



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**UNA GENERALIZACIÓN COMPLEJA DE LA ECUACIÓN
MODIFICADA DE KORTEGEW-DE VRIES**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**F Í S I C O
P R E S E N T A:**

AGUSTIN SANCHEZ CONTRERAS

DIRECTOR DE TESIS:

DOCTOR JORGE FUJIOKA ROJAS

CIUDAD DE MÉXICO, 2020





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno.

Sánchez
Contreras
Agustín
55 10 99 77 88
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
413100263

2. Datos del Asesor.

Dr
Fujioka
Rojas
Jorge

3. Datos del sinodal 1

Dr
Rodríguez
Zepeda
Rosalío Fernando

4. Datos del sinodal 2

Dr
Herrera
Velázquez
José Julio Emilio

5. Datos del sinodal 3

Dr
Panayotaros
Panayiotis

6. Datos del sinodal 4

Dr
Reyes
Cervantes
Juan Adrián

7. Datos del trabajo escrito.

Una generalización compleja de la ecuación modificada de Korteweg-de Vries
221 p.
2020

AGRADECIMIENTOS.

- * Con todo cariño a todos y cada uno de los miembros de mi familia que me han impulsado a buscar en mi vida un desarrollo humano pleno. Sus valores, virtudes y nobleza me guían en los senderos de mi vida.
- * Toda mi gratitud, a la UNAM la cual orgullosamente puedo llamar mi casa e institución de estudios, cuyo lema “Por mi raza hablará el espíritu” me recuerda a ejercer día a día en pro del pueblo mexicano mi formación científica universitaria.
- * A todos los amigos que conocí a lo largo de la vida cuya amistad mantiene firme mi fe en la humanidad, que estos lazos nos alienten a superar los retos y problemas del progreso humano.
- * Al equipo representativo de powerlifting de la UNAM, una vida universitaria sana se complementa con el deporte.
- * A mis sinodales, cuyas correcciones pulieron este trabajo.
- * En especial a un gran mentor, mi asesor el Doctor Jorge Fujioka Rojas, quien siempre ameno me recibió bajo su tutela en la elaboración y revisión de este trabajo, sus ideas fueron claves y enriquecieron la tesis, además su interés por la accesibilidad y difusión del conocimientos de estos temas nos motivó a procurar que este material sirva de fuente bibliográfica para futuras generaciones de estudiantes.

INDICE GENERAL

PREFACIO.....	5
INTRODUCCIÓN.....	7
1.1 Las ecuaciones diferenciales parciales no lineales.....	7
ANTECEDENTES.	14
2.1 La historia de John Scott Russell.	14
2.2 La ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) y la recurrencia de Fermi, Pasta y Ulam.	15
2.3 El método de “ <i>inverse scattering</i> ”.....	19
2.4 Generalización del método “ <i>inverse scattering</i> ”, los pares de Lax y la ecuación NLS.	24
2.5 *La ecuación NLS y las telecomunicaciones.	31
2.6 *El fenómeno no lineal y algunas generalizaciones de la ecuación NLS.	33
DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES NLS Y CMKDV Y SUS SOLUCIONES TIPO SOLITÓN BRILLANTES, OSCUROS, GRISES, EMBEBIDOS Y DOBLEMENTE EMBEBIDOS.	39
3.1 *Análisis de escalas múltiples.	39
3.2 *Escalas múltiples y la ecuación NLS.....	41
3.3 *Solitones brillantes, oscuros y grises de la ecuación NLS.....	46
3.4 *Solitones móviles.	52
3.5 *Solitones embebidos.....	55
3.6 *La familia estable de solitones embebidos y doblemente embebidos cmKdV.	63
UNA GENERALIZACIÓN DE LA ECUACIÓN CMKDV, LA GMCKDV.	69
4.1 **Introducción a la ecuación GcmKdV.	69
4.2 **Deducción de la ecuación GcmKdV a través del método de escalas múltiples.	71
4.3 **Familias de soluciones tipo solitones brillantes para la GcmKdV.....	75
4.4 **La familia tangente de soluciones tipo solitón oscuro de la ec. GcmKdV.	78
4.5 **Solitones embebidos y doblemente embebidos de la ecuación GcmKdV.....	81
PRINCIPIO DE MÍNIMA ACCIÓN.....	84
5.1 Introducción al problema central del cálculo variacional.	84
5.2 Euler-Lagrange para funciones de una variable.....	87
5.3 *Generalización de Euler-Lagrange a funciones de dos variables independientes (\mathbf{z}, \mathbf{t}) de su primera y segunda derivada.....	94
5.4 *Mínima acción aplicada a las EDP.....	97
MÉTODO VARIACIONAL DE ANDERSON (MVA).....	105
6.1 *Introducción al MVA.	105
6.2 *Estabilidad de las soluciones de la ecuación Hayata-Koshiba I.	112

6.3 Estabilidad de las soluciones de la ecuación Hayata-Koshiba II.	117
MÉTODO VARIACIONAL DE ANDERSON APLICADO A LA ECUACIÓN GCMKdV.	122
7.1 **Solución de la ec. GcmKdV a través del método variacional de Anderson.	122
7.2 **Estabilidad de las soluciones perturbadas de la ecuación GcmKdV.	139
UNA APROXIMACIÓN NUMÉRICA AL ESTUDIO DE LAS SOLUCIONES LINEALES DE LA ECUACIÓN GCMKdV.	142
8.1 **Antecedes del estudio de la parte lineal de la ecuación GcmKdV.	142
8.2 **Soluciones lineales de la ecuación GcmKdV.	144
8.3 **Evolución de un pulso cuya condición inicial toca el rango prohibido de frecuencias.	152
8.4 **Evolución de un pulso cuya condición inicial está fuera del rango de frecuencias prohibida para ondas lineales.	155
8.5 **Ondas lineales de pequeña amplitud móviles y el análisis de la radiación de las soluciones $\mathbf{u}(\mathbf{z}, t)$	161
8.6 **El término \mathbf{u}_{zz} y las soluciones lineales de la ecuación GcmKdV.	172
TEOREMA DE EMMY NOETHER.	176
9.1 La idea básica del teorema.	176
9.2 La invariancia de acción en el teorema de Noether.	179
9.3 Demostración del teorema de Emmy Noether.	183
9.3 *El teorema de Noether aplicado a la ecuación NLS.	186
9.4 **El teorema de Noether y cantidades conservadas en la ecuación GcmKdV.	192
CONCLUSIONES.	201
APÉNDICE A.	206
APÉNDICE B.	216
APÉNDICE C.	217
REFERENCIAS.	218

PREFACIO.

Entre todas las ecuaciones diferenciales parciales no lineales (EDPNL's) que tienen soluciones tipo "solitón" hay dos ecuaciones particularmente interesantes:

-La ecuación NLS(No Lineal de Schrodinger).

-La ecuación cmKdV(complex modified Korteweg-de Vries).

En este trabajo estudiaremos una generalización de la ecuación cmKdV que incorpora una segunda derivada con respecto a la variable de evolución. Como explicaremos en la introducción, el motivo principal de este trabajo es investigar 7 puntos relacionados con esta nueva ecuación (a la cual nos referimos con las siglas GcmKdV, que abrevian el nombre de "Generalized complex modified Korteweg-de Vries"). Estos 7 puntos se describirán en la introducción. Sin embargo, existe un segundo objetivo.

El segundo objetivo es desarrollar claramente en un solo texto toda la información que necesité estudiar para poder analizar la ecuación GcmKdV. Dicha información permite contestar preguntas como las siguientes:

- 1) ¿Cómo surgen los solitones?
- 2) ¿Qué es el método de *inverse scattering*?
- 3) ¿Qué son los "pares de Lax"?
- 4) ¿Cómo se obtienen las ecs. NLS y cmKdV mediante el método de escalas múltiples?
- 5) ¿Qué es un solitón embebido y su importancia?
- 6) ¿Qué es un solitón doblemente embebido?
- 7) ¿Por qué los solitones embebidos emiten radiación cuando son perturbados?

8) ¿Cómo se calcula la frecuencia de la radiación emitida al perturbar solitones embebidos móviles?

9) ¿Cómo se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange para lagrangianas que dependen de varias funciones de varias variables independientes?

10) ¿Qué es el método variacional de Anderson?

11) ¿Qué dice el Teorema de Noether?

12) ¿Cómo demostrar y aplicar el Teorema de Noether?

Para analizar a la ec. GcmKdV, y poder desarrollar los 7 puntos que mencionaremos en la introducción, fue necesario que primero pudiera contestar las 12 preguntas mencionadas arriba, por lo cual considero importante que mi tesis contenga toda esta información de antecedente. Así el presente trabajo puede ser de gran utilidad para cualquier lector (estudiante de física o de algún área afín) que le interese comenzar a estudiar el mundo de las EDPNL's con soluciones tipo solitón o alguna otra EDPNL.

De tal manera que en el índice vienen marcados con un asterisco * los apartados que funcionan como antecedente directo y con doble asterisco ** los apartados que desarrollan los resultados de esta tesis, si el lector desea solo consultar los 7 puntos de investigación (y no las 198 páginas totales de texto), puede omitir los apartados que no están marcados con asterisco cuya función está enfocada a desarrollar la información de los antecedentes con fines de aprendizaje.

CAPÍTULO 1.

INTRODUCCIÓN

1.1 Las ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

Dentro del universo de todas las ecuaciones diferenciales estudiadas en la física-matemática, las ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) *no lineales* ocupan un lugar muy importante. Durante el siglo XIX, y hasta mediados del siglo XX, la mayoría de las EDPs que estaban en el centro de la física, por ejemplo:

- la ecuación de onda,
- la ecuación de Laplace,
- la de Poisson,
- la ecuación de difusión,
- las ecuaciones de Maxwell,
- la ecuación de Schrödinger,

eran todas ecuaciones diferenciales parciales *lineales*. Sin embargo, se conocían ya algunas EDPs no lineales importantes:

- las ecuaciones es de Navier-Stokes,
- la ecuación de Boltzman,
- las ecuaciones de Einstein de la relatividad general.

Sin embargo, una serie de 4 descubrimientos, hechos entre 1965 y 1971, cambiarían el rostro de la física-matemática, atrayendo el interés hacia las EDPS *no lineales*, y abriendo nuevos campos de investigación, llenos de cosas interesantes. Esos 4 descubrimientos fueron cronológicamente:

- a) el descubrimiento de los *solitones* (ondas viajeras solitarias que casi no interactúan entre sí) de la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV), hecho por Zabusky y Kruskal en 1965,
- b) el importantísimo descubrimiento del método de *inverse scattering*, realizado por Gardner, Greene, Kruskal y Miura en 1967,
- c) la generalización del método de *inverse scattering* realizado por Peter Lax en 1968, quien introduce los famosos “pares de Lax”,
- d) la demostración, hecha por Zakharov y Shabat en 1971, de que la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS) tiene soluciones tipo “solitón”, y puede ser resuelta mediante la teoría desarrollada por Lax.

De hecho, estos 4 descubrimientos (desarrollados en el Capítulo 2) permitieron comprender que dentro del universo de todas las EDPs no lineales estudiadas por la física-matemática, existe un subconjunto de ecuaciones sumamente especiales:

las EDPs no lineales totalmente integrables con solitones.

Una vez que se tomó conciencia de la existencia de este nuevo tipo de ecuaciones, más y más investigadores comenzaron a estudiarlas. Una “desventaja”, sin embargo, es que las ecuaciones *totalmente integrables* son “escasas”. Y aquí debemos precisar qué queremos decir con “escasas”. En realidad hay un número *infinito* de EDPs no lineales *totalmente integrables* (*i.e.* resolubles por el método de Lax). Sin embargo, en comparación con la totalidad de EDPs no lineales que aparecen en física-matemática, las ecuaciones totalmente integrables son como el conjunto de los números naturales (**N**) en comparación con el conjunto de todos los reales (**R**). Aunque **N** es un conjunto infinito, es mucho menor que **R**. En la misma forma, las EDPS no lineales totalmente

integrables son muy escasas, y la probabilidad de que en un problema físico nos encontremos con una EDP no lineal nueva que sea totalmente integrable es muy (pero *muy*) pequeña. Sin embargo, algo “bueno” (*bueno* para quienes trabajan en física-matemática) es que hay muchas EDPs no lineales que, aunque no son totalmente integrables, sí permiten la propagación de ondas solitarias que avanzan a velocidad constante sin perder su forma. Estas ondas solitarias casi pueden ser consideradas como *solitones*, aunque, en rigor, un *solitón* tiene además que cumplir el requisito de ser una solución lo suficientemente estable para resistir colisiones con otras ondas similares sin ser destruido. En la práctica, sin embargo, es frecuente llamar *solitón* a cualquier onda solitaria que sea solución exacta de una EDP no lineal, y nosotros, en este trabajo, también usaremos el término *solitón* para referirnos a las ondas solitarias que satisfagan alguna EDP no lineal.

Una EDP no lineal totalmente integrable excepcionalmente importante es la llamada *ecuación no lineal (NLS) de Schrödinger*:

$$iu_z + u_{tt} + |u|^2u = 0. \quad (1.1)$$

Esta ecuación fué descubierta inicialmente por Pitaevskii en 1961 [1] al estudiar el comportamiento del helio líquido a bajísimas temperaturas (aunque en la ecuación de Pitaevskii las variables z y t aparecen colocadas al revés). Una ecuación muy similar fue posteriormente descubierta por Hasegawa y Tappert (1973) [2] al estudiar el comportamiento de pulsos de luz en fibras ópticas. Hasegawa y Tappert mostraron que era posible que pulsos luminosos se propagaran grandes distancias por fibras ópticas *sin perder su forma*, y este descubrimiento disparó la carrera entre las compañías de telecomunicaciones por lograr desarrollar un sistema de telecomunicaciones a base de

fibras ópticas (en lugar de usar cables metálicos). En 1980 Mollenauer, Stolen y Gordon [3] mostraron experimentalmente que era realmente posible enviar pulsos luminosos de 7 ps de duración a lo largo de fibras ópticas, y que esos pulsos podían avanzar grandes distancias sin distorsionarse. Ellos mostraron, además, que la ecuación que realmente describe el comportamiento de estos pulsos es la ecuación NLS. La ecuación NLS también describe la propagación de olas en el mar, y el comportamiento de condensados de Bose-Einstein. Así pues, esta ecuación aparece en múltiples contextos, lo cual parece, a primera vista, un resultado *mágico*. Hay, sin embargo, una razón muy clara para la aparición de la ec. NLS en todos estos sistemas. Como veremos en este trabajo, la explicación es que la ec. NLS puede deducirse por el método de *escalas múltiples* (Capítulo 3) al describir la propagación de ondas en un medio dispersivo no lineal y en esta deducción no se utiliza *ninguna otra información* sobre el sistema considerado, excepto que el medio es dispersivo (*i.e.* la velocidad depende de la frecuencia), y es *no lineal* (*i.e.* la velocidad depende de la amplitud de la onda). El método de escalas múltiples permite obtener una sucesión de EDPs que describen la propagación de ondas a distintas escalas espaciales y temporales, y a estas ecuaciones se les denomina *ecuaciones universales*, ya que aparecerán *en todo sistema dispersivo no lineal*. La ecuación NLS es, por lo tanto, una de las pocas ecuaciones *totalmente integrables* que es, además, *una ecuación universal*. De hecho, sólo se conocen **dos** EDPs universales que son también totalmente integrables: la primera es la ecuación NLS, y la segunda es la ecuación compleja modificada de Korteweg-de Vries (denotada con las siglas cmKdV):

$$u_z - u_{ttt} - |u|^2 u_t = 0 \quad (1.2)$$

Las ecuaciones (1.1) y (1.2) son, pues, dos ecuaciones *muy especiales* y muy importantes, ya que además de ser matemáticamente interesantes, aparecerán al describir la propagación de ondas en todo sistema dispersivo no lineal.

Las ecuaciones (1.1) y (1.2) tienen algo importante en común: *son ecuaciones de primer orden en z* (así como como la ecuación de Schrödinger es una ecuación de primer orden en el tiempo), En el caso de la ecuación de Schrödinger, en verdad la ecuación que describe la evolución de la función de onda es realmente una ecuación de primer orden en el tiempo. Por otro lado, cuando se deducen las ecuaciones (1.1) y (1.2) mediante el método de escalas múltiples, se obtienen ecuaciones diferenciales de primer orden en z porque no se utilizó el método de escalas múltiples en toda su generalidad (ver apartado 3.2). Si se usa el método de escalas múltiples en su forma más general, se pueden obtener ecuaciones con derivadas en z de órdenes superiores. De hecho, en óptica, cuando se deduce la ecuación NLS a partir de las ecuaciones de Maxwell se ve que, en principio, la ec. NLS debería contener una segunda derivada en z , de modo que deberíamos obtener una ecuación de la forma:

$$iu_z + u_{zz} + u_{tt} + |u|^2u = 0 \quad (1.3)$$

o bien de la forma:

$$iu_z + u_{zz} + u_{xx} + |u|^2u = 0 \quad (1.4)$$

Estas dos ecuaciones son matemáticamente idénticas, pero la ecuación (1.3) describe *solitones temporales*, es decir, pulsos de luz de corta duración que viajan por fibras ópticas, mientras que la ec. (1.4) describe *solitones espaciales*, es decir, rayos de luz que avanzan por un medio no lineal sin ensancharse (por difracción), ni angostarse

(debido al efecto de auto-enfocamiento descrito por el término no lineal de la ecuación NLS). Sin embargo, usualmente la segunda derivada en z que aparece en las ecs. (1.3) y (1.4) se desprecia introduciendo una aproximación, que en el caso de la ec. (1.3) es llamada *slowly varying envelope approximation* (SVEA), y en el caso de la ec. (1.4) es llamada *aproximación paraxial*. Es importante observar que aunque reciben nombres diferentes, estas dos aproximaciones son matemáticamente la misma cosa.

Recientemente se han empezado a estudiar distintas variantes de la ec. NLS que no hacen uso de la SVEA, y sí introducen la segunda derivada en z . Se ha encontrado que algunas de estas variantes conducen a relaciones de dispersión novedosas, descritas por *curvas elípticas*, lo cual es algo interesante, ya que estas curvas jugaron un papel muy importante en la demostración del último teorema de Fermat, y son la base de algunos algoritmos de criptografía sumamente ingeniosos. Por otro lado, hasta este momento no se ha estudiado ninguna variante de la ecuación cmKdV que incorpore la segunda derivada en z . Por este motivo, en el presente trabajo estudiaremos la siguiente variante de la ecuación cmKdV a la que nombramos GcmKdV (General complex modified Korteweg-de Vries):

$$iu_z + \alpha u_{zz} - i\epsilon u_{ttt} - i\gamma |u|^2 u_t = 0 \quad (1.5)$$

Entrando un poco más en detalle, lo que estudiaremos de esta ecuación serán los siguientes 7 puntos:

- P1. Investigaremos si esta ecuación tiene soluciones tipo “solitón”.
- P2. Investigaremos si es posible deducir esta ecuación mediante el método de escalas múltiples.

- P3. Investigaremos cuál es el efecto de la segunda derivada en z resolviendo mediante análisis de Fourier la parte lineal de la ecuación (1.5) y estudiando numéricamente el comportamiento de las soluciones obtenidas.
- P4. Investigaremos si es posible deducir esta ecuación de una lagrangiana.
- P5. Una vez encontrada una lagrangiana para la ecuación GcmKdV (1.5), aplicaremos el método variacional desarrollado por Anderson para saber cómo se comportarán los solitones de (1.5) cuando son perturbados.
- P6. Aplicaremos el teorema de Emmy Noether para determinar algunas leyes de conservación que cumple la ec. (1.5).
- P7. Investigaremos si distintas lagrangianas equivalentes conducen a las mismas cantidades conservadas.

Los resultados que encontraremos en este trabajo mostrarán que la ec. (1.5) es un modelo interesante que puede ser útil para describir la propagación de ondas “cortas” en sistemas dispersivos no lineales. Por ondas “cortas” entendemos ondas cuya longitud de onda es lo suficientemente pequeña para que la aproximación SVEA ya no sea válida.

La investigación realizada en este trabajo no agota los temas a investigar en torno a la ecuación (1.5). En particular, permanece abierto el reto de resolver numéricamente esta ecuación, lo cual podría ser un problema extremadamente difícil.

CAPÍTULO 2.

ANTECEDENTES.

2.1 La historia de John Scott Russell.

Hacia el año de 1834, John Scott Russell (1808-1882) un joven ingeniero escocés realizó un importante descubrimiento que será el punto de partida para el estudio de las llamadas ondas viajeras solitarias. Durante un paseo a caballo por los alrededores de Edimburgo, en la Union Canal en Hermiston, muy cerca del campus Riccarton de la Universidad Heriot-Watt, mientras se realizaban experimentos para determinar el diseño eficiente de embarcaciones para canal, el joven ingeniero observaba cómo una barcaza era remolcada en un estrecho canal por dos caballos desde tierra, la cual se detuvo repentinamente ocasionando un movimiento violento en el agua. Para su asombro esto originó una ola bien definida y de gran altura en la proa de la nave, que comenzó a deslizarse hacia delante sin perder su forma. En sus propias palabras Russell describió el fenómeno así: “formando una única ondulación de gran altura, una montaña de agua, redondeada y bien diferenciada, continuó con su trayectoria por el canal, sin variar su forma o reducir su velocidad” [4].

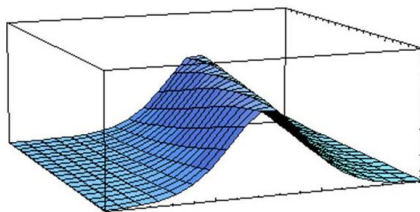


Figura 2.1. Visualización de una onda viajera en un canal de agua como la observada por Russell.

Montado en su caballo Russel se determinó a seguir la ola, quizás motivado por conocer el alcance que pudiera tener, el cual fue notable hasta que le perdió la pista en las numerosas curvas del canal. Sorprendido por aquella visión, Russell se apresuró a averiguar si no había sido víctima de alguna ilusión óptica. Por ello volvió varias veces al canal para realizar nuevas observaciones, y en cada ocasión tenía la oportunidad de contemplar atónito olas únicas a las que nombro “*great waves of traslation*” y se dedicó a perfeccionar diferentes técnicas para producirlas en su laboratorio (el jardín trasero de su casa). En 1844 en su “*Report on Waves*”, Russell publico los resultados empíricos que obtuvo, entre ellos: que la amplitud es proporcional a la velocidad de la onda y que el volumen de agua desplazado se mantendrá en el volumen de la ola. Así mismo, fue capaz de encontrar una fórmula que expresa la velocidad de la ola en función de la amplitud y la profundidad del canal. Este descubrimiento despertó un enorme interés por la comunidad científica, pues este fenómeno era totalmente desconocido hasta entonces y comenzó a ser investigado por muchos.

2.2 La ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) y la recurrencia de Fermi, Pasta y Ulam.

En 1895, 61 años después de las observaciones de Russell, los holandeses Dierik Johannes Korteweg y su estudiante Gustav de Vries publicaron un artículo en el cual buscaban explicar entre otras cosas, la existencia de la onda solitaria observada por Russell. En su artículo Korteweg y de Vries [5] presentaron la ecuación en derivadas parciales no lineal que captura la esencia de este fenómeno, la ecuación de Korteweg-de Vries o KdV:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (2.1)$$

con $u = u(x, t)$ y donde como se verá más adelante en este capítulo, el tercer y segundo término guardan el secreto de este curioso fenómeno.

Siguiendo la cronología de los eventos importantes en la historia de los solitones, el siguiente evento importante sucedió en los años de la posguerra (1955) en el famoso laboratorio de Los Alamos, en Nuevo México, donde Enrico Fermi, John Pasta y Stan Ulam [6] buscaban explicar, mediante un modelo mecánico sencillo, por qué los sólidos tienen una conductividad térmica finita. Para explicar esto, ellos usaron un modelo unidimensional de masas puntuales colocadas en serie, unidas por resortes lineales (que satisfacen la ley de Hooke). Se encuentra, que para un modelo así, es posible transmitir energía de un extremo a otro sin la necesidad de tener el equivalente a un gradiente térmico y esto sugería que el modelo conducía a la irreal conclusión de una conductividad térmica infinita. En esta cadena de resortes lineales es posible dar energía a uno solo de los modos de vibración y dicha energía permanecerá en el modo elegido sin ser repartida a algún otro modo. Para que la propagación de energía se obstaculice y se describa una ecuación de conducción con coeficiente de difusión finito, Debye, sugirió que los resortes debían considerarse ligeramente no lineales de tal manera que los modos de vibración de la aproximación lineal interactuaran entre sí obstaculizando la propagación energía. Motivados por esta idea, Fermi Pasta y Ulam decidieron estudiar numéricamente el comportamiento de una cadena de 63 resortes no lineales en la computadora Maniac I de los Alamos. Su hipótesis era que una condición inicial en la cual estuviera excitado uno sólo de los modos de vibración evolucionaría, después de un cierto tiempo τ , a un estado en el cual la energía se hubiera repartido equitativamente entre todos los modos, tal como lo sugiere el teorema de equipartición

de la energía. De esta forma el tiempo de relajación τ determinaría el valor de la conductividad térmica.

El resultado del experimento fue una sorpresa. En los primeros momentos, la energía que inicialmente correspondía a uno solo de los modos de vibración, comenzó a distribuirse entre unos pocos de los 64 modos posibles, pero después la energía volvió a concentrarse aproximadamente en un 99% en el modo inicial. Al avanzar más el tiempo volvió a repetirse lo mismo. A este extraño fenómeno nunca antes observado se le llamo la “*recurrencia de Fermi, Pasta y Ulam*”.

En 1965 Norman Zabusky y Martin Kruskal [7], analizaron el problema de la recurrencia observada por Fermi Pasta y Ulam desde un punto de vista continuo, lo cual inesperadamente los conduciría al estudio directo de las soluciones de la ecuación KdV.

Los resortes utilizados por Fermi, Pasta y Ulam ejercen una fuerza no lineal de magnitud:

$$F = kL + \alpha kL^2 = kL(1 + \alpha L), \quad (2.2)$$

donde k y αk son los coeficientes de restitución lineal y cuadrático correspondientemente, L es la distancia comprimida o estirada del resorte. Así la fuerza sobre la i -ésima masa de la cadena, según Newton será:

$$my_{i,tt} = F_{i+1} - F_{i-1},$$

$$i.e \quad my_{i,tt} = k(y_{i+1} - y_i)[1 + \alpha(y_{i+1} - y_i)] - k(y_{i-1} - y_i)[1 + \alpha(y_{i-1} - y_i)]$$

$$\Rightarrow my_{i,tt} = k(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) + k\alpha(y_{i+1}^2 - 2y_i y_{i+1} - y_{i-1}^2) \quad (2.3)$$

donde y_i es el desplazamiento de la i -ésima masa de su posición y el subíndice $y_{i,tt}$ es la segunda deriva respecto a t . Zabusky y Kruskal plantearon que si la distancia de

separación entre las masas es pequeña respecto a la longitud de las ondas que se propagan en el sistema(ver figura 2.2), se puede introducir una función continua $y_i = y(x, t)$,

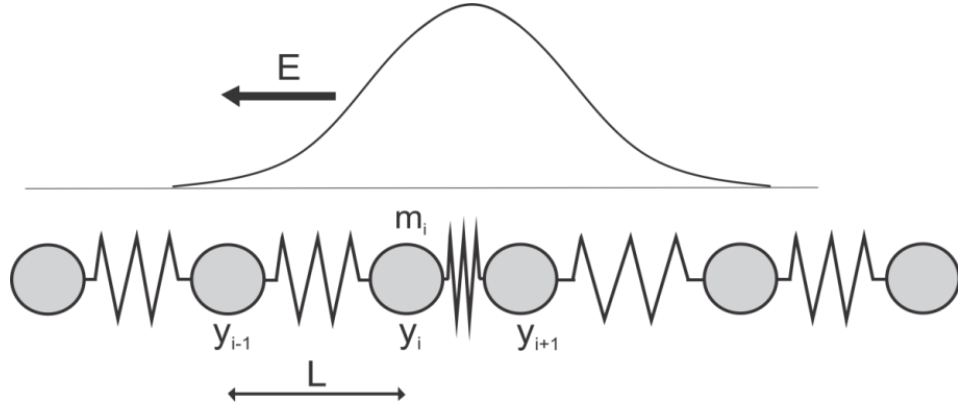


Figura 2.2. Cadena de masas unitarias unidas con resortes no lineales y visualización de la transferencia de energía E a través de una onda viajera.

tal que la variación de la distancia entre resortes contiguos se puede aproximar mediante la serie Taylor, esto es:

$$\left. \begin{aligned} y_{i+1} &= y(x+h, t) \approx y(x, t) + hy_x + \frac{1}{2}h^2y_{xx} + \frac{1}{6}h^3y_{xxx} + \frac{1}{24}h^4y_{4x} \\ y_{i-1} &= y(x-h, t) \approx y(x, t) - hy_x + \frac{1}{2}h^2y_{xx} - \frac{1}{6}h^3y_{xxx} + \frac{1}{24}h^4y_{4x} \\ y_{i,tt} &= y_{tt} \end{aligned} \right\} (2.4)$$

Al sustituir estas expresiones en la ecuación (2.3), se obtiene:

$$my_{tt} = kh^2y_{xx} + \frac{1}{12}kh^4y_{4x} + 2kah^3y_xy_{xx}. \quad (2.5)$$

Es decir, una ecuación de la forma:

$$y_{tt} - c^2y_{xx} = \epsilon c^2 \delta^2 y_{4x} + \epsilon c^2 y_x y_{xx}, \quad (2.6)$$

donde $c^2 = kh^2/m$, $\varepsilon = 2\alpha h$ y $\delta^2 = h^2/12\varepsilon$. Esta ecuación toma una forma más sencilla si se buscan soluciones de la forma:

$$y(x, t) = f(\xi, T), \quad (2.7)$$

donde $\xi = x - ct$ y $T = \varepsilon ct/2$. Sustituyendo (2.7) en (2.6) y despreciando los términos a segundo orden de ε , se obtiene:

$$f_{\xi T} + f_{\xi} f_{\xi\xi} + \delta^2 f_{\xi\xi\xi\xi} = 0. \quad (2.8)$$

Esta ecuación se convierte justamente en la ecuación KdV ($u_t + uu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0$), donde $u = f_{\xi}$ y $\{x, t\}$ representan de nuevo las variables independientes. En su famoso artículo de 1965, Zabusky y Kruskal [7] calcularon numéricamente la solución de la ecuación KdV, con $\delta = 0.0022$, correspondiente a una condición inicial de la forma:

$$u(x, 0) = \cos(\pi x). \quad (2.9)$$

La sorpresa para Zabusky y Kruskal fue la forma en que interactúan las ondas, ya que encontraron que cuando dos de estas ondas chocan se distorsionan, pero después de un instante reaparecen con sus formas y velocidades iniciales casi inalteradas, como si hubieran pasado una a través de la otra sin interactuar. Esta tendencia a conservar su identidad fue lo que llevo a Zabusky y Kruskal bautizar a estas ondas con un nombre que hace referencia al de una partícula “solitón”.

2.3 El método de “*inverse scattering*”.

El interés por los resultados obtenidos por Zabusky y Kruskal llevó en 1967, a los investigadores Gardner, Greene, Kruskal y Miura [8], de la universidad de Princeton, a

encontrar un método ingenioso para obtener la solución de la ecuación KdV con condiciones iniciales dadas.

Para desarrollar la idea de este método comenzaremos por recordar que la ecuación de Schrödinger con un potencial unidimensional $u(x)$ es:

$$i\phi_t + \phi_{xx} - u\phi = 0. \quad (2.10)$$

La cual se puede separar proponiendo una solución de la forma $\phi(x, t) = \psi(x)f(t)$, con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} i\psi f_t + \psi_{xx}f - u\psi f &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\psi_{xx}}{\psi} - u &= -i\frac{f_t}{f} = cte \equiv -E. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Esto nos conduce a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo:

$$\psi_{xx} + (E - u)\psi = 0. \quad (2.12)$$

Es bien conocido que la ecuación (2.12) tiene soluciones acotadas para cualquier $E > 0$, pero solo para un conjunto discreto (y finito) de valores propios negativos $E_n < 0$, a cada cual le corresponde una función propia, que para $x \rightarrow \infty$ su comportamiento es de la forma:

$$\psi(x) \sim c_n \exp\left[-(-E_n)^{\frac{1}{2}}x\right], \quad (2.13)$$

donde c_n esta unívocamente definida por el potencial $u(x)$ y el valor propio E_n .

En forma general en la llamada teoría de dispersión, a cada valor de $E > 0$ le corresponde una función propia, que para $x \rightarrow \pm\infty$ se comporta así:

$$\psi(x) \sim \begin{cases} \exp\left(-iE^{\frac{1}{2}}x\right) + b(E)\exp\left(iE^{\frac{1}{2}}x\right), & x \rightarrow +\infty \\ a(E)\exp\left(-iE^{\frac{1}{2}}x\right) & , x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (2.14)$$

con los coeficientes de trasmisión y reflexión $a(E)$ y $b(E)$, unívocamente definidos por el potencial $u(x)$ y el eigenvalor E .

Entonces, si se conoce el potencial $u(x)$, se pueden calcular los valores E_n y c_n y las funciones $a(E)$ y $b(E)$. Y también ocurre lo inverso, la teoría de dispersión muestra que si se conocen los valores E_n y c_n y las funciones $a(E)$ y $b(E)$, se puede determinar el potencial $u(x)$. Expresando esto esquemáticamente:

$$u(x) \Leftrightarrow \{E_n, c_n, a(E), b(E)\}.$$

Ahora bien, si el potencial depende no sólo de una sino de dos variables, $u(x, t)$ donde t no necesariamente representa a la variable de evolución temporal, se tendrá que:

$$u(x, t) \Rightarrow \{E_n(t), c_n(t), a(E, t), b(E, t)\}.$$

Si se supone que este nuevo potencial $u(x, t)$, satisface la ecuación KdV [$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$], Gardner, Greene, Kruskal, Miura encontraron que es posible hallar la dependencia “temporal” t , de las funciones y coeficiente involucrados en el problema $E_n, c_n, a(E)$ y $b(E)$. Explícitamente sus resultados fueron:

$$\begin{aligned} E_n(t) &= E_n(0), \\ c_n(t) &= c_n(0)\exp\left[4(-E_n)^{\frac{3}{2}}t\right], \\ a(E, t) &= a(E, 0), \\ b(E, t) &= b(E, 0)\exp[8iE^{3/2}t]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Entonces, dada una condición inicial conocida $u(x, 0)$, las relaciones (2.15) permiten hallar la solución completa de la ecuación KdV. Veamos esto.

Si se conoce $u(x, 0)$ y sabemos que el potencial evoluciona de acuerdo a la ecuación KdV. Se tiene que:

- 1). Con $u(x, 0)$ se puede calcular los datos de dispersión iniciales asociados a la ecuación de Schrödinger: $s(t = 0) = \{E_n(0), c_n(0), a(E, 0), b(E, 0)\}$.
- 2). Con estos valores y las ecuaciones (2.15), se puede conocer en los valores de $s(t) = \{E_n(t), c_n(t), a(E, t), b(E, t)\}$ en cualquier instante t .
- 3). Finalmente los valores $s(t)$ permiten calcular la forma del potencial $u(x, t)$ al tiempo t , es decir, resolver la ecuación KdV.

A este método se le denominó “*transformada de dispersión inversa*” (IST: “*inverse scattering transform*”). Esta novedosa forma de resolver la ecuación KdV causó gran interés, ya que hasta ese momento solo en contados casos se había encontrado la forma de resolver el problema de condiciones iniciales para una EDP no lineal. Además este método reveló la existencia de una importante relación entre la ecuación de Schrödinger y la KdV, lo cual fue un resultado totalmente inesperado.

La forma en que a Gardner, Greene, Kruskal y Miura se les ocurrió el método de “*inverse scattering*” fue conocido hasta un año después, en 1968, cuando en el Journal of mathematical Physics se publicaron dos artículos de Miura. En los que se presentaba la secuencia de ideas que permitió descubrir la relación existente entre las ecuaciones KdV y la de Schrödinger.

Miura encontró una transformación que transforma la ecuación modificada de Korteweg-de Vries (mKdV):

$$v_t - 6v^2v_x + v_{xxx} = 0, \quad (2.16)$$

en la ya conocida ecuación KdV. Si $v(x, t)$ satisface la ecuación (mKdV), entonces la función

$$u(x, t) = v_t + 6v^2, \quad (2.17)$$

satisface la ecuación KdV [$u_t + 6u_xu - u_{xxx} = 0$]. La función (2.17) es conocida como la “transformación de Miura” de la cual es trivial obtener $u(x, t)$ si se conoce $v(x, t)$. Lo inverso resulta en cambio diferente. Para hallar $v(x, t)$ solución de la mKdV en función de $u(x, t)$, es necesario resolver la ecuación (2.17), que resulta ser un caso particular de la famosa ecuación de Riccati:

$$v_x + Q(x)v + R(x)v^2 = P(x). \quad (2.18)$$

Esta ecuación, se puede linealizar mediante el siguiente cambio de variable:

$$v = \frac{1}{R} \frac{\psi_x}{\psi}, \quad (2.19)$$

sustituyendo en (2.18):

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\psi\psi_{xx} - \psi_x^2}{\psi^2} \right) + Q \frac{1}{R} \frac{\psi_x}{\psi} + R \left(\frac{1}{R} \frac{\psi_x}{\psi} \right)^2 = u$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\psi\psi_{xx} - \psi_x^2}{\psi} \right) + Q\psi_x + \frac{1}{\psi} \psi_x^2 = Ru\psi$$

$$\psi_{xx} + Q\psi_x = Ru\psi, \text{ para } R=1 \text{ y } Q=0:$$

$$\psi_{xx} - u\psi = 0. \quad (2.20)$$

Finalmente, Miura y sus colegas observaron que como la ecuación KdV es invariante ante transformaciones galileanas de la forma:

$$(x, t, u) \rightarrow (x - 6\lambda t, t, u - \lambda), \quad (2.21)$$

era razonable reemplazar $(u = u(x, t))$ por $(u - \lambda)$, lo cual transforma la ecuación (2.20) en la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo:

$$\psi_{xx} + (\lambda - u) \psi = 0. \quad (2.22)$$

Así fue, cómo Miura y sus compañeros encontraron que existía una relación entre las soluciones $u(x, t)$ de la ecuación KdV y la ecuación de Schrödinger con potencial $u(x, t)$, lo cual concluyó en el desarrollo del ya mencionado método “*inverse scattering transform*”.

2.4 Generalización del método “*inverse scattering*”, los pares de Lax y la ecuación NLS.

En 1968, Peter Lax [9], del Instituto Courant de la Universidad de Nueva York, descubrió que el factor esencial de la relación entre la ecuación de Schrödinger y la KdV que hace posible resolver el problema de condiciones iniciales para esta última, es que estas dos ecuaciones pueden escribirse, de la siguiente manera:

$$L\psi = E\psi, \quad (2.23)$$

$$(L_t + [L, A])u = 0, \quad (2.24)$$

donde E es el valor propio de la función propia de Schrödinger y L y A son dos operadores diferenciales lineales que involucran únicamente derivadas respecto a x ; y donde, $[L, A] = LA - AL$ es el conmutador de los operadores, los cuales están definidos de la siguiente manera:

$$L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, t)I, \quad (2.25)$$

$$A = -4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3u\frac{\partial}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial x}I. \quad (2.26)$$

Notemos que así como al potencial $u(x, t)$, que aparece en la ecuación de Schrödinger, se ha visualizado como una familia uniparamétrica de potenciales etiquetados por el parámetro t , así también debemos visualizar a L como a una familia uniparamétrica de operadores cuyo parámetro es t . De tal modo que L_t expresa la derivada de L respecto a la dependencia explícita de t , esto es:

$$\begin{aligned} L_t &= u_t \\ \Rightarrow L_t u &= u_t u. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Para comprender el uso de los operadores L y A , dado que se componen por términos tanto diferenciales, funciones y escalares; y por tratarse de operadores compuestos, cada término debe actuar también como un operador. Por definición las diferenciales ya son operadores, entonces, es necesario asociar un operador identidad I para los términos no diferenciales, esto es:

$$L = \partial^2 - uI, \quad (2.28)$$

$$A = -4\partial^3 + 6u\partial + 3u_x I, \quad (2.29)$$

donde $\partial = \partial/\partial x$ (este abuso de notación facilita los cálculos siguientes) y $u_x = \partial u/\partial x$.

Teniendo en cuenta que los operadores actúan solo sobre los términos de su derecha, hay que tener cuidado para asegurarse de que todos los términos actúan correctamente.

Así obtenemos resultados diferentes para LA y AL :

$$LA = (\partial^2 - uI)(-4\partial^3 + 6u\partial + 3u_x I)$$

$$\begin{aligned}
&= -4\partial^2(\partial^3) + 6\partial^2(u\partial) + 3\partial^2(u_x I) + 4u(\partial^3) - 6u(u\partial) - 3u(u_x I) \\
&= -4\partial^5 + 6\partial\partial(u\partial) + 3\partial\partial(u_x I) + 4u\partial^3 - 6u^2\partial - 3uu_x I, \quad (2.30)
\end{aligned}$$

desarrollando consecutivamente el operador ∂ en el segundo y tercer término, y considerando que $u\partial$ y $u_x I$ son operadores compuestos se utilizará la regla de la cadena:

$$6\partial\partial(u\partial) = 6\partial(u_x\partial + u\partial^2) = 6(u_{xx}\partial + 2u_x\partial^2 + u\partial^3), \quad (2.31)$$

$$3\partial\partial(u_x I) = 3\partial(u_{xx}I + u_x\partial) = 3(u_{xxx}I + 2u_{xx}\partial + u_x\partial^2). \quad (2.32)$$

Sustituyendo ambos resultados en la ecuación (2.30), se tiene que:

$$LA = -4\partial^5 + 10u\partial^3 + 15u_x\partial^2 + (12u_{xx} - 6u^2)\partial + 3(u_{xxx} - uu_x)I. \quad (2.33)$$

Luego para AL :

$$\begin{aligned}
AL &= (-4\partial^3 + 6u\partial + 3u_x I)(\partial^2 - uI) \\
&= (-4\partial^5 + 4\partial^3(uI) + 6u\partial^3 - 6u\partial(uI) + 3u_x\partial^2 - 3u_x uI), \quad (2.34)
\end{aligned}$$

el segundo y cuarto termino serán:

$$\begin{aligned}
4\partial^3(uI) &= 4\partial^2\partial(uI) = 4\partial\partial(u_x I + u\partial) = 4\partial(u_{xx}I + 2u_x\partial + u\partial^2) \\
&= 4(u_{xxx}I + 3u_{xx}\partial + 3u_x\partial^2 + u\partial^3), \quad (2.35)
\end{aligned}$$

$$6u\partial(uI) = 6u(u_x I + u\partial) = 6(uu_x I + u^2\partial). \quad (2.36)$$

Sustituyendo (2.35) y (2.36) en (2.34):

$$AL = -4\partial^5 + 10u\partial^3 + 15u_x\partial^2 + (12u_{xx} - 6u^2)\partial + (4u_{xxx} - 9u_x u)I, \quad (2.37)$$

así es fácil ver que el conmutador aplicado a u será:

$$[L, A]u = LA(u) - AL(u) = -u_{xxx}u + 6u_x u^2. \quad (2.38)$$

Entonces usando (2.27) y (2.38), se llega a:

$$(L_t + [L, A])u = uu_t - u_{xxx}u + 6u_xu^2 = 0. \quad (2.39)$$

Esta última expresión corresponde justamente a la ecuación KdV.

El par de Lax está asociado con la propiedad de tener una jerarquía infinita de leyes de conservación local, precursora de la integrabilidad completa. Esta propiedad excepcional la poseen las ecuaciones en derivadas parciales integrables por el método de la transformada inversa de Scattering como la ecuación KdV. Por una “Ley de conservación local” queremos decir que existe una función de las variables dependientes y sus derivadas que, cuando se diferencian en el tiempo, resulta en una derivada espacial total de otra función de las variables dependientes y sus derivadas.

La publicación de Lax, unió el destino de la ecuación KdV con la NLS. En 1968 nadie sospechaba que existía una relación importante entre estas dos ecuaciones. Sin embargo, en 1971 Zakharov y Shabat [10] lograron demostrar que la ecuación no lineal de Schrödinger NLS, al igual que la KdV, podía resolverse por el método de dispersión inversa, quedando así unidas desde entonces indisolublemente.

Veamos a continuación, a muy grandes rasgos, cómo es la resolución de la NLS mediante el método “*Inverse scattering*”.

La ecuación no lineal de Schrödinger NLS:

$$iu_z + u_{tt} + \gamma|u|^2u = 0, \quad (2.40)$$

puede escribirse a través del par de Lax como:

$$(L_z + [L, A]) \begin{bmatrix} u \\ u^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

donde los operadores diferenciales lineales L y A tienen la forma matricial:

$$L = i \begin{bmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} + \begin{bmatrix} 0 & u^* \\ u & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

$$A = -p \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \begin{bmatrix} \frac{uu^*}{1+p} & iu_t^* \\ -iu_t & -\frac{uu^*}{(1-p)} \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

p está definido por la ecuación $\gamma = 2/(1-p^2)$. Para demostrar que la ecuación (2.41) coincide con la ecuación NLS, hay que desarrollar algo de álgebra:

De manera análoga que en el caso de la KdV:

$$L_z = \begin{bmatrix} 0 & u_z^* \\ u_z & 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow L_z \begin{bmatrix} u \\ u^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^* u_z^* \\ uu_z \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Luego los términos del conmutador $[L, A]u = LA(u) - AL(u)$ serán:

$$LA = -ip \begin{bmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ttt} \\ u_{ttt}^* \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \frac{u^2 u^*}{1+p} + iu^* u_t^* \\ -iuu_t - \frac{u(u^*)^2}{(1-p)} \end{bmatrix} \\ -p \begin{bmatrix} 0 & u^* \\ u & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{tt} \\ u_{tt}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & u^* \\ u & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{u^2 u^*}{1+p} + iu^* u_t^* \\ -iuu_t - \frac{u(u^*)^2}{(1-p)} \end{bmatrix} \\ = -ip \begin{bmatrix} (1+p)u_{ttt} \\ (1-p)u_{ttt}^* \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} (2uu_t u^* + u^2 u_t^*) + i(u_t^* u_t^* + u^* u_{tt}^*)(1+p) \\ -i(1-p)(u_t^2 + uu_{tt}) - u_t(u^*)^2 - 2uu^* u_t^* \end{bmatrix} \\ -p \begin{bmatrix} u^* u_{tt}^* \\ uu_{tt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -iu^* uu_t - \frac{u(u^*)^3}{(1-p)} \\ \frac{u^3 u^*}{1+p} + iu^* uu_t^* \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

para:

$$\begin{aligned}
AL &= -ip \begin{bmatrix} (1+p)u_{ttt} \\ (1-p)u_{ttt}^* \end{bmatrix} - p \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} (u^*)^2 \\ u^2 \end{bmatrix} \\
&+ i \begin{bmatrix} uu^* & iu_t^*(1-p) \\ -iu_t(1+p) & -uu^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t \\ u_t^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} iuu_t^* & u(u^*)^2/(1+p) \\ -u^2u^*/(1-p) & -iu_tu^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u^* \end{bmatrix} \\
&= -ip \begin{bmatrix} (1+p)u_{ttt} \\ (1-p)u_{ttt}^* \end{bmatrix} - 2p \begin{bmatrix} (u_t^*)^2 + u^*u_{tt}^* \\ u_t^2 + uu_{tt} \end{bmatrix} \\
&+ i \begin{bmatrix} uu^*u_t + i(1-p)(u_t^*)^2 \\ -i(1+p)u_t^2 - uu^*u_t^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} iu^2u_t^* + \frac{u(u^*)^3}{1+p} \\ -\frac{u^3u^*}{(1-p)} + -iu_t(u^*)^2 \end{bmatrix}. \tag{2.46}
\end{aligned}$$

Utilizando estas dos últimas expresiones, podemos calcular el valor de conmutador al ser aplicado:

$$\begin{aligned}
[L, A] \begin{bmatrix} u \\ u^* \end{bmatrix} &= +i \begin{bmatrix} +i(u^*u_{tt}^*) + \gamma u(u^*)^3 \\ -i(uu_{tt}) - \gamma u^3u^* \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \frac{-2u(u^*)^3}{(1-p^2)} \\ \frac{-2u^3u^*}{(1-p^2)} \end{bmatrix}. \tag{2.47}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
(L_z + [L, A]) \begin{bmatrix} u \\ u^* \end{bmatrix} &= \\
\begin{bmatrix} u^*u_z^* + i(u^*u_{tt}^*) + i\gamma u(u^*)^3 \\ uu_z - i(uu_{tt}) - i\gamma u^3u^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.48}
\end{aligned}$$

Esto demuestra que la ecuación NLS se puede formular a través de pares de Lax y que se trata de una ecuación totalmente integrable.

Luego, el método de Gradner Green Kruskal y Miura para resolver la ecuación KdV sugiere resolver la ecuación de valores propios ($L\psi = \lambda\psi$), donde

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}, \quad (2.49)$$

Zakharov y Shabat introdujeron el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= (1-p)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-i \frac{\lambda}{1-p^2} t\right) v_1 \\ \psi_2 &= (1-p)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-i \frac{\lambda}{1-p^2} t\right) v_2 \\ q(z, t) &= \frac{i u(z, t)}{(1-p^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \zeta &= \frac{\lambda p}{(1-p^2)} \end{aligned} \quad (2.50)$$

que al ser sustituido directamente en la ecuación de valores propios ($L\psi = \lambda\psi$), se obtendrá un sistema de forma más sencilla:

$$\begin{aligned} v'_1 + i\zeta v_1 &= q v_2 \\ v'_2 - i\zeta v_2 &= -q^* v_1 \end{aligned} \quad (2.51)$$

donde las primas indican derivadas respecto al tiempo. Este sistema y la ecuación NLS se relacionan de manera análoga a la relación entre la ecuación de Schrödinger y la KdV. Esto es, así como la KdV se pudo resolver estudiando la ecuación de valores propios y el problema de dispersión de la ecuación de Schrödinger, la NLS puede resolverse analizando el sistema de funciones y valores propios y el problema de dispersión del sistema (2.51).

Esto demuestra que la ecuación NLS es completamente integrable en el sentido de las cantidades conservadas que posee lo cual, aunado a su importancia tecnológica que

radica en la descripción de la propagación de pulsos de luz en fibras ópticas, son las características responsables de su actual fama e importancia.

2.5 La ecuación NLS y las telecomunicaciones.

Para 1971, ya se sabía que la ecuación NLS aparecía en problemas relacionados con bajas temperaturas, fluidos profundos, plasmas, e inclusive con la propagación de calor en sólidos. También se sabía que era una ecuación con propiedades matemáticas interesantes. Sin embargo para ese entonces no había penetrado en el mundo de las tecnologías comerciales y multimillonarias de la transmisión de información.

En 1973, Akira Hasegawa y Frederick Tappert [2] dos investigadores de los laboratorios Bell, mostraron teóricamente que era posible transmitir pulsos luminosos de muy corta duración (pico segundos) a lo largo de fibras ópticas, sin que dichos pulsos se distorsionaran o se traslaparan y encontraron que la propagación de estos pulsos estaba gobernada por la ecuación

$$i(u_t + \beta_1 u_z + \alpha u) + \frac{1}{2} \beta_2 u_{zz} + \gamma |u|^2 u = 0, \quad u(z, t). \quad (2.52)$$

En el caso de que la fibra óptica fuera suficientemente transparente para ciertas longitudes de onda, el tercer término de la ecuación (2.52) se puede despreciar y la expresión toma la forma de la ecuación NLS mediante un sencillo cambio de variable. Así, la ecuación NLS tomó gran interés para las telecomunicaciones, pues los resultados de Hasegawa y Tappert sugerían fuertemente que si se lograba obtener fibras suficientemente transparentes, había grandes posibilidades de desarrollar un nuevo sistema de telecomunicaciones basado en fibras ópticas.

El artículo de Hasegawa y Tappert coincidió cronológicamente con un descubrimiento crucial para las fibras ópticas. En 1963 las fibras ópticas eran demasiado opacas para ser usadas en telecomunicaciones. Notemos que, para un medio la atenuación luminosa viene dada por:

$$P(x) = P_0 e^{-\alpha x}, \quad (2.53)$$

donde P es la potencia de la luz, x es el espesor del material y α es la constante de atenuación, la cual es una medida de la transparencia u opacidad del material. Para las fibras ópticas la ecuación anterior se puede escribir como:

$$P(x) = P_0 (10)^{-\frac{\alpha_{dB} x}{10}}, \quad (2.54)$$

donde x se mide en kilómetros y las unidades de la constante α_{dB} son dB/km (decibeles por kilómetro). En la década de los sesenta la atenuación en fibras ópticas era del orden de 1000 dB/km. Esta característica hacía que la intensidad de luz disminuyera un 10% tras recorrer 10m, lo cual hacía inviable el uso de fibras ópticas en las telecomunicaciones.

