UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Categorías diferencialmente graduadas

T E S I S

QUE PARA OPTAR EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A:

EDGAR OMAR VELASCO PÁEZ

DIRECTOR:

DRA. MARTHA LIZBETH SHAID SANDOVAL MIRANDA
UNIVERSIDAD AUTONÓNOMA METROPOLITANA

Ciudad de México, Marzo 2020

Dedicado a
Mis Padres, Abuelita y Hermana.

Agradecimientos

Le agradezco a Dios por haberme acompañado y guiado a lo largo de mi carrera, por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y brindarme una vida llena de aprendizajes, experiencias y sobre todo felicidad.

Quiero agradecer de manera especial a mis padres Silvia y Raúl por haber estado a mi lado en todo momento, por brindarme una excelente educación, llenarme de amor y comprensión, y aunque por el momento mi padre no se encuentra conmigo, sé que desde donde se encuentra estará feliz de verme cumplir esta nueva meta. No me resta más que decirles: Muchas gracias papá y mamá. No es un logro mío sino de todos.

A mi hermana Monse por ser una parte importante de mi vida, por hacerme reír, jugar, bailar, enojar, dibujar y sobre todo por darme la oportunidad ver una nueva generación a través de ti. Espero poder servirte de ejemplo.

Quiero agradecer de manera especial a mi directora de tesis la Dra. Martha Lizbeth Shaid Sandoval Miranda por aceptar dirigir ésta tesis y quien me ha enseñado mucho durante gran parte de mis estudios de matemáticas, por todo el tiempo que me ha dedicado y sin el cual este trabajo no sería posible. Tambiíen le agradezco que ha sido una persona que me ha dado muchos consejos tanto matemáticos como personales.

De manera especial, agradezco a mi tutor y ahora sinodal el Dr. Valente Santiago Vargas, por haberme brindado su apoyo en todo momento, tanto en lo escolar como en lo personal, por dedicarme bastante de su tiempo y por enseñarme tantas cosas durante esta etapa de maestría, por su amistad, sus consejos y su apoyo en uno de los momentos más difíciles de mi vida.

Le agradezco la confianza, apoyo y dedicación de tiempo a mis profesores: Dr. Octavio Mendoza Hernández, Dra. Edith Corina Sáenz Valadez, M.C. Álvaro Reyes García, Dra. Gabriela Araujo y el Dr. Marcelo Aguilar, por los conocimientos brindados durante mis cursos de maestría.

Nuevamente agradezco al Dr. Valente Siantago Vargas, la Dra. Corina Sáenz y al Dr. Octavio Mendoza Hernández por el apoyo y la colaboración que me dieron en la elaboración de esta tesis y en la que influyeron de manera importante.

A mis amigos y compañeros Carlos, Víctor, Alexander, Gabriel, Olivia, Edgar, Ricardo y demás conocidos por todos los momentos que pasamos juntos, las tareas que con algunos realizamos juntos, los seminarios que hemos realizado y todas la veces que a mí me explicaron, gracias. Por la confianza que en mi depositaron.

También de forma especial agradezco al Departamento de Matemáticas de la UNAM por haber proporcionado todos los recursos necesarios para mi desarrollo profesional. Por último, agradezco a CONACyT, por la beca de Maestría que me brindo, la cual ha hecho posible el término de mis estudios de posgrado.

Índice general

Introducción

Las álgebras diferencialmente graduadas aparecen de manera natural al considerar el anillo de endomorfismos de un complejo.

En la actualidad las álgebras diferencialmente graduadas son utilizadas en varias ramas de las matemáticas, como por ejemplo en el estudio de A_∞-álgebras, en las álgebras de conglomerados y recientemente en contexto de categorías diferencialmente graduadas, en geometría no conmutativa.

Las categorías diferencialmente graduadas pequeñas y su categoría de dg-módulos a jugado un papel importante en las matemáticas a lo largo del tiempo. En los años $70's$ y $80's$ del siglo pasado fueron la herramienta principal para estudiar problemas de matrices relacionados con la teoría de representaciones de álgebras (ver [7], [8], [10]). En tiempos modernos, su principal importancia proviene de un resultado fundamental de Keller (ver [6] Teorema 4.3) el cual establece que cualquier categoría triangulada algebraica compactamente generada es equivalente a la categoría derivada de un dg-categoría pequeña. Esa importancia creció aún más cuando Tabuada mostró que la categoría Dg-cat de categorías dg pequeñas admite una estructura modelo en la que las equivalencias débiles son las llamadas cuasi-equivalencias y tambíen cuando Toen estudió en profundidad la categoría de homotopía asociada Ho(Dg-cat), que muestra en particular que tenía un Hom interno lo cual proporciona varias aplicaciones de este hecho a la Teoría de la Homotopá y la Geometría Algebraica.

Por definición, una categoría dg pequeña es una categoría pequeña con una graduación y un diferencial que satisfacen ciertas condiciones (ver los detalles en el capítulo 2). Pero desde la época de Gabriel en su tesis uno sabe que las categorías pequeñas pueden verse como álgebras con suficiente idempotentes (o anillos con varios objetos) y viceversa. Además, si A es una categoría muy pequeña, entonces la categoría $[A^{op}, Mod - K]$ de functores contravariantes es equivalente a $Mod - A$, la categoría de módulos A derecha unitario, cuando A se ve como un álgebra con suficientes idempotentes.

Es natural esperar que se extiende a la configuración de diferencialmente graduado. Lo anterior requiere el desarrollo de una teoría de álgebras dg con suficientes idempotentes y sus módulos dg. Este desarrollo es, en cierto sentido, una demanda de una parte de la comunidad matemática.

El objetivo de esta tesis es presentar las bases necesarias para entender y demostrar los coceptos básicos de álgebras diferencialmente graduadas, módulos diferencialemente graduados sobre un anillo dg y el estudio de categorías dg pequeñas. Se estudia en este trabajo el lenguaje que se adecua al contesxto dg de acuerdo a la visión de la tesis de Grabriel, es decir, se desarrolla el concepto de dg categorías con suficientes idempotentes y finalmente se establece una equivalencia entre la categoría de funtores $[\mathcal{C}_A^{op}, Dg - Mod(k)]$ y la categoría $Dg - Mod(A)$, donde A es una dg-álgebra con suficientes idempotentes y $\mathcal{C}_A$ es el álgebra A vista como categoría.

Se ha tomado como base el artículo [13] " DG ALGEBRAS WITH ENOUGH IDEMPOTENTS, THEIR DG MODULES AND THEIR DERIVED CATEGORIES" de Manuel Saorín desarrolando de manera explicíta cada punto tocado en el artículo, introduciendo lemas y proposiciones necesarias; así como también, se han redactado de mejor manera algunas definiciones. De manera similar, se han usado algunas fuentes (ver [14], [9], [6] y [15]) para describir algunas de las nociones básicas de k-álgebras, producto tensorial, categorías abelianas, etc.

En el capítulo 1, introducimos la noción de k-álgebra graduada y de k-álgebra diferencialmente graduada, digamos (A, d_A), para posteriormente definir un A-módulo graduado a derecha, algunas caracterizaciones de estos. En este capítulo se estudia tambien la categoría $dg - Mod(A)$ de A-módulos diferencialmente graduados verificando que es una categoría abeliana, exhibiendo de manera explícita las construcciones de producto, coproducto, kernel, cokernel y morfismo paralelo. El capítulo ha sido desarrollado tomado elementos del libro [11] y de la tesis de maestría [3].

El capítulo 2 introduce la definición de una categoría diferencialmente graduada, así como como conceptos tales como dg-funtor, dg-transformación natural, producto tensorial de dg-categorías, dg-equivalencias y el resultado central de este capítulo es la equivalencia entre las dg-categorías de funtores

$$\mathrm{Hom}_{dg-cat}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{C}) \cong \mathrm{Hom}_{dg-cat}(\mathcal{A}, \mathrm{Hom}_{dg-cat}(\mathcal{B}, \mathcal{C})),$$

la cual representa una generalización a la equivalencia que existe en la categoría A-módulos.

Finalmente, en el capítulo 3, se desarrolla el tema de k-álgebra diferencialmente graduada con suficientes idempotentes y con ellos se define nuevamente la categoría $Mod(A)$ con A una dg-álgebra con sufcientes idempotentes, se esblece también una equivalencia entre la categoría de k-álgebras diferencialmente graduadas con suficientes idempoyentes y la categoría de dg-categorías pequeñas. Por último se presenta una dg-equivalencia entre la categoría de dg-funtores $Fun(\mathcal{C}_A^{op}, Gr-Mod(k))$ y la categoría $Dg-Mod(A)$ donde A es una dg-álgebra con suficientes idempotentes.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Anillos graduados

En esta sección damos una pequeña introducción a anillos graduados, alguna propiedades básicas de ellos, en particular enunciamos y probamos algunas propedades básicas de ellos, para posteriormente introducir la definicón de un un $R-$módulo graduado.

Definición 1.1.1 *Un* ***anillo graduado*** *A es un anillo, asociativo con unidad tal que $A = \coprod_{p\in\mathbb{Z}} A^p$ donde*

(a) A^p es un subgrupo abeliano de A para todo p en $\mathbb{Z}$,

(b) si $a \in A^p$ y $b \in A^q$ entonces $ab \in A^{p+q}$.

Observación 1.1.2 *A los elementos de A^p se les llamará homogéneos de grado p. Dado $a \in A$, escribimos $gr(a) = p$ (ó $|a| = gr(a)$) si y sólo si $a \in A^p$.*

Ejemplo 1.1.3

(a) El anillo $k[x]$ de polinomios en la variable x con coeficientes en un campo k es un anillo graduado, pues podemos verlo como $k[x] = \coprod_{m\in\mathbb{N}} A^m$, donde

$$A^m := \{f(x) \in k[x] | f(x) = ax^m, a \in k\}.$$

(b) El anillo de series de Laurent con coeficientes en el campo k es un anillo graduado. Este anillo se representa como $k[x, x^{-1}]$ y tenemos que $k[x, x^{-1}] \subset k(x)$. Note que $k[x, x^{-1}] = \coprod_{m\in\mathbb{Z}} A^m$ donde

$$A^m := \{f(x) \in k[x] | f(x) = ax^m, a \in k, m \in \mathbb{Z}\}.$$

(c) *Sea $\mathcal{Q}$ un carcaj finito, entonces tenemos que el álgebra de carcaj con coeficientes en el campo k, $k\mathcal{Q} = \coprod_{m\in\mathbb{Z}}(k\mathcal{Q})_m$, en donde $(k\mathcal{Q})_m$ es el subespacio generado por los caminos de longitud m, es un anillo graduado.*

Definición 1.1.4 *Sea A un anillo graduado. Se dice que A es un* ***anillo fuertemente graduado*** *si $A^pA^p = A^{p+q}$.*

Proposición 1.1.5 *Sea A un anillo graduado con unidad. Entonces las siguientes condiciones se satisfacen:*

(a) *$1_A \in A^0$ y A^0 es un subanillo de A.*

(b) *El inverso x^{-1} de un elemento homogéneo $x \in \mathcal{U}(A)$ es también homogéneo.*

(c) *A es fuertemente graduado si y sólo si $1 \in A^pA^{-p}$ para cada $p \in \mathbb{Z}$.*

Demostración.

(a) Por definición tenemos que $A^0A^0 \subseteq A^{0+0} = A^0$. Por lo que basta probar que $1_A \in A^0$. En efecto, sea $1_A = \sum_{p\in\mathbb{Z}} a^p$ la descomposición de 1_A en $A = \coprod_{p\in\mathbb{Z}} A^p$ y $a^p \in A^p$.
Entonces para cada $b^q \in A^q$, $q \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$b^q = b^q \cdot 1 = \sum_{p\in\mathbb{Z}} b^q a^p,$$

donde $b^qa^p \in A^{p+q}$. Luego, tenemos

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} b^q a^p + b^q a^0 - b^q = 0.$$

Por la unicidad de la representación de cada elemento en $A = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} A^p$ se tiene, $b^qa^p = 0$ para $\forall p \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Ahora, para $b \in A$ con $b = \sum_{t\in\mathbb{Z}} b^t$ se sigue que

$$b \cdot a^p = \left(\sum_{t\in\mathbb{Z}} b^t\right) a^p = \sum_{t\in\mathbb{Z}} b^t a^p = 0$$

para $p \neq 0$. Por lo tanto, $b \cdot a^p = 0$ para cada $b \in A$. En particular, para $b = 1$, $1a^p = 0$, esto para cada $p \neq 0$. Así, $1_A = \sum_{p\in\mathbb{Z}} a^p = a^0 \in A^0$

(b) Supongamos que $x \in \mathcal{U}(A) \cap A^q$. Sea $x^{-1} = \sum_{p\in\mathbb{Z}}(x^{-1})^p$ con $(x^{-1})^p \in A^p$. Entonces $1_A = xx^{-1} = \sum_{p\in\mathbb{Z}} x(x^{-1})^p$. Dado que $1_A \in A^0$ y $x(x^{-1})^p \in A^{p+q}$, tenemos que $x(x^{-1})^p = 0$ para todo $p \neq -q$. Por otro lado, como $x \in \mathcal{U}(A)$ tenemos que $(x^{-1})^p \neq 0$ para $p \neq -q$. Por lo tanto, $x^{-1} = (x^{-1})^{-q} \in A^{-q}$.

(c) ($\Leftarrow$) Supongamos que $1_A \in A^p A^{-p}$ para cada $p \in \mathbb{Z}$. Luego, para $p, q \in \mathbb{Z}$ tenemos

$$A^{p+q} = A^0 A^{p+q} = (A^p A^{-p}) A^{p+q} = A^p (A^{-p} A^{p+q}) \subseteq A^p A^q.$$

Así, $A^{p+q} = A^p A^q$.

($\Rightarrow$) Dado que $A^{p+q} = A^p A^q$, se tiene que $1_A \in A^0 = A^{p+(-p)} = A^p A^{-p}$.

$\square$

Definición 1.1.6 *Un* ***anillo diferencialmente graduado A*** *es un anillo graduado A junto con morfismo de grupos $d : A \longrightarrow A$ tal que*

(a) $d\left(A^i\right) \subseteq A^{i+1}$ *para todo* $i \in \mathbb{Z}$.

(b) d cumple la regla de Leibniz, es decir, para todo par de elementos homogéneos $a, b \in A$ se cumple la siguiente igualdad

$$d(ab) = d(a)b + (-1)^{gr(a)} a d(b).$$

(c) $d^2 = 0$

Observación 1.1.7 *(a) $d(1_A) = 0$. En efecto,*

$$d(1) = d(1 \cdot 1) = d(1) \cdot 1 + (-1)^{gr(1)} 1 \cdot d(1) = d(1) \cdot 1 + 1 \cdot d(1)$$

(b) Si a es un elemento homogéneo de grado p, entonces $d(a)$ es homogéneo de grado $p+1$.

Recordemos ahora la definción de k-álgebra.

Definición 1.1.8 *Sea k un anillo conmutativo. Un anillo R es una* ***k-álgebra*** *si existe $\varphi : k \longrightarrow R$ morfismo de anillos tal que $Im(\varphi) \subseteq C(R)$.*

Ejemplo 1.1.9 *(a) Sea k un campo, $k[x]$ es una k-álgebra con $\varphi : k \longrightarrow k[x]$ la inclusión de k como los polinomios constantes.*

(b) $\mathbb{C}$ es una $\mathbb{R}$-álgebra con $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la inclusión.

(c) $\mathbb{C}$ es una $\mathbb{C}$-álgebra con $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ la identidad.

(d) Sea R un anillo asociativo con unidad. El anillo $Fun(X, R)$ de funciones es una R-álgebra con $\varphi : R \longrightarrow Fun(X, R)$ la inclusión de R como el conjunto de funciones constantes con valores en R.

(e) Para un anillo asociativo con unidad, existe un único homomorfismo de anillos $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow R$ y dicho morfismo brinda estructura de $\mathbb{Z}$-álgebra al anillo R.

Definición 1.1.10 *Sea k un campo:*

(a) *Una k-álgebra A es una **k-álgebra graduada** si A es un anillo graduado en el cual A^p es un k-subespacio vectorial de A, para todo $p \in \mathbb{Z}$.*

(b) *Una k-álgebra A es una **k-álgebra diferencialmente graduada** si y sólo si A es un anillo diferencial que es una k-álgebra graduada y la diferencial $d : A \longrightarrow A$ es un morfismo de k-espacios vectoriales.*

Una fuente de ejemplos de k-álgebras diferencialmente graduadas se puede construir al considerar un complejo de cadenas de k-espacios vectoriales por lo cual introducimos la siguiente definición.

Definición 1.1.11 *Sea $M = (M^i, d^i_M)$ un complejo de k-espacios vectoriales $M := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i$. Sea $f \in End_k(M)$, f es homogéneo de grado p si $\forall i \in \mathbb{Z}$, $f(M^i) \subseteq M^{i+p}$. Denotaremos por A^p a la colección de elementos homogéneos de grado p, es decir,*

$$A^p := \{f : M \longrightarrow M | f(M^i) \subseteq M^{i+p}\}$$

Observación 1.1.12

(a) *A^p es un subespacio vectorial de $End_k(M)$. En efecto, tenemos que $0 : M \longrightarrow M$ es tal que $0(M^i) = 0 = 0(M^{i+p})$. Para $f, g \in A^p$, se tiene*

$$(f + g)(M^i) = f(M^i) + g(M^i) \subseteq M^{i+p} + M^{i+p}$$

por lo que $f + g \in A^p$. Además, $rf(M^i) \subseteq r(M^{i+p}) = M^{i+p}$

(b) *$A^pA^q = A^{p+q}$*

Proposición 1.1.13 *Sea $A = \coprod_{p\in\mathbb{Z}} A^p$, entonces A es un k-álgebra graduada.*

Demostración. Veamos primero que A es un anillo. En efecto, note que un elemento en $A = \coprod_{p\in\mathbb{Z}} A^p$ es de la forma $(f_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ donde, $f_i = 0$ para casi todos los $i \in \mathbb{Z}$, excepto para un número finito. Entonces

$$\begin{aligned}(f_i)_{i\in\mathbb{Z}} &= (..., 0, 0, ..., 0, f_j, 0, 0, ..., 0, f_k, 0, ...)\\ &= (..., 0, ..., 0, f_j, 0, 0, ..., 0, 0, ...) + (..., 0, ..., 0, 0, ..., 0, f_k, 0, ...)\\ &= f_j + f_k.\end{aligned}$$

Recordemos que un coproducto $inc_p : A_p \longrightarrow \coprod_{p\in\mathbb{Z}} A^p\}_{p\in\mathbb{Z}}$ puede ser identificado con una suma directa interna $\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} inc_p(A^p) \cong \coprod_{p\in\mathbb{Z}} A^p$. En vista de lo anterior, podemos representar a un elemneto de A de la forma $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$, donde $f_i = 0$ para casi todo i. Veamos ahora que $(A, +)$ es un grupo abeliano,

- *Cerrado.* Sean $f, g \in A$, entonces $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$, $g = \sum_{j=0}^{\infty} g_j$, por lo que

$$f + g = \sum_{i=0}^{\infty} f_i + \sum_{j=0}^{\infty} g_j = f = \sum_{t=0}^{\infty}(f_t + g_t),$$

  por la observación 1.1.12 tenemos que $f_t + g_t \in A^t$. Por lo tanto $f + g \in A$.

- *Neutro aditivo.* Se tiene que el neutro aditivo es el elemento $(f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ tal que $f_i = 0\ \forall i \in \mathbb{Z}$.

- *Inverso aditivo.* Sea $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \in A$, como $f_i \in A^i$ y por 1.1.12 A^i es un k-espacio vectorial, entonces existe $-f_i \in A$ tal que $f_i + (-f_i) = 0_i$. Basta considerar $-f = \sum_{i=0}^{\infty}(-f_i)$ como el inverso de f.

- *Asociatividad y comutatividad.* Se sigue de que A^i es un k-espacio vectorial para cada $i \in \mathbb{Z}$.

Verificamos ahora las propiedades del producto

- *Cerrado.* Sean $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$, $f = \sum_{j=0}^{\infty} g_j$ elementos en $A = \coprod_{p \in \mathbb{Z}} A^p$. Entonces

$$f \circ g = \left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} g_j\right) = f = \sum_{i=0}^{\infty} h_i$$

  con $h_i = \sum_{k+r=i} f_r g_k$, donde $h_i = 0$ para casi todo i. Veamos que $h_i \in A^i$. En efecto, dado que M^i es un k-espacio vectorial para cada i, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} h_i(M^l) = \left(\sum_{k+r=i} f_r g_k\right)(M^l) &= \sum_{k+r=i} f_r(g_k(M^l)) \\ &\subseteq \sum_{k+r=i} f_r(M^{l+k}) \\ &\subseteq \sum_{k+r=i} M^{l+k+r} \\ &= \sum_{k+r=i} M^{l+i} = M^{l+i} \end{aligned}$$

- *Asociativo.* Sean $f, g, q \in A$, tenemos que

$$[f \circ g] \circ q = \left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} g_j\right)\right]\left(\sum_{t=0}^{\infty} q_t\right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} h_i\right)\left(\sum_{t=0}^{\infty} q_t\right) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i$$

  donde $h_i = \sum_{k+r=i} f_r g_k$ y $w_i = \sum_{u+v=i} f_u w_v$, por lo que se tiene

$$w_i = \sum_{u+v=i} f_u w_v = \sum_{u+v=i}\left(\sum_{k+r=u} f_r g_k\right) w_v = \sum_{k+r+v=i} (f_r g_k) w_v.$$

En consecuencia,

$$(f \circ g) \circ q = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k+r+v=i} (f_r g_k) w_v \right).$$

Dado que f_r, g_k, $w_v \in End_k(M)$ entonces $(f_r \circ g_k) \circ w_v = f_k \circ (g_k \circ w_v)$. Por otro lado,

$$f \circ (g \circ q) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k+r+v=i} f_r (g_k w_v) \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k+r+v=i} (f_r g_k) w_v \right) = (f \circ g) \circ q$$

- *Distributiva.* Sean $f, g, q \in A$ entonces

$$\begin{aligned}(f+g)q = \left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i + g_i \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} q_i \right) &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k+t=i} (f_k + g_k) q_t \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k+t=i} (f_k q_t + g_k q_t)\end{aligned}$$

Por otro lado se tiene que

$$fq + gq = \left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i \right) \left(\sum_{t=0}^{\infty} q_t \right) + \left(\sum_{j=0}^{\infty} g_j \right) \left(\sum_{t=0}^{\infty} q_t \right) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i + \sum_{i=0}^{\infty} z_i,$$

donde $w_i = \sum_{u+v=i} f_u q_v$ y $z_i = \sum_{r+y=i} f_r q_y$. Por lo que

$$fq + gq = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{u+v=i} f_u q_v + \sum_{r+y=i} f_r q_y \right).$$

Ahora bien, note que existe $1_A \in \coprod_{p \in \mathbb{Z}} A^p$. Consideremos el morfismo $1_M = Id_M : M \longrightarrow M$ y como $1_M(M^i) = M^i = M^{i+0}$, se tiene $1_M \in A^0$. Por lo que definimos $1_A = (f_i)$, donde

$$f_i = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq 0 \\ \\ 1_M & si \quad i = 0 \end{cases}$$

Veamos que $g \circ 1_A = g \ \forall \ g \in A$.
En efecto, tenemos que

$$g \circ 1_A = \left(\sum_{i=0}^{\infty} g_i \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i$$

con $h_i = \sum_{k+r=i} g_k f_r$. Luego $h_i = g_i f_0 + 0 + 0 + ...$ para cada i. Por lo que

$$g \circ 1_A = \sum_{i=0}^{\infty} h_i = \sum_{i=0}^{\infty} g_i \circ f_0 = \sum_{i=0}^{\infty} g_i \circ 1_M = \sum_{i=0}^{\infty} g_i = g$$

Por lo tanto A es un anillo graduado sociativo con unidad.

Veamos que A es una k-álgebra graduada para lo cual sólo falta ver que A tiene estructura de k-álgebra. En efecto, definimos un morfismo de anillos $\varphi : k \longrightarrow A$ tal que $\varphi(k) = (k_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, donde

$$k_i = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq 0 \\ \\ k1_M & si \quad i = 0 \end{cases}$$

Verificamos que φ es un morfismo de anillos. Sean $k, k' \in k$, entonces $\varphi(k+k') = ((k+k')i)$ donde

$$(k+k')i = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq 0 \\ \\ (k+k')1_M & si \quad i = 0 \end{cases}$$

Por otro lado, se tiene que

$$\varphi(k) = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq 0 \\ \\ k1_M & si \quad i = 0 \end{cases}$$

$$\varphi(k') = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq 0 \\ \\ k'1_M & si \quad i = 0. \end{cases}$$

En consecuencia,

$$\varphi(k) + \varphi(k') = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq 0 \\ \\ k1_M + k1_M & si \quad i = 0 \end{cases}$$

Ahora bien, si $k', \ k'' \in k$ entonces

$$\varphi(k'k'') = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq 0 \\ \\ k'k''1_M & si \quad i = 0, \end{cases}$$

y también

$$\varphi(k')\varphi(k'') = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq 0 \\ \\ k'1_M k''1_M & si \quad i = 0. \end{cases}$$

Así, $\varphi(k'k'') = \varphi(k')\varphi(k'')$. Finalmenet se tiene que

$$\varphi(1_k) = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq 0 \\ \\ 1_k 1_M = 1_M & si \quad i = 0, \end{cases}$$

Entonces A tiene estructura de k-módulo vía φ, donde

$$kf = \varphi(k)f = \varphi(k)(\sum_{i=0}^{\infty} f_i) = \sum_{i=0}^{\infty} kf_i.$$

La contención $Im(\varphi) \subseteq C(A)$ es clara. Por lo tanto, A es una álgebra graduada. $\square$

Proposición 1.1.14 *Considere la k-álgebra de la proposición 1.1.13 entonces A es una k-álgebra diferencialmente graduada.*

Demostración. Por la prosición 1.1.13 basta ver que A tiene diferencial. Definimos un morfismo $\delta : A \longrightarrow A$, como δ tiene que ser un morfismo de grupos abelianos y cada elemento de A es de la forma $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$ con $f_i \in A^i$, basta definir $\delta : A \longrightarrow A$ para $f \in A^p$. Ahora bien, dado que queremos hacer a δ un diferencial debe cumplir que $\delta(f) \in A^{p+1}$ para cada $f \in A^p$, es decir, $\delta(f) \in End(M)$ de grado $p+1$. Entonces para $f \in A^p$ y $m \in M$ definimos

$$\delta(f)(m) = d_M^{i+p} f(m) - (-1)^{gr(f)} f d_M^i (m) ...(*)$$

Recordemos que $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M^i$ por lo que $m = \sum_{i \in \mathbb{Z}} m_i$, con lo cual redefinimos

$$\delta(f)(m) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(d_M^{i+p} f(m_i) - (-1)^{gr(f)} f d_M^i (m_i) \right).$$

Ahora, para $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \in A$ se tiene que

$$\delta(f)(m) := \left(\sum_{i=0}^{\infty} \delta(f_i) \right)(m) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\delta(f_i)(m) \right).$$

Veamos que el morfismo $\delta : A \longrightarrow A$ es un diferencial. En efecto,

(a) *δ es morfismo de grupos.* Esta condición es clara, ya que el morfismo se definió para que cumpla con ser un morfismo de grupos abelianos de manera natural (ver $(*)$).

(b) *$\delta(A^p) \subseteq A^{p+1}$ para todo p.* Sean $f \in A^p$ y $m \in M^i$, entonces $f(m) \in M^{i+p}$. Como $d_M^{i+p} : M^{i+p} \longrightarrow M^{i+p+1}$ se tiene que $d_M^{i+p} f(m) \in M^{i+p+1}$. También $d_M^i(m) \in M^{i+1}$, por lo que $f d_M^i(m) \in M^{i+1+p}$. Por lo tanto, $\delta(f)(m) \in M^{i+p+1}$ para todo $m \in M$, entonces $\delta(f) \in A^{p+1}$.

(c) *Regla de Leibniz.* Sean $f \in A^p$, $g \in A^q$ tenemos que mostrar que

$$\delta(fg) = \delta(f)g + (-1)^{gr(f)} f\delta(g).$$

Como $\delta(f) \in End(M)$ queremos probar que

$$\delta(fg)(m) = \delta(f)g(m) + (-1)^{gr(f} f\delta(g)(m) \ \ \forall\ m \in M.$$

Dado que todo $m \in M$ es de la forma $m = \sum_{i\in\mathbb{Z}} m_i$ y el morfismo δ es un morfismo de grupos abelianos, basta probar que

$$\delta(fg)(m_i) = \delta(f)g(m_i) + (-1)^{gr(f)} f\delta(g)(m_i)$$

para $m_i \in M^i$. Por un lado, tenemos que $fg \in A^{p+q}$, entonces

$$\delta(fg)(m_i) = d_M^{i+p+q}(fg)(m_i) - (-1)^{gr(fg)}(fg)d_M^i(m_i).$$

Por otro lado, $g(m_i) \in M^{i+q}$, entonces

$$\delta(f)(g(m_i)) = d_M^{i+q+p} f(g(m_i)) - (-1)^{gr(f)} f d_M^{i+q}(g(m_i))$$

y

$$\begin{aligned}(-1)^{gr(f)} f\delta(g)(m_i) &= (-1)^{gr(f)} f[d_M^{i+q} g(m_i) - (-1)^{gr(g)} g d_M^i(m_i)]\\ &= (-1)^p f d_M^{i+q} g(m_i) - (-1)^{p+q} fg d_M^i(m_i).\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\delta(fg)(m_i) &= \delta(f)g(m_i) + (-1)^{gr(f)} f\delta(g)(m_i)\\ &= d_M^{i+q+p} f(g(m_i)) - (-1)^p f d_M^{i+q}(g(m_i))\\ &\qquad\qquad + (-1)^p f d_M^{i+q} g(m_i) - (-1)^{p+q} fg d_M^i(m_i)\\ &= d_M^{i+q+p} f(g(m_i)) - (-1)^{p+q} fg d_M^i(m_i).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\delta(fg)(m_i) = d_M^{i+p+q}\delta(f)g(m_i) + (-1)^{gr(f)} f\delta(g)(m_i)$. Ahora bien, para $m = \sum_{i\in\mathbb{Z}} m_i \in M$ tenemos

$$\begin{aligned}\delta(fg)(m) = \delta(fg)(\sum_{i\in\mathbb{Z}} m_i) &:= \sum_{i\in\mathbb{Z}}[\delta(fg)(m_i)]\\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} d_M^{i+p+q}\delta(f)g(m_i) + (-1)^{gr(f)} f\delta(g)(m_i)\\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} d_M^{i+p+q}\delta(f)g(m_i) + (-1)^{gr(f)} \sum_{i\in\mathbb{Z}} f\delta(g)(m_i)\\ &= d_M^{i+p+q}\delta(f)g(\sum_{i\in\mathbb{Z}} m_i) + (-1)^{gr(f)} f\delta(g)(\sum_{i\in\mathbb{Z}} m_i)\\ &= d_M^{i+p+q}\delta(f)g(m) + (-1)^{gr(f)} f\delta(g)(m).\end{aligned}$$

Asi, $\delta(fg) = d_M^{i+p+q}\delta(f)g + (-1)^{gr(f)} f\delta(g)$, por lo que se cumple la regla de Leibniz.

(d) $\delta^2 = 0$. Sea $f \in A^p$ y $m = \sum_{i\in\mathbb{Z}} m_i$, con $m_i \in M^i$. veamos que $\delta^2(f)(m) = 0$ para toda $m \in M$, para lo cual basta ver que $\delta^2(f)(m_i) = 0$ para toda $m_i \in M^i$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\delta^2(f)(m_i) = \delta(\delta)(m_i) &= d_M^{i+p+1}\delta(f)(m_i) - (-1)^{gr(\delta(f))}\delta(f)(d_M^i(m_i)) \\
&= d_M^{i+p+1}\left(d_M^{i+p} f - (-1)^p f d_M^i\right)(m_i) \\
&- (-1)^{p+1}\left(d_M^{i+p+1} f(d_M^i(m_i)) - (-1)^p d_M^{i+p+1}(d_M^i(m_i))\right) \\
&= d_M^{i+p+1} d_M^{i+p} f(m_i) - (-1)^p d_M^{i+p+1} f d_M^i(m_i) \\
&- (-1)^{p+1} d_M^{i+p+1} f(d_M^i(m_i)) + (-1)^p(-1)^{p+1} f d_M^{i+1} d_M^i(m_i) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se da ya que $d_M^{i+p+1}d_M^{i+p} = 0$, $d_M^{i+1}d_M^i = 0$ por ser parte de un complejo de cadena, y por ser $(-1)^p$, $(-1)^{p+1}$ de signos contrarios.
En consecuencia, $\delta^2(f)(m_i) = 0$ para cada m_i. Luego por ser δ un morfismo de grupos se tiene que $\delta(f)(m) = 0$ para cada $m \in M$, con lo cual se tiene que $\delta^2(f) = 0$ para $f \in A^p$ y así, $\delta^2 = 0$.

Por lo tanto, A es una k-álgebra diferencial. □

1.2. Módulos graduados y Diferenciales

Definición 1.2.1 *Sea A una k-álgebra graduada y M un A-módulo izquierdo. Se dice que M es un* ***A-módulo graduado a izquierda*** *si las siguiente condiciones se satisfacen*

(a) M admite una graduación como k-espacio vectorial, $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i$, *donde* M^i *es un k-subespacio vectorial,* $\forall i \in \mathbb{Z}$. *Los elementos de* M^i *se llaman homogéneos de grado i. Escribimos* $gr(m) = i$ *(ó bien* $|m| := gr(m)$*) si y sólo si* $m \in M^i$.

(b) Si $a \in A^i$ *y* $m \in M^j$, *entonces* $am \in M^{i+j}$.

Definición 1.2.2 *Sea A una k-álgebra diferencial y M un A-módulo a izquierda. Se dice que M es un* ***A-módulo diferencialmente graduado a izquierda*** *si las siguientes condiciones se cumplen:*

(a) $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i$ *es un A-módulo graduado a izquierda.*

(b) M tiene una transformación lineal $d_M : M \longrightarrow M$ *que satisface:*

(b1) $d_M(M^i) \subseteq M^{i+1}$ $\forall i \in \mathbb{Z}$,

(b2) $d_M^2 = 0$.

(b3) Si $a \in A$ *y* $m \in M$ *son elementos homogéneos se cumple*

$$d_M(am) = d(a)m + (-1)^{gr(a)} a d_M(m).$$

Ahora vamos a definir los A-módulos a derecha graduados, para ello recordamos la defínción de anillo opuesto.

Definición 1.2.3 *Sea A un anillo. Definimos el* ***anillo opuesto***, $\mathbf{A^{op}}$, *como sigue:*

(a) A^{op} *tiene estructura de grupo abeliano, más aún,* $(A^{op}, +) := (A, +)$.

(b) Se define un producto en A^{op} *mediante la regla* $a \cdot^{op} b := b \cdot a$, *donde* $\cdot$ *denota el producto del anillo* A.

(c) $(A^{op}, \cdot^{op})$ *es un semigrupo.*

Definición 1.2.4 *Sea A una k-álgebra graduada.* A^{op} *es una k-álgebra graduada cuyo conjunto y estructura de k-espacio vectorial graduado es la misma de A. Por lo tanto,* $(A^{op})^m := A^m$ *para toda* $m \in \mathbb{Z}$. *Si* $a \in A^p$ *y* $b \in A^q$ *definimos*

$$a * b := (-1)^{pq} b \cdot a$$

donde $\cdot$ *es la operación del anillo A. En general, si* $f, g \in A$ *con* $f = \sum_{i\in\mathbb{Z}} f_i$, $g = \sum_{i\in\mathbb{Z}} g_i$ *entonces:*

$$f * g := \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} f_i\right)\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} g_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} h_i$$

con $h_i = \sum_{t+k=i} f_t * g_k = \sum_{t+k=i} (-1)^{gr(f_t)gr(g_k)} f_t g_k$

El siguiente lema muestra que A^{op} tiene estructura de k-álgebra graduada de manera natural si A es una k-álgebra graduada.

Lema 1.2.5 *Sea A una k-álgebra graduada. Entonces* A^{op} *es una k-álgebra graduada.*

Demostración. Dado de que A es k-álgebra graduada, $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^p$ como grupo abeliano, entonces $A^{op} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} (A^{op})^p$. Luego, $A^p A^q \subseteq A^{p+q}$ y como $a * b = (-1)^{pq} ba$ se tiene que $(A^{op})^p (A^{op})^q \subseteq (A^{op})^{p+q}$.
Veamos ahora que A^{op} tiene estructura de anillo con la operación $a * b = (-1)^{pq} ba$. En efecto,

- *Cerradura.* Se sigue de la definición de $*$.

- *Asociatividad.* Sean $f, g, h \in A$ donde $f = \sum_{i\in\mathbb{Z}} f_i$, $g = \sum_{i\in\mathbb{Z}} g_i$, $h = \sum_{i\in\mathbb{Z}} h_i$. Entonces, $f * g = \sum_{i\in\mathbb{Z}} q_i$ con $q_i = \sum_{\alpha+\beta=i}(-1)^{\alpha\beta} f_\alpha g_\beta$. Luego, tenemos que

$$(f * g) * h = \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} q_i\right)\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} h_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} t_i$$

donde,

$$\begin{aligned} t_i = \sum_{\gamma+\delta=i} (-1)^{\gamma\delta} q_\gamma h_\delta &= \sum_{\gamma+\delta=i} (-1)^{\gamma\delta} \left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} (-1)^{\alpha\beta} f_\alpha g_\beta\right) \\ &= \sum_{\gamma+\delta=i} \sum_{\alpha+\beta=i} (-1)^{\gamma\delta}(-1)^{\alpha\beta} \left(f_\alpha g_\beta\right) h_\delta \\ &= \sum_{\alpha+\beta+\delta=i} (-1)^{\gamma\delta}(-1)^{\alpha\beta} \left(f_\alpha g_\beta\right) h_\delta. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$g * h = \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} g_i\right)\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} h_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} u_i$$

donde $u_i = \sum_{\epsilon+\lambda=i}(-1)^{\epsilon\lambda} g_\epsilon h_\lambda$. Luego, tenemos que

$$f * (g * h) = \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} f_i\right)\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} u_i\right) = \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} v_i\right)$$

con $\sum_{\mu+\eta=i} f_\mu u_\eta$

$$\begin{aligned} v_i = \sum_{\mu+\eta=i} (-1)^{\mu\eta} f_\mu u_\eta &= \sum_{\mu+\eta=i} (-1)^{\mu\eta} f_\mu \left(\sum_{\epsilon+\lambda=\eta} (-1)^{\epsilon\lambda} g_\epsilon h_\lambda\right) \\ &= \sum_{\mu+\eta=i} \sum_{\epsilon+\lambda=\eta} (-1)^{\mu\eta}(-1)^{\epsilon\lambda} f_\mu \left(g_\epsilon h_\lambda\right) \\ &= \sum_{\mu+\epsilon+\lambda=i} (-1)^{\mu\eta}(-1)^{\epsilon\lambda} f_\mu \left(g_\epsilon h_\lambda\right). \end{aligned}$$

Para ver que las sumas coinciden basta ver que coinden en cada sumando, por lo que tomamos el cambio de variables $\mu = \alpha$, $\epsilon = \beta$ y $\lambda = \delta$, por lo que tenemos

$$\begin{aligned}(-1)^{\gamma\delta}(-1)^{\alpha\beta}\left(f_\alpha g_\beta\right)h_\delta &= (-1)^{(\alpha+\beta)\delta}(-1)^{\alpha\beta}\left(f_\alpha g_\beta\right)h_\delta \\ &= (-1)^{(\mu+\epsilon)\lambda}(-1)^{\mu\epsilon}f_\mu\left(g_\epsilon h_\lambda\right) \\ &= (-1)^{\mu\lambda}(-1)^{\epsilon\lambda}(-1)^{\mu\epsilon}f_\mu\left(g_\epsilon h_\lambda\right) \\ &= (-1)^{\mu(\lambda+\epsilon)}(-1)^{\epsilon\lambda}f_\mu\left(g_\epsilon h_\lambda\right) \\ &= (-1)^{\mu\eta}(-1)^{\epsilon\lambda}f_\mu\left(g_\epsilon h_\lambda\right).\end{aligned}$$

Lo cual implica que $f*(g*h)=(f*g)*h$.

- *Distributividad.* Sean $f,g,h\in A^{op}$, entonces

$$(f+g)*h=\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(f_i+g_i)\right)*\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}h_i\right)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}t_i$$

donde

$$t_i=\sum_{\alpha+\beta=i}(-1)^{\alpha\beta}(f_\alpha+g_\alpha)h_\beta=\sum_{\alpha+\beta=i}(-1)^{\alpha\beta}f_\alpha h_\beta+\sum_{\alpha+\beta=i}(-1)^{\alpha\beta}g_\alpha h_\beta.$$

Por otro lado,

$$f*h=\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}f_i\right)\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}h_i\right)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}u_i$$

con $u_i=\sum_{\gamma+\delta=i}(-1)^{\gamma\delta}f_\gamma h_\delta$ y,

$$g*h=\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}g_i\right)\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}h_i\right)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}w_i$$

donde $w_i=\sum_{\epsilon+\lambda=i}(-1)^{\epsilon\lambda}g_\epsilon h_\lambda$. Así tenemos que $f*h+g*h=\sum_{i\in\mathbb{Z}}s_i$ con

$$\begin{aligned}s_i &= \sum_{\gamma+\delta=i}(-1)^{\gamma\delta}f_\gamma h_\delta+\sum_{\epsilon+\lambda=i}(-1)^{\epsilon\lambda}g_\epsilon h_\lambda \\ &= \sum_{\gamma+\delta=i}(-1)^{\gamma\delta}f_\gamma h_\delta+\sum_{\gamma+\delta=i}(-1)^{\gamma\delta}g_\gamma h_\delta \\ &= \sum_{\gamma+\delta=i}(-1)^{\gamma\delta}\left(f_\gamma h_\delta+g_\gamma h_\delta\right) \\ &= \sum_{\gamma+\delta=i}(-1)^{\gamma\delta}\left(f_\gamma+g_\gamma\right)h_\delta=t_i.\end{aligned}$$

La otra distributividad es similar.

- *Unidad.* Para $f \in A^{op}$ se tiene que

$$f * 1_A = \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} f_i\right) * \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta_{0i}1_A\right) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} t_i$$

donde $t_i = \sum_{\alpha+\beta=i}(-1)^{\alpha\cdot 0} f_\alpha \delta_{0\beta}1_A = (-1)^{\alpha 0} f_i 1_A = f_i 1_A = f_i$. En consecuencia,

$$f * 1_A = \sum_{i\in\mathbb{Z}} t_i = \sum_{i\in\mathbb{Z}} f_i = f$$

Por lo tanto, A^{op} es una naillo con unidad vía $f * g = (-1)^{gr(a)gr(b)}gf$. Luego, A^{op} es un anillo graduado.

Ahora bien, por ser A una k-álgebra graduada, A^p es un k-espacio vectorial para cada $p \in \mathbb{Z}$, por lo que $(A^{op})^p$ es un k-espacio vectorial para todo $p \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, A^{op} es una k-álgebra graduada. □

Proposición 1.2.6 *Si A es una k-álgebra diferencial, entonces $A^{op} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$ es una k-álgebra diferencial, donde la diferencial de A^{op} es la misma que la de A.*

Demostración. Por el Lema 1.2.5 tenemos que A^{op} es una k-álgebra graduada, basta ver que tiene diferencial. Definimos $d : A^{op} \longrightarrow A^{op}$ como $d^{op}(a) = d(a)$, es decir, el diferencial de A^{op} es el mismo que el de A. En efecto,

(a) Dado que $d : A \longrightarrow A$ es diferencial para A se tiene que $d(a) \in A^{p+1}$ para cada $p \in \mathbb{Z}$. En consecuencia, $d^{op}(a) = d(a) \in A^{p+1} = (A^{op})^{p+1}$ $\forall p \in \mathbb{Z}$.

(b) Por ser d direncial para A, $d^2 = 0$. Así, $(d^{op})^2 = d^2 = 0$.

(c) Ahora bien, $d^{op} : A^{op} \longrightarrow A^{op}$ verifica la regla de Leibniz. En efecto, sean $a \in A^p$ y $b \in A^q$ elementos homogéneos, veamos que se verifica la siguiente igualdad

$$d(a * b) = d(a) * b + (-1)^{gr(a)} a * d(b).$$

Dado que d es diferencial para A

$$\begin{aligned} d(a * b) &= d((-1)^{pq}ba) \\ &= (-1)^{pq} d(ba) \\ &= (-1)^{pq} \left(d(b)a + (-1)^p b d(a)\right) \\ &= (-1)^{pq} \left((-1)^{gr(a)gr(d(b))} a * d(b) + (-1)^q (-1)^{gr(d(a)gr(b)} d(a) * b\right) \\ &= (-1)^{pq}(-1)^{p(q+1)} a * d(b) + (-1)^{pq}(-1)^q(-1)^{(p+1)q} d(a) * b \\ &= (-1)^p a * d(b) + d(a) * b. \end{aligned}$$

Por lo tanto, A^{op} es una k-álgebra diferencial.

□

En vista de la proposición anterior podemos dar la siguiente definición para un A- módulo graduado a derecha.

Definición 1.2.7 *(a) Si A es una k-álgebra graduada, un **A-módulo graduado a derecha M** es un A^{op}-módulo graduado a izquierda.*

*(b) Si A es una k-álgebra diferencial, un **A-módulo diferencial graduado a derecha M** es un A^{op}-módulo diferencial graduado a izquierda.*

Lo siguiente caracteriza a los A-módulos graduados a derecha.

Proposición 1.2.8 *Sean M un k-espacio vectorial con graduación $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i$ y A una k-álgebra graduada. Entonces M es un A-módulo graduado a derecha si y sólo si existe una transformación bilineal $\psi : M \times A \longrightarrow M$ donde $\psi(m,a) = m \cdot a$ tal que*

(a) Si $a \in A^i$ y $m \in M^j$, entonces $m \cdot a \in M^{i+j}$.

(b) $m \cdot 1 = m \ \forall m \in M$.

(c) Si $a, b \in A$ son elementos homogéneos y $m \in M$,

$$(m \cdot a) \cdot b = (-1)^{gr(a)gr(b)} m \cdot (ab)$$

Demostración.
($\Rightarrow$) Supongamos que M es un A-módulo graduado a derecha, por tanto tenemos que M es un A^{op}-módulo graduado a izquierda, con lo cual definimos $\psi : M \times A \longrightarrow M$ con $\psi(m,a) := m \cdot a = a \cdot^{op} m$.
Veamos que se cumplen las tres condiciones:

(a) Sea $a \in A^i$, $m \in M^j$. Dado que m es un A^{op}-módulo graduado a izquierda tenemos que $a \cdot^{op} m \in M^{i+j}$, y por lo tanto, $m \cdot a = a \cdot^{op} m \in M^{i+j}$.

