UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

HOMOLOGÍA DE INVARIANTES Y SU VERSIÓN RELATIVA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
JOSÉ MARTÍN MIJANGOS TOVAR

DIRECTOR DE TESIS
DR. ROLANDO JIMÉNEZ BENÍTEZ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DR. JOSÉ LUIS CISNEROS MOLINA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM
DR. DANIEL JUAN PINEDA
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, MARZO 2020.

Índice

Introducción

En el 2003 Kevin P. Knudson y Mark E. Walker definieron en [KW03] una teoría de homología de variedades algebraicas que, bajo ciertas hipótesis, se reduce a la homología del espacio topológico BG/Q donde G es un grupo discreto, Q es un grupo finito actuando por automorfismos sobre G, BG es la realización geométrica del nervio de G visto como categoría y la acción de Q sobre BG es la inducida por la acción de Q en G. Surgió entonces el interés del estudio de la homología del espacio cociente BG/Q. Denotemos por $C_*(G)$ el complejo barra de G, es decir, $C_n(G)$ es el grupo abeliano libre generado por el conjunto $\{[g_1|\cdots|g_n]|g_i \in G\}$ y observemos que $C_*(BG) = C_*(G)$ donde $C_*(BG)$ es el complejo de cadenas celular de BG. Knudson notó que existe un isomorfismo $C_n(BG/Q) \cong C_n(G)^Q$ así que decidió estudiar la homología de los puntos fijos del complejo barra en [Knu06] pese a que este isomorfismo no se extiende en general a un isomorfismo de cadenas. En este artículo definió los *grupos de homología y cohomología de cadenas invariantes*

$$
\begin{aligned}
H_*^Q(G, A) =& H_*(C(G, A)^Q) \\
H_Q^*(G, A) =& H^*(\mathrm{Hom}(C(G)^Q, A)).
\end{aligned}
$$

Aunque estos grupos en general no calculan la homología del espacio cociente, sí lo hacen para ciertos casos, los cuales eran precisamente los casos de interés para Knudson ([Knu06] Corolario 2.3 y Proposición 2.4).

Por otra parte, existen dos versiones de homología relativa de grupos. Una es la definida por Iain T. Adamson en [Ada54] y la otra por Satoru Takasu en [Tak59]. La versión de Adamson fue generalizada después por Ernst Snapper en [Sna64] mediante la homología de representaciones por permutaciones. Esta última, aunque es una definición puramente algebraica, tiene su interpretación geométrica como la homología de espacios clasificantes respecto a familias de subgrupos.

Es así como, motivados en los dos temas anteriores, en el presente trabajo estudiamos una versión de homología relativa de cadenas invariantes al estilo de Adamson. Para ello generalizamos la definición hecha por Knudson para definir los grupos de homología y cohomología de Q-representaciones por permutaciones y después, como caso particular, tenemos la homología relativa de cadenas invariantes.

Para esto en el capítulo uno damos los conceptos y resultados que se ocuparán en los capítulos posteriores. En particular se desarrollará la versión homológica de la teoría de las representaciones por permutaciones de Frobenius, pues en [Sna65] sólo se trata la versión cohomológica. Probaremos el siguiente teorema.

Teorema 1.5.13. *(Análogo a Teorema 10.1 en [Sna65]) Sea (G, X) una representación de Frobenius. La sucesión espectral del Teorema 1.5.7 que relaciona $H_*(G, A)$ y $H_*(X, G; A)$ cumple:*

1. $E^2_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}(G, A)$.
2. *El término inicial* $E^2_{p,q} = 0$ *si* p *y* q *son mayores a cero.*
3. $E^2_{p,0} = H_p(G, X; A)$ *para* $p \geq 0$.
4. $E^2_{0,q} = H_q(H, A)$ *donde* $H < G$ *es el grupo de isotropía de un elemento arbitrario* $x_0 \in X$.

En el capítulo dos se desarrolla la teoría de homología y cohomología de cadenas invariantes de Q-representaciones por permutaciones. Probaremos la siguiente relación entre la homología de representaciones y su versión invariante.

Teorema 2.1.5. *Sea (G, X) una Q-representación y A un grupo abeliano con acciones de Q y G triviales. Entonces existe una acción de Q en $H_n(G, X; A)$ y un homomorfismo*

$$H^Q_n(G, X; A) \longrightarrow H_n(G, X; A)^Q$$

para todo $n \geq 0$ el cual es un isomorfismo si $|Q|$ es invertible en A.

Probaremos algunos resultados que son comunes en la teoría de homología de grupos usual (Sección 1.3). Por ejemplo, la homología en dimensión cero se seguirá del siguiente teorema.

Teorema 2.3.4. *Si la acción de G en X es transitiva, entonces el homomorfismo $(\partial_1 \otimes Id_A)^Q : (B_1(X) \otimes_G A)^Q \longrightarrow (B_0(X) \otimes_G A)^Q$ es cero.*

Corolario 2.3.5. *Dada una Q-representación (G, X) tal que la acción de G en X es transitiva, se cumple que $H^Q_0(G, X; A) \cong A$ y $H^0_Q(G, X; A) \cong A$.*

Probaremos el siguiente resultado sobre sucesiones exactas largas para coeficientes.

Teorema 2.4.2. *Sean A, A' y A'' grupos abelianos tales que Q y G actúan trivialmente sobre ellos y $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta. Sea (G, X) una Q-representación por permutaciones. Entonces existe una sucesión exacta larga en cohomología*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0_Q(G, X; A') \longrightarrow & H^0_Q(G, X; A) \longrightarrow H^0_Q(G, X; A'') \\ & \longrightarrow H^1_Q(G, X; A') \longrightarrow H^1_Q(G, X; A) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Además, si $H^1(Q, B_n(X) \otimes_G A') = 0$ para todo $n \geq 0$, entonces existe una sucesión exacta larga en homología

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H^Q_1(G, X; A) \longrightarrow & H^Q_1(G, X; A'') \longrightarrow H^Q_0(G, X; A') \\ & \longrightarrow H^Q_0(G, X; A) \longrightarrow H^Q_0(G, X; A'') \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

También mostraremos la existencia de una sucesión espectral que relaciona la homología y cohomología.

Teorema 2.5.1. *Existe una sucesión espectral con*

$$E^2_{pq} = \mathrm{Ext}^p_{\mathbb{Z}}(H^Q_q(G,X;\mathbb{Z}),A)$$

y que converge a $H^{p+q}_Q(G,X;A)$.

También construiremos los mapeos transfer y veremos que cumplen la siguiente propiedad usual.

Teorema 2.6.1. *Sea* (G,X) *una* Q*-representación por permutaciones y* H *un subgrupo de índice finito* Q*-invariante tal que hay un conjunto de representantes de* G/H Q*-invariante. Sea* z *indistintamente elemento de* $H^Q_*(G,X;A)$ *o* $H^*_Q(G,X;A)$*. Entonces* $cor^G_H res^G_H(z) = [G:H]z$.

En el tercer capítulo damos la definición y propiedades de la homología relativa de cadenas invariantes la cual denotaremos por $H^Q_n([G,H];A)$. Probaremos que se reduce a la homología absoluta de cadenas invariantes si el subgrupo H es normal.

Corolario 3.1.4. *Si* H *es un subgrupo normal de* G*, entonces* $H^Q_n([G,H];A) = H^Q_n(G/H,A)$ *y* $H^n_Q([G,H];A) = H^n_Q(G/H,A)$.

Daremos una interpretación topológica para la homología relativa.

Teorema 3.2.5. *Sea* A *un* Q*-*G*-módulo con acciones triviales de* Q *y* G *tal que* $|Q|$ *es invertible en* A*. Entonces,*

$$H^Q_*([G,H];A) = H_*(B_{\mathcal{F}(H)}(G)/Q,A)$$

donde $\mathcal{F}(H)$ *es la familia generada por* H*,* $B_{\mathcal{F}(H)}(G) = E_{\mathcal{F}(H)}(G)/G$ *y* $E_{\mathcal{F}(H)}(G)$ *es el modelo descrito en el teorema anterior.*

Concluimos el capítulo con un ejemplo de cálculo de homología relativa para $G = S_3$, $Q = \mathbb{Z}_2 = \langle t\rangle$ donde la acción de t sobre G es conjugación por el elemento $(1\,2)$, H un subgrupo de G de orden 2 y $A = \mathbb{Z}_m$ un Q-G-módulo con $m \geq 3$ un entero impar no divisible entre 3 y tal que Q y G actúan trivialmente sobre A. Entonces,

$$H^Q_p([G,H],A) = \begin{cases} A & p = 0 \\ 0 & p \equiv 1,2\, mod\, 4 \\ A/3A & p \equiv 3\, mod\, 4 \\ T_3(A) & p \equiv 0\, mod\, 4,\ p > 0. \end{cases}$$

Otras ideas desarrolladas en este trabajo corresponden a la siguiente observación. Si Q actúa por automorfismos en G tenemos definido el producto semidirecto y es natural preguntarse si existe alguna relación entre la homología usual de grupos de este grupo y la homología de cadenas invariantes. En el cuarto y último capítulo demostramos el siguiente teorema que muestra que sí hay relación en el caso en el que el orden del grupo Q es invertible en los coeficientes.

Teorema 4.2.4. *Sea* Q *un grupo finito tal que* $|Q|$ *es invertible en* A*. Entonces,* $H^Q_q(G,A) \cong H_q(G \rtimes_\varphi Q, A)$.

Concluimos este capítulo ejemplificando el uso del corolario anterior calculando los grupos $H_q^Q(G,A)$ para $Q=\mathbb{Z}_2=\langle t\rangle$, $G=\mathbb{Z}_n$ y $A=\mathbb{Z}_m$ con m impar donde $tg=g^{-1}$ para todo $g\in G$ y la acción de G y Q sobre A es trivial.

$$H_q^Q(G,A)=\begin{cases}\mathbb{Z}_m & q=0\\ \mathbb{Z}_{(m,n)} & q\equiv 0\,,3\,mod\,4\,,q>0\\ 0 & \text{otro caso.}\end{cases}$$

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Conceptos básicos de álgebra homológica

En esta sección recordaremos algunos conceptos comunes de álgebra homológica que se usarán en los siguientes capítulos. No daremos las demostraciones de muchos hechos pues se pueden encontrar en textos de álgebra homológica o topología algebraica, por ejemplo [Wei94].

Durante esta sección R denotará un anillo asociativo con unidad.

Definición 1.1.1. *Un R-módulo graduado es una sucesión de la forma $C = (C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de R-módulos. Diremos que $x \in C$ es de grado n si $x \in C_n$.*

Definición 1.1.2. *Un mapeo de grado p de un R-módulo graduado C en otro C' es una familia de homomorfismos de R-módulos $f = (f_n : C_n \longrightarrow C'_{n+p})_{n\in\mathbb{Z}}$.*

Definición 1.1.3. *Un complejo de cadenas sobre R es una pareja (C, d) tal que C es un R-módulo graduado y $d : C \longrightarrow C$ es un mapeo de grado -1 y tal que $d^2 = 0$. A tal mapeo d le llamamos el diferencial y generalmente lo omitiremos de la notación, sólo diremos que C es un complejo de cadenas. Definimos las fronteras $B(C)$, los ciclos $Z(C)$ y la homología $H(C)$ como $Z(C) = \ker d$, $B(C) = \operatorname{im} d$ y $H(C) = Z(C)/B(C)$. Todos estos son módulos graduados.*

En la definición anterior, si el mapeo es de grado $+1$ usaremos superíndices en lugar de subíndices para denotar el grado, $C = (C^n)_{n\in\mathbb{Z}}$. En general añadiremos el prefijo "co" a la terminología, por ejemplo, cofronteras $B(C)$, cociclos $Z(C)$ y cohomología $H(C)$.

Definición 1.1.4. *A un mapeo $f : C \longrightarrow C'$ de grado 0 entre dos complejos de cadenas (C, d) y (C', d') tal que $fd = d'f$ lo llamaremos mapeo de cadenas.*

Definición 1.1.5. *Una homotopía h entre dos mapeos de cadenas $f, g : C \longrightarrow C'$ es un mapeo de grado uno $h : C \longrightarrow C'$ tal que $d'h + hd = f - g$. Si hay una homotopía entre f y g diremos que son homotópicos y escribiremos $f \simeq g$.*

Teorema 1.1.6. *Un mapeo de cadenas $f : C \longrightarrow C'$ induce un mapeo $H(f) : H(C) \longrightarrow H(C')$ y $H(f) = H(g)$ si $f \simeq g$.*

Definición 1.1.7. *Un mapeo $f : C \longrightarrow C'$ se dice equivalencia homotópica si existe un mapeo de cadenas $f' : C' \longrightarrow C$ tal que $f'f \simeq id_C$ y $ff' \simeq id'_C$. Diremos que es equivalencia débil si $H(f)$ es un isomomorfismo.*

Teorema 1.1.8. *Una equivalencia homotópica es una equivalencia débil.*

Teorema 1.1.9. *Una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{\pi} C'' \longrightarrow 0$$

de complejos de cadenas induce una sucesión exacta larga en homología:

$$\cdots \longrightarrow H_n(C') \xrightarrow{H(i)} H_n(C) \xrightarrow{H(\pi)} H_n(C'') \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(C') \longrightarrow \cdots .$$

El homomorfismo conexión ∂ es natural en el sentido que dado un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & C \arrow[r] \arrow[d, "f"] & C'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E' \arrow[r] & E \arrow[r] & E'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

con renglones exactos, induce un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H_n(C'') \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f''_*"] & H_{n-1}(C') \arrow[d, "f'_*"] \\
H_n(E'') \arrow[r, "\partial"] & H_{n-1}(E').
\end{tikzcd}$$

Definición 1.1.10. *Dado un R-módulo A, una resolución de A es una sucesión exacta de R-módulos*

$$\cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0.$$

Si cada F_i es un módulo proyectivo (libre) diremos que la resolución es proyectiva (libre).

En general nos interesará trabajar con anillos muy particulares, los llamados anillos de grupo.

Definición 1.1.11. *Sea G un grupo. Definimos el anillo de grupo entero de G, denotado por $\mathbb{Z}G$, como el grupo libre abeliano generado por los elementos de G. La multiplicación en este grupo está dada por la multiplicación en G extendida linealmente a todo $\mathbb{Z}G$.*

A un módulo sobre un anillo de esta forma le llamaremos G-módulo en lugar de $\mathbb{Z}G$ módulo. En tal caso, un G-módulo A equivale a tener un homomorfismo de grupos $G \longrightarrow Aut(A)$. Si $ga = a$ para todo $g \in G$, $a \in A$, diremos que A es un G-módulo trivial.

1.2. Sucesiones espectrales

En esta sección recordaremos conceptos y propiedades de las sucesiones espectrales (ver [Wei94] o [Mac63]).

Definición 1.2.1. *Un módulo $\mathbb{Z}$-bigraduado es una familia $E = \{E_{p,q}\}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, de módulos. Un diferencial $d : E \to E$ de grado $(-r, r-1)$ es una familia de homomorfismos $\{d_{p,q} : E_{p,q} \to E_{p-r,q+r-1}\}$ tal que $d^2 = 0$. La homología de éste* *módulo $\mathbb{Z}$-bigraduado, $H(E)$, bajo un diferencial d, es otro módulo $\mathbb{Z}$-bigraduado dado por*

$$H_{p,q}(E) = \ker d_{p,q} / \operatorname{im} d_{p+r,q-r+1}.$$

Definición 1.2.2. *Una sucesión espectral $E = \{E^r, d^r\}$ es una sucesión de módulos $\mathbb{Z}$-bigraduados $E^2, E^3 ...$, tales que cada E^r posee un diferencial $d^r : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$, $r = 2, 3, ...$ de grado $(-r, r-1)$ y tal que se cumple el isomorfismo $H(E^r, d^r) \cong E^{r+1}$. Observemos entonces, que cada pareja (E^r, d^r) determina a E^{r+1} pero no a d^{r+1}. El módulo bigraduado E^2 es llamado término inicial.*

Sean E y E' sucesiones espectrales con términos iniciales E^a y E'^a respectivamente. Un homomorfismo $f : E \to E'$ es una familia de homomorfismos

$$f^r : E^r \to E'^r, \qquad r \in \mathbb{Z}, r \geq a,$$

de módulos bigraduados, es decir, de grado $(0,0)$ tales que $d^r f = f d^r$ y f^{r+1} es el inducido por f^r en homología.