Sin embargo, en 1963 Kao y Hockham [11] descubrieron teóricamente que la atenuación luminosa en las fibras ópticas era debida, principalmente, a las impurezas presentes en el vidrio con el cual se fabrican las fibras y no al vidrio en si mismo. Predijeron que eliminado las impurezas sería posible disminuir el valor de α_{dB} de 1000 dB/km a 20 dB/km aproximadamente. En 1970 tres años antes de las publicaciones de Hasegawa y Tappert, se confirmó que las predicciones de Kao y Hockham eran

correctas, al construir fibras ópticas con $\alpha_{dB} = 20db/km$ (Kapron, Keck y Maurer [12]).

En 1980, Mollenauer, Stolen y Gordon reportaron en el Physical Review Letters que ya eran capaces de transmitir pulsos luminosos de 7 picosegundos de duración y $1.55 \mu m$ de longitud de onda a través de fibras ópticas. Así, quedó todo listo para que las fibras ópticas desplazaran a los cables metálicos en las telecomunicaciones modernas. Así también, en el trabajo de Mollenauer, Stolen y Gordon se hacía notar además, que la ecuación que describe adecuadamente la propagación de pulsos luminosos de unos cuantos picosegundos de duración no es la ecuación (2.52) presentada inicialmente por Hasegawa y Tappert, sino la ecuación NLS:

$$i(u_z) + \frac{1}{2}u_{tt} + \gamma|u|^2u = 0, \quad u(z, t) \quad (2.55)$$

donde, la variable de evolución no es el tiempo t , sino la coordenada z que representa la distancia que recorre el pulso a través de la fibra óptica. Así es como se dio uno de los encuentros más interesantes de la ciencia del siglo XX. “Uno de los pocos casos donde un problema físico interesante, unas matemáticas novedosas y una tecnología también nueva se conjugan y fructifican rápidamente” Fuijoka [13].

2.6 El fenómeno no lineal y algunas generalizaciones de la ecuación NLS.

A continuación analizaremos un poco el curioso fenómeno que da lugar a la propagación de ondas solitarias en medios no lineales y presentaremos algunas de las ecuaciones generalizadas que las describen. Veamos qué sucede si analizamos por separado las soluciones de las distintas partes de una ecuación que describa propagación

de pulsos no lineales, por ejemplo, la ecuación KdV. Si despreciamos el término no lineal, la ecuación linealizada KdV tiene la forma:

$$u_t + u_{xxx} = 0, \quad (2.56)$$

que corresponde a una ecuación de tercer orden. Esta ecuación se puede resolver fácilmente mediante el método de separación de variables, suponiendo que $u(x, t) = X(x)T(t)$ y sustituyendo en la ecuación (2.56)

$$\begin{aligned} XT' + X'''T &= 0 \\ \Rightarrow \frac{T'}{T} &= -\frac{X'''}{X} = i\omega, \end{aligned} \quad (2.57)$$

donde ω es una constante y se ha introducido el valor imaginario i con la intención de obtener una solución oscilatoria. El problema se traduce en resolver las ecuaciones del sistema que se obtiene de (2.57), usaremos su polinomio característico cuyas raíces son triviales:

$$T' = i\omega T \Rightarrow \lambda = i\omega, \quad (2.58)$$

$$X''' = (-i\omega)X \Rightarrow \gamma = (-i\omega)^{1/3}, \quad (2.59)$$

Así, las soluciones serán $T(t) = A_1 e^{i\omega t}$ y $X(x) = A_2 e^{ikx}$, donde hemos definido a $k = \omega^{1/3}$. Entonces la solución completa de la ecuación linealizada KdV será:

$$u(x, t) = A \exp(ikx + i\omega t), \quad (2.60)$$

la cual, tiene la forma de una onda lineal plana, donde k es el número de onda, ω la frecuencia y A la amplitud máxima de la onda. La relación que se encontró entre el

número de onda y la frecuencia ($\omega = k^3$) es conocida como la relación de dispersión, y nos permite calcular las velocidades asociadas a la onda (2.60):

$$v_p = \frac{\omega}{k} = k^2 \text{ y } v_g = \frac{d\omega}{dk} = 3k^2, \quad (2.61)$$

que corresponden a la velocidad de fase y de grupo respectivamente. La primera se refiere a la velocidad con la que se mueven los diferentes componentes de la fase para cada frecuencia, y la de grupo a la velocidad de la envolvente. En este caso se puede apreciar cómo ambas velocidades difieren, lo que ocasionará que los diferentes componentes de la superposición que producen la onda se comiencen a separar y la onda vaya perdiendo su forma, a este fenómeno se le conoce como *dispersión* y está asociado al término u_{xxx} de la ecuación KdV.

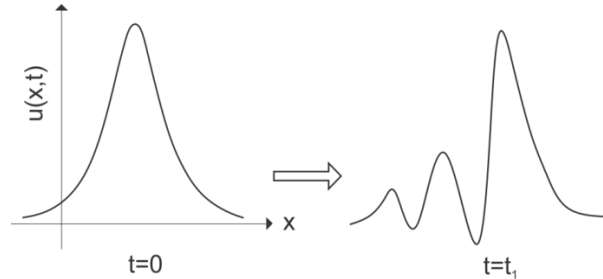


Figura 2.1 Fenómeno de dispersión presente en la forma lineal de la ecuación KdV.

Por otra parte, si se desprecia el término dispersivo de la ecuación KdV se obtiene:

$$u_t + uu_x = 0. \quad (2.62)$$

En este caso, se está considerando la parte no lineal, la cual se puede resolver mediante el uso del método de las curvas características. Esto se hará considerando la siguiente parametrización:

$$x = x(s) \text{ y } t = t(s), \quad (2.63)$$

de tal forma que $u(s) = (x(s), t(s))$ sea constante a través de estas curvas, es decir

$$\frac{du}{ds} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{du}{ds} = u_x \frac{dx}{ds} + u_t \frac{dt}{ds} \quad (\text{usando (2.62)})$$

$$\frac{du}{ds} = u_x \frac{dx}{ds} - uu_x \frac{dt}{ds} = u_x \frac{d}{ds}(x - ut) = 0. \quad (2.64)$$

Entonces, las curvas características son las rectas de la forma $(x - ut) = cte$. Así, la solución explícita puede escribirse de la siguiente manera:

$$u = f(x - ut), \quad u = u(x, t) \quad (2.65)$$

donde la función arbitraria f tiene la forma de una onda viajera, salvo que la velocidad es igual al valor de la función misma. Esto sugiere que la onda avanzará más rápida donde sea más alta, por lo cual el pico del pulso comenzará a moverse hacia delante del pulso deformándolo. A este fenómeno se le denomina en inglés “*self-steepening*” (ver figura 2.2).

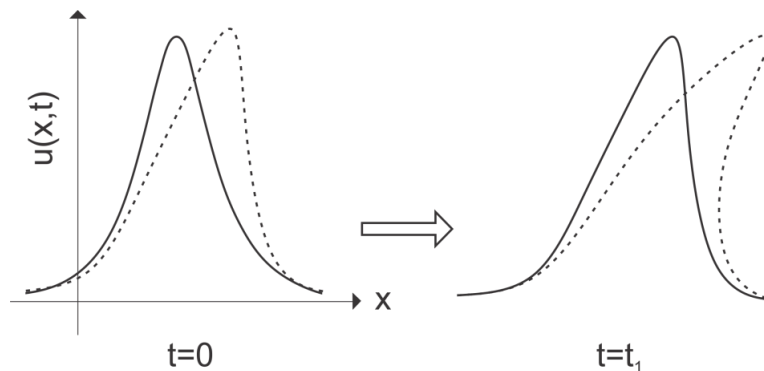


Figura 2.2 Comportamiento cualitativo de una condición inicial que satisface la

$$\text{ecuación no lineal } u_t + uu_x = 0.$$

Estos resultados, siguieren la interesante conclusión de que debe existir un equilibrio o compensación entre el término dispersivo u_{xxx} y el no lineal uu_x de la ecuación KdV, lo que ocasiona que finalmente puedan obtenerse ondas viajeras que se propagan sin perder su forma inicial. En el ámbito del estudio de los pulsos ópticos, algunas ecuaciones generalizadas de la NLS, donde se aprecian términos dispersivos y no lineales como en la ec. KdV, y que se aplican al estudio de la propagación de pulsos a través de fibras ópticas son:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - i \varepsilon_3 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + |u|^2 u = 0, \quad (2.66)$$

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon_4 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + |u|^2 u = 0, \quad (\varepsilon_4 > 0) \quad (2.67)$$

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - i \varepsilon_3 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \varepsilon_4 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + |u|^2 u = 0, \quad (\varepsilon_4 > 0) \quad (2.68)$$

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon_4 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \gamma_1 |u|^2 u - \gamma_2 |u|^4 u = 0. \quad (\varepsilon_i, \gamma_i > 0) \quad (2.69)$$

La ecuación (2.66) ha sido utilizada para describir la propagación de pulsos no lineales en fibras ópticas (monomodales) en la vecindad de longitud de onda cercana a dispersión cero. La ecuación (2.67) describe la propagación de pulsos cortos cuando la frecuencia central del pulso óptico, es elegida como un valor mínimo o máximo de la dispersión de la velocidad de grupo (conocida en ingles por sus siglas GDV: group velocity dispersion) del medio. Cuando la frecuencia central no corresponde a un valor

extremo de GDV, el comportamiento de los pulsos se describe con la ecuación (2.68). Finalmente la ecuación (2.69) suele usarse para describir la propagación de pulsos ultracortos intensos. En el siguiente capítulo indagaremos en el método de las escalas múltiples que nos permitirá deducir este tipo de ecuaciones.

CAPÍTULO 3.

DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES NLS Y CMKDV Y SUS SOLUCIONES TIPO SOLITÓN BRILLANTES, OSCUROS, GRISES, EMBEBIDOS Y DOBLEMENTE EMBEBIDOS.

3.1 Análisis de escalas múltiples.

El método de escalas múltiples se aplica a problemas caracterizados por incorporar diversos procesos físicos gobernados cada uno por su propia escala pero que actúan simultáneamente. Generalmente estos procesos describen algún sistema dinámico (complejo) donde se exhibe una mezcla de variaciones rápidas y lentas de un fenómeno; por ejemplo: un sistema de amortiguadores o las ecuaciones de un fluido. En general, el estudio del comportamiento y entendimiento de estos sistemas se facilita por medio de una separación de los aspectos rápidos y lentos del fenómeno.

El desarrollo heurístico y conceptual de escalas múltiples parte de la observación básica de fenómenos físicos en la naturaleza que indican que el tiempo t debe ser convenientemente considerado, no como un escalar absoluto y único en el sistema, sino como una identidad que posee más de una dimensión $\{t_0, t_1, t_2, \dots\}$. Por ejemplo, en astrodinámica, un satélite artificial que orbita alrededor de la tierra, la luna girando junto con la tierra alrededor de un centro de masas en común, la luna trasladándose junto con la tierra alrededor del sol y además la tierra girando alrededor de su eje, son ejemplos, de movimientos que ocurren a diferentes periodos t 's, rápidos y lentos pero mezclados y cada uno asociado a una diferente escala de tiempo.

La existencia de las diferentes escalas permite apreciar comportamientos del fenómeno adecuadamente de acuerdo a su orden, pero a diferencia de las aproximaciones asintóticas el análisis no separa los regímenes sino que el fenómeno es estudiado simultáneamente. Algunos de los aspectos esenciales del método son:

- La variable de evolución $t \rightarrow \{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots\}$ no es un solo parámetro, sino se extiende a un mapeo multivaluado.
- Las variables independientes pueden ser múltiples. Los diferentes aspectos del fenómeno son observados simultáneamente en diferentes escalas de tiempo.
- Se puede aplicar a fenómenos no periódicos y no oscilatorios también.

La idea básica es introducir dos o más escalas diferentes (en función de la variable temporal de evolución) asociadas cada una con alguna propiedad de la solución, pero que actúan simultáneamente. Por ejemplo, para un sistema tipo oscilador puede ocurrir que sea necesaria una escala para describir las frecuencias rápidas y otra para la amplitud de la oscilación (ver figura 3.1).

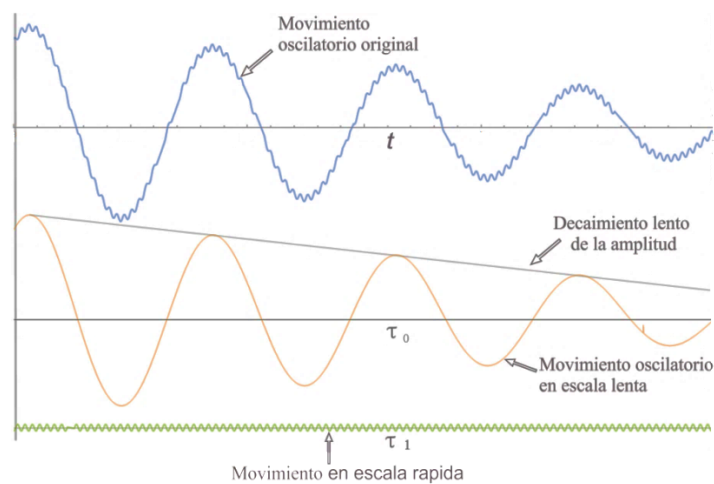


Figura 3.1. Descomposición de un fenómeno oscilatorio en diferentes escalas, que exhiben las propiedades del fenómeno.

El método tiene su origen en el trabajo de Poincare [15] acerca de la expansión secular en mecánica celeste y los trabajos posteriores de Krylov [16] y Bogoliubov y Mitropolsky [17] cuya contribución fue considerar por vez primera a las constantes que surgen en la teoría de perturbaciones como funciones de variación lenta. Esta aproximación famosa es conocida por sus siglas en inglés como (slowly varying functions).

Algunos usos importantes del método de escalas múltiples en la física van desde resolver diversos problemas en la rama de las ecuaciones diferenciales no lineales Cole, Kevorkian [18] y Nayfeh [19], su aplicación a la teoría de procesos irreversibles Friedman [20] y en el área de la mecánica estadística Sandri [21], entre muchos otros.

3.2 Escalas múltiples y la ecuación NLS.

En sus investigaciones sobre la mecánica celeste, Poincaré sugirió representar la solución de una ecuación diferencial, como una serie de potencias de un pequeño parámetro ϵ . Agrupando los términos de potencias similares de ϵ se obtienen diferentes grados de aproximación a la solución y se logra mayor precisión al considerar términos de mayor potencia para ϵ . Cuando este enfoque funciona suele ser simple y preciso.

Al aplicar este método al estudio de medios dispersivos no lineales, es posible obtener una serie de ecuaciones diferenciales parciales muy interesantes que describen la propagación de pulsos luminosos tipo solitón, como lo es la ecuación no lineal de Schrödinger NLS y la versión compleja de la ecuación modificada de Korteweg-de Vries KdV. Ambas ecuaciones son totalmente integrables a través del método *inverse scattering*. Veamos a continuación.

En un medio dispersivo, la velocidad de la luz depende de la frecuencia ω . Un medio no lineal es un medio en el que la velocidad de propagación del pulso depende también de su amplitud o intensidad $|A|^2$:

$$V = V(\omega, |A|^2). \quad (3.1)$$

Para las ondas que se propagan en un medio en particular, existe una relación entre la frecuencia ω y el número de onda k , conocida como relación de dispersión. En un medio dispersivo $\omega = kc/n = kv$, donde la velocidad de la luz c en el vacío y el índice de refracción del medio n definen la velocidad de propagación v . Entonces, si sustituimos la velocidad para un medio no lineal (3.1) en la relación de dispersión se obtiene:

$$k = k(\omega, |A|^2). \quad (3.2)$$

Aplicando la expansión en serie de Taylor para dos variables

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{\partial^m f}{\partial^{n-m} x \partial^m y} \Bigg|_{x_0, y_0} (x - x_0)^{n-m} (y - y_0)^m, \quad (3.3)$$

a la relación de dispersión (3.2), donde se identifica a la frecuencia y amplitud de la siguiente manera:

$$(x - x_0) \leftrightarrow (\omega - \omega_0), \quad (3.4)$$

$$(y - y_0) \leftrightarrow |A|^2. \quad (3.5)$$

El desarrollo hasta el quinto orden será:

$$k = k_0 + k_1(\omega - \omega_0) + k_2|A|^2 + \frac{1}{2!} [k_{11}(\omega - \omega_0)^2 + 2k_{12}|A|^2(\omega - \omega_0) + k_{22}|A|^4]$$

$$+ \frac{1}{3!} [k_{111}(\omega - \omega_0)^3 + 3k_{112}|A|^2(\omega - \omega_0)^2 + 3k_{122}|A|^4(\omega - \omega_0) + k_{222}|A|^6]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4!} [k_{1111}(\omega - \omega_0)^4 + 4k_{1112}|A|^2(\omega - \omega_0)^3 + 6k_{1122}|A|^4(\omega - \omega_0)^2 \\
& + 4k_{1222}|A|^6(\omega - \omega_0) + k_{2222}|A|^8] + \frac{1}{5!} [k_{11111}(\omega - \omega_0)^5 + 5k_{11112}|A|^2(\omega - \omega_0)^4 \\
& \quad + 10k_{11122}|A|^4(\omega - \omega_0)^3 \\
& \quad + 10k_{11222}|A|^6(\omega - \omega_0)^2 + 5k_{12222}|A|^8(\omega - \omega_0) + k_{22222}|A|^{10}] + \dots, \quad (3.6)
\end{aligned}$$

donde los coeficientes k_i , k_{ij} , k_{ijk} , k_{ijkm} y k_{ijkmn} con $i, j, k, m, n = 1, 2$ corresponden a las derivadas parciales respecto a ω para 1 y a $|A|^2$ para 2 respectivamente, es decir:

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{\partial k}{\partial \omega}, \quad k_2 = \frac{\partial k}{\partial |A|^2}, \quad k_{11} = \frac{\partial^2 k}{\partial^2 \omega}, \quad k_{12} = \frac{\partial^2 k}{\partial \omega \partial |A|^2}, \quad k_{22} = \frac{\partial^2 k}{\partial^2 |A|^2}, \quad k_{111} = \frac{\partial^3 k}{\partial^3 \omega}, \\
k_{112} &= \frac{\partial^3 k}{\partial^2 \omega \partial |A|^2} \\
k_{122} &= \frac{\partial^3 k}{\partial \omega \partial^2 |A|^2}, \quad k_{222} = \frac{\partial^3 k}{\partial^3 |A|^2}, \quad k_{1111} = \frac{\partial^4 k}{\partial^4 \omega}, \quad k_{1112} = \frac{\partial^4 k}{\partial^3 \omega \partial |A|^2}, \quad k_{1122} = \frac{\partial^4 k}{\partial^2 \omega \partial^2 |A|^2}, \\
k_{1222} &= \frac{\partial^4 k}{\partial \omega \partial^3 |A|^2}, \quad k_{2222} = \frac{\partial^4 k}{\partial^4 |A|^2}, \quad k_{11111} = \frac{\partial^5 k}{\partial^5 \omega}, \quad k_{11112} = \frac{\partial^5 k}{\partial^4 \omega \partial |A|^2}, \quad k_{11122} = \\
& \quad \frac{\partial^5 k}{\partial^3 \omega \partial^2 |A|^2} \\
k_{11222} &= \frac{\partial^5 k}{\partial^2 \omega \partial^3 |A|^2}, \quad k_{12222} = \frac{\partial^5 k}{\partial \omega \partial^4 |A|^2}, \quad k_{22222} = \frac{\partial^5 k}{\partial^5 |A|^2}. \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Para obtener las *EDPs* solo hace falta seguir dos pasos. El primero es notar que las pequeñas variaciones de la amplitud $A(Z, T)$ de un pulso cuasi monocromático, se puede escribir como una transformada inversa de Fourier de la siguiente forma:

$$A(Z, T) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{A}] = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(k, \omega) e^{-i[(k-k_0)Z - (\omega - \omega_0)T]} dk d\omega, \quad (3.9)$$

donde al derivar el lado izquierdo de (3.9) respecto a las variables originales Z y T , según las propiedades de la transformada de Fourier, se obtiene que:

$$\frac{\partial A}{\partial T} = \mathcal{F}^{-1}[-i(\omega - \omega_0)\tilde{A}(k, \omega)], \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial A}{\partial Z} = \mathcal{F}^{-1}[i(k - k_0)\tilde{A}(k, \omega)]. \quad (3.11)$$

Analizando estas ecuaciones, notamos que la multiplicación de la función $\tilde{A}(k, \omega)$, por $-i(\omega - \omega_0)$ o bien por $i(k - k_0)$, se relaciona directamente con la derivada de T y Z respectivamente de la función $A(Z, T)$, es decir, se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$(\omega - \omega_0) \leftrightarrow i \frac{\partial}{\partial T}, \quad (3.11)$$

$$(k - k_0) \leftrightarrow -i \frac{\partial}{\partial Z}. \quad (3.12)$$

El segundo paso, consiste en introducir las variables de escala, $t = \epsilon T$ y $Z_n = \epsilon^n Z$, entonces el operador diferencial (3.11) y el (3.12) deben extenderse a estas variables.

Usando la regla de la cadena se obtiene que:

$$(\omega - \omega_0) \leftrightarrow i \frac{\partial}{\partial T} = i \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial T} = i \epsilon \frac{\partial}{\partial t}, \quad (3.13)$$

$$(k - k_0) \leftrightarrow -i \frac{\partial}{\partial Z} = -i \sum \frac{\partial}{\partial Z_n} \frac{\partial Z_n}{\partial Z} = -i \sum \epsilon^n \frac{\partial}{\partial Z_n}. \quad (3.14)$$

Estos operadores diferenciales reemplazarán a los factores $(k - k_0)$ y $(\omega - \omega_0)$ en la expansión (3.6) de la relación de dispersión, de tal forma que:

$$-i \sum \epsilon^n \frac{\partial}{\partial Z_n} = i \epsilon k_1 \frac{\partial}{\partial t} + k_2 |A|^2 + \frac{1}{2!} \left[-\epsilon^2 k_{11} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2i \epsilon k_{12} |A|^2 \frac{\partial}{\partial t} + k_{22} |A|^4 \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3!} \left[-i\epsilon^3 k_{111} \frac{\partial^3}{\partial^3 t} - 3\epsilon^2 k_{112} |A|^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 t} + 3i\epsilon k_{122} |A|^4 \frac{\partial}{\partial t} + k_{222} |A|^6 \right] \\
& + \frac{1}{4!} \left[\epsilon^4 k_{1111} \frac{\partial^4}{\partial^4 t} - 4i\epsilon^3 k_{1112} |A|^2 \frac{\partial^3}{\partial^3 t} - 6\epsilon^2 k_{1122} |A|^4 \frac{\partial^2}{\partial^2 t} + 4i\epsilon k_{1222} |A|^6 \frac{\partial}{\partial t} + k_{2222} |A|^8 \right] \\
& - i \frac{\epsilon^5}{5!} k_{11111} \frac{\partial^5}{\partial^5 t} + 5 \frac{\epsilon^4}{5!} k_{11112} |A|^2 \frac{\partial^4}{\partial^4 t} - 10i \frac{\epsilon^3}{5!} k_{11122} |A|^4 \frac{\partial^3}{\partial^3 t} - 10 \frac{\epsilon^2}{5!} k_{11222} |A|^6 \frac{\partial^2}{\partial^2 t} \\
& + 5i \frac{\epsilon}{5!} k_{12222} |A|^8 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{5!} k_{22222} |A|^{10} + \dots. \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Finalmente esta ecuación en forma de operadores diferenciales se aplica sobre el campo $A(Z_1, Z_2, \dots, t) = \epsilon u(Z_1, Z_2, \dots, t)$ y se agrupan los términos con la misma potencia de ϵ , obteniendo a diferentes órdenes de ϵ^n las siguientes expresiones:

$$\epsilon^2: u_{Z_1} + k_1 u_t = 0 \tag{3.16}$$

$$\epsilon^3: iu_{Z_2} - \frac{1}{2!} k_{11} u_{tt} + k_2 |u|^2 u = 0 \tag{3.17}$$

$$\epsilon^4: u_{Z_3} - \frac{1}{3!} k_{111} u_{ttt} + k_{12} |u|^2 u_t = 0 \tag{3.18}$$

$$\epsilon^5: iu_{Z_4} + \frac{1}{2!} k_{22} |u|^4 u - \frac{1}{2} k_{112} |u|^2 u_{tt} + \frac{1}{4!} k_{1111} u_{4t} = 0 \tag{3.19}$$

$$\epsilon^6: u_{Z_5} + \frac{1}{2!} k_{122} |u|^4 u_t - \frac{1}{6} k_{1112} |u|^2 u_{3t} + \frac{1}{5!} k_{11111} u_{5t} = 0 \tag{3.20}$$

Las ecuaciones obtenidas por el método de escalas múltiples son, en particular: la ecuación (3.16), que es la llamada “ecuación de onda de primer orden”, y a orden ϵ^3 se obtiene la famosa ecuación NLS (3.17), que es conocida por describir la propagación de pulsos de luz en el fibras ópticas. Por otro lado, sorpresivamente aparece la ecuación compleja modificada de Korteweg-de Vries (cmKdV) (3.18) al orden ϵ^4 , que exhibe la

existencia de un tipo peculiar de ondas viajeras solitarias llamados *solitones embebidos* muy importantes en el estudio de la propagación de los solitones ópticos.

3.3 Solitones brillantes, oscuros y grises de la ecuación NLS.

Entre las soluciones importantes de la ecuación *NLS*

$$iu_z + \varepsilon u_{tt} + \gamma |u|^2 u = 0, \quad (3.21)$$

donde ε y γ son coeficientes reales que caracterizan el tipo de solución, se encuentran los llamados solitones brillantes, oscuros y grises, los cuales han sido estudiados intensamente durante las últimas dos décadas, ya que están presentes en una variedad de fenómenos dispersivos no lineales que incluyen, por ejemplo, a la fotónica de fibras cristalinas, condensados de Bose-Einstein, plasmas y superficie de líquidos, entre otros.

Estas soluciones satisfacen la ecuación *NLS* para diferentes valores de los coeficientes ε y γ , cuyos valores ayuda a identificar el tipo de solución que tendrá la *NLS*. La familia de solitones brillantes corresponde a una función de la forma

$$u(z, t) = A \operatorname{sech}\left(\frac{t}{W}\right) e^{(icz)}, \quad (3.22)$$

donde, A representa la amplitud de pulso, W la velocidad, t el llamado tiempo retardado y z la distancia recorrida a través de la fibra óptica. Cabe señalar que en este tipo de ecuaciones la variable de evolución es z ya que t (el tiempo retardado) es un marco de referencia que se mueve junto al pulso a la velocidad de grupo de la onda (es decir, $t = T - Z/v_g$, donde T es el tiempo normal). Los parámetros A , W y C se relacionan entre sí de la siguiente manera:

Al derivar respecto a z y dos veces respecto a t , la función (3.22), se obtienen los primeros dos términos de la ecuación NLS:

$$u_z = iAC \operatorname{sech}\left(\frac{t}{W}\right) e^{(iCz)}, \quad (3.23)$$

$$u_t = -\frac{A}{W} \operatorname{sech}\left(\frac{t}{W}\right) \tanh\left(\frac{t}{W}\right) e^{(iCz)},$$

$$\Rightarrow u_{tt} = -\frac{A}{W^2} \operatorname{sech}\left(\frac{t}{W}\right) \left[2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{t}{W}\right) - 1\right] e^{(iCz)}, \quad (3.24)$$

y el tercer término será:

$$|u|^2 u = A^3 \operatorname{sech}^3\left(\frac{t}{W}\right) e^{(iCz)}. \quad (3.25)$$

Sustituyendo los términos (3.23), (3.24) y (3.25) en la ecuación (3.22) se obtiene:

$$\left[-AC \operatorname{sech}\left(\frac{t}{W}\right) - \varepsilon \frac{A}{W^2} \operatorname{sech}\left(\frac{t}{W}\right) \left(2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{t}{W}\right) - 1\right) + \gamma A^3 \operatorname{sech}^3\left(\frac{t}{W}\right)\right] = 0, \quad (3.26)$$

el lado izquierdo de esta última expresión se reduce a una serie de potencias de la función $\operatorname{sech}\left(\frac{t}{W}\right)$:

$$\left[\frac{\varepsilon A}{W^2} - AC\right] \operatorname{sech}\left(\frac{t}{W}\right) + \left[\gamma A^3 - 2 \frac{\varepsilon A}{W^2}\right] \operatorname{sech}^3\left(\frac{t}{W}\right) = 0. \quad (3.27)$$

Por lo que la ecuación es igual a cero, sí y solo sí, cada coeficiente de los términos de la expansión es cero, es decir

$$\left[\frac{\varepsilon A}{W^2} - AC\right] = 0, \quad (3.28)$$

$$\left[\gamma A^3 - 2 \frac{\varepsilon A}{W^2}\right] = 0. \quad (3.29)$$

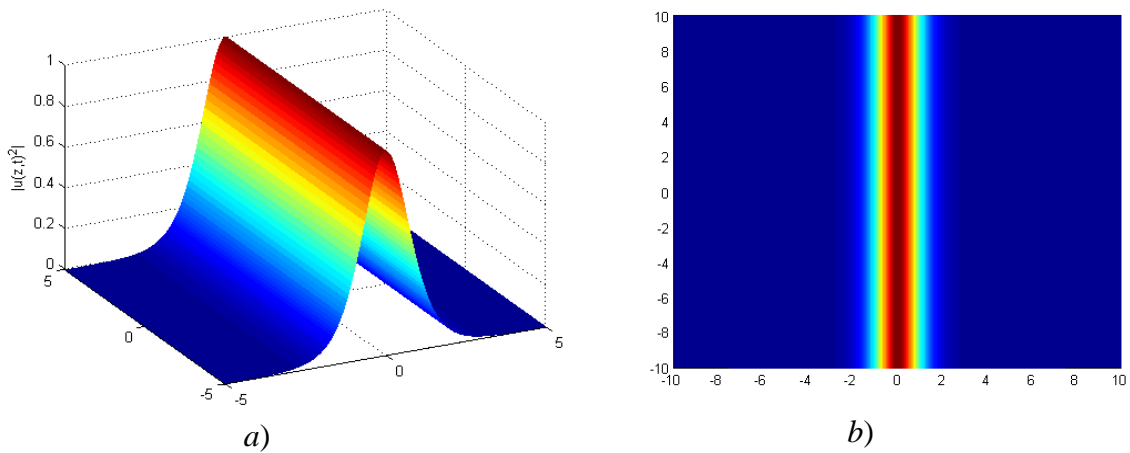
De estas últimas dos igualdades se encuentra que:

$$W = \left(\frac{2\varepsilon}{\gamma}\right)^{1/2} \frac{1}{A}, \quad (3.30)$$

$$C = \frac{\gamma}{2} A^2. \quad (3.31)$$

De tal forma, el número de onda C y la anchura W de pulso están definidos por el valor de la amplitud A y se mantienen constantes mientras la amplitud no varíe. Esta característica es típica de las ondas viajeras tipo solitón. Además, la relación (3.30) impone una condición sobre los coeficientes reales ($\varepsilon\gamma > 0$), que caracteriza a las soluciones de la ecuación NLS como familia de solitones brillantes.

Para apreciar geoméricamente la forma del solitón se grafica la función $|u|^2 \sim \text{sech}^2\left(\frac{t}{W}\right)$, asociada con la intensidad del pulso. Esta función en forma de cresta alcanza su máximo en el centro de la onda, es decir, en $t=0$. De esta manera el solitón brillante corresponde a un pulso luminoso que se propaga indefinidamente a través de una fibra óptica. (ver figura 3.2)



Figuras 3.2 a) y b) respectivamente. Forma típica de un Soliton brillante.

La familia de Solitones oscuros, es de la forma:

$$u(z, t) = A \tanh(Bt) e^{iCz}. \quad (3.32)$$

Análogamente al caso anterior, sustituyendo la función (3.32) en los términos de la ecuación NLS (3.22), se puede encontrar la relación entre los parámetros A , B y C , y de los coeficientes ε y γ :

$$u_z = iAC \tanh(Bt) e^{iCz}, \quad (3.33)$$

$$u_t = iAB \operatorname{sech}^2(Bt) e^{iCz}$$

$$\Rightarrow u_{tt} = -2AB^2 \operatorname{sech}^2(Bt) \tanh(Bt) e^{iCz}, \quad (3.34)$$

$$|u|^2 u = A^3 \tanh^3(Bt) e^{iCz}. \quad (3.35)$$

Sustituyendo (3.33), (3.34) y (3.35) en la ecuación NLS:

$$[-AC \tanh(Bt) - 2\varepsilon AB^2 \operatorname{sech}^2(Bt) \tanh(Bt) + \gamma A^3 \tanh^3(Bt)] e^{iCz} = 0, \quad (3.36)$$

agrupando en términos iguales y sustituyendo $\operatorname{sech}^2(Bt) = 1 - \tanh^2(Bt)$ se obtiene una serie de potencias de la función tangente hiperbólica:

$$[-AC - 2\varepsilon AB^2] \tanh(Bt) + [2\varepsilon AB^2 + \gamma A^3] \tanh^3(Bt) = 0, \quad (3.37)$$

Haciendo cero los coeficientes de la serie de potencias para que se cumpla la igualdad:

$$[-AC - 2\varepsilon AB^2] = 0 \quad \text{y} \quad [2\varepsilon AB^2 + \gamma A^3] = 0, \quad (3.38)$$

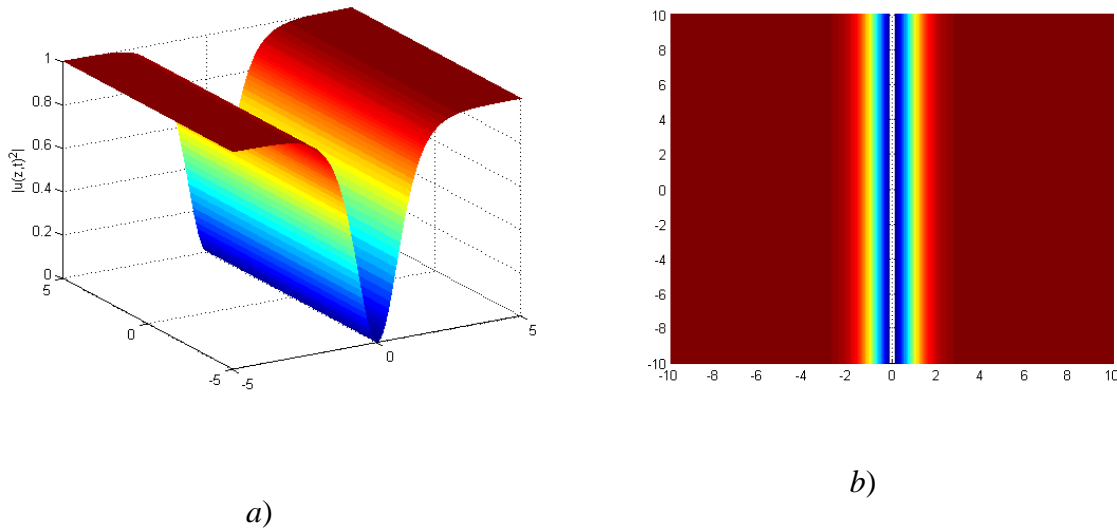
lo cual implica que:

$$B = \left(-\frac{\gamma}{2\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} A, \quad (3.39)$$

$$C = \gamma A^2. \quad (3.40)$$

De nuevo los parámetros B y C , asociados con la anchura y el número de onda, quedan definidos en términos de la amplitud A . Sin embargo en este caso, para la familia de solitones oscuros los valores de los coeficientes reales quedan determinados según la relación (3.39) por $\varepsilon\gamma < 0$.

La función (3.32) implica que la intensidad luminosa del pulso $|u|^2 \sim \tanh^2(At)$, será aproximadamente constante a lo largo de la mayor parte del eje t , salvo en la zona central (cerca a $t=0$), donde tiene una depresión. Esto representa, una fibra óptica completamente iluminada a excepción de una zona oscura que avanza por la fibra. Esta característica le da su nombre a este tipo de soluciones de la NLS, lo cual permite diferenciarlos de los solitones brillantes (ver figura 3.3).

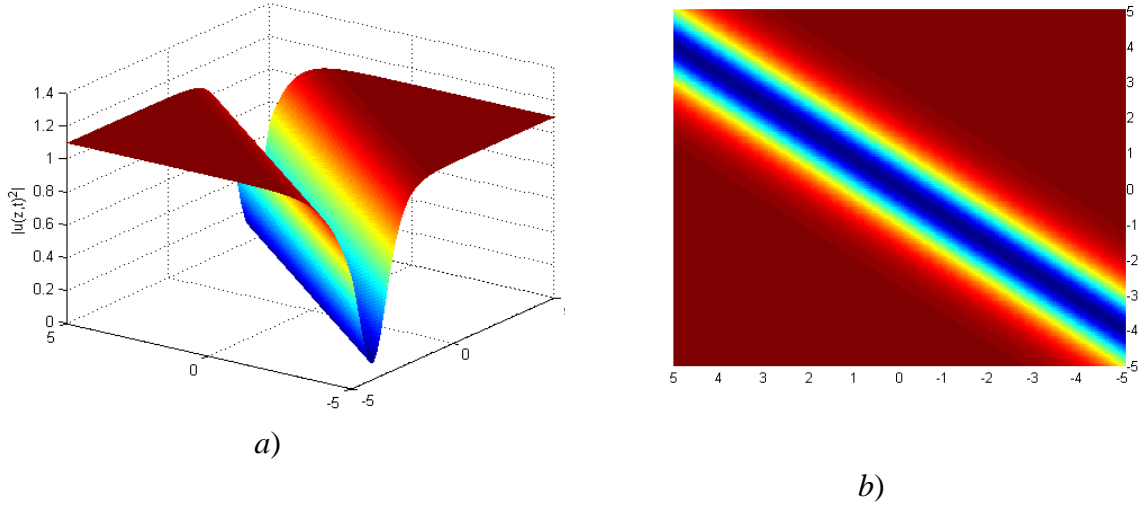


Figuras 3.3 a) y b) respectivamente. Soliton oscuro, su amplitud cae a zero en el centro de la onda.

La familia de Solitones grises tiene la forma:

$$u(z, t) = [a + ib \tanh(bt - abz)]e^{i(a^2 + b^2)z}. \quad (3.41)$$

Esta familia de funciones se extiende en el campo de los complejos por lo que representa una solución más general de la NLS, de hecho los solitones grises incluyen a los oscuros como un caso particular. Un ejemplo de soliton gris se muestra en la figura 3.4. El solitón se propaga con un ángulo finito respecto al eje z debido a una velocidad no nula dada por el término a .



Figuras 3.4 a) y b) respectivamente. Soliton gris.

A partir de la función (3.41) se obtienen las respectivas derivadas parciales en z y t asociadas a los términos de la NLS

$$u_z =$$

$$\{-iab^2 + iab^2 \tanh^2(bt - abz) + i(a^2 + b^2)[a + ib \tanh(bt - abz)]\}e^{i(a^2+b^2)z}, \quad (3.42)$$

$$u_t = [ib^2 - ib^2 \tanh^2(bt - abz)]e^{i(a^2+b^2)z}, \quad (3.43)$$

$$\Rightarrow u_{tt} = [-2ib^3 \tanh(bt - abz) + 2ib^3 \tanh^3(bt - abz)]e^{i(a^2+b^2)z}, \quad (3.44)$$

además

$$|u|^2 u = [a^3 + ab^2 \tanh^2(v) + ia^2 b \tanh(v) + ib^3 \tanh^3(v)]e^{i(a^2+b^2)z}, \quad (3.45)$$

donde $v = bt - abz$. Sustituyendo (3.42), (3.44) y (3.45) en la ecuación NLS (3.21) y multiplicando ambos lados de la ecuación por $e^{-i(a^2+b^2)z}$

$$\begin{aligned}
& i[-iab^2 + iab^2 \tanh^2(v) + i(a^2 + b^2)[a + ib \tanh(v)]] \\
& \quad -2i\varepsilon b^3 \tanh(v) + 2i\varepsilon b^3 \tanh^3(v) \\
& +\gamma[a^3 + ia^2b \tanh(v) + ab^2 \tanh^2(v) + ib^3 \tanh^3(v)] = 0, \quad (3.46)
\end{aligned}$$

agrupando los términos en serie de potencia de la función tangente hiperbólica obtenemos:

$$\begin{aligned}
& [ab^2 - a(a^2 + b^2) + \gamma a^3] + [-ib(a^2 + b^2) - 2i\varepsilon b^3 + i\gamma a^2 b] \tanh(v) \\
& \quad + [ab^2 + \gamma ab^2] \tanh^2(v) + i[2\varepsilon b^3 + b^3] \tanh^3(v) = 0. \quad (3.47)
\end{aligned}$$

Para que se cumpla la igualdad (4.47) todos los coeficientes de la serie de potencias deben ser cero, por lo que se obtiene un sistema de 4 ecuaciones, donde los parámetros a y b del solitón gris quedan libres y los coeficientes de la NLS corresponden a $\gamma = 1$ y $\varepsilon = -1/2$. Estos coeficientes corresponden también para la solución de la NLS con solitones oscuros.

3.4 Solitones móviles.

Otra variante de las soluciones para la NLS son los solitones móviles cuya expresión es análoga a la familia de solitones brillantes y oscuros salvo por una corrección para los términos que aparecen en los argumentos tanto de la exponencial como de la secante hiperbólica. Su forma es:

$$u(z, t) = 2q \operatorname{sech}[2q(t - 2rz)] e^{i[2(q^2 - r^2)z + 2rt]}, \quad (3.48)$$

$$u(z, t) = p^{1/2} \tanh \left[p^{1/2} (t - 2rz) \right] e^{i[(p+2r^2)z-2rt]}. \quad (3.49)$$

De la expresión del solitón móvil brillante (3.48), se observa que los términos de la exponencial, se pueden asociar a los términos de la fase de una onda plana, es decir

$$e^{i[2(q^2-r^2)z+2rt]} \leftrightarrow e^{i[kz-\omega t]}, \quad (3.50)$$

donde $k = 2(q^2 - r^2)$ y $\omega = -2r$. Entonces, el solitón móvil (3.49) se puede expresar como:

$$u(z, t) = 2q \operatorname{sech}[2q(t - 2rz)] e^{i[kz-\omega t]}. \quad (3.51)$$

Asociados, a este tipo de pulsos en medios dispersivos existen dos “velocidades” (ver apartado 2.5). La velocidad de fase

$$v_f = \frac{k}{\omega} = \frac{2(q^2 - r^2)}{-2r} = -\frac{q^2}{r} + r, \quad (3.52)$$

y la velocidad de grupo

$$v_g = \frac{dk}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} (2q^2 - 2r^2), \quad (3.53)$$

(NOTA: en la descripción de pulsos de luz en fibras ópticas la variable de evolución no es el tiempo t , sino la distancia a lo largo de la fibra z , de manera que en este y los siguientes apartados encontraremos definido al revés el cociente y la derivada $v_p = k/\omega$ y $v_g = dk/d\omega$. Así aunque las unidades de las velocidades están en tiempo sobre distancia representan a las velocidades de fase y grupo respectivamente).

sustituyendo $r = -\frac{\omega}{2}$:

$$v_g = \frac{d}{d\omega} \left(2q^2 - 2 \left(-\frac{\omega}{2} \right)^2 \right) = -\omega = 2r. \quad (3.54)$$

Notamos que el valor $2r$ coincide con el segundo término de la secante hiperbólica en el solitón (3.49), entonces, (3.49) se puede expresar como:

$$u(z, t) = 2q \operatorname{sech}[2q(t - v_g z)] e^{i[kz - \omega t]}. \quad (3.55)$$

Este resultado indica además, que la velocidad de grupo v_g se relaciona con la frecuencia ω . Para hacer explícita esta relación, observamos que la trayectoria del solitón en el plano $z-t$ está dada por la condición $t - v_g z = 0$, entonces $t = v_g z$, es decir en estas expresiones z representa a la variable de evolución y t se refiere al tiempo retardado. (marco de referencia montado sobre la velocidad de grupo del solitón).

Entonces, la derivada de t respecto a z , que expresa la velocidad de propagación es justamente

$$\frac{dt}{dz} = \frac{d}{dz}(v_g z) = v_g = -\omega. \quad (3.56)$$

Este resultado nos indica que la velocidad de grupo o de propagación se relaciona directamente con el término adicional de la frecuencia ω en la función del solitón móvil. Para hacer más clara y explícita esta relación consideramos el caso general $u(z, t)$ solución de la NLS que describe la propagación de pulsos luminosos en fibras ópticas. Estas funciones se relacionan con el campo eléctrico de la siguiente manera:

$$E(z, t) = \frac{1}{2} u(z, t) e^{i[k_0 z - \omega_0 t]} + c. c, \quad (3.57)$$

donde $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ es el número de onda del laser y $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ es la frecuencia del láser, que emite el pulso. Si ahora sustituimos en (3.57) el solitón móvil (3.49), obtenemos:

$$E(z, t) = q \operatorname{sech}[2q(t - 2rz)] e^{i[(k_0 + k_s)z - (\omega_0 + \omega_s)t]}. \quad (3.58)$$

Esta expresión muestra que la frecuencia ω_s de la fase del solitón móvil constituye una corrección, respecto a la frecuencia original del laser ω_0 . Como se ha modificado la frecuencia del pulso, debe existir algún cambio en su velocidad, ese cambio de velocidad es precisamente

$$\frac{dk_0}{d\omega_0} = -2r = v_g, \quad (3.59)$$

que aparece en el argumento de la secante hiperbólica, es decir la corrección en la frecuencia se expresa directamente en la velocidad de grupo del pulso.

Para corroborar que los solitones móviles (3.48) y (3.49) corresponden a soluciones exactas de la NLS, se sustituyen directamente en los términos de la NLS; análogamente a los solitones brillantes y oscuros se obtienen series de potencias de las funciones secante hiperbólica y tangente hiperbólica cuyos coeficientes al anularse permiten determinar la relación entre los parámetros q , r y p con los valores de los coeficientes β y ε que satisfacen los solitones móviles.

Para el solitón móvil brillante (3.48), los coeficientes correspondientes en la ec. NLS son $\varepsilon = 1/2$ y $\gamma = 1$. Los términos parámetros del solitón móvil oscuro (3.49) en la ec. NLS satisfacen la condición $p = -2r^2$, cuando $\varepsilon = -1/2$ y $\gamma = 1$, definiendo así a la familia de solitones oscuros.

3.5 Solitones embebidos.

Además de los solitones brillantes, oscuros y grises, la variedad de tipos de solitones se extiende a: topológicos, no topológicos, solitones de Bragg, solitones vectoriales, solitones tipo vórtice, solitones espacio-temporales (balas de luz), solitones discretos,

etc. La mayoría de estos son conocidos desde la década de los setenta. Sin embargo, a finales de los noventa se encontró un nuevo tipo de solitones bautizados con el nombre de solitones embebidos (SE). El entendimiento y análisis de estos solitones parte de comprender la relación de los solitones usuales (no embebidos) y las ondas lineales periódicas de pequeña amplitud que pueden propagarse en el sistema no lineal.

En todos los sistemas dispersivos no lineales donde es posible la propagación de solitones, es posible también la propagación simultánea de ondas lineales periódicas de pequeña amplitud y estas satisfacen la versión linealizada de las ecuaciones no lineales que gobiernan el sistema considerado. Una condición para que pueda existir un auténtico solitón es que no exista resonancia entre el solitón y las ondas lineales de pequeña amplitud, ya que si se produce una resonancia de este tipo, el solitón irá debilitándose paulatinamente y parte de su energía se va a transferir a las ondas lineales (ver figura 3.5).

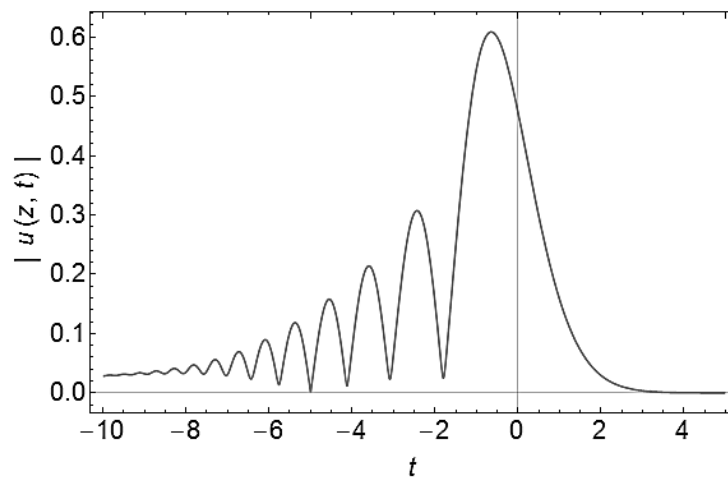


Figura 3.5. Resonancia de un pulso con las ondas lineales de pequeña amplitud, a este tipo de resonancia se le conoce como “radiación” del pulso.

Esta condición de no resonancia adopta diferentes formas, dependiendo de si el solitón considerado es real o complejo. Como ejemplo de solitones reales están los solitones de la ecuación Korteweg-de Vries KdV de la forma:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + 6w \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0, \quad (3.60)$$

sus solitones tiene la forma:

$$w(x, t) = 2\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa(x - 4\kappa^2 t), \quad (3.61)$$

donde κ es una constante real arbitraria. Esta familia de solitones tiene velocidad positiva siempre. Ahora bien, la parte lineal de la ecuación KdV es

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0. \quad (3.62)$$

La cual la satisfacen ondas periódicas lineales de la forma $w(x, t) = \operatorname{sen}(kx - \omega t)$, al sustituir esta función en parte lineal de la KdV se obtiene:

$$-\omega \cos(kx - \omega t) - k^3 \cos(kx - \omega t) = 0, \quad (3.63)$$

multiplicando ambos lados por $1/\cos(kx - \omega t)$ se llega a la siguiente relación de dispersión:

$$\omega(k) = -k^3, \quad (3.64)$$

de manera que la velocidad de fase de estas ondas es siempre negativa:

$$\frac{k}{\omega} = -\frac{1}{k^2}. \quad (3.65)$$

Entonces que en este caso los solitones viajan hacia la derecha, mientras que las ondas lineales viajan hacia la izquierda, esto asegura que los solitones de la KdV no entran en resonancia con las ondas lineales.

Ahora, como caso complejo tomamos la ecuación NLS:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + |u|^2 u = 0, \quad (3.66)$$

en este caso la familia de solitones la describe una función compleja de la forma:

$$u(z, t) = A \operatorname{sech}(At) \exp \left[i \frac{A^2}{2} z \right], \quad (3.67)$$

en esta expresión se aprecia que los solitones de la NLS tienen una componente oscilatoria (debido a la componente exponencial compleja) cuyo número de onda $\frac{A^2}{2}$ es siempre positivo. La parte lineal de la ec. NLS:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (3.68)$$

la satisface la onda lineal $u(x, t) = \exp[i(kz - \omega t)]$, al sustituir directamente en (3.68) se obtiene la relación de dispersión inversa respectiva de las ondas lineales:

$$k(\omega) = -\frac{1}{2} \omega^2. \quad (3.69)$$

Esto implica que todas las ondas lineales tienen números de onda negativos, contrario a lo que ocurre con los solitones. Esta diferencia en los signos asegura que no existirá resonancia entre los solitones de la NLS y las ondas lineales de pequeña amplitud.

Estos resultados parecían sugerir que los solitones reales no pueden tener velocidades permitidas en el mismo espectro que las ondas lineales, y que los solitones complejos

no pueden tener números de onda que estén en el rango de números de onda permitidos para las ondas lineales [22]. Esta opinión se vio fortalecida cuando se encontró que diversas condiciones iniciales que evolucionen de acuerdo a las ecuaciones (extensiones de la ec. NLS a tercer y cuarto orden dispersivo):

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - i\varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + |u|^2 u = 0, \quad (3.70)$$

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + i\varepsilon \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + |u|^2 u = 0. \quad (3.71)$$

inevitablemente comienzan a emitir radiación debido a la resonancia con ondas lineales. Se encontró que la frecuencia de la radiación emitida está definida por las ecuaciones (Akhmediev y Karlsson, [23]):

$$\frac{A^2}{2} = -\frac{1}{2} \omega^2 + \varepsilon \omega^3 \quad (3.72)$$

$$\frac{A^2}{2} = -\frac{1}{2} \omega^2 + \varepsilon \omega^4, \quad (3.73)$$

respectivamente, en estas condiciones, $\frac{A^2}{2}$ es precisamente el valor de número de onda de un solitón de altura A, es decir (3.72) y (3.73) son la condición necesaria para que la resonancia se lleve a cabo. Ahora bien, recordemos que las ecuaciones (3.70) y (3.71) son extensiones de la ecuación NLS, es decir son de la forma:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + |u|^2 u + (\text{terminos adicionales}) = 0. \quad (3.74)$$

Y hasta mediados de 1997, en medios cuya evolución de pulsos estén descritos por ecuaciones de esta forma, no se habían encontrado solitones que pudieran propagarse

sin resonancia con un número de onda inmerso en el rango de la relación de dispersión inversa $k(\omega)$ del espectro de ondas lineales.

En 1997, se publicó un artículo en el journal of the Physical Society of Japan en el cual se estudiaba la ecuación:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon_4 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \gamma_1 |u|^2 u - \gamma_2 |u|^2 u = 0, \quad (3.75)$$

y se demostraba que poseía soluciones tipo solitón con un número de onda inmerso en el rango de números de onda permitido para las ondas lineales (Fujioka y Epinoza [24]).