(b) Por ser M un A^{op}-módulo $m \cdot 1 := 1 \cdot^{op} m = m$ para toda $m \in M$.

(c) Sean a, b elementos homogéneos de A. Tenmos que

$$\begin{aligned}(m \cdot a) \cdot b = b \cdot^{op} (m \cdot a) &= b \cdot^{op} (a \cdot^{op} m) \\ &= (b * a) \cdot^{op} m \\ &= \Big((-1)^{gr(a)gr(b)} ab\Big) \cdot^{op} m \\ &= (-1)^{gr(a)gr(b)} (ab) \cdot^{op} m \\ &= (-1)^{gr(a)gr(b)} m \cdot (ab)\end{aligned}$$

La bilinealidad de ψ se sigue de que M es un A^{op}-módulo izquierdo.

($\Leftarrow$) Supongamos que existe $\psi : M \times A \longrightarrow M$ bilineal tal que cumple las tres condiciones. Queremos ver que M es un A-módulo graduado derecho, entonces veamos que M es un A^{op}-módulo graduado izquierdo.

En efecto, por hipótesis $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i$ con M^i un k-espacio vectorial para cada $i \in \mathbb{Z}$. Definimos $\theta : A^{op} \times M \longrightarrow M$ como $\theta(a, m) := \psi(m, a) = a \cdot^{op} m$. Dado que ψ es bilineal se sigue que θ también lo es. Entonces

- $(a + b) \cdot^{op} m = a \cdot^{op} m + b \cdot^{op} m$
- $a \cdot^{op} (m + m') = a \cdot^{op} m + a \cdot^{op} m'$.

También por la condición (2) se tiene que

$$1 \cdot^{op} m = \psi(m, 1) = m \cdot 1 = m$$

$$\begin{aligned}
(a * b) \cdot^{op} m &= \left((-1)^{gr(a)gr(b)} ba\right) \cdot^{op} m \\
&= m \cdot \left((-1)^{gr(a)gr(b)} ba\right) \\
&= (-1)^{gr(a)gr(b)} m \cdot (ba) \\
&= (m \cdot b) \cdot a \\
&= a \cdot^{op} (m \cdot b) \\
&= a \cdot^{op} (b \cdot^{op} m).
\end{aligned}$$

En consecuencia, M es un A^{op}- módulo izquierdo. Ahora bien, como ψ cumple la condición (a) para $a \in A^i$ y $m \in M^j$, se tiene que $a \cdot \cdot^{op} m = a \cdot m \in M^{i+j}$. Por lo tanto, M es un A^{op}-módulo graduado izquierdo y luego, M es un A-módulo graduado derecho.

□

Proposición 1.2.9 *Sea M un k-espacio vectorial con graduación $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i$ y provisto de una transformación lineal $d_M : M \longrightarrow M$ tal que*

(a) $d_M(M^i) \subseteq M^{i+1}$ $\forall i \in \mathbb{Z}$,

(b) $d_M^2 = 0$.

Sea A una k-álgebra diferencial con diferencial d. Entonces M es un A-módulo diferencial derecho, con diferencial d_M si y sólo si existe una transformación bilineal $\psi : M \times A \longrightarrow M$ donde $\psi(m, a) = m \cdot a = a \cdot^{op} m$ tal que

(a) ψ satisface las condiciones de la proposición 1.2.8.

(b) *Si $a \in A$ y $m \in M$ son homogéneos, entonces*

$$d_M(m \cdot a) = m \cdot d(a) + (-1)^{gr(a)} d_M(m) \cdot a$$

Demostración. ($\Longrightarrow$) Supongamos que M es un A-módulo direncial derecho, por lo que M es un A-módulo graduado derecho y por la proposición 1.2.8 existe $\psi : M \times A \longrightarrow M$ bilineal, la cual satisface las condiciones requeridas.
Veamos que se cumple (b). En efecto, sea $a \in A$ y $m \in M$ homogéneos, entonces

$$\begin{aligned} d_M(m \cdot a) = d_M(a \cdot^{op} m) &= d(a) \cdot^{op} m + (-1)^{gr(a)} a \cdot^{op} d_M(m) \\ &= m \cdot d(a) + (-1)^{gr(a)} d_M(m) \cdot a. \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Dado que existe $\psi : M \times A \longrightarrow M$ bilineal que cumple (a), se sigue de la proposición 1.2.8 que M es un A-módulo graduado derecho. Luego, por hipótesis general existe una función lineal $d_M : M \longrightarrow M$ tal que $d_M^2 = 0$ y $d_M(M^i) \subseteq M^{i+1}$ para cada $i \in \mathbb{Z}$, y de (b) se cumple la regla de Leibniz. Por lo tanto M es un A-módulo diferencial derecho. □

Lema 1.2.10 *Sea A una álgebra diferencial. Entonces $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A^i$ es un A-módulo diferencial derecho.*

Demostración. Veamos que A es un A-módulo graduado derecho. En efecto, dado que A es una k-álgebra diferencial tenemos que A^i tiene estructura de k-espacio vectorial para cada $i \in \mathbb{Z}$ y $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A^i$.
Definimos una acción derecha como sigue, para $a, b \in A$ elementos homogéneos de A, $a * b = (-1)^{gr(a)gr(b)} ab$. En general, para elementos $a, b \in A$, estendemos por linealidad

$$a*b := \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i\right) * \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{\alpha+\beta=i} (a_\alpha * b_\beta)\right) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{\alpha+\beta=i} (-1)^{\alpha\beta} (a_\alpha b_\beta)\right)$$

Veamos que está acción hace que A sea un A-módulo derecho. En efecto, sean $a, b, c, d \in A$, entonces

(a) $(a * b) * c = a*(b*c)$. Por un lado, $a*b = \sum_{i \in \mathbb{Z}} t_i$ con $t_i = \sum_{\alpha+\beta=i} (-1)^{\alpha\beta} a_\alpha b_\beta$.
Luego, $(a * b) * c = \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} t_i\right) \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} u_i$, donde

$$\begin{aligned} u_i = \sum_{\gamma+\delta=i} t_\gamma * c_\delta &= \sum_{\gamma+\delta=i} (-1)^{\gamma\delta} t_\gamma c_\delta \\ &= \sum_{\gamma+\delta=i} (-1)^{\gamma\delta} \left(\sum_{\alpha+\beta=i} (-1)^{\alpha\beta} a_\alpha b_\beta\right) c_\delta \\ &= \sum_{\alpha+\beta+\delta=i} (-1)^{\gamma\delta} (-1)^{\alpha\beta} (a_\alpha b_\beta) c_\delta \\ &= \sum_{\alpha+\beta+\delta=i} (-1)^{\alpha\delta} (-1)^{\beta\delta} (-1)^{\alpha\beta} (a_\alpha b_\beta) c_\delta \end{aligned}$$

Por otro lado, $b * c = \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} b_i\right) * \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} w_i$, donde $w_i = \sum_{\epsilon+\eta=i} b_\epsilon * c_\eta = \sum_{\epsilon+\eta=i}(-1)^{\epsilon\eta} b_\epsilon c_\eta$. De esta manera tenemos que, $a*(b*c) = \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i\right) * \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} w_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} v_i$, donde

$$\begin{aligned} v_i = \sum_{\lambda+\mu=i} a_\lambda * w_\mu = \sum_{\lambda+\mu=i} (-1)^{\lambda\mu} a_\lambda w_\mu &= \sum_{\lambda+\mu=i} (-1)^{\lambda\mu} a_\lambda \left(\sum_{\epsilon+\eta=\mu} (-1)^{\epsilon\eta} b_\epsilon c_\eta \right) \\ &= \sum_{\lambda+\epsilon+\eta=i} (-1)^{\lambda\mu}(-1)^{\epsilon\eta} a_\lambda (b_\epsilon c_\eta) \\ &= \sum_{\lambda+\epsilon+\eta=i} (-1)^{\lambda\mu}(-1)^{\epsilon\eta} a_\lambda (b_\epsilon c_\eta) \\ &= \sum_{\lambda+\epsilon+\eta=i} (-1)^{\lambda\epsilon}(-1)^{\lambda\eta}(-1)^{\epsilon\eta} a_\lambda (b_\epsilon c_\eta). \end{aligned}$$

Considerando el cambio de variable $\alpha = \lambda$, $\beta = \epsilon$, $\delta = \eta$ en las expresiones para u_i y v_i obtenemos $(a*b)*c = a*(b*c)$.

(b) $(a+b)*c = a*c+b*c$. Primero, por un lado tenemos

$$(a+b)*c = \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i + b_i\right)\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} t_i,$$

donde

$$t_i = \sum_{\alpha+\beta=i} (a_\alpha + b_\alpha) * c_\beta = \sum_{\alpha+\beta=i} (-1)^{\alpha\beta} a_\alpha c_\beta + b_\alpha c_\beta.$$

Por otro lado,

$$a*c = \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i\right)\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} w_i$$

con $w_i = \sum_{\gamma+\epsilon=i} a_\gamma * c_\epsilon = \sum_{\gamma+\epsilon=i} (-1)^{\gamma\epsilon} a_\gamma c_\epsilon$.

$$b*c = \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} b_i\right)\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} v_i$$

con $v_i = \sum_{\lambda+\eta=i} b_\lambda * c_\eta = \sum_{\lambda+\eta=i} (-1)^{\lambda\eta} b_\lambda c_\eta$. Así,

$$a*c+b*c = \sum_{i\in\mathbb{Z}} w_i + \sum_{i\in\mathbb{Z}} v_i = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{\gamma+\epsilon=i} (-1)^{\gamma\epsilon} a_\gamma c_\epsilon \right) + \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{\lambda+\eta=i} (-1)^{\lambda\eta} b_\lambda c_\eta. \right)$$

Nuevamente considerando el cambio de variable $\alpha = \gamma = \lambda$, $\epsilon = \eta = \beta$ se tiene $(a+b)*c = a*c+b*c$.

(c) De manera análoga a la parte (b) se obtiene que $a * (b + c) = a * b + a * c$ para todo $a, b, c \in A$

(d) Sea $1_A \in A$ y $a \in A$, entonces

$$a * 1_A = \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta_{i,0} 1_A\right)\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} t_i$$

donde

$$t_i = \sum_{\alpha+\beta=i} a_\beta * (\delta_{\alpha,0} 1_A) = \sum_{\alpha+\beta=i} (-1)^{\alpha\beta} a_\beta\,(\delta_{\alpha,0} 1_A) = (-1)^{0i} a_i \delta_{0,0} 1_A = a_i.$$

Por lo que $a * 1_A = a$ para todo $a \in A$.

En consecuencia A es un A-módulo derecho vía $*$. Ahora bien, sean $a, b \in A$ homogéneo y $c \in A$, entonces

$$\begin{aligned}
(c * a) * b = \left((-1)^{gr(c)gr(a)} ca\right) * b &= (-1)^{gr(c)gr(a)}(ca) * b \\
&= (-1)^{gr(c)gr(a)}(-1)^{(gr(c)+gr(a))gr(b)}(ca)b \\
&= (-1)^{gr(c)gr(a)}(-1)^{(gr(c)gr(b)}(-1)^{gr(a))gr(b)}cab \\
&= (-1)^{gr(c)(gr(a)+gr(b))}(-1)^{gr(a)gr(b)}c(ab) \\
&= (-1)^{gr(a)gr(b)}c * (ab)
\end{aligned}$$

Así, por la proposición 1.2.8 A es un A-módulo graduado derecho.

Definimos ahora la diferencial de A como $d_A := d$ la misma diferencial de A como álgebra diferencial. Por ser A una álgebra diferencial se tiene que $d(A^i) \subseteq A^{i+1}$ $\forall i \in \mathbb{Z}$ y $d^2 = 0$, por lo que $d_A(A^i) \subseteq A^{i+1}$ $\forall i \in \mathbb{Z}$ y $d_A^2 = 0$. Por la proposición 1.2.9 basta ver que si $a \in A$ y $b \in A$ son homogéneos, entonces

$$d_A(a * b) = a * d(b) + (-1)^{gr(b)} d(a) * b.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
d_A(a * b) = d_A\left((-1)^{gr(a)gr(b)}ab\right) &= d\left((-1)^{gr(a)gr(b)}ab\right) \\
&= (-1)^{gr(a)gr(b)}d(ab) \\
&= (-1)^{gr(a)gr(b)}\left(d(a)b + (-1)^{gr(a)}ad(b)\right) \\
&= (-1)^{gr(a)gr(b)}d(a)b + (-1)^{gr(a)(1+gr(b))}ad(b) \\
&= a * d(b) + (-1)^{gr(b)}d(a) * b.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, A es un A-módulo diferencial. $\square$

Definición 1.2.11 *El A-módulo diferencial del Lema 1.2.10 se conoce como **A-módulo diferencial regular derecho de A**.*

Ahora bien, sea A una k-álgebra graduada y M un A-módulo graduado derecho. Definimos $M[1] := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}(M[1])^i$ donde $(M[1])^i := M^{i+1}$ y la acción $m * a := (-1)^{gr(a)}ma$ para $m \in M$ y $a \in A$ homogéneos.

Proposición 1.2.12 *Sea k un campo.*

(a) Si A es una k-álgebra graduada. Entonces $M[1]$ es un A-módulo graduado derecho, es decir, $M[1] \in Gr - Mod(A^{op})$.

(b) Si A es una k-álgebra diferencial y M es un A-módulo diferncial derecho. Definimos $d_{M[1]} := -d_M$, entonces $M[1]$ es un A-módulo diferencial derecho.

Demostración. Veamos primero que $M[1]$ es un A-módulo graduado derecho. Definimos una función $\varphi : M[1] \times A \longrightarrow M[1]$ como $\varphi(m,a) := m \cdot a$ para $m \in (M[1])^i$ y $a \in A^j$ elemenos homogéneos. La función φ la podemos extender por linealidad para $m \in M$ y $a \in A$ como

$$\varphi(m,a) = m \cdot a = \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} m_i\right)\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j\right) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} t_i$$

donde $t_i = \sum_{\alpha+\beta=i} m_q a_k$. De esta manera por definición, la función φ es bilineal. Ahora veamos que se cumplen las condiciones de la Proposición 1.2.8. En efecto,

(a) Sean $a \in A^i$ y $m \in (M[1])^j$. Dado que $m \in M^{j+1}$ y M es un A-módulo graduado derecho, por la Proposición 1.2.8(a) $m \cdot a \in M^{i+j+1}$, es decir, $m \cdot a \in (M[1])^{i+j}$.

(b) Por ser M un A-módulo graduado derecho tenemos que $m \cdot 1 = m$ para toda $m \in M$, entonces $m \cdot 1 = m$ para todo $m \in M[1]$.

(c) Sean $a, b \in A$ homogéneos y $m \in (M[1])^i$, es decir, $m \in M^{i+1}$, entonces

$$(m * a) * b = \Big((-1)^{gr(a)} m \cdot a\Big) * b = (-1)^{gr(a)}(-1)^{gr(b)}(m \cdot a) \cdot b.$$

Por ser M un A-módulo graduado derecho tenemos que $(m \cdot a) \cdot b = (-1)^{gr(a)gr(b)} m \cdot (a \cdot b)$. Así,

$$\begin{aligned}(m * a) * b &= (-1)^{gr(a)}(-1)^{gr(b)}(-1)^{gr(a)gr(b)} m \cdot (a \cdot b)\\ &= (-1)^{gr(a)gr(b)}\Big((-1)^{gr(a)+gr(b)} m \cdot (a \cdot b)\Big)\\ &= (-1)^{gr(a)gr(b)} m * (a \cdot b).\end{aligned}$$

Por lo tanto, por la Proposición 1.2.8 $M[1]$ es un A-módulo graduado derecho.

Ahora bien, por definición tenemos que $M[1] := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}(M[1])^i$ y por ser M es un A-módulo diferencial derecho tenemos que $d_M : M \longrightarrow M$ es una tranformación lineal, por lo que $d_{M[1]} : M[1] \longrightarrow M[1]$ definida como $d_{M[1]} := -d_M$ es también una tranformación lineal. Verifiquemos ahora que $d_{M[1]}$ cumple las hipótesis de la Proposición 1.2.9. En efecto,

(a) Sea $m \in (M[1])^i$, es decir, $m \in M^{i+1}$. Luego, $d_{M[1]}(m) := -d_M(m) \in M^{(i+1)+1} = M^{i+2} = (M[1])^{i+1}$. En conscuencia, $d_{M[1]}\left((M[1])^i\right) \subseteq (M[1])^{i+1}$.

(b) Tenemos $d^2_{M[1]} = d_{M[1]} \circ d_{M[1]} = (-d_M)(-d_M) = d^2_M = 0$, donde la última igualdad se dá por ser M un A-módulo diferencial derecho.

(c) Ahora veamos que se cumple la regla de Leibniz, es decir, que se cumple la siguiente igualdad

$$d_{M[1]}(m * a) = m * d(a) + (-1)^{gr(a)}\left(d_{M[1]}(m) * a\right).$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
d_{M[1]}(m * a) &= d_{M[1]}\left((-1)^{gr(a)} m \cdot a\right) \\
&= -d_M\left((-1)^{gr(a)} m \cdot a\right) \\
&= -(-1)^{gr(a)} d_M(m \cdot a) \\
&= -(-1)^{gr(a)}\left(m \cdot d(a) + (-1)^{gr(a)} d_M(m) \cdot a\right) \\
&= (-1)^{gr(a)}\left(-(m \cdot d(a)) + (-d_M(m)) * a\right) \\
&= (-1)^{gr(a)}\left((-1)(-1)^{gr(a)+1} m * d(a) + d_{M[1]}(m) * a\right) \\
&= m * d(a) + (-1)^{gr(a)}\left(d_{M[1]}(m) * a\right)
\end{aligned}$$

Así, por la Proposición 1.2.9 se tiene que $M[1]$ es un A-módulo diferencial derecho. $\square$

Observación 1.2.13 *Si M es un A-módulo graduado (respectivamente diferencial), de manera análoga a la construcción anterior, podemos construir el A-módulo graduado (respectivamente diferecial) $M[-1]$. Notemos que $(M[-1])[1] = M = (M[1])[-1]$.*

Ejemplo 1.2.14 *Sea $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$, $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i$, donde M es un A.módulo derecho diferencial y supongamos que $d(A^0) = 0$. Consideremos a A^0 con $d = 0$. Entonces $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i$ es un A^0-módulo derecho diferencial y d_M es un morfismos de A^0-módulo derecho.*

Definición 1.2.15 *Si A es una k-álgebra graduada.* ***Gr-Mod(****A^{op}****)*** *es la categoría cuyos objetos son los A-módulos derechos graduados y sus morfismos $f : M \longrightarrow N$ son funciones k-lineales que cumplen lo siguiente:*

(a) $f(ma) = f(m)a$ *para toda* $m \in M$ *y para toda* $a \in A$,

(b) $f(M^i) \subseteq N^i$ *para cada* $i \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.2.16 *Si A es una k-álgebra graduada.* ***Dg-Mod(***A^{op}***)*** *es la categoría cuyos objetos son los A-módulos diferenciales y sus morfismos $f : M \longrightarrow N$, son aquellos, que además de ser morfismos de A-módulos derechos graduados, conmutan con el diferencial, es decir, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_M"'] & N \arrow[d, "d_N"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

Lema 1.2.17 *Sea A una k-álgebra diferencial graduada.*

(a) Si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo en $Gr - Mod(A^{op})$ que es biyectivo como función, entonces f es un isomorfismo en $Gr - Mod(A^{op})$.

(b) Si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo en $Dg - Mod(A^{op})$ que es biyectivo como función, entonces f es un isomorfismo en $Dg - Mod(A^{op})$.

Demostración.

(a) Sean $f : M \longrightarrow N$ un morfismo biyectivo en $Gr-Mod(A^{op})$y $g : N \longrightarrow M$ su función inversa, es decir, $gf{=}1_M$ y $fg = 1_N$. Como f es morfismo en $Gr - Mod(A^{op})$ $f(M^i) \subseteq N^i$ para cada $i \in \mathbb{Z}$, por ser f biyectiva, para $n \in N^i$, existe $m = \sum_{i\in\mathbb{Z}} m_i \in \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i = M$ tal que $n = f(m) = f\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} m_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} f(m_i)$ y $\sum_{i\in\mathbb{Z}} f(m_i) \in \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} N^i$, entonces $n = f(m) = f(m_i)$, por lo que $f(M^i) = N^i$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Luego, $g(N^i) = gf(M^i) = 1_M(M^i) = M^i$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, g es homogéneo. Además, para $n \in N$ y $a \in A$ tenemos

$$\begin{aligned} f(g(na) - g(n)a) = fg(na) - f(g(n)a) &= fg(na) - f(g(n))a \\ &= fg(na) - fg(n)a \\ &= 1_N(na) - 1_N(n)a \\ &= na - na = 0. \end{aligned}$$

Así, $f(g(na) - g(n)a) = 0$, como f es inyectiva se tiene que $g(na) = g(n)a$. En consecuencia g es morfismo en $Gr - Mod(A^{op})$ e inverso de f. Por lo tanto, f es un isomorfismo en $Gr - Mod(A^{op})$.

(b) Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo biyectivo en $Dg - Mod(A^{op})$ y sea $g : N \longrightarrow M$ su función inversa. Por inciso (a) $g : N \longrightarrow M$ es morfismo en

$Gr-Mod(A^{op})$ e inversa de f. Basta ver que g conmuta con el diferencial, es decir, $d_M g = g d_N$. En efecto,

$$\begin{aligned} f(d_M g(n) - g d_N(n)) = f(d_M g(n)) - f(g d_N(n)) &= f d_M g(n) - f g d_N(n) \\ &= d_N f g(n) - f g d_N(n) \\ &= d_N(n) - d_N(n) = 0. \end{aligned}$$

Dado que f es inyectiva se tiene $d_M g(n) = g d_N(n)$.

□

1.3. $Gr-Mod(A^{op})$ y $Dg-Mod(A^{op})$ categorías abelianas

Los siguientes resultados son previos para poder verificar el resultado central de la sección el cual es demostrar que las categorías $Gr-Mod(A^{op})$ y $Dg-Mod(A^{op})$ son categorías abelianas,.

Proposición 1.3.1 *Sea A una k-álgebra diferencial graduada. Entonces $Gr-Mod(A^{op})$ y $Dg-Mod(A^{op})$ tienen objeto cero.*

Demostración. Sea $Z = 0$ el k-espcio vectorial cero, definimos la acción $Z \times A \longrightarrow Z$ dada por $0 \cdot a := 0$ y $d_Z := 0$. Es claro que $Z = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} Z^i$ donde $Z^i = 0$ para cada $i \in \mathbb{Z}$, por lo que $Z \in Gr-Mod(A^{op})$.

Veamos que Z es un objeto cero de la categoría $Gr-Mod(A^{op})$. Dado que $Hom_{Gr-Mod(A^{op})}(M, Z) \subseteq Hom_{Vec-k}(M, Z)$ y $Z = 0$ es un objeto cero en Vec-k tenemos que

$$|Hom_{Gr-Mod(A^{op})}(M, Z)| \leq 1.$$

Ahora bien, note que tenemos un morfismo $\varphi : M \longrightarrow Z$ en $Gr-Mod(A^{op})$ dado por $\varphi(m) = 0$ para todo $m \in M$. En consecuencia,

$$|Hom_{Gr-Mod(A^{op})}(M, Z)| = 1$$

para todo $M \in Gr-Mod(A^{op})$.

Sean $0_{M,0} \in Hom_{Gr-Mod(A^{op})}(M, Z)$ y $0_{0,N} \in Hom_{Gr-Mod(A^{op})}(Z, N)$ los únicos elementos de dichos conjuntos, definimos el morfismos cero como $0 := 0_{0,N} \circ 0_{M,0} : M \longrightarrow N$, con esto tenemos que $Z = 0$ es objeto cero en $Gr-Mod(A^{op})$.

Verificamos que $Z = 0$ también es un objeto cero para la categoría $Dg - Mod(A^{op})$, para lo cual basta ver que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_M"'] & Z \arrow[d, "d_Z"] \\ M \arrow[r, "f"'] & Z. \end{tikzcd}$$

En efecto, dado que $Hom_{Dg-Mod(A^{op})}(M,Z) \subseteq Hom_{Gr-Mod(A^{op})}(M,Z)$ entonces $|Hom_{Dg-Mod(A^{op})}(M,Z)| \leq |Hom_{Gr-Mod(A^{op})}(M,Z)| = 1$. Así

$$|Hom_{Dg-Mod(A^{op})}(M,Z)| = 1,$$

por lo que $f = 0_{M,Z}$ y $d_Z = 0$ entonces $d_Z f = f d_M$. $\square$

Proposición 1.3.2 *Sean $Gr - Mod(A^{op})$ y $Dg - Mod(A^{op})$ como antes. Entonces*

(a) $Hom_{Gr-Mod(A^{op})}(M,N)$ es un grupo abeliano para todo $M, N \in Gr - Mod(A^{op})$.

(b) $Hom_{Dg-Mod(A^{op})}(M,N)$ es un grupo abeliano para todo $M, N \in Dg - Mod(A^{op})$.

Demostración. Realizamos la prueba de ambos incisos:

(a) Sean $f, g \in Hom_{Gr-Mod(A^{op})}(M,N)$. Definimos la suma de f y g, para $m \in M$ como sigue

$$(f+g)(m) := f(m) +_N g(m)$$

Dado que f y g son tranformaciones lineales tenemos que $f+g$ es una transformación lineal. Falta ver que $f+g$ es homogéneo. En efecto, sea $m \in M^i$, por ser f y g homogéneos tenemos que $f(m), g(m) \in N^i$, dado que N^i es un grupo abeliano para cada $i \in \mathbb{Z}$ entonces $(f+g)(m) = f(m) + g(m) \in N^i$. En consecuencia, $(f+g)(M^i) \subseteq N^i$. Además,

$$\begin{aligned} (f+g)(ma) := f(ma) + g(ma) &= f(m)a + g(m)a \\ &= (f(m) + g(m))\,a \\ &= ((f+g)(m))\,a. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f + g \in Hom_{Gr-Mod(A^{op})}(M,N)$.

(b) Por el inciso (a) basta verificar que $f+g$ conmuta con el diferencial. En efecto, dado que $f, g \in Hom_{Dg-Mod(A^{op})}(M,N)$ tenemos que $f d_M = d_N f$ y $g d_M = d_N g$, entonces

$$(f+g)d_M = f d_M + g d_M = d_N f + d_N g = d_N(f+g).$$

Por lo tanto, $f + g \in Hom_{Dg-Mod(A^{op})}(M,N)$.

□

Observación 1.3.3
Dados $M, N, L \in Gr-Mod(A^{op})$, $f, f_1, f_2 \in Hom_{Gr-Mod(A^{op})}(M, N)$ y $g, g_1, g_2 \in Hom_{Gr-Mod(A^{op})}(N, L)$ las siguientes igualdades se verifican

$$g(f_1 + f_2) = gf_1 + gf_2$$

$$(g_1 + g_2)f = g_1 f + g_2 f$$

por ser morfismos de tranformaciones lineales. Análogamente las igualdades anteriores son válidas para la categoría $Dg - Mod(A^{op})$.

Corolario 1.3.4 *Sea A una k-álgebra graduada. Entonces las categorías $Gr - Mod(A^{op})$y $Dg - Mod(A^{op})$ son categorías preaditivas.*

Demostración. Se sigue de la proposición 1.3.2 y la observación 1.3.3. □

Proposición 1.3.5 *Sea (A, d) una k-álgebra graduada. Entonces la categoría $Gr - Mod(A^{op})$ tiene coproductos*

Demostración. Sea $\{M_s\}_{s \in J}$ una familia de objetos de $Gr-Mod(A^{op})$, donde $M_s = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} M_s^j$ para toda $s \in J$. Tomamos $\coprod_{s \in J} M_s$ el coproducto de los k-espacios vectoriales M_s y sus inclusiones canónicas $\lambda_s : M_s \longrightarrow \coprod_{s \in J} M_s$.

(a) Veamos que $\coprod_{s \in J} M_s$ tiene estructura de A-módulo graduado derecho. En efecto, definimos

$$\left(\coprod_{s \in J} M_s \right)^j := \sum_{s \in J} \lambda_s(M_s^j).$$

Tenemos que probar que

$$\coprod_{s \in J} M_s = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \left(\coprod_{s \in J} M_s \right)^j.$$

Sea $x \in \coprod_{s \in J} M_s$, entonces x tiene la siguiente forma

$$x = \lambda_{s_1}(m_1) + \lambda_{s_2}(m_2) + \cdots + \lambda_{s_t}(m_t)$$

donde m_i está en M_{s_i} y $M_{s_i} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} M_{s_i}^j$. Entonces,

$$\begin{aligned} m_1 &= m_1^r + m_1^{r+1} + m_1^{r+2} + \cdots + m_1^{r+l} \\ m_2 &= m_2^r + m_2^{r+1} + m_2^{r+2} + \cdots + m_2^{r+l} \\ &\vdots \\ m_t &= m_t^r + m_t^{r+1} + m_t^{r+2} + \cdots + m_t^{r+l} \end{aligned}$$

donde m_i^j esta en $(M_{s_i})^j$. Note que podemos suponer que los m_i inician y terminan en los mismos índices, pues en caso contrario agregamos ceros para que inicien y terminen en el mismo índice. Al sustiruir los valores anteriores obtenemos que

$$\begin{aligned} x = {} & \lambda_{s_1}(m_1^r + m_1^{r+1} + m_1^{r+2} + \cdots + m_1^{r+l}) \\ & + \lambda_{s_2}(m_2^r + m_2^{r+1} + m_2^{r+2} + \cdots + m_2^{r+l}) \\ & + \cdots + \lambda_{s_t}(m_t^r + m_t^{r+1} + m_t^{r+2} + \cdots + m_t^{r+l}). \end{aligned}$$

Dado que λ_{s_t} es una transformación lineal, tenemos que se distribuye sobre la suma

$$\begin{aligned} x = {} & \lambda_{s_1}(m_1^r) + \lambda_{s_1}(m_1^{r+1}) + \lambda_{s_1}(m_1^{r+2}) + \cdots + \lambda_{s_1}(m_1^{r+l}) \\ & + \lambda_{s_2}(m_2^r) + \lambda_{s_2}(m_2^{r+1}) + \lambda_{s_2}(m_2^{r+2}) + \cdots + \lambda_{s_2}(m_2^{r+l}) \\ & \vdots \\ & + \lambda_{s_t}(m_t^r) + \lambda_{s_t}(m_t^{r+1}) + \lambda_{s_t}(m_t^{r+2}) + \cdots + \lambda_{s_t}(m_t^{r+l}), \end{aligned}$$

y, reordenando las sumas anteriores tenemos

$$\begin{aligned} x = {} & \lambda_{s_1}(m_1^r) + \lambda_{s_2}(m_2^r) + \cdots + \lambda_{s_t}(m_t^r) + \lambda_{s_1}(m_1^{r+1}) + \lambda_{s_2}(m_2^{r+1}) \\ & + \cdots + \lambda_{s_t}(m_t^{r+1}) + \cdots + \lambda_{s_1}(m_1^{r+l}) + \lambda_{s_2}(m_2^{r+l}) + \cdots + \lambda_{s_t}(m_t^{r+l}). \end{aligned}$$

Definimos

$$\eta_r := \lambda_{s_1}(m_1^r) + \lambda_{s_2}(m_2^r) + \cdots + \lambda_{s_t}(m_t^r) \in \left(\coprod_{s\in J} M_s\right)^r$$

$$\eta_{r+1} := \lambda_{s_1}(m_1^{r+1}) + \lambda_{s_2}(m_2^{r+1}) + \cdots + \lambda_{s_t}(m_t^{r+1}) \in \left(\coprod_{s\in J} M_s\right)^{r+1}$$

$$\vdots$$

$$\eta_{r+l} := \lambda_{s_1}(m_1^{r+l}) + \lambda_{s_2}(m_2^{r+l}) + \cdots + \lambda_{s_t}(m_t^{r+l} \in \left(\coprod_{s\in J} M_s\right)^{r+l}.$$

Entonces,

$$x = \eta_r + \eta_{r+1} + \cdot + \eta_{r+l} \in \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\coprod_{s\in J} M_s\right)^j.$$

Ahora veamos que la suma es directa. Supongamos que $\eta_r \in \left(\coprod_{s\in J} M_s\right)^r$, $\eta_{r+1} \in \left(\coprod_{s\in J} M_s\right)^{r+1}$, $\cdots$, $\eta_{r+l} \in \left(\coprod_{s\in J} M_s\right)^{r+l}$ y que

$$0 = \eta_r + \eta_{r+1} + \cdots + \eta_{r+l}.$$

Sabemos que $\eta_j \in \left(\coprod_{s\in J} M_s\right)^j$, luego

$$\eta_j = \lambda_{s_1}(m_1^j) + \lambda_{s_2}(m_2^j) + \cdots + \lambda_{s_t}(m_t^j)$$

con $m_i^j \in M_{s_i}^j$, para $j = r.r+1, ...r+l$. Entonces

$$0 = \sum_{i=1}^{t} \lambda_{s_i}(m_i^r) + \sum_{i=1}^{t} \lambda_{s_i}(m_i^{r+1}) + \cdots + \sum_{i=1}^{t} \lambda_{s_i}(m_i^{r+l})$$

y reordenando las sumas, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 = \lambda_{s_1}(m_1^r + m_1^{r+1} + m_1^{r+2} + \cdots + m_1^{r+l}) + \\ \lambda_{s_2}(m_2^r + m_2^{r+1} + m_2^{r+2} + \cdots + m_2^{r+l}) + \\ + \cdots + \lambda_{s_t}(m_t^r + m_t^{r+1} + m_t^{r+2} + \cdots + m_t^{r+l}). \end{aligned}$$

Luego, aplicamos la proyección canónica $\pi_{s_t} : \coprod_{s\in J} M_s \longrightarrow M_{s_i}$ (como espacios vectoriales) tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \pi_{s_i}\lambda_{s_i}(m_i^r + m_i^{r+1} + m_i^{r+2} + \cdots + m_i^{r+l}) \\ &= m_i^r + m_i^{r+1} + \cdots + m_i^{r+l} \in M_{s_i} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} M_{s_i}^j \end{aligned}$$

para $i = 1, ..., t$, esto nos dice que $m_i^r = 0$, $m_i^{r+1} = 0, \cdots, m_i^{r+l} = 0$. Luego $\eta_r = \eta_{r+1} = \cdots = \eta_{r+l} = 0$. Así hemos probado que

$$\coprod_{s\in J} M_s = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \left(\coprod_{s\in J} M_s\right)^j$$

(b) Ahora verificamos que $\coprod_{s\in J} M_s$ tiene estructura de A-módulo derecho graduado. Consideremos la transformación bilineal

$$\varphi : \coprod_{s\in J} M_s \times A \longrightarrow \coprod_{s\in J} M_s$$

tal que $\varphi(x,a) = \varphi(\sum_{i\in J} \lambda_{s_i}(m_i), a) := \sum_{i\in J} \lambda_{s_i}(m_i a)$, la bilinealidad de φ se sigue de que λ_{s_i} es un morfismo de A-módulos y M_{s_i} es un A-módulo graduado derecho.

Sean $x \in \left(\coprod_{s\in J} M_s\right)^j$ y $a \in A^t$, veamos que $xa \in \left(\coprod_{s\in J} M_s\right)^{j+t}$. En efecto, se tiene que $x = \lambda_{s_1}(m_1) + \lambda_{s_2}(m_2) + \cdots + \lambda_{s_t}(m_t)$, donde $m_i \in M_{s_i}^j$ para $i = 1, \cdots, t$. Luego

$$\begin{aligned} xa &= (\lambda_{s_1}(m_1) + \lambda_{s_2}(m_2) + \cdots + \lambda_{s_t}(m_t))\, a \\ &= \lambda_{s_1}(m_1)a + \lambda_{s_2}(m_2)a + \cdots + \lambda_{s_t}(m_t)a \\ &= \lambda_{s_1}(m_1 a) + \lambda_{s_2}(m_2 a) + \cdots + \lambda_{s_t}(m_t a) \end{aligned}$$

donde $m_i a \in M_{s_i}^{j+t}$ ya que M_{s_i} es un A-módulo graduado derecho, entonces

$$xa \in \left(\coprod_{s\in J} M_s \right)^{j+t}$$

Sean $a, b \in A$ elementos homogéneos y $x \in \left(\coprod_{s\in J} M_s\right)^j$. Veamos que se cumple que $(xa)b = (-1)^{gr(a)gr(b)} x(ab)$. En efecto, dado que x es de la forma $x = \lambda_{s_1}(m_1) + \lambda_{s_2}(m_2) + \cdots + \lambda_{s_t}(m_t)$ con $m_i \in M_{s_i}^j$, para $i = 1, \cdots, t$. Entonces

$$\begin{aligned} (xa)b &= (\lambda_{s_1}(m_1 a) + \lambda_{s_2}(m_2 a) + \cdots + \lambda_{s_t}(m_t a))\, b \\ &= \lambda_{s_1}((m_1 a)b) + \lambda_{s_2}((m_2 a)b) + \cdots + \lambda_{s_t}((m_t a)b), \end{aligned}$$

como M_{s_i} es un A-módulo graduado derecho, por la proposición 1.2.8 se tiene que $(m_i a)b = (-1)^{gr(a)gr(b)} m_i(ab)$ para $i = 1, \cdots, t$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} (xa)b &= \lambda_{s_1}((-1)^{gr(a)gr(b)} m_1(ab)) + \cdots + \lambda_{s_t}((-1)^{gr(a)gr(b)} m_t(ab)) \\ &= (-1)^{gr(a)gr(b)} \left(\lambda_{s_1}(m_1(ab)) + \cdots + \lambda_{s_t}(m_t(ab))\right) \\ &= (-1)^{gr(a)gr(b)} x(ab). \end{aligned}$$

Luego por la Proposición 1.2.8 obtenemos que $\coprod_{s\in J} M_s$ es un A-módulo graduado derecho. Note que $\lambda_j(ma) = ma$ para cada $m \in M_{s_j}$ y $a \in A$. Además es claro que $\lambda_j(M_{s_j}^k) \subset \left(\coprod_{s\in J} M_s\right)^k$. Por lo tanto, $\lambda_j : M_{s_j} \longrightarrow \coprod_{s\in J} M_s$ es un morfismo de A-módulos graduados derechos.

Ahora sólo resta ver que $\coprod_{s\in J} M_s$ tiene la propiedad universal del coproducto. En efecto, sea $\{f_s : M_s \longrightarrow L\}_{s\in J}$ una familia de morfismos en $Gr - Mod(A^{op})$. En particular cada f_s es un morfismo k-lineal. Como $\coprod_{s\in J} M_s$ es el coproducto de los k-espacios vectoriales M_s existe un único morfismo lineal $f : \coprod_{s\in J} M_s \longrightarrow L$ tal que $f\lambda_{s_i} = f_{s_i}$ para cada $s_i \in J$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & L \\ M_{s_i} \arrow[ur, "f_{s_i}"] \arrow[r, "\lambda_{s_i}"'] & \coprod_{s\in J} M_s. \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

Veamos que f es un morfismo en la categoría $Gr - Mod(A^{op})$. Sean $m \in \coprod_{s\in J} M_s$ y $a \in A$, como $m \in \coprod_{s\in J} M_s$ existen $m_i \in M_{s_i}$ tal que $m = \sum \lambda_{s_i}(m_i)$. Así tenemos que $ma = \sum \lambda_{s_i}(m_i a)$, luego

$$\begin{aligned} f(ma) = f\left(\sum \lambda_{s_i}(m_i a)\right) = \sum f\lambda_{s_i}(m_i a) &= \sum f_{s_i}(m_i a) \\ &= \sum f_{s_i}(m_i)a \\ &= \left(\sum f\lambda_{s_i}(m_i)\right) a \\ &= f\left(\sum \lambda_{s_i}(m_i)\right) a \\ &= f(m)a \end{aligned}$$

Similarmente dado que $f_{s_i}(M^j_{s_i}) \subseteq L^j$ y $\left(\coprod_{s\in J} M_s\right)^j = \sum_{s\in J} \lambda_s(M^j_s)$ tenemos que

$$\begin{aligned} f\left(\left(\coprod_{s\in J} M_s\right)^j\right) = f\left(\sum_{s\in J} \lambda_s(M^j_s)\right) &= \sum_{s\in J} f\lambda_s(M^j_s) \\ &= \sum_{s\in J} f_s(M^j_s) \\ &\subseteq \sum_{s\in J} L^j = L^j. \end{aligned}$$

Así, f es un morfismo en $Gr - Mod(A^{op})$.

□

Proposición 1.3.6 *Sea (A, d) una k-álgebra diferencialmente graduada. La categoría $Dg - Mod(A^{op})$ tiene coproductos.*

Demostración. Sea $\{M_s\}_{s\in J}$ una familia de A-módulos diferenciales derechos. Por la proposición 1.3.5 tenemos que el coproducto de los k-espacios vectoriales $\coprod_{s\in J} M_s$ admite una estructura de A-módulo graduado derecho. Sólo basta ver que $\coprod_{s\in J} M_s$ está en $Dg - Mod(A^{op})$.

Veamos que $\coprod_{s\in J} M_s$ poseé un diferencial. En efecto, dado que para cada $s \in J$ tenenemos un diferencial $d_s : M_s \longrightarrow M_s$ por la propiedad universal del coproducto, existe una única tranformación lineal $d : \coprod_{s\in J} M_s \longrightarrow \coprod_{s\in J} M_s$

tal que el siguiente diagrama conmuta para cada $j \in \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{s\in J} M_s \arrow[r, "d"] & \coprod_{s\in J} M_s \\
M_s \arrow[u, "\lambda_s"] \arrow[r, "d_s"'] & M_s. \arrow[u, "\lambda_s"']
\end{tikzcd}$$

Ahora comprobamos que d es una diferencial.

(a) $d\left(\left(\coprod_{s\in J} M_s\right)^j\right) \subseteq \left(\coprod_{s\in J} M_s\right)^{j+1}$.

Sea $x \in \left(\coprod_{s\in J} M_s\right)^j$,entonces $x = \sum \lambda_{s_i}(m_i)$ con $M_{s_i}^j$ y así,

$$d(x) = d\left(\sum \lambda_{s_i}(m_i)\right) = \sum d\left(\lambda_{s_i}(m_i)\right) = \sum \lambda_{s_i}(d_{s_i}(m_i));$$

dado que d_{s_i} es diferencial, tenemos que $d_{s_i}(m_i) \in M_{s_i}^{j+1}$ entonces

$$d(x) \in \left(\coprod_{s\in J} M_s\right)^{j+1}$$

(b) d *cumple la regla de Leibniz.* En efecto, sea $x \left(\coprod_{s\in J} M_s\right)^j$ y $a \in A^r$, como antes $x = \sum_{i=1}^t \lambda_{s_i}(m_i)$, con $m_i \in M_{s_i}^j$. Luego,

$$\begin{aligned}
d(xa) &= d\left(\left(\sum_{i=1}^t \lambda_{s_i}(m_i)\right) a\right) \\
&= d\left(\sum_{i=1}^t \lambda_{s_i}(m_i a)\right) \\
&= \sum_{i=1}^t d(\lambda_{s_i}(m_i a)) \\
&= \sum_{i=1}^t \lambda_{s_i} d_{s_i}(m_i a) \\
&= \sum_{i=1}^t \lambda_{s_i}[m_i d(a) + (-1)^r d_{s_i}(m_i) a] \\
&= \sum_{i=1}^t \lambda_{s_i}(m_i d(a)) + (-1)^r \sum_{i=1}^t \lambda_{s_i}[d_{s_i}(m_i) a] \\
&= \sum_{i=1}^t \lambda_{s_i}(m_i) d(a) + (-1)^r \sum_{i=1}^t d(\lambda_{s_i}(m_i)) a \\
&= x d(a) + (-1)^r d(x) a
\end{aligned}$$

Así, d satisface la regla de Leibniz.

(c) $d^2 = 0$.
En efecto, sea $x \in \left(\coprod_{s\in J} M_s\right)^j$, entonces $x = \sum \lambda_{s_i}(m_i)$ con $m_i \in M_{s_i}^j$.
De esta manera, tenemos que

$$\begin{aligned} d^2(x) &= d(d(x)) \\ &= d\left(\sum d(\lambda_{s_i}(m_i))\right) \\ &= d\left(\sum \lambda_{s_i}(d_{s_i}(m_i))\right) \\ &= \sum d\lambda_{s_i}(d_{s_i}(m_i)) \\ &= \sum d_{s_i} d_{s_i}(m_i) = 0. \end{aligned}$$

Luego, por la Proposición 1.2.9 $\coprod_{s\in J} M_s$ es un módulo diferencial derecho.

Es claro que la inclusión canónica $\lambda_s : M_s \longrightarrow \coprod_{s\in J} M_s$ es un morfismo de módulos diferenciales derechos.

