) \wedge y \text{ no es computable}).$$

4. Por tanto, I no puede formar parte de la caracterización de *morfismo computable* en términos de una propiedad universal.

Este argumento sirve para apoyar la premisa (3) del argumento general de mi tesis:

(1) La teoría de categorías es nuestra mejor teoría de las estructuras matemáticas.

(2) La mejor manera de hablar de propiedades estructurales en teoría de categorías es mediante propiedades universales.

(3) La caracterización de los morfismos computables en términos de propiedades universales no puede incluir la existencia de morfismos no computables.

∴ La existencia de morfismos no computables no es una propiedad estructural de los morfismos computables.

6. Conclusiones

En este trabajo he defendido la tesis de que la existencia de morfismos no computables no es una propiedad estructural de la noción de computabilidad clásica. En el apartado anterior he presentado una recapitulación de lo realizado a lo largo del texto, así que aprovecharé esta última sección para mencionar dos consecuencias de mi tesis y dos posibles objeciones.

La propuesta de mi tesis pretende ser neutral con respecto a la ontología de los objetos matemáticos. Aunque desde el inicio he mencionado la relevancia de caracterizarlos mediante sus propiedades estructurales, no descarto la idea de que ciertas propiedades *no* estructurales de los objetos matemáticos sean importantes ni pienso que éstas son propiedades no matemáticas. Sin embargo, si uno asume una postura estructuralista en filosofía de las matemáticas, sea ésta moderada o radical,[24] una consecuencia de mi tesis es que la existencia de morfismos no computables no es un componente *esencial* de la noción de computabilidad clásica.

Por otro lado, si lo que propongo es correcto, tenemos un caso de un tipo de objeto matemático (los morfismos computables) cuyas propiedades son independientes (al menos) de la lógica clásica. Esto va contra el dictum quineano de que un cambio de lógica significa un cambio de tema. De hecho, buena parte de la investigación en teoría de categorías apun-

[24]Una postura estructuralista moderada es una que considera que las propiedades más importantes (aunque quizá no las únicas) de los objetos matemáticos son sus propiedades estructurales. Por ejemplo, Resnik o McLarty. Una postura estructuralista radical es una que considera que las únicas propiedades estrictamente matemáticas de un objeto son sus propiedades estructurales. Por ejemplo, Tsementzis: "en cierto nivel, ser un estructuralista acerca de los objetos matemáticos es creer que las únicas propiedades que importan de aquellos objetos son aquellas que podemos llamar propiedades *estructurales*. Todo lo demás que podemos decir acerca de los objetos matemáticos es un *sinsentido* (o, de manera más caritativa, es *no matemático*)" [45, p. 3584].

ta en este sentido: si una construcción es definida mediante propiedades universales, entonces ella es independiente (al menos) de la lógica clásica. Lo relevante de mi proyecto tiene que ver con que contribuye a responder ciertas preguntas que se han realizado recientemente en la literatura acerca de los fundamentos de la computabilidad en el marco del debate acerca del pluralismo lógico. En particular, Toby Meadows y Zach Weber plantean lo siguiente:

> Actualmente hay una gran variedad de lógicas [...] algunas propuestas como rivales serios de la lógica clásica [...]; o, incluso más osadamente, como [teorías de] nociones co–iguales de consecuencia lógica. Con esta pluralidad de lógicas a la vista, se torna plausible que pudiera haber una pluralidad correspondiente de nociones de computación [...] Inicialmente, uno quisiera saber el estatus de la Tesis de Church-Turing en un contexto no clásico. [39, p. 1]

Tanto la categoría de los ensamblajes como el topos efectivo son contextos no clásicos, en el sentido de que su lógica interna es intuicionista. Sin embargo, como he intentado mostrar, su noción de computabilidad es exactamente la misma que la del topos de los conjuntos. Si la Tesis de Church-Turing es correcta, entonces su verdad es invariante en estos tres contextos (**Asm**, **Eff** y **Set**).

Hay al menos dos objeciones que pueden plantearse en contra de mi propuesta. Una de ellas es que mi tesis es irrelevante o poco interesante. Creo que puedo decir al menos dos cosas acerca de esta objeción: la primera, como mencioné antes, es que si mi tesis es cierta, entonces tenemos al menos una manera de comenzar a responder las preguntas de Meadows y Weber acerca de la noción de computabilidad en marcos no clásicos. En segundo lugar, mientras que algunos resultados sumamente importantes de teoría de la recursión pueden obtenerse de su estudio en **Set**, dicho estudio tiene limitaciones importantes.[25] Así, buscar otros contextos en los cuales examinar la noción de computabilidad, y las relaciones que hay entre estos contextos, parece una buena vía para conocer más a fondo dicha noción.[26]