Se encontró que las soluciones de la ecuación (3.75) son tipo solitones de la forma:

$$u(z, t) = \left(\frac{\gamma_1}{2\gamma_2} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sech} \left(\frac{t}{\sqrt{\frac{14\varepsilon_4}{\varepsilon_2}}} \right) \exp \left(i \frac{5}{32} \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2} z \right), \quad (3.76)$$

si los coeficientes ε_i y γ_i satisfacen la condición:

$$\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_2^2} = \frac{24}{49} \frac{\gamma_2}{\gamma_1^2}, \quad (3.77)$$

al sustituir esta condición en la expresión del número de onda del solitón se obtiene:

$$k_s = \frac{5}{32} \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2} = \frac{15}{196} \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_4}. \quad (3.78)$$

Por otra parte la relación de dispersión que obedecen las ondas lineales de pequeña amplitud, obtenida al sustituir directamente $u(x, t) = \exp[i(kz - \omega t)]$ en la parte lineal de (3.75), es:

$$k(\omega) = \varepsilon_4 \omega^4 - \varepsilon_2 \omega^2. \quad (3.79)$$

Notamos que si $\varepsilon_4 > 0$, el número de onda del solitón k_s (3.78) será positivo y también, asegura que el dominio de la relación de dispersión inversa $k(\omega)$ (3.79) incluya todos los valores positivos posibles de la recta real, entonces, para los solitones de la forma (3.76) su número de onda está inmerso en el rango de la relación de dispersión lineal del sistema (ver figura 3.6).

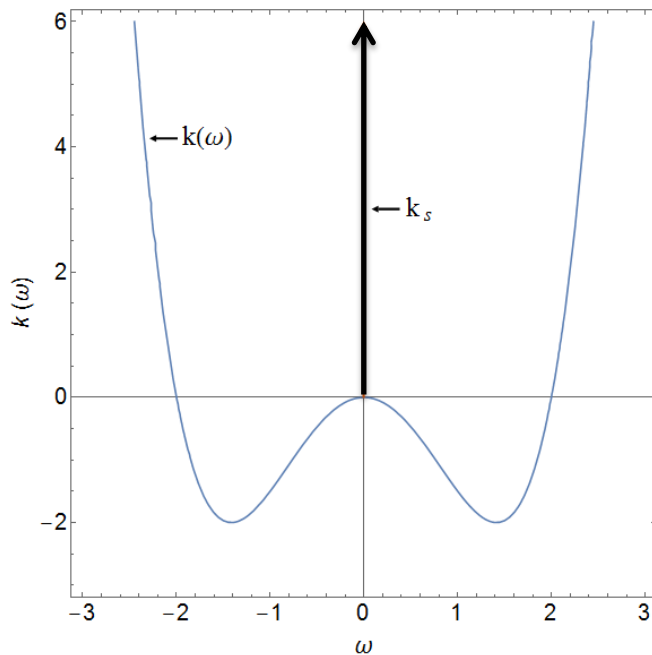


Figura 3.6. Los valores de número de onda del solitón k_s están inmersos en el rango de la relación de dispersión $k(\omega)$ de las ondas lineales.

Este fue el primer trabajo en el que se encontró una expresión analítica explícita para los solitones de este tipo, derrumbado así la idea de que los solitones no pueden tener un número de onda dentro del espectro lineal del sistema considerado. Aunque estos pulsos no son auténticos solitones, a partir de 1999 se les ha empezado a llamar solitones “embebidos” (SE), debido a que su número de onda está inmerso o embebido en el rango de números de permitidos por la relación de dispersión lineal.

La particular importancia de los solitones embebidos radica en que existen en condiciones donde los solitones usuales no pueden existir. Su potencial utilidad en la tecnología óptica dependería en gran medida de su capacidad para resistir perturbaciones sin desintegrarse. Sin embargo, el hecho mismo de que el número de onda k de un solitón embebido este dentro del rango de la relación de dispersión para ondas lineales del sistema, produce que el solitón embebido entre en resonancia casi instantáneamente si es perturbado, es decir, la estabilidad de los solitones embebidos se consideraba delicada.

Los diversos sistemas estudiados a partir de 1997 y hasta el 2003 mostraban que los solitones embebidos encontrados eran soluciones aisladas, es decir válidas para un valor específico de amplitud A y número de onda k (determinados por los coeficientes ε_1 y γ_1 de la ecuación), y semi-estables. Esto es, al ser perturbados, por ejemplo, incrementando su energía el solitón perturbado tiende a estabilizarse al solitón exacto, y por otro lado cuando la perturbación disminuye la energía del solitón, este comienza a resonar con las ondas lineales de pequeña amplitud y pierde su energía durante el proceso. La idea que de los solitones embebidos eran soluciones forzosamente aisladas e inestables cambió cuando Champneys y Malomed [25] a principios del año 2000 encontraron evidencias numéricas que indicaban que podría existir familias continuas de solitones embebidos, sin embargo, no encontraron expresiones analíticas para estos solitones. En el año 2001, analizando una complicada extensión de la ecuación KdV, Yang [26], encontró explícitamente una familia continua de solitones embebidos, de la forma:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} k^2 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{k}{2} (x - Ct) \right], \quad (3.80)$$

donde $k > 0$ es un parámetro arbitrario y $C = k^2 + k^4$ es la velocidad del solitón la cual esta embebida en el espectro de velocidades lineales del sistema, pero logra propagarse sin resonar, bajo ciertas condiciones. Los solitones de Yang constituyen la primera familia de solitones embebidos reales reportada en la literatura.

3.6 La familia estable de solitones embebidos y doblemente embebidos cmKdV.

La ecuación cmKdV:

$$u_z - \varepsilon u_{ttt} - \gamma |u|^2 u_t = 0, \quad (3.81)$$

donde ε y γ son coeficientes reales, posee soluciones complejas y se reduce a la ec. mKdV cuando las soluciones $u(z, t)$ se restringen valores reales, entonces todas las soluciones de la mKdV también son soluciones de (3.81). Las soluciones complejas de la cmKdV incluyen a dos tipos de familias de solitones, los llamados brillantes y los oscuros, veamos a continuación.

La familia secante de solitones brillantes de la cmKdV tiene la siguiente expresión

$$u(z, t) = A \operatorname{sech}\left(\frac{t - az}{w}\right) e^{i(qz + rt)}, \quad (3.82)$$

para satisfacer la ec. cmKdV los parámetros $\{A, a, w, q, r\}$, deben satisfacer algunas condiciones. Para esto, a partir de la función (3.82) obtenemos cada uno de los términos de la ec. *cmKdV*:

$$u_z = A \left[\frac{a}{w} \operatorname{sech}(\tau) \tanh(\tau) + iq \operatorname{sech}(\tau) \right] e^{i(qz + rt)}, \text{ donde } \tau = \frac{t - az}{w} \quad (3.83)$$

$$u_t = A \left[-\frac{1}{w} \tanh(\tau) \operatorname{sech}(\tau) + ir \operatorname{sech}(\tau) \right] e^{i(qz + rt)}, \quad (3.84)$$

$$u_{tt} = A \left[-\frac{1}{w^2} [2 \operatorname{sech}^3(\tau) - \operatorname{sech}(\tau)] - \frac{2ir}{w} \operatorname{sech}(\tau) \tanh(\tau) - r^2 \operatorname{sech}(\tau) \right] e^{i(qz + rt)}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow u_{ttt} &= A \left[\frac{1}{w^3} [5\operatorname{sech}(\tau)\tanh(\tau) - 6\operatorname{sech}(\tau)\tanh^3(\tau)] - 3\frac{ir}{w^2} [2\operatorname{sech}^3(\tau) - \operatorname{sech}(\tau)] \right. \\
&\quad \left. + 3\frac{r^2}{w} \operatorname{sech}(\tau)\tanh(\tau) - ir^3 \operatorname{sech}(\tau) \right] e^{i(qz+rt)} \\
&= A \left[\left[\frac{3ir}{w^2} - ir^3 \right] \operatorname{sech}(\tau) + \left[-\frac{1}{w^3} + \frac{3r^2}{w} \right] \tanh(\tau)\operatorname{sech}(\tau) + 6\frac{1}{w^3} \tanh^3(\tau)\operatorname{sech}(\tau) \right. \\
&\quad \left. - 6\frac{ir}{w^2} \operatorname{sech}^3(\tau) \right] e^{i(qz+rt)}, \tag{3.85}
\end{aligned}$$

$$|u|^2 u_t = A^3 \left[-\frac{1}{w} \tanh(\tau)\operatorname{sech}^3(\tau) + ir\operatorname{sech}^3(\tau) \right] e^{i(qz+rt)}. \tag{3.86}$$

Al sustituir los términos (3.81), (3.85) y (3.86) en la ecuación cmKdV y multiplicar ambos lados de la ecuación por $\frac{1}{A} e^{-i(qz+rt)}$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
&A \left[\frac{a}{w} \operatorname{sech}(\tau)\tanh(\tau) + iq \operatorname{sech}(\tau) \right] \\
&- \varepsilon A \left[\left[\frac{3ir}{w^2} - ir^3 \right] \operatorname{sech}(\tau) + \left[-\frac{1}{w^3} + \frac{3r^2}{w} \right] \tanh(\tau)\operatorname{sech}(\tau) + 6\frac{1}{w^3} \tanh^3(\tau)\operatorname{sech}(\tau) \right. \\
&\quad \left. - 6\frac{ir}{w^2} \operatorname{sech}^3(\tau) \right] - \gamma A^3 \left[-\frac{1}{w} \tanh(\tau)\operatorname{sech}^3(\tau) + ir\operatorname{sech}^3(\tau) \right] = 0, \tag{3.87}
\end{aligned}$$

agrupando los términos iguales de las funciones hiperbólicas,

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{a}{w} - \varepsilon \left(3\frac{r^2}{w} - \frac{1}{w^3} \right) \right] \tanh(\tau)\operatorname{sech}(\tau) + \left[6\frac{\varepsilon}{w^3} - \frac{A^2\gamma}{w} \right] \tanh(\tau)\operatorname{sech}^3(\tau) \\
&+ i \left[q - \varepsilon \left(3\frac{r}{w^2} - r^3 \right) \right] \operatorname{sech}(\tau) + i \left[-6\frac{\varepsilon r}{w^2} + \gamma A^2 r \right] \operatorname{sech}^3(\tau) = 0. \tag{3.88}
\end{aligned}$$

Para que se cumpla la igualdad tanto la parte real como la imaginaria deben ser igual a cero, al introducir esta condición, la parte real y la imaginaria se reducen a series de

potencias de la función $sech(\tau)$, por lo tanto, todos los coeficientes de cada termino debe ser necesariamente cero. Al aplicar esto, se obtienen las siguientes relaciones:

$$A^2 w^2 = \frac{6\varepsilon}{\gamma}, \quad (3.89)$$

$$a = 3\varepsilon r^2 - \frac{1}{6}\gamma A^2, \quad (3.90)$$

$$q = \frac{1}{2}\gamma A^2 r - \varepsilon r^3. \quad (3.91)$$

Este sistema caracteriza a las soluciones exactas (3.82). Los resultados numéricos presentados en (Rodríguez *et al.*, 2003) [27] indican que estos solitones son estables.

Así también, la familia tangente de solitos oscuros de la ec. cmKdV es:

$$u(z, t) = A \tanh\left(\frac{t - az}{w}\right) e^{i(qz + rt)}. \quad (3.92)$$

Al calcular los términos $\{u_z, u_{ttt}, |u|^2 u_t\}$ de la ec. cmKdV (3.81) a partir de esta función y sustituir estos términos en la ec. cmKdV se obtiene:

$$\begin{aligned} & A \left[-\frac{a}{w} sech^2(\tau) + i q \tanh(\tau) \right] \\ & - \varepsilon A \left[-\frac{6}{w^3} sech^4(\tau) - \frac{6ir}{w^2} sech^2(\tau) \tanh(\tau) + \left(\frac{4}{w^3} - \frac{3r^2}{w} \right) sech^2(\tau) - ir^3 \tanh(\tau) \right] \\ & - A^3 \gamma \left[\tanh^2(\tau) \left[\frac{1}{w} sech^2(\tau) + ir \tanh(\tau) \right] \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.93)$$

donde $\tau = \frac{t - az}{w}$. El lado izquierdo de la ecuación (3.97) se puede reagrupar para obtener

una serie de potencias de la función secante hiperbólica:

$$\left[-\frac{a}{w} + 3\frac{\varepsilon r^2}{w} - \frac{\gamma A^2}{w} - 4\frac{\varepsilon}{w^3} \right] sech^2(\tau) + i \left[6\frac{\varepsilon r}{w^2} + \gamma A^2 r \right] sech^2(\tau) \tanh(\tau)$$

$$+ \left[\gamma \frac{A^2}{w} + 6 \frac{\varepsilon}{w^3} \right] \operatorname{sech}^4(\tau) + i[q + \varepsilon r^3 - \gamma A^2 r] \operatorname{tanh}(\tau) = 0. \quad (3.94)$$

Haciendo cero los coeficientes de cada término se obtienen las siguientes relaciones.

$$\left. \begin{aligned} A^2 w^2 &= -\frac{6\varepsilon}{\gamma} \\ a &= 3\varepsilon r^2 - \frac{1}{3}\gamma A^2 \\ q &= \gamma A^2 r - \varepsilon r^3. \end{aligned} \right\} \quad (3.95)$$

Que caracterizan a las soluciones exactas tipo solitones oscuros de la ec. cmkdV.

Ahora bien, la familia de solitones brillantes (3.82) de la cmKdV, es especial en el sentido de que en primera instancia se trata de solitones embebidos. Esto se demuestra de la siguiente manera, si sustituimos una onda plana $u(x, t) = \exp[i(kz - \omega t)]$ en la parte lineal de la cmKdV ($u_z - \varepsilon u_{ttt} = 0$), se obtiene la relación de dispersión

$$k(\omega) = \varepsilon \omega^3, \quad (3.96)$$

cuyo rango contiene a todo el eje real ($-\infty < \omega < \infty$), consecuentemente cualquiera que sea el valor del número q de onda de un solitón de la forma (3.82), estará dentro de este rango es decir el solitón será embebido, y aunque se cumpla la condición $q = \varepsilon \omega^3$ de resonancia, el solitón se propaga sin mostrar resonancia.

Sin embargo, este razonamiento no es completamente correcto pues la condición de resonancia debe considerar que los solitones de la forma (3.82) son móviles. Para hacer la corrección a la condición de resonancia se considera que las ondas lineales del sistema tienen la forma:

$$u(x, t) = \exp[i(kz - \omega(t - a_l z))], \quad (3.97)$$

que al sustituir en la parte lineal de la cmKdV da la siguiente relación de dispersión:

$$k(\omega) = \varepsilon\omega^3 - a_1\omega. \quad (3.98)$$

Por otra parte para hallar el número de onda intrínseco correcto del solitón (3.82), debe realizarse una transformación de marco de referencia moviéndose a través del eje de tiempo con la velocidad recíproca a . Esta transformación agrega un término Doppler extra a la frecuencia espacial interna del solitón (número de onda), haciéndolo igual a $q + ar$. Entonces, la correcta condición de resonancia que determina las frecuencias a las que el solitón emita radiación si es perturbado es:

$$q + ar = \varepsilon\omega^3 - a_1\omega. \quad (3.99)$$

Esta ecuación tiene soluciones reales para cualesquiera que sean los valores de los parámetros q , a y r , lo cual asegura que los solitones realmente están embebidos.

Para terminar esta sección conviene ver algo relativo a la velocidad " a " del solitón mostrado en la ec. (3.82). Para ello volvamos al marco de referencia original. En ese marco la relación de dispersión es la ec. (3.96), la cual implica que la velocidad de fase de las ondas lineales es:

$$v_p = \frac{k}{\omega} = \varepsilon\omega^2 \quad (3.100)$$

Donde debemos recordar que como estamos usando a " z " como variable de evolución, estamos llamando "velocidad" a $\Delta t/\Delta z$, de modo que v_p tiene unidades de tiempo/distancia. Podemos ver que si $\varepsilon > 0$ la ec. (3.100) nos dice que todas las ondas lineales tienen velocidad de fase positiva. Por otro lado, la ec. (3.90) nos muestra que la velocidad del solitón (3.82) **puede ser positiva o negativa**, dependiendo de los valores de ε , r , γ y A . Es decir, si $\varepsilon > 0$ hay solitones de la forma (3.82) con $a > 0$, y solitones con a

< 0 . Por lo tanto, en aquellos casos en que $a > 0$ (y $\varepsilon > 0$) la velocidad del solitón estará inmersa (embebida) en el rango de las velocidades de fase de las ondas lineales, definidas en (3.100). Es decir, estos solitones estarán “*doblemente embebidos*”, ya que tendrán un número de onda inmerso en el rango de números de onda de las ondas lineales, y además tendrán una velocidad inmersa en el rango de velocidades de las ondas lineales. Es decir, hay dos tipos de “embebimiento”.

Por otro lado, si $\varepsilon > 0$ los solitones (3.82) que tengan $a < 0$ no serán doblemente embebidos, ya que su velocidad no estará inmersa en el rango de velocidades positivas dadas por la ec. (3.100). Estos solitones serán “*sencillamente embebidos*”, ya que su número de onda sí estará en el rango de números de onda de las ondas lineales.

Así pues, la ecuación cmKdV tiene 2 tipos de solitones embebidos: sencillamente embebidos, y doblemente embebidos. Rodríguez et al. [27] mostraron que los solitones sencillamente embebidos se estabilizan más rápido que los que están doblemente embebidos, lo cual muestra que hay una diferencia real entre estos dos tipos de solitones.

CAPÍTULO 4.

UNA GENERALIZACIÓN DE LA ECUACIÓN CMKDV, LA GMCKDV.

4.1 Introducción a la ecuación GcmKdV.

El estudio de los pulsos ópticos tipo ondas solitarias (solitones) tuvo un gran auge cuando fueron sugeridos como una forma viable de alcanzar tasas extremadamente altas de transmisión de información en sistemas de comunicación con fibras ópticas. Para estos sistemas, en una escala de tiempo de picosegundos, la ec. NLS proporciona un modelo suficiente para caracterizar la propagación de pulsos tipo solitones 'brillantes' [28]. Así que la extensión del régimen de la escala de tiempo a los femtosegundos ($t \sim 1 \times 10^{-15} \text{ seg}$), es de gran relevancia en el desarrollo de las telecomunicaciones. Sin embargo, la ec. NLS que se basa en la denominada aproximación “*slowly varying envelope approximation*” *SVEA* la cual indica que la envolvente del frente de onda varía lentamente respecto a la velocidad de grupo del pulso deja de ser válida en la escala de tiempo de femtosegundos. Como resultado, es necesario incorporar términos lineales y no lineales adicionales en la dinámica de evolución de la ecuación.

Recientemente se han empezado a estudiar variantes de la ec. NLS en las cuales se ha añadido el término αu_{zz} , el cual sirve para describir pulsos ultra cortos (en el régimen de femtosegundos) (Fujioka *et al.* (2017))[29]. Esto sugiere que sería de interés añadir un término de la forma αu_{zz} en la ec. cmKdV, lo cual nos conduce a la “ecuación GcmKdV”:

$$iu_z + \alpha u_{zz} - i\epsilon u_{ttt} - i\gamma |u|^2 u_t = 0, \quad (4.1)$$

donde el término dispersivo a tercer orden u_{ttt} (relacionado con la dispersión de la velocidad de grupo en la fibra) y el término no lineal $|u|^2u_t$ (asociado al índice refractivo), tienen consecuencias destructivas para el pulso si se consideran por separado, sin embargo, al considerarse ambos términos se logra un balance o compensación entre ellos, lo cual provee soluciones tipo ondas viajeras en el régimen de los femtosegundos.

Por otra parte, la desventaja de incorporar el término u_{zz} en este modelo, es que la ecuación generalizada “GcmKdV” deja de ser “totalmente integrable”, es decir no se puede formular a través de pares de Lax y pierde por esto ciertas propiedades matemáticas interesantes de los sistemas integrables, por ejemplo, no se puede asegurar si posee leyes de conservación. Sin embargo, el hecho de que la ec. cmKdV sí es totalmente integrable por *inverse scattering transform* [30], y que posea 2 familias de soluciones exactas tipo soliton brillantes y oscuros, donde la familia de solitones brillantes se trata de un tipo peculiar de soluciones (nunca observadas hasta el año 2003) llamadas *doblemente embebidas* y que son estables a pesar de tener números de onda inmersos en el espectro lineal del sistema [27], nos indica, que la ec. GcmKdV puede presentar un comportamiento similar respecto a las leyes de conservación y a sus soluciones, las cuales si resultan ser *emebebidas* y *estables* sería novedoso en el régimen de los femtosegundos.

4.2 Deducción de la ecuación GcmKdV a través del método de escalas múltiples.

De acuerdo al mecanismo utilizado el método de escalas múltiples desarrollado en el capítulo 3, parecería que no es posible tener dos o más derivadas parciales de distinto orden con respecto a la misma variable (ej.: $u_z, u_{zz}, u_{zzz} \dots$) en la misma ecuación diferencial parcial. Esto se debe a que en el método de escalas múltiples, a la hora de elegir el grado del factor de escalamiento ϵ^n ($n = 1,2,3, \dots$), se distingue un orden único de la derivada parcial que será el mayor y los órdenes menores que aparecen estarán multiplicados siempre por un término no lineal. Esto parece aplicarse bien para las ecuaciones que describen solitones ópticos, por ejemplo:

$$-u_{tt} \text{ aparece en la NLS: } iu_z + u_{tt} + |u|^2u = 0.$$

$$-u_{ttt} \text{ aparece en cmKdV: } u_z - u_{ttt} - |u|^2u_t = 0.$$

Siguiendo los resultados del apartado 3.1 parecería que no es posible obtener ambas derivadas temporales en la misma ecuación (ecuaciones 3.16-20), sin embargo, la evidencia nos indica que al abandonar la aproximación SVEA es posible describir un sistema físico (medio dispersivo) en el cual se puedan propagar pulsos ópticos ultracortos, a través de ecuaciones que contienen los términos u_t, u_{tt} . De forma similar, también podemos tener ecuaciones donde aparezcan u_z y u_{zz} , como en la ecuación (Christodoulides y Joseph, 1985) [31]:

$$iu_z + u_{zz} + iu_t + u_{tt} - iu_{ttt} + u_{4t} + |u|^2u_t = 0, \quad (4.2)$$

la cual es útil para describir pulsos ultra cortos. Esto indica, que la aparente imposibilidad a la hora de usar escalas múltiples para obtener dos derivadas parciales de

distinto orden en una misma ecuación no es una regla general, sino que debe ser posible deducir expresiones con esta característica.

Así que partiendo de la validez de la ecuación “GcmKdV” ($iu_z + \alpha u_{zz} - i\epsilon u_{ttt} - i\gamma|u|^2u_t = 0$), procederemos a deducirla aplicando una variante del método de escalas múltiples.

La variante del método se basa en suponer que la relación de dispersión no es algo tan explícito como $k = f(\omega, |A|^2)$, sino más bien que el número de onda está implícito en una función más compleja. Es decir, supondremos que la relación de dispersión es de la forma $F(k) = G(\omega, |A|^2)$. Ambos lados se pueden expandir en serie de Taylor y para el lado derecho se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 G(\omega, |A|^2) &= G_0 + G_1(\omega - \omega_0) + G_2|A|^2 \\
 &+ \frac{1}{2!} [G_{11}(\omega - \omega_0)^2 + 2G_{12}|A|^2(\omega - \omega_0) + G_{22}|A|^4] \\
 &+ \frac{1}{3!} [G_{111}(\omega - \omega_0)^3 + \dots + G_{222}|A|^6] + \dots
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

y en el lado izquierdo

$$F(k) = F_0 + F_1(k - k_0) + \frac{1}{2!} F_2(k - k_0)^2 + \dots \tag{4.4}$$

Aplicando el mismo razonamiento que en el capítulo 3, se obtienen las siguientes relaciones para la frecuencia y el número de onda:

$$(\omega - \omega_0) \leftrightarrow i \frac{\partial}{\partial T} \tag{4.5a}$$

$$(k - k_0) \leftrightarrow -i \frac{\partial}{\partial Z} \tag{4.5b}$$

a continuación, se introduce un factor de escalamiento ϵ a las variables T y Z de la siguiente manera:

$$t = \epsilon T, \quad z_n = \epsilon^{2n-\frac{1}{2}} Z, \quad (4.6a \text{ y } b)$$

donde $n = 1, 2, 3, \dots$ define el grado del factor de escalamiento para valores fraccionarios. Por lo tanto, el lado derecho de la relación (4.5a) se expresa usando la regla de la cadena y (4.6a) como

$$(\omega - \omega_0) = i \frac{\partial}{\partial T} = i \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial T} = i \epsilon \frac{\partial}{\partial t}, \quad (4.7)$$

análogamente para (4.5b)

$$\begin{aligned} (k - k_0) &= -i \frac{\partial}{\partial Z} = \\ &= -i \sum_{n=1}^N \frac{\partial}{\partial z_n} \frac{\partial z_n}{\partial Z} = -i \sum_{n=1}^N \epsilon^{2n-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z_n}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

a segundo grado

$$\begin{aligned} (k - k_0)^2 &= -i \frac{\partial}{\partial Z} \left(-i \frac{\partial}{\partial Z} \right) = -i \frac{\partial}{\partial Z} \left(-i \sum_{n=1}^N \epsilon^{2n-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z_n} \right) \\ &= -i \sum_{m=1}^M \frac{\partial}{\partial z_m} \left(-i \sum_{n=1}^N \epsilon^{2n-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z_n} \right) \frac{\partial z_m}{\partial Z} = - \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \epsilon^{2m+2n-1} \frac{\partial^2}{\partial z_m \partial z_n}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Aplicando la igualdad $F(k) = G(\omega, |A|^2)$ a segundo grado para $F(k)$ obtenemos

$$F_0 - iF_1 \sum_{n=1}^N \epsilon^{2n-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial Z_n} - \frac{1}{2!} F_2 \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \epsilon^{2m+2n-1} \frac{\partial^2}{\partial Z_m \partial Z_n}$$

$$\begin{aligned}
&= G_0 + i\epsilon G_1 \frac{\partial}{\partial t} + G_2 |A|^2 + \frac{1}{2!} \left[-\epsilon^2 G_{11} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2i\epsilon G_{12} |A|^2 \frac{\partial}{\partial t} + G_{22} |A|^4 \right] \\
&\quad + \frac{1}{3!} \left[-i\epsilon^3 G_{111} \frac{\partial^3}{\partial t^3} + \dots + G_{222} |A|^6 \right] + \dots \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Suponemos que $F_0 = G_0$ y aplicamos la función $A = \epsilon u(Z, t)$ a la ecuación (4.10)

entonces:

$$\begin{aligned}
&-iF_1 \sum_{n=1}^N \epsilon^{2n+\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial Z_n} - \frac{1}{2!} F_2 \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \epsilon^{2m+2n} \frac{\partial^2 u}{\partial Z_m \partial Z_n} = i\epsilon^2 G_1 u_t + \epsilon^3 G_2 |u|^2 u \\
&\quad + \frac{1}{2!} [-\epsilon^3 G_{111} u_{tt} + 2i\epsilon^4 G_{12} |u|^2 u_t + \epsilon^5 G_{22} |u|^4 u] \\
&\quad + \frac{1}{3!} [-i\epsilon^4 G_{111} u_{ttt} + \dots + \epsilon^7 G_{222} |u|^6 u] \dots \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Se consideraran los términos que tienen la potencia más cercana o igual a ϵ^4 en el lado izquierdo y los términos con la potencia ϵ^4 que aparecen en el lado derecho:

$$-iF_1 \epsilon^{4.5} \frac{\partial u}{\partial Z_n} - \frac{1}{2!} F_2 \epsilon^4 \frac{\partial^2 u}{\partial Z_1^2} = i\epsilon^4 G_{12} |u|^2 u_t - \frac{1}{3!} i\epsilon^4 G_{111} u_{ttt}. \tag{4.12}$$

Dividiendo ahora entre $F_1 \epsilon^4$ obtenemos:

$$-i\epsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial z_2} - \frac{F_2}{2F_1} \frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2} = \frac{iG_{12}}{F_1} |u|^2 u_t - i \frac{G_{111}}{6F_1} u_{ttt}. \tag{4.13}$$

Notemos que de la definición (4.6b) $z_2 = \epsilon^{3.5} Z$ y $z_1 = \epsilon^{1.5} Z$, entonces $z_2 = \epsilon^2 z_1$; por lo tanto usando regla de la cadena

$$\frac{\partial}{\partial z_1} = \frac{\partial}{\partial z_2} \frac{\partial z_2}{\partial z_1} = \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial z_2}, \tag{4.14}$$

análogamente a segundo grado

$$\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} = \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_1} = \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\epsilon^2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right) = \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial z_2} \left(\epsilon^2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right) = \epsilon^4 \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}. \quad (4.15)$$

Sustituyendo estas últimas dos expresiones en la ecuación (4.13) se obtiene

$$-i\epsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial z_2} - \alpha \epsilon^4 \frac{\partial^2 u}{\partial z_2^2} = i\gamma |u|^2 u_t - i\delta u_{ttt}, \quad (4.16)$$

donde $\alpha = \frac{F_2}{2F_1}$, $\gamma = \frac{G_{12}}{F_1}$ y $\delta = \frac{G_{111}}{6F_1}$. Además de (4.14) $\frac{\partial}{\partial z_2} = \frac{\partial}{\epsilon^2 \partial z_1}$ y $\frac{\partial}{\partial z_2^2} = \frac{\partial^2}{\epsilon^4 \partial z_1^2}$, de

modo que al sustituir en (4.16) y usando la notación $\frac{\partial u}{\partial z_1} = u_z$:

$$-i\epsilon^{-\frac{3}{2}} u_z - \alpha u_{zz} = i\gamma |u|^2 u_t - i\delta u_{ttt}. \quad (4.17)$$

Como ϵ es un factor adimensional podemos elegirlo de tal modo que $\epsilon^{-\frac{3}{2}} \approx 1$ y la ecuación se exprese finalmente como:

$$i u_z + \alpha u_{zz} - i\epsilon u_{ttt} - i\gamma |u|^2 u_t = 0. \quad (4.18)$$

Así, es como finalmente se obtiene la ecuación GcmKdV.

4.3 Familias de soluciones tipo solitones brillantes para la GcmKdV.

Lo interesante de la ecuación GcmKdV (4.18) es que tiene familias de soluciones tipo solitones exactos, es decir es de las pocas ecuaciones no lineales y no integrables de esta forma que contienen soluciones analíticas exactas, por lo cual es de interés conocer si este tipo de solitones son estables o semi-estables. En específico, es necesario saber si contiene dentro de sus soluciones solitones móviles y si el número de onda con el cual se propaga no interfiere en el rango de cualquier otro tipo de señal que también se pueda propagar en el sistema pues esto ocasionaría interferencia e inestabilidad.

Proponemos una familia secante de solitones brillantes compleja de la siguiente forma

$$u(z, t) = A \operatorname{sech}\left(\frac{t - az}{w}\right) e^{i(qz+rt)}, \quad (4.19)$$

al sustituir directamente la función anterior en la ecuación GcmKdV, se obtiene las condiciones que deben satisfacer los parámetros (A, a, w, q, r) definidos en (4.19) para que esta función describa soluciones exactas. Usando la función (4.19) para calcular cada uno de los términos de la ecuación GcmKdV:

$$u_z = A \left[\frac{a}{w} \operatorname{sech}(l) \tanh(l) + iq \operatorname{sech}(l) \right] e^{i(qz+rt)}, \quad \text{donde } l = \frac{t - az}{w} \quad (4.20)$$

$$u_{zz} = A \left[-\left(\frac{a}{w}\right)^2 (2\operatorname{sech}^3(l) - \operatorname{sech}(l)) + 2iq \frac{a}{w} \operatorname{sech}(l) \tanh(l) - q^2 \operatorname{sech}(l) \right] e^{i(qz+rt)}, \quad (4.21)$$

$$u_t = A \left[-\frac{1}{w} \tanh(l) \operatorname{sech}(l) + ir \operatorname{sech}(l) \right] e^{i(qz+rt)}, \quad (4.22)$$

$$|u|^2 u_t = A^3 \left[-\frac{1}{w} \tanh(l) \operatorname{sech}^3(l) + ir \operatorname{sech}^3(l) \right], \quad (4.22b)$$

$$u_{tt} = A \left[-\frac{1}{w^2} [2\operatorname{sech}^3(l) - \operatorname{sech}(l)] - 2i \frac{r}{w} \operatorname{sech}(l) \tanh(l) - r^2 \operatorname{sech}(l) \right] e^{i(qz+rt)}, \quad (4.23)$$

$$u_{ttt} = A \left\{ -\frac{1}{w^3} [-6\operatorname{sech}^3(l) \tanh(l) + \operatorname{sech}(l) \tanh(l)] - 3i \frac{r}{w^2} (2\operatorname{sech}^3(l) - \operatorname{sech}(l)) + 3 \frac{r^2}{w} \operatorname{sech}(l) \tanh(l) - ir^3 \operatorname{sech}(l) \right\}, \quad (4.24)$$

y al sustituir estos términos en la ecuación GcmKdV obtenemos:

$$\begin{aligned} & Ai \left[\frac{a}{w} \operatorname{sech}(l) \tanh(l) + iq \operatorname{sech}(l) \right] \\ & + \alpha A \left[-\left(\frac{a}{w}\right)^2 (2\operatorname{sech}^3(l) - \operatorname{sech}(l)) + 2iq \left(\frac{a}{w}\right) \operatorname{sech}(l) \tanh(l) - q^2 \operatorname{sech}(l) \right] \\ & - i\varepsilon A \left\{ -\frac{1}{w^3} [-6\operatorname{sech}^3(l) \tanh(l) + \operatorname{sech}(l) \tanh(l)] \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -3i \frac{r}{w^2} (2\operatorname{sech}^3(l) - \operatorname{sech}(l)) + 3 \frac{r^2}{w} \operatorname{sech}(l) \tanh(l) - ir^3 \operatorname{sech}(l) \Big\} \\
& -i\gamma A^3 \left[-\frac{1}{w} \tanh(l) \operatorname{sech}^3(l) + ir \operatorname{sech}^3(l) \right] = 0. \tag{4.25}
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos términos de la ecuación por $1/A$ y factorizando los términos iguales la expresión anterior se reduce a:

$$\begin{aligned}
& i \left(\frac{a}{w} + 2\alpha q \frac{a}{w} + \frac{\varepsilon}{w^3} - 3\varepsilon \frac{r^2}{w} \right) \operatorname{sech}(l) \tanh(l) + \left(\alpha \left(\frac{a}{w} \right)^2 - \alpha q^2 - q + 3\varepsilon \frac{r}{w^2} - \varepsilon r^3 \right) \operatorname{sech}(l) \\
& + i \left(\frac{\gamma A^2}{w} - 6 \frac{\varepsilon}{w^3} \right) \operatorname{sech}^3(l) \tanh(l) + \left(-2\alpha \left(\frac{a}{w} \right)^2 - 6 \frac{\varepsilon r}{w^2} + \gamma A^2 r \right) \operatorname{sech}^3(l) = 0, \tag{4.26}
\end{aligned}$$

separando la parte real y la imaginaria ambas partes se reducen a series de potencia de la función secante hiperbólica. Para que la igualdad se cumpla, todos los coeficientes de los términos deben ser cero. Entonces se obtiene el siguiente sistema:

$$a(1 + 2\alpha q) = 3\varepsilon r^2 - \varepsilon \frac{1}{w^2}, \tag{4.27}$$

$$\alpha \left(q^2 - \frac{a^2}{w^2} \right) + q = 3 \frac{\varepsilon r}{w^2} - \varepsilon r^3, \tag{4.28}$$

$$A^2 w^2 = \frac{6\varepsilon}{\gamma}, \tag{4.29}$$

$$-2\alpha a^2 - 6\varepsilon r + \gamma A^2 w^2 r = 0. \tag{4.30}$$

Reduciendo las ecuaciones (4.30) y la (4.28) (i.e sumándolas) y sustituyendo la relación (4.29) en las ecuaciones (4.27) y el resultado de la suma, el sistema anterior se reduce a:

$$a(1 + 2\alpha q) = 3\varepsilon r^2 - \frac{1}{6} \gamma A^2, \tag{4.31}$$

$$\alpha \left(q^2 - 3 \frac{a^2}{w^2} \right) + q = \frac{1}{2} \gamma A^2 r - \varepsilon r^3, \quad (4.32)$$

$$A^2 w^2 = \frac{6\varepsilon}{\gamma}, \quad (4.33)$$

sí consideramos el caso $\alpha = 0$, la ecuación GcmKdV se reduce a la cmKdV y el sistema anterior se reduce al obtenido para la cmKdV en el apartado 3.3.

$$a = 3\varepsilon r^2 - \frac{1}{6} \gamma A^2, \quad q = \frac{1}{2} \gamma A^2 r - \varepsilon r^3, \quad A^2 w^2 = \frac{6\varepsilon}{\gamma}. \quad (4.34a, b, c)$$

del sistema de relaciones (4.31)-(4.33) y en comparación con el (4.34a)- (4.34c) podemos observar:

-El parámetro de velocidad a del soliton es de segundo grado en las relaciones de las soluciones exactas de la ec. GcmKdV, y sus raíces pueden ser tanto positivas como negativas.

-Del mismo modo que para las soluciones de la cmKdV, los coeficientes ε y γ definen la cantidad $(A^2 w^2)$ como un valor constante que se conserva según el pulso de propaga en la fibra óptica.

4.4 La familia tangente de soluciones tipo solitón oscuro de la ec. GcmKdV.

La familia tangente tiene la forma:

$$u(z, t) = A \tanh \left(\frac{t - az}{w} \right) e^{i(qz + rt)}. \quad (4.35)$$

Para hallar las relaciones entre los parámetros $\{A, a, w, q, r\}$ que deben satisfacer las soluciones exactas, análogamente al caso anterior, se procede a encontrar los términos de la ecuación GcmKdV a partir de (4.35):

$$u_z = A \left[-\frac{a}{w} \operatorname{sech}^2(l) + iqtanh(l) \right] e^{i(qz+rt)}, \text{ con } l = \frac{t-az}{w} \quad (4.36)$$

$$u_{zz} = A \left[-2\frac{a^2}{w^2} \tanh(l) \operatorname{sech}^2(l) - 2i\frac{aq}{w} \operatorname{sech}^2(l) - q^2 \tanh(l) \right] e^{i(qz+rt)}, \quad (4.37)$$

$$u_t = A \left[\frac{1}{w} \operatorname{sech}^2(l) + irtanh(l) \right] e^{i(qz+rt)}$$

$$\Rightarrow u_{tt} = A \left[-\frac{2}{w^2} \operatorname{sech}^2(l) \tanh(l) + 2\frac{ir}{w} \operatorname{sech}^2(l) - r^2 \tanh(l) \right] e^{i(qz+rt)}$$

$$\Rightarrow u_{ttt} = \left[-\frac{2}{w^3} \operatorname{sech}^4(l) + \frac{4}{w^3} \operatorname{sech}^2(l) \tanh^2(l) - 6\frac{ir}{w^2} \operatorname{sech}^2(l) \tanh(l) - 3\frac{r^2}{w} \operatorname{sech}^2(l) \right.$$

$$\left. - ir^3 \tanh(l) \right] e^{i(qz+rt)}, \quad (\text{sust. } \operatorname{sech}^2(l) = 1 - \tanh^2(l))$$

$$= A \left[\frac{6}{w^3} \operatorname{sech}^2(l) \tanh^2(l) - \frac{6ir}{w^2} \tanh^2(l) + \frac{6ir}{w^2} \tanh^3(l) - \left(\frac{2}{w^3} + \frac{3r^2}{w} \right) \operatorname{sech}^2(l) - ir^3 \tanh(l) \right] e^{i(qz+rt)}, \quad (4.38)$$

y el termino no lineal será:

$$|u|^2 u_t = A^3 \left[\frac{1}{w} \tanh^2(l) \operatorname{sech}^2(l) + irtanh^3(l) \right] e^{i(qz+rt)}. \quad (4.39)$$

Sustituyendo (4.36), (4.37), (4.38) y (4.39) en la ec. GcmkdV (4.18) y multiplicando ambos lados de la ecuación por $\frac{1}{A} e^{-i(qz+rt)}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} & i \left[-\frac{a}{w} \operatorname{sech}^2(l) + iqtanh(l) \right] \\ & + \alpha \left[-2\frac{a^2}{w^2} \tanh(l) \operatorname{sech}^2(l) - 2i\frac{aq}{w} \operatorname{sech}^2(l) - q^2 \tanh(l) \right] \\ & - i\varepsilon \left[\frac{6}{w^3} \operatorname{sech}^2(l) \tanh^2(l) - \frac{6ir}{w^2} \tanh^2(l) + \frac{6ir}{w^2} \tanh^3(l) - \left(\frac{2}{w^3} + \frac{3r^2}{w} \right) \operatorname{sech}^2(l) - ir^3 \tanh(l) \right] \\ & - i\gamma A^2 \left[\frac{1}{w} \tanh^2(l) \operatorname{sech}^2(l) + irtanh^3(l) \right] = 0, \quad (4.40) \end{aligned}$$

y agrupando términos iguales se llega la serie de potencias compleja de la función \tanh :

$$\begin{aligned} & \left[-q - 2\alpha \frac{a^2}{w^2} - \alpha q^2 - 6\varepsilon \frac{r}{w^2} - \varepsilon r^3 \right] \tanh(l) + \left[2\alpha \frac{a^2}{w^2} + 6\varepsilon \frac{r}{w^2} + \gamma A^2 r \right] \tanh^3(l) \\ & + i \left[-\frac{a}{w} - 2\alpha \frac{aq}{w} + 2\varepsilon \frac{1}{w^3} + 3\varepsilon \frac{r^2}{w} \right] \operatorname{sech}^2(l) + i \left[-6\varepsilon \frac{1}{w^3} - \frac{\gamma A^2}{w} \right] \operatorname{sech}^2(l) \tanh^2(l) = 0. \quad (4.41) \end{aligned}$$

Esta última expresión, se compone tanto por una parte real como imaginaria, y para que la igualdad se cumpla ambas partes deben ser igual a cero, de modo que se obtienen dos series de potencias de la función $\tanh(x)$, donde al hacer cero los coeficientes de los términos se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} -q - 2\alpha \left(\frac{a^2}{w^2} + q^2 \right) &= 6\varepsilon \frac{r}{w^2} + \varepsilon r^3, \quad 2\alpha \frac{a^2}{w^2} = -6\varepsilon \frac{r}{w^2} - \gamma A^2 r, \\ a(1 + 2\alpha q) &= -2\varepsilon \frac{1}{w^2} - 3\varepsilon r^2 \quad y \quad A^2 w^2 = -\frac{6\varepsilon}{\gamma}. \quad (4.42 - 45) \end{aligned}$$

En este sistema, se reduce sustituyendo la ecuación (4.43) en (4.42) a:

$$q(1 + \alpha q) = \gamma A^2 r - \varepsilon r^3, \quad (4.46)$$

$$a(1 + 2\alpha q) = 3\varepsilon r^2 - \frac{1}{3}\gamma A^2, \quad (4.47)$$

$$A^2 w^2 = -\frac{6\varepsilon}{\gamma}. \quad (4.48)$$

Estas igualdades expresan las relaciones de los parámetros que satisfacen las soluciones (4.35) de la ec. GcmKdV, donde observamos claramente que de nuevo la cantidad $A^2 w^2$ se conserva. Estos resultados tanto de los solitones brillantes como oscuros son un indicio de que existen cantidades conservadas asociadas al sistema y sus soluciones, antes de entrar más a detalle acerca de esto analizaremos otra propiedad importante de estas soluciones.

4.5 Solitones embebidos y doblemente embebidos de la ecuación GcmKdV.

Para los medios dispersivos no lineales, por ejemplo el descrito por la ec. GcmKdV ($iu_z + \alpha u_{zz} - i\varepsilon u_{ttt} - i\gamma|u|^2u_t = 0$), es posible la propagación de ondas lineales de pequeña amplitud. Estas ondas satisfacen la parte lineal de la ec. GcmKdV:

$$iu_z + \alpha u_{zz} - i\varepsilon u_{ttt} = 0. \quad (4.49)$$

La solución de esta parte lineal es una función de onda plana de la forma:

$$u = u_0 \exp(i(kz - \omega t)), \quad (4.50)$$

y al sustituir directamente esta función en (4.51), se obtiene la relación de dispersión:

$$\begin{aligned} \alpha k^2 + k - \varepsilon \omega^3 &= 0 \\ \Rightarrow k(\omega) &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\alpha\varepsilon\omega^3}}{2\alpha}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

donde se puede apreciar que aunque esta expresión restringe el dominio de la frecuencia ω , el rango del número de onda $k(\omega)$ es todo el eje real $(-\infty, +\infty)$ (ver figura 4.1) independientemente del valor de los coeficientes α y ε . Entonces, cualquier valor de número de onda k_s de la familia de solitones brillantes (4.19) estará inmerso en este rango, por lo tanto se trata de solitones embebidos (ver apartado 3.5 y 3.6).

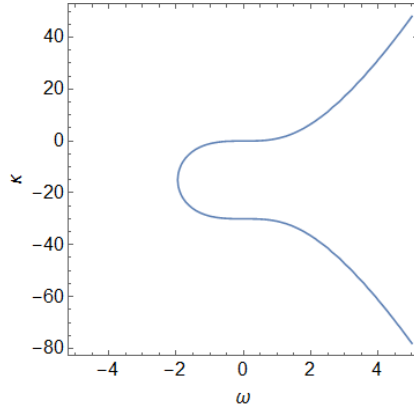


Figura 4.1. Relación de dispersión para las ondas lineales con $\alpha = \frac{1}{15}$ y $\varepsilon = 1$.

Recordando la forma de la familia de solitones brillantes $u(z, t) = A \operatorname{sech}\left(\frac{t-az}{w}\right) e^{i(qz+rt)}$, y las relaciones que satisfacen sus parámetros (4.31-33) notamos que la velocidad a puede ser positiva $a > 0$ o negativa $a < 0$, entonces, los valores asociados a la velocidad de fase y de grupo serán positivas también. Por otra parte, si observamos la gráfica de la relación de dispersión de ondas lineales (figura 4.1) la pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la curva, es decir, la derivada:

$$\frac{dk}{d\omega} = \pm \frac{3\varepsilon\omega^2}{\sqrt{1 + 4\alpha\varepsilon\omega^3}}, \quad (4.54)$$

será la velocidad de grupo de las ondas lineales y la razón k/ω su velocidad de fase, es fácil observar que para los valores de $\varepsilon = 1$ y $\alpha = 1/30$ por ejemplo, la velocidad de grupo puede ser positiva o negativa y la de fase tiene rango a través de toda la recta real, lo que implica que las velocidades del solitón estará inmersas en los rangos de estas velocidades correspondientes a las ondas lineales. En conclusión, la familia de solitones brillantes de la GcmkdV no solo cumple el criterio de solitón embebido por número de onda sino también por sus velocidades. A los solitones con esta doble característica se les denomina como *solitones doblemente embebidos*.

La importancia de analizar los solitones doblemente embebidos se debe a que la aparición de este tipo de solitones exactos no es nada común, pues no fue sino hasta el año 2003 que se encontraron este tipo de soluciones que carecen de resonancia con las ondas lineales de pequeña amplitud, lo cual era algo hasta entonces inevitable. Para analizar la estabilidad y las características de las soluciones halladas, en el siguiente capítulo desarrollaremos herramientas variacionales con el fin de analizar las soluciones perturbadas.

CAPÍTULO 5.

PRINCIPIO DE MÍNIMA ACCIÓN.

5.1 Introducción al problema central del cálculo variacional.

Los principios variacionales ocupan un lugar privilegiado en la historia de la física pues gozan de un gran mérito conceptual, práctico y estético. Han sido capaces de proveer resultados muy bien aproximados a problemas formidables de optimización donde es difícil hallar una solución analítica usando otros métodos. Históricamente el primer principio variacional fue establecido por Maupertuis en 1744 respecto a la trayectoria que toma la luz al atravesar un medio (camino óptico), donde Fermat ya había planteado que la luz toma el camino por el cual el tiempo de recorrido es mínimo, denominándolo como principio de mínima “acción”. La importancia de este y su aplicación a la mecánica fueron desarrolladas posteriormente por Euler, Lagrange y Hamilton. Lagrange se refirió a este principio, el de mínima acción, como el más hermoso e importante descubrimiento de la mecánica [32]. Su mérito radica en asociar a sistemas conservativos una elegante geometrización, es decir, relaciona las cantidades conservadas y ciertas transformaciones “invariantes” del sistema.

El cálculo variacional se dedica al estudio y aplicación de estos principios. Por ejemplo, fuera del ámbito, de la mecánica el principio de mínima acción tuvo enormes consecuencias en el desarrollo de diversas ramas de la física. Una amplia gama de ecuaciones que describen desde teorías cuánticas de campo y supercuerdas hasta la relatividad general; desde la dinámica de fluidos hasta la física de plasmas y la materia

condensada, son derivadas de aplicar este principio a una cantidad integral llamada acción[33].

A continuación, se definirán algunos conceptos necesarios para el estudio y aplicación del cálculo variacional. Su objeto de estudio, la acción “ s ”, es una funcional en lugar de una función como se trabaja en el cálculo diferencial ordinario, su definición inicial es una función que toma funciones como su argumento, es decir, una función cuyo dominio es un conjunto de funciones.

Un ejemplo de funcional aplicado en la física se presenta al calcular la distancia recorrida entre dos puntos por una partícula que se mueve en un plano (x, y) . Las trayectorias descritas por la partícula están dadas por las funciones $x(t)$ y $y(t)$, donde t es el parámetro de evolución temporal. Las coordenadas de la trayectoria se definen por el vector de posición $\vec{r} = (x(t), y(t))$, de aquí la velocidad será entonces $\vec{v} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ y si obtenemos su módulo $|\vec{v}(t)|$,

$$|\vec{v}(t)| = v(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (5.1)$$

se puede calcular el valor del segmento recorrido entre los puntos t_1 y t_2 de la trayectoria, es decir la longitud de arco “ s ” o distancia recorrida sobre la trayectoria. Esto es, aplicando la definición de longitud de arco como la integral de la velocidad respecto a dt :

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt. \quad (5.2)$$

Si tomamos la parametrización especial $x(t) = t$, la cual implica $\dot{x}(t) = 1$ y $y(t) = y(x)$, entonces

$$s[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \dot{y}^2(x)} dx, \quad (5.3)$$

en esta reparametrización la variable de evolución ahora será x por lo cual la distancia “ s ” ahora se define como una integral respecto a dx . La distancia (5.3) dependerá de la libre elección de la función $y(x)$ que se desee analizar (ver figura 5.1), es decir $s[y(x)]$.

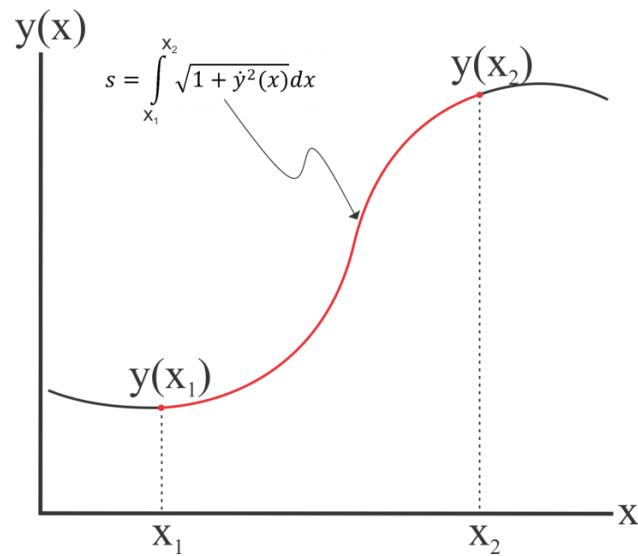


Figura 5.1

Esta última expresión ya no corresponde a una función usual pues su dominio es un espacio de funciones $\mathcal{F}: \{y(x)\}$, es decir “ s ” es un funcional

$$s[y(x)]: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$$

En el cálculo variacional, dada una funcional,

$$s[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(y, y', y'', \dots) dx, \quad (5.4)$$

donde $\mathcal{L}(y, y', y'', \dots)$ es una lagrangiana que depende de la función $y(x)$ y sus derivadas, el problema clásico se centra en hallar la función $y(x)$ que minimiza la cantidad integral $s[y(x)]$ conocida como la acción.

Para determinar la función que minimiza a la funcional (5.4) se aplica el principio de mínima acción, con el cual se obtiene la ecuación diferencial de Euler-Lagrange como condición que debe satisfacer la función que minimiza la acción.

