



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ENTROPÍA Y ANÁLISIS ESTADÍSTICO DEL  
AJEDREZ POR NIVELES DE JUEGO.

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**Licenciado en Física**

PRESENTA:

**Jesús Domingo Alfin Islas García**

TUTOR:

Dr. Marcelo del Castillo Mussot

Ciudad de México, México, 2020





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

---

---

*A mis padres, por la formación y todo su apoyo que me han dado.  
Es gracias a ustedes que es posible el presente trabajo.  
A mi hermana, por su apoyo incondicional.  
Jesús Domingo Alfin Islas García.*



# Reconocimientos

---

Reconozco al Dr. Marcelo del Castillo Mussot por su las discusiones teóricas y practicas en la realización de este trabajo.

Fue importante el estímulo económico parcial de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DDGAPA-UNAM) a través de la beca del proyecto IN101817 para conclusión de estudios de licenciatura.



# Declaración de autenticidad

---

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración externa, salvo que se indique específicamente en el texto.

Jesús Domingo Alfin Islas García. Ciudad de México, México, 2020





# Resumen

---

Históricamente, el análisis de varios aspectos del juego de ajedrez, llamado juego ciencia, como competencia intelectual ha sido de enorme importancia en varios campos del conocimiento y del deporte. El ajedrez ha sido estudiado desde el punto de vista de la psicología del aprendizaje, de la estrategia militar y la inteligencia artificial. A pesar de ser el juego más estudiado en la historia de la humanidad, en esta tesis se presenta un estudio original muy completo, utilizando herramientas de programación, matemáticas estadísticas y conceptos de la física, que describen cuantitativamente las características de un jugador ganador del ajedrez, sin necesidad de utilizar al peón como unidad de medida.

El análisis de partidas parte de la variable primigenia del movimiento, que comprende tres aspectos: ocupación de casillas vacías, ataques a piezas enemigas y defensas (“ataques” a piezas amigas) para, posteriormente definir la movilidad como la suma de los movimientos posibles en el turno. El problema del ajedrez consiste en impedir que el rey escape del jaque mate, es decir, dar ataque al rey enemigo y a su movilidad simultáneamente. Es a partir de la movilidad que se define la entropía. Boltzmann y Gibbs relacionaron la cantidad “entropía” con la probabilidad de encontrar una cierta configuración en el sistema bajo estudio. Al construir este concepto para el ajedrez, se obtiene que son los movimientos de las piezas (movilidad) quienes desarrollan dichas configuraciones.

En este trabajo se utilizan herramientas computacionales para analizar, jugada a jugada, diferentes variables utilizando dos bases de datos muy extensas que incluyen dos tipos de jugadores; seres humanos con diferentes niveles de juego y partidas generadas con un programa que realiza jugadas válidas de manera aleatoria para los dos bandos. El objetivo de esta tesis es encontrar comportamientos estadísticos particulares relacionados con el nivel de juego, al desarrollar programas que analicen partidas de ajedrez, y determinen su entropía turno a turno. La implementación de herramientas estadísticas al juego del ajedrez, permiten una mayor certeza en el análisis de partida. Al implementar la entropía se concluye que en una partida el ganador es aquel que optimiza su juego al aumentar su entropía realizando jugadas óptimas, además el jugador promueve la reducción de entropía para su contrincante.

---

---

# Índice general

---

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Introducción</b>                                   | <b>1</b>  |
| 1.1. Presentación . . . . .                              | 1         |
| 1.2. Objetivo . . . . .                                  | 2         |
| 1.3. Motivación . . . . .                                | 2         |
| 1.4. Antecedentes . . . . .                              | 2         |
| 1.5. Planteamiento del problema . . . . .                | 3         |
| <b>2. Marco teórico</b>                                  | <b>5</b>  |
| 2.1. Definiciones importantes. . . . .                   | 5         |
| 2.2. Abstracción del ajedrez. . . . .                    | 6         |
| 2.3. El concepto de la entropía. . . . .                 | 7         |
| 2.3.1. Entropía en función de la movilidad. . . . .      | 8         |
| 2.4. Análisis comparativo. . . . .                       | 9         |
| <b>3. Metodología</b>                                    | <b>13</b> |
| 3.1. Base de datos . . . . .                             | 13        |
| 3.2. Evolución de la entropía. . . . .                   | 15        |
| <b>4. Análisis de Resultados</b>                         | <b>19</b> |
| 4.1. Evolución de la entropía. . . . .                   | 19        |
| 4.1.1. Entropía en función de la movilidad. . . . .      | 19        |
| 4.1.1.1. Comparación por resultado de partida. . . . .   | 22        |
| 4.1.1.2. Comparación entre resultados del nivel. . . . . | 28        |
| 4.2. Análisis de partidas individuales. . . . .          | 32        |
| 4.2.1. Karpov-Unzicker (1974). . . . .                   | 32        |
| 4.2.2. El empate inmortal. . . . .                       | 38        |
| 4.2.3. El juego del siglo XX. . . . .                    | 43        |
| <b>5. Conclusiones</b>                                   | <b>49</b> |
| <b>A. Información complementaria.</b>                    | <b>53</b> |
| A.0.4. Notación algebraica. . . . .                      | 53        |
| A.0.4.1. Movimientos. . . . .                            | 53        |

## ÍNDICE GENERAL

---

|  |           |
|--|-----------|
| A.0.4.2. Anotación y ambigüedades. . . . . | 55        |
| <b>B. Imágenes complementarias</b>         | <b>59</b> |
| <b>C. Partidas analizadas</b>              | <b>67</b> |
| C.1. Karpov-Unzicker (1974). . . . .       | 67        |
| C.2. Alekhine-Reti (1922). . . . .         | 69        |
| C.3. Byrne-Fischer (1956). . . . .         | 71        |

## Índice de figuras

---

|  |    |
|--|----|
| 2.1. Ejemplificación de ataque y defensa. . . . .  | 6  |
| 2.2. Ejemplificación del calculo de entropía para cualquier configuración. . . . .                               | 9  |
| 4.1. Evolución de la entropía, con cota superior promedio. . . . .   | 20 |
| 4.2. Área del comportamiento, para el movimiento 40. . . . .   | 21 |
| 4.3. Evolución de la entropía para ganadores. . . . .  | 23 |
| 4.4. Evolución de la entropía para perdedores. . . . .   | 24 |
| 4.5. Máximos de entropía. . . . .  | 25 |
| 4.6. Evolución de la entropía para empates B. . . . .  | 26 |
| 4.7. Evolución de la entropía para empates N. . . . .  | 27 |
| 4.8. Evolución de la entropía para jugadores azarosos. . . . .   | 28 |
| 4.9. Evolución de la entropía para jugadores amateur Elo 1000-1200. . . . .                                      | 29 |
| 4.10. Evolución de la entropía para jugadores elite. . . . .   | 30 |
| 4.11. Comparación de la entropía acumulada hasta t=70 para todos los niveles y resultados. . . . .               | 31 |
| 4.12. Tablero en el movimiento 23. ... <i>Qd8</i> de la partida Karpov-Unzicker (1974). . . . .                  | 32 |
| 4.13. Evolución de la entropía a lo largo de la partida Karpov-Unzicker (1-0). . . . .                           | 33 |
| 4.14. Comparación de la evaluación de posición, y la diferencia de áreas. Karpov-Unzicker (1-0). . . . .         | 34 |
| 4.15. Correlación de la evaluación de posición y la diferencia de áreas. Karpov-Unzicker (1-0). . . . .          | 35 |
| 4.16. Derivada de los comportamientos evolutivos de la entropía para la partida Karpov-Unzicker (1-0). . . . .   | 37 |
| 4.17. Tablero en el final de la partida Alekhine-Reti (1922). . . . .  | 38 |
| 4.18. Evolución de la entropía a lo largo de la partida Karpov-Unzicker (1-0). . . . .                           | 39 |
| 4.19. Comparación de la evaluación de posición, y la diferencia de áreas. Alekhine-Reti (1/2-1/2). . . . .       | 40 |
| 4.20. Correlación de la evaluación de posición y la diferencia de áreas. Alekhine-Reti (1/2-1/2). . . . .        | 41 |
| 4.21. Derivada de los comportamientos evolutivos de la entropía para la partida Alekhine-Reti (1/2-1/2). . . . . | 42 |
| 4.22. Tablero en el movimiento final de la partida Byrne-Fischer (1956). . . . .                                 | 43 |

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

|  |    |
|--|----|
| 4.23. Evolución de la entropía a lo largo de la partida Byrne-Fischer (0-1). . . . .   | 44 |
| 4.24. Comparación de la evaluación de posición, y la diferencia de áreas. Byrne-Fischer (0-1). . . . .   | 45 |
| 4.25. Correlación de la evaluación de posición y la diferencia de áreas. Byrne-Fischer (0-1). . . . .  | 46 |
| 4.26. Derivada de los comportamientos evolutivos de la entropía para la partida Byrne-Fischer (0-1). . . . .   | 47 |
|  |    |
| A.1. Tablero de ajedrez en arreglo inicial de una partida. . . . .   | 54 |
| A.2. Localización coordenada de casillas. . . . .  | 54 |
| A.3. Movimientos de las piezas. . . . .  | 56 |
| A.4. Enroque. . . . .  | 57 |
|  |    |
| B.1. Distribución normal para jugadores de elite por valor de Elo. . . . .   | 59 |
| B.2. Evolución de las entropías promedio. . . . .  | 60 |
| B.3. Evolución de la entropía para jugadores con Elo 1000-1200. . . . .  | 61 |
| B.4. Evolución de la entropía para jugadores con Elo 1200-1300. . . . .  | 62 |
| B.5. Evolución de la entropía para jugadores con Elo 1300-1400. . . . .  | 63 |
| B.6. Evolución de la entropía para jugadores con Elo 1400-1500. . . . .  | 64 |
| B.7. Evolución de la entropía para jugadores con Elo 1500-1600. . . . .  | 65 |
|  |    |
| C.1. Tablero de ajedrez en la jugada 30.f4. El blanco busca la apertura de columnas para la penetración de sus piezas, las cuales pueden trasladarse más fácilmente de flanco a flanco que las piezas negras por la ventaja de espacio que la estructura de peones le otorga. . . . .  | 68 |
| C.2. Tablero de ajedrez en la jugada 35...Qe8. A partir de esta jugada y de la siguiente (36...Nd8), el repliegue de las negras es casi total y prácticamente se quedan sin movimientos útiles. . . . .  | 68 |
| C.3. Tablero de ajedrez en la jugada 41.Bxf7+, jaque al rey negro. Se elimina de esta forma a la pieza defensora más importante de las negras y en las jugadas siguientes el blanco fuerza a las negras a encontrarse en una situación de <i>zugzwang</i> , después de la cual las negras se rinden. (NOTA: no hay jaque mate, es victoria por rendición). . . . . | 69 |
| C.4. Tablero de ajedrez en la jugada 25.Qd4. En un intento de evitar el avance de la dama negra, las piezas blancas bloquean el peón desprotegido en c4 con la dama, provocando un intercambio de damas. . . . .   | 70 |
| C.5. Tablero de ajedrez en la jugada 25...Qxd4. Reti acepta el intercambio y comienza una serie de intercambios de las piezas mayores. . . . .   | 70 |
| C.6. Tablero de ajedrez en la jugada 17...Be6. El famoso sacrificio de dama que le dio el título “el juego del siglo XX”. . . . .  | 71 |
| C.7. Tablero de ajedrez en la jugada 37...Bb4+. En este momento las negras conducen al rey hacia su final al darle una sola opción para moverse. . . . .   | 72 |

# Índice de cuadros

---

|   |    |
|---|----|
| 3.1. Número de partidas por nivel y resultado de victoria. . . . .                  | 14 |
| 3.2. Distribución de jugadores por nivel. . . . .                                   | 15 |
| 3.3. Distribución normal de la duración de partidas por niveles. . . . .            | 16 |
| 3.4. Cota superior ( $\mu + 2\sigma$ ) de las partidas en la base de datos. . . . . | 17 |
| 4.1. Entropía acumulada para la partida Karpov-Unziker. . . . .                     | 35 |
| 4.2. Entropía acumulada para la partida Alekhine-Reti. . . . .                      | 40 |
| 4.3. Entropía acumulada para la partida Byrne-Fischer. . . . .                      | 45 |



## ÍNDICE DE CUADROS

---

# Introducción

---

*El ajedrez es todo; arte, ciencia y deporte.*  
Anatoli Karpov Campeón mundial de ajedrez de la FIDE

## 1.1. Presentación

El trabajo se ordena naturalmente de la siguiente manera. En este primer capítulo, se enfatiza la importancia del ajedrez como juego, deporte, y prototipo de estudio de la inteligencia artificial. Posteriormente se plantea el problema de explorar el juego ciencia utilizando herramientas computacionales para analizar estadísticamente, jugada a jugada, diferentes variables utilizando dos bases de datos muy extensas. En el segundo capítulo se presentan los conceptos y ecuaciones que permiten el análisis estadístico del ajedrez, se definen las variables y conceptos operacionales del sistema. Primero se parte de la variable primigenia del **movimiento** que comprende la ocupación de casillas vacías, ataques a piezas enemigas y defensas (“ataques” a piezas amigas) para, posteriormente definir la **movilidad** como la suma de los movimientos posibles del turno en curso. Posteriormente se define la **entropía de Shannon** para cuantificar la importancia de la movilidad de cada bando.

El tercer capítulo describe la base de datos de 14 mil partidas presentadas (en su notación algebraica) como el objeto de estudio. En términos simples, cada partida es un itinerario de movimientos, producto de dos inteligencias resolviendo un problema: capturar al rey contrario. En el cuarto capítulo se expone el análisis de los resultados obtenidos sobre los cálculos realizados para la evolución de entropía en función de la movilidad, se realiza un análisis para las distintas etapas del juego, y los patrones de comportamiento relacionados con el resultado de las partidas.

De este análisis del ajedrez, se obtiene un vasto número de resultados que se traduce en una gran extensión de gráficas, por lo que hacer gala de presentar cada uno de estos resultados no sólo es excesivo sino que es agobiante para el lector que recibe demasiada información al punto de aturdirlo. Por ello se mostrarán los resultados más relevantes, acompañados de los cuadros con su información pertinente, esto para facilitar la com-

## 1. INTRODUCCIÓN

---

paración y correlación de resultados acorde a la metodología planteada.