La segunda objeción es que mi tesis es trivialmente verdadera, para lo cual pueden darse dos razones: en primer lugar, basta saber que existen categorías en las que vale la Tesis Fuerte de Church para que mi conclusión sea obvia. En segundo lugar, basta observar la mayoría de propiedades universales que conocemos para darnos cuenta de que en ninguna aparecen predicados similares al predicado I; en otras palabras, es obvio, por la forma de definir propiedades universales, que no habría manera de incluir el predicado I u otro similar en cualquier definición de una propiedad universal. Creo que puedo conceder ambas razones, pero puedo decir también lo siguiente: hasta donde sé, en la literatura no se han organizado los resultados que presento en mi tesis de manera que se obtenga la conclusión de mi argumento.

Hay un chiste famoso que dice lo siguiente: dos matemáticos entran a un bar y se ponen a discutir acerca de cierto teorema. El primer matemático

[25]Un ejemplo mencionado recurrentemente en la literatura es la dificultad para ofrecer modelos de polimorfismo trabajando con conjuntos y funciones clásicamente: "John Reynolds mostró cómo los aspectos de impredicatividad de [la noción de] polimorfismo eran demasiado fuertes para permitir una interpretación suya en términos de conjuntos y funciones. [Más bien] lo que era demasiado fuerte era la teoría de conjuntos adoptada: ahora es bien sabido que alguna poderosa teoría de conjuntos intuicionista hubiera permitido tal interpretación" [43, p. 350]. La categoría de los conjuntos modestos (**Mod**) también sirve para este propósito.

[26]En esto sigo a Colin McLarty cuando afirma lo siguiente: "[n]o es una pregunta significativa si todas las funciones de la línea [real] hacia sí misma son 'realmente' diferenciables, o si todas las funciones de los números naturales hacia sí mismos son recursivas. Más bien, necesitamos estudiar tanto éstas como otras idealizaciones, y las relaciones entre ellas" [34, p. 7].

dice del mismo: ‘es trivial’. El segundo pide una explicación y el primero procede a darla. Tras dos horas de exposición y preguntas y respuestas, el segundo matemático acuerda con el primero que el teorema es trivial.

Con ese espíritu, espero que mi tesis parezca trivial sólo después de los argumentos que he dado para sostenerla.

7. Referencias

[1] Awodey, S. (1996), "Structure in Mathematics and Logic: A Categorical Perspective", *Philosophia Mathematica*, vol. 4, pp. 209–237.

[2] ——— (2004), "An Answer to Hellman's Question: 'Does Category Theory Provide a Framework for Mathematical Structuralism?' ", *Philosophia Mathematica*, vol. 12, pp. 54–64.

[3] ——— (2010), *Category Theory* (Nueva York: Oxford University Press).

[4] ——— (2017), "Structuralism, Invariance and Univalence", en Elaine Landry (ed.), *Categories for the Working Philosopher* (Nueva York: Oxford University Press), pp. 58–68.

[5] Bauer, A. "Realizability as the Connection between Computable and Constructive Mathematics".

[6] Carboni, A., Freyd, P. y Scedrov, A. (1988), "A categorical approach to realizability and polymorphic types", en M. Morin, et. al. (eds.), *Proceedings of the 3rd ACM Workshop on Mathematical Foundations of Programming Language Semantics* (Berlín: Springer Verlag), pp. 23–42.

[7] Carboni, A. (1995), "Some free constructions in realizability and proof theory", *Journal of Pure and Applied Algebra*, 103, pp. 117–148.

[8] Church, A. (1936a), "An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory", *American Journal of Mathematics*, 58, pp. 345–363.

[9] ——— (1936b), "A Note on the Entscheidungsproblem", *Journal of Symbolic Logic*, 1, pp. 40–41.

[10] ——— (1941), *The Calculi of Lambda-Conversion* (Princeton: Princeton University Press).

[11] Copeland, B. (2015), “The Church-Turing Thesis”, en Edward N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = <https://plato.stanford.edu/archives/sum2015/entries/church-turing/>.

[12] Cockett, R. y Hofstra, P. (2008), “Introduction to Turing categories”, *Annals of Pure and Applied Logic*, 156 (2-3), pp. 183–209.

[13] Corry, L. (1992), “Nicolas Bourbaki and the concept of mathematical structure”, *Synthese*, 92, pp. 315–348.

[14] Davis, M. (1958), *Computability and Unsolvability* (Nueva York: McGraw-Hill).

[15] ——— (ed.) (1965), *The Undecidable* (Nueva York: Raven Press).

[16] Di Paola, R. y Heller, A. (1987), “Dominical Categories: Recursion Theory without Elements”, *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 52, no. 3, pp. 594–635.