5.2 Euler-Lagrange para funciones de una variable.

Tomando la acción (5.4), donde la lagrangiana depende de la función $y(x)$ y sus derivadas, la ecuación de Euler-Lagrange se puede deducir de la siguiente manera:

Primero, partimos del concepto de variación en el contexto del cálculo variacional, el cual se define como

$$\delta y = \bar{y} - y, \quad (5.5)$$

donde $y(x)$ es una función continua y acotada de clase C^∞ en el rango de x_1 a x_2 , la función $\bar{y}(x)$ queda definida al sumar una variación δy a la función original $y(x)$, i.e:

$$\bar{y} = y + \delta y, \quad (5.6)$$

donde δy es una variación “virtual de desplazamiento” de la función $y(x)$, esta variación tiene un carácter infinitesimal, pero a diferencia de la notación d ordinaria del cálculo no denota un cambio infinitesimal de una cierta variable independiente, sino que la variación δy es también una función acotada en el rango de $y(x)$ de x_1 a x_2 y que hereda sus propiedades de continuidad y diferenciabilidad y además se anula en los extremos es decir $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$ (ver figura 5.2).

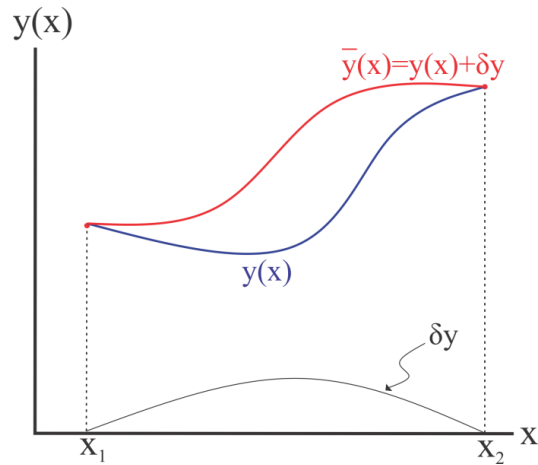


Figura 5.2 Al sumar a la función original la variación δy , se define una nueva trayectoria virtual de que difiere infinitesimalmente de la original.

Este concepto fue introducido por Lagrange, quien se refirió al operador δ como un cambio virtual e infinitesimal por lo que cumple propiedades de operador diferencial al actuar sobre las funcionales. Esto implica que debe cumplir ciertas propiedades respecto a la derivada y la integral, por ejemplo:

Al aplicar la derivada respecto a x en la expresión (5.6) se obtiene:

$$(\delta y)' = \bar{y}' - y'. \quad (5.7)$$

Por otra parte sí aplicamos la definición de variación a la derivada $y'(x)$ queda:

$$\delta y' = \bar{y}' - y'. \quad (5.8)$$

Comparando (5.7) y (5.8) se obtiene que:

$$(\delta y)' = \delta y', \quad (5.9)$$

lo cual indica que la derivada de la variación es igual a la variación de la derivada, es decir, la variación conmuta respecto a la derivada. Análogamente se llega también a:

$$(\delta y)'' = \delta y''. \quad (5.10)$$

Estas expresiones sutiles serán de gran utilidad para lo que sigue. A continuación, se define una nueva familia de funciones $\{\bar{y}(t; \alpha)\}$ donde t indica el parámetro de evolución y $\alpha \in [0,1] \subset \mathbb{R}$. Cada valor de α define una nueva función $\bar{y}(t)$ a partir de una función original $y(t)$ de la siguiente manera:

$$\bar{y}(t; \alpha) = y(t) + \alpha \delta y \quad (5.11)$$

Cuando $\alpha = 0$ se obtiene $\bar{y}(t; \alpha) = y(t)$ y para $\alpha = 1$, $\bar{y}(t; \alpha) = y(t) + \delta y$. Es decir, dada una δy las funciones $\bar{y}(t; \alpha)$ quedaran acotados entre el infimo para $\alpha = 0$ y el supremo para $\alpha = 1$ (ver figura 5.3).

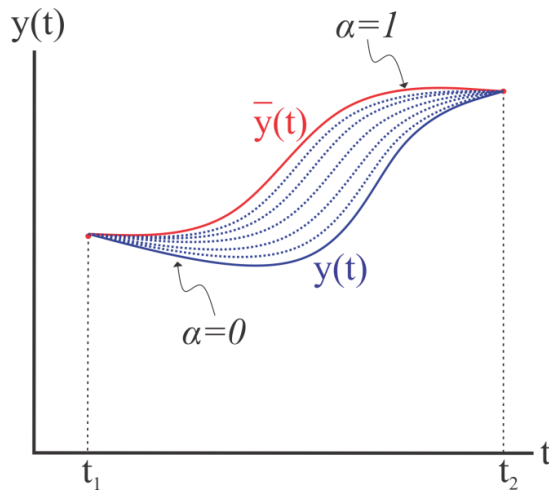


Figura 5.3

Esta definición permite apreciar el carácter infinitesimal de la variación y su relación con el principio de mínima acción al optimizar la acción $s[\bar{y}]$ como sigue.

Para una lagrangiana que dependa de $\bar{y}(t; \alpha)$ y sus derivadas $\bar{y}'(t; \alpha)$, $\bar{y}''(t; \alpha)$, la acción es:

$$s[\bar{y}(t; \alpha)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\bar{y}(t; \alpha), \bar{y}'(t; \alpha), \bar{y}''(t; \alpha)) dt. \quad (5.12)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}((y + \alpha\delta y), (y' + \alpha\delta y'), (y'' + \alpha\delta y'')) dt$$

Como la funcional $s[\bar{y}(t; \alpha)]$ queda restringida para valores determinados de t_1 y t_2 , se puede expresar abreviadamente como $s[\alpha]$. Para hallar la función que determina el mínimo o el máximo, es decir un punto estacionario de la acción, (5.12), en analogía con el cálculo se analiza el comportamiento de la variación a primer orden en una vecindad cercana a $\alpha = 0$, lo cual se expresa como:

$$\delta s = \left(\frac{ds}{d\alpha} \right)_{\alpha=0}, \quad (5.13)$$

la condición de punto extremo exige que $\delta s = 0$.

Como los límites de la integral no dependen de α , tenemos que:

$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{d\alpha} \mathcal{L}(\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'') dt, \quad (5.14)$$

y aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{ds}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{y}'} \frac{\partial \bar{y}'}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{y}''} \frac{\partial \bar{y}''}{\partial \alpha} \right] dt. \quad (5.15)$$

Por otra parte las derivadas de $\bar{y}(t; \alpha)$ serán:

$$\bar{y} = y + \alpha\delta y \quad (5.16a)$$

$$\bar{y}' = y' + \alpha(\delta y)' \quad (5.16b)$$

$$\bar{y}'' = y'' + \alpha(\delta y)''. \quad (5.16c)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.16) en la (5.15) y usando las propiedades de conmutatividad (5.9) y (5.10):

$$\delta s[\mathcal{L}] = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{y}} \delta y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{y}'} \delta y' + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{y}''} \delta y'' \right] dt. \quad (5.17)$$

Este resultado expresa cómo se desarrolla la variación a primer orden de una funcional. Al integrarlo en (5.17) lo podríamos denotar como $\delta \mathcal{L}$, de modo que en general podemos escribir:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' + \dots + \frac{\partial F}{\partial u^n} \delta u^n. \quad (5.18)$$

Ahora bien al desarrollar el segundo término de (5.17) en integrales por partes, como (δy) se anula en los extremos t_1 y t_2 , se obtiene que:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{y}'} \delta y' dt &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{y}'} \delta y \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta y \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{y}'} dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \delta y \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{y}'} dt. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Se puede observar que al igual que el primer término de (5.17) al integrar por partes su segundo término, en la ecuación (5.19), se obtiene la variación δy . Para hallar en el tercer término una expresión que dependa de δy se aplica dos veces integración por partes para reducir el orden de $\delta y''$ a δy (como δy se anula en los extremos t_1 y t_2 , $\delta y'$ también):

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{y}''} \delta y'' dt = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{y}''} \delta y' \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{y}''} \delta y' dt$$

$$\begin{aligned}
&= - \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{y}''} \delta y \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{y}''} \delta y dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{y}''} \delta y dt.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Entonces al sustituir (5.19) y (5.20) en (5.17):

$$\begin{aligned}
\delta s(\alpha) &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{y}} \delta y - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{y}'} \delta y + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{y}''} \delta y \right] dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{y}'} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{y}''} \right] \delta y dt.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

De la condición $\delta s = 0$ y considerando que δy es esencialmente arbitraria, es decir vale todas las (δy) posibles en una vecindad cercana a $\alpha = 0$. Sí $\delta s = 0$, entonces:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{y}'} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{y}''} = 0. \tag{5.22}$$

Esta condición es conocida como la ecuación de Euler-Lagrange. Para corroborar que esta condición se cumple para un valor mínimo de la acción s , se debe verificar que la variación de segundo orden sea siempre positiva $\delta^2 s > 0$.

En áreas específicas de la física como la mecánica analítica, la lagrangiana depende de las coordenadas generalizadas $q(t)$ y de su primera derivada, $\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))$, la acción analizada es

$$s = \int_a^b \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) dt, \tag{5.23}$$

hallar un mínimo de la acción (5.23), se reduce a un problema matemático de contorno para la ecuación diferencial de segundo orden, Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}(t)} = 0, \quad (5.24)$$

como condición necesaria. Sin embargo (5.24) no siempre tiene solución, y si la solución existe puede ser “no única” [34]. Al ser una ecuación diferencial de segundo orden la solución general de la ecuación de Euler-Lagrange comprenderá de dos constantes arbitrarias cuyos valores se determinan, hablando de forma general a través de las condiciones fronteras: $q(a) = A$ y $q(b) = B$, donde a y b , son las condiciones a frontera donde se evalúa la acción (5.32) [34].

Por otra parte, la razón de que en los sistemas mecánicos la lagrangiana $\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))$ no contenga derivadas de orden mayor \ddot{q} , $\ddot{\ddot{q}}$, etc. se debe que al aplicar la ec. Euler-Lagrange (5.24) a la lagrangiana (5.23), se obtienen las relaciones entre las aceleraciones, velocidades y coordenadas, es decir, quedan completamente determinadas las ecuaciones de movimiento del sistema. La versión en mecánica de Euler-Lagrange es un caso particular de la ecuación (5.22).

El mecanismo aquí presentado se puede generalizar como en (5.22) para lagrangianas que contienen derivadas de orden mayor, lo que extiende la aplicación del método de mínima acción a una gama mayor de ecuaciones diferenciales parciales lineales y no lineales donde pueda ser aplicado.

Ahora bien, haciendo un cambio de notación usando $u(t)$ en lugar de $y(t)$, y denotando las derivadas en la forma u_t , u_{tt} .

La acción será:

$$s[u, u_t, u_{tt}] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(u, u_t, u_{tt}) dt. \quad (5.25)$$

Aplicando la relación (5.18) y el hecho de que la variación conmuta con la derivada

$$\delta s = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \delta u_t + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} \delta u_{tt} \right] dt, \quad (5.26)$$

al integrar por partes el segundo miembro y dos veces el tercero obtenemos el mismo resultado que (5.20).

$$\delta s = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta u - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \delta u + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} \delta u \right] dt. \quad (5.27)$$

Entonces si aplicamos la condición $\delta s = 0$, implicará:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} = 0. \quad (5.28)$$

Esta notación nos permite calcular de forma más fácil y directa la ecuación de Euler-Lagrange donde las funciones $u(t)$ puedan no solo depender de una variable y que los órdenes de sus derivadas sean mayores. Veamos a continuación.

5.3 Generalización de Euler-Lagrange a funciones de dos variables independientes (\mathbf{z}, \mathbf{t}) de su primera y segunda derivada.

Si se trabaja con funciones que dependen de dos variables independientes $u(\mathbf{z}, \mathbf{t})$ las cuales pueden ser complejas, en este ejemplo ilustrativo, el lagrangiano contendrá a la función así como a las primeras y segundas derivadas. La acción corresponde a una integral de superficie de la forma:

$$s(u) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{z_1}^{z_2} \mathcal{L}(u, u_t, u_{tt}, u_z, u_{zz}) dt dz. \quad (5.29)$$

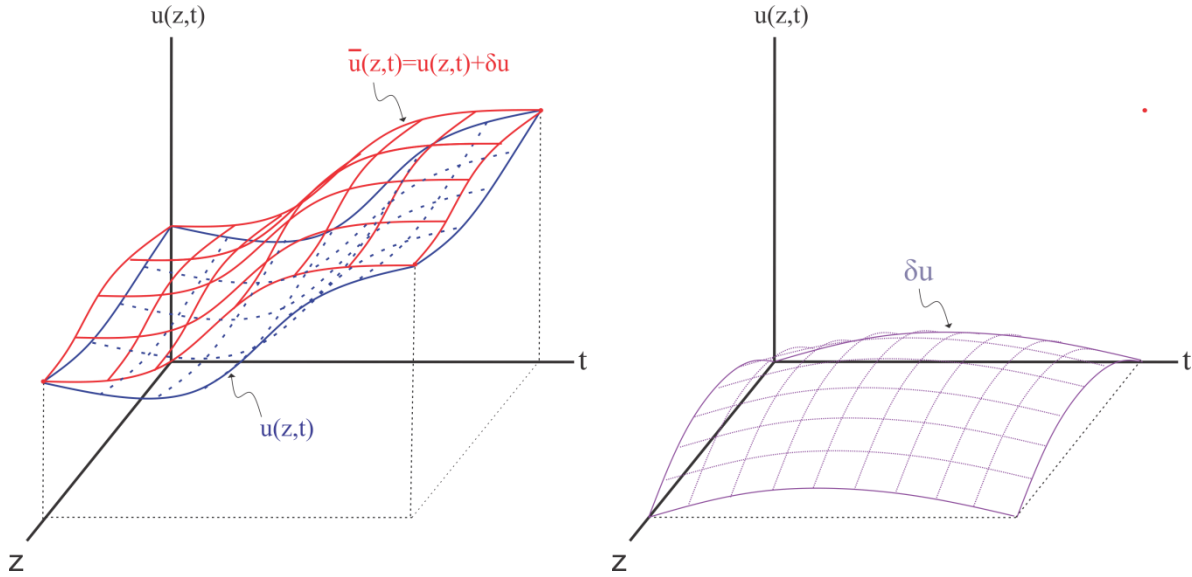


Figura 5.4

Aplicando la notación (5.26). Entonces $\delta s = 0$ será:

$$\begin{aligned} \delta s &= \int_{z_1}^{z_2} \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L} dt dz \\ &= \int_{z_1}^{z_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \delta u_t + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} \delta u_{tt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} \delta u_z + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zz}} \delta u_{zz} \right] dt dz = 0. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Integrando por partes a partir del segundo término respecto a t , y considerando que la variación δu debe anularse en los extremos t_1 y t_2 :

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \delta u_t dt dz = \int_{z_1}^{z_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \delta u \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta u \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} dt \right] dz$$

$$= - \iint_{z_1 t_1}^{z_2 t_2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \delta u dt dz. \quad (5.31)$$

El tercer término debe integrarse dos veces por partes debido a que cada integración reduce en un grado el orden de las derivadas de δu . Esto reduce del orden δu_{tt} a δu .

Como δu se anula en los extremos t_1 y t_2 , δu_t también lo hará, entonces:

$$\begin{aligned} \iint_{z_1 t_1}^{z_2 t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} \delta u_{tt} dt dz &= \int_{z_1}^{z_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} \delta u_t \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta u_t \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} dt \right] dz \\ &= - \iint_{z_1 t_1}^{z_2 t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} \delta u_t dt dz = - \int_{z_1}^{z_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} \delta u \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta u \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} dt \right] dz \\ &= \iint_{z_1 t_1}^{z_2 t_2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} \delta u dt dz. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Para el cuarto y quinto término la integración será respecto a la variable z , donde por condiciones de frontera se tiene también que $\delta u(z_1) = \delta u(z_2) = 0$:

$$\begin{aligned} \iint_{t_1 z_1}^{t_2 z_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} \delta u_z dz dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} \delta u \Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \delta u \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} dz \right] dt \\ &= - \iint_{t_1 z_1}^{t_2 z_2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} \delta u dz dt. \end{aligned} \quad (5.33)$$

El quinto termino de (5.34), se integra dos veces por partes respecto a z :

$$\iint_{t_1 z_1}^{t_2 z_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zz}} \delta u_{zz} dz dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zz}} \delta u_z \Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \delta u_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zz}} dz \right] dt$$

$$\begin{aligned}
&= - \iint_{t_1}^{t_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zz}} \delta u_z dz dt = - \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zz}} \delta u \Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \delta u \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zz}} dz \right] dt \\
&= \iint_{t_1}^{t_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zz}} \delta u dz dt. \tag{5.34}
\end{aligned}$$

Sustituyendo (5.31), (5.32), (5.33) y (5.34) en la ecuación (5.30):

$$\delta s = \iint_{z_1}^{z_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zz}} \right] \delta u dt dz = 0, \tag{5.35}$$

como esta condición se cumple para cualquier δu , entonces necesariamente:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{zz}} = 0. \tag{5.36}$$

Esta ecuación corresponde a una generalización de Euler-Lagrange para una densidad lagrangiana de la forma $\mathcal{L}(u, u_t, u_{tt}, u_z, u_{zz})$. Una característica importante que cabe resaltar de la lagrangiana es que por su naturaleza de minimizar un funcional debe ser una función real dado que en el campo de los complejos no existen relaciones de orden que nos indiquen si un valor es mayor o menor que otro.

5.4 Mínima acción aplicada a las EDP.

La deducción aquí mostrada incluye una generalización para lagrangianas que contengan derivadas de orden mayor de dos y para funciones que dependen de más de una variable, además de la temporal. Esto con la intención de aplicar este método al campo de las ecuaciones diferenciales parciales. Por ejemplo, supongamos que tenemos una lagrangiana de la siguiente forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(u, u_z, u_t, u^*, u_z^*, u_t^*), \quad (5.37)$$

donde $u = u(z, t)$ y $u^* = u^*(z, t)$ son dos funciones complejas diferentes que dependen de dos variables independientes. Si se propone

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(u^*u_z - uu_z^*) - \varepsilon u_t u_t^* + \frac{\gamma}{2}u^2(u^*)^2, \quad (5.38)$$

donde ε y γ son coeficientes reales, al sustituir (5.38) en la ecuación de Euler-Lagrange de la forma

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z^*} = 0, \quad (5.39)$$

se obtiene:

$$\frac{i}{2}(u_z) + \gamma u^2 u^* - \frac{\partial}{\partial t}(-\varepsilon u_t) - \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{i}{2}u\right) = 0 \quad (5.40)$$

desarrollando y haciendo que la función u^* sea el complejo conjugado de la función u .

Se llega a

$$iu_z + \varepsilon u_{tt} + \gamma |u|^2 u = 0, \quad (5.40)$$

que corresponde a la forma general de la ecuación NLS. De tal manera que esta ecuación puede ser obtenida de una densidad lagrangiana que satisface el principio de mínima acción lo cual es indicio que asociada a esta ecuación pueden existir ciertas cantidades que se conservan. Físicamente esta información es muy sustancial ya que permite estudiar de mejor forma las propiedades de la ecuación y sus implicaciones.

Recalcando la importancia de que la función lagrangiana debe ser real, aunque dependa de funciones complejas como el caso de la ecuación NLS, se verifica que corresponde a valores reales. Analizando (5.38)

$$\mathcal{L} = i(u^*u_z - uu_z^*) - u_t u_t^* + u^2(u^*)^2,$$

se puede observar que el segundo y tercer miembro corresponden a potencias de los módulos de la funciones u y u_t , ahora haciendo $u^*u_z = z$ y $uu_z^* = z^*$ en el primer miembro, al suponer que z tiene la forma $z = x - iy$, y realizar la resta $i[z - z^*]$ se obtiene:

$$i[z - z^*] = i[(x - iy) - (x + iy)] = i[-2iy] = 2y. \quad (5.41)$$

Que corresponde a una variable real, esto indica que la densidad lagrangiana aunque es real puede depender de funciones complejas. Esto extiende a un espectro más grande de ecuaciones, no solo reales sino también complejas, que pueden ser estudiadas usando el principio de mínima acción.

En este trabajo se estudiarán ecuaciones diferenciales parciales no lineales que tienen lagrangiana y describen pulsos en fibras ópticas, algunos ejemplos de estas son:

$$\text{NLS} : iu_z + \frac{1}{2}u_{tt} + |u|^2u = 0 \dots\dots\dots \text{pulsos de 7ps}$$

$$iu_z + u_{tt} - iu_{ttt} + |u|^2u = 0 \dots\dots\dots \text{pulsos de 1ps}$$

$$\text{cmKdV} : u_z - u_{ttt} - |u|^2u_t = 0 \dots\dots\dots \text{pulsos ultra cortos}$$

$$iu_z + u_{tt} + |u|^2u - |u|^4u = 0 \dots\dots\dots \text{pulsos intensos}$$

Tabla 5.1

Además de este tipo de ecuaciones aplicadas a la rama de los solitones ópticos, la gama de ecuaciones que se pueden formular usando el principio de mínima acción incluyen a todas las ecuaciones importantes de la física, es decir todas estas ecuaciones pueden ser deducidas de una lagrangiana. Este hecho interesante nos indica que en la forma de

operar, el universo siempre busca minimizar u optimizar ciertas cantidades. Una ecuación que ha jugado un rol histórico de gran relevancia en la historia y desarrollo de la física del siglo pasado es la ecuación de Schrödinger,

$$i\psi_t + \psi_{xx} - V(x)\psi = 0, \quad (5.42)$$

que describe el comportamiento de los sistemas cuánticos, donde ψ representa un campo conocido como la función de onda y $V(x)$ un potencial. Su lagrangiana es:

$$\mathcal{L}_\psi = i\frac{1}{2}(\psi^*\psi_t - \psi\psi_t^*) - \psi_x\psi_x^* - V(x)\psi\psi^* \quad (5.43)$$

donde ψ^* es el complejo conjugado de la función ψ . Al sustituir \mathcal{L}_ψ en la ec. de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_t^*} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_x^*} = 0, \quad (5.44)$$

se obtienen los siguientes términos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = \frac{1}{2}i(\psi_t) - V(x)\psi \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_t^*} = \frac{d}{dt} i\frac{1}{2}(-\psi) = -\frac{1}{2}i\psi_t \quad (5.46)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_x^*} = \frac{d}{dx}(-\psi_x) = -\psi_{xx}. \quad (5.47)$$

Al agruparlos obtenemos la ecuación de Schrödinger $i\psi_t + \psi_{xx} - V(x)\psi = 0$.

Aplicado al estudio de ecuaciones diferenciales no lineales procedemos de manera análoga. Para la cmKdV se propone la siguiente densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{cmKdV} = i(u_z u^* - u_z^* u) + i(u u_{ttt}^* - u^* u_{ttt}) + \frac{1}{2}i[u^2 u^* u_t^* - (u^*)^2 u u_t] \quad (5.48)$$

La ec. de Euler-Lagrange que satisface es un caso particular de (5.37) con la forma:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z^*} - \frac{\partial^3}{\partial t^3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ttt}^*} = 0, \quad (5.49)$$

los términos al sustituir \mathcal{L}_{cmKdV} en (5.49) son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} = iu_z - iu_{ttt} + \frac{1}{2}i[u^2u_t^* - 2u^*uu_t], \quad (5.50a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z^*} = -iu_z, \quad (5.50b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}iu^2u^* \right] = \frac{1}{2}i[2uu_tu^* + u^2u_t^*], \quad (5.50c)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ttt}^*} = i \frac{\partial^3}{\partial t^3} [u] = iu_{ttt}. \quad (5.50d)$$

Sustituyendo los términos (5.50) en (5.49):

$$2iu_z - 2iu_{ttt} + \frac{1}{2}i[u^2u_t^* - 2u^*uu_t] - \frac{1}{2}i[2uu_tu^* + u^2u_t^*] = 0, \quad (5.51)$$

agrupando términos iguales y multiplicar por $\frac{1}{2}$ se obtiene: $u_z - u_{ttt} - |u|^2u_t = 0$, esta ecuación corresponde a la cmKdV.

Para la ecuación generalizada de la mKdV que se estudia en esta tesis, nombrada GcmKdV, se propone la siguiente lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{gcmKdV} = i(u_zu^* - u_z^*u) - 2\alpha u_zu_z^* + i\varepsilon(uu_{ttt}^* - u^*u_{ttt}) + \frac{1}{2}i\gamma[u^2u^*u_t^* - (u^*)^2uu_t] \quad (5.52)$$

los términos de la ecuación Euler-Lagrange de la forma (5.49) para \mathcal{L}_{gcmKdV} serán:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} = iu_z - i\epsilon u_{ttt} + \frac{1}{2}i\gamma[u^2 u_t^* - 2u^* u u_t] \quad (5.53a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_z^*} = -iu_z - 2\alpha u_{zz} \quad (5.53b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t^*} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}i\gamma u^2 u^* \right] = \frac{1}{2}i\gamma[2uu_t u^* + u^2 u_t^*] \quad (5.53c)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ttt}^*} = i\epsilon \frac{\partial^3}{\partial t^3} [u] = i\epsilon u_{ttt} \quad (5.53d)$$

sustituyendo los términos (5.53) en la ecuación (5.49):

$$2iu_z - 2i\epsilon u_{ttt} + \frac{1}{2}i\gamma[u^2 u_t^* - 2u^* u u_t] + 2\alpha u_{zz} - \frac{1}{2}i\gamma[2uu_t u^* + u^2 u_t^*] = 0, \quad (5.54)$$

agrupando términos iguales y multiplicando por $\frac{1}{2}$ ambos lados de la ecuación se llega a:

$$iu_z + \alpha u_{zz} - i\epsilon u_{ttt} - i\gamma|u|^2 u_t = 0 \quad (5.55)$$

Una observación interesante es notar que la lagrangiana de la cual se obtiene una ecuación diferencial puede no ser única. En este caso la ec. GcmKdV resulta tener al menos otra lagrangiana de la cual puede ser deducida:

$$\mathcal{L} = i(u_z v - v_z u) + \alpha[vu_{zz} + uv_{zz}] + i\epsilon(uv_{ttt} - vu_{ttt}) + \frac{1}{2}i\gamma[u^2 v v_t - (v)^2 u u_t] \quad (5.56)$$

Aquí se aprovecha para introducir una notación más cómoda haciendo $u^* = v$. La forma de la ecuación de Euler-Lagrange para una lagrangiana de esta forma es:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_t} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{zz}} - \frac{\partial^3}{\partial t^3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{ttt}} = 0, \quad (5.57)$$

y los términos al sustituir la lagrangiana (5.56) serán:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = iu_z + \alpha u_{zz} - i\epsilon u_{ttt} + \frac{1}{2}i\gamma[u^2 v_t - 2vuu_t], \quad (5.58a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_z} = -iu_z, \quad (5.58b)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{zz}} = \alpha u_{zz}, \quad (5.58c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_t} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}i\gamma u^2 v \right] = \frac{1}{2}i\gamma[2uu_t v + u^2 v_t], \quad (5.58d)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{ttt}} = i\epsilon \frac{\partial^3}{\partial t^3} [u] = i\epsilon u_{ttt}. \quad (5.58e)$$

Sustituyendo (5.58) en (5.57):

$$2iu_z - 2i\epsilon u_{ttt} + \frac{1}{2}i\gamma[u^2 v_t - 2vuu_t] + 2\alpha u_{zz} - \frac{1}{2}i\gamma[2uu_t v + u^2 v_t] = 0 \quad (5.59)$$

agrupando términos iguales y multiplicando por $\frac{1}{2}$ ambos lados de la ecuación se obtiene de nuevo la ec. GcmKdV:

$$iu_z + \alpha u_{zz} - i\epsilon u_{ttt} - i\gamma|u|^2 u_t = 0. \quad (5.60)$$

Esto podría implicar resultados interesantes, ya que si de una lagrangiana se pueden obtener ciertas cantidades conservadas se esperaría que de otra lagrangiana diferente se puedan obtener diferentes cantidades que no aparezcan al analizar la primera, estas cantidades son de gran relevancia pues contienen información acerca del comportamiento de la ecuación diferencial analizada y sus soluciones, tal es el caso para la ec. GcmKdV. Los métodos para obtener las cantidades conservadas asociadas será el teorema de Noether y el método variacional de Anderson, además, este último

nos será de gran utilidad para analizar las soluciones perturbadas de la ec. GcmKdV lo cual se desarrolla en los capítulos posteriores.

CAPÍTULO 6.

MÉTODO VARIACIONAL DE ANDERSON (MVA).

6.1 Introducción al MVA.

En este capítulo se ilustrará el uso y aplicación del método variacional de Anderson (MVA) [35] como una poderosa herramienta analítica aproximada para analizar y describir las principales características de la evolución de las soluciones (pulsos ópticos en fibras ópticas) de las ecuaciones NLS y algunas extensiones importantes (las ecuaciones Hayata-Koshiba I y II). Este método además, permite caracterizar las soluciones de dichas ecuaciones al ser perturbadas, es decir, permite conocer si se trata de soluciones estables, semi-estables o inestables.

Comenzaremos desarrollando paso a paso cómo aplicar el MVA al estudio de las soluciones perturbadas de la ecuación NLS y cómo se comparan éstas a la familia tipo solitones exactos que se analizó en el apartado 3.1.

Considerando la ecuación NLS:

$$iu_z + \varepsilon u_{tt} + \gamma |u|^2 u = 0 \quad (6.1)$$

en el capítulo 5 se demostró que (6.1) se puede deducir de la siguiente lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (u^* u_z - u u_z^*) - \varepsilon u_t u_t^* + \frac{\gamma}{2} u^2 (u^*)^2. \quad (6.2)$$

Las soluciones que se analizarán parten de considerar como condición inicial de la solución $u(z, t)$ un pulso con perfil fácil de manipular para el laboratorio, esto es, por ejemplo una gaussiana que satisfaga la ecuación NLS (6.1), de la forma:

$$u(0, t) = A_0 e^{-\frac{t^2}{2a_0^2}}, \quad (6.3)$$

donde A_0 es la amplitud máxima y a_0 es el ancho de pulso característico. Recordemos que la variable de evolución en la ecuación GmcKdV es la variable z , así que la condición inicial $u(z = 0, t)$ será el pulso que se enviará del laboratorio a través de la fibra óptica. Se espera que la condición inicial evolucione de acuerdo a una función de onda viajera de prueba llamada “*trial function*” o “*ansatz*”, de la forma:

$$u(z, t) = A(z) e^{-\frac{t^2}{2a^2(z)}} e^{i[b(z)t^2 + h(z)]}, \quad (6.4)$$

donde se ha elegido una función con una amplitud $A(z)$ de la misma forma que la condición inicial (6.3) pero en función de z y con un factor oscilatorio que incluya una variación o modulación cuadrática en la fase $b(z)t^2$ (llamado “*chirp*”), este último término se refiere a la dependencia temporal de la variación de la frecuencia instantánea del pulso y está relacionado directamente con el estudio del factor de compresión y descompresión del ancho del pulso $a(z)$, es decir con el desarrollo de los pulsos ultra cortos (Diels, y Rudolph [36]).

Usando la función de prueba (6.4) obtenemos los términos de la densidad lagrangiana (6.2). Para el primer término:

$$\begin{aligned} u_z &= \left[A'(z) + A(z) \left(\frac{a'(z)}{a^3(z)} t^2 \right) + iA(z)b'(z)t^2 + iA(z)h'(z) \right] e^{-\frac{t^2}{2a^2(z)}} e^{i[b(z)t^2 + h(z)]} \\ \Rightarrow u_z^* &= \left[A'(z) + A(z) \left(\frac{a'(z)}{a^3(z)} t^2 \right) - iA(z)b'(z)t^2 - iA(z)h'(z) \right] e^{-\frac{t^2}{2a^2(z)}} e^{-i[b(z)t^2 + h(z)]} \\ \therefore uu_z^* &= \left[A(z)A'(z) + A^2(z) \left(\frac{a'(z)}{a^3(z)} t^2 \right) - iA^2(z)b'(z)t^2 - iA^2(z)h'(z) \right] e^{-\frac{t^2}{a^2(z)}} \quad (6.5) \end{aligned}$$

como en el campo de los complejos se cumple que sí $z = x - iy$, entonces

$$\frac{i}{2}(z - z^*) = \frac{i}{2}(-2iy) = y \equiv \text{Im}(z). \quad (6.6)$$

Aplicando este resultado para (6.5):

$$\frac{1}{2}i(uu_z^* - u^*u_z) = \text{Im}(uu_z^*) = [A^2(z)b'(z)t^2 + A^2(z)h'(z)]e^{\frac{-t^2}{a^2(z)}}. \quad (6.7)$$

Para el segundo término de la densidad langrangiana se tiene que:

$$\begin{aligned} u_t &= \left[A(z) \left(-\frac{t}{a^2(z)} \right) + A(z)2ib(z)t \right] e^{-\frac{t^2}{2a^2(z)}} e^{i[b(z)t^2+h(z)]} \\ \Rightarrow u_t u_t^* &= \left| \frac{A^2(z)t^2}{a^4(z)} + 4b^2(z)A^2(z)t^2 \right| e^{\frac{-t^2}{a^2(z)}}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Para el tercer término de (6.2):

$$u^2(u^*)^2 = A^2(z)e^{\frac{-t^2}{a^2(z)}} e^{2i[b(z)t^2+h(z)]} \left[A^2(z)e^{\frac{-t^2}{a^2(z)}} e^{-2i[b(z)t^2+h(z)]} \right] = A^4(z)e^{\frac{-2t^2}{a^2(z)}}. \quad (6.9)$$

Sustituyendo (6.7), (6.8) y (6.9) en (6.2):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= [A^2(z)b'(z)t^2 + A^2(z)h'(z)]e^{\frac{-t^2}{a^2(z)}} - \varepsilon \left| \frac{A^2(z)t^2}{a^4(z)} + 4b^2(z)A^2(z)t^2 \right| e^{\frac{-t^2}{a^2(z)}} \\ &\quad + \frac{1}{2}\gamma A^4(z)e^{\frac{-2t^2}{a^2(z)}}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Ahora bien, procedemos a calcular el lagrangiano promedio:

$$L = \langle \mathcal{L} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L} dt =$$

$$\begin{aligned}
& A^2(z)b'(z) \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{\frac{-t^2}{a^2(z)}} dt + A^2(z)h'(z) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{a^2(z)}} dt \\
& -\varepsilon \left(\frac{A^2(z)}{a^4(z)} + 4b^2(z)A^2(z) \right) \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{\frac{-t^2}{a^2(z)}} dt + \frac{A^4(z)}{2} \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-2t^2}{a^2(z)}} dt, \quad (6.11)
\end{aligned}$$

donde usamos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{a^2(z)}} dt = a \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = a\sqrt{\pi}, \quad \text{con } \tau = \frac{t}{a} \quad (6.12a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-2t^2}{a^2(z)}} dt = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \text{con } \tau = \frac{\sqrt{2}t}{a} \quad (6.12b)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{\frac{-t^2}{a^2(z)}} dt = a^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \tau^2 e^{-\tau^2} d\tau = a^3 \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \text{con } \tau = \frac{t}{a}. \quad (6.12c)$$

Entonces el lagrangiano promedio queda de la siguiente forma:

$$L = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[a^3 A^2 b' + 2a A^2 h' - \varepsilon \frac{A^2}{a} - 4\varepsilon a^3 b^2 A^2 + a\gamma \frac{A^4}{\sqrt{2}} \right]. \quad (6.13)$$

El siguiente paso, consiste en aplicar el principio de mínima acción al lagrangiano promedio (6.13). En el Capítulo 5 se dedujo que esto es equivalente a resolver la ecuación de Euler-Lagrange para cada una de las funciones de las cuales depende el lagrangiano promedio $L[A(z), a(z), b(z), h(z)]$. Recordemos que estas funciones son justamente las cantidades que definen a nuestra función de prueba. Entonces lo anterior se resume en resolver las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial L}{\partial h} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial h'} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} (2aA^2) = 0, \quad (6.14)$$

por lo que $a(x)A^2(z) = cte$, a esta constate se le nombrará como la energía E_0 . La ecuación de Euler-Lagrange correspondiente al término “chirp” $b(z)$ será:

$$\frac{\partial L}{\partial b} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial b'} = 0 \Rightarrow -8 \varepsilon a^3 b A^2 - \frac{\partial}{\partial z} (a^3 A^2) = 0, \quad (6.15)$$

usando la regla de la cadena y multiplicando ambos lados de la ecuación por $(1/Aa^2)$:

$$8 \varepsilon abA + 3a'A + 2A'a = 0 \quad (6.16)$$

como de (6.14), $\frac{\partial}{\partial z} (aA^2) = a'A^2 + 2AA'a = 0$, tenemos que $a'A = -2A'a$.

Sustituyendo esto en (6.16), entonces:

$$a' = -4 \varepsilon ab, \quad (6.17)$$

Y derivando de nuevo esta expresión respecto a la variable z , se tienen que:

$$a'' = \frac{d(-4 \varepsilon ab)}{dx} = -4 \varepsilon (ab' + a'b). \quad (6.18)$$

Por otra parte la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente al ancho de pulso $a(z)$ es:

$$\frac{dL}{da(z)} = 0 \Rightarrow 3ab' + 2\frac{h'}{a} + \frac{\varepsilon}{a^3} - 12\varepsilon ab^2 + \gamma \frac{A^2}{a\sqrt{2}} = 0, \quad (6.19)$$

donde se multiplicó ambos lados por $(1/aA^2)$. Para la función de amplitud $A(z)$:

$$\frac{dL}{dA(z)} = 0 \Rightarrow ab' + 2\frac{h'}{a} - \frac{\varepsilon}{a^3} - 4\varepsilon ab^2 + \frac{2}{a\sqrt{2}}\gamma A^2 = 0 \quad (6.20)$$

donde se multiplicó ambos lados por $(1/2Aa^2)$. Restando (6.19) con (6.20):

$$ab' - 4\varepsilon ab^2 + \varepsilon \frac{1}{a^3} - \frac{\gamma}{2\sqrt{2}a} A^2 = 0. \quad (6.21)$$

Sustituyendo la relación $-4\varepsilon ab = a'$ y multiplicando la ecuación por (-4ε) por ambos lados, se obtiene del lado derecho la relación (6.18) para a'' :

$$\begin{aligned}
 -4\varepsilon(ab' + a'b) &= -4\varepsilon\left(-\varepsilon\frac{1}{a^3} + \frac{\gamma A^2}{2\sqrt{2}a}\right) \\
 \Rightarrow a'' &= -\left(-4\varepsilon^2\frac{1}{a^3} + \sqrt{2}\varepsilon\frac{\gamma A^2}{a}\right) \\
 &= -\frac{d}{da}\left(2\varepsilon^2\frac{1}{a^2} - \sqrt{2}\varepsilon\gamma\frac{E_0}{a}\right), \tag{6.22}
 \end{aligned}$$

donde $E_0 = aA^2$ es la energía conservada según (6.14). Esta expresión tiene la estructura análoga a la de una partícula de masa unitaria con movimiento unidimensional confinado en un potencial V , esto es:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2a}{dz^2} + \frac{dV(a)}{da} = 0, \tag{6.23}$$

el potencial está dado por:

$$V(a) = 2\varepsilon^2\frac{1}{a^2} - \sqrt{2}\varepsilon\gamma\frac{E_0}{a} + c, \tag{6.24}$$

donde c es una constante determinada por las condiciones iniciales. Resolver la ecuación (6.23), para la función de ancho del pulso $a(z)$, reduce la solución del problema variacional, pues una vez conocida $a(z)$, el parámetro de frecuencia “*chirp*” $b(z)$ queda determinado por la ecuación (6.17), así como la evolución de la amplitud $|A(z)|^2$ según (6.14).

Para un análisis de la evolución del parámetro de ancho del pulso $a(z)$ se graficará el potencial (6.24), asumiendo que la partícula imaginaria que se mueve en el potencial parte del reposo con una velocidad constante, es decir, en $z=0$ se tiene $a(0) = a_0$,

$A(0) = A_0$ y $b(0) = h(0) = 0$, estos son los valores necesarios para que el “*ansatz*” (6.4) tome la forma del pulso inicial (6.3); sustituyendo estos valores en la ecuación (6.14) obtenemos que $[da(z=0)/dz = 0]$ lo cual implica también que $a''(0) = 0$. Usando este resultado en (6.23) se tiene que:

$$\left. \frac{dV}{da} \right|_{a=a_0} = 0, \quad (6.25)$$

entonces, la constante c del potencial que depende de las condiciones iniciales será:

$$c = V(a_0) = 2\varepsilon^2 \frac{1}{a_0^2} - \sqrt{2}\varepsilon\gamma \frac{E_0}{a_0}, \quad (6.26)$$

sustituyendo (6.26) en (6.24), es fácil notar que el comportamiento del potencial será:

$$V(a) = \begin{cases} \infty, & \text{si } a \rightarrow 0 \\ c, & \text{si } a \rightarrow \infty \end{cases}$$

Esto indica, que el potencial cae asintóticamente al valor de la constante c , sin embargo, los valores de $V(a)$ pueden ser menores (si el segundo termino de (6.24) es mayor que el primero), entonces debe existir un valor mínimo local definido por $V'(a_m) = 0$, donde $a_m = (4\varepsilon/\sqrt{2}\gamma E_0)$.

Este pozo de potencial muestra un punto de estabilidad en a_m , donde la partícula imaginaria que parta de una posición inicial tal que $V(a_0) < c$, se deslizara abajo hacia el fondo del pozo a_m no importa si parte del lado derecho o izquierdo, es decir, las soluciones perturbadas de la NLS que satisfagan esta condición presentaran un comportamiento estable en su anchura de pulso $a(z)$ (ver curva 1 de la figura 6.1). Por otro lado, si se omite la presencia del termino no lineal, es decir, tomando $\gamma=0$ se obtiene la curva 2 (figura 6.1) para la forma del potencial $V(a)$, donde decae a un valor

asintótico $V(a \rightarrow \infty) = d$, es decir, que aunque el valor del potencial se mantenga constante el valor de a crecerá indefinidamente, es decir, el pulso se dispersará totalmente, pues $a \rightarrow \infty$ y por tanto $A \rightarrow 0$. Este resultado nos indica que justamente el comportamiento estable de la curva 1, es resultado de la conjugación de los términos lineales y no lineales de la ecuación NLS.

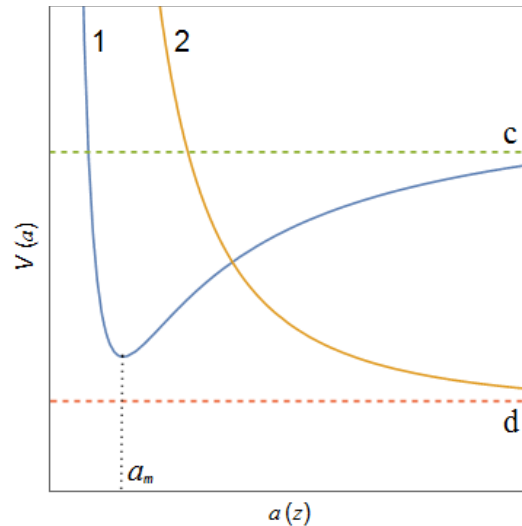


Figura 6.1. Potencial $V(a)$.

La mayor ventaja del MVA es que provee de expresiones analíticas explícitas, aunque aproximadas, de las cantidades que definen la soluciones de la ecuación NLS, es decir, se obtuvieron expresiones para el factor de compresión/descompresión del ancho del pulso $a(z)$, la amplitud máxima de intensidad del campo $A(z)$, y la frecuencia inducida chirp $b(z)$. Veamos a continuación como aplicar el MVA para analizar las soluciones de ecuaciones generalizadas de la NLS.

6.2 Estabilidad de las soluciones de la ecuación Hayata-Koshiba I.

Dos versiones extendidas de la ecuación no lineal de Schrodinger NLS son:

$$iu_x + Du_{tt} - \gamma_1|u|u + \gamma_2|u|^2u = 0 \quad (6.27a)$$

$$iu_x + Du_{tt} - \gamma_1 |u|^2 u + \gamma_2 |u|^4 u = 0, \quad (6.27b)$$

donde $u(x, t)$ representa la amplitud de un campo complejo y D , γ_1 y γ_2 son constantes reales. Hayata y Koshiba [37] encontraron soluciones algebraicas del tipo ondas solitarias oscuras y brillantes. Determinar qué tan estables son estas soluciones fue una de las principales interrogantes que Hayata y Koshiba probaron con experimentos numéricos; concluyendo que estas soluciones poseen características de comportamiento tipo solitón.

El método variacional de Anderson ofrece un entendimiento profundo de las propiedades de estabilidad de las soluciones algebraicas tipo solitón, usando de manera más sencilla métodos analíticos en lugar de numéricos. Veamos a continuación cómo se aplica en el caso de las ecuaciones (6.27a) y (6.27b), los resultados están basados en el desarrollo realizado por Fujioka y Espinosa [38].

Para la ecuación Hayata-Koshiba I (6.27a), nos basaremos en soluciones algebraicas cuya condición inicial sea de la forma:

$$u(0, t) = \frac{1}{M + Nt^2} \quad (6.28)$$

donde M y N son parámetros diferentes. Una forma razonable de elegir la función de prueba es elegir una función con una amplitud de la forma (6.28) pero con funciones de x en lugar de los parámetros M y N , y con un factor oscilatorio que incluya una variación cuadrática en la fase (llamado “*chirp*”) es:

$$u(x, t) = \frac{1}{f(x) + g(x)t^2} e^{i[h(x)+b(x)t^2]} \quad (6.29)$$

Sustituyendo (6.29) en la densidad lagrangiana de la ecuación (6.27a):

$$L = iu^*u_x - iuu_x^* - \frac{4}{3}\gamma_1|u|^3 + \gamma_2|u|^4 - 2D|u_t|^2 \quad (6.30)$$

y calculando el lagrangiano promedio:

$$\langle L \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} L(x, t) dt \quad (6.31)$$

se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \langle L \rangle = & -\frac{\pi h'}{g^{1/2} f^{3/2}} - \frac{\pi(b' + 4Db^2)}{g^{3/2} f^{1/2}} - \frac{\pi\gamma_1}{2g^{1/2} f^{5/2}} \\ & - \frac{5\pi\gamma_2}{16g^{1/2} f^{7/2}} - \frac{\pi Dg^{1/2}}{2f^{5/2}}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Aplicando el principio de mínima acción $\delta \int \langle L \rangle dx = 0$, se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange para cada una de las funciones del lagrangiano promedio: $g(x)$, $b(x)$, $h(x)$ y $f(x)$. De esta forma se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$g(x) = \frac{\exp(\delta)}{f^3(x)} \quad (6.33)$$

$$b(x) = \frac{f'(x)}{2Df(x)} \quad (6.34)$$

$$h'(x) = -\frac{f^3 f'' + (ff')^2}{6D \exp(\delta)} - \frac{5\gamma_1}{6f} + \frac{35\gamma_2}{48f^2} - \frac{5D \exp(\delta)}{6f^4} \quad (6.35)$$

$$ff'' + (f')^2 - \frac{D\gamma_1 \exp(\delta)}{4f^3} + \frac{5D\gamma_2 \exp(\delta)}{16f^4} - \frac{D^2 \exp(2\delta)}{f^6} = 0 \quad (6.36)$$

donde δ es una constante cuyo valor depende de los parámetros M y N de la condición inicial (6.28). Se puede observar que las funciones $g(x)$, $b(x)$ y $h(x)$ quedan determinadas por $f(x)$. Para estudiar el comportamiento de $f(x)$ es conveniente introducir el siguiente cambio de variables:

$$f(x) = a^{\frac{1}{2}}(x) \quad (6.37)$$

sustituyendo esto en la ecuación (6.36), se obtiene:

$$\frac{1}{2}(a')^2 + Dexp(\delta) \left(\frac{Dexp(\delta)}{a^2} - \frac{5\gamma_2}{8a} + \frac{\gamma_1}{a^{1/2}} \right) = E_T \quad (6.38)$$

donde E_T es una constante cuyo valor depende también de los parámetros M y N de la condición inicial (6.28). La ecuación (6.38) se puede ver como la ecuación de movimiento de una partícula de masa unitaria con energía total E_T , moviéndose en una dimensión bajo la acción del potencial:

$$V(a) = Dexp(\delta) \left(\frac{Dexp(\delta)}{a^2} - \frac{5\gamma_2}{8a} + \frac{\gamma_1}{a^{1/2}} \right). \quad (6.39)$$

La forma de la curva de este potencial depende críticamente del valor del parámetro δ .

Si consideramos D , γ_1 y γ_2 como valores positivos, y se satisface la siguiente relación:

$$\delta > \delta_{cr} \equiv \ln \left[\frac{\gamma_1}{D} \left(\frac{5\gamma_2}{12\gamma_1} \right)^3 \right] \quad (6.40)$$

entonces, la función $V(a)$ será estrictamente monótona decreciente, lo cual significa que una partícula imaginaria moviéndose dentro de este potencial se deslizará hacia abajo tomando cada vez valores más pequeños de potencial, mientras tanto la función $a(x)$ incrementará indefinidamente, esto implica que la amplitud del pulso tenderá a cero.

Si $\delta = \delta_{cr}$ se tiene casi la misma situación que el caso anterior, con la excepción de que en este caso existe un punto crítico donde $V'(a) = 0$ que representa un punto de equilibrio inestable. En este caso también $a(x)$ crecerá indefinidamente, lo que se implica que la altura del pulso tenderá a cero, a excepción de que las condiciones

iniciales sean tal que la partícula ficticia moviéndose en el potencia $V(a)$ arrive al punto donde $V'(a) = 0$ con energía cinética cero.

Por último caso, si $\delta < \delta_{cr}$, $V(a)$ define un pozo de potencial con una barrera de ancho finito después del cual el potencial continua decreciendo asintóticamente, el potencial tendrá dos puntos críticos a_f y a_p donde $V'(a_{f,p}) = 0$ los cuales se ubican en el fondo del pozo (valor mínimo a_f) y en el pico de la barrera de potencial (valor máximo local a_p).

Para una partícula ficticia moviéndose bajo la acción de este potencial se tienen dos casos, el primero, se da cuando la partícula esta confinada dentro del pozo de potencial con un movimiento oscilatorio alrededor del punto de equilibrio a_f . Para que esto suceda además de la condición $\delta < \delta_{cr}$ es necesario que la energía no exceda el potencial de la barrera $E_T < V(a_p)$ y que la condición inicial no exceda al pico de la barrera $a(0) < a_p$. Si estas condiciones no se cumplen la partícula ficticia se desplazará más allá de la barrera de potencial ($a > a_p$) lo cual implica que $a(x)$ crecerá indefinidamente mientras el potencial tiende a cero lo cual ocurrirá también con la altura del pulso. En conclusión: dependiendo de los valores iniciales $f(0)$ y $g(0)$, el pulso podrá ser una solución estable (si $\delta < \delta_{cr}$ y tenemos un pozo de potencial), una solución inestable (si $\delta = \delta_{cr}$ y las condiciones iniciales son tales que la partícula ficticia se encuentra justo sobre la barrera de potencial), o el pulso inicial se dispersará desde el principio (si $\delta > \delta_{cr}$) (ver figura 6.2).

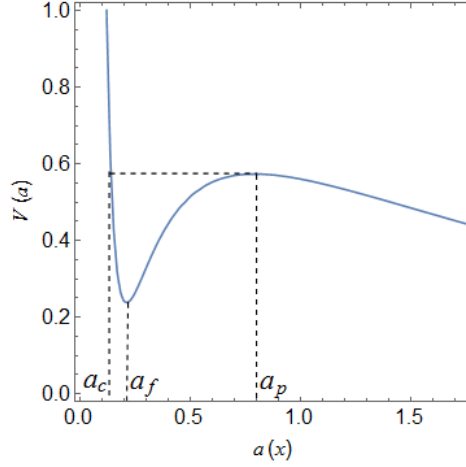


Figura 6.2.

6.3 Estabilidad de las soluciones de la ecuación Hayata-Koshiba II.

Las propiedades de estabilidad de las ondas solitarias algebraicas, soluciones de la ecuación (6.27b), pueden ser determinadas a partir de considerar el comportamiento de un pulso gaussiano. De manera análoga al caso anterior se indagará en la estabilidad partiendo de una condición inicial de la forma:

$$u(0, t) = A_0 e^{-t^2/2a_0^2} \quad (6.41)$$

que evolucionará de acuerdo a una función de prueba de la forma:

$$u(x, t) = A(x) e^{-\frac{t^2}{2a^2(x)}} e^{i[h(x)+b(x)t^2]}. \quad (6.42)$$

Al sustituir esta función de prueba en la densidad lagrangiana de la ecuación (6.27b):

$$L = iu^*u_x - iuu_x^* - \gamma_1|u|^4 + \frac{2}{3}\gamma_2|u|^6 - 2D|u_t|^2$$

y calculando el lagrangiano promedio, se obtiene:

$$\langle L \rangle = -2\pi^{1/2}h'aA^2 - \pi^{1/2}b'a^3A^2 - \frac{(\pi^{1/2}DA^2)}{a} - 4\pi^{1/2}Db^2a^3A^2$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \gamma_1 a A^4 + \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/2} \gamma_2 a A^6. \quad (6.43)$$

Aplicando la condición de mínima acción $\delta \int \langle L \rangle dx = 0$, obtenemos de las correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange de las funciones $A(x)$, $a(x)$, $h(x)$ y $b(x)$ y se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$a = \frac{C}{A^2} \quad (6.44)$$

$$b = -\frac{1}{2D} \left(\frac{A'}{A}\right) \quad (6.45)$$

$$h' = \frac{D}{2a^2} - 6Db^2 a^2 - \frac{3}{2} b' a^2 - \frac{\gamma_1 A^2}{2^{2/3}} + \frac{\gamma_2 A^4}{3^{2/3}} \quad (6.46)$$

$$A'' - 3 \frac{(A')^2}{A} + \frac{D\gamma_1}{2^{1/2} C^2} A^7 - \frac{2D}{C^2} \left(\frac{2\gamma_2}{3^{3/2}} - \frac{D}{C^2}\right) A^9 = 0 \quad (6.47)$$

donde $C = a_0 A_0^2$ es una constante cuyo valor depende de la condición inicial. Se puede observar que los valores de $a(x)$, $b(x)$ y $h(x)$ están determinados por la función $A(x)$.