El quinto capítulo expresa las conclusiones de los aspectos analizados, se exponen las virtudes del nuevo método basado en el análisis de la entropía en función de la movilidad. Esta cuantificación proporciona una visualización de la ventaja (sin la necesidad de utilizar al peón como unidad de medida).

Sin duda todo trabajo de investigación requiere de cierto acompañamiento por lo tanto agradezco a Rubén Islas Peña y Marcelo del Castillo Mussot, por su asesoría y revisión de esta tesis, pues sin sus conocimientos no se habría realizado este trabajo; a Marcelo del Castillo Escribano por el préstamo de algunos tomos de su biblioteca personal que complementaron la parte no científica del texto, y finalmente a Juan Manuel López Michelone y a María del Lucero Pacheco Blas por su orientación en la obtención de partidas, aportaciones de importancia en la realización del trabajo.

### 1.2. Objetivo

Encontrar comportamientos estadísticos particulares relacionados con el nivel de juego, desarrollando programas que analicen partidas de ajedrez, mediante la cuantificación de la entropía del ajedrez en función de la variable “movilidad”.

### 1.3. Motivación

El ajedrez es una actividad prácticamente universal, debido a su amplia difusión global formando parte de nuestra cultura humana. También a sido considerado un deporte por el Comité Olímpico Internacional. A pesar de que es uno de los juegos más estudiados en la historia de la humanidad, en este trabajo se presenta un estudio original muy completo, utilizando herramientas de programación, matemáticas estadísticas y conceptos de la física, que describen cuantitativamente la entropía de una partida de ajedrez, que deriva en el cálculo de la ventaja sin necesidad de utilizar al peón como unidad de medida.

### 1.4. Antecedentes

Ibero (1977) define al ajedrez como un juego de mesa entre dos personas que se desarrolla sobre un tablero de 64 casillas (32 escaques blancos y 32 escaques negros), en el cual cada jugador dispone de 16 piezas desglosadas como sigue: un rey, una dama, dos torres, dos alfiles, dos caballos y ocho peones<sup>1</sup> ([7], p. 16), y su objetivo es capturar al rey contrario. El ajedrez es uno de los juegos de mesa más antiguos propiciando que su remoto pasado se mezcle con algunos mitos. Al respecto, Hesse (2010) menciona que

---

<sup>1</sup>Para observar la disposición inicial, véase figura A.1.

este juego se originó a partir de uno llamado *chaturanga* que se practicó en el sur de la India alrededor del siglo III. Su rápida penetración en la cultura se demuestra al estar presente en romances épicos persas del siglo VII. El juego experimento cambios en su dinamismo produciendo las reglas del ajedrez moderno a finales del siglo XV. Finalmente en 1924 se fundó la Federación Internacional de Ajedrez (**FIDE**, por sus siglas en francés) junto a quien podría llamarse el primer campeón mundial oficial de ajedrez, *Wilhelm Steinitz*, a fines del siglo XIX ([6] , pp. 15-23). Con Steinitz, comienza la escuela moderna del ajedrez, enfocada en la estrategia posicional, ataques y sacrificios de piezas, priorizando la estrategia posicional (o principios) de juego por encima de cualquier otro aspecto.

## 1.5. Planteamiento del problema

Dentro del espíritu de utilizar avances computacionales para el perfeccionamiento de juegos y deportes, en esta tesis se aborda el reto de realizar un análisis deportivo estadístico en el ajedrez, pese a que, según García (2013), se le considera un deporte por el Comité Olímpico Internacional (COI) desde 1999 ([5] , p. 69), carece del estudio deportivo; propiciando que todo estudio estadístico se centre en aspectos técnicos del juego.

El problema del ajedrez consiste en impedir que el rey escape del jaque mate, es decir, **dar ataque al rey enemigo y a sus posibles movimientos simultáneamente**, por ello resulta conveniente analizar a las partidas de ajedrez a partir de los ataques y posibles movimientos. En cada turno, el tablero exhibe los movimientos que puede realizar cada bando. Cuando se observa la distribución de movimientos puede ocurrir que algunos estén dirigidos a un sólo escaque. Es conveniente de que todos los movimientos de su adversario se concentren en pocos escaques, permitiendo realizar un ataque más contundente al dirigir su ofensiva hacia estos escaques, propiciando así la captura y especialmente atacar escaques a los que puede acceder el rey. Al introducir el concepto de la entropía en función de la distribución de estos movimientos sobre los escaques dominados, se puede cuantificar las opciones de las que dispone cada jugador.

Para la obtención de esta empresa, fue requerida la investigación y recopilación de la base de datos con unas 14 mil partidas, el tratamiento de las mismas para su uso y el desarrollo de los algoritmos que determinan la evolución de la entropía a lo largo de la partida; algoritmos que implicaron el uso de muchas horas de cómputo. Todos estos gastos permiten concluir que en la competencia de una partida de ajedrez, el ganador es aquel que optimiza su juego al aumentar sus opciones, cuantificadas por la entropía, realizando jugadas óptimas que además provocan la reducción de la entropía de su contrincante.

## 1. INTRODUCCIÓN

---

## Marco teórico

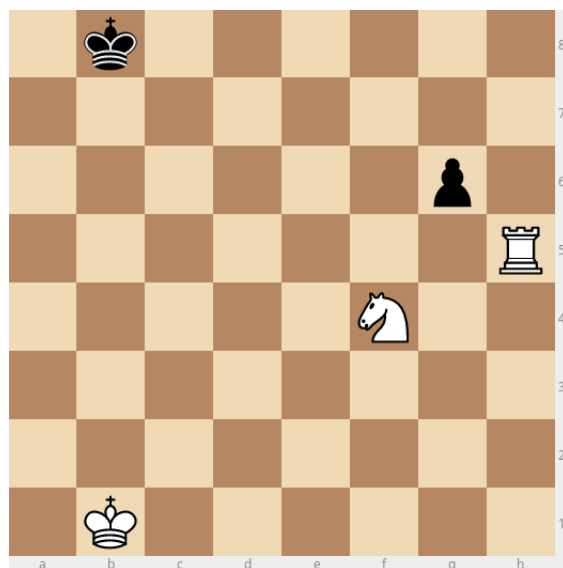
---

*El ajedrez no es nada más que una forma especial de representar una discusión.*  
David Bronstein

### 2.1. Definiciones importantes.

Realizar un análisis estadístico del ajedrez exige que estén definidas las variables del objeto de estudio, en este caso se menciona algunas características intrínsecas de las partidas de ajedrez. Aquí se hace hincapié en las siguientes definiciones, que pueden no concordar con el “argot” ajedrecístico convencional.

- **Movimiento.** Acto en que el jugador en turno altera el tablero mediante un cambio válido de posiciones en las piezas.
- **Captura.** Acto en el que, mediante un movimiento válido, una pieza se coloca en una casilla ocupada por una pieza del bando contrario, retirando a esa pieza del tablero de juego.
- **Ataque.** En el turno vigente, entiéndase como la oportunidad de *captura*. Ejemplo: Tomando la figura 2.1 se observa que el peón está **atacando** a la torre y que a su vez el caballo está atacando al peón (la situación depende del turno).
- **Pieza defendida (defensa).** Se dice que una pieza está defendida cuando se encuentra en una casilla accesible por alguna pieza del mismo bando mediante un movimiento válido. Ejemplo: En la figura 2.1 se observa que el caballo está **defendiendo** a la torre.
- **Casilla libre.** Casilla no ocupada por alguna pieza.
- **Casilla dominada.** El bando en turno domina un escaque cuando sus coordenadas coinciden con algún movimiento que puede posicionar una de sus piezas en



**Figura 2.1:** Ejemplificación de ataque y defensa.

esta misma casilla<sup>1</sup>. La suma de todas las casillas dominadas es el *dominio del bando*:

$$Dom = \alpha + \delta + \lambda \quad (2.1)$$

donde  $Dom$  es el dominio,  $\alpha$  las casillas que reciben ataques,  $\delta$  las casillas que cuentan con piezas defendidas y  $\lambda$  son las casillas libres que son accesibles por el bando.

- **Movilidad.** Entiéndase como *el total de movimientos válidos del jugador o bando*.

$$M = A + L \quad (2.2)$$

donde  $M$  es la movilidad,  $A$  los ataques y  $L$  son los movimientos que acceden a las casillas libres. Se debe enfatizar que la definición de **casillas dominadas** se refiere explícitamente a las casillas, no debe confundirse con **movilidad** pues hace referencia explícita a los movimientos.

## 2.2. Abstracción del ajedrez.

Pese a que el juego requiere de una inversión de energía corporal (neuronal y mecánica), el estudio no recae en las capacidades fisiológicas del individuo (jugador), como es el caso de otras disciplinas donde el factor músculo es imperante. En cambio se opta

---

<sup>1</sup>Esta definición considera los escaques con ataques, defensas y si se encuentran libres.

por un enfoque abstracto, que obliga a desprenderse de los aspectos subjetivos del juego como la **estética**. Las configuraciones del tablero informan sobre el bando, tipo de pieza, la posición y el tiempo (movimiento, o turno), de esta forma se concibe al tablero sólo como **datos**.

Como ya se ha planteado, al observar la distribución de movimientos puede ocurrir la concentración de los movimientos en un sólo escaque, lo cual permite realizar un ataque más competente al dirigir la ofensiva hacia estos escaques, propiciando así la captura y especialmente atacar escaques a los que puede acceder el rey. Al introducir el concepto de la entropía en función de la distribución de estos movimientos sobre los escaques dominados, se pueden cuantificar las opciones que dispone cada jugador y aprovechar dicha información.

### 2.3. El concepto de la entropía.

Fueron Boltzmann y Gibbs quienes vincularon a la entropía y el número de formas en que se pueden organizar los elementos (átomos y moléculas) de un sistema termodinámico. El ajedrez no es un sistema termodinámico como tal, pretender realizar una “medición” de variables termodinámicas es simplemente absurdo, puesto que carece de toda medida, patrón, escala o instrumentación para estos fines. Cabe mencionar que las variables del sistema no son propias del universo físico “convencional” (dígase presión, volumen, cantidad de materia, potencial químico, etc..), en su lugar se utiliza la información del tablero, para calcular la entropía. La analogía entre los sistemas termodinámicos y el tablero del ajedrez radica en las distintas formas de **organización** en sus elementos.

Al carecer de toda medición convencional, se utiliza la definición para la entropía de Shannon en la teoría de la información. Concretamente para calcular la entropía en el ajedrez se requiere la formulación para una distribución discreta de probabilidad:

$$S = - \sum_i p(x_i) \ln(p(x_i)) \quad (2.3)$$

Las unidades de entropía son los *nat*<sup>1</sup>. En la ecuación 2.3, el índice *i* denota el orden de los escaques y toma los valores de 1 a 64,  $p(x_i)$  es la probabilidad de que el escaque  $x_i$  sea ocupado por alguna pieza del bando ([9], p. 43), es decir, las probabilidades del evento se obtienen de la evaluación:

$$p(x_i) = \frac{\text{Número de movimientos permiten ocupar el escaque } x_i}{\text{Movilidad total del bando}} \quad (2.4)$$

Ben-Naim (2012) menciona que Shannon no buscó una medida del concepto general de información, sólo una medida de la información contenida o asociada con una distri-

---

<sup>1</sup>La unidad natural de información (*nat*), se utiliza para medir la información o entropía. Está basada en el logaritmo natural y en las potencias del número e. ([10], p. 12)



bución de probabilidad, provocando que su entropía sea un concepto muy general. La distribución de probabilidad debe cumplir:

$$\sum_i^n p(x_i) = 1 \quad (2.5)$$

la suma de la distribución de probabilidad da como resultado la unidad o totalidad de los posibles casos (todas las opciones). Por otra parte, la intersección de dos (o más) eventos significa que ocurren simultáneamente, entonces  $x_i \cdot x_j = \phi$ , donde  $\phi$  es vacío,

$$p(x_i \cdot x_j) = p(\phi) = 0 \quad (2.6)$$

([2], pp. 70-71), es decir, la probabilidad debe cumplir la no simultaneidad de eventos. Es pertinente aclarar el caso particular del enroque, figura A.4. En esta situación pese a que se opera con dos piezas al mismo tiempo, se realiza un sólo evento o movimiento, puesto que no es posible obtener la misma configuración mediante un sólo movimiento de torre y un sólo movimiento de rey que ocurra simultáneamente.

### 2.3.1. Entropía en función de la movilidad.

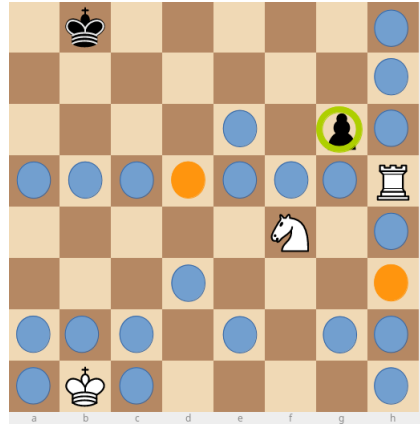
Con la movilidad se obtienen todas las casillas dominadas por el bando. *Determinar cuales casillas domina el adversario es una forma primitiva de determinar la posible próxima jugada enemiga.* La distribución de los movimientos válidos sobre el tablero establece **la probabilidad de que un escaque  $x_i$  sea ocupado**. Si las piezas de un bando no pueden acceder a un escaque por un movimiento válido, entonces el jugador a cargo de dicho bando no puede colocar alguna de sus piezas en el escaque, es decir, la probabilidad de que la casilla sea ocupada es cero. Por el contrario, si un escaque se encuentra dominado por el bando, entonces existe una probabilidad asociada a la ocupación de dicho escaque, si se ocupa el escaque da por resultado una configuración diferente; el número total de formas en que se pueden organizar las piezas (distintas configuraciones) está asociado a la entropía mediante la ecuación 2.3.

Debido a que se desconoce por completo cual será el siguiente movimiento, entonces la probabilidad de que ocurra un movimiento inferido<sup>1</sup> es *equiprobable*. Se impone esta condición puesto que si se otorgan pesos específicos a cada evento en la movilidad implica conocer (o en el mejor de los casos, presuponer) la estrategia del jugador, hecho que no forma parte del análisis.