Sea E una sucesión espectral con término inicial (E^a, d^a). Definimos los submódulos bigraduados C^a y B^a de E^a como $C^a = \ker d^a$ y $B^a = \operatorname{im} d^a$. Podemos ver entonces al siguiente término de la sucesión como $E^{a+1} = C^a/B^a$ y $d^{a+1} : C^a/B^a \to C^a/B^a$. Definimos ahora C^{a+1} y B^{a+1} como los submódulos bigraduados de E^a tales que

$$\ker d^{a+1} = C^{a+1}/B^a \quad e \quad \operatorname{im} d^{a+1} = B^{a+1}/B^a. \tag{1.2.3}$$

Se tiene entonces que $B^a \subseteq B^{a+1} \subseteq C^{a+1} \subseteq C^a$ y por lo tanto $E^{a+2} = (C^{a+1}/B^a)/(B^{a+1}/B^a) = C^{a+1}/B^{a+1}$. Iterando este proceso podemos encontrar submódulos bigraduados de E^a, C^r y B^r, tales que $\ker d^r = C^r/B^{r-1}$ e $\operatorname{im} d^r = B^r/B^{r-1}$. Se va a cumplir entonces

$$B^a \subseteq B^{a+1} \subseteq \ldots B^r \subseteq C^r \ldots \subseteq C^{a+1} \subseteq C^a$$

y $E^{r+1} = C^r/B^r$. Definimos los módulos bigraduados C^∞ y B^∞ como $C^\infty = \cap_{r\geq a} C^r$ y $B^\infty = \cup_{r \geq a} B^r$. Tenemos entonces que $B^\infty \subseteq C^\infty$ (de lo contrario existiría un elemento $x \in B^k$ para algún k, tal que $x \notin C^l$ para algún l, lo cual no puede ser pues si $k \leq l$ $B^k \subseteq B^l \subseteq C^l$ y si $k > l$ $B^k \subseteq C^k \subseteq C^l$). Definimos

$$E^\infty = C^\infty/B^\infty. \tag{1.2.4}$$

Considerando lo anterior, tener un homomorfismo $f : E \to E'$ entre dos sucesiones espectrales con términos iniciales E^a y E'^a es equivalente a tener un homomorfismo $f : E^a \to E'^a$ de módulos bigraduados tal que $f(C^r) \subseteq C'^r$, $f(B^r) \subseteq B'^r$ y tal que todos los diagramas

$$\begin{tikzcd} C^{r-1}/B^{r-1} \arrow[r, "d^r"] \arrow[d, "f_*"] & C^{r-1}/B^{r-1} \arrow[d, "f_*"] \\ C'^{r-1}/B'^{r-1} \arrow[r, "d^r"] & C'^{r-1}/B'^{r-1} \end{tikzcd}$$

son conmutativos. Es claro así que $f : E \to E'$ induce un homomorfismo $f^\infty : E^\infty = C^\infty/B^\infty \to E'^\infty = C'^\infty/B'^\infty$.

Definición 1.2.5. *Sea E una sucesión espectral con término inicial E^a. La sucesión se llama de primer cuadrante si $E^r_{p,q} = 0$ para $p < 0$ o $q < 0$. Se llama acotada por abajo si para cada $n \in \mathbb{Z}$ existe un entero $s(n)$ tal que si $p < s(n)$, entonces $E^r_{p,q} = 0$ para todo $q \in \mathbb{Z}$ tal que $p + q = n$.*

Teorema 1.2.6. *Sea $f : E \to E'$ un homomorfismo de sucesiones espectrales con términos iniciales E^a y E'^a. Si existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $f^r : E^r \to E'^r$ es un isomorfismo, entonces $f^s : E^s \to E'^s$ es un isomorfismo para todo $s \geq r$. Más aún, si las sucesiones son acotadas por abajo, $f^\infty : E^\infty \to E'^\infty$ es también un isomorfismo.*

Sea M un $R-$módulo. Una filtración de M es una familia de submódulos F_pM de M, $p \in \mathbb{Z}$, tales que

$$\cdots \subseteq F_{p-1}M \subseteq F_pM \subseteq F_{p+1}M \subseteq \cdots .$$

Decimos que una filtración es finita si $F_pM = 0$ para un $p \in \mathbb{Z}$ lo suficientemente pequeño y $F_pM = M$ para un $p \in \mathbb{Z}$ suficientemente grande. Una filtración induce un módulo graduado al que llamaremos módulo graduado asociado, denotado por $\operatorname{Gr} M$, y que está dado por $\operatorname{Gr}_p M = F_pM/F_{p-1}M$. Si el módulo M es un módulo graduado, una filtración de M es una filtración $\{F_pM_n\}_{p\in\mathbb{Z}}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Tenemos así un módulo bigraduado, $\operatorname{Gr}_{p,q} M$, dado por

$$\operatorname{Gr}_{p,q} M = \operatorname{Gr}_p M_{p+q} = F_pM_{p+q}/F_{p-1}M_{p+q}.$$

Diremos que un elemento en $\operatorname{Gr}_{p,q} M$ tiene grado de filtración p, grado complementario q y grado total $p + q$. Para simplificar la notación es costumbre suprimir el subíndice q y escribir $\operatorname{Gr}_p M = F_pM/F_{p-1}M$ Diremos que la filtración anterior es acotada si para cada $n \in \mathbb{Z}$ la filtración $\{F_pM_n\}_{p\in\mathbb{Z}}$ es finita.

Teorema 1.2.7. *Sea F_pM una filtración finita del módulo M. Si existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $\operatorname{Gr}_p M = 0$ para todo $p \neq q$, entonces $\operatorname{Gr} M = M$.*

Definición 1.2.8. *Sean M y M' R-módulos con filtraciones F_pM y F_pM'. Diremos que un homomorfismo $f : M \to M'$ preserva filtraciones si $f(F_pM) \subseteq F_pM'$. En tal caso hay un homomorfismo inducido $\operatorname{Gr} f : \operatorname{Gr} M \to \operatorname{Gr} M'$ definido por componentes $\operatorname{Gr}_p f : \operatorname{Gr}_p M \to \operatorname{Gr}_p M'$ donde $\operatorname{Gr}_p f(\overline{x}) = \overline{f(x)}$.*

Teorema 1.2.9. *Sean M y M' módulos con filtraciones finitas F_pM y F_pM' respectivamente, y sea $f : M \to M'$ un homomorfismo que preserva estas filtraciones. Si $\operatorname{Gr} f$ es un isomorfismo, entonces f es un isomorfismo.*

Sea C un complejo de cadenas con filtración F_pC acotada. Tenemos entonces una filtración inducida $F_pH(C)$ del módulo graduado $H(C)$ dada por

$$\begin{aligned} F_pH(C) &= \operatorname{im}\{H(F_pC) \to H(C)\} \\ &= \{\overline{x} | x \in Z \cap F_pC\} \\ &= \tfrac{(Z\cap F_pC)+B}{B} \end{aligned}$$

donde Z es el subcomplejo de los ciclos de C y B el subcomplejo de las fronteras. Nótese que en la última igualdad es necesario tomar la suma de los módulos

$Z \cap F_pC$ y B pues este último no necesariamente es un submódulo de $Z \cap F_pC$. Tenemos así entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{Gr}_p H(C) &= F_pH(C)/F_{p-1}H(C) \\
&= \tfrac{Z\cap F_pC+B}{Z\cap F_{p-1}C+B} \\
&= \tfrac{Z\cap F_pC+(Z\cap F_{p-1}C+B)}{Z\cap F_{p-1}C+B} && \text{Pues } F_{p-1}C \subseteq F_pC \\
&= \tfrac{Z\cap F_pC}{(Z\cap F_pC)\cap(Z\cap F_{p-1}C+B)} && \text{Por el 2o Teo. de isomorfismo} \\
&= \tfrac{Z\cap F_pC}{Z\cap F_{p-1}C+B\cap F_pC}
\end{aligned}$$

es decir,

$$\operatorname{Gr}_p H(C) = \frac{Z \cap F_pC}{Z \cap F_{p-1}C + B \cap F_pC}. \tag{1.2.10}$$

Definición 1.2.11. *Una sucesión espectral $\{E^r, d^r\}$ se dice que converge a un módulo graduado H si existe una filtración acotada F de H tal que para cada $p \in \mathbb{Z}$ se tienen isomorfismos $E_p^\infty \cong F_pH/F_{p-1}H$ de módulos graduados, es decir, $\operatorname{Gr} H_n = \bigoplus_{p+q=n} E_{p,q}^\infty$. Denotaremos esto por $E^2 \Rightarrow H$.*

Teorema 1.2.12. *[[Mac63], XI.3.1] Una filtración F de un complejo de cadenas (C, d) induce una sucesión espectral $E = \{E^r, d^r\}_{r\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$E_p^0 \cong F_pC/F_{p-1}C \quad y \quad E_p^1 \cong H(F_pC/F_{p-1}C),$$

es decir,

$$E_{p,q}^0 \cong F_pC_{p+q}/F_{p-1}C_{p+q} \quad y \quad E_{p,q}^1 \cong H_{p+q}(F_pC/F_{p-1}C).$$

Teorema 1.2.13. *Si en el Teorema 1.2.12 la filtración F es acotada, la sucesión inducida converge a $H(C)$, $E^2 \Rightarrow H(C)$, es decir, $E_p^\infty \cong \operatorname{Gr}_p H(C)$.*

Definición 1.2.14 ([Wei94], V.5.2.7)**.** *Una sucesión espectral con término inicial E^a se dice que colapsa en E^r, $r \geq 2$, si en $E_{p,q}^r$ hay exactamente una columna o un renglón distinto de cero. Notemos que en tal caso $E^r = E^{r+1} = \cdots = E^\infty$.*

Teorema 1.2.15. *Sea $\{E^r, d^r\}$ una sucesión espectral que converge a un módulo graduado H, $E \Rightarrow H$. Si la sucesión colapsa en E^s, entonces $H_n \cong E_{p,q}^s$, donde $E_{p,q}^s$ es el único módulo distinto de cero con $p + q = n$.*

Llamaremos bicomplejo ([Bro82], VII.3) a un módulo $\mathbb{Z}$-bigraduado $C = \{C_{p,q}\}$ con dos diferenciales, uno horizontal d' de grado (-1,0) y otro vertical d'' de grado (0,-1) tal que $d'd'' = d''d'$

$$\begin{tikzcd}
C_{p-1,q} \arrow[d, "d''"'] & C_{p,q} \arrow[l, "d'"'] \arrow[d, "d''"'] \\
C_{p-1,q-1} & C_{p,q-1}. \arrow[l, "d'"']
\end{tikzcd}$$

Podemos convertir un bicomplejo C en un complejo de cadenas usual TC al que llamaremos complejo total y que está dado por $(TC)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q}$ con diferencial d de grado -1 dado por $d|_{C_{p,q}} = d' + (-1)^p d''$.

Definimos una filtración de TC a la que llamaremos primera filtración dada por $F_p(TC)_n = \bigoplus_{i \leq p} C_{i,n-i}$. Si el bicomplejo C es tal que para cada grado n sólo un número finito de módulos $C_{p,q}$, $p+q=n$, es distinto de cero, entonces la filtración es finita y se tiene una sucesión espectral inducida $\{E^r\}$ la cual converge a $H_*(TC)$ por el Teorema 1.2.13. En esta sucesión espectral se tiene que

$$E^0_{p,q} = \frac{F_p(TC)_{p+q}}{F_{p-1}(TC)_{p+q}} = C_{p,q}.$$

El diferencial $d^0_p : E^0_p \longrightarrow E^0_p$ está dado por $d^0_p(\overline{x}) = \overline{d'(x) + (-1)^p d''(x)}$ para $x \in C_{p,q}$. En vista del isomorfismo anterior, y puesto que $d'x \in C_{p-1,q}$, podemos considerar al diferencial como $d^0_p = (-1)^p d''$. Por lo tanto, $E^1_{p,q} = H_q(C_{p,*})$, la homología vertical del bicomplejo C. Consideremos $x \in C_{p,q} = E^0_{p,q}$ un ciclo del complejo $C_{p,*}$. Al aplicarle el diferencial total tenemos que $dx = d'x + (-1)^p d''x = d'x$. Por lo tanto, el diferencial $d^1_p : E^1_p \longrightarrow E^1_{p-1}$ está dado por $d^1_p \overline{x} = \overline{dx} = \overline{d'x}$. Así, podemos ver que el término E^2_p de la sucesión espectral es la homología horizontal de la homología vertical del bicomplejo C.

Análogamente, podemos considerar la filtración del bicomplejo C dada por $F_p(TC)_n = \bigoplus_{j \leq p} C_{n-j,j}$, a la cual llamaremos segunda filtración. En este caso también tenemos una sucesión espectral asociada, la cual converge a $H(TC)$ y tal que $E^0_{p,q} = C_{q,p}$, $d^0_p = d'$, $E^1_{p,q} = H_q(C_{*,p})$ y $d^1_p \overline{x} = \overline{(-1)^q d''x}$. Hay que observar que, aunque estas dos filtraciones inducen sucesiones espectrales convergentes al mismo módulo, estas en general no tienen el mismo término $E^\infty_p = \mathrm{Gr}_p\, H(TC)$ ya que las filtraciones no son las mismas.

1.3. Homología de grupos

Sean G un grupo, M un G-módulo y F una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, donde $\mathbb{Z}$ lo consideramos como un G-módulo con acción trivial. Consideremos el complejo de cadenas $F \otimes_G M$ y el complejo de cocadenas (diferencial de grado uno) $\mathrm{Hom}_G(F, M)$. Definimos la homología de G con coeficientes en M como la homología de $F \otimes_G M$,

$$H_*(G, M) = H_*(F \otimes_G M)$$

y la cohomología de G con coeficientes en M como la cohomología del complejo $\mathrm{Hom}_G(F, M)$,

$$H^*(G, M) = H^*(\mathrm{Hom}_G(F, M)).$$

En particular, si M es el grupo cíclico infinito $\mathbb{Z}$ y G actúa de forma trivial sobre él, denotamos simplemente por $H_*(G)$ y $H^*(G)$ a los grupos $H_*(G, \mathbb{Z})$ y $H^*(G, \mathbb{Z})$ respectivamente.

Como las resoluciones proyectivas son únicas salvo homotopía y los funtores $- \otimes_G M$ y $\mathrm{Hom}_G(-, M)$ preservan homotopías, estos grupos de homología y cohomología están bien definidos.

Veamos algunas propiedades de los grupos de homología.

Teorema 1.3.1 ([Bro82], III.6)**.** *Dada una sucesión exacta* $0 \to M \to M' \to M'' \to 0$ *de G-módulos, existe una sucesión exacta larga*

$$\cdots \to H_1(G, M') \to H_1(G, M'') \to H_0(G, M) \to H_0(G, M') \to H_0(G, M'') \to 0.$$

Demostración. Sea F una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Como cada F_i es proyectivo, se tiene que cada sucesión $0 \to F_i \otimes_G M \to F_i \otimes_G M' \to F_i \otimes_G M'' \to 0$ es exacta, por lo cual tenemos definida la sucesión exacta de G-cadenas $0 \to F \otimes_G M \to F \otimes_G M' \to F \otimes_G M'' \to 0$ la cual induce una sucesión exacta larga en homología por el Teorema 1.1.9, la cual es precisamente la sucesión dada. □

Definición 1.3.2. *Dado un G-módulo M definimos el grupo de coinvariantes M_G como $M_G = \mathbb{Z} \otimes_G M$.*

Teorema 1.3.3. *Sea G un grupo y M un G-módulo. Entonces $H_0(G, M) = M_G$.*

Demostración. Consideremos una resolución proyectiva F de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de la forma $\cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$. Puesto que el funtor $- \otimes_G M$ es exacto por la derecha, $F_1 \otimes_G M \xrightarrow{d_1 \otimes 1} F_0 \otimes_G M \xrightarrow{\epsilon \otimes 1} \mathbb{Z} \otimes_G M \to 0$ es exacta, y por lo tanto $\operatorname{im}(d_1 \otimes 1) = \ker(\epsilon \otimes 1)$ y como $\epsilon \otimes 1$ es sobre, $F_o \otimes_G M / \ker(\epsilon \otimes 1) \cong \mathbb{Z} \otimes_G M = M_G$. De $H_0(G, M) = F_0 \otimes_G M / \operatorname{im}(d_1 \otimes 1)$ se tiene el isomorfismo buscado. □

Teorema 1.3.4 ([Wei94] 6.1.11)**.** *Sean G un grupo y M un G-módulo con acción trivial. Entonces existe un ismomorfismo $H_1(G, M) \cong G/[G, G] \otimes M$.*

