UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

REPRESENTACIÓN ESPINORIAL DE SUPERFICIES EN ESPACIOS HOMOGÉNEOS LORENTZIANOS 3-DIMENSIONALES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTORA EN CIENCIAS

PRESENTA:
BERENICE ZAVALA JIMÉNEZ

DIRECTOR DE TESIS:
PIERRE MICHEL BAYARD
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
ADOLFO SÁNCHEZ VALENZUELA
CIMAT

FEDERICO SÁNCHEZ BRINGAS
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, JUNIO 2020.

Representación espinorial de superficies en espacios homogéneos lorentzianos 3-dimensionales

Berenice Zavala Jiménez

Índice

Introducción

En este trabajo buscamos una caracterización espinorial de las inmersiones de superficies pseudo-riemannianas en espacios homogéneos lorentzianos simplemente conexos de dimensión 3, que complete la caracterización que ya existe en el caso riemanniano (ver [13, 26, 31]) y en algunos espacios lorentzianos.

De manera precisa, queremos encontrar la solución a la pregunta: dados una superficie pseudo-riemanniana M, un espacio homogéneo lorentziano completo y simplemente conexo $\overline{M}$ de dimensión 3, cuándo es posible caracterizar por medio de un campo de espinores que sea solución de una ecuación tipo Killing la inmersión isométrica de M en $\overline{M}$.

En los trabajos que mencionamos al inicio, Friedrich en [13], Morel en [26] y Roth en [31], se completó dicha tarea en el caso de los espacios homogéneos riemannianos simplemente conexos de dimensión 3. En general, los resultados se obtuvieron vía un teorema fundamental, por ejemplo, en [13] y en [26] los autores encontraron que existía un campo de espinores solución de una ecuación de Killing y que dicha ecuación englobaba las condiciones de integrabilidad para las ecuaciones de Gauss y Codazzi, de manera que el teorema de inmersión era consecuencia del teorema fundamental de superficies para espacios de forma. Por otro lado, el resultado en [31] se obtiene a través del teorema de inmersión en espacios homogéneos riemannianos que Daniel probó en [11]. En [4] generalizamos los resultados anteriores, salvo la inmersión en el producto $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$; obtuvimos las inmersiones de variedades de cualquier dimensión y codimensión en grupos de Lie riemannianos, encontrando una representación explícita de la inmersión lo que hace innecesario pasar por un teorema fundamental y más bien se obtiene uno como consecuencia.

En cuanto a los espacios lorentzianos tenemos los siguientes resultados: en [16] caracterizan las inmersiones de superficies en $\mathbb{R}^{1,2}$, en [17] las inmersiones en los espacios de forma pseudo-riemannianos y para los productos lorentzianos del tipo $M^2(k) \times \mathbb{R}_-$ tenemos [30]. En tales artículos también se utiliza que existe un teorema fundamental para caracterizar las inmersiones y que la ecuación de tipo Killing que se obtiene en cada caso implica dicho teorema.

En cambio, nosotros encontramos en los distintos espacios homogéneos una fórmula explícita para la inmersión que depende de un campo de espinores.

Para conseguir nuestro objetivo hemos usado el Teorema 1.1.1 de [9] que nos permite obtener una clasificación de los espacios homogéneos lorentzianos completos simplemente conexos de dimensión 3. Dicho teorema afirma que el espacio es simétrico o un grupo con métrica de Lorentz invariante por la izquierda. Los trabajos en [29], [10], [7] y [6] nos ayudan a describir los grupos y los espacios simétricos de manera precisa. Siguiendo estos trabajos, tenemos que los espacios homogéneos lorentzianos completos simplemente conexos de dimensión 3 serían o un grupo de Lie cuya descripción se obtiene a través de su álgebra de Lie, o un espacio simétrico en la lista de los productos lorentzianos $\mathbb{R}_- \times \mathbb{S}^2$, $\mathbb{R}_- \times \mathbb{H}^2$, $\mathbb{R} \times \widetilde{\mathbb{S}_1^2}$, $\mathbb{R} \times \widetilde{\mathbb{H}_1^2}$, el espacio de Sitter $\mathbb{S}_1^3$, el cubriente universal del espacio anti de Sitter $\widetilde{\mathbb{H}_1^3}$ y, finalmente, el espacio de Cahen-Wallach M_c.

El escrito se encuentra organizado como sigue: en el primer capítulo damos una vista panóramica sobre los espacios homogéneos y su clasificación, incluyendo la descripción que ya se adelantaba líneas atrás.

El segundo capítulo es un breve resumen sobre los conceptos elementales de geometría espinorial que nos ayudarán a construir un haz de espinores sobre las variedades e introducir la fórmula de Gauss (2.6) que es fundamental para escribir los distintos teoremas de inmersión.

Ya en el tercer capítulo adaptamos los conceptos y definiciones de la geometría espín a un grupo de Lie lorentziano con el fin de probar el Teorema 3.3.1 que caracteriza las inmersiones en grupos de Lie. Este resultado se obtiene a través de la integral de Darboux de una 1-forma valuada en el algebra de Lie del grupo y ella depende de un campo de espinores solución de una ecuación tipo Killing, para más detalles al respecto ver la Sección 3.3. Las técnicas y los resultados que usamos en tal capítulo son similares a los que utilizamos en [4]. Además de obtener dicho teorema, encontramos como consecuencia los Teoremas 3.4.8 y 3.4.14 que son versiones intrínsecas del mismo.

Siguiendo el orden de la clasificación para espacios homogéneos, obtenemos los siguientes teoremas de inmersión, los Teoremas 4.0.1, 4.0.2 y 4.0.3 en el capítulo 4 para caracterizar inmersiones en productos lorentzianos con estructuras de grupos de Lie, el Teorema 5.0.2 para inmersiones en $\mathbb{S}_1^3$, el Teorema 6.0.1 que caracteriza las inmersiones en $\mathbb{H}_1^3$ visto como cuádrica. El Teorema 7.0.2 nos da la representación en el espacio $\mathbb{R}_- \times \mathbb{S}^2$ y adicionalmente, el Teorema 8.0.1 del capítulo 8 caracteriza las representaciones de los espacios homogéneos lorentzianos $\mathbb{L}(\kappa, \tau)$ que se describen en el mismo capítulo y como una aplicación de dicho teorema obtenemos en 8.0.4 un resultado para representar las inmersiones en el espacio anti de Sitter visto como grupo.

Para terminar, en el noveno capítulo incluimos algunas aplicaciones de los resultados que se obtuvieron a lo largo de la tesis. En la Sección 9.1 probamos la equivalencia entre ciertas ecuaciones de Killing y sus ecuaciones de Dirac asociadas. En tanto que en la Sección 9.2 damos una prueba espinorial de la correspondencia entre superficies mínimas en $\mathbb{R}^3$ y máximas en $\mathbb{R}^{1,2}$, obteniendo una prueba distinta, pero que implica la que obtienen en [19] para el mismo resultado. Por otro lado, en la Sección 9.3 encontramos una correspondencia entre superficies CMC en $\mathbb{R}^{1,2}$ y ciertas superficies CMC en $\mathbb{H}^3_1$.

Capítulo 1

Espacios homogéneos lorentzianos 3-dimensionales

1.1 Definición y clasificación

Un espacio homogéneo pseudo-riemanniano es una variedad con una métrica pseudo-riemanniana (M, g) tal que para cada $p, q \in M$ existe una isometría $S : M \longrightarrow M$ que manda p en q, en otras palabras, (M, g) es un espacio homogéneo si hay un grupo de isometrías que actúa de manera transitiva en M.

A continuación damos una breve descripción de cuáles son los espacios homogéneos lorentzianos 3-dimensionales según los artículos [9, 29, 10, 7]. Partimos del siguiente resultado.

Teorema 1.1.1. *(G. Calvaruso [9]) Sea (M, g) una variedad 3-dimensional lorentziana homogénea completa, conexa y simplemente conexa. Si (M, g) no es simétrica, entonces M es un grupo de Lie 3-dimensional con g una métrica invariante por la izquierda.*

Consideramos que el teorema que acabamos de mencionar se complementa con los resultados obtenidos por Rahmani en [29] y Cordero en [10] quienes clasifican los grupos de Lie unimodulares y no unimodulares, respectivamente. En tanto que Cahen y Wallach caracterizan los espacios simétricos lorentzianos en [7] (ver también [6]).

1.2 Grupos de Lie

Recordemos que un grupo de Lie G es una variedad diferenciable con una estructura de grupo donde las operaciones multiplicación $\cdot$ y obtener el inverso satisfacen que la aplicación $G \times G \longrightarrow G$ dada por $(h,k) \longmapsto h \cdot k^{-1}$ es diferenciable.

Además, decimos que el grupo de Lie tiene una métrica invariante por la izquierda si tiene una métrica pseudo-riemanniana $\langle , \rangle$ tal que si $e \in G$ es el elemento neutro del grupo, entonces para toda $v, w \in T_eG$ y $h \in G$ se cumple que

$$\langle v, w \rangle_e = \langle dL_{h_e}(v), dL_{h_e}(w) \rangle_h,$$

donde $L_h : G \longrightarrow G$ es el difeomorfismo que manda a $k \in G$ en $h \cdot k \in G$ y se conoce como la multiplicación por la izquierda por h.

Observación 1.2.1. *Si G es un grupo con una métrica invariante por la izquierda, entonces dados $h, k \in G$ la multiplicación $L_{hk^{-1}} : G \longrightarrow G$ es por definición una isometría que manda k en h, por lo tanto todo grupo de Lie con una métrica invariante es un espacio homogéneo.*

Sean $(G, \langle , \rangle)$ un grupo de Lie 3-dimensional lorentziano y $\mathfrak{g} = T_eG$ el álgebra de Lie del grupo. Una base ortonormal de $\mathfrak{g}$ es una base (e_1, e_2, e_3) que satisface que $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ para $i \neq j$ y $\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = 1 = -\langle e_3, e_3 \rangle$.

Definición 1.2.2. *Para $X, Y \in \mathfrak{g}$ definimos el producto vectorial de X con Y como el único elemento $X \times Y \in \mathfrak{g}$ que está determinado por*

$$\langle X \times Y, Z \rangle = det_{(e_1,e_2,e_3)} \left(X \ Y \ Z \right),$$

para todo $Z \in \mathfrak{g}$. Donde det es el determinante respecto de la base (e_1, e_2, e_3).

Observación 1.2.3. *Si $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ es una base ortonormal de $\mathfrak{g}$, entonces $\beta_1 \times \beta_2 = -\beta_3$, $\beta_2 \times \beta_3 = \beta_1$ y finalmente $\beta_3 \times \beta_1 = \beta_2$.*

Con el fin de introducir la noción de grupo unimodular vamos a recordar a continuación la definición de representación adjunta.

Sean G un grupo de Lie, $e \in G$ el elemento neutro y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Si $\gamma_h : G \longrightarrow G$ es la conjugación $k \longmapsto hkh^{-1}$, entonces las siguientes aplicaciones son las representaciones adjuntas de G y $\mathfrak{g}$, respectivamente.

$$Ad : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & Aut(\mathfrak{g}) \\ g & \longmapsto & d(\gamma_g)_e \end{array}, \qquad ad : \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \longrightarrow & End(\mathfrak{g}) \\ X & \longmapsto & dAd_e(X). \end{array}$$

Definición 1.2.4. *Un grupo de Lie G es unimodular si la traza $tr(ad(v)) = 0$ para toda $v \in \mathfrak{g}$ y no unimodular en caso contrario.*

Sabemos que si $[\ ,\ ]$ es el corchete de Lie de $\mathfrak{g}$, entonces existe una relación entre él y la representación ad de $\mathfrak{g}$, de hecho, para toda $v, w \in \mathfrak{g}$ es cierto que $ad(v)(w) = [v, w]$.

En el siguiente lema, G es un grupo de Lie 3-dimensional con una métrica de Lorentz invariante por la izquierda. El enunciado de dicho lema así como su demostración se encuentran en [29].

Lema 1.2.5. *La estructura de álgebra de Lie de G está ligada al producto vectorial por la fórmula*

$$L(u \times v) = [u, v],$$

para todo $u, v \in \mathfrak{g}$, donde L es un endomorfismo de $\mathfrak{g}$ definido de manera única. El grupo de Lie G es unimodular si y sólo si la transformación L es autoadjunta.

El lema anterior nos da un resultado que también es verdadero para grupos de Lie riemannianos 3-dimensionales. En tal caso, dado que la métrica es definida positiva al ser L autoadjunto es diagonalizable y se obtiene que las propiedades algebráicas y métricas del grupo quedan determinadas por los signos de los valores propios de dicho operador, ver [24] y [23].

En el caso de un grupo lorentziano unimodular tenemos que L aunque es autoadjunto no siempre es diagonalizable, en cambio, tiene cuatro posibles formas normales conocidas como formas tipo Segre (ver [27, Pág. 262]). De acuerdo al Lema 1.2.5 dichas formas también determinan el álgebra de Lie de G y su estructura de grupo con métrica invariante por la izquierda, a lo largo de la tesis denotamos por $\mathfrak{g}_i$, $1 \leq i \leq 4$ a cada una de estas álgebras de Lie.

Ahora, exponemos a manera de resumen las posibilidades para las álgebras de Lie y los respectivos grupos unimodulares lorentzianos asociados que encuentra Rahmani en [29].

En lo que sigue $E(2)$ es el grupo de isometrías afines de $\mathbb{R}^2$, $E(1,1)$ es el grupo de isometrías afines del plano de Minkowski que preservan orientación y H_3 denota al grupo de Heisenberg 3-dimensional.

El corchete de Lie de cada álgebra está escrito en términos de una base ortonormal (e_1, e_2, e_3) de $\mathfrak{g}_i$ y $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$:

$$\mathfrak{g}_1 : \begin{array}{rcl} [e_1, e_2] & = & \alpha e_1 - \beta e_3 \\ [e_1, e_3] & = & -\alpha e_1 - \beta e_2 \\ [e_2, e_3] & = & \beta e_1 + \alpha e_2 + \alpha e_3, \quad \alpha \neq 0, \end{array}$$

G es $O(1,2)$ o $SL(2,\mathbb{R})$ si $\beta \neq 0$ y $E(1,1)$ si $\beta = 0$.

$$\mathfrak{g}_2 : \begin{array}{rcl} [e_1, e_2] & = & -\gamma e_2 - \beta e_3 \\ [e_1, e_3] & = & -\beta e_2 + \gamma e_3, \quad \gamma \neq 0, \\ [e_2, e_3] & = & \alpha e_1 \end{array}$$

G es $O(1,2)$ o $SL(2,\mathbb{R})$ si $\alpha \neq 0$ y $E(1,1)$ si $\alpha = 0$.

$$\mathfrak{g}_3 : \begin{array}{rcl} [e_1, e_2] & = & -\gamma e_3 \\ [e_1, e_3] & = & -\beta e_2 \\ [e_2, e_3] & = & \alpha e_1, \end{array}$$

la siguiente tabla agrupa las distintas alternativas de grupos lorentzianos con álgebras de Lie de tipo $\mathfrak{g}_3$.

G	α	β	γ
$O(1,2)$ o $SL(2,\mathbb{R})$	$+$	$+$	$+$
$O(1,2)$ o $SL(2,\mathbb{R})$	$+$	$-$	$-$
$SO(3)$ o $SU(2)$	$+$	$+$	$-$
$E(2)$	$+$	$+$	0
$E(2)$	$+$	0	$-$
$E(1,1)$	$+$	$-$	0
$E(1,1)$	$+$	0	$+$
H_3	$+$	0	0
H_3	0	0	$-$
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	0	0	0

En tanto que para

$$\mathfrak{g}_4 : \begin{array}{rcl} [e_1, e_2] & = & -e_2 + (2\varepsilon - \beta) e_3, \quad \varepsilon = \pm 1 \\ [e_1, e_3] & = & -\beta e_2 + e_3 \\ [e_2, e_3] & = & \alpha e_1, \end{array}$$

la tabla que sigue contiene las diferentes opciones de grupos lorentzianos con álgebras de Lie de dicho tipo.

G	α	β
$O(1,2)$ o $SL(2,\mathbb{R})$	$\neq 0$	$\neq \varepsilon$
$E(1,1)$	0	$\neq \varepsilon$
$E(1,1)$	< 0	ε
$E(2)$	> 0	ε
H_3	0	ε

Por su parte, en [10] Cordero encuentra las siguientes álgebras de Lie para los grupos no unimodulares:

$$\mathfrak{g}_5: \begin{array}{rcl} [e_1, e_2] & = & 0 \\ [e_1, e_3] & = & \alpha e_1 + \beta e_2 \\ [e_2, e_3] & = & \gamma e_1 + \delta e_2, \quad \alpha + \delta \neq 0, \ \alpha\gamma + \beta\delta = 0, \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_6: \begin{array}{rcl} [e_1, e_2] & = & \alpha e_2 + \beta e_3 \\ [e_1, e_3] & = & \gamma e_2 + \delta e_3, \quad \alpha + \delta \neq 0, \ \alpha\gamma - \beta\delta = 0 \\ [e_2, e_3] & = & 0, \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_7: \begin{array}{rcl} [e_1, e_2] & = & -\alpha e_1 - \beta e_2 - \beta e_3 \\ [e_1, e_3] & = & -\alpha e_1 + \beta e_2 + \beta e_3 \\ [e_2, e_3] & = & \gamma e_1 + \delta e_2 + \delta e_3, \qquad \alpha + \delta \neq 0 \quad \alpha\gamma = 0. \end{array}$$

1.3 Espacios simétricos

La definición con la que iniciamos esta sección es al parecer la más usada para espacios simétricos. Pero gracias a que las variedades que nos interesan son simplemente conexas podemos utilizar la noción equivalente que nos aporta la Proposición 1.3.2

Definición 1.3.1. *Una variedad pseudo-riemanniana homogénea* (M, g) *es simétrica si existe* $p \in M$ *y* $S_p : M \to M$ *isometría tal que* $S_p(p) = p$ *y* $d(S_p)_p = -Id_{T_pM}$.

El siguiente resultado nos otorga una definición de espacio simétrico equivalente a la anterior en caso de que la variedad sea simplemente conexa, podemos consultar la prueba en [27].

Proposición 1.3.2. *Una variedad pseudo-riemanniana simplemente conexa completa* (M, g) *es simétrica si y sólo si* $\nabla R = 0$*, para* R *el tensor de curvatura de la variedad.*

Corolario 1.3.3. *Toda variedad pseudo-riemanniana simplemente conexa de curvatura seccional constante es simétrica.*

Los espacios de Sitter $\mathbb{S}_1^n(k)$ y anti de Sitter $\mathbb{H}_1^n(k)$ están dados por las cuádricas

$$\mathbb{S}_1^n(k) = \{x \in \mathbb{R}^{1,n} : \langle x, x\rangle_{1,n} = -x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = k^2\}$$

y

$$\mathbb{H}_1^n(k) = \{x \in \mathbb{R}^{2,n-1} : \langle x, x\rangle_{2,n-1} = -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = -k^2\}.$$

Las curvaturas seccionales de dichas hipersuperficies son $\frac{1}{k^2}$ y $-\frac{1}{k^2}$, respectivamente y de acuerdo al Corolario 1.3.3 el espacio $\mathbb{S}_1^3(k)$ y el cubriente universal de $\mathbb{H}_1^n(k)$ son espacios simétricos.

Lo que sigue es una vista panorámica del trabajo de Cahen, Parker y Wallach sobre la clasificación de espacios simétricos lorentzianos que se encuentra en [6] y [7].

Una variedad pseudo-riemanniana conexa (M, g) es *indescomponible*, si para $x \in M$ no existe un subespacio no degenerado de T_xM invariante bajo la acción del grupo de holonomía $Hol_x(g)$ (see [14]).

El teorema de descomposición de de Rham-Wu [36, 35] afirma que todo espacio pseudo-riemanniano simétrico simplemente conexo completo es isométrico a un producto $M_0 \times \ldots \times M_r$ donde para toda $i \neq 0$, M_i es una espacio pseudo-riemanniano simétrico simplemente conexo, indescomponible de dimensión mayor que uno y M_0 es semi-euclideano (i.e. con métrica no degenerada y con grupo de holonomía trivial).

En el caso de un espacio simétrico lorentziano (M, g) de dimensión 3 tenemos que éste es isométrico a alguno de los siguientes productos:

- $M_0 \times M_1$

$$\begin{cases} M_0 \equiv (\mathbb{R}, -dx^2) \quad M_1 \equiv \begin{cases} \mathbb{S}^2(k) \\ \mathbb{H}^2(k), \end{cases} \\ \\ M_0 \equiv (\mathbb{R}, dx^2) \quad M_1 \equiv \begin{cases} \widetilde{\mathbb{S}_1^2}(k) \\ \widetilde{\mathbb{H}_1^2}(k). \end{cases} \end{cases}$$

Finalmente, de acuerdo a [7] y [6] los espacios simétricos lorentzianos simplemente conexos indescomponibles de dimensión 3 son los siguientes :

$$\begin{cases} \text{el espacio de Sitter } \mathbb{S}^3_1(k) \subset \mathbb{R}^{1,3}, \\ \text{el cubriente universal del espacio anti de Sitter } \mathbb{H}^3_1(k) \text{ y} \\ \text{el espacio de Cahen-Wallach } M_c := (\mathbb{R}^3, g_c),\ g_{c\,(s,t,x)} := 2dsdt + cx^2ds^2 + dx^2, \\ \ c = \pm 1. \end{cases}$$

En esta sección y en la anterior obetenemos según el Teorema 1.1.1 una lista completa de los espacios homogéneos Lorentzianos completos 3-dimensionales simplemente conexos.

Hay diversos resultados que nos dan condiciones para determinar si ciertas variedades son grupos de Lie o no, por ejemplo, en el listado de variedades simétricas podemos observar que los espacios $\mathbb{S}^3_1$ y $\mathbb{R}_- \times \mathbb{S}^2$ no se pueden dotar de estructuras de grupos de Lie ya que según [33, Pág. 116-118], todo grupo de Lie conexo tiene segundo grupo fundamental trivial y por [27, Lema 25], $\mathbb{S}^3_1$ tiene la misma topología que el producto $\mathbb{R}_- \times \mathbb{S}^2$.

Adicionalmente, tenemos la siguiente proposición cuya demostración se encuentra en [8] y que nos ayuda a determinar cuáles son los grupos de Lie cuya métrica lorentziana ya establecida los hace espacios simétricos.

Proposición 1.3.4. *Sea $(G, \langle, \rangle)$ un grupo de Lie lorentziano 3 dimensional, simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. $(G, \langle\rangle)$ es simétrico si y sólo si uno de los siguientes casos ocurre:*

(a) $(G, \langle\rangle)$ *es un grupo Lorentziano de curvatura seccional constante.*

(b) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_5$ *y también* $\alpha = \beta = \gamma = 0 \neq \delta$, *o* $\beta = \gamma = \delta = 0 \neq \alpha$. *En ambos casos, G es isométrico a* $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2_1$.

(c) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_6$ *y también* $\alpha = \beta = \gamma = 0 \neq \delta$, *o* $\beta = \gamma = \delta = 0 \neq \alpha$. *En estos casos, G es isométrico a* $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2_1$ *y* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_-$ *, respectivamente.*

(d) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_7$ *y* $\gamma = \delta = 0 \neq \alpha$.

Capítulo 2

Geometría espinorial de variedades pseudo-riemannianas

El fin de este capítulo es introducir las nociones elementales de la geometría espín al igual que presentar la notación que usaremos en lo subsecuente. Revisar [12, 18, 20] para una exposición más detallada.

2.1 Álgebra de Clifford y grupo Spin

Definición 2.1.1. *Dado un espacio vectorial V con una forma bilineal simétrica g, su álgebra de Clifford $Cl(V)$ es el cociente*

$$\frac{T(V)}{I(V,g)},$$

donde $T(V) = \mathbb{R} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus \ldots$ es el álgebra tensorial de V en tanto que $I(V,g)$ es el ideal generado por $\{v \otimes v + g(v,v)1 : v \in V\}$.

Observación 2.1.2.

1. *Si $e_1, \ldots, e_n$ es una base ortogonal de V respecto a g, entonces $\{1\} \cup \{e_{i_1} \cdots e_{i_k} : 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n,\ 1 \leq k \leq n\}$ es una base de $Cl(V)$ y en consecuencia la dimensión de $Cl(V)$ es 2^n.*
2. *Otra manera de ver al álgebra de Clifford $Cl(V)$ es como el álgebra generada multiplicativamente por V con la relación $v \cdot v = -g(v,v)$.*

En la definición anterior usamos V para simplificar la notación, sin embargo, en lo que sigue vamos a trabajar con el espacio $\mathbb{R}^{r,s}$ que es $\mathbb{R}^{r+s}$ con la métrica $g = -\sum_{i=1}^{r} dx_i^2 + \sum_{j=r+1}^{r+s} dx_j^2$ y para denotar a su álgebra de Clifford usaremos $Cl_{r,s}$.

Definición 2.1.3. *La aplicación transpuesta es el anti-automorfismo involutivo* $\tau : Cl_{r,s} \longrightarrow Cl_{r,s}$ *dado por* $x_1 \cdot \ldots \cdot x_k \longmapsto x_k \cdot \ldots \cdot x_1$.

Denotamos por $SO(r,s)$ al grupo de isometrías en $\mathbb{R}^{r,s}$ que preservan la orientación. Si $r \neq 0$, entonces $SO(r,s)$ tiene 2 componentes conexas y la componente conexa de la identidad es

$$SO_0(r,s) = \left\{ \begin{pmatrix} A_r & B \\ C & A_s \end{pmatrix} \in SO(r,s) : A_j \in M_j(\mathbb{R}),\ det(A_r),\ det(A_s) > 0 \right\}.$$

Para definir al grupo $Spin(r,s)$ consideramos el siguiente subconjunto de Cl_{rs}

$$P = \left\{ x_{_1} \cdot \ldots \cdot x_{_{2k}} : x_{_i} \in \mathbb{R}^{r+s},\ |g(x_{_i}, x_{_i})| = 1 \right\}.$$

Proposición 2.1.4. *La siguiente función define un cubriente de grupos dos a uno*

$$\begin{array}{rccccc} Ad: & P & \longrightarrow & SO(r,s) & & \\ & x & \longmapsto & Ad(x): & \mathbb{R}^{r+s} & \longrightarrow \mathbb{R}^{r+s} \\ & & & & y & \longmapsto x \cdot y \cdot x^{-1}. \end{array}$$

Definición 2.1.5. *El grupo* $Spin(r,s) \subset P$ *es la imagen inversa de la componente conexa* $SO(r,s)_0$ *por la función* Ad.

A diferencia del caso riemanniano, $Spin(r,s)$ no siempre es el cubriente universal de $SO_0(r,s)$, pero se tienen algunas propiedades topológicas interesantes.

- Si $r + s \geq 2$, entonces $Spin(r,s)$ es conexo con excepción de

  $Spin(1,1) = \{x + ye_1e_2 : x^2 - y^2 = 1\}$.

- El grupo $Spin(n-1,1)$ (isomorfo a $Spin(1,n-1)$) con $n \geq 4$ es simplemente conexo.

- El grupo $Spin(3,3)$ no es simplemente conexo.

Para más ejemplos y propiedades sobre el grupo spin se puede consultar [20, Pág. 220].

2.2 Haz de espinores y fórmula de Gauss

En esta sección se define de manera general lo que es una estructura espinorial para a partir de ella construir los haces de espinores de Clifford. Incluimos la definición de la derivada sobre dichos haces con el fin de hacer un breve resumen al final de la sección explicando cómo se obtiene la fórmula de Gauss espinorial, es decir, la ecuación que relaciona la derivada de una sección en un haz de espinores sobre una variedad con la derivada de la misma sección sobre los haces de espinores de sus subvariedades pseudo-riemannianas.

Definición 2.2.1. *Sean M una variedad pseudo-riemanniana y $E \longrightarrow M$ un haz vectorial orientado sobre M con una métrica de signatura r, s en cada fibra. Una estructura espín (o espinorial) sobre E es una pareja $(\widetilde{Q}_E, \Lambda)$, donde $\widetilde{Q}_E$ es un haz $Spin(r,s)$-principal y $\Lambda : \widetilde{Q}_E \to Q_E$ es un cubriente doble del haz de marcos de E con grupo de estructura $SO_0(r,s)$ de manera que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{Q}_E \arrow[dd, "\Lambda"] & \times Spin(r,s) \arrow[dd, "Ad"] \arrow[r] & \widetilde{Q}_E \arrow[dd, "\Lambda"] \arrow[dr] & \\
 & & & M, \\
Q_E & \times SO_0(r,s) \arrow[r] & Q_E \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

aquí los renglones son las acciones de los grupos $Spin(r,s)$ y $SO_0(r,s)$ sobre $\widetilde{Q}_E$ y Q_E, respectivamente.

Definición 2.2.2. *Una variedad (pseudo-riemanniana) orientada M es espinorial si su haz tangente TM admite una estructura espín.*

Ahora podemos definir los haces de espinores de Clifford. Supongamos que M y $E \longrightarrow M$ son como en la Definición 2.2.1 con E esinorial y estructura espín $\widetilde{Q}_E$.

Usamos ρ para denotar la representación de $Spin(r,s)$ en el álgebra de Clifford $Cl_{r,s}$ dada por la multiplicación por la izquierda

$$\begin{array}{ccccccc}
\rho : Spin(r,s) & \longrightarrow & Aut(Cl_{r,s}) & & & & \\
x & \longmapsto & \rho(x): & Cl_{r,s} & \longrightarrow & Cl_{r,s} & \\
 & & & y & \longmapsto & x \cdot y. &
\end{array} \tag{2.1}$$

Cabe mencionar que dicha representación no es irreducible; de hecho es suma de representaciones irreducibles equivalentes a la representación espinorial usual (ver [20, pág. 226]).