Para ejemplificarlo se calcula la entropía para las piezas blancas del arreglo en la figura 2.2. Primero se descarta uno de los 'posibles movimientos' que corresponde a la defensa del caballo hacia la torre. Las reglas de la FIDE establece que está prohibido apoderarse de una posición ya ocupada por una pieza del mismo bando [4], por lo

---

<sup>1</sup>No se debe confundir esta condición con la probabilidad requerida en la ecuación 2.3.



**Figura 2.2:** Ejemplificación del calculo de entropía para cualquier configuración.

tanto se tienen 26 movimientos válidos. Mediante el uso de la relación 2.4, la ecuación 2.3 queda evaluada de la siguiente forma:

$$S = -\left[\frac{2}{26}\text{Ln}\left(\frac{2}{26}\right) + \frac{2}{26}\text{Ln}\left(\frac{2}{26}\right) + 22\left(\frac{1}{26}\text{Ln}\left(\frac{1}{26}\right)\right)\right] = 3,1514 \text{ nat.}$$

El primer término de la suma corresponde al escaque d5 el cual puede ser ocupado de dos formas distintas, por un movimiento de caballo, o un movimiento de torre, considerando que existen 26 posibles movimientos, entonces su probabilidad es  $\left(\frac{2}{26}\right)$ , lo mismo ocurre para el segundo término de la suma (escaque h3). Finalmente, el tercer término muestra los otros 22 casos, que sólo reciben un posible movimiento y su probabilidad es  $\left(\frac{1}{26}\right)$ , de este modo se calcula la entropía de Shannon para la movilidad en el ajedrez.

Es evidente que son las piezas y su posición las que determinan la movilidad. Si ocurriera el caso donde sólo existe un movimiento posible, la probabilidad de que ocurra este evento es total ( $p(x_i) = 1$ ), por lo tanto la entropía es cero. Puesto que no se analiza, y carece de interés, cuando no existe movimiento posible ( $p(x_i) = 0$ ), como en el caso del rey “ahogado” y jaque mate, entonces el valor de la entropía es definida positiva. Sin embargo, la captura o el cambio de posición pueden alterar el valor de la entropía, produciendo un **comportamiento decreciente en la evolución de la entropía a lo largo de la partida.**

## 2.4. Análisis comparativo.

El ajedrez es una competencia entre dos contendientes. A lo largo del juego, esta competencia produce un proceso evolutivo, mediante la oposición y la superación de la oposición. Turno a turno los movimientos que puede realizar cada bando van cambiando. La entropía es la cantidad asociada al número de posibles configuraciones sobre las que puede elegir cada bando. El cambio de la entropía en lapso de tiempo, revela si el

## 2. MARCO TEÓRICO

---

conjunto de jugadas realizadas durante este tiempo aumentó o disminuyó el número de opciones sobre las que puede decidir cada jugador. Es decir, el cambio de la entropía, muestra si el jugador ha ganado o perdido opciones durante la partida. La reducción de opciones puede conducir a la captura, el jaque y jaque mate. Por ello tiene especial importancia observar el cambio del comportamiento sobre un lapso de tiempo específico:

$$\Phi \equiv \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad (2.7)$$

siendo  $\Delta S = S_f - S_i$  la diferencia entre la entropía del estado final ( $S_f$ ) menos la entropía del estado inicial ( $S_i$ ) del proceso,  $\Delta t = t_f - t_i$  es la diferencia del tiempo final menos el tiempo inicial. Entonces,  $\Phi$  es el cambio en la entropía para el lapso de tiempo discreto  $\Delta t$ . En particular, al reducir al mínimo el tiempo del proceso (un turno), se puede determinar el cambio de entropía de un sólo movimiento. Este cambio determina de forma cuantitativa si la jugada produce una situación favorable (o desfavorable, sea el caso) para el aumento de entropía. En términos simples, se puede presentar alguno de los siguientes casos:

- $\Phi_{movimiento} > 0$  determina que la jugada realizada aumenta la entropía del bando analizado.
- $\Phi_{movimiento} < 0$  determina que la jugada realizada disminuye la entropía del bando analizado.

Siendo un turno la unidad de tiempo más pequeña,  $\Phi_{movimiento}$  se considera como la **derivada** del comportamiento, se omite el subíndice “movimiento”. Al **comparar** el cambio de entropía ( $\Phi$ ) entre **ambos contendientes** en el mismo turno, se puede determinar si la jugada realizada **benefició alguno** de los jugadores, es decir, puede ocurrir que:

- $\Phi_1 > \Phi_2$ , el bando 1 resulta beneficiado por la jugada.  
 Si  $\Phi_1 > 0$  y  $\Phi_2 > 0$  (o si  $\Phi_1 < 0$  y  $\Phi_2 < 0$ ), entonces el bando 1 resultó más beneficiado por la jugada.  
 Si  $\Phi_1 > 0$  y  $\Phi_2 < 0$ , entonces la jugada produjo que el bando 2 disminuyera su entropía y aumentara la entropía del bando 1.  
 Si  $\Phi_1 > 0$  y  $\Phi_2 = 0$ , entonces la jugada no produjo efecto alguno en el bando 2 pero aumentó la entropía del bando 1.  
 Si  $\Phi_1 = 0$  y  $\Phi_2 < 0$ , entonces la jugada no produjo efecto alguno en el bando 1 pero redujo la entropía del bando 2.
- $\Phi_1 = \Phi_2$ , ambos jugadores resultaron de igual manera beneficiados por la jugada.

Por otra parte, lo anterior se complementa del análisis integral del comportamiento evolutivo de la entropía:

$$\omega = \int_{t_i}^{t_f} S(t) dt \quad (2.8)$$

donde  $S(t)$  es el comportamiento evolutivo de la entropía para el jugador analizado,  $\omega$  es la suma de entropía del bando desde el tiempo inicial  $t_i$  hasta el tiempo final  $t_f$ . El área del comportamiento es una cantidad asociada al acumulado de entropía para cada bando. Por ello es importante analizar la diferencia de los comportamientos entre contendientes:

$$\varpi = \int_0^{t_f} S_1(t) - S_2(t) dt \quad (2.9)$$

donde el subíndice de  $S(t)$  identifica el comportamiento evolutivo de cada bando. El signo de  $\varpi$  determina quien tiene mayor entropía acumulada, si es positivo el bando 1 aventaja al bando 2 en este aspecto, si es negativo el bando 2 es superior. La ventaja en términos de la entropía muestra cual de los jugadores desarrolla mejor su movilidad, es decir, quien aprovecha mejor sus movimientos para generar más opciones.

## 2. MARCO TEÓRICO

---

# Metodología

---

*Un gran maestro debe de retener en su mente miles de partidas, puesto que las partidas son para él lo que las palabras de su lengua materna para la gente ordinaria, o las notas y pentagramas para los músicos.*

Garri Kasparov

## 3.1. Base de datos

Se establece la base de datos que comprende un extenso compendio de partidas de ajedrez, dicha base de datos esta dividida en dos grandes grupos: el primero conformado por partidas generadas por computadora para ambos bandos. La segunda clasificada por el nivel de juego que poseen ambos jugadores que realizan la partida:

- **Aleatorio.** Jugador generado por computadora, el cual esta programado para realizar movimientos válidos, las jugadas se eligen por un listado de movimientos posibles y se seleccionan al azar con igual probabilidad. En adelante se hará referencia a este tipo de jugador como “Azaroso”.
- **Humano.** Jugadores humanos que practican de forma no profesional (jugadores dentro de la base de datos que posee Elo<sup>1</sup> desde 1000 hasta 1600). Y jugadores que practican el juego de forma profesional (en la base de datos se tienen jugadores con Elo desde 2244 hasta 2849, véase B.1). En adelante se hará referencia a la categoría no profesional como “Amateur” y a los profesionales como “Elite”.

Las partidas realizadas por el jugador azaroso provienen de movimientos válidos elegidos por azar, para este propósito se utilizó el programa “*Generador de partidas de ajedrez al azar*” desarrollado por La Morsa Software Co. 2013, generando un total de 109 partidas con resultado 1 – 0 (ganó las blancas por jaque mate), 92 partidas con

---

<sup>1</sup>Ross (2007) menciona al sistema de puntuación Elo como un método matemático, basado en cálculo estadístico, para calcular la fuerza relativa de los jugadores en el deporte.[11]

### 3. METODOLOGÍA

---

resultado 0–1 (ganó las negras por jaque mate), y 515 partidas que tras 101 movimientos de cada jugador no se ha alcanzado el jaque mate, por lo que se estableció un juego en *tablas*<sup>1</sup> (1/2–1/2). La escasez de partidas ganadas por jaque mate se debe a que se obtuvo un promedio de ocho partidas que alcanzaban la condición del jaque mate para una ronda de creación con 100 partidas, promediando un tiempo de 8 horas por ronda, efectuado en una computadora con Intel Core i5 con 4 Gigabytes en memoria RAM, por lo cual el tiempo de cómputo limitó en gran medida la obtención de estas partidas. En el caso de jugadores amateur las partidas se obtuvieron de *ChessBase*<sup>2</sup>. El vasto compendio permitió seleccionar resultados de victoria por la vía del jaque mate. Además, al poseer un Elo definido las partidas se categorizaron en función de éste, donde el Elo se encontraba entre (1000-1200), (1200-1300), (1300-1400), (1400-1500) y (1500-1600).

Finalmente, los jugadores elite se obtuvieron mediante las partidas realizadas en los torneos celebrados entre 1950 y 1990. Para éste caso se hizo uso exclusivo del comentario final que determina quién ganó, perdió o empate sin necesidad de llegar a un jaque mate<sup>3</sup>. La base de partidas concluyó con la disposición observada en el cuadro 3.1.

| Nivel         | 1-0  | 0-1  | 1/2-1/2 |
|---------------|------|------|---------|
| Azaroso       | 109  | 92   | 515     |
| Elite         | 2138 | 1401 | 3274    |
| Amateur       |      |      |         |
| Elo 1000-1200 | 599  | 558  | 320     |
| Elo 1200-1300 | 263  | 233  | 173     |
| Elo 1300-1400 | 377  | 275  | 224     |
| Elo 1400-1500 | 431  | 402  | 329     |
| Elo 1500-1600 | 767  | 627  | 589     |

**Cuadro 3.1:** Número de partidas por nivel y resultado de victoria.

Con las distinciones de nivel (azaroso, amateur, elite) y los estados de victoria (ganador, perdedor, empate), se formó la base de datos de los jugadores, como se muestra en el cuadro 3.2. Se considera que cada partida aporta dos jugadores aunque alguno haya aparecido en alguna partida anterior, por lo que se excluye la identificación

---

<sup>1</sup>Ibero (1977) establece que es: empate cuando ninguno de los dos jugadores ha conseguido imponerse.

<sup>2</sup><https://es.chessbase.com/>

<sup>3</sup>Determinado por convenio de los jugadores o por el fallo de los jueces del torneo

de los participantes.

| Nivel   | Resultado | Número de Jugadores |
|---------|-----------|---------------------|
| Azaroso | Ganador   | 201                 |
|         | Perdedor  | 201                 |
|         | Empate    | 1030                |
| Amateur | Ganador   | 9064                |
|         | Perdedor  | 9064                |
|         | Empate    | 3270                |
| Elite   | Ganador   | 7078                |
|         | Perdedor  | 7078                |
|         | Empate    | 6548                |

**Cuadro 3.2:** Distribución de jugadores por nivel.

### 3.2. Evolución de la entropía.

Se desarrolló un programa cuyo algoritmo permite obtener, una partida a la vez, la **movilidad** de ambos bandos para cada turno. El algoritmo sigue la siguiente línea de acción:

1. Se lee la base de datos, comenzando con la primera partida.
2. Se lee cada movimiento en la partida.
3. Para cada movimiento se actualiza, de forma ordenada, la posición de las piezas dentro de un recurso de memoria.
4. Se listan los escaques dominados mediante el uso de la posición actualizada de cada pieza y su respectivas jugadas posibles dentro del turno vigente.
5. Se utilizó la ecuación 2.3 para determinar la entropía de ambos bandos en todo momento.
6. Los valores de entropía son guardados ordenadamente.
7. Se prosigue con la siguiente partida, hasta terminar la base de datos.



### 3. METODOLOGÍA

---

| Jugador       | Ganador/ Perdedor |          | Empate    |          |
|---------------|-------------------|----------|-----------|----------|
|               | $\mu$ (t)         | $\sigma$ | $\mu$ (t) | $\sigma$ |
| Azaroso       | 60.37             | 12.30    | 100.00    | NA       |
| Elite         | 39.63             | 9.01     | 30.85     | 18.61    |
| Amateur       |                   |          |           |          |
| Elo 1000-1200 | 35.46             | 15.02    | 26.91     | 14.15    |
| Elo 1200-1300 | 37.74             | 14.61    | 25.02     | 13.12    |
| Elo 1300-1400 | 38.00             | 16.69    | 31.30     | 17.08    |
| Elo 1400-1500 | 35.20             | 12.72    | 31.49     | 16.33    |
| Elo 1500-1600 | 37.66             | 14.44    | 30.33     | 13.60    |

**Cuadro 3.3:** Distribución normal de la duración de partidas por niveles. En la primera sección del cuadro (a la izquierda) se presentan los datos de la distribución para las partidas ganadas (o perdidas), en la segunda sección del cuadro (a la derecha) se muestran los datos de la distribución para las partidas empatadas. NA: No aplica.