Verificamos ahora la propiedad universal del coproducto. En efecto, sea $\{f_s : M_s \longrightarrow L\}_{s\in J}$ una familia de morfismos en la categoría $Dg - Mod(A^{op})$. Dado que $Dg - Mod(A^{op}) \subset Gr - Mod(A^{op})$, existe un morfismo $f : \coprod_{s\in J} M_s \longrightarrow L$ en $Gr - Mod(A^{op})$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & L \\ M_s \arrow[ur, "f_s"] \arrow[r, "\lambda_s"'] & \coprod_{s\in J} M_s. \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

Veamos que f conmuta con el diferencial de $\coprod_{s\in J} M_s$. Sea $x \in \coprod_{s\in J} M_s$, entonces $x = \sum \lambda_{s_i}(m_i)$ y,

$$\begin{aligned} fd(x) = fd\left(\sum \lambda_{s_i}(m_i)\right) = f\left(\sum d\lambda_{s_i}(m_i)\right) &= f\left(\sum \lambda_{s_i} d_{m_{s_i}}(m_i)\right) \\ &= \sum f\lambda_{s_i} d_{m_{s_i}}(m_i) \\ &= \sum f_{s_i} d_{m_{s_i}}(m_i) \\ &= \sum d_L f_{s_i}(m_i) \\ &= d_L\left(\sum f_{s_i}(m_i)\right) \\ &= d_L f(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $Dg - Mod(A^{op})$ tiene coproductos. $\square$

Proposición 1.3.7 *Sea (A, d) una k-álgebra graduada. Entonces la categoría $Gr - Mod(A^{op})$ tiene productos.*

Demostración. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de A-módulos graduados, entonces $M_i = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_i^n$ donde M_i^n es la parte n-homogénea de M_i, por lo que M_i^n es un k-espacio vectorial para cada n. Ahora, consideramos las poyecciones $\pi_{i,n} : \prod_{i\in I} M_i^n \longrightarrow M_i^n$ del producto de $\{M_i^n\}_{i\in I}$ como k-espacios vectoriales y las inclusiones $\theta_{j,n} : M_j^n \longrightarrow M_j = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_j^n$.
Luego, la familia $\{\theta_{j,n}\pi_{j,n} : \prod_{i\in I} M_i^n \longrightarrow M_j\}_{n\in\mathbb{Z}}$ induce un único morfismo $\psi_j : \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \left(\prod_{i\in I} M_i^n\right) \longrightarrow M_j$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & M_j = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_j^n \\
\prod_{i\in I} M_i^n \arrow[ur, "\theta_{j,n}\pi_{j,n}"] \arrow[r, "\eta_n"'] & \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \left(\prod_{i\in I} M_i^n\right) \arrow[u, "\psi_j"'] ,
\end{tikzcd}$$

es decir, $\psi_j\eta_n = \theta_{j,n}\pi_{j,n}$. En otras palabras,

$$\psi_j\eta_n(r_k) = \theta_{j,n}\pi_{j,n}((x_i^n)_{i\in I}) = \theta_{j,n}(x_j^n) = x_j^n.$$

Denotamos por $T^n := \prod_{i\in I} M_i^n$ y por $T := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} T^n$. Ahora, para $y \in \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \left(\prod_{i\in I} M_i^n\right)$ se tiene que $y = \sum_{k\in K} r_k$ con $K \subset \mathbb{Z}$ finito y $r_k \in \prod_{i\in I} M_i^k$, es decir, $r_k = (x_i^k)_{i\in I}$ y así,

$$\psi_j(y) = \psi_j\left(\sum_{k\in K} r_k\right) = \sum_{k\in K} x_j^k$$

Definimos ahora una transformación bilineal

$$\varphi : \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\left(\prod_{i\in I} M_i^n\right) \times A \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\left(\prod_{i\in I} M_i^n\right)$$

donde $\varphi\left(\sum_{j\in J}((x_i^j)_{i\in I}), \sum_{w\in W} a_w\right) := \sum_{j,w}(x_i^j a_w)_{i\in I}$, para $J \subset \mathbb{Z}$ finito. La bilinealidad de φ se sigue de que $(x_{i,j}^n) \in M_i^n$ y $M_i^n \subseteq M_i \in Gr - Mod(A^{op})$.

Veamos que se cumplen las propiedades de la proposición 1.2.8. En efecto,

(a) Sean $r_j = (x_i^j)_{i\in I} \in T^j$ con $T^n = \prod_{i\in I} M_i^n$ y $a^t \in A^t$. Entonces $\varphi(r_j, a^t) = \varphi((x_i^j)_{i\in I}, a^t) = (x_i^j a^t)_{i\in I}$, dado que M_i es un A-módulo graduado se tiene que $x_i^j a \in M_i^{j+t}$ para cada $i \in I$, por lo que $r_j a^t \in T^{j+t} = \prod_{i\in I} M_i^{j+t}$.

(b) Sea $m \in T$ y $1 \in A$. Entonces $\varphi(m,1) = (\sum_{j\in J}(x_i^j),1) = \sum_{j\in J}(x_i^j 1) = \sum_{j\in J}(x_i^j) = m$, donde la tercer igualdad se sigue de que M_i es un A-módulo graduado.

(c) Sean $a, b \in A$ elementos homogéneos y $m \in T$, Veamos que se cumple la siguiente igualdad

$$(m\cdot a)\cdot b = (-1)^{gr(a)gr(b)} m\cdot (ab).$$

En efecto, como $m = \sum_{j\in J}(x_i^j)$ con $x_i^j \in M_i^j$, entonces

$$\begin{aligned}
(m\cdot a)\cdot b &= \left(\left(\sum_{j\in J}(x_i^j)\right)\cdot a\right)\cdot b = \left(\sum_{j\in J}(x_i^j\cdot a)\right)\cdot b \\
&= \sum_{j\in J}((x_i^j\cdot a)\cdot b) \\
&= \sum_{j\in J}(-1)^{gr(a)gr(b)}(x_i^j(ab)) \\
&= (-1)^{gr(a)gr(b)}\left(\sum_{j\in J}(x_i^j)\right)(ab) \\
&= (-1)^{gr(a)gr(b)} m(ab).
\end{aligned}$$

Luego, por la proposición 1.2.8 tenemos que $T = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\left(\prod_{i\in I} M_i^n\right)$ es un A-módulo graduado derecho.

Veamos que $\psi_j : T \longrightarrow M_j$ es un morfismo en $Gr - Mod(A^{op})$. En efecto, sean $x \in T^n$ y $a \in A$, es decir, $x = (x_i^n)_{i\in I}$, $a = \sum_{w\in W} a_w$, con $W \subset \mathbb{Z}$ finito. Entonces

(a) Entonces

$$\begin{aligned}
\psi_j\eta_n(xa) &= \psi_j\left((x_i^n)_{i\in I}\cdot a\right) \\
&= \theta_{j,n}\pi_{j,n}\left((x_i^n\cdot a)_{i\in I}\right) \\
&= \theta_{j,n}(x_j^n\cdot a) \\
&= x_j^n\cdot a.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\psi_j\eta_n(x)\cdot a &= \psi_j\left((x_i^j)_{i\in I}\cdot a\right) \\
&= \theta_{j,n}\pi_{j,n}\left((x_i^n)_{i\in I}\right)\cdot a \\
&= \theta_{j,n}(x_j^n)\cdot a \\
&= x_j^n\cdot a.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\psi_j(ma) = \psi_j(m)a$.

(b) Veamos que $\psi_j(T^n) \subseteq M_j^n$. Sea $x \in T^n = \prod_{i\in I} M_i^n$. Entonces $x = (x_i^n)_{i\in I}$ y luego,

$$\psi_j(x) = \psi_j((x_i^n)_{i\in I}) = x_j^n \in M_j^n$$

En consecuencia, ψ_i es un morfismo en $Gr - Mod(A^{op})$ para cada $i \in I$.

Verifiquemos que $\{\psi_i : T = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} T^n = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \left(\prod_{i\in I} M_i^n\right) \longrightarrow M_i\}_{i\in I}$ es el producto de $\{M_i\}_{i\in I}$ en la categoría de A-módulos graduados derechos. En efecto, sea $\{\alpha_i : N \longrightarrow M_i\}_{i\in I}$ una familia de morfismos en $Gr - Mod(A^{op})$. En particular, $\{\alpha_i|_{N^n} : N^n \longrightarrow M_i^n\}_{i\in I}$ es una familia de morfismos de k-espacios vectoriales, entonces por la propiedad universal del producto existe un único morfismo de k-espcios vectoriales $\varphi_n : N^n \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i^n$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} N^n \arrow[rr, "\varphi_n"] \arrow[dr, "\alpha_i|_{N^n}"'] & & \prod_{i\in I} M_i \arrow[dl, "\pi_{i,n}"] \\ & M_i. & \end{tikzcd}$$

Ahora, la familia $\varphi_n : N^n \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i^n$ induce un único morfismo $\varphi : N = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} N^n \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \left(\prod_{i\in I} M_i^n\right)$ de k-espacios vectoriales, tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} N^n \arrow[r, "r_n^N"] \arrow[d, "\varphi_n"'] & \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} N^n \arrow[d, "\varphi"] \\ \prod_{i\in I} M_i^n \arrow[r, "\eta_n"'] & \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \left(\prod_{i\in I} M_i^n\right) \end{tikzcd},$$

donde r_n^N son la inclusiones canónicas en el coproducto.

Veamos que φ es un morfismo de A-módulos derechos. En efecto, primero para $u \in N^n$ homogéneo, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \varphi r_n^N(u) &= \eta_n \varphi_n(u) \\ &= \varphi(u) \\ &= \varphi_n(u) \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\pi_{i,n}\varphi_n(u) = \alpha_i|_{N^n}(u),$$

de donde $\varphi_n(u) = (\alpha_i|_{N^n}(u))_{i\in I}$. Por lo tanto, para un elemento homogéneo $u \in N^n$ tenemos que

$$\varphi(u) = (\alpha_i|_{N^n}(u))_{i\in I}\,.$$

Ahora sean $a \in A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A^n$ y $u \in N$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\varphi(ua) &= \varphi\left(\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n\right)\left(\sum_{t\in\mathbb{Z}} a_t\right)\right)\\
&= \varphi\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{t\in\mathbb{Z}} u_n a_t\right)\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{t\in\mathbb{Z}} \varphi(u_n a_t)\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{t\in\mathbb{Z}} (\alpha_i|_{N^{n+t}}(u_n a_t))_{i\in I}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{t\in\mathbb{Z}} (\alpha_i(u_n a_t))_{i\in I}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{t\in\mathbb{Z}} (\alpha_i(u_n) a_t)_{i\in I}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{t\in\mathbb{Z}} (\alpha_i(u_n))_{i\in I}\, a_t\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{t\in\mathbb{Z}} (\alpha_i|_{N^n}(u_n))_{i\in I}\, a_t\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\alpha_i(u_n))_{i\in I} \sum_{t\in\mathbb{Z}} a_t\\
&= \varphi(u)a
\end{aligned}$$

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & N^n \arrow[ddl, "\alpha_i|_{N^n}"'] \arrow[dd, dotted, "\varphi_n"] \arrow[drr, "r_n^N"] & & \\
 & & & \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} B^n \arrow[ddll, "\alpha_i"'] \arrow[dd, "\alpha"] \\
M_i^n \arrow[dr, "\theta_{i,n}"'] & \prod_{i\in I} M_i^n \arrow[l, "\pi_{i,n}"'] \arrow[drr, dotted, "\eta_n"] & & \\
 & \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_i^n & & \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \left(\prod_{i\in I} M_i^n\right) \arrow[ll, "\psi_i"]
\end{tikzcd},$$

donde α_i es el único morfismo inducido por la familia $\{\alpha_i|_{N^n} : N^n \longrightarrow M_i^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Veamos que la cara de enfrente conmuta. En efecto,

$$\begin{aligned}\psi_i \alpha r_n^B &= \psi_i \eta_n \varphi_n \\ &= \mu_{i,n} \pi_{i,n} \varphi_n \\ &= \mu_{i,n} \alpha_i|_{N^n} \\ &= \alpha_i r_n^B.\end{aligned}$$

En consecuencia, $\psi_i \varphi = \alpha_i$. Falta verificar que φ es un morfismo graduado. En efecto, sea $u \in B^n$ elemento homogéneo. Dado que $\psi_i \varphi = \alpha_i$ y α_i es un morfismo graduado, tenemos que $\psi_i \varphi(u) = \alpha_i(u) \in M_i^n$ y así, $\varphi(u) \in T^n = \prod_{i \in I} M_i^n$.

Veamos ahora que el morfismo φ es único. Supongamos que existe $\varphi' : N \longrightarrow T$ un morfismo de A-módulos graduados derecho tal que $\psi_i \varphi' = \alpha_i$. Entonces

$$\begin{aligned}\psi_i \varphi' r_n^B &= \psi_i \varphi r_n^B \\ &= \alpha_i r_n^B \\ &= \mu_{i,n} \alpha_i|_{N^n} \\ &= \mu_{i,n} \pi_{i,n} \varphi_n \\ &= \psi_i \eta_n \varphi_n\end{aligned}$$

Por la propiedad del producto como k-espacios vectoriales, tenemos que $\varphi' r_n^B = \eta_n \alpha_n$. Luego, por la unicidad del morfismo φ, como el único que hace conmutar el cuadrado anterior derecho, se sigue que $\varphi = \varphi'$.

Por lo tanto, $\{\psi_i : T \longrightarrow M_i\}_{i \in I}$ es el producto de la familia $\{M_i\}_{i \in I}$ en la categoriá de A-módulos graduados derechos. $\square$

Proposición 1.3.8 *Sea (A, d) una k-álgebra diferencialmente graduada. Entonces la categoría $Dg - Mod(A^{op})$ tiene productos.*

Demostración. Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de A-módulos diferenciales derchos. Por la proposición 1.3.7 $\{\psi_i : T \longrightarrow M_i\}_{i \in I}$ es un producto para la familia $\{M_i\}_{i \in I}$, donde $T := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \left(\prod_{i \in I} M_i^n \right)$. Veamos que T admite un diferencial. En efecto, para cada $i \in I$ tenemos un diferencial $d_i : M_i \longrightarrow M_i$. Consideramos $\mu_{i,n} : M_i^n \longrightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_i^n$ las inclusiones canónicas en el coproducto y $d_i\big|_{M_i^n} : M_i^n \longrightarrow M_i^{n+1}$ las restricciones de d_i a cada componente. Entonces tenemos que el diferencial $d_i : M_i \longrightarrow M_i$ es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama en $Gr-Mod(A^{op})$

$$\begin{tikzcd}
M_i = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_i^n \arrow[r, "d_i"] & M_i = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_i^n \\
M_i^n \arrow[u, "\mu_{i,n}"] \arrow[r, "d_i\big|_{M_i^n}"'] & M_i^{n+1}. \arrow[u, "\mu_{i,n+1}"']
\end{tikzcd}$$

Ahora bien, la familia $\{d_i\big|_{M_i^n} : M_i^n \longrightarrow M_i^{n+1}\}_{i\in I}$ en $Gr-Mod(A^{op})$ induce un único morfismo $\varphi_n : \prod_{i\in I} M_i^n \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i^{n+1}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
T^n := \prod_{i\in I} M_i^n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "\pi_{i,n}"'] & T^{n+1} := \prod_{i\in I} M_i^{n+1} \arrow[d, "\pi_{i,n+1}"] \\
M_i^n \arrow[r, "d_i\big|_{M_i^n}"'] & M_i^{n+1},
\end{tikzcd}$$

es decir, $\pi_{i,n+1}\varphi_n = d_i\big|_{M_i^n}\pi_{i,n}$. En consecuencia, tenemos que para $(x_i^n) \in \prod_{i\in I} M_i^n$, $\varphi_n\left((x_i^n)\right) = (d_i(x_i^n))$. Nuevamente, la familia de de morfismos $\{\varphi_n : T^n \longrightarrow T^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ induce un único morfismo $\varphi : T \longrightarrow T$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
T := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \left(\prod_{i\in I} M_i^n\right) \arrow[r, "\varphi"] & T := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \left(\prod_{i\in I} M_i^n\right) \\
T^n \arrow[u, "\eta_n"] \arrow[r, "\varphi_n"'] & T^{n+1}, \arrow[u, "\eta_{n+1}"']
\end{tikzcd}$$

es decir, $\varphi\mu_n = \mu_{n+1}\varphi_n$ y así, $\varphi\left(\sum_{j\in J} r_j\right) = \varphi\left(\sum_{j\in J}(x_i^j)_{i\in I}\right) = \sum_{i\in J}(d_i(x_i^j))_{i\in I}$ para cada $\sum_{j\in J} r_j \in T$.

Veamos que $\varphi : T \longrightarrow T$ es un diferencial para $T := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\left(\prod_{i\in I} M_i^n\right)$. En efecto,

(a) $\varphi(T^n) \subseteq T^{n+1}$. Sean $r_n \in T^n = \prod_{i\in I} M_i^n$, es decir, $r_n = (x_i^n)$. Luego,

$$\varphi(r_n) = \varphi_n(r_n) = \varphi_n((x_i^n)_{i\in I}) = (d_i(x_i^n))_{i\in I}$$

dado que d_i es un diferencial para M_i tenemos que $d_i(x_i^j) \in M_i^{n+1}$ para cada $i \in I$. De esta manera $\varphi(r_n) \in \prod_{i\ I} M_i^{n+1} = T^{n+1}$.

(b) Veamos que se cumple la regla de Leibniz, es decir, que se cumple la siguiente igualdad

$$\varphi(ma) = md(a) + (-1)^{gr(a)}\varphi(m)a.$$

En efecto, sean $m \in T^n$ y $a \in A^t$ elementos homogéneos. Por lo que $m = (x_i^n) \in \prod_{i \in I} M_i^n = T^n$ entonces,

$$\begin{aligned}\varphi(ma) = \varphi\left((x_i^n a)\right) &= \varphi\left((x_i^n a)\right)\\ &= (d_i(x_i^n a))\\ &= \left(x_i^n d(a) + (-1)^{gr(a)} d_i(x_i^n) a\right)\\ &= (x_i^n d(a)) + (-1)^{gr(a)} (d_i(x_i^n a))\\ &= (x_i^n) d(a) + (-1)^{gr(a)} (d_i(x_i^n)) a\\ &= m d(a) + (-1)^{gr(a)} \varphi(m) a.\end{aligned}$$

(c) Veamos que $\varphi^2 = 0$. En efecto, sea $m \in T$, por lo que $m = \sum_{j \in J} r_j = \sum_{j \in J} (x_i^j)$ entonces,

$$\begin{aligned}\varphi^2(m) = \varphi(\varphi(m)) = \varphi\left(\psi\left(\sum_{j \in J} (x_i^j)\right)\right) &= \varphi\left(\sum_{i \in J} d_i(x_i^j)\right)\\ &= \sum_{i \in J} d_i(d_i(x_i^j))\\ &= \sum_{i \in J} d_i^2(x_i^j)\\ &= 0,\end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue de que d_i es un diferencial. Por lo tanto, $\psi : T \longrightarrow T$ es un diferencial.

Note que los morfismos de la proposición 1.3.7 $\psi_i : T \longrightarrow M_i$ son morfismos en $Gr - Mod(A^{op})$. Además el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\psi_k"] \arrow[d, "\varphi"'] & M_k \arrow[d, "d_k"] \\ T \arrow[r, "\psi_k"'] & M_k \end{tikzcd} .$$

En efecto, sea $m = \sum_{j \in J} r_j \in T$, por un lado tenemos que

$$d_k \psi_k \left(\sum_{j \in J} r_j\right) = d_k \psi_k \left(\sum_{j \in J} (x_i^k)_{i \in I}\right) = (d_k(x_i^k))_{i \in I}.$$

Por otro lado,

$$\psi_k \varphi \left(\sum_{j \in J} r_j\right) = \psi_k \left(\sum_{j \in J} (d_i(x_i^k))_{i \in I}\right) = (d_i(x_i^k))_{i \in I}.$$

En consecuencia, ψ_k conmuta con el diferencial d_k y así, ψ_k es un morfismo en $Dg-Mod(A^{op})$.

Verifiquemos que $\{\psi_i : T := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\left(\prod_{i\in I} M_i^n\right) \longrightarrow M_i\}_{i\in I}$ es un producto de la familia de A-módulos diferenciales $\{M_i\}_{i\in I}$. En efecto, sea $\{\alpha_i : N \longrightarrow M_i\}_{i\in I}$ una familia de morfismos en $Dg-Mod(A^{op})$. En particular, $\{\alpha_i : N \longrightarrow M_i\}_{i\in I}$ es una familia de A-módulos graduados, entonces por la proposición 1.3.7 existe un único morfismo de A-módulos graduados $\Theta : N \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[rr, "\Theta"] \arrow[dr, "\alpha_i"'] & & \prod_{i\in I} M_i \arrow[dl, "\psi_i"] \\
& M_i. &
\end{tikzcd}$$

Chequemos que Θ conmuta con el diferencial. En efecto, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& M_i \arrow[dd, dotted, "d_i"'] & \\
N \arrow[ur, "\alpha_i"] \arrow[rr, "\Theta"] \arrow[dd, "d_N"'] & & \prod_{i\in I} M_i \arrow[ul, "\psi_i"'] \arrow[dd, "\varphi"] \\
& M_i & \\
N \arrow[ur, "\alpha_i"] \arrow[rr, "\Theta"] & & \prod_{i\in I} M_i \arrow[ul, "\psi_i"']
\end{tikzcd}$$

donde todas la cara conmutan, salvo la cara de enfrente. Veamos que la cara frontal conmuta. En efecto, tenemos que

$$\psi_i\varphi\Theta = d_i\psi_i\Theta = d_i\alpha_i = \alpha_i d_N = \psi_i\Theta d_N$$

para cada $i \in I$, por la propiedad universal del producto en $Gr-Mod(A^{op})$, tenemos que $\varphi\Theta = \Theta d_N$. En consecuencia, Θ es un morfismo de A-módulos diferenciales. La unicidad de Θ se sigue de la unicidad de Θ en la categoría $Gr-Mod(A^{op})$. $\square$

Proposición 1.3.9 *Sea (A, d) una k-álgebra graduada (respectivamente, diferencialmente graduada). Entonces la categoría $Gr-Mod(A^{op})$ (respectivamente, $Dg-Mod(A^{op})$) es una categoría aditiva.*

Demostración. La demostración se sigue de las proposiciones 1.3.1, 1.3.5, 1.3.7, el corolario 1.3.4 y sus duales. $\square$

El objetivo es ver que $Gr-Mod(A^{op})$ y $Dg-Mod(A^{op})$ son categorías abelianas, para lo cual definimos los conceptos de submódulo graduado, submódulo diferencial, cocientes de módulos graduados y cocientes de módulos diferenciales.

Definición 1.3.10 *Sea M un A-módulo graduado derecho y N un subespacio vectorial de M. Se dice que* ***N es un A-submódulo graduado*** *de M si*

(a) $N=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} N\cap M^i$ *(como grupos abelianos).*

(b) Para cada $a\in A$ y $n\in N$, se tiene que $na\in N$.

Definición 1.3.11 *Sea M un A-módulo diferencial derecho y N un subespacio vectorial de M. Diremos que* ***N es un A-submódulo diferencial de M*** *si*

(a) N es un submódulo graduado de M.

(b) $d_M(N)\subseteq N$.

Observación 1.3.12 *Note que si N es un A-submódulo diferencial derecho de M, entonces N es un A-módulo diferencial derecho, pues lo hereda de M, con* $d_N := d_M\big|_N$.

Lema 1.3.13 *Sean A una k-álgebra graduada y $f: M\longrightarrow N$ un morfismos de A-módulos graduados derechos, entonces* $\operatorname{Ker}(f)=\{m\in M|f(m)=0\}$ *es un submódulo graduado de M. Además, la inclusión $i:\operatorname{Ker}(f)\longrightarrow M$ es un morfismo de módulos graduados.*

Demostración. Veamos que se cumplen las dos condiciones de la definición de submódulo graduado.

(a) $\operatorname{Ker}(f)=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}(M^i\cap\operatorname{Ker}(f))$. En efecto, es claro que $M^i\cap\operatorname{Ker}(f)\subseteq\operatorname{Ker}(f)$ para cada $i\in\mathbb{Z}$. En consecuencia,

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}(M^i\cap\operatorname{Ker}(f))\subset\operatorname{Ker}(f).$$

Por otro lado, sea $m\in\operatorname{Ker}(f)\subset M=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}M^i$, entonces $m=\sum_{i\in\mathbb{Z}}m_i$ con $m_i\in M^i$, luego

$$0=f(m)=f\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}m_i\right)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}f(m_i)\in\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}N^i,$$

con $f(m_i)\in N^i$. Por lo tanto, tenemos que para cada $i\in\mathbb{Z}$ $f(m_i)=0$, lo cual implica que $m_i\in M^i\cap\operatorname{Ker}(f)$, para cada i y en consecuencia,

$$m\in\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left(\operatorname{Ker}(f)\cap M^i\right).$$

Así, tenemos
$$\operatorname{Ker}(f) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left(\operatorname{Ker}(f) \cap M^i\right).$$

Dado que
$$\left(\operatorname{Ker}(f) \cap M^i\right) \bigcap \left(\sum_{j\neq j} (\operatorname{Ker}(f) \cap M^j) \right) \subseteq M^i \bigcap \left(\sum_{j\neq i} M^j \right)$$

se tiene que la suma anterior es directa y, por lo tanto,
$$\operatorname{Ker}(f) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \left(\operatorname{Ker}(f) \cap M^i\right).$$

(b) Sea $a \in A$ y $m \in \operatorname{Ker}(f)$. Entonces $f(ma) = f(m)a = 0$. Por lo tanto, $ma \in \operatorname{Ker}(f)$.

Ahora veamos que la inclusión $i : \operatorname{Ker}(f) \longrightarrow M$ es un morfismo de A-módulo graduados. En efecto, sea $x \in (\operatorname{Ker}(f))^i$, es decir, $x \in \operatorname{Ker}(f) \cap M^i$, por lo que $i(x) = x \in M^i$ y así, i es un morfismo en $Gr - Mod(A^{op})$. $\square$

Lema 1.3.14 *Sean (A, d) una k-álgebra diferencialmente graduada y $f : M \longrightarrow N$ un morfismos de A-módulos diferenciales derechos, entonces $\operatorname{Ker}(f) = \{m \in M | f(m) = 0\}$ es un submódulo diferencial de M. Además, la inclusión $i : \operatorname{Ker}(f) \longrightarrow M$ es un morfismo de submódulos diferenciales.*

Demostración. Por el Lema 1.3.13 se tiene que $\operatorname{Ker}(f)$ es un submódulo graduado de M. Basta ver que $d_M(\operatorname{Ker}(f)) \subseteq \operatorname{Ker}(f)$. En efecto, sea $m \in \operatorname{Ker}(f)$, entonces
$$f(d_M(m)) = d_N(f(m)) = d_N(0) = 0.$$

Ahora bien, dado que $d_{\operatorname{Ker}(f)} := d_M\big|_{\operatorname{Ker}(f)}$ se tiene que el siguiente diagrama conmuta
$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker}(f) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "d_{\operatorname{Ker}(f)}"'] & M \arrow[d, "d_M"] \\ \operatorname{Ker}(f) \arrow[r, "i"'] & M. \end{tikzcd}$$

En consecuencia, i es un morfismo en $Dg - Mod(A^{op})$. $\square$

Lema 1.3.15 *Sean A una k-álgebra graduada y $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo de A-módulos graduados derechos. Entonces $Im(f)$ es un A-submódulo graduado de N. Además, $Im(f) \cap N^i = f(M^i)$ para cada $i \in \mathbb{Z}$.*

Demostración.

(a) Veamos que $Im(f) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} N^i \cap Im(f)$.
En efecto, es claro que $N^i \cap Im(f) \subset Im(f)$ para cada $i \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} N^i \cap Im(f) \subset Im(f).$$

Por otro lado, si $y \in Im(f)$, existe $m \in M$ con $m = \sum_{i\in\mathbb{Z}} m_i$ donde $m_i \in M^i$ y m es tal que $y = f(m)$. Entonces

$$y = f(m) = f\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} m_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} f(m_i) \in \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} N^i$$

donde $f(m_i) \in Im(f) \cap N^i$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Entonces,

$$Im(f) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left(N^i \cap Im(f)\right).$$

De manera análoga al lema anterior, dado que

$$\left(Im(f) \cap N^i\right) \bigcap \left(\sum_{j\neq i}(Im(f) \cap N^j)\right) \subseteq N^i \bigcap \left(\sum_{j\neq i} N^j\right) = \{0\},$$

se sigue que la suma anterior es directa y por lo tanto,

$$Im(f) = \bigoplus_{\in\mathbb{Z}} \left(N^i \cap Im(f)\right).$$

(b) Sea $y \in Im(f)$ y $a \in A$ entonces existe $m \in M$ tal que $y = f(m)$. De esta amnera,

$$ya = f(m)a = f(ma) \in Im(f).$$

Ahora veamos que $Im(f) \cap N^i = f(M^i)$ para cada $i \in \mathbb{Z}$. Ya que f es un morfismo en $Gr - Mod(A^{op})$, se tiene que $f(M^i) \subseteq Im(f) \cap N^i$. Ahora, sea $x \in Im(f) \cap N^i$, es decir, existe $y \in M$ tal que $f(y) = x \in N^i$. Como $y \in M$ se tiene que $y = \sum_{i\in\mathbb{Z}} m_i$ por lo que

$$x = f(y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(m_j) \in \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} N^i,$$

por la unicidad de la suma directa se concluye que $x = f(m_i)$. Por lo tanto, $x \in f(M^i)$.
Consideramos ahora la factorización de f a través de su imagen

$$\begin{tikzcd} & Im(f) \arrow[dr, "i"] & \\ M \arrow[ur, "f'"] \arrow[rr, "f"'] & & N, \end{tikzcd}$$

donde i es la inclusión canónica y $f'(m) := f(m)$ para tota $m \in M$. Dado que $(Im(f))^i = Im(f) \cap N^i$, se sigue que i es un morfismo en $Gr - Mod(A^{op})$. Verificamos que f' es un morfismo graduado. En efecto, sea $x \in M^i$, entonces $f'(x) := f(x) \in N^i$ y así, $f(x) \in (Im(f) \cap N^i) = (Im(f))^i$. $\square$

Lema 1.3.16 *Sean (A, d) una k-álgebra diferencialmente graduada y $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de A-módulos diferenciales derechos, $Im(f)$ es un submódulo diferencial de N.*

Demostración. Por el lema 1.3.15 $Im(f)$ es un submódulo graduado de N. Basta ver que $Im(f)$ es invariante bajo d_N. En efecto, sea $y \in Im(f)$, veamos que $d_N(y) \in Im(f)$, como $y \in Im(f)$ existe m tal que $f(m) = y$, en consecuencia,

$$d_N(y) = d_N f(m) = f(d_M(m)) \in Im(f)$$

donde la segunda igualdad se sigue de que f es un morfismos de A-módulos diferenciales.
Veamos que los morfismo i y f' del Lema 1.3.15 conmutan con el diferencial. En efecto, dado que $d_{Im(f)} = d_N\big|_{Im(f)}$ se tiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Im(f) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "d_{Im(f)}=d_N|_{Im(f)}"'] & N \arrow[d, "d_N"] \\ Im(f) \arrow[r, "i"'] & N. \end{tikzcd}$$

Por otro lado, como $f'(m) := f(m)$ para $m \in M$, tenemos que

$$\begin{aligned} d_{Im(f)} f'(m) &= d_{Im(f)}(f(m)) \\ &= d_N(f(m)) \\ &= f(d_M(m)) \\ &= f'(d_M(m)) \\ &= f' d_M(m). \end{aligned}$$

Así, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "d_M"'] & Im(f) \arrow[d, "d_{Im(f)}"] \\ M \arrow[r, "f'"'] & Im(f). \end{tikzcd}$$

Por lo tanto,

$$\begin{tikzcd} & Im(f) \arrow[dr, "i"] & \\ M \arrow[ur, "f'"] \arrow[rr, "f"'] & & N \end{tikzcd}$$

conmuta en $Dg - Mod(A^{op})$. $\square$

En lo siguiente veremos que el cociente de un A-módulo graduados (respectivamenmte diferencial) derecho por un submódulo graduado (respectivamente diferencial) resulta ser un A-módulo graduado (respectivamente diferencial).

Proposición 1.3.17 *Sea (A, d) una k-álgebra diferencialmente graduada*

(a) Sea M un A-módulo graduado derecho y N un A-submódulo graduado de M, entonces M/N es un A-módulo graduado. Además, la proyección canónica $\pi : M \longrightarrow M/N$ es un morfismo de A-módulos graduados derechos.

(b) Sea M un A-módulo diferencial derecho y N un A-submódulo graduado de M, entonces M/N es un A-módulo diferencial. Además, la proyección canónica $\pi : M \longrightarrow M/N$ es un morfismo de A-módulos diferenciales derechos.

Demostración.

(a) Tenemos el morfismo canónico de espacios vectoriales $\pi : M \longrightarrow M/N$ tal que $\pi(m) = \overline{m}$, donde $\overline{m} = m + N$ denota la clase lateral, el morfismo π está bien definido ya que N es A-subespacio vectorial de M. Ahora definimos una acción a derecha de A en M/N mediante $\varphi : M/N \times A \longrightarrow M/N$ tal que $\varphi(\pi(m), a) := \pi(ma) = \pi(m) * a$.

Veamos que φ esta bien definida. En efecto, sean $m, m' \in M$ tales que $\pi(m) = \pi(m')$, entonces $m - m' \in N$, luego $(m - m')a \in N$, en consecuencia, $\pi(ma) = \pi(m'a)$. La bilinealidad de φ se sigue de que π es un morfismo de espacios vectoriales y M/N es un k-espacio vectorial. Veamos que esta acción le da a M/N una estructura de A-módulo graduado derecho. Veamos primero que

$$(x * a) * b = (-1)^{gr(a)gr(b)} x * (ab)$$

para todo $a, b \in A$ elementos homogéneos y $x = \pi(m) \in M/N$. En efecto,

$$\begin{aligned}(x * a) * b = \pi(ma) * b = \pi((ma)b) & \\ &= \pi\left((-1)^{gr(a)gr(b)} m(ab)\right) \\ &= (-1)^{gr(a)gr(b)} \pi\left(m(ab)\right) \\ &= (-1)^{gr(a)gr(b)} x * (ab).\end{aligned}$$

Ahora veamos que $M/N = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \pi(M^i)$. Primero verificamos que

$$M/N = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \pi(M^i).$$

Sea $\overline{m} \in M/N$, entonces $\overline{m} = m + N$ con $m \in M$, dado que M es un A-módulo graduado derecho, tenemos que $m = \sum_{i\in\mathbb{Z}} m_i$, por lo que

$$\overline{m} = m + N = \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} m_i\right) + N = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (m_i + N)\,.$$

Además la suma anterior resulta ser directa. En efecto, supongamos que $\pi(m_1) + \pi(m_2) + \cdots + \pi(m_l) = 0$ con $m_i \in M^i$, para cada $i = 1, \cdots, t$. Luego,

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_l \in N = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \left(M^i \cap N\right)$$

entonces $m_i \in M^i \cap N$ para toda $i = 1, \cdots, t$, lo cual implica que $\pi(m_i) = 0$ para toda $i = 1, \cdots, t$. Ahora bien, sea $a \in A^i$ y $x \in (M/N)^j$, es decir, $x \in \pi(M^j)$, por lo que $x = \pi(m)$ con $m \in M^j$. Entonces $xa = \pi(m)a = \pi(ma) \in \pi(M^{i+j})$. Por lo tanto, por la proposición 1.2.8 M/N es un A-módulo graduado derecho.

(b) Sea M un A-módulo diferencial derecho y N un A-submódulo diferencial, por el inciso (a) tenemos que M/N es un A-módulo graduado derecho. Definimos una tranformación lineal $d_{M/N} : M/N \longrightarrow M/N$. Dado que N es un submódulo diferencial derecho tenemos que $d_M(N) \subseteq N$ tenemos que d_M induce una transformación lineal $d_{M/N}$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r] \arrow[d, "d_M|_N"'] & M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "d_M"'] & M/N \arrow[d, dotted, "d_{M/N}"] \\
N \arrow[r] & M \arrow[r, "\pi"'] & M/N.
\end{tikzcd}$$

Del diagrama anterior se obtiene que

$$d_{M/N}\left(\pi(M^i)\right) = \pi\left(d_M(M^i)\right) \subseteq \pi(M^{i+1})$$

para toda $i \in \mathbb{Z}$. Veamos que $d_{M/N}$ satisface

(a) *Regla de Leibniz.*
Sean $x \in M/N$ y $a \in A$ elementos homogéneos, digamos $x = \pi(m)$

con $m \in M$, entonces

$$\begin{aligned} d_{M/N}(x * a) &= d_{M/N}\left(\pi(ma)\right) \\ &= \pi\left(d_M(ma)\right) \\ &= \pi\left((-1)^{gr(a)} d_M(m)a + md(a)\right) \\ &= (-1)^{gr(a)}\pi\left(d_M(m)a + \pi(md(a))\right) \\ &= (-1)^{gr(a)} d_{M/N}\pi(m)a + \pi(m)d(a) \\ &= x * d(a) + (-1)^{gr(a)} d_{M/N}(x) * a. \end{aligned}$$

(b) $d^2_{M/N} = 0$.
Sea $x = \pi(m) \in M/N$, entonces

$$\begin{aligned} d^2_{M/N}(x) = d_{M/N} d_{M/N}(\pi(m)) &= d_{M/N}\left(\pi(d_M(m))\right) \\ &= \pi\left(d_M(d_M(m))\right) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por la proposición 1.2.9 M/N es un A-módulo diferencial derecho.

□

Corolario 1.3.18 *Sea (A, d) una k-álgebra diferencialmente graduada.*

(a) Si $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de A-módulos graduados derechos, entonces Coker(f) *es un A-módulo graduado derecho.*

(b) Si $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de A-módulos diferenciales derechos, entonces Coker(f) *es un A-módulo diferencial derecho.*

Demostración.

(a) Por el Lema 1.3.15 $Im(f)$ es un A-submódulo graduado derecho de N. Además Coker$(f) = N/Im(f)$ y por la proposición 1.3.17 se sigue que M/N un A-módulo graduado derecho.

(b) Por el Lema 1.3.16 sabemos que $Im(f)$ es un A-submódulo diferencial derecho de N. Nuevamente Coker$(f) = N/Im(f)$ y por la proposición 1.3.17 se sigue que M/N un A-módulo graduado derecho.

□

Proposición 1.3.19 *Sea (A, d) una k-álgebra diferencialmente graduada*

(a) Si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo de módulos graduados y $s :$ Ker$(f) \longrightarrow M$ es la inclusión, entonces s es el núcleo de f en la categoría $Gr{-}Mod(A^{op})$.

(b) *Si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo de módulos diferenciales y $s : \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow M$ es la inclusión, entonces s es el núcleo de f en la categoría $Dg - Mod(A^{op})$.*

Demostración.

(a) Por el Lema 1.3.13 tenemos que $\mathrm{Ker}(f) \in Gr - Mod(A^{op})$ y claramente s es un morfismo graduado. Veamos que s tiene la propiedad universal. En efecto, sea $g : L \longrightarrow M$ un morfismo en $Gr - Mod(A^{op})$ tal que $fg = 0$. Dado que $Gr - Mod(A^{op}) \subset Vec_K$ existe una única transformación lineal $\lambda : L \longrightarrow \mathrm{Ker}(f)$ tal que $s\lambda = g$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, dotted, "\lambda"'] \arrow[d, "g"] & \\ \mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "s"'] & M \arrow[r, "f"'] & N. \end{tikzcd}$$

Veamos que λ es un morfismo de A-módulos graduados derechos:

(a1) Sea $a \in A$ y $l \in L$, entonces,

$$\lambda(la) = s\lambda(la) = g(la) = g(l)a = (s\lambda)(l)a = \lambda(l)a.$$

(a2) Veamos que $\lambda(L^i) \subseteq \left(\mathrm{Ker}(f) \cap M^i\right)$.
Sea $l^i \in L^i$, así tenemos que $g(l^i) \in M^i$, pero como $fg = 0$, esto implica que $fg(l^i) = 0$, es decir, $g(l^i) \in \left(\mathrm{Ker}(f) \cap M^i\right)$. Como l^i es un elemento de L^i, entonces tenemos que $s\lambda(L^i) = g(L^i) \subseteq \left(\mathrm{Ker}(f) \cap M^i\right)$. Luego, $\lambda : L \longrightarrow M$ es un morfismo graduado y s es el núcleo de f en $Gr - Mod(A^{op})$.

(b) Ahora supongamos que $g : L \longrightarrow M$ es un morfismo de la categoría $Dg - Mod(A^{op})$, con la misma notación del inciso anterior, basta probar que λ conmuta con el diferencial, es decir,

$$\lambda d_L = d_{\mathrm{Ker}(f)}\lambda.$$

Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\lambda"] \arrow[rr, bend left, "g"] \arrow[d, "d_L"'] & \mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "s"] \arrow[d, "d_{\mathrm{Ker}(f)}"] & M \arrow[d, "d_M"] \\ L \arrow[r, "\lambda"'] \arrow[rr, bend right, "g"'] & \mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "s"'] & M, \end{tikzcd}$$

donde los triángulos y el cuadrado derecho conmutan. De esta manera se tiene $s\lambda d_L = gd_L = d_M g = d_M s\lambda = sd_{\mathrm{Ker}(f)}\lambda$, dado que s es un monomorfismo, entonces $\lambda_L = d_{\mathrm{Ker}(f)}\lambda$. Así, λ es un morfismo en $Dg - Mod(A^{op})$ y por lo tanto, s es el núcleo de f en Dg-Mod A.

□

Lema 1.3.20 *Sea (A, d) una k-álgebra diferencialmente graduada.*

(a) Si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo graduado, entonces existe su conúcleo en $Gr - Mod(A^{op})$.

(b) Si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo diferencial, entonces existe su conúcleo en $Dg - Mod(A^{op})$.

Demostración.

(a) Sean M, N A-módulos graduados derechos y $f : M \longrightarrow N$ un morfismo en $Gr - Mod(A^{op})$. Consideremos la factorización a través de la imagen de f

$$\begin{tikzcd} & Im(f) \arrow[dr, "f''"] & \\ M \arrow[ur, "f'"] \arrow[rr, "f"'] & & N \end{tikzcd}$$

con f' un epimorfismo y f'' un monomorfismo y la siguiente sucesión exacta

$$Im(f) \xrightarrow{f''} N \xrightarrow{t} \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow 0$$

donde t es la proyección canónica, por lo que $tf = 0$.

Dado que $Im(f)$ es un submódulo graduado de N, por la Proposición 1.3.17 tenemos que $\mathrm{Coker}(f)$ es un A-módulo graduado y t es un morfismo graduado.

Veamos que t tiene la propiedad universal. En efecto, sea $g : N \longrightarrow L$ un morfismo graduado tal que $gf = 0$, entonces $gf''f' = 0$. Dado que f' es un epimorfismo, se sigue que $gf'' = 0$. Por otro lado, como $t = \mathrm{Coker}(f)$ en la categoría de A-módulos derechos, por la propiedad universal del cokernel existe un único morfismo de A-módulos $\lambda : \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow L$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "t"] \arrow[d, "g"] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[dl, dotted, "\lambda"] \\ & L, & \end{tikzcd}$$

es decir, $\lambda t = g$. Veamos ahora que λ es un morfismo de modulos graduados derechos. En efecto, sea $x_i \in (\mathrm{Coker}(f))^i$. dado que t es un epimorfismo , existe $n_i \in N^i$ tal que $t(n_i) = x_i$. Luego,

$$g(n_i) = \lambda t(n_i) = \lambda(x_i),$$

y como g es un morfismo graduado, se tiene que $\lambda(x_i) \in L^i$. Por lo tanto, $\lambda : \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow L$ es morfismo de A-módulos graduados derechos y t es el conúcleo de f en $Gr - Mod(A^{op})$.

(b) Ahora supongamos que $f : M \longrightarrow L$ es un morfismo de A-módulos diferenciales derechos, con la notación del inciso (a) basta ver que λ conmuta con el diferencial, es decir,

$$d_L \lambda = \lambda d_{\mathrm{Coker}(f)}.$$

Consideremos el siguiente diagrama donde los triángulos y el cuadrado derecho conmutan

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "t"] \arrow[rr, bend left, "g"] \arrow[d, "d_N"'] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "d_{\mathrm{Coker}(f)}"] & L \arrow[d, "d_L"] \\
N \arrow[r, "t"'] \arrow[rr, bend right, "g"'] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[r, "\lambda"'] & L,
\end{tikzcd}$$

y notemos que

$$\begin{aligned}
\lambda\left(d_{\mathrm{Coker}(f)} t\right) &= \lambda t(d_N) & \\
&= (\lambda t) d_N & = g d_N \\
&= d_L g & \\
&= d_L(\lambda t) & \\
&= (d_L \lambda) t &
\end{aligned}$$

Dado que t es un epimorfismo se tiene que $d_L \lambda = \lambda d_{\mathrm{Coker}(f)}$. Por lo tanto, λ es un morfismo diferencial y t es el conúcleo de f en la categoría $Dg - Mod(A^{op})$.

□

Corolario 1.3.21 *Sea (A, d) una k-álgebra diferencialmente graduada. Entonces las categorías $Gr - Mod(A^{op})$ y $Dg - Mod(A^{op})$ son categorías preabelianas.*

Demostración. La demostración se sigue de las proposiciones 1.3.19, 1.3.20 y 1.3.9. $\square$

Proposición 1.3.22 *Sea (A, d) una k-álgebra diferencialmente graduada.*

(a) Sea $f : M \longrightarrow N$ monomorfismo en Gr-Mod A y g el conúcleo de f en $Gr - Mod(A^{op})$, entonces f es el núcleo de g en $Gr - Mod(A^{op})$.

(b) Sea $f : M \longrightarrow N$ monomorfismo en $Dg - Mod(A^{op})$ y g el conúcleo de f en $Gr - Mod(A^{op})$, entonces f es el núcleo de g en $Dg - Mod(A^{op})$.

Demostración.

(a) Sea $f : M \longrightarrow N$ monomorfismo en $Gr - Mod(A^{op})$ y $g : N \longrightarrow \mathrm{Coker}(f)$ el conúcleo de f en $Gr - Mod(A^{op})$. Consideremos $h : E \longrightarrow N$ el núcleo de g en $Gr - Mod(A^{op})$. Recordemos que f, g y h también son morfismos de la categoría de k-espacios vectoriales, y como Vec_k es abeliana, tenemos que f es el núcleo de su conúcleo en Vec_k. Dado que $gf = 0$, existe una única transformación k-lineal $\lambda : E \longrightarrow M$ tal que el siguiente diagrama conmta

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, dotted, "\lambda"'] \arrow[d, "h"] & \\ M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r, "g"'] & \mathrm{Coker}(f), \end{tikzcd}$$

es decir, $f\lambda = h$. Veamos que λ es un morfismo de A-módulos graduados. Sea $a \in A$ y $e \in E$ tenemos $f\lambda(ea) = h(ea) = h(e)a = f\lambda(e)a$, como f es monomorfismo tenemos que $\lambda(ea) = \lambda(e)a$. Por otro lado, si $e^i \in E^i$, tenemos que $h(e^i)$ satisface $gh(e^i) = gf\lambda(e^i) = 0$. Luego,

$$f\lambda(e^i) = h(e^i) \in \mathrm{Ker}(g) \cap N^i = Im(f) \cap N^i = f(M^i).$$

Entoces, existe $m^i \in M^i$ con $f\lambda(e^i) = f(m^i)$, dado que f es un monomorfismo $\lambda(e^i) = m^i$. En consecuencia, $\lambda(E^i) \subseteq M^i$. Vamos a probar que λ es un isomorfismo en $Gr - Mod(A^{op})$, con esto concluiremos que f es el núcleo de g en $Gr - Mod(A^{op})$.
Como $gf = 0$ y h es el núcleo de g en $Gr - Mod(A^{op})$, existe un único morfismo $\varphi : M \longrightarrow E$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dotted, "\varphi"'] \arrow[d, "f"] & \\ E \arrow[r, "h"'] & N \arrow[r, "g"'] & \mathrm{Coker}(f), \end{tikzcd}$$

es decir, $h\varphi = f$. Así tenemos $f\lambda = h$ y $h\varphi = f$, en consecuencia, $f\lambda\varphi = h\varphi = f$, dado que f es un monomorfismo tenemos que $\lambda\varphi = 1_M$. Por otro lado, $h\varphi\lambda = f\lambda = h$, de donde $\varphi\lambda = 1_E$. Por lo tanto, λ es un isomorfismo.