Una resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, con G un grupo arbitrario, que nos será de utilidad más adelante es la resolución estándar ([Bro82],I.5). Está dada de la siguiente manera. Sea $B_n(G)$ el grupo abeliano libre generado por las $(n + 1)$-adas $(g_0, g_1, ..., g_n)$ con cada $g_i \in G$. Consideremos una acción de G sobre este conjunto dada por $g(g_0, g_1, ..., g_n) = (gg_0, gg_1, ..., gg_n)$ con $g, g_i \in G$ y extendida linealmente a todo $B_n(G)$, entonces $B_n(G)$ es un G-módulo. Sea $d : B_{n+1}(G) \to B_n(G)$ el diferencial de este complejo dado por

$$d(g_0, ..., g_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (g_0, ..., \hat{g}_i, ...g_n)$$

donde el "gorro"denota que ese elemento ha sido omitido. Definimos la aumentación $\epsilon : B_0(G) \to \mathbb{Z}$ como $\epsilon(g) = 1$ para cada $g \in G$. Es claro que tanto el diferencial como la aumentación son homomorfismos de G-módulos. Para ver que cada $B_n(G)$ es un G-módulo libre basta notar que $B_n(G)$ tiene una base sobre $\mathbb{Z}G$ dada por todas las $(n+1)$-adas tales que su primer elemento es un uno. Veamos que $d^2 = 0$ y denotemos por $(\hat{g}_i)$ la $(n + 1)$-ada donde se han omitido g_i y por $(\hat{g}_i, \hat{g}_j)$ la $(n + 1)$-ada donde se ha omitido g_i y g_j (en ese orden):

$$\begin{aligned} d^2(g_0, ..., g_n) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d(\hat{g}_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [\sum_{j<i} (-1)^j (\hat{g}_j, \hat{g}_i) + \sum_{i<j} (-1)^{j-1} (\hat{g}_i, \hat{g}_j)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Tenemos entonces un complejo de cadenas, sólo falta ver que es acíclico. Para ver esto, podemos verificar que el complejo que construimos es contraíble, o equivalentemente, que la identidad en $B_*(G)$ es homotópica al homomorfismo de cadenas cero, $id_{B_*(G)} \simeq 0$, incluso sólo como $\mathbb{Z}$-módulos (pues la aciclicidad no depende de la estructura de G-módulo). Sea entonces $h : B_n(G) \to B_{n+1}(G)$

el homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos dado por $h(g_0, ..., g_n) = h(g_i) = (1, g_0, ..., g_n) = (1, g_i)$ para $n \geq 0$ y $h(1) = (1)$ para $n = -1$ y veamos que es la homotopía buscada. Si $n > 0$

$$\begin{aligned}(dh + hd)(g_i) &= dh(g_i) + hd(g_i)\\ &= d(1, g_i) + h \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\hat{g}_i)\\ &= (g_i) + \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} (1, \hat{g}_i) + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (1, \hat{g}_i)\\ &= (g_i)\end{aligned}$$

Si $n = 0$

$$\begin{aligned}(dh + h\epsilon)(g_0) &= dh(g_0) + h\epsilon(g_0)\\ &= d(1, g_0) + h(1)\\ &= (g_0) - (1) + (1)\\ &= (g_0)\end{aligned}$$

lo cual muestra que h es una homotopía entre id_F y 0.

Notemos que los elementos de la base de $B_n(G)$ pueden ser escritos como

$$\begin{aligned}(g_0, ..., g_n) &= g_0(1, g_0^{-1}g_1, ..., g_0^{-1}g_n)\\ &= g_0(1, g_0^{-1}g_1, g_0^{-1}g_1g_1^{-1}g_2, ..., g_0^{-1}g_1g_1^{-1} \cdots g_{n-1}^{-1}g_n)\\ &= g_0(1, g'_1, g'_1g'_2, ..., g'_1g'_2 \cdots g'_n)\end{aligned}$$

donde $g'_i = g_{i-1}^{-1}g_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Vemos entonces que $B_n(G)$ tiene una base de la forma $(1, g_1, g_1g_2, ..., g_1 \cdots g_n)$ la cual denotaremos por $[g_1|g_2| \cdots |g_n]$. Se tiene entonces, con esta notación barra, que $d = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i$ donde cada d_i está dado por

$$d_i[g_1|g_2| \cdots |g_n] = \begin{cases} g_1[g_2| \cdots |g_n] & si \quad i = 0\\ [g_1| \cdots |g_{i-1}|g_ig_{i+1}|g_{i+2}| \cdots |g_n] & si \quad 0 < i < n\\ [g_1|g_2| \cdots |g_{n-1}] & si \quad i = n.\end{cases}$$

Podemos normalizar esta resolución tomando el cociente $\overline{B_*(G)} = B_*(G)/D_*$ donde D_* es el subcomplejo de $B_*(G)$ dado por los elementos $(g_0, g_1, ..., g_n)$ tales que $g_i = g_{i+1}$ para algún i, o en la notación barra, D_* es el subcomplejo generado por los elementos $[g_1| \cdots |g_n]$ tales que $g_i = 1$ para algún i. Es claro que $hD_* \subseteq D_*$, donde h es la homotopía de contracción de $B_*(G)$, la cual induce entonces una homotopía de contracción en $\overline{B_*(G)}$, y por lo tanto $\overline{B_*(G)}$ también es resolución libre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

Sea M un G-módulo. Consideremos el complejo $C_*(G)$ dado por

$$C_*(G) = B_*(G) \otimes_G \mathbb{Z} \tag{1.3.5}$$

al que llamaremos complejo barra de G. En particular $C_n(G)$ es isomorfo al grupo abeliano libre generado por $\{[g_1| \cdots |g_n] | g_i \in G\}$. En general, el complejo $= B_*(G) \otimes_G A$ está generado por elementos de la forma $a \otimes [g_1|, \cdots |g_n]$ y el operador frontera $d : C_n(G, M) \to C_{n-1}(G, M)$ está dado por

$$d(a \otimes [g_1| \cdots |g_n]) = ag_1 \otimes [g_2| \cdots |g_n] +$$

$$\sum_{i=2}^{n-1} (-1)^i a \otimes [g_1| \cdots |g_{i-1}g_i| \cdots |g_n] + (-1)^n a \otimes [g_1| \cdots |g_{n-1}].$$

Análogamente, un elemento en $\mathrm{Hom}_G(B_*(G), M)$ se puede considerar como una función de n variables $f : G^n \to M$ pues a cada elemento $[g_1|\cdots|g_n]$ le podemos asociar $(g_1, ..., g_n) \in G^n$. El operador cofrontera $\delta : C^{n-1}(G, M) \to C^n(G, M)$ es de la forma

$$\delta f(g_1, ..., g_n) = g_1 f(g_2, ..., g_n)$$

$$+ \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^i f(g_1, ..., g_{i-1}g_i, ...g_n) + (-1)^n f(g_1, ..., g_{n-1}).$$

Podemos usar la resolución barra normalizada y en tal caso obtenemos el complejo $C^*_N(G, M) \subseteq C^*(G, M)$, donde $f(g_1, ..., g_n) = 0$ si $g_i = 1$ para algún i.

Para concluir esta sección recodaremos una sucesión espectral que relaciona la homología de los grupos en una sucesión exacta corta de grupos.

Teorema 1.3.6 (Hochschild-Serre)**.** *Para cualquier extensión de grupos* $1 \to H \to G \to Q \to 1$ *y cualquier* G*-módulo* M*, hay una sucesión espectral de la forma*

$$E^2_{p,q} = H_p(Q, H_q(H, M)) \Rightarrow H_{p+q}(G, M).$$

1.4. Homología de cadenas invariantes

En esta sección definiremos la homología de cadenas invariantes definida por Kevin P. Knudson en [Knu06].

Consideremos un grupo finito Q actuando por automorfismos sobre un grupo G. Sea A un grupo abeliano con acciones triviales de G y Q y consideremos el complejo $C_*(G, A)$ definido como $C_*(G) \otimes A$ donde $C_*(G)$ es el complejo barra definido en 1.3.5 . Entonces hay una acción inducida de Q sobre $C_*(G, A)$ dada por

$$q([g_1|\cdots|g_n] \otimes a) = [qg_1|\cdots|qg_n] \otimes a.$$

Definimos entonces los grupos de homología y cohomología de cadenas invariantes como

$$H^Q_*(G, A) = H_*(C(G, A)^Q) \tag{1.4.1}$$

$$H^*_Q(G, A) = H^*(\mathrm{Hom}(C(G)^Q, A)). \tag{1.4.2}$$

Lema 1.4.3. *Sea* A *un* G*-módulo con acción trivial. Entonces* $C_*(G) \otimes A \cong B_*(G) \otimes_G A$ *y* $\mathrm{Hom}(C_*(G), A) \cong \mathrm{Hom}_G(B_*(G), A)$.

Demostración. $C_*(G) \otimes A = (B_*(G) \otimes_G \mathbb{Z}) \otimes A$. Como la acción de G sobre A es trivial, $\mathbb{Z} \otimes A \cong A$ como G-módulos y usando la asociatividad del producto tensorial se tiene el primer isomorfismo. Análogamente $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, A) \cong A$ como G-módulos, y usando la adjunción del funtor Hom y $\bigotimes$ se sigue el segundo isomorfismo. □

Mediante este lema podemos ver que si la acción de Q sobre el grupo G es trivial, entonces los grupos de homología y cohomología de invariantes son los grupos de homología y cohomología usuales.

Cabe notar que estos grupos de homología tienen una interpretación topológica de la siguiente manera ([Knu06], §2). Sea EG la realización geométrica del conjunto simplicial generado por G ([May99]§16.4), es decir, cada elemento de G es un vértice de EG y cada $(n+1)$-ada $(g_0,...,g_n)$ de elementos de G es un n-simplejo de EG. Los operadores cara están dados por

$$d_i(g_0,...,g_n) = (g_0,...,\hat{g}_i,...,g_n)$$

donde $\hat{g}_i$ denota que el elemento g_i ha sido removido. Los operadores degeneración están definidos por

$$s_i(g_0,...,g_n) = (g_0,...,g_i,g_i,...,g_n).$$

G actúa libremente sobre EG por la fórmula $g \cdot (g_0,...,g_n) = (gg_0,...,gg_n)$. El cociente de EG por esta acción es el espacio clasificante BG de G. La acción de Q sobre G induce una acción celular de Q sobre BG con la propiedad de que si un elemento de Q fija un simplejo, entonces lo fija puntualmente. Esto da estructura a BG de Q-CW-complejo y el cociente BG/Q también es un CW-complejo. Es fácil ver que los grupos $C_n(BG/Q)$ son los grupos de Q-coinvariantes $C_n(G)_Q$. Consideremos el mapeo norma $N : C_n(G) \longrightarrow C_n(G)^Q$ el cual induce un mapeo $\bar{N} : C_n(G)_Q \longrightarrow C_n(G)^Q$ donde $N(x) = \sum_{q\in Q} qx$ para todo $x \in C_n(G)$. El orden de Q anula tanto al kernel como al cokernel y puesto que $C_n(G)_Q = C_n(BG/Q)$ es un grupo abeliano libre, $\ker N$ es el grupo trivial. Sea D_* el complejo $\operatorname{coker} N$.

Teorema 1.4.4. *([Knu06] Proposición 2.1) Sea $Q = \mathbb{Z}_p$ con p un primo. Entonces para $n \geq 0$, $D_n = C_n(G^Q, \mathbb{Z}_p)$. Por lo tanto hay un isomorfismo*

$$H_n(D_*) \cong H_n(G^Q; \mathbb{Z}_p).$$

Así hay una sucesión exacta larga en homología

$$\cdots \to H_n(BG/Q,\mathbb{Z}) \to H_n^Q(G,\mathbb{Z}) \to H_n(G^Q,\mathbb{Z}_p) \to H_{n-1}(BG/Q,\mathbb{Z}) \to \cdots .$$

De aquí se sigue el siguiente corolario.

Corolario 1.4.5. *([Knu06] Corolario 2.3) Si $Q = \mathbb{Z}_p$ y $G^Q = \{e\}$, entonces existe un isomorfismo*

$$H_n(BG/Q,\mathbb{Z}) \cong H_n^Q(G,\mathbb{Z}).$$

Este corolario nos da, en este caso en particular, una interpretación topológica para la homología de invariantes. Otro caso con interpretación semejante es el siguiente.

Teorema 1.4.6. *([Knu06] Proposición 2.4) Si $|Q|$ es invertible en A, entonces el mapeo*

$$H_*(BG/Q, A) \longrightarrow H_*(G, A)$$

es un isomorfismo.

En general hacer cálculos de grupos de homología $H_*^Q(G, A)$ a partir de la definición no es algo simple, pero en algunos casos tenemos otras alternativas, por ejemplo, mediante el siguiente teorema.

Teorema 1.4.7. *([Knu06] Proposición 3.3) Sea G un grupo y sea A un grupo abeliano con acciones de G y Q triviales. Si $|Q|$ es invertible en A, entonces el mapeo natural*

$$i_* : H_*^Q(G, A) \longrightarrow H_*(G, A)^Q$$

es un isomorfismo.

Otra herramienta para hacer cálculos y que es análoga a la teoría usual de homología de grupos es el transfer ([Knu06] §4). Si $K < G$ es Q invariante, es decir, $qK \subseteq K$ para todo $q \in Q$ tal que existe un conjunto de representantes de clases laterales derechas tales que $q(\bar{g}) = \overline{qg}$, entonces existe el mapeo transfer

$$tr : H_*^Q(G, A) \longrightarrow H_*^Q(K, A).$$

Si $j_* : H_*^Q(H, A) \longrightarrow H_*^Q(G, A)$ es el homomorfismo inducido por la inclusión, entonces se cumple la propiedad usual $j_* \circ tr = [G : H]id$.

En [JLM18] se define una sucesión espectral que permite simplificar algunos cálculos. Para esto, consideremos la acción de Q sobre G^n dada de manera diagonal:

$$Q \times (G \times \cdots \times G) \longrightarrow G \times \cdots \times G \tag{1.4.8}$$
$$(q, (g_1, ..., g_p)) \mapsto (qg_1, ..., qg_p). \tag{1.4.9}$$

Denotemos por Σ_p un conjunto de representantes de las órbitas de esta acción.

Lema 1.4.10. *([JLM18] Lema 5) Hay una sucesión espectral de la forma*

$${}^{II}E^1_{p,q} = \bigoplus_{z \in \Sigma_p} H_q(Q_z, A) \Rightarrow H_{p+q}(Q, C(G) \otimes A)$$

donde Q_z son los grupos de isotropía de la acción de Q sobre G^p.

Teorema 1.4.11. *([JLM18] Teorema 5) Sea Q un grupo cíclico finito. Supongamos que $|Q|$ es invertible en A y que la acción de Q en G es semi-libre, es decir, dado $g \in G$, $Q_g = \{e\}$ o $Q_g = Q$. Entonces hay un isomorfismo $H_*^Q(G, A) \cong H_*(Q, C(G) \otimes A)$.*

1.5. (Co)Homología de representaciones por permutaciones

En esta sección daremos definiciones y algunas propiedades de la homología de representaciones por permutaciones definida en [Sna64].

Sea G un grupo y X un G-conjunto (izquierdo). Diremos que el par (G, X) es una representación por permutaciones. Sea $B_n(X)$ el grupo abeliano libre generado por las $(n+1)$-adas $\{(x_0, \cdots, x_n) | x_i \in X\}$, $d_i : B_n(X) \longrightarrow B_{n-1}(X)$ el homomorfismo dado por

$$d_i(x_0, \cdots, x_n) = (x_0, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_n)$$

y $\partial_n : B_n(X) \longrightarrow B_{n-1}(X)$ dado por

$$\partial_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i.$$

Consideremos la aumentación $\epsilon : B_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por $\epsilon(x) = 1$ para todo $x \in X$ donde $\mathbb{Z}$ es considerado un G-módulo con acción trivial. La acción de G en X induce una acción (izquierda) en $B_n(X)$ dada por $g(x_1, \cdots, x_n) = (gx_1, \cdots, gx_n)$, además es claro que los homomorfismos d_i y ϵ son G-equivariantes. Se cumple también que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, $n \geq 0$ y $\epsilon \circ \partial_1 = 0$, por lo tanto $B_*(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}$ es un G-complejo llamado el *complejo estándar de la representación por permutaciones* (G, X).

Teorema 1.5.1. *([AC17], Proposición 3.2) El complejo aumentado $B_*(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}$ es acíclico.*$\square$

Más aún, es posible probar que dado $x \in X$, $B_*(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}$ es contraíble mediante una G_x-homotopía, donde G_x denota el grupo de isotropía de x ([Sna64] Proposición 1.1).

Sea A un G módulo (izquierdo). Denotaremos por $C_*(X, A)$ y $C^*(X, A)$ los complejos dados por

$$C_*(X, A) = B_*(X) \otimes_G A$$

$$C^*(X, A) = \mathrm{Hom}_G(B_*(X), A).$$

En la definición de $C_*(X, A)$ consideramos a $B_*(X)$ como G-módulo derecho con la acción dada por $xg = g^{-1}x$ para todo $x \in B_*(X)$ y $g \in G$.