8. Se logró una nueva base de datos en términos de la entropía de movilidad.

Concluido el cálculo de la entropía sobre la base de datos, se procedió a ordenar la base de la siguiente manera:

- Se clasificó la base de datos mediante el resultado final de la partida, se agruparon los resultados de la entropía en estos tres grandes rubros (ganadores, perdedores y empates).
- Se generó una representación gráfica de la evolución de la entropía para todos los niveles (figura B.2). Para un tiempo mayor a  $t = 70.0$ , se observaron fluctuaciones considerables en los datos promedio, producidas principalmente por partidas individuales que no permiten evaluarlas estadísticamente, por lo cual se realiza un procedimiento de depuración en la base de datos al usar el criterio  $\mu \pm 2\sigma$  para la distribución normal en la duración de partidas (cuadro 3.3). Con este criterio se preserva el 95,45 % de los datos y permitirá reducir el ruido producido por las ‘partidas solitarias’.
- Con la finalidad de realizar una apropiada primera inspección, se obtuvo el promedio de los valores mostrados para los jugadores ( $t = 66.81 \pm 2.94$ ) y se eligió la cota superior  $t = 70.0$  para comparar todos los comportamientos. En las figuras posteriores se volverán a retomar los valores del cuadro 3.4 para cada caso específico.

| Jugador       | Ganador/ Perdedor<br>$\mu + 2\sigma$ (t) | Empate<br>$\mu + 2\sigma$ (t) |
|---------------|--|-------------------------------|
| Azaroso       | 84.97                                    | 100.0                         |
| Elite         | 57.66                                    | 68.08                         |
| Amateur       |  |                               |
| Elo 1000-1200 | 65.51                                    | 55.21                         |
| Elo 1200-1300 | 66.96                                    | 51.26                         |
| Elo 1300-1400 | 71.38                                    | 65.46                         |
| Elo 1400-1500 | 60.65                                    | 64.15                         |
| Elo 1500-1600 | 66.55                                    | 57.54                         |

**Cuadro 3.4:** Cota superior ( $\mu + 2\sigma$ ) de las partidas en la base de datos. En la primera sección de datos (segunda columna) se presenta la cota superior de la duración correspondiente a las partidas ganadas, y es igual para su contra parte de las partidas perdedoras, en la segunda sección (tercera columna) se muestra la cota superior de la duración para las partidas empatadas. NA: No aplica.

### 3. METODOLOGÍA

---

- Posteriormente se llevo a cabo el cálculo del la derivada y la integral de los comportamientos evolutivos de la entropía para cada nivel. Estos valores determinan del desempeño y la eficacia comparativas.

## Análisis de Resultados

---

*El gusto sólo se puede entrenar pensando no en lo que era razonablemente bueno, sino sólo en lo que era realmente grandioso. Por esa razón os mostrare únicamente los mejores trabajos; y cuando estéis bien versados en ellos, podéis evaluar todos los demás sin sobrestimarlos.*

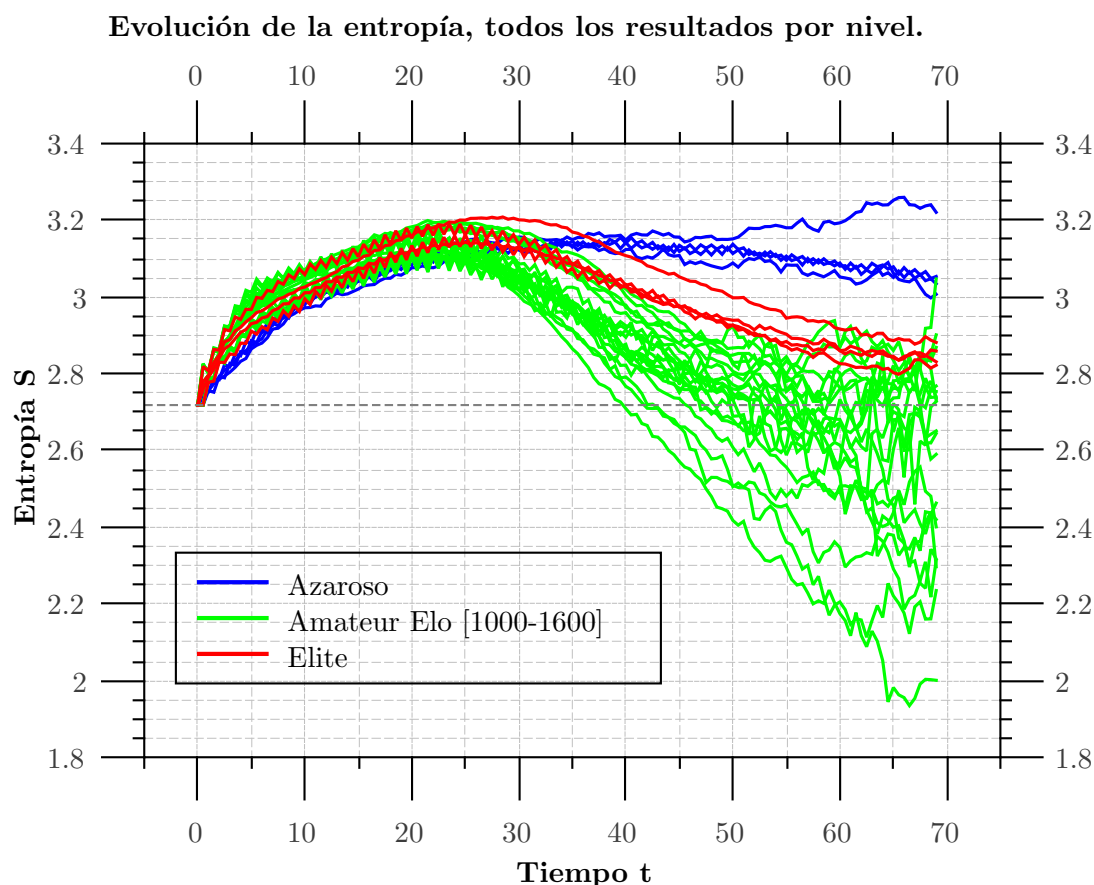
Goethe

### 4.1. Evolución de la entropía.

Se presentan las gráficas de los comportamientos efectuados por los distintos jugadores de niveles variados. Las partidas en las gráficas se representan iniciando desde la posición inicial (figura A.1) con  $t = 0.0$ , posteriormente la primera jugada de piezas blancas ocurre para  $t = 0.5$ , secuencialmente la siguiente jugada de piezas negras ocurre en  $t = 1.0$ , y así sucesivamente. La escala de las ordenadas no tiene un valor fijo y siempre se estableció en los valores que permitiesen mostrar los datos con buena resolución, no se mencionan las unidades de entropía (*nat*) en la variable  $S$  esto con el fin de no perder de vista que se trata de un análisis sobre la entropía.

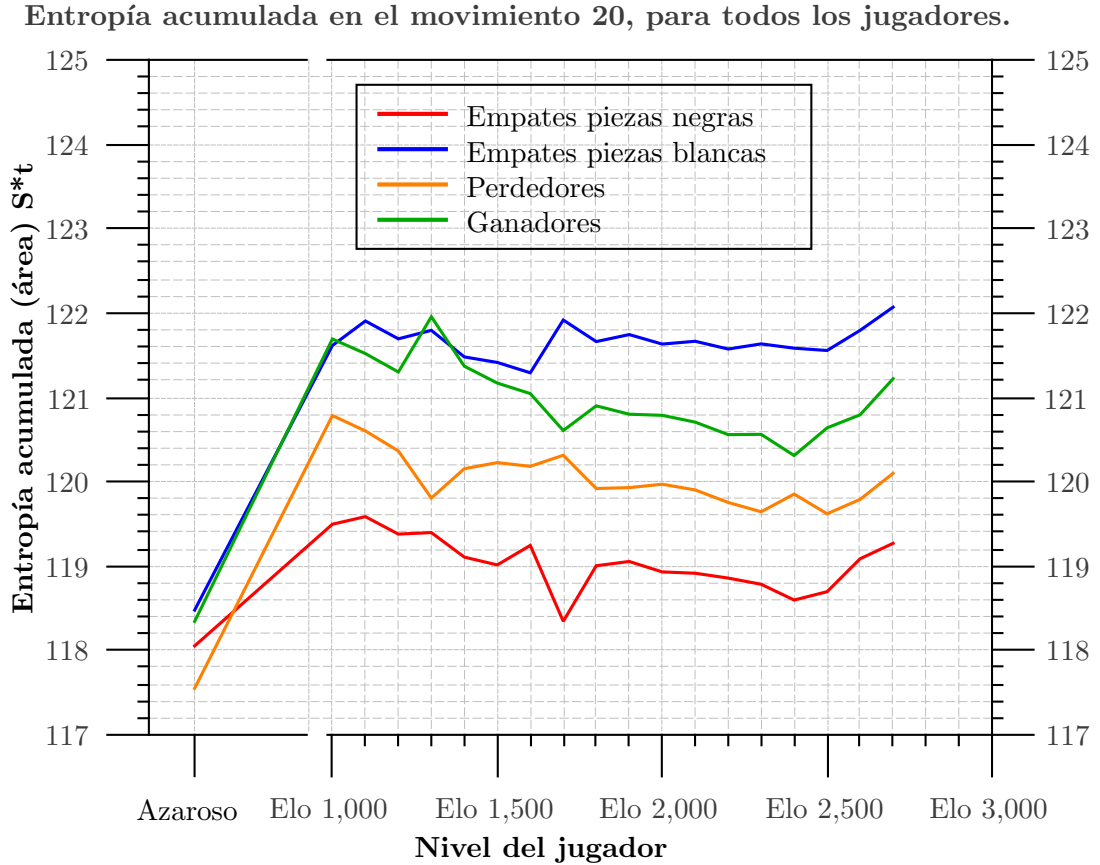
#### 4.1.1. Entropía en función de la movilidad.

En la figura 4.1, se observan bandas formadas por líneas (promedios) de un mismo color característico de cada nivel de juego. El aglutinado del color permite localizar el comportamiento de los distintos niveles en ciertos valores de entropía. Este fenómeno de distinción para el promedio de los comportamientos permite, la exploración de características particulares de los niveles de juego en función de la entropía.



**Figura 4.1:** Evolución de la entropía, con cota superior promedio usando el criterio  $\mu \pm 2\sigma$  para todos los jugadores, por nivel de juego.

La figura 4.1 muestra someramente una jerarquización de las categorías dentro de la base de datos (azaroso, amateur y elite). Se destaca que tanto los jugadores de elite como los jugadores azarosos poseen valores de entropía superiores al valor inicial (línea horizontal marcada con gris oscuro en el valor  $S = 2.72 \text{ nats}$ ), con sus respectivas particularidades. Ambos cambian su comportamiento creciente del inicio, hacia uno decreciente pasada la jugada 20, sin embargo los jugadores de elite realizan este tránsito de forma más pronunciada. Por otra parte, hacia el final del juego, algunos jugadores amateur obtienen valores menores a la entropía inicial, mientras que otros comportamientos poseen entropías por encima de este valor. Durante la apertura ( $t = [0, 20]$ ), los jugadores humanos se encuentran dentro de una franja de valores que son similares para ambas categorías (amateur y elite). Por otra parte los jugadores azarosos, se encuentran en un franja con valores inferiores, en comparación con los jugadores humanos. El análisis del área bajo la curva de cada franja muestra la relación existente entre cada caso.



**Figura 4.2:** Área bajo la curva del comportamiento de cada nivel, para el intervalo de tiempo  $t=[0,40]$ .

Al observar la figura 4.1 y una inspección de la figura 4.2, establece que las categorías mantenían la siguiente relación para cada resultado de la partida:

$$\omega_{Azaroso} < \omega_{Humanos} \quad (4.1)$$

La desigualdad en 4.1 muestra que en promedio **los jugadores humanos aumentan en mayor medida su entropía a comparación de los jugadores azarosos** hasta el movimiento 20. Este resultado puede deberse a que los jugadores humanos poseen la ventaja del aprendizaje y estudio previo sobre las aperturas en el juego. Se puede observar que los jugadores amateur varían mucho en sus valores de área, a comparación de los jugadores de elite que son más homogéneos. Lo anterior muestra que este aprendizaje les permite un desarrollo más focalizado para sus piezas en la apertura y que aprovechan mejor los jugadores de elite en comparación de los jugadores amateur. En contra parte, los jugadores azarosos realizan su apertura de forma aleatoria y por ende sin ninguna estrategia definida.

Para el medio juego ( $t = [20, 40]$ ) se produce el cruce de líneas (promedios) entre todos

## 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

---

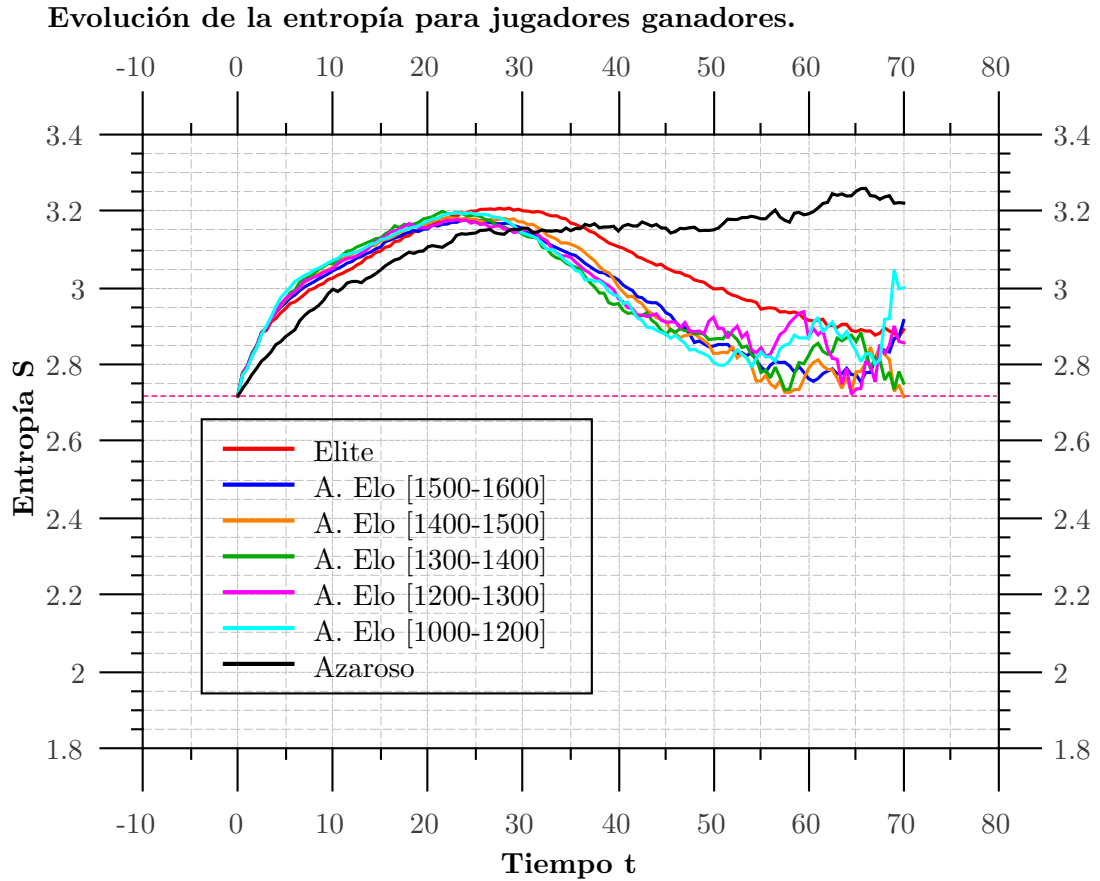
los niveles. En esta zona se observa el comienzo del cambio en el comportamiento creciente de la apertura a un comportamiento decreciente en el medio juego.