Si aplicamos el cambio de variable

$$A(x) = \frac{1}{q^{1/2}(x)}, \quad (6.48)$$

para la función $A(x)$, al sustituir en la ecuación (6.47), se obtiene una ecuación más simple de la forma:

$$q'' + \frac{d}{dq} \left[\frac{2D}{C^2} \left(\frac{D}{C^2} - \frac{2\gamma_2}{3^{3/2}}\right) \frac{1}{q^2} + \frac{2^{1/2} D \gamma_1}{C^2 q} \right] = 0. \quad (6.49)$$

Esta ecuación puede considerarse como la ecuación de movimiento de una partícula de masa unitaria moviéndose en una dimensión bajo la acción del potencial:

$$V(q) = -\frac{R}{q^2} + \frac{S}{q} \quad (6.49)$$

donde se ha definido S y R como:

$$R \equiv \frac{2D}{C^2} \left(\frac{2\gamma_2}{3^{3/2}} - \frac{D}{C^2} \right), \quad (6.50)$$

$$S \equiv \frac{2^{1/2} D \gamma_1}{C^2}. \quad (6.51)$$

Para apreciar cómo comienza a moverse esta partícula imaginaria bajo la acción del potencial $V(q)$, consideramos que la condición inicial tiene la forma (6.41) lo cual implica que tenemos los valores iniciales $a(x) = 0$, $b(x) = 0$, Al sustituir esto en las ecuaciones (6.44) y (6.45) se obtiene que $A'(x = 0) = 0$ y $q'(x = 0) = 0$ y esto indica que en $x=0$ la velocidad q' de la partícula imaginaria es cero.

La forma de la curva del potencial $V(q)$ depende del signo que tenga el coeficiente $(-R)$ del término q^{-2} . Si el coeficiente es positivo o cero, $V(q)$ será una función estrictamente monótona decreciente para $q > 0$, y por lo tanto una partícula localizada en este potencial con velocidad inicial cero se deslizará hacia abajo acercándose a cero; esto quiere decir que mientras $q(x)$ aumenta, la amplitud del pulso $A(x)$ decrece tendiendo a cero. Teniendo en cuenta que $C = a_0 A_0^2$ y la definición (6.50), el signo del coeficiente $(-R)$ será positivo o cero si se cumple la condición:

$$A_0 \leq \left(\frac{3^{3/2} D}{2\gamma_2 a_0^2} \right)^{1/4} \equiv A_S. \quad (6.52)$$

Por otra parte, si $A_0 > A_S$ el signo del coeficiente $(-R)$ será negativo y la forma del potencial $V(q)$ toma una forma diferente. Esta forma del potencial tendrá un pico (valor supremo) que corresponde a un punto de equilibrio inestable para la partícula

imaginaria. Aplicando la condición de máximo $V'(q_{mx}) = 0$, se encuentra que el pico está localizado en $q_{mx} = 2R/S$, sustituyendo en (6.49), el valor del potencial en ese punto será:

$$V(q_{mx}) = \frac{S^2}{4R}. \quad (6.52)$$

Conforme la partícula imaginaria se mueva en el potencial $V(q)$ con velocidad inicial cero, si $q(0) > q_{mx}$ la partícula se deslizará hacia abajo tendiendo a un valor de potencial cero mientras el valor de q crecerá indefinidamente, es decir, por la forma del potencial vemos que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = \infty$$

y esto implica que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} A(x) = 0$$

Por otro lado, si la partícula parte de $q(0) < q_{mx}$, el valor de $q(x)$ cae a cero en un pequeño intervalo y la amplitud $A(x) = 1/\sqrt{q(x)}$ crece rápidamente e indefinidamente, es decir, diverge. Una característica interesante del crecimiento de $A(x)$ es que sucede dentro de un intervalo finito, es más, se puede calcular el valor x_d tal que:

$$\lim_{x \rightarrow x_d} A(x) = \infty$$

De tal manera que si las soluciones de la ecuación Hayata-Koshiba II son perturbadas las condiciones $q(0) > q_{mx}$ y $q(0) < q_{mx}$ nos indican que la amplitud de las soluciones $A(x)$ decaerá rápidamente a cero o explotará a infinito de tal manera se concluye que estas soluciones no serán estables.

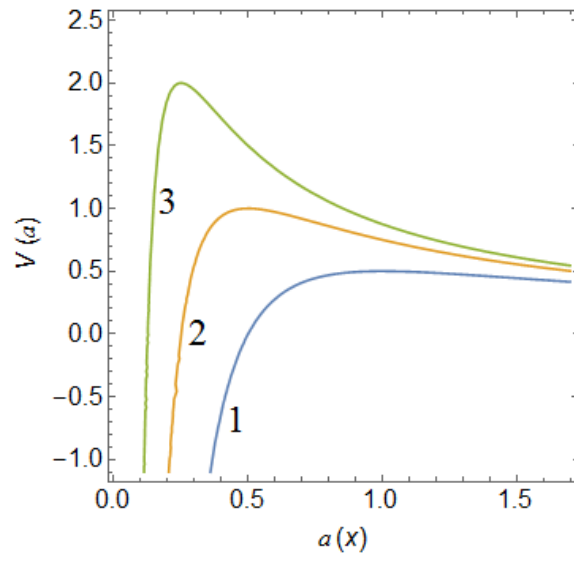


Figura 6.3. Potenciales para diferentes valores de los coeficientes.

CAPÍTULO 7.

MÉTODO VARIACIONAL DE ANDERSON APLICADO A LA ECUACIÓN GCMKDV.

7.1 Solución de la ec. GcmKdV a través del método variacional de Anderson.

En el capítulo 5, se demostró que al sustituir la siguiente densidad lagrangiana:

$$L = i(u_z u^* - u^*_z u) - \alpha u_z u^*_z + i\varepsilon(uu^*_{ttt} - u^*u_{ttt}) + \frac{1}{2}i\gamma[u^2 u^* u^*_t - (u^*)^2 u u_t], \quad (7.1)$$

en la ecuación de Euler-Lagrange se obtiene la ecuación GcmKdV:

$$iu_z + \alpha u_{zz} - i\varepsilon u_{ttt} - i\gamma|u|^2 u_t = 0. \quad (7.2)$$

El método variacional de Anderson visto en el capítulo 6, parte de proponer una función de prueba o *Anzant*¹ de la siguiente forma:

$$u(z, t) = A(z) \operatorname{sech} \left[\frac{t - V(z)}{W(z)} \right] \exp\{i[Q(z) + R(z)t + P(z)t^2]\}, \quad (7.3)$$

esta función, está basada en el hecho de considerar que el pulso inicial enviado por el laboratorista a través de la fibra óptica es de la forma:

$$u(0, t) = A_0 \operatorname{sech} \left[\frac{t - V_0}{W_0} \right] \exp[iR_0 t], \quad (7.3b)$$

¹ La idea de usar un ansatz con parámetros libres en el Langragiano había sido utilizado antes por Whitham ya en problemas de ondas no lineales, Whitham, G. B., & Ting, T. C. T. (1976). Linear and Nonlinear Waves.

(ver figura 7.1), y evoluciona según la función de prueba (7.3), donde el parámetro $P(z)$ del término cuadrático de la fase, llamado “*chirp*”, está asociado con la capacidad de propagar pulsos ultracortos del orden de femtosegundos.

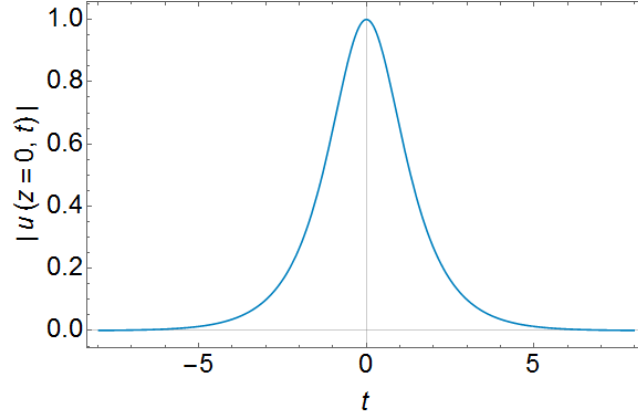


Figura 7.1 Condición inicial para la función de prueba (7.3)

Lo que prosigue en este método es encontrar los términos correspondientes a la densidad lagrangiana (7.1) usando la función de prueba (7.3).

Para el primer término, $i(u_z u^* - u_z^* u)$, recordamos que para una función de variable compleja de la forma $z = x + iy$, se tienen que

$$i(z - z^*) = x + iy - (x - iy) = -2y = -2Im(z), \quad (7.4)$$

haciendo $z = u_z u^*$, entonces,

$$i(u_z u^* - u_z^* u) = -2Im(u_z u^*). \quad (7.5)$$

Basta con calcular el término $u_z u^*$ usando el anzant (7.3), su derivada respecto a z es:

$$u_z = [A' sech(\lambda) - A sech(\lambda) \tanh(\lambda) \lambda' + i A sech(\lambda) \phi'] \exp\{i\phi\}, \quad (7.6)$$

donde:

$$\lambda = \frac{t - V(z)}{W(z)}, \quad (7.7)$$

$$\lambda' = \frac{\partial \lambda}{\partial z} = -\frac{V'W + W'(t - V)}{W^2}, \quad (7.8)$$

$$\phi = [Q(z) + R(z)t + P(z)t^2], \quad (7.9)$$

$$\phi' = \frac{\partial \phi}{\partial z} = [Q' + R't + P't^2]. \quad (7.10)$$

Esta notación facilitará los cálculos siguientes. De (7.6) y recordando que $u^* = A \operatorname{sech}(\lambda) \exp\{-i\phi\}$ es el complejo conjugado de la función de prueba, entonces:

$$u_z u^* = (AA' \operatorname{sech}^2(\lambda) - A^2 \operatorname{sech}^2(\lambda) \tanh(\lambda) \lambda' + iA^2 \operatorname{sech}^2(\lambda) \phi'). \quad (7.11)$$

Así, aplicando (7.5):

$$i(u_z u^* - u_z^* u) = -2\operatorname{Im}(u_z u^*) = -2A^2 \operatorname{sech}^2(\lambda) \phi'. \quad (7.12)$$

El segundo término de la lagrangiana evaluada en la función de prueba, $\alpha u_z u_z^*$ será:

$$\begin{aligned} u_z u_z^* &= (A' \operatorname{sech}(\lambda) - A \operatorname{sech}(\lambda) \tanh(\lambda) \lambda' + iA \operatorname{sech}(\lambda) \phi') \\ &\times (A' \operatorname{sech}(\lambda) - A \operatorname{sech}(\lambda) \tanh(\lambda) \lambda' - iA \operatorname{sech}(\lambda) \phi'). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Esta expresión corresponde justamente a la definición de módulo al cuadro de una función compleja $|a + ib|^2 = a^2 + b^2$, donde, en este caso, $a = A' \operatorname{sech}(\lambda) - A \operatorname{sech}(\lambda) \tanh(\lambda) \lambda'$ y $b = A \operatorname{sech}(\lambda) \phi'$. Entonces

$$\begin{aligned} u_z u_z^* &= (A' \operatorname{sech}(\lambda) - A \operatorname{sech}(\lambda) \tanh(\lambda) \lambda')^2 + (A \operatorname{sech}(\lambda) \phi')^2 \\ \Rightarrow u_z u_z^* &= A'^2 \operatorname{sech}^2(\lambda) - 2AA' \operatorname{sech}^2(\lambda) \tanh(\lambda) \lambda' \\ &+ A^2 \operatorname{sech}^2(\lambda) \tanh^2(\lambda) \lambda'^2 + A^2 \operatorname{sech}^2(\lambda) \phi'^2. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Para el tercer término de la densidad lagrangiana, $i\varepsilon(uu_{ttt}^* - u^*u_{ttt})$, aplicando la relación (7.5), se tiene que:

$$i(uu_{ttt}^* - u^*u_{ttt}) = -2Im(uu_{ttt}^*). \quad (7.16)$$

Para hallar u_{ttt}^* , desarrollados las derivadas parciales de u respecto a t :

$$u_t = -Asech(\lambda)tanh(\lambda)\dot{\lambda}exp\{i\phi\} + Asech(\lambda)(i\dot{\phi})exp\{i\phi\}, \quad (7.17)$$

con

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t - V(z)}{W(z)} \right) = \frac{1}{W}, \quad (7.18)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [Q(z) + R(z)t + P(z)t^2] = [R + 2Pt]. \quad (7.19)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_{tt} = A[& -(2sech^3(\lambda) - sech(\lambda))\dot{\lambda}^2 - 2isech(\lambda)tanh(\lambda)\dot{\lambda}\dot{\phi} + isech(\lambda)\ddot{\phi} \\ & - sech(\lambda)(\dot{\phi})^2]exp\{i\phi\}, \end{aligned} \quad (7.20)$$

donde $\ddot{\phi} = 2P$ y $\frac{\partial}{\partial t}(sech(\lambda)tanh(\lambda)) = (2sech^3(\lambda) - sech(\lambda))\dot{\lambda}$. De nuevo derivando respecto a t :

$$\begin{aligned} u_{ttt} = A\{ & -(-6sech^3(\lambda)tanh(\lambda)\dot{\lambda} + sech(\lambda)tanh(\lambda)\dot{\lambda})\dot{\lambda}^2 - (2sech^3(\lambda) - sech(\lambda))\dot{\lambda}^2(i\dot{\phi}) \\ & - 2i[(2sech^3(\lambda) - sech(\lambda))\dot{\lambda}^2\dot{\phi} + sech(\lambda)tanh(\lambda)\dot{\lambda}\ddot{\phi} + isech(\lambda)tanh(\lambda)\dot{\lambda}\dot{\phi}^2] \\ & - isech(\lambda)tanh(\lambda)\dot{\lambda}\ddot{\phi} + isech(\lambda)\ddot{\phi}(i\dot{\phi}) + sech(\lambda)tanh(\lambda)\dot{\lambda}(\dot{\phi})^2 - 2sech(\lambda)\dot{\phi}\ddot{\phi} \\ & - isech(\lambda)(\dot{\phi})^3\}exp\{i\phi\}, \end{aligned} \quad (7.21)$$

agrupando términos iguales, esta expresión se reduce a

$$\begin{aligned} u_{ttt} = A[& (6sech^3(\lambda)tanh(\lambda) - sech(\lambda)tanh(\lambda))\dot{\lambda}^3 - 3i(2sech^3(\lambda) - sech(\lambda))\dot{\lambda}^2\dot{\phi} \\ & + 3sech(\lambda)tanh(\lambda)(\dot{\lambda}(\dot{\phi})^2 - i\dot{\lambda}\ddot{\phi}) - sech(\lambda)(3\dot{\phi}\ddot{\phi} + i(\dot{\phi})^3)]exp\{i\phi\}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Multiplicando el complejo conjugado de (7.22) por la función $u = Asech(\lambda)exp\{i\phi\}$:

$$uu_{ttt}^* =$$

$$A^2[(6\text{sech}^4(\lambda)\tanh(\lambda) - \text{sech}^2(\lambda)\tanh(\lambda))\dot{\lambda}^3 + 3i(2\text{sech}^4(\lambda) - \text{sech}^2(\lambda))\dot{\lambda}^2\dot{\phi} + 3\text{sech}^2(\lambda)\tanh(\lambda)((\dot{\phi})^2 + i\dot{\lambda}\ddot{\phi}) - \text{sech}^2(\lambda)(3\dot{\phi}\ddot{\phi} - i(\dot{\phi})^3)]. \quad (7.23)$$

Así, el tercer término de la densidad lagrangiana será:

$$i(uu_{ttt}^* - u^*u_{ttt}) = -2\text{Im}(uu_{ttt}^*) = -2A^2[3(2\text{sech}^4(\lambda) - \text{sech}^2(\lambda))\dot{\lambda}^2\dot{\phi} + 3\text{sech}^2(\lambda)\tanh(\lambda)(\dot{\lambda}\ddot{\phi}) + \text{sech}^2(\lambda)(\dot{\phi})^3]. \quad (7.24)$$

Para el cuarto término de la densidad lagrangiana, $i[u^2u^*u_t^* - (u^*)^2uu_t]$; de nuevo aplicamos la relación (7.5), de tal modo que

$$i[u^2u^*u_t^* - (u^*)^2uu_t] = -2\text{Im}(u^2u^*u_t^*). \quad (7.25)$$

El lado derecho de esta última expresión se calcula directamente de las expresiones (7.3) y (7.17):

$$u^2u^*u_t^* = A^4(-\text{sech}^4(\lambda)\tanh(\lambda)\dot{\lambda} - i\text{sech}^4(\lambda)\dot{\phi}), \quad (7.26)$$

$$\Rightarrow i[u^2u^*u_t^* - (u^*)^2uu_t] = 2(A^4\text{sech}^4(\lambda)\dot{\phi}). \quad (7.27)$$

Sustituyendo (7.12), (7.15), (7.24) y (7.27) en la densidad lagrangiana (7.1):

$$L = -2A^2\text{sech}^2(\lambda)\phi' - \alpha[A'^2\text{sech}^2(\lambda) - 2AA'\text{sech}^2(\lambda)\tanh(\lambda)\lambda' + A^2\text{sech}^2(\lambda)\tanh^2(\lambda)\lambda'^2 + A^2\text{sech}^2(\lambda)\phi'^2] - 2\varepsilon A^2[3(2\text{sech}^4(\lambda) - \text{sech}^2(\lambda))\dot{\lambda}^2\dot{\phi} + 3\text{sech}^2(\lambda)\tanh(\lambda)(\dot{\lambda}\ddot{\phi}) + \text{sech}^2(\lambda)(\dot{\phi})^3] + \gamma[A^4\text{sech}^4(\lambda)\dot{\phi}]. \quad (7.28)$$

Ahora, procedemos a calcular el lagrangiano promedio:

$$\mathcal{L} = \langle L \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} L dt. \quad (7.29)$$

El primer término de esta integral sustituyendo $\phi' = [Q' + R't + P't^2]$ (7.19) es:

$$\begin{aligned} & -2A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^2(\lambda) \phi' dt \\ &= -2A^2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^2(\lambda) Q' dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^2(\lambda) R' t dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^2(\lambda) P' t^2 dt \right]. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Recordemos ahora que $\lambda = \frac{t-V}{W}$, de donde despejamos $t = W\lambda + V$ y sustituimos en la ecuación anterior para realizar el cambio de variable $dt = Wd\lambda$:

$$\begin{aligned} & \Rightarrow -2A^2 W \left[Q' \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^2(\lambda) d\lambda + R' \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^2(\lambda) (\lambda W + V) d\lambda \right. \\ & \quad \left. + P' \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^2(\lambda) (\lambda^2 W^2 + 2\lambda W V + V^2) d\lambda \right] \\ &= -2A^2 W \left[2Q' + 2R'V + P' \left(\frac{W^2 \pi^2}{6} + 2V^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (7.31)$$

donde los valores de las integrales se pueden consultar en el Apéndice B.

El segundo término de lagrangiano promedio (7.29) es:

$$\begin{aligned} & -\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} [A'^2 \text{sech}^2(\lambda) - 2AA' \text{sech}^2(\lambda) \tanh(\lambda) \lambda' + A^2 \text{sech}^2(\lambda) \tanh^2(\lambda) \lambda'^2 \\ & \quad + A^2 \text{sech}^2(\lambda) \phi'^2] dt. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Recordando que $\lambda' = -\frac{V'W + W'(t-V)}{W^2}$, si se despeja $t - V = W\lambda$ de la relación (7.7) y se sustituye, se obtiene que

$$\lambda' = -\frac{V'W + W'(W\lambda)}{W^2} = -\frac{V' + W'\lambda}{W}. \quad (7.33)$$

Sustituyendo (7.33), así como $\phi' = Q' + R't + P't^2$ y haciendo el cambio de variable $dt = Wd\lambda$ en (7.31), se obtiene:

$$\begin{aligned} & -\alpha \left[A'^2 W \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) d\lambda + 2AA' \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) \tanh(\lambda) (V' + W'\lambda) d\lambda \right. \\ & \quad + A^2 W \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) \tanh^2(\lambda) \left(\frac{V'^2 + 2V'W'\lambda + (\lambda W')^2}{W^2} \right) d\lambda \\ & \quad \left. + A^2 W \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) [Q' + R't + P't^2]^2 d\lambda \right]. \quad (7.34a) \end{aligned}$$

Usando los valores de la tabla de integrales del Apéndice B. y desarrollando el último término, la expresión anterior se reduce a:

$$\begin{aligned} & -\alpha \left[2A'^2 W + 2AA'W' + \frac{A^2}{W} \left(\frac{2V'^2}{3} + \left(\frac{3}{54} \pi^2 + \frac{6}{9} \right) W'^2 \right) \right. \\ & \quad \left. + A^2 W \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) [Q'^2 + 2Q'R't + 2Q'P't^2 + R'^2 t^2 + 2R'P't^3 + P'^2 t^4] d\lambda \right]. \quad (7.34b) \end{aligned}$$

La última integral la desarrollamos aparte:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) [Q'^2 + 2Q'R't + 2Q'P't^2 + R'^2 t^2 + 2R'P't^3 + P'^2 t^4] d\lambda$$

$$\begin{aligned}
&= Q'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) d\lambda + 2Q'R' \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) t d\lambda + 2Q'P' \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) t^2 d\lambda \\
&+ R'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) t^2 d\lambda + 2R'P' \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) t^3 d\lambda + P'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) t^4 d\lambda. \quad (7.35)
\end{aligned}$$

Ahora despejamos de la relación (7.7) $t = W\lambda + V$, lo sustituimos en la ecuación (7.35), y desarrollamos sus potencias

$$\begin{aligned}
&2Q'^2 + 4Q'R'V + (2Q'P' + R'^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) (W^2\lambda^2 + 2W\lambda V + V^2) d\lambda \\
&+ 2R'P' \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) (W^3\lambda^3 + 3W^2\lambda^2 V + 3W\lambda V^2 + V^3) d\lambda \\
&+ P'^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) (W^4\lambda^4 + 4W^3\lambda^3 V + 6W^2\lambda^2 V^2 + 4W\lambda V^3 + V^4) d\lambda. \quad (7.35b)
\end{aligned}$$

Y sustituyendo los valores de las integrales del Apéndice B obtenemos:

$$\begin{aligned}
&2Q'^2 + 4Q'R'V + (2Q'P' + R'^2) \left(\frac{W^2\pi^2}{6} + 2V^2 \right) + 2R'P' \left(\frac{3W^2V\pi^2}{6} + 2V^3 \right) \\
&+ P'^2 \left(\frac{7W^4\pi^4}{120} + W^2\pi^2 V^2 + 2V^4 \right). \quad (7.35c)
\end{aligned}$$

Al sustituir (7.35c) en (7.34b), el segundo término del lagrangiano promedio será:

$$\begin{aligned}
&-\alpha \left\{ 2A'^2 W + 2AA'W' + \frac{A^2}{W} \left(\frac{2V'^2}{3} + \left(\frac{3}{54}\pi^2 + \frac{6}{9} \right) W'^2 \right) \right\} + \\
&+ A^2 W \left[2Q'^2 + 4Q'R'V + (2Q'P' + R'^2) \left(\frac{W^2\pi^2}{6} + 2V^2 \right) + 2R'P' \left(\frac{3W^2V\pi^2}{6} + 2V^3 \right) \right]
\end{aligned}$$

$$+ P'^2 \left(\frac{7W^4 \pi^4}{120} + W^2 \pi^2 V^2 + 2V^4 \right) \Bigg] \Bigg\}. \quad (7.36)$$

El tercer término del lagrangiano promedio es:

$$-2\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} [3A^2(2\operatorname{sech}^4(\lambda) - \operatorname{sech}^2(\lambda))\dot{\lambda}^2 \dot{\phi} + 3A^2 \operatorname{sech}^2(\lambda) \tanh(\lambda) (\dot{\lambda} \ddot{\phi}) + A^2 \operatorname{sech}^2(\lambda) (\dot{\phi})^3] dt, \quad (7.37)$$

y recordando que $\dot{\lambda} = \frac{1}{W}$ y $\dot{\phi} = [R + 2Pt]$, la primera integral de (7.37) será:

$$-6A^2 \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{W^2} (2\operatorname{sech}^4(\lambda) - \operatorname{sech}^2(\lambda)) [R + 2Pt] dt. \quad (7.38a)$$

Ahora sustituimos de la relación (7.7) $t = W\lambda + V$, y haciendo el cambio de variable $dt = Wd\lambda$ de la expresión anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{-6A^2 \varepsilon}{W} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (2\operatorname{sech}^4(\lambda) - \operatorname{sech}^2(\lambda)) [R + 2P(W\lambda + V)] d\lambda \right] \\ &= \frac{-6A^2 \varepsilon}{W} \left[(R + 2PV) \int_{-\infty}^{+\infty} (2\operatorname{sech}^4(\lambda) - \operatorname{sech}^2(\lambda)) d\lambda + 2PW \int_{-\infty}^{+\infty} (2\operatorname{sech}^4(\lambda) - \operatorname{sech}^2(\lambda)) \lambda d\lambda \right] \\ &= -\frac{4A^2 \varepsilon}{W} [R + 2PV]. \end{aligned} \quad (7.38b)$$

La segunda integral de (7.37) queda:

$$-6A^2 \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{W} (\operatorname{sech}^2(\lambda) \tanh(\lambda)) [2P] dt = -\frac{12A^2 PW \varepsilon}{W} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) \tanh(\lambda) d\lambda = 0, \quad (7.39)$$

donde el valor de la integral se anula por tratarse de una función impar (ver apéndice

A). Y la tercera integral de (7.37) será

$$\begin{aligned}
& -2A^2\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda)[R + 2Pt]^3 dt \\
& = -2A^2\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda)[R^3 + 6R^2Pt + 12RP^2t^2 + 8P^3t^3] dt = \\
& -2A^2\varepsilon \left[R^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) dt + 6R^2P \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) t dt + 12RP^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) t^2 dt + 8P^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) t^3 dt \right]
\end{aligned}$$

Haciendo de nuevo el cambio de variable $dt = Wd\lambda$ y sustituyendo de (7.7) $t = W\lambda + V$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
& -2A^2\varepsilon \left[R^3W \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) d\lambda + 6R^2PW \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda)(W\lambda + V) d\lambda \right. \\
& \left. + 12RP^2W \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda)(W\lambda + V)^2 d\lambda + 8P^3W \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda)(W\lambda + V)^3 d\lambda \right]. \quad (7.40a)
\end{aligned}$$

Al calcular los valores de las integrales (ver tabla de integrales apéndice B), y desarrollar todos los términos obtenemos:

$$\begin{aligned}
& -2A^2\varepsilon W \left[2R^3 + 12R^2PV + 12RP^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda)(W^2\lambda^2 + 2W\lambda V + V^2) d\lambda \right. \\
& \left. + 8P^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda)(W^3\lambda^3 + 3W^2\lambda^2V + 3W\lambda V^2 + V^3) d\lambda \right] \\
& = -4A^2\varepsilon W \left[R^3 + 6R^2PV + 6RP^2 \left(\frac{W^2\pi^2}{6} + 2V^2 \right) + 4P^3 \left(\frac{3W^2V\pi^2}{6} + 2V^3 \right) \right]. \quad (7.40c)
\end{aligned}$$

Al sustituir (7.38b), (7.39) y (7.40c) en (7.37), el tercer término del lagrangiano promedio será:

$$-4A^2\varepsilon \left\{ \frac{1}{W} [R + 2PV] + W \left[R^3 + 6R^2PV + 6RP^2 \left(\frac{W^2\pi^2}{6} + 2V^2 \right) + 4P^3 \left(\frac{3W^2V\pi^2}{6} + 2V^3 \right) \right] \right\} \quad (7.41)$$

El cuarto término del lagrangiano promedio (7.29) se calcula de manera análoga a los casos anteriores:

$$\begin{aligned} \gamma A^4 \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^4(\lambda) \phi dt &= \frac{1}{2} \gamma A^4 W \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^4(\lambda) [R + 2Pt] d\lambda \\ &= \gamma A^4 W \left[R \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^4(\lambda) d\lambda + 2P \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^4(\lambda) (W\lambda + V) d\lambda \right] \\ &= \gamma A^4 W \left[\frac{4R}{3} + 2PW \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^4(\lambda) \lambda d\lambda + 2PV \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^4(\lambda) d\lambda \right] \\ &= \gamma A^4 W \left[\frac{4R}{3} + \frac{8PV}{3} \right]. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Ahora se procede a sustituir los cuatro términos (7.31), (7.36), (7.41) y (7.42) de la densidad lagrangiana (7.28) ya evaluados en el lagrangiano promedio (7.29), con lo cual obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \langle L \rangle = & -2A^2W \left[2Q' + 2R'V + P' \left(\frac{W^2\pi^2}{6} + 2V^2 \right) \right] - \alpha \left\{ 2A'(A'W + AW') + \frac{A^2}{W} \left(\frac{2V'^2}{3} + \left(\frac{\pi^2}{18} + \frac{2}{3} \right) W'^2 \right) \right. \\ & + A^2W \left[2Q'^2 + 4Q'R'V + (2Q'P' + R'^2) \left(\frac{W^2\pi^2}{6} + 2V^2 \right) \right. \\ & \left. \left. + 2R'P' \left(\frac{3W^2V\pi^2}{6} + 2V^3 \right) + P'^2 \left(\frac{7W^4\pi^4}{120} + W^2\pi^2V^2 + 2V^4 \right) \right] \right\} \\ & -4A^2\varepsilon \left\{ \frac{1}{W} [R + 2PV] + W \left[R^3 + 6R^2PV + 6RP^2 \left(\frac{W^2\pi^2}{6} + 2V^2 \right) + 4P^3 \left(\frac{3W^2V\pi^2}{6} + 2V^3 \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$+\gamma A^4 W \left[\frac{4R}{3} + \frac{8PV}{3} \right]. \quad (7.43a)$$

Factorizando términos en común la expresión se reduce a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -2A^2 W \left[2Q' + 2R'V + (P' + \alpha 2Q'P' + \alpha R'^2 + 12\varepsilon R P^2) \left(\frac{W^2 \pi^2}{6} + 2V^2 \right) \right] \\ & -\alpha W \left\{ 2A'^2 + A^2 \left[2Q'^2 + 4Q'R'V + P'^2 \left(\frac{7W^4 \pi^4}{120} + W^2 \pi^2 V^2 + 2V^4 \right) \right] \right\} \\ & -2A^2 W (\alpha R'P' + 8\varepsilon P^3) \left(\frac{3W^2 V \pi^2}{6} + 2V^3 \right) - 4A^2 \varepsilon \left\{ \frac{1}{W} [R + 2PV] + W [R^3 + 6R^2 PV] \right\} \\ & -\alpha A \left\{ 2A'W' + \frac{A}{W} \left(\frac{2V'^2}{3} + \left(\frac{\pi^2}{18} + \frac{2}{3} \right) W'^2 \right) \right\} + \gamma A^4 W \left[\frac{4R}{3} + \frac{8PV}{3} \right]. \quad (7.43b) \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange a \mathcal{L} para cada una de los 6 parámetros del Anzant (7.3) obtenemos las siguientes relaciones:

Para la función $A(z)$, la ecuación de Euler-lagrange del lagrangiano promedio es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A'} = 0, \quad (7.44)$$

Al derivar (7.43b) obtenemos los términos de (7.44):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} = & -4A \left[2Q'W + 2R'VW + (P' + \alpha 2Q'P' + \alpha R'^2 + 12\varepsilon R P^2) \left(\frac{W^3 \pi^2}{6} + 2WV^2 \right) \right] \\ & -\alpha \left\{ 2A'W' + \frac{2A}{W} \left(\frac{2V'^2}{3} + 1.2W'^2 \right) + 2AW \left[2Q'^2 + 4Q'R'V + P'^2 \left(\frac{7W^4 \pi^4}{120} + W^2 \pi^2 V^2 + 2V^4 \right) \right] \right\} \\ & -4A (\alpha R'P' + 8\varepsilon P^3) \left(\frac{3W^3 V \pi^2}{6} + 2WV^3 \right) - 8A \varepsilon \left[\frac{1}{W} [R + 2PV] + W (R^3 + 6R^2 PV) \right] \\ & + \gamma 4A^3 W \left[\frac{4R}{3} + \frac{8PV}{3} \right], \quad (7.45a) \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A'} = \alpha \frac{\partial}{\partial z} (4A'W + 2AW') = \alpha(4A''W + 6A'W' + 2AW''), \quad (7.45b)$$

y al sustituir ambos términos en (7.44) obtenemos la siguiente expresión:

$$-8AQ'W - 8\frac{\varepsilon AR}{W} - 8\varepsilon AWR^3 + \frac{16}{3}\gamma A^3WR - \frac{4}{3}\alpha \frac{AV'^2}{W} - 4\alpha AWQ'^2 = f_1(P, P', A', V', W', R'), \quad (7.46)$$

donde f_1 , es una función explícita que contiene términos no lineales de sus argumentos.

Para la función $W(z)$, la ecuación de Euler-Lagrange es:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W'} = 0, \quad (7.47)$$

donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W} = & -2A^2 \left[2Q' + 2R'V + (P' + \alpha 2Q'P' + \alpha R'^2 + 12\varepsilon RP^2) \left(\frac{3W^2\pi^2}{6} + 2V^2 \right) \right] \\ & -\alpha \left\{ 2A'^2 - \frac{A^2}{W^2} \left(\frac{2V'^2}{3} + 1.2W'^2 \right) + A^2 \left[2Q'^2 + 4Q'R'V + P'^2 \left(\frac{35W^4\pi^4}{120} + W^2\pi^2V^2 + 2V^4 \right) \right] \right\} \\ & -2A^2(\alpha R'P' + 8\varepsilon P^3) \left(\frac{9W^2V\pi^2}{6} + 2V^3 \right) + 4A^2\varepsilon \left\{ \frac{1}{W^2} [R + 2PV] + [R^3 + 6R^2PV] \right\} \\ & + \gamma A^4 \left[\frac{4R}{3} + \frac{8PV}{3} \right], \end{aligned} \quad (7.48a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W'} = -\alpha \left\{ 2AA' + \frac{A^2}{W} (2.4W') \right\}, \quad (7.48b)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W'} = -\alpha \left\{ 2A'^2 + 2AA'' + 2.4 \left(\frac{2AA'W'W + A^2W''W - A^2W'^2}{W^2} \right) \right\}, \quad (7.48c)$$

sustituyendo (7.47):

$$-4A^2Q' + 4\frac{\varepsilon A^2}{W^2}R - 4A^2\varepsilon R^3 + \frac{4}{3}\gamma A^4R + \frac{2}{3}\alpha \frac{A^2V'^2}{W^2} - 2\alpha A^2Q'^2$$

$$= f_2(P, P', A', V', W', R'). \quad (7.49)$$

Para la función $V(z)$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V'} = 0, \quad (7.50)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V} = -2A^2W[2R' + 4V(P' + 2\alpha Q'P' + \alpha R'^2 + 12\varepsilon RP^2)]$$

$$\begin{aligned} & -\alpha A^2W[4Q'R' + P'^2(2W^2\pi^2V + 8V^3)] - 2A^2W(\alpha R'P' + 8\varepsilon P^3) \left(\frac{3W^2\pi^2}{6} + 6V^2 \right) \\ & -4A^2\varepsilon \left\{ 2P \frac{1}{W} + 6R^2PW \right\} + \frac{8}{3}\gamma A^4WP, \end{aligned} \quad (7.51a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V'} = -\alpha \frac{4}{3} \left(\frac{A^2V'}{W} \right), \quad (7.51b)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V'} = -\alpha \frac{4}{3} \left(2 \frac{AA'V'}{W} + \frac{A^2V''}{W} - \frac{A^2V'}{W^2} \right), \quad (7.51c)$$

y entonces, se obtiene:

$$-8\varepsilon A^2WP \left\{ \frac{1}{W^2} + 3R^2 - \frac{1}{3}\gamma A^2 \right\} + \frac{4}{3}\alpha A^2 \frac{V'}{W^2} = f_3(P, W', A', P', R', V''). \quad (7.52)$$

Para la función $Q(z)$, la ecuación de Euler-Lagrange es:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q'} = 0, \quad (7.53)$$

donde:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} = 0, \quad (7.54a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q'} = -4A^2W - \alpha A^2W \left[4Q' + 4R'V + 4P' \left(\frac{W^2\pi^2}{6} + 2V^2 \right) \right], \quad (7.54b)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q'} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ -4A^2W - \alpha A^2W \left[4Q' + 4R'V + (2P') \left(\frac{W^2\pi^2}{6} + 2V^2 \right) \right] \right\} \\ &= -\frac{\partial}{\partial z} A^2W \left\{ 4 + \alpha \left[4Q' + 4R'V + (2P') \left(\frac{W^2\pi^2}{6} + 2V^2 \right) \right] \right\},\end{aligned}\quad (7.54c)$$

entonces:

$$A^2W\{4 + f_4(V, P', Q', R')\} = cte. \quad (7.55)$$

Para la función $R(z)$, la ecuación de Euler-Lagrange es:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R'} = 0 \quad (7.56)$$

donde:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} = -24A^2W \left[\varepsilon P^2 \left(\frac{W^2\pi^2}{6} + 2V^2 \right) \right] - 4A^2\varepsilon \left\{ \frac{1}{W} + 3W[R^2 + 4RPV] \right\} + \frac{4}{3}\gamma A^4W \quad (7.57a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R'} = -4A^2W \left[V + \alpha R' \left(\frac{W^2\pi^2}{6} + 2V^2 \right) + \alpha Q'V + \frac{1}{2}\alpha P' \left(\frac{3W^2V\pi^2}{6} + 2V^3 \right) \right], \quad (7.57a)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R'} = \frac{\partial}{\partial z} [-4\alpha A^2WQ'V + \dots]$$

$$= -4\alpha\{2AWQ'V + A^2W'Q'V + A^2WQ''V + A^2WQ'V'\} + \dots \quad (7.57c)$$

donde hemos despreciado a todos los términos que poseen una derivada de orden uno o mayor que uno para los parámetros A' , W' y P' , pues como se verá más adelante las soluciones que nos interesan analizar requieren que estos valores sean nulos. Al sustituir (7.57a) y (7.57c) en la ecuación (7.56):

$$-4A^2\varepsilon \left\{ \frac{1}{W} + 3WR^2 \right\} + \frac{4}{3}\gamma A^4W + 4\alpha\{2AWQ'V + A^2WQ'V'\} = f_5(\dots) \quad (7.58)$$

Para la función $P(z)$, la ecuación de Euler-lagrange es:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P'} = 0, \quad \text{donde:} \quad (7.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P} = & -48A^2 \varepsilon R P \left(\frac{W^3 \pi^2}{6} + 2WV^2 \right) - 48\varepsilon A^2 P^2 \left(\frac{3W^3 V \pi^2}{6} + 2WV^3 \right) \\ & - 4A^2 \varepsilon \left\{ \frac{2V}{W} + 6R^2 V W \right\} + \frac{8}{3} \gamma A^4 V W, \end{aligned} \quad (7.60a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P'} = & -2A^2 (1 + 2\alpha Q') \left(\frac{W^3 \pi^2}{6} + 2WV^2 \right) - 2\alpha A^2 P' \left(\frac{7W^5 \pi^4}{120} + W^3 \pi^2 V^2 + 2WV^4 \right) \\ & - 2\alpha A^2 R' \left(\frac{3W^3 V \pi^2}{6} + 2WV^3 \right), \end{aligned} \quad (7.60b)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P'} = & \frac{\partial}{\partial z} \left[-2A^2 (1 + 2\alpha Q') \left(\frac{W^3 \pi^2}{6} + 2WV^2 \right) + \dots \right] \\ = & -4AA' (1 + 2\alpha Q') \left(\frac{W^3 \pi^2}{6} + 2WV^2 \right) - 4\alpha A^2 (Q'') \left(\frac{W^3 \pi^2}{6} + 2WV^2 \right) \\ & - 2A^2 (1 + 2\alpha Q') \left(\frac{W^2 W' \pi^2}{2} + 2W'V^2 + 4WV V' \right) + \dots \end{aligned} \quad (7.60c)$$

Análogamente al caso anterior hemos despreciado los términos con orden de derivada igual o mayor que uno para los parámetros P' y R' . Entonces:

$$-4A^2 \varepsilon \left\{ \frac{2V}{W} + 6R^2 V W \right\} + \frac{8}{3} \gamma A^4 V W + 8A^2 W V V' (1 + 2\alpha Q') = f_6(\dots) \quad (7.61)$$

donde las funciones $f_n(\dots), n = 1, \dots, 6$, representan funciones no lineales de sus argumentos. Ahora buscamos puntos críticos de estas relaciones, que vienen dados por soluciones estacionarias de la ecuación GcmkdV que cumplen las siguientes condiciones para el Anzant (7.3):

$$\left. \begin{aligned} A' = W' = R' = P' = 0, \\ Q' = q = cte, \end{aligned} \right\} \quad (7.62)$$

$$V' = a = cte,$$

Al insertar estas condiciones obtenemos que $f_n(\dots) = 0$, para $n = 1, \dots, 6$ y sustituyendo las condiciones (7.62) $Q' = q$ y $V' = a$, nos conduce al siguiente sistema de ecuaciones reducidas:

$$-q - \frac{\varepsilon R}{W^2} - \varepsilon R^3 + \frac{2}{3}\gamma A^2 R - \frac{1}{6}\alpha \frac{a^2}{W^2} - \frac{1}{2}\alpha q^2 = 0, \quad (7.63)$$

$$-q + \frac{\varepsilon R}{W^2} - \varepsilon R^3 + \frac{1}{3}\gamma A^2 R + \frac{1}{6}\alpha \frac{a^2}{W^2} - \frac{1}{2}\alpha q^2 = 0, \quad (7.64)$$

$$P \left\{ -8\varepsilon - 24\varepsilon R^2 W^2 + \frac{8}{3}\gamma A^2 W^2 \right\} + \frac{4}{3}a\alpha = 0, \quad (7.65)$$

$$A^2 W = A^2(0)W(0), \quad (7.66)$$

$$-4\varepsilon \frac{A^2}{W} - 12\varepsilon A^2 R^2 W + \frac{4}{3}\gamma A^4 W + 4\alpha q W \{2AV + A^2 a\} = 0, \quad (7.67)$$

$$-\frac{8\varepsilon}{W} - 24\varepsilon R^2 W + \frac{8}{3}\gamma A^2 W + 8Wa(1 + 2\alpha q) = 0. \quad (7.68)$$

Para determinar la relación entre a y q de la ecuación (7.68) despejamos directamente $a(1 + 2\alpha q)$:

$$a(1 + 2\alpha q) = \varepsilon \frac{1}{W^2} + 3\varepsilon R^2 - \frac{1}{3}\gamma A^2. \quad (7.69)$$

Para hallar q , multiplicamos la ecuación (7.64) por 2 y sumamos el resultado a la ecuación (7.63):

$$\Rightarrow q + \frac{1}{2}\alpha q^2 = \frac{1}{2}\gamma A^2 R - \varepsilon R^3. \quad (7.70)$$

Multiplicando la ecuación (7.63) por (-1) y sumando esto a la ecuación (7.64):

$$\Rightarrow 6\varepsilon \frac{1}{W^2} - \gamma A^2 + \alpha \frac{A^2 a^2}{W^2 R} = 0. \quad (7.71)$$

Ahora bien, si consideramos que para las soluciones analizadas el término de la frecuencia inducida “*chirp*” es constante, es decir $P(z) = cte$, entonces de la ecuación (7.65) se obtiene que

$$a\left(\frac{\alpha}{6W^2 P}\right) = \varepsilon \frac{1}{W^2} + 3\varepsilon R^2 - \frac{1}{3}\gamma A^2, \quad (7.72)$$

Esta ecuación es equivalente a (7.69), donde se puede establecer una relación entre α y q , además las relaciones (7.69-71) son la contraparte variacional de la familia de solitones brillantes y resultan ser una generalización de las relaciones que se obtuvieron para la familia de solitones brillantes exactos de la ecuación GcmKdV (ver Capítulo 4, ecuaciones (4.28), (4.29) y (4.30)). Esto demuestra el poder del método variacional ya que no sólo nos permitirá examinar las soluciones perturbadas de la GmcKdV si no también resuelve las relaciones que deben satisfacer los parámetros de las soluciones exactas.

7.2 Estabilidad de las soluciones perturbadas de la ecuación GcmKdV.

Para analizar que sucede con las soluciones perturbadas de la ecuación GcmKdV, graficamos la ecuación (7.72c) o (4.30) (con $\varepsilon = 1$ y $\gamma = 1$) que describe a la familia de soluciones exactas, la curva que describe pasa por el punto (W_E, A_E) donde el subíndice E indica que se tratan de las soluciones estables (ver figura 7.2).

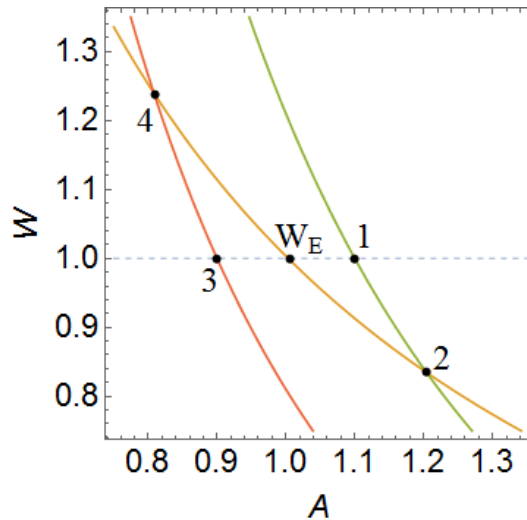


Figura 7.2

Luego tomamos la ecuación (7.66) obtenida a través del método variacional de Anderson y que describe el comportamiento de las mismas variables, pero para soluciones perturbadas. Tomando valores de la amplitud $A_3 < A_E$ y luego $A_1 > A_E$, se obtienen según la ecuación (7.66) las curvas que describen la evolución de dos soluciones perturbadas cuyas condiciones iniciales están en los puntos 3 y 1 respectivamente. Es decir, los puntos 3 y 1 representan dos pulsos iniciales con la misma frecuencia que una solución estable W_E pero con un valor de amplitud menor ($A_3 < A_E$) y mayor ($A_1 > A_E$) respectivamente. Como se puede apreciar en la figura 7.2 los puntos 3 y 1 se desplazan sobre sus respectivas curvas al valor que representa una configuración más estable para el pulso, puntos 4 y 2. De forma que sorprendentemente el pulso perturbado cuya amplitud sea mayor crecerá aún más para después estabilizarse y el pulso perturbado con menor amplitud continuará disminuyendo para después estabilizarse en un solo valor. Este comportamiento resulta inesperado, pues en general cuando un pulso es perturbado incrementando su amplitud, inmediatamente decae oscilando en valores cercanos al de la solución exacta.

En conclusión, este resultado nos indica que las soluciones perturbadas evolucionan a una configuración que represente un estado más estable del sistema y tal configuración es el de las soluciones exactas, es decir, la familia tipo solitones brillantes de la ec. GcmKdV que son soluciones “estables”. Para comprender esta estabilidad, se analizará en el siguiente capítulo las soluciones lineales de la ec. GcmKdV con la finalidad de comprender cómo se propagan los pulsos expuestos al fenómeno de “resonancia” y así comprender cómo el término no lineal inhibe esta interacción que destruiría las soluciones completas de la ec. GcmKdV.

CAPÍTULO 8.

UNA APROXIMACIÓN NUMÉRICA AL ESTUDIO DE LAS SOLUCIONES LINEALES DE LA ECUACIÓN GCMKDV.

8.1 Antecedes del estudio de la parte lineal de la ecuación GcmKdV.

En el capítulo 4 se demostró que la ecuación GcmKdV:

$$iu_z + \alpha u_{zz} - i\epsilon u_{ttt} - i\gamma |u|^2 u_t = 0, \quad (8.1)$$

tiene dentro de sus soluciones a la familia exacta de solitones brillantes:

$$u(z, t) = A \operatorname{sech}\left(\frac{t - az}{w}\right) e^{i(qz + rt)}, \quad (8.2)$$

la cual es embebida, pues sin importar cuál sea el valor del número de onda del solitón, éste estará inmerso en el rango de la relación de dispersión:

$$\alpha k^2 + k - \epsilon \omega^3 = 0; \quad (8.3)$$

de las ondas lineales de pequeña amplitud $\delta u = u_0 \exp(i(kz - \omega t))$. La relación (8.3) se obtuvo de sustituir directamente la función δu en la parte lineal de la ec. GmKdV:

$$iu_z + \alpha u_{zz} - i\epsilon u_{ttt} = 0. \quad (8.4)$$

La forma de la curva descrita por la relación de dispersión (8.3), se obtiene al graficar el número de onda k en función de la frecuencia ω :

$$k(\omega) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\alpha\epsilon\omega^3}}{2\alpha}. \quad (8.5)$$

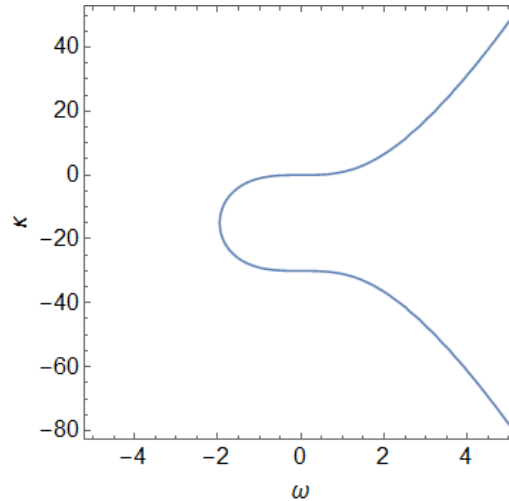


Figura 8.1. Relación de dispersión $k(\omega)$ con los valores de $\alpha = \frac{1}{30}$ y $\varepsilon = 1$.

En este caso la relación de dispersión para ondas lineales exhibe un rango prohibido de frecuencias,

$$\left(-\infty, -\sqrt[3]{\frac{15}{2}} \right), \quad (8.6)$$

lo cual implica que ondas lineales de pequeña amplitud existentes en el mismo medio no se puedan propagar en este rango de frecuencias.

Veamos ahora cómo interaccionan las ondas lineales de pequeña amplitud con las ondas viajeras tipo solitón que se propagan en la misma fibra óptica. Para ello se resolverá la parte lineal de la ecuación GmKdV de forma analítica a través del análisis de Fourier, lo cual nos lleva al planteamiento matemático del problema de Cauchy para las condiciones iniciales. Dado que las condiciones iniciales son los pulsos iniciales que puede controlar el laboratorista, este práctico método permite encontrar fácilmente la relación entre la condición inicial del pulso y su evolución a través de la fibra óptica; así

como poder graficar su evolución de forma numérica para observar si presenta algún tipo de resonancia.

8.2 Soluciones lineales de la ecuación GcmKdV.

Comenzamos calculando la transformada de Fourier de la ecuación (8.4):

$$iU_z + \alpha U_{zz} + \varepsilon \omega^3 U = 0, \quad (8.7)$$

donde hemos definido

$$U(z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(z, t) e^{i\omega t} dt, \quad (8.8)$$

como la transformada de Fourier de la función $u(z, t)$. En forma operacional $U(z, \omega) = \mathcal{F}[u(z, t)]$; de tal forma que estamos transformando la solución de la ecuación GmKdV linealizada al espacio de frecuencias.