Definición 2.2.3. *El haz de espinores sobre E es el haz vectorial asociado al haz principal $\widetilde{Q}_{_E}$*

$$\Sigma E := \widetilde{Q}_{_E} \times_\rho Cl_{r,s}.$$

Con haz asociado queremos decir que ΣE es el conjunto de clases de equivalencia en $\widetilde{Q}_{_E} \times Cl_{r,s}$ donde (p, v) es equivalente a (p', v') si y sólo si existe $g \in Spin(r, s)$ tal que $(p', v') = (p \cdot g, \rho(g^{-1})v)$.

Definición 2.2.4. *Sea (E, π, M) un haz vectorial. Una derivada covariante es una función lineal*

$$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$$

que satisface la regla de Leibniz

$$\nabla(f\psi) = df \otimes \psi + f\nabla\psi,$$

para todo $\psi \in \Gamma(E)$ y $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ función diferenciable.

Buscamos dotar de una derivada covariante al haz en la Definición 2.2.3, para ello usamos que existe una manera estándar de definir derivadas covariantes sobre haces asociados (ver por ejemplo [32]).

Sean M una variedad diferenciable, G un grupo de Lie y $\pi : P \longrightarrow M$ un haz principal con grupo de estructura G actuando por la derecha. Si $\omega : TP \longrightarrow \mathfrak{g}$ es una forma de conexión sobre P y $E = P \times_\rho \Sigma$ es un haz asociado a P con $\rho : G \longrightarrow Aut(\Sigma)$ una representación, entonces podemos definir la siguiente derivada covariante en E:

Considere ψ una sección de E, que localmente es $\psi = [s, \sigma]$, donde $s : U \subset M \longrightarrow P$ es una sección y $\sigma : U \longrightarrow \Sigma$ es una función diferenciable. Así que si $s_* : TU \longrightarrow TP$ y $\rho_* : \mathfrak{g} \longrightarrow End(\Sigma)$ denotan las diferenciales de s y ρ, respectivamente, entonces la siguiente composición tiene sentido

$$TU \xrightarrow{s_*} TP \xrightarrow{\omega} \mathfrak{g} \xrightarrow{\rho_*} End(\Sigma).$$

Por tanto una derivada covariante en E se puede definir como

$$\nabla_{_X}\psi = [s, X.\sigma + \rho_*((\omega \circ s_*)(X))\sigma], \tag{2.2}$$

para toda $X \in TM$.

Antes de hablar sobre la geometría espín de subvariedades es necesario recordar las siguientes nociones algebraicas.

Si X es una variedad diferenciable y G_1, G_2 son grupos de Lie, el producto fibrado entre haces principales sobre X se define de la siguiente manera: sean $\pi_1 : P \longrightarrow X$ un haz G_1-principal y $\pi_2 : Q \longrightarrow X$ un haz G_2-principal, su producto fibrado $\pi : P \times_X Q \longrightarrow X$ es el haz $G_1 \times G_2$-principal, donde $P \times_X Q = \{(p,q) : \pi_1(p) = \pi_2(q)\}$ (con la topología de subespacio de $P \times Q$), la acción está dada por $(p,q)\cdot(g_1,g_2) = (pg_1, qg_2)$ para $(p,q) \in P \times_X Q$ y $(g_1,g_2) \in G_1 \times G_2$ y finalmente la proyección del haz es

$$\begin{array}{rcl} \pi : P \times_X Q & \longrightarrow & X \\ (p,q) & \longmapsto & \pi_1(p) = \pi_2(q). \end{array}$$

Sean E_1 y E_2 haces vectoriales sobre M, ambos espín y con estructuras espinoriales $\widetilde{Q}_{E_1}$ y $\widetilde{Q}_{E_2}$. La suma $E = E_1 \oplus E_2$ tiene una estructura espinorial natural $\widetilde{Q}_E$ de manera que existe una función f que hace conmutar el siguiente diagrama (ver [25])

$$\begin{tikzcd} \widetilde{Q}_{E_1} \times \widetilde{Q}_{E_2} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Lambda_1 \quad \Lambda_2"] & \widetilde{Q}_E \arrow[d, "\Lambda"] \arrow[dr] & \\ Q_{E_1} \times Q_{E_2} \arrow[r, "i"] & Q_E \arrow[r] & M, \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

i es la yuxtaposición de un elemento de Q_{E_1} y uno de Q_{E_2}; además, f es compatible con las acciones vía el homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \lambda : Spin(n) \times Spin(m) & \longrightarrow & Spin(n+m) \\ (x,y) & \longmapsto & x \cdot y, \end{array} \tag{2.4}$$

en otras palabras $f((p,q)(g_1,g_2)) = f((p,q))\lambda((g_1,g_2))$ para todo $(p,q) \in \widetilde{Q}_{E_1} \times \widetilde{Q}_{E_2}$ y $(g_1,g_2) \in G_1 \times G_2$.

De hecho, tenemos el resultado más fuerte siguiente ([25]): estructuras espinoriales sobre dos de los haces E_1, E_2 o E determinan una única estructura espinorial sobre el tercer haz de tal manera que (2.3) conmuta para alguna aplicación f.

Hay una acción natural de TM sobre el haz de espinores de Clifford ΣM (en analogía con la acción que hay en el haz de espinores usual (ver [15])) la cual llamamos multiplicación de Clifford y denotamos por $X \cdot \psi$. Para definir tal producto usamos que TM, al igual que ΣM, es isomorfo a un haz asociado a $\widetilde{Q}_M$, de hecho $TM \simeq \widetilde{Q}_M \times_{Ad} \mathbb{R}^{r,s}$ y por lo tanto podemos definir la multiplicación de Clifford de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccc} TM \otimes \Sigma M & \longrightarrow & \Sigma M \\ [s,\varphi]\otimes[s,\sigma] & \longrightarrow & [s,\varphi\cdot\sigma], \end{array}$$

donde $s : U \subset M \longrightarrow \widetilde{Q}_M$ es una sección en $\widetilde{Q}_M$, $\varphi : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}^{r,s}$ y $\sigma : U \subset M \longrightarrow Cl_{r,s}$ son funciones diferenciables, finalmente, $\varphi \cdot \sigma$ es el producto en $Cl_{r,s}$.

Veamos que nuestra acción no depende de los representantes: sean $[s,\varphi] \in TM$ y $[s,\psi] \in \Sigma M$ como en el párrafo anterior, si $[s',\varphi']$ y $[s',\psi']$ son tales que $s' = sg$, $\varphi' = Ad(g^{-1})\varphi$ y $\psi' = \rho(g^{-1})\psi$, entonces

$$\begin{array}{rcl} [s',\varphi']\cdot[s',\sigma'] & = & [s',\varphi'\cdot\sigma'] \\ & = & [s', Ad(g^{-1})\varphi\cdot\rho(g^{-1})\sigma] \\ & = & [s', g^{-1}\varphi g\cdot g^{-1}\sigma] \\ & = & [s', g^{-1}\varphi\cdot\sigma] \\ & = & [s,\varphi\cdot\sigma]=[s,\varphi]\cdot[s,\sigma], \end{array}$$

lo que prueba que la acción está bien definida.

Geometría espinorial de subvariedades

Sean $(\overline{M},\overline{g})$ una variedad pseudo-riemanniana de dimensión $n+m$ y de signatura (r,s) y M una subvariedad pseudo-riemanniana de dimensión n, supongamos que ambas son variedades espinoriales con respectivas estructuras espín $\widetilde{Q}_{\overline{M}}$ y $\widetilde{Q}_M$. Sabemos que al restringir el haz tangente de la variedad ambiente obtenemos la descomposición $T\overline{M}|_M = TM \oplus NM$, donde NM es el haz normal y como ya mencionamos antes tiene una estructura espinorial $\widetilde{Q}_N$ de manera que existe una función $f : \widetilde{Q}_M \times \widetilde{Q}_N \to \widetilde{Q}_{\overline{M}}$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{Q}_M \arrow[dd, "\Lambda_1"] & \times & \widetilde{Q}_N \arrow[dd, "\Lambda_2"] \arrow[r, "f"] & \widetilde{Q}_{\overline{M}} \arrow[dd, "\Lambda"] \arrow[dr] & \\
 & & & & M \\
Q_M & \times & Q_N \arrow[r, "i"] & Q_{\overline{M}} \arrow[ur] &
\end{tikzcd} \tag{2.5}$$

donde i es la yuxtaposición de un marco en Q_M y uno en Q_N.

La función f nos permite definir el isomorfismo de haces

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Q}_M \times_M \widetilde{Q}_N \times_{\rho\circ\lambda} Cl_{r,s} & \longrightarrow & \widetilde{Q}_{\overline{M}} \times_\rho Cl_{r,s} = \Sigma\overline{M}|_M \\ [p,x] & \longmapsto & [f(p),x]. \end{array}$$

Por otro lado, el haz $\Sigma M \otimes \Sigma N$ es también isomorfo a $\widetilde{Q}_M \times_M \widetilde{Q}_N \times_{\rho\circ\lambda} Cl_{r,s}$. Estos isomorfimos nos permiten utilizar la derivada covariante en $\Sigma M \otimes \Sigma N$

$$\nabla^{\Sigma M \otimes \Sigma N} := \nabla^{\Sigma M} \otimes Id + Id \otimes \nabla^{\Sigma N},$$

para probar que si φ es una sección en el haz de espinores $\Sigma\overline{M}|_M \simeq \Sigma M \otimes \Sigma N$ y $B : TM \times TM \longrightarrow NM$ es la segunda forma fundamental de la inmersión $M \longrightarrow \overline{M}$, entonces la fórmula de Gauss es

$$\nabla_X^{\Sigma\overline{M}}\varphi - \nabla_X^{\Sigma M \otimes \Sigma N}\varphi = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi, \quad \varepsilon_i = g(e_i, e_i) = \pm 1 \tag{2.6}$$

para toda $X \in TM$ y $(e_1, \ldots, e_n)$ marco ortonormal de TM. Más detalles sobre la fórmula de Gauss en un contexto un poco diferente se pueden consultar en [1].

Capítulo 3

Inmersiones en grupos lorentzianos 3-dimensionales

El resultado principal en este capítulo es la caracterización espinorial de una superficie en un grupo de Lie lorentziano simplemente conexo de dimensión 3, tal hecho se enuncia de manera precisa en el Teorema 3.3.1. Traducimos luego dicho teorema en términos de la geometría espinorial intrínseca de las superficies, en el caso riemanniano en 3.4.8 y en el caso lorentziano en 3.4.14.

3.1 Haz de espinores sobre un grupo de Lie

Sea G un grupo de Lie lorentziano 3-dimensional simplemente conexo con métrica invariante por la izquierda $\langle\ ,\ \rangle$, denotamos por $\mathfrak{g}$ a su álgebra de Lie.

La siguiente 1-forma $\mathfrak{g}$-valuada es la forma de Maurer Cartan del grupo y nos permitirá trivializar su haz tangente:

$$\omega_g(v) = dL_{g^{-1}}(v), \quad v \in T_gG. \tag{3.1}$$

La trivialización de TG es

$$\begin{aligned} TG &\longrightarrow G \times \mathfrak{g} & (3.2)\\ X &\longmapsto (g, \omega_g(X)). & (3.3)\end{aligned}$$

Usando lo anterior podemos decir que una sección $X : G \longrightarrow \mathfrak{g}$ de TG es invariante por la izquierda si es una función constante.

A través de la conexión de Levi-Civita del grupo definimos $\Gamma : \mathfrak{g} \longrightarrow \Lambda^2\mathfrak{g}$ como la aplicación que asocia a cada campo invariante $X \in \Gamma(TG)$ la transformación lineal antisimétrica $\Gamma(X)$ que satisface

$$\overline{\nabla} Y = \Gamma(X)(Y), \tag{3.4}$$

para $\overline{\nabla}$ la conexión de Levi-Civita de G y $Y \in \Gamma(TG)$ campo invariante.

Dado que ∇^G es libre de torsión, se tiene que, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$\Gamma(X)(Y) - \Gamma(Y)(X) = [X, Y]. \tag{3.5}$$

Como G es paralelizable es espinorial y en lo que sigue vamos a construir un haz de espinores sobre él, así como la derivada covariante de una sección en dicho haz.

En este caso, una estructura espín es un cubriente doble del haz de marcos ortonormales de G, Q_G. Debido a que el haz tangente de G es trivial tenemos también que $Q_G = G \times SO(\mathfrak{g})$ y por lo tanto $\widetilde{Q}_G = G \times Spin(\mathfrak{g})$ es una estructura espín del grupo.

Ya hemos mencionado en el segundo capítulo que el grupo espín está representado en el álgebra de Clifford a través de la multiplicación por la izquierda

$$\begin{array}{rcl} \rho : Spin(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & Gl(Cl(\mathfrak{g})) \\ x & \longmapsto & \begin{array}{rcl} \rho(x) : Cl(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & Cl(\mathfrak{g}) \\ v & \longmapsto & x \cdot v. \end{array} \end{array} \tag{3.6}$$

El haz de espinores sobre G es el siguiente haz asociado a $\widetilde{Q}_G$:

$$\Sigma G := \widetilde{Q}_G \times_\rho Cl(\mathfrak{g}). \tag{3.7}$$

Lema 3.1.1. *Existe un isomorfismo entre el haz de espinores ΣG y el haz trivial $G \times Cl(\mathfrak{g})$.*

Demostración. Dado que $\rho(xy)\rho(y^{-1})(\sigma) = \rho(x)(\sigma)$ para todo $x, y \in Spin(\mathfrak{g})$ y $\sigma \in Cl(\mathfrak{g})$ tenemos que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \{G \times Spin(\mathfrak{g})\} \times_\rho Cl(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & G \times Cl(\mathfrak{g}) \\ [((g, x), \sigma)] & \longmapsto & (g, \rho(x)\sigma) \end{array}$$

es un morfismo de haces vectoriales y su inversa es

$$\begin{array}{ccc} G \times Cl(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & \{G \times Spin(\mathfrak{g})\} \times_\rho Cl(\mathfrak{g}) \\ (g, \sigma) & \longmapsto & \Big[((g, 1_{Cl(\mathfrak{g})}), \sigma)\Big]. \end{array}$$

$\square$

De acuerdo a la ecuación (2.2) del capítulo anterior, en ΣG hay una derivada covariante. En un contexto un poco diferente, esta derivada está definida en [5, Teo. 2.7] como sigue: si φ es una sección de ΣG, $X \in TG$ y ∂ es la derivada usual en la trivialización del lema anterior entonces

$$\nabla^G_X \varphi = \partial_X \varphi + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k < l \leq 3} \varepsilon_k \varepsilon_l \langle \overline{\nabla}_X e_k, e_l \rangle e_k \cdot e_l \cdot \varphi, \tag{3.8}$$

donde $(e_1, \ldots, e_n)$ es una base ortonormal de G, $\varepsilon_j = \langle e_j, e_j \rangle = \pm 1$ y $\overline{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita en G.

Diremos que un campo de espinores $\varphi \in \Gamma(\Sigma G)$ es invariante por la izquierda si visto como una función de G en $Cl(\mathfrak{g})$ es constante. Por lo tanto usando la fórmula anterior tenemos que la derivada covariante para un campo de espinores invariante por la izquierda en ΣG es

$$\nabla^G_X \varphi = \frac{1}{2} \Gamma(X) \cdot \varphi, \tag{3.9}$$

donde $\Gamma(X) \in \Lambda^2 \mathfrak{g} \subset Cl(\mathfrak{g})$ y $\cdot$ es el producto en el álgebra de Clifford.

Geometría de una superficie en G.

Sean (M, g) una superficie riemanniana (o lorentziana) y G un grupo de Lie 3-dimensional con una métrica lorentziana invariante por la izquierda.

Si M está isométricamente inmersa en G usando la ecuación (2.6) obtenemos la fórmula de Gauss para la inmersión

$$\nabla_X \varphi = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} \varepsilon_j e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi + \nabla^G_X \varphi, \quad \varepsilon_j = g(e_j, e_j) = \pm 1 \tag{3.10}$$

donde ∇ denota la derivada covariante en $\Sigma M \otimes \Sigma E$ para ΣE el haz de espinores sobre el haz normal de la inmersión, B es la segunda forma fundamental de la inmersión, φ es una sección en $\Sigma G|_M$ y $X \in TM$.

Se sigue de (3.9) que si $\varphi \in \Gamma(\Sigma M)$ es una sección invariante por la izquierda, entonces (3.10) es equivalente a

$$\nabla_X \varphi = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} \varepsilon_j e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi + \frac{1}{2} \Gamma(X) \cdot \varphi, \quad \varepsilon_j = g(e_j, e_j), \tag{3.11}$$

para toda $X \in TM$.

3.2 Haz de espinores sobre una superficie

En esta sección definimos diferentes haces de espinores sobre una superficie pseudo-riemanniana sin suponer que tal superficie se encuentre inmersa en alguna otra variedad.

3.2.1 Superficie riemanniana

Sean (M, g) una superficie riemanniana simplemente conexa y $E = M \times \mathbb{R}$ el haz trivial sobre M con métrica $-d\nu^2$ en cada fibra. Denotamos las respectivas estructuras espinoriales sobre M y E por $\widetilde{Q}_M$ y $\widetilde{Q}_E$. Dado que $Q_E = M \times \{1\}$ tenemos que $\widetilde{Q}_E \longrightarrow M$ es el cubriente doble con fibra $\{1, -1\}$. A continuación definiremos algunos haces que nos permitirán escribir la fórmula de Gauss en el caso en que M esté isometricamente inmersa en G. Considere las siguientes representaciones

$$\begin{array}{rcl} \rho_1 : Spin(0,2) & \longrightarrow & Gl(Cl_{0,2}) \\ x & \longmapsto & \begin{array}{rcl} \rho_1(x) : Cl_{0,2} & \longrightarrow & Cl_{0,2} \\ v & \longmapsto & x \cdot v, \end{array} \end{array} \tag{3.12}$$

$$\begin{array}{rcl} \rho_2 : Spin(1,0) & \longrightarrow & Gl(Cl_{1,0}) \\ x & \longmapsto & \begin{array}{rcl} \rho_2(x) : Cl_{1,0} & \longrightarrow & Cl_{1,0} \\ v & \longmapsto & x \cdot v. \end{array} \end{array} \tag{3.13}$$

Definimos los haces de espinores sobre M y sobre E como sigue:

$$\Sigma M := \widetilde{Q}_M \times_{\rho_1} Cl_{0,2} \quad \text{y} \quad \Sigma E := \widetilde{Q}_E \times_{\rho_2} Cl_{1,0}. \tag{3.14}$$

También nos interesa el siguiente haz vectorial que es isomorfo a $\Sigma M \otimes \Sigma E$ debido a que existe un isomorfimso de álgebras entre $Cl_{0,2} \otimes Cl_{1,0}$ y $Cl_{1,2}$. Además, como ya mencionamos en el primer capítulo, cuando M está isométricamente inmersa en G dicho haz es isomorfo a la restricción $\Sigma G|_M$,

$$\Sigma := \widetilde{Q}_M \times_M \widetilde{Q}_E \times_\rho Cl_{1,2}, \tag{3.15}$$

donde

$$\begin{array}{rcl} \rho : Spin(0,2) \times Spin(1,0) & \longrightarrow & Gl(Cl_{1,2}) \\ (g_1, g_2) & \longmapsto & \begin{array}{rcl} \rho(x) : Cl_{1,2} & \longrightarrow & Cl_{1,2} \\ v & \longmapsto & g_1 g_2 \cdot v. \end{array} \end{array}$$

Llamamos haz de espinores unitarios al siguiente haz

$$U\Sigma := \widetilde{Q}_M \times_M \widetilde{Q}_E \times_\rho Spin(1,2) \quad \subset \quad \Sigma. \tag{3.16}$$

3.2.2 Superficie lorentziana

Vamos a definir los haces de espinores sobre una superficie lorentziana de manera análoga a como lo hicimos en la subsección anterior con una superficie riemanniana. Mantendremos la misma notación.

Sean (M, g) una superficie lorentziana simplemente conexa y $E \longrightarrow M$ un haz vectorial orientable de rango 1, es decir, un haz trivial. Digamos que cada fibra de E tiene métrica $d\nu^2$.

Supongamos además que M es orientable y que M y E son espinoriales con estructuras espín $\widetilde{Q}_M$ y $\widetilde{Q}_E$, respectivamente.

La definición de los siguientes haces tiene el mismo objetivo que cuando la superficie es riemanniana, es decir, escribir una fórmula en términos de espinores que nos permita caracterizar la inmersión de M en G.

Consideremos las siguientes representaciones

$$\begin{array}{rcl} \rho_1 : Spin(1,1) & \longrightarrow & Gl(Cl_{1,1}) \\ x & \longmapsto & \begin{array}{rcl} \rho_1(x) : Cl_{1,1} & \longrightarrow & Cl_{1,1} \\ v & \longmapsto & x \cdot v, \end{array} \end{array} \tag{3.17}$$

$$\begin{array}{rcl} \rho_2 : Spin(0,1) & \longrightarrow & Gl(Cl_{0,1}) \\ x & \longmapsto & \begin{array}{rcl} \rho_2(x) : Cl_{0,1} & \longrightarrow & Cl_{0,1} \\ v & \longmapsto & x \cdot v. \end{array} \end{array} \tag{3.18}$$

Los haces de espinores sobre M y sobre E los denotamos por ΣM y ΣE, respectivamente y los definimos como sigue:

$$\Sigma M := \widetilde{Q}_M \times_{\rho_1} Cl_{1,1} \qquad \Sigma E := \widetilde{Q}_E \times_{\rho_2} Cl_{0,1}. \tag{3.19}$$

También consideramos el haz

$$\Sigma = \widetilde{Q}_M \times_M \widetilde{Q}_E \times_\rho Cl_{1,2}, \tag{3.20}$$

donde

$$\begin{array}{rcl} \rho : Spin(1,1) \times Spin(0,1) & \longrightarrow & Gl(Cl_{1,2}) \\ (g_1, g_2) & \longmapsto & \begin{array}{rcl} \rho(x) : Cl_{1,2} & \longrightarrow & Cl_{1,2} \\ v & \longmapsto & g_1 g_2 \cdot v. \end{array} \end{array}$$

Al siguiente haz también lo llamamos haz de espinores unitarios o haz unitario

$$U\Sigma = \widetilde{Q}_M \times_M \widetilde{Q}_E \times_\rho Spin(1,2) \quad \subset \quad \Sigma. \tag{3.21}$$

Extensión de la aplicación transpuesta. Usamos la transformación $\tau : Cl(\mathfrak{g}) \longrightarrow Cl(\mathfrak{g})$ de la Definición 2.1.3 para obtener la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \langle\langle\ ,\ \rangle\rangle : Cl(\mathfrak{g}) \times Cl(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & Cl(\mathfrak{g}) \\ (\sigma_1, \sigma_2) & \longmapsto & \tau(\sigma_2)\sigma_1. \end{array}$$

Observación 3.2.1. *Si $g \in Spin(\mathfrak{g})$, entonces para toda $v, w \in Cl(\mathfrak{g})$ tenemos que $\langle\langle g \cdot v, g \cdot w\rangle\rangle = \langle\langle v, w\rangle\rangle$.*

Demostración. Sean $g \in Spin(\mathfrak{g})$ y $v, w \in Cl(\mathfrak{g})$, por definición

$$\begin{array}{rcl} \langle\langle g \cdot v, g \cdot w\rangle\rangle & = & \tau(g \cdot w) \cdot g \cdot v \\ & = & \tau(w) \cdot \tau(g) \cdot g \cdot v \\ & = & \tau(w) \cdot v = \langle\langle v, w\rangle\rangle. \end{array}$$

□

Gracias a la observación anterior tenemos que la siguiente extensión de $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ a Σ está bien definida

$$\begin{array}{rcl} \langle\langle\ ,\ \rangle\rangle : \Sigma \times \Sigma & \longrightarrow & Cl(\mathfrak{g}) \\ (\varphi, \psi) & \longmapsto & \tau([\psi])[\varphi], \end{array} \tag{3.22}$$

los corchetes $[\psi]$ y $[\varphi]$ son las coordenadas de φ y ψ en un marco espinorial.

Los siguientes dos lemas acerca de propiedades de $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ así como sus demostraciones se encuentran en [4], sin embargo las incluiremos aquí.

Lema 3.2.2. *Si $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow Cl(\mathfrak{g})$ es como en (3.22), entonces se satisfacen las siguientes propiedades: para todo $\varphi, \psi \in \Gamma(\Sigma)$ y $X \in \Gamma(TM \oplus E)$*

$$\langle\langle \varphi, \psi\rangle\rangle = \tau\langle\langle \psi, \varphi\rangle\rangle \tag{3.23}$$

y

$$\langle\langle X \cdot \varphi, \psi\rangle\rangle = \langle\langle \varphi, X \cdot \psi\rangle\rangle. \tag{3.24}$$

Demostración. La propiedad (3.23) es consecuencia de que τ sea un anti-automorfismo involutivo:

$$\begin{aligned} \langle\langle\varphi,\psi\rangle\rangle &= \tau([\psi])\tau(\tau([\varphi])) \\ &= \tau(\tau([\varphi])[\psi]) \\ &= \tau\langle\langle\psi,\varphi\rangle\rangle, \end{aligned}$$

mientras que para probar (3.24) usamos además que $\tau([X]) = [X]$:

$$\begin{aligned} \langle\langle X\cdot\varphi,\psi\rangle\rangle &= \tau([\psi])\tau([X])[\varphi] \\ &= \tau([X][\psi])[\varphi] \\ &= \langle\langle\varphi, X\cdot\psi\rangle\rangle. \end{aligned}$$

□

Lema 3.2.3. *La conexión ∇ es compatible con el producto $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$, es decir,*

$$\partial_X\langle\langle\varphi,\psi\rangle\rangle = \langle\langle\nabla_X\varphi,\psi\rangle\rangle + \langle\langle\varphi,\nabla_X\psi\rangle\rangle$$

para toda $\varphi,\psi\in\Gamma(\Sigma)$ y $X\in TM$.

Demostración. Digamos que $\varphi = [\widetilde{s},\sigma_1]$ y $\psi = [\widetilde{s},\sigma_2]$ son dos secciones en Σ, de acuerdo a la Definición 2.2

$$\begin{aligned} \nabla_X\varphi &= [\widetilde{s}, \partial_X[\varphi] + d\rho(\widetilde{s}^*(\omega_M\oplus\omega_E)(X))([\varphi])] \\ &\text{y} \\ \nabla_X\psi &= [\widetilde{s}, \partial_X[\psi] + d\rho(\widetilde{s}^*(\omega_M\oplus\omega_E)(X))([\psi])], \end{aligned}$$

donde ω_M y ω_E son las respectivas formas de conexión de M y E.

De lo anterior tenemos que los sumandos del lado derecho en la ecuación que queremos verificar se ven como sigue:

$$\langle\langle\nabla_X\varphi,\psi\rangle\rangle = \tau[\psi]\partial_X[\varphi] + \tau[\psi][d\rho(\widetilde{s}^*(\omega_M\oplus\omega_E)(X))([\varphi])] \tag{3.25}$$

y por el Lema 3.2.2

$$\begin{aligned} \langle\langle\varphi,\nabla_X\psi\rangle\rangle &= \tau\langle\langle\nabla_X\psi,\varphi\rangle\rangle \\ &= \tau\{\tau[\varphi]\partial_X[\psi] + \tau[\varphi][d\rho(\widetilde{s}^*(\omega_M\oplus\omega_E)(X))([\psi])]\} \\ &= \tau(\partial_X[\psi])[\varphi] + \tau([d\rho(\widetilde{s}^*(\omega_M\oplus\omega_E)(X))([\psi])])[\varphi]. \end{aligned}$$

El elemento $[d\rho(\widetilde{s}^*(\omega_M \oplus \omega_E)(X))]$ pertenece al álgebra de Lie de $Spin(\mathfrak{g})$ que está contenida en $\Lambda^2\mathfrak{g}$ y por lo tanto su transpuesta es $-[d\rho(\widetilde{s}^*(\omega_M \oplus \omega_E)(X))]$, así que

$$\begin{aligned}\tau([d\rho(\widetilde{s}^*(\omega_M \oplus \omega_E)(X))([\psi])]) &= \tau[\psi]\tau([d\rho(\widetilde{s}^*(\omega_M \oplus \omega_E)(X))]) \\ &= -\tau[\psi][d\rho(\widetilde{s}^*(\omega_M \oplus \omega_E)(X))],\end{aligned}$$

por lo que

$$\langle\langle \varphi, \nabla_X \psi \rangle\rangle = \tau(\partial_X[\psi])[\varphi] - \tau[\psi][d\rho(\widetilde{s}^*(\omega_M \oplus \omega_E)(X))([\varphi])]. \tag{3.26}$$

Finalmente, sumando (3.25) y (3.26) se obtiene

$$\begin{aligned}\langle\langle \nabla_X \varphi, \psi \rangle\rangle + \langle\langle \varphi, \nabla_X \psi \rangle\rangle &= \tau[\psi]\partial_X[\varphi] + \tau(\partial_X[\psi])[\varphi] \\ &= \partial_X \langle\langle \varphi, \psi \rangle\rangle.\end{aligned}$$

□

3.3 Teorema de inmersión en grupos

Nuestro fin en esta sección es probar el Teorema 3.3.1 que caracteriza espinorialmente la inmersión de una superficie pseudo-riemanniana en un grupo de Lie lorentziano de dimensión 3.

Sean G un grupo de Lie 3-dimensional lorentziano con una métrica invariante por la izquierda y (M, g) una superficie riemanniana o lorentziana. Considere el haz trivial $E = M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ con métrica $-d\nu^2$ o $d\nu^2$ en cada fibra según M sea riemanniana o lorentziana.

Finalmente, consideramos una forma bilineal simétrica $B : TM \times TM \longrightarrow E$.

Las siguientes son hipótesis sobre M, G y B que nos permitirán enunciar el teorema de inmersión en grupos, al referirnos a ellas lo haremos como *condiciones de compatibilidad*.