Definición 1.5.2. *Se definen los grupos de homología y cohomología de la representación (G, X) con coeficientes en A ([Sna64, §2]) como:*

$$H_n(G, X; A) = H_n(C_*(X, A))$$

$$H^n(G, X; A) = H^n(C^*(X, A)).$$

Observemos que si la acción de G en X es libre, entonces estos grupos de homología y cohomología coinciden con los grupos usuales de homología y cohomología de grupos (Sección 1.3). De la observación hecha después del Teorema 1.5.1 se sigue el siguiente teorema.

Teorema 1.5.3. *Sea (G, X) una representación por permutaciones donde la acción tiene un punto fijo global. Entonces, para cualquier G-módulo A tenemos que $H^n(G, X; A) = 0$ para todo $n > 0$.*

Definición 1.5.4. *([Sna64] Definición 1) Un morfismo $\theta : (G, X) \longrightarrow (L, Y)$ de la representación por permutaciones (G, X) en (L, Y) es una pareja (φ, f) donde $\phi : G \longrightarrow L$ es un homomorfismo de grupos, $f : X \longrightarrow Y$ es una función y cumplen $f(gx) = \varphi(g)f(x)$ para todo $g \in G$ y $x \in X$. Denotaremos por N al kernel de φ.*

Teorema 1.5.5. *([Sna64] Proposición 3.1) Si φ es epimorfismo y f es biyección, entonces $H^n(G, X; A) \cong H^n(L, Y; A^N)$.*

En esta teoría de homología hay una sucesión espectral que relaciona $H^n(G, A)$ y $H^n(G, X; A)$ ([Sna64] §2). Para esto consideramos el complejo $C = B_*(X)$ y el funtor $F = \mathrm{Hom}_G(-, A)$. En estos casos hay dos sucesiones espectrales que convergen a los funtores hiperderivados derechos de F, $\mathbb{R}^{p+q}F(C)$ (ver [Wei94] §5.7). La primera cumple

$${}^{I}E_2^{p,q} = H^p(R^qF(C))$$

y la segunda

$$^{II}E_2^{p,q} = (R^pF)H_q(C).$$

Puesto que $H^q(C) = 0$ para $q > 0$, se tiene que $^{II}E_2^{p,q} = 0$ para $q > 0$ y entonces, ambas sucesiones espectrales convergen a

$$^{II}E_2^{p,q} = R^pF(H_0(C)) = \mathrm{Ext}^p_G(\mathbb{Z}, A) = H^p(G, A).$$

De esto se sigue el siguiente teorema.

Teorema 1.5.6. *([Sna64] Teorema 12.1) Sea (G, X) una representación por permutaciones. Para cada G-módulo A tenemos una sucesión espectral que cumple lo siguiente:*

1. $E_2^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}(G, A)$.
2. *El término inicial $E_2^{p,q}$ es el p-ésimo grupo de cohomología del complejo $\mathrm{Ext}^q_G(C, A)$.*
3. $E_2^{p,0} = H^p(G, X; A)$ *para* $p \geq 0$.

Si ahora consideramos el funtor $F = - \otimes_G A$ y $C = B_*(X)$, entonces la primera sucesión espectral toma la forma

$$^{I}E^2_{p,q} = H_p(L_qF(C))$$

y la segunda

$$^{II}E^2_{p,q} = (L_pF)H_q(C).$$

Análogamente al caso anterior

$$^{II}E^2_{p,q} = L_pF(H_0(C)) = \mathrm{Tor}^G_p(\mathbb{Z}, A) = H_p(G, A)$$

y de esto se sigue el teorema.

Teorema 1.5.7. *Sea (G, X) una representación por permutaciones. Para cada G-módulo A tenemos una sucesión espectral que cumple lo siguiente:*

1. $E^2_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}(G, A)$.
2. *El término inicial $E^2_{p,q}$ es el p-ésimo grupo de cohomología del complejo $\mathrm{Tor}^G_q(C, A)$.*
3. $E^2_{p,0} = H_p(G, X; A)$ *para* $p \geq 0$.

1.5.1. Representaciones de Frobenius

En esta sección daremos la definición y las propiedades de las representaciones de Frobenius dadas en [Sna65] pero en su versión homológica. Aunque las demostraciones son análogas se dan aquí por completitud.

Definición 1.5.8. *(Ver [Sna65], §2.8) Sea (G, X) una representación por permutaciones transitiva y tal que si $g \in G$ fija a dos elementos de X entonces $g = 1$. A tal representación le llamamos representación de Frobenius.*

Notemos que la última condición en la definición anterior es equivalente a que para cualesquiera dos elementos $x, y \in X$, $G_x \cap G_y = \{e\}$.

Para toda esta sección consideraremos a (G, X) una representación de Frobenius, x_0 un elemento fijo en X y consideremos el grupo de isotropía $H = G_{x_0}$. Entonces X tiene $[G : H]$ elementos. Además tenemos que $(H, X - \{x_0\})$ es una representación por permutaciones libre, ya que si un elemento de H fija a alguno de $X - \{x_0\}$ tiene que ser la identidad pues (G, X) es de Frobenius. Si w es el número de órbitas de esta representación por permutaciones, entonces

$$w|H| = [G : H] - 1. \tag{1.5.9}$$

Consideremos la representación por permutaciones (G, X^{p+1}) y sean $T_1, \ldots, T_n$ las órbitas con e_1, e_2,..., e_n representantes de cada órbita respectivamente. El subconjunto de X^{p+1} dado por todos los elementos de la forma $(x, x, ..., x)$ se llama la diagonal de X^{p+1} y se denota por Δ_{p+1}. Es claro que Δ_{p+1} es una órbita de (G, X^{p+1}) y escogeremos e_1 como $e_1 = (x_0, ..., x_0) \in \Delta_{p+1}$.

Lema 1.5.10. *En una representación por permutaciones (G, X) transitiva con $x \in X$ se tiene que $\operatorname{Tor}_q^G(\mathbb{Z}[X], A) = H_q(G_x, A)$.*

Demostración. Por el Teorema 7.3 en §3 de [Bro82] es suficiente demostrar que $\operatorname{Tor}_0^G(\mathbb{Z}[X], A) = H_0(G_x, A)$, es decir, que $\mathbb{Z}[X] \otimes_G A \cong \mathbb{Z} \otimes_{G_x} A$. Para esto vemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}[X] \otimes_G A &= \mathbb{Z}[G/G_x] \otimes_G A \\
&= (\mathbb{Z}[G/G_x] \otimes A)_G && \text{Con } G \text{ actuando diagonalmente} \\
&= \mathbb{Z} \otimes_G (\mathbb{Z}[G/G_x] \otimes A) \\
&\cong \mathbb{Z} \otimes_G (\mathbb{Z}G \otimes_{G_x} Res_{G_x}^G A) && \text{Por §3 Proposición 5.6 [Bro82]} \\
&\cong \mathbb{Z} \otimes_{G_x} Res_{G_x}^G A.
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.5.11. *(Análogo a Prop. 10.1 en [Sna65]) Se cumple que $G_{e_1} = H$ y $G_{e_i} = \{e\}$ para $i = 2, ..., n$. Por lo tanto $\operatorname{Tor}_q^G(C_p, A) = \operatorname{Tor}_q^G(\mathbb{Z}[\Delta_{p+1}], A) = H_q(H, A)$ para $q \geq 1$, $p \geq 0$.*

Demostración. Tenemos que $G_{e_u} = \bigcap_{i=1}^p G_{x_i}$ con $e_u = (x_1, ..., x_p)$, pero como la representación es de Frobenius, se tiene que $G_{e_u} = \{e\}$ para $u \neq 1$. Por el lema anterior tenemos que $\operatorname{Tor}_q^G(\mathbb{Z}[T_i], A) = H_q(G_{e_i}, A)$ y estos grupos son triviales si $q \geq 1$ y $e_u \neq e_1$. De esto y considerando que $\operatorname{Tor}_q^G(C_p, A) = \operatorname{Tor}_q^G(\oplus_{i=1}^n \mathbb{Z}[T_i], A)$ y el funtor Tor conmuta con sumas directas, se sigue el resultado. □

De este teorema y el Teorema 1.5.7 tenemos que el término $E_{p,q}^2$ de la sucesión espectral para $q \geq 1$ es la p-ésima cohomología del complejo

$$\cdots \xrightarrow{\partial_2^*} \operatorname{Tor}_q^G(\mathbb{Z}[\Delta_2], A) \xrightarrow{\partial_1^*} \operatorname{Tor}_q^G(\mathbb{Z}[\Delta_1], A) \longrightarrow 0$$

donde $\partial_i^* = \operatorname{Tor}_q^G(\partial_i', 1_A)$ y ∂_i' es la restricción de ∂_i a $\mathbb{Z}[\Delta_{i+1}]$.

Teorema 1.5.12. *El homomorfismo ∂_i^* es el homomorfismo cero si i es impar y es isomorfismo si i es par.*

Demostración. De la observación anterior basta ver a ∂'_i. Sea $(x, ..., x) \in \mathbb{Z}[\Delta_{i+1}]$. Si i es impar hay una cantidad par de coordenadas y luego, por la definición de ∂_i, $\partial'_i = 0$. Si i es par, entonces hay una cantidad impar de coordenadas y se sigue que ∂'_i es isomorfismo. □

Teorema 1.5.13. *(Análogo a Teorema 10.1 en [Sna65]) Sea (G, X) una representación de Frobenius. La sucesión espectral del Teorema 1.5.7 que relaciona $H_*(G, A)$ y $H_*(X, G; A)$ cumple:*

1. $E^2_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}(G, A)$.
2. *El término inicial* $E^2_{p,q} = 0$ *si p y q son mayores a cero.*
3. $E^2_{p,0} = H_p(G, X; A)$ *para* $p \geq 0$.
4. $E^2_{0,q} = H_q(H, A)$.

Capítulo 2

Homología de invariantes de Q-representaciones por permutaciones

En este capítulo introduciremos el concepto de Q-representación por permutaciones y la homología y cohomología de estas, generalizando así la homología y cohomología de representaciones por permutaciones definida en [Sna64].

Durante todo este capítulo G denotará un grupo arbitrario y Q un grupo finito actuando por automorfismos sobre G.

2.1. Homología y cohomología de invariantes de Q-representaciones

Sea (G, X) una representación por permutaciones y $B_*(X)$ el complejo estándar de la representación por permutaciones (G, X) (Sección 1.5).

Definición 2.1.1. *Diremos que un G-conjunto izquierdo X es Q-G-conjunto si Q actúa sobre X por la izquierda y $q \cdot (gx) = (qg)(qx)$ para todo $q \in Q$, $g \in G$ y $x \in X$, y diremos que (G, X) es una Q-representación por permutaciones si Q actúa en G por automorfismos y X es un Q-G-conjunto.*

Definición 2.1.2. *Sea A un grupo abeliano tal que es Q-módulo y G-módulo izquierdo simultáneamente. Diremos que A es un Q-G-módulo si $q \cdot (ga) = q(g) \cdot (qa)$ para todo $q \in Q$, $g \in G$ y $a \in A$. Diremos que un homomorfismo de grupos abelianos $f : A \longrightarrow B$ es homomorfismo de Q-G-módulos si A y B son Q-G-módulos y f es simultáneamente Q y G lineal.*

Observemos que dado un G-módulo derecho M, podemos definir un G-módulo izquierdo M' (y viceversa) donde $M' = M$ como grupos abelianos y la acción izquierda se define como $gm = mg^{-1}$ para todo $g \in G$ y $m \in M'$. De esta manera, dado un Q-G-bimódulo M con acción trivial de Q sobre G, podemos obtener un Q-G-módulo al transponer la acción de G . Así, un Q-G-bimódulo es un caso particular de Q-G-módulo.

Lema 2.1.3. *Sea (G, X) una Q-representación por permutaciones. Entonces, $B_n(X)$ es un Q-G-módulo para todo $n \geq 0$.*

Demostración. Como Q y G actúan sobre X, tenemos una acción inducida sobre $B_n(X)$. Sean $q \in Q$, $g \in G$ y $x = (x_0, \cdots, x_n) \in X^n$ un generador de $B_n(X)$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
q(gx) &= q(g(x_0, \cdots, x_n)) \\
&= q(gx_0, \cdots, gx_n) && \text{por definición de la acción de } G \\
&= (q(gx_0), \cdots, q(gx_n)) && \text{por definición de la acción de } Q \\
&= ((qg)(qx_0), \cdots, (qg)(qx_n)) && \text{pues X es } Q\text{-}G\text{-conjunto} \\
&= qg(qx_0, \cdots, qx_n) \\
&= (qg)(qx).
\end{aligned}$$

□

Consideremos ahora a $\mathbb{Z}$ con acciones triviales de Q y G y a $B_n(X)$ un G-módulo derecho con la acción obtenida al transponer la acción izquierda como se menciona arriba y la acción de un elemento $q \in Q$ sobre un elemento $xg \in B_n(x)$ dada por $q(xg) = q(g^{-1})qx$. Como $B_n(X)$ es Q-módulo, hay una acción diagonal de Q sobre $B_n(X) \otimes \mathbb{Z}$. Sea M el subgrupo de $B_n(X) \otimes \mathbb{Z}$ generado por $\{xg \otimes m - x \otimes gm | x \in B_n(X),\, g \in G,\, m \in \mathbb{Z}\}$. Por ser $B_n(X)$ un Q-G-módulo, M es un submódulo Q-invariante de $B_n(X) \otimes \mathbb{Z}$ y entonces tenemos una acción inducida de Q sobre $(B_n(x) \otimes \mathbb{Z})/M = B_n(X) \otimes_G \mathbb{Z}$.

Sea A un grupo abeliano con acciones de G y Q triviales. En tal caso definimos

$$C_n(X, A) = (B_n(X) \otimes_G \mathbb{Z}) \otimes A$$

$$C^n(X, A) = \mathrm{Hom}(B_n(X) \otimes_G \mathbb{Z}, A).$$

Denotamos por $C_*^Q(X, A)$ y $C_Q^*(X, A)$ los complejos dados por

$$C_*^Q(X, A) = [(B_*(X) \otimes_G \mathbb{Z}) \otimes A]^Q$$

$$C_Q^*(X, A) = \mathrm{Hom}((B_*(X) \otimes_G \mathbb{Z})^Q, A).$$

Nótese que estos complejos están bien definidos pues sus diferenciales están inducidos por $\partial_n : B_n(X) \longrightarrow B_{n-1}(X)$ que es Q-equivariante.

Definimos los grupos de *homología y cohomología de los invariantes de la Q-representación por permutaciones* como:

$$H_n^Q(G, X; A) = H_n(C_*^Q(X, A))$$

$$H_Q^n(G, X; A) = H^n(C_Q^*(X, A)).$$

Observación 2.1.4. *Si X=G obtenemos los grupos de homología definidos por Kevin P. Knudson en [Knu06], es decir:*

$$H_n^Q(G, G; A) = H_n^Q(G; A)$$

$$H_Q^n(G, G; A) = H_Q^n(G; A)$$

El siguiente Teorema generaliza la Proposición 3.3 de [Knu06], la cual permite calcular la homología de invariantes en términos de la homología usual bajo ciertas hipótesis.

Teorema 2.1.5. *Sea (G, X) una Q-representación y A un grupo abeliano con acciones de Q y G triviales. Entonces existe una acción de Q en $H_n(G, X; A)$ y un homomorfismo*

$$H_n^Q(G, X; A) \longrightarrow H_n(G, X; A)^Q$$

para todo $n \geq 0$ el cual es un isomorfismo si $|Q|$ es invertible en A.

Demostración. Los diferenciales ∂_n del complejo de cadenas $B_*(X) \otimes_G A$ son Q-equivariantes, luego los subgrupos de ciclos y fronteras son Q-submódulos. Por lo tanto hay una acción de Q sobre $H_n(B_n(X) \otimes_G A) = H_n(G, X; A)$. Como $(B_*(X) \otimes_G A)^Q$ es un subcomplejo de $B_*(X) \otimes_G A$, tenemos el homomorfismo inducido por la inclusión

$$H_n((B_*(X) \otimes_G A)^Q) = H_n^Q(G, X; A) \longrightarrow H_n(G, X; A) = H_n(B_*(X) \otimes_G A).$$

Como la acción de Q en $H_n^Q(G, X; A)$ es trivial, al tomar puntos fijos obtenemos el homomorfismo

$$i^* : H_n^Q(G, X; A) \longrightarrow H_n(G, X; A)^Q.$$

Consideremos ahora que $|Q|$ es invertible en A, es decir, la multiplicación por $|Q|$ en A es un isomorfismo; esto implica que $|Q|$ también es invertible en $B_n(X) \otimes_G A$. Sea $z \in (B_*(X) \otimes_G A)^Q)$ un ciclo tal que $i^*([z]) = 0$. Existe entonces $\tau \in B_{n+1}(X) \otimes_G A$ tal que $\partial\tau = i(z) = z$. Sea $w = \sum_{q\in Q} q\tau$, luego w es punto fijo. Sea $w' \in (B_{n+1}(X) \otimes_G A)^Q$ tal que $|Q|w' = w$. Entonces $\partial w' = z$ pues $|Q|\partial w' = |Q|z$. Por lo tanto $[z] = 0$ pues z es una frontera. Hemos visto así que i^* es inyectiva. Veamos que es sobreyectiva. Sea z un ciclo en $B_n(X) \otimes_G A$ tal que $[z] \in H_n(G, X; A)^Q$. Sean $w = \sum_{q\in Q} qz$ y $w' \in B_n(X) \otimes_G A$ tal que $|Q|w' = w$. Es claro que w es un ciclo y $w \in (B_n(X) \otimes_G A)^Q$. Entonces $w' \in (B_n(X) \otimes_G A)^Q$ y $i^*([w']) = [z]$. Esto demuestra que i^* es sobreyectiva y entonces un isomorfismo.