La solución de la ecuación (transformada) (8.7) se obtiene inmediatamente a través de su polinomio característico:

$$\alpha \lambda^2 + i\lambda + \varepsilon \omega^3 = 0, \quad (8.9)$$

cuyas raíces son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-i \pm \sqrt{-1 - 4\alpha\varepsilon\omega^3}}{2\alpha} = \frac{-i \pm \sqrt{s(\omega)}}{2\alpha}, \quad (8.10)$$

$$s(\omega) = -1 - 4\alpha\varepsilon\omega^3, \quad (8.11)$$

donde λ_1 corresponde al radical con el signo positivo y λ_2 al negativo. Por lo tanto la solución transformada será de la forma:

$$U(z, \omega) = a(\omega) \exp(\lambda_1 z) + b(\omega) \exp(\lambda_2 z), \quad (8.12)$$

y de (8.12) se puede calcular directamente la derivada parcial respecto a z de $U(z, \omega)$:

$$U_z(z, \omega) = \lambda_1 a(\omega) \exp(\lambda_1 z) + \lambda_2 b(\omega) \exp(\lambda_2 z). \quad (8.13)$$

Evaluando las ecuaciones (8.12) y (8.13) en $z = 0$ se obtiene el siguiente sistema:

$$U(0, \omega) = a(\omega) + b(\omega), \quad (8.14)$$

$$U_z(0, \omega) = \lambda_1 a(\omega) + \lambda_2 b(\omega). \quad (8.15)$$

Este sistema permite obtener los valores de los coeficientes $a(\omega)$ y $b(\omega)$, es decir, obtener la solución completa, en términos de las condiciones iniciales $U(0, \omega)$ y $U_z(0, \omega)$ (problema de Cauchy):

$$a(\omega) = \frac{U_z(0, \omega) - \lambda_2 U(0, \omega)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad (8.16)$$

$$b(\omega) = \frac{\lambda_1 U(0, \omega) - U_z(0, \omega)}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (8.17)$$

Como se espera a través del planteamiento matemático del problema, para conocer los coeficientes que definen la solución de (8.7) es necesario las condiciones iniciales $u(0, t)$ y $u_z(0, t)$ y calcular sus transformadas de Fourier. Sin embargo, analizando el tipo de soluciones que se obtienen, si graficamos la función $s(\omega)$ (véase figura 8.2), con $\varepsilon = 1$ y $\alpha = \frac{1}{30}$, se observa un comportamiento de la siguiente manera:

$$s(\omega) \begin{cases} > 0, & \text{si } \omega < \omega_p \\ < 0, & \text{si } \omega > \omega_p \end{cases}$$

donde $\omega_p = -\sqrt[3]{\frac{15}{2}} \approx -1.957 \dots$ que es justamente el valor supremo de las frecuencias prohibidas

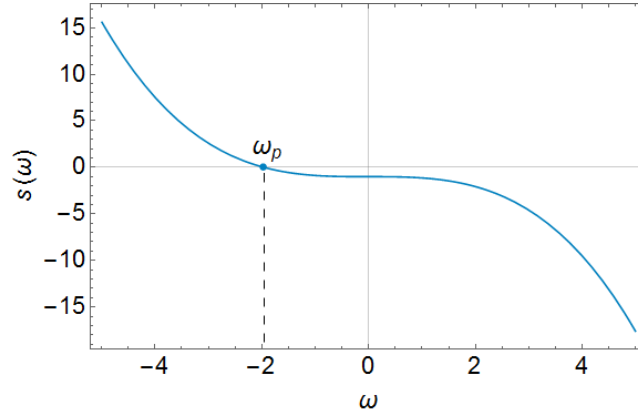


Figura 8.2. El rango de la función $s(\omega)$ crece indefinidamente para valores de $\omega < \omega_p$.

Esto implica que para la solución (8.12), las frecuencias dentro del intervalo $\omega < \omega_p$ generan que el primer término de (8.12), $a(\omega)\exp\left[-iz/2\alpha + \sqrt{s(\omega)}z/2\alpha\right]$, tenga como parte real en la exponencial un argumento positivo creciente, $\sqrt{s(\omega)} \gg 0$, lo que físicamente se interpreta como una solución inaceptable pues esta exponencial diverge a infinito, es decir, explota. Entonces, para que existan soluciones físicamente aceptables se debe tener que $a(\omega) = 0$, así se evita la que la solución estalle. Esto permite encontrar una relación directa entre $U(0, \omega)$ y $U_z(0, \omega)$, de (8.16) y considerando $s(\omega) < 0$:

$$U_z(0, \omega) = \lambda_2 U(0, \omega).$$

$$U_z(0, \omega) = i \left[\frac{-1 - \sqrt{|s(\omega)|}}{2\alpha} \right] U(0, \omega) \quad (8.18)$$

Además, aplicando la transformada inversa de Fourier a (8.18), obtenemos la segunda condición inicial de Cauchy en términos de la condición inicial del pulso:

$$u_z(0, t) = \mathcal{F}^{-1}[\lambda_2 U(0, \omega)]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \lambda_2(\omega) u(0, \tau) e^{-i\omega(\tau-t)} d\tau d\omega. \quad (8.19)$$

La ecuación (8.19) además resuelve un problema conceptual matemático asociado a la ecuación lineal (8.4). En el siguiente párrafo explicaremos cuál era ese problema.

La ecuación (8.4) es una ecuación de 2° orden en z , y por tanto las matemáticas nos dicen que para resolver el problema de condiciones iniciales (en z) para esta ecuación (el llamado problema de Cauchy) necesitamos especificar 2 condiciones iniciales:

$$u(z = 0, t) \quad \text{y} \quad u_z(z = 0, t).$$

Físicamente podemos controlar $u(z = 0, t)$ que corresponde a la intensidad de la luz al principio de la fibra óptica. Sin embargo no es claro cómo podemos controlar a nuestro gusto el valor de $u_z(z = 0, t)$ en un arreglo con fibras ópticas.

Entonces queda la interrogante de ¿cómo podemos dar la condición inicial $u_z(z = 0, t)$ que requiere el problema matemático para definir la solución particular de la ec.(8.4)? La respuesta a esta pregunta es la ec. (8.19) la cual nos dice que basta con conocer $u(z = 0, t)$. Si conocemos esta función, entonces la ec. (8.19) nos da el valor de $u_z(z = 0, t)$, así ya se tienen las 2 condiciones iniciales que matemáticamente se requieren para determinar una solución particular única de (8.4).

Ahora bien, la relación (8.18) es una consecuencia de exigir que $a(\omega) = 0$, pues de lo contrario la solución (8.12) explota cuando $\omega < \omega_p$. Sin embargo, no parece haber razón para exigir que (8.18) también se cumpla para $\omega > \omega_p$, y no tenemos una demostración rigurosa de que (8.18) deba valer para $\omega > \omega_p$. Sin embargo, la existencia de una relación entre $u_z(0, t)$ y $u(0, t)$ parece ser consecuencia de que existen razones para pensar que el problema de condiciones iniciales para la ec.

GcmKdV es un problema “mal planteado” (en inglés: ill-posed), como ocurre con la ecuación:

$$iu_z + \varepsilon u_{zz} + \frac{1}{2}(u_{xx} + u_{yy}) + |u|^2 u = 0$$

para la cual ha sido demostrado que el problema de condiciones iniciales es mal planteado [39]. Entrar en el terreno de los problemas “mal planteados” va más allá de esta tesis, por lo que sólo indicaremos aquí que Hadamard menciona que cuando tenemos un problema mal planteado es necesario imponer ciertas condiciones de compatibilidad entre las condiciones iniciales, para poder tener soluciones “globales” (i.e., definidas para toda $z > 0$) [41]. Por lo tanto, la relación (8.18) es, probablemente, una de esas “condiciones de compatibilidad” mencionadas por Hadamard.

Y ahora calcularemos la solución de (8.54) utilizando lo anterior, la solución completa en el espacio de frecuencias (8.12) usando que $a(\omega) = 0$ y (8.17) se reduce a:

$$U(z, \omega) = b(\omega) \exp(\lambda_2 z), \quad (8.20)$$

$$b(\omega) = U(0, \omega). \quad (8.21)$$

De modo que basta conocer la transformada de Fourier del pulso inicial $\mathcal{F}[u(z=0, t)] = U(0, \omega)$ para poder analizar la evolución completa del pulso. A continuación se utilizará este resultado para poder estudiar numéricamente la propagación de estos pulsos.

Probemos qué sucede al calcular la solución exacta de la ecuación linealizada GcmKdV, cuya condición inicial en el espacio original del sistema (z, t) proponemos como un pulso tipo solitón de la forma:

$$u(0, t) = A \operatorname{sech}(Bt). \quad (8.22)$$

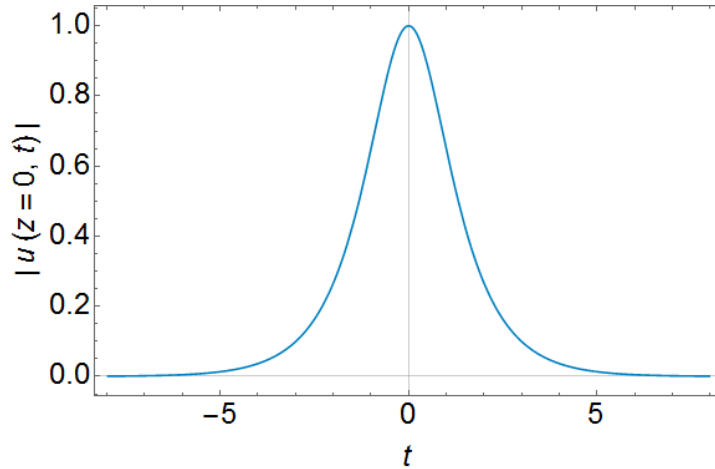


Figura 8.3. Grafica de la condición inicial (8.22).

Esta imagen se refiere a la amplitud de la intensidad del campo eléctrico del haz de luz propagándose a través de la fibra óptica.

Para hallar la solución se resuelve la ecuación transformada en el espacio de frecuencias cuya solución ya está determinada por (8.20) y se aplica la transformada inversa de Fourier para regresar al espacio original (z, t) :

$$u(z, t) = \mathcal{F}^{-1}[U(z, \omega)] = \mathcal{F}^{-1}[b(\omega)\exp(\lambda_2 z)]. \quad (8.23)$$

El primer paso será transformar la condición inicial del pulso al espacio de frecuencias $b(\omega) = U(0, \omega) = \mathcal{F}[u(0, t)]$. Por comodidad usamos $A = 1$ entonces la transformada de Fourier de (8.12) será:

$$\begin{aligned} U(0, \omega) &= \mathcal{F}[\operatorname{sech}(Bt)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}(Bt)e^{i\omega t} dt = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2B}\right). \end{aligned} \quad (8.24)$$

Luego calculemos la solución regresando al espacio original (z, t) sustituyendo (8.24) en (8.23). De esta forma obtenemos:

$$u(z, t) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sqrt{2\pi}}{2B} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2B}\right) \exp(\lambda_2 z) \right]. \quad (8.25)$$

Ahora bien, el valor del parámetro B , es de libre elección según sean las características que se deseen en el ancho del pulso inicial, pero es de gran relevancia pues su valor afectará directamente la evolución del pulso (como se vio anteriormente la forma del pulso inicial determina su evolución a través de la fibra óptica); el por qué, se ve a continuación.

Para un pulso de la forma $\operatorname{sech}(Bt)$, la anchura a media altura abreviada FWHM (*Full Width at Half Maximum*) que caracteriza la anchura del pulso se relaciona inversamente proporcional con el parámetro B , esto es:

$$\text{FWHM} \sim \frac{1}{B}. \quad (8.26)$$

Luego al aplicar la transformada de Fourier al pulso, es decir al transformar el pulso al espacio de frecuencias ω :

$$\mathcal{F}[\operatorname{sech}(Bt)] = \frac{\sqrt{2\pi}}{2B} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{2B} \omega\right). \quad (8.27)$$

el valor del ancho ahora es directamente proporcional a B (en el espacio de frecuencias ω), es decir:

$$\text{FWHM}(\omega) \sim B. \quad (8.28)$$

De estas observaciones se puede deducir que: si el valor de B es cercano o igual a uno para un pulso de la forma (8.27), el ancho del pulso en el espacio de frecuencias es decir del pulso inicial transformado, estará dentro del intervalo prohibido de frecuencias

$(-\infty, \omega_p)$ (ver figura 8.4), donde $\omega_p = -\sqrt[3]{\frac{15}{2}} = -1.957$ este rango fue calculado de la relación de dispersión lineal (8.3).

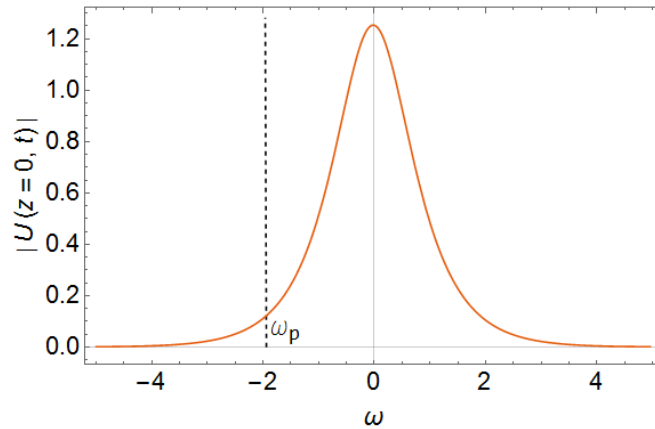


Figura 8.4. Amplitud del pulso inicial transformado al espacio de frecuencias $U(0, \omega) = \mathcal{F}[sech(Bt)]$.

Esta función centrada en el valor $\omega = 0$, toca valores menores a $\omega_p = -1.957$, es decir que esta condición inicial toca el intervalo prohibido de frecuencias lo cual curiosamente produce que la solución se corte en estos valores según el pulso comienza a evolucionar respecto a z en el espacio de frecuencias (ver figura 8.5).

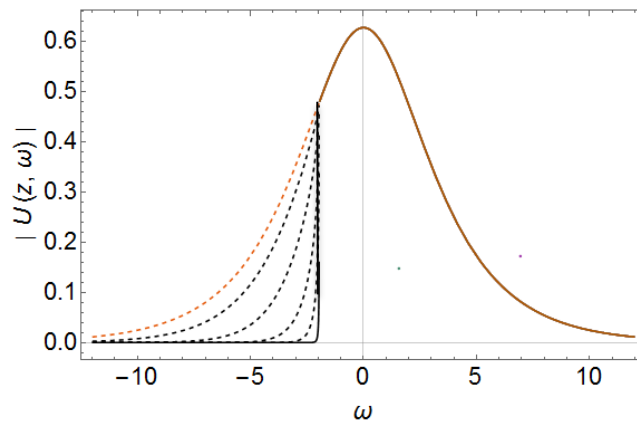


Figura 8.5 El pulso (8.27) toca el rango prohibido de frecuencias, conforme comienza a evolucionar en $z=0$, se va achatando de lado izquierdo, esto sucede en el espacio de frecuencias.

Veamos a continuación qué sucede con este tipos de pulsos al proponerlos como condición inicial para la solución de la ecuación linealizada GcmKdV (8.4).

8.3 Evolución de un pulso cuya condición inicial toca el rango prohibido de frecuencias.

Si hacemos $B=1$ el pulso inicial (8.22) transformado al espacio de frecuencias será:

$$U(0, \omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right), \quad (8.29)$$

y la solución en el espacio original (z,t) , según (8.25) será:

$$u(z, t) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sqrt{2\pi}}{2} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) \exp(\lambda_2 z) \right], \quad (8.30)$$

donde para los valores de $\varepsilon = 1$ y $\alpha = \frac{1}{30}$, el valor de λ_2 según (8.10) será:

$$\lambda_2 = -15i - 15 \sqrt{-1 - \left(\frac{2}{15}\right) \omega^3}. \quad (8.31)$$

El cálculo para una z en particular es decir para un pulso analizado en cierto punto de la fibra óptica se realizó de forma numérica a través de unas líneas de código ejecutados en *Wolfram Mathematica* (ver Apéndice C) para $z=1$:

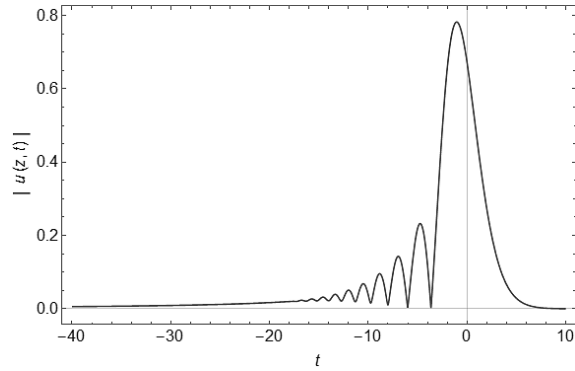


Figura 8.6. Evolución del pulso (8.30) a través de la fibra óptica para $z=1$

Como se observa en la figura 8.6 el pulso comienza a emitir radiación en forma de tren de pulsos de menor amplitud hacia la izquierda, casi instantáneamente según evoluciona respecto a z . Además, se nota un ligero desplazamiento de la solución $|u(z,t)|$ hacia la misma dirección que lleva el tren de pulsos el cual termina abruptamente en un punto bien definido cercano a $t=-4$. Recordemos que t no es la variable de evolución sino el tiempo retardado, que representa un marco de referencia que se mueve a la misma velocidad del pulso, es decir, la solución $|u(z,t)|$ debería mantenerse centrado en $t=0$ para el pulso inicial estacionario $u(0,t) = \text{sech}(Bt)$. De tal manera que el tren de pulsos se mueve a una velocidad distinta que la solución $u(z,t)$, para ver esto detalladamente superponemos las graficas $|u(z,t)|$ respecto a la variable de evolución z , para $z=1/3, 2/3, 5/6$.

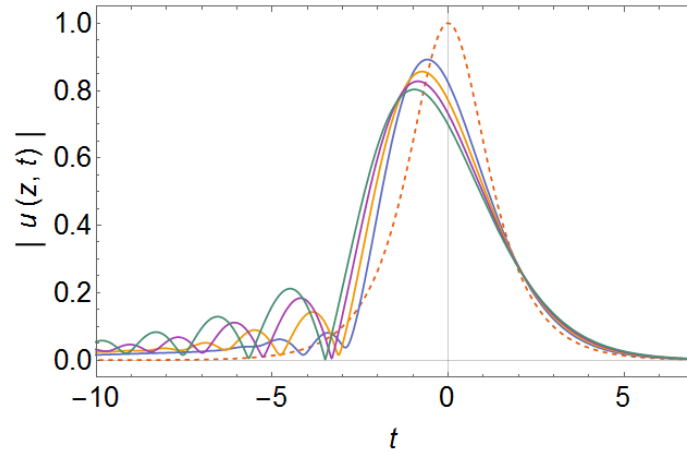


Figura 8.7. En línea punteada la condición inicial $u(z=0,t)$, luego la evolución del pulso (8.30) para $z= 1/3,2/3,5/6$.

Del lado derecho la cola del pulso no se mueve a comparación del pico que se ve arrastrado hacia la izquierda según el tren de pulsos se mueve.

Para hallar el valor de la velocidad inversa del pulso $u(z,t)$ se calcula de la figura (8.7) un promedio entre los intervalos Δt y Δz tomando como referencia el pico del pulso que, para este caso el valor de la velocidad inversa es de $v_l = (\Delta t/\Delta z) \approx -1 \pm 0.05$, este tipo de comportamiento corresponde a pulsos lineales móviles (de la forma mostrada en la ec. (8.36)) los cuales no fueron contemplados para determinar la relación de dispersión lineal (8.3) donde los pulsos fueron considerados como ondas planas. En la siguiente sección se reconsiderará la naturaleza de los pulsos lineales de pequeña amplitud como móviles, lo cual nos dará la clave para entender por qué el pulso radía.

8.4 Evolución de un pulso cuya condición inicial está fuera del rango de frecuencias prohibida para ondas lineales.

Por otra parte si tomamos un valor del coeficiente $B < 1$, entonces en el espacio de frecuencias el ancho del pulso disminuye y queda acotado a un valor FWHM < 1 de tal forma que en pulso, aunque esté centrado en $\omega = 0$, evolucionará sin tocar el rango de las frecuencias prohibidas para pulsos lineales ($\omega < \omega_p = -1.9$) de tal forma que no se achata como en el resultado anterior (ver figura 8.5).

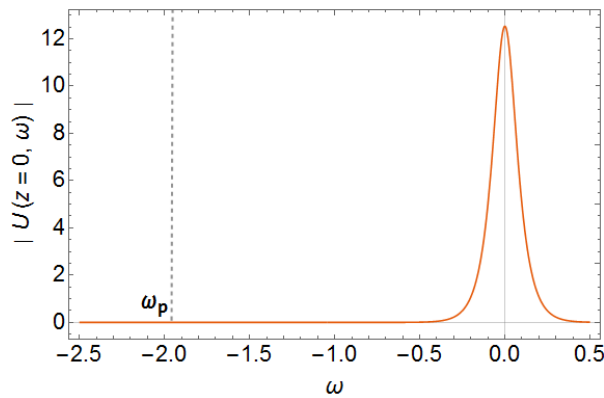


Figura 8.8 Condición inicial $u(0, t) = \text{sech}(t/16)$ transformado al espacio de frecuencias con un ancho de pulso que no toca el espacio prohibido de frecuencias.

Tomando en cuenta esta premisa, y al hacer evolucionar un pulso inicial con estas características, para $u(0, t) = \text{sech}(t/16)$, se encuentra que en un principio el pulso tiene un comportamiento solitónico pues no muestra radiación o pérdida de amplitud, es decir, conserva su forma; por ejemplo, para una valor de $z=100$ medianamente grande el pulso mantiene su amplitud y anchura (ver figura 8.9).

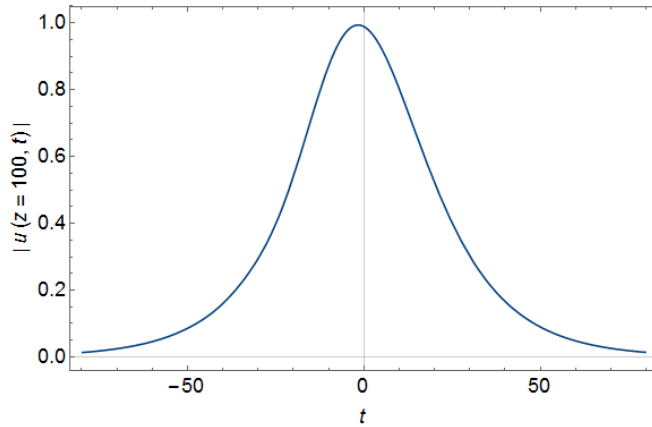


Figura 8.9 Evolución del pulso (8.30) a través de la fibra óptica para un valor de $B=1/16$ y $z=100$

Sin embargo, se puede observar que el pico del pulso se ha desplazado ligeramente hacia la izquierda, es decir, el pulso se ve afectado por una muy pequeña velocidad inversa ($\Delta t/\Delta z$) hacia la izquierda, cuyo valor estimado a partir de la figura 8.9 es $v_l = -0.01$. Entonces, si el pico de la solución se ve afectado por esta velocidad, es de sospechar que se deba a la presencia de una ligera resonancia que no se muestra aún. Para una z más grande quizás se tenga un comportamiento similar a la figura (8.6) radiando hacia la izquierda. Para un valor grande $z=1000$ esta predicción se cumple.

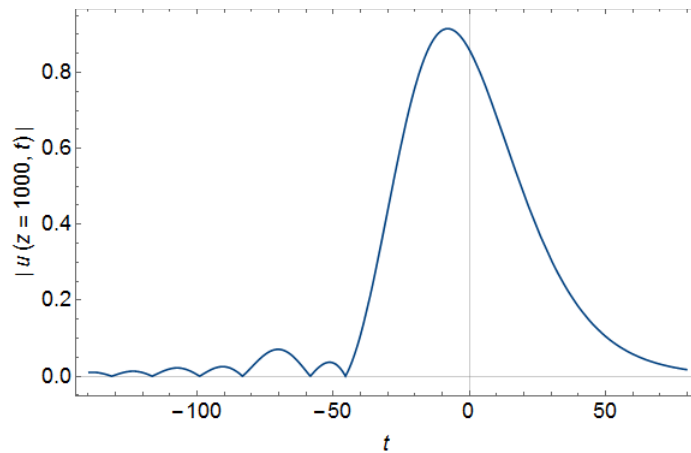


Figura 8.10 Pulso (8.30) propagándose a través de la fibra óptica con $B=1/16$ y $z=1000$.

Este resultado, nos indica que aunque parezca que se haya evitado la radiación en la solución $u(z,t)$, para z muy grandes, el pulso finalmente muestra resonancia con las ondas lineales de pequeña amplitud que se propagan en el mismo medio. Este hecho nos indica que inevitablemente las soluciones $u(z,t)$ de la forma lineal de la GcmKdV mostrarán resonancia y este tipo de comportamiento es atribuido a la presencia de la tercera derivada (u_{ttt}) en la ecuación GcmKdV, que es conocido como término “dispersivo”.

8.5 Evolución de un pulso cuya condición inicial tiene una fase ω_0 (solución móvil).

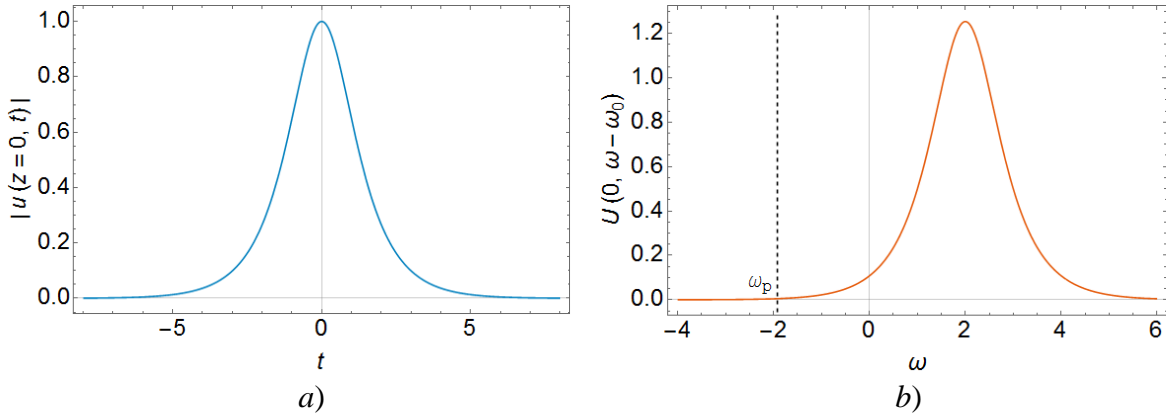
Ahora bien, veamos que sucede si cambiamos la forma del pulso inicial del caso estacionario $u(0, t) = A \operatorname{sech}(Bt)$ al caso móvil:

$$u(0, t) = A \operatorname{sech}(Bt) e^{-i\omega_0 t}, \quad (8.32)$$

donde el argumento de la exponencial representa una fase inicial ω_0 ; en el espacio (z, t) esta fase inicial no afecta la forma del pulso (ver figura 8.11a) pero al aplicar su transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} U(0, \omega - \omega_0) &= \mathcal{F}[\operatorname{sech}(Bt) e^{-i\omega_0 t}] \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2B} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{2B} \omega - \omega_0\right). \end{aligned} \quad (8.33)$$

El pulso inicial transformado estará centrado en ω_0 hacia la derecha lo cual permite evadir que parte del pulso este dentro del rango prohibido de frecuencias (ver figura 8.11b).



Figuras 8.11 Condición inicial del pulso con una fase inicial en el espacio original (z, t) figura *a*) y transformado al espacio de frecuencias (z, ω) figura *b*).

De tal manera que el pulso en el espacio de frecuencias al no tocar el intervalo prohibido de frecuencias evita que se corte o se vaya achatando de lado izquierdo como sucedió en el primer resultado (ver figura 8.5).

Con esta consideración la solución en el espacio original (z, t) será ahora:

$$u(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(0, \omega - \omega_0) e^{\lambda_2 z} e^{-i\omega t} d\omega. \quad (8.34)$$

En símbolo operacional y sustituyendo λ_2 (8.10):

$$u(z, t) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sqrt{2\pi}}{2B} \operatorname{sech} \left(\frac{\pi}{2B} \omega - \omega_0 \right) \exp \left(-15i * z - 15 * z \sqrt{-1 - \left(\frac{2}{15} \right) \omega^3} \right) \right]. \quad (8.35)$$

Veamos que sucede ahora si calculamos numéricamente el pulso para una $B=1$ de nuevo, pero con una fase inicial corrida a la derecha, $\omega_0 = 3$.

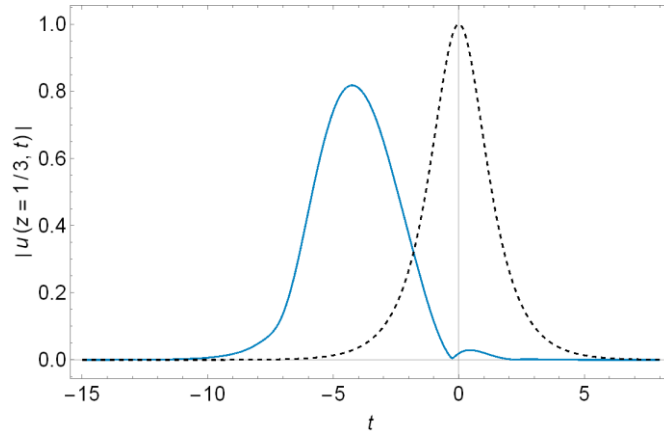
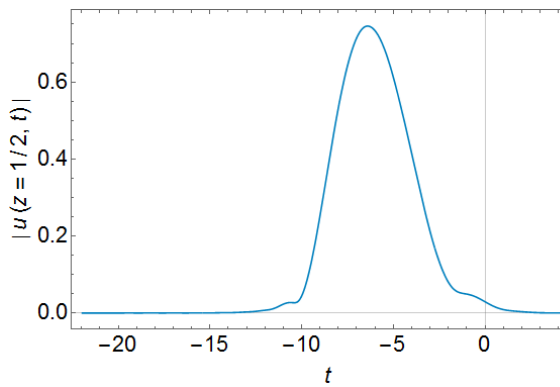
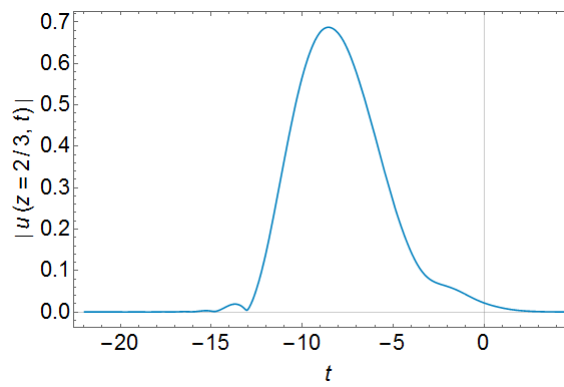


Figura 8.12 En azul evolución del pulso (8.35) para una $z=1/3$ y en líneas punteadas la condición inicial $z=0$.

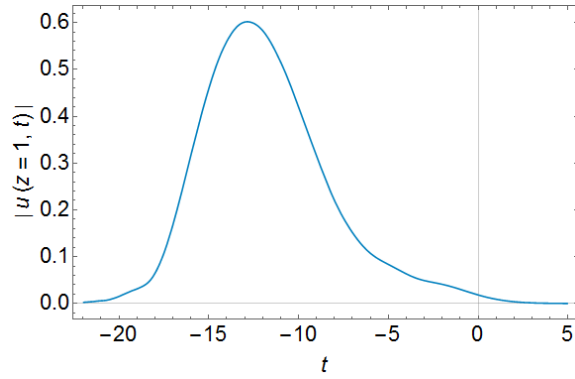
En este caso el pulso muestra un claro desplazamiento hacia la izquierda y una pérdida en amplitud debido a una resonancia de lado derecho, veamos si se produce un tren de pulsos lineales bien definido:



a)



b)



c)

Figuras 8.13 Evolución del pulso (8.35) para $z=1/2, 2/3, 1$. Figuras a), b) y c) respectivamente.

A diferencia del caso anterior, esta solución se desplaza con una velocidad inversa constante, y no muestra un tren de pulsos definido, pero sí se observa que existe una ligera emisión de radiación de ambos lados del pulso, lo cual no sucedió en el caso anterior.

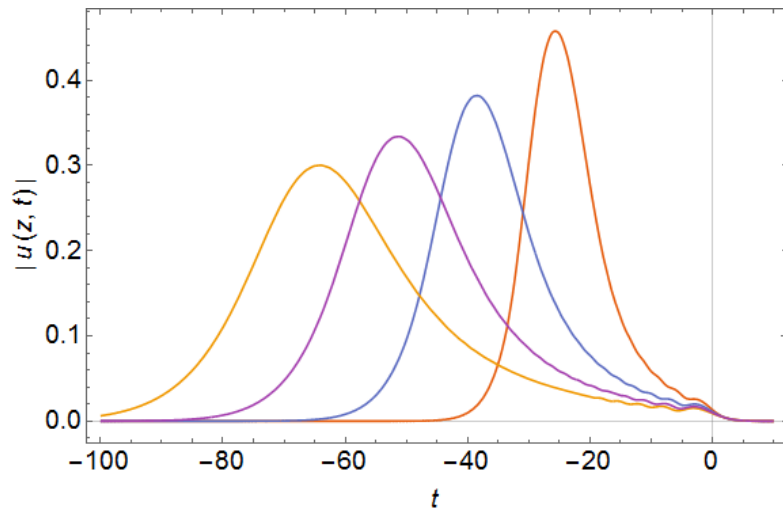


Figura 8.14 Superposición de la evolución del pulso (8.35) con $B=1/2$ y $z=1, 2, 3, 4$, donde se aprecia que el pulso lleva una velocidad inversa $v_t \approx -12$

8.5 Ondas lineales de pequeña amplitud móviles y el análisis de la radiación de las soluciones $\mathbf{u}(\mathbf{z}, t)$.

Para explicar los resultados obtenidos anteriormente, es necesario hacer una reconsideración acerca de los pulsos lineales de pequeña amplitud $\delta u(z, t)$ con los que interacciona los diferentes tipos de soluciones $u(z, t)$ consideradas anteriormente, pues en todos los casos se pudo observar algún tipo resonancia destructiva ya sea que se modifique el ancho del pulso (variando el parámetro B) o considerando una fase inicial o no en la condición inicial de la solución. Ahora, será necesario expresar a las ondas lineales de pequeña amplitud de una manera un poco distinta. En vez de expresarlas en la forma de onda plana $u_0 e^{i[kz - \omega t]}$, las expresaremos de la siguiente forma:

$$\delta u(z, t) = u_0 e^{i[kz - \omega(t - v_l z)]}, \quad (8.36)$$

donde se añadió un término adicional en la fase que caracteriza la velocidad inversa $v_l \equiv (\Delta t / \Delta z)$ de las soluciones observadas anteriormente. Estas ondas, satisfacen la parte lineal de la GcmKdV (8.4) y se propagan en el sistema óptico al igual que las soluciones completas de la GcmKdV. Al sustituir la función (8.36) en la ecuación (8.4), obtenemos la relación de dispersión de estas ondas de pequeña amplitud:

$$\alpha k^2 + (1 + 2\alpha v_l \omega)k + \omega v_l + \alpha \omega^2 v_l^2 - \varepsilon \omega^3 = 0, \quad (8.37)$$

donde los valores $\alpha = 1/30$ y $\varepsilon = 1$ ya se han asignado anteriormente.

Para conocer las frecuencias en las que existe resonancia entre las ondas lineales de pequeña amplitud (8.36) y la solución en el espacio de frecuencias $U(z, \omega) = b(\omega) \exp(\lambda_2 z)$, debemos conocer el número de onda k_s con el que evoluciona nuestro pulso $U(z, \omega)$. Recordando que:

$$\lambda_2 = \frac{-i - \sqrt{-1 - 4\alpha\varepsilon\omega^3}}{2\alpha} = \frac{-i - \sqrt{s(\omega)}}{2\alpha}; \quad (8.38)$$

redefiniendo el argumento del radical:

$$s(\omega) = -1 - 4\alpha\varepsilon\omega^3 = -(1 + 4\alpha f(\omega)), \quad (8.39)$$

donde $f(\omega) = \varepsilon\omega^3$, entonces $\sqrt{s(\omega)} = i\sqrt{1 + 4\alpha f(\omega)}$. Podemos aproximar el radical de lado derecho completando el trinomio cuadrado perfecto si se cumple que $\alpha^2 f^2(\omega) \ll \alpha f(\omega)$ que se puede escribir como $|\alpha\varepsilon\omega^3| = |\omega^3/30| \ll 1$, entonces:

$$\begin{aligned} \sqrt{s(\omega)} &\cong i\sqrt{1 + 4\alpha f(\omega) + 4\alpha^2 f^2(\omega)} \\ &\cong i(1 + 2\alpha f(\omega)). \end{aligned} \quad (8.40)$$

Sustituyendo en (8.38):

$$\begin{aligned} \lambda_2 &\cong \frac{-i - i(1 + 2\alpha f(\omega))}{2\alpha} \\ &= -\frac{i}{\alpha} - if(\omega). \end{aligned} \quad (8.41)$$

Por lo tanto, la solución en el espacio de frecuencias $U(z, \omega) = b(\omega) \exp(\lambda_2 z)$, contendrá el factor $\exp(-iz/\alpha)$, lo cual implica que la solución $u(z, t)$ que es la transformada inversa de $U(z, \omega)$, tendrá un número de onda $k_s \approx -1/\alpha$. Como en este caso se utilizó $\alpha = 1/30$, tendremos que $k_s \approx -30$. La condición $|\alpha\varepsilon\omega^3| \ll 1$, donde $\alpha = 1/30$ y $\varepsilon = 1$, se cumple muy bien para $\omega \in (-1, +1)$. Conforme los valores de ω se alejan del centro de este intervalo se tendrá que ir considerando un ajuste al valor $k_s = -30$.

donde el signo menos lo asociamos al número de onda, entonces $k_s = -30$.

Ahora que conocemos el número de onda k_s con el que se propaga la solución que calculamos, podemos saber con qué ondas lineales de pequeña amplitud δu resuena, esto es, si aplicamos la condición de resonancia igualando el número de onda k_s del pulso con la relación de dispersión de ondas lineales de pequeña amplitud (8.37):

$$k_s = k(\omega). \quad (8.44)$$

Sustituyendo el valor de k_s en la relación de dispersión lineal implícita (8.37):

$$\alpha k_s^2 + (1 + 2\alpha v_l \omega)k_s + v_l \omega + \alpha v_l^2 \omega^2 - \varepsilon \omega^3 = 0. \quad (8.45)$$

La solución de esta ecuación permite hallar la o las frecuencias ω de resonancia entre las ondas de pequeña amplitud δu y las soluciones $u(z, t)$ que satisfacen la parte lineal de la GcmKdV. Reagrupando los términos de la ecuación (8.45) según el grado de ω :

$$-\varepsilon \omega^3 + \alpha v_l^2 \omega^2 + (1 + 2\alpha v_l k_s)\omega + (\alpha k_s^2 + k_s) = 0, \quad (8.46)$$

esta ecuación es un polinomio cúbico de la forma $a\omega^3 + b\omega^2 + c\omega + d = 0$, cuyo discriminante:

$$\Delta = 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2. \quad (8.47)$$

Indica el tipo de raíces:

Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene tres raíces reales.

Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene raíces múltiples (triple, doble o simple).

Si $\Delta < 0$, existe una raíz real y dos complejas.

Para la ecuación (8.46) el discriminante será:

$$\begin{aligned} \Delta = & -18\varepsilon\alpha v_l^3(1 + 2\alpha k_s)(\alpha k_s^2 + k_s) - 4\alpha^3 v_l^6(\alpha k_s^2 + k_s) + \alpha^2 v_l^6(1 + 2\alpha k_s)^2 \\ & + 4\varepsilon v_l^3(1 + 2\alpha k_s)^3 - 27\varepsilon^2(\alpha k_s^2 + k_s)^2, \end{aligned} \quad (8.48)$$

tomando en cuenta el resultado $k_s \approx -1/\alpha$, esta expresión se reduce a:

$$\Delta = \alpha^2 v_l^6(1 + 2\alpha k_s)^2 + 4\varepsilon v_l^3(1 + 2\alpha k_s)^3. \quad (8.49)$$

Sustituyendo los valores ya escogidos de $\varepsilon = 1$ y $\alpha = \frac{1}{30}$, entonces:

$$\Delta_l = v_l^6 \left(\frac{1}{30}\right)^2 - 4v_l^3. \quad (8.50)$$

Este resultado muestra que el número de raíces de la ecuación (8.46), es decir, el número de frecuencias de resonancias ω_r está determinado finalmente por la velocidad lineal v_l , al graficar el determinante (8.50) (ver figura 8.16). Podemos observar que toma diferentes valores, los cuales determinaran cuantas frecuencias de resonancia ω_r existen entre la solución $u(z, t)$ y las ondas lineales de pequeña amplitud δu .

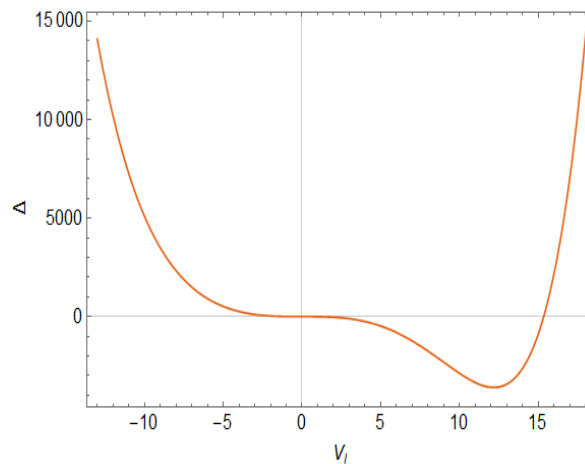
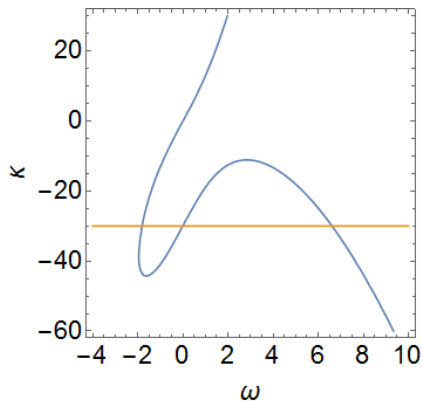


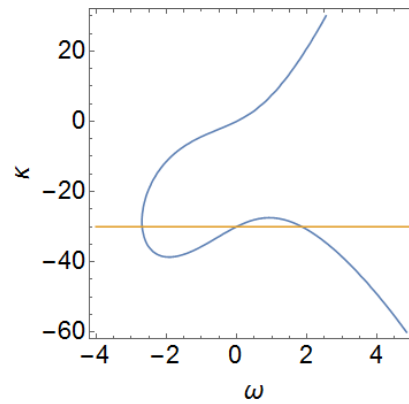
Figura 8.16 El valor del determinante será $\Delta > 0$, si $v_l < 0$.

Sin embargo, sólo es de interés la parte donde los valores de v_l son negativos y cercanos a cero pues los resultados anteriores exhiben radiación en forma de trenes de pulsos lineales que se mueven con velocidades negativas hacia la izquierda.

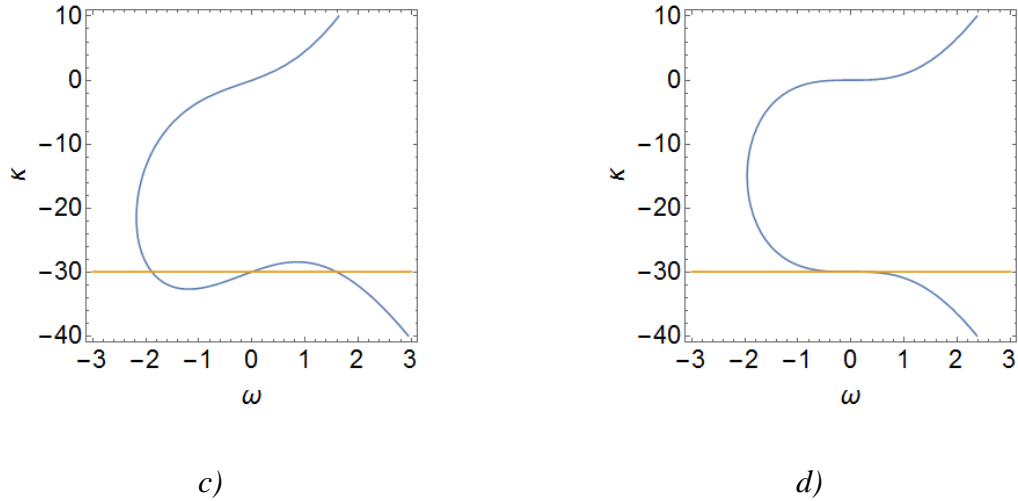
Para $v_l < 0$ el valor del discriminante será positivo y eso predice la existencia de tres raíces, es decir de tres frecuencias de resonancia ω_r . Para ilustrar y hallar el valor de las frecuencias de resonancia, graficamos la relación de dispersión $k(\omega)$ (8.37) para una cierta velocidad lineal v_l y la recta constante correspondiente al valor del número de onda de la solución $k_s \approx -30$. De la intersección de esta recta con la curva de la relación de dispersión se obtienen los valores de las frecuencias de resonancia ω_r . Por ejemplo, para $v_l = -12, -5, -3, 0$ (ver figuras 8.17), las tres primeras velocidades son negativas y se obtienen tres intersecciones con la recta $k_s = -30$ correspondientes a las frecuencias de resonancia. Lo que sigue es analizar si estas frecuencias son las responsables de la radiación observada en los resultados anteriores. Pero antes de esto, es necesario hacer una sutil observación.



a)



b)



Figuras 8.17

Se puede notar que para velocidades v_l pequeñas, cercanas a cero, las frecuencias de resonancia ω_r también toman valores cada vez más cercanos a cero y además los picos de la curva de la relación de dispersión $k(\omega)$ respecto a la recta $k_s = -30$ van disminuyendo, de tal modo que si se varia el valor del número de onda de la solución $k_s = -30 \pm \delta k_s$, se podría tener que ya solo existe una frecuencia de resonancia como en la figura 8.17d en lugar de tres. Este hecho es posible tomando en cuenta que el valor del número de onda de la solución $k_s = -30$ fue encontrado haciendo una aproximación donde se estableció la condición $|\alpha \varepsilon \omega^3| \ll 1$, donde $\alpha = 1/30$ y $\varepsilon = 1$, esta condición se satisface bien para valores de $\omega \in (-1, +1)$; para valores de la frecuencia fuera de este intervalo se puede ajustar el valor del número de onda de la solución considerando una corrección δk_s .

Entonces, el valor de la de la velocidad inversa v_l , así como el valor del número de onda k_s (ajustado) de la solución $u(z, t)$, determinarán las frecuencias de resonancia ω_r 's. Para ver cómo estas conclusiones explican la radiación de las soluciones obtenidas anteriormente, se procede a graficar: la relación de dispersión de ondas

lineales de pequeña amplitud $k(\omega)$ con velocidad lineal v_l que se observa en cada una de las gráficas de evolución de la solución, junto con la recta aproximada $k_s = -30 \pm \delta k_s$ que representa al número de onda intrínseco de la solución $u(z, t)$, y también, la condición inicial de la solución en el espacio de frecuencias $U(z = 0, \omega) = \eta(\mathcal{F}[\text{sech}(Bt)])$ multiplicado por un factor de escala η para apreciar bien su amplitud.

En el primer resultado (gráfica 8.6), se observa una velocidad lineal del pulso $v_l = -1.2$, sustituyendo esto en la relación de dispersión de ondas lineales móviles $\delta u(z, t)$ (8.37), y recordando que la condición inicial en el espacio de frecuencias está dado por $U(z = 0, \omega) = \mathcal{F}[\text{sech}(t)] = \sqrt{\pi/2}\text{sech}(\pi\omega/2)$ y con $k_s = -30 + \delta k_s$, donde δk_s es la corrección al valor aproximado ($k_s \approx -30$).

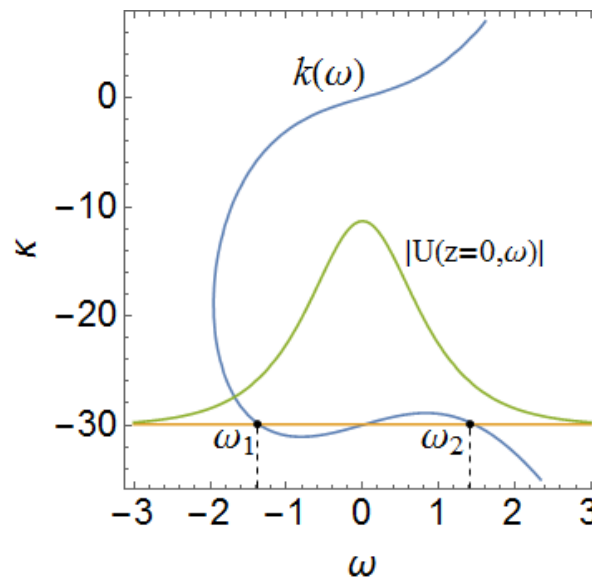


Figura 8.19 La corrección a k_s que se utilizó fue de $\delta k_s = -0.1$ y la amplitud

$|U(z, \omega)|$ esta multiplicada por un factor de $\eta = 15$.

La intersección de la curva $k(\omega)$ con la recta $k_s = -30 + \delta k_s = -29.9$, será el valor numérico de las frecuencias de resonancia $\omega_1 = -1.14$, $\omega_2 = 1.13$, donde $\omega = 0$ no se

considera de resonancia pues no es posible definir una velocidad de fase para este valor. Como se observa (ver figura 8.19), ω_1 y ω_2 tocan a la condición inicial en ambos lados, de tal manera que una de estas frecuencias de resonancia produce la radiación observada en la figura 8.6. Para conocer cual frecuencia de resonancia es responsable, necesitamos verificar que la velocidad de fase $v_f = (k_s/\omega_r)$, $r=1, 2$, y la velocidad de grupo $v_g = (dk/d\omega)$ de las ondas lineales de pequeña amplitud δu tengan el mismo sentido que la radiación que se observa en la evolución de la solución $u(z, t)$. Al evaluar los valores numéricos obtenidos de la grafica k_s y $\omega_{1,2}$: $v_{f1} = (k_s/\omega_1) = 26.22$ y $v_{f2} = \left(\frac{k_s}{\omega_2}\right) = -26.46$. Para la velocidad de grupo evaluamos la derivada implícita de la relación de dispersión $k(\omega)$ (8.37) respecto a la frecuencia:

$$\frac{dk(\omega)}{d\omega} = -\frac{15v_l + v_l^2\omega - 45\omega^2 + v_l k}{15 + v_l\omega + k}, \quad (8.51)$$

en los valores $v_l = -1.2$, $\omega_r = -1.14$ y $k_s = -29.9$ se obtiene que $v_{g1} = dk(\omega_1, k_s)/d\omega \approx -3.12$ y $v_{g2} = dk(\omega_2, k_s)/d\omega \approx -3.02$. Donde ω_1 , no representa una frecuencia de resonancia real pues la velocidad de fase que se obtiene en ese punto es positiva y la de grupo negativa, es decir, no es posible la propagación de un tren de pulsos lineales de pequeña amplitu. En cambio para ω_2 , se obtiene una velocidad de fase y de grupo negativas, es decir, describe el tren de pulsos lineales que se propaga a la izquierda en la figura 8.6. La diferencia entre los valores de la velocidad de fase y la de grupo es justamente la responsable del fenómeno de dispersión (ver apartado 2.6)

En el segundo resultado (figura 8.10) donde $v_l = -0.01$, $U(z = 0, \omega) = \mathcal{F}[\text{sech}(t/16)] = 8\sqrt{2\pi}\text{sech}(8\pi\omega)$ (figura 8.9) y $k_s = -30.004$, este valor es el más cercano a -30, lo cual concuerda con el hecho de que en este caso los valores de frecuencia

satisfacen bien la condición $|\omega^3/30| \ll 1$ que se aplicó en la aproximación para calcular $k_s \approx -30$.

El valor de la frecuencia de resonancia obtenido numéricamente de la intersección de la relación de dispersión y la recta k_s es $\omega_r = 0.1796$ (ver figura 8.20).

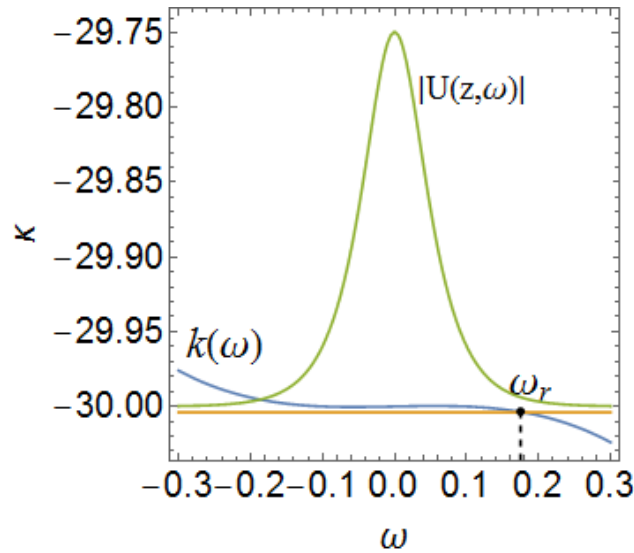


Figura 8.20.

Entonces, la velocidad de fase será $v_f = (k_s/\omega_r) \approx -167.015$ y la de grupo $v_g = dk(\omega_r, k_s)/d\omega \approx -0.086$, ambas velocidades describen justamente la radiación observada en la figura (8.10).

Para el tercer resultado (figuras 8.12-14), donde se consideraron soluciones móviles se aplicó una fase inicial al pulso $U(z = 0, \omega) = \mathcal{F}[\text{sech}(t) \exp(-i\omega_0 t)] = \sqrt{\pi/2} \text{sech}(\pi(\omega - \omega_0)/2)$, donde $\omega_0 = 3$: donde se observó que el pulso se desplaza con una velocidad lineal inversa $v_l = -12$, es este caso el pulso inicial está desplazado hacia la derecha, centrado en $\omega=3$. Lo cual hace que las frecuencias cercanas a ω_2 no satisfagan adecuadamente la condición $|\omega^3/30| \ll 1$ que permitió calcular $k_s \approx -30$, por lo que se realizó un ajuste al número de onda del solitón de

$\delta k_s = -1.2$; entonces, $k_s = -31.2$, de la intersección de esta recta con la relación de dispersión $k(\omega)$, se obtienen 3 frecuencias de resonancia, sin embargo sólo nos fijamos en las que alcanzan a tocar a la condición inicial $|U(z=0, \omega)|$, $\omega_1 = -0.098$ y $\omega_2 = 6.89$ (ver figura 8.21).