1. Existe un isomorfismo de haces

$$f : TM \oplus E \longrightarrow M \times \mathfrak{g} \tag{3.27}$$

que preserva las métricas; a partir de dicho isomorfismo podemos definir

$$\Gamma : TM \oplus E \longrightarrow \Lambda^2(TM \oplus E) \tag{3.28}$$

de manera que, para todo $X, Y \in \Gamma(TM \oplus E)$,

$$f(\Gamma(X)(Y)) = \Gamma(f(X))(f(Y)), \tag{3.29}$$

donde en el lado derecho de la ecuación Γ es como en (3.4). Además, diremos que una sección $Z \in \Gamma(TM \oplus E)$ es invariante por la izquierda si $f(Z) : M \longrightarrow \mathfrak{g}$ es una función constante.

2. En lo que sigue ∇ denota la derivada covariante sobre $TM \oplus E$ dada por la suma de las conexión de Levi-Civita en M y la conexión trivial en E. En tanto que la derivada covariante de una sección invariante por la izquierda $Z \in \Gamma(TM \oplus E)$ es

$$\nabla_X Z = \Gamma(X)(Z) - B(X, Z^T) + B^*(X, Z^N), \tag{3.30}$$

para toda $X \in TM$, donde $Z = Z^T + Z^N \in TM \oplus E$ y $B^* : TM \times E \longrightarrow TM$ es el operador bilineal que satisface

$$\langle B(X,Y), N\rangle = \langle Y, B^*(X,N)\rangle, \tag{3.31}$$

para toda $X, Y \in \Gamma(TM)$ y $N \in \Gamma(E)$.

Digamos que M es una superficie pseudo-riemanniana cuya métrica tiene signatura $(r_1,\ s_1)$, que en nuestro caso puede ser $(0,2)$ si M es riemanniana o $(1,1)$ si es lorentziana. Denotamos por $(r_2,\ s_2)$ la signatura de la métrica en E que puede ser $(1,0)$ para M riemanniana o $(0,1)$ para M lorentziana y finalmente, equipamos a E con la conexión trivial.

Supongamos además que E y M son espinoriales y tienen estructuras espín dadas $\widetilde{Q}_E$ y $\widetilde{Q}_M$, respectivamente.

Teorema 3.3.1. *Suponga que $r_1 + r_2 = 1$, $s_1 + s_2 = 2$ y que M es simplemente conexa. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe una sección $\varphi \in \Gamma(U\Sigma)$ tal que*

$$\nabla_X \varphi = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} \varepsilon_j e_j \cdot B(X, e_j)\cdot\varphi + \frac{1}{2}\Gamma(X)\cdot\varphi, \quad \varepsilon_j = g(e_j, e_j) \tag{3.32}$$

para toda $X \in TM$.

2. *Existe una inmersión isométrica $F :\ M \to G$ con haz normal E y segunda forma fundamental B.*

De manera precisa, si φ es solución de la ecuación (3.32), reemplazando φ por $\varphi \cdot a$ para algún $a \in Spin(\mathfrak{g})$ si es necesario, y considerando la 1-forma $\mathfrak{g}$-valuda dada por

$$\xi(X) = \langle\langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle \tag{3.33}$$

para toda $X \in TM$, la fórmula $F = \int \xi$ define una inmersión isométrica $F : M \longrightarrow G$ con haz normal E y segunda forma fundamental B. Aquí $\int$ denota la integral de Darboux (ver [22, Pág. 165]), i.e., $F = \int \xi : M \longrightarrow G$ es tal que $F^*\omega_G = \xi$ para $\omega_G \in \Omega^1(G : \mathfrak{g})$ la forma de Maurer-Cartan definida en (3.1). Recíprocamente, una inmersión isométrica $M \longrightarrow G$ con haz normal E y segunda forma fundamental B puede escribirse de esa manera.

La fórmula de representación explícita de la inmersión en terminos del campo de espinores del teorema anterior, $F = \int \xi$ puede considerarse como una fórmula de Weierstrass generalizada para variedades en grupos de Lie.

Antes de probar el Teorema 3.3.1 escribiremos las condiciones de compatibilidad en un marco local.

Sea N una sección del haz trivial E que satisface $\langle N, N \rangle = \varepsilon$, donde ε es -1 si M es riemanniana y $+1$ si la variedad es lorentziana. Consideramos una base ortonormal de $\mathfrak{g}$, en otras palabras, una base (e_1^o, e_2^o, e_3^o) tal que $\langle e_i^o, e_j^o \rangle = 0$ si $i \neq j$ y $\langle e_1^o, e_1^o \rangle = \langle e_2^o, e_2^o \rangle = 1 = -\langle e_3^o, e_3^o \rangle$.

Expresamos por $\Gamma_{ij}^k \in \mathbb{R}$ con $1 \leq i, j \leq 3$ a las constantes que satisfacen

$$\Gamma(e_i^o)(e_j^o) = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_k \Gamma_{ij}^k e_k^o, \quad \varepsilon_k = \langle e_k^o, e_k^o \rangle = \pm 1.$$

Observación 3.3.2. *Si $\Gamma_{ij}^k \in \mathbb{R}$ son como se expresa arriba, entonces*

$$\Gamma_{ij}^k = \langle \nabla_{e_i} e_j, e_k \rangle$$

y por lo tanto $\Gamma_{ij}^k = -\Gamma_{ik}^j$.

Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ elegimos $\underline{e}_i \in \Gamma(TM \oplus E)$ tal que $f(\underline{e}_i) = e_i^o$ y $\nu_i \in C^\infty(M)$, $T_i \in \Gamma(TM)$ que satisfacen la igualdad $\underline{e}_i = T_i + \nu_i N$; dado que f es una isometría también $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ es un marco ortonormal de $TM \oplus E$ y además

$$\langle T_i, T_j \rangle + \varepsilon \nu_i \nu_j = \varepsilon_i \delta_{ij}, \tag{3.34}$$

para toda $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Proposición 3.3.3. *Con la notación que acabamos de introducir, la ecuación* (3.30) *es equivalente a*

$$\begin{aligned} \nabla_X T_j &= \sum_{1\le i,k\le 3} \varepsilon_i\varepsilon_k\Gamma_{ij}^k\langle X, T_i\rangle T_k + \nu_j S(X) && (3.35)\\ d\nu_j(X) &= \sum_{1\le i,k\le 3} \varepsilon_i\varepsilon_k\Gamma_{ij}^k\langle X, T_i\rangle \nu_k - h(X,T_j), \quad 1\le j\le 3, && (3.36)\end{aligned}$$

donde $S(X) = B^*(X,N)$ *y* $h(X,T_j) = \langle B(X,T_j), N\rangle$.

Demostración. Como ∇ es la conexión sobre $TM \oplus E$ dada por la suma de la conexión de Levi-Civita en M y la conexión trivial en E tenemos que

$$\nabla_X \underline{e}_j = \nabla_X T_j + d\nu_j(X)N. \qquad (3.37)$$

De acuerdo a la condición (3.30)

$$\begin{aligned} \nabla_X \underline{e}_j &= \Gamma(X)(\underline{e}_j) - B(X, \underline{e}_j^T) + B^*(X, \underline{e}_j^\perp)\\ &= \Gamma(X)(\underline{e}_j) - B(X,T_j) + \nu_j B^*(X,N). && (3.38)\end{aligned}$$

Usando (3.29) encontramos que

$$\begin{aligned} \Gamma(X)(\underline{e}_j) &= \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i \langle X, T_i\rangle \Gamma(\underline{e}_i)(\underline{e}_j)\\ &= \sum_{1\le i,k\le 3} \varepsilon_i\varepsilon_k\langle X, T_i\rangle\Gamma_{ij}^k \underline{e}_k^o\\ &= \sum_{1\le i,k\le 3} \varepsilon_i\varepsilon_k\langle X, T_i\rangle\Gamma_{ij}^k T_k + \sum_{1\le i,k\le 3} \varepsilon_i\varepsilon_k\langle X, T_i\rangle\Gamma_{ij}^k \nu_k N.\end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión para $\Gamma(X)(\underline{e}_j)$ en (3.38) e igualando las componentes tangente y normal de las ecuaciones (3.37) y (3.38) obtenemos el resultado.

Recíprocamente, si para cada $i \in \{1,2,3\}$ existen campos $T_i \in \Gamma(TM)$ y funciones $\nu_i \in C^\infty(M)$ tales que (3.34), (3.35) y (3.36) se satisfacen, entonces $f : TM \oplus E \longrightarrow M \times \mathfrak{g}$ dado por $f(\underline{e}_i) = e_i^o$ para $\underline{e}_i = T_i + \nu_i N$ es un isomorfismo de haces que preserva las métricas y tal que (3.30) se cumple. $\square$

La demostración del Teorema 3.3.1 es consecuencia de las siguientes dos proposiciones.

Proposición 3.3.4. *Sean $\varphi \in \Gamma(U\Sigma)$ solución de la ecuación (3.32) y ξ como en (3.33). Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. *la imagen de ξ está contenida en $\mathfrak{g} \subset Cl(\mathfrak{g})$,*
2. *existe $T \in SO(\mathfrak{g})$ tal que $\xi = T \circ f$,*
3. *reemplazando φ por $\varphi \cdot a$ donde $a \in Spin(\mathfrak{g})$ satisface $Ad(a) = T$, se cumple $\xi = f$, además ξ satisface la ecuación de estructura*
$$d\xi + [\xi, \xi] = 0. \tag{3.39}$$

Demostración. 1. De la definición de ξ se sigue que para $X \in TM$
$$\xi(X) = \tau[\varphi][X][\varphi],$$
y para un marco $\tilde{s}$ tenemos que $[X] \in \mathfrak{g}$ y $[\varphi] \in Spin(\mathfrak{g})$ por lo que $\xi(X) = Ad([\varphi]^{-1})[X]$, esto concluye la prueba pues $Ad([\varphi]^{-1}) \in SO(\mathfrak{g})$.

2. Primero vamos a probar que si $Z : M \longrightarrow TM \oplus E$ es una sección invariante por la izquierda de $TM \oplus E$, entonces $\xi(Z) : M \longrightarrow \mathfrak{g}$ es una función constante.

Sea $X \in TM$, por el Lema 3.2.3 tenemos que
$$\partial_X \xi(Z) = \langle\langle \nabla_X Z \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle + \langle\langle Z \cdot \nabla_X \varphi, \varphi \rangle\rangle + \langle\langle Z \cdot \varphi, \nabla_X \varphi \rangle\rangle,$$
mientras que del Lema 3.2.2 se sigue que
$$\langle\langle Z \cdot \nabla_X \varphi, \varphi \rangle\rangle + \langle\langle Z \cdot \varphi, \nabla_X \varphi \rangle\rangle = (id + \tau)\langle\langle Z \cdot \nabla_X \varphi, \varphi \rangle\rangle.$$

Luego, como φ satisface la Ecuación (3.11), entonces
$$\begin{aligned} \tau[\nabla_X \varphi] &= \tau\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} \varepsilon_j e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi + \frac{1}{2}\Gamma(X) \cdot \varphi\right] \\ &= \tau[\varphi] \cdot \left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} \varepsilon_j e_j \cdot B(X, e_j) - \frac{1}{2}\Gamma(X)\right], \end{aligned}$$
donde la última igualdad es consecuencia de las propiedades de τ y del hecho de que $[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} \varepsilon_j e_j \cdot B(X, e_j) + \frac{1}{2}\Gamma(X)]$ es un bivector.

De lo anterior y usando que $\tau[Z] = [Z]$ se sigue que
$$\begin{aligned} \tau\langle\langle Z \cdot \nabla_X \varphi, \varphi \rangle\rangle &= \tau(\tau[\varphi] \cdot [Z] \cdot [\nabla_X \varphi]) \\ &= \tau[\nabla_X \varphi] \cdot [Z] \cdot [\varphi] \\ &= \tau[\varphi] \cdot \left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} \varepsilon_j e_j \cdot B(X, e_j) - \frac{1}{2}\Gamma(X)\right] \cdot [Z] \cdot [\varphi]. \end{aligned}$$

Ahora, consecuencia de los Lemas B.0.1 y B.0.2 tenemos lo siguiente que nos permite concluir que si Z es invariante por la izquierda y $X \in TM$ entonces $\partial_X \xi(Z) = 0$ y por lo tanto $\xi(Z)$ también es constante,

$$\begin{aligned}
(id+\tau)\langle\langle Z \cdot \nabla_X \varphi, \varphi\rangle\rangle &= \tau[\varphi] \cdot [\sum_{j=1}^{2} \varepsilon_j e_j \cdot B(X, e_j) - \Gamma(X), Z] \cdot [\varphi] \\
&= \tau[\varphi] \cdot [-\Gamma(X)(Z) + B(X, Z^T) - B^*(X, Z^N)] \cdot [\varphi] \\
&= -\langle\langle \nabla_X Z \cdot \varphi, \varphi\rangle\rangle.
\end{aligned}$$

Probemos ahora la existencia de T. Sea (e_1^o, e_2^o, e_3^o) una base ortonormal de $\mathfrak{g}$, consideremos el marco de campos invariantes $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ en $TM \oplus E$ que satisfacen $f(\underline{e}_i) = e_i^o$ para toda $i \in \{1, 2, 3\}$. De lo anterior tenemos que cada sección $Z \in \Gamma(TM \oplus E)$ se ve como $Z = \sum_{j=1}^{3} Z_j \underline{e}_j$ y

$$\xi(Z) = \sum_{j=1}^{3} Z_j \xi(\underline{e}_j),$$

donde $(\xi(\underline{e}_1), \xi(\underline{e}_2), \xi(\underline{e}_3))$ es una base ortonormal constante de $\mathfrak{g}$. Por lo tanto, si definimos $T : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ como la extensión lineal de $e_i^o \longmapsto \xi(\underline{e}_i)$, entonces $T \in SO(\mathfrak{g})$ y para toda $Z \in \Gamma(TM \oplus E)$

$$\begin{aligned}
(T \circ f)(Z) &= \sum_{j=1}^{3} Z_j T(f(\underline{e}_j)) \\
&= \sum_{j=1}^{3} Z_j T(e_j^o) \\
&= \sum_{j=1}^{3} Z_j \xi(\underline{e}_j) = \xi(Z).
\end{aligned}$$

3. Gracias al punto (2) de esta proposición podemos tomar $a \in Spin(\mathfrak{g})$ tal que $Ad(a) = T$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\langle\langle X \cdot \varphi \cdot a, \varphi \cdot a\rangle\rangle &= \tau([\varphi \cdot a]) \cdot [X \cdot \varphi \cdot a] \\
&= \tau(a) \cdot \tau[\varphi] \cdot [X] \cdot [\varphi] \cdot a \\
&= Ad(a^{-1})(\xi(X)) \\
&= Ad(a^{-1})(T \circ f(X)) = f(X).
\end{aligned}$$

Probemos ahora la segunda parte, si $X, Y \in \Gamma(TM)$ son tales que $\nabla X = 0 = \nabla Y$ en un punto, entonces

$$\begin{aligned}
\partial_X \xi(Y) &= \partial_X \langle\langle Y \cdot \varphi, \varphi\rangle\rangle \\
&= \langle\langle Y \cdot \nabla_X \varphi, \varphi\rangle\rangle + \langle\langle Y \cdot \varphi, \nabla_X \varphi\rangle\rangle \\
&= (id + \tau)\langle\langle Y \cdot \nabla_X \varphi, \varphi\rangle\rangle \\
&= -\frac{1}{2}(id + \tau)\langle\langle Y \cdot \sum_{j=1}^{2} \varepsilon_j e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi, \varphi\rangle\rangle + \\
&\quad + \frac{1}{2}(id + \tau)\langle\langle Y \cdot \Gamma(X) \cdot \varphi, \varphi\rangle\rangle.
\end{aligned}$$

Para desarrollar los términos de la igualdad anterior digamos que $X = \sum_{i=1}^{2} x_i e_i$ y $Y = \sum_{k=1}^{2} y_k e_k$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
Y \cdot \sum_{j=1}^{2} \varepsilon_j e_j \cdot B(X, e_j) &= \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} y_k \varepsilon_j e_k \cdot e_j \cdot B(X, e_j) \\
&= -\sum_{j} \varepsilon_j^2 y_j B(X, e_j) + \sum_{k \neq j} y_k e_k \cdot \varepsilon_j e_j \cdot B(X, e_j) \\
&= -B(X, Y) + \sum_{k \neq j} y_k \varepsilon_j e_k \cdot e_j \cdot B(X, e_j),
\end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
\langle\langle Y \cdot \sum_{j=1}^{2} \varepsilon_j e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi, \varphi\rangle\rangle &= \langle\langle -B(X, Y) \cdot \varphi, \varphi\rangle\rangle \\
&\quad + \sum_{k \neq j} \langle\langle y_k e_k \cdot \varepsilon_j e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi, \varphi\rangle\rangle
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\tau\langle\langle Y \cdot \sum_{j=1}^{2} \varepsilon_j e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi, \varphi\rangle\rangle &= \langle\langle -B(X, Y) \cdot \varphi, \varphi\rangle\rangle \\
&\quad - \sum_{k \neq j} \langle\langle y_k e_k \cdot \varepsilon_j e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi, \varphi\rangle\rangle,
\end{aligned}$$

de donde concluimos que

$$-\frac{1}{2}(id + \tau)\langle\langle Y \cdot \sum_{j=1}^{2} \varepsilon_j e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi, \varphi\rangle\rangle = \langle\langle B(X, Y) \cdot \varphi, \varphi\rangle\rangle. \quad (3.40)$$

Dado que $\tau\langle\langle Y\cdot\Gamma(X)\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle = -\langle\langle\Gamma(X)\cdot Y\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle$ tenemos por el Lema B.0.1 del Apéndice B que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(id+\tau)\langle\langle Y\cdot\Gamma(X)\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle &= \frac{1}{2}\tau[\varphi]\cdot([Y]\cdot[\Gamma(X)]-[\Gamma(X)]\cdot[Y])\cdot[\varphi]\\ &= -\tau[\varphi]([\Gamma(X)(Y)])[\varphi]\\ &= -\langle\langle\Gamma(X)(Y)\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle. \qquad (3.41)\end{aligned}$$

Sustituyendo (3.40) y (3.41) en $\partial_X\xi(Y)$ tenemos

$$\partial_X\xi(Y) = \langle\langle B(X,Y)\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle - \langle\langle\Gamma(X)(Y)\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle$$

e intercambiando los papeles de X y Y se obtiene que

$$\partial_Y\xi(X) = \langle\langle B(X,Y)\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle - \langle\langle\Gamma(Y)(X)\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle.$$

Finalmente, usando la propiedad de simetría (3.5) de Γ

$$\begin{aligned}d\xi(X,Y) &= \partial_X\xi(Y)-\partial_Y\xi(X)\\ &= \langle\langle\Gamma(Y)(X)-\Gamma(X)(Y)\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle\\ &= -\langle\langle[X,Y]\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle\\ &= -\xi([X,Y])\\ &= -[\xi(X),\xi(Y)].\end{aligned}$$

□

Mantenemos las hipótesis de la proposición anterior y suponemos que M es simplemente conexa. Consideramos además la integral de Darboux de ξ (donde φ se elige de manera que ξ satisface la ecuación de estructura $d\xi+[\xi,\xi]=0$), es decir, una aplicación diferenciable $F : M \longrightarrow G$ que satisface que $F^*\omega_G = \xi$ para ω_G la forma de Maurer Cartan descrita en (3.1), tal aplicación existe como consecuencia de la afirmación 3 en la Proposición 3.3.4.

Proposición 3.3.5. *Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. *$F : M \longrightarrow G$ es una isometría.*
2. *Si también para $X\in E$ definimos $\xi(X) = \langle\langle X\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle$, entonces la aplicación*

$$\begin{aligned}\Phi_E : E &\longrightarrow F(M)\times\mathfrak{g}\\ X\in E_m &\longmapsto (F(m),\xi(X))\end{aligned}$$

es un isomorfismo entre E y el haz normal de la inmersión F que preserva la métrica y que identifica a B con la segunda forma fundamental de F. En otras palabras, si B^F es la segunda forma fundamental de la inmersión, entonces

$$B^F(dF(X), dF(Y)) = \langle\langle B(X,Y)\cdot\varphi, \varphi\rangle\rangle,$$

para toda $X,\ Y \in TM$.

Demostración. De la definición del producto en el álgebra de Clifford tenemos que para toda $X, Y \in TM \oplus E$

$$\begin{aligned}
\langle \xi(X), \xi(Y)\rangle &= -\frac{1}{2}(\xi(X)\xi(Y) + \xi(Y)\xi(X)) \\
&= -\frac{1}{2}(\tau[\varphi][X][\varphi]\tau[\varphi][Y][\varphi] + \tau[\varphi][Y][\varphi]\tau[\varphi][X][\varphi]) \\
&= -\frac{1}{2}\tau[\varphi]([X][Y] + [Y][X])[\varphi] \\
&= \tau[\varphi]\langle X, Y\rangle[\varphi] \\
&= \langle X, Y\rangle,
\end{aligned}$$

lo que prueba que F es una isometría pues por hipótesis $dF(X) = \xi(X)$ y a la vez prueba también que Φ_E es una isometría de haces.

Veamos ahora que B es efectivamete la segunda forma fundamental de la inmersión, es decir, si NM denota el haz normal y $B^F : TM \times TM \longrightarrow NM$ la segunda forma fundamental de la inmersión, entonces

$$B^F(dF(X), dF(Y)) = \xi(B(X,Y)),$$

para todo $X, Y \in TM$.

Por definición, si el exponente N representa la proyección sobre el haz normal, entonces

$$B^F(dF(X), dF(Y)) = (\partial_X \xi(Y) + \Gamma(\xi(X))(\xi(Y)))^N,$$

para todo $X, Y \in TM$.

En la prueba de la Proposición 3.3.4 encontramos la fórmula

$$\partial_X \xi(Y) = \langle\langle B(X,Y)\cdot\varphi, \varphi\rangle\rangle - \langle\langle \Gamma(X)(Y)\cdot\varphi, \varphi\rangle\rangle,$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned}
B^F(dF(X), dF(Y)) &= (\partial_X \xi(Y) + \Gamma(\xi(X))(\xi(Y)))^N \\
&= \langle\langle B(X,Y)\cdot\varphi, \varphi\rangle\rangle^N - \langle\langle \Gamma(X)(Y)\cdot\varphi, \varphi\rangle\rangle^N \\
&\quad +\Gamma(\xi(X))(\xi(Y))^N.
\end{aligned}$$

Consecuencia de la Proposición 3.3.4 y de la ecuación (3.28) tenemos que $\langle\langle \Gamma(X)(Y)\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle = \Gamma(\xi(X))(\xi(Y))$ y por lo tanto

$$B^F(dF(X), dF(Y)) = \langle\langle B(X,Y)\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle^N,$$

además, como $\langle\langle B(X,Y)\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle$ no tiene componente tangente la prueba concluye. □

Demostración del Teorema 3.3.1. La implicación $1 \implies 2$ es consecuencia directa de las Proposiciones 3.3.4 y 3.3.5. Para demostrar el regreso, supongamos que M está inmersa en G y consideremos la sección $\varphi \in \Sigma G|_M$ dada por $\varphi = [\tilde{s}, 1_{Cl_{\mathfrak{g}}}]$, dicha sección satisface la fórmula de Gauss

$$\nabla_X\varphi = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\varepsilon_j e_j\cdot B(X,e_j)\cdot\varphi + \frac{1}{2}\Gamma(X)\cdot\varphi, \quad \varepsilon_j = g(e_j,e_j).$$

Además, como $[\varphi] = 1_{Cl_{\mathfrak{g}}}$

$$\begin{aligned} F^*\omega_G(X) &= \omega_G(dF(X)) && (3.42)\\ &= \omega_G(\tau[\varphi][X][\varphi]) && (3.43)\\ &= \omega_G([X]), && (3.44)\end{aligned}$$

por lo tanto $dF(X) = [X] = \tau[\varphi][X][\varphi] = \xi(X)$. □

Observación 3.3.6. *Si φ es una solución de (3.32) y a pertenece a $Spin(\mathfrak{g})$, entonces $\varphi\cdot a$ es también solución de (3.32). Más aún, las 1-formas asociadas ξ_φ y $\xi_{\varphi\cdot a}$ están relacionadas por*

$$\xi_{\varphi\cdot a} = \tau(a)\xi_\varphi a = Ad(a^{-1})\circ\xi_\varphi.$$

Recordemos que una 1-forma $\xi \in \Omega(M,G)$ es Darboux integrable si y sólo si ella satisface la ecuación de estructura $d\xi + [\xi,\xi] = 0$ (M es simplemente conexa). El teorema dice por lo tanto que si φ es solución de (3.32), es posible encontrar $a \in Spin(\mathfrak{g})$ de manera que $\varphi\cdot a$ es solución de dicha ecuación y tal que $\xi_{\varphi\cdot a}$ es Darboux integrable, hecho que hemos usado para probar $1 \implies 2$.

3.4 Versión intrínseca del teorema de inmersión en G

El Teorema 3.3.1 nos permite caracterizar la inmersión de una superficie riemanniana (o lorentziana) en función de un campo de espinores φ en el haz Σ, en esta sección vamos a ver que dicho teorema se puede reescribir de manera intrínseca, es decir, en términos de un campo de espinores ψ en el haz de espinores de M que sólo depende de la métrica en M y de un operador simétrico que está definido sobre TM.

La versión intrínseca del teorema se obtiene identificando el haz de espinores de la superficie con un subhaz de Σ, para ello necesitaremos modelos de las álgebras de Clifford de los espacios involucrados.

Llamamos cuaternios complejificados al conjunto

$$\mathbb{H}^{\mathbb{C}} = \{z_0 + z_1 I + z_2 J + z_3 K : z_i \in \mathbb{C}\},$$

con el producto que se obtiene de extender la operación de los cuaternios reales. Dicha álgebra tiene cómo forma cuadrática asociada a $\langle q, q \rangle = z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$, donde $q = z_0 + z_1 I + z_2 J + z_3 K$.

Lema 3.4.1. *El álgebra de Clifford del espacio $\mathbb{R}^{1,2}$ es isomorfa a $\mathbb{H}^{\mathbb{C}}$.*

Demostración. Sea (e_0, e_1, e_2) la base canónica de $\mathbb{R}^{1,2}$, es decir, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ si $i \neq j$ y $\langle e_0, e_0 \rangle = -1 = -\langle e_1, e_1 \rangle = -\langle e_2, e_2 \rangle$. Denotamos por $u : \mathbb{R}^{1,2} \longrightarrow \mathbb{H}^{\mathbb{C}}$ a la aplicación que se obtiene por linealidad de

$$\begin{array}{rcl} e_0 & \longmapsto & iI \\ e_1 & \longmapsto & J \\ e_2 & \longmapsto & JI = -K. \end{array}$$

Observe que si $i \neq j$, entonces $u(e_i)u(e_j) + u(e_j)u(e_i) = 0$, además $u(e_0)^2 = 1 = -u(e_1)^2 = -u(e_2)^2$, por lo tanto u es una aplicación de Clifford y existe un homomorfismo inyectivo de álgebras que la extiende

$$u : Cl_{1,2} \longrightarrow \mathbb{H}^{\mathbb{C}};$$

como $Cl_{1,2}$ y $\mathbb{H}^{\mathbb{C}}$ tienen la misma dimensión u es un isomorfismo. □

Definición 3.4.2. *Denotamos por $Cl^{\circ}_{r,s}$ a la subálgebra de $Cl_{r,s}$ que consta de los elementos en $Cl_{r,s}$ que quedan fijos bajo la siguiente aplicación*

$$\begin{array}{rcl} Cl_{r,s} & \longrightarrow & Cl_{r,s} \\ e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_k} & \longmapsto & (-1)^k e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_k}. \end{array}$$

Observación 3.4.3. *El grupo $Spin(r,s)$ está contenido en $\overset{\circ}{Cl}_{r,s}$ y además actúa en dicha álgebra por multiplicación.*

Observación 3.4.4. *Identificando a $\mathbb{R}^{1,2}$ con el espacio generado por el conjunto $\{iI, J, K\}$ se puede probar que álgebra de elementos pares de $Cl_{1,2}$ es isomorfa a*

$$\{q_0 + Iq_1 + Jq_2 i + Jq_3 i : q_i \in \mathbb{R}\}.$$

En el siguiente lema usaremos que $Cl_{0,2}$ es isomorfa al álgebra de los cuaterniones reales $\mathbb{H} = \{\sigma_0 + \sigma_1 I + J(\sigma_2 - I\sigma_3)\}$ y que por lo tanto $Spin(0,2) = \{\sigma_0 + \sigma_1 I : \sigma_0^2 + \sigma_1^2 = 1\}$.

Para $Spin(0,2)$ consideramos las representaciones

$$\rho_1 : Spin(0,2) \longrightarrow Gl(Cl_{0,2}) \quad \text{y} \quad \rho_2 : Spin(0,2) \subset Spin(1,2) \longrightarrow Gl(\overset{\circ}{Cl}_{1,2}),$$

ambas dadas por la multiplicación a la izquierda. El lema siguiente establece que ρ_1 y ρ_2 son equivalentes, en otras palabras, que los espacios $Cl_{0,2}$ y $\overset{\circ}{Cl}_{1,2}$ son espacios de representación de $Spin(0,2)$ isomorfos.

Lema 3.4.5. *El isomorfismo de espacios vectoriales*

$$\begin{array}{rccl} f: & Cl_{0,2} & \longrightarrow & \overset{\circ}{Cl}_{1,2} \\ & \sigma_0 + \sigma_1 I + J(\sigma_2 - I\sigma_3) & \longmapsto & \sigma_0 + \sigma_1 I + iJ(\sigma_2 - I\sigma_3) \end{array}$$

induce un isomorfismo entre las representaciones ρ_1 y ρ_2 del grupo $Spin(0,2)$.