□

2.2. Morfismos en Q-representaciones

Definición 2.2.1. *Un morfismo $\theta : (G, X) \longrightarrow (L, Y)$ entre Q-representaciones por permutaciones es un par (φ, f) tales que*

(I) *$\varphi : G \longrightarrow L$ es homomorfismo de grupos Q-invariante,*

(II) *$f : X \longrightarrow Y$ es una función Q-equivariante y*

(III) *$f(gx) = \varphi(g)f(x)$ para todo $g \in G$, $x \in X$.*

Teorema 2.2.2. *Un morfismo $\theta : (G, X) \longrightarrow (L, Y)$ induce homomorfismos de grupos $H_*^Q(G, X; A) \longrightarrow H_*^Q(L, Y; A)$ y $H^*_Q(L, Y; A) \longrightarrow H^*_Q(G, X; A)$.*

Demostración. Observemos que la función

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[X^r]\times\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}[Y^r]\otimes_L\mathbb{Z} \\ ((x_1,\ldots,x_r),n) & \mapsto & (f(x_1),\ldots,f(x_r))\otimes n \end{array}$$

es una función balanceada y entonces induce un homomorfismo de grupos

$$\begin{array}{rcl} \psi_r:\mathbb{Z}[X^r]\otimes_G\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}[Y^r]\otimes_L\mathbb{Z} \\ (x_1\ldots x_r)\otimes n & \mapsto & (f(x_1)\ldots,f(x_r))\otimes n \end{array} \tag{2.2.3}$$

para todo $r\geq 1$, $x_i\in X$, $n\in\mathbb{Z}$. Más aún, ψ_r conmuta con los diferenciales y por lo tanto tenemos definido un morfismo de cadenas

$$\psi: B_*(X)\otimes_G\mathbb{Z}\longrightarrow B_*(Y)\otimes_L\mathbb{Z}.$$

Como la acción de Q sobre $B_*(X)\otimes_G\mathbb{Z}$ es diagonal y la función f es Q-equivariante, se sigue que las funciones ψ_r son Q-equivariantes y por lo tanto lo es ψ. Al aplicar los funtores $(-\otimes A)^Q$ y $\mathrm{Hom}((-)^Q,A)$ a ψ obtenemos mapeos de cadenas

$$\begin{array}{c} [(B_*(X)\otimes_G\mathbb{Z})\otimes A]^Q\longrightarrow[(B_*(Y)\otimes_L\mathbb{Z})\otimes A]^Q \\ \mathrm{Hom}((B_*(Y)\otimes_L\mathbb{Z})^Q,A)\longrightarrow\mathrm{Hom}((B_*(X)\otimes_G\mathbb{Z})^Q,A) \end{array} \tag{2.2.4}$$

respectivamente. Estos inducen los homomorfismos buscados. □

Teorema 2.2.5. *Si φ es epimorfismo y f es biyección, entonces $H_*^Q(G,X;A)\cong H_*^Q(L,Y;A)$ y $H^*_Q(G,X;A)\cong H^*_Q(L,Y;A)$.*

Para demostrar esto haremos uso del siguiente lema.

Lema 2.2.6. *Sea M un G-módulo y $\mathbb{Z}$ un G-módulo con acción trivial. Se tiene que $m\otimes 1=0\in M\otimes_G\mathbb{Z}$ si y sólo si m está en el submódulo N generado por $\{gm-m|m\in M,g\in G\}$.*

Demostración. Si $m\in N$ es claro que $m\otimes 1=0$ pues la acción de G es trivial sobre $\mathbb{Z}$. Por otra parte, existe un isomorfismo $M\otimes_G\mathbb{Z}\longrightarrow M/N$ tal que $m\otimes a\mapsto a\overline{m}$. Por lo tanto, si $m\otimes 1=0$, bajo este isomorfismo $\overline{m}=0$ y entonces $m\in N$. □

Demostración. (Teorema 2.2.5) Es claro que los homomorfismos ψ_r de (2.2.3) son sobreyectivos pues f lo es. Denotemos por $f_r:\mathbb{Z}[X^r]\longrightarrow\mathbb{Z}[Y^r]$ al homomorfismo de grupos abelianos libres inducido por f (en realidad isomorfismo pues f es biyección). Tomemos un elemento en $\mathbb{Z}[X^r]\otimes_G\mathbb{Z}$ mapeado a cero bajo ψ_r y, sin pérdida de generalidad, supongamos que es $x\otimes 1$ con $x\in\mathbb{Z}[X^r]$. Como $\psi_r(x\otimes 1)=f_r(x)\otimes 1=0$, por el lema anterior tenemos que

$$\begin{array}{rcll} f_r(x) & = & \sum l_iy_i-y_i & y_i\in\mathbb{Z}[Y^r],l_i\in L \\ & = & \sum\varphi(g_i)f_r(x_i)-f_r(x_i) & \text{con } \varphi(g_i)=l_i,f_r(x_i)=y_i \\ & = & \sum f_r(g_ix_i)-f_r(x_i) & \\ & = & \sum f_r(g_ix_i-x_i) & \end{array}$$

donde las sumas son finitas. Como f_r es un isomorfismo tenemos que $x=\sum(g_ix_i-x_i)$, luego $x\otimes 1=0$ y ψ_r es inyectiva y entonces isomorfismo. De aquí, los homomorfismos en (2.2.4) son isomorfismos.

□

Corolario 2.2.7. *Sea* $N = \ker\{G \longrightarrow S_X\}$*. Entonces podemos cambiar la representación* (G, X) *por la representación fiel* $(G/N, X)$*, es decir,* $H_*^Q(G, X; A) \cong H_*^Q(G/N, X; A)$ *y* $H_Q^*(G, X; A) \cong H_Q^*(G/N, X; A)$*.* □

Corolario 2.2.8. *Si en la* Q*-representación* (G, X) *la acción de* G *sobre* X *es libre y transitiva, entonces* $H_*^Q(G, X; A) \cong H_*^Q(G, A)$ *y* $H_Q^*(G, X; A) \cong H_Q^*(G, A)$*.*

Demostración. Si la acción de G en X es libre y transitiva, entonces $|G| = |X|$, por lo cual hay una biyección $f : G \longrightarrow X$ y $(id, f) : (G, G) \longrightarrow (G, X)$ da el isomorfismo por el teorema anterior. □

Consideraremos ahora morfismos de Q-representaciones inducidos por la inclusión de un subgrupo de G en G.

Definición 2.2.9. *Sea* Q *un grupo finito actuando por automorfismos sobre un grupo* G*. Decimos que un subgrupo* H *de* G *es* Q*-invariante si* $qH = H$ *para todo* $q \in Q$*.*

Si $H < G$ es Q-invariante y (G, X) es una Q-representación por permutaciones, (H, X) también es una Q-representación por permutaciones. Tenemos entonces el morfismo de Q-representaciones $(i, id_X) : (H, X) \longrightarrow (G, X)$ donde i es la inclusión $i : H \longrightarrow G$. A los homomorfismos inducidos en homología y cohomología les llamaremos correstricción y restricción respectivamente, a los que denotaremos por cor_H^G y res_H^G:

$$cor_H^G : H_*^Q(H, X; A) \longrightarrow H_*^Q(G, X; A)$$

$$res_H^G : H_Q^*(G, X; A) \longrightarrow H_Q^*(H, X; A).$$

2.3. H^0 y H_0

Ahora haremos el cálculo de los grupos $H_0^Q(G, X; A)$ y $H_Q^0(G, X; A)$ cuando la Q-representación cumple ciertas hipótesis.

Lema 2.3.1. *Sea* X *un* G*-conjunto y* A *un* G*-módulo trivial. Entonces existe un isomorfismo de grupos abelianos* $B_0(X) \otimes_G A \cong \oplus_{x \in E} A$ *donde* E *es un conjunto de representantes de las órbitas de* X*.*

Demostración. Por el Corolario 3.5.4 de [Bro82] tenemos un G-isomorfismo $B_0(X) \cong \oplus_{x \in E} Ind_{G_x}^G \mathbb{Z}$ donde G_x es el grupo de isotropía de $x \in X$ y la acción de G_x sobre $\mathbb{Z}$ es trivial. Entonces

$$\begin{aligned}
B_0(X)\otimes_G \mathbb{Z} &\cong (\bigoplus_{x\in E} Ind_{G_x}^G \mathbb{Z})\otimes_G \mathbb{Z}\\
&\cong \bigoplus_{x\in E}(Ind_{G_x}^G \mathbb{Z}\otimes_G \mathbb{Z})\\
&\cong \bigoplus_{x\in E}[(\mathbb{Z}\otimes_{G_x}\mathbb{Z}G)\otimes_G \mathbb{Z}]\\
&\cong \bigoplus_{x\in E}[\mathbb{Z}\otimes_{G_x}(\mathbb{Z}G\otimes_G \mathbb{Z})] \text{ pues } \mathbb{Z}G \text{ es } G_x\text{-}G\text{-bimódulo}\\
&\cong \bigoplus_{x\in E}(\mathbb{Z}\otimes_{G_x}\mathbb{Z})\\
&\cong \bigoplus_{x\in E}(\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}) \text{ pues } G_x \text{ actúa trivialmente sobre ambos } \mathbb{Z}\\
&\cong \bigoplus_{x\in E}\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

De aquí que $B_0(X)\otimes_G A\cong (B_0(X)\otimes_G \mathbb{Z})\otimes A\cong \oplus_{x\in E}\mathbb{Z}\otimes A\cong \oplus_{x\in E}A$.

□

Teorema 2.3.2. *Sea (G,X) un a Q-representación. Denotemos por $O_G(x)$ y $O_Q(x)$ las órbitas de $x\in X$ bajo las acciones de G y Q respectivamente. Si $O_Q(x)\subseteq O_G(x)$ para todo $x\in X$, entonces $(B_0(X)\otimes_G A)^Q\cong \oplus_{x\in E}A$, donde E es un conjunto de representantes de las órbitas de la acción de G en X.*

Demostración. Es claro que $(B_0(X)\otimes_G A)^Q\subseteq B_0(X)\otimes_G A$. Consideremos ahora un generador $x\otimes a$ de $B_0(X)\otimes_G A$. Sea $q\in Q$. Como $O_Q(x)\subseteq O_G(x)$, existe $g\in G$ tal que $qx=gx$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
q(x\otimes a) &= qx\otimes a\\
&= gx\otimes a\\
&= xg^{-1}\otimes a\\
&= x\otimes a.
\end{aligned}$$

Lluego $x\otimes a\in (B_0(X)\otimes_G A)^Q$ y entonces $(B_0(X)\otimes_G A)^Q=B_0(X)\otimes_G A$. Por el Lema 2.3.1 se sigue el teorema.

□

Corolario 2.3.3. *Si G actúa transitivamente en X, entonces $(B_0(X)\otimes_G A)^Q\cong A$.* □

Teorema 2.3.4. *Si la acción de G en X es transitiva, entonces el homomorfismo $(\partial_1\otimes Id_A)^Q:(B_1(X)\otimes_G A)^Q\longrightarrow (B_0(X)\otimes_G A)^Q$ es cero.*

Demostración. Consideremos un generador $(x_1,x_2)\otimes a$, $x_1,x_2\in X, a\in A$ de $B_1(X)\otimes_G A$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
(\partial_1\otimes Id_A)(x_1,x_2)\otimes a &= (x_1)\otimes a-(x_2)\otimes a\\
&= (gx_2)\otimes a-(x_2)\otimes a \quad \text{para algún } g\in G\\
&= (x_2)\otimes a-(x_2)\otimes a\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Luego $(\partial_1\otimes Id_A)^Q=0$.

□

Corolario 2.3.5. *Dada una Q-representación (G,X) tal que la acción de G en X es transitiva, se cumple que $H_0^Q(G,X;A) \cong A$ y $H_Q^0(G,X;A) \cong A$.*

Demostración. $H_0^Q(X,A)$ es la homología en grado cero del complejo

$$\cdots \longrightarrow (B_1(X) \otimes_G A)^Q \overset{(\partial_1 \otimes 1)^Q}{\longrightarrow} (B_0(X) \otimes_G A)^Q \longrightarrow 0.$$

De 2.3.3 y 2.3.4 se sigue que $H_0^Q(X,A) \cong A$.

$H_Q^0(X,A)$ es la cohomología en grado cero del complejo

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}((B_0(X) \otimes_G \mathbb{Z})^Q, A) \xrightarrow{\delta_1} \operatorname{Hom}((B_1(X) \otimes_G \mathbb{Z})^Q, A) \longrightarrow \cdots$$

donde δ_1 está inducido por $(\partial_1 \otimes Id_{\mathbb{Z}})^Q$. Por el Teorema 2.3.4 tenemos que δ_1 es el homomorfismo cero, luego $H_Q^0(X,A) = \operatorname{Hom}((B_0(X) \otimes_G \mathbb{Z})^Q, A)$ y por el Lema 2.3.1, $\operatorname{Hom}((B_0(X) \otimes_G \mathbb{Z})^Q, A) \cong \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, A) \cong A$. $\square$

2.4. Sucesiones exactas largas

Ahora buscaremos condiciones para tener sucesiones exactas largas en homología y cohomología dada una sucesión exacta corta de coeficientes.

Lema 2.4.1 ([Bro82] §2.2)**.** *Si X es un G conjunto arbitrario, entonces $(\mathbb{Z}X)_G = \mathbb{Z}[X/G]$.*

Demostración. Sea E un conjunto de representantes de las órbitas de la acción de G en X y para cada $x \in X$ sea $\bar{x} \in E$ el representante de x. Definimos entonces $\varphi : \mathbb{Z}X \longrightarrow \mathbb{Z}[X/G]$ como $\varphi(x) = \bar{x}$. Sea M el subgrupo de $\mathbb{Z}X$ generado por los elementos de la forma $x - gx$ para todo $x \in X$ y $g \in G$. Es claro que $M \subseteq \ker\varphi$ y un pequeño cálculo muestra que $\ker\varphi \subseteq M$. Por lo tanto $\ker\varphi = M$ y como φ es epimorfismo se tiene el isomorfismo buscado. $\square$

Teorema 2.4.2. *Sean A, A' y A'' grupos abelianos tales que Q y G actúan trivialmente sobre ellos y $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta. Sea (G,X) una Q-representación por permutaciones. Entonces existe una sucesión exacta larga en cohomología*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H_Q^0(G,X;A') \longrightarrow & H_Q^0(G,X;A) \longrightarrow H_Q^0(G,X;A'') \\ & \longrightarrow H_Q^1(G,X;A') \longrightarrow H_Q^1(G,X;A) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Además, si $H^1(Q, B_n(X) \otimes_G A') = 0$ para todo $n \geq 0$, entonces existe una sucesión exacta larga en homología

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_1^Q(G,X;A) \longrightarrow & H_1^Q(G,X;A'') \longrightarrow H_0^Q(G,X;A') \\ & \longrightarrow H_0^Q(G,X;A) \longrightarrow H_0^Q(G,X;A'') \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Demostración. Como $B_n(X) \otimes_G \mathbb{Z} \cong (B_n(X))_G$, por el lema anterior tenemos que $B_n(X) \otimes_G \mathbb{Z}$ es un grupo libre abeliano y por lo tanto el subgrupo $(B_n(X) \otimes_G \mathbb{Z})^Q$ es libre abeliano. Entonces, el funtor $\operatorname{Hom}((B_n(X) \otimes_G \mathbb{Z})^Q, -)$ es exacto para todo $n \geq 0$ y la sucesión

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \operatorname{Hom}((B_*(X) \otimes_G \mathbb{Z})^Q, A') \longrightarrow & \operatorname{Hom}((B_*(X) \otimes_G \mathbb{Z})^Q, A) \longrightarrow \\ & \operatorname{Hom}((B_*(X) \otimes_G \mathbb{Z})^Q, A'') \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

de complejos es exacta, la cual induce la sucesión exacta larga en cohomología buscada.