[17] Enderton, H. B. (2011), *Computability Theory. An Introduction to Recursion Theory* (San Diego: Academic Press).

[18] Epstein, R. y Carnielli, W. (2008), *Computability. Computable Functions, Logic, and the Foundations of Mathematics* (Nuevo México: ARF).

[19] Heller, A. (1990), “An Existence Theorem for Recursion Catgories”, *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 55, no. 3, pp. 1252–1268.

[20] Hellman, G. (2003), “Does Category Theory Provide a Framework for Mathematical Structuralism?”, *Philosophia Mathematica*, vol. 11, pp. 129–157.

[21] HOFSTRA, P. (2004), "Partial Combinatory Algebras and Realizability Toposes".

[22] HYLAND, J. M. E. (1982), "The effective topos", *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, 110, pp. 165–216.

[23] KLEENE, S.C. (1952), *Introduction to Metamathematics* (Ámsterdam: North-Holland).

[24] LAMBEK, J. y SCOTT, P. J. (1994), *Introduction to higher-order categorical logic* (Cambridge: Cambridge University Press).

[25] LAWVERE, F.W. (1966), "The Category of Categories as a Foundation for Mathematics", en *Proceedings of the La Jolla Conference on Categorical Algebra*.

[26] LAWVERE, F. W. y ROSEBRUGH, R. (2003), *Sets for mathematics* (Nueva York: Cambridge University Press).

[27] LEINSTER, T. (2014), "Rethinking Set Theory", *The American Mathematical Monthly*, Vol. 121, No. 5, pp. 403–415.

[28] LONGLEY, J. y NORMAN, D. (2015), *Higher-Order Computability* (Berlín-Heidelberg: Springer-Verlag).

[29] MACEDO, H.D, HAEUSLER, E. H. y GARCIA, A. (2016), "Defining Effectiveness Using Finite Sets. A Study on Computability", *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 324, pp. 91–106.

[30] MAC LANE, S. (1996), "Structure in Mathematics", *Philosophia Mathematica*, (3), vol. 4, pp. 174–183.

[31] MAC LANE, S. y MOERDIJK, I. (1999), *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory* (Berlín-Heidelberg-Nueva York: Springer Verlag).

[32] Manin, Y. I. (1979), "Expanding constructive universes", *Algorithms in Mathematics and Computer Science*, pp. 255–260.

[33] ——— (2000), "Classical computing, quantum computing, and Shor's factoring algorithm", *Astérisque*, no. 266, pp. 375–404.

[34] McLarty, C. (1992), *Elementary categories, elementary toposes* (Oxford: Oxford University Press).

[35] ——— (1993), "Numbers can be just what they have to", *Noûs*, 27(4), pp. 487–498.

[36] ——— (2001), "Semantics for first and higher order realizability", en C. A. Anderson y M. Zelëny (eds.), *Logic, meaning and computation. Essays in Memory of Alonzo Church* (Dordrecht-Boston-Londres: Kluwer Academic Publishers), pp. 353–364.

[37] ——— (2008), "What Structuralism Achieves", en Paolo Mancosu (ed.), *The Philosophy of Mathematical Practice* (Oxford: Oxford University Press).

[38] ——— (2017), "The Roles of Set Theories in Mathematics", en Elaine Landry (ed.), *Categories for the Working Philosopher* (Nueva York: Oxford University Press), pp. 1–17.

[39] Meadows, T. y Weber, Z. (2016), "Computation in Non-Classical Foundations", *Philosophers' Imprint*, No. 13.

[40] Menni, M. (2000), *Exact completions and toposes*, Tesis de doctorado, Universidad de Edinburgo.

[41] Odifreddi, P. (1999), *Classical Recursion Theory. The Theory of Functions and Sets of Natural Numbers* (Ámsterdam: Elsevier).

[42] ROSOLINI, G. (1986), *Continuity and effectiveness in topoi*, Tesis de doctorado, Universidad de Oxford.

[43] ——— (1990), "About Modest Sets", *International Journal of Foundations of Computer Science*, 1, pp. 341–353.

[44] STEKELENBURG, W. P. (2003), "Categories of Assemblies for Realizability", arXiv:1307.0663 [math.LO]

[45] TSEMENTZIS, D. (2017), "Univalent foundations as structuralist foundations", *Synthese*, 194, pp. 3583–3617.

[46] TURING, A. M. (1936), "On computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem", *Proceedings of the London Mathematical Society*, Serie 2, 42, pp. 230–265.

[47] VAN OOSTEN, J. (2008), *Realizability: an introduction to its categorical side* (Ámsterdam: Elsevier B. V.).

[48] YANOFSKY, N. S. (2003), "A Universal Approach to Self-Referential Paradoxes, Incompleteness and Fixed Points", *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 9, no. 3, pp. 362–386.