Demostración. Vamos a probar que f respeta la acción de $Spin(0,2)$, es decir, si $g \in Spin(0,2)$ y $\sigma \in Cl_{0,2}$, entonces $f(g\sigma) = gf(\sigma)$. Digamos que $g = g_0 + Ig_1$ y $\sigma = \sigma_0 + I\sigma_1 + J(\sigma_2 - I\sigma_3)$, entonces

$$g\sigma = (g_0 + Ig_1)(\sigma_0 + I\sigma_1) + J(g_0 - Ig_1)(\sigma_2 - I\sigma_3)$$

y por tanto

$$f(g\sigma) \;=\; (g_0 + Ig_1)(\sigma_0 + I\sigma_1) + iJ(g_0 - Ig_1)(\sigma_2 - I\sigma_3) = gf(\sigma).$$

Usando lo anterior tenemos que la función $\gamma_f : Gl(Cl_{0,2}) \longrightarrow Gl(\overset{\circ}{Cl}_{1,2})$, $T \longmapsto fTf^{-1}$ hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} Gl(Cl_{0,2}) \arrow[r, "\gamma_f"] & Gl(\overset{\circ}{Cl}_{1,2}) \\ Spin(0,2) \arrow[u, "\rho_1"] \arrow[r, "Id"] & Spin(0,2), \arrow[u, "\rho_2"'] \end{tikzcd}$$

y concluimos que γ_f es el isomorfismo de representaciones deseado. $\square$

Observación 3.4.6. *Si en los espacios vectoriales $Cl_{0,2}$ y $Cl^{\circ}_{1,2}$ consideramos las estructuras complejas dadas por la respectiva multiplicación por I por la derecha, entonces el isomorfismo $f : Cl_{0,2} \longrightarrow Cl^{\circ}_{1,2}$ del lema anterior es $\mathbb{C}$-lineal.*

El siguiente lema nos permitirá probar la Proposición 3.4.9 de la sección que sigue.

Lema 3.4.7. *Si $x \in \mathbb{R}^2$ y $\sigma \in Cl_{0,2}$, entonces $f(x \cdot \sigma) = ie_0 \cdot x \cdot f(\sigma)$, donde i es la estructura compleja de $Cl^{\circ}_{1,2}$ dada por la multiplicación por I por la derecha.*

Demostración. Tomemos $x = J(x_1 - Ix_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\sigma = \sigma_0 + I\sigma_1 + J(\sigma_2 - I\sigma_3) \in Cl_{0,2}$, así que

$$x \cdot \sigma = J(x_1 - Ix_2)(\sigma_0 + I\sigma_1) - (x_1 + Ix_2)(\sigma_2 - I\sigma_3),$$

y por lo tanto

$$f(x \cdot \sigma) = iJ(x_1 - Ix_2)(\sigma_0 + I\sigma_1) - (x_1 + Ix_2)(\sigma_2 - I\sigma_3).$$

Por otro lado, $f(\sigma) = \sigma_0 + I\sigma_1 + iJ(\sigma_2 - I\sigma_3)$ y así

$$x \cdot f(\sigma) = J(x_1 - Ix_2)(\sigma_0 + I\sigma_1) - i(x_1 + Ix_2)(\sigma_2 - I\sigma_3).$$

Recordando que la estructura compleja de $Cl_{0,2}$ es multiplicar por I a la derecha y que e_0 se identifica con iI se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
ie_0 \cdot x \cdot f(\sigma) &= iIx \cdot f(\sigma)I \\
&= iI(J(x_1 - Ix_2)(\sigma_0 + I\sigma_1) - i(x_1 + Ix_2)(\sigma_2 - I\sigma_3))I \\
&= (-iJ(x_1 - Ix_2)(\sigma_0 + I\sigma_1) + (x_1 + Ix_2)(\sigma_2 - I\sigma_3))I^2 \\
&= iJ(x_1 - Ix_2)(\sigma_0 + I\sigma_1) - (x_1 + Ix_2)(\sigma_2 - I\sigma_3) \\
&= f(x \cdot \sigma).
\end{aligned}$$

$\square$

3.4.1 Inmersión de una superficie riemanniana

Sean M una superficie riemanniana simplemente conexa, $E \longrightarrow M$ el haz vectorial trivial $M \times \mathbb{R}$ con métrica $-d\nu^2$ en cada fibra. Consideramos además una forma bilineal simétrica $B : TM \times TM \longrightarrow E$ y $N \in \Gamma(E)$ una sección unitaria de E, $\langle N, N\rangle = -1$.

Definimos a $S : TM \longrightarrow TM$ como el operador simétrico asociado a B que está determinado por la relación $\langle B(X,Y), N\rangle = \langle S(X), Y\rangle$, para todo $X, Y \in TM$, de hecho,

$$S(X) = \sum_j e_j \langle B(X, e_j), N\rangle,$$

para todo $X \in TM$.

Denotamos por $\widetilde{Q}_M$ y $\widetilde{Q}_E$ a las respectivas estructuras espinoriales en M y E, en este caso vale la pena mencionar que dado que E es trivial, entonces su haz de marcos ortonormales es $Q_E = M \times \{1\}$ y por lo tanto $\widetilde{Q}_E = M \times \{\pm 1\}$ es también trivial.

Más adelante en (3.54) y (3.55) definiremos de manera precisa los siguientes términos que por ahora nos permiten enunciar el teorema principal de esta sección,

$$\Gamma_1(X) = \sum_i \varepsilon_i \langle X, T_i\rangle \sum_{j<k} \varepsilon_j \varepsilon_k \Gamma_{ij}^k \frac{1}{2}(T_j \cdot T_k - T_k \cdot T_j)$$

y

$$\Gamma_2(X) = \sum_i \varepsilon_i \langle X, T_i\rangle \sum_{j<k} \varepsilon_j \varepsilon_k \Gamma_{ij}^k (\nu_j T_k - \nu_k T_j),$$

donde $X \in TM$.

Teorema 3.4.8. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe una inmersión isométrica de M en G con operador de forma S.*
2. *Existe $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ tal que $|\psi^+|^2 - |\psi^-|^2 = 1$ y que satisface*

$$\nabla_X \psi = \frac{i}{2} S(X) \cdot \psi + \frac{1}{2}\Gamma_1(X) \cdot \psi + \frac{i}{2}\Gamma_2(X) \cdot \psi. \tag{3.45}$$

Recordemos los haces que se definieron en la sección anterior, $\Sigma M = \widetilde{Q}_M \times_{\rho_1} Cl_{0,2}$ en (3.14) y $\Sigma = \widetilde{Q}_M \times_M \widetilde{Q}_E \times_\rho Cl_{1,2}$ en (3.15).

Los siguientes resultados nos ayudan a probar el teorema que acabamos de enunciar.

En lo que sigue vamos a probar que ΣM es isomorfo a un subhaz de Σ cuando en este último haz consideramos que ρ es la restricción

$$\rho : Spin(0,2) \subset Spin(0,2) \times Spin(1,0) \longrightarrow Cl_{1,2}.$$

Proposición 3.4.9. *Existe un isomorfismo de haces vectoriales $\mathbb{C}$-lineal entre ΣM y un subhaz de $\widetilde{Q}_{_M} \times_{_M} \widetilde{Q}_{_E} \times_\rho Cl_{1,2}$*

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{Q}_{_M} \times_{\rho_1} Cl_{0,2} & \longrightarrow & \widetilde{Q}_{_M} \times_{_M} \widetilde{Q}_{_E} \times_\rho Cl^o_{1,2} \\ \psi & \longmapsto & \psi^*, \end{array} \tag{3.46}$$

que satisface

$$(\nabla_{_X}\psi)^* = \nabla_{_X}\psi^*, \tag{3.47}$$

$$(X \cdot_M \psi)^* = iN \cdot X \cdot \psi^*, \tag{3.48}$$

$$|\psi^+|^2 - |\psi^-|^2 = 1 \tag{3.49}$$

donde N es una sección unitaria de E, es decir, $\langle N, N\rangle = -1$.

Demostración. Como mencionamos al principio de esta sección, el haz de marcos Q_E es trivial y se identifica con M, así que podemos considerar la sección global $s_E = N$ y $\widetilde{s}_E$ como un levantamiento de la misma, digamos $\widetilde{s}_E : M \longrightarrow \{\pm 1\}$ dada por $m \longmapsto +1$. Ahora, gracias al isomorfismo f del Lema 3.4.7 obtenemos la identificación que deseamos entre los haces,

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{Q}_{_M} \times_\rho \Sigma_2 & \longrightarrow & \widetilde{Q}_{_M} \times_{_M} \widetilde{Q}_{_E} \times_\rho Cl^\circ_{1,2} \\ \psi := \left[\widetilde{s}_{_M}, \sigma\right] & \longmapsto & \left[(\widetilde{s}_{_M}, \widetilde{s}_{_E}), f(\sigma)\right] =: \psi^*. \end{array} \tag{3.50}$$

Probemos primero que el isomorfismo satisface (3.47), localmente $\psi = \left[\widetilde{s}_{_M}, \sigma\right]$, para $\widetilde{s}_{_M} : U \subset M \longrightarrow \widetilde{Q}_{_M}$ sección local de $\widetilde{Q}_{_M}$ y $\sigma : U \subset M \longrightarrow \Sigma_2$ una función diferenciable.

Sabemos que

$$\nabla_{_X}\psi = \left[\widetilde{s}_{_M}, d\sigma(X) + d\rho((\widetilde{\omega}_{_M} \circ d\widetilde{s}_{_M})(X))\sigma\right],$$

y por definición

$$(\nabla_{_X}\psi)^* = \left[(\widetilde{s}_{_M}, \widetilde{s}_{_E}), f(d\sigma(X) + d\rho((\widetilde{\omega}_{_M} \circ d\widetilde{s}_{_M})(X))\sigma)\right].$$

Por otro lado,

$$\nabla_{_X}\psi^* = \left[(\widetilde{s}_{_M}, \widetilde{s}_{_E}), d(f\circ\sigma)(X) + d\rho((\widetilde{\omega}_{_M} \oplus \widetilde{\omega}_{_E}) \circ d(\widetilde{s}_{_M} + \widetilde{s}_{_E}))(X) f(\sigma)\right],$$

y de la definición de $\widetilde{s}_E$ tenemos que $d\widetilde{s}_E = 0$ y por lo tanto

$$\nabla_X \psi^* \;=\; \left[(\widetilde{s}_M, \widetilde{s}_E), d(f\circ\sigma)(X) + d\rho(\widetilde{\omega}_M \circ d\widetilde{s}_M(X)) f(\sigma)\right].$$

Para concluir, observe que $\widetilde{\omega}_M(d\widetilde{s}_M(X)) \in \mathfrak{Spin}(\mathfrak{o},\mathfrak{2})$ el álgebra de Lie de $Spin(0,2)$ que está contenida en $Cl^{\circ}_{0,2}$ y además $d\rho(\widetilde{\omega}_M(d\widetilde{s}_M(X)))(\sigma) = \widetilde{\omega}_M(d\widetilde{s}_M(X))\cdot\sigma$. Así como se prueba en el Lema 3.4.5 podemos probar que ya que $\widetilde{\omega}_M(d\widetilde{s}_M(X)) \in Cl^{\circ}_{0,2}$, entonces $f(\rho(\widetilde{\omega}_M(d\widetilde{s}_M(X)))\sigma) = \rho(\widetilde{\omega}_M(d\widetilde{s}_M(X)))f(\sigma)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\nabla_X \psi^* &= \left[(\widetilde{s}_M, \widetilde{s}_E), f(d\sigma(X)) + f(d\rho(\widetilde{\omega}_M \circ d\widetilde{s}_M(X))\sigma)\right] \\
&= (\nabla_X \psi)^*.
\end{aligned}$$

Respecto al comportamiento del isomorfismo $\psi \longrightarrow \psi^*$ con la multiplicación de Clifford tenemos que por definición

$$X\cdot\psi = \left[\widetilde{s}_M, [X]\cdot\sigma\right]$$

y como consecuencia del Lema 3.4.7

$$\begin{aligned}
(X\cdot\psi)^* &= \left[(\widetilde{s}_M, \widetilde{s}_E), f([X]\cdot\sigma)\right] \\
&= \left[(\widetilde{s}_M, \widetilde{s}_E), ie_0\cdot[X]\cdot f(\sigma)\right] \\
&= iN\cdot X\cdot\left[(\widetilde{s}_M, \widetilde{s}_E), f(\sigma)\right] \\
&= iN\cdot X\cdot\psi^*,
\end{aligned}$$

donde se define $N = [(\widetilde{s}_M, \widetilde{s}_E), e_0]$. □

Recordemos la notación de la Sección 3.3 donde $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ es una base ortonormal de $TM \oplus E$ compuesta de campos invariantes para los cuales existen campos $T_k \in TM$, funciones $\nu_k \in C^\infty(M)$ y una sección unitaria N de E de manera que para toda $k \in \{1,2,3\}$ se cumple que $\underline{e}_k = T_k + \nu_k N$.

Lema 3.4.10. *Para todo $X \in TM$,*

$$\Gamma(X) = \sum_i \varepsilon_i \langle X, T_i\rangle \sum_{j<k} \varepsilon_j\varepsilon_k \Gamma^k_{ij}\left(\frac{1}{2}(T_j\cdot T_k - T_k\cdot T_j) + (\nu_k T_j - \nu_j T_k)\cdot N\right), \tag{3.51}$$

donde $\varepsilon_i = \langle \underline{e}_i, \underline{e}_i\rangle = \pm 1$.

Demostración. De acuerdo a la Proposición B.0.1 tenemos que Γ está representado por el siguiente bivector

$$\Gamma(X) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} \varepsilon_j \Gamma(X)(\underline{e}_j), \quad \varepsilon_j = \langle \underline{e}_j, \underline{e}_j \rangle = \pm 1.$$

Usando la expresión $X = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i \langle X, \underline{e}_i \rangle \underline{e}_i$ y recordando que $\Gamma(\underline{e}_i)(\underline{e}_j) = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_k \Gamma_{ij}^k \underline{e}_k$ podemos escribir a $\Gamma(X)$ como

$$\Gamma(X) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i \langle X, \underline{e}_i \rangle \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_j \varepsilon_k \Gamma_{ij}^k \underline{e}_j \cdot \underline{e}_k.$$

La sección N satisface que $\langle N, N \rangle = \varepsilon$, donde ε es -1 si M es riemanniana y 1 si M es lorentziana.

Luego, X es tangente a M y por lo tanto $\langle X, \underline{e}_i \rangle = \langle X, T_i \rangle$. Además, se cumple que $\underline{e}_j \cdot \underline{e}_k = -\underline{e}_k \cdot \underline{e}_j$ para $j \neq k$ y gracias a la Observación 3.3.2 tenemos que $\Gamma_{ij}^k = -\Gamma_{ik}^j$, así que

$$\Gamma(X) = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i \langle X, T_i \rangle \sum_{j<k} \varepsilon_j \varepsilon_k \Gamma_{ij}^k \underline{e}_j \cdot \underline{e}_k. \tag{3.52}$$

Vamos a encontrar otra expresión para $\underline{e}_j \cdot \underline{e}_k$, primero

$$\underline{e}_j \cdot \underline{e}_k = T_j \cdot T_k - \varepsilon \nu_j \nu_k + (\nu_k T_j - \nu_j T_k) \cdot N,$$

además, $\langle T_j, T_k \rangle = -\varepsilon \nu_j \nu_k$ y de la definición de álgebra de Clifford $-\frac{1}{2}(T_j \cdot T_k + T_k \cdot T_j) = \langle T_j, T_k \rangle$, así que $T_j \cdot T_k - \varepsilon \nu_j \nu_k = \frac{1}{2}(T_j \cdot T_k - T_k \cdot T_j)$ y

$$\underline{e}_j \cdot \underline{e}_k = \frac{1}{2}(T_j \cdot T_k - T_k \cdot T_j) + (\nu_k T_j - \nu_j T_k) \cdot N, \tag{3.53}$$

sustituyendo (3.53) en (3.52) se obtiene el resultado. □

Lema 3.4.11. *Para $T_j, T_k \in \Gamma(TM)$, $\nu_j, \nu_k \in C^\infty(M)$, ν sección unitaria de E y ψ campo de espinores de ΣM tenemos las siguientes igualdades:*

1. $$(T_j \cdot T_k - T_k \cdot T_j) \cdot \psi^* = ((T_j \cdot T_k - T_k \cdot T_j) \cdot \psi)^*,$$

2. $$(\nu_k T_j - \nu_j T_k) \cdot \nu \cdot \psi^* = (i(\nu_k T_j - \nu_j T_k) \cdot \psi)^*,$$

3.
$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} e_j \cdot B(X,e_j)\cdot \psi^* = \left(\frac{i}{2}S(X)\cdot\psi\right)^*.$$

Demostración. Sabemos que $N \cdot N = -\langle N, N\rangle = 1$. Gracias a la Proposición 3.4.9 tenemos lo siguiente

1.
$$\begin{aligned}(T_j \cdot T_k - T_k \cdot T_j)\cdot\psi^* &= (i\nu\cdot T_j\cdot i\nu\cdot T_k - i\nu\cdot T_k\cdot i\nu\cdot T_j)\cdot\psi^*\\ &= (i\nu\cdot T_j\cdot(T_k\cdot\psi)^* - i\nu\cdot T_k\cdot(T_j\cdot\psi)^*)\\ &= ((T_j\cdot T_k\cdot\psi)^* - (T_k\cdot T_j\cdot\psi)^*)\\ &= ((T_j\cdot T_k - T_k\cdot T_j)\cdot\psi)^*.\end{aligned}$$

   Para demostrar las otras igualdades usaremos además que i conmuta con el isomorfismo que denotamos con $*$ y por lo tanto

2.
$$\begin{aligned}(\nu_k T_j - \nu_j T_k)\cdot N\cdot\psi^* &= i(iN\cdot(\nu_k T_j - \nu_j T_k)\cdot\psi^*)\\ &= i((\nu_k T_j - \nu_j T_k)\cdot\psi)^*\\ &= (i(\nu_k T_j - \nu_j T_k)\cdot\psi)^*.\end{aligned}$$

3. Finalmente,
$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} e_j\cdot B(X,e_j)\cdot\psi^* &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} e_j\cdot\langle B(X,e_j),N\rangle N\cdot\psi^*\\ &= \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{2} i\langle B(X,e_j),N\rangle N\cdot e_j\cdot\psi^*\\ &= \left(\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{2}\langle B(X,e_j),N\rangle e_j\cdot\psi\right)^*\\ &= \left(\frac{i}{2}S(X)\cdot\psi\right)^*.\end{aligned}$$

□

Ahora ya podemos definir los términos $\Gamma_1(X)$ y $\Gamma_2(X)$ que aparecen en el Teorema 3.4.8

$$\Gamma_1(X) = \sum_i \varepsilon_i\langle X, T_i\rangle \sum_{j<k}\varepsilon_j\varepsilon_k\Gamma_{ij}^k\frac{1}{2}(T_j\cdot T_k - T_k\cdot T_j) \tag{3.54}$$

y

$$\Gamma_2(X) = \sum_i \varepsilon_i \langle X, T_i \rangle \sum_{j<k} \varepsilon_j \varepsilon_k \Gamma_{ij}^k (\nu_j T_k - \nu_k T_j), \tag{3.55}$$

donde $X \in TM$.

Demostración del Teorema 3.4.8. Vamos a probar que la existencia de un campo de espinores $\psi \in \Sigma M$ que satisface (3.45) es equivalente a la existencia de un campo de espinores $\varphi \in U\Sigma$ que satisface la ecuación (3.11) y como consecuencia del Teorema 3.3.1 obtendremos que 1 y 2 son equivalentes.

Sea $\psi \in \Sigma M$ que satisface (3.45), si aplicamos el isomorfismo del Lema 3.46 a ambos lados de dicha ecuación se obtiene de los Lemas 3.4.10 y 3.4.11 que

$$(\nabla_X \psi)^* = (\frac{i}{2} S(X) \cdot \psi)^* + (\frac{1}{2} \Gamma_1(X) \cdot \psi + \frac{i}{2} \Gamma_2(X) \cdot \psi)^* \tag{3.56}$$

es equivalente a

$$\nabla_X \psi^* = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \psi^* + \frac{1}{2} \Gamma(X) \cdot \psi^*, \tag{3.57}$$

lo que concluye la prueba si definimos φ como ψ^*. □

El siguiente corolario nos da una prueba independiente de la que obtuvieron en [37] para caracterizar las inmersiones de superficies en $\mathbb{R}^{1,2}$, ver también [17] donde las inmersiones en tal espacio se obtienen vía dos campos de espinores.

Corolario 3.4.12. *Para M una superficie riemanniana simplemente conexa, $S : TM \longrightarrow TM$ un operador simétrico y $G = \mathbb{R}^{1,2}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe una inmersión isométrica de M en $\mathbb{R}^{1,2}$ con operador de forma S.*

2. *Existe $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ tal que $|\psi^+|^2 - |\psi^-|^2 = 1$ y que satisface*

$$\nabla_X \psi = \frac{i}{2} S(X) \cdot \psi \tag{3.58}$$

Demostración. En este caso todos los Γ_{ij}^k son cero y por lo tanto $\Gamma(X) = 0$ para todo $X \in TM$. □

Proposición 3.4.13. *Si ψ y ψ^* son como en el Teorema 3.4.8, entonces la 1-forma del Teorema 3.3.1 $\xi(X)$ tiene la siguiente representación explícita en términos de los componentes de ψ*

$$\xi(X) = 2iI\Im m\langle X\cdot\psi^-, \psi^+\rangle + J(\langle X\cdot\psi^+, \alpha(\psi^+)\rangle - \langle X\cdot\psi^-, \alpha(\psi^-)\rangle),$$

donde $\alpha : \Sigma M \longrightarrow \Sigma M$ es una estructura cuaterniónica natural, definida en el Apéndice A.

Demostración. Usando la descomposición $\Sigma M = \Sigma M^+ \oplus \Sigma M^-$ que aparece en el Apéndice A, tenemos que si $\psi = \psi^+ + \psi^-$, entonces $\psi^* = \psi^+ + i\psi^-$ y por lo tanto $\tau([\psi^*]) = \overline{[\psi^+]} - i[\psi^-]$. Así que $\xi(X)$ se escribe como

$$\begin{aligned}\xi(X) &= \tau([\psi^*])\cdot[X]\cdot[\psi^*]\\ &= \underbrace{\overline{[\psi^+]}\,[X]\,[\psi^+] + \overline{[\psi^-]}\,[X]\,[\psi^-]}_{A} + i\underbrace{(\overline{[\psi^+]}\,[X]\,[\psi^-] - \overline{[\psi^-]}\,[X]\,[\psi^+])}_{B}.\end{aligned}$$

Cabe mencionar que en los siguientes cálculos usamos que si $\psi = \psi^+ + \psi^-$, entonces sus componentes son $[\psi^+] = \sigma_0 + \sigma_1 I$ y $[\psi^-] = J(\sigma_2 + \sigma_3 I)$ para $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathbb{R}$ y J, I en los cuaternios. Además, el producto hermitiano en ΣM es

$$\begin{array}{ccc}\Sigma M \times \Sigma M & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ ([\widetilde{s}, \sigma], [\widetilde{s}, \phi]) & \longmapsto & \langle \sigma, \phi\rangle,\end{array}$$

donde $\langle\sigma,\phi\rangle = \langle\sigma^+,\phi^+\rangle + \langle\sigma^-,\phi^-\rangle$ para $\sigma, \phi \in \mathbb{H}$ y $\langle\sigma^+,\phi^+\rangle = \sigma^+\overline{\phi^+}$, $\langle\sigma^-,\phi^-\rangle = -\sigma^-\phi^-$, ver Apéndice A.

De las definiciones de producto hermitiano en Σ^+ y Σ^- tenemos que $\overline{[\psi^+]}\,[X]\,[\psi^-] = \langle X\cdot\psi^-, \psi^+\rangle$ y $-\overline{[\psi^-]}\,[X]\,[\psi^+] = \langle X\cdot\psi^+, \psi^-\rangle$, así que

$$\begin{aligned}B &= \langle X\cdot\psi^-, \psi^+\rangle + \langle X\cdot\psi^+, \psi^-\rangle\\ &= \langle X\cdot\psi^-, \psi^+\rangle - \overline{\langle X\cdot\psi^-, \psi^+\rangle}\\ &= 2I\Im m\langle X\cdot\psi^-, \psi^+\rangle.\end{aligned}$$

De la definición de α se sigue que $[\psi^-] = -J\overline{[\psi^-]J} = -J\overline{[\alpha(\psi^-)]}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}\overline{[\psi^-]}\,[X]\,[\psi^-] &= -J\overline{[\alpha(\psi^-)]}\,[X]\,[\psi^-]\\ &= -J\langle X\cdot\psi^-, \alpha(\psi^-)\rangle,\end{aligned}$$

en tanto que

$$\begin{aligned}
\overline{[\psi^+]}\,[X]\,\left[\psi^+\right] &= -J[\psi^+]J\,[X]\,\left[\psi^+\right] \\
&= -J[\alpha(\psi^+)]\,[X]\,\left[\psi^+\right] \\
&= J\langle X\cdot\psi^+,\alpha(\psi^+)\rangle,
\end{aligned}$$

sumando los resultados de los últimos cálculos obtenemos que

$$A = J(\langle X\cdot\psi^+,\alpha(\psi^+)\rangle - \langle X\cdot\psi^-,\alpha(\psi^-)\rangle).$$

□

3.4.2 Inmersión de una superficie lorentziana

Sean M una superficie lorentziana orientable y $E \longrightarrow M$ el haz vectorial trivial $M\times\mathbb{R}$ con métrica $d\nu^2$ en cada fibra. Denotamos por $\widetilde{Q}_M$ y $\widetilde{Q}_E$ las estructuras espinoriales en M y E, respectivamente. Como ya dijimos en la sección anterior, el haz de marcos Q_E se identifica con M y por lo tanto $\widetilde{Q}_E = M\times\{\pm1\}$.

En este caso el espacio tangente de M en cada punto es un plano lorentziano que es $\mathbb{R}^2$ con la métrica $-dx^2+dy^2$ y es por ello que el haz de espinores de M se define como $\Sigma M = \widetilde{Q}_M \times_{\rho_1} Cl_{1,1}$, para $\rho_1 : Spin(1,1) \longrightarrow Gl(Cl_{1,1})$ la representación que se obtiene por multiplicación a la izquierda.

Dada una forma bilineal simétrica $B : TM\times TM \longrightarrow E$ definimos

$$S(X) = \sum_{j=1}^{2}\varepsilon_j\langle B(X,e_j),N\rangle e_j,$$

para todo $X\in TM$, N sección unitaria de E y $\varepsilon_j = \langle e_j,e_j\rangle = \pm1$.

Adelantamos que para ciertos $T_i\in TM$, $\nu_i\in C^\infty(M)$ con $1\le i\le 3$ definimos en (3.64) lo siguiente

$$\widetilde{\Gamma}(X) = \sum_i \varepsilon_i\langle X,T_i\rangle\sum_{j<k}\varepsilon_j\varepsilon_k\Gamma_{ij}^k\left(\frac{1}{2}(T_j\cdot T_k - T_k\cdot T_j) + (\nu_k T_j -, \nu_j T_k)\right),$$

para todo $X\in TM$. Tal definición nos permite enunciar el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.4.14. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe una inmersión isométrica de M en G con operador de forma S.*
2. *Existe $\psi \in \Sigma M$ tal que $|\psi^+|^2 - |\psi^-|^2 = 1$ y que satisface*

$$\nabla_X \psi = -\frac{1}{2} S(X) \cdot \psi + \frac{1}{2} \widetilde{\Gamma}(X) \cdot \psi. \tag{3.59}$$

Sean (e_0, e_1, e_2) base ortonormal de $\mathbb{R}^{1,2}$ con $-\langle e_0, e_0 \rangle = 1 = \langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle$ y $Cl^\circ_{1,2}$ como en la Observacion 3.4.4.

Proposición 3.4.15. *Existe un isomorfismo de álgebras de Clifford*

$$h : Cl_{1,1} \longrightarrow Cl^\circ_{1,2},$$

que además satisface que para todo $g \in Spin(1,1)$ y $x \in Cl_{1,1}$ se cumple $h(g \cdot x) = g \cdot h(x)$.

Demostración. Identificamos a $\mathbb{R}^{1,1}$ con el subespacio de $\mathbb{R}^{1,2}$ generado por $\{e_0, e_1\}$. Consideramos $h : \mathbb{R}^{1,1} \longrightarrow Cl^\circ_{12}$ dada por $x \longmapsto x \cdot e_2$. Observe que $h(x)^2 = -\langle x, x \rangle$ y por lo tanto h es una aplicación de Clifford que se extiende a un morfismo inyectivo de álgebras de Clifford $h : Cl_{1,1} \longrightarrow Cl^\circ_{1,2}$, dado que ambas álgebras tienen la misma dimensión tenemos que h es un isomorfismo.

Para la segunda parte tenemos como consecuencia de lo que acabamos de probar que $h(g \cdot x) = h(g) \cdot h(x)$ para todo $g \in Spin(1,1)$ y $x \in Cl_{1,1}$. Además, como $Spin(1,1) \subset Cl^\circ_{1,1}$ tenemos que $h(g) = g$ lo que concluye la prueba. $\square$

En está sección usamos el haz $\widetilde{Q}_M \times_M \widetilde{Q}_E \times_\rho Cl_{1,2}$ como se definió en (3.20).

Proposición 3.4.16. *Sean $\widetilde{s}_M : M \longrightarrow \widetilde{Q}_M$ una sección de $\widetilde{Q}_M$ y $\widetilde{s}_E : M \longrightarrow \widetilde{Q}_E$ una sección unitaria del haz $\widetilde{Q}_E$. Si h es como en la Proposición 3.4.15, entonces*

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}_M \times_{\rho_1} Cl_{11} &\longrightarrow \widetilde{Q}_M \times_M \widetilde{Q}_E \times_\rho Cl^\circ_{1,2} \\ \psi := \left[\widetilde{s}_M, \sigma\right] &\longmapsto \left[(\widetilde{s}_M, \widetilde{s}_E), h(\sigma)\right] =: \psi^*, \end{aligned} \tag{3.60}$$

es un isomorfismo de haces que satisface las siguientes propiedades

$$(\nabla_X \psi)^* = \nabla_X \psi^*, \tag{3.61}$$

$$(X \cdot_M \psi)^* = X \cdot N \cdot \psi^*, \tag{3.62}$$

$$|\psi^+|^2 - |\psi^-|^2 = 1 \tag{3.63}$$

para todo $X \in \Gamma(TM)$ y $N = s_E$.