(b) Por el inciso anterior, basta ver que el morfismo $\lambda : E \longrightarrow M$ conmuta con el diferencial. En efecto,

$$f\lambda d_E = hd_E = d_N h = d_N f\lambda = f d_M \lambda$$

y, en consecuencia $\lambda d_E = d_M \lambda$.

□

Lema 1.3.23 *Sea $g : N \longrightarrow L$ un epimorfismo en $Gr - Mod(A^{op}$ (respectivamente en $Dg - Mod(A^{op})$ y $f : \mathrm{Ker}(g) \longrightarrow N$ el núcleo de g en $Gr - Mod(A^{op}$ (respectivamente en $Dg - Mod(A^{op})$. Entonces fg es el conúcleo de su núcleo en $Gr - Mod(A^{op}$ (respectivamente en $Dg - Mod(A^{op})$.*

Demostración. Sean $g : N \longrightarrow L$ epimorfismo en $Gr - Mod(A^{op})$ y $f : \mathrm{Ker}(g) \longrightarrow N$ su núcleo en $Gr - Mod(A^{op})$. Sea $h : N \longrightarrow E$ el conúcleo de f en $Gr - Mod(A^{op})$, dado que $gf = 0$, existe un único morfismo $\varphi : E \longrightarrow L$ tal que el siguiente diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(g) \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & E \arrow[dl, dotted, "\varphi"] \\
& L, &
\end{tikzcd}$$

es decir, $\varphi h = g$. Notemos que f, g y h son también morfismos de la categoría de k-espcios vectoriales y como Vec_k es abeliana, se sigue que g es el conúcleo de f.
Por otro lado, como $gf = 0$, existe una tranformación lineal $\lambda : L \longrightarrow E$ tal que $\lambda g = h$ tal que $\lambda g = h$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(g) \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & L \arrow[dl, dotted, "\lambda"] \\
& E. &
\end{tikzcd}$$

Veamos que φ es un isomorfismo de k-espacios vectoriales. En efecto, tenemos que $\lambda g = h$ y $\varphi h = g$, entonces $\varphi\lambda g = \varphi h = g$ y como g es un epimorfismo, se sigue que $\varphi\lambda = 1_L$. De manera análoga se tiene que $\lambda\varphi h = \lambda g = h$ y h epimorfismo implica que $\lambda\varphi = 1_E$. En consecuencia, λ es un isomorfismo de k-espacios vectoriales y por el lema 1.2.17 tenemos que λ es isomorfismo en $Gr - Mod(A^{op})$. El caso diferencial es análogo. □

Proposición 1.3.24 *Sean (A, d) una k-álgebra diferencialmente graduada y $f : M \longrightarrow N$ un morfismo graduado (respectivamente diferencialmente graduado).*

Entonces existe un diagrama conmutativo de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} & f(M) \arrow[dr, "f''"] & \\ M \arrow[ur, "f'"] \arrow[rr, "f"'] & & N \end{tikzcd}$$

donde, s es un epimorfismo graduado (diferencialmente graduado) y t es un monomorfismo graduado (diferencialmente graduado).

Demostración. Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo en $Dg - Mod(A^{op})$. Tenemos que $f(M) := Im(f)$ es un submódulo graduado de N, en consecuencia, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & f(M) \arrow[dr, "f''"] & \\ M \arrow[ur, "f'"] \arrow[rr, "f"'] & & N \end{tikzcd}$$

donde s se define como la corestricción de f a su imagen, es decir, $s := f|^{f(M)} : M \longrightarrow f(M)$ es un epimorfismo, t es la inclusión de $f(M)$ en N y ambos son morfismo de A-módulos graduados derechos. El caso diferencial es análogo. $\square$

Lema 1.3.25 *Sea (A, d) una k-álgebra graduada (respectivamente diferencialmente graduada). Entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "k"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d] & N \arrow[r, "l"] & \mathrm{Coker}(f) \\ & \mathrm{Coker}(k) \arrow[r, "\overline{f}"'] & \mathrm{Ker}(l) \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

en la categoría $Gr - Mod(A^{op})$ (respectivamente $Dg - Mod(A^{op})$), donde $\overline{f}$ es un isomorfismo.

Demostración. Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo en $Gr - Mod(A^{op})$, por el corolario 1.3.21 se puede construir de manera canónica el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "k"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d] & N \arrow[r, "l"] & \mathrm{Coker}(f) \\ & \mathrm{Coker}(k) \arrow[r, "\overline{f}"'] & \mathrm{Ker}(l). \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

Veamos que $\overline{f}$ es un isomorfismo en $Gr - Mod(A^{op})$. En efecto, dado que $Gr - Mod(A^{op}) \subset Mod(A^{op})$ podemos considerar el diagrama anterior en la categoría de A-módulos derechos y como $Mod(A^{op})$ es abeliana, se sigue que $\overline{f}$ es un isomorfismo en $Mod(A^{op})$. En particular, f es biyecctiva y, de la proposición 1.2.17, se tiene que $\overline{f}$ es un isomorfismo en $Gr - Mod(A^{op})$. Para el caso diferencial la prueba es análoga. □

Teorema 1.3.26 *Sea (A, d) una k-álgebra diferencialmente graduada, entonces las categorías $Gr - Mod(A^{op})$ y $Dg - Mod(A^{op})$ son categorías abelianas.*

Demostración. Se sigue del corolario 1.3.21 y del lema 1.3.25. □

Lema 1.3.27 *Sea (A, d) una k-álgebra diferencialmente graduada, entonces tenemos los siguientes automorfismos:*

(a) $T : Gr-Mod(A^{op}) \longrightarrow Gr-Mod(A^{op})$ *tal que* $T(M) := M[1]$, *para cada* $M \in Gr-Mod(A^{op})$ *y* $T(f) = f$ *para cada morfismo* $f \in Gr-Mod(A^{op})$.

(b) $T : Dg-Mod(A^{op}) \longrightarrow Dg-Mod(A^{op})$ *tal que* $T(M) := M[1]$, *para cada* $M \in Dg-Mod(A^{op})$ *y* $T(f) = f$ *para cada morfismo* $f \in Dg-Mod(A^{op})$.

Demostración. Se sigue de 1.2.12 que T es un funtor en ambos casos y si inversa esta dada por $T^{-1}(M) = M[-1]$ y $T^{-1}(f) = f$. □

1.4. Producto tensorial en $Gr - Mod(A^{op})$ y $Dg - Mod(A^{op})$

En la presente sección recordamos primero lo que es el producto tensorial sobre una k-álgebra A. Para posteriormente introducir la definición de producto tensorial de A-módulos graduados y el producto tensorial de A-módulos diferencialmente graduados. Empezamos por recordar la noción de función A-balanceada.

Definición 1.4.1 *Sea a una k-álgebra, M un A-módulo derecho, N un A-módulo izquierdo y H un k-espacio vectorial. Una función* $\tau : \mathbf{M} \times \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{H}$ ***es A-balanceada*** *si y sólo si para toda* $m, m_1, m_2 \in M$; $n, n_1, n_2 \in N$; $\alpha, \beta \in k$ *y* $a \in A$ *se cumple lo siguiente:*

(a) $\tau(\alpha m_1 + \beta m_2, n) = \alpha\tau(m_1, n) + \beta\tau(m_2, n)$

(b) $\tau(m, \alpha n_1 + \beta n_2) = \alpha\tau(m, n_1) + \beta\tau(m, n_2)$

(c) $\tau(ma, n) = \tau(m, an)$.

Si se cumplen las dos primeras propiedades diremos que τ ***es bilineal.***

Definición 1.4.2 *Sea A una k-álgebra, M un A-módulo derecho, N un A-módulo izquierdo. El* ***producto tensorial de M y N*** *es una pareja (T,τ), $\tau : M \times N \longrightarrow T$ donde T es un espacio vectorial y τ es A-balanceada, tal que para toda función A-balanceada $h : M \times N \longrightarrow L$, existe una única transformación lineal $\psi : T \longrightarrow L$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\tau"] & L \\ T, \arrow[ur, dotted, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $\psi\tau = h$.

Notación 1.4.3 *Al producto tensorial T de M_A y ${}_AN$ lo representamos como $M \otimes_A N$. Además $M \otimes_A N$ está generado como k-espacio vectorial, por los elementos $m \otimes n := \tau(m,n)$, con $m \in M$ y $n \in N$.*

Proposición 1.4.4 *Sean A, B dos k-álgebras graduadas. Entonces $A \otimes_k B$ es una k-álgebra graduada.*

Demostración. Tenemos que $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$ y $B = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} B^i$, luego $A \otimes_k B \cong \bigoplus_{i,j\in\mathbb{Z}} \left(A^i \otimes_k B^j\right)$. En adelante, identificaremos $A \otimes_k B$ con $\bigoplus_{i,j\in\mathbb{Z}} \left(A^i \otimes_k B^j\right)$ y a $A^i \otimes_k B^j$ con su imagen en $\bigoplus_{i,j\in\mathbb{Z}} \left(A^i \otimes_k B^j\right)$.
Para definir el producto en $A \otimes_k B$ construimos una funcion lineal

$$\varphi : A \otimes_k B \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(A \otimes_k B, A \otimes_k B).$$

Para ello fijemos $a \in A^s$, $b \in B^t$ y definimos $\overline{\lambda}^{i,j}_{(a,b)} : A^i \times B^j \longrightarrow A \otimes_k B$ como sigue: si $u \in A^i$, $v \in B^j$, hacemos

$$\overline{\lambda}^{i,j}_{a,b}(u,v) := (-1)^{gr(u)gr(b)} au \otimes bv.$$

Claramente $\overline{\lambda}^{(i,j)}_{(a,b)}$ es bilineal, por la propiedad universal existe una única tranformación lineal $\lambda^{(i,j)}_{(a,b)} : A^i \otimes_k B^j \longrightarrow A \otimes_k B$ tal que que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A^i \times B^j \arrow[r, "\overline{\lambda}^{(i,j)}_{(a,b)}"] \arrow[d, "\mu"'] & A \otimes_k B \\ A^i \otimes_k B^j, \arrow[ur, "\lambda^{(i,j)}_{(a,b)}"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $\lambda_{(a,b)}^{(i,j)}(u \otimes v) = (-1)^{gr(u)gr(b)} au \otimes bv$. Luego, por propiedad universal de suma directa, la familia $\{\lambda_{(a,b)}^{(i,j)} : A^i \otimes_k B^j \longrightarrow a \otimes_k B\}_{i,j}$ induce una transformación lineal

$$\lambda_{(a,b)} : A \otimes_k B \longrightarrow A \otimes_k B,$$

tal que que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes_k B \\
A^i \otimes_k B^j \arrow[ur, "\lambda_{(a,b)}^{(i,j)}"] \arrow[r, "\mu_{i,j}"'] & A \otimes_k B, \arrow[u, "\lambda_{(a,b)}"']
\end{tikzcd}$$

es decir, $\lambda_{(a,b)}(u \otimes v) = (-1)^{gr(u)gr(b)} au \otimes bv$ para u, v elementos homogéneos. Definimos ahora

$$\overline{\psi}^{s,t} : A^s \times B^t \longrightarrow \mathrm{Hom}_k\left(A \otimes_k B, A \otimes B\right)$$

como $\overline{\psi}^{(s,t)}(a,b) := \lambda_{(a,b)}$ para $a \in A^s$ y $b \in B^t$. Se sigue de la definición de $\lambda_{(a,b)}$ que $\overline{\psi}^{s,t}$ es bilineal, en consecuencia, existe una transformación lineal

$$\psi^{(s,t)} : A^s \otimes_k B^t \longrightarrow \mathrm{Hom}_k\left(A \otimes_k B, A \otimes_k B\right)$$

tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
A^s \times B^t \arrow[r, "\overline{\psi}^{(s,t)}"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_k(A \otimes_k B, A \otimes_k B) \\
A^s \otimes_k B^t, \arrow[ur, "\psi^{(s,t)}"'] &
\end{tikzcd}$$

es decir, $\psi^{(s,t)}(a \otimes b) = \lambda_{(a,b)}$ para a, b elementos homogéneos. Por propiedad universal de suma del coproducto, existe una única transformación lineal

$$\psi : A \otimes_k B \longrightarrow \mathrm{Hom}_k\left(A \otimes_k B, A \otimes_k B\right)$$

tal que para $a \in A^s$ y $b \in B^t$ se define como $\psi(a \otimes b) = \psi^{(s,t)}(a \otimes b) = \lambda_{(a,b)}$. Luego, si $a, u \in A$ y $b, v \in B$ son elementos homogéneos, tenemos

$$\psi(a \otimes b)(u \otimes v) = (-1)^{gr(u)gr(b)} au \otimes bv.$$

Ahora definimos el producto como sigue, sean $z_1, z_2 \in A \otimes_k B$ entonces $z_1 z_2 = \psi(z_1)(z_2)$. Luego, si $a_s \in A^s$, $b_t \in B^t$, $u_i \in A^i$ y $v_j \in B^j$, tenemos la fórmula general del produto en $A \otimes_k B$

$$\left(\sum_{s,t} a_s \otimes_k b_t\right)\left(\sum_{i,j} u_i \otimes_k v_j\right) = \sum_{s,t,i,j} (-1)^{gr(u_i)gr(b_t)} a_s u_i \otimes_k b_t v_j.$$

Veamos que $A \otimes_k B$ es una k-álgebra. En efecto, dado que ψ es una transformación lineal y $\psi(z_1)$ es lineal para cada z_1 el producto es una función bilineal. Notemos que para a, b, u, v elementos homogéneos tenemos

$$(a \otimes b)(u \otimes_k v) = (-1)^{gr(u)gr(b)} au \otimes bv.$$

Vamos la asociatividad del producto. Bata verificar que se cumple para elementos homogéneos, ya que en el caso general se siguie por la linealidad de las transformaciones. Sean $z_1 = a \otimes b$, $z_2 = u \otimes v$ y $z_3 = e \otimes f$ con a, b, u, v, e, f homogéneos

$$\begin{aligned}
z_1(z_2 z_3) &= (a \otimes b)\left((-1)^{gr(e)gr(v)} ue \otimes vf\right) \\
&= (-1)^{gr(e)gr(v)} (a \otimes b)(ue \otimes vf) \\
&= (-1)^{gr(e)gr(v)} \left((-1)^{gr(ue)gr(b)} aue \otimes bvf\right) \\
&= (-1)^{gr(e)gr(v)} (-1)^{gr(ue)gr(b)} aue \otimes bvf \\
&= (-1)^{gr(e)gr(v) + (gr(u) + gr(e))gr(b)} aue \otimes bvf
\end{aligned}$$

y, por otro lado,

$$\begin{aligned}
(z_1 z_2) z_3 &= \left((-1)^{gr(b)gr(u)} au \otimes bv\right)(e \otimes f) \\
&= (-1)^{gr(b)gr(u)} (au \otimes bv)(e \otimes f) \\
&= (-1)^{gr(b)gr(u)} \left((-1)^{gr(e)gr(bv)} aue \otimes bvf\right) \\
&= (-1)^{gr(b)gr(u) + gr(e)(gr(b) + gr(v))} aue \otimes bvf
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$. En general, sean

$$z_1 = \sum_{i=1}^{m} e_i, \;\; z_2 = \sum_{j=1}^{n} h_j, \;\; z_3 = \sum_{k=1}^{l} w_k \in A \otimes_k B$$

con e_i, h_j, w_k elementos homogéneos de la forma $a \otimes b$ con a y b homogéneos, luego usando la bilinealidad del producto tenemos que

$$\begin{aligned} z_1(z_2z_3) = z_1\left(\sum_{j,k}(h_jw_k)\right) &= \sum_{i,j,k} e_i(h_jw_k) \\ &= \sum_{i,j,k}(e_ih_j)w_k \\ &= (z_1z_2)z_3. \end{aligned}$$

Definimos la graduación como sigue $A \otimes_k B = \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} (A \otimes_k B)^s$ donde la componente de grado s es $(A \otimes_k B)^s = \bigoplus_{i+j=s} A^i \otimes_k B^j$.

(a) Sean $z_1 \in (A \otimes_k B)^i$ y $z_2 \in (A \otimes_k B)^j$, es decir, $z_1 \in \bigoplus_{\alpha+\beta=i} A^\alpha \otimes_k B^\beta$, $z_2 \in \bigoplus_{\gamma+\delta=j} A^\gamma \otimes_k B^\delta$, por lo que

$$z_1z_2 = \left(\sum_{\alpha,\beta} a_\alpha \otimes_k b_\beta\right)\left(\sum_{\gamma,\delta} a_\gamma \otimes_k b_\delta\right) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} (-1)^{gr(a_\gamma)gr(b_\beta)} a_\alpha a_\gamma \otimes_k b_\beta b_\delta,$$

dado que A y B son k-álgebras gruaduadas, se sigue que $a_\alpha a_\gamma \in A^{\alpha+\gamma}$ y $b_\beta b_\delta \in B^{\beta+\delta}$. En consecuencia,

$$z_1z_2 \in \bigoplus_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=i+j} (A^{\alpha+\gamma} \otimes_k B^{\beta+\delta}) = (A \otimes_k B)^{i+j}.$$

(b) Veamos que $1 \cdot z = z$. En efecto, sea $z = a \otimes b$, con a y b elementos homogéneos, luego,

$$1 \cdot z = (-1)^{gr(1)gr(a)}(1 \otimes 1)(a \otimes b) = a \otimes b = z.$$

Por lo tanto, $A \otimes_k B$ es una k-álgebra graduada. $\square$

Proposición 1.4.5 *Sean A, B dos k-álgebras diferencialmente graduadas. Entonces $A \otimes_k B$ es una k-álgebra diferencialmente graduada.*

Demostración. Por la proposición 1.4.4 tenemos que $A \otimes_k B$ es una k-álgebra graduada. Veamos que $A \otimes_k B$ tiene diferencial. En efecto, para cada $s, t \in \mathbb{Z}$ consideramos la función k-balanceada

$$\overline{\delta}_{(s,t)} : A^s \times B^t \longrightarrow A \otimes_k B$$

tal que $\overline{\delta}_{(s,t)}(a, b) = d_A(a) \otimes b + (-1)^{gr(a)} a \otimes d_B(b)$, la cual es claramente bilineal. Luego $\delta_{(s,t)}$ induce una transformación lineal $\delta_{(s,t)} : A^s \otimes B^t \longrightarrow A \otimes_k B$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
A^s \times B^t \arrow[r, "\overline{\delta}_{(s,t)}"] \arrow[d] & A \otimes_k B \\
A^s \otimes_k B^t. \arrow[ur, "\delta_{(s,t)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Ahora la familia de transformaciones lineales $\{\delta_{(s,t)} : A^s \otimes_k B^t \longrightarrow A \otimes_k B\}_{(s,t)}$ induce una tranformación lineal $\delta : A \otimes_k B \longrightarrow A \otimes_k B$ definida por la propiedad universal de la suma directa, es decir, si $a \in A$ y $b \in B$ son homogéneos se tiene la siguiente fórmula $\delta(a \otimes b) := d_A(a) \otimes +(-1)^{gr(a)} a \otimes d_B(b)$. Veamos que δ es un diferencial para $A \otimes_k B$.

(a) *δ cumple la condición de Leibniz.*
Queremos probar que $\delta(z \cdot w) = \delta(z) \cdot w + (-1)^{gr(z)} z \cdot d(w)$. sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $z = a \otimes b \in A^i \otimes_k B^j$ y $w = u \otimes v \in A^s \otimes_k B^t$. Por un lado, tenemos

$$\begin{aligned} \delta(zw) = \delta\left((-1)^{sj} au \otimes bv\right) &= (-1)^{sj} \delta\left(au \otimes bv\right) \\ &= (-1)^{sj}\left(d_A(au) \otimes bv + (-1)^{i+s} au \otimes d_B(bv)\right). \end{aligned}$$

Recordemos que

$$\begin{aligned} d_A(au) &= d_A(a)u + (-1)^i a d_A(u) \\ d_B(bv) &= d_B(a)u + (-1)^j b d_B(v) \end{aligned}$$

sustituyendo obtenemos

$$\begin{aligned} \delta(z \cdot w) = (-1)^{sj} &\left(\left(d_A(a)u + (-1)^i a d_A(u)\right) \otimes bv\right) \\ &+ (-1)^{sj}\left((-1)^{i+s} au \otimes \left(d_B(a)u + (-1)^j b d_B(v)\right)\right) \\ = (-1)^{sj} &d_A(a)u \otimes bv + (-1)^{sj+i} a d_A(u) \otimes bv \\ &+ (-1)^{sj+i+s} au \otimes d_B(b)v + (-1)^{sj+i+s+j} au \otimes b d_B(v). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\delta(z) = \delta(a \otimes b) = d_A(a) \otimes b + (-1)^i a \otimes d_B(b).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \delta(z) \cdot w = &= \left[d_A(a) \otimes b + (-1)^i a \otimes d_B(b)\right] \cdot (u \otimes v) \\ &= (d_A(a) \otimes b) \cdot (u \otimes v) + (-1)^i (a \otimes d_B(b)) \cdot (u \otimes v) \\ &= (-1)^{sj} d_A(a)u \otimes bv + (-1)^{i+s(j+1)} au \otimes d_B(b)v. \end{aligned}$$

Ahora, dado que $\delta(w) = \delta(u \otimes v) = d_A(u) \otimes v + (-1)^s u \otimes d_B(v)$ se tiene que

$$\begin{aligned} z \cdot \delta(z) &= (a \otimes b) \cdot [d_A(u) \otimes v + (-1)^s u \otimes d_B(v)] \\ &= (-1)^{(s+1)j} a d_A(u) \otimes (u) \otimes bv + (-1)^{s+sj} au \otimes bd_B(v). \end{aligned}$$

Multiplicamos la expresion anterior por $(-1)^{i+j}$ obtenemos

$$(-1)^{(s+1)j+i+j} a d_A(u) \otimes bv + (-1)^{s+sj+i+j} au \otimes bd_B(v).$$

Sumando los términos anteriores

$$\begin{aligned} \delta(z) \cdot w + (-1)^{gr(z)} z \cdot \delta(w) = (-1)^{sj} d_A(a) u \otimes bv + (-1)^{i+sj+s} au \otimes d_B(b) v \\ (-1)^{(sj+i} a d_A(u) \otimes bv + (-1)^{s+sj+i+j} au \otimes bd_B(v) \end{aligned}$$

Luego, concluimos que

$$\delta(z \cdot w) = \delta(z) \cdot w + (-1)^{gr(z)} z \cdot \delta(w).$$

(b) Veamos que $\delta^2 = 0$. En efecto, sea $z = a \otimes b$ en $A^i \otimes_k B^j$. Entonces

$$\begin{aligned} \delta^2(z) &= \delta(\delta(a \otimes b)) = \delta\left(d_A(a) \otimes b + (-1)^i a \otimes d_B(b)\right) \\ &= \delta(d_A(a) \otimes b) + (-1)^i \delta(a \otimes d_B(b)) \\ &= d_A^2(a) \otimes b + (-1)^{i+1} d_A(a) d_B(b) + (-1)^i d_A(a) d_B(b) + a \otimes d_B^2(b) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Definición 1.4.6 *Decimos que M es un* ***A,B-bimódulo graduado (diferencialmente graduado)*** *si es un $A \otimes_k B^{op}$-módulo graduado (diferencialmente graduado).*

Proposición 1.4.7 *Sean A, B k-álgebras gruaduadas. Entonces M es un $A \otimes_k B^{op}$-módulo diferencialmente graduado a izquierda si y sólo si*

(a) M es un A-módulo difrencialmente gtaduado a izquierda.

(b) M es un B-módulo diferencialmente graduado a derecha.

(c) Las diferenciales de M en $Mod(A)$ y $Mod(B^{op})$ coinciden.

(d) Se cumple que $(am)b = (-1)^{gr(a)gr(b)} a(mb)$, para todo $a \in A$, $b \in B$ elementos homogéneos y $m \in M$.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Supongamos que M es un $A \otimes_k B^{op}$-módulo diferencialmente graduado a izquierda. Veamos que:

(a) M es un A-módulo difrencialmente graduado a izquierda. En efecto, definimos una acción; sean $a \in A$ y $m \in M$, definimos la acción por izquierda como

$$a \cdot m = (a \otimes 1) \cdot m.$$

Sean $a_1, a_2 \in A$ y $m_1, m_2 \in M$, veamos que satisfacen las propiedades de A-módulo izquierdo

(M1) $(a_1 + a_2) \cdot m = a_1 \cdot m + a_2 \cdot m$. Tenemos que

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2) \cdot m &= ((a_1 + a_2) \otimes 1)m = (a_1 \otimes 1 + a_2 \otimes 1)m \\ &= (a_1 \otimes 1)m + (a_2 \otimes 1)m = a_1 \cdot m + a_2 \cdot m\end{aligned}$$

(M2) $a \cdot (m + n) = a \cdot m + a \cdot n$. Aplicando la acción tenemos que

$$\begin{aligned}a \cdot (m + n) &= (a \otimes 1)(m + n) \\ &= (a \otimes 1) \cdot m + (a \otimes 1) \cdot n = a \cdot m + a \cdot n\end{aligned}$$

(M3) $a \cdot (b \cdot m) = (ab) \cdot m$. Sabemos que

$$\begin{aligned}a \cdot (b \cdot m) &= (a \otimes 1)\left((b \otimes 1)m\right) = \left((a \otimes 1)(b \otimes 1)\right)m \\ &= (ab \otimes 1)m = (ab) \cdot m\end{aligned}$$

(M4) $1 \cdot m = m$. En efecto,

$$1 \cdot m = (1 \otimes 1)m = m.$$

De esta manera concluimos que M es un A-módulo izquierdo. Dado que M es $A \otimes_k B^{op}$-módulo diferencialmente graduado a izquierda, existe $d : M \longrightarrow M$ su diferencial. Veamos que si $a \in M$ y $m \in M$ son elementos homogéneos se cumple la regla de Leiniz, es decir, $d(a \cdot m) = d(a) \cdot m + (-1)^{gr(a)} a \cdot d(m)$. En efecto, tenemos que

$$d(a \cdot m) = d((a \otimes 1)m) = d(a \otimes 1)m + (-1)^{gr(a)}(a \otimes 1)d(m)$$

recordemos que

$$d(a \otimes 1) = d(a) \otimes 1 + (-1)^{gr(a)} a \otimes d(1) = d(a) \otimes 1,$$

por lo que, sustituyendo la expresión anterior tenemos

$$\begin{aligned}d(a \cdot m) &= (d(a) \otimes 1)m + (-1)^{gr(a)}(a \otimes 1)d(m) \\ &= d(a) \cdot m + (-1)^{gr(a)} a \cdot d(m).\end{aligned}$$

Las condiciones $d(M^i) \subseteq M^{i+1}$ y $d^2 = 0$, se siguen inmediatamente del hecho de que d es un diferencial. En consecuencia, M es un A-módulo diferencialmente graduado a izquierda.

(b) Tenemos por definición que M es un B^{op}-módulo izquierdo y, por lo tanto M es un B-módulo derecho. Definimos ahora una acción por la derecha de la siguiente manera; para $b^{op} \in B^{op}$ y $m \in M$, definimos

$$m \cdot b := (1 \otimes b^{op})m.$$

Con un cálculo similar al de $M1$, $M2$, $M3$, $M4$, se puede probar que M es un B^{op}-módulo izquierdo.
Tomemos ahora la diferencial $d : M \longrightarrow M$ dada por la estructura de $A \otimes_k B^{op}$-módulo diferencialmente graduado. Veamos que se cumple la siguiente igualdad

$$d(m \cdot b) = md(b) + (-1)^{gr(b)}d(m)b.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} d(m \cdot b) &= d\left((1 \otimes b^{op})m\right) d(1 \otimes b^{op})m + (-1)^{gr(b)}(1 \otimes b^{op})d(m) \\ &= \left(d(1) \otimes b^{op} + (-1)^0(1 \otimes d(b^{op}))\right) m + (-1)^{gr(b)}(1 \otimes b^{op})d(m) \\ &= (1 \otimes d(b^{op}))m + (-1)^{gr(b)}(1 \otimes b^{op})d(m) \\ &= md(b) + (-1)^{gr(b)}d(m)b. \end{aligned}$$

Así, M es un B-módulo diferencialmente graduado a derecha.

(c) La diferenciales coinciden, ya que en (a) y (b) hemos tomado la misma diferencial, a saber, la diferencial $d : M \longrightarrow M$ de M como $A \otimes_k B^{op}$-módulo diferencial.

(d) Note que

$$\begin{aligned} (am)b &= (1 \otimes b^{op})(am) = (1 \otimes b^{op})\left((a \otimes 1)m\right) \\ &= (-1)^{gr(a)gr(b)}(a \otimes b^{op})m. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} a(mb) &= a\left((1 \otimes b^{op})m\right) = (a \otimes 1)(1 \otimes b^{op})m \\ &= (a \otimes b^{op})m. \end{aligned}$$

En consecuencia, $(am)b = (-1)^{gr(a)gr(b)}a(mb)$.

($\Longleftarrow$) Supongamos que se cumplen las condiciones (a), (b), (c) y (d). Probemos que M es un $A \otimes_k B^{op}$-módulo diferencial. Tenemos que definir una una acción $\psi : (A \otimes_k B^{op}) \times M \longrightarrow M$, es decir una función bilineal. Equivalentemente, debemos dar una transformación lineal $\varphi : A \otimes_k B^{op} \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(M, M)$. Dados $a \in A^s$ y $b \in B^t$, tenemos la transformación lineal $\overline{\varphi}^{(s,t)}_{(a,b)} : M \longrightarrow M$

dada por $\overline{\varphi}^{(s,t)}_{(a,b)}(m) := a(mb)$. Luego para $s,t \in \mathbb{Z}$, consideramos la función k-balanceada

$$\overline{\varphi}^{(s,t)} : A^s \times (B^{op})^t \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(M,M)$$

tal que $\overline{\varphi}^{(s,t)}(a,b) := \overline{\varphi}^{(s,t)}_{(a,b)}$, la cual determina una única tranformación lineal $\varphi^{(s,t)} : A^s \otimes_k (B^{op})^t \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(M,M)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
A^s \times (B^{op})^t \arrow[r, "\overline{\varphi}^{(s,t)}"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_k(M,M) \\
A^s \otimes_k (B^{op})^t, \arrow[ur, "\varphi^{(s,t)}"'] &
\end{tikzcd}$$

es decir, $\varphi^{(s,t)}(a \otimes b)(m) = a(mb)$. Considere ahora la familia

$$\{\varphi^{(s,t)} : A^s \otimes_k (B^{op})^t \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(M,M)\}_{(s,t)\in\mathbb{Z}^2}$$

la cual induce una única transformación lineal $\varphi : A \otimes_k B^{op} \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(M,M)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_k(M,M) \\
A^s \otimes_k (B^{op})^t \arrow[ur, "\varphi^{(s,t)}"] \arrow[r, "\mu_{(s,t)}"'] & A \otimes_k B^{op}, \arrow[u, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

y por lo tanto, tenemos una acción $\psi : (A \otimes_k B^{op}) \times M \longrightarrow M$ tal que $z \cdot m := \psi(z,m) = \varphi(z)(m)$. Note que si $a \in A^i$, $b \in (B^{op})^t$ y $m \in M^j$, entonces

$$(a \otimes b) \cdot m = \varphi(a \otimes b)(m) = a(mb) \in M^{i+t+j}.$$

Veamos que con esta acción M es un $A \otimes_k B^{op}$-módulo graduado a izquierda. Dado que φ y para cada $z \in A \otimes_k B^{op}$, $\varphi(z)$ es lineal, se tiene que ψ es bilineal. Falta ver, que se cumple la asociatividad, es decir que $z_1 \cdot (z_2 \cdot m) = (z_1 z_2) \cdot m$ con $z_1, z_2 \in A \otimes_k B^{op}$ y $m \in M$. Es suficiente probar el resultado para elementos homogéneos de la forma $z_1 = a \otimes b$ y $z_2 = u \otimes v$, con a, b, u, v elementos homogéneos. Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot (z_2 \cdot m) &= (a \otimes b)((u \otimes v))m = (a \otimes b)(u(mv)) \\
&= a\,((u(mv))b) = (-1)^{gr(u)gr(b)} a\,(u((mv)b)) \\
&= (-1)^{gr(u)gr(b)+gr(v)gr(b)} a(u(m(vb))) \\
&= (-1)^{gr(u)gr(b)+gr(v)gr(b)+gr(v)gr(b)} (au)\,(m(b * v)) \\
&= (-1)^{gr(u)gr(b)} (au \otimes bv) \cdot m \\
&= ((a \otimes b)(u \otimes v)) \cdot m \\
&= (z_1 z_2) \cdot m.
\end{aligned}$$

Luego, por la proposición $1.2.8^{op}$ M es un $A \otimes_k B^{op}$-módulo izquierdo.

Por el inciso (c) tenemos que las diferenciales d_A y d_B coinciden, por lo que las llamaremos d. Sean $a \otimes b \in A \otimes_k B^{op}$ un generador homogéneo, y $m \in M$, requerimos ver que se cumple la siguiente igualdad

$$d\,((a \otimes b) \cdot m) = d(a \otimes b)m + (-1)^{gr(a)+gr(b)} (a \otimes b) \cdot d(m).$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
d\,((a \otimes b) \cdot m) &= d(a(mb)) = d(a)(mb) + (-1)^{gr(a)} ad(mb) \\
&= d(a)(mb) + (-1)^{gr(a)} \Big((-1)^{gr(b)} d(m)b + md(b)\Big) \\
&= d(a)(mb) + (-1)^{gr(a)+gr(b)} a(d(m)b) + (-1)^{gr(a)} a(md(b)) \\
&= (d(a) \otimes b)m + (-1)^{gr(a)} (a \otimes d(b))m + (-1)^{gr(a)+gr(b)} (a \otimes b)d(m) \\
&= (d(a \otimes b)) + (-1)^{gr(a)+gr(b)} (a \otimes b)d(m).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por la proposición $1.2.9^{op}$ M es un $A \otimes B^{op}$-módulo diferencialmente graduado a izquierda. $\square$

Definición 1.4.8 *Sea A una k-álgebra graduada, M un A-módulo graduado derecho y N un A-módulo graduado izquierdo. Entonces un* ***producto tensorial graduado de M por N****, es una pareja (T, τ), donde T es un k-espacio vectorial graduado y*

$$\tau : M \times N \longrightarrow T$$

es A-balanceada, es decir,

(a) τ es bilineal;

(b) $\tau(M^i \times N^j) \subseteq T^{i+j}$, para cada $i, j \in \mathbb{Z}$;

(c) $\tau(ma, n) = (-1)^{gr(a)gr(n)} \tau(m, an)$, donde $m \in M$, $a \in A$ y $n \in N$ son elementos homogéneos;

tal que para cada función A-balanceada $\lambda : M \times N \longrightarrow H$ hay una única transformación lineal graduada ψ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\tau"'] & H \\ T. \arrow[ur, dotted, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Proposición 1.4.9 *Sea A una k-álgebra graduada, M un A-módulo graduado derecho y N un A-módulo graduado izquierdo, entonces existe un producto tensorial graduado (T, τ) de M por N.*

Demostración. Se tienen las siguientes graduaciones $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i$, $N = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} N^j$ y $M \otimes_k N = \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} (M \otimes_k N)^s$, donde $(M \otimes_k N)^s = \bigoplus_{i+j=s} M^i \otimes_k N^j$. Consideremos el subespacio vectorial L de $M \otimes_k N$ generado por los elementos $\{ma \otimes n - (-1)^{gr(a)gr(n)} m \otimes an | m \in M, a \in A, n \in N \text{ homogéneos}\}$. Claramente se tiene que $L = \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} L^s$, donde L^s está generado como espacio vectorial por $\{ma \otimes n - (-1)^{gr(a)gr(n)} m \otimes an | m \in M^i, a \in A^j, n \in N^t \ y \ t + j + i = s\}$. Definimos

$$T := \frac{M \otimes_k N}{L},$$

dado que L es un subespacio de $M \otimes_k N$, se sigue que

$$T = \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} \frac{(M \otimes_k N)^s + L}{L}$$

que es un k-espacio vectorial graduado. Por definición, la función τ es la composición

$$M \times N \xrightarrow{\tau_0} M \otimes_k N \xrightarrow{\eta} T = \tfrac{M \otimes_k N}{L}$$

donde τ_0 es el producto tensorial (como k-espacios vectoriales) y η es la proyección canónica. Veamos que τ es una función A-balanceada. En efecto, sean $m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$ y $\alpha, \beta, a \in k$. Dado que τ_0 es A-balanceada, entonces

(a) $\tau(\alpha m_1 + \beta m_2, n) := \eta\tau_0(\alpha m_1 + \beta m_2, n) = \eta(\alpha\tau_0(m_1, n) + \beta\tau_0(m_2, n)) = \overline{\alpha\tau_0(\alpha m_1 + \beta m_2, n)} + \beta\overline{\tau_0(m_2, n))}$

(b) $\tau(m, \alpha n_1 + \beta n_2) = \eta\tau_0(m, \alpha n_1 + \beta n_2) = \eta(\alpha\tau_0(m, n_1) + \beta\tau_0(m, n_2)) = \alpha\overline{\tau_0(m, n_1)} + \beta\overline{\tau_0(m, n_2)}$

(c) Dado que $\tau_0(ma, n) - (-1)^{gr(a)gr(n)}\tau_0(m, an) \in L$ se tiene que $\overline{\tau_0(ma, n)} = (-1)^{gr(a)gr(n)}\overline{\tau_0(m, an)}$. Así, $\tau(ma, n) = \tau(m, an)$.

Veamos que $\tau : M\times N \longrightarrow T$ tiene la propiedada univesal. Sea $\lambda : M\times N \longrightarrow H$ una función A-balanceada. Como $(M \otimes_k N, \tau_0)$ es el producto tensorial como k-espacios vectoriales, existe una única función lineal $\overline{\mu} : M \otimes_k N \longrightarrow H$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\tau_0"] \arrow[d, "\lambda"'] & M \otimes_k N \arrow[dl, dotted, "\overline{\mu}"] \\ H, & \end{tikzcd}$$

es decir, $\overline{\mu}(m \otimes n) = \lambda(m, n)$. Dado que L esta generado por los elementos $\{ma \otimes n - (-1)^{gr(a)gr(n)} m \otimes an | m \in M, a \in A, n \in N$ homogéneos$\}$ y λ es A-balanceada, se tiene que $\overline{\mu}(z) = 0$ para todo $z \in L$. Luego, por propiedad universal del cokernel existe $\mu : T \longrightarrow H$ tal que el siguiente digarama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\eta\tau_0"] \arrow[d, "\lambda"'] & T \arrow[dl, dotted, "\mu"] \\ H. & \end{tikzcd}$$

la unicidad de μ, se sigue la la unicidad de $\overline{\mu}$. $\square$

Observación 1.4.10 *Denotaremos al producto tensorial graduado de antes por $M \otimes_A N$. Está generado como k-espacio vectorial por los elementos $m \otimes n := \tau(m, n)$. Entonces, para $m \in M$, $a \in A$, $n \in N$ homogéneos se tiene la fórmula*

$$ma \otimes n = (-1)^{gr(a)gr(n)} m \otimes na.$$

Además, $M \otimes_A N = \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} (M \otimes_A N)^s$, donde

$$(M \otimes_A N)^s =< m \otimes n \big| m \in M^i, n \in N^j \text{ y } i + j = s >$$

1.5. Bimódulos diferencialmente graduados

Proposición 1.5.1 *Sea A una álgebra graduadua, entonces:*

(a) Si M es un C,A-bimódulo graduado y N es un A-módulo graduado izquierdo, $M \otimes_A N$ es un C-módulo graduado izquierdo.

(b) Si M es un A-módulo graduado derecho y N es un A,B-bimódulo graduado, $M \otimes_A N$ es un B-módulo graduado derecho.

(c) Si M es un C,A-bimódulo graduado y N es un A,B-bimódulo graduado, $M \otimes_A N$ es un C,B-bimódulo graduado.

Demostración. Realizamos la prueba de cada uno de los incisos.

(a) Veamos que $M \otimes_A N$ es un C-módulo graduado izquierdo. Definimos una acción, $C \times (M \otimes_A N) \longrightarrow M \otimes_A N$, recordando que

$$M \otimes_A N = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} (M \otimes_A N)^m$$

donde $(M \otimes_A N)^m$ es el subespacio de $M \otimes_A N$ generado por $m \otimes n$, con $m \in M^s$, $n \in N^t$ tal que $s+t = m$. Sea $c \in C$ homogéneo, primero definimos $\lambda_c : M \times N \longrightarrow M \otimes_A N$ como $\lambda_c(m, n) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^{gr(c)gr(n_i)} cm \otimes n_i$, donde $n = \sum_{i \in \mathbb{Z}} n_i$ es la descripción de n en suma de elementos homogéneos. Veamos que λ_c es una función A-balanceada. En efecto,

(a1) Dado que $\lambda_c (M^s \times N^t) \subseteq (M \otimes_A N)^{s+t}$ se tiene que λ_c es homogénea.

(a2) Sean $m_1, m_2 \in M$ y $n \in N^i$, entonces

$$\begin{aligned}
\lambda_c(m_1 + m_2, n) &= (-1)^{gr(c)gr(n)} c(m_1 + m_2) \otimes n \\
&= (-1)^{gr(c)gr(n)} (cm_1 + cm_2) \otimes n \\
&= (-1)^{gr(c)gr(n)} cm_1 \otimes n + (-1)^{gr(c)gr(n)} cm_2 \otimes n \\
&= \lambda_c(m_1, n) + \lambda_c(m_2, n).
\end{aligned}$$

Sean $m \in M$ y $n_1, n_2 \in N$ homogéneos, entonces

$$\begin{aligned}
\lambda_c(m, n_1 + n_2) &= (-1)^{gr(c)gr(n_1)} cm \otimes n_1 + (-1)^{gr(c)gr(n_2)} cm \otimes n_2 \\
&= \lambda_c(m, n_1) + \lambda_c(m, n_2).
\end{aligned}$$

En consecuencia, λ_c es bilineal.

(a3) Sean $b \in B$, $n \in N$ elementos homogéneos. Entonces

$$\begin{aligned}
\lambda_c(mb, n) &= (-1)^{gr(b)gr(n)} c(mb) \otimes n \\
&= (-1)^{gr(c)gr(n)+gr(c)gr(b)} (cm)b \otimes n \\
&= (-1)^{gr(c)gr(n)+gr(c)gr(b)+gr(b)gr(n)} cm \otimes bn
\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\lambda_c(m, bn) = (-1)^{gr(c)(gr(b)+gr(n))} cm \otimes bn.$$

Luego, $\lambda_c(mb, n) = (-1)^{gr(c)gr(n)} \lambda_c(m, bn)$.

Ahora por la porpiedad universal de $(M \otimes_A N, \tau)$ existe un único morfismo $\varphi_c : M \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A N$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\lambda_c"'] & M \otimes_A N \arrow[dl, dotted, "\varphi_c"] \\
M \otimes_A N, &
\end{tikzcd}$$

es decir, $\varphi_c(m \otimes n) = (-1)^{gr(c)gr(n)}(cm) \otimes n$, para $m \in M$ y $n \in N$ homogéneos.

Definimos ahora una acción a izquierda que requerimos, sea $c \in C$ y $z \in M \otimes_A N$, por definición

$$c * z := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \varphi_{c_i}(z)$$

donde $\sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i$ es la descomposición de c en sumas de elementos homogéneos, por lo que la acción está bien definida. Ahora veamos que que efectivamente $M \otimes_A N$ es un C-módulo izquierdo.

(M1) $c * (z_1 + z_2) = c * z_1 + c * z_2$.
Sean $c \in C$ homogéneo y $z_1, z_2 \in M \otimes_A N$. Entonces,

$$c * (z_1 + z_2) = \varphi_c(z_1 + z_2) = \varphi_c(z_2) + \varphi_c(z_2) = c * z_1 + c * z_2$$

(M2) $(c_1 + c_2) * z = c_1 * z + c_2 * z$.
Sean $c_1, c_2 \in C^p$ y $z = m \otimes n$, con m,n elementos homogéneos. Entonces,

$$\begin{aligned}
(c_1 + c_2) * z = \varphi_{c_1+c_2}(z) &= (-1)^{gr(c_1+c2)gr(n)}(c_1 + c_2)m \otimes n \\
&= (-1)^{gr(c_1)gr(n)}(c_1 m \otimes n + c_2 m \otimes n) \\
&= (-1)^{gr(c_1)gr(n)} c_1 m \otimes n + (-1)^{gr(c_2)gr(n)} c_2 m \otimes n \\
&= \varphi_{c_1}(z) + \varphi_{c_2}(z) \\
&= c_1 * z + c * c_2.
\end{aligned}$$

(M3) $c_1 * (c_2 * z) = (-1)^{gr(c_1)gr(c_2)}(c_1 c_2) * z$.
Sean $c_1, c_2 \in C$ homogéneos y $z = m \otimes n$ un generador homogéneo de $M \otimes_A N$. entonces,

$$\begin{aligned}
c_1 * (c_2 * z) &= c * (\varphi_{c_2}(z)) \\
&= \varphi_{c_1}(\varphi_{c_2}(z)) \\
&= \varphi_{c_1}\left((-1)^{gr(c_2 gr(n))} c_2 m \otimes n\right) \\
&= (-1)^{gr(c_1 gr(n) + gr(c_2)gr(n)} c_1(c_2 m) \otimes n \\
&= (-1)^{(gr(c_1)+gr(c_2))gr(n) gr(c_1)gr(c_2)}(c_1 c_2)m \otimes n \\
&= (-1)^{gr(c_1)gr(c_2)} \varphi_{c_1 c_2}(m \otimes n) \\
&= (-1)^{gr(c_1)gr(c_2)}(c_1 c_2) * z
\end{aligned}$$

(M4) Se tiene que

$$1 * z = \varphi_1(z) = (-1)^{gr(1)gr(n)} 1m \otimes n = m \otimes n = z.$$

(M5) Sean $c \in C^p$ y $z = m \otimes n \in (M \otimes_A N)^s$ con $m \in M^i, n \in N^j$, entonces

$$c * z = \varphi_c(z) = (-1)^{gr(c)gr(n)} cm \otimes n.$$

Note que $cm \in M^{i+p}$, por lo que $c * z \in (M \otimes_A N)^{s+p}$.