Para el caso de homología vemos que el funtor $(B_n(X) \otimes_G \mathbb{Z}) \otimes -$ es exacto pues nuevamente por el lema anterior $B_n(X) \otimes_G \mathbb{Z}$ es libre abeliano. Tenemos entonces que, para todo $n \geq 0$, la sucesión

$$0 \longrightarrow (B_n(X) \otimes_G \mathbb{Z}) \otimes A' \longrightarrow (B_n(X) \otimes_G \mathbb{Z}) \otimes A \longrightarrow (B_n(X) \otimes_G \mathbb{Z}) \otimes A'' \longrightarrow 0$$

es exacta. Como la acción de G en A es trivial podemos escribir esta sucesión como

$$0 \longrightarrow B_n(X) \otimes_G A' \longrightarrow B_n(X) \otimes_G A \longrightarrow B_n(X) \otimes_G A'' \longrightarrow 0.$$

El funtor puntos fijos es exacto izquierdo y como sus funtores derivados derechos son $H^n(Q, -)$ tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow (B_n(X) \otimes_G A')^Q \longrightarrow & (B_n(X) \otimes_G A)^Q \longrightarrow \\ & (B_n(X) \otimes_G A'')^Q \longrightarrow H^1(Q, B_n(X) \otimes_G A') \end{aligned}$$

es exacta. Así, si $H^1(Q, B_n(X) \otimes_G A') = 0$ para todo $n \geq 0$, tenemos una sucesión exacta de complejos

$$0 \longrightarrow (B_*(X) \otimes_G A')^Q \longrightarrow (B_*(X) \otimes_G A)^Q \longrightarrow (B_*(X) \otimes_G A'')^Q \longrightarrow 0$$

la cual induce la sucesión exacta larga en homología buscada. □

2.5. Una sucesión espectral

Dado un complejo de cadenas C en una categoría abeliana $\mathcal{A}$ con suficientes proyectivos y un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ contravariante exacto izquierdo, existen sucesiones espectrales que convergen al funtor hiperderivado izquierdo de F evaluado en C, $\mathbb{L}_*F(C)$ (§5.7 [Wei94]). En nuestro caso consideremos una Q-representación (G, X), A un Q-G-módulo con acciones de Q y G triviales, $F : \mathcal{A}b \to \mathcal{A}b$ el funtor $\mathrm{Hom}(-, A)$ y $C = (B(X) \otimes_G \mathbb{Z})^Q$. Tenemos así el siguiente teorema:

Teorema 2.5.1. *Existe una sucesión espectral con*

$$E^2_{pq} = \mathrm{Ext}^p_{\mathbb{Z}}(H^Q_q(G, X; \mathbb{Z}), A)$$

y que converge a $H^{p+q}_Q(G, X; A)$.

Demostración. De la Proposición 5.7.6 de [Wei94] se sigue que existen sucesiones espectrales ${}^I E$ y ${}^{II} E$ tales que

$${}^I E^2_{pq} = H^p((R^q F)((B(X) \otimes_G \mathbb{Z})^Q))$$

$${}^{II} E^2_{pq} = (R^p F)(H_q((B(X) \otimes_G \mathbb{Z})^Q),$$

donde $R^p F$ denota el funtor derivado derecho de F (en este caso $\mathrm{Ext}^p_{\mathbb{Z}}(-, A)$) y convergen a $\mathbb{L}_{p+q}((B(x) \otimes_G \mathbb{Z})^Q)$. Por el lema 2.4.1 $(B(X) \otimes_G \mathbb{Z})^Q$ es libre abeliano, por lo tanto $(R^qF)((B(X)\otimes_G \mathbb{Z})^Q)=0$ para $q>0$ y entonces la primera sucesión espectral colapsa y

$$^{I}E^2_{p0}=H^p(\mathrm{Hom}((B(X)\otimes_G\mathbb{Z})^Q,A))=H^p_Q(G,X;A).$$

La segunda sucesión cumple que

$$^{II}E^2_{pq}=\mathrm{Ext}^p_{\mathbb{Z}}(H^Q_q(G,X;\mathbb{Z}),A).$$

□

Corolario 2.5.2. *Si en el teorema anterior A es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo entonces*

$$H^p_Q(G,X;A)=\mathrm{Hom}(H^Q_p(G,X;\mathbb{Z}),A).$$

□

2.6. Transfer

Sea $H<G$ un subgrupo Q-invariante. Entonces (H,X) es una Q-representación por permutaciones. Si H es de índice finito y tal que existe un conjunto de representantes E de las clases laterales G/H tal que sea invariante bajo la acción de Q, es decir, $qg\in E$ para todo $q\in Q$ $g\in E$, podemos definir el mapeo

$$\psi: B_*(X)\otimes_G\mathbb{Z}\to B_*(X)\otimes_H\mathbb{Z}$$

$$x\otimes 1\mapsto \sum_{g\in E}xg\otimes 1$$

donde E es un conjunto de representantes de las clases laterales G/H. Este mapeo está bien definido pues dado $k\in G$

$$\begin{aligned}
xk\otimes 1-x\otimes 1\mapsto &\sum_{g\in E}xkg\otimes 1-\sum_{g\in E}xg\otimes 1\\
=&\sum_{g'\in E}xg'h_{g'}\otimes 1-\sum_{g\in E}xg\otimes 1,\ \ h_{g'}\in H\\
=&\sum_{g'\in E}xg'\otimes 1-\sum_{g\in E}xg\otimes 1\\
=&0,
\end{aligned}$$

además es claro que este mapeo es de cadenas. Por otra parte, dado $q\in Q$

$$\begin{aligned}
q\psi(x\otimes 1)=&q\sum_{g\in E}xg\otimes 1\\
=&\sum_{g\in E}qxqg\otimes 1\\
=&\sum_{g'\in E}qxg'\otimes 1\\
=&\psi(qx\otimes 1)
\end{aligned}$$

por lo que ψ es Q-equivariante y entonces están bien definidos

$$(B_*(X) \otimes_G \mathbb{Z} \otimes A)^Q \to (B_*(X) \otimes_H \mathbb{Z} \otimes A)^Q$$

$$\mathrm{Hom}((B_*(X) \otimes_H \mathbb{Z})^Q, A) \to \mathrm{Hom}((B_*(X) \otimes_G \mathbb{Z})^Q, A)$$

donde A es un Q-G-módulo con acciones de Q y G triviales. Estos inducen a su vez mapeos en el sentido opuesto al de los definidos en §2.2 los cuales son conocidos comúnmente como mapeos transfer. Usaremos los mismos nombres y las mismas notaciones para estos homomorfismos que los definidos en §2.2 pero se entenderá a qué homomorfismo se hace referencia dependiendo si se trata de homología o cohomología. Así los mapeos transfer, restricción y correstricción son:

$$res_H^G : H_*^Q(G, X; A) \longrightarrow H_*^Q(H, X; A)$$
$$cor_H^G : H_Q^*(H, X; A) \longrightarrow H_Q^*(G, X; A).$$

Teorema 2.6.1. *Sea (G, X) una Q-representación por permutaciones y H un subgrupo de índice finito Q-invariante tal que hay un conjunto de representantes de G/H Q-invariante. Sea z indistintamente elemento de $H_*^Q(G, X; A)$ o $H_Q^*(G, X; A)$. Entonces, $cor_H^G res_H^G(z) = [G : H]z$.*

Demostración. A nivel de cadenas la composición

$$B_*(x) \otimes_G \mathbb{Z} \longrightarrow B_*(X) \otimes_H \mathbb{Z} \longrightarrow B_*(X) \otimes_G \mathbb{Z}$$

es multiplicación por el índice $[G : H]$ lo cual implica el resultado. □

Corolario 2.6.2. *Si G es finito, $H_i^Q(G, X; A)$ es anulado por $|G|$ para todo $i > 0$. Análogamente en cohomología. Si $|G|$ es invertible en A, $H_i^Q(G, X; A) = H_Q^i(G, X; A) = 0$ para todo $i > 0$.*

Demostración. La primera parte de la afirmación se sigue del teorema anterior con H el grupo trivial. La segunda parte se sigue del hecho que si $|G|$ es invertible en A, entonces la multiplicación por $|G|$ es automorfismo en $H_i^Q(G, X; A)$ y $H_Q^i(G, X; A)$. □

Capítulo 3

(Co)Homología relativa de cadenas invariantes

En este capítulo definiremos la homología relativa de cadenas invariantes y veremos algunas propiedades particularizando lo expuesto en el capítulo anterior al caso donde la representación por permutaciones es el espacio de clases laterales.

3.1. (Co)homología relativa de cadenas invariantes

Sea Q un grupo finito y G un grupo tal que Q actúa en G por automorfismos. Sea $H < G$ un subgrupo Q-invariante. En tal caso tenemos una acción de Q sobre el conjunto de clases laterales izquierdas G/H definida por traslación izquierda, es decir, $q\bar{g} = \overline{qg}$ para $q \in Q$ y $g \in G$. Esta acción está bien definida pues si $k \in G$ es tal que $\bar{k} = \bar{g}$, entonces $g^{-1}k \in H$ y luego, como H es Q-invariante y la acción es por automorfismos, $q(g^{-1}k) = (qg)^{-1}qk \in H$, de aquí que $\overline{qg} = \overline{qk}$. Además G también actúa sobre G/H por traslación izquierda y tal que G/H es un Q-G-conjunto. Entonces tenemos una Q-representación por permutaciones $(G, G/H)$.

Definimos los grupos de *homología y cohomología de G relativa a H de cadenas invariantes* como:

$$H_n^Q([G,H];A) = H_n^Q(G, G/H; A)$$

$$H_Q^n([G,H];A) = H_Q^n(G, G/H; A)$$

donde A es un Q-G-módulo con acciones triviales.

Observación 3.1.1. *En este caso la acción de G en G/H es transitiva, luego $H_0^Q([G,H];A) \cong H_Q^0([G,H];A) \cong A$ por el Corolario 2.3.5.*

Observación 3.1.2. *Si H es el subgrupo trivial el Q-G-conjunto G/H es igual a G y por lo tanto $H_n^Q([G,H];A) = H_n^Q(G,A)$ y $H_Q^n([G,H];A) = H_Q^n(G,A)$.*

Teorema 3.1.3. *Sean H y K subgrupos Q-invariantes de G tales que K es normal y $K < H$. En tal caso hay una acción bien definida de Q sobre el cociente G/K y H/K es un subgrupo Q-invariante. Se tiene entonces, que*

$$H_n^Q([G/K, H/K]; A) = H_n^Q([G, H]; A)$$

$$H_Q^n([G/K, H/K]; A) = H_Q^n([G, H]; A).$$

Demostración. Sea f la función de conjuntos

$$\begin{aligned} f : G/H &\longrightarrow (G/K)/(H/K) \\ \langle a \rangle &\longmapsto [\bar{a}] \end{aligned}$$

la cual se puede ver que está bien definida y tiene como función inversa a

$$\begin{aligned} (G/K)/(H/K) &\longrightarrow G/H \\ [\bar{a}] &\longmapsto \langle a \rangle. \end{aligned}$$

Dado $q \in Q$

$$f(q\langle a \rangle) = \langle qa \rangle = [\overline{qa}] = q[\bar{a}]$$

por lo tanto f es una función Q-equivariante.

Por otra parte consideremos $\varphi : G \longrightarrow G/K$ la proyección usual el cual es un homomorfismo de grupos Q-equivariante. Dado $g \in G$ tenemos que

$$\begin{aligned} f(g\langle a \rangle) &= f(\langle ga \rangle) \\ &= [\overline{ga}] \\ &= [\bar{g}\bar{a}] \\ &= \bar{g}[\bar{a}]. \end{aligned}$$

De todo esto tenemos que $(\varphi, f) : (G, G/K) \longrightarrow (G/K, (G/K)/(H/K))$ es un morfismo de Q-representaciones y es tal que φ es epimorfismo y f es biyección. Por lo tanto, el resultado se sigue del Teorema 2.2.5. □

Corolario 3.1.4. *Si H es un subgrupo normal Q-invariante de G, entonces $H_n^Q([G, H]; A) = H_n^Q(G/H, A)$ y $H_Q^n([G, H]; A) = H_Q^n(G/H, A)$.*

Demostración. El resultado se sigue tomando $H = K$ en el teorema anterior. □

3.2. Interpretación topológica para coeficientes invertibles

Para el caso de la homología de invariantes usual ([Knu06]) hay una interpretación topológica para el caso de coeficientes invertibles (Teorema 1.4.6). Podemos encontrar una interpretación topológica para la versión relativa la cual es como sigue.

A continuación definiremos el espacio clasificante para una familia de subgrupos ([AC17] §4.3).

Dado un grupo discreto G, un G-CW-complejo es un CW-complejo X con una acción continua de G tal que

(a) Para cada $g \in G$ y cada celda abierta σ de X, la traslación $g\sigma$ es de nuevo una celda abierta.

(b) Si $g\sigma = \sigma$, entonces $gx = x$ para toda $x \in \sigma$.

Definición 3.2.1. *Una familia $\mathcal{F}$ de subgrupos de G es un conjunto no vacío de subgrupos de G tal que es cerrado bajo conjugación y bajo tomar subgrupos. Dado un conjunto de subgrupos $\{H_i\}_{i\in I}$ denotamos por $\mathcal{F}(H_i)$ la familia que consiste en todos los subgrupos de los grupos H_i y todos sus conjugados por elementos de G.*

Definición 3.2.2. *Dada una familia $\mathcal{F}$ de subgrupos de G, un modelo para el espacio clasificante para la familia $\mathcal{F}$ es un G-CW-complejo $E_{\mathcal{F}}(G)$ que cumple las siguientes propiedades:*

(a) Todos los grupos de isotropía de $E_{\mathcal{F}}(G)$ pertenecen a $\mathcal{F}$.

(b) Para cualquier G-CW-complejo Y cuyos grupos de isotropía estén contenidos en $\mathcal{F}$ hay un único G-mapeo $Y \longrightarrow E_{\mathcal{F}}(G)$ salvo G-homotopía.

Teorema 3.2.3 ([AC17] Teorema 4.15)**.** *Un G-CW-complejo X es un modelo para $E_{\mathcal{F}}(G)$ si y sólo si todos los grupos de isotropía pertenecen a $\mathcal{F}$ y el subespacio de los puntos fijos X^H es contraíble débilmente para todo $H \in \mathcal{F}$. En particular $E_{\mathcal{F}}(G)$ es contraíble.*

Teorema 3.2.4 ([AC17] Proposición 4.16)**.** *Sea $X_{\mathcal{F}}$ un G-conjunto tal que $\mathcal{F}$ es precisamente el conjunto de todos los grupos de isotropía que fijan al menos un punto de $X_{\mathcal{F}}$. Un modelo para $E_{\mathcal{F}}(G)$ es la realización geométrica del conjunto simplicial ([May99] §16.4) cuyos n-simplejos son las $(n+1)$-adas ordenadas $(x_0, ..., x_n)$ de elementos de $X_{\mathcal{F}}$. Los operadores cara están dados por*

$$d_i(x_0, ..., x_n) = (x_0, ..., \hat{x}_i, ..., x_n)$$

donde $\hat{x}_i$ denota que el elemento x_i ha sido removido. Los operadores degeneración están definidos por

$$s_i(x_0, ..., x_n) = (x_0, ..., x_i, x_i, ..., x_n).$$

La acción de $g \in G$ en un n-simplejo $(x_0, ..., x_n)$ es diagonal, $(gx_0, ..., gx_n)$.

Denotaremos por $B_{\mathcal{F}}(G)$ al espacio de G-órbitas de $E_{\mathcal{F}}(G)$. En el caso particular cuando $\mathcal{F} = \{1\}$ obtenemos el espacio clasificante de G, $B_{\{1\}}(G) = BG$.

Sea G un grupo y Q un grupo finito actuando sobre G por automorfismos. Consideremos a H un subgrupo de G Q-invariante. Tenemos entonces la Q representación $(G, G/H)$.

Teorema 3.2.5. *Sea A un Q-G-módulo con acciones triviales de Q y G tal que $|Q|$ es invertible en A. Entonces,*

$$H_*^Q([G, H]; A) = H_*(B_{\mathcal{F}(H)}(G)/Q, A)$$

donde $\mathcal{F}(H)$ es la familia generada por H, $B_{\mathcal{F}(H)}(G) = E_{\mathcal{F}(H)}(G)/G$ y $E_{\mathcal{F}(H)}(G)$ es el modelo descrito en el teorema anterior.