Demostración. La segunda parte de la Proposición 3.4.15 implica que la aplicación $\psi \longmapsto \psi^*$ de la proposición está bien definida.

Por definición tenemos que

$$\nabla_X \psi^* = [(\tilde{s}_M, \tilde{s}_E), d(h(\sigma))(X) + \rho_*((\omega_M \oplus \omega_E)(\tilde{s}_{M*} + \tilde{s}_{E*})(X))(h(\sigma))],$$

como h es lineal $d(h(\sigma))(X) = h(d\sigma(X))$, además $\tilde{s}_{E*} = 0$ y por lo tanto

$$\nabla_X \psi^* = [(\tilde{s}_M, \tilde{s}_E), h(d\sigma(X)) + \rho_*(\omega_M(\tilde{s}_{M*})(X))(h(\sigma))],$$

para concluir usamos que $\rho_*(\omega_M(\tilde{s}_{M*})(X)) \subset Cl^\circ_{1,1}$ y de acuerdo a la Proposición 3.4.15 se tiene que $\rho_*(\omega_M(\tilde{s}_{M*})(X))(h(\sigma)) = h(\rho_*(\omega_M(\tilde{s}_{M*})(X))\sigma)$.

Para probar (3.62) tenemos que si $\psi = [\tilde{s}_M, \sigma]$, entonces

$$\begin{aligned}
(X \cdot_M \psi)^* &= [(\tilde{s}_M, \tilde{s}_E), h([X] \cdot \sigma)] \\
&= [(\tilde{s}_M, \tilde{s}_E), [X] \cdot e_2 \cdot h(\sigma)] \\
&= X \cdot N \cdot [(\tilde{s}_M, \tilde{s}_E), h(\sigma)] \\
&= X \cdot N \cdot \psi^*.
\end{aligned}$$

$\square$

Usando la notación de la sección anterior definimos $\tilde{\Gamma}(X)$ del Teorema 3.4.14,

$$\tilde{\Gamma}(X) = \sum_i \varepsilon_i \langle X, T_i \rangle \sum_{j<k} \varepsilon_j \varepsilon_k \Gamma^k_{ij} \left(\frac{1}{2}(T_j \cdot T_k - T_k \cdot T_j) + (\nu_k T_j -, \nu_j T_k) \right), \tag{3.64}$$

para todo $X \in TM$.

Demostración del Teorema 3.4.14. Probaremos que la existencia de ψ que satisface la ecuación (3.59) es equivalente a la existencia de un campo de espinores que satisface (3.32) con lo que el Teorema 3.3.1 nos daría el resultado.

Sea $\psi \in \Sigma M$ con $|\psi^+|^2 - |\psi^-|^2 = 1$ y solución de la ecuación (3.59), aplicando el isomorfismo de la Proposición 3.4.16 a dicha ecuación tenemos

$$(\nabla_X \psi)^* = (-\frac{1}{2} S(X) \cdot \psi)^* + (\frac{1}{2} \tilde{\Gamma}(X) \cdot \psi)^*, \tag{3.65}$$

donde las propiedades del isomorfismo en 3.4.16 nos dan que $(\nabla_X\psi)^* = \nabla_X\psi^*$ y para el primer sumando del lado derecho

$$\begin{aligned}(-\frac{1}{2}S(X)\cdot\psi)^* &= (-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\varepsilon_j\langle B(X,e_j),N\rangle e_j\cdot\psi)^*\\ &= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\varepsilon_j\langle B(X,e_j),N\rangle e_j\cdot N\cdot\psi^*\\ &= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\varepsilon_j e_j\cdot B(X,e_j)\cdot\psi^*,\end{aligned}$$

mientras que para el segundo sumando tenemos que

$$\left(\frac{1}{2}\widetilde{\Gamma}(X)\cdot\psi\right)^* = \frac{1}{2}\Gamma(X)\cdot\psi^*,$$

donde $\Gamma(X)$ es como en el Lema 3.4.10.

De lo anterior se sigue que la ecuación (3.65) es

$$\nabla_X\psi^* = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\varepsilon_j e_j\cdot B(X,e_j)\cdot\psi^* + \frac{1}{2}\Gamma(X)\cdot\psi^*,$$

por lo que $\varphi = \psi^*$ es solución de la ecuación (3.32). □

El siguiente corolario nos da una prueba independiente a la que se encuentra en [28] para el mismo resultado, ver también [17] para una prueba en la que usan dos espinores para la representación.

Corolario 3.4.17. *Para M una superficie lorentziana simplemente conexa, $S : TM \longrightarrow TM$ un operador simétrico y $G = \mathbb{R}^{1,3}$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe una inmersión isométrica de M en $\mathbb{R}^{1,2}$ con operador de forma S.*
2. *Existe $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ tal que $|\psi^+|^2 - |\psi^-|^2 = 1$ y que satisface la ecuación*

$$\nabla_X\psi = -\frac{1}{2}S(X)\cdot\psi \tag{3.66}$$

Demostración. En este caso todos los Γ_{ij}^k son cero y por lo tanto $\widetilde{\Gamma}(X)$ también. □

Capítulo 4

Inmersiones en productos lorentzianos

En este capítulo vamos a caracterizar las inmersiones de superficies en productos lorentzianos simétricos que de acuerdo a [8] son localmente isométricos a grupos de Lie con las siguientes álgebras de Lie.

$$\mathfrak{a}: \begin{array}{rcl} [e_1, e_2] & = & \alpha e_2, \ \alpha \neq 0, \\ [e_1, e_3] & = & 0 \\ [e_2, e_3] & = & 0 \end{array}$$

$$\mathfrak{b}: \begin{array}{rcl} [e_1, e_2] & = & 0 \\ [e_1, e_3] & = & \alpha e_1, \ \alpha \neq 0, \\ [e_2, e_3] & = & 0 \end{array}$$

$$\mathfrak{c}: \begin{array}{rcl} [e_1, e_2] & = & 0 \\ [e_1, e_3] & = & \delta e_3, \ \delta \neq 0, \\ [e_2, e_3] & = & 0, \end{array}$$

donde $\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = 1 = -\langle e_3, e_3 \rangle$ y $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ para $i \neq j$.

De hecho, se sigue de la Proposición 1.3.4 que el grupo con álgebra de Lie $\mathfrak{a}$ es isométrico a $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_-$, $\mathfrak{b}$ es isométrico a $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2_1$ y finalmente, el grupo que corresponde a $\mathfrak{c}$ es isométrico a $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2_1$. Cabe mencionar que $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{c}$ son casos particulares del álgebra de Lie $\mathfrak{g}_6$ en tanto que $\mathfrak{b}$ es un caso particular de $\mathfrak{g}_5$.

Usando la formula de Koszul podemos calcular las componentes de la derivada covariante de los grupos. Denotamos por $\overline{\nabla}$ a la conexión de Levi-Civita de cada grupo y en la siguiente tabla agrupamos las únicas componentes no cero en cada caso

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}: \quad \overline{\nabla}_{e_2} e_1 = -\alpha e_2 \quad \overline{\nabla}_{e_2} e_2 = \alpha e_1, \qquad (4.1)\\
\mathfrak{b}: \quad \overline{\nabla}_{e_1} e_1 = \alpha e_3 \quad \overline{\nabla}_{e_1} e_3 = \alpha e_1, \qquad (4.2)\\
\mathfrak{c}: \quad \overline{\nabla}_{e_3} e_1 = -\delta e_3 \quad \overline{\nabla}_{e_3} e_3 = -\delta e_1. \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

En el resto de la tesis (M, g) es una superficie riemanniana orientable con estructura espinorial dada y haz de espinores ΣM.

Además, en los enunciados de los siguientes teoremas usamos la misma notación que introdujimos en la Sección 3.3 para escribir las condiciones de compatibilidad que recordamos a continuación. Existen campos tangentes $T_i \in TM$, funciones $\nu_i \in C^\infty(M)$ que satisfacen

$$\langle T_i, T_j \rangle - \nu_i \nu_j = \varepsilon_i \delta_{ij},$$

$$\begin{aligned}
\nabla_X T_j &= \sum_{1 \le i,k \le 3} \varepsilon_i \varepsilon_k \Gamma_{ij}^k \langle X, T_i \rangle T_k + \nu_j S(X)\\
d\nu_j(X) &= \sum_{1 \le i,k \le 3} \varepsilon_i \varepsilon_k \Gamma_{ij}^k \langle X, T_i \rangle \nu_k - h(X, T_j), \quad 1 \le j \le 3,
\end{aligned}$$

donde $S(X) = B^*(X, N)$, $h(X, T_j) = \langle B(X, T_j), N \rangle$ y $\varepsilon_j = \pm 1$, para toda $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$.

Teorema 4.0.1. *Si M es simplemente conexa, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ tal que $|\psi^+|^2 - |\psi^-|^2 = 1$ y*

$$\nabla_X \psi = \frac{i}{2} S(X) \cdot \psi - \frac{\alpha}{2} \langle X, T_2 \rangle (iT_3 + \nu_3) \cdot \omega \cdot \psi, \qquad (4.4)$$

   para toda $X \in TM$ y $\omega = \epsilon_1 \cdot \epsilon_2$, donde (ϵ_1, ϵ_2) es una base ortonormal positivamente orientada de TM.

2. *Existe una inmersión isométrica de M en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}_-$ con operador de forma S.*

Demostración. Nuestro objetivo es probar que la existencia de una solución para la ecuación (4.4) es equivalente a la existencia de una solución para la ecuación (3.32) y de esa manera usar el Teorema 3.3.1 para concluir.

Sabemos por el Lema B.0.1 que el bivector que representa a $\Gamma(X)$ es

$$\Gamma(X) = \frac{1}{2}(\underline{e}_1 \cdot \Gamma(X)(\underline{e}_1) + \underline{e}_2 \cdot \Gamma(X)(\underline{e}_2) - \underline{e}_3 \cdot \Gamma(X)(\underline{e}_3)),$$

para $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ base ortonormal de $\mathfrak{g}_7$.

Por (4.1) tenemos que

$$\Gamma(X)(\underline{e}_1) = -\alpha\langle X, \underline{e}_2\rangle \underline{e}_2, \quad \Gamma(X)(\underline{e}_2) = \alpha\langle X, \underline{e}_2\rangle \underline{e}_1 \quad \text{y} \quad \Gamma(X)(\underline{e}_3) = 0,$$

y por lo tanto

$$\Gamma(X) = -\alpha\langle X, \underline{e}_2\rangle \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2.$$

Recordemos que $\underline{e}_k = T_k + \nu_k N$ para $T_k \in TM$ y $N \in \Gamma(E)$ con $\langle N, N\rangle = -1$, además $\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_3 = \omega \cdot N$. Así que,

$$\begin{aligned} \Gamma(X) &= -\alpha\langle X, \underline{e}_2\rangle \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 \\ &= -\alpha\langle X, \underline{e}_2\rangle \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_3 \cdot \underline{e}_3 \\ &= -\alpha\langle X, T_2\rangle \omega \cdot N \cdot (T_3 + \nu_3 N) \\ &= -\alpha\langle X, T_2\rangle(-N \cdot T_3 + \nu_3) \cdot \omega. \end{aligned}$$

Aplicamos a la ecuación (4.4) el isomorfismo de la Proposición 3.4.9 y del Lema 3.4.11, tenemos que

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \psi^* = \left(\frac{i}{2}S(X) \cdot \psi\right)^*$$

y

$$\frac{1}{2}\Gamma(X) \cdot \psi^* = \left(-\frac{1}{2}\alpha\langle X, T_2\rangle(iT_3 + \nu_3) \cdot \omega \cdot \psi\right)^*.$$

Por lo tanto, si $\varphi := \psi^*$, la ecuación

$$\nabla_X \varphi = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi + \frac{1}{2}\Gamma(X) \cdot \varphi$$

es equivalente a

$$\nabla_X \psi = \frac{i}{2}S(X) \cdot \psi - \frac{1}{2}\alpha\langle X, T_2\rangle(iT_3 + \nu_3) \cdot \omega \cdot \psi.$$

□

Al ser las demostraciones de los Teoremas 4.0.2 y 4.0.3 análogas a la del Teorema 4.0.1 omitiremos algunos detalles.

Teorema 4.0.2. *Si M es simplemente conexa, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ tal que $|\psi^+|^2 - |\psi^-|^2 = 1$ y*

$$\nabla_X \psi = \frac{i}{2} S(X) \cdot \psi + \frac{\alpha}{2} \langle X, T_1 \rangle (iT_2 + \nu_2) \cdot \omega \cdot \psi, \tag{4.5}$$

para toda $X \in TM$ y $\omega = \epsilon_1 \cdot \epsilon_2$, donde (ϵ_1, ϵ_2) es una base ortonormal positivamente orientada de TM.

2. *Existe una inmersión isométrica de M en $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2_1$ con operador de forma S.*

Demostración. Usando la expresión para $\Gamma(X)$ y los términos en (4.2) tenemos que para $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2_1$

$$\Gamma(X)(\underline{e}_1) = \alpha \langle X, \underline{e}_1 \rangle \underline{e}_3, \quad \Gamma(X)(\underline{e}_2) = 0 \quad \text{y} \quad \Gamma(X)(\underline{e}_3) = \alpha \langle X, \underline{e}_1 \rangle \underline{e}_1,$$

y por lo tanto

$$\Gamma(X) = \alpha \langle X, \underline{e}_1 \rangle \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_3.$$

Tomando $\underline{e}_k = T_k + \nu_k N$ y ω como en la prueba del teorema anterior

$$\begin{aligned}
\Gamma(X) &= \alpha \langle X, \underline{e}_1 \rangle \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_3 \\
&= -\alpha \langle X, \underline{e}_1 \rangle \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_3 \\
&= \alpha \langle X, T_1 \rangle \omega \cdot N \cdot (T_2 + \nu_2 N) \\
&= \alpha \langle X, T_1 \rangle N \cdot (-T_2 + \nu_2 N) \cdot \omega \\
&= \alpha \langle X, T_1 \rangle (-N \cdot T_2 + \nu_2) \cdot \omega.
\end{aligned}$$

Y aplicando el isomorfismo de la Proposición 3.4.9 a la ecuación (4.5) tenemos por un lado que

$$-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \psi^* = \left(\frac{i}{2} S(X) \cdot \psi \right)^*$$

y por otro

$$\frac{1}{2} \Gamma(X) \cdot \psi^* = \left(\frac{1}{2} \alpha \langle X, T_1 \rangle (iT_2 + \nu_2) \cdot \omega \cdot \psi \right)^*.$$

Por lo tanto, si $\varphi := \psi^*$, entonces la ecuación

$$\nabla_X \varphi = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi + \frac{1}{2}\Gamma(X) \cdot \varphi$$

es equivalente a la ecuación

$$\nabla_X \psi = \frac{i}{2} S(X) \cdot \psi + \frac{1}{2}\alpha\langle X, T_1\rangle(iT_2 + \nu_2) \cdot \omega \cdot \psi.$$

□

Teorema 4.0.3. *Si M es simplemente conexa, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ tal que $|\psi^+|^2 - |\psi^-|^2 = 1$ y*

$$\nabla_X \psi = \frac{i}{2} S(X) \cdot \psi + \frac{\alpha}{2}\langle X, T_3\rangle(iT_2 + \nu_2)) \cdot \omega \cdot \psi, \tag{4.6}$$

   para toda $X \in TM$ y $\omega = \epsilon_1 \cdot \epsilon_2$, donde (ϵ_1, ϵ_2) es una base ortonormal positivamente orientada de TM..

2. *Existe una inmersión isométrica de M en $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2_1$ con operador de forma S.*

Demostración. Usando la expresión para $\Gamma(X)$ y los términos en (4.3) tenemos que para $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2_1$

$$\Gamma(X)(\underline{e}_1) = \delta\langle X, \underline{e}_3\rangle \underline{e}_3, \quad \Gamma(X)(\underline{e}_2) = 0 \quad \text{y} \quad \Gamma(X)(\underline{e}_3) = \delta\langle X, \underline{e}_3\rangle \underline{e}_1,$$

y por lo tanto

$$\Gamma(X) = \delta\langle X, \underline{e}_3\rangle \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_3.$$

Tomando $\underline{e}_k = T_k + \nu_k N$ y ω como en los teoremas anteriores encontramos que en $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^2_1$

$$\Gamma(X) = -\alpha\langle X, T_3\rangle(-N \cdot T_2 + \nu_2) \cdot \omega.$$

Además, aplicando el isomorfismo $*$ a la ecuación (4.6) se obtiene que

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \psi^* = \left(\frac{i}{2} S(X) \cdot \psi\right)^*$$

y

$$\frac{1}{2}\Gamma(X)\cdot\psi^* = \left(\frac{1}{2}\alpha\langle X, T_3\rangle(iT_2+\nu_2)\cdot\omega\cdot\psi\right)^*.$$

Por lo tanto, si $\varphi := \psi^*$ tenemos que la ecuación

$$\nabla_X\varphi = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} e_j\cdot B(X, e_j)\cdot\varphi + \frac{1}{2}\Gamma(X)\cdot\varphi$$

es equivalente a la ecuación

$$\nabla_X\psi = \frac{i}{2}S(X)\cdot\psi + \frac{\alpha}{2}\langle X, T_3\rangle(iT_2+\nu_2))\cdot\omega\cdot\psi.$$

□

Capítulo 5

Teorema de inmersión en el espacio de Sitter $\mathbb{S}^3_1$

El espacio de Sitter de dimensión 3 es una hipersuperficie lorentziana de $\mathbb{R}^{1,3}$ con curvatura seccional constante 1 que está determinada por una cuádrica:

$$\mathbb{S}^3_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^{1,3} : -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}. \tag{5.1}$$

Observemos que para cada $p \in \mathbb{S}^3_1$ el espacio tangente en dicho punto es perpendicular a p, de aquí se sigue que la aplicación de Gauss de la inmersión de $\mathbb{S}^3_1$ en $\mathbb{R}^{1,3}$ es la identidad y por lo tanto el operador de forma está dado por $S_p(h) = -h$, para toda $h \in T_p\mathbb{S}^3_1$.

La idea para caracterizar las inmersiones de superficies en $\mathbb{S}^3_1$ es considerar a esta última inmersa en $\mathbb{R}^{1,3}$ y tomar un campo de espinores paralelo no nulo en el haz de espinores de $\mathbb{R}^{1,3}$ cuya derivada respecto de la conexión del haz de espinores del espacio de Sitter tendrá una expresión sencilla. En otras palabras, si $\varphi \in \Sigma\mathbb{R}^{1,3}$ es un campo de espinores no nulo tal que $\nabla^{\mathbb{R}^{1,3}}_X \varphi = 0$, entonces su restricción a $\mathbb{S}^3_1$ satisface que

$$\nabla^{\Sigma\mathbb{S}^3_1}_X \varphi = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_j e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi, \quad \varepsilon_j = g(e_j, e_j) = \pm 1, \tag{5.2}$$

donde B denota la segunda forma fundamental de la inmersión del espacio de Sitter en Minkowski.

Ahora, si η es el campo normal a $\mathbb{S}^3_1$ en $\mathbb{R}^{1,3}$ tenemos la siguiente expresión para (5.2)

$$\begin{aligned}
\nabla_X^{\Sigma\mathbb{S}_1^3}\varphi &= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\varepsilon_j e_j\cdot\langle B(X,e_j),\eta\rangle\eta\cdot\varphi \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\varepsilon_j e_j\cdot\langle S(X),e_j\rangle\eta\cdot\varphi \\
&= -\frac{1}{2}S(X)\cdot\eta\cdot\varphi \\
&= \frac{1}{2}X\cdot\eta\cdot\varphi. \qquad (5.3)
\end{aligned}$$

De la ecuación (5.3) y de la ecuación de Gauss espinorial (2.6) podemos concluir que, si M está isométricamente inmersa en el espacio de Sitter, entonces existe una sección no nula $\varphi\in\Gamma(\Sigma\mathbb{S}_1^3)$ tal que

$$\nabla_X\varphi = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}e_j\cdot B(X,e_j)\cdot\varphi+\frac{1}{2}X\cdot\eta\cdot\varphi, \qquad (5.4)$$

para todo $X\in TM$ y B la segunda forma fundamental de la inmersión de M en $\mathbb{S}_1^3$.

Sean M una superficie riemanniana orientada y $E\longrightarrow M$ el haz vectorial trivial $M\times\mathbb{R}$ con métrica $-d\nu^2$ en cada fibra. Denotamos por $\widetilde{Q}_M$ y $\widetilde{Q}_E$ las respectivas estructuras espinoriales de M y E.

Identificamos al espacio de Minkowski 4-dimensional $\mathbb{R}^{1,3}$ con el espacio $\mathbb{R}^{1,2}\oplus\mathbb{R}e_4$, donde e_4 es el último vector de la base ortonormal estándar de $\mathbb{R}^{1,3}$.

Usando la aplicación $Spin(0,2)\times Spin(1,0)\longrightarrow Spin(1,2)\subset Spin(1,3)$ dada por $(g_1,g_2)\longmapsto g_1g_2$ definimos ρ como sigue

$$\begin{aligned}
\rho: Spin(0,2)\times Spin(1,0) &\longrightarrow Gl(Cl_{1,3}) \\
(g_1,g_2) &\longmapsto \begin{array}{rcl}\rho(g_1,g_2): Cl_{1,3} &\longrightarrow& Cl_{1,3} \\ v &\longmapsto& g_1g_2\cdot v.\end{array}
\end{aligned}$$

Y para $\widetilde{Q}=\widetilde{Q}_M\times_M\widetilde{Q}_E$ definimos el siguiente haz vectorial sobre M

$$\Sigma := \widetilde{Q}\times_\rho Cl_{1,3}. \qquad (5.5)$$

Definimos el haz de espinores unitarios

$$U\Sigma := \widetilde{Q} \times_\rho Spin(1,3), \tag{5.6}$$

que está contenido en Σ.

Denotamos por ν al elemento en $Cl_\Sigma := \widetilde{Q} \times_{Ad} Cl_{1,3}$ que satisface que sus coordenadas en cualquier marco $\widetilde{s}$ de $\widetilde{Q}$ son e_4, es decir, $\nu = [\widetilde{s}, e_4]$.

Observación 5.0.1. *Si ∇ es la derivada covariante en el haz $\widetilde{Q} \times_{Ad} Cl_{1,3}$ y ν es como arriba, entonces $\nabla\nu = 0$.*

De hecho, localmente se tiene que $\nu = [\widetilde{s}, e_4]$, para $\widetilde{s} : U \subset M \longrightarrow \widetilde{Q}$ sección de $\widetilde{Q}$. De la definición en (2.2) se sigue que para α la forma de conexión de $\widetilde{Q}$ y $X \in TM$

$$\nabla_X \nu = [\widetilde{s}, de_4(X) + Ad_*(\alpha(\widetilde{s}_*(X))(e_4)] = 0,$$

pues e_4 es constante y $\alpha(\widetilde{s}_*(X)) \in \Lambda^2\mathbb{R}^{1,2} \subset Cl_{1,2}$, de donde se sigue que $Ad_*(\alpha(\widetilde{s}_*(X))(e_4) = 0$.

Teorema 5.0.2. *Supongamos adicionalmente que M es simplemente conexa, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe $\varphi \in U\Sigma$ que satisface*

$$\nabla_X \varphi = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi + \frac{1}{2} X \cdot \nu \cdot \varphi, \tag{5.7}$$

   para toda $X \in TM$.

2. *Existe una inmersión isométrica de M en $\mathbb{S}^3_1$ con haz normal E y segunda forma fundamental B.*

Más aún, $F : M \longrightarrow \mathbb{S}^3_1$ está dada por

$$F = \langle\langle \nu \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle. \tag{5.8}$$

Demostración. Supongamos que existe $\varphi \in \Gamma(U\Sigma)$ que satisface la ecuación (5.7), primero vamos a probar que F como se define en (5.8) está contenida en el espacio de Sitter. Por definición, $F = \tau[\varphi][\nu][\varphi]$ y dado que $[\varphi] \in Spin(1,3)$

y $[\nu] \in \mathbb{R}^{1,3}$ tenemos que $F = Ad([\varphi]^{-1})([\nu])$. Como $Ad([\varphi]^{-1}) \in SO(1,3)$ y $[\nu]$ es unitario podemos concluir que $Ad([\varphi]^{-1})([\nu]) \in \mathbb{S}^3_1$.

Para probar 1 $\implies$ 2 usaremos los dos lemas siguientes.

Lema 5.0.3. *Si $\varphi \in U\Sigma$ satisface la ecuación (5.7) y $F : M \longrightarrow \mathbb{S}^3_1$ es como en (5.8), entonces*

$$dF(X) = \langle\langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle,$$

para toda $X \in TM$.

Demostración. De la Observación 5.0.1 se tiene que $\nabla_X \nu = 0$ y de la compatibilidad de $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ con la conexión se sigue que

$$\begin{aligned} dF(X) &= \langle\langle \nu \cdot \nabla_X \varphi, \varphi \rangle\rangle + \langle\langle \nu \cdot \varphi, \nabla_X \varphi \rangle\rangle \\ &= (id + \tau)\langle\langle \nu \cdot \nabla_X \varphi, \varphi \rangle\rangle \\ &= -\frac{1}{2}(id + \tau)\langle\langle \nu \cdot \sum_{j=1}^{2} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle + \frac{1}{2}(id + \tau)\langle\langle \nu \cdot X \cdot \nu \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle. \end{aligned}$$

Por un lado

$$\langle\langle \nu \cdot \sum_{j=1}^{2} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle = \sum_{j=1}^{2} \tau[\varphi][\nu][e_j][B(X, e_j)][\varphi]$$

y por lo tanto

$$\tau\langle\langle \nu \cdot \sum_{j=1}^{2} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle = -\sum_{j=1}^{2} \tau[\varphi][\nu][e_j][B(X, e_j)][\varphi],$$

de donde se concluye que el primer sumando en la expresión para $dF(X)$ es cero.

Por otra parte, como $\nu \cdot X \cdot \nu = X$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(id + \tau)\langle\langle \nu \cdot X \cdot \nu \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle &= \frac{1}{2}(id + \tau)\langle\langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle \\ &= \langle\langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle, \end{aligned}$$

lo cual termina la demostración. $\square$

Proposición 5.0.4. *Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. *$F : M \longrightarrow \mathbb{S}^3_1$ es una isometría.*
2. *La aplicación*

$$\begin{array}{rcl} \Phi_E : \; E & \longrightarrow & T\mathbb{S}^3_1 \\ X \in E_m & \longmapsto & (F(m), \langle\langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle) \end{array}$$

   es un isomorfismo entre E y el haz normal de la inmersión F que preserva la métrica y que identifica a B con la segunda forma fundamental de F.

Demostración. Omitiremos las pruebas de que F es una isometría y que Φ_E es un isomorfismo entre E y el haz normal de la inmersión F que preserva la métrica, pues estas son similares a la demostración de la Proposición 3.3.5.

Veamos ahora que B es efectivamente la segunda forma fundamental de la inmersión, es decir, si NM denota al haz normal y $B^F : TM \times TM \longrightarrow NM$ a la segunda forma fundamental de la inmersión, entonces

$$B^F(dF(X), dF(Y)) = \langle\langle B(X,Y) \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle.$$

Sean $X, Y \in \Gamma(TM)$ de manera que $\nabla X = 0 = \nabla Y$ en un punto, por definición

$$B^F(dF(X), dF(Y)) = (\partial_X \langle\langle Y \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle)^N. \tag{5.9}$$

Usando que $\varphi \in U\Sigma$ es solución de (5.7) tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_X \langle\langle Y \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle &= \langle\langle Y \cdot \nabla_X \varphi, \varphi \rangle\rangle + \langle\langle Y \cdot \varphi, \nabla_X \varphi \rangle\rangle \\ &= (id + \tau)\langle\langle Y \cdot \nabla_X \varphi, \varphi \rangle\rangle \\ &= -\frac{1}{2}(id+\tau)\langle\langle Y \cdot \sum_{j=1}^{2} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2}(id+\tau)\langle\langle Y \cdot X \cdot \nu \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle. \end{aligned}$$

Además, en la prueba de la Proposición 3.3.4 en (3.40) encontramos que

$$-\frac{1}{2}(id+\tau)\langle\langle Y \cdot \sum_{j=1}^{2} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle \;=\; \langle\langle B(X,Y) \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle.$$

Para terminar la prueba es suficiente verificar que $\frac{1}{2}(id+\tau)\langle\langle Y \cdot X \cdot \nu \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle$ no tiene parte normal. Si $X = \sum_k x_k e_k$ y $Y = \sum_i y_i e_i$, entonces

$$\langle\langle Y \cdot X \cdot \nu \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle \;=\; \sum_{i \neq k} y_i x_k \tau[\varphi][e_i] \cdot [e_k] \cdot [\nu] \cdot [\varphi] - \sum_{i=k} y_k x_k \tau[\varphi] \cdot [\nu][\varphi]$$

y por lo tanto

$$\tau\langle\langle Y\cdot X\cdot\nu\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle \;=\; -\sum_{i\neq k} y_i x_k \tau[\varphi][e_i]\cdot[e_k]\cdot[\nu]\cdot[\varphi] - \sum_{i=k} y_k x_k \tau[\varphi]\cdot[\nu][\varphi],$$

de donde se sigue que

$$\frac{1}{2}(id+\tau)\langle\langle Y\cdot X\cdot\nu\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle\rangle \;=\; -\sum_{i=k} y_k x_k \tau[\varphi]\cdot[\nu]\cdot[\varphi],$$

que no tiene componentes en E pues si N es una sección de E, se puede probar como se hace en la demostración de la Proposición 3.3.5 que $\langle\langle\langle N\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle,\langle\langle\nu\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle\rangle = \langle[N],[\nu]\rangle$ y concluir usando que $[N]$ y $[\nu]=e_4$ son ortogonales. $\square$

Ahora, supongamos que M está inmersa isométricamente en $\mathbb{S}^3_1 \subset \mathbb{R}^{1,3}$ y consideremos la sección $\varphi \in \Sigma\mathbb{R}^{1,3}|_M$ dada por $\varphi = [\widetilde{s}, 1_{Cl_{\mathbb{R}^{1,3}}}]$, dicha sección está en $U\Sigma$ y de acuerdo a lo expuesto al inicio del capítulo satisface la ecuación

$$\nabla_X\varphi = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} e_j\cdot B(X,e_j)\cdot\varphi + \frac{1}{2}X\cdot\nu\cdot\varphi,$$

para ν sección de Cl_Σ con $[\nu]=e_4$. $\square$

Capítulo 6

Teorema de inmersión en el espacio anti de Sitter $\mathbb{H}^3_1$

Aquí vamos a considerar que el espacio anti de Sitter de dimensión 3 es la hipersuperficie en $\mathbb{R}^{2,2}$ que tiene curvatura seccional constante -1 y está determinada por la cuádrica

$$\mathbb{H}^3_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^{2,2} : -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -1\}.$$

Observemos que para cada $p \in \mathbb{H}^3_1$ el espacio tangente en dicho punto es perpendicular a p, de aquí se sigue que la aplicación de Gauss de la inmersión de $\mathbb{H}^3_1$ en $\mathbb{R}^{2,2}$ es la identidad y por lo tanto el operador de forma es $S_p(h) = -h$ para toda $h \in T_p\mathbb{H}^3_1$.