Luego, por proposición 1.2.8^{op} $M \otimes_A N$ es un C-módulo graduado a izquierda.

(b) Veamos ahora que $M \otimes_A N$ es un B-módulo graduado a derecha. En efecto, ya tenemos que

$$M \otimes_A N = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} (M \otimes_A N)^s$$

donde $(M \otimes_A N)^s$ es el subespacio de $M \otimes_A N$ generado por los elementos $m \otimes n$ con $m \in M^i$, $n \in N^j$ y $i + j = s$. Debemos dar una acción $\varphi : (M \otimes_A N) \times B \longrightarrow M \otimes_A N$. Para ello consideramos, para cada $b \in B$, la función A-balanceada $\overline{\varphi}_b : M \times N \longrightarrow M \otimes_A N$ tal que $\overline{\varphi}_b(m, n) = m \otimes nb$, la cual induce una única tranformación lineal graduada $\varphi_b : M \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A N$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\overline{\varphi}_b"'] & M \otimes_A N \arrow[dl, dotted, "\varphi_b"] \\
M \otimes_A N, &
\end{tikzcd}$$

es decir, $\varphi_b(m \otimes n) = m \otimes nb$.
Ahora por definición, para $t \in M \otimes_A N$ y $b \in B$, definimos $\varphi(t, b) := \varphi_b(t)$. La bilinealidad de φ, se sigue de la unicidad y la linealidad de φ_b. Note que por definición de la acción para $t = m \otimes n \in M \otimes_A N$ y $b \in B$ homogéos tenemos que

$$t * (m \otimes n) = t * b := \varphi(t, b) = \varphi_b(m \otimes n) = m \otimes nb.$$

Veamos ahora que se cumplen las condiciones de la proposición 1.2.8;

(b1) Sean $t = \sum_{i \in \mathbb{Z}} m_i \otimes n_i \in (M \otimes_A N)^s$ y $b \in B^r$, entonces

$$t * b = \varphi_b(t) = \sum_{i,j} (m_i \otimes n_j) b = \sum_{i,j} (m_i \otimes n_i b) \in (M \otimes_A N)^{s+r}.$$

(b2) Además tenemos que

$$
\begin{aligned}
(t * b_1) * b_2 &= \left(\sum_{i,j} m_i \otimes n_j b_1 \right) b_2 \\
&= \sum_{i,j} m_i \otimes (n_j b_1) b_2 \\
&= \sum_{i,j} m_i \otimes (-1)^{gr(b_1)gr(b_2)} n_j (b_1 b_2) \\
&= (-1)^{gr(b_1)gr(b_2)} t(b_1 b_2).
\end{aligned}
$$

(b3) Sea $t \in M \otimes_A N$, entonces

$$
t * 1 := \varphi_1(t) = m \otimes n1 = m \otimes n = t.
$$

En consecuencia, $M \otimes_A N$ es un B-módulo graduado a derecha.

(c) Como M es un C,A-bimódulo graduado y N es un A,B-bimódulo graduado, en particular N es un A-módulo graduado izquierdo y luego, por (a) tenemos que $M \otimes_A N$ es un C-módulo graduado izquierdo. Por otro lado, tenemos M es un A-módulo graduado derecho y N es un A,B-bimódulo graduado, entonces por (b) $M \otimes_A N$ es un B-módulo graduado derecho.

Ahora solo falta verificar la propiedad (d) de la proposicion 1.4.7. Sean $c \in C$ y $b \in B$ homogéneos, y $t \in M \otimes_A N$. Tenemos que $t = \sum_{s,r} m_s \otimes n_r$ con $m_s \in M$, $n_r \in N$ homogéneos. Entonces,

$$
\begin{aligned}
(ct)b &= \left(\sum_{s,r} c(m_s \otimes n_r) \right) b \\
&= \sum_{s,r} (-1)^{gr(c)gr(n_r)} (cm_s \otimes n_r) b \\
&= \sum_{s,r} (-1)^{gr(c)gr(n_s)} cm_s \otimes n_r b.
\end{aligned}
$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
c(tb) &= c\left(\sum_{s,r}(m_s \otimes n_r)b\right) \\
&= c\left(\sum_{s,r} m_s \otimes n_r b\right) \\
&= \sum_{s,r} c(m_s \otimes n_r b) \\
&= \sum_{s,r}(-1)^{gr(c)(gr(n_r)+gr(b))} cm_s \otimes n_r b \\
&= (-1)^{gr(c)gr(b)} \sum_{s,r}(-1)^{gr(c)gr(n_r)} c(m_s \otimes n_r b \\
&= (-1)^{gr(c)gr(b)} c(tb).
\end{aligned}$$

Así, $(ct)b = (-1)^{gr(c)gr(b)}c(tb)$. Por lo tanto, $M \otimes_A N$ es un C,B-bimódulo graduado.

□

Proposición 1.5.2 *Sea (A, d) una k-álgebra diferncialmente graduadua, entonces:*

(a) Si M es un C,A-bimódulo diferencialmente graduado y N es un A-módulo diferencialmente graduado a izquierda, $M \otimes_A N$ es un C-módulo diferencialmente graduado a izquierda.

(b) Si M es un A-módulo diferencialmente graduado a derecha y N es un A,B-bimódulo diferencialmente graduado, $M \otimes_A N$ es un B-módulo diferencial derecho.

(c) Si M es un C,A-bimódulo diferencialmente graduado y N es un A,B-bimódulo diferencialmente graduado, $M \otimes_A N$ es un C,B-bimódulo diferencialmente graduado.

Demostración. Veremos la demostración de cada inciso. Realizamos primero la del inciso (b).

(b) Por el inciso (b) de la Proposición 1.5.1 sabemos que

$$M \otimes_A N = \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} (M \otimes_A N)^s$$

es un B-módulo graduado derecho. Basta definir un diferencial $d := d_{M\otimes_A N} : M \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A N$. Para definirla, consideramos la transformación A-bilineal $\overline{d} : M\times N \longrightarrow (M\otimes_A N)[-1]$. Recordemos que $((M \otimes_A N)[-1])^s :=$

$(M \otimes_A N)^{s+1}$. Ahora definimos $\overline{d}$ como sigue: $\overline{d}(m,n) := m \otimes d_N(n) + (-1)^{gr(n)} d_M(m) \otimes n$, donde $(m,n) \in M^i \times N^j$ elementos homogéneos y d_N, d_M son los diferenciales de N y M, respectivamente.
Note que si $m \in M$, $a \in A$, $n \in N$ son elementos homogéneos tenemos que

$$\begin{aligned}
\overline{d}(ma,n) &= ma \otimes d_N(n) + (-1)^{gr(n)} d_M(ma) \otimes n \\
&= (-1)^{gr(a)(gr(n)+1)} m \otimes a d_N(n) + (-1)^{gr(n)} (m d(a) \\
&\qquad + (-1)^{gr(a)} d_M(m) a) \otimes n \\
&= (-1)^{gr(a)(gr(n)+1)} m \otimes a d_N(n) + (-1)^{gr(n)} m d(a) \otimes n \\
&\qquad + (-1)^{gr(a)+gr(n)} d_M(m) a \otimes n \\
&= (-1)^{gr(a)(gr(n)+1)} m \otimes a d_N(n) + (-1)^{gr(n)+(gr(a)+1)gr(n)} m \otimes d(a) n \\
&\qquad + (-1)^{gr(a)+gr(n)(1+gr(a))} d_M(m) \otimes an \\
&= (-1)^{gr(a)(gr(n)+1)} m \otimes a d_N(n) + (-1)^{gr(a)gr(n)} m \otimes d(a) n \\
&\qquad + (-1)^{gr(a)+gr(n)+gr(a)gr(n)} d_M(m) \otimes an
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\overline{d}(m,an) &= m \otimes d_N(an) + (-1)^{gr(a)+gr(n)} d_M(m) \otimes an \\
&= m \otimes \Big(d(a) n + (-1)^{gr(a)} a d_N(n) \Big) + (-1)^{gr(a)+gr(n)} d_M(m) \otimes an \\
&= m \otimes d(a) n + (-1)^{gr(a)} m \otimes a d_N(n) + (-1)^{gr(a)+gr(n)} d_M(m) \otimes an.
\end{aligned}$$

Entonces $\overline{d}(ma,n) = (-1)^{gr(a)gr(n)} \overline{d}(m,an)$. Ahora bien, por la propiedad universal de $M \otimes_A N$ induce una única transformación lineal $d : M \otimes_A N \longrightarrow (M \otimes_A N)[-1]$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\overline{d}"] \arrow[d] & (M \otimes_A N)[-1] \cong M \otimes_A N \arrow[dl, dotted, "d"] \\
M \otimes_A N, &
\end{tikzcd}$$

de donde $d(m \otimes n) := ma \otimes d_N(n) + (-1)^{gr(n)} d_M(ma) \otimes n$.

Veamos que d cumple las hipótesis de la proposición 1.2.10. En efecto,

(b1) $d^2(m \otimes n) = 0$. Sean $m \in M$ y $n \in N$ elementos homogéneos, tenemos que

$$\begin{aligned}
d^2(m\otimes n) &= d\Big(m\otimes d_N(n) + (-1)^{gr(n)}d_M(m)\otimes n\Big)\\
&= (-1)^{gr(n)}d(d_M(m)\otimes n) + d(m\otimes d_N(n))\\
&= (-1)^{gr(n)}\Big((-1)^{gr(n)}d_Md_M(m)\otimes n + d_M(m)\otimes d_N(n)\Big)\\
&\qquad + (-1)^{gr(n)+1}d_M(m)\otimes d_N(n) + m\otimes d_Nd_N(n)\\
&= (-1)^{gr(n)}d_M(m)\otimes d_N(n) - (-1)^{gr(n)}d_M(m)\otimes d_N(n)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

(b2) *d satisface la regla de Leibniz.* Sean $m\in M$, $n\in N$ y $b\in B$ elementos homogéneos. Veamos que se cumple la siguiente igualdad

$$d((m\otimes n)\cdot b) = (m\otimes n)\cdot d_B(b) + (-1)^{gr(b)}d(m\otimes n)\cdot b.$$

En efecto, por un lado, tenemos que

$$\begin{aligned}
d((m\otimes n)\cdot b) &= d(m\otimes nb)\\
&= m\otimes d_N(nb) + (-1)^{gr(n)+gr(b)}d_M(m)\otimes nb\\
&= m\otimes\Big((-1)^{gr(b)}d_N(n)b + nd(b)\Big) + (-1)^{gr(n)+gr(b)}d_M(m)\otimes nb\\
&= (-1)^{gr(b)}m\otimes d_N(n)b + m\otimes nd(b) + (-1)^{gr(n)+gr(b)}d_M(m)\otimes nb
\end{aligned}$$

y, por otro lado,

$$\begin{aligned}
d(m\otimes n)\cdot b &= \Big((-1)^{gr(n)}d_M(m)\otimes n + m\otimes d(n)\Big)\, b\\
&= (-1)^{gr(n)}d(m)\otimes nb + m\otimes d(n)b.
\end{aligned}$$

Multiplicando por $(-1)^{gr(b)}$ la expresión anterior y sumándole $(m\otimes n)d(b)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
&(-1)^{gr(b)}\,(d(m\otimes n)\cdot b) + (m\otimes n)d(b)\\
&= (-1)^{gr(b)}\Big(\Big((-1)^{gr(n)}d_M(m)\otimes n + m\otimes d_N(n)\Big)\, b\Big) + (m\otimes n)d(b)\\
&= (-1)^{gr(b)+gr(n)}d_M(m)\otimes nb + (-1)^{gr(b)}m\otimes d_N(n)b + m\otimes nd(b)
\end{aligned}$$

Así, concluimos que

$$d((m\otimes n)\cdot b) = (m\otimes n)\cdot d_B(b) + (-1)^{gr(b)}d(m\otimes n)\cdot b.$$

Finalmente, si $t\in M\otimes_A N$, podemos escribir $t=\sum m_s\otimes n_r$ con $m_s\in M$, $n_r\in N$ homogéneos. Aplicando lo anterior, obtenemos

$$d(t\cdot b) = td(b) + (-1)^{gr(b)}d(t)b$$

Luego, por la Proposición 1.2.9 $M \otimes_A N$ es un B-módulo diferencial derecho.

(b) Por el inciso (b) de la Proposición 1.5.1 tenemos que $M \otimes_A N$ es un C-módulo graduado izquierdo. En la prueba del inciso anterior definimos una transformación $d : M \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A N$ de la siguiente manera

$$d(m \otimes n) := m \otimes d_N(n) + (-1)^{gr(n)} d_M(m) \otimes n,$$

para $m \in M$, $n \in N$ homogéneos. Veamos que esta diferencial le da estructura de C-módulo diferencial a $M \otimes_A N$. En efecto,

(a1) $d((M \otimes_A N)^i) \subseteq (M \otimes_A N)^{i+1}$.
Sean $m \in M^s$, $n \in N^r$ homogéneos, tales que $s + r = i$, es decir, $m \otimes n \in (M \otimes_A N)^i$. Entonces

$$d(m \otimes n) = m \otimes d_N(n) + (-1)^{gr(n)} d_M(m) \otimes n,$$

note que $d_N(n) \in N^{r+1}$ y $d_M(m) \in M^{s+1}$. Por tanto $d(m \otimes n) \in (M \otimes_A N)^{i+1}$.

(a2) $d^2(m \otimes n) = 0$. Se sigue del inciso (b1).

(a3) *Regla de Leibniz.* sean $c \in C$, $z = m \otimes n$, con $m \in M$, $n \in N$ homogéneos. Por un lado, tenemos

$$\begin{aligned}
d(c * z) &= d((-1)^{gr(c)gr(n)} cm \otimes n)\\
&= (-1)^{gr(c)gr(n)} d(cm \otimes n)\\
&= (-1)^{gr(c)gr(n)} \Big((-1)^{gr(n)} d_M(cm) \otimes n + cm \otimes d_N(n)\Big)\\
&= (-1)^{gr(c)gr(n)+gr(n)} d_M(cm) \otimes n + (-1)^{gr(c)gr(n)} cm \otimes d_N(n)\\
&= (-1)^{gr(c)gr(n)+gr(n)} \Big(d(c)m + (-1)^{gr(c)} c d_M(m)\Big) \otimes n\\
&\qquad\qquad + (-1)^{gr(c)gr(n)} cm \otimes d_N(n)\\
&= (-1)^{gr(c)gr(n)+gr(n)} d(c)m \otimes n\\
&\qquad + (-1)^{gr(c)gr(n)+gr(n)+gr(c)} c d_M(m) \otimes n\\
&\qquad\qquad + (-1)^{gr(c)gr(n)} cm \otimes d_N(n)\\
&= d(c) * z + (-1)^{gr(c)} \Big((-1)^{gr(c)gr(n)+gr(n)} c d_M(m) \otimes n\\
&\qquad\qquad + (-1)^{gr(c)gr(n)+gr(c)} cm \otimes d_N(n)\Big).
\end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
c{*}d(z) &= c * \Big((-1)^{gr(n)} d_M(m) \otimes n + m \otimes d(n)\Big)\\
&= (-1)^{gr(n)+gr(c)gr(n)} c d_M(m) \otimes n + (-1)^{gr(c)(gr(n)+1)} cm \otimes d_N(n).
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$d(c * z) = d(c) * z + (-1)^{gr(c)} c * d(z).$$

Por la proposición 1.2.9 ^{op} $M \otimes_A N$ es un C-módulo izquierdo.

(c) De la Proposición 1.5.1(c) tenemos que $M \otimes_A N$ es un C,B-bimódulo graduado. Luego, por inciso (b) sabemos que $M \otimes_A N$ es un B-módulo diferencial derecho cuya diferencial está definida por

$$d(m \otimes n) = (-1)^{gr(n)} d_M(m) \otimes n + m \otimes d_N(n).$$

Por inciso (a) está diferencial le da estructura de C-módulo diferencial izquierdo a $M \otimes_A N$. Veamos que se cumple la asociatividad. Sean $c \in C$, $b \in B$ elementos homogéneos y $z = m \otimes n \in M \otimes_A N$ un generador, con $m \in M, n \in N$ homogéneos, se tiene que cumplir $(c*z)\cdot b = (-1)^{gr(c)gr(b)} c*(z \cdot b)$. Por un lado, tenemos

$$(c*z)\cdot b = (c*(m \otimes n)\cdot b) = \Big((-1)^{gr(c)gr(n)} cm \otimes n\Big)\cdot b = (-1)^{gr(c)gr(n)} cm \otimes nb$$

Por otro,

$$c * (z \cdot b) = c * (m \otimes nb) = (-1)^{gr(c)(gr(n)+gr(b))} cm \otimes nb.$$

Entonces, $(c*z)\cdot b = (-1)^{gr(c)gr(b)} c*(z \cdot b)$. Finalmente, por la Proposición 1.4.7, $M \otimes_A N$ es un C,B-bimódulo diferencial.

□

Observación 1.5.3 *Sea A una k-álgebra diferencialmente graduada, con diferencial d. Entonces, por el lema 1.2.10^{op} A es un A-módulo diferencial derecho, con el producto de A, $a \cdot b = ab$, $a, b \in A$ y es un A-módulo diferencial derecho con el siguiente producto $a * b = (-1)^{gr(a)gr(b)} ab$ con $a, b \in A$ homogéneos. Note que*

$$\begin{aligned}
a \cdot (b * c) &= a\Big((-1)^{gr(a)gr(b)} bc\Big) = (-1)^{gr(a)gr(c)} a(bc), \\
(a \cdot b) * c &= (-1)^{gr(ab)gr(c)} (ab)c = (-1)^{(gr(a)+gr(b))gr(c)} (ab)c \\
&= (-1)^{gr(a)gr(c)+gr(b)gr(c)} (ab)c.
\end{aligned}$$

*Así se tiene $(a \cdot b) * c = (-1)^{gr(a)gr(c)} a \cdot (b * c)$. Luego, A es un A,A-bimódulo diferencialmente graduado, que se conoce como el **A,A-bimódulo diferencial regular**.*

Proposición 1.5.4 *Sea A el A-bimódulo diferencial regular y ${}_AX_B$ un A,B-bimódulo diferencial, entonces existe un isomorfismo de A,B-bimódulos $\overline{\mu} : A \otimes_A X \longrightarrow X$ tal que $\overline{\mu}(a \otimes x) = (-1)^{gr(a)gr(x)}ax$, para $a \in A$ y $x \in X$ elementos homogéneos.*

Demostración. La prueba la haremos en cuatro etapas. Primero, definiremos un morfismo de $A \otimes_A X$ en X, luego veremos que es diferencial, posteriormente que es de A,B-bimódulos, y, por último, que es un isomorfismo.

(a) Definimos el morfismo usando la propiedad universal del producto tensorial. Cada elemento $a \in A$ se escribe de manera única como serie de elementos homogéneos $a = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i$. De manera análoga cada elemento $x \in X$ es de la forma $x = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j$. Definimos la función $\mu : A \times X \longrightarrow X$ por $\mu(a, x) := \sum_{i,j} (-1)^{gr(a_i)gr(x_j)} a_i x_j$. Veamos que μ es A-balanceada;

(a1) *μ es homogénea.*
Claramente se tiene que $\mu(A^i \times X^j) \subseteq X^{i+j}$ por definición.

(a2) *μ es bilineal.*
Por la forma en que definimos μ, tenemos que es bilineal.

(a3) *$\mu(a \cdot b, x) = (-1)^{gr(b)gr(x)} \mu(a, bx)$.*
Sean $a, b \in A$ y $x \in X$, elementos homogéneos. Por lo que

$$\begin{aligned}
\mu(a \cdot b, x) &= (-1)^{gr(a)gr(b)} \mu(ab, x) \\
&= (-1)^{gr(a)gr(b)} (-1)^{(gr(a)+gr(b))gr(x)} (ab)x \\
&= (-1)^{gr(a)gr(b)+((gr(a)+gr(b))gr(x)} a(bx) \\
&= (-1)^{gr(a)gr(b)+((gr(a)+gr(b))gr(x)} (-1)^{gr(a)(gr(b)+gr(x))} \mu(a, bx) \\
&= (-1)^{gr(b)gr(x)} \mu(a, bx).
\end{aligned}$$

Por la propiedad universal de producto tensorial, existe un único morfismo homogéneo $\overline{\mu} : A \otimes_A X \longrightarrow X$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
A \times X \arrow[r, "\mu"] \arrow[d] & X \\
A \otimes_A X, \arrow[ur, dotted, "\overline{\mu}"'] &
\end{tikzcd}$$

es decir, $\overline{\mu}(a \otimes x) = (-1)^{gr(a)gr(x)}ax$, para $a \in A$ y $x \in X$ elementos homogéneos.

Veamos ahora que $\overline{\mu}$ es un morfismo de módulos diferenciales.

(b) $\overline{\mu}$ *conmuta con las diferenciales.*
En efecto, sean $a \in A$ y $x \in X$ elementos homogéneos. Tenemos que

$$\begin{aligned}
d(\overline{\mu}(a \otimes x)) &= d((-1)^{gr(a)gr(x)}ax) \\
&= (-1)^{gr(agr(x))}d(ax) \\
&= (-1)^{gr(agr(x))}\Big(d(a)x + (-1)^{gr(a)}ad(x)\Big) \\
&= (-1)^{gr(x)}(-1)^{(gr(a)+1)gr(x)}d(a)x + (-1)^{gr(a)(gr(x)+1)}ad(x) \\
&= (-1)^{gr(x)}\overline{\mu}(d(a) \otimes x) + \overline{\mu}(a \otimes d(x)) \\
&= \overline{\mu}((-1)^{gr(x)}d(a) \otimes x + a \otimes d(x)) \\
&= \overline{\mu}d(a \otimes x)
\end{aligned}$$

(c) $\overline{\mu}$ *es un morfismo de A,B-bimódulos.*

(c1) $\overline{\mu}$ *es un morfismo de B-módulos derechos.*
Sea $b \in B$, entonces

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}((a \otimes x)b) &= \overline{\mu}(a \otimes xb) \\
&= (-1)^{gr(a)(gr(x)+gr(b))}a(xb) \\
&= (-1)^{gr(a)(gr(x)+gr(b))}(-1)^{gr(a)gr(b)}(ax)b \\
&= (-1)^{gr(a)gr(x)}(ax)b \\
&= \overline{\mu}(a \otimes x)b.
\end{aligned}$$

(c2) $\overline{\mu}$ *es un morfismo de A-módulos izquierdos.*
Sea $b \in A$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}(b * (a \otimes x)) &= \overline{\mu}((-1)^{gr(b)gr(x)}b(a \otimes x)) \\
&= (-1)^{gr(b)gr(x))}\overline{\mu}(ba \otimes x) \\
&= (-1)^{gr(b)gr(x)+(gr(b)+gr(a))gr(x)}(ba)x \\
&= (-1)^{gr(a)gr(x)}(ba)x \\
&= (-1)^{gr(a)gr(x)}b(ax) \\
&= b\overline{\mu}(a \otimes x)
\end{aligned}$$

(d) $\overline{\mu}$ *es isomorfismo.*
Sea $\sigma : X \longrightarrow A \otimes_A X$ tal que $\sigma(x) = 1 \otimes x$. Luego, si $a \in A$ y $x \in X$ son elementos homogéneos,

$$\sigma\overline{\mu}(a \otimes x) = \sigma((-1)^{gr(a)gr(x)}ax) = (-1)^{gr(a)gr(x)}(1 \otimes ax) = a \otimes x.$$

Por otro lado,

$$\overline{\mu}\sigma(x)\overline{\mu}(1\otimes x) = (-1)^{gr(1)gr(x)}(1x) = x.$$

Luego, por el Lema 1.2.17 se sigue que $\overline{\mu}$ es un isomorfismo.

□

Lema 1.5.5 *Sean ${}_EM_A$, ${}_AX_B$ y ${}_BY_C$ bimódulos diferencialmente graduados, entonces existe un isomorfismo de E,C-bimódulos diferencialmente graduados*

$$\eta : M\otimes_A (X\otimes_B Y) \longrightarrow (M\otimes_A X)\otimes_B Y$$

tal que $\eta(m\otimes(x\otimes y)) = (m\otimes x)\otimes y$, para $m\in M$, $x\in X$ y $y\in Y$.

Demostración. Sea y en Y un elemnto homogéneo dee grado i fijo. Primero definamos a $\varphi_y : M\times X \longrightarrow M\otimes_A (X\otimes_B Y)[i]$ como $\varphi_y(m,x) := m\otimes(x\otimes y)$. Veamos que φ_y es balanceada

(a) φ_y es homogénea.
Claramente, $\varphi_y(M^s\times X^t)\subseteq [M\otimes_A(X\otimes_B Y)]^{s+t+i}$.

(b) φ_y es bilineal.
Sean $m_1, m_2\in M$ y $x\in X$, entonces,

$$\begin{aligned}\varphi_y(m_1+m_2,x) &= (m_1+m_2)\otimes(x\otimes y)\\ &= m_1\otimes(x\otimes y)+m_2\otimes(x\otimes y)\\ &= \varphi_y(m_1,x)+\varphi_y(m_2,x).\end{aligned}$$

Ahora analizamos la otra variable. Sean $m\in M$ y $x_1,x_2\in X$. Luego,

$$\begin{aligned}\varphi_y(m,x_1+x_2) &= m\otimes((x_1+x_2)\otimes y)\\ &= m(x_1\otimes y+x_2\otimes y)\\ &= m\otimes(x_1\otimes y)+m\otimes(x_2\otimes y)\\ &= \varphi_y(m,x_1)+\varphi_y(m,x_2).\end{aligned}$$

(c) $\varphi_y(ma,x) = (-1)^{gr(a)gr(x)}\varphi_y(m,ax)$.
En efecto, sean $a\in A$ y $x\in X$, elementos homogéneos. Entonces,

$$\begin{aligned}\varphi_y(ma,x) &= ma\otimes(x\otimes y)\\ &= (-1)^{gr(a)gr(x)+gr(a)gr(y)}m\otimes(x\otimes y)\\ &= (-1)^{gr(a)gr(x)}m\otimes((ax)\otimes y)\\ &= (-1)^{gr(a)gr(x)}\varphi_y(m,ax).\end{aligned}$$

Luego, existe un único morfismo $\mu_y : M \otimes_A X \longrightarrow M \otimes_A (X \otimes_B Y)[i]$ tal que $\mu_y \tau = \varphi_y$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
M \times X \arrow[r, "\varphi_y"] \arrow[d, "\tau"'] & M \otimes_A (X \otimes_B Y)[i] \\
M \otimes_A X. \arrow[ur, dotted, "\mu_y"'] &
\end{tikzcd}$$

Ahora daremos una función $B-$*balanceada* $\overline{\lambda} : (M \otimes_A X) \times Y \longrightarrow M \otimes_A (X \otimes_B Y)$. Sea $z \in M \otimes_A X$ y $y \in Y$, por $\overline{\lambda}(z, y) := \sum_{i \in I} \mu_{y_i}(z)$, donde $y = \sum_{i \in I} y_i$, es la descomposición de y en sus componentes homogéneas. Veamos que:

(a) $\overline{\lambda}$ es homogénea.
Es claro pues $\overline{\lambda}\left((M \otimes_A X)^s \times Y^i\right) \subseteq (M \otimes_A (X \otimes_B Y))^{s+i}$.

(b) $\overline{\lambda}$ es bilineal.
Sean $m \in M$, $x \in X$ y $y_1, y_2 \in Y^t$. Luego,

$$\begin{aligned}
\overline{\lambda}(m \otimes x, y_1 + y_2) &= m \otimes (x \otimes (y_1 + y_2)) \\
&= m \otimes (x \otimes y_1 + x \otimes y_2) \\
&= m \otimes (x \otimes y_1) + m \otimes (x \otimes y_2) \\
&= \overline{\lambda}(m \otimes x, y_1) + \overline{\lambda}(m \otimes x, y_2).
\end{aligned}$$

Ahora veamos la linealidad en la otra variable. Sean $z_1, z_2 \in M \otimes_A X$ y $y \in Y$ homogéneo. Entonces,

$$\overline{\lambda}(z_1 + z_2, y) = \mu_y(z_1 + z_2) = \mu_y(z_1) + \mu_y(z_2) = \overline{\lambda}(z_1, y) + \overline{\lambda}(z_2, y)$$

(c) $\overline{\lambda}((mm \otimes x)b, y) = (-1)^{gr(b)gr(y)}\overline{\lambda}(m \otimes x, by)$.
Sean $m \in M$, $x \in X$, $b \in B$ y $y \in Y$ homogéneos. Luego,

$$\begin{aligned}
\overline{\lambda}((m \otimes x)b, y) = \mu_y((m \otimes x)b) &= \mu_y(m \otimes xb) \\
&= m \otimes (xb \otimes y) \\
&= (-1)^{gr(b)gr(y)} m \otimes (x \otimes by) \\
&= (-1)^{gr(b)gr(y)} \overline{\lambda}(m \otimes x, by).
\end{aligned}$$

Por lo que $\overline{\lambda}$ es B-balanceada y así, existe un único morfismo ψ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
(M \otimes_A X) \times Y \arrow[r, "\overline{\lambda}"] \arrow[d, "\tau"'] & M \otimes_A (X \otimes_B Y) \\
(M \otimes_A X) \otimes_B Y. \arrow[ur, dotted, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Luego, $\psi((m \otimes x) \otimes y) = m \otimes (x \otimes y)$. Note que ψ es un morfismo homogéneo por construcción. Claramente,

$$\begin{aligned}
\psi\left(((m \otimes x) \otimes y)b\right) = \psi((m \otimes x) \otimes yb) &= m \otimes (x \otimes yb) \\
&= m \otimes (x \otimes y)b \\
&= \psi\left((m \otimes x) \otimes y\right) b.
\end{aligned}$$

Ahora definimos el morfismo inverso. Sea $m \in M$ un elemento homogéneo de grado i fijo. Definimos $\alpha_m : X \times Y \longrightarrow (M \otimes_A X) \otimes_B Y[i]$ como $\alpha_m(x,y) := (m \otimes x) \otimes y$, y veamos que,

(a) α_m es homogénea.
Claramente, $\alpha_m\left(X^s \times Y^t\right) \subseteq \left((M \otimes_A X) \otimes_B Y[i]\right)^{s+t+i}$.

(b) α_m es bilineal.
Consideremos los elementos homogéneos $x_1, x_2 \in X$, y $y \in Y$. Luego,

$$\begin{aligned}
\alpha_m(x_1 + x_2, y) = (m \otimes (x_1 + x_2)) \otimes y &= (m \otimes x_1 + m \otimes x_2) \otimes y \\
&= (m \otimes x_1) \otimes y + (m \otimes x_2) \otimes y \\
&= \alpha_m(x_1, y) + \alpha_m(x_2, y)
\end{aligned}$$

Ahora considereos los elementos homogéneos $x \in X$, $y_1, y_2 \in Y$, entonces

$$\begin{aligned}
\alpha_m(x, y_1 + y_2) = (m \otimes x) \otimes (y_1 + y_2) &= (m \otimes x) y_1 + (m \otimes x) \otimes y_2 \\
&= \alpha_m(x, y_1) + \alpha_m(x, y_2).
\end{aligned}$$

(c) $\alpha_m(xb, y) = (-1)^{gr(b)gr(y)} \alpha_m(x, by)$.
Sean $b \in B$, $x \in X$, y $y \in Y$ elementos homogéneos. Entonces,

$$\begin{aligned}
\alpha_m(xb, y) = (m \otimes xb) \otimes y &= (m \otimes x)b \otimes y \\
&= (-1)^{gr(b)gr(y)} (m \otimes x) \otimes by \\
&= (-1)^{gr(b)gr(y)} \alpha_m(x, by).
\end{aligned}$$

Por la propiedad universal del producto tensorial, existe un único morfismo γ_m tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
(x \times Y) \arrow[r, "\alpha_m"] \arrow[d, "\tau"'] & (M \otimes_A X) \otimes_B Y \\
X \otimes_B Y \arrow[ur, dotted, "\gamma_m"'] &
\end{tikzcd}$$

donde γ_m es homogénea y satisface $\gamma_m(x \otimes y) := (m \otimes x) \otimes y$.

Ahora sea $\overline{\eta} : M \times (X \otimes_B Y) \longrightarrow (M \otimes_A X) \otimes_B Y$ definida como $\overline{\eta}(m, z) := \sum_{i \in I} \gamma_{m_i}(z)$, con $m \in M$, $z \in X \otimes_B Y$ y $m = \sum_{i \in I} m_i$ la descomposición de m en sus elementos homogéneos. Veamos que $\overline{\eta}$ es A-balanceada.

En efecto,

(a) $\overline{\eta}$ es homogénea.
Es claro que, $\overline{\eta}\left(M^s \times (X \otimes_B Y)^t\right) \subseteq \left((M \otimes_A X) \otimes_B Y\right)^{s+t}$.

(b) $\overline{\eta}$ es bilineal.
Sean $m_1, m_2 \in M^t$, $x \in X$ y $y \in Y$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\overline{\eta}(m_1 + m_2, x \otimes y) = \gamma_{m_1+m_2}(x \otimes y) &= ((m_1 + m_2) \otimes x) \otimes y \\
&= (m_1 \otimes x + m_2 \otimes x) \otimes y \\
&= (m_1 \otimes x) \otimes y + (m_2 \otimes x) \otimes y \\
&= \overline{\eta}(m_1, x \otimes y) + \overline{\eta}(m_2, x \otimes y).
\end{aligned}$$

Ahora analicemos la segunda variable. Sean m en M^t y $z_1, z_2 \in X \otimes_B Y$. Luego,

$$\overline{\eta}(m, z_1 + z_2) = \gamma_m(m, z_1 + z_2) = \gamma_m(z_1) + \gamma_m(z_2) = \overline{\eta}(m, z_1) + \overline{\eta}(m, z_2)$$

(c) $\overline{\eta}(ma, x \otimes y) = (-1)^{gr(a)(gr(x)+gr(y))}\overline{\eta}(m, a(x \otimes y))$.
Sean $m \in M$, $a \in A$, $x \in X$ y $y \in Y$ homogéneos, entonces

$$\begin{aligned}
\overline{\eta}(ma, x \otimes y) &= \gamma_{ma}(x \otimes y) \\
&= (ma \otimes x) \otimes y \\
&= (-1)^{gra(a)gr(x)}(m \otimes ax) \otimes y
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\overline{\eta}(m, a(x \otimes y)) &= \overline{\eta}(m, (-1)^{gr(a)gr(y)} ax \otimes y) \\
&= (-1)^{gr(a)gr(y)}(m \otimes ax) \otimes y
\end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned}
\overline{\eta}(ma, x \otimes y) &= (-1)^{gr(a)gr(x)+gr(a)gr(y)}(-1)^{gr(a)gr(y)}(m \otimes ax) \otimes y \\
&= (-1)^{gr(a)(gr(x)+gr(y))}\overline{\eta}(m, a(x \otimes y)).
\end{aligned}$$

Por la propiedad universal de producto tensorial, tenemos la existencia de un único morfismo $\eta : M \otimes_A (X \otimes_B Y) \longrightarrow (M \otimes_A X) \otimes_B Y$, tal que $\eta\tau = \overline{\eta}$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
M \times (X \otimes_B Y) \arrow[r, "\overline{\eta}"] \arrow[d, "\tau"'] & (M \otimes_A X) \otimes_B Y \\
M \otimes_A (X \otimes_B Y), \arrow[ur, dotted, "\eta"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\eta(m \otimes (x \otimes y)) = (m \otimes x) \otimes y$.

Ahora veamos que ψ y η son inversas una de la otra. En efecto,

$$\eta\psi((m \otimes x) \otimes y) = \eta(m \otimes (x \otimes y)) = (m \otimes x) \otimes y,$$

y, por otro lado,

$$\psi\eta(m \otimes (x \otimes y)) = \psi((m \otimes x) \otimes y) = m \otimes (x \otimes y).$$

Veamos que η conmuta con las diferenciales. En efecto, sean $x \in X$ y $y \in Y$ elementos homogéneos. Entonces,

$$\begin{aligned}
\eta d(m \otimes (x \otimes y)) &= \eta\left((-1)^{gr(x \otimes y)} d(m) \otimes (x \otimes y) + m \otimes d(x \otimes y)\right) \\
&= \eta\left((-1)^{gr(x)+gr(y)} d(m) \otimes (x \otimes y)\right) + \eta\left(m \otimes \left((-1)^{gr(y)} d(x) \otimes y + x \otimes d(y)\right)\right) \\
&= (-1)^{gr(x)+gr(y)} \left(d(m) \otimes (x) \otimes y + (-1)^{gr(y)} (m \otimes d(x)) \otimes y + (m \otimes x) \otimes d(y)\right. \\
&= (-1)^{gr(y)} \left((-1)^{gr(x)} d(m) \otimes x + m \otimes d(x)\right) \otimes y + (m \otimes x) \otimes y \\
&= (-1)^{gr(y)} d(m \otimes x) \otimes y + (m \otimes x) \otimes d(y) \\
&= d((m \otimes x) \otimes y) \\
&= d\eta(m \otimes (x \otimes y))
\end{aligned}$$

Note que η es un morfismo de C-módulos derechos pues, para $c \in C$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\eta\left((m \otimes (x \otimes y))c\right) = \eta\left(m \otimes (x \otimes y)c\right) &= \eta(m \otimes (x \otimes yc)) \\
&= (m \otimes x) \otimes yc \\
&= \left((m \otimes x) \otimes y\right) c \\
&= \eta\left((m \otimes (x \otimes y))\right) c
\end{aligned}$$

Finalmente, η es un morfismo de E-módulos izquierdos pues, para $e \in E$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\eta\left(e(m\otimes(x\otimes y))\right) &= (-1)^{gr(e)gr(x\otimes y)}\eta(em\otimes(x\otimes y))\\
&= (-1)^{gr(e)(gr(x)+gr(y))}(em\otimes x)\otimes y\\
&= (-1)^{gr(e)(gr(x)+gr(y))+gr(e)gr(x)}e(m\otimes x)\otimes y\\
&= (-1)^{gr(e)gr(y)+gr(e)gr(y)}e((m\otimes x)\otimes y)\\
&= e\eta\left(m\otimes(x\otimes y)\right)
\end{aligned}$$

□

Lema 1.5.6 *Sean $f : M \longrightarrow M'$ un morfismo de A-módulos diferencialmente graduados a derecha y $g : N \longrightarrow N'$ un morfismo de A,B-bimódulos diferencialmente graduado. Entonces existe un único morfismo $f\otimes g : M\otimes_A N \longrightarrow M'\otimes N'$ de B-módulos diferencialmente graduado a derecha tal que $(f\otimes g)(m\otimes n) = f(m)\otimes g(n)$ para cada $m\in M$ y $n\in N$.*

Demostración. Consideremos la función $\widehat{f\otimes g} : M\times N \longrightarrow M'\otimes_A N'$ dada por $\widehat{f\otimes g}(m,n) = f(m)\otimes g(n)$. Claramente, $\widehat{f\otimes g}$ es bilineal. Veamos que es A-balanceada. En efecto, sean $m\in M$ y $n\in N$ elementos homogéneos, entonces

$$\begin{aligned}
\widehat{f\otimes g}(ma,n) &= f(ma)\otimes g(n)\\
&= f(m)a\otimes g(n)\\
&= (-1)^{gr(a)gr(n)}f(m)\otimes ag(n)\\
&= (-1)^{gr(a)gr(n)}f(m)\otimes g(an)\\
&= (-1)^{gr(a)gr(n)}\widehat{f\otimes g}(m,an).
\end{aligned}$$

Por la propiedad universal del producto tensorial existe un único morfismo homogéneo $f\otimes g : M\otimes_A N \longrightarrow M'\otimes N'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
M\times N \arrow[r, "\widehat{f\otimes g}"] \arrow[d, "\tau"'] & M'\otimes N' \\
M\otimes_A N. \arrow[ur, dotted, "f\otimes g"'] &
\end{tikzcd}$$

Veamos que $f\otimes g$ conmuta con el diferencial. Dado que $g : N \longrightarrow N'$ y $f : M \longrightarrow M'$ son morfismo de A,B-bimódulos diferenciales tenemos que $gd_N = d_{N'}g$ y $fd_M = d_{M'}f$ donde d_N,$d_{N'}$, d_M y $d_{M'}$ son las respectivas diferenciales.

Sean $m \in M$ y $n \in N$, tenemos que

$$\begin{aligned}
(f \otimes g) d_{M \otimes N}(m \otimes n) &= (f \otimes g)\Big((-1)^{gr(n)} d_M(m) \otimes n + m \otimes d_N(n)\Big) \\
&= (-1)^{gr(n)} (f \otimes g)(d_M(m) \otimes n) + (f \otimes g)(m \otimes d_N(n)) \\
&= (-1)^{gr(n)} f d_M(m) \otimes g(n) + f(m) \otimes g d_N(n) \\
&= (-1)^{gr(n)} d_{M'} f(m) \otimes g(n) + f(m) \otimes d_{N'} g(n) \\
&= d_{M' \otimes N'}\,(f(m) \otimes g(n)) \\
&= d_{M' \otimes N'}((f \otimes g)(m \otimes n))
\end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Categorías DG

2.1. Categorías diferencialmente graduadas

En este capítulo k denotará un anillo conmutativo, por ejemplo un campo $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ o el anillo de los enteros $\mathbb{Z}$.

Definición 2.1.1 *Una categoría $\mathcal{C}$ es una* ***k-categoría*** *, si cumple las siguientes condiciones:*

(a) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ *tiene estructura de k-módulo, para cada $X, Y \in \mathcal{C}$.*

(b) Para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ la función composición

$$\theta(X,Y,Z) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$$

es k-bilineal, es decir, para cada $f, f' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $g, g' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ y $r \in k$, se cumple

$$\theta(g, f+f') = \theta(g,f) + \theta(g,f')$$

$$\theta(g+g', f) = \theta(g,f) + \theta(g',f)$$

$$\theta(g, rf) = r\theta(f,g) = \theta(rg, f)$$

Note que las condición de asociatividad requerida en la definición anterior se puede expresar mediante las siguiente notación:

$$g(f+f') = gf + gf'$$

$$(g+g')f = gf + g'f$$

$$(rg)f = r(gf) = g(rf)$$

Ejemplo 2.1.2

(a) Si A es una k-álgebra, se tiene que $A = \mathcal{C} = \{*\}$, es decir, A es puede ser vista como una k-categoría con un sólo objeto.

(b) Si A es una k-álgebra, entonces la categoría $Mod\ A$ es una k-categoría.

(c) La categoría de grupos abelianos $\mathcal{A}b$ es una $\mathbb{Z}$-categoría.

(d) En general, cualquier categoría preaditiva $\mathcal{C}$ es una $\mathbb{Z}$-categoría.

(e) Si $\mathcal{C}$ es una categoría pequeña y $\mathcal{D}$ es una k-categoría. Entonces $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ es una k-categoría.

En lo que sigue, en algunas partes del texto usaremos $\bullet$ para denotar la graduación de un objeto, es decir, cuando un objeto X posea una graduación será denotado como $X^\bullet$.

Definición 2.1.3 *Una* ***categoría diferencialmente graduada*** *o una* ***dg-categoría*** *es una k-categoría $\mathcal{C}$ tal que:*

(a) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \in Dg - Mod(k)\ \forall X, Y \in \mathcal{C}$.

(b) La función composición

$$\theta_{X,Y,Z} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)^\bullet \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)^\bullet \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)^\bullet$$

es un morfismo de grado cero en $Dg - Mod(k)$ que conmuta con los diferenciales, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)^\bullet \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)^\bullet \arrow[r, "\theta_{X,Y,Z}"] \arrow[d, "d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)\otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)^\bullet \arrow[d, "d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)^\bullet \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)^\bullet \arrow[r, "\theta_{X,Y,Z}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)^\bullet.
\end{tikzcd}$$

Por lo que para cada $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ elementos homogéneos se tiene lo siguiente

$$d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)}\theta_{X,Y,Z}(g \otimes f) = d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)}(g \circ f)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
&\theta_{X,Y,Z}d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)\otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)}(g \otimes f) \\
&\qquad = \theta_{X,Y,Z}d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)}(g) \otimes f + (-1)^{|g|} g \otimes d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)}(f) \\
&\qquad = d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)}(g) \circ f + (-1)^{|g|} g \circ d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)}(f).
\end{aligned}$$

donde $|g|$ denota el grado de g. De esta manera, la conmutatividad del diagrama anterior se traduce a cumplir la igualdad

$$d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)}(g \circ f) = d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)}(g) \circ f + (-1)^{|g|} g \circ d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)}(f).$$

Ejemplo 2.1.4

(a) Una dg-categoría con un sólo objeto, puede ser identificada con una dg-álgebra, es decir, una k-álgebra graduada con un diferencial d tal que cumple la regla de Leibniz:

$$d(fg) = d(f)g + (-1)^{gr(f)} f d(g)$$

para f, g elementos homogéneos. Inversamente, cada k-álgebra B puede ser vista como una Dg-categoría con un sólo objeto.

(b) Consideremos la categoría $Dg - Mod(k)$. Note que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W)$ tiene estructura de dg-módulo sobre k, dada de la siguiente manera:

(b1) La graduación es $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V^\bullet, W^\bullet) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}}(V^\bullet, W^\bullet)$, donde

$$\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}}(V^\bullet, W^\bullet) = \{\alpha : V \longrightarrow W | \alpha(V^k) \subseteq W^{k+n} \ \forall\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

(b2) El diferencial $d : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V^\bullet, W^\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V^\bullet, W^\bullet)$ es una función k-lineal graduada de grado $+1$ tal que

$$d(\alpha) = d_W \circ \alpha - (-1)^{|\alpha|} \alpha \circ d_V$$

y $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, W)$ un elemento homogéneo.

(c) Si $\mathcal{C}$ es una dg-categoría, la categoría opuesta $\mathcal{C}^{op}$ es una dg-categoría, conocida como dg-categoría opuesta de $\mathcal{C}$, cuyos objetos son los mismos que los de $\mathcal{C}$, es decir,

- $Obj(\mathcal{C}^{op}) = Obj(\mathcal{C})$.
- $\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) := \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}}(Y, X)$ *para cada $X, Y \in \mathcal{C}^{op}$ cuyo morfismo de composición es dado como sigue*

$$\psi_{X,Y,Z} : \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{C}^{op}}(Y, Z) \otimes_k \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{C}^{op}} X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{C}^{op}}(X, Z)$$

donde, $\psi_{X,Y,Z}(f^{op} \otimes g^{op}) = (-1)^{|f||g|} g \otimes_k f$

2.2. Funtores diferencialmente graduados.

Definición 2.2.1 *Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ dg-categorías. Un **funtor graduado** ó **gr-funtor** $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un funtor k-lineal tal que*

$$F(\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{A}}(A, A')) \subseteq \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{B}}(F(A), F(A'))$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$ y para todo $A, A' \in Obj(\mathcal{A})$.