Se observa que los jugadores humanos presentan un comportamiento decreciente más pronunciado que los jugadores azarosos. Para los jugadores humanos el descenso de la entropía en esta zona infieren que sus opciones se ven reducidas considerablemente a comparación de los jugadores azarosos, ello se explica por el existente conflicto contra su oponente. **Los jugadores humanos llevan a cabo estrategias de oposición, que propician el proceso de reducción de la entropía de su adversario, es decir, se reducen las opciones que puede elegir el oponente.** Por lo cual se puede predecir las jugadas del oponente con mayor seguridad, lo que aumenta la probabilidad de realizar capturas.

La situación es totalmente opuesta para los jugadores azarosos, al no enfrentarse a estrategias de oposición ni desarrollar alguna, su proceso de decaimiento proviene de la eventualidad de algún movimiento que reduzca la entropía.

### 4.1.1.1. Comparación por resultado de partida.

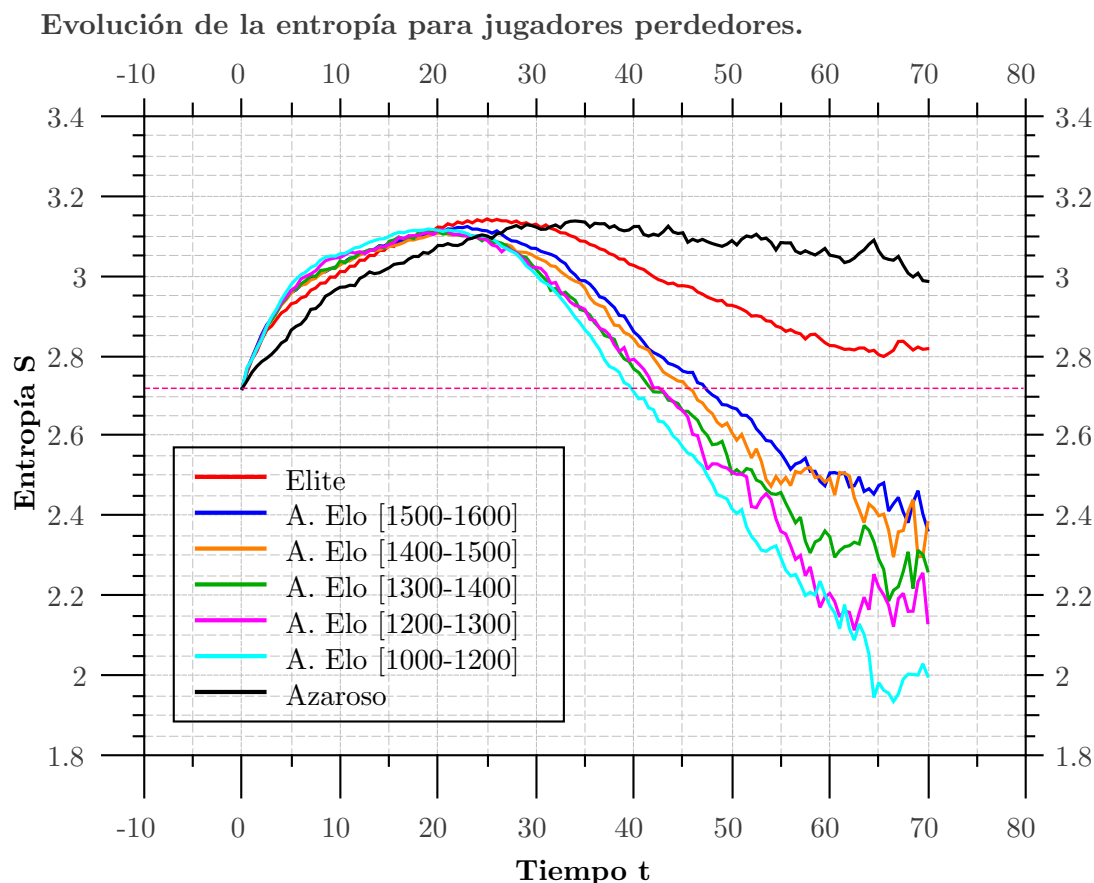
En esta sección se realiza un análisis comparativo de los valores de entropía para las partidas que tienen el mismo resultado de partida o situación de victoria (si ganó, perdió o empató).



**Figura 4.3:** Evolución de la entropía para los jugadores ganadores, por nivel de juego.

En la figura 4.3 se observa que los ganadores mantienen su entropía en valores mayores al valor inicial del juego, indicando que **los ganadores procuran tener tantas o más opciones que en el comienzo de la partida**. Para los ganadores, los niveles generales presentan la característica de alcanzar el valor máximo de entropía en distintos tiempos. Los jugadores amateur alcanzan su máximo de entropía (en promedio) durante el intervalo de tiempo  $t = [22.0, 25.0]$ , los jugadores de elite alcanzan su máximo para  $t \approx 28.5$  y finalmente los jugadores azarosos alcanzan (aparentemente) su valor máximo de entropía para  $t \approx 66.0$ .





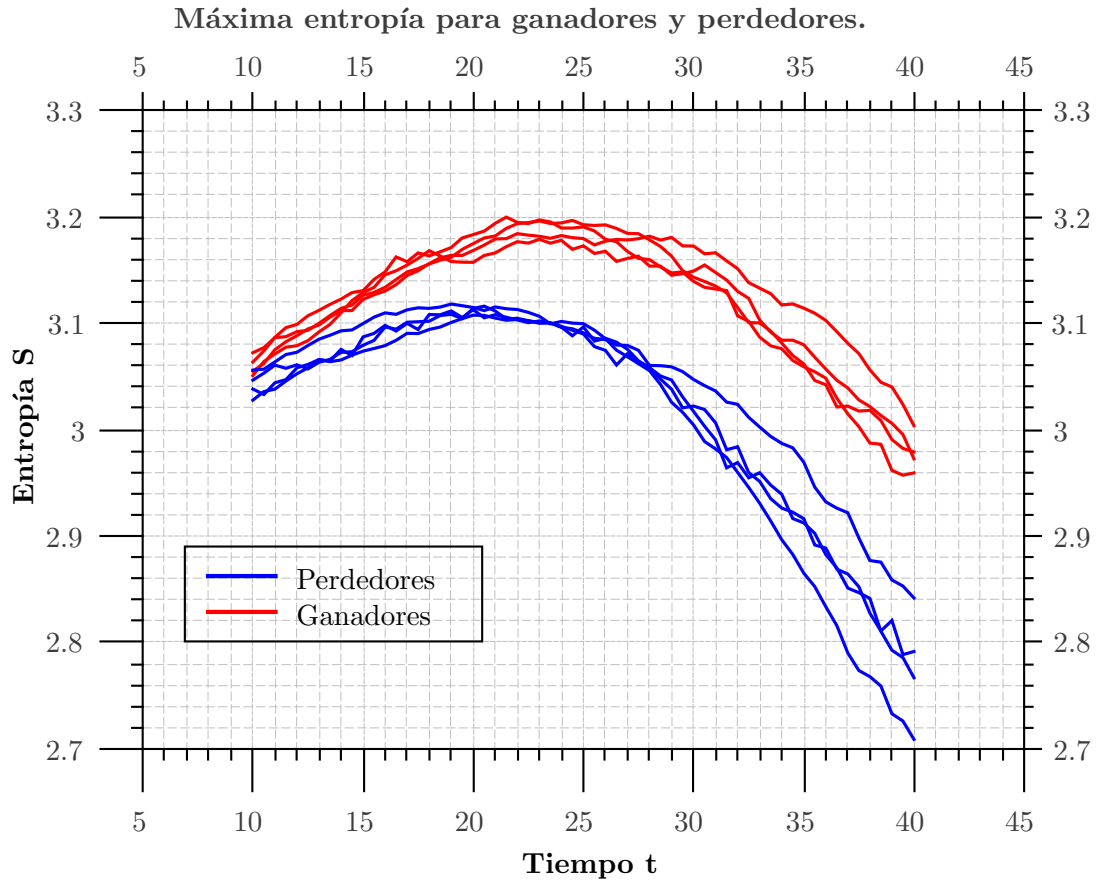
**Figura 4.4:** Evolución de la entropía para los jugadores perdedores, por nivel de juego.

La figura 4.4 muestra el comportamiento de los jugadores que perdieron. Al contrario de los ganadores, se observa que la entropía de los jugadores amateur alcanza valores inferiores al valor inicial. Ello indica que hay una reducción de la entropía. Se observa para el final de la partida ( $t = [20.0, 70.0]$ ) un comportamiento jerárquico para los jugadores amateur que perdieron: preservan el orden del Elo asociado y su entropía promedio, es decir, **el promedio de los valores de la entropía aumenta a medida que escala el nivel de Elo asociado a los jugadores.**

Por otra parte, los jugadores azarosos y de elite mantienen valores por encima del valor de entropía inicial. Para los jugadores azarosos esta característica es consecuencia de que su proceso de decaimiento proviene de la eventualidad de algún movimiento que reduzca la entropía. Por otro lado para los jugadores de elite este fenómeno es resultado de su estudio y experiencia, como puede hacer notar la escala jerárquica del Elo y el comportamiento de la entropía.

Al igual que en el caso de los ganadores, los perdedores alcanzan el valor máximo de entropía en distintos tiempos, los jugadores amateur alcanzan su máximo para  $t = 15.0$  y  $t = 23.0$  para Elo [1500-1600]; los jugadores de elite obtienen su máximo para  $t = 25.0$ ,

finalmente los jugadores azarosos lo tienen para  $t = 34.0$ , este fenómeno pone de manifiesto que los jugadores de elite desarrollan su juego (aumentan su entropía) en un lapso de tiempo más amplio a comparación de los jugadores amateur.

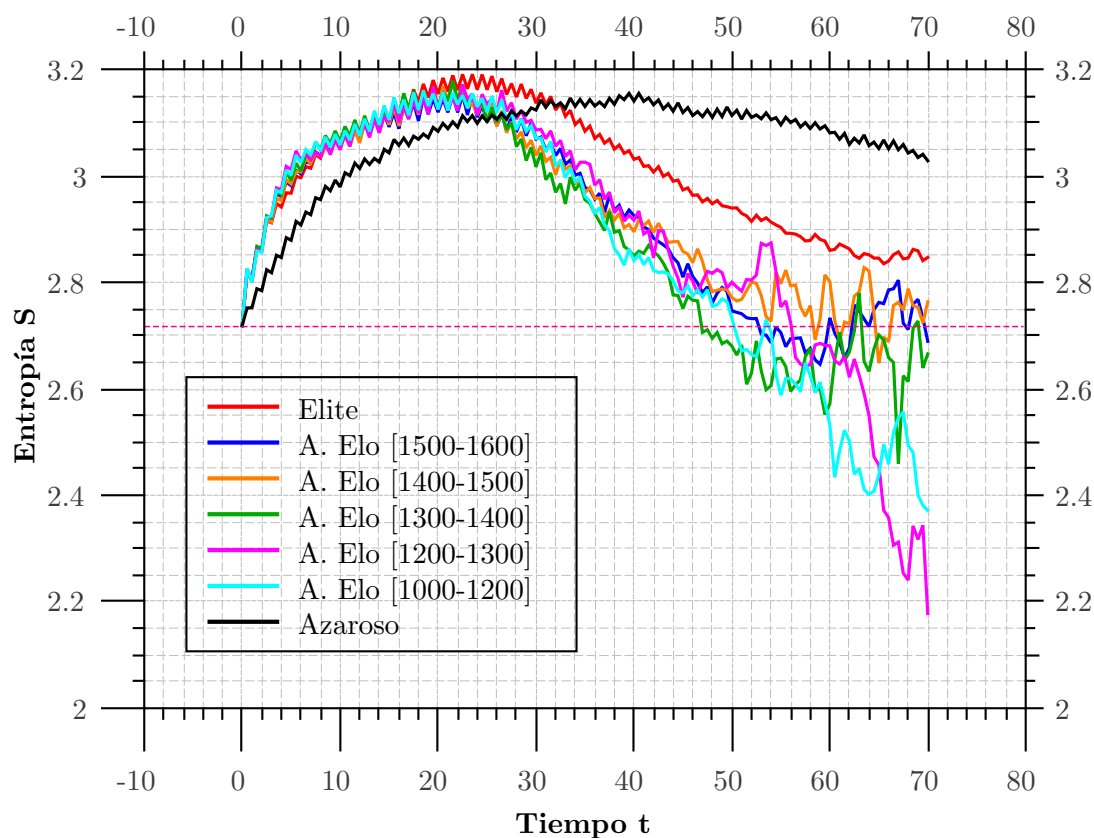


**Figura 4.5:** Máximos de entropía para los jugadores ganadores y perdedores.

Para ambos casos (perdedores y ganadores) se observan dos posibles tendencias:

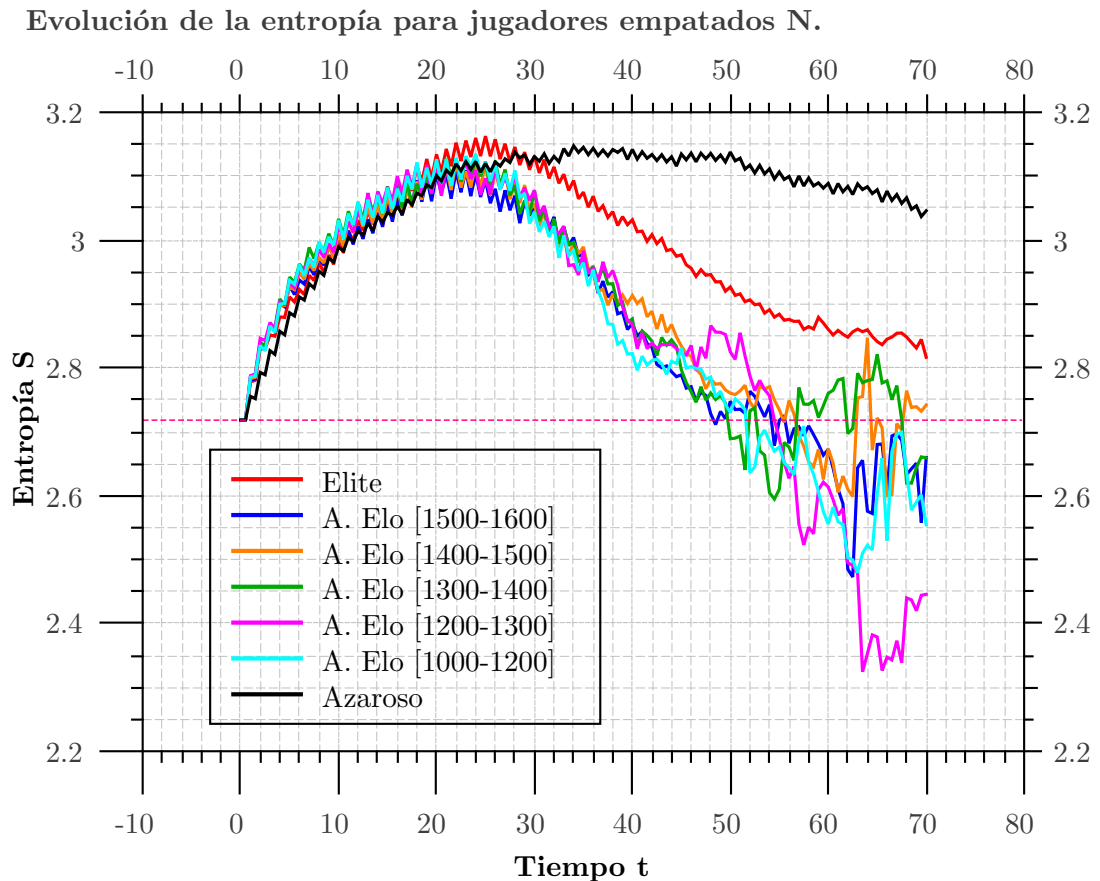
1. El jugador ganador, pese a la oposición de su oponente, continua su proceso de aumentar su entropía en el juego.  
(O el jugador perdedor desarrolla una oposición tardía, o poco efectiva, que altera poco a los jugadores ganadores.)
2. El jugador ganador, desarrolla prematuramente una oposición exitosa que reduce la entropía de su oponente.  
(O el jugador perdedor no desarrolla eficazmente su proceso para el aumento de entropía.)

Evolución de la entropía para jugadores empatados B.



**Figura 4.6:** Evolución de la entropía para los jugadores empatados (piezas blancas), por nivel de juego.

El resultado de empate para las piezas blancas (figura 4.6) muestra un comportamiento acorde a los anteriores, sin embargo, se observa una característica prominente para la apertura, periodo durante el cual se manifiestan zigzagueos entre crestas y valles, donde **las crestas coinciden con el turno de piezas blancas y los valles coinciden con el turno de las piezas negras**. Esto en términos del cambio en la entropía implican que durante el turno de las piezas blancas, estas realizan una jugada que aumenta su entropía obteniendo un desempeño favorable (ventaja), y durante el turno del oponente disminuye la entropía, es decir, la entropía se ve reducida por la oposición.



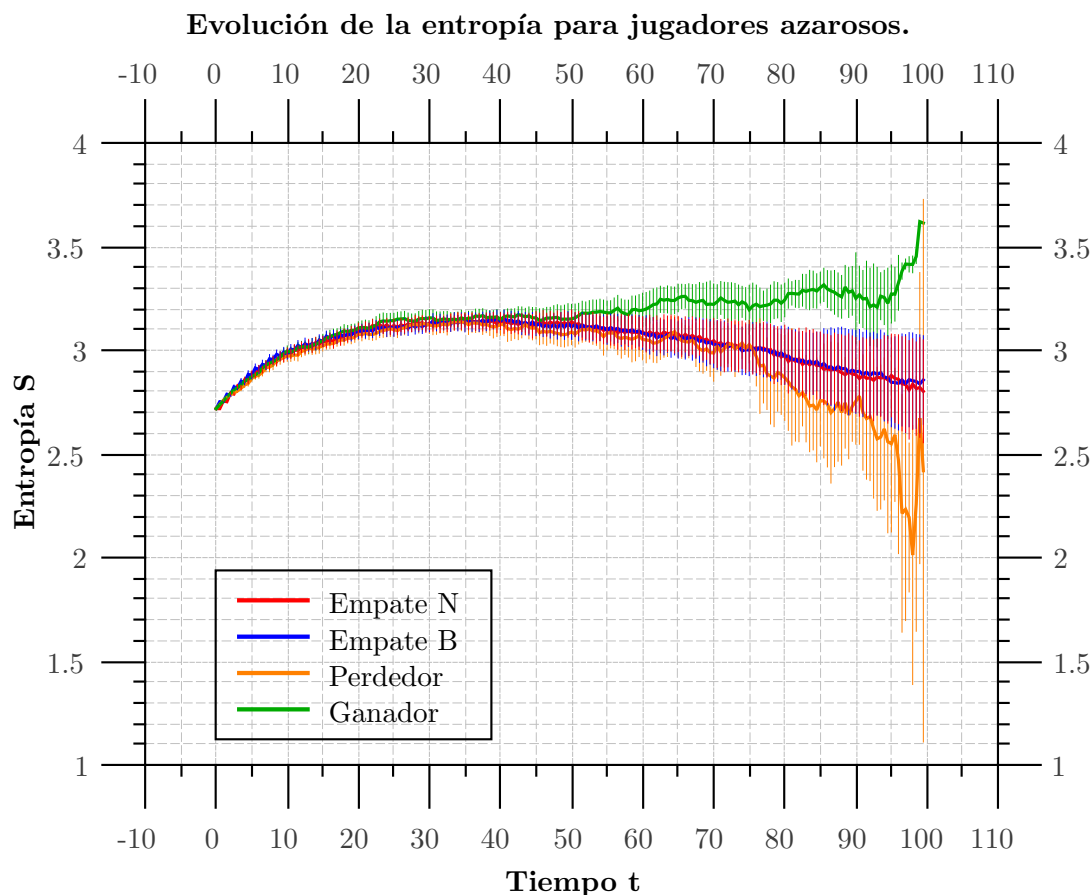
**Figura 4.7:** Evolución de la entropía para los jugadores empatados (piezas negras), por nivel de juego.

El empate para las piezas negras (figura 4.7) muestra el mismo comportamiento de su contraparte en los empates por piezas blancas, sin embargo, los zigzagueos en la apertura dan lugar al comportamiento opuesto al anterior (figura 4.6), es decir, **las crestas coinciden con el turno de piezas negras y los valles coinciden con el turno de las piezas blancas** implicando que, durante el turno de las piezas negras aumentan su entropía, y para el turno del oponente la entropía se ve reducida por la contraofensiva.

Al complementarse los comportamientos entre los empates por piezas blancas y los empates por piezas negras se hace evidente que ambos jugadores en cada turno busca aumentar su entropía, evitando caer en una reducción de sus opciones. **La constante oposición por parte de ambos jugadores resulta en que ninguno se impone sobre el otro, produciéndose la situación de empate.**

## 4.1.1.2. Comparación entre resultados del nivel.

Como se muestra en el cuadro 3.3, para un mismo nivel se presentan distintas distribuciones para la duración de partidas. Con el fin de realizar un análisis comparativo de los distintos resultados y sus comportamientos, para las gráficas de este apartado, se muestran los resultados hasta la mayor de las cotas superiores de cada nivel (cuadro 3.4), por ejemplo, para el caso de los jugadores azarosos, se tiene que la cota superior del tiempo para los ganadores (y perdedores) es de  $t = 84.97$ , y para los empates es de  $t = 100.0$  por lo cual se representan los comportamientos hasta  $t = 100.0$ . La decisión se tomó debido a que de esta forma se asegura el 95.45 % de los datos para todos los casos y su análisis comparativo. La desventaja es la presencia de ruido en los datos del caso con menor cota, que será señalado pertinentemente.



**Figura 4.8:** Evolución de la entropía para los jugadores azarosos con varianza.

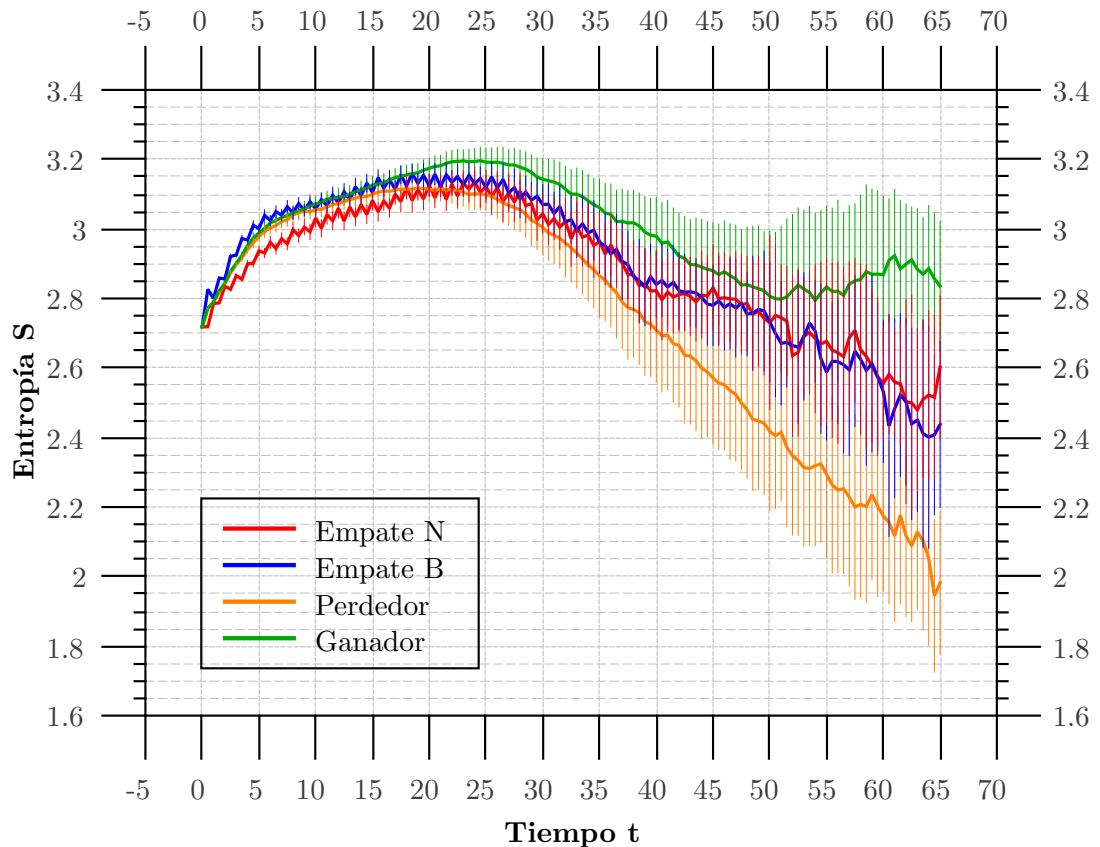
Al observar el rango de valores de los jugadores azarosos, mostrado por la figura 4.8, se observa que los jugadores en todos los resultados mantienen valores de entropía muy similares hasta la jugada 80. Después comienza una bifurcación de los resultados

en dos, uno donde se encuentran los ganadores con valores de entropía superiores a los perdedores y empates.

También se observa que el rango de valores se presenta en un amplio rango, llegando a obtener valores que distan no más de  $2.6 \text{ nat}$ , variación que se espera de estos jugadores debido a su construcción.

Para los jugadores humanos los resultados son muy similares, entonces pierde sentido mostrar todos los resultados, por lo tanto sólo se muestra un nivel con mayor número de partidas analizadas para cada categoría, los demás niveles estarán listados en el apéndice B.

#### Evolución de la entropía para jugadores amateur Elo [1000-1200].



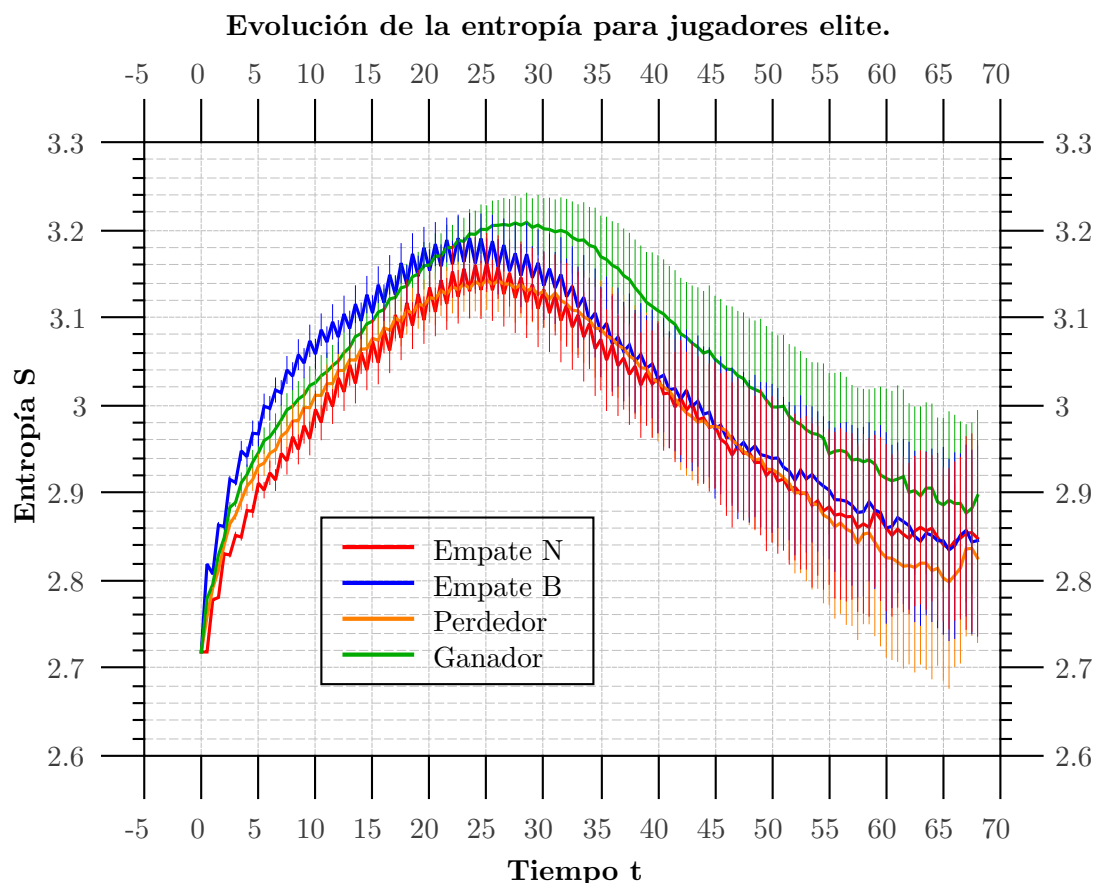
**Figura 4.9:** Evolución de la entropía para los jugadores amateur Elo [1000-1200] con varianza.