Demostración. Observemos primero que todos los grupos de isotropía de la acción de G sobre el Q-G-conjunto G/H es precisamente la familia $\mathcal{F}(H)$. Así, podemos tomar como modelo de $E_{\mathcal{F}(H)}(G)$ a la realización geométrica del conjunto simplicial del teorema anterior. Notemos que la acción de Q sobre G/H induce una acción sobre $E_{\mathcal{F}(H)}(G)$ donde un elemento $q \in Q$ actúa en un n-simplejo $(x_0, ..., x_n)$ de manera diagonal, es decir, $q(x_0, ..., x_n) = (qx_0, ...qx_n)$. Como G/H es un Q-G-conjunto, hay una acción bien definida inducida sobre el espacio de órbitas $B_{\mathcal{F}(H)}(G)$ y por lo tanto sobre el complejo de cadenas simplicial $C_*(B_{\mathcal{F}(H)}(G))$. Tenemos entonces el mapeo norma

$$N : C_*(B_{\mathcal{F}(H)}(G)) \otimes A)_Q \longrightarrow C_*(B_{\mathcal{F}(H)}(G)) \otimes A)^Q,$$

donde la acción de Q sobre el producto tensorial es diagonal. Como $|Q|$ es invertible en A, entonces $|Q|$ es invertible en $C_*(B_{\mathcal{F}(H)}(G)) \otimes A$ y por el Corolario 4.1.4 N es isomorfismo. Por otra parte notemos que

$$\begin{aligned}(C_*(B_{\mathcal{F}(H)}(G)) \otimes A)_Q &\cong C_*(B_{\mathcal{F}(H)}(G)) \otimes_Q A \\ &\cong C_*(B_{\mathcal{F}(H)}(G))_Q \otimes A \text{ pues } A \text{ es } Q\text{-mod trivial} \\ &\cong C_*(B_{\mathcal{F}(H)}(G)/Q, A)\end{aligned}$$

y además tenemos los isomorfismos Q-equivariantes

$$\begin{aligned}C_*(B_{\mathcal{F}(H)}(G)) \otimes A &\cong C_*(E_{\mathcal{F}(H)}(G)/G) \otimes A \\ &\cong C_*(E_{\mathcal{F}(H)}(G))_G \otimes A \\ &\cong B_*(G/H)_G \otimes A \text{ por el teorema anterior} \\ &\cong B_*(G/H) \otimes_G A \text{ pues } A \text{ es } G\text{-mod trivial}\end{aligned}$$

y tomando puntos fijos tenemos $(C_*(B_{\mathcal{F}(H)}(G)) \otimes A)^Q \cong (B_*(G/H) \otimes_G A)^Q$, el cual es el complejo de cadenas cuya homología es la homología relativa. Por lo tanto, al calcular la homología en el mapeo norma se obtiene el resultado. $\square$

Vemos que en el caso cuando H es el grupo trivial obtenemos la misma interpretación que en el Teorema 1.4.6.

3.3. Ejemplo

Sean $G = S_3 = \{e, (1\,2), (2\,3), (1\,3), (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$ y $Q = \mathbb{Z}_2 = \langle t \rangle$ donde la acción de t sobre G es conjugación por el elemento $(1\,2)$, es decir, $t \cdot x = (1\,2)x(1\,2)$ para todo $x \in G$ (denotaremos ésta acción con "$\cdot$" para no confundirla con la acción por traslación izquierda de G sobre sí mismo). Sea H el subgrupo de G generado por $(1\,2) \in G$, el cual resulta ser un subgrupo Q-invariante. Así, tenemos la Q-representación por permutaciones $(G, G/H)$ donde

$$G/H = \{\bar{e} = H, \overline{(1\,3)} = \{(1\,3), (1\,2\,3)\}, \overline{(2\,3)} = \{(2\,3), (1\,2\,3)\}\}.$$

Notemos que en este caso H no es un subgrupo normal. Consideraremos el Q-G-módulo $A = \mathbb{Z}_m$ con $m \geq 3$ un entero impar y tal que Q y G actúan trivialmente sobre A. Calcularemos los grupos de homología relativa $H_*^Q([G, H]; A)$.

Caso 1. $3 \nmid m$.

Como en este caso 6 no divide a $|A|$, $|G|$ y $|A|$ son primos relativos y por lo tanto $|G|$ es invertible en A. Por la Observación 3.1.1 conocemos la homología en grado cero y por el Corolario 2.6.2 los grados positivos:

$$H_Q^p([G,H];A) = H_p^Q([G,H],A) = \begin{cases} A & p=0 \\ 0 & p>0. \end{cases}$$

Caso 2. $3|m$

Para este caso calcularemos primero los grupos $H_*([G,H];A)$ (el caso no invariante), es decir, los grupos de homología de la representación $(G, G/H)$ (Definición 1.5.2). Notemos que los grupos de isotropía de la acción de G sobre G/H son los siguientes:

$$G_{\bar{e}} = \{e,(1\,2)\} \;\; G_{\overline{(1\,3)}} = \{e,(2\,3)\}, \;\; G_{\overline{(2\,3)}} = \{e,(1\,3)\}.$$

Observemos que cada dos grupos de isotropía se intersectan sólo en la identidad y la acción es transitiva. Este tipo de representaciones reciben el nombre de representaciones de Frobenius (Sección 1.5.1). Usaremos este hecho para hallar los grupos $H_*([G,H];A)$ usando el Teorema 1.5.13 que recordamos a continuación.

Teorema 3.3.1. *Sea (G,X) una representación de Frobenius y sea $H = G_x$ el grupo de isotropía de algún elemento fijo $x \in X$. Entonces, hay una sucesión espectral que relaciona $H_*(G,A)$ y $H_*(X,G;A)$ y que cumple:*

1. $E^2_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}(G,A)$.
2. *El término inicial* $E^2_{p,q} = 0$ *si p y q son mayores a cero.*
3. $E^2_{p,0} = H_p(G,X;A)$ *para* $p \geq 0$.
4. $E^2_{0,q} = H_q(H,A)$.

Calculemos primero los grupos $H_p(G,A)$. En general, para un grupo diédrico D_{2n} con n impar tenemos ([Mij16] Ejemplo 3):

$$H_p(D_{2n},\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p=0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & p \equiv 1 \, mod\, 4 \\ \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z} & p \equiv 3 \, mod\, 4 \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \tag{3.3.2}$$

Usando el teorema del Coeficiente Universal podemos calcular los grupos de homología con coeficientes en el G-módulo trivial A:

$$H_p(D_{2n};A) = \begin{cases} A & p=0 \\ A/2A & p \equiv 1 \, mod\, 4 \\ T_2(A) & p \equiv 2 \, mod\, 4 \\ A/2nA & p \equiv 3 \, mod\, 4 \\ T_{2n}(A) & p \equiv 0 \, mod\, 4, \; p>0 \end{cases} \tag{3.3.3}$$

donde $T_n(A)$ son todos los elementos con n-torsión. Así, para el grupo $G = S_3 = D_6$ tenemos

$$H_p(G;A) = \begin{cases} A & p=0 \\ A/2A & p \equiv 1 \, mod\, 4 \\ T_2(A) & p \equiv 2 \, mod\, 4 \\ A/6A & p \equiv 3 \, mod\, 4 \\ T_6(A) & p \equiv 0 \, mod\, 4, \; p>0. \end{cases}$$

Como en nuestro caso A es cíclico finito de orden impar

$$H_p(G;A) = \begin{cases} A & p=0 \\ 0 & p \equiv 1,2 \, mod\, 4 \\ A/3A & p \equiv 3 \, mod\, 4 \\ T_3(A) & p \equiv 0 \, mod\, 4, \ p>0 \end{cases}$$

puesto que $2A = A$, $T_2(A) = 0$, $6A = 3A$ y $T_6(A) = T_3(A)$. Por otra parte para $H = \mathbb{Z}_2$ es conocido que

$$H_p(H;A) = \begin{cases} A & p=0 \\ 0 & p>0 \end{cases}$$

y puesto que el grupo H es justamente el grupo de isotropía $G_{\bar{e}}$ tenemos que la sucesión espectral del Teorema anterior tiene término $E^2 = E^\infty$ por lo que $H_p([G,H],A) = H_p(G;A)$. Entonces, por el Teorema 2.1.5 tenemos que

$$H_p^Q([G,H],A) = \begin{cases} A & p=0 \\ 0 & p \equiv 1,2 \, mod\, 4 \\ (A/3A)^Q & p \equiv 3 \, mod\, 4 \\ (T_3(A))^Q & p \equiv 0 \, mod\, 4, \ p>0. \end{cases}$$

Para calcular los puntos fijos anteriores debemos ver cuál es la acción de $Q = \mathbb{Z}_2 = \langle t \rangle$ en $H_p([G,H],A)$, la cual está inducida por la acción diagonal de Q sobre $B_n(G/H) \otimes_G Z \otimes A$. Notemos que la acción de Q sobre G/H está dada por

$t \cdot \bar{e} = \overline{(1\,2)e(1\,2)} = \bar{e}$
$t \cdot \overline{(1\,3)} = \overline{(1\,2)(1\,3)(1\,2)} = \overline{(2\,3)}$
$t \cdot \overline{(2\,3)} = \overline{(1\,2)(2\,3)(1\,2)} = \overline{(1\,3)}$

y la acción del elemento $t = (1\,2)$ visto como elemento de G sobre G/H es

$t\bar{e} = \overline{(1\,2)e} = \overline{(1,2)} = \bar{e}$
$t\overline{(1\,3)} = \overline{(1\,2)(1\,3)} = \overline{(1\,3\,2)} = \overline{(2\,3)}$
$t\overline{(2\,3)} = \overline{(1\,2)(2\,3)} = \overline{(1\,2\,3)} = \overline{(1\,3)}$.

Esto implica que dado $x \otimes m \otimes a \in B_n(X) \otimes_G \mathbb{Z} \otimes A$ para algún $n \geq 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} t \cdot (x \otimes m \otimes a) &= (t \cdot x) \otimes m \otimes a \\ &= (tx) \otimes m \otimes a \\ &= x \otimes m \otimes a \end{aligned}$$

donde esta última igualdad se debe a que la acción de G sobre $\mathbb{Z}$ es trivial. Concluimos entonces, que la acción de Q sobre $B_n(X) \otimes_G \mathbb{Z} \otimes A$ es trivial y entonces lo es sobre $H_p([G,H],A)$. Por lo tanto,

$$H_p^Q([G,H],A) = \begin{cases} A & p=0 \\ 0 & p \equiv 1,2 \, mod\, 4 \\ A/3A & p \equiv 3 \, mod\, 4 \\ T_3(A) & p \equiv 0 \, mod\, 4, \ p>0. \end{cases}$$

Calculemos los grupos de homología (absoluta) de invariantes para este ejemplo, es decir, calculemos $H_*^Q(G,A)$ con $G = S_3$, $Q = \mathbb{Z}_2 = \langle t \rangle$ donde la acción de t sobre G es conjugación por el elemento $(1\,2)$ y $A = \mathbb{Z}_m$ con $m \geq 3$ un entero impar y tal que Q y G actúan trivialmente sobre A. Como $|Q|$ es invertible en A, por el Corolario 4.2.4 en la siguiente sección, basta calcular los grupos de homología $H_*(G \rtimes Q, A)$. Podemos verificar fácilmente que $S_3 \rtimes \mathbb{Z}_2$ tiene un 3-subgrupo de Sylow normal y un 2-subgrupo de Sylow no normal, y por la clasificación de grupos de orden 12 tenemos que $S_3 \rtimes \mathbb{Z}_2 \cong D_{12}$. Usando los resultados de la Ecuación 4.2.5 obtenemos

$$H_q^Q(G, A) = H_*(D_{12}, A) = \begin{cases} A & q = 0 \\ (A/2A)^{\frac{q+3}{2}} \oplus T_2(A)^{\frac{q-1}{2}} & q \equiv 1 \, mod \, 4 \\ (A/2A)^{\frac{q}{2}} \oplus T_2(A)^{\frac{q+2}{2}} & q \equiv 2 \, mod \, 4 \\ A/6A \oplus (A/2A)^{\frac{q+1}{2}} \oplus T_2(A)^{\frac{q-1}{2}} & q \equiv 3 \, mod \, 4 \\ (A/2A)^{\frac{q}{2}} \oplus T_6(A) \oplus T_2(A)^{\frac{q}{2}} & q \equiv 0 \, mod \, 4, \; q > 0. \end{cases}$$

Como en nuestro caso $A = \mathbb{Z}_m$ con m impar esto se reduce a

$$H_q^Q(G, A) = \begin{cases} A & q = 0 \\ 0 & q \equiv 1 \, mod \, 4 \\ 0 & q \equiv 2 \, mod \, 4 \\ A/3A & q \equiv 3 \, mod \, 4 \\ T_3(A) & q \equiv 0 \, mod \, 4, \; q > 0. \end{cases}$$

Para el Caso 1 anterior $3 \nmid m$ y entonces

$$H_q^Q(G, A) = \begin{cases} A & q = 0 \\ 0 & \text{Otro caso.} \end{cases}$$

Para el Caso 2 con $3|m$ se tiene

$$H_q^Q(G, A) = \begin{cases} A & q = 0 \\ 0 & q \equiv 1 \, mod \, 4 \\ 0 & q \equiv 2 \, mod \, 4 \\ A/3A & q \equiv 3 \, mod \, 4 \\ T_3(A) & q \equiv 0 \, mod \, 4, \; q > 0. \end{cases}$$

Observemos que en este ejemplo los grupos de homología relativa coinciden con los grupos de homología absoluta.

Capítulo 4

Homología de invariantes y el producto semidirecto

Sea G un grupo arbitrario y Q un grupo finito actuando en G por automorfismos. Por una parte tenemos definido el producto semidirecto $G \rtimes Q$. Por otra tenemos la homología de cadenas invariantes $H_G^Q(G, A)$ donde A es un grupo abeliano con acciones libres de Q y G. En este capítulo daremos condiciones bajo las cuales esta homología de invariantes coincide con la homología usual del producto semidirecto.

4.1. Coeficientes invertibles

Definición 4.1.1. *Sea $n \in \mathbb{Z}$ y sea A un grupo abeliano. Decimos que n es invertible en A si la multiplicación por n en A, $a \longmapsto na$ con $a \in A$, es un isomorfismo.*

Sea Q un grupo finito y A un Q-módulo. Consideremos el homomorfismo

$$\begin{aligned} N : A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto \sum_{q \in Q} qa. \end{aligned}$$

Como N cumple que $Nqa = Na$ y $\operatorname{im} N \subseteq A^Q$, se tiene bien definido el homomorfismo

$$\begin{aligned} \bar{N} : A_Q &\longrightarrow A^Q \\ \bar{a} &\longmapsto \sum_{q \in Q} qa. \end{aligned}$$

Teorema 4.1.2 ([Bro82] §3.1)**.** *El orden de Q anula a $\ker \bar{N}$ y $\operatorname{coker} \bar{N}$.*

Teorema 4.1.3. *Si $|Q|$ es invertible en A, entonces Q es invertible en A_Q, A^Q, $\ker \bar{N}$ y $\operatorname{coker} \bar{N}$.*

Demostración. Denotemos por $|Q| : A \longrightarrow A$ el homomorfismo $a \longmapsto |Q|a$ y por $\frac{1}{|Q|} : A \longrightarrow A$ el homomorfismo inverso de $|Q|$. Notemos que el isomorfismo

$|Q| : A \longrightarrow A$ es isomorfismo de Q-módulos por lo que $|Q||_{A^Q} : A^Q \longrightarrow A^Q$ y $\frac{1}{|Q|}|_{A^Q} : A^Q \longrightarrow A^Q$ están bien definidos y son homomorfismos inversos, y así $|Q|$ es invertible en A^Q.

Sea A' el subgrupo de A generado por los elementos de la forma $qa - a$, $q \in Q$, $a \in A$. Así $A_Q = A/A'$. Puesto que A' es un grupo es invariante bajo la multiplicación por $|Q|$. Como el homomorfismo $\frac{1}{|Q|}$ es Q-invariante también deja invariante al subgrupo A'. Así tenemos bien definidos los homomorfismos

$$\begin{aligned} A_Q &\longrightarrow A_Q \\ \bar{a} &\longmapsto \overline{|Q|a} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} A_Q &\longrightarrow A_Q \\ \bar{a} &\longmapsto \overline{\tfrac{1}{|Q|}a} \end{aligned}$$

los cuales son homomorfismos inversos y por lo tanto $|Q|$ es invertible en A_Q. Sin pérdida de generalidad, seguiremos denotando por $|Q|$ y $\frac{1}{|Q|}$ respectivamente a los homomorfismo anteriores.