Definición 2.2.2 *Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ dg-categorías. Un **funtor diferencialmente graduado** ó **dg-funtor** $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, es un funtor graduado que conmuta con el diferencial, es decir, $F(d_{\mathcal{A}}(\alpha)) = d_{\mathcal{B}}(F(\alpha))$ para todo morfismo homogéneo $\alpha \in \mathcal{A}$.*

Ejemplo 2.2.3 *Sean R, S dos k-álgebras diferencialmente graduadas. Entonces, un funtor $F : \mathcal{C}_R \longrightarrow \mathcal{C}_S$ es un dg-funtor si y sólo si F es un morfismo de k-álgebras diferencialmente graduadas.*

Lema 2.2.4 *Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ dg-categorías y $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un dg-funtor covariante. Entonces $F^{op} : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{D}^{op}$ es un dg-funtor contravariante.*

Demostración. Tenemos que $F^{op}(C) := F(C)$ para cada $c \in \mathcal{C}^{op}$ y para un morfismo $f^{op} : C \longrightarrow C'$ en $\mathcal{C}^{op}$ definimos $F^{op}(f^{op}) := F(f)$. Sean $f^{op} : C \longrightarrow C'$, $g^{op} : C' \longrightarrow C''$ morfismos en $\mathcal{C}^{op}$. Entonces

$$F^{op}(g^{op}f^{op}) = F^{op}((fg)^{op}) = F(fg) = F(f)F(g) = F^{op}(f^{op})F^{op}(g^{op})$$

$$F^{op}(1_C^{op}) = F(1_C) = 1_{F(C)} = 1_{F^{op}(C)}.$$

Veamos que F^{op} es graduado. Es decir,

$$F^{op}\left(\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y)\right) \subseteq \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{D}^{op}}\left(F^{op}X, F^{op}Y\right).$$

Sea $f^{op} \in \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y)$. Entonces, por definición $f \in \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}}(Y,X)$ y dado que F es graduado, se sigue que $F(f) \in \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{D}}(FY,FX)$. Por lo que $F^{op}(f^{op}) \in \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{D}^{op}}(F^{op}X, F^{op}Y)$.

Verifiquemos ahora que F^{op} conmuta con el diferencial, es decir, que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y) & \xrightarrow{F^{op}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{op}}(F^{op}X, F^{op}Y) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y)}} & & \Big\downarrow {\scriptstyle d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{op}}(F^{op}X,F^{op}Y)}} \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y) & \xrightarrow{F^{op}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{op}}(F^{op}X, F^{op}Y).
\end{array}$$

En efecto, sea $f^{op} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y)$. Por un lado,

$$\begin{aligned}
d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{op}}(F^{op}X,F^{op}Y)}F^{op}(f) &= d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{op}}(F^{op}X,F^{op}Y)}\left((F(f))^{op}\right) \\
&= \left(d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FY,FX)}(Ff)\right)^{op}.
\end{aligned}$$

Por otro,

$$\begin{aligned}
F^{op}d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y)}(f^{op}) &= F^{op}\left(\left(d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)}(f)\right)^{op}\right) \\
&= \left(Fd_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)}(f)\right)^{op} \\
&= \left(d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FY,FX)}(Ff)\right)^{op}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, F^{op} es un dg-funtor contavariante. $\square$

Proposición 2.2.5 *Sean $\mathcal{A}$ una dg-categoría y $Dg - Mod(k)$ la categoría de k-módulos diferencialmente graduados. Sea $A \in \mathcal{A}$. Entonces*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, -) : \mathcal{A} \longrightarrow Dg - Mod(k)$$

es un dg-funtor. Donde $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B')$ esta dada por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, f)(j) = f \circ j$ para f, j elementos homogéneos.

Demostración. Primero, dado que $\mathcal{A}$ es una dg-categoría tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ pertenece a la categoría $Dg - Mod(k)$ para cada $X, Y \in \mathcal{A}$ y la composición

$$\varphi_{X,Y,Z} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z) \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Z)$$

es un morfismo de k-módulos diferencialmente graduados, es decir,

$$\varphi_{X,Y,Z} \left((\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z) \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y))^n \right) \subseteq \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{A}}(X, Z)$$

y recordemos que

$$(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z) \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y))^n \cong \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Hom}^i_{\mathcal{A}}(Y, Z) \otimes_k \mathrm{Hom}^j_{\mathcal{A}}(X, Y),$$

de manera que para $\alpha \in \mathrm{Hom}^i_{\mathcal{A}}(Y, Z)$ y $\beta \in \mathrm{Hom}^j_{\mathcal{A}}(X, Y)$ entonces $\varphi_{X,Y,Z}(\alpha \otimes \beta) = \alpha \circ \beta \in \mathrm{Hom}^{n=i+j}_{\mathcal{A}}(X, Z)$.

Veamos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, -)$ es un funtor graduado. En efecto, sean $B, B' \in \mathcal{A}$, tenemos que probar la siguiente contención

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, -) \left(\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{A}}(B, B') \right) \subseteq \mathrm{Hom}^n_{Dg-Mod(k)} \left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B), \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B') \right).$$

Sea $f \in \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{A}}(B, B')$ y consideremos el morfismo de k-módulos diferencialmente graduados $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B')$ dado por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, f)(j) := fj \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B')$. Ahora recordemos que si $V^\bullet, W^\bullet$ son k-módulos diferencialmente graduados, entonces $\mathrm{Hom}_{Dg-Mod(k)}(V^\bullet, W^\bullet)$ tiene estructura de k-módulo diferencialmente graduado, donde

$$\mathrm{Hom}^n_{Dg-Mod(k)}(V^\bullet, W^\bullet) := \{f : V \longrightarrow W | f(V^k) \subseteq W^{k+n}\}.$$

Ahora dado que $f \in \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{A}}(B, B')$ y $j \in \mathrm{Hom}^r_{\mathcal{A}}(A, B)$, por definición de la composición de morfismos en $\mathcal{A}$ tenemos que $fj \in \mathrm{Hom}^{n+r}_{\mathcal{A}}(A, B')$, por lo que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, f) \in \mathrm{Hom}^n_{Dg-Mod(k)}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B), \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B'))$.

Verifiquemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, -)$ conmuta con el diferencial, es decir, que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,-)"] \arrow[d, "d_{\mathcal{A}}"'] & Dg - Mod(k) \arrow[d, "d_{Dg-Mod(k)}"] \\
\mathcal{A} \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,-)"'] & Dg - Mod(k)
\end{tikzcd}$$

Consideremos un morfismo homogéneo $f \in \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{A}}(B,B')$, por lo que tenemos que ver que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,B') \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,f)"] \arrow[d, "d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,B')}"'] & \mathrm{Hom}_{Dg-k}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B), \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B')\right) . \arrow[d, "d_{Dg-Mod(k)}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,B') \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,f)"'] & \mathrm{Hom}_{Dg-k}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B), \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B')\right)
\end{tikzcd}$$

Recordemos que el diferencial de $\mathrm{Hom}_{Dg-Mod(k)}(V,W)$ esta dado por

$$d_{\mathrm{Hom}(V,W)}(\alpha) = d_W\alpha - (-1)^{|\alpha|}\alpha d_V$$

Veamos ahora que el diagrama conmuta. En efecto, sea $j \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$. Entonces

$$\begin{aligned}
d_{Dg-k}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,-)(f)(j) &= d_{Dg-k}\mathrm{Hom}^r_{\mathcal{A}}(A,f)(j) \\
&= d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B')}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,f)(j) + (-1)^{|\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,f)|}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,f)d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)}(j) \\
&= d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B')}(fj) - (-1)^n f d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)}(j).
\end{aligned}$$

Por otro lado, dado que $\varphi_{A,B,B'}$ es un morfismo de módulos diferencialmente graduados se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{A}}(B,B') \otimes_k \mathrm{Hom}^r_{\mathcal{A}}(A,B) \arrow[r, "\varphi_{A,B,B'}"] \arrow[d, "d_{\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{A}}(B,B')\otimes_k \mathrm{Hom}^r_{\mathcal{A}}(A,B)}"'] & \mathrm{Hom}^{n+r}_{\mathcal{A}}(A,B') \arrow[d, "d_{\mathrm{Hom}^{n+r}_{\mathcal{A}}(A,B')}"] & , \\
\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{A}}(B,B') \otimes_k \mathrm{Hom}^r_{\mathcal{A}}(A,B) \arrow[r, "\varphi_{A,B,B'}"] & \mathrm{Hom}^{n+r}_{\mathcal{A}}(A,B')
\end{tikzcd}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B')}\varphi_{A,B,B'}(f\otimes j) &= d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B')}(fj) \\
&= \varphi_{A,B,B'}d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,B')\otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)}(f\otimes j) \\
&= \varphi_{A,B,B'}\left(d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,B')}(f)\otimes j + (-1)^n f\otimes d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)}(j)\right) \\
&= d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,B')}(f)\circ j + (-1)^n f\circ d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)}(j)
\end{aligned}$$

Ahora sustituyendo en el último diagrama obtenemos

$$\begin{aligned} d_{Dg-k}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,-)(f)(j) &= d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B')}(fj) - (-1)^n f d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)}(j) \\ &= \big(d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,B')}(f)j + (-1)^n f d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)}(j)\big) \\ &\qquad\qquad - (-1)^n f d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)}(j) \\ &= d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,B')}(f)j. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,-)$ conmuta con el diferencial. $\square$

El siguiente lema será necesario para probar de manera sencilla que el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,A)$ es un dg-funtor contravariante.

Lema 2.2.6 *Sean $\mathcal{C}$ una dg-categoría. Entonces se tiene un dg-funtor contravariante $D_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{op}$ tal que $D_{\mathcal{C}^{op}}D_{\mathcal{C}} = Id_{\mathcal{C}}$ y $D_{\mathcal{C}}D_{\mathcal{C}^{op}} = Id_{\mathcal{C}^{op}}$.*

Demostración. Definimos el funtor $D_{\mathcal{C}}$ como sigue; en objetos, $D_{\mathcal{C}}(A) = A^{op}$ para cada $A \in \mathcal{C}$ y para un morfismo $f : A \longrightarrow B$ homogéneo en $\mathcal{C}$,

$$D_{\mathcal{C}}(f) := (-1)^{|f|} f^{op}.$$

La definición anterior se extiende por linealidad.
Veamos que la asignación anterior es funtorial. En efecto, sean $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ elementos homogéneos. Entonces

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{C}}(gf) &= (-1)^{|gf|}(gf)^{op} \\ &= (-1)^{|g|+|f|} f^{op} g^{op} \\ &= (-1)^{|f|} f^{op} (-1)^{|g|} g^{op} \\ &= D_{\mathcal{C}}(f) D_{\mathcal{C}}(g) \end{aligned}$$

Además, para $1_A \in \mathcal{C}$, se tiene que

$$D_{\mathcal{C}}(1_A) = (-1)^{|1_A|}(1_A)^{op} = 1_{A^{op}}.$$

Por lo tanto, $D_{\mathcal{C}}$ es un funtor contravariante. Veamos que $D_{\mathcal{C}}$ es un funtor graduado, es decir,

$$D_{\mathcal{C}}\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}}(A,B) \subseteq \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}^{op}}(D_{\mathcal{C}}(A), D_{\mathcal{C}}(B)).$$

Sea $f \in \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}}(A,B)$, por lo que $D_{\mathcal{C}}(f) = (-1)^{|f|} f^{op} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A^{op}, B^{op})$ y recordemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A^{op}, B^{op}) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)$. De sta manera se sigue que $D_{\mathcal{C}}(f) \in \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}^{op}}(D_{\mathcal{C}}(A), D_{\mathcal{C}}(B))$.

Verifiquemos que $D_{\mathcal{C}}$ conmuta con el diferencial, es decir, que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "D_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, "d_{\mathcal{C}}"'] & \mathcal{C}^{op} \arrow[d, "d_{\mathcal{C}^{op}}"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "D_{\mathcal{C}}"'] & \mathcal{C}^{op} \end{tikzcd} .$$

Para lo cual basta verificarlo en elementos homogéneos. Por lo que basta verificar que el siguiente diagra es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[r, "d_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, "d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(D_{\mathcal{C}}(A),D_{\mathcal{C}}(B)) \arrow[d, "d_{(A^{op},B^{op})}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[r, "d_{\mathcal{C}}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(D_{\mathcal{C}}(A),D_{\mathcal{C}}(B))
\end{tikzcd}$$

En efecto, sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ elemento homogéneo. Entonces

$$\begin{aligned}
d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A^{op},B^{op})}D_{\mathcal{C}}(f) &= d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A^{op},B^{op})}((-1)^{|f|}f^{op}) \\
&= (-1)^{|f|}d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A^{op},B^{op})}(f^{op})
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
D_{\mathcal{C}}d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)}(f) &= (-1)^{|d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)}(f)|}\left(d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)}(f)\right) \\
&= (-1)^{|f|}\left(d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)}(f)\right)^{op}
\end{aligned}$$

Dado que $\left(d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)}(f)\right)^{op} = d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A^{op},B^{op})}(f^{op})$ por definición, se tiene que el diagrama conmuta. En consecuencia, $D_{\mathcal{C}}$ es un dg-funtor contravariante.

Además, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
D_{\mathcal{C}^{op}}D_{\mathcal{C}}(f) &= D_{\mathcal{C}^{op}}((-1)^{|f|}f^{op}) \\
&= (-1)^{|f|}D_{\mathcal{C}^{op}}(f^{op}) \\
&= (-1)^{|f|}(-1)^{|f^{op}|}(f^{op})^{op} \\
&= (-1)^{|f|+|f^{op}|}f \\
&= f \\
&= Id(f).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{\mathcal{C}}D_{\mathcal{C}^{op}}(f^{op}) &= D_{\mathcal{C}}((-1)^{|f^{op}|}(f^{op})^{op}) \\
&= (-1)^{|f^{op}|}D_{\mathcal{C}}(f) \\
&= (-1)^{|f^{op}|}(-1)^{|f|}f^{op} \\
&= (-1)^{|f^{op}|+|f|}f^{op} \\
&= f^{op} \\
&= Id_{\mathcal{C}^{op}}(f^{op}).
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.2.7 *Sean $\mathcal{A}^{op}$ una dg-categoría y $Dg - Mod(k)$ la categoría de k-módulos diferencialmente graduados. Sea $A \in \mathcal{A}^{op}$. Entonces*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{op}}(-, A) : \mathcal{A} \longrightarrow Dg - Mod(k)$$

es un dg-funtor. Donde $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{op}}(f^{op}, A) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{op}}(B', A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{op}}(A', A)$ esta dada por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{op}}(f, A)(j) = (-1)^{|f||j|} j \circ f$ para f, j elementos homogéneos.

Demostración. Se sigue del Lema 2.2.6 y la Proposición 2.2.5 $\square$

2.3. Producto tensorial de dg-categorías

Definición 2.3.1 *Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ dg-categorías. Definimos el* ***producto tensorial de dg-categorías*** *el cual denotaremos por $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ como sigue:*

(a) $Obj(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) := Obj(\mathcal{A}) \times Obj(\mathcal{B})$.

(b) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}((X, Y), (X', Y')) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X') \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, Y')$. *Para todo* $(X, Y), (X', Y') \in Obj(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$.

La composición esta dada por $\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}((X', Y'), (X'', Y'')) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}((X, Y), (X', Y')) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}((X, Y), (X'', Y''))$, *donde*

$$\circ(g, f) := g \circ f = (\alpha_1 \otimes \beta_1) \circ (\alpha_2 \otimes \beta_2) = (-1)^{|\alpha_2||\beta_1|}(\alpha_1\alpha_2) \otimes (\beta_1\beta_2)$$

para todo $\alpha_2 : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X')$, $\alpha_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X', X'')$, $\beta_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, Y')$ *y* $\beta_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Y', Y'')$.

Observación 2.3.2 *Note que de la defínción anterior para morfismos $\alpha : A \longrightarrow A'$ y $\beta : B \longrightarrow B'$ se tiene las siguientes factorizaciones*

$$\alpha \otimes \beta = (-1)^{|1_{B'}||1_A|}(\alpha \otimes 1_{B'}) \circ (1_A \otimes \beta)$$

$$\alpha \otimes \beta = (-1)^{|\alpha||\beta|}(1_{A'} \otimes \beta) \circ (\alpha \otimes 1_B)$$

La siguiente proposición muestra como dar estructura de dg-categoría de manera natural a la clase de funtores entre dos dg-categorías fijas.

A continuación vemos una proposición que nos brindará ejemplos de dg-funtores y que frecuentemente es utilizado para contruir dg-funtores con dominio en un producto tensorial de dg-categorías.

Lema 2.3.3 *Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ dg-categorías y $F : \mathcal{A} \otimes_k \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ una asignación sobre los objetos $(A, B) \rightsquigarrow F(A, B)$ y una asiganción sobre morfismos homogéneos $\alpha \otimes \beta \rightsquigarrow F(\alpha \otimes \beta)$ tal que $|F(\alpha \otimes \beta)| = |\alpha| + |\beta|$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) La asignación dada define un dg-funtor $F : \mathcal{A} \otimes_k \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$.

(b) Las siguientes condiciones se satisfacen:

(b1) Para cada objeto fijo $A \in \mathcal{A}$, *la asignación* $B \rightsquigarrow F(A, B)$ *en objetos y* $\beta \rightsquigarrow F(1_A \otimes \beta)$ *en morfismos, define un dg-funtor* $G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$.

(b2) Para cada objeto fijo $B \in \mathcal{B}$, *la asignación* $A \rightsquigarrow F(A, B)$ *en objetos y* $\alpha \rightsquigarrow F(\alpha \otimes 1_B)$ *en morfismos, define un dg-funtor* $H : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$.

(b3) Si $\alpha : A \longrightarrow A'$, $\beta : B \longrightarrow B'$ *son morfismo homogéneos, en* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$, *respectivamente, se cumple la siguiente igualdad*

$$(-1)^{|\alpha||\beta|}F(1_{A'} \otimes \beta) \circ F(\alpha \otimes 1_B) = F(\alpha \otimes \beta) = F(\alpha \otimes 1_{B'}) \circ F(1_A \otimes \beta)$$

Demostración. $(a) \Longrightarrow (b)$ Por un lado, por definción de de la composición en la categoría $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, tenemos

$$\begin{aligned}\alpha \otimes \beta &= (\alpha \otimes 1_{B'}) \circ (1_A \otimes \beta) \\ &= (-1)^{|\alpha||\beta|}(1_{A'} \otimes \beta) \circ (\alpha \otimes 1_A).\end{aligned}$$

Luego, aplicando F a la igualdad anterior, tenemos

$$(-1)^{|\alpha||\beta|}F(1_{A'} \otimes \beta) \circ F(\alpha \otimes 1_B) = F(\alpha \otimes \beta) = F(\alpha \otimes 1_{B'}) \circ F(1_A \otimes \beta)$$

y de esta manera obtenemos $(b3)$.

Veamos ahora que se cumple $(b1)$, ya que el argumento para $(b2)$ es análogo. Supongamos que fijamos un objeto $A \in \mathcal{A}$. La funtorialidad de $F_A : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ se sigue directamente de la funtorialidad de $F : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$, ya que $F((\alpha_1 \otimes \beta_1) \circ (\alpha_2 \otimes \beta_2)) = F(\alpha_1 \otimes \beta_1) \circ F(\alpha_2 \otimes \beta_2)$. En particular,

$$F(1_A \otimes \beta_1\beta_2) = F((1_A \otimes \beta_1) \circ (1_A \otimes \beta_2)) = F(1_A \otimes \beta_1) \circ F(1_A \otimes \beta_2).$$

Veamos que F_A es graduado, es decir,

$$F_A \left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}^n(B,B')}\right) \subseteq \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}} \left(F_A(B), F_A(B')\right.$$

En efecto, como F es un funtor graduado tenemos que

$$F \left(\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}((A, B), (A, B'))\right) \subseteq \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}}(F(A, B), F(A, B')).$$

Dado que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}((A, B), (A, B')) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A) \otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B, B')$, se tiene que $\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}} = \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Hom}^i_{\mathcal{A}}(A, A) \otimes_k \mathrm{Hom}^j_{\mathcal{B}}(B, B')$. Luego, si $f \in \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{B}}(B, B')$, se tiene que $F_A(f) = 1_A \otimes f$ y como $1_A \in \mathrm{Hom}^0_{\mathcal{A}}(A, A)$, se sigue que $1_A \otimes f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A) \otimes_k \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{B}}(B, B') = \mathrm{Hom}^{n+0}_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}((A, B)(A, B')) \subseteq \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}}(F(A, B), F(A, B'))$. En consecuencia, $F_A(f) \in \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}}(F_A(B), F_A(B'))$.

Ahora por ser F un dg-funtor, se tiene que F conmuta con los diferenciales, es decir, $d_{\mathcal{C}}(F(\alpha\otimes\beta)) = F(d_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{C}}(\alpha\otimes\beta))$, para todos los morfismos homogéneos $\alpha : A \longrightarrow A'$ en $\mathcal{A}$ y $\beta : B \longrightarrow B'$ in $\mathcal{B}$. Por lo que tenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
d_{\mathcal{C}}(F(\alpha\otimes\beta)) &= F(d_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}(\alpha\otimes\beta))\\
&= F\left(d_A(\alpha)\otimes\beta + (-1)^{|\alpha|}\alpha\otimes d_{\mathcal{B}(\beta)}\right)\\
&= F(d_{\mathcal{A}}(\alpha)\otimes\beta) + (-1)^{|\alpha|}F(\alpha\otimes d_{\mathcal{B}}(\beta)).
\end{aligned}$$

Ahora veamos que $F_A : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ conmuta con los diferenciales. Para lo cual, sean $B, B' \in \mathcal{B}$ y $\beta : B \longrightarrow B'$. Veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B,B') \arrow[r, "d_{\mathcal{B}}"] \arrow[d, "F_A"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B,B') \arrow[d, "F_A"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(B),F(B')) \arrow[r, "d_{\mathcal{C}}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(B),F(B'))
\end{tikzcd}$$

En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned}
(d_{\mathcal{C}}F_A)(\beta) &= d_{\mathcal{C}}(F(1_A\otimes\beta))\\
&= F(d_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}(1_A\otimes\beta))\\
&= F(d_{\mathcal{A}}(1_A)\otimes\beta) + (-1)^{|1_A|}F(1_A\otimes d_{\mathcal{B}}(\beta))\\
&= F(1_A\otimes d_{\mathcal{B}}(\beta))
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue del hecho de que $d_{\mathcal{A}}(1_A) = 0$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sean $\alpha_1 : A_1 \longrightarrow A_2$, $\alpha_2 : A_2 \longrightarrow A_3$ morfismo homogéneos en $\mathcal{A}$ y $\beta_1 : B_1 \longrightarrow B_2$, $\beta_2 : B_2 \longrightarrow B_3$ morfismos homogéneos en $\mathcal{B}$. La condición $(b3)$ implica

$$\begin{aligned}
F\left((\alpha_2\otimes\beta_2)\circ(\alpha_1\otimes\beta_1)\right) &= (-1)^{|\alpha_1||\beta_2|}F\left((\alpha_2\alpha_1)\otimes(\beta_2\beta_1)\right)\\
&= (-1)^{|\alpha_1||\beta_2|}F\left((\alpha_2\alpha_1)\otimes 1_{B_3}\right)F\left(1_{A_1}\otimes(\beta_2\beta_1)\right)\\
&= (-1)^{|\alpha_1||\beta_2|}F_{B_3}(\alpha_2\alpha_1)F_{A_1}(\beta_2\beta_1)\\
&= (-1)^{|\alpha_1||\beta_2|}F_{B_3}(\alpha_2)F_{B_3}(\alpha_1)F_{A_1}(\beta_2)F_{A_1}(\beta_1)\\
&= (-1)^{|\alpha_1||\beta_2|}F(\alpha_2\otimes 1_{B_3})F(\alpha_1\otimes 1_{B_3})F(1_{A_1}\otimes\beta_2)F(1_{A_1}\otimes\beta_1).
\end{aligned}$$

y

$$F(\alpha_2\otimes\beta_2)F(\alpha_1\otimes\beta_1) = F(\alpha_2\otimes 1_{B_3})F(1_{A_2}\otimes\beta_2)F(\alpha_1\otimes 1_{B_2})F(1_{A_1}\otimes\beta_1).$$

Ahora por la condición $(b3)$ tenemos que

$$F(1_{A_2}\otimes\beta_2)F(\alpha_1\otimes 1_{B_2}) = (-1)^{|\alpha_1||\beta_2|}F(\alpha_1\otimes 1_{B_3})F(1_{A_1}\otimes\beta_2)$$

y así,

$$F\left((\alpha_2\otimes\beta_2)\circ(\alpha_1\otimes\beta_1)\right) = F(\alpha_2\otimes\beta_2)\circ F(\alpha_1\otimes\beta_1).$$

Además, para $1_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}} = 1_A\otimes 1_B$, usando la funtorialidad de $f_A : \mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{C}$ se tiene

$$F(1_A\otimes 1_B) = F_A(1_B) = 1_{F_A(B)} = 1_{F(A,B)}$$

para cada $A\in\mathcal{A}$ y $B\in\mathcal{B}$.

Ahora veamos que $F:\mathcal{A}\otimes_k\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{C}$ es un funtor graduado , es decir $F\left(\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}((A,B),(A',B'))\right)\subseteq \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}}\left(F(A,B),F(A',B')\right)$. En efecto, dado que

$$\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}((A,B),(A',B')) := \left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,A')\otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B,B')\right)^n$$

y

$$\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,A')\otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B,B')\right)^n = \bigoplus_{i+j=n}\mathrm{Hom}^i_{\mathcal{A}}(A,A')\otimes_k\mathrm{Hom}^j_{\mathcal{B}}(B,B'),$$

basta checar la condición para elementos homogéneos. Sean $h\in\mathrm{Hom}^i_{\mathcal{A}}(A,A')$ y $k\in\mathrm{Hom}^j_{\mathcal{A}}(B,B')$. Entonces, por la condición $(b3)$ tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}F(h\otimes k) &= F((h\otimes 1_{B'})(1_A\otimes k))\\ &= F(h\otimes 1_{B'})F(1_A\otimes k)\\ &= F_{B'}(h)F_A(k).\end{aligned}$$

Dado que $F_{B'}$ y F_A son dg-funtores, se tiene que

$$F_{B'}(h)\in\mathrm{Hom}^i_{\mathcal{C}}(F_{B'}(A),F_{B'}(A')) = \mathrm{Hom}^i_{\mathcal{C}}(F(A,B'),F(A',B'))$$

$$F_A(k)\in\mathrm{Hom}^j_{\mathcal{C}}(F_A(B),F_A(B')) = \mathrm{Hom}^j_{\mathcal{C}}(F(A,B),F(A,B')).$$

Por lo que

$$F(h\otimes k)\in\mathrm{Hom}^i_{\mathcal{C}}(F(A,B'),F(A',B'))\otimes_k\mathrm{Hom}^j_{\mathcal{C}}(F(A,B),F(A,B')),$$

como $i+j=n$ se sigue que $f\in\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}}(F(A,B),F(A',B'))$, y así, $F:\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{C}$ es un dg-funtor graduado.

Verificamos que F conmuta con los diferenciales. Sean $\alpha : A \longrightarrow A'$ y $\beta : B \longrightarrow B'$ elementos homogéneos. Entonces, usando $(b3)$ tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{C}}(F(\alpha \otimes \beta)) &= d_{\mathcal{C}}\left(F(\alpha \otimes 1_{B'}) \circ F(1_A \otimes \beta)\right) \\ &= d_{\mathcal{C}}(F(\alpha \otimes 1_{B'}))F(1_A \otimes \beta) + (-1)^{|F(\alpha \otimes 1_{B'})|}F(\alpha \otimes 1_{B'})d_{\mathcal{C}}(F(1_A \otimes \beta)) \\ &= (d_{\mathcal{C}}F_{B'})(\alpha)F(1_A \otimes \beta) + (-1)^{|F(\alpha \otimes 1_{B'})|}F(\alpha \otimes 1_{B'})(d_{\mathcal{C}}F_A)(\beta). \end{aligned}$$

Ahora, dado que $F_{B'}$ y F_A son dg-funtores conmutan con el diferencial, es decir, $d_{\mathcal{C}}F_{B'} = F_{B'}d_{\mathcal{A}}$ y $d_{\mathcal{C}}F_A = F_A d_{\mathcal{B}}$, respectivamente. Nuevamente utilizando $(b3)$ tenemos

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{C}}(F(\alpha \otimes \beta)) &= (F_{B'}d_{\mathcal{A}})(\alpha)F(1_A \otimes \beta) + (-1)^{|\alpha|}F(\alpha \otimes 1_{B'})(F_A d_{\mathcal{B}})(\beta) \\ &= F(d_{\mathcal{A}}(\alpha) \otimes 1_{B'})F(1_A \otimes \beta) + (-1)^{|\alpha|}F(\alpha \otimes 1_{B'})F(1_A \otimes d_{\mathcal{B}}(\beta)) \\ &= F(d_{\mathcal{A}}(\alpha) \otimes \beta) + (-1)^{|\alpha|}F(\alpha \otimes d_{\mathcal{B}}(\beta)) \end{aligned}$$

□

Las siguientes proposiciones muestran ejemplos de dg-funtores, los cuales son verificados utilizando la proposiciones 2.3.3 y 2.2.7.

Proposición 2.3.4 *Sean $\mathcal{A}$ una dg-categoría y $Dg - Mod(k)$ la categoría de k-módulos diferencialmente graduados. Entonces, el funtor representable*

$$\mathrm{Hom}_{Dg-Mod(k)}(-,-) : \mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{A} \longrightarrow Dg - Mod(k)$$

es un dg-funtor. Dado por $\mathrm{Hom}_{Dg-Mod(k)}(-,-)(A, A') := \mathrm{Hom}_{Dg-Mod(k)}(A, A')$ *para* $(A, A') \in Obj(\mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{A})$ *y si* $\alpha : A \longrightarrow B$ *y* $\alpha' : A' \longrightarrow B'$ *homogéneos en* $\mathcal{A}$*, definimos* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\alpha^{op} \otimes \alpha') : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B')$ *por* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\alpha^{op} \otimes \alpha')(f) := (-1)^{|\alpha|(|\alpha'|+|f|)}\alpha' \circ f \circ \alpha$*, para un elemento homogéneo* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, A')$.

Demostración. Fijamos un objeto $A \in \mathcal{A}^{op}$, por lo que tenemos el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, -) : \mathcal{A} \longrightarrow Dg - Mod(k)$ y por la proposición 2.2.5 tenemos un dg-funtor. De manera análoga para un objeto fijo $A \in \mathcal{A}$ por la proposición 2.2.7 tenemos un dg-funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, A) : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow Dg - Mod(k)$.

Luego, si $\alpha : A \longrightarrow B$, $\alpha' : A' \longrightarrow B'$ y $f : B \longrightarrow A'$ tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\alpha^{op} \otimes 1_{B'})\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(1_B^{op} \otimes \alpha')(f) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\alpha^{op} \otimes 1_{B'})(\alpha' f) \\ &= (-1)^{|\alpha|(|\alpha'|+|f|)}\alpha' f \alpha. \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos la siguiente igualdad,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(1_A^{op} \otimes \alpha')\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\alpha^{op} \otimes 1'_A)(f) &= (-1)^{|\alpha||f|}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(1_A^{op} \otimes \alpha')(f\alpha) \\ &= (-1)^{|\alpha||f|}\alpha' f \alpha. \end{aligned}$$

Así, de las dos expresiones anteriores tenemos

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}\mathcal{A}(\alpha^{op}\otimes 1_{B'})\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(1_B^{op}\otimes\alpha') &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\alpha^{op}\otimes\alpha)\\ &= (-1)^{|\alpha||\alpha|}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(1_A^{op}\otimes\alpha')\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\alpha^{op}\otimes 1'_A).\end{aligned}$$

Finalmente, por el lema2.3.3 se sigue que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{op}\mathcal{A}}(-,-)$ es un dg-funtor. $\square$

Consideremos ahora dos dg-funtores $F:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}'$ y $G:\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{B}'$ entre dg-categorías. Definimos un nuevo funtor $F\otimes G:\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{A}'\otimes\mathcal{B}'$ de la siguiente manera

(a) En objetos, definimos $(F\otimes G)(A,B):=(F(A),G(B))$.

(b) Si $\alpha:A_1\longrightarrow A_2$ y $\beta:B_1\longrightarrow B_2$ son morfismos en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, respectivamente, definimos el morfismo $(F\otimes G)(\alpha\otimes\beta):\mathcal{A}(A_1,A_2)\otimes\mathcal{B}(B_1,B_2)\longrightarrow\mathcal{A}(F(A_1),F(A_2))\otimes\mathcal{B}(F(B_1),F(B_2))$ es una función dada por $(F\otimes G)(\alpha\otimes\beta):=F(\alpha)\otimes G(\beta)$.

Proposición 2.3.5 *Sean $F:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}'$ y $G:\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{B}'$ dg-funtores entre dg-categorías. Entonces $F\otimes G:\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{A}'\otimes\mathcal{B}'$ es un dg-funtor.*

Demostración. La prueba la realizamos de manera directa sin hacer aplicación del lema 2.3.3. Veamos primero que $F\otimes G$ es un funtor. En efecto, sean $\alpha:A\longrightarrow A'$, $\alpha':A'\longrightarrow A''$, $\beta:B\longrightarrow B'$ y $\beta':B'\longrightarrow B''$ lementos homogéneos. Entonces

$$\begin{aligned}(F\otimes G)((\alpha'\otimes\beta')\circ(\alpha\otimes\beta)) &= (F\otimes G)((-1)^{|\beta'||\alpha|(\alpha'\alpha)\otimes(\beta'\beta)})\\ &= (-1)^{|\beta'||\alpha|}F(\alpha'\alpha)\otimes G(\beta'\beta)\\ &= (-1)^{|\beta'||\alpha|}F(\alpha')F(\alpha)\otimes G(\beta')G(\beta)\\ &= (-1)^{|G(\beta')||F(\alpha)|}F(\alpha')F(\alpha)\otimes G(\beta')G(\beta)\\ &= (-1)^{|G(\beta')||F(\alpha)|}F(\alpha'\alpha)\otimes G(\beta'\beta)\\ &= (F(\alpha')\otimes G(\beta'))\circ(F(\alpha)\otimes G(\beta))\\ &= (F\otimes G)(\alpha'\otimes\beta')\circ(F\otimes G)(\alpha\otimes\beta).\end{aligned}$$

donde la cuarta igualdad se sigue del hecho de que F y G son dg-funtores, es decir, $\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{A}}(A,A')\subseteq\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{A}'}(F(A),F(A'))$ y $\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{B}}(B,B')\subseteq\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{B}'}(F(B),F(B'))$.

Además, $(F\otimes G)(1_A\otimes 1_B)=F(1_A)\otimes G(1_B)=1_{FA}\otimes 1_{GB}=1_{FA\otimes GB}$.

Veamos ahora que $F\otimes G$ es un funtor graduado, es decir,

$$(F\otimes G)\left(\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}((A,B),(A',B'))\right)\subseteq\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{A}'\otimes\mathcal{B}'}\left((F(A),G(B)),(F(A'),G(B'))\right).$$

Consideremos $\alpha \otimes \beta \in \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}((A,B),(A',B'))$ un elemento homogéneo, por lo que $\alpha \in \mathrm{Hom}^i_{\mathcal{A}}(A,A')$ y $\beta \in \mathrm{Hom}^j_{\mathcal{B}}(B,B')$ tal que $i+j=n$. Dado que F y G son funtores graduados, se tiene que

$$F(\mathrm{Hom}^i_{\mathcal{A}}(A,A')) \subseteq \mathrm{Hom}^i_{\mathcal{A}'}(F(A),F(A'))$$

$$F(\mathrm{Hom}^j_{\mathcal{B}}(B,B')) \subseteq \mathrm{Hom}^j_{\mathcal{B}'}(F(B),F(B')).$$

Por lo que $F(\alpha) \in \mathrm{Hom}^i_{\mathcal{A}'}(F(A),F(A'))$ y $G(\beta) \in \mathrm{Hom}^j_{\mathcal{B}'}(F(B),F(B'))$ y así, $(F\otimes G)(\alpha\otimes\beta) \in \mathrm{Hom}^{i+j}_{\mathcal{A}'\otimes\mathcal{B}'}((F(A),G(B)),(F(A'),G(B')))$. Por lo tanto, $(F\otimes G)(\alpha\otimes\beta) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'\otimes\mathcal{B}'}((F\otimes G)(A,B),(F\otimes G)(A',B'))$.

Verificamos ahora que $(F\otimes G)$ conmuta con el diferencial. Sean $\alpha : A \longrightarrow A'$ y $\beta : B \longrightarrow B'$. Entonces

$$\begin{aligned}
(F\otimes G)d_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}(\alpha\otimes\beta) &= (F\otimes G)\left(d_{\mathcal{A}}(\alpha)\otimes\beta + (-1)^{|\alpha|}\alpha\otimes d_{\mathcal{B}}(\beta)\right)\\
&= F(d_{\mathcal{A}})(\alpha)\otimes G(\beta) + (-1)^{|\alpha|}F(\alpha)\otimes G(d_{\mathcal{B}})(\beta)\\
&= d_{\mathcal{A}}F(\alpha)\otimes G(\beta) + (-1)^{|\alpha|}F(\alpha)\otimes d_{\mathcal{B}}G(\beta)\\
&= d_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}(F(\alpha)\otimes G(\beta))\\
&= d_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}(F\otimes G)(\alpha\otimes\beta).
\end{aligned}$$

□

2.4. Homología en dg-categorías

Definición 2.4.1 *Sea $\mathcal{C}$ una dg-categoría. La categoría subyacente $\mathbf{Z^0}(\mathcal{C})$ es la categoría definida por*

(a) $Obj(Z^0(\mathcal{C})) := Obj(\mathcal{C})$.

(B) $\mathrm{Hom}_{Z^0(\mathcal{C})}(X,Y) := Z^0(\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{C}}(X,Y))$ *para cada* $X,Y \in \mathcal{C}$,

es decir los morfismos en $Z^0(\mathcal{C})$ *es exactamente el kernel del morfismo* $d : \mathrm{Hom}^0_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}^1_{\mathcal{C}}(X,Y)$

Definición 2.4.2 *Sea $\mathcal{C}$ una dg-categoría. La* ***categoría homotópica*** $\mathbf{H^0}(\mathcal{C})$ *es una categoría k-lineal definida como sigue:*

(a) $Obj(H^0(\mathcal{C})) := Obj(\mathcal{C})$,

(b) $\mathrm{Hom}_{H^0(\mathcal{C})}(X,Y) := H^0\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\bullet}(X,Y)\right)$

donde $H^0(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)) := \frac{\mathrm{Ker}(d^1)}{Im(d^0)}$, *con* d^i *parte de la siguiente sucesión*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}^0_{\mathcal{C}}(X,Y) \xrightarrow{d^0} \mathrm{Hom}^1_{\mathcal{C}}(X,Y) \xrightarrow{d^1} \mathrm{Hom}^2_{\mathcal{C}}(X,Y)\cdots$$

Note que debido a la definición de dicha categoría podría ser llamada *categoría de cohomología.*

Definición 2.4.3 *Sea* $\mathcal{C}$ *una dg-categoría. La* ***categoría homotópica*** $\mathbf{H}^{\bullet}(\mathcal{C})$ *es una categoría k-lineal definida como sigue:*

(a) $Obj(H^{\bullet}(\mathcal{C})) := Obj(\mathcal{C})$,

(b) $\mathrm{Hom}_{H^{\bullet}(\mathcal{C})}(X,Y) := H^{\bullet}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\bullet}}(X,Y)\right)$

La cohomolgía es tomada del siguiente complejo

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}^0_{\mathcal{C}}(X,Y) \xrightarrow{d^0} \mathrm{Hom}^1_{\mathcal{C}}(X,Y) \xrightarrow{d^1} \cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}^i_{\mathcal{C}}(X,Y) \xrightarrow{d^i} \cdots$$

De nuevo, la categoría definida anteriormente podría ser llamada *categoría de cohomología graduada.*

2.5. Categoría de dg-categorías pequeñas

Ahora introduciomos la categoría de dg-categorías pequeñas, la cual denotaremos por $\mathbf{dg} - \mathbf{Cat_k}$.

Definición 2.5.1 *La* ***categoría de dg-categorías pequeñas****, denotada por* $dg - Cat_k$ *es la categoría que tiene por objetos a todas la dg-categorías pequeñas, y como morfismos los dg-funtores entre ellas.*

Para evitar problemas de tamaño, hemos pedido en la definición que $dg - Cat_k$ consiste solo en dg-categorías pequeñas, fijado a un universo dado, similar a Cat siendo la categoría de todas las categorías pequeñas. Esta será siempre la situación salvo que se específique lo contrario y tendremos que considerar categorías no pequeñas.

Observación 2.5.2 *(a) la categoria* $dg - Cat_k$ *tiene a la dg-categoría vacía como objeto inicial.*

(b) La dg-categoría $\mathcal{C}_R = \{\star\}$ *con un sólo objeto, es un objeto final en la categoría* $dg - Cat_k$.

Definición 2.5.3 *Sean* $\mathcal{C}$ *y* $\mathcal{D}$ *dg-categorías pequeñas,* $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *dos dg-funtores. Una* ***tranasformación natural de grado n*** $\eta : F \Rightarrow G$*, es una familia de morfismos* $\{\eta_X : F(X) \longrightarrow G(X)\}_{X \in \mathcal{C}}$ *tal que* $\eta_X \in \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{D}}(F(X), G(X))$ *para cada* $X \in \mathcal{C}$*. Además, para* $f \in \mathrm{Hom}^m_{\mathcal{C}}(X,Y)$ *morfismo homogéneo de grado* *m, de tiene que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\eta_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

salvo por un signo $(-1)^{nm}$, *es decir,* $G(f)\eta_X = (-1)^{nm}\eta_Y F(f)$.

Proposición 2.5.4 *Sean* $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ *dg-categorías pequeñas. Entonces* Hom_{dg-cat} $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ *es una dg-categoría.*

Demostración. Veamos primero que dados $F, G \in \mathrm{Hom}_{dg-cat}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, el conjunto $\mathrm{Hom}_{dg-cat}(F, G)$ tiene estructura de k-módulo diferencialmente graduado. Consideremos la siguiente acción $\alpha : k \times \mathrm{Hom}_{dg-cat}(F, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{dg-cat}(F, G)$ dada por $\alpha(k, \eta) := k \cdot \eta$, donde $k \cdot \eta : F \Rightarrow G$ se define de la siguiente manera. Dado que $\eta : F \Rightarrow G$ es una transformación natural (de grado n), el siguiente diagrama conmuta salvo un signo para cada $\gamma : C \longrightarrow C'$ de grado m, es decir, $\gamma \in \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}}(C, C')$.

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "F(\gamma)"'] & G(C) \arrow[d, "G(\gamma)"] \\ F(C') \arrow[r, "\eta_{C'}"'] & G(C') \end{tikzcd} \quad ,$$

es decir, $\eta_{C'} F(\gamma) = (-1)^{nm} G(\gamma)\eta_C$. Ahora por ser $\mathcal{D}$ una dg-categoría tenemos que $\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{D}}(FC, GC')$ tiene estructura de k-módulo diferencialmente graduado. De esta manera definimos $(k \cdot \eta)_C := k \star \eta_C$, de manera que el siguiente diagrama conmuta salvo signo

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "k\star\eta_C"] \arrow[d, "F(\gamma)"'] & G(C) \arrow[d, "G(\gamma)"] \\ F(C') \arrow[r, "k\star\eta_{C'}"'] & G(C') \end{tikzcd} \quad ,$$

es decir, $(k \star \eta_{C'})F(\gamma) = (-1)^{nm} G(\gamma)(k \star \eta_C)$.

La graduación de $\mathrm{Hom}_{dg-cat}(F, G)$ esta dada de la siguiente manera

$$\mathrm{Hom}_{dg-cat}(F, G) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}^n_{dg-cat}(F, G)$$

donde

$$\mathrm{Hom}^n_{dg-cat}(F, G) := \{\eta : F \Rightarrow G | \eta \textit{ es de grado } n\}.$$

Definimos ahora el diferencial

$$d_{\mathrm{Hom}^\bullet_{dg-cat}(F,G)} : \mathrm{Hom}_{dg-cat}(F, G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{dg-cat}(F, G).$$

Basta definirla en morfismo homogéneos. Consideremos $\eta : F \Rightarrow G$ de grado n. Ahora, como $\mathcal{D}$ es una dg-categoría tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), G(C))$ posee un diferencial, digamos $d^n_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C),G(C))} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), G(C)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}$ $(F(C), G(C))$, por lo que $d_{\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{D}}(F(C),G(C))}(\eta_C) \in \mathrm{Hom}^{n+1}_{\mathcal{D}}(F(C), G(C))$. Para $\eta \in \mathrm{Hom}^n_{dg-cat}\ (F, G)$ definimos

$$d^n_{\mathrm{Hom}_{dg-cat}(F,G)}(\eta)(C) := d^n_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C),G(C))}(\eta_C).$$

Veamos que el diferencial d está bien definido, es decir, $d(\eta)$ es de nuevo una tranformación natural, para lo cual basta verificar que al aplicar d^{n+m} preserva la igualdad

$$G(f)\eta_X = (-1)^{nm}\eta_Y F(f).$$

En efecto, dado que $G(f)\eta_X \in \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{D}}(F(X), G(Y))$ tenemos que

$$\begin{aligned}
d^{n+m}_{\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{D}}(F(X),G(Y))}(G(f)\eta_X) &= d^m_{\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{D}}(G(X),G(Y))}(G(f)) \circ \eta_X \\
&\quad + (-1)^m G(f) \circ d^n_{\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{D}}(G(X),G(X))} \\
&= G\left(d^m_{\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{D}}(X,Y)}(f)\right) \circ \eta_X \\
&\quad + (-1)^m G(f) \circ d^n_{\mathrm{Hom}^\bullet(F,G)}(\eta)(X).
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
&(-1)^{nm} d^{n+m}_{\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{D}}(G(X),G(Y))}(\eta_Y \circ F(f)) \\
&\quad = (-1)^{nm} d^n_{\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{D}}(G(X),G(Y))}(\eta_Y) \circ F(f) \\
&\qquad\qquad + (-1)^{n(m+1)}\eta_Y \circ d^n_{\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))}(F(f)) \\
&\quad = (-1)^{nm} d^n_{\mathrm{Hom}^\bullet(F,G)}(\eta)(Y) \circ F(f) \\
&\qquad\qquad + (-1)^{n(m+1)}\eta_Y \circ F\left(d^n_{\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{C}}(X,Y)}(f)\right) \\
&\quad = (-1)^{nm} d^n_{\mathrm{Hom}^\bullet(F,G)}(\eta)(Y) \circ F(f) \\
&\qquad\qquad + (-1)^{n(m+1)}(-1)^{n(m+1)} G\left(d^m_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)}(f)\right) \circ \eta_X.
\end{aligned}$$

Cancelando los terminos correspondientes y aumentando un signo, obtenemos lo sguiente

$$G(f) \circ d^n_{\mathrm{Hom}^\bullet(F,G)}(\eta)(X) = (-1)^{(n+1)m} d^n_{\mathrm{Hom}^\bullet(F,G)}(\eta)(Y) \circ F(f)$$

El hecho de que $d^n_{\mathrm{Hom}_{dg-cat}(F,G)}$ sea un diferencial es consecuencia directa del hecho que $d^n_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C),G(C))}$ lo es para cada $C \in \mathcal{C}$.