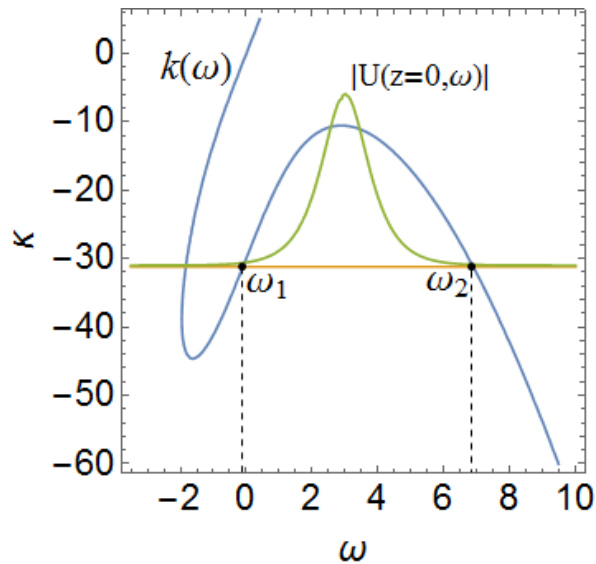


Figura 8.21. coef(20), $\omega_0=3, B=k = -28$

Con las cuales se calculan las velocidades de fase $v_{f1} = (k_s/\omega_1) = 318.36$ y $v_{f2} = (k_s/\omega_2) = -4.52$ así como las velocidades de grupo $v_{g1} = dk(\omega_1, k_s)/d\omega \approx 11.97$ y $v_{g2} = dk(\omega_2, k_s)/d\omega \approx -9.60$, estas velocidades nos dan el sentido con el que se mueven los pulsos de pequeñísima amplitud que se aprecian como resonancia en las figuras 8.12-14.

Esta forma de analizar la propagación de las soluciones lineales de la GcmKdV usando el análisis de Fourier nos permitió replantear el problema de Cauchy, siendo sólo necesario conocer la condición inicial del pulso para analizar su evolución. Estudiar numéricamente la evolución de los pulsos permitió entender cómo se origina la resonancia con las ondas lineales de pequeña amplitud que producen radiación,

logrando incluso identificar el tren de pulsos bien definido. Por otra parte y de manera interesante, el hecho de que las familias de solitones brillantes soluciones completas de la GcmKdV sea embebidas, es decir que sean soluciones analíticas exactas que evolucionan sin radiación, expresa que debe ser existir un equilibrio o compensación entre el término dispersivo (u_{ttt}) observado en las soluciones lineales donde el pulso presenta radiación y el no lineal ($|u|^2u_t$).

8.6 El término u_{zz} y las soluciones lineales de la ecuación GcmKdV.

Finalmente, para comprender cuál es el papel que juega el término u_{zz} en la propagación de los pulsos ópticos a través de la fibra óptica, realizaremos algunas pruebas comparativas de las soluciones de la ec. GcmKdV lineal ($iu_z + \alpha u_{zz} - i\epsilon u_{ttt} = 0$) en contraste con las soluciones lineales despreciando el término u_{zz} , es decir, la ec. cmKdV lineal:

$$iu_z - i\epsilon u_{ttt} = 0, \quad (8.52)$$

Para esto, se resolverá la ec. (8.52) que se obtiene de omitir el término de la segunda deriva de la ec. GcmKdV lineal, este término suele ser despreciado en diversas ecuaciones no lineales que describen la propagación de pulsos ópticos cuando se aplica la aproximación SVEA (slow Varying envelopment approximation), la cual supone que la envolvente del frente de onda varía lentamente en el tiempo o el espacio en comparación con el periodo o la longitud de onda.

Transformando la ecuación (8.52) al espacio de frecuencias a través de la transformada de Fourier $\mathcal{F}[u(z, t)] = U(z, \omega)$, se obtiene:

$$iU_z + \epsilon\omega^3U = 0, \quad (8.53)$$

esta ecuación transformada se puede resolver fácilmente a través de método del polinomio característico:

$$i\lambda + \varepsilon\omega^3 = 0, \quad (8.54)$$

cuya raíz es $\lambda = i\varepsilon\omega^3$, entonces la solución será de la forma:

$$U(z, \omega) = c(\omega) \exp(i\varepsilon\omega^3 z), \quad (8.55)$$

donde la función $c(\omega)$, se puede determinar a través de la condición inicial transformada al espacio de frecuencias $\mathcal{F}[u(z=0, t)] = U(0, \omega)$, al aplicar esto en (8.55) se obtiene que:

$$U(0, \omega) = c(\omega). \quad (8.56)$$

Así, la solución en el espacio original (z, t) está dado por la transformada inversa de Fourier de (8.55):

$$u_c(z, t) = \mathcal{F}^{-1}[U(z, \omega)] = \mathcal{F}^{-1}[U(0, \omega) \exp(i\varepsilon\omega^3 z)], \quad (8.57)$$

donde el subíndice c indica que se trata justamente de la solución de la ec. cmKdV linealizada.

Ahora bien, como condición inicial tomaremos un pulso sencillo tipo solitón de la forma $u(0, t) = A \operatorname{sech}(Bt)$, entonces:

$$U(0, \omega) = \mathcal{F}[A \operatorname{sech}(Bt)] = A \frac{\sqrt{2\pi}}{2B} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{2B} \omega\right). \quad (8.27)$$

donde $A = 1$ y $B=3$. Al sustituir esta condición inicial tanto en la solución de la ecuación cmKdV lineal (8.57), y en la solución de la ec. GcmKdV linealizada (8.35) podemos comparar la diferencias que presentan los pulsos al evolucionar a través de la

fibra óptica. Este cálculo se realizó numéricamente usando un programa computacional (ver Apéndice B) para los valores $z=1/100, 1/10$ y $1/5$:

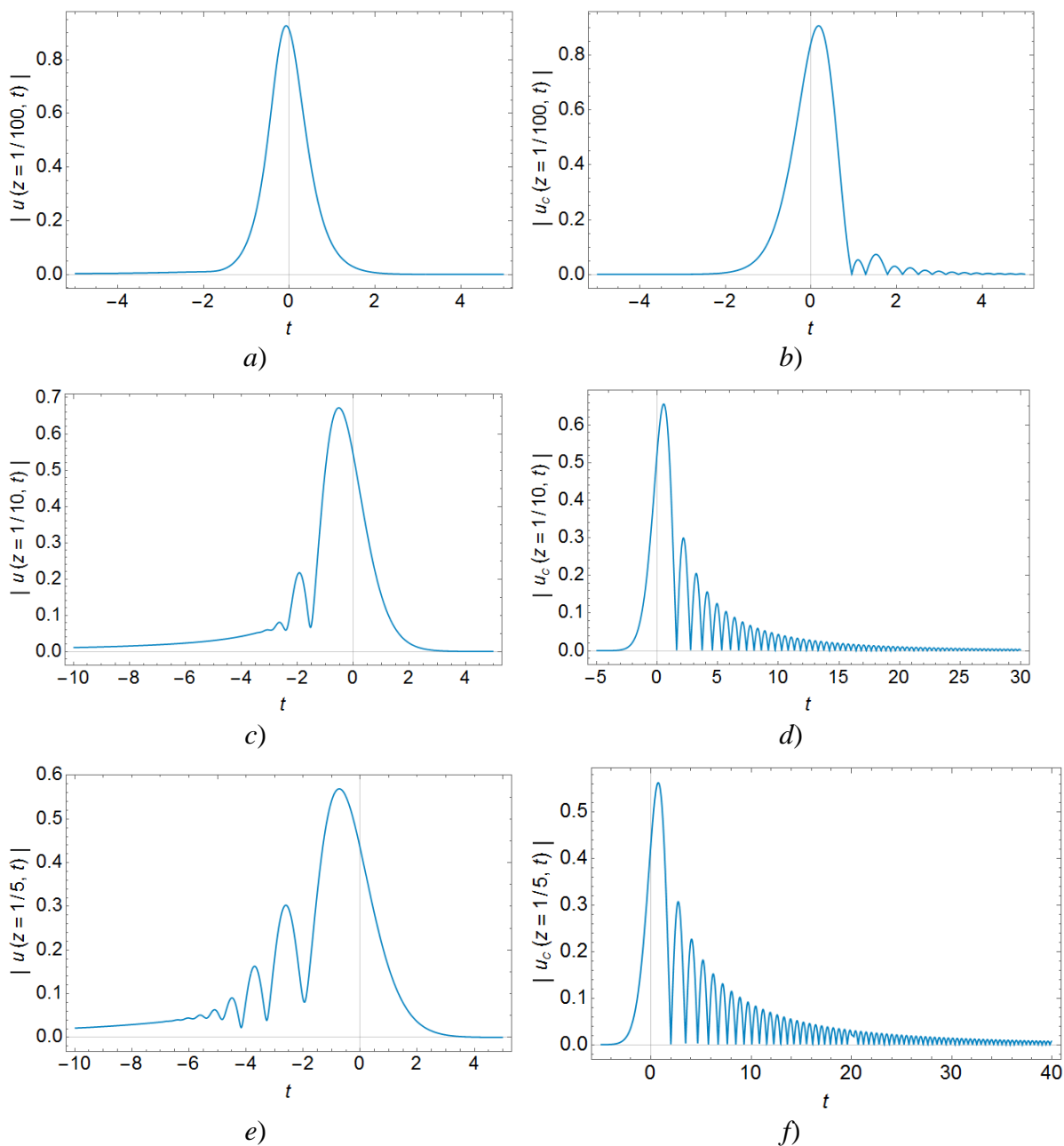


Figura 8.22 De lado izquierdo a), c) y e) evolución de la solución GcmKdV lineal. De lado derecho b), d) y f) evolución de la solución cmKdV lineal.

La diferencia entre las gráficas de la izquierda y las gráficas de la derecha en la figura 8.22 es espectacular. La presencia del término u_{zz} en la ec. GcmKdV lineal cambia totalmente la radiación que emite el pulso. Podemos observar claramente que:

-Para la evolución de la solución GcmKdV linealizada figuras (8.22 *a*, *c* y *e*) se observa una radiación en forma de un tren de pulso bien definido que comienza y termina en puntos muy específicos y se mueve hacia la izquierda con una velocidad negativa, la cual es diferente a la velocidad de propagación del pulso pues la radiación no aparece sino hasta después de $z=1/30$.

-La solución de la ecuación cmKdV lineal (sin contemplar el término u_{zz}) presenta también radiación, pero que aparece casi instantáneamente en cuanto el pulso comienza a evolucionar en $z=1/500$, y que se propaga rápida e indefinidamente hacia la derecha lo cual hace difícil caracterizar esta radiación. Algo interesante es que aunque parece que esta radiación parece ser más nociva para el pulso, en realidad en ambos pulsos va disminuyendo de manera similar la amplitud según evolucionan en z .

De esta forma el término u_{zz} en la ecuación GcmKdV define cualitativamente la resonancia presente en las soluciones lineales, tanto en la dirección en la que se propagará la radiación, así como en la forma del tren de pulsos. En este caso el pulso solución de la ec. GcmKdV lineal se puede propagar sin emitir radiación una cierta distancia z , es decir presenta un comportamiento de onda viajera tipo solitón al principio, lo cual es indicio de que se trata de una solución más estable en cierto régimen (donde no aplica la aproximación SVEA).

CAPÍTULO 9.

TEOREMA DE EMMY NOETHER.

9.1 La idea básica del teorema.

Consideremos una densidad lagrangiana dependiente de 2 funciones complejas $u(z,t)$ y $v(z,t)$, y de sus derivadas:

$$L = L(u, u_z, u_t, \dots, v, v_z, v_t, \dots) \quad (9.1)$$

y a la “integral de acción” correspondiente:

$$S[u, v] = \iint_{\Omega} L(u, \dots, v, \dots) dt dz \quad (9.2)$$

donde Ω es alguna región del plano $z-t$ (donde z y t son reales).

La acción S alcanzará algún valor extremo cuando u y v satisfagan las ecuaciones de Euler-Lagrange de la forma:

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial u_z} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial L}{\partial u_{tt}} + \dots = 0 \quad (9.3a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial v_z} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial v_t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial L}{\partial v_{tt}} - \dots = 0 \quad (9.3b)$$

Ahora bien: el teorema de Emmy Noether nos dice que las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange satisfacen ciertas “leyes de conservación” cuando la integral de acción $S[u, v]$ es “invariante” ante un cierto tipo de transformaciones. En lo que sigue, veremos cómo son esas transformaciones, y cuáles son esas leyes de conservación.

Consideremos ahora un grupo de transformación infinitesimal de la forma:

$$z^* = z + \varepsilon \zeta_1 \quad (9.4)$$

$$t^* = t + \varepsilon \zeta_2 \quad (9.5)$$

$$u^* = u + \varepsilon \phi_1(u) \quad (9.6)$$

$$v^* = v + \varepsilon \phi_2(v) \quad (9.7)$$

donde ε es el parámetro del grupo, ζ_1 y ζ_2 son constantes reales, y, $\phi_1(u)$ y $\phi_2(v)$ son funciones complejas de u y v , respectivamente. Estas transformaciones son mucho más sencillas que las transformaciones que consideró Emmy Noether, en las cuales ζ_1 , ζ_2 , ϕ_1 y ϕ_2 dependían de u , v , y de sus derivadas. Sin embargo, para nuestros fines, será suficiente con considerar transformaciones de la forma (9.4)-(9.7).

Las primeras dos transformaciones describen traslaciones en z y en t , por tanto el (*) denota a las coordenadas ya transformadas. Las expresiones (9.6) y (9.7) corresponden a la transformación de la variable u y v , donde v corresponde al complejo conjugado de u . Estas últimas dos expresiones resultan más “complejas” pues dependen de las funciones $\phi_1(u)$ y $\phi_2(v)$ que son independientes. En general estas transformaciones expresan un cambio de variable para una región en el plano de coordenadas (z, t) .

Ahora introduzcamos el concepto de “invariancia”. Diremos que la acción (9.2) es *invariante* ante las transformaciones (9.4)-(9.7) si se cumple la siguiente igualdad:

$$\iint_{\Omega} L(u(z, t), u_z, \dots, v(z, t), v_z, \dots) dt dz = \iint_{\Omega^*} L(u^*(z^*, t^*), u_{z^*}, \dots, v^*(z^*, t^*), v_{z^*}, \dots) dt^* dz^* \quad (9.8)$$

donde supondremos que Ω es cualquier región rectangular de la forma:

$$\Omega = \{(z, t) | z_1 < z < z_2, t_1 < t < t_2\} \quad (9.9)$$

y Ω^* es simplemente la imagen Ω bajo las translaciones (9.4) y (9.5):

$$\Omega^* = \{(z^*, t^*) | z_1^* = z_1 + \varepsilon\xi_1 < z^* < z_2^* = z_2 + \varepsilon\xi_1, t_1^* = t_1 + \varepsilon\xi_2 < t^* < t_2^* = t_2 + \varepsilon\xi_2\} \quad (9.10)$$

El punto delicado aquí es entender bien qué representan las funciones u^* y v^* , pues a primera vista parecería que las ecuaciones (9.6) y (9.7) implican que:

$$u^*(z, t) = u(z, t) + \varepsilon\phi_1(u(z, t)), \quad (9.11a)$$

$$v^*(z, t) = v(z, t) + \varepsilon\phi_2(v(z, t)), \quad (9.11b)$$

lo cual no es correcto. Este punto es una de las fuentes de confusión cuando se trata de entender con precisión el teorema de Emmy Noether. Analicemos con cuidado el significado de u^* y v^* . El verdadero significado de las ecs. (9.6) y (9.7) es el siguiente:

$$u^*(z^*, t^*) = u(z, t) + \varepsilon\phi_1(u(z, t))$$

$$u^*(z^*, t^*) = u(z^* - \varepsilon\xi_1, t^* - \varepsilon\xi_2) + \varepsilon\phi_1(u(z^* - \varepsilon\xi_1, t^* - \varepsilon\xi_2)) \quad (9.12a)$$

$$v^*(z^*, t^*) = v(z, t) + \varepsilon\phi_2(v(z, t))$$

$$v^*(z^*, t^*) = v(z^* - \varepsilon\xi_1, t^* - \varepsilon\xi_2) + \varepsilon\phi_2(v(z^* - \varepsilon\xi_1, t^* - \varepsilon\xi_2)) \quad (9.12b)$$

donde hemos expresado las variables z y t en función de las transformaciones (9.4) y (9.5)

Entonces, para conocer $u^*(z^*, t^*)$ y $v^*(z^*, t^*)$ no sólo es necesario conocer las ecuaciones (9.6) y (9.7), sino también se deben usar (9.4) y (9.5). Y sólo hasta que conocemos cuáles son las funciones $u^*(z^*, t^*)$ y $v^*(z^*, t^*)$ [dadas en (9.11a) y (9.11b)] podemos saber

qué son *exactamente* las funciones $u^*(z, t)$ y $v^*(z, t)$. De (12), podemos renombrar las variables $z^* \rightarrow z$ y $t^* \rightarrow t$ que son mudas, por lo que obtenemos:

$$u^*(z, t) = u(z - \varepsilon\xi_1, t - \varepsilon\xi_2) + \varepsilon\phi_1(u(z - \varepsilon\xi_1, t - \varepsilon\xi_2)) \quad (9.13a)$$

$$v^*(z, t) = v(z - \varepsilon\xi_1, t - \varepsilon\xi_2) + \varepsilon\phi_2(v(z - \varepsilon\xi_1, t - \varepsilon\xi_2)) \quad (9.13b)$$

estas ecuaciones muestran por qué el sistema (9.11) es incorrecto. Ahora que conocemos con precisión cual la forma correcta de las transformaciones (9.4)-(9.7) pasaremos a demostrar qué significa la invariancia de la acción bajo estas transformaciones.

9.2 La invariancia de acción en el teorema de Noether.

Para comprobar si existen “Leyes de conservación” asociadas a las transformaciones (9.4)-(9.7), primero verificaremos que se cumpla la invariancia de la acción. Partiremos de analizar el significado del lado derecho de la ecuación (9.8):

$$\iint_{\Omega^*} L(u^*(z^*, t^*), u_{z^*}^*, u_{t^*}^*, \dots, v^*(z^*, t^*), v_{z^*}^*, v_{t^*}^*, \dots) dt^* dz^*.$$

Utilizando las traslaciones (9.4) y (9.5) se puede expresar z^* y t^* como $z^* = z + \varepsilon\zeta_1$ y $t^* = t + \varepsilon\zeta_2$, sustituyendo estas expresiones en los argumentos de las ecuaciones (9.12) se obtiene:

$$\begin{aligned} u^*(z^*, t^*) &= u^*(z^* = z + \varepsilon\zeta_1, t^* = t + \varepsilon\zeta_2) \\ &\equiv u(z, t) + \varepsilon\phi_1(u(z, t)), \end{aligned} \quad (9.14a)$$

$$\begin{aligned} v^*(z^*, t^*) &= v^*(z + \varepsilon\zeta_1, t + \varepsilon\zeta_2) \\ &\equiv v(z, t) + \varepsilon\phi_2(v(z, t)). \end{aligned} \quad (9.14b)$$

Por otra parte, por lo que respecta a las derivadas $u_{z^*}^*$, $u_{t^*}^*$, ..., y $v_{z^*}^*$, $v_{t^*}^*$, ..., que aparecen en el lagrangiano, las ecuaciones (9.12) implican que:

$$\begin{aligned} u_{z^*}^*(z^* = z + \varepsilon\zeta_1, t^* = t + \varepsilon\zeta_2) \\ \equiv u_z(z, t) + \varepsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial u} u_z(z, t), \end{aligned} \quad (9.15a)$$

$$\begin{aligned} u_{t^*}^*(z^* = z + \varepsilon\zeta_1, t^* = t + \varepsilon\zeta_2) \\ \equiv u_t(z, t) + \varepsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial u} u_t(z, t), \end{aligned} \quad (9.15b)$$

análogamente sucede lo mismo para las derivadas $v_{z^*}^*$, $v_{t^*}^*$, ...

Sustituyendo las ecuaciones (9.14) y (9.15) en el lado derecho de la condición de invarianza (9.8) y renombrado de nuevo las variables mudas $z^* \rightarrow z$ y $t^* \rightarrow t$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega^*} L(u^*(z^*, t^*), u_{z^*}^*, \dots, v^*(z^*, t^*), v_{z^*}^*, \dots) dt^* dz^* = \\ \iint_{\Omega} L(u(z, t) + \varepsilon\phi_1(u(z, t)), u_z + \varepsilon\phi_{1,z}u_z, \dots, v(z, t) + \varepsilon\phi_2(v(z, t)), v_z + \varepsilon\phi_{2,z}v_z, \dots) dt dz. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Si expandimos en serie de Taylor a la lagrangiana tendremos algo de la forma:

$$\begin{aligned} L(u(z, t) + \varepsilon\phi_1(u(z, t)), u_z + \varepsilon\phi_{1,z}u_z, \dots, v(z, t) + \varepsilon\phi_2(v(z, t)), v_z + \varepsilon\phi_{2,z}v_z, \dots) = \\ L(u(z, t), u_z, \dots, v(z, t), v_z, \dots) + \delta L(\varepsilon) + \vartheta(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (9.17)$$

donde $\delta L(\varepsilon)$ es la parte de la expansión que es lineal en ε . Por lo tanto, si sustituimos la expansión de la lagrangiana (9.17) en la acción del lado derecho de la ecuación (9.8), a primer orden en ε la invarianza de acción finalmente toma la forma:

$$\iint_{\Omega} L(u(z, t), u_z, \dots, v(z, t), v_z, \dots) dt dz = \iint_{\Omega} L(u(z, t), u_z, \dots, v(z, t), v_z, \dots) dt dz + \iint_{\Omega} \delta L(\varepsilon) dt dz. \quad (9.18)$$

Es decir, la condición de invariancia se ha reducido a la ecuación:

$$\iint_{\Omega} \delta L dt dz = 0. \quad (9.19)$$

Ahora bien, como esta ecuación debe valer para *cualquier* región Ω (pues eso exige la condición de invariancia), necesariamente se debe cumplir que:

$$\delta L = 0. \quad (9.20)$$

Entonces, lo que se necesita es escribir la variación de la lagrangiana δL de una forma totalmente explícita y precisa; esto permitirá verificar si la condición (9.20) se cumple o no, una vez que se ha especificado una cierta densidad lagrangiana $L(u, v, \dots)$.

De manera similar a como se expresa la diferencial de una función de varias variables, en el caso de una funcional Λ , por ejemplo la lagrangiana L , la “variación” causada por las transformaciones (9.4)-(9.7) está dada por:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial z} \delta z + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \frac{\partial L}{\partial u} \delta u + \frac{\partial L}{\partial u_z} \delta u_z + \frac{\partial L}{\partial u_t} \delta u_t + \dots + \frac{\partial L}{\partial v} \delta v + \dots \quad (9.21)$$

Nota: los dos primeros términos del miembro derecho no aparecen en la variación δL cuando se deducen las ecuaciones de Euler-Lagrange (ver capítulo 5). En aquél caso la variación de L es debida únicamente a las variaciones en las funciones u y v . Ahora, en cambio, además de variar esas funciones (de acuerdo con las ecs. (9.6) y (9.7)), también varían z y t (de acuerdo con (9.4) y (9.5)). Por tal razón aparecen esos dos términos adicionales en el miembro derecho de (9.21). Estos términos no se introducen por suponer que L dependa de z y t sino porque ahora las transformaciones (9.4)-(9.7) están alterando los valores de z y t .

Así también, se necesita definir con precisión el significado de las “variaciones” δu y δv ., pues aparecen explícitamente en la expresión de δL . Del cálculo variacional recordamos que la definición de “variación” de una función u es:

$$\delta u = u^*(z, t) - u(z, t) \quad (9.22)$$

Por lo tanto, sustituyendo (9.13a) aquí, obtenemos:

$$\delta u = u(z - \varepsilon \xi_1, t - \varepsilon \xi_2) + \varepsilon \phi_1(u(z - \varepsilon \xi_1, t - \varepsilon \xi_2)) - u(z, t) \quad (9.22)$$

y si ahora se expande en serie de Taylor los 2 primeros términos del miembro derecho se obtiene:

$$\delta u = [u(z, t) - u_z \varepsilon \xi_1 - u_t \varepsilon \xi_2] + [\varepsilon \phi_1(u(z, t)) + \vartheta(\varepsilon^2)] - u(z, t) \quad (9.23)$$

es decir, a primer orden en ε :

$$\delta u = \varepsilon [\phi_1(u(z, t)) - u_z \xi_1 - u_t \xi_2] \quad (9.24)$$

$$\delta v = \varepsilon [\phi_2(v(z, t)) - v_z \xi_1 - v_t \xi_2]. \quad (9.25)$$

Estas ecuaciones muestran que aún cuando ϕ_1 y ϕ_2 sean cero, los valores de δu y δv pueden no ser cero. Esto es algo que conviene recordar.

Con respecto a las variaciones de las derivadas, se tiene (análogamente a como se deduce las ecuaciones de Euler-Lagrange) que:

$$\delta u_z = \frac{\partial}{\partial z} \delta u, \quad \delta u_t = \frac{\partial}{\partial t} \delta u, \quad \delta u_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta u, \quad \delta v_z = \frac{\partial}{\partial z} \delta v, \dots \quad (9.26)$$

Una vez conociendo las variaciones (9.24)-(9.26) la forma explícita de la variación δL dada en (9.21) resulta claro.

9.3 Demostración del teorema de Emmy Noether.

Recordemos que dada una lagrangiana L de la forma (9.1), la evolución de las funciones u y v está dada por las ecuaciones de Euler-Lagrange (9.3):

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial u_z} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial L}{\partial u_{tt}} - \dots = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial v_z} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial v_t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial L}{\partial v_{tt}} - \dots = 0$$

Con estas ecuaciones, y con la forma de la variación δL dada en (9.21), se puede demostrar el teorema de Noether. Un detalle *muy* importante, que merece mencionarse de nuevo, es que la forma de la variación δL para el teorema de Noether *es diferente* a la variación que se usa en la deducción de las ecuaciones de Euler-Lagrange, pues al deducir estas ecuaciones, sólo varían las funciones u y v , pero no varían las variables independientes z y t . En cambio, en el teorema de Noether sí se consideran variaciones en z y t , y por lo cual ahora aparecen dos términos más en δL (mostrados en (9.21)). A

continuación se puede apreciar cuán esencial es tomar en cuenta esta diferencia en la forma de δL .

Al sustituir las ecs. de Euler-Lagrange (9.3) en la expresión de δL (9.21), e igualar $\delta L = 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial z} \delta z + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial u_z} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial L}{\partial u_{tt}} + \dots \right) \delta u + \frac{\partial L}{\partial u_z} \frac{\partial}{\partial z} \delta u + \frac{\partial L}{\partial u_t} \frac{\partial}{\partial t} \delta u \\ + \frac{\partial L}{\partial u_{tt}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta u + \dots + \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial v_z} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial v_t} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial L}{\partial v_{tt}} + \dots \right) \delta v + \frac{\partial L}{\partial v_z} \frac{\partial}{\partial z} \delta v + \frac{\partial L}{\partial v_t} \frac{\partial}{\partial t} \delta v \\ + \frac{\partial L}{\partial v_{tt}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta v + \dots = 0. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Tomando en cuenta las siguientes identidades:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial L}{\partial u_z} \delta u \right) = \delta u \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial u_z} + \frac{\partial L}{\partial u_z} \frac{\partial}{\partial z} \delta u, \quad (9.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial u_t} \delta u \right) = \delta u \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} + \frac{\partial L}{\partial u_t} \frac{\partial}{\partial t} \delta u, \quad (9.29)$$

y también que:

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial L}{\partial u_{tt}} \right) \delta u = \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_{tt}} \right) \delta u \right] + \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_{tt}} \right) \frac{\partial}{\partial t} \delta u \quad (9.30)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_{tt}} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta u \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial L}{\partial u_{tt}} \frac{\partial}{\partial t} \delta u \right] - \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_{tt}} \right) \frac{\partial}{\partial t} \delta u, \quad (9.31)$$

y además identidades análogas con v en lugar de u , con lo cual si sustituimos todas estas identidades en (9.27), $\delta L = 0$ toma la forma:

$$\frac{\partial L}{\partial z} \delta z + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial L}{\partial u_z} \delta u \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial u_t} \delta u \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_{tt}} \right) \delta u \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial L}{\partial u_{tt}} \frac{\partial}{\partial t} \delta u \right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial L}{\partial v_z} \delta v \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial v_t} \delta v \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial v_{tt}} \right) \delta v \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial L}{\partial v_{tt}} \frac{\partial}{\partial t} \delta v \right] = 0. \quad (9.32)$$

Ahora, de las transformaciones (9.4)-(9.5)] se tiene que $\delta z \equiv z^* - z = \varepsilon \xi_1$ y $\delta t \equiv t^* -$

$t = \varepsilon \xi_2$, entonces la ecuación anterior toma la forma:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left[\xi_1 L + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial u_z} \delta u + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial v_z} \delta v \right] \\ & + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left[\xi_2 L + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial u_t} \delta u - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_{tt}} \right) \delta u + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial u_{tt}} \frac{\partial}{\partial t} \delta u + \dots + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial v_t} \delta v \right. \\ & \left. - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial v_{tt}} \right) \delta v + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial v_{tt}} \frac{\partial}{\partial t} \delta v + \dots \right] = 0, \end{aligned} \quad (9.33)$$

que es precisamente una ecuación de la forma:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial z} + \frac{\partial Q_2}{\partial t} = 0. \quad (9.34)$$

Lo cual expresa una ley de conservación, donde

$$Q_1 = \xi_1 L + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial u_z} \delta u + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial v_z} \delta v \quad (9.35)$$

$$\begin{aligned} Q_2 = & \xi_2 L + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial u_t} \delta u - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_{tt}} \right) \delta u + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial u_{tt}} \frac{\partial}{\partial t} \delta u + \dots \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial v_t} \delta v - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial v_{tt}} \right) \delta v + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial v_{tt}} \frac{\partial}{\partial t} \delta v + \dots \end{aligned} \quad (9.36)$$

Con esto queda demostrado el teorema de Emmy Noether. Para entender por qué

llamamos a (9.34) “Ley de conservación”, basta integrar la ecuación (9.34) sobre t :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial z} + \frac{\partial Q_2}{\partial t} \right) dt = \frac{\partial}{\partial z} \int_{t_1}^{t_2} Q_1 dt + Q_2|_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (9.37)$$

Por lo tanto, si:

$$Q_2(z, t_1) = Q_2(z, t_2) = 0, \quad (9.38)$$

para toda z , entonces (9.37) implica que

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{t_1}^{t_2} Q_1 dt = 0, \quad (9.39)$$

de modo que la integral: $\int_{t_1}^{t_2} Q_1 dt$ tendrá un valor constante a lo largo de z , es entonces una cantidad conservada (*i.e.* su valor no depende de z).

9.3 El teorema de Noether aplicado a la ecuación NLS.

Para aplicar el teorema de Noether, basta comprobar que se cumple la condición de invariancia de acción (9.20) como resultado de aplicar diferentes combinaciones de las transformaciones (9.4)-(9.7):

$$z^* = z + \varepsilon \zeta_1, \quad t^* = t + \varepsilon \zeta_2,$$

$$u^* = u + \varepsilon \phi_1(u) \quad y \quad v^* = v + \varepsilon \phi_2(v)$$

Para ilustrar el método, a continuación, se estudia el caso de la ecuación NLS para algunas de estas transformaciones.

Caso 1. Traslación en z . Consideramos la siguiente transformación:

$$z^* = z + \varepsilon, \quad t^* = t, \quad u^* = u, \quad v^* = v, \quad (9.40)$$

donde por (9.4)-(9.7) $\xi_1 = 1$ y $\xi_2 = \phi_1 = \phi_2 = 0$ que describen una traslación en z .

Para la lagrangiana de la ecuación NLS:

$$L = \frac{1}{2}i(vu_z - uv_z) + \frac{1}{2}u^2v^2 - \frac{1}{2}u_tv_t. \quad (9.41)$$

Al aplicar las ecuaciones (9.24) y (9.25) a las transformaciones (9.40) se halla el valor de las variaciones:

$$\delta u = \varepsilon[\phi_1(u(z, t)) - u_z\xi_1 - u_t\xi_2] = -\varepsilon u_z, \quad (9.42)$$

$$\delta v = \varepsilon[\phi_2(v(z, t)) - v_z\xi_1 - v_t\xi_2] = -\varepsilon v_z. \quad (9.43)$$

Además por definición de variación $\delta t = 0$ y $\delta z = \varepsilon$ para estas transformaciones. Las derivadas de las variaciones, según (9.26) serán:

$$\delta u_z = \frac{\partial}{\partial z} \delta u = -\varepsilon u_{zz}, \quad \delta u_t = \frac{\partial}{\partial t} \delta u = -\varepsilon u_{zt}, \quad (9.44a \text{ y } b)$$

$$\delta v_z = \frac{\partial}{\partial z} \delta v = -\varepsilon v_{zz}, \quad \delta v_t = \frac{\partial}{\partial t} \delta v = -\varepsilon v_{zt}. \quad (9.45a \text{ y } b)$$

Sustituyendo todas estas expresiones en la variación de la lagrangiana δL (9.21):

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{\partial L}{\partial z} \delta z + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \frac{\partial L}{\partial u} \delta u + \frac{\partial L}{\partial u_z} \delta u_z + \frac{\partial L}{\partial u_t} \delta u_t + \frac{\partial L}{\partial v} \delta v + \frac{\partial L}{\partial v_z} \delta v_z + \frac{\partial L}{\partial v_t} \delta v_t \\ &= \varepsilon \frac{\partial L}{\partial z} - \varepsilon u_z \frac{\partial L}{\partial u} - \varepsilon \frac{\partial L}{\partial u_z} u_{zz} - \varepsilon \frac{\partial L}{\partial u_t} u_{zt} - \varepsilon v_z \frac{\partial L}{\partial v} - \varepsilon \frac{\partial L}{\partial v_z} v_{zz} - \varepsilon \frac{\partial L}{\partial v_t} v_{zt}, \quad (9.46) \end{aligned}$$

donde

$$\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{1}{2}i(vu_{zz} - uv_{zz}) + uu_zv^2 + vv_zu^2 - \frac{1}{2}u_{tz}v_t - \frac{1}{2}u_tv_{tz}, \quad (9.47)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = -\frac{1}{2}iv_z + uv^2, \quad \frac{\partial L}{\partial u_z} = \frac{1}{2}iv, \quad \frac{\partial L}{\partial u_t} = -\frac{1}{2}v_t \quad (9.48a, b \text{ y } c)$$

$$\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{1}{2}iu_z + vu^2, \quad \frac{\partial L}{\partial v_z} = -\frac{1}{2}iu \quad \text{y} \quad \frac{\partial L}{\partial v_t} = -\frac{1}{2}u_t. \quad (9.49a, b \text{ y } c)$$

Entonces, al sustituir estas derivadas en la ecuación (9.46) se obtiene:

$$\delta L =$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left[\frac{1}{2} i(vu_{zz} - uv_{zz}) + uu_z v^2 + vv_z u^2 - \frac{1}{2} u_{tz} v_t - \frac{1}{2} u_t v_{tz} \right] - \varepsilon u_z \left[-\frac{1}{2} i v_z + u v^2 \right] \\ & - \varepsilon \frac{1}{2} i v u_{zz} + \varepsilon \frac{1}{2} v_t u_{zt} - \varepsilon v_z \left[\frac{1}{2} i u_z + v u^2 \right] + \varepsilon \frac{1}{2} i u v_{zz} + \varepsilon \frac{1}{2} u_t v_{zt} \end{aligned} \quad (9.50)$$

agrupando términos y considerando que $v_{tz} = v_{zt}$, Se obtiene que:

$$\begin{aligned} \delta L &= \varepsilon \frac{1}{2} [i v u_{zz} - i u v_{zz} + 2 u u_z v^2 + 2 v v_z u^2 - u_{tz} v_t - u_t v_{tz} + i u_z v_z] \\ &- \varepsilon \frac{1}{2} [i v u_{zz} - i u v_{zz} + 2 u u_z v^2 + 2 v v_z u^2 - v_t u_{zt} - u_t v_{zt} + i u_z v_z] = 0, \end{aligned} \quad (9.51)$$

Es decir, se cumple $\delta L = 0$, esto indica que para traslaciones en z existe al menos una ley de conservación. Para hallar esa cantidad usamos la ecuación (9.35) y sustituimos los valores requeridos:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \xi_1 L + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial u_z} \delta u + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial v_z} \delta v \\ &= L - u_z \frac{\partial L}{\partial u_z} - v_z \frac{\partial L}{\partial v_z} \\ &= \left[\frac{1}{2} i(vu_z - uv_z) + \frac{1}{2} u^2 v^2 - \frac{1}{2} u_t v_t \right] - \frac{1}{2} i[vu_z - uv_z] \\ &= \frac{1}{2} (|u|^4 - |u_t|^2) \equiv H, \end{aligned} \quad (9.52)$$

esta cantidad es conocida en la literatura (Kivshar y Agrawal [38]) como el Hamiltoniano asociada a la integral de movimiento constante $\int_{-\infty}^{+\infty} H dt$ del sistema de la ecuación NLS.

Caso 2. Traslación en t para la ec. NLS. Ahora se considerará la transformación:

$$z^* = z, \quad t^* = t + \varepsilon, \quad u^* = u, \quad v^* = v \quad (9.53)$$

donde por (9.4)-(9.7) $\xi_2 = 1$ y $\xi_1 = \phi_1 = \phi_2 = 0$, la cual describe una traslación en t .

Aplicando de nuevo (9.24) y (9.25) las variaciones de u y v seran:

$$\delta u = -\varepsilon u_t, \quad \delta v = -\varepsilon v_t. \quad (9.54b)$$

Por definición de variación $\delta t = \varepsilon$ y $\delta z = 0$ para estas transformaciones. Las derivadas de las variaciones se calculan usando (9.26) serán:

$$\delta u_z = \frac{\partial}{\partial z} \delta u = -\varepsilon u_{tz}, \quad \delta u_t = \frac{\partial}{\partial t} \delta u = -\varepsilon u_{tt}, \quad (9.55a \text{ y } b)$$

$$\delta v_z = \frac{\partial}{\partial z} \delta v = -\varepsilon v_{tz}, \quad \delta v_t = \frac{\partial}{\partial t} \delta v = -\varepsilon v_{tt}. \quad (9.56a \text{ y } b)$$

Sustituyendo estas expresiones y (9.54) en la variación de la lagrangiana δL (9.21):

$$\delta L = \varepsilon \frac{\partial L}{\partial t} - \varepsilon u_t \frac{\partial L}{\partial u} - \varepsilon \frac{\partial L}{\partial u_z} u_{tz} - \varepsilon \frac{\partial L}{\partial u_t} u_{tt} - \varepsilon v_t \frac{\partial L}{\partial v} - \varepsilon \frac{\partial L}{\partial v_z} v_{tz} - \varepsilon \frac{\partial L}{\partial v_t} v_{tt}, \quad (9.57)$$

donde

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{1}{2} i (v_t u_z + v u_{zt} - u_t v_z - u v_{zt}) + u u_t v^2 + v v_t u^2 - \frac{1}{2} u_{tt} v_t - \frac{1}{2} u_t v_{tt}, \quad (9.58)$$

al sustituir esto y las ecuaciones (9.48) y (9.49) en (9.57):

$$\begin{aligned} \delta L = \varepsilon \left[\frac{1}{2} i (v_t u_z + v u_{zt} - u_t v_z - u v_{zt}) + u u_t v^2 + v v_t u^2 - \frac{1}{2} u_{tt} v_t - \frac{1}{2} u_t v_{tt} \right] - \\ \varepsilon u_t \left[-\frac{1}{2} i v_z + u v^2 \right] - \varepsilon \frac{1}{2} i v u_{tz} + \varepsilon \frac{1}{2} v_t u_{tt} - \varepsilon v_t \left[\frac{1}{2} i u_z + v u^2 \right] + \varepsilon \frac{1}{2} i u v_{tz} + \varepsilon \frac{1}{2} u_t v_{tt} \end{aligned} \quad (9.59)$$

y agrupando términos y considerando que $v_{zt} = v_{tz}$ se obtiene que:

$$\delta L = \varepsilon \frac{1}{2} [iv_t u_z + ivu_{zt} - iu_t v_z - iuv_{zt} + 2uu_t v^2 + 2vv_t u^2 - u_{tt} v_t - u_t v_{tt}]$$

$$-\varepsilon \frac{1}{2} [iv_t u_z + ivu_{tz} - iu_t v_z - iuv_{tz} + 2uu_t v^2 + 2vv_t u^2 - v_t u_{tt} - u_t v_{tt}] = 0. \quad (9.60)$$

Este resultado indica que existe una ley de conservación asociada a la traslación en t , para hallar la cantidad conservada se aplica (9.35):

$$Q_1 = -u_t \frac{\partial L}{\partial u_z} - v_t \frac{\partial L}{\partial v_z} = -\frac{1}{2} ivu_t + \frac{1}{2} iuv_t$$

$$= \frac{1}{2} i(uv_t - vu_t) \equiv M, \quad (9.61)$$

donde como hemos visto con anterioridad este tipo de expresión representa un valor real que salvo por el factor de $\frac{1}{2}$ es definido como el “Momento” (Kivshar y Agrawal [39]), en otros trabajos también se puede encontrar como $-Q_1 = M$.

Caso 3. Transformaciones de Norma para la ec, NLS. Consideramos ahora las siguientes transformaciones (llamada de norma):

$$z^* = z, \quad t^* = t, \quad u^* = ue^{i\varepsilon} \approx u + i\varepsilon u, \quad v^* = ve^{-i\varepsilon} \approx u - i\varepsilon u \quad (9.62)$$

En este caso $\phi_1 = iu$ y $\phi_2 = -iv$, $\xi_1 = \xi_2 = 0$, además $\delta z = \delta t = 0$. Los valores de las variaciones de u y v que aparecen, según las ecuaciones (9.24) y (9.25) son:

$$\delta u = \varepsilon [\phi_1(u(z, t)) - u_z \xi_1 - u_t \xi_2] = \varepsilon iu, \quad (9.63)$$

$$\delta v = \varepsilon [\phi_2(v(z, t)) - v_z \xi_1 - v_t \xi_2] = -i\varepsilon v. \quad (9.64)$$

La derivadas de las variaciones serán:

$$\delta u_z = \frac{\partial}{\partial z} \delta u = i\varepsilon u_z, \quad \delta u_t = \frac{\partial}{\partial t} \delta u = i\varepsilon u_t, \quad (9.65a \text{ y } b)$$

$$\delta v_z = \frac{\partial}{\partial z} \delta v = -i\varepsilon v_z, \quad \delta v_t = \frac{\partial}{\partial t} \delta v = -i\varepsilon v_t, \quad (9.65c \text{ y } d)$$

Sustituyendo (9.63), (9.64) y (9.65) en la variación de la lagrangiana (δL) (9.21):

$$\delta L = i\varepsilon u \frac{\partial L}{\partial u} + i\varepsilon u_z \frac{\partial L}{\partial u_z} + i\varepsilon u_t \frac{\partial L}{\partial u_t} - i\varepsilon v \frac{\partial L}{\partial v} - i\varepsilon v_z \frac{\partial L}{\partial v_z} - i\varepsilon v_t \frac{\partial L}{\partial v_t} \quad (9.66)$$

al sustituir las expresiones de las derivadas de L (9.48) y (9.49) se obtiene que:

$$\begin{aligned} \delta L &= \\ i\varepsilon u \left[-\frac{1}{2} i v_z + u v^2 \right] - \frac{1}{2} v \varepsilon u_z - i\varepsilon \frac{1}{2} v_t u_t - i\varepsilon v \left[\frac{1}{2} i u_z + v u^2 \right] - \varepsilon \frac{1}{2} u v_z + i\varepsilon \frac{1}{2} u_t v_t \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon [u v_z + 2i u^2 v^2 - v u_z - i v_t u_t] - \varepsilon \frac{1}{2} [u v_z + 2i v^2 u^2 - v u_z - i u_t v_t] = 0. \end{aligned} \quad (9.67)$$

Así se ha comprobado de nuevo que existe otra ley de conservación pero ahora asociado a la transformación de norma. Para mostrar que justamente la cantidad conservada es la norma se aplica (9.35) y se obtiene que:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial u_z} \delta u + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial v_z} \delta v \\ &= i u \frac{\partial L}{\partial u_z} - i v \frac{\partial L}{\partial v_z} = -\frac{1}{2} v u - \frac{1}{2} u v = -|u|^2. \end{aligned} \quad (9.68)$$

Por lo tanto la cantidad conservada asociada a la transformación de norma es:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(z, t)|^2 d\tau, \quad (9.68b)$$

que en el contexto de las fibras ópticas es la energía del pulso luminoso descrito por la función $u(z, t)$.

9.4 El teorema de Noether y cantidades conservadas en la ecuación GcmKdV.

Con toda la teoría vista hasta ahora, se puede estudiar si la ecuación GcmKdV tiene asociada leyes de conservación debido a invariancias ante ciertas transformaciones para su densidad lagrangiana, y calcular entonces sus cantidades conservadas. Una de las densidades lagrangiana asociada a la ec. GcmKdV es:

$$L = i(u_z v - v_z u) - 2\alpha u_z v_z + i\eta(uv_{ttt} - vu_{ttt}) + \frac{1}{2}i\gamma[u^2 v v_t - (v)^2 u u_t] \quad (9.69)$$

La variación (δL) viene dado por la ec. (9.21):

$$\begin{aligned} \delta L = & \frac{\partial L}{\partial z} \delta z + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \frac{\partial L}{\partial u} \delta u + \frac{\partial L}{\partial u_z} \delta u_z + \frac{\partial L}{\partial u_t} \delta u_t + \frac{\partial L}{\partial u_{ttt}} \delta u_{ttt} \\ & + \frac{\partial L}{\partial v} \delta v + \frac{\partial L}{\partial v_z} \delta v_z + \frac{\partial L}{\partial v_t} \delta v_t + \frac{\partial L}{\partial v_{ttt}} \delta v_{ttt}, \end{aligned} \quad (9.70)$$

Para esta variación, de manera análoga al caso de la NLS, se considerarán tres tipos de transformaciones:

Caso 1. Traslaciones en z . Sean las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} z^* &= z + \varepsilon, & t^* &= t, \\ u^* &= u, & y & \quad v^* = v, \end{aligned} \quad (9.71)$$

transformaciones sobre una región de (z, t) . Estas son un caso particular de las transformaciones (9.4)-(9.7), donde $\zeta_1 = 1$ y $\phi_1(u) = \phi_2(u) = \zeta_2 = 0$. Según las ecuaciones (9.24) y (9.25) las variaciones de u y v bajo estas transformaciones son:

$$\delta u = \varepsilon[\phi_1(u(z, t)) - u_z \xi_1 - u_t \xi_2] = -\varepsilon u_z, \quad (9.72a)$$

$$\delta v = \varepsilon[\phi_2(v(z, t)) - v_z \xi_1 - v_t \xi_2] = -\varepsilon v_z. \quad (9.72b)$$

Además por definición de variación, en este caso, $\delta t = 0$ y $\delta z = \varepsilon$. Luego, las derivadas de las variaciones se obtienen de (9.26):

$$\begin{aligned}\delta u_z &= \frac{\partial}{\partial z} \delta u = -\varepsilon u_{zz}, & \delta u_t &= \frac{\partial}{\partial t} \delta u = -\varepsilon u_{zt}, & \delta u_{ttt} &= \frac{\partial^3}{\partial t^3} \delta u = -\varepsilon u_{z,3t}, \\ \delta v_z &= \frac{\partial}{\partial z} \delta v = -\varepsilon v_{zz}, & \delta v_t &= \frac{\partial}{\partial t} \delta v = -\varepsilon v_{zt}, & \delta v_{ttt} &= \frac{\partial^3}{\partial t^3} \delta v = -\varepsilon v_{z,3t},\end{aligned}\tag{9.73a, b, c, d, e y f}$$

Sustituyendo todas estas expresiones en la variación de la lagrangiana (δL) (9.70):

$$\begin{aligned}\delta L &= \varepsilon \frac{\partial L}{\partial z} - \varepsilon u_z \frac{\partial L}{\partial u} - \varepsilon \frac{\partial L}{\partial u_z} u_{zz} - \varepsilon \frac{\partial L}{\partial u_t} u_{zt} - \varepsilon \frac{\partial L}{\partial u_{ttt}} u_{z,3t} \\ &\quad - \varepsilon v_z \frac{\partial L}{\partial v} - \varepsilon \frac{\partial L}{\partial v_z} v_{zz} - \varepsilon \frac{\partial L}{\partial v_t} v_{zt} - \varepsilon \frac{\partial L}{\partial v_{ttt}} v_{z,3t},\end{aligned}\tag{9.74}$$

y solo resta calcular las derivadas de L :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial z} &= i(vu_{zz} - uv_{zz}) - \alpha(u_{zz}v_z + u_zv_{zz}) + i\eta(u_zv_{ttt} + uv_{3t,z} - v_zu_{ttt} - vu_{3tz}) \\ &\quad - \frac{1}{2}i\gamma[2uu_zvv_t + u^2v_zv_t + u^2vv_{tz} - 2vv_zuu_t - v^2u_zu_t - v^2uu_{tz}],\end{aligned}\tag{9.75}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = -iv_z + i\eta v_{ttt} - \frac{1}{2}i\gamma[2uvv_t - v^2u_t],\tag{9.76a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_z} = iv - \alpha v_z, \quad \frac{\partial L}{\partial u_t} = -\frac{1}{2}i\gamma v^2 u, \quad \frac{\partial L}{\partial u_{ttt}} = -i\eta v,\tag{9.76b, c y d}$$

$$\frac{\partial L}{\partial v} = iu_z - i\eta u_{ttt} + \frac{1}{2}i\gamma[u^2v_t - 2vuu_t],\tag{9.77a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_z} = -iu - \alpha u_z, \quad \frac{\partial L}{\partial v_t} = \frac{1}{2}i\gamma u^2 v, \quad \frac{\partial L}{\partial v_{ttt}} = i\eta u.\tag{9.77b, c y d}$$

Al sustituir (9.75), (9.76) y (9.77) en (9.74) y reagrupar términos se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\delta L = \varepsilon & \left[i(vu_{zz} - uv_{zz}) - \alpha(u_{zz}v_z + u_zv_{zz}) + i\eta(u_zv_{ttt} + uv_{3t,z} - v_zu_{ttt} - vu_{3t,z}) - \right. \\
& \left. \frac{1}{2}i\gamma[2uu_zvv_t + u^2v_zv_t + u^2vv_{tz} - 2vv_zuu_t - v^2u_zu_t - v^2uu_{tz}] \right] \\
& - \varepsilon \left[i(vu_{zz} - uv_{zz}) - \alpha(u_{zz}v_z + u_zv_{zz}) + i\eta(u_zv_{ttt} + uv_{z,3t} - v_zu_{ttt} - vu_{z,3t}) - \right. \\
& \left. \frac{1}{2}i\gamma[2uvv_tu_z + u^2v_zv_t + u^2vv_{zt} - 2vv_zuu_t - v^2u_zu_t - v^2uu_{zt}] \right] = 0. \quad (9.78)
\end{aligned}$$

Según el teorema de Noether este resultado comprueba la existencia de una ley de conservación. La cantidad conservada según (9.35) será:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= L - u_z \frac{\partial L}{\partial u_z} - v_z \frac{\partial L}{\partial v_z} \\
&= \left[i(u_zv - v_zu) - 2\alpha u_z v_z + i\eta(uv_{ttt} - vu_{ttt}) + \frac{1}{2}i\gamma[u^2vv_t - v^2uu_t] \right] \\
&\quad - u_z[iv - 2\alpha v_z] - v_z[-iu - 2\alpha u_z] \\
&= i\eta(uv_{ttt} - vu_{ttt}) + \frac{1}{2}i\gamma|u|^2[vv_t - uu_t] + 2\alpha|u_z|^2. \quad (9.79)
\end{aligned}$$

La forma general de esta expresión al igual que en el caso tanto de la ec. NLS tiene la forma de la transformada de Legendre $H = L - \sum \dot{q}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, donde $Q_1 = H$ es llamado el hamiltoniano y $\dot{q}_i = u_z, v_z$ en el contexto de la mecánica clásica son llamadas las velocidades generalizas (recordando que z representa a la variable de evolución y no t). Sin embargo en este caso la expresión final (9.79) no tiene una forma tan sencilla como en el caso de la ec. NLS. Solo mantiene la estructura heredada de la transformada de Legendre, es decir, una función explicita de las “coordenadas generalizadas” u, v , de sus

velocidades u_z y de sus “momentos conjugados” $\frac{\partial L}{\partial u_z} = i[vv_t - uu_t]$ y $\frac{\partial L}{\partial v_z} = i(uv_{ttt} - vu_{ttt})$.