Los jugadores amateur con Elo [1000-1200], [1200-1300], [1300-1400], [1500-1600] presentan el mismo comportamiento jerárquico de la entropía, relacionado con el grado de victoria. Se observa la bifurcación antes descrita para la jugada 40, repitiendo el patrón sobre los ganadores con valores de entropía superiores a los perdedores y em-

#### 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

---

pates. También se observa que el rango de valores es mucho más pequeño al mostrado por los jugadores azarosos, llegando a obtener valores que distan no más de 0.8 nat.

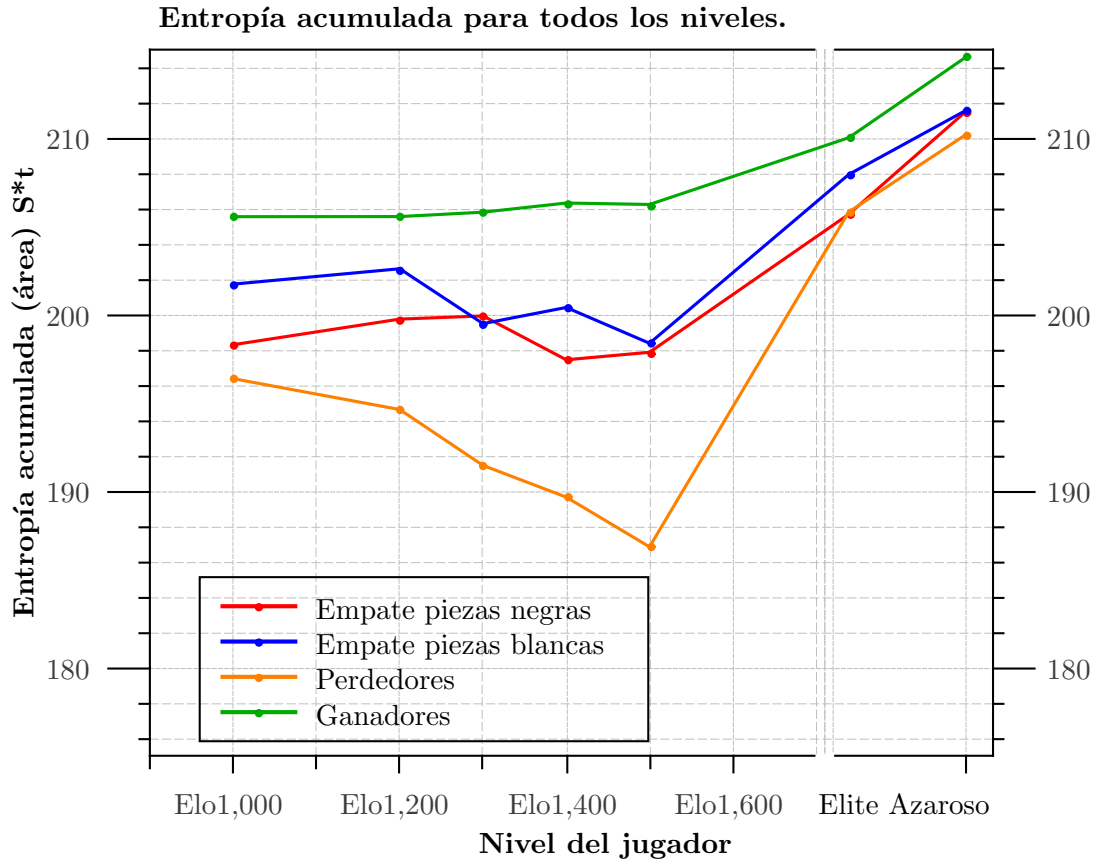


**Figura 4.10:** Evolución de la entropía para los jugadores elite con varianza.

El caso del nivel de elite con jugadores cuyo Elo se encuentra entre 2300-2400 es revelador, al mostrar puntualmente esta bifurcación (hacia el final de juego) entre los jugadores que ganan y los que no lo hacen, pues se observa que los promedios de empates y perdedores se superponen en la mayoría de sus valores, mostrando que los ganadores poseen características únicas que sólo un ganador puede mostrar.

El rango de valores es más pequeño al mostrado por los jugadores amateur, llegando a obtener valores que distan no más de 0.3 nat.

La disminución de los rangos de valores de entropía dan muestra de una relación entre la entropía, el resultado y el nivel del jugador.



**Figura 4.11:** Comparación de la entropía acumulada hasta  $t=70$  para todos los niveles y resultados.

En la figura 4.11 se observan distintos comportamientos, se observa **para cualquier nivel los ganadores destacan con una entropía acumulada superior a los jugadores que empatan y los jugadores que pierden.**

Para los jugadores humanos se observa una gran brecha de valores entre los ganadores y perdedores, y esta a su vez se va estrechando a medida que aumenta el nivel del jugador. Por otro lado no se observa esta gran brecha entre los jugadores que empatan. Sin embargo si tienen una situación de superioridad para los jugadores con piezas blancas, como se observa en todos los casos humanos, los jugadores con piezas blancas aumentan más su entropía durante las primeras jugadas, pero es igualado por las piezas negras a medida que termina la partida.

Los resultados anteriores ponen de manifiesto que la entropía acumulada, y en especial la diferencia entre las entropías acumuladas de ambos contendientes sirve como criterio para determinar “*el grado de victoria*” de una partida. Al observar las figuras 4.8, B.3, B.4, B.5, B.6, B.7 y 4.10 con sus respectivos cuadros de valores, se afirma que, (estadísticamente) **la entropía en función de la movilidad caracteriza jerárqui-**



camente el grado de triunfo, es decir, el comportamiento de la entropía para los ganadores será superior al comportamiento de los no ganadores (empates y perdedores).

## 4.2. Análisis de partidas individuales.

En esta sección se muestra que el nuevo método de la entropía por movilidad sirve para un análisis individual de las partidas, y no únicamente para el análisis estadístico de un gran número de partidas.

### 4.2.1. Karpov-Unzicker (1974).



**Figura 4.12:** Tablero en el movimiento 23. ... Qd8 de la partida Karpov-Unzicker (1974).

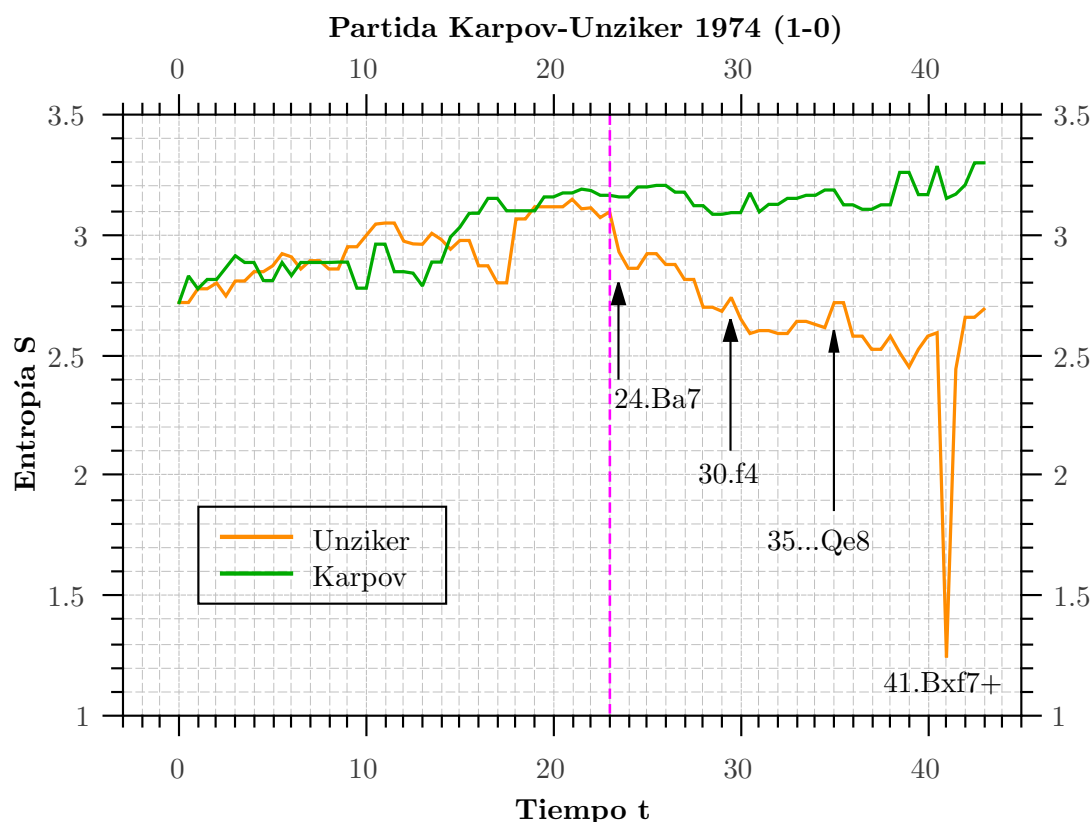
En este momento de la partida el valor de la ventaja total 0.3 peones, y la diferencia de entropía acumulada es  $\varpi = 0.34 \text{ nat} * t$ .

Kotov (1998) realiza un análisis sobre la partida entre Karpov y Unzicker (véase partida completa en C.1), menciona que para la jugada 23 en el turno de las piezas negras...

*“Se desprende, por impresión general de que las blancas se encuentran ligeramente más libres, con su Peón central en quinta proporcionándoles considerable ventaja de espacio. Sin embargo, la posición negra no presenta debilidades, y sus piezas se encuentran dispuestas para rechazar un ataque en cualquier parte del tablero.*

*Karpov concibe un plan para continuar reforzando su posición, que puede resumirse así: Bloquear la columna “a” mediante Ba7, para evitar cambios de Torres, con la simplificación de la posición que ello supondría. Bajo la protección de este Alfil, concentrar las piezas pesadas en la columna “a”. Entonces, la retirada del Alfil amenazará con domi-*

nar dicha columna en cualquier momento. Sin embargo, esto por si solo no basta para ganar. Tendrá que combinarse con amenazas en el ala del Rey, y con una restricción en general de las fuerzas enemigas. La posibilidad de alternar el juego en el ala del Rey y en la columna “a” dispersará los recursos defensivos de las negras” ([8], p. 73).



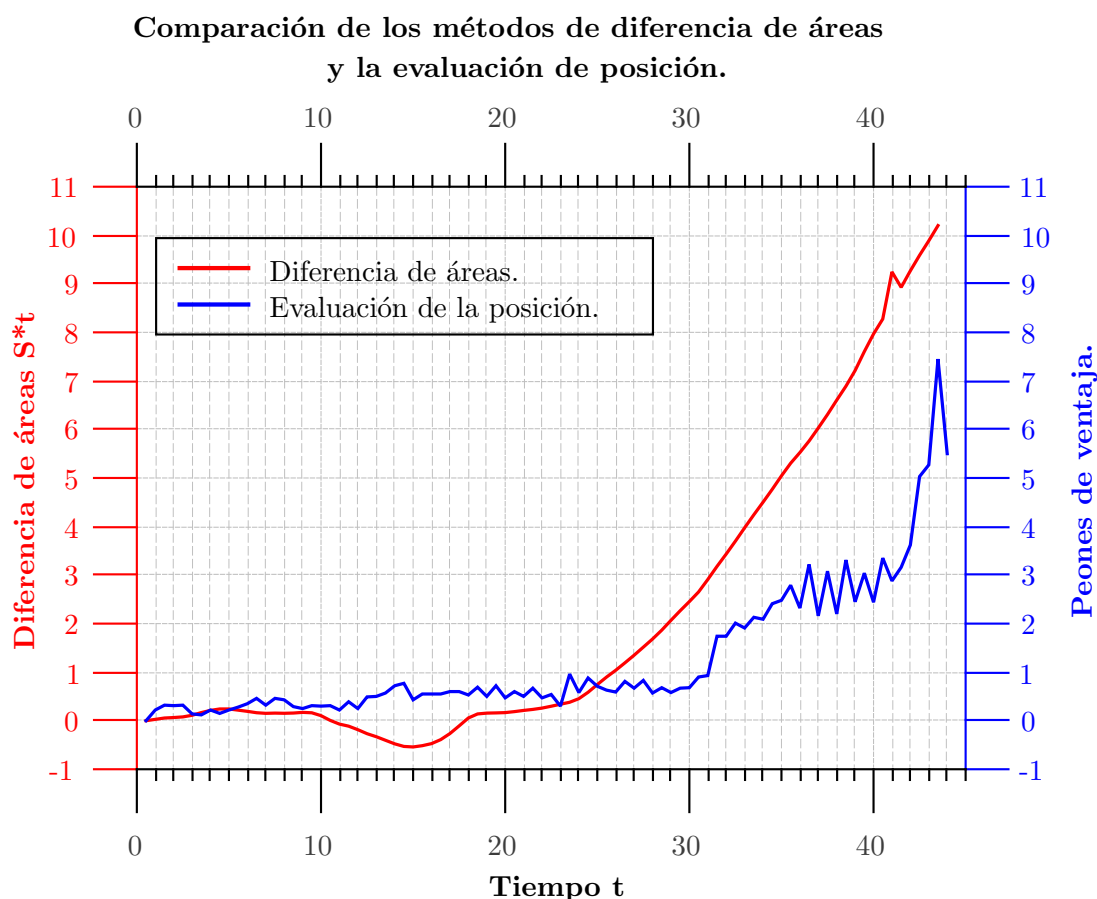
**Figura 4.13:** Evolución de la entropía a lo largo de la partida Karpov-Unziker (1-0).