Ahora veamos que la composición

$$\varphi_{F,G,H} : \mathrm{Hom}_{dg-cat}(G,H) \otimes \mathrm{Hom}_{dg-cat}(F,G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{dg-cat}(F,H)$$

es un morfismo de k-módulos diferencialmente graduados. Es claro que, $\varphi_{F,G,H}$ es un morfismo k-módulos, ya que $\varphi_{F(C),G(C),H(C)}$ lo es para cada $C \in \mathcal{C}$. Sean $\eta \in \mathrm{Hom}^i_{dg-cat}(G,H)$, $\mu \in \mathrm{Hom}^j_{dg-cat}(F,G)$,entonces

(a) $\varphi_{F,G,H}(\eta \otimes \mu) \in \mathrm{Hom}^{i+j}_{dg-cat}(F,H)$.
En efecto, como $\mathcal{D}$ es una dg-categoría tenemos $\varphi_{F(D),G(D),H(D)} : \mathrm{Hom}_{dg-cat}(G(D),H(D)) \otimes \mathrm{Hom}_{dg-cat}(F(D),G(D)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{dg-cat}(F(D),H(D))$ es un morfismo de k-módulos diferencialmente graduados para cada $D \in \mathcal{D}$. En consecuencia, $(\eta\mu)_D := \eta_D\mu_D \in \mathrm{Hom}^{i+j}_{\mathcal{D}}(F(D),G(D))$. Luego, $\eta\mu \in \mathrm{Hom}^{i+j}_{\mathcal{D}}(F,G)$.

(b) $\varphi_{F,G,H}$ conmuta con el diferencial.
En efecto, dado que $\varphi_{F(D),G(D),H(D)}$ conmuta con el diferencial se tiene que

$$d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FD,HD)}\varphi_{FD,GD,HD} = \varphi_{FD,GD,HD}d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(GD,HD)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FD,GD)}$$

para cada $D \in \mathcal{D}$ y así,

$$d_{\mathrm{Hom}_{dg-cat}(F,H)}\varphi_{F,G,H} = \varphi_{F,G,H}d_{\mathrm{Hom}_{dg-cat}(G,H)\otimes\mathrm{Hom}_{dg-cat}(F,G)}$$

Por lo tanto, $\mathrm{Hom}_{dg-cat}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ es una dg-categoría. □

Corolario 2.5.5 *Sea $\mathcal{C}$ una dg-categoría pequeña. Entonces la categoría de $\mathcal{C}$-módulos $Mod(\mathcal{C}) := Fun(\mathcal{C}, Dg-Mod(k))$ es una dg-categoría.*

Demostración. Se sigue de la proposición 2.5.4. □

2.6. Dg-adjunción Hom-tensor

Definición 2.6.1 *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dg-categorías. El* ***Hom interno de*** *$\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ es la dg-categoría $\mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{D})$, la cual tiene por objetos a los dg-funtores entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ y a los complejos de morfismos graduados $\mathrm{Hom}^\bullet(F,G)$ entre dos dg-funtores $F,G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ como espacio de morfismos.*

Teorema 2.6.2 *Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ dg-categorías. Entonces existe una adjunción*

$$\mathrm{Hom}_{dgCat_k}(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\mathcal{C}) \cong \mathrm{Hom}_{dgCat_k}(\mathcal{A},\mathrm{Hom}(\mathcal{B},\mathcal{C}))$$

.

Demostración. Definimos un funtor

$$\Theta : \mathrm{Hom}_{dgCat_k}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{dgCat_k}(\mathcal{A}, \mathrm{Hom}_{dgCat_k}(\mathcal{B}, \mathcal{C}))$$

de la siguiente manera. Para un dg-funtor $F : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$, definimos el dg-funtor $\Theta(F) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{dgCat_k}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ como sigue; para un objeto $A \in \mathcal{A}$ definimos el dg-funtor $\Theta(F)(A) : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$. Para un objeto $B \in \mathcal{B}$, $\Theta(F)(A)(B) := F(A, B)$ y para un morfismo homogéneo $\beta : B \longrightarrow B'$ tenemos $\Theta(F)(A)(\beta) := F(1_A \otimes \beta) : F(A, B) \longrightarrow F(A, B')$.

Dado que F es un dg-funtor, por la prueba de proposición 2.3.3 se sigue que $\Theta(F)(A) : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ es un dg-funtor para cada $A \in \mathcal{A}$. Ahora definimos $\Theta(F) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{dgCat_k}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ en morfismos. Sea $\alpha : A \longrightarrow A'$ un morfismo homogéneo de grado n. Necesitamos definir una transformación natural de dg-funtores $\Theta(F)(\alpha) : \Theta(F)(A) \Longrightarrow \Theta(F)(A')$ como sigue; para un objeto $B \in \mathcal{B}$ tenemos

$$(\Theta(F)(\alpha))_B := F(\alpha \otimes 1_B).$$

Además, para un morfismo $\beta : B \longrightarrow B'$ de grado m, por la proposición 2.3.3 tenemos que el siguiente diagrama conmuta salvo signo

$$\begin{tikzcd}
F(A,B) = \Theta(F)(A)(B) \arrow[r, "(\Theta(F)(\alpha))_B := F(\alpha \otimes 1_B)"] \arrow[d, "F(1_A \otimes \beta) = \Theta(F)(A)(B)"'] & \Theta(F)(A)(B') = F(A', B) \arrow[d, "F(1_{A'} \otimes \beta) = \Theta(F)(A')(B)"] \\
F(A,B') = \Theta(F)(A)(B') \arrow[r, "(\Theta(F)(\alpha))_{B'} := F(\alpha \otimes 1_{B'})"'] & \Theta(F)(A')(B') = F(A', B'),
\end{tikzcd}$$

es decir,

$$(-1)^{mn} F(1_{A'} \otimes \beta) F(\alpha \otimes 1_B) = F(\alpha \otimes \beta) = F(\alpha \otimes 1_{B'}) F(1_A \otimes \beta).$$

Por lo tanto, $\Theta(F)(\alpha) : \Theta(F)(A) \Longrightarrow \Theta(F)(A')$ es una transformación natural de grado n.

Finalmente, definimos

$$\Theta : \mathrm{Hom}_{dgCat_k}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{dgCat_k}(\mathcal{A}, \mathrm{Hom}_{dgCat_k}(\mathcal{B}, \mathcal{C}))$$

en morfismos. Sea $\eta : F \Longrightarrow G$ un morfismo en $\mathrm{Hom}_{dgCat_k}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{C})$, con $F, G : \mathcal{A} \otimes \otimes \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$. Hay que definir una transformación natural, $\Theta(\eta) : \Theta(F) \Longrightarrow \Theta(G)$, es decir, para un morfismo homogéneo $\alpha : A \longrightarrow A'$ de grado n, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\Theta(F)(A) \arrow[r, "(\Theta(\eta))_A"] \arrow[d, "\Theta(F)(\alpha)"'] & \Theta(G)(A) \arrow[d, "\Theta(G)(\alpha)"] \\
\Theta(F)(A') \arrow[r, "(\Theta(\eta))_{A'}"'] & \Theta(G)(A').
\end{tikzcd}$$

En efecto, consideremos un morfismo $\beta : B \longrightarrow B'$ homogéneo de grado m. Dado que $\Theta(F)(\alpha)$ es una transformacioón natural, tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\Theta(F)(A)(B) \arrow[rr, "(\Theta(\eta))_A(1_B)"] \arrow[dr, "F(1_A\otimes\beta)"'] \arrow[dd, "F(\alpha\otimes 1_B)=\Theta(F)(\alpha)(1_B)"'] & & \Theta(G)(A)(B) \arrow[dr, "G(1_A\otimes\beta)"] \arrow[dd, dotted, "G(\alpha\otimes 1_B)=\Theta(G)(\alpha)(1_B)"' near start] & \\
& \Theta(F)(A)(B') \arrow[rr, "(\Theta(\eta))_A(1_{B'})" near end] \arrow[dd, "\Theta(F)(\alpha)(1_{B'})" near start] & & \Theta(G)(A)(B') \arrow[dd, "\Theta(G)(\alpha)(1_{B'})"'] \\
\Theta(F)(A')(B) \arrow[rr, dotted, "(\Theta(\eta))_{A'}(1_B)"' near start] \arrow[dr, "F(1_{A'}\otimes\beta)"'] & & \Theta(G)(A')(B) \arrow[dr, dotted, "G(1_{A'}\otimes\beta)"] & \\
& \Theta(F)(A)(B') \arrow[rr, "(\Theta(\eta))_{A'}(1_B)"'] & & \Theta(G)(A')(B).
\end{tikzcd}$$

De está manera queda totalmente definida la asignación Θ. Veamos ahora que dicha asignación es funtorial. En efecto, sean $F, G, H \in \mathrm{Hom}_{dgCat_k}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{C})$, $\eta : F \Rightarrow G$ y $\epsilon : G \Rightarrow H$ morfismos en la categoría $\mathrm{Hom}_{dgCat_k}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{C})$. Entonces, para $A \in \mathcal{A}$ y $b \in \mathcal{B}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\Theta(\eta\epsilon)(A)(B) = (\eta\epsilon)_{A\otimes B} &= \eta_{A\otimes B}\epsilon_{A\otimes B} \\
&= \Theta(\eta)(A)(B)\Theta(\epsilon)(A)(B) \\
&= (\Theta(\eta)\Theta(\epsilon))(A)(B).
\end{aligned}$$

Además
$$\Theta(1_F)(A)(B) = 1_{F(A\otimes B)} = 1_{\Theta(F)}(A)(B).$$

Así, $\Theta : \mathrm{Hom}_{dgCat_k}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{dgCat_k}(\mathcal{A}, \mathrm{Hom}_{dgCat_k}(\mathcal{B}, \mathcal{C}))$ es funtor covariante.

Sean $F, G : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ dg-funores. Veamos que Θ es graduado, es decir,

$$\Theta\left(\mathrm{Hom}^n_{\mathrm{Hom}(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\mathcal{C})}(F,G)\right) \subseteq \mathrm{Hom}^n_{\mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathrm{Hom}(\mathcal{B},\mathcal{C}))}(\Theta(F), \Theta(G)).$$

Consideremos $\eta : F \Rightarrow G$ una transformación natural de de grado n, es decir, $\eta \in \mathrm{Hom}^n_{\mathrm{Hom}(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\mathcal{C})}(F,G)$. Queremos ver que $\Theta(\eta) : \Theta(F) \Rightarrow \Theta(G)$ es una transformación natural de grado n, es decir,

$$\Theta(\eta)_A : \Theta(F)(A) \longrightarrow \Theta(G)(A) \in \mathrm{Hom}^n(\Theta(F)(A), \Theta(G)(A)).$$

Luego, basta ver que $(\Theta(\eta)_A)_B : \Theta(F)(A)(B) \longrightarrow \Theta(G)(A)(B)$ es un morfismo de grado n. Dado que F es un dg-funtor y η es de grado n, se tiene que $(\Theta(\eta)_A)_B = \eta_{A\otimes B} \in \mathrm{Hom}^n(F(A,B), G(A,B))$ para cada $b \in \mathcal{B}$. En consecuencia, $\Theta(\eta)_A \in \mathrm{Hom}^n(\Theta(F)(A), \Theta(G)(A))$ para cada $A \in \mathcal{A}$. Por lo tanto, $\Theta(\eta) \in \mathrm{Hom}^n_{\mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathrm{Hom}(\mathcal{B},\mathcal{C}))}(\Theta(F), \Theta(G))$.

Ahora, veamos que Θ conmuta con el diferencial, es decir, que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{dgCat_k}(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\mathcal{C}) \arrow[r, "\Theta"] \arrow[d, "d_{\mathrm{Hom}_{dgCat_k}(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\mathcal{C})}"'] & \mathrm{Hom}_{dgCat_k}(\mathcal{A}, \mathrm{Hom}_{dgCat_k}(\mathcal{B},\mathcal{C})) \arrow[d, "d_{\mathrm{Hom}_{dgCat_k}(\mathcal{A},\mathrm{Hom}_{dgCat_k}(\mathcal{B},\mathcal{C}))}"'] \\
\mathrm{Hom}_{dgCat_k}(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\mathcal{C}) \arrow[r, "\Theta"] & \mathrm{Hom}_{dgCat_k}(\mathcal{A}, \mathrm{Hom}_{dgCat_k}(\mathcal{B},\mathcal{C}))
\end{tikzcd}$$

Para lo cual consideramos dg-funtores $F, G : \mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ y verificamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\mathcal{C})}(F,G) \arrow[r, "\Theta_{F,G}"] \arrow[d, "d_{\mathrm{Hom}(F,G)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathrm{Hom}(\mathcal{B},\mathcal{C}))}(\Theta(F),\Theta(G)) . \arrow[d, "d_{\mathrm{Hom}(\Theta(F),\Theta(G))}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\mathcal{C})}(F,G) \arrow[r, "\Theta_{F,G}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathrm{Hom}(\mathcal{B},\mathcal{C}))}(\Theta(F),\Theta(G))
\end{tikzcd}$$

En efecto, sean $\eta : F \Longrightarrow G$, $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$. Tenemos $d_{\mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathrm{Hom}(\mathcal{B},\mathcal{C}))}$ $\Theta_{F,G}(\eta)(A) = d_{\mathrm{Hom}(\Theta(F)(A),\Theta(G)(A))}(\Theta(\eta)_A)$, de esta manera, para $B \in \mathcal{B}$ se tiene que

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{Hom}(\Theta(F)(A),\Theta(G)(A))}(\Theta(\eta)_A)(B) &= d_{\mathrm{Hom}(\Theta(F)(A)(B),\Theta(G)(A)(B))}\left((\Theta(\eta)_A)\right)_B) \\ &= d_{\mathrm{Hom}(F(A,B),G(A,B))}\left(\eta_{A,B}\right) \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \Theta_{F,G} d_{\mathrm{Hom}(F,G)}(\eta)(A)(B) &= \theta_{F,G}\left(d_{\mathrm{Hom}(F.G)}(\eta)\right)(A)(B) \\ &= d_{\mathrm{Hom}(F,G)}(\eta)(A,B) \\ &= d_{\mathrm{Hom}(F(A,B),G(A,B))}(\eta_{(A,B)}). \end{aligned}$$

Así, Θ conmuta con el diferencial.
Construimos ahora el funtor

$$\Lambda : \mathrm{Hom}_{dg-Cat}(\mathcal{A}, \mathrm{Hom}_{dg-Cat}(\mathcal{B}, \mathcal{C})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{dg-Cat}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mathcal{C})$$

de la siguiente manera. Sea $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ un dg-funtor, definimos $\Lambda(F) : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ en objetos como $\Lambda(F)(A, B) := F(A)(B)$ y para un morfismo homogéneo $u \otimes v \in \mathrm{Hom}^{i+j}_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}((A, B), (A', B')) = \mathrm{Hom}^i_{\mathcal{A}}(A, A') \otimes_k \mathrm{Hom}^j_{\mathcal{B}}(B, B')$ consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
FA(B) \arrow[r, "(Fu)_B"] \arrow[d, "FA(v)"'] & FA'(B) \arrow[d, "FA'(v)"] \\
FA(B') \arrow[r, "(Fu)_{B'}"'] & FA'(B')
\end{tikzcd}$$

y definomos $\Lambda(F)(u \otimes v) := (Fu)_{B'} FA(v) = (-1)^{ij} FA'(v)(Fu)_{B'}$. Veamos que la asignación anterior define un funtor covariante. En efecto, sean $u_1 \otimes v_1 \in \mathrm{Hom}^i_{\mathcal{A}}(A, A') \otimes_k \mathrm{Hom}^j_{\mathcal{B}}(B, B')$, $u_2 \otimes v_2 \in \mathrm{Hom}^r_{\mathcal{A}}(A', A'') \otimes_k \mathrm{Hom}^s_{\mathcal{B}}(B', B'')$ y consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
FA(B) \arrow[r, "(Fu_1)_B"] \arrow[d, "FA(v_1)"'] & FA'(B) \arrow[r, "(Fu_2)_B"] \arrow[d, "FA'(v_1)"'] & FA''(B) \arrow[d, "FA''(v_1)"] \\
FA(B') \arrow[r, "(Fu_1)_{B'}"] \arrow[d, "FA(v_2)"'] & FA'(B') \arrow[r, "(Fu_2)_{B'}"] \arrow[d, "FA'(v_2)"'] & FA''(B') \arrow[d, "FA''(v_2)"] \\
FA(B'') \arrow[r, "(Fu_1)_{B''}"] & FA'(B'') \arrow[r, "(Fu_2)_{B''}"] & FA''(B'').
\end{tikzcd}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\Lambda(F)\left((u_2 \otimes v_2) \circ (u_1 \otimes v_1)\right) &= \Lambda(F)\left((-1)^{is} u_2 u_1 \otimes v_2 v_1\right) \\
&= \left(F((-1)^{is} u_2 u_1)\right)_{B''} FA(v_2 v_1) \\
&= (-1)^{is} (Fu_2)_{B''} (Fu_1)_{B''} FA(v_2) FA(v_1).
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\Lambda(F)(u_2 \otimes v_2)\Lambda(F)(u_1 \otimes v_1) &= (Fu_2)_{B''} FA'(v_2)(Fu_1)_{B'} FA(v_1) \\
&= (-1)^{is} (Fu_2)_{B''} (Fu_1)_{B''} FA(v_2) FA(v_1).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Lambda(F)\left((u_2 \otimes v_2) \circ (u_1 \otimes v_1)\right) = \Lambda(F)(u_2 \otimes v_2)\Lambda(F)(u_1 \otimes v_1)$. Además,

$$\begin{aligned}
\Lambda(F)(1_A \otimes 1_B) &= (F1_A)_B FA(1_B) \\
&= (1_{FA})_B 1_{FA(B)} \\
&= 1_{F(A)(B)}
\end{aligned}$$

Ahora veamos que $\Lambda(F)$ es un funtor graduado, es decir, veamos que

$$\Lambda(F)\left(\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}((A,B),(A',B'))\right) \subseteq \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}}(\Lambda(F)(A,B),\Lambda(F)(A',B')).$$

Basta verificarlo para elementos homogéneos, sea $u\otimes v \in \mathrm{Hom}^i_{\mathcal{A}}(A,A')\otimes_k \mathrm{Hom}^j_{\mathcal{B}}(B,B')$ tal que $i+j=n$. Por definición del funtor tenemos $\Lambda(F)(U\otimes v) := (Fu)_B FA(v)$, por ser F un funtor graduado, se sigue que $fu \in \mathrm{Hom}^i(FA,FA')$ y dado que FA es también un funtor graduado se tiene que $FA(v)\in \mathrm{Hom}^j(FA(B), FA(B'))$. Por lo tanto, $\Lambda(F)(u\otimes v) \in \mathrm{Hom}^{i+j=n}_{\mathcal{C}}(\Lambda(F)(A)(B),\Lambda(F)(A')(B'))$.

Verifiquemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \arrow[r, "\Lambda(F)"] \arrow[d, "d_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "d_{\mathcal{C}}"] \\
\mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \arrow[r, "\Lambda(F)"'] & \mathcal{C}.
\end{tikzcd}$$

Por lo que basta verificar que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,A')\otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B,B') \arrow[r, "\Lambda(F)"] \arrow[d, "d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,A')\otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B,B')}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\Lambda(F)(A)(B),\Lambda(F)(A')(B')\right) \arrow[d, "d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\Lambda(F)(A)(B),\Lambda(F)(A')(B')\right)}"'] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,A')\otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B,B') \arrow[r, "\Lambda(F)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\Lambda(F)(A)(B),\Lambda(F)(A')(B')\right)
\end{tikzcd}$$

Ahora por ser F, FA dg-funtores y $\mathcal{C}$ una dg-categoría, se tienen los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,A') \arrow[r, "F"] \arrow[d, "d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,A')}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FA,FA') \arrow[d, "d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FA,FA')}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,A') \arrow[r, "F"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FA,FA')
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B,B') \arrow[r, "FA"] \arrow[d, "d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B,B')}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA(B),FA(B')) \arrow[d, "d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA(B),FA(B'))}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(B,B') \arrow[r, "FA"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA(B),FA(B'))
\end{tikzcd} \quad .$$

Además la composición conmuta con el diferencial

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA(B'),FA'(B'))\otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA(B),FA(B')) \arrow[r, "-\circ-"] \arrow[d, "d_{-\otimes_k}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA(B),FA'(B')) \arrow[d, "d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA(B),FA'(B'))}"'] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA(B'),FA'(B'))\otimes_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA(B),FA(B')) \arrow[r, "-\circ-"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FA(B),FA'(B'))
\end{tikzcd}$$

Así tenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned}
&d_{\mathrm{Hom}(\Lambda(F)(A)(B),\Lambda(F)(A')(B'))}\Lambda(F)(u\otimes v)\\
&= d_{\mathrm{Hom}(FA(B),FA'(B'))}\left((Fu)_{B'}FA(v)\right)\\
&= d_{\mathrm{Hom}(FA(B),FA'(B'))}\left((Fu)_{B'}\right)FA(v)+(-1)^{|(Fu)_{B'}|}(Fu)_{B'}d_{\mathrm{Hom}(FA(B),FA'(B'))}FA(v)\\
&= \left(d_{\mathrm{Hom}(FA,FA')}(Fu)\right)_{B'}FA(v)+(-1)^{i}(Fu)_{B'}d_{\mathrm{Hom}(FA(B),FA'(B'))}FA(v)\\
&= \left(Fd_{\mathrm{Hom}(A,A')}(u)\right)_{B'}FA(v)+(-1)^{i}(Fu)_{B'}FAd_{\mathrm{Hom}(B,B')}(v).
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\Lambda(F)d_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}(u\otimes v) &= \Lambda(F)\left(d_{\mathrm{Hom}(A,A')}(u)\otimes v+(-1)^{|u|}u\otimes d_{\mathrm{Hom}(B,B')(v)}\right)\\
&= \Lambda(F)\left(d_{\mathrm{Hom}(A,A')}(u)\otimes v\right)+(-1)^{i}\Lambda(F)\left(u\otimes d_{\mathrm{Hom}(B,B')(v)}\right)\\
&= \left(Fd_{\mathrm{Hom}(A,A')}(u)\right)_{B'}FA(v)+(-1)^{i}(Fu)_{B'}FAd_{\mathrm{Hom}(B,B')}(v).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Lambda(F)$ conmuta con diferencial. De está manera Λ está bien definido en objetos. A continuación definimos Λ es morfismos. Sean $F,G:\mathcal{A}\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{B},\mathcal{C})$ dg-funtores y $\eta:F\Longrightarrow G$ una dg-transformación natural de grado n, Por lo que para todo morfismo $u\in\mathrm{Hom}^i_{\mathcal{A}}(A,A')$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo salvo signo

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "Fu"'] & GA \arrow[d, "Gu"] \\
FA' \arrow[r, "\eta_{A'}"'] & GA',
\end{tikzcd}$$

es decir, $Gu\eta_A=(-1)^{in}\eta_{A'}Fu$. Queremos definir una dg-transformación natural $\Lambda(\eta):\Lambda(F)\Longrightarrow\Lambda(G)$ tal que para todo $u\otimes v\in\mathrm{Hom}^i_{\mathcal{A}}(A,A')\otimes_k\mathrm{Hom}^j_{\mathcal{B}}(B,B')$

el siguiente diagra conmute salvo signo

$$\begin{tikzcd}
F(A)(B)=\Lambda(F)(A,B) \arrow[r, "\Lambda(\eta)"] \arrow[d, "\Lambda(F)(u\otimes v)"'] & G(A)(B)=\Lambda(G)(A,B) \arrow[d, "\Lambda(G)(u\otimes v)"] \\
F(A')(B')=\Lambda(F)(A',B') \arrow[r, "\Lambda(\eta)"'] & G(A')(B')=\Lambda(G)(A',B')
\end{tikzcd}$$

donde, $\Lambda(F)(u\otimes v):=(Fu)_{B'}FA(v)$ y $\Lambda(G)(u\otimes v):=(Gu)_{B'}GA(v)$. Dado que $FA,\ FA',\ GA,\ GA'$ son dg-funtores de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$, entonces $Fu,\ \eta_A,\ Gu,\ \eta_{A'}$ son dg-transformaciones naturales de grado i en $Fu,\ Gu$ y de grado n en $\eta_A,\ \eta_{A'}$. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo salvo signos

$$\begin{tikzcd}
FA(B) \arrow[rr, "(\eta_A)_B"] \arrow[dr, "FA(v)"] \arrow[dd, "(Fu)_B"'] & & GA(B) \arrow[dr, "GA(v)"] \arrow[dd, dotted, "(Gu)_{B'}"] & \\
& FA(B') \arrow[rr, "(\eta_A)_{B'}"'] \arrow[dd, "(Fu)_{B'}"] & & GA(B') \arrow[dd, "(Gu)_{B'}"] \\
FA(B) \arrow[rr, dotted, "(\eta_{A'})_B"] \arrow[dr, "FA'(v)"'] & & GA'(B) \arrow[dr, dotted, "GA'(v)"] & \\
& FA'(B') \arrow[rr, "(\eta_{A'})_{B'}"'] & & GA'(B').
\end{tikzcd}$$

Como $\Lambda(F)(u\otimes v):=(Fu)_{B'}FA(v)$ y $\Lambda(G)(u\otimes v):=(Gu)_{B'}GA(v)$, basta definir

$$\Lambda(\eta)_{(A,B)}:=(\eta_A)_B\,.$$

Y del diagrama anterior se sigue que $\Lambda(\eta)$ es una dg-tramsformación natural de grado n.

Verifiquemos que Λ es un funtor covariante. En efecto, sean $F,\ G,\ H\in \mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathrm{Hom}(\mathcal{B},\mathcal{C}))$ y dg-transformaciones naturales $\eta:F\Longrightarrow G$, $\epsilon:G\Longrightarrow H$ de grado n y grado m respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned}
[\Lambda(\epsilon\circ\eta)]_{(A,B)} &= ((\epsilon\epsilon\eta)_A)_B \\
&= (\epsilon_A\circ\eta_A)_B \\
&= (\epsilon_A)_B\circ(\eta_A)_B \\
&= \Lambda(\epsilon)\circ\Lambda(\eta).
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}[\Lambda(1_F)]_{(A,B)} &= ((1_F)_A)_B \\ &= (1_{FA})_B \\ &= 1_{FA(B)}.\end{aligned}$$

Ahora consideremos $F, G \in \mathrm{Hom}_{dg-Cat}(\mathcal{A}, \mathrm{Hom}_{dg-Cat}(\mathcal{B}, \mathcal{C}))$ y veamos que Λ es un funtor graduado, es decir,

$$\Lambda\left(\mathrm{Hom}^n(F,G)\right) \subseteq \mathrm{Hom}^n(\Lambda(F), \Lambda(G)).$$

Sea $\eta : F \Longrightarrow G$ una dg-tranformación natural de grado n. Entonces por definición del funtor $\Lambda(\eta) : \Lambda(F) \Longrightarrow \Lambda(G)$ es una dg-transformación natural de grado n cuyas componentes son $(\Lambda(\eta))_{(A,B)} = (\eta_A)_B$.

Veamos ahora que Λ conmuta con el diferencial, es decir, $d_{\mathrm{Hom}(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\mathcal{C})}\Lambda = \Lambda d_{\mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathrm{Hom}(\mathcal{B},\mathcal{C}))}$, para lo cual basta ver que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathrm{Hom}(\mathcal{B},\mathcal{C}))}(F,G) \arrow[r, "\Lambda"] \arrow[d, "d_{\mathrm{Hom}(F,G)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\mathcal{C})}(\Lambda(F),\Lambda(G)) \arrow[d, "d_{\mathrm{Hom}(\Lambda(F),\Lambda(G))}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathrm{Hom}(\mathcal{B},\mathcal{C}))}(F,G) \arrow[r, "\Lambda"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hom}(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\mathcal{C})}(\Lambda(F),\Lambda(G))
\end{tikzcd}$$

Sea $\eta \in \mathrm{Hom}(F,G)$. Entonces

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{Hom}(\Lambda(F),\Lambda(G))}\Lambda(\eta)(A,B) &:= d_{\mathrm{Hom}(\Lambda(F)(A)(B),\Lambda(G)(A)(B))}\left(\Lambda(\eta)(A,B)\right) \\ &= d_{\mathrm{Hom}(\Lambda(F)(A)(B),\Lambda(G)(A)(B))}\left((\eta_A)_B\right).\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\Lambda d_{\mathrm{Hom}(F,G)}(\eta)(A,B) &= \left(\left(d_{\mathrm{Hom}(F,G)}(\eta)\right)_A\right)_B \\ &= \left(d_{\mathrm{Hom}(FA,GA)}(\eta_A)\right)_B \\ &= d_{\mathrm{Hom}(FA(B),GA(B))}\left((\eta_A)_B\right)\end{aligned}$$

Así, Λ conmuta con el diferencial y por lo tanto, Λ es un dg-funtor covariante. Finalmente, veamos que las composiciones $\Lambda\Theta$ y $\Theta\Lambda$ son las identidades. En efecto, sean $F \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\mathcal{C})$ y $G \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A},\mathrm{Hom}(\mathcal{B},\mathcal{C}))$. Entonces

$$\begin{aligned}&\Lambda(\Theta(F))(A,B) = \Theta(F)(A)(B) = F(A,B) \\ &\Lambda(\Theta(\eta))_{(A,B)}) = ((\Theta(\eta))_A)_B = \eta_{(A,B)}\end{aligned}$$

y,

$$\Theta(\Lambda(G))(A)(B) = \Lambda(G)(A,B) = F(A)(B)$$
$$\Theta((\Lambda(\epsilon))_A)_B = \Lambda(\epsilon)_{(A.B)} = (\epsilon_A)_B$$

La naturalidad de la biyección Θ entre los funotres de los funtors $-\otimes \mathcal{B} : dg-Cat \longrightarrow dg-Cat$ y $\mathrm{Hom}(\mathcal{B},-) : dg-Cat \longrightarrow dg-Cat$ se sigue de los diagramas cúbicos dados en las construcciones de los funtores θ y Λ.

$\square$

Capítulo 3

Álgebras con suficientes idempotentes

Comenzamos el capítulo con algunas definiciones básicas.

3.1. Idempotentes.

Definición 3.1.1 *Sea R un anillo. Un elemento $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}$ es llamado*

- ***idempotente*** *si $a^2 = a$;*
- ***divisor de cero a izquierda*** *si $ab = 0$ para algún $b \in R - \{0\}$;*
- ***divisor de cero a derecha*** *si $ba = 0$ para algún $b \in R - \{0\}$;*
- ***nilpotente*** *si $a^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$;*
- ***regular*** *si existe $b \in R$ tal que $aba = a$;*
- ***central*** *si $ab - ba = 0$ para todo $b \in R$.*

Definición 3.1.2 *Sea R un anillo. Se dice que dos elementos idempotentes $e, f \in R$ son **ortogonales** si $ef = 0$ y $fe = 0$.*

Definición 3.1.3 *Un elemento idempotente $e \in R$ es llamado **primitivo** si no puede ser escrito como suma de dos idempotentes ortogonales no cero.*

Observación 3.1.4 *Sea R un anillo aociativo. Entonces:*

(a) Un idempotente $e \in R$ el cual no es unidad es un divisor de cero a derecha.

(b) Cada elemento idempotente es un divisor de cero.

(c) *Cada idempotente es regular.*

(d) *Si* $a \in R$ *es regular y si* $b \in R$ *es tal que* $aba = a$, *entonces* ab *y* ba *son idempotentes.*

(e) *Si cero es el único elemento nilpotente en* R, *entonces cada idempotente* $e \in R$ *es central.*

Definición 3.1.5 *Sea* R *un anillo asociativo (no necesariamente con uno). Se dice que* R *es un* ***anillo con unidades locales*** *si para cada conjunto finito* $\{a_1, a_2, ..., a_k\} \in R$ *existe un idempotente* $e \in R$ *tal que* $\{a_1, a_2, ..., a_k\} \subset eTe$. *Para tales anillos* $R^2 = R$.

Definición 3.1.6 *Un anillo* R ***tiene suficientes idempotentes****, si existe una familia* $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *de idempotentes ortogonales por pares* $e_\lambda \in R$ *tal que* $R = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda R = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} Re_\lambda$. *En tal caso,* $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *es llamada una* ***familia completa*** *de idempotentes en* R.

Lema 3.1.7 *Un anillo* R *con suficientes idempotentes es un anillo con unidades locales.*

Demostración. Sean $a_1, a_2, ..., a_k \in R$. Entonces existen subconjuntos finitos E, $F \subset \Lambda$ tales que $a_i \in \bigoplus_{\lambda\in E} Re_\lambda$ y $a_i \in \bigoplus_{\lambda\in F} e_\lambda R$, para $i = 1, ..., k$. Basta considerar el idempotente

$$e = \sum_{\lambda\in E\cup F} e_\lambda$$

y observar que $\{a_1, ..., a_k\} \subset R$ $\square$

Observación 3.1.8 *Si* R *tiene una unidad* 1_R, *entonces* $\{1_R\}$ *es una familia completa de idempotentes. Por otro lado,* $e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ *es una unidad en* R *si* $e_1, ..., e_n$ *forman una familia completa de idempotentes.*

Encontramos anillos con suficientes idempotentes principalmente como subanillos de un anillo de endomorfismo.

3.2. Álgebras diferencialmente graduadas con suficientes idempotentes.

En la siguiente sección consideraremos A como un anillo no necesariamente com unidad y k un campo arbitario, de caracteristica distinta de dos.

Definición 3.2.1 *Una* ***k-álgebra consuficientes idempotentes*** *es una k-álgebra A la cual admite una familia no cero de idempotentes ortogonales* $\{e_i\}_{i\in I}$ *tal que* $\bigoplus_{i\in I} e_i A = A = \bigoplus_{i\in I} Ae_i$. *Esta familia será llamada* ***familia distinguida de idempotentes ortogonales***.

Definición 3.2.2 *Una* ***k-álgebra graduada con suficientes idempotentes*** *es una k-álgebra con suficientes idempotentes junto con una graduacion $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A^n$ tal que A admite una familia distinguida de idempotentes ortogonales consistentes de elementos homogéneos de grado cero. Dicha álgebra será denotada por el par $(A, \{e_i\}_{i\in I})$.*

Observación 3.2.3 *Note que para una k-álgebra A como antes, tenemos que un A-módulo a derecha es unitario equivalente a decir que tenemos una descomposición interna $M = \bigoplus_{i\in I} Me_i$ como k-módulo.*

Definición 3.2.4 *Sea (A, d) una dg-álgebra. Se dice que (A, d) es una* ***dg-álgebra con sificientes idempotentes*** *si A posse una familia de idempotentes ortogonales $\{e_i\}_{i\in I}$ tal que*

(a) e_i es homogéneo de grado cero,

(b) $d(e_i) = 0$ para cada $i \in I$.

Denotaremos por el triple $(\mathbf{A}, \mathbf{d}, \{\mathbf{e_i}\}_{\mathbf{i\in I}})$ a la álgebra diferencialmente graduada con suficientes idempotentes.

Los siguientes resultados son ánalogos a los de la sección de anillos graduados, sin embargo, note que en este caso A no posee un elemento unitario.

Lema 3.2.5 *Sea $(A, d_A, \{e_i\}_{i\in I})$ una k-álgebra diferencialmente graduada con suficientes idempotentes y A^{op} la k-álgebra opuesta. Entonces $(A^{op}, d^{op}, \{e_i\}_{i\in I})$ es una k-álgebra diferencialmente graduada con la misma familia de idempotentes ortogonales.*

Demostración. Por la proposición 1.2.6 tenemos que (A^{op}, d^{op}) es una k-álgebra diferencialmente graduada con el mismo diferencial, es decir, $d^{op}(a) = d(a)$. Es importante señalar que el elemento 1_A en 1.2.6 no es relevante en la prueba. Además, $d^{op}(e_i) = d(e_i) = 0$ para todo e_i en la familia distinguida de idempotentes de A. $\square$

Lema 3.2.6 *Sean $(A, d_A, \{e_i\}_{i\in I})$ y $(A, d_B, \{e_j\}_{j\in J})$ k-álgebras diferencialmente graduadas con suficientes idempotentes y considere $A\otimes B$ en Mod(k). Entonces $A\otimes_k B$ es una k-álgebra diferencialmente graduada con suficientes idempotentes.*

Demostración. Por la proposición 1.4.4 se tiene que $A \otimes_k B$ tiene estructura de k-álgebra diferencialmente graduada donde

$$d(a \otimes b) = d_A(a) \otimes b + (-1)^{|a|} a \otimes d_B(b),$$

y el producto esta dado por

$$(a \otimes b)(u \otimes v) = (-1)^{|b||u|} au \otimes bv.$$

Veamos que la familia $\{e_i \otimes e_j\}_{(i,j)\in IxJ}$ es una familia completa de idempotentes ortogonales. En efecto,

- (a) $e_i \otimes e_j \in (A \otimes B)^0$. Esto es consecuencia de que $e_i \in A^0$ y $e_j \in B^0$ y $(A \otimes B)^0 = A^0 \otimes B^0$.
- (b) $(e_i \otimes e_j)(e'_i \otimes e'_j) = 0$. En efecto, por definición de producto
$$(e_i \otimes e_j)(e'_i \otimes e'_j) = (-1)^{|e_j||e'_i|}(e_i e'_i \otimes e_j e'_j) = 0 \otimes 0 = 0$$
- (c) $(e_i \otimes e_j)(e_i \otimes e_j) = e_i e_i \otimes e_j e_j = e_i \otimes e_j$, por lo que $e_i \otimes e_j$ es un idempotente.
- (d) $d_{A\otimes B}(e_i \otimes e_j) = 0$. En efecto, por la regla de Leibniz tenemos
$$d_{A\otimes B}(e_i \otimes e_j) = d_A(e_i) \otimes e_j + (-1)^{|e_i|} e_i \otimes d_B(e_j) = 0$$

Por último, tenemos que

$$A \otimes_k B = (\bigoplus_{i\in I} e_i A) \otimes_k (\bigoplus_{j\in J} e_j B) = \bigoplus_{(i,j)\in IxJ} (e_i \otimes e_j)(A \otimes_k B).$$

□

Definición 3.2.7 *Sea $(A, d_A, \{e_i\}_{i\in I})$ una dg-álgebra con suficientes idempotentes. Un **A-módulo diferencialmente graduado a derecha** es un par (M, d_M) consistente de un A-módulo graduado derecho junto con un morfismo de k-espacios vectoriales $d_M : M \longrightarrow M$ tal que*

- *(a)* $d_M \circ d_M = 0$
- *(b)* $d_M(xa) = d_M(x)a + (-1)^{|x|} x d(a)$.

Definición 3.2.8 *Sea $(A, d_A, \{e_i\}_{i\in I})$ una dg-álgebra con suficientes idempotentes. Un **A-módulo diferencialmente graduado a izquierda** es un par (M, d_M) consistente de un A-módulo graduado izquierdo junto con un morfismo de k- espacios vectoriales $d_M : M \longrightarrow M$ tal que*

- *(a)* $d_M \circ d_M = 0$
- *(b)* $d_M(ax) = d(a)x + (-1)^{|a|} a d_M(x)$.

Nuevamente, la demostración de los siguientes resultados es análoga a los de la sección de módulos graduados y diferenciales, sólo que en esta sección tomamos A un anillo que no tiene necesariamente elemento unitario.

Proposición 3.2.9 *Sea (M, d_M) un A-módulo diferencialmente graduado a derecha (respectivamente, A-módulo diferencialmente graduado a izquierta). Entonces $(M[1], d_{M[1]})$ es un A-módulo diferencialmente graduado a derecha (respectivamente, A-módulo diferencialmente graduado a izquierda).*

Teorema 3.2.10 *Sea $(A, d_A, \{e_i\}_{i\in I})$ una dg-álgebra con suficientes idempotentes. Entonces la categoría de A-modulos diferencialmente graduados a izquierda, $Dg - Mod(A)$ es una dg-categoría.*

Teorema 3.2.11 *Sea $(A, d_A, \{e_i\}_{i\in I})$ una dg-álgebra con suficientes idempotentes y considere la categoría $Dg - Mod(A)$. Entonces el funtor $?[1] : Dg - Mod(A) \longrightarrow Dg - Mod(A)$ dado por $?[1](M) := M[1]$ es un dg-funtor. Más aún, resulta ser una dg-equivalencia de dg-categorías.*

3.3. Dg-álgebras con suficientes idempotentes y Dg-categorías pequeñas

Proposición 3.3.1 *Sea $(A, d_A, \{e_i\}_{i\in I})$ una dg-álgebra con suficientes idempotentes. Entonces A, puede ser vista como una dg-categoría pequeña.*

Demostración. Veamos primero que dada $(A, d_A, \{e_i\}_{i\in I})$una dg-álgebra como es que le asignamos una dg-categoría pequeña $\mathcal{C}_A$. En efecto, el conjunto de objetos es $Obj(\mathcal{C}_A) = I$. Para $i, j \in A$, el conjunto de morfismos de grado n de i en j es $\mathcal{C}_A^n(i, j) := e_j A^n e_i$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y A^n denota la componente n-homogénea de A. La composición

$$\mathcal{C}_A(j, k) \times \mathcal{C}_A(i, j) = e_k A e_j \times e_j A e_i \longrightarrow \mathcal{C}_A(i, k) = e_k A e_i$$

está dada por la multiplicación, es decir,

$$(e_k a^r e_j) \circ (e_j a^s e_i) = e_k (a^r e_j a^s) e_j.$$

Por otro lado definimos el diferencial $d : \mathrm{Hom}(i, j) \longrightarrow \mathrm{Hom}(i, j)$ como el diferencial de la k-álgebra diferencialmente graduada.

Veamos que $\mathcal{C}_A$ es una dg-categoría pequeña. En efecto, sean $\alpha : i \longrightarrow j$, $\beta : j \longrightarrow k$, $\gamma : k \longrightarrow l$ y $i, j, k \in I$. Tenemos que $\alpha = e_j a e_i$, $\beta : e_k b e_j$ y $\gamma : e_l c e_k$. Entonces

$$\begin{aligned}\gamma(\beta\alpha) = e_l c e_k((e_k b e_j)(e_j a e_i)) &= e_l c e_k(e_k(b e_j a)e_i)\\ &= e_l(c e_k b e_j a)e_i\\ &= (e_l c e_k b e_j)e_j a e_i\\ &= ((e_l c e_k)(e_k b e_j))e_j a e_i\\ &= (\gamma\beta)\alpha.\end{aligned}$$

Además, para cada $i \in I$ existe $\alpha := e_i e_i e_i = e_i$ tal que para todo $\beta : i \longrightarrow j$, con $\beta = e_j b e_i$ se tiene que

$$\beta\alpha = (e_j b e_i)e_i = e_j b e_i = \beta$$

$$\alpha'\beta = e_j(e_j b e_i) = e_j b e_i = \beta.$$

En consecuencia, $\mathcal{C}_A$ es un categoría pequeña ya que los objetos de dicha categoría son elelemntos del conjunto I.

Note que por definición, para $i, j \in I$ tenemos que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(i,j) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} e_j A^n e_i,$$

por lo que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(i,j)$ tiene un descomposición en suma directa de subgrupos abelianos. Adicionalmente, como A es una k-álgebra graduada se sigue que $e_j A^n e_i$ tiene estructura de k-espacio vectorial, dada por

$$k \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(i,j) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(i,j)$$

$$(k, e_j a^n e_i) \longrightarrow e_j(k a^n)e_i.$$

Por lo tanto, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(i,j)$ es un k-módulo graduado a izquierda. Definimos ahora el diferencial de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(i,j)$ de la siguiente manera

$$d_{\mathrm{Hom}(i,j)}(e_j a^s e_i) := d_A(e_j a^s e_i).$$

Tenemos la siguiente observación:

$$d_{\mathrm{Hom}(i,j)}(e_j a^s e_i) = e_j d_A(a^s)e_i$$

para cada $a^s \in A^s$.
En efecto, sea $a \in A^s$. Entonces

$$\begin{aligned}d_{\mathrm{Hom}(i,j)}(e_j a e_i) &= d_A(e_j a e_i)\\ &= d_A(e_j)(a e_i) + (-1)^{|e_j|} e_j d_A(a e_i)\\ &= e_j d_A(a e_i)\\ &= e_j\left(d_A(a)e_i + (-1)^{|a|} a d_A(e_i)\right)\\ &= e_j d_A(A)e_i.\end{aligned}$$

Verifiquemos las condiones de k-módulo diferencialmente graduado.

(a) $d_{\mathrm{Hom}(i,j)}(a) \in \mathrm{Hom}^{n+1}(i,j)$. En efecto, sea $e_j a e_i \in \mathrm{Hom}^n(i,j)$, es decir, $a \in A^n$. Dado que d_A es un diferencial para A, tenemos que $d_A(a) \in A^{n+1}$, por lo que $d_{\mathrm{Hom}(i,j)}(e_j a e_i) \in \mathrm{Hom}^{n+1}(i,j)$.

(b) $d^2 = 0$. Sea $x = e_j a e_i \in \mathrm{Hom}^n(i,j)$. Entonces $d^2_{\mathrm{Hom}(i,j)}(e_j a e_i) = d_{\mathrm{Hom}(i,j)}(e_j d_A(a) e_i) = e_j d_A^2(a) e_i = 0$, y en consecuencia, $d^2_{\mathrm{Hom}(i,j)} = 0$.