Dado que $\mathbb{H}^3_1$ está inmersa en $\mathbb{R}^{2,2}$ podemos tomar un campo de espinores paralelo no nulo en el haz de espinores de $\mathbb{R}^{2,2}$ y usar la ecuación de Gauss espinorial (2.6) para obtener una expresión sencilla de la derivada de dicho campo respecto de la conexión del haz de espinores del espacio anti de Sitter, en otras palabras, si $\varphi \in \Sigma\mathbb{R}^{2,2}$ es un campo de espinores no nulo tal que $\nabla_X^{\Sigma\mathbb{R}^{2,2}}\varphi = 0$, entonces su restricción a $\mathbb{H}^3_1$ satisface

$$\nabla_X^{\Sigma\mathbb{H}^3_1}\varphi = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\varepsilon_j e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi, \tag{6.1}$$

donde B denota la segunda forma fundamental de la inmersión del espacio anti de Sitter en $\mathbb{R}^{2,2}$.

Si η es el campo normal a $\mathbb{H}^3_1$ en $\mathbb{R}^{2,2}$, entonces la ecuación (6.1) se ve como

$$\begin{aligned}
\nabla^{\Sigma\mathbb{H}^3_1}_X \varphi &= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\varepsilon_j e_j \cdot (-\langle B(X,e_j),\eta\rangle\eta)\cdot\varphi \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\varepsilon_j e_j \cdot \langle S(X),e_j\rangle\eta\cdot\varphi \\
&= \frac{1}{2}S(X)\cdot\eta\cdot\varphi \\
&= -\frac{1}{2}X\cdot\eta\cdot\varphi. \qquad (6.2)
\end{aligned}$$

Se concluye de la ecuación (6.2) y de la ecuación de Gauss espinorial (2.6) que si M está isométricamente inmersa en el espacio anti de Sitter entonces existe $\varphi \in \Sigma\mathbb{H}^3_1|_M$ no nulo y que satisface la ecuación

$$\nabla_X\varphi = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} e_j\cdot B(X,e_j)\cdot\varphi - \frac{1}{2}X\cdot\eta\cdot\varphi, \qquad (6.3)$$

para todo $X \in TM$, donde B es la segunda forma fundamenta de la inmersión de M en $\mathbb{H}^3_1$.

Sean M una superficie riemanniana orientada y $E \longrightarrow M$ el haz vectorial tirvial $M\times\mathbb{R}$ con métrica $-d\nu^2$ en cada fibra. Denotamos por $\widetilde{Q}_M$ y $\widetilde{Q}_E$ a las respectivas estructuras espinoriales de M y E.

Identificamos al espacio $\mathbb{R}^{2,2}$ con $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}^{1,2}$, donde e_1 es el primer vector de la base ortonormal estándar de $\mathbb{R}^{2,2}$, es decir $\langle e_1,e_1\rangle = -1$ y $\mathbb{R}^{1,2}$ se identifica con el espacio generado por el resto de la base (e_2,e_3,e_4).Usando la aplicación $Spin(0,2)\times Spin(1,0) \longrightarrow Spin(1,2) \subset Spin(2,2)$ dada por $(g_1,g_2) \longmapsto g_1g_2$ definimos ρ como sigue

$$\begin{aligned}
\rho : Spin(0,2)\times Spin(1,0) &\longrightarrow Gl(Cl_{2,2}) \\
(g_1,g_2) &\longmapsto \begin{array}{rcl} \rho(g_1,g_2): Cl_{2,2} & \longrightarrow & Cl_{2,2} \\ v & \longmapsto & g_1g_2\cdot v. \end{array}
\end{aligned}$$

Para $\widetilde{Q} = \widetilde{Q}_M \times_M \widetilde{Q}_E$ definimos el siguiente haz vectorial sobre M

$$\Sigma := \widetilde{Q}\times_\rho Cl_{2,2}. \qquad (6.4)$$

Luego, definimos el haz de espinores unitarios

$$U\Sigma := \widetilde{Q}\times_\rho Spin(2,2), \qquad (6.5)$$

está contenido en Σ.

Denotamos por ν al elemento en $\widetilde{Q} \times_{Ad} Cl_{2,2}$ que satisface que sus coordenadas en cualquier marco $\widetilde{s}$ de $\widetilde{Q}$ son e_1, es decir, $\nu = [\widetilde{s}, e_1]$.

La prueba del siguiente teorema es análoga a la demostración del Teorema 5.0.2 y es por ello que la omitiremos.

Teorema 6.0.1. *Supongamos adicionalmente que M es simplemente conexa, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe $\varphi \in U\Sigma$ que satisface*

$$\nabla_X \varphi = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi - \frac{1}{2} X \cdot \nu \cdot \varphi, \tag{6.6}$$

   para toda $X \in TM$.

2. *Existe una inmersión isométrica de M en $\mathbb{H}_1^3$ con haz normal E y segunda forma fundamental B.*

Más aún, $F : M \longrightarrow \mathbb{H}_1^3$ está dada por

$$F = \langle\langle \nu \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle.$$

En el teorema anterior se caracterizan las inmersiones de superficies en el espacio anti de Sitter visto como cuádrica en $\mathbb{R}^{2,2}$, mientras que al final del capítulo 8 en el Teorema 8.0.4 las caracterizamos usando el modelo como grupo de dicho espacio.

Capítulo 7

Inmersiones en $\mathbb{R}_- \times \mathbb{S}^2$

Sabemos desde el primer capítulo que el espacio producto $\mathbb{R}_- \times \mathbb{S}^2$ no es un grupo de Lie y es por ello que para caracterizar las inmersiones en tal espacio no podemos aplicar el Teorema 3.3.1. En cambio, $\mathbb{R}_- \times \mathbb{S}^2$ está inmerso en una variedad lorentziana más sencilla lo cual nos permitirá caracterizar sus inmersiones.

En efecto, $\mathbb{R}_- \times \mathbb{S}^2$ está inmersa de la siguiente manera en $\mathbb{R}^{1,3}$ con la métrica inducida

$$\mathbb{R}_- \times \mathbb{S}^2 = \{(t, x_1, x_2, x_3) \ : \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{1,3}.$$

Veremos más adelante que considerar dicha inmersión es útil porque nos permitirá tratar a $\mathbb{R}_- \times \mathbb{S}^2$ de manera similar a como hicimos con los espacios de Sitter y anti de Sitter.

Usando la ecuación global de esta variedad podemos probar que su aplicación de Gauss es $N : \mathbb{R}_- \times \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$, $(t,p) \longmapsto p$ y por lo tanto el operador de forma es $S_{(t,p)}(h) = -\pi_2(h)$, donde $h \in T_t\mathbb{R}_- \oplus T_p\mathbb{S}^2$ y π_2 es la proyección de $T_{(t,p)}\mathbb{R}_- \times \mathbb{S}^2$ sobre $T_p\mathbb{S}^2$.

Para caracterizar las inmersiones de superficies en $\mathbb{R}_- \times \mathbb{S}^2$ usaremos que dicha variedad está inmersa $\mathbb{R}^{1,3}$ de manera que podemos tomar un campo de espinores paralelo no nulo en el haz de espinores de $\mathbb{R}^{1,3}$ y así obtener una expresión sencilla para su derivada respecto de la conexión del haz de espinores en $\mathbb{R}_- \times \mathbb{S}^2$, de manera concreta, el campo de espinores $\varphi = 1_{Cl_{1,3}}$ es paralelo respecto de $\nabla^{\Sigma\mathbb{R}^{1,3}}$ y gracias a (2.6) satisface la ecuación

$$\nabla_X^{\Sigma\mathbb{R}_- \times \mathbb{S}^2} \varphi = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} \varepsilon_j e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi, \tag{7.1}$$

para toda $X \in T_t\mathbb{R}_- \oplus T_p\mathbb{S}^2$, donde B denota la segunda forma fundamental de la inmersión de la variedad producto en el espacio de Minkowski.

Si N es el campo normal a $\mathbb{R}_- \times \mathbb{S}^2$ en $\mathbb{R}^{1,3}$ entonces (7.1) tiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
\nabla_X^{\Sigma\mathbb{R}_-\times\mathbb{S}^2}\varphi &= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\varepsilon_j e_j \cdot \langle B(X,e_j), N\rangle N\cdot\varphi \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\varepsilon_j e_j \cdot \langle S(X), e_j\rangle N\cdot\varphi \\
&= -\frac{1}{2}S(X)\cdot N\varphi \\
&= \frac{1}{2}X_0\cdot N\varphi, \qquad (7.2)
\end{aligned}$$

para toda $X \in T\mathbb{R}_- \times \mathbb{S}^2$ y X_0 la proyección de X en $T\mathbb{S}^2$.

De las ecuaciones (2.6) y (7.2) concluimos que para una superficie isométricamente inmersa en el espacio de Sitter y $\varphi \in \Sigma\mathbb{R}^{1,3}|_M$ con las características que mencionamos antes se tiene que

$$\nabla_X\varphi = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} e_j\cdot B(X,e_j)\cdot\varphi + \frac{1}{2}X_0\cdot N\cdot\varphi, \qquad (7.3)$$

para todo $X \in TM$, donde B es la segunda forma fundamental de la inmersión de M en $\mathbb{R}_- \times \mathbb{S}^2$.

Sean M una superficie riemanniana orientada y $E \longrightarrow M$ el haz vectorial trivial $M\times\mathbb{R}$ con métrica $-d\nu^2$ en cada fibra. Digamos que $\widetilde{Q}_M$ y $\widetilde{Q}_E$ son las estructuras espinoriales de M y E, respectivamente. Sea $B : TM\times TM \longrightarrow E$ una forma bilineal simétrica.

Usando la aplicación $Spin(0,2)\times Spin(1,0) \longrightarrow Spin(1,2) \subset Spin(1,3)$ dada por $(g_1,g_2) \longmapsto g_1g_2$ definimos ρ como sigue

$$\begin{aligned}
\rho : Spin(0,2)\times Spin(1,0) &\longrightarrow Gl(Cl_{1,3}) \\
(g_1,g_2) &\longmapsto \rho(g_1,g_2) : \begin{array}{ccc} Cl_{1,3} & \longrightarrow & Cl_{1,3} \\ v & \longmapsto & g_1g_2v. \end{array}
\end{aligned}$$

Para $\widetilde{Q} = \widetilde{Q}_M \times_M \widetilde{Q}_E$ el haz principal de grupo $Spin(0,2)\times Spin(1,0)$ consideramos el siguiente haz vectorial sobre M

$$\Sigma := \widetilde{Q}\times_\rho Cl_{1,3}. \qquad (7.4)$$

Identificamos al espacio de Minkowski 4-dimensional $\mathbb{R}^{1,3}$ con $\mathbb{R}^{1,2} \oplus \mathbb{R}e_4$, donde e_4 es el último vector de la base ortonormal estándar de $\mathbb{R}^{1,3}$.

Luego, el haz de espinores unitarios

$$U\Sigma := \widetilde{Q} \times_\rho Spin(1,3), \tag{7.5}$$

está contenido en Σ.

Denotamos por ν al elemento en $\widetilde{Q} \times_{Ad} Cl_{1,3}$ que satisface que sus coordenadas en cualquier marco $\widetilde{s}$ de $\widetilde{Q}$ son e_4, es decir, $\nu = [\widetilde{s}, e_4]$.

Definimos el operador lineal simétrico $S : TM \longrightarrow TM$ como el único que satisface $\langle S(X), Y\rangle = \langle B(X,Y), N\rangle$ para toda $X, Y \in TM$ y N sección unitaria de E. Supongamos además que existen $T \in \Gamma(TM)$ y $f \in C^\infty(M)$ que satisfacen

$$||T||^2 - f^2 = -1 \tag{7.6}$$

$$\nabla_X T = fS(X) \tag{7.7}$$

$$df(X) = \langle S(X), T\rangle. \tag{7.8}$$

Tomamos $e_0 = T + fN$ que de acuerdo a (7.6) tiene norma -1.

Lema 7.0.1. *Si M es simplemente conexa y $T \in \Gamma(TM)$ satisface las ecuaciones anteriores, entonces existe $\eta : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $d\eta(X) = -\langle X, T\rangle$.*

Demostración. Como M es simplemente conexa es suficiente probar que la 1-forma $\beta(X) = \langle X, T\rangle$ es cerrada. En efecto, para todo $X, Y \in \Gamma(TM)$ tenemos que

$$\begin{aligned} d\beta(X,Y) &= X.\beta(Y) - Y.\beta(X) - \beta([X,Y]) \\ &= \langle \nabla_X Y, T\rangle + \langle Y, \nabla_X T\rangle - \langle \nabla_Y X, T\rangle - \langle X, \nabla_Y T\rangle - \langle [X,Y], T\rangle \\ &= \langle Y, fS(X)\rangle - \langle X, fS(Y)\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 7.0.2. *Si M es simplemente conexa y $\eta : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función diferenciable del Lema 7.0.1, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe* $\varphi \in U\Sigma$ *tal que*

$$\nabla_X \varphi = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \varphi + \frac{1}{2} X_0 \cdot \nu \cdot \varphi, \tag{7.9}$$

para toda $X \in TM$ *y* $X_0 = X + \langle X, e_0 \rangle e_0$.

2. *Existe una inmersión isométrica* F *de* M *en* $\mathbb{R}_- \times \mathbb{S}^2$ *con haz normal* E *y segunda forma fundamental* B.

Más aún, $F : M \longrightarrow \mathbb{R}_- \times \mathbb{S}^2$ *está dada por*

$$F = \eta \langle\langle e_0 \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle + \langle\langle \nu \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle. \tag{7.10}$$

Lema 7.0.3. *Si* $F : M \longrightarrow \mathbb{R}_- \times \mathbb{S}^2$ *se define como en* (7.10)*, entonces* $dF(X) = \langle\langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle$*, para toda* $X \in TM$.

Demostración. De la definición de F y de las propiedades de $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ se sigue que

$$\begin{aligned} dF(X) \;&=\; d\eta(X)\langle\langle e_0 \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle + (id + \tau)\langle\langle \nu \cdot \nabla_X \varphi, \varphi \rangle\rangle \\ &\quad + \eta(\langle\langle \nabla_X e_0 \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle + (id + \tau)\langle\langle e_0 \cdot \nabla_X \varphi, \varphi \rangle\rangle). \end{aligned}$$

Por hipótesis $d\eta(X) = -\langle X, T \rangle = -\langle X, e_0 \rangle$ y usando un argumento similar al de la demostración del Lema 5.0.3 tenemos que

$$(id + \tau)\langle\langle \nu \cdot \nabla_X \varphi, \varphi \rangle\rangle = \langle\langle X_0 \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle.$$

De lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned} dF(X) \;&=\; -\langle X, e_0 \rangle \langle\langle e_0 \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle + \langle\langle X_0 \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle + \\ &\quad + \eta(\langle\langle \nabla_X e_0 \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle + (id + \tau)\langle\langle e_0 \cdot \nabla_X \varphi, \varphi \rangle\rangle), \end{aligned}$$

como

$$-\langle X, e_0 \rangle \langle\langle e_0 \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle + \langle\langle X_0 \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle = \langle\langle X \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle,$$

resta probar que

$$\eta(\langle\langle \nabla_X e_0 \cdot \varphi, \varphi \rangle\rangle + (id + \tau)\langle\langle e_0 \cdot \nabla_X \varphi, \varphi \rangle\rangle) = 0. \tag{7.11}$$

Usando la expresión que obtuvimos en (3.40) y en analogía con la demostración del Lema 5.0.3 encontramos que

$$\begin{aligned}(id+\tau)\langle\langle e_0\cdot\nabla_X\varphi,\varphi\rangle\rangle &= (id+\tau)\langle\langle T\cdot\nabla_X\varphi,\varphi\rangle\rangle+(id+\tau)\langle\langle fN\cdot\nabla_X\varphi,\varphi\rangle \\ &= \langle\langle B(X,T)\cdot\varphi,\varphi\rangle+(id+\tau)\langle\langle fN\cdot\nabla_X\varphi,\varphi\rangle \quad (7.12)\end{aligned}$$

luego, dado que φ satisface la ecuación (7.9) tenemos que

$$(id+\tau)\langle\langle fN\cdot\nabla_X\varphi,\varphi\rangle\rangle=\frac{1}{2}(id+\tau)\langle\langle fN\cdot(-\sum_{j=1}^{2}e_j\cdot B(X,e_j)\cdot\varphi+X_0\cdot\nu\cdot\varphi),\varphi\rangle\rangle.$$

En la expresión anterior tenemos por un lado que

$$\begin{aligned}-\frac{f}{2}\sum_{j=1}^{2}N\cdot e_j\cdot B(X,e_j)\cdot\varphi &= -\frac{f}{2}\sum_{j=1}^{2}N\cdot e_j\cdot(-\langle B(X,e_j),N\rangle N)\cdot\varphi \\ &= -\frac{f}{2}\sum_{j=1}^{2}\langle B(X,e_j),N\rangle e_j\cdot\varphi \\ &= -\frac{f}{2}S(X)\cdot\varphi,\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\langle\langle-\frac{f}{2}N\cdot(\sum_{j=1}^{2}e_j\cdot B(X,e_j)\cdot\varphi),\varphi\rangle\rangle = -\frac{f}{2}\langle\langle S(X)\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle$$

y

$$\tau\langle\langle\frac{f}{2}N\cdot(-\sum_{j=1}^{2}e_j\cdot B(X,e_j)\cdot\varphi),\varphi\rangle\rangle = -\frac{f}{2}\langle\langle S(X)\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle$$

de manera que

$$\frac{1}{2}(id+\tau)\langle\langle fN\cdot(-\sum_{j=1}^{2}e_j\cdot B(X,e_j)\cdot\varphi),\varphi\rangle\rangle=-f\langle\langle S(X)\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle \quad (7.13)$$

En tanto que

$$\tau\langle\langle fN\cdot X_0\cdot\nu\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle=-\langle\langle fN\cdot X_0\cdot\nu\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle$$

y consecuentemente

$$\frac{1}{2}(id+\tau)\langle\langle fN\cdot X_0\cdot\nu\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle=0. \tag{7.14}$$

Gracias a (7.12), (7.13) y (7.14)

$$(id+\tau)\langle\langle e_0\cdot\nabla_X\varphi,\varphi\rangle\rangle \;=\; \langle\langle B(X,T)\cdot\varphi,\varphi\rangle - f\langle\langle S(X)\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle.$$

Finalmente, las ecuaciones (7.7) y (7.8) implican que

$$\begin{aligned}\nabla_X e_0 &= fS(X)+\langle S(X),T\rangle N\\ &= fS(X)-B(X,T),\end{aligned}$$

con lo que se puede concluir que

$$\langle\langle\nabla_X e_0\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle+(id+\tau)\langle\langle e_0\cdot\nabla_X\varphi,\varphi\rangle\rangle=0,$$

es decir, la igualdad (7.11) es verdadera y esto concluye la prueba. □

Demostración del Teorema 7.0.2. Supongamos que existe $\varphi\in\Gamma(U\Sigma)$ que satisface (7.9). Gracias a (7.11) tenemos que $\partial_X\langle\langle e_0\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle=0$ para todo $X\in TM$ y por lo tanto $\langle\langle e_0\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle$ es constante y se puede identificar después de aplicar una transformación rígida con e_1 que es el primer elemento de la base canónica de $\mathbb{R}^{1,3}$.

Probemos que $\langle\langle\nu\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle\in\mathbb{S}^2$: por definición $\langle\langle\nu\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle=Ad([\varphi]^{-1})([\nu])$ y $[\varphi]^{-1}\in Spin(1,3)$ así que $\langle\langle\nu\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle$ tiene norma 1, además $\langle\langle\nu\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle$ y $\langle\langle e_0\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle=e_1$ son ortogonales lo que implica que $\langle\langle\nu\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle\in\mathbb{S}^2$. De lo anterior concluimos que $F(M)\subset\mathbb{R}_-\times\mathbb{S}^2$.

Luego, consecuencia del Lema 7.0.3 tenemos que $dF(X)=\langle\langle X\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle$ y podemos replicar los argumentos en la demostración de la Proposición 5.0.4 para obtener que $F:M\longrightarrow\mathbb{R}_-\times\mathbb{S}^2$ es una isometría y más aún que

$$\begin{aligned}\Phi_E:E &\longrightarrow T(\mathbb{R}_-\times\mathbb{S}^2)\\ X\in E_m &\longmapsto (F(m),\langle\langle X\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle)\end{aligned}$$

identifica al haz E con el haz normal de $F(M)$ en $\mathbb{R}_-\times\mathbb{S}^2$ y que B es la segunda forma fundamental de F o en otras palabras que

$$B_F(dF(X),dF(Y))=\langle\langle B(X,Y)\cdot\varphi,\varphi\rangle\rangle,$$

para B_F la segunda forma fundamental de la inmersión.

La parte ($2\implies1$) de la demostración es consecuencia de lo que se explica en el capítulo hasta la ecuación (7.3). □

Capítulo 8

Inmersiones en espacios $\mathbb{L}(\kappa, \tau)$

En analogía con los espacios riemannianos homogéneos $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ (ver [11] y [21]) tenemos los espacios homogéneos lorentzianos 3-dimensionales $\mathbb{L}(\kappa, \tau)$ que son fibraciones pseudo-riemannianas $\mathbb{L}(\kappa, \tau) \to M^2(\kappa)$ donde $M^2(\kappa)$ es una superficie riemanniana de curvatura seccional constante κ, las fibras de la proyección son las curvas integrales de un campo de Killing unitario (completo) de tipo tiempo ξ sobre el espacio total y τ conocida como la curvatura del haz, se define como el único real que satisface

$$\overline{\nabla}_X \xi = -\tau X \times \xi, \tag{8.1}$$

para todo X tangente a $\mathbb{L}(\kappa, \tau)$, donde $\times$ denota el producto vectorial en $\mathbb{L}(\kappa, \tau)$.

Una descripción más precisa para dichos espacios es la siguiente. Para $\kappa \in \mathbb{R}$ consideramos

$$V := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2) > 0 \right\} \qquad y \qquad \lambda := \frac{1}{1 + \frac{\kappa}{4}(x^2 + y^2)}.$$

El espacio $\mathbb{L}(\kappa, \tau)$ es la variedad lorentziana

$$\mathbb{L}(\kappa, \tau) = \left(V,\ \lambda^2(dx^2 + dy^2) - (\tau\lambda(ydx - xdy) + dz)^2\right).$$

Con tal representación de $\mathbb{L}(\kappa, \tau)$ podemos ver que si $\sigma = \frac{\kappa}{2\tau}$, entonces

$$\begin{aligned}
E_1 &= \lambda^{-1}(cos(\sigma z)\partial_x + sen(\sigma z)\partial_y) + \tau(xsen(\sigma z) - ycos(\sigma z))\partial_z \\
E_2 &= \lambda^{-1}(-sen(\sigma z)\partial_x + cos(\sigma z)\partial_y) + \tau(xcos(\sigma z) - ysen(\sigma z))\partial_z \\
E_3 &= \partial_z
\end{aligned}$$

es un marco ortonormal, de hecho $\langle E_1, E_1\rangle = \langle E_2, E_2\rangle = 1 = -\langle E_3, E_3\rangle$ y $\langle E_i, E_j\rangle = 0$ si $i \neq j$, además $E_1 \times E_2 = -E_3,\ E_2 \times E_3 = E_1,\ E_1 \times E_3 = -E_2$.

Luego, si definimos $\Gamma_{ij}^k = \langle \overline{\nabla}_{E_i} E_j, E_k\rangle$, entonces

$$\begin{aligned} \Gamma_{21}^3 = \Gamma_{13}^2 = \tau = -\Gamma_{12}^3 = -\Gamma_{23}^1 \\ \Gamma_{31}^2 = \sigma + \tau = -\Gamma_{32}^1. \end{aligned} \tag{8.2}$$

De lo anterior se sigue que

$$[E_1, E_2] = 2\tau E_3, \quad [E_2, E_3] = \sigma E_1, \quad [E_3, E_1] = \sigma E_2. \tag{8.3}$$

La siguiente tabla contiene a los espacios $\mathbb{L}(\kappa, \tau)$ que se obtienen para los distintos valores de κ y τ.

	$\kappa < 0$	$\kappa = 0$	$\kappa > 0$
$\tau = 0$	$\mathbb{H}^2(\kappa) \times \mathbb{R}_-$	$\mathbb{L}^3$	$\mathbb{S}^2(\kappa) \times \mathbb{R}_-$
$\tau \neq 0$	$\widetilde{SL}_2^1$	Nil_3^1	$\mathbb{S}^{3,1}_{Berger}$

Cabe mencionar que si $\kappa + 4\tau^2 = 0$ entonces $\mathbb{L}(\kappa, \tau)$ es el espacio de Minkowski $\mathbb{L}^3$ (con $\kappa = \tau = 0$) o el espacio anti de Sitter $\mathbb{H}_1^3(\kappa)$ (que en la tabla es $\widetilde{SL}_2^1$). Es importante decir también que el espacio de Sitter $\mathbb{S}_1^3$ no admite un campo de Killing unitario por lo que no puede ser un espacio $\mathbb{L}(\kappa, \tau)$.

En lo que sigue vamos a caracterizar la inmersión de una superficie riemanniana en un espacio homogéneo lorentziano dado $\mathbb{L}(\kappa, \tau)$ con $\tau \neq 0$ y $\mathbb{L}(\kappa, \tau)$ con estructura de grupo, como se hizo en [4] para los espacios $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$.

El álgrebra de Lie de $\mathbb{L}(\kappa, \tau)$ es $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3$ con el corchete descrito en la base canónica como

$$[e_1^o, e_2^o] = 2\tau e_3^o, \quad [e_2^o, e_3^o] = \sigma e_1^o, \quad [e_3^o, e_1^o] = \sigma e_2^o, \tag{8.4}$$

y $\sigma = \frac{\kappa}{2\tau}$. La métrica en $\mathfrak{g}$ es la métrica invariante para la cual (e_1^o, e_2^o, e_3^o) es ortogonal y $\langle e_1^o, e_1^o\rangle = \langle e_2^o, e_2^o\rangle = 1 = -\langle e_3^o, e_3^o\rangle$.

Para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ la conexión de Levi-Civita es

$$\Gamma(X)Y = (-\tau X - \langle X, e_3^o\rangle(\sigma + 2\tau)e_3^o) \times Y. \tag{8.5}$$

Sean M una superficie Riemanniana y $S : TM \to TM$ un operador simétrico.

Supongamos que existen $T \in \Gamma(TM)$ y $\nu \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ tales que

$$|T|^2 - \nu^2 = -1, \tag{8.6}$$

$$\nabla_X T = \nu(S(X) + \tau J(X)), \tag{8.7}$$

$$d\nu(X) = \langle S(X) + \tau J(X), T\rangle, \tag{8.8}$$

para todo $X \in TM$, con $J : TM \to TM$ que denota la rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$ en los planos tangentes.

Teorema 8.0.1. *Si M es simplemente conexa, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ tal que $|\psi^+|^2 - |\psi^-|^2 = 1$ y*

$$\nabla_X \psi = \frac{i}{2} S(X) \cdot \psi - \frac{1}{2}(i\tau X + \langle X, T\rangle(\sigma + 2\tau)(iT + \nu)) \cdot \omega \cdot \psi, \tag{8.9}$$

   para toda $X \in TM$, donde $\omega = \epsilon_1 \cdot \epsilon_2$ y (ϵ_1, ϵ_2) es una base ortonormal positivamente orientada de M.

2. *Existe una inmersión isométrica de M en $\mathbb{L}(\kappa, \tau)$ con operador de forma S.*

Demostración. Consideremos el haz trivial $E = N\mathbb{R}$, donde N es una sección que satisface $\langle N, N\rangle = -1$. El haz $TM \oplus E$ es entonces de rango 3 y se asume que está orientado por la orientación que inducen TM y E. Tomamos la métrica producto en el haz. Además usaremos $\times$ para denotar el producto vectorial en las fibras.