Por otra parte se verifica que $\bar{N}(|Q|\bar{a}) = |Q|\bar{N}(\bar{a})$ y $\bar{N}(\frac{1}{|Q|}\bar{a}) = \frac{1}{|Q|}\bar{N}(\bar{a})$ para todo $a \in A$, así que $|Q|$ y $\frac{1}{|Q|}$ dejan invariante a $\ker \bar{N}$ y son homomorfismos inversos en él, por lo tanto $|Q|$ es invertible en $\ker \bar{N}$. Análogamente $|Q|$ y $\frac{1}{|Q|}$ dejan invariante a $\operatorname{im} \bar{N}$, y entonces, tenemos bien definidos homomorfismos

$$\begin{aligned} A^Q/\operatorname{im} \bar{N} &\longrightarrow A^Q/\operatorname{im} \bar{N} \\ \bar{x} &\longmapsto \overline{|Q|x} = |Q|\bar{x} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} A^Q/\operatorname{im} \bar{N} &\longrightarrow A^Q/\operatorname{im} \bar{N} \\ \bar{x} &\longmapsto \overline{\tfrac{1}{|Q|}x} \end{aligned}$$

con $x \in A^Q$, los cuales son inversos y por lo tanto $|Q|$ es invertible en $\operatorname{coker} \bar{N}$. □

Corolario 4.1.4. *Si $|Q|$ es invertible en A, entonces $\bar{N} : A_Q \longrightarrow A^Q$ es isomorfismo.*

Demostración. Por el Teorema 4.1.2, $|Q|$ anula a $\ker \bar{N}$ y a $\operatorname{im} \bar{N}$, y como $|Q|$ es invertible en ellos, entonces, tanto $\ker \bar{N}$ como $\operatorname{im} \bar{N}$ son los grupos triviales. Por lo tanto $\bar{N}$ es isomorfismo. □

Teorema 4.1.5. *Sea G un grupo arbitrario. Si $m \in \mathbb{Z}$ es invertible en A, entonces m es invertible en $H_*(G, A)$.*

Demostración. Sea $\epsilon : F \longrightarrow \mathbb{Z}$ una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. El homomorfismo

$$\begin{aligned} 1 \otimes m : F_n \otimes_G A &\longrightarrow F_n \otimes_G A \\ x \otimes a &\longmapsto x \otimes ma \end{aligned}$$

es un isomorfismo de cadenas con homomorfismo de cadenas inverso dado por

$$\begin{aligned} 1 \otimes \tfrac{1}{m} : F_n \otimes_G A &\longrightarrow F_n \otimes_G A \\ x \otimes a &\longmapsto x \otimes \tfrac{1}{m} a \end{aligned}$$

donde $x \in F_n$, $a \in A$. Pasando a homología tenemos que la multiplicación por m es isomorfismo. □

4.2. Homología de cadenas invariantes y el producto semidirecto

En esta sección Q denotará un grupo finito, G un grupo tal que Q actúa sobre G por automorfismos, $\varphi : Q \longrightarrow Aut\, G$ el homomorfismo de grupos que induce la acción y A un grupo abeliano con acciones triviales de Q y G.

Tenemos la siguiente sucesión exacta corta de grupos

$$1 \longrightarrow G \longrightarrow G \rtimes_\varphi Q \longrightarrow Q \longrightarrow 1.$$

A esta sucesión tenemos asociada la sucesión espectral de Hochschild-Serre:

$$E^2_{pq} = H_p(Q, H_q(G, A)) \Rightarrow H_{p+q}(G \rtimes_\varphi Q, A) \tag{4.2.1}$$

donde la acción de Q sobre $H_q(G, A)$ es la dada en [Bro82] III.8.2. Analicemos un poco más esta acción. Identificaremos al subgrupo $G \times \{e\}$ de $G \rtimes_\varphi Q$ con G y $\{e\} \times Q$ con Q. La acción dada en el Corolario III.8.2 de [Bro82] de un elemento $q \in Q$ sobre $H_*(G, A)$ está dada por el automorfismo $c(q)_* : H_*(G, A) \longrightarrow H_*(G, A)$ el cual está inducido por el automorfismo en la categoría de pares ([Bro82] III.8)

$$\begin{aligned} c(q) = (\alpha_q, id_A) : (G, A) &\longrightarrow (G, A) \\ (g, m) &\longmapsto (qgq^{-1}, m) \end{aligned}$$

donde $\alpha_q : G \longrightarrow G$ es tal que $g \longmapsto qgq^{-1}$ y id_A es la identidad en A. Notemos en particular que $\varphi(q) = \alpha_q$. Para ver cómo es esta acción a nivel de cadenas dada una resolución $F \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ es necesario hallar un mapeo de cadenas de G-módulos $\tau_q : F \longrightarrow F$ que respete aumentación y tal que $\tau_q(gx) = \alpha(g)\tau_q(x)$ para todo $g \in G$ y $x \in F$. De esta manera $c(q)_* = (\tau_q \otimes_G id_A)_*$. Consideremos la resolución barra $B_*(G) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}$ y

$$\begin{aligned} &(\tau_q)_n : B_n(G) \longrightarrow B_n(G) \\ &(g_0, g_1, ..., g_n) \longmapsto (qg_0, qg_1, ..., qg_n) \end{aligned}$$

para todo $n \geq 0$ donde qg_i representa el elemento $\varphi(q)(g_i)$. Es claro que τ_q es mapeo de cadenas que respeta aumentación. Además, dado $g \in G$

$$\begin{aligned} \tau_q(g(g_0, ..., g_n)) &= \tau_q(gg_0, ...gg_n) && \text{por la acción de } G \text{ sobre } B_n(G) \\ &= (q(gg_0), ..., q(gg_n)) \\ &= (qgqg_0, ...qgqg_n) && \text{pues } q \text{ es automorfismo de } G \\ &= qg(qg_0, ..., qg_n) \\ &= \alpha_q(g)\tau_q(g_0, ..., g_n). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $c(q)_* = (\tau_q \otimes_G id_A)_*$ y entonces, la acción de Q sobre $H_*(G,A)$ a nivel de cadenas es la acción diagonal sobre $B_*(G) \otimes_G A$. Como la acción de G sobre A es trivial, entonces

$$B_*(G) \otimes_G A \cong C_*(G) \otimes A$$

y la acción se traduce en la acción diagonal sobre $C_*(G) \otimes A$ la cual es la misma acción que la usada en la definición de la homología de cadenas invariantes (1.4.1).

Corolario 4.2.2. *Si $|Q|$ es invertible en A, entonces $H_*(G,A)_Q \longrightarrow H_*(G,A)^Q$ es isomorfismo.*

Demostración. Por el Teorema 4.1.5, $|Q|$ es invertible en $H_*(G,A)$ y el resultado se sigue del Corolario 4.1.4. $\square$

Teorema 4.2.3. *Si $|Q|$ es invertible en A, entonces el término E^2_{0q} de la sucesión espectral 4.2.1 es isomorfo a $H^Q_q(G,A)$.*

Demostración. Tenemos que

$$E^2_{0q} = H_0(Q, H_q(G,A)) = H_q(G,A)_Q.$$

Por el Corolario 4.2.2, $H_q(G,A)_Q \cong H_q(G,A)^Q$, y por el Teorema 1.4.7 tenemos que $H_q(G,A)^Q \cong H^Q_q(G,A)$. $\square$

Teorema 4.2.4. *Sea Q un grupo finito tal que $|Q|$ es invertible en A. Entonces, $H^Q_q(G,A) \cong H_q(G \rtimes_\varphi Q, A)$.*

Demostración. Como $|Q|$ es invertible en A, $|Q|$ es invertible en $H_*(G,A)$ por el Teorema 4.1.5. El Corolario III.10.2 en [Bro82] implica que $H_p(Q, H_q(G,A)) = 0$ para todo $p > 0$, entonces $E^2_{pq} = H_p(Q, H_q(G,A)) = 0$ si $p \geq 1$. Por lo tanto la sucesión espectral colapsa en la página dos.

Como esta sucesión converge a $H_*(G \rtimes_\varphi Q, A)$ y por el teorema anterior $E^2_{0q} = H^Q_q(G,A)$, tenemos que $H^Q_q(G,A) \cong H_q(G \rtimes_\varphi G, A)$.

$\square$

Ejemplo

Calcularemos los grupos $H^Q_*(G,A)$ usando el teorema anterior para $Q = \mathbb{Z}_2 = \langle t \rangle$, $G = \mathbb{Z}_n$ con $n \geq 2$ y $A = \mathbb{Z}_m$ con m impar mayor a uno. Consideremos la acción de Q sobre G dada por $tg = g^{-1}$ para todo $g \in G$ y la acción de G y Q sobre A trivial. Con estas condiciones $G \rtimes_\varphi Q = D_{2n}$ y sólo basta calcular los grupos de homología del grupo diédrico. Dividiremos el cálculo en dos casos dependiendo de la paridad de n.

Caso 1. Sea n impar.

Para este caso tenemos (3.3.3)

$$H_q(D_{2n}, A) = \begin{cases} A & q = 0 \\ A/2A = 0 & q \equiv 1\, mod\, 4 \\ T_2(A) = 0 & q \equiv 2\, mod\, 4 \\ A/2nA = \mathbb{Z}_m/2n\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_m/n\mathbb{Z}_m & q \equiv 3\, mod\, 4 \\ T_{2n}(A) & q \equiv 0\, mod\, 4,\ q > 0. \end{cases}$$

Pero $\mathbb{Z}_m/n\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{(m,n)}$ pues

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_m/n\mathbb{Z}_m &\longrightarrow \mathbb{Z}_{(m,n)} \\ [k] &\mapsto \bar{k} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{(m,n)} &\longrightarrow \mathbb{Z}_m/n\mathbb{Z}_m \\ \bar{k} &\mapsto [k] \end{aligned}$$

son homomorfismos de grupos bien definidos e inversos uno del otro. Por otra parte, se puede ver que

$$\{\overline{k\tfrac{m}{(m,n)}} | k = 0, 1, ..., (m,n) - 1\} \subseteq T_n(A).$$

Más aún, si $\bar{r} \in T_n(A)$, entonces existe $l \in \mathbb{Z}$ tal que $nr = lm$, lo cual implica que $r = \frac{lm}{n} = \frac{lm}{s(m,n)}$ para algún $s \in \mathbb{Z}$. Como $(s,m) = 1$ y r es entero, $s|l$ y entonces $\bar{r} \in \{\overline{k\frac{m}{(m,n)}} | k = 0, 1, ..., (m,n) - 1\}$. Por lo tanto,

$$\{\overline{k\tfrac{m}{(m,n)}} | k = 0, 1, ..., (m,n) - 1\} \supseteq T_n(A).$$

De aquí que

$$T_n(A) = \{\overline{k\tfrac{m}{(m,n)}} | k = 0, 1, ..., (m,n) - 1\} \cong \mathbb{Z}_{(m,n)}.$$

Resumiendo todo lo anterior tenemos

$$H_q(D_{2n}, A) = \begin{cases} \mathbb{Z}_m & q = 0 \\ \mathbb{Z}_{(m,n)} & q \equiv 0\,, 3 \, mod\, 4\,, q > 0 \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Caso 2. Sea n par.

Para este caso tenemos que los grupos de cohomología $H^*(D_{2n}, \mathbb{Z})$ están dados por ([Han93] Teorema 5.2):

$$H^q(D_{2n}, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\frac{q-1}{2}} & q \equiv 1 \, mod\, 4 \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\frac{q+2}{2}} & q \equiv 2 \, mod\, 4 \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\frac{q-1}{2}} & q \equiv 3 \, mod\, 4 \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\frac{q}{2}} & q \equiv 0 \, mod\, 4,\ q > 0. \end{cases}$$

Usando el Teorema del Coeficiente Universal podemos calcular los grupos de homología $H_q(D_{2n}, A)$ los cuales quedan de la siguiente manera:

$$H_q(D_{2n}, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\frac{q+3}{2}} & q \equiv 1 \, mod\, 4 \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\frac{q}{2}} & q \equiv 2 \, mod\, 4 \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\frac{q+1}{2}} & q \equiv 3 \, mod\, 4 \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\frac{q}{2}} & q \equiv 0 \, mod\, 4,\ q > 0. \end{cases}$$

Usando de nuevo el Teorema del coeficiente universal:

$$H_q(D_{2n},A)=\begin{cases} A & q=0\\ (A/2A)^{\frac{q+3}{2}}\oplus T_2(A)^{\frac{q-1}{2}} & q\equiv 1\,mod\,4\\ (A/2A)^{\frac{q}{2}}\oplus T_2(A)^{\frac{q+2}{2}} & q\equiv 2\,mod\,4\\ A/nA\oplus (A/2A)^{\frac{q+1}{2}}\oplus T_2(A)^{\frac{q-1}{2}} & q\equiv 3\,mod\,4\\ (A/2A)^{\frac{q}{2}}\oplus T_n(A)\oplus T_2(A)^{\frac{q}{2}} & q\equiv 0\,mod\,4,\ q>0. \end{cases} \tag{4.2.5}$$

Como en nuestro caso $A=\mathbb{Z}_m$ con m impar tenemos:

$$H_q(D_{2n},A)=\begin{cases} \mathbb{Z}_m & q=0\\ 0 & q\equiv 1\,mod\,4\\ 0 & q\equiv 2\,mod\,4\\ \mathbb{Z}_m/n\mathbb{Z}_m & q\equiv 3\,mod\,4\\ T_n(\mathbb{Z}_m) & q\equiv 0\,mod\,4,\ q>0. \end{cases}$$

Por los cálculos hechos en el caso anterior tenemos que

$$H_q(D_{2n},A)=\begin{cases} \mathbb{Z}_m & q=0\\ \mathbb{Z}_{(m,n)} & q\equiv 0\,,3\,mod\,4\,,q>0\\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Resumiendo los dos casos anteriores, tenemos que para $Q=\mathbb{Z}_2=\langle t\rangle$, $G=\mathbb{Z}_n$ y $A=\mathbb{Z}_m$ con m impar, donde $tg=g^{-1}$ para todo $g\in G$ y la acción de G y Q sobre A es trivial, los grupos de homología de cadenas invariantes son:

$$H_q^Q(G,A)=\begin{cases} \mathbb{Z}_m & q=0\\ \mathbb{Z}_{(m,n)} & q\equiv 0\,,3\,mod\,4\,,q>0\\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Podemos comparar este resultado con el Teorema 6 de [JLM18].

Observación 4.2.6. *En general la homología de cadenas invariantes no coincide con la homología del producto semidirecto. Como ejemplo consideremos $Q=\mathbb{Z}_2=\langle t\rangle$ actuando sobre $G=\mathbb{Z}_n$ con n impar por $tg=g^{-1}$, $g\in G$, y $A=\mathbb{Z}$ con acciones triviales de G y Q. Por una parte tenemos ([Knu06] Ejemplo 5.1)*

$$H_p^{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z})=\begin{cases} \mathbb{Z} & p=0\\ \mathbb{Z}_n & p\equiv 3\,mod\,4\\ 0 & \textit{otro caso.} \end{cases}$$

Por otra parte el resultado mostrado en la Ecuación 3.3.2 nos muestra que $H_*^{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z})\neq H_*(D_{2n},\mathbb{Z})$.

Bibliografía

[Ada54] Adamson I. T. *Cohomology theory for non-normal subgroups and non-normal fields*, Proc. Glasgow Math. Assoc. 2 (1954), 66–76.

[AC17] Arciniega-Nevárez J. A., Cisneros-Molina J. L. *Comparison of relative group (co)homologies*, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana (2017) 23, 41-74.

[Bro82] Brown K. S. *Cohomology of Groups*, Springer-Verlag, 1982.

[Han93] Handel, D. *On products in the cohomology of the dihedral groups*, Tohoku Math. J. (2) 45 (1993), no. 1, 13-42.

[JLM18] Jiménez R., López A., Morales Q., *A spectral sequence for homology of invariant group chains*, Moscow Mathematical Journal 18 (2018), 149-162.

[Knu06] Knudson K. P. *Homology of invariant group chains*, Journal of Algebra 298 (2006) 33.

[KW03] Knudson K. P., Walker M. E. *Homology of linear groups via cycles in* $BG \times X$, Journal of Pure and Applied Algebra 192 (2004), 187-202.

[Mac63] Maclane S. *Homology* Springer Verlag, 1963.

[May99] May J. P. *A concise course in algebraic topology* Chicago lectures in mathematics, 1999.

[Mij16] Mijangos Tovar J. M. *Sucesiones Espectrales y el Teorema de Hochschild-Serre* Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, 2016.

[Sna64] Snapper E. *Cohomology of permutation representations. I. Spectral sequences* J. Math. Mech.(1964) 13, 133–161.

[Sna65] Snapper E. *Spectral sequences and Frobenius groups* Trans. Amer. Math. Soc. 114 (1965), 133-146.

[Tak59] Takasu S. *Relative homology and relative cohomology theory of groups*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. I(8) (1959), 75–110.

[Wei94] Weibel, C. *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, 1994.