(c) *Regla de Leibniz.* Sean $x = e_j a e_i$, $y = e_k b e_j$ elementos homogéneos. Aplicando la regla de Leibniz para el diferencial de A, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
d_{\mathrm{Hom}(i,j)}(xy) &= d_{\mathrm{Hom}(i,j)}((e_k b e_j)(e_j a e_i)) \\
&= d_{\mathrm{Hom}(i,j)}(e_k (b e_j a) e_i) \\
&= e_k d_A(b e_j a) e_i \\
&= e_k \left(d_A(b) e_j a + (-1)^{|b|} b d_A(e_j a) \right) e_i \\
&= e_k d_A(b) e_j a e_i + (-1)^{|b|} e_k b d_A(e_j a) e_i \\
&= e_k d_A(b) e_j a e_i + (-1)^{|b|} e_k b \left(d_A(e_j) a + (-1)^{|e_j|} e_j d_A(a) \right) e_i \\
&= e_k d_A(b) e_j a e_i + (-1)^{|b|} e_k b e_j d_A(a) e_i
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
d_{\mathrm{Hom}(i,j)}(x) y &= d_{\mathrm{Hom}(i,j)}(e_k b e_j)(e_j a e_i) \\
&= e_k d_A(b) e_j a e_i
\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
(-1)^{|x|} x d_{\mathrm{Hom}(i,j)}(y) &= (-1)^{|e_k b e_j|}(e_k b e_j) d_{\mathrm{Hom}(i,j)}(e_j a e_i) \\
&= (-1)^{|b|}(e_k b e_j) e_j d_A(a) e_i \\
&= (-1)^{|b|} e_k b e_j d_A(a) e_i
\end{aligned}$$

En consecuencia, $d_{\mathrm{Hom}(i,j)}(xy) = d_{\mathrm{Hom}(i,j)}(x)y + (-1)^{|x|} x d_{\mathrm{Hom}(i,j)}(y)$. Por lo tanto $d_{\mathrm{Hom}(i,j)}$ es un diferencial para $\mathrm{Hom}(i,j)$ y así, $\mathrm{Hom}(i,j)$ es un k-módulo diferencialmente graduado.

Ahora veamos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
e_k A e_j = \mathrm{Hom}(j,k) \times e_j A e_i = \mathrm{Hom}(i,j) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "d_{\mathrm{Hom}(j,k)} \times \mathrm{Hom}(i,j)"'] & e_k A e_i = \mathrm{Hom}(i,k) \arrow[d, "d_{\mathrm{Hom}(i,k)}"] \\
e_k A e_j = \mathrm{Hom}(j,k) \times e_j A e_i = \mathrm{Hom}(i,j) \arrow[r, "\mu"] & \mathrm{Hom}(i,k)
\end{tikzcd}$$

donde μ denota la composición.

En efecto, sean $x = e_k a e_j \in \mathrm{Hom}(j,k)$ y $y = e_j b e_i \in \mathrm{Hom}(i,j)$ elementos homogéneos. Entonces

$$\begin{aligned} d\mu(x,y) &= d(e_k(be_ja)e_i) \\ &= e_k d_A(be_ja)e_i \\ &= e_k \left(d_A(b)e_ja + (-1)^{|b|} b d_A(e_ja) \right) e_i \\ &= e_k d_A(b)e_jae_i + (-1)^{|b|} be_j d_A(a)e_i \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \mu d(x,y) &= \mu \left(d_{\mathrm{Hom}(j,k)}(x) \otimes y + (-1)^{|x|} x \otimes d_{\mathrm{Hom}(i,j)}(y) \right) \\ &= \mu \left(d_{\mathrm{Hom}(j,k)}(e_kae_j) \otimes e_jbe_i + (-1)^{|e_kae_j|} e_kae_j \otimes d_{\mathrm{Hom}(i,j)}(e_jbe_i) \right) \\ &= e_k d_A(a)e_jbe_i + (-1)^{|e_kae_j|} e_kae_j d_A(b)e_i \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{C}_A$ es una dg-categoría pequeña.

Ahora veamos la construcción inversa, es decir, dada una dg-categoría pequeña $\mathcal{C}$ le asignamos una dg-álgebra con suficientes idempotentes. En efecto, sea $\mathcal{C}$ una dg-categoría pequeña. El conjunto subyacente de la dg-álgebra será

$$A_{\mathcal{C}} := \bigoplus_{(A,B)\in\mathcal{C}^2} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B).$$

Dado que $\mathcal{C}$ es una dg-categoría pequeña tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \in Dg-Mod(k)$ para cada $A, B \in \mathcal{C}$. Además

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) = \bigoplus_{(A,B)\in\mathcal{C}^2} \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}}(A,B),$$

donde $\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}}(A,B)$ tiene estructura de k-espacio vectorial para cada $n \in \mathbb{Z}$ y para todo $(A,B) \in \mathcal{C}^2$. Con lo cual definimos las componentes de $A_{\mathcal{C}}$ como

$$A^n_{\mathcal{C}} := \bigoplus_{(A,B)\in\mathcal{C}^2} \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}}(A,B).$$

Veamos que $A_{\mathcal{C}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A^n_{\mathcal{C}}$. En efecto, tenemos los siguientes isomorfismos como k-espacios vectoriales

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{C}} := \bigoplus_{(A,B)\in\mathcal{C}^2} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) &= \bigoplus_{(A,B)\in\mathcal{C}^2} \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}}(A,B) \right) \\ &= \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \left(\bigoplus_{(A,B)\in\mathcal{C}^2} \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}}(A,B) \right) \end{aligned}$$

Veamos que $A_{\mathcal{C}}$ tines estructura de anillo. En efecto, la suma de $A_{\mathcal{C}}$ esta dada a través de la estructura de grupo abeliano de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ y el producto esta dado por la composicón de morfismos. De manera más explícita, para $f,g \in A_{\mathcal{C}} = \bigoplus_{(A,B)\in\mathcal{C}^2} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ tenemos

$$f+g = \left(\sum_{(A,B)\in\mathcal{C}^2} f_{AB}\right) + \left(\sum_{(A,B)\in\mathcal{C}^2} g_{AB}\right) = \sum_{(A,B)\in\mathcal{C}^2} f_{AB} + g_{AB}.$$

Ahora, sean $f_{AX} \in \mathrm{Hom}^s_{\mathcal{C}}(A,X)$ y $g_{YC} \in \mathrm{Hom}^r_{\mathcal{C}}(Y,C)$, definimos

$$g_{YC} \star f_{AX} = \begin{cases} 0_{AC} & si \quad X \neq Y \\ \\ g_{YC} f_{AX} & si \quad X = Y. \end{cases}$$

Extendemos por k-linealidad la fórmula anterior, para $f_{AB} = \sum_{s\in\mathbb{Z}} f^s_{AB}$ y $g_{CD} = \sum_{r\in\mathbb{Z}} g^r_{CD}$, entonces

$$g_{CD} \star f_{AB} = \sum_{(r,s)\in\mathbb{Z}^2} g^r_{CD} f^s_{AB}.$$

Finalmente, dado que $A_{\mathcal{C}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \left(\bigoplus_{(A,B)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\right)$ la fórmula general se establece de la siguiente manera

$$g \star f = \left(\sum_{(C,D)\in\mathcal{C}^2} \sum_{r\in\mathbb{Z}} g^r_{CD}\right) \star \left(\sum_{(A,B)\in\mathcal{C}^2} \sum_{s\in\mathbb{Z}} f^s_{AB}\right) = \sum_{(A,B)\in\mathcal{C}^2} \sum_{(r,s)\in\mathbb{Z}^2} g^r_{CD} f^s_{AB}.$$

Con estas opraciones $A_{\mathcal{C}}$ es un anillo asociativo. Note que la estructura de k-espcio vectorial que tiene $A_{\mathcal{C}}$ es la siguinete

$$k \cdot h = k \cdot \left(\sum_{(A,B)\in\mathcal{C}^2} \sum_{s\in\mathbb{Z}} h^s_{AB}\right) = \sum_{(A,B)\in\mathcal{C}^2} \sum_{s\in\mathbb{Z}} k \cdot h^s_{AB}$$

donde la última acción está bien definida ya que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ tiene estructura de k-espacio vectorial. En consecuencia, $A_{\mathcal{C}}$ es una k-álgebra graduada.

Dado que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \in Dg-Mod(k)$ para cada pareja de objetos $(A,B) \in \mathcal{C}^2$ existe $d_{\mathrm{Hom}(A,B)} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ diferencial de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$. La familia $\{d_{\mathrm{Hom}(A,B)} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\}_{(A,B)\in\mathcal{C}^2}$ induce un único morfismo de grupos abelianos

$$d := \bigoplus_{(A,B)\in\mathcal{C}^2} d_{\mathrm{Hom}(A,B)} : \bigoplus_{(A,B)\in\mathcal{C}^2} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow \bigoplus_{(A,B)\in\mathcal{C}^2} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$$

tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{(A,B)\in\mathcal{C}^2} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[r, "d"] & \bigoplus_{(A,B)\in\mathcal{C}^2} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[d, "\pi_{(A,B)}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[u, "i_{(A,B)}"] \arrow[r, "d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B),
\end{tikzcd}$$

de donde obtenemos que

$$d\left(\sum_{(A,B)} f_{AB}\right) := \sum_{(A,B)} d_{\mathrm{Hom}(A,B)}(f_{AB}).$$

Veamos que d es un diferencial. En efecto,

(a) *Diferencial de grado +1*. Sea $f_{AB} \in A^r_{\mathcal{C}} = \bigoplus_{(A,B)} \mathrm{Hom}^r_{\mathcal{C}}(A,B)$. Entonces

$$d(f_{AB}) = d\left(\sum_{(A,B)} f^r_{AB}\right) = \sum_{(A,B)} d_{\mathrm{Hom}(A,B)}(f^r_{AB})$$

dado que $d_{\mathrm{Hom}(A,B)}(f^r_{AB}) \in \mathrm{Hom}^{r+1}_{\mathcal{C}}(A,B)$. Por lo que $d(f_{AB}) \in A^{r+1}_{\mathcal{C}} = \bigoplus_{(A,B)} \mathrm{Hom}^{r+1}_{\mathcal{C}}(A,B)$

(b) $d^2 = 0$. Sea $f_{AB} \in A^r_{\mathcal{C}}$. Luego, tenemos

$$\begin{aligned}
d^2(f_{AB}) = d^2\left(\sum_{(A,B)} f^r_{AB}\right) &= d\left(\sum_{(A,B)} d_{\mathrm{Hom}(A,B)}(f^r_{AB})\right) \\
&= \sum_{(A,B)} d_{\mathrm{Hom}(A,B)}(d_{\mathrm{Hom}(A,B)}(f^r_{AB})) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(c) *Regla de Leibniz.* Sean $f_{AB} \in A^r_{\mathcal{C}}$y $g_{CD} \in A^s_{\mathcal{C}}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
d(g_{CD}f_{AB}) &= d\left(\left(\sum_{(C,D)} g^s_{CD}\right)\left(\sum_{(A,B)} f^r_{AB}\right)\right)\\
&= d\left(\sum_{(A,B),(C,D)} g^s_{(C,D)}f^r_{(A,B)}\right)\\
&= \sum_{(A,B),(C,D)} d_{\mathrm{Hom}(A,D)}(g^s_{(C,D)}f^r_{(A,B)})\\
&= \sum_{(A,B),(C,D)} d_{\mathrm{Hom}(C,D)}(g^s_{(C,D)})f^r_{(A,B)} + (-1)^{|g^s_{(C,D)}|}g^s_{(C,D)}d_{\mathrm{Hom}(A,B)}(f^r_{(A,B)})\\
&= \sum_{(A,B),(C,D)} d_{\mathrm{Hom}(C,D)}(g^s_{(C,D)})f^r_{(A,B)}\\
&\qquad + (-1)^{|g^s_{(C,D)}|}\sum_{(A,B),(C,D)} g^s_{(C,D)}d_{\mathrm{Hom}(A,B)}(f^r_{(A,B)})\\
&= \left(\sum_{(C,D)} d_{\mathrm{Hom}(C,D)}(g^s_{(C,D)})\right)\left(\sum_{(A,B)} f^r_{(A,B)}\right)\\
&\qquad + (-1)^{|g^s_{(C,D)}|}\left(\sum_{(C,D)} g^s_{(C,D)}\right)\left(\sum_{(A,B)} d_{\mathrm{Hom}(A,B)}(f^r_{(A,B)})\right)\\
&= d(g_{CD})f_{AB} + (-1)^{|g_{CD}|}g_{CD}d(f_{AB})
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $(A_{\mathcal{C}}, d)$ es una k-álgebra diferencialmente graduada. Consideremos ahora

$$e_A := 1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A).$$

Veamos que $\{e_A\}_{A\in\mathcal{C}}$ es una familia de idempotentes ortogonales tales que $A_{\mathcal{C}} = \bigoplus_{A\in\mathcal{C}} e_A A_{\mathcal{C}} = \bigoplus_{A\in\mathcal{C}} A_{\mathcal{C}} e_A$. En efecto,

$$e_A \star e_A = 1_A \star 1_A = 1_A = e_A$$

$$e_B \star e_A = 1_B \star 1_A = 0$$

Por definición

$$e_A A_{\mathcal{C}} = \{e_A \star f | f \in A_{\mathcal{C}}\},$$

por lo que si $f = \sum_{(B,C)} \sum_{r\in\mathbb{Z}} f^r_{BC}$, de la definción del producto tenemos

$$e_A \star f = \sum_{(B,C)} \sum_{r\in\mathbb{Z}} e_A \star f^r_{BC},$$

donde

$$e_A f_{BC}^r = \begin{cases} 0_{A_{\mathcal{C}}} & si \quad C \neq A \\ \\ 1_C f_{BC}^r & si \quad C = A. \end{cases}$$

Note que el $0_{\mathcal{C}}$ de la k-álgebra construida es de la forma $0_{\mathcal{C}} = \sum_{(A,B)\in\mathcal{C}^2} 0_{(A,B)}$, donde $0_{(A,B)}$ es el neutro aditivo del grupo abeliano $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$. En consecuencia,

$$e_A \star f = \sum_{(A,B)} \sum_{r\in\mathbb{Z}} f_{BA}^r.$$

De esta manera, al mutiplicar por el idempotente e_A a f recuperamos los morfismos que son parte de la suma que tienen dominio A.
Afirmamos que

$$A_{\mathcal{C}} = \bigoplus_{A\in\mathcal{C}} e_A A_{\mathcal{C}}.$$

En efecto, sea $f \in A_{\mathcal{C}}$, es decir, $f = \sum_{(X,Y)} f_{XY}$, de la observación anterior tenemos que

$$f = \sum_{(X,Y)} f_{XY} = \sum_{A\in\mathcal{C}} e_A \left(\sum_{X\in\mathcal{C}} f_{XA} \right).$$

Además, $(e_X A_{\mathcal{C}}) \bigcap \left(\sum_{X\neq Y} e_Y A_{\mathcal{C}} \right) = 0$. En efecto, supongamos que existe $f \in (e_X A_{\mathcal{C}}) \bigcap \left(\sum_{X\neq Y} e_Y A_{\mathcal{C}} \right)$, por lo que $f = \sum_{A\in\mathcal{C}} f_{AX}$, es decir, escribimos como suma de morfismos que terminan en X. Por tro lado, $f = \sum_{(A,Y),Y\neq X} f_{AY}$ como sumas de morfismos que no terminan en X. Luego,

$$0_{A_{\mathcal{C}}} = f - f = \sum_{(X,Y)} f_{XY} - \sum_{(A,Y),Y\neq X} f_{AY} = \sum_{(X,Y)\in\mathcal{C}^2} f_{XY}$$

Dado que $f \in A_{\mathcal{C}} = \bigoplus_{(A,B)\in\mathcal{C}^2} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$, de la unicidad de la suma directa tenemos que $f_{AX} = 0$ para cada $A \in \mathcal{C}$ y $\sum_{(Y\neq X} f_{AY} = 0$. Por lo tanto, $f = 0$ y la suma es directa. Así, $(A_{\mathcal{C}}, d, \{e_A := 1_A\}_{A\in\mathcal{C}})$ es una k-álgebra diferencialmente graduada con suficientes idempotentes. $\square$

Definición 3.3.2 *Sean $(A, d_A, \{e_i\}_{i\in I})$ y $(B, d_B, \{f_j\}_{j\in J})$ k-álgebras diferencialmente graduadas con suficientes idempotentes. Decimos que $h : A \longrightarrow B$ es un* ***morfismo de k-álgebras diferencialmente graduadas con suficientes idempotentes*** *si*

(a) h es un morfismo de k-álgebras diferencialmente graduadas,

(b) $h(e_i) = f_j$, para cada $i \in I$ y $j \in J$.

Observación 3.3.3 *Sean $(A, d_A, \{e_i\}_{i\in I})$ una k- álgebra diferencialmente graduada con suficientes idempotentes y $f : A \longrightarrow B$ un morfismo de (dg,k)-álgebras. Entonces*

(a) $\{f(e_i)\}_{i\in I}$ es una fmilia de idempotente ortogonales (posiblemente con repetición)

(b) $\left(Im(f), d_B|_{Im(f)}, \{f(e_i)\}_{i\in I}\right)$ es una k-álgebra diferencialmente graduada con suficientes idempotentes.

(c) Si f es suprayectiva $(B, d_B, \{f(e_i)\}_{i\in I})$ es una k-álgebra diferencialmente graduada con suficientes idempotentes.

Definición 3.3.4 *Sea k un campo. Definimos la* ***categoría de k-álgebras diferencialmente graduadas con suficientes idempotentes****, denotada por $(dg, k) - Alg_I$, como sigue*

(a) $Obj((dg, k) - Alg_I) := (A, d_A, \{e_i^A\}_{i\in I_A})$, donde A es una k-álgebra diferencialmente graduada con suficientes idempotentes.

(b) $\mathrm{Hom}_{(dg,k)-Alg_I}(A, B) = \{f : A \longrightarrow B|$ f es un morfismo de k-álgebras diferencialmente graduadas con suficientes idempotentes$\}$

(c) La composición en $(dg, k) - Alg_I$ es la misma que en la categoría de k-álgebras diferencialmente graduadas.

Teorema 3.3.5 *Sea k un campo.Entonces existe una equivalencia de categorías $F : (dg, k) - Alg_I \longrightarrow dg - Cat_k$.*

Demostración. La prueba la hacemos en tres pasos

(a) Construimos un un df-funtor $F : (dg, k) - Alg_I \longrightarrow dg - Cat_k$.

(b) Definimos un dg-funtor $G : dg - Cat_k \longrightarrow (dg, k) - Alg_I$.

(c) Verificamos que F y G son casi-inversos.

- *Construcción de $F : (dg, k) - Alg_I \longrightarrow dg - Cat_k$.*

  Definimos $F(A, d_A, \{e_i^A\}_{i\in I_A}) := \mathcal{C}_A$, donde, $\mathcal{C}_A$ es la dg-categoría pequeña construida en la proposición 3.3.1.Ahora, sea $h : A \longrightarrow B$ un morfismo en $(dg, k) - Alg_I$, para definir $F(h) : \mathcal{C}_A \longrightarrow \mathcal{C}_B$ primero notemos que si h es un morfismo de dg-álgebras con suficientes idempotentes, ésta induce una función $h : I_A \longrightarrow I_B$ entre la familia de idempotentes $\{e_i^A\}_{i\in I_A}$ y $\{e_j^B\}_{j\in I_B}$ que también denotamos por h, tal que $h(i) = j$ si $h(e_i^A) = e_j^B$. Definimos el funtor $F(h) : \mathcal{C}_A \longrightarrow \mathcal{C}_B$ como sigue, para $i \in \mathcal{C}_A$

$$F(h)(i) := j$$

donde $h(e_i^A) = e_j^B$ y si $x = e_j^A a^r e_i^A \in \mathrm{Hom}^r_{\mathcal{C}_A}(i,j)$ tenemos que

$$F(h)(x) := F(h)(e_j^A a^r e_i^A) = h(e_j^A)h(a^r)h(e_i^A) = e^B_{h(j)}h(a^r)e^B_{h(i)}.$$

Afirmación: $F(h) : \mathcal{C}_A \longrightarrow \mathcal{C}_B$ es un dg-funtor. En efecto, sean $x = e_j^A a^r e_i^A$ y $y = e_k^A a^t e_j^A$. Entonces

$$\begin{aligned}
F(h)(yx) &= F(h)\left((e_k^A a^t e_j^A)(e_j^A a^r e_i^A)\right) \\
&= F(h)\left(e_k^A (a^t e_j^A a^r) e_i^A\right) \\
&= h(e_k^A)h(a^t)h(e_j^A)h(a^r)h(e_i^A) \\
&= e^B_{h(k)}h(a^t)e^B_{h(j)}h(a^r)e^B_{h(i)} \\
&= F(h)(y)\cdot F(h)(x).
\end{aligned}$$

Para $x = e_i^A$, tenemos

$$F(h)(1_i) = F(h)(e_i^A) = h(e_i^A) = e^B_{h(i)} = 1_{h(i)}.$$

Por lo que $F(h)$ es funtor covariante. Ahora veamos que $F(h)$ es un funtor graduado, es decir,

$$F(h)\left(\mathrm{Hom}^r_{\mathcal{C}_A}(i,j)\right) \subseteq \mathrm{Hom}^r_{\mathcal{C}_B}(F(h)(i), F(h)(j))$$

Para esto, sea $x = e_j^A a^r e_i^A$. Luego, $F(h)(x) = e^B_{h(j)}h(a^r)e^B_{h(i)}$, como h es un morfismo de dg-álgebras $h(a^r) \in A^r$ y $e_u^B \in B^0$ para cada u, concluimos

$$F(h)(x) \in \mathrm{Hom}^r_{\mathcal{C}_B}(F(h)(i), F(h)(j))$$

Finalmente, verifiquemos que $F(h)$ conmuta con el diferencial,es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(i,j) \arrow[r, "F(h)"] \arrow[d, "d_{\mathrm{Hom}(i,j)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_B}(F(h)(i), F(h)(j)) \arrow[d, "d_{\mathrm{Hom}(h(i),h(j))}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(i,j) \arrow[r, "F(h)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_B}(F(h)(i), F(h)(j)).
\end{tikzcd}$$

Sea $x = e_k^A a^r e_i^A$. Entonces

$$\begin{aligned}
d_{\mathrm{Hom}(h(i),h(j))}F(h)(x) &= d_{\mathrm{Hom}(h(i),h(j))}\left(e^B_{h(j)}h(a^r)e^B_{h(i)}\right) \\
&= e^B_{h(j)}d_B h(a^r)e^B_{h(i)} \\
&= e^B_{h(j)}h d_A(a^r)e^B_{h(i)} \\
&= h\left(e_j^A d_A(a^r)e_i^A\right) \\
&= h d_A\left(e_j^A(a^r)e_i^A\right) \\
&= F(h)d_A(x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $F(h)$ es un dg-funtor y $F : (dg,k)-Alg_I \longrightarrow dg-Cat_k$ está bien definido en morfismos.
Afirmamos que con la asignación anterior F es un funtor covariante. En efecto, sean $h : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ morfismos en $(dg,k)-Alg_I$ y $x = e_j^A a^r e_i^A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(i,j)$. Entonces

$$\begin{aligned} F(gh)(x) &= F(gh)(e_j^A a^r e_i^A) \\ &= e_{gh(j)}^C gh(a^r) e_{hg(i)}^C \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} F(g)F(h)(x) &= F(g)\left(F(h)(e_j^A a^r e_i^A)\right) \\ &= F(g)(e_{h(j)}^B h(a^r) e_{h(i)}^B) \\ &= e_{gh(j)}^C gh(a^r) e_{gh(i)}^C. \end{aligned}$$

Así, $F(gh) = F(g)F(h)$. Además

$$\begin{aligned} F(1_A)(x) &= F(1_A)(e_j^A a^r e_i^A) \\ &= e_{1_A(j)}^A 1_A(a^r) e_{1_A(i)}^A \\ &= e_j^A a^r e_i^A \\ &= x \end{aligned}$$

- *Construcción de* $G : dg-Cat_k \longrightarrow (dg,k)-Alg_I$.

Definimos $G(\mathcal{C}) := A_{\mathcal{C}}$,definida en la proposicón 3.3.1 donde

$$A_{\mathcal{C}} := \bigoplus_{(A,B)\in\mathcal{C}^2} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \bigoplus_{(A,B)\in\mathcal{C}^2} \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}}(A,B)$$

en objetos y para un dg-funtor $H : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ le asignamos un morfismo de dg-álgebras con suficientes idempotentes $G(H) : A_{\mathcal{C}} \longrightarrow A_{\mathcal{D}}$ de la siguiente manera, para $f^r_{AB} \in A^r_{\mathcal{C}} = \bigoplus_{(A,B)\in\mathcal{C}^2} \mathrm{Hom}^r_{\mathcal{C}}(A,B)$ homogéneo se define como $G(H)(f^r_{AB}) := H(f^r_{AB})$. Luego, esxtendemos por k-linealidad para $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{(A,B\in\mathcal{C}^2)} f^r_{AB} \in A_{\mathcal{C}}$, es decir,

$$G(H)(f) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{(A,B\in\mathcal{C}^2)} H(f^r_{AB}).$$

Veamos que $G(H)$ es un morfismo de (dg,k)-álgebras, para lo cual basta checarlo en elementos homogéneos. En efecto, es claro que G(H) es un morfismo de grupos abelianos, ya que H es un dg-funtor y en particular, es un funtor aditivo. Sean f_{AX}, g_{YC} morfismos en $A_{\mathcal{C}}$, entonces

$$\begin{aligned} G(H)(g_{YC}f_{AX}) &= H(g_{YC}f_{AX}) \\ &= H(g_{YC})H(f_{AX}) \\ &= G(H)(g_{YC})G(H)(f_{AX}). \end{aligned}$$

Chequemos ahora que $G(H)$ es graduado. En efecto, sea $f = \sum_{(A,B)\in\mathcal{C}^2} f^r_{AB} \in \mathrm{Hom}^r_{\mathcal{C}}(A, B)$ elemento homogéneo, dado que H es un functor graduado, se sigue que

$$G(H)(\sum_{(A,B)\in\mathcal{C}^2} f^r_{AB}) = \sum_{(A,B)\in\mathcal{C}^2} H(f^r_{AB}) \in \mathrm{Hom}^r_{\mathcal{C}}(HA, HB).$$

Notemos que también $G(H)$ conmuta con el diferencial, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A_{\mathcal{C}} \arrow[r, "G(H)"] \arrow[d, "d_{A_{\mathcal{C}}}"'] & A_{\mathcal{D}} \arrow[d, "d_{A_{\mathcal{D}}}"] \\ A_{\mathcal{C}} \arrow[r, "G(H)"'] & A_{\mathcal{D}} \end{tikzcd} .$$

En efecto, sea $f_{AB} \in \mathrm{Hom}^r_{\mathcal{C}}$. Entonces

$$\begin{aligned} d_{A_{\mathcal{C}}}G(H)(f^r_{AB}) = d_{A_{\mathcal{C}}}H(f_{AB}) &= d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(HA,HB)}\left(H(f_{AB})\right) \\ &= Hd_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)}(f_{AB}) \\ &= Hd_{A_{\mathcal{C}}}(f_{AB}) \\ &= G(H)\left(d_{A_{\mathcal{C}}}(f_{AB})\right). \end{aligned}$$

Además, dado $e^{A_{\mathcal{C}}}_A = 1_A \in A_{\mathcal{C}}$ idempotente se tiene que $G(H)(e^{A_{\mathcal{C}}}_A) = H(e^{A_{\mathcal{C}}}_A) = H(1_A) = 1_{HA} = e^{A_{\mathcal{D}}}_{HA}$. De esta manera la asiganción de G está bien definida. Ahora verifiquemos que la asignación anterior es funtorial. Sean $U : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $W : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ dg-funtores. Entonces $G(WU) : A_{\mathcal{C}} \longrightarrow A_{\mathcal{E}}$ y para $f_{AB} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ un elemento homogéneo tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} G(WU)(f_{AB}) &= WU(f_{AB}) \\ &= G(W)(U(f_{AB})) \\ &= G(W)G(U)(f_{AB}). \end{aligned}$$

Por lo que $G(WU) = G(W)G(U)$. Además, para $1_{\mathcal{C}} : A_{\mathcal{C}} \longrightarrow A_{\mathcal{C}}$, tenemos $G(1_{\mathcal{C}})(f_{AB}) = 1_{\mathcal{C}}(f_{AB}) = f_{AB}$ y en consecuencia, $G(1_{\mathcal{C}}) = 1_{G(\mathcal{C})} = 1_{A_{\mathcal{C}}}$. Por lo tanto, G es un funtor covariante.

- *F y G son casi-inversos.* Sea $(A, d_A, \{e_i\}_{I_A})$ un objeto en la categoría $(dg, k) - Alg_I$, entonces $F(A, d_A, \{e_i\}_{I_A}) = \mathcal{C}_A$. Recordemos que $\mathcal{C}_A$ es la dg-categoría pequeña cuyos objetos son el conjunto sobre el cual se indexa la familia de idempotentes ortogonales, es decir, $Obj(\mathcal{C}_A) = I_A$ y para $i, j \in I_A$ se definió $\mathrm{Hom}^r_{\mathcal{C}_A}(i,j) = e^A_j A^r e^A_i$. Luego, al aplicar el funtor G obtenemos lo siguiente $G(\mathcal{C}_A) = A_{\mathcal{C}_A}$, la cual es una k-álgebra diferencialmente graduadua con suficientes idempotentes, donde

$$A_{\mathcal{C}_A} = \bigoplus_{(A,B)\in\mathcal{C}_A^2} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(A,B) = \bigoplus_{(i,j)\in I_A^2} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A}(i,j).$$

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned}
A_{\mathcal{C}_A} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A^n_{\mathcal{C}_A} &= \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \bigoplus_{(A,B)\in\mathcal{C}_A^2} \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}_A}(A,B) \\
&= \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \bigoplus_{(i,j)\in I_A^2} \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}_A}(i,j) \\
&= \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \bigoplus_{(i,j)\in I_A^2} e^A_j A^n e^A_i \\
&\cong \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \bigoplus_{i\in I_A} \bigoplus_{j\in I_A} e^A_j A^n e^A_i \\
&\cong \bigoplus_{i\in I_A} \bigoplus_{j\in I_A} e^A_j \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A^n \right) e^A_i \\
&\cong \bigoplus_{i\in I_A} \left(\bigoplus_{j\in I_A} e^A_j A \right) e^A_i \\
&= \bigoplus_{i\in I_A} A e^A_i \\
&= A.
\end{aligned}$$

Así, $A_{\mathcal{C}_A} \cong A$. Ahora para un morfismo $h : A \longrightarrow B$ en $(dg, k) - Alg_I$ tenemos que $F(h) : \mathcal{C}_A \longrightarrow \mathcal{C}_B$ es un dg-funtor. Ahora, sea f^r_{AB} un elemento homogéneo, dado que existe $u_A : A_{\mathcal{C}_A} \longrightarrow A$ isomorfismo existe un único $a^r \in A$ tal que $u(a^r) = f^r_{AB}$. Entonces

$$\begin{aligned}
GF(h)(f^r_{AB}) \cong G(F(h))(u_A(a^r)) &= F(h)(u_A(a^r)) \\
&= h(u_A(a^r)) \\
&\cong h(f^r_{AB}),
\end{aligned}$$

para cada f^r_{AB} en $A_{\mathcal{C}_A}$ y por tanto, $GF(h) \cong h = 1_{(dg,k)-Alg_I}(h)$, es decir el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} GF(A) \arrow[r, "u_A", "\cong"'] \arrow[d, "GF(h)"'] & A \arrow[d, "1_{(dg,k)-Alg_I}(h)"] \\ GF(B) \arrow[r, "\cong", "u_B"'] & B \end{tikzcd}$$

para cada $h \in (dg, k) - Alg_I$.

- *G y F casi-inversos.* Sea $\mathcal{C}$ una dg-categoría entonces $FG(\mathcal{C}) = F(A_{\mathcal{C}}) = \mathcal{C}_{(A_{\mathcal{C}})}$, donde

$$A_{\mathcal{C}} = \bigoplus_{(A,B)\in\mathcal{C}^2} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

cuya familia de idempotentes esta dada por $\{e_A := 1_A\}_{A\in\mathcal{C}}$ y en consecuencia, $\mathcal{C}_{(A_{\mathcal{C}})} = \mathcal{C}$. Además, para el conjunto de morfismos se tiene

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}^r_{\mathcal{C}_{(A_{\mathcal{C}})}}(A, B) &= e_A^{A_{\mathcal{C}}} \,(A_{\mathcal{C}})^r\, e_B^{A_{\mathcal{C}}} \\ &= 1_A \,(A_{\mathcal{C}})^r\, 1_B \\ &= 1_A \left(\bigoplus_{(X,Y)\in\mathcal{C}^2} \mathrm{Hom}^r_{\mathcal{C}}(X, Y) \right) 1_B \\ &= \mathrm{Hom}^r_{\mathcal{C}}(A, B). \end{aligned}$$

También,

$$d_{A_{\mathcal{C}}}(e_A^{A_{\mathcal{C}}}) = d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,A)}(1_A) = 0$$

donde la última igualdad se sigue del hecho de que $\mathcal{C}$ es una dg-categoría, por lo que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ tiene estructura de módulo diferencialmente graduado y por lo tanto, el elemento unitario se anula bajo el diferencial.

Ahora, sea $u : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un dg-funtor, por lo que $G(u) : A_{\mathcal{C}} \longrightarrow A_{\mathcal{D}}$ es un morfismo en $(dg, k) - Alg_I$ y por tanto, $FG(u) : \mathcal{C}_{(A_{\mathcal{C}})} \longrightarrow \mathcal{D}_{(A_{\mathcal{D}})}$ es un dg-funtor. Sea $f^r_{AB} : A \longrightarrow B$ un morfismo homogéneo en $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{(A_{\mathcal{C}})}$ entonces

$$\begin{aligned} FG(u)(f^r_{AB}) &= F(G(u))(f^r_{AB}) \\ &= G(u)(f^r_{AB}) \\ &= u(f^r_{AB}), \end{aligned}$$

y en consecuencia, $FG(u) = u$. Así, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} FG(\mathcal{C}) \arrow[r, "1_{\mathcal{C}}"] \arrow[d, "FG(u)"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "u"] \\ FG(\mathcal{D}) \arrow[r, "1_{\mathcal{D}}"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd} .$$

Por lo tanto, las categorías $(dg, k) - Alg_I$ y $dg - Cat_k$ son equivalentes.
$\square$

3.4. $\mathcal{C}$-módulos diferencialmente graduados

Comenzamos el siguiente sección fijando algunas notaciones y algunos recordatorios de categorías que trabajaremos.

Definición 3.4.1 *Sea k un campo. Definimos la categoría $GR - Mod(k)$ como sigue, $Obj(GR - Mod(k)) = Obj(Gr - Mod(k))$ y para $M, N \in GR - Mod(k)$ definimos*

$$\mathrm{Hom}_{GR-Mod(k)}(M, N) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}^n_{Mod(k)}(M, N)$$

Lema 3.4.2 *Sea k un campo. La categoría $GR - Mod(k)$ es una categoría graduadua.*

Demostración. La prueba es similar a la de 2.5.4. $\square$

Notación 3.4.3 *Sea A una k-álgebra diferencialmente gruadua con suficientes idempotentes, denotaremos por $\mathcal{D}(\mathcal{C}_A)$ a la categoría de gr-funtores $Fun(\mathcal{C}_A^{op}, GR-Mod(k))$*

El siguiente resultado es importante ya establece que es lo mismo trabajra con dg-funtores que con morfismos de dg-módulos.

Teorema 3.4.4 *Sean $(A, d_A, \{e_i\}_I)$ una k-álgebra diferencialmente graduada con suficientes idempotentes, donde $\{e_i\}_{i\in I}$ es una familia fija de idempotentes ortogonales, homogéneos de grado cero y anulados por d y consideremos la categoría $\mathcal{C}_A$ definida en la proposición 3.3.1. Entonces existe una dg-equivalencia de categorías $R : Dg - Mod(A) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{C}_A)$.*

Demostración. Definimos la asignación $R : Dg - Mod(A) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{C}_A)$ de la siguiente manera , para $M \in Dg - Mod(A)$ definimos un dg-funtor $\overline{M} := R(M) : \mathcal{C}_A^{op} \longrightarrow GR - Mod - (k)$ de la siguiente manera, $R(M)(i) := M(e_i)$ para cada $i \in Obj(\mathcal{C}_A^{op})$.
Veamos que la asignación de R está bien definida ene objetos, es decir, $Me_i \in Dg - Mod(k)$. En efecto, Me_i tiene estructura de grupo abeliano mediante la siguiente operación $x+y = me_i+m'e_i = (m+m')e_i$. También se tiene estructura de k-espacio vectorial vía $k(me_i) := (km)e_i$ utilizando la estructura de A como k-álgebra. Dado que $M \in Dg - Mod(k)$ se tiene que $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M^n$ con M^n un k-espcio vectorial, luego se tiene

$$Me_i = \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M^n\right) e_i = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M^n e_i.$$

Definimos el diferencial de Me_i como la restricción del diferencial de M, es decir, $d_{Me_i} := d_M|_{Me_i}$. Note que $d_{Me_i}(me_i) = d_M(m)e_i + (-1)^{|m|} m d_A(e_i) = d_M(m)e_i$. Además, por ser d_M diferencial de M se tiene lo siguiente

- Sea $x = me_i \in Me_i$, entonces $d_{Me_i} d_{Me_i}(x) = d_{Me_i} d_{Me_i}(me_i) = d_M^2(m)e_i = 0$.

- Para $me_i \in M^n e_i$ elemento homogéneo, se tiene que $d_{Me_i}(me_i) = d_M(m)e_i \in M^{n+1}e_i$ ya que $d_M(m) \in M^{n+1}$ por ser d_M diferencial.

- Sean $x = me_i$, $y = m'e_i$ homogéneos, entonces $d_{Me_i}(xy) = d_{Me_i}((me_i)(m'e_i)) = d_M\,(me_i)(m'e_i) + (-1)^{|me_i|}(me_i)d_M(m'e_i) = d_{Me_i}(x)y + (-1)^{|x|} x d_{Me_i}(y)$.

Por lo tanto $Me_i \in Dg - Mod(k)$. Definimos ahora la asignación $R : g - Mod(k) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{C}_A)$ en morfismos, sea $a^{op} \in \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}_A^{op}}(i,j)$, por lo que $a^{op} \in \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}_A}(j,i) = e_i A^n e_j$, dado que $Me_i = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M^n e_i$ para definir un morfismo $R(M)(a^{op}) : Me_i \longrightarrow Me_j$ basta definirlo en las parte homogéneas, de esta manera definimos $[R(M)(a^{op})]_n : M^n e_i \longrightarrow M^n e_j$ como

$$[R(M)(a^{op})]_n(x) = (-1)^{|x||a|} xa,$$

para $x = me_i$ y $a = e_i \overline{a} e_j$, es fácil ver que la asignación anterios es un morfismo k-lineal. Luego, por la propiedad universal del coproducto existe un único morfismo k-lineal $[R(M)(a^{op})] : Me_i \longrightarrow Me_j$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M^n e_i \arrow[r, "R(M)(a^{op})"] & \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M^n e_j \\
M^n e_i \arrow[u, "\mu_{i,n}"] \arrow[r, "{[R(M)(a^{op})]_n}"'] & M^n e_j \arrow[u, "\mu_{j,n}"']
\end{tikzcd}.$$

Veamos ahora que $R : g - Mod(k) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{C}_A)$ es un dg-funtor.

1. *R es funtor.* Sean $a^{op} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A^{op}}(i,j)$, $b^{op}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A^{op}}(j,k)$ y $x \in Me_i$, entonces

$$\begin{aligned}
\overline{M}(b^{op}a^{op}) &= \overline{M}((-1)^{|a||b|}(ab)^{op})(x) \\
&= (-1)^{|a||b|}(-1)^{|ab||x|}x(ab) \\
&= (-1)^{|a||b|+|a||x|+|b||x|}(xa)b \\
&= (-1)^{|a||x|}(-1)^{|b|(|a|+|x|)}(xa)b \\
&= (-1)^{|a||x|}\overline{M}(b^{op})(xa) \\
&= \overline{M}(b^{op})\left((-1)^{|a||x|}xa\right) \\
&= \overline{M}(b^{op})\left(\overline{M}(a^{op})(x)\right) \\
&= \left(\overline{M}(b^{op})\overline{M}(a^{op})\right)(x).
\end{aligned}$$

Además para $e_i = 1_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A^{op}}(i,i)$ y $x = me_i \in Me_i$, se tiene $\overline{M}(1_i^{op})(x) = (-1)^{|e_i||x|}xe_i = x$ y en consecuencia, $\overline{M}(1_i^{op}) = 1_{\overline{M}(i)} = 1_{Me_i}$.

2. *R es un funtor graduado.* Para esto veamos que la siguiente contención se satisface

$$\overline{M}\left(\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}_A^{op}}(i,j)\right) \subseteq \mathrm{Hom}_{Dg-Mod(k)}(\overline{M}(i), \overline{M}(i)).$$

En efecto, sean $a^{op} \in \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}_A^{op}}(i,j) = \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}_A}(j,i) = e_iA^ne_j$ y $x \in Me_i$, por lo que $a^{op} = e_iae_j$ y $x = me_i$, donde $a \in A^n$ y $m \in M^r$ son elementos homogéneos. Entonces

$$\begin{aligned}
\overline{M}(a^{op})(x) =&(-1)^{|a||x|}xa \\
=&(-1)^{|a||x|}me_i(e_iae_j) \\
=&(-1)^{|a||x|}me_iae_j
\end{aligned}$$

Note que $|me_iae_j| = |ma| = n+r$, por lo que $M(a^{op}) \in \mathrm{Hom}_{Dg-Mod(k)}(\overline{M}(i), \overline{M}(i))$ y $|M(a^{op})| = |a^{op}|$.

3. *R conmuta con el diferencial.* Para esto veamos que el siguiente diagra es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}_A^{op}}(i,j) \arrow[r, "\overline{M}"] \arrow[d, "d_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A^{op}}(i,j)}"'] & \mathrm{Hom}_{Dg-Mod(k)}(\overline{M}(i), \overline{M}(j)) \arrow[d, "d_{\mathrm{Hom}_{Dg-Mod(k)}(\overline{M}(i),\overline{M}(j))}"] \\
\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{C}_A^{op}}(i,j) \arrow[r, "\overline{M}"] & \mathrm{Hom}_{Dg-Mod(k)}(\overline{M}(i), \overline{M}(j)),
\end{tikzcd}$$

para cada $i, j \in Obj(\mathcal{C}_A)$. En efecto, sean $a^{op} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_A^{op}}(i,j)$ y $x \in Me_i$ entonces

$$
\begin{aligned}
d_{\mathrm{Hom}(\overline{M}(i),\overline{M}(j))}\overline{M}(a^{op})(x) &= \left(d_{Me_j}\overline{M}(a^{op}) - (-1)^{|\overline{M}(a^{op})|}\overline{M}(a^{op})d_{Me_j}\right)(x) \\
&= d_{Me_j}\overline{M}(a^{op})(x) - (-1)^{|\overline{M}(a^{op})|}\overline{M}(a^{op})d_{Me_j}(x) \\
&= d_{Me_j}((-1)^{|a||x|}xa) - (-1)^{|\overline{M}(a^{op})|}\overline{M}(a^{op})\left(d_{Me_j}(x)\right) \\
&= d_{Me_j}((-1)^{|a||x|}xa) - (-1)^{|\overline{M}(a^{op})|}(-1)^{|d_{Me_i}(x)||a|}d_{Me_j}(x)a \\
&= d_{Me_j}((-1)^{|a||x|}xa) - (-1)^{|a^{op}|}(-1)^{(|x|+1)|a|}d_{Me_j}(x)a \\
&= (-1)^{|a||x|}\left(d_M(xa) - d_M(x)a\right) \\
&= (-1)^{|a||x|}\left(d_M(x)a + (-1)^{|x|}xd(a) - d_M(x)a\right) \\
&= (-1)^{|a||x|}(-1)^{|x|}xd(a) \\
&= (-1)^{(|a|+1)|x|}xd(a) \\
&= (-1)^{|d(a)||x|}xd(a) \\
&= \overline{M}(d(a)^{op})(x).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $R(M) : \mathcal{C}_A \longrightarrow Dg-Mod(k)$ es un funtor diferencialmente graduado y de esta manera la asignación R está bien definida en objetos. Se prueba que el dg-funtor R es fiel, pleno y denso, para una prueba completa ver ([13], Teorema 3.1, pág.11).

□

Bibliografía

[1] F. W. Anderson, K. R. Fuller. Rings and categories of Modules. Springer-Verlag (1974).

[2] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald. Introduction to conmutative algebra. Addison-Wesley, Massachusetts. (1969).

[3] Cobá Magaña, Alejandro . Categoría de Frobenius como categoría triangulada. Tesis de Maestría, UNAM, Facultad de Ciencias (2009).

[4] Bourbaki, Nicolás. Álgebra conmutativa. Springer-Verlag (1943).

[5] F. Kasch. Modules an Rings. New York, EUA. (1982).

[6] Keller, Bernhard. Deriving DG categories, Ann. Sci. École Norm. Sup 27 (1994), 63-102.

[7] Mark M. Kleiner and Andrei V. Rojter, Representations of differential graded categories, in Proceed. 1st International Conference on Representations of Algebras, Ottawa 1974, Springer Lect. Notes Math. 488 (1975), 316-339.

[8] Kashiwara Masaki and Pierre Shapira, Categories and sheaves, Grundl. Math. Wiss 332, Springer-Verlag (2006)

[9] B. Mitchell. Theory of categories. Columbia University, New York (1964).

[10] Natalia S. Golovaschuk, Serge Ovsienko and Andrei V. Rojter. On the schurian DGC, Matrix problems, IM AN USSR, Kiev (1977), 162-165.

[11] C. Natasescu. Mhetods of graded rings. Springer-Verlag (2004).

[12] N. Popescu. Abelian categories with applications to rings and modules. LMS Monographs No.3 Academic Press, London and New York (1973).

[13] Saorín, Manuel. Dg algebras with enough idempotents, their dg modules and their derived categories. Preprint available at https://arxiv.org/abs/1612.04719. Mayo 2017.

[14] J. Rotman, An Introduction to Homological Algebra. *Academic Press, Inc*, Illinois, (1979).

[15] V. Santiago. Elementos de álgebra homológica en categorías abelianas y el teorema de inmersión en la categoría de grupos abelianos. Tesis de Licenciatura, UNAM, Facultad de Ciencias (2007).