Sea $\underline{e}_3 = T + \nu N$ que satisface que $f(\underline{e}_3) = e_3^o$. Gracias a que f es una isometría que preserva orientación tenemos que $f(X \times Y) = f(X) \times f(Y)$ para todo $X, Y \in TM \oplus E$ y además $\langle f(X), e_3^o\rangle = \langle X, \underline{e}_3\rangle$, por lo tanto se sigue de (8.5) y de la condición (3.29) que para todo $X, Y \in TM \oplus E$ se cumple que

$$\Gamma(X)(Y) = (-\tau X - \langle X, \underline{e}_3\rangle(\sigma + 2\tau)\underline{e}_3) \times Y. \tag{8.10}$$

Definiendo $B : TM \times TM \longrightarrow E$ y su adjunta $B^* : TM \times E \longrightarrow TM$ por

$$B(X, Y) = -\langle S(X), Y\rangle N \quad \text{y} \quad B^*(X, N) = S(X) \tag{8.11}$$

para toda $X, Y \in TM$, las ecuaciones (8.7) y (8.8) son equivalentes a

$$\nabla_X \underline{e}_3 = \Gamma(X)(\underline{e}_3) - B(X, \underline{e}_3^T) + B^*(X, \underline{e}_3^N), \tag{8.12}$$

para toda $X \in TM$, donde ∇ es la suma de la conexión de Levi-Civita sobre TM y de la conexión trivial sobre E, en otras palabras, es la ecuación (3.30) para $Z = \underline{e}_3$.

La demostración del teorema será consecuencia de los siguientes lemas.

Lema 8.0.2. *Para todo $X \in TM$, la función lineal $\Gamma(X) : TM \oplus E \to TM \oplus E$ que se define en (3.28) se representa por el siguiente bivector*

$$\Gamma(X) = -\left(\tau X \cdot N + (\sigma + 2\tau)\langle X, T\rangle (T \cdot N + \nu)\right) \cdot \omega.$$

Demostración. Si $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2 \in \Gamma(TM \oplus E)$ son tales que $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ es una base ortonormal de $TM \oplus E$ se sigue entonces del Apéndice B que la aplicación antisimétrica $\Gamma(X)$ está representada por el bivector

$$\Gamma(X) = \frac{1}{2}(\underline{e}_1 \cdot \Gamma(X)(\underline{e}_1) + \underline{e}_2 \cdot \Gamma(X)(\underline{e}_2) - \underline{e}_3 \cdot \Gamma(X)(\underline{e}_3)).$$

Usando los valores para Γ_{ij}^h en (8.2) se obtiene

$$\begin{array}{rcl}\Gamma(X)(\underline{e}_1) & = & -\tau\langle X, \underline{e}_2\rangle \underline{e}_3 - (\sigma + \tau)\langle X, \underline{e}_3\rangle \underline{e}_2, \\ \Gamma(X)(\underline{e}_2) & = & \tau\langle X, \underline{e}_1\rangle \underline{e}_3 + (\sigma + \tau)\langle X, \underline{e}_3\rangle \underline{e}_1, \\ \Gamma(X)(\underline{e}_3) & = & -\tau X \times \underline{e}_3\end{array}$$

y por lo tanto

$$\Gamma(X) = \frac{1}{2}\left(\tau \underline{e}_3 \cdot (\langle X, \underline{e}_2\rangle \underline{e}_1 - \langle X, \underline{e}_1\rangle \underline{e}_2) - 2(\sigma + \tau)\langle X, \underline{e}_3\rangle \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 + \tau \underline{e}_3 \cdot X \times \underline{e}_3\right);$$

usando que $\langle X, \underline{e}_2\rangle \underline{e}_1 - \langle X, \underline{e}_1\rangle \underline{e}_2 = X \times \underline{e}_3$ podemos reducir la expresión anterior para obtener

$$\Gamma(X) = \tau \underline{e}_3 \cdot X \times \underline{e}_3 - \langle X, \underline{e}_3\rangle (\sigma + \tau)\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2. \tag{8.13}$$

Recordemos que $\underline{e}_3 = T + \nu N$ y que $\nu = -\langle \underline{e}_3, N\rangle$, por lo tanto

$$\begin{array}{rcl}\langle X, \underline{e}_3\rangle (\sigma + \tau)\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 & = & \langle X, \underline{e}_3\rangle (\sigma + \tau)\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_3 \cdot \underline{e}_3 \\ & = & \langle X, T\rangle (\sigma + \tau)\omega \cdot N \cdot (T + \nu N) \\ & = & \langle X, T\rangle (\sigma + \tau) N \cdot (-T + \nu N) \cdot \omega \\ & = & \langle X, T\rangle (\sigma + \tau)(T \cdot N + \nu) \cdot \omega,\end{array}$$

donde $\omega = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$ para $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ base ortonormal positivamente orientada de TM.

El otro término de la ecuación es

$$\begin{aligned}
\underline{e}_3 \cdot X \times \underline{e}_3 &= \langle X, \underline{e}_1\rangle \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_3 - \langle X, \underline{e}_2\rangle \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_3 \\
&= -(\langle X, \underline{e}_1\rangle \underline{e}_1 + \langle X, \underline{e}_2\rangle \underline{e}_2)\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_3 \\
&= -(X + \langle X, \underline{e}_3\rangle \underline{e}_3)\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_3 \\
&= -(X + \langle X, T\rangle (T + \nu N)) \cdot \omega \cdot N \\
&= -(X \cdot N + \langle X, T\rangle (T \cdot N + \nu)) \cdot \omega.
\end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en (8.13) obtenemos lo que queríamos. □

Lema 8.0.3. *Un campo de espinores $\varphi \in \Gamma(U\Sigma)$ solución de (3.11) es equivalente a un campo de espinores $\psi \in \Sigma M$ solución de (8.9).*

Demostración. Recordemos la identificación $\psi \in \Gamma(\Sigma M) \longrightarrow \psi^* \in \Gamma(\Sigma)$ de la Proposición 3.4.9 que satisface lo siguiente

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \psi)^* &= \nabla_X \psi^* \\
(X \cdot_M \psi)^* &= iN \cdot X \cdot \psi^*,
\end{aligned}$$

para toda $X \in TM$.

Sea $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ que satisface la ecuación

$$\nabla_X \psi = \frac{i}{2} S(X) \cdot \psi - \frac{1}{2}(i\tau X + \langle X, T\rangle (\sigma + 2\tau)(iT + \nu)) \cdot \omega \cdot \psi,$$

aplicando el isomorfismo (3.46) a ambos lados de la ecuación anterior tenemos como ya vimos en el Lema 3.4.11 que

$$\left(\frac{i}{2} S(X)\psi\right)^* = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \psi^*.$$

En tanto que

$$\begin{aligned}
(i\tau X \cdot \omega \cdot \psi)^* &= i\tau (X \cdot \omega \cdot \psi)^* \\
&= i\tau i N \cdot X \cdot (\omega \cdot \psi)^* \\
&= -\tau N \cdot X \cdot \omega \cdot \psi^*,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
((\sigma + 2\tau)\langle X, T\rangle (iT + \nu) \cdot \omega \cdot \psi)^* &= (\sigma + 2\tau)\langle X, T\rangle (i^2 N \cdot T + \nu) \cdot (\omega \cdot \psi)^* \\
&= (\sigma + 2\tau)\langle X, T\rangle (T \cdot N + \nu) \cdot (\omega \cdot \psi)^* \\
&= (\sigma + 2\tau)\langle X, T\rangle (T \cdot N + \nu) \cdot \omega \cdot \psi^*.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la nueva ecuación es

$$\nabla_X \psi^* = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} e_j \cdot B(X, e_j) \cdot \psi^* - \frac{1}{2}\left(\tau X \cdot N + (\sigma + 2\tau)\langle X, T\rangle (T \cdot N + \nu)\right) \cdot \omega \cdot \psi^*. \tag{8.14}$$

Finalmente, usando el Lema 8.0.2 y poniendo $\varphi := \psi^*$ tenemos que las ecuaciones (8.14) y (3.11) son equivalentes. □

□

Aplicando el teorema anterior vamos a caracterizar las inmersiones en el espacio anti de Sitter con la siguiente estructura de grupo lorentziano.

El modelo del espacio anti de Sitter como grupo es el conjunto

$$SU_2^1 = \left\{ \begin{pmatrix} z & \omega \\ \overline{\omega} & \overline{z} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \ : \ |z|^2 - |\omega|^2 = -1 \right\}$$

que con el producto de matrices tiene estructura de grupo de Lie con métrica lorentziana invariante por la izquierda.

El álgebra de Lie de SU_2^1 es

$$\mathfrak{SU}_2^1 = \left\{ \begin{pmatrix} i\lambda & a \\ \overline{a} & -i\lambda \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C}, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

y se puede verificar que para la base

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

el corchete de Lie es

$$[E_1, E_2] = 2E_3, \quad [E_2, E_3] = -2E_1, \quad [E_3, E_1] = -2E_2,$$

y la métrica con la cual dotaremos al grupo es la que satisface $\langle E_i, E_j\rangle = 0$ si $i \neq j$ y $\langle E_1, E_1\rangle = \langle E_2, E_2\rangle = 1 = -\langle E_3, E_3\rangle$.

De acuerdo a [21], el espacio $\mathbb{L}(\kappa, \tau)$ con $\kappa + 4\tau^2 = 0$ coincide con el espacio anti de Sitter y por lo tanto podemos obtener del Teorema 8.0.1 un resultado para representar superficies en SU_2^1.

Sean M una superficie riemanniana orientada y $S : TM \to TM$ un operador simétrico. Supongamos que existen $T \in \Gamma(TM)$ y $\nu \in C^\infty(M)$ tales que

$$|T|^2 - |\nu|^2 = -1, \tag{8.15}$$

$$\nabla_X T = \nu(S(X) + J(X)), \tag{8.16}$$

$$\tag{8.17}$$

$$d\nu(X) = \langle S(X) + \tau J(X), T \rangle, \tag{8.18}$$

para todo $X \in TM$, con $J : TM \to TM$ que denota la rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$ en los planos tangentes.

Teorema 8.0.4. *Si M es simplemente conexa, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ tal que $|\psi^+|^2 - |\psi^-|^2 = 1$ y*

$$\nabla_X \psi = \frac{i}{2} S(X) \cdot \psi - \frac{1}{2} i X \cdot \omega \cdot \psi, \tag{8.19}$$

   para toda $X \in TM$.

2. *Existe una inmersión isométrica de M en SU_2^1 con operador de forma S.*

Demostración. Como el espacio anti de Sitter es un espacio $\mathbb{L}(\kappa, \tau)$ con $\kappa + 4\tau^2 = 0$, el resultado es consecuencia directa del Teorema 8.0.1 poniendo $\kappa = -4$ y $\tau = 1$. $\square$

Capítulo 9

Aplicaciones

9.1 Equivalencia entre ecuaciones de Killing y de Dirac

Sean (M, g) una superficie riemanniana orientada y ΣM su haz de espinores.

En esta sección usaremos $\langle\ ,\ \rangle$ para denotar la parte real del producto hermitiano en ΣM y a continuación enunciamos algunas de sus propiedades (ver [15]):

Para toda $X \in TM$ y ψ_1, ψ_2 secciones de ΣM se cumple

1. $\langle X \cdot \psi_1, X \cdot \psi_2 \rangle = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle$ si $|X| = 1$,
2. $\langle X \cdot \psi_1, \psi_2 \rangle = -\langle \psi_1, X \cdot \psi_2 \rangle$.

Usando la notación que se introduce en el Apéndice A tenemos que $\langle \psi, \psi \rangle = |\psi^+|^2 + |\psi^-|^2$.

Por otro lado, si definimos $\overline{\psi} = \psi^+ - \psi^-$, entonces ψ y $\overline{\psi}$ se relacionan como $ie_1 \cdot e_2 \cdot \psi = \overline{\psi}$ para (e_1, e_2) marco ortonormal de TM. De lo anterior se sigue que

$$\langle \psi, ie_1 \cdot e_2 \cdot \psi \rangle = \langle \psi, \overline{\psi} \rangle = |\psi^+|^2 - |\psi^-|^2. \tag{9.1}$$

En esta sección vamos a probar que la ecuación de tipo Killing que caracteriza las inmersiones de M en los espacios $\mathbb{L}(\kappa, \tau)$ con $\kappa + 4\tau^2 = 0$ (ver Teorema 8.0.1) es equivalente a su ecuación de Dirac asociada, de manera que las inmersiones también están caracterizadas por ecuaciones de Dirac.

En lo que sigue $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable y $\tau \in \mathbb{R}$.

Teorema 9.1.1. *Existe una correspondencia entre los siguientes datos:*

1. *Una solución* $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ *con* $|\psi^+|^2 - |\psi^-|^2 = 1$ *de la ecuación de Dirac*

$$D\psi = -iH\psi + i\tau\omega \cdot \psi. \tag{9.2}$$

2. *Un par* (ψ, S)*, donde* S *es un operador simétrico tal que* $H = \frac{1}{2}trS$ *y* ψ *es un campo de espinores en* ΣM *con* $|\psi^+|^2 - |\psi^-|^2 = 1$ *que satisface la ecuación*

$$\nabla_X\psi = \frac{i}{2}S(X) \cdot \psi - \frac{i}{2}\tau X \cdot \omega \cdot \psi, \quad X \in TM. \tag{9.3}$$

Usaremos el siguiente lema para probar el teorema que acabamos de enunciar.

Lema 9.1.2. *Si* ψ *es un campo de espinores en* ΣM *con* $|\psi^+|^2 - |\psi^-|^2 = 1$ *que además satisface la ecuación*

$$D\psi = -iH\psi + i\tau\omega \cdot \psi,$$

entonces el operador $S : TM \longrightarrow TM$ *definido por*

$$\langle S(Y), X\rangle = \frac{2}{|\psi|^2}\Big(\langle iX \cdot \nabla_Y\psi, \psi\rangle - \frac{\tau}{2}g(X, JY)|\psi|^2\Big) \qquad X, Y \in TM, \tag{9.4}$$

es simétrico y su traza es $H = \frac{1}{2}trS$*,* J *denota la rotación por el ángulo* $\frac{\pi}{2}$ *en los planos tangentes a* M*.*

Demostración. Sea (e_1, e_2) una marco ortonormal de TM, veamos que S es simétrico:

$$\begin{aligned}
\langle S(e_1), e_2\rangle &= \frac{2}{|\psi|^2}\left(\langle ie_2\cdot\nabla_{e_1}\psi,\psi\rangle - \frac{\tau}{2}g(e_2,J(e_1))|\psi|^2\right)\\
&= \frac{2}{|\psi|^2}\left(-\langle ie_2\cdot e_1\cdot\nabla_{e_1}\psi, e_1\cdot\psi\rangle - \frac{\tau}{2}|\psi|^2\right)\\
&= \frac{2}{|\psi|^2}\left(-\langle ie_2\cdot(D\psi - e_2\cdot\nabla_{e_2}\psi), e_1\cdot\psi\rangle - \frac{\tau}{2}|\psi|^2\right)\\
&= \frac{2}{|\psi|^2}\left(-\langle ie_2\cdot(-iH\psi + i\tau\omega\cdot\psi - e_2\cdot\nabla_{e_2}\psi), e_1\cdot\psi\rangle - \frac{\tau}{2}|\psi|^2\right)\\
&= \frac{2}{|\psi|^2}\left(-\langle -\tau e_1\cdot\psi + i\nabla_{e_2}\psi, e_1\cdot\psi\rangle - \frac{\tau}{2}|\psi|^2\right)\\
&= \frac{2}{|\psi|^2}\left(\tau|\psi|^2 - \langle i\nabla_{e_2}\psi, e_1\cdot\psi\rangle - \frac{\tau}{2}|\psi|^2\right)\\
&= \frac{2}{|\psi|^2}\left(\langle ie_1\cdot\nabla_{e_2}\psi,\psi\rangle - \frac{\tau}{2}g(e_1,J(e_2))|\psi|^2\right)\\
&= \langle S(e_2), e_1\rangle.
\end{aligned}$$

Por otro lado, como $g(X, JX) = 0$ para toda $X \in TM$ tenemos que la traza de S es

$$\begin{aligned}
trS &= \sum_{j=1}^{2}\langle S(e_j), e_j\rangle\\
&= \sum_{j=1}^{2}\frac{2}{|\psi|^2}\langle ie_j\cdot\nabla_{e_j}\psi,\psi\rangle\\
&= \frac{2}{|\psi|^2}\langle iD\psi,\psi\rangle\\
&= \frac{2}{|\psi|^2}\langle i(-iH\psi + i\tau\omega\psi),\psi\rangle = 2H,
\end{aligned}$$

la última igualdad es consecuencia de la segunda propiedad de $\langle\ ,\ \rangle$ que se menciona al inicio de la sección, pues implica que ψ y $\omega\psi$ son ortogonales. $\square$

Demostración del Teorema 9.1.1. Sean (e_1, e_2) un marco ortonormal de TM de manera que $\nabla e_1 = 0 = \nabla e_2$ en un punto y ψ una solución de (9.3), entonces

$$\begin{aligned}
D\psi &= \sum_{j=1}^{2} e_j \cdot \nabla_{e_j}\psi \\
&= \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{2} e_j \cdot (S(e_j) - \tau e_j \cdot \omega) \cdot \psi \\
&= \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{2} e_j \cdot (\langle S(e_j), e_1\rangle e_1 + \langle S(e_j), e_2\rangle e_2 - \tau e_j \cdot \omega) \cdot \psi \\
&= -\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{2} \langle S(e_j), e_j\rangle \psi + i\tau\omega \cdot \psi \\
&= -iH\psi + i\tau\omega \cdot \psi.
\end{aligned}$$

Ahora, si ψ es una sección de ΣM con $|\psi^+|^2 - |\psi^-|^2 = 1$ y que satisface la ecuación (9.2), entonces es consecuencia de las propiedades que mencionamos al inicio de la sección que $(\frac{i}{|\psi|}\psi, \frac{i}{|\psi|}e_1 \cdot \psi, \frac{i}{|\psi|}e_2 \cdot \psi, \frac{i}{|\psi|}e_1 \cdot e_2 \cdot \psi)$ es una base ortonormal de ΣM respecto a $\langle\ ,\ \rangle$, por lo que

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1}\psi &= \frac{1}{|\psi|^2}\langle \nabla_{e_1}\psi, i\psi\rangle i\psi + \frac{1}{|\psi|^2}\langle \nabla_{e_1}\psi, ie_1 \cdot \psi\rangle ie_1 \cdot \psi \\
&\quad + \frac{1}{|\psi|^2}\langle \nabla_{e_1}\psi, ie_2 \cdot \psi\rangle ie_2 \cdot \psi + \frac{1}{|\psi|^2}\langle \nabla_{e_1}\psi, ie_1 \cdot e_2 \cdot \psi\rangle ie_1 \cdot e_2 \cdot \psi.
\end{aligned} \tag{9.5}$$

Vamos a probar que para toda $1 \leq k \leq 2$ se tiene que

$$\langle \nabla_{e_k}\psi, ie_1 \cdot e_2 \cdot \psi\rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle \nabla_{e_1}\psi, i\psi\rangle = -\langle \nabla_{e_2}\psi, ie_1 \cdot e_2 \cdot \psi\rangle.$$

La primera igualdad es consecuencia de la ecuación (9.1) pues $\langle \psi, ie_1 \cdot e_2 \cdot \psi\rangle = |\psi^+| - |\psi^-| = 1$ y por lo tanto $e_k\langle \psi, ie_1 \cdot e_2 \cdot \psi\rangle = 0$, de esta manera $\langle \nabla_{e_k}\psi, ie_1 \cdot e_2 \cdot \psi\rangle = -\langle \psi, ie_1 \cdot e_2 \cdot \nabla_{e_k}\psi\rangle$ mientras que gracias a las propiedades de $\langle\ ,\ \rangle$ tenemos que $\langle \psi, ie_1 \cdot e_2 \cdot \nabla_{e_k}\psi\rangle = \langle \nabla_{e_k}\psi, ie_1 \cdot e_2 \cdot \psi\rangle$.

Para probar la segunda igualdad usamos que ψ satisface (9.2) y por tanto

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{e_1}\psi, i\psi\rangle &= \langle iH\psi + -i\tau e_1 \cdot \omega \cdot \psi + e_1 \cdot \nabla_{e_1}\psi, ie_1 \cdot \psi\rangle \\
&= -\langle D\psi - e_1 \cdot \nabla_{e_1}\psi, ie_1 \cdot \psi\rangle \\
&= -\langle e_2 \cdot \nabla_{e_2}\psi, ie_1 \cdot \psi\rangle \\
&= \langle \nabla_{e_2}\psi, ie_2 \cdot e_1 \cdot \psi\rangle \\
&= -\langle \nabla_{e_2}\psi, ie_1 \cdot e_2 \cdot \psi\rangle.
\end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que la expresión para $\nabla_{e_1}\psi$ que se da en (9.5) se reduce a

$$\nabla_{e_1}\psi = \frac{1}{|\psi|^2}(\langle\nabla_{e_1}\psi, ie_1\cdot\psi\rangle ie_1\cdot\psi + \langle\nabla_{e_1}\psi, ie_2\cdot\psi\rangle ie_2\cdot\psi)$$

y de las propiedades del producto hermitiano y del Lema 9.1.2 obtenemos que

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1}\psi &= \frac{i}{|\psi|^2}(\langle ie_1\cdot\nabla_{e_1}\psi,\psi\rangle e_1 + \langle ie_2\cdot\nabla_{e_1}\psi,\psi\rangle e_2)\cdot\psi \\
&= \frac{i}{2}(\langle S(e_1),e_1\rangle e_1 + (\langle S(e_1),e_2\rangle + \tau g(e_2,J(e_1)))e_2)\cdot\psi \\
&= \frac{i}{2}S(e_1)\cdot\psi - \frac{i}{2}\tau e_1\cdot e_1\cdot e_2\cdot\psi \\
&= \frac{i}{2}S(e_1)\cdot\psi - \frac{i}{2}\tau e_1\cdot\omega\cdot\psi.
\end{aligned}$$

De manera similar se prueba que $\nabla_{e_2}\psi = \frac{i}{2}S(e_2)\cdot\psi - \frac{i}{2}\tau e_2\cdot\omega\cdot\psi$. □

Proposición 9.1.3. *Si (M,g) es una superficie simplemente conexa, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe $\psi\in\Gamma(\Sigma M)$ con $|\psi^+|^2-|\psi^-|^2=1$ solución de la ecuación*

$$D\psi = -iH\psi + i\tau\omega\cdot\psi.$$

2. *Existe una inmersión isométrica de M en el espacio homogéneo $\mathbb{L}(\kappa,\tau)$, donde $\kappa+4\tau^2=0$ y con curvatura media H.*

Demostración. Se sigue de los Teoremas 8.0.1 y 9.1.1. □

Tomando $\tau=0=\kappa$ primero y después $\tau=-4$, $\kappa=1$, obtenemos los siguientes corolarios.

Corolario 9.1.4. *Sean (M,g) una superficie riemannianna orientada y $H: M\longrightarrow\mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces existe una correspondencia entre los siguientes datos:*

1. *Una solución ψ con $|\psi^+|^2-|\psi^-|^2=1$ de la ecuación de Dirac*

$$D\psi = -iH\psi. \tag{9.6}$$

2. *Un par (ψ, S), donde S es un operador simétrico tal que $H = \frac{1}{2}trS$ y ψ un campo de espinores en ΣM con $|\psi^+|^2 - |\psi^-|^2 = 1$ que satisface la ecuación*
$$\nabla_X \psi = \frac{i}{2} S(X) \cdot \psi, \quad X \in TM. \tag{9.7}$$

3. *Una inmersión isométrica de M en el espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{1,2}$ con curvatura media H.*

Corolario 9.1.5. *Sean (M, g) una superficie riemannianna orientada y $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces existe una correspondencia entre los siguientes datos:*

1. *Una solución ψ con $|\psi^+|^2 - |\psi^-|^2 = 1$ de la ecuación de Dirac*
$$D\psi = -iH\psi + i\omega \cdot \psi. \tag{9.8}$$

2. *Un par (ψ, S), donde S es un operador simétrico tal que $H = \frac{1}{2}trS$ y ψ un campo de espinores en ΣM con $|\psi^+|^2 - |\psi^-|^2 = 1$ que satisface la ecuación*
$$\nabla_X \psi = \frac{i}{2} S(X) \cdot \psi - \frac{i}{2} X \cdot \omega \cdot \psi, \quad X \in TM. \tag{9.9}$$

3. *Una inmersión isométrica de M en el espacio anti de Sitter $\mathbb{H}_1^3$ con curvatura media H.*

9.2 Correspondencia entre superficies mínimas en $\mathbb{R}^3$ y superficies máximas en $\mathbb{R}^{1,2}$

Gracias a [13] sabemos que la inmersión de una superficie riemanniana en el espacio euclideano $\mathbb{R}^3$ con curvatura media cero está caracterizada por la existencia de un campo de espinores ψ_1 que satisface lo siguiente
$$|\psi_1^+|^2 + |\psi_1^-|^2 = 1 \quad y \quad D\psi_1 = 0. \tag{9.10}$$
Por otro lado, de acuerdo al Corolario 9.1.4 la representación de la superficie en $\mathbb{R}^{1,2}$ con curvatura media cero es equivalente a la existencia de un campo de espinores ψ_2 que cumple que
$$|\psi_2^+|^2 - |\psi_2^-|^2 = 1 \quad y \quad D\psi_2 = 0. \tag{9.11}$$

Proposición 9.2.1. *Sean (M, g) una superficie riemanniana, ΣM su haz de espinores y $\Sigma\overline{M}$ el haz de espinores de M con cierta métrica que es conforme a g. La existencia de un campo de espinores ψ_1 en ΣM que satisface (9.10) es equivalente a que exista un campo de espinores ψ_2 en $\Sigma\overline{M}$ que satisface (9.11).*

Demostración. Sea ψ_1 un campo de espinores en ΣM que satisface las ecuaciones $|\psi_1^+|^2 + |\psi_1^-|^2 = 1$ y $D\psi_1 = 0$.

En lo que sigue vamos a utilizar la relación que hay entre haces de espinores con métricas conformes y su respectivo operador de Dirac, propiedades que pueden consultarse en [5].

Denotamos por $\widetilde{Q}_{M_g}$ a la estructura espinorial de (M, g) y por $\widetilde{Q}_{M_{\overline{g}}}$ a la estructura espinorial que se induce en $(M, \overline{g})$ usando la métrica conforme $\overline{g} = e^{2u}g$, donde $e^{2u} = (|\psi_1^+|^2 - |\psi_1^-|^2)^2$.

Para denotar al campo de espinores que corresponde a ψ_1 en $\widetilde{Q}_{M_{\overline{g}}}$ usamos $\overline{\psi_1}$ y $\overline{D}$ para denotar al respectivo operador de Dirac.

Se sabe que

$$\overline{D}(e^{-\frac{1}{2}u}\overline{\psi_1}) = e^{\frac{-3}{2}u}\overline{D\psi_1},$$

y por hipótesis $D\psi_1 = 0$, así que

$$\overline{D}(e^{-\frac{1}{2}u}\overline{\psi_1}) = 0.$$

Gracias a la definición de e^{2u} tenemos que la ecuación de arriba es equivalente a

$$\overline{D}\left(\frac{1}{\sqrt{|\psi_1^+|^2 - |\psi_1^-|^2}}\overline{\psi_1}\right) = 0.$$

Y por lo tanto $\psi_2 := \frac{1}{\sqrt{|\psi_1^+|^2 - |\psi_1^-|^2}}\overline{\psi_1}$ es un campo de espinores en $\Sigma\overline{M}$ que satisface $|\psi_2^+|^2 - |\psi_2^-|^2 = 1$ y $\overline{D}\psi_2 = 0$ que es lo que buscábamos. □

Consecuencia del Lema anterior y de las ecuaciones (9.10) y (9.11) tenemos el siguiente corolario.

Corolario 9.2.2. *Existe una correspondencia conforme entre superficies mínimas en $\mathbb{R}^3$ y máximas en $\mathbb{R}^{1,2}$.*

Ambas representaciones, de (M, g) en $\mathbb{R}^3$ y de $(M, \overline{g})$ en $\mathbb{R}^{1,2}$ con curvatura media cero tienen formulas tipo Weierstrass; si (Φ_1, Φ_2, Φ_3) son los datos tipo Weierstrass para la inmersión de (M, g) en $\mathbb{R}^3$, entonces $(i\Phi_1, i\Phi_2, \Phi_3)$ son los datos tipo Weierstrass para la inmersión de $(M, \overline{g})$ en $\mathbb{R}^{1,2}$. A continuación, veremos que dicha correspondencia que se expone en [19] coincide con la que se obtiene del Corolario 9.2.2.

Digamos que $z = x + iy$ son coordenadas isotérmicas de M y $\widetilde{f_1} = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ es tal que

$$F_1 = \Re e \int \widetilde{f_1} dz$$

es la representación con curvatura media $H = 0$ de (M, g) en $\mathbb{R}^3$.

En el Lema 7.2 de [3] se prueba que si ψ_1 es el campo de espinores en ΣM que caracteriza la inmersión de (M, g) en $\mathbb{R}^3$ con curvatura media $H = 0$ y μ es una función que satisface que $g = \mu^2(dx^2 + dy^2)$, entonces $\widetilde{f_1}$ se puede recuperar en terminos de los componentes de ψ_1 en el marco espinorial $\left(\frac{1}{\mu}\partial_x, \frac{1}{\mu}\partial_y\right)$.

De hecho, si z_1 y z_2 en $\mathbb{C}$ son tales componentes se obtiene que

$$\widetilde{f_1} = \mu \left(i(z_1^2 - \overline{z}_2^2), z_1^2 + \overline{z}_2^2, -2iz_1\overline{z}_2\right).$$

En analogía con lo que se hace en [3] para $\mathbb{R}^3$, en el espacio de Minkowski también podemos usar que en la Proposición 3.4.13 se obtiene una fórmula de representación explícita para encontrar que si $F_2 : M \longrightarrow \mathbb{R}^{1,2}$ es una inmersión con curvatura media cero, ψ_2 es un campo de espinores que la representa y λ es una función que satisface que $\overline{g} = \lambda^2(dx^2 + dy^2)$, entonces $F_2 = \Re e(\int \widetilde{f_2} dz)$ con $z = x + iy$ y

$$\widetilde{f_2} = \lambda\{\tau[\psi_2]e_1^o[\psi_2] - i\tau[\psi_2]e_2^o[\psi_2]\}, \tag{9.12}$$

en tal ecuación $[\psi_2]$ representa al campo de espinores ψ_2 en el marco espinorial $\left(\frac{1}{\lambda}\partial_x, \frac{1}{\lambda}\partial_y\right)$, además , e_1^o, e_2^o son los últimos vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^{1,2} \subset Cl_{1,2}$.