En la literatura el Hamiltoniano es una de las ideas fundamentales de la teoría de sistemas dinámicos conservativos con un número finito o de infinito grados de libertad. El formalismo Hamiltoniano se ha convertido en uno de los más universales en la teoría de sistemas integrables y pulsos no lineales en general. En el caso de los sistemas que no son totalmente integrables como lo es la ec. GcmKdV, el Hamiltoniano existe cuando el sistema resulta ser conservativo y es usado para el análisis de estabilidad de sus soluciones (Porsezian y Kuriavose [40]). Lo interesante además es que esta cantidad puede ser obtenida de aplicar el Teorema de Noether para el mismo tipo de transformaciones pero considerando una diferente densidad lagrangiana, para la ec. GcmKdV (ver Apéndice A).

Caso 2. Ahora se considerará la transformación de traslación en t :

$$z^* = z, \quad t^* = t + \varepsilon, \quad u^* = u, \quad v^* = v. \quad (9.80)$$

Las variaciones de u y v según (9.24) y (9.25) son $\delta u = -\varepsilon u_t$ y $\delta v = -\varepsilon v_t$, derivando:

$$\delta u_z = \frac{\partial}{\partial z} \delta u = -\varepsilon u_{tz}, \quad \delta u_t = \frac{\partial}{\partial t} \delta u = -\varepsilon u_{tt}, \quad \delta u_{ttt} = \frac{\partial^3}{\partial t^3} \delta u = -\varepsilon u_{4t}, \quad (9.81)$$

$$\delta v_z = \frac{\partial}{\partial z} \delta v = -\varepsilon v_{tz}, \quad \delta v_t = \frac{\partial}{\partial t} \delta v = -\varepsilon v_{tt}, \quad \delta v_{ttt} = \frac{\partial^3}{\partial t^3} \delta v = -\varepsilon v_{4t}. \quad (9.82)$$

Además por definición de variación $\delta t = \varepsilon$ y $\delta z = 0$ para estas transformaciones.

Sustituyendo todas estas expresiones anteriores en la variación de la lagrangiana (9.70):

$$\begin{aligned} \delta L = & \varepsilon \frac{\partial L}{\partial t} - \varepsilon u_t \frac{\partial L}{\partial u} - \varepsilon \frac{\partial L}{\partial u_z} u_{tz} - \varepsilon \frac{\partial L}{\partial u_t} u_{tt} - \varepsilon \frac{\partial L}{\partial u_{ttt}} u_{4t} \\ & - \varepsilon v_t \frac{\partial L}{\partial v} - \varepsilon \frac{\partial L}{\partial v_z} v_{tz} - \varepsilon \frac{\partial L}{\partial v_t} v_{tt} - \varepsilon \frac{\partial L}{\partial v_{ttt}} v_{4t}. \end{aligned} \quad (9.83)$$

Las derivadas se calculan directamente de la lagrangiana GcmKdV (9.69):

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} = & i(u_{zt}v + u_zv_t - v_{zt}u - v_zu_t) - \alpha u_{zt}v_z - \alpha u_zv_{zt} + \frac{1}{2}i(u_tv_{ttt} + uv_{4t} - v_tv_{ttt} - vu_{4t}) \\ & - \frac{1}{2}i[2uu_tv_t + u^2v_tv_t + u^2vv_{tt} - 2vv_tuu_t - v^2u_tu_t - v^2uu_{tt}], \end{aligned} \quad (9.84)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = -iv_z + \frac{1}{2}iv_{ttt} - \frac{1}{2}i[2uvv_t - v^2u_t], \quad \frac{\partial L}{\partial u_z} = iv - \alpha v_z, \quad \frac{\partial L}{\partial u_t} = \frac{1}{2}iv^2u$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_{ttt}} = -\frac{1}{2}iv, \quad (9.85a, b, c \text{ y } d)$$

$$\frac{\partial L}{\partial v} = iu_z - \frac{1}{2}iu_{ttt} - \frac{1}{2}i[u^2v_t - 2vu_{tt}], \quad \frac{\partial L}{\partial v_z} = -iu - \alpha u_z, \quad \frac{\partial L}{\partial v_t} = -\frac{1}{2}iu^2v,$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_{ttt}} = \frac{1}{2}iu, \quad (9.86a, b, c \text{ y } d)$$

Sustituyendo estas derivadas en (9.83):

$$\begin{aligned} \delta L = & \varepsilon \left[i(u_{zt}v + u_zv_t - v_{zt}u - v_zu_t) - \alpha u_{zt}v_z - \alpha u_zv_{zt} + \frac{1}{2}i(u_tv_{ttt} + uv_{4t} - v_tv_{ttt} - vu_{4t}) \right] \\ & - \frac{1}{2}\varepsilon i[2uu_tv_t + u^2v_tv_t + u^2vv_{tt} - 2vv_tuu_t - v^2u_tu_t - v^2uu_{tt}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -i\epsilon u_t \left[-v_z + \frac{1}{2} v_{ttt} + \frac{1}{2} v^2 u_t - uvv_t \right] - \epsilon u_{tz} [iv - \alpha v_z] - \epsilon \frac{1}{2} iv^2 uu_{tt} + \epsilon \frac{1}{2} ivu_{4t} \\
& -i\epsilon v_t \left[u_z - \frac{1}{2} u_{ttt} - \frac{1}{2} u^2 v_t + vu u_t \right] + \epsilon v_{tz} [iu + \alpha u_z] + \epsilon \frac{1}{2} iu^2 vv_{tt} - \epsilon \frac{1}{2} iuv_{4t}, \quad (9.87)
\end{aligned}$$

y agrupando términos iguales obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\delta L = & i\epsilon u_t \left[-v_z + \frac{1}{2} v_{ttt} + \frac{1}{2} v^2 u_t - uvv_t \right] + \epsilon u_{zt} [iv - \alpha v_z] + \epsilon \frac{1}{2} iv [uvu_{tt} - u_{4t}] \\
& -i\epsilon v_t \left[u_z + \frac{1}{2} u_{ttt} + \frac{1}{2} u^2 v_t - vu u_t \right] - \epsilon v_{zt} [iu + \alpha u_z] - \frac{1}{2} i\epsilon u [uvv_{tt} - v_{4t}] \\
& -i\epsilon u_t \left[-v_z + \frac{1}{2} v_{ttt} + \frac{1}{2} v^2 u_t - uvv_t \right] - \epsilon u_{tz} [iv - \alpha v_z] - \epsilon \frac{1}{2} iv^2 uu_{tt} + \epsilon \frac{1}{2} ivu_{4t} \\
& -i\epsilon v_t \left[u_z - \frac{1}{2} u_{ttt} - \frac{1}{2} u^2 v_t + vu u_t \right] + \epsilon v_{tz} [iu + \alpha u_z] + \epsilon \frac{1}{2} iu^2 vv_{tt} - \epsilon \frac{1}{2} iuv_{4t} = 0. \quad (9.88)
\end{aligned}$$

Este resultado indica que existe una ley de conservación asociada a las traslaciones en t , cuya cantidad conservada será según (9.35):

$$\begin{aligned}
Q_1 = & -u_t \frac{\partial L}{\partial u_z} - v_t \frac{\partial L}{\partial v_z} = -u_t [iv - 2\alpha v_z] - v_t [-iu - 2\alpha u_z] \\
& = -i[vu_t - uv_t] + 2\alpha [u_z v_t + v_z u_t]. \quad (9.89)
\end{aligned}$$

Los términos $\frac{\partial L}{\partial u_z}$ y $\frac{\partial L}{\partial v_z}$ son conocidos en mecánica clásica como los “momentos conjugados” y el primer término evaluado de esta expresión coincide justamente con la del “Momento” que apareció para la ec. NLS. Por tal razón esta cantidad puede interpretarse como la forma de un “Momento generalizado” para la ec. GcmKdV aunque el segundo término de (9.89) no tenga exactamente la misma estructura que el primer término.

Caso 3. Transformación de norma. Consideramos la siguiente transformación:

$$z^* = z, \quad t^* = t, \quad u^* = ue^{i\varepsilon} \approx u + i\varepsilon u, \quad v^* = ve^{-i\varepsilon} \approx u - i\varepsilon u. \quad (9.90)$$

En este caso $\phi_1 = iu$ y $\phi_2 = -iv$, $\xi_1 = \xi_2 = 0$, y las variaciones de u y v serán:

$$\delta u = \varepsilon[\phi_1(u(z, t)) - u_z \xi_1 - u_t \xi_2] = \varepsilon iu, \quad (9.91)$$

$$\delta v = \varepsilon[\phi_2(v(z, t)) - v_z \xi_1 - v_t \xi_2] = -i\varepsilon v, \quad (9.92)$$

y por definición de variación $\delta z = \delta t = 0$. Las derivadas de (9.21) y (9.92) son:

$$\delta u_z = \frac{\partial}{\partial z} \delta u = i\varepsilon u_z, \quad \delta u_t = \frac{\partial}{\partial t} \delta u = i\varepsilon u_t, \quad \delta u_{ttt} = \frac{\partial^3}{\partial t^3} \delta u = i\varepsilon u_{ttt}, \quad (9.93)$$

$$\delta v_z = \frac{\partial}{\partial z} \delta v = -i\varepsilon v_z, \quad \delta v_t = \frac{\partial}{\partial t} \delta v = -i\varepsilon v_t, \quad \delta v_{ttt} = \frac{\partial^3}{\partial t^3} \delta v = -i\varepsilon v_{ttt}, \quad (9.94)$$

y estas derivadas nos servirían para calcular la variación de la lagrangiana (δL):

$$\begin{aligned} \delta L = & i\varepsilon u \frac{\partial L}{\partial u} + i\varepsilon u_z \frac{\partial L}{\partial u_z} + i\varepsilon u_t \frac{\partial L}{\partial u_t} \\ & + i\varepsilon u_{ttt} \frac{\partial L}{\partial u_{ttt}} - i\varepsilon v \frac{\partial L}{\partial v} - i\varepsilon v_z \frac{\partial L}{\partial v_z} - i\varepsilon v_t \frac{\partial L}{\partial v_t} - i\varepsilon v_{ttt} \frac{\partial L}{\partial v_{ttt}}. \end{aligned} \quad (9.95)$$

Las derivadas faltantes se calculan directamente de la lagrangiana de la ec. GcmKdV.

Entonces sustituyendo (9.85) y (9.86) en (9.95):

$$\begin{aligned} \delta L = & i\varepsilon u \left[-iv_z + \frac{1}{2}iv_{ttt} - \frac{1}{2}i[2uvv_t - v^2u_t] \right] + i\varepsilon u_z [iv - \alpha v_z] - \varepsilon \frac{1}{2}v^2uu_t + \varepsilon \frac{1}{2}vu_{ttt} \\ & - i\varepsilon v \left[iu_z - \frac{1}{2}iu_{ttt} - \frac{1}{2}i[u^2v_t - 2vuu_t] \right] - i\varepsilon v_z [-iu - \alpha u_z] - \varepsilon \frac{1}{2}u^2vv_t + \varepsilon \frac{1}{2}uv_{ttt}. \end{aligned} \quad (9.96)$$

y agrupando términos se obtiene que el valor de la variación (δL) es:

$$\begin{aligned} \delta L &= \varepsilon \left[uv_z - \frac{1}{2} uv_{ttt} + u^2 vv_t - vu_z - iv_z u_z - v^2 uu_t + \frac{1}{2} vu_{ttt} \right] \\ -\varepsilon &\left[uv_z - \frac{1}{2} uv_{ttt} + u^2 vv_t - vu_z - iu_z v_z - 2v^2 uu_t + \frac{1}{2} vu_{ttt} \right] = 0. \end{aligned} \quad (9.97)$$

Entonces, existe una ley de conservación asociada a las transformaciones de norma.

Para calcular la cantidad conservada usamos (9.35) y obtenemos que:

$$\begin{aligned} Q_1 &= iu \frac{\partial L}{\partial u_z} - iv \frac{\partial L}{\partial v_z} = iu[iv - 2\alpha v_z] - iv[-iu - 2\alpha u_z] \\ &= -2|u|^2 - 2i\alpha(uv_z - vu_z) = I. \end{aligned} \quad (9.98)$$

El primer término de esta expresión es el mismo que en el caso de la ec. NLS para la transformación de norma, y por lo tanto podemos considerar que de igual manera expresa la conservación de la energía del pulso a través de la fibra óptica, salvo por el significado del segundo término. Para poder interpretar mejor esta cantidad, si sustituimos en (9.98) una función de prueba de la forma tipo solitón brillante:

$$u(z, t) = A \operatorname{sech} \left(\frac{t - az}{w} \right) e^{i(qz + rt)}, \quad (9.99)$$

calculando los términos correspondientes a (9.98):

$$|u|^2 = A^2 \operatorname{sech}^2(l), \quad (9.100)$$

donde $l = \frac{t - az}{w}$, luego

$$u_z v = A^2 \left[\frac{a}{w} \operatorname{sech}^2(l) \tanh(l) + iq \operatorname{sech}^2(l) \right], \quad (9.101)$$

$$uv_z = A^2 \left[\frac{a}{w} \operatorname{sech}^2(l) \tanh(l) - iq \operatorname{sech}^2(l) \right], \quad (9.102)$$

$$\Rightarrow 2i\alpha(u_z v - uv_z) = -2a \operatorname{sech}^2(l), \quad (9.103)$$

al sustituir (9.100) y (9.103) en (9.98) :

$$I = -2[1 + \alpha]A^2 \operatorname{sech}^2(l) = cte|u|^2. \quad (9.104)$$

Esto indica, que al final la cantidad (9.98) expresa la intensidad del pulso a través de la fibra, es decir, de la energía $E = \int_{-\infty}^{+\infty} I d\tau$.

Finalmente, como ya se ha mencionado en el apéndice A, al aplicar el teorema de Noether a otra densidad lagrangiana diferente de la ec. GcmKdV, con la motivación de poder hallar cantidades conservadas nuevas o diferentes a las ya vistas, se obtienen leyes de conservación asociadas al mismo tipo de transformaciones, pero donde resulta una cantidad diferente para el caso de traslaciones en t . La lagrangiana estudiada sustituye los términos $[u_t v_{tt} - v_t u_{tt}]$ y $[u_z v_z]$ por $[uv_{ttt} - vu_{ttt}]$ y $[vu_{zz} + uv_{zz}]$ lo cual eleva el orden de la condición de invariancia de acción ($\delta L = 0$) en t y z , es decir, el desarrollo realizado en el apéndice A generaliza el teorema de Noether para otras lagrangianas que incluyan derivadas de segundo orden en z y tercera en t (lo cual podría aplicarse a densidades lagrangianas asociadas a ecuaciones que describan la propagación de pulsos ópticos y no se aplique la aproximación SVA).

CAPÍTULO 10.

CONCLUSIONES.

En la introducción mencionamos que en este trabajo estudiaríamos 7 puntos relacionados con la ecuación GcmKdV. A continuación resumiremos lo que hicimos (y lo que encontramos) en relación a esos 7 puntos:

Punto 1. Investigar si la ec. GcmKdV tiene soluciones tipo “solitón”: aunque la ec. GcmKdV no es una ecuación totalmente integrable (es decir, que no se puede resolver a través de pares de Lax), es de las pocas EDP's no lineales que posee familias de soluciones analíticas exactas tipo solitones brillantes y oscuros según se vio en las secciones 4.3 y 4.4. En el capítulo 3, se estudió que físicamente estas soluciones describen la propagación de pulsos de luz a través de fibras ópticas del orden de femto segundos en escala temporal, esta característica representa una gran ventaja dentro del ámbito de las tecnologías de telecomunicación pues permite aumentar la capacidad de transferencia de información a través del uso de fibras ópticas.

Además en la sección 4.5 se encontró que la familia de solitones brillantes de la ec. GmKdV son doblemente embebidas esto es un tipo peculiar de soluciones que no es común. De tal manera, que la ec. GcmKdV representa una ecuación importante dentro del mundo de las telecomunicaciones y el estudio de las ecuaciones no lineales.

Punto 2. Investigar si es posible obtener la ec. GcmKdV mediante el método de escalas múltiples: en la sección 4.2, se demostró que es posible deducir la ecuación GcmKdV a través del método de escalas múltiples. Un método interesante que contempla el fenómeno en cuestión a múltiples escalas, de forma simultánea y de manera totalmente

matemática, expresando así que la ec. GcmKdV es obtenida del desarrollo matemático de considerar ciertas condiciones para una relación de dispersión en medios dispersivos no lineales a cierto orden, lo cual nos indica que con el método de escalas múltiples es posible hallar un número mayor de ecuaciones diferenciales parciales no lineales interesantes que contemplen el fenómeno a distintos órdenes.

Punto 3. Investigar el efecto del término u_{zz} resolviendo la parte lineal de la ec. GcmKdV: en el capítulo 8, se analizaron las soluciones lineales de la ecuación GcmkdV a través del análisis de Fourier y el cálculo numérico de la evolución del pulso lineal a través de la fibra óptica, esto permitió estudiar y caracterizar a la radiación presente en este tipo de soluciones debido a la presencia del término dispersivo u_{ttt} , donde la condición de resonancia se describe por la intersección de la relación de dispersión inversa $k(\omega)$ y el número de onda k_s de la solución, las características obtenidas de esta condición describieron bien la propagación de la radiación observada en los resultados numéricos. Este método, permitió así conocer cuál es el efecto del término u_{zz} en las soluciones de la GcmKdV para ello se comparó la evolución de una misma condición inicial: por un lado despreciando el término u_{zz} en la ec. GcmKdV lineal y por el otro tomando la ecuación lineal completa, el resultado mostro una diferencia cualitativa sustancial tanto en la dirección de propagación de la radiación tanto como en su forma dando indicios de mostrar que al considerar el término u_{zz} se obtiene soluciones estables.

Punto 4. Investigar si la ec. GcmKdV puede deducirse de una densidad lagrangiana: en el capítulo 5, se presentaron los principios variacionales que se aplican en la física y con los cuales es posible formular ciertas ecuaciones no lineales importantes en el estudio

de los solitones ópticos, como lo son la ecuaciones NLS y mKdV, es decir, estas ecuaciones se pueden obtener a través de la aplicación del principio de mínima acción $\delta\mathcal{L} = 0$, que expresa la minimización de una cierta densidad lagrangiana \mathcal{L} . Este interesante resultado nos indicó que al igual que las principales ecuaciones de la física, las ecuaciones que describen estos fenómenos no lineales son resultado de considerar que de alguna forma las leyes de la naturaleza operan de tal manera que minimizan ciertas cantidades, resultado ligado fuertemente al concepto de las simetrías en los sistemas físicos. Para la ecuación GcmKdV se encontró también que se puede deducir de aplicar el principio de mínima acción en este caso no solo a una sino a dos densidades lagrangianas diferentes, resultado interesante que dio pauta para pensar que al aplicar el teorema de Noether a las diferentes densidades lagrangianas se podría llegar quizás a cantidades conservadas diferentes o distintas entre sí.

Esto sirvió de preámbulo para el consecuente estudio de algunas de las cantidades conservadas en estos fenómenos a través del importante y elegante teorema de Noether (capítulo 9), así como el estudio de las soluciones perturbadas a través del método variacional de Anderson (capítulo 6).

Punto 5. Investigar cómo se comportarán los solitones perturbados de la ecuación GcmKdV utilizando el método variacional de Anderson: este poderoso método fue desarrollado en el capítulo 6 y aplicado en el capítulo 7. Con el cual fue posible hallar un sistema de relaciones entre los parámetros de las soluciones exactas que satisfacen la ec. GcmKdV; así como algunas de las cantidades conservadas, y se pudo observar gráficamente cómo las soluciones perturbadas tienden a estabilizar su amplitud, lo cual nos indica que las soluciones perturbadas de la ec. GcmkdV tienden a estabilizarse. Esta

poderosa herramienta nos dio resultados analíticos, que aunque aproximados, son muy fáciles de analizar e interpretar acerca del comportamiento de las soluciones perturbadas, lo cual sería complejo y difícil de calcular a través de métodos numéricos. En concreto se obtuvo que al perturbar la amplitud de las soluciones de la ecuación GcmKdV, estas tienden a una configuración más estable representada por las soluciones exactas.

Punto 6. Determinación de algunas leyes de conservación de la ec. GcmKdV mediante el Teorema de Noether: la demostración y aplicación del teorema de Noether para la ecuación NLS y la GcmKdV se realizó en el capítulo 9, donde se obtuvo que para hallar las leyes de conservación asociadas a las diferentes tipos de transformaciones (traslaciones en z , t y transformaciones de norma), es necesario que las densidades lagrangianas satisfagan una condición de invariancia de acción de la forma variacional “corregida” ($\delta L = 0$), donde hacemos énfasis en la palabra corregida pues esta variación no es la misma que se utilizó en el principio de mínima acción para deducir la ecuación de Euler-Lagrange, sino que presenta una sutil corrección al considerar términos que involucran directamente a las variables z y t (ver ecuación 9.21).

Una vez demostrada la existencia de las leyes de conservación presentes, se pudieron calcular explícitamente las cantidades conservadas para la ec. NLS y la ec. GcmKdV demostrando que aunque no es una ecuación integrable el Teorema de Noether nos permite hallar sus cantidades conservadas lo cual puede ser útil para el análisis de estabilidad de sus soluciones.

Punto 7. Investigar si 2 diferentes lagrangianas de la ec. GcmKdV conducen a las mismas cantidades conservadas: en el apéndice A se propone una lagrangiana diferente

a la utilizada en el capítulo 9 para aplicar el Teorema de Noether, con la motivación de probar si la segunda lagrangiana conducía a cantidades conservadas diferentes. En el caso de la traslación en t , la invarianza de la lagrangiana según el Teorema de Noether ($\delta L = 0$) nos condujo a un término extra que no aparece en la cantidad hallada en el capítulo 9 (momento generalizado), este resultado nos indica que si es posible hallar lagrangianas diferentes que conduzcan a cantidades conservadas diferentes enriquece la información que se puede obtener sobre el comportamiento del sistema que describe la ecuación en cuestión.

Apéndice A.

DEDUCCIÓN DE LA CONDICIÓN DE INVARIANCIA DE ACCIÓN $\delta L = 0$ Y LAS CANTIDADES CONSERVADAS PARA DISTINTAS DENSIDADES LAGRANGIANAS DE LA EC. GCMKDV.

La densidad lagrangiana que se usó en el capítulo 9 para aplicar el teorema de Noether a la ec. GcmKdV es:

$$L_1 = i(u_z v - v_z u) + 2\alpha v_z u_z + i\varepsilon(u_t v_{tt} - v_t u_{tt}) + \frac{1}{2}i\gamma[u^2 v v_t - (v)^2 u u_t], \quad (A.1)$$

la forma explícita de la variación de una lagrangiana de la forma $L_1(u, u_z, u_{zz}, u_t, u_{tt}, v, v_z, v_{zz}, v_t, v_{tt},)$ es:

$$\begin{aligned} \delta L = & \frac{\partial L}{\partial z} \delta z + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \frac{\partial L}{\partial u} \delta u + \frac{\partial L}{\partial u_z} \delta u_z + \frac{\partial L}{\partial u_t} \delta u_t + \frac{\partial L}{\partial u_{tt}} \delta u_{tt} \\ & + \frac{\partial L}{\partial v} \delta v + \frac{\partial L}{\partial v_z} \delta v_z + \frac{\partial L}{\partial v_t} \delta v_t + \frac{\partial L}{\partial v_{tt}} \delta v_{tt}, \end{aligned} \quad (A.2)$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange para u y v son:

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial u_z} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial L}{\partial u_{tt}} = 0, \quad (A.3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial v_z} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial v_t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial L}{\partial v_{tt}} = 0, \quad (A.4)$$

despegando $\frac{\partial L}{\partial u}$, $\frac{\partial L}{\partial v}$ y sustituyendo en δL :

$$\begin{aligned} \delta L = & \frac{\partial L}{\partial z} \delta z + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial u_z} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial L}{\partial u_{tt}} \right) \delta u + \frac{\partial L}{\partial u_z} \frac{\partial}{\partial z} \delta u + \frac{\partial L}{\partial u_t} \frac{\partial}{\partial t} \delta u + \frac{\partial L}{\partial u_{tt}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta u \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial v_z} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial v_t} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial L}{\partial v_{tt}} \right) \delta v + \frac{\partial L}{\partial v_z} \frac{\partial}{\partial z} \delta v + \frac{\partial L}{\partial v_t} \frac{\partial}{\partial t} \delta v + \frac{\partial L}{\partial v_{tt}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta v, \quad (\text{A.5})$$

usando las siguientes identidades:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial u_z} \right) \delta u = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial L}{\partial u_z} \delta u \right] - \frac{\partial L}{\partial u_z} \frac{\partial}{\partial z} \delta u, \quad (\text{A.6})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} \right) \delta u = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial L}{\partial u_t} \delta u \right] - \frac{\partial L}{\partial u_t} \frac{\partial}{\partial t} \delta u, \quad (\text{A.7})$$

$$- \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial L}{\partial u_{tt}} \right) \delta u = - \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_{tt}} \right) \delta u \right] + \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_{tt}} \right) \frac{\partial}{\partial t} \delta u, \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_{tt}} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta u \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial L}{\partial u_{tt}} \frac{\partial}{\partial t} \delta u \right] - \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_{tt}} \right) \frac{\partial}{\partial t} \delta u. \quad (\text{A.9})$$

Sustituyendo las identidades (A.6)-(A.9) en la variación δL :

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{\partial L}{\partial z} \delta z + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial L}{\partial u_z} \delta u \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial L}{\partial u_t} \delta u \right] - \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_{tt}} \right) \delta u \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial L}{\partial u_{tt}} \frac{\partial}{\partial t} \delta u \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial L}{\partial v_z} \delta v \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial L}{\partial v_t} \delta v \right] - \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial v_{tt}} \right) \delta v \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial v_{tt}} \right) \frac{\partial}{\partial t} \delta v \right], \quad (\text{A.10}) \end{aligned}$$

la invariancia de acción del Teorema de Noether (capítulo 9) se analiza para diferentes tipos de transformaciones infinitesimales de la forma:

$$\begin{aligned} z^* &= z + \varepsilon \zeta_1, & t^* &= t + \varepsilon \zeta_2, \\ u^* &= u + \varepsilon \phi_1(u), & v^* &= v + \varepsilon \phi_2(v) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

de este grupo de transformaciones se tiene que $\delta z \equiv z^* - z = \varepsilon \xi_1$ y $\delta t \equiv t^* - t = \varepsilon \xi_2$,
sustituyendo en (A.10) y reagrupando:

$$\begin{aligned} \delta L = & \frac{\partial}{\partial z} \left[\xi_1 L + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial u_z} \delta u + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial v_z} \delta v \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \left[\xi_2 L + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial u_t} \delta u - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_{tt}} \right) \delta u + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial u_{tt}} \frac{\partial}{\partial t} \delta u + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial v_t} \delta v - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial v_{tt}} \right) \delta v \right. \\ & \left. + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial v_{tt}} \frac{\partial}{\partial t} \delta v \right] \end{aligned} \quad (A.12)$$

Si se cumple la condición del Teorema de Noether $\delta L = 0$, la ecuación anterior toma la forma:

$$\delta L = \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad (A.13)$$

donde Q es una cantidad conservada y T es el flujo. En el Capítulo 9 se demostró el teorema de Noether para diferentes casos de las transformaciones (A.11) y se calcularon las cantidades conservadas asociadas a la invariancia de acción respecto a estas transformaciones.

Ahora vamos a considerar la segunda opción de densidad lagrangiana que se encontró para la ec. GcmKdV (ver apartado 5.) $L_2(u, u_z, u_{zz}, u_t, u_{ttt}, v, v_z, v_{zz}, v_t, v_{ttt})$:

$$\begin{aligned} L_2 = & \\ & i(u_z v - v_z u) + \alpha[vu_{zz} + uv_{zz}] + i\varepsilon(uv_{ttt} - vu_{ttt}) + \frac{1}{2}i\gamma[u^2 v v_t - (v)^2 u u_t], \end{aligned} \quad (A.14)$$

la diferencia con la lagrangiana anterior es tanto en el segundo y tercer término, donde L_2 tiene ordenes mayores en las derivadas respecto a z y t . Vamos a aplicar el teorema de Noether para ver si se obtienen las mismas cantidades conservadas que se obtuvieron en el capítulo 9 usando la opción L_1 como densidad lagrangiana.

La forma explícita de la variación de la lagrangiana (A.14) tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \delta L = & \frac{\partial L}{\partial z} \delta z + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \frac{\partial L}{\partial u} \delta u + \frac{\partial L}{\partial u_z} \delta u_z + \frac{\partial L}{\partial u_{zz}} \delta u_{zz} + \frac{\partial L}{\partial u_t} \delta u_t + \frac{\partial L}{\partial u_{ttt}} \delta u_{ttt} \\ & + \frac{\partial L}{\partial v} \delta v + \frac{\partial L}{\partial v_z} \delta v_z + \frac{\partial L}{\partial v_{zz}} \delta v_{zz} + \frac{\partial L}{\partial v_t} \delta v_t + \frac{\partial L}{\partial v_{ttt}} \delta v_{ttt}, \end{aligned} \quad (A.15)$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange para u y v son:

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial u_z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial L}{\partial u_{zz}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} - \frac{\partial^3}{\partial t^3} \frac{\partial L}{\partial u_{ttt}} = 0, \quad (A.16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial v_z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial L}{\partial v_{zz}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial v_t} - \frac{\partial^3}{\partial t^3} \frac{\partial L}{\partial v_{ttt}} = 0, \quad (A.17)$$

despejando $\frac{\partial L}{\partial u}$, $\frac{\partial L}{\partial v}$ y sustituyendo en δL :

$$\begin{aligned} \delta L = & \frac{\partial L}{\partial z} \delta z + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial u_z} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial L}{\partial u_{zz}} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} + \frac{\partial^3}{\partial t^3} \frac{\partial L}{\partial u_{ttt}} \right) \delta u + \frac{\partial L}{\partial u_z} \frac{\partial}{\partial z} \delta u + \frac{\partial L}{\partial u_{zz}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \delta u + \frac{\partial L}{\partial u_t} \frac{\partial}{\partial t} \delta u \\ & + \frac{\partial L}{\partial u_{3t}} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \delta u + \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial v_z} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial L}{\partial v_{zz}} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial v_t} + \frac{\partial^3}{\partial t^3} \frac{\partial L}{\partial v_{3t}} \right) \delta v + \frac{\partial L}{\partial v_z} \frac{\partial}{\partial z} \delta v + \frac{\partial L}{\partial v_{zz}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \delta v \\ & + \frac{\partial L}{\partial v_t} \frac{\partial}{\partial t} \delta v + \frac{\partial L}{\partial v_{3t}} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \delta v, \end{aligned} \quad (A.18)$$

usando las siguientes identidades:

$$\delta u \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial u_z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial L}{\partial u_z} \delta u \right] - \frac{\partial L}{\partial u_z} \frac{\partial}{\partial z} \delta u, \quad (\text{A.20})$$

$$- \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial L}{\partial u_{zz}} \right) \delta u = - \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial u_{zz}} \right) \delta u \right] + \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial u_{zz}} \right) \frac{\partial}{\partial z} \delta u, \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_{zz}} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \delta u \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial L}{\partial u_{zz}} \frac{\partial}{\partial z} \delta u \right] - \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial u_{zz}} \right) \frac{\partial}{\partial z} \delta u, \quad (\text{A.22})$$

también:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_t} \right) \delta u = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial L}{\partial u_t} \delta u \right] - \frac{\partial L}{\partial u_t} \frac{\partial}{\partial t} \delta u, \quad (\text{A.23})$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial u_{ttt}} \right) \frac{\partial^3}{\partial t^3} \delta u = \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial u_{ttt}} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta u \right] - \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_{ttt}} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta u, \quad (\text{A.24})$$

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial t^3} \frac{\partial L}{\partial u_{ttt}} \right) \delta u = \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial L}{\partial u_{ttt}} \right) \delta u \right] - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial L}{\partial u_{ttt}} \right) \frac{\partial}{\partial t} \delta u, \quad (\text{A.25})$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_{ttt}} \right) \frac{\partial}{\partial t} \delta u \right] = - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial L}{\partial u_{ttt}} \right) \frac{\partial}{\partial t} \delta u - \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_{ttt}} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta u, \quad (\text{A.26})$$

Análogamente se obtiene el mismo tipo de identidades pero para la variable v , sustituyendo todas estas expresiones en la variación δL :

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial z} \delta z + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial L}{\partial u_z} \delta u \right] - \frac{d}{dz} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial u_{zz}} \right) \delta u \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial L}{\partial u_{zz}} \frac{\partial}{\partial z} \delta u \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial L}{\partial u_t} \delta u \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial L}{\partial u_{ttt}} \right) \delta u \right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial u_{ttt}} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta u \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_{ttt}} \right) \frac{\partial}{\partial t} \delta u \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial L}{\partial v_z} \delta v \right] - \frac{d}{dz} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial v_{zz}} \right) \delta v \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial L}{\partial v_{zz}} \frac{\partial}{\partial z} \delta v \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial L}{\partial v_t} \delta v \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial L}{\partial v_{ttt}} \right) \delta v \right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial v_{ttt}} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta v \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial v_{ttt}} \right) \frac{\partial}{\partial t} \delta v \right]. \quad (\text{A.30})$$

Ahora de las transformaciones (A.11) se tiene que $\delta z \equiv z^* - z = \varepsilon \xi_1$ y $\delta t \equiv t^* - t = \varepsilon \xi_2$, sustituyendo en la ecuación anterior y reagrupando:

$$\begin{aligned} \delta L = & \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left[\xi_1 L + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial u_z} \delta u - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial u_{zz}} \delta u + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial u_{zz}} \frac{\partial}{\partial z} \delta u + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial v_z} \delta v - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial v_{zz}} \delta v + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial v_{zz}} \frac{\partial}{\partial z} \delta v \right] \\ & + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left[\xi_2 L + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial u_t} \delta u + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial L}{\partial u_{ttt}} \right) \delta u + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ttt}} \right) \delta u_{tt} - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u_{ttt}} \right) \delta u_t + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial v_t} \delta v \right. \\ & \left. + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial L}{\partial v_{ttt}} \right) \delta v + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial L}{\partial v_{ttt}} \right) \delta u_{tt} - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial v_{ttt}} \right) \delta v_t \right]. \quad (\text{A.31}) \end{aligned}$$

Si se cumple la condición del Teorema de Noether $\delta L = 0$, la ecuación anterior toma la forma:

$$\delta L = \frac{\partial Q_1}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad (\text{A.32})$$

lo cual expresa una ley de conservación, donde la cantidad conservada es:

$$Q_1 = \xi_1 L + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial u_z} \delta u - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial u_{zz}} \delta u + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial u_{zz}} \frac{\partial}{\partial z} \delta u + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial v_z} \delta v - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial v_{zz}} \delta v + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial v_{zz}} \frac{\partial}{\partial z} \delta v. \quad (\text{A.33})$$

Vamos a calcular algunas de las cantidades conservadas a asociadas a diferentes tipos de transformaciones infinitesimales de la forma (A.11) para compararlos con las cantidades calculadas en el capítulo 9.

Caso 1. Traslaciones en z . Sean las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
z^* &= z + \varepsilon, & t^* &= t, \\
u^* &= u & \text{y} & & v^* &= v,
\end{aligned} \tag{A.34}$$

transformaciones sobre una región de (z,t) , estas son un caso particular de las transformaciones (A.11), donde $\zeta_1 = 1$ y $\phi_1(u) = \phi_2(u) = \zeta_2 = 0$. Según las ecuaciones (9.24) y (9.25) las variaciones de u y v bajo estas transformaciones son:

$$\delta u = \varepsilon[\phi_1(u(z,t)) - u_z \xi_1 - u_t \xi_2] = -\varepsilon u_z \tag{A.35}$$

$$\delta v = \varepsilon[\phi_2(v(z,t)) - v_z \xi_1 - v_t \xi_2] = -\varepsilon v_z. \tag{A.36}$$

en este caso, $\delta t = 0$ y $\delta z = \varepsilon$. Luego, las derivadas de las variaciones serán:

$$\delta u_z = \frac{\partial}{\partial z} \delta u = -\varepsilon u_{zz}, \tag{A.37}$$

$$\delta v_z = \frac{\partial}{\partial z} \delta v = -\varepsilon v_{zz}, \tag{A.37}$$

sustituyendo estos resultados en la cantidad conservada (A.33):

$$Q_1 = L - u_z \frac{\partial L}{\partial u_z} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{zz}} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_{zz}} u_{zz} - v_z \frac{\partial L}{\partial v_z} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial L}{\partial v_{zz}} \right) - \frac{\partial L}{\partial v_{zz}} v_{zz}, \tag{A.38}$$

solo falta calcular las derivadas de la densidad lagrangiana (A.14):

$$\frac{\partial L}{\partial u_z} = i(v), \quad \frac{\partial L}{\partial u_{zz}} = \alpha v, \quad \frac{\partial L}{\partial v_z} = -iu, \quad \frac{\partial L}{\partial v_{zz}} = \alpha u, \tag{A.39}$$

Entonces la cantidad conservada será:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= L - i v u_z + u_z \frac{\partial}{\partial z} (\alpha v) - \alpha v u_{zz} + i u v_z + v_z \frac{\partial}{\partial z} (\alpha u) - \alpha u v_{zz} \\
&= L - i v u_z + \alpha (v_z u_z) - \alpha v u_{zz} + i u v_z + \alpha (u_z v_z) - \alpha u v_{zz} \\
&= L - i v u_z + 2\alpha (v_z u_z) + i u v_z
\end{aligned}$$

$$= i\varepsilon(uv_{ttt} - vu_{ttt}) + \frac{1}{2}i\gamma|u|^2[vv_t - uu_t] + 2\alpha(v_z u_z). \quad (\text{A.40})$$

Esta cantidad coincide justamente con la misma hallada usando L_1 en el capítulo 9, conocida como el “Hamiltoniano”.

Caso 2. Ahora se consideran las transformaciones de traslación en t :

$$z^* = z, \quad t^* = t + \varepsilon, \quad u^* = u, \quad v^* = v, \quad (\text{A.41})$$

Donde según las transformaciones (A.11) $\xi_2 = 1$ y $\xi_1 = \phi_1 = \phi_2 = 0$. Las variaciones de u y v según (A.35) y (A.36) son $\delta u = -\varepsilon u_t$ y $\delta v = -\varepsilon v_t$, derivando:

$$\delta u_z = \frac{\partial}{\partial z} \delta u = -\varepsilon u_{tz}, \quad \delta u_t = \frac{\partial}{\partial t} \delta u = -\varepsilon u_{tt}, \quad \delta u_{ttt} = \frac{\partial^3}{\partial t^3} \delta u = -\varepsilon u_{4t}, \quad (\text{A.42})$$

$$\delta v_z = \frac{\partial}{\partial z} \delta v = -\varepsilon v_{tz}, \quad \delta v_t = \frac{\partial}{\partial t} \delta v = -\varepsilon v_{tt}, \quad \delta v_{ttt} = \frac{\partial^3}{\partial t^3} \delta v = -\varepsilon v_{4t}, \quad (\text{A.43})$$

además por definición de variación $\delta t = \varepsilon$ y $\delta z = 0$ para estas transformaciones.

Sustituyendo todas estas expresiones anteriores la cantidad conservada (A.33):

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial u_z} \delta u - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial u_{zz}} \delta u + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial u_{zz}} \frac{\partial}{\partial z} \delta u + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial v_z} \delta v - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial v_{zz}} \delta v + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial v_{zz}} \frac{\partial}{\partial z} \delta v \\ &= -u_t \frac{\partial L}{\partial u_z} + u_t \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial u_{zz}} - u_{tz} \frac{\partial L}{\partial u_{zz}} - v_t \frac{\partial L}{\partial v_z} + v_t \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial v_{zz}} - v_{tz} \frac{\partial L}{\partial v_{zz}}, \quad (\text{A.44}) \end{aligned}$$

donde las derivadas restantes se calculan directamente de la lagrangiana L_2 (A.14):

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u_z} &= iv, & \frac{\partial L}{\partial u_{zz}} &= \alpha v, & \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial u_{zz}} &= \alpha v_z, \\ \frac{\partial L}{\partial v_z} &= -iu, & \frac{\partial L}{\partial v_{zz}} &= \alpha u, & \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial v_{zz}} &= \alpha u_z, \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

entonces:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= -iu_t v + \alpha v_z u_t - \alpha v u_{tz} + iuv_t + \alpha u_z v_t - \alpha u v_{tz} \\
&= -i[u_t v - uv_t] + \alpha[v_z u_t + u_z v_t] - \alpha[vu_{tz} + uv_{tz}], \tag{A.46}
\end{aligned}$$

Esta cantidad resulta tener un término extra a la obtenida en el capítulo 9 usando la densidad lagrangiana L_1 , donde en el caso de las traslaciones en t se obtuvo una cantidad a la que se nombró como el momento. Este resultado nos indica que aunque la ec.GmKdV no es integrable si posee diferentes cantidades conservadas asociadas a diferentes simetrías.

Caso 3. Transformaciones de norma. Consideramos las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned}
z^* &= z + \varepsilon \zeta_1, & t^* &= t + \varepsilon \zeta_2, \\
u^* &= u + \varepsilon \phi_1(u), & v^* &= v + \varepsilon \phi_2(v), \tag{A.47}
\end{aligned}$$

donde:

$$z^* = z, \quad t^* = t, \quad u^* = ue^{i\varepsilon} \approx u + i\varepsilon u, \quad v^* = ve^{-i\varepsilon} \approx v - i\varepsilon v, \tag{A.48}$$

en este caso $\phi_1 = iu$ y $\phi_2 = -iv$, $\xi_1 = \xi_2 = 0$, entonces las variaciones de u y v serán:

$$\delta u = \varepsilon[\phi_1(u(z, t)) - u_z \xi_1 - u_t \xi_2] = \varepsilon iu, \tag{A.49}$$

$$\delta v = \varepsilon[\phi_2(v(z, t)) - v_z \xi_1 - v_t \xi_2] = -i\varepsilon v. \tag{A.50}$$

Entonces, la cantidad conservada (A.33) en este caso será:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial u_z} \delta u - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial u_{zz}} \delta u + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial u_{zz}} \frac{\partial}{\partial z} \delta u + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial v_z} \delta v - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial v_{zz}} \delta v + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial L}{\partial v_{zz}} \frac{\partial}{\partial z} \delta v \\
&= iu \frac{\partial L}{\partial u_z} - iu \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial u_{zz}} + iu_z \frac{\partial L}{\partial u_{zz}} - iv \frac{\partial L}{\partial v_z} + iv \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial v_{zz}} - iv_z \frac{\partial L}{\partial v_{zz}} \\
&= -uv - i\alpha v_z u + i\alpha v u_z - vu + i\alpha u_z v - i\alpha v_z u
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow Q_1 = -2|u|^2 + 2i\alpha[vu_z - v_zu] \equiv I, \quad (A.51)$$

esta cantidad coincide con la encontrada en el capítulo 9, conocida como la intensidad y

esta relacionada con la conservación de la energía $E = \int_{-\infty}^{+\infty} I d\tau$.

APENDICE B.
TABLA DE INTEGRALES.

$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) d\lambda = 2$	$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) \lambda d\lambda = 0$
$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) \lambda^2 d\lambda = \frac{\pi^2}{6}$	$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) \lambda^3 d\lambda = 0$
$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) \lambda^4 d\lambda = \frac{7\pi^4}{120}$	$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) \tanh(\lambda) d\lambda = 0$
$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) \tanh(\lambda) \lambda d\lambda = 1$	$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) \tanh^2(\lambda) d\lambda = \frac{2}{3}$
$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) \tanh^2(\lambda) \lambda d\lambda = 0$	$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^4(\lambda) d\lambda = \frac{4}{3}$
$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^4(\lambda) \lambda d\lambda = 0$	$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^4(\lambda) \lambda^2 d\lambda = \frac{1}{9}(\pi^2 - 6) \approx 0.4299$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) \tanh^2(\lambda) \lambda^2 d\lambda &= \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) [1 - \operatorname{sech}^2(\lambda)] \lambda^2 d\lambda \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2(\lambda) \lambda^2 d\lambda - \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^4(\lambda) \lambda^2 d\lambda \\
 &= \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{9}(\pi^2 - 6) = \frac{3}{54}\pi^2 + \frac{6}{9}
 \end{aligned}$$

APENDICE C

Para obtener la evolución numérica de la solución linealizada de la ec. GcmKdV, utilizamos la función [NInverseFourierTransform] del programa *Wolfram Mathematica*, que calcula numéricamente la transformada inversa de una función que depende de ω y la evalúa en un valor t . Ya que las soluciones obtenidas en el espacio de frecuencias:

$$U(z, \omega) = \left[\frac{\sqrt{2\pi}}{2B} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2B}\right) \exp\left(-15iz - 15z \sqrt{-1 - \left(\frac{2}{15}\right)\omega^3}\right) \right],$$

al transformarse al espacio (z,t) no tienen forma analítica.

Las gráficas de evolución de la solución $u(z, t) = \mathcal{F}^{-1}[U(z, \omega)]$ para $z=1,2,3,4$ se obtiene al correr las siguientes líneas de código en *Wolfram Mathematica*.

```
Needs["FourierSeries"]
Plot[{Abs[NInverseFourierTransform[Sqrt[Pi * 2] * Exp[-15 * I - 15 * Sqrt[-1 - 2/15
* w^3]] * Sech[Pi(w - 2)], w, t]],
Abs[NInverseFourierTransform[Sqrt[Pi * 2] * Exp[-30 * I - 30 * Sqrt[-1 - 2/15 * w^3]]
* Sech[Pi(w - 2)], w, t]],
Abs[NInverseFourierTransform[Sqrt[Pi * 2] * Exp[-45 * I - 45 * Sqrt[-1 - 2/15 * w^3]]
* Sech[Pi(w - 2)], w, t]],
Abs[NInverseFourierTransform[Sqrt[Pi * 2] * Exp[-60 * I - 60 * Sqrt[-1 - 2/15 * w^3]]
* Sech[Pi(w - 2)], w, t]], {t, -60, 10}, PlotRange -> All]
```

REFERENCIAS.

1. Pitaevskii L.P. (1961) *Vortex Lines in a Imperfect Bose Gas*. JETP 13, pp: 453
2. Hasewaga A. y Tappert F. D. (1973) *Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersión*. Appl. Phys. Lett. 23, pp:142-4.
3. Mollenauer L.F., Stolen R.H. y Gordon J.P. (1980) *Experimental Observation of Picosecond Pulse Narrowing and Solitons in Optical Fibers* Phys. Rev. Lett. 45, pp: 1095.
4. Russell, J.S. (1844) *Report on Waves*. 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science
5. Korteweg D. J. and de Vries G. (1895) *On the Change of Form of Long Waves advancing in a Rectangular Canal and on a New Type of Long Stationary Waves*. Philosophical Magazine 5th Series 36, pp:422-443.
6. Fermi E., Pasta J. and Ulam S. (1955) *Studies of nonlinear problems. I*. Los Alamos report LA-1940, published later in Collected Papers of Enrico Fermi, E. Segré (Ed.), University of Chicago Press (1965)
7. Zabusky N.J. y Kruskal M.D. (1965) *Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states*. Phys. Rev. Lett. 15, pp:240-243.
8. Clifford S. Gardner, John M. Greene, Martin D. Kruskal, y Robert M. Miura. (1967) *Method for Solving the Korteweg-deVries Equation*. Phys. Rev. Lett. 19, pp:1095
9. Lax P.D. (1968), *Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves*, Comm. Pure Appl. Math. 21, pp:467
10. Zakharov V. F .y Shabat A. B. (1971) *Exact Theory of Two-dimensional Self-focusing and One-dimensional Self-modulation of Wave in Nonlinear Media*, Eksp. Teor. Fiz. 61,pp :118-134.
11. Kao K. C. y Hockham G. H. (1966) *Dielectric-fibre Surface waveguides for optical frequencies*. Proc. IEEE 113, pp:1151-8.
12. Kapron F.P., Keck D.B. y Maurer R. D. (1970) *Radiation losses in glass óptical wavequides*. Appl. Phys. Lett. 17, pp:423-5.
13. Fujioka J.(2003) *NLS: Una introduccion a la ecuacion no lineal de Schrodinger*, Ed. FENOMECC, pp:19.
14. Espinosa-Ceron A., Fujioka J. y Gomez-Rodriguez A. (2003) *Embedded Solitons: Four-Frequency Radiation, Front Propagation and Radiation Inhibition*, Physica Scripta 67, pp:314.
15. Poincaré, H. (1892), *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Ed. Gauthier-Villars, Paris, published by Dover, NewYork, 1957.

16. Krylov, N.M., and Bogoliubov, N.N., *Introduction to Non-linear Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1957.
17. Bogoliubov, N.N., and Mitropolsky, Y.A., *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*, Gordon and Breach, New York, 1961.
18. Kevorkian, J., and Cole, J.D., *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, Blaisdell, Waltham, MA, 1968.
19. Nayfeh, A.H., *Perturbation Methods*, Wiley, New York, 1962.
20. Frieman, E.A., "On a New Method in the Theory of Irreversible Processes," *Journal of Mathematical Physics*, Vol. 4, No. 3, 1963.
21. Sandri G., "Uniformization of Asymptotic Expansions," *Nonlinear Partial Differential Equations*, edited by W. Ames, Academic Press, New York, 1967.
22. Fujioka J., Rodríguez R.F. y Espinosa-Cerón A., (2006), *Solitones embebidos: estables, inestables, continuos y discretos*, *Ciencia Ergo Sum* 3, pp:312-318.
23. Akhmediev, N. N. y Karlsson, M. (1995), *Cherenkov radiation emitted by solitons in optical fibers*, *Phys. Rev. A* 51. 2602.
24. Fujioka J. y A. J. Espinosa (1997). *Phys. Soc. Japan.* 66. 2601.
25. Champneys, A. R. y B. A. Malomed (2000). *Phys. Rev. E* 61. 886.
26. Yang, J. (2003). *Studies in Applied Mathematics.* 106. 337.
27. Rodríguez, R. F.; J. A. Reyes; Espinosa-Cerón A.; Fujioka J. y Malomed B. A. (2003) *Standard and embedded solitons in nematic optical fibers*, *Phys. Rev. E*, 68. 036606-1/14.
28. Hasegawa A. y Kodama Y. (1981), 'Signal transmission by optical solitons in monomode fiber', *Proc. IEEE*, 69, pp: 1145-1150.
29. Fujioka, J, Gómez-Rodríguez A. y Espinosa-Cerón A. (2017) *Pulse Propagation Models with Band sor Forbidden Wavenumbers: A Consequence of Abandoning the Slowly Envelope Approximation and Taking into Account High-Orden Dispersion*, *Appl. Sci*, 7, pp:340.
30. Ablowitz M. J. y Segur H. (1981) *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, Ed. SIAM, Filadelfia.
31. Christodoulides D.N. y Joseph R.I. (1985) *Femtosecond solitary waves in optical fibers - Beyond the slowly varying envelope approximation*, *Appl. Phys. Lett.* 47, pp: 76-78

32. Robert K. Nesbet (2005) VARIATIONAL PRINCIPLES AND METHODS IN THEORETICAL PHYSICS AND CHEMISTRY, Ed. Cambridge University Press, pp:8-10
33. Lanczos C. (1949) *The variational principles of mechanics*, Ed. University of Toronto Press, pp:.
34. Krasnov M.L., Makarenko G.I. y Kiseliyov A.I.(1992) *Calculo Variacional - Ejemplos y Problemas*, Ed. MIR, Madrid, pp:50-52
35. D. Anderson, (1983) *Variational approach to nonlinear pulse propagation in optical fibers*, Phys. Rev. 27, pp: 3135-3145.
36. Jean-Caude Diels, Wolfgang Rudolph, (2003), *Ultrashort laser pulse phenomena*. Ed. Academic Press. pp:18
37. Hayata K. y Koshiha M. (1995), *Algebraic solitary-wave solutions of a nonlinear Schrödinger equation*, Phys. Rev. 51, pp:1499-1502
38. Fujioka J. y Espinosa A., (1996), *Stability of the Bright-Type Algebraic Solitary-Wave Solitons of Two Extended Versions of the Nonlinear Schrodinger Equation*, J. Phys. Soc. Japan, 65, pp: 2440-2446
39. Yuri S. Kivshar, Govind Agrawal (2003), *Optical Solitons from Fibers to Photonic Crystals*, Academic Press, pp:32
40. Porsezian K. y Kuriavose V. C.(2003), *Optical solitons Theoricall and experimental Challenges*. Ed, Springer, pp:110-12
41. Hao D.N., Van T.D., Gorenflo R. (1992), "Towards the Cauchy problem for the Laplace equation", Banach Center Publications, 27, pp. 111-128.