La figura 4.13 muestra el comportamiento de ambos contendientes a lo largo de la partida, en esta se señala con una línea vertical magenta el inicio del análisis de Kotov con la jugada  $24.Ba7$ . Se puede apreciar un distanciamiento entre los valores de entropía de Karpov y Unziker, lo que muestra el comienzo del fin para Unziker. El criterio para máximos de entropía señala a Karpov como virtual vencedor, incluso sin llegar a la resolución de la partida. Pues Unziker adquiere el valor de dicho máximo en el movimiento 21 de negras, a diferencia de Karpov que siempre aumentó su entropía, este aumento sostenido de la entropía muestra que Karpov creaba para si un gran número de opciones en cada jugada, situación que se manifestó en el dominio del tablero al constreñir las piezas negras, y limitando sus opciones.

El criterio de la diferencia de entropía acumulada muestra la disparidad de las opciones a lo largo de la partida. Para poner a prueba el método de la entropía, se compara contra el método de la *evaluación de posición*, los resultados presentes en la figura

## 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

4.14, fueron obtenidos de la página web <https://chess24.com/es/analysis>, la cual hace uso del motor de ajedrez **Stockfish 9 64 POPCNT** con una profundidad de 21, para una ejecución de cálculos en un intervalo de tiempo de no mayor a 30 segundos.



**Figura 4.14:** Comparación de la evaluación de posición, y la diferencia de áreas. Karpov-Unzicker (1-0).

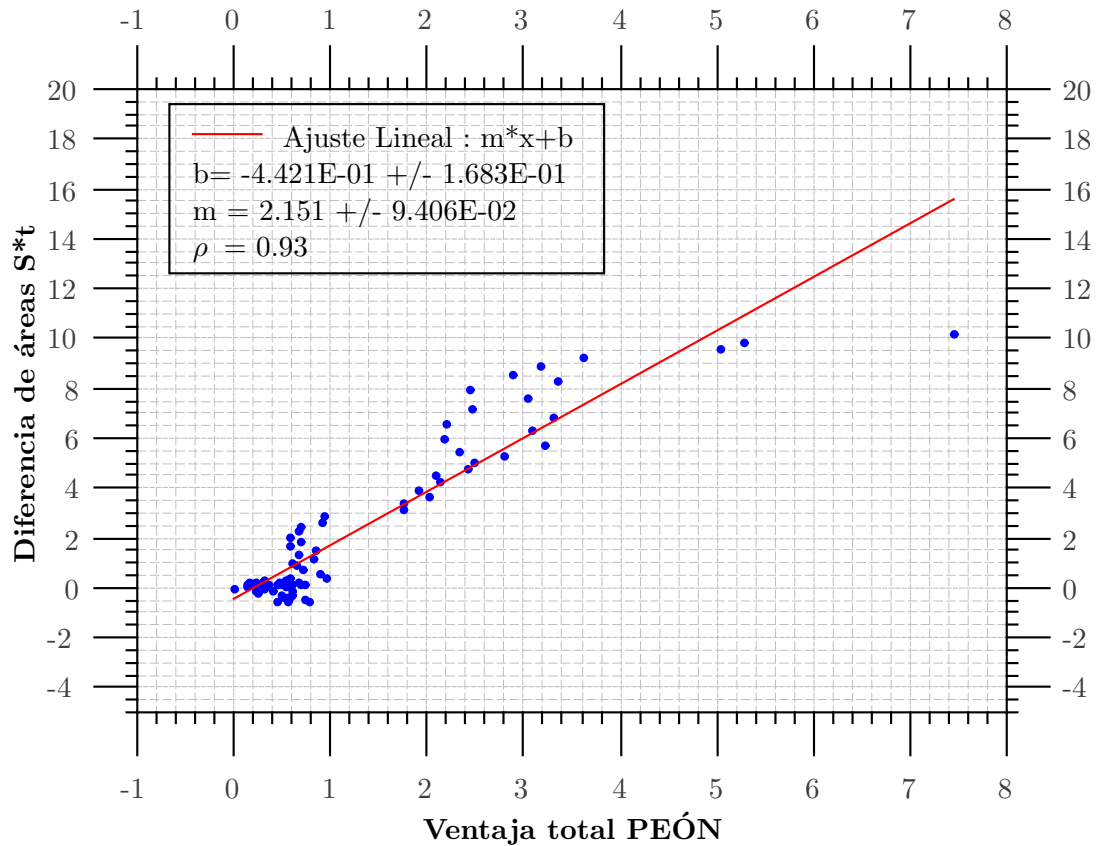
La figura 4.14 compara la diferencia del área de ambos contendientes contra la evaluación de posición, las cuales comparten la tendencia en la ventaja de las piezas blancas, cabe destacar que las unidades de medida son diferentes, puesto que la diferencia de área no depende de una cantidad no fraccionable como lo es el PEÓN, en cambio esta expresada en unidades de entropía ( $nat$ ) por tiempo ( $t$ ).

|                    | Karpov | Unziker |
|--------------------|--------|---------|
| $\omega (nat * t)$ | 131.28 | 121.08  |

**Cuadro 4.1:** Entropía acumulada para la partida Karpov-Unziker.

La diferencia de los valores de entropía acumulados para la partida, le otorga la victoria a Karpov con una diferencia de  $10.20 nat * t$ .

**Correlación entre la evaluación de posición y diferencia de áreas.**



**Figura 4.15:** Correlación de la evaluación de posición y la diferencia de áreas. Karpov-Unzicker (1-0).

La figura 4.15 muestra que la evaluación de la posición y la diferencia de áreas tienen un coeficiente de correlación  $\rho = 0.93$ , por lo cual se encuentra que este nuevo análisis de la ventaja es una fuerte aproximación al ya establecido método por la ventaja total. El área se considera desde el comienzo de la partida hasta el movimiento evaluado, y

## 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

---

corresponde a la entropía acumulada durante este lapso de tiempo, entonces la diferencia muestra las opciones acumuladas durante la partida.

La ventaja más notoria de este nuevo método es **el valor concreto que asigna la entropía en cada movimiento** que a diferencia de la ventaja total, no requiere de un tiempo de revalorización. La gran ventaja, que no se puede observar a simple vista, es la economía en materia computacional, puesto que los motores de ajedrez, como **Stockfish 9 64 POPCNT**, usan muchas variables para determinar aproximadamente el valor que ofrecen como evaluación posicional, en cambio, el cálculo de la entropía sólo depende de una variable: **la movilidad**. Otra de sus ventajas es que no depende de una unidad no fraccionaria como lo es el *peón*. La desventaja más notoria del nuevo método frente a la evaluación posicional es la necesidad de realizar un segundo cálculo para obtener la ventaja. Para ambos métodos se especifica sobre quien recae la ventaja mediante el signo del valor calculado, si el signo es positivo (+) la ventaja recae sobre las piezas blancas, si el signo es negativo (−) la ventaja es de las piezas negras<sup>1</sup>.

Habiendo realizado el cálculo del área bajo la curva de cada comportamiento, se procede a un análisis más profundo sobre la figura 4.13 al obtener las derivadas de ambos comportamientos. Los valores de estas derivadas determinan el efecto que produjo cada movimiento<sup>2</sup> al valor de la entropía de ambos jugadores en dicha jugada.

Dichos efectos del movimiento sobre las opciones de juego sólo se desarrollan en los siguientes tres casos:

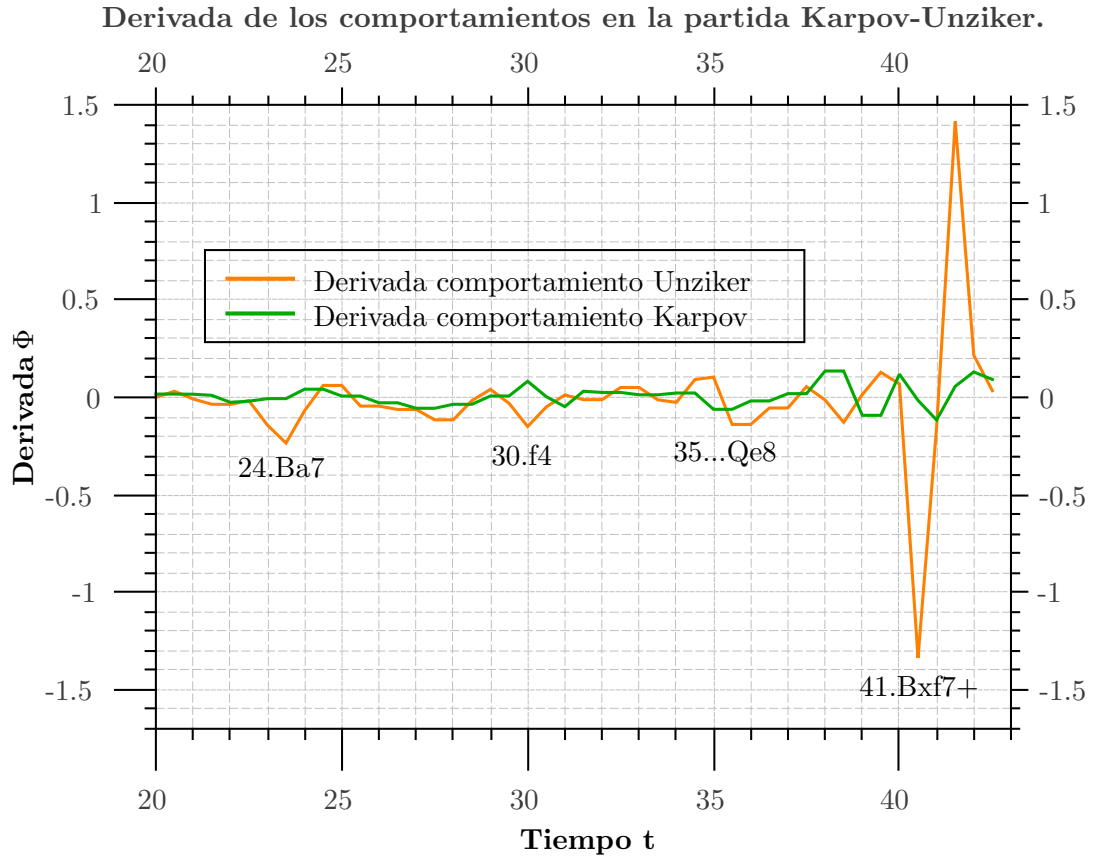
- Si la derivada adquiere un valor negativo, entonces la entropía (y sus opciones) se ve reducida para el siguiente movimiento.
- Si la derivada adquiere un valor positivo, entonces la entropía (y sus opciones) se ve aumentada para el siguiente movimiento.
- Si la derivada es cero, entonces la entropía (y sus opciones) se mantiene para el siguiente movimiento.

En la figura 4.13 se señalan algunos movimientos de interés. Es por ello que el análisis de la derivada de los comportamientos se realizará a partir de la jugada 20, pues las negras alcanzan su máximo en el movimiento 21, y comienza de la jugada clave (considerada por Kotov) *24.Ba7* muestra un claro descenso en la entropía de Unzicker ( $\Phi < 0$ ), que en comparación con el comportamiento de Karpov ( $\Phi > 0$ ), es un distanciamiento considerable, del cual Unzicker no se recupero. El análisis muestra una reducción en las opciones de Unzicker para esta jugada, evaluación del movimiento que es apoyado por el análisis de Kotov, quien menciona al principio de la sección que esta jugada limita la entrada de las torres negras hacia el espacio de las blancas y es señalada como la mejor jugada.

---

<sup>1</sup>Considerando que el bando 1 es de piezas blancas y el bando 2 es de piezas negras.

<sup>2</sup>Tomando en cuenta la jugada siguiente.



**Figura 4.16:** Derivada de los comportamientos evolutivos de la entropía para la partida Karpov-Unzicker (1-0).

En la figura 4.16 se muestra que el comportamiento de Karpov es “constante” en el sentido de que no se presentan fluctuaciones pronunciadas, en comparación el comportamiento de Unzicker resalta valles prominentes en la derivada (señalados con sus movimientos asociados), da la casualidad que dichos valores fueron comentados por Kotov como las jugadas más relevantes de la partida. Para la jugada  $30.f4$  (figura C.1 en la sección C.1) la evaluación de la posición (figura 4.14) resulta en ventaja a favor de las piezas blancas. La derivada del comportamiento para la entropía de Karpov muestra un aumento ( $\Phi > 0$ ). A diferencia de la entropía de Unzicker que obtiene una reducción ( $\Phi < 0$ ), al comparar estos comportamientos se obtiene que Unzicker disminuye sus opciones, es decir, las piezas negras son constreñidas. *Un análisis ajedrecístico señala que Karpov busca la apertura de columnas para propiciar la penetración de sus piezas, aprovechando que ningún caballo enemigo puede acudir a e5 de momento.* En el movimiento  $35...Qe8$  (figura C.2 en la sección C.1) se observa que Unzicker desarrolla con su jugada un aumento de su entropía, por lo cual resulta ser una buena jugada para Unzicker, pero aún mantiene una gran diferencia en la entropía acumulada hasta este

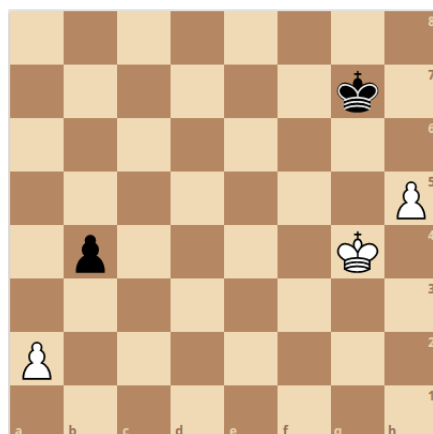
## 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

---

punto de la partida (véase figura 4.14). *Empieza un repliegue por parte de las negras, que posteriormente quedarán sin jugadas útiles.* Finalmente la jugada  $41.Bxf7+$  (figura C.3 en la sección C.1) es un jaque al rey negro. La entropía de Unziker alcanza un mínimo para esta jugada, fenómeno esperado para el jaque que sufren las negras. De igual forma, el cambio en la entropía para Karpov no aumenta demasiado, sin embargo, la entropía acumulada le otorgan la clara