Lema 9.2.3. *Sean ψ_1 y ψ_2 campos de espinores como en la Proposición 9.2.1 y $\widetilde{f_2}$ como en (9.12), entonces su expresión en términos de los componentes de ψ_1 es*

$$\widetilde{f_2} = \mu\left(({z_1}^2 - {\overline{z}_2}^2), -i({z_1}^2 + {\overline{z}_2}^2), -2iz_1\overline{z_2}\right).$$

Demostración. Como antes (M, g) es una superficie riemanniana orientada y $\overline{g}$ una métrica conforme a g, que en este caso está dada por $\overline{g} = e^{2u}g$ con $e^{2u} = (|\psi_1^+|^2 - |\psi_1^-|^2)^2$.

Usando la notación de los párrafos anteriores tenemos que μ y λ son funciones que satisfacen que $g = \mu^2|dz|^2$ y $\overline{g} = \lambda^2|dz|^2$.

Ahora, vamos a encontrar el valor de e^{2u} en términos de λ y de μ, por un lado tenemos que $g = \mu^2|dz|^2$ y por otro $\overline{g} = e^{2u}g$, así que $\overline{g} = \lambda^2|dz|^2 = e^{2u}\mu^2|dz|^2$ de donde se sigue que $e^{2u} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2$ y

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{|\psi_1^+|^2 - |\psi_1^-|^2}}\overline{\psi_1} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\overline{\psi_1}.$$

De la definición de $\Sigma\overline{M}$ se sigue que $[\psi_1] = [\overline{\psi_1}]$. Luego, usando el Lema 3.4.5 y la Proposición 3.4.9 tenemos que en el marco $(\frac{e^{-u}}{\mu}\partial_x, \frac{e^{-u}}{\mu}\partial_y)$ que satisface que $[\frac{e^{-u}}{\mu}\partial_x] = e_1^o$ y $[\frac{e^{-u}}{\mu}\partial_y] = e_2^o$ las coordenadas de ψ_2 son $[\psi_2] = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}(z_1 + iJz_2)$ y $\tau[\psi_2] = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}(\overline{z_1} - iJz_2)$.

Identificando e_1^o con J y e_2^o con JI como lo hicimos en la Sección 3.4 y de acuerdo a la ecuación (9.12)

$$\begin{aligned}
\widetilde{f_2} &= \lambda(\tau\,[\psi_2]\,e_1^o\,[\psi_2] - i\tau\,[\psi_2]\,e_2^o\,[\psi_2]) \\
&= \lambda\left\{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)(\overline{z_1} - iJz_2)J(z_1 + iJz_2) - i\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)(\overline{z_1} - iJz_2)JI(z_1 + iJz_2)\right\} \\
&= \mu\left\{(\overline{z_1} - iJz_2)J(z_1 + iJz_2) - i(\overline{z_1} - iJz_2)JI(z_1 + iJz_2)\right\} \\
&= \mu\left\{(Jz_1 + i\overline{z_2})(z_1 + iJz_2) + iI(Jz_1 - i\overline{z_2})(z_1 + iJz_2)\right\} \\
&= \mu\{J(z_1^2 - z_2^2) + 2iI\Im m(z_1\overline{z_2}) - iJI(z_1^2 + z_2^2) + 2I\Re e(z_1\overline{z_2})\}
\end{aligned}$$

para concluir, escribimos $z_i^2 = \Re e(z_i^2) + I\Im m(z_i^2)$ $1 \leq i \leq 2$ y agrupamos los términos. □

Tales expresiones para $\widetilde{f_1}$ y $\widetilde{f_2}$ nos permiten ver que nuestra correspondencia espinorial dada en la Proposición 9.2.1 implica la correspondencia descrita en términos de representaciones de Weierstrass en [19] que consiste en mandar los datos (Φ_1, Φ_2, Φ_3) de la representación de Weierstrass en $\mathbb{R}^3$ en los datos $(i\Phi_1, i\Phi_2, \Phi_3)$ de la representación en $\mathbb{R}^{1,2}$.

9.3 Correspondencia entre superficies CMC en $\mathbb{R}^{1,2}$ y $\mathbb{H}^3_1$

En la sección anterior obtuvimos una correspondecia conforme entre superficies máximas del espacio de Minkowski y mínimas de $\mathbb{R}^3$, nuestro objetivo en lo que sigue es probar que a una superficie de curvatura media constante de $\mathbb{R}^{1,2}$ le corresponde una superficie inmersa en $\mathbb{H}^3_1$ también con curvatura media constante, si consideramos que $\mathbb{R}^{1,2} = \mathbb{L}(0,0)$ y $\mathbb{H}^3_1 = \mathbb{L}(-4,1)$ (ver Capítulo 8), entonces dicha correspondencia es análoga a la que Daniel obtiene en [11] para los espacios $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$.

Proposición 9.3.1. *Dadas una superficie riemanniana (M,g) y $H_1 \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$ existe una correspondencia entre los campos de espinores ψ_1 de ΣM con $|\psi_1^+|^2 - |\psi_1^-|^2 = 1$ que son solución de la ecuación*

$$D\psi_1 = -iH_1\psi_1$$

y los campos ψ_2 con $|\psi_2^+|^2 - |\psi_2^-|^2 = 1$ que son solución de

$$D\psi_2 = -iH_2\psi_2 + i\omega \cdot \psi_2,$$

para alguna $H_2 \in \mathbb{R}$. El elemento de volumen es $\omega = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$, donde $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ es una base positivamente orientada de M.

Demostración. Sea $\psi_1 \in \Gamma(\Sigma M)$ con $|\psi_1^+|^2 - |\psi_1^-|^2 = 1$ una solución de la ecuación $D\psi_1 = -iH_1\psi_1$.

Para $a = cos\theta + sen\theta e_1 \cdot e_2$ tomamos $\psi_2 = a \cdot \psi_1$, observe que $\nabla_X a \cdot \psi_1 = a \cdot \nabla_X \psi_1$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
D\psi_2 &= a^{-1} D\psi_1 \\
&= a^{-1} \cdot (-iH_1\psi_1) \\
&= a^{-1} \cdot (-iH_1 a^{-1} a \psi_1) \\
&= -ia^{-2} H_1 a \psi_1 \\
&= -iH_1(cos2\theta - sen2\theta e_1 \cdot e_2) \cdot \psi_2 \\
&= -iH_1 cos2\theta \cdot \psi_2 + iH_1 sen2\theta e_1 \cdot e_2 \cdot \psi_2.
\end{aligned}$$

Finalmente, elegimos $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $sen2\theta = \frac{1}{H_1}$, de manera que al sustituir en la ecuación de arriba tenemos que

$$D\psi_2 = -i(\pm\sqrt{H_1^2 - 1})\psi_2 + i\omega \cdot \psi_2.$$

□

Como consecuencia de la proposición anterior y de los Corolarios 9.1.4 y 9.1.5 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 9.3.2. *Para $H_1 \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ existe una correspondecia entre las inmersiones de curvatura media H_1 de M en $\mathbb{R}^{1,2}$ y las inmersiones de curvatura media $\pm\sqrt{H_1^2 - 1}$ de M en el espacio $\mathbb{H}^3_1$.*

Apéndice A

Haz de espinores y descomposición

A.1 Espacio de representación de $Spin(2)$

Hay diferentes referencias, por ejemplo [12], en las que se describe el espacio de representación de $Spin(2)$, al cual denotaremos por Σ_2. Sabemos que un modelo para dicho espacio es $\mathbb{C}^2$ y con ello

$$Spin(2) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

y

$$\begin{array}{rcl} \rho_1 : Spin(2) & \longrightarrow & Aut(\Sigma_2) \\ g = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} & \longmapsto & \rho_1(g) : \begin{array}{rcl} \Sigma_2 & \longrightarrow & \Sigma_2 \\ (z, w) & \longmapsto & (e^{i\theta} z, e^{-i\theta} w). \end{array} \end{array}$$

Por otro lado, Cl_2 (que es isomorfa a $Cl_{0,2}$) se identifica con el álgebra real de los cuaternios $\mathbb{H} = \{\sigma_0 + I\sigma_1 + J\sigma_2 + K\sigma_3 : \sigma_i \in \mathbb{R}\}$ y $Spin(2) = \{\sigma_0 + \sigma_1 I : \sigma_0, \sigma_1 \in \mathbb{R},\ \sigma_0^2 + \sigma_1^2 = 1\} \subset Cl_2$, con lo que otra representación de $Spin(2)$ es

$$\begin{array}{rcl} \rho_2 : Spin(2) \subset \mathbb{H} & \longrightarrow & Aut(\mathbb{H}) \\ g & \longmapsto & \rho_2(g) : \begin{array}{rcl} \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ x & \longmapsto & g \cdot x. \end{array} \end{array}$$

En lo que sigue probaremos que $\mathbb{H}$ y Σ_2 son espacios de representación isomorfos de $Spin(2)$.

Definimos

$$\begin{aligned} \lambda : Spin(2) \subset \mathbb{H} &\longrightarrow Spin(2) \subset Aut(\Sigma_2) \\ \sigma_0 + I\sigma_1 &\longmapsto \begin{pmatrix} \sigma_0 + i\sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_0 - i\sigma_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lema A.1.1. *La siguiente aplicación es un isomorfismo de espacios vectoriales que es λ-equivariante*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ q_0 + q_1 I + q_2 J + q_3 K &\longmapsto (q_0 + iq_1, i(q_2 - q_3 i)). \end{aligned}$$

Demostración. Veamos que f es λ-equivariante: sean $g = \sigma_0 + I\sigma_1 \in Spin(2) \subset \mathbb{H}$ y $q = q_0 + q_1 I + q_2 J + q_3 K \in \mathbb{H}$; por un lado

$$f(\rho_2(g)(q)) = (\sigma_0 q_0 - \sigma_1 q_1 + i(\sigma_0 q_0 + \sigma_1 q_1), i((\sigma_0 q_2 - \sigma_1 q_3) - i(\sigma_0 q_3 + i\sigma_1 q_2))),$$

por otro lado $f(q) = (q_0 + iq_1, i(q_2 - q_3 i))$ y

$$\rho_1(\lambda(g))f(q) = ((\sigma_0 + i\sigma_1)(q_0 + iq_1), (\sigma_0 - i\sigma_1)i(q_2 - q_3 i)),$$

de donde podemos concluir que

$$f(\rho_2(g)(q)) = \rho_1(\lambda(g))f(q).$$

$\square$

Corolario A.1.2. *Usando $f : \mathbb{H} \longrightarrow \Sigma_2$ como en el lema anterior tenemos que $\gamma_f : Aut(\mathbb{H}) \longrightarrow Aut(\Sigma_2)$, $T \longmapsto fTf^{-1}$ es un isomorfismo de espacios de representación, en otras palabras, $\gamma_f : Aut(\mathbb{H}) \longrightarrow Aut(\Sigma_2)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} Aut(\mathbb{H}) \arrow[r, "\gamma_f"] & Aut(\Sigma_2) \\ Spin(2) \arrow[u, "\rho_2"] \arrow[r, "\lambda"] & Spin(2). \arrow[u, "\rho_1"'] \end{tikzcd}$$

A.2 Estructuras compleja y cuaterniónica en ΣM

Sea (M,g) una superficie riemanniana orientable con estructura espinorial $\widetilde{Q}_M$. Tomamos $\rho_2 : Spin(2) \longrightarrow \mathbb{H}$ como en la sección anterior y el haz de espinores sobre M respecto de tal representación

$$\Sigma M = \widetilde{Q}_M \times_{\rho_2} \mathbb{H},$$

donde gracias al Corolario A.1.2 podemos usar $\Sigma_2 = \mathbb{H}$.

En el espacio Σ_2 tenemos la estructura compleja

$$\begin{aligned} i : \Sigma_2 &\longrightarrow \Sigma_2 \\ \sigma &\longmapsto \sigma \cdot I. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Dicha aplicación induce una estructura compleja en el haz de espinores de M de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} i : \Sigma M &\longrightarrow \Sigma M \\ \psi = \left[\widetilde{s}_M, \sigma\right] &\longmapsto \left[\widetilde{s}_M, i(\sigma)\right] =: i\psi, \end{aligned} \tag{A.2}$$

donde $\widetilde{s}_M : U \subset M \longrightarrow \widetilde{Q}_M$ es una sección local del haz principal $\widetilde{Q}_M$ y $\sigma : U \subset M \longrightarrow \Sigma_2$ es una función diferenciable.

Descomposición de ΣM. El espacio de representación Σ_2 tiene una desomposición que se obtiene a partir de la estructura compleja

$$\begin{aligned} \Sigma_2^+ &= \{\sigma \in \Sigma_2 : ie_1 \cdot e_2 \cdot \sigma = \sigma\}, \\ \Sigma_2^- &= \{\sigma \in \Sigma_2 : ie_1 \cdot e_2 \cdot \sigma = -\sigma\}, \end{aligned} \tag{A.3}$$

donde $e_1 = J$ y $e_2 = -K$ y $\Sigma_2 = \Sigma_2^+ + \Sigma_2^-$.

Ambos subespacios Σ_2^+ y Σ_2^- son invariantes por la acción de $Spin(2)$, de manera que tenemos dos representaciones para tal grupo

$$\rho^+ : Spin(2) \subset \mathbb{H} \longrightarrow Aut(\Sigma_2^+) \quad y \quad \rho^- : Spin(2) \subset \mathbb{H} \longrightarrow Aut(\Sigma_2^-).$$

Dichas representaciones nos dan una descomposición de ΣM en dos subhaces

$$\Sigma M^+ = \widetilde{Q}_M \times_{\rho^+} \Sigma_2^+ \quad y \quad \Sigma M^- = \widetilde{Q}_M \times_{\rho^-} \Sigma_2^-.$$

Producto hermitiano. Dado que $e_1 \cdot e_2 = -I$ tenemos las siguientes caracterizaciones del los subespacios Σ_2^+ y Σ_2^-:

$$\Sigma_2^+ = \{\sigma \in \Sigma_2 : -I\sigma I = \sigma\} = \{\sigma_0 + I\sigma_1 : \sigma_0, \sigma_1 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}$$

y

$$\Sigma_2^- = \{\sigma \in \Sigma_2 : I\sigma I = \{J(\sigma_2 - I\sigma_3) : \sigma_2, \sigma_3 \in \mathbb{R}\} = \sigma\} = J\mathbb{C}.$$

Sobre ellos definimos los siguientes productos hermitianos

$$\begin{array}{rcl} \Sigma_2^+ \times \Sigma_2^+ & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\sigma^+, \phi^+) & \longmapsto & \langle \sigma^+, \phi^+ \rangle = \sigma^+ \overline{\phi^+}, \end{array} \tag{A.4}$$

donde $\overline{\phi^+}$ es el complejo conjugado a ϕ^+ y

$$\begin{array}{rcl} \Sigma_2^- \times \Sigma_2^- & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\sigma^-, \phi^-) & \longmapsto & \langle \sigma^-, \phi^- \rangle = -\sigma^- \phi^-. \end{array} \tag{A.5}$$

Tales productos inducen un producto hermitiano en cada uno de los haces ΣM^+ y ΣM^-, y por lo tanto ΣM también tiene un producto hermitiano natural

$$\begin{array}{rcl} \Sigma M \times \Sigma M & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ ([\widetilde{s}, \sigma], [\widetilde{s}, \phi]) & \longmapsto & \langle \sigma, \phi \rangle, \end{array} \tag{A.6}$$

donde $\langle \sigma, \phi \rangle = \langle \sigma^+, \phi^+ \rangle + \langle \sigma^-, \phi^- \rangle$ para $\sigma, \phi \in \Sigma_2$.

Estructura cuaterniónica. La multiplicación por J por la derecha define una estructura cuaterniónica en Σ_2 respecto de la estructuta compleja i, dicha estructura pasa a ΣM como

$$\begin{array}{rcl} \alpha : \Sigma M & \longrightarrow & \Sigma M \\ \psi = \left[\widetilde{s}_{M}, \sigma\right] & \longmapsto & \left[\widetilde{s}_{M}, \sigma J\right] =: \alpha(\psi). \end{array}$$

Apéndice B

Bivectores y operadores lineales

Usamos $\mathbb{R}^{r,s}$ para denotar al espacio vectorial $\mathbb{R}^{r+s}$ con el producto interior $-dx_1^2 - \ldots - dx_r^2 + dx_{r+1}^2 + \ldots + dx_{r+s}^2$. Veremos que un operador antisimétrico $u : \mathbb{R}^{r,s} \longrightarrow \mathbb{R}^{r,s}$ se identifica con un bivector $\underline{u} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{r,s})$.

En el álgebra de Clifford $Cl_{r,s}$ con producto $\cdot$ definimos el corchete

$$[a,b] = \frac{1}{2}(a \cdot b - b \cdot a), \tag{B.1}$$

para todo $a, b \in Cl_{r,s}$.

Lema B.0.1. *Sea $u : \mathbb{R}^{r,s} \longrightarrow \mathbb{R}^{r,s}$ un operador anti-simétrico. Entonces el bivector que representa a u es*

$$\underline{u} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r+s} \varepsilon_j e_j \cdot u(e_j), \qquad \varepsilon_j = \langle e_j, e_j \rangle = \pm 1, \tag{B.2}$$

de manera que para todo $\xi \in \mathbb{R}^{r,s}$ se cumple

$$[\underline{u}, \xi] = u(\xi). \tag{B.3}$$

Demostración. Para $i < j$ consideremos la aplicación lineal $u : \mathbb{R}^{r,s} \longrightarrow \mathbb{R}^{r,s}$ dada por $e_i \longmapsto \varepsilon_j e_j$, $e_j \longmapsto -\varepsilon_i e_i$ y $e_k \longmapsto 0$ si $k \neq i, j$ que corresponde a $\varepsilon_i e_i \wedge \varepsilon_j e_j$. Tal función es antisimétrica y $\underline{u} = \varepsilon_i \varepsilon_j e_i \cdot e_j = \frac{1}{2}\varepsilon_i \varepsilon_j (e_i \cdot e_j - e_j \cdot e_i)$ es tal que

$$[\underline{u}, e_k] \;\; = \;\; \frac{1}{2}\varepsilon_i \varepsilon_j (e_i \cdot e_j \cdot e_k - e_k \cdot e_j \cdot e_i),$$

por lo que si $k = i$

$$\begin{aligned} [\underline{u}, e_i] &= \frac{1}{2}\varepsilon_i\varepsilon_j(e_i \cdot e_j \cdot e_i - e_i \cdot e_i \cdot e_j) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_i\varepsilon_j(\varepsilon_i e_j + \varepsilon_i e_j) \\ &= \varepsilon_j e_j = u(e_i), \end{aligned}$$

de manera análoga se prueba que $[\underline{u}, e_j] = u(e_j)$ y que $[\underline{u}, e_k] = 0$ para $k \neq i, j$, y finalmente, la igualdad en (B.3) se sigue por linealidad. $\square$

En lo que sigue usaremos la descomposición $\mathbb{R}^{r,s} = \mathbb{R}^{r_1,s_1} \oplus \mathbb{R}^{r_2,s_2}$

Lema B.0.2. *Sean $u : \mathbb{R}^{r_1,s_1} \longrightarrow \mathbb{R}^{r_2,s_2}$ un operador lineal y $u^* : \mathbb{R}^{r_2,s_2} \longrightarrow \mathbb{R}^{r_1,s_1}$ su adjunta, el bivector*

$$\underline{u} = \sum_{j=1}^{r_1+s_1} \varepsilon_j e_j \cdot u(e_j) \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{r_1,s_1}) \subset Cl_{r_1,s_1}, \ \ \varepsilon_j = \langle e_j, e_j \rangle = \pm 1$$

representa al operador

$$\begin{pmatrix} 0 & -u^* \\ u & 0 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^{r,s} \longrightarrow \mathbb{R}^{r,s}, \ \ r = r_1 + r_2, \ \ s = s_1 + s_2.$$

Además,

$$\underline{u} = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{r_1+s_1} \varepsilon_j e_j \cdot u(e_j) + \sum_{j=r_1+s_1+1}^{r+s} \varepsilon_j e_j \cdot (-u^*(e_j)) \right) \tag{B.4}$$

y para todo $\xi = \xi_1 + \xi_2 \in \mathbb{R}^{r,s}$ donde $\xi_1 \in \mathbb{R}^{r_1,s_1}$ y $\xi_2 \in \mathbb{R}^{r_2,s_2}$ se tiene que

$$[\underline{u}, \xi] = u(\xi_1) - u^*(\xi_2).$$

Demostración. De acuerdo al Lema B.0.1 el bivector $\underline{u}$ representa al operador

$\xi \longmapsto [\underline{u}, \xi]$. Para $\xi \in \mathbb{R}^{r_1,s_1}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
[\underline{u}, \xi] &= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{r_1+s_1} \varepsilon_j e_j \cdot u(e_j) \cdot \xi - \xi \cdot \sum_{j=1}^{r_1+s_1} \varepsilon_j e_j \cdot u(e_j)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\sum_{j=1}^{r_1+s_1} \varepsilon_j e_j \cdot \xi \cdot u(e_j) - \xi \cdot \sum_{j=1}^{r_1+s_1} \varepsilon_j e_j \cdot u(e_j)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r_1+s_1} \varepsilon_j (e_j \cdot \xi + \xi \cdot e_j) \cdot u(e_j) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r_1+s_1} \varepsilon_j (-2\langle e_j, \xi\rangle) \cdot u(e_j) = u(\xi),
\end{aligned}$$

en tanto que, si $\xi \in \mathbb{R}^{r_2,s_2}$, entonces

$$\begin{aligned}
[\underline{u}, \xi] &= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{r_1+s_1} \varepsilon_j e_j \cdot u(e_j) \cdot \xi - \xi \cdot \sum_{j=1}^{r_1+s_1} \varepsilon_j e_j \cdot u(e_j)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{r_1+s_1} \varepsilon_j e_j \cdot u(e_j) \cdot \xi + \sum_{j=1}^{r_1+s_1} \varepsilon_j e_j \cdot \xi \cdot u(e_j)\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r_1+s_1} \varepsilon_j e_j \cdot (u(e_j) \cdot \xi + \xi \cdot u(e_j)) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r_1+s_1} \varepsilon_j e_j (-2\langle u(e_j), \xi\rangle) \\
&= -\sum_{j=1}^{r_1+s_1} \varepsilon_j e_j \langle e_j, u^*(\xi)\rangle = -u^*(\xi).
\end{aligned}$$

Terminamos la demostración del lema probando (B.4): sabemos que

$$\underline{u} = \sum_{j=1}^{r_1+s_1} \varepsilon_j e_j \cdot u(e_j) = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{r_1+s_1} \varepsilon_j e_j \cdot u(e_j) + \sum_{j=1}^{r_1+s_1} \varepsilon_j (-u(e_j)) \cdot e_j\right),$$

luego

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{r_1+s_1} \varepsilon_j(-u(e_j))\cdot e_j &= \sum_{j=1}^{r_1+s_1} \varepsilon_j \sum_{k=r_1+s_1+1}^{r+s} (-\varepsilon_k\langle u(e_j), e_k\rangle e_k)\cdot e_j \\
&= \sum_{j=1}^{r_1+s_1} \varepsilon_j \sum_{k=r_1+s_1+1}^{r+s} (-\varepsilon_k\langle e_j, u^*(e_k)\rangle e_k)\cdot e_j \\
&= \sum_{k=r_1+s_1+1}^{r+s} \varepsilon_k \left(\sum_{j=1}^{r_1+s_1} \varepsilon_j(-\langle e_j, u^*(e_k)\rangle e_k)\cdot e_j\right) \\
&= \sum_{k=r_1+s_1+1}^{r+s} \varepsilon_k u^*(e_k)\cdot e_k = \sum_{k=r_1+s_1+1}^{r+s} \varepsilon_k e_k\cdot(-u^*(e_k)),
\end{aligned}
$$

lo cual concluye la prueba. □

Agradecimientos: la autora recibió apoyo del proyecto PAPIIT IA106218 “Caracterización espinorial de inmersiones en espacios homogéneos II”.

Bibliografía

[1] C. Bär, *Extrinsic bounds for the eigenvalues of the Dirac operator*, Ann. Glob. Anal. Geom. **16** (1998) 573-596.

[2] P. Bayard, *On the spinorial representation of spacelike surfaces into 4-dimensional Minkowski space*, Journal of Geometry and Physics **74** (2013) 289–313.

[3] P. Bayard, M.-A. Lawn, J. Roth, *Spinorial Representation of Submanifolds in Riemannian Space Forms*, Pacific J. of Math. **291:1** (2017) 51-80.

[4] P. Bayard, J. Roth, B. Zavala, *Spinorial representation of submanifolds in metric Lie groups*, Journal of Geometry and Physics **44:4** (2017) 433-453.

[5] J. P. Bourguignon, O. Hijazi, J. L. Milhorat, A. Moroianu, *A Spinorial Approach to Riemannian and Confromal Geometry*, EMS Monographs in Mathematics, 2010.

[6] M. Cahen, M. Parker, *Pseudo-Riemannian symmetric spaces*, Mem. Am. Math. Soc. 24 (229) (1980) 1-108.

[7] M. Cahen, N. Wallach, *Lorentzian symmetric spaces*, Bull. Am. Math. Soc. **76:3** (1970) 585-591.

[8] G. Calvaruso, *Einstein-like metrics on three-dimensional homogeneous Lorentzian* manifolds, Geom. Dedicata **127** (2007) 99-119.

[9] G. Calvaruso, *Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds*, Journal of Geometry and Physics **57** 1279-1291.

[10] L.A. Cordero, P.E. Parker, *Left-invariant Lorentzian metrics on 3-dimensional Lie groups*, Rend. Mat. Appl. **17** (1997) 129-155.

[11] B. Daniel, *Isometric immersions into 3-dimensional homogenous manifolds,* Comment. Math. Helv. 82:1 (2007).

[12] T. Friedrich, *Dirac Operators in Riemannian Geometry*, Graduated Studies in Mathematics vol. 25, The American Mathematical Society, USA, 2000.

[13] T. Friedrich, *On the Spinor Representation of Surfaces in Euclidean 3-Space*, Journal of Geometry and Physics **28** (1998) 143-157.

[14] A. S. Galaev, *Holonomy groups of Lorentzian manifolds*, Russian Mathematical Surveys, **70:2** (2015).

[15] O. Hijazi, *Spectral properties of the Dirac operator and geometrical structures*, lectures notes, Institut Élie Cartan, Université Henri Poincaré, Nancy I.

[16] M. A. Lawn, *Immersions of Lorentzian surfaces in* $\mathbb{R}^{2,1}$, Journal of Geometry and Physics **58:6** (2008) 683-700.

[17] MA. Lawn, J. Roth, *Spinorial Characterizations of Surfaces into 3-dimensional Pseudo-Riemannian Space Forms*, Math Phys Anal Geom. **14:185** (2011).

[18] H. B. Lawson y M. L. Michelson, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1987.

[19] F. J. López, R. López, R. Souam, *Maximal surfaces of Riemann type in Lorentz-Minkowski space* $\mathbb{L}^3$, Michigan Math. J. **47:3** (2000) 469-497.

[20] P. Lounesto, *Clifford Algebras and Spinors*, London Math. Society Lecture Note Series 286, Cambridge University Press, London, 2001.

[21] J. Manzano. *On the conformal duality between surfaces with mean curvature in* $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$ *y* $\mathbb{L}(\kappa,\tau)$, prepint 2017. arXiv: 17017.07504v1.

[22] P. Malliavin, *Géométrie différentielle intrinsèque*, Hermann, Paris, 1972.

[23] W. Meeks, J. Pérez, . *Constant mean curvature surfaces in metric Lie groups*. Contemp. Math. **570** (2012).

[24] J. Milnor, *Curvatures of left invariant metrics on Lie groups*, Adv. Math. **21** (1976) 293-329.

[25] J. W. Milnor, *Remarks concerning spin manifolds*, Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse), Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. (1965) 55-62.

[26] B. Morel, *Surfaces in $\mathbb{S}^3$ and $\mathbb{H}^3$ via spinors*, Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, Grenoble, **23** (2004-2005) 131-144.

[27] B. O'Neill, *Semi-riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, California (1983).

[28] V. Patty, *Representación espinorial de superficies Lorentzianas en* $\mathbb{R}^{2,2}$, Tesis doctoral Posgrado Conjunto UNAM-UMSNH.

[29] S. Rahmani, *Métriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires de dimension 3*, J. Geom. Phys. **9** (1992) 295-302.

[30] J. Roth, *Isometric immersions into Lorentzian products*, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, World Scientific Publishing **8:6** (2011) 1-22.

[31] J. Roth, *Spinorial characterizations of surfaces into three-dimensional homogeneous manifolds*, Journal of Geometry and Physics **60** (2010) 1045-1061.

[32] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry Vol. II*, Publish or Perish, Inc., Houston Texas, 1999.

[33] E. Stein, J.Milnor, M. Spivak, R. Wells, J. Mather, *Morse Theory*, Annals of mathematics studies **51**, Princeton University Press, 1963.

[34] J.A. Wolf, *Spaces of Constant Curvature,* Publish or Perish, Berkeley, CA, 1984.

[35] H. Wu, *Holonomy groups of indefinite metrics*, Pacific J.Math. **20** (1967) 351-392.

[36] H. Wu, *On the de Rham decomposition theorem*, Illinois J.Math. **8** (1964) 291-311.

[37] P. Bayard, V. Patty, *Spinor representation of Lorentzian surfaces in* $\mathbb{R}^{2,2}$, Journal of Geometry and Physics **95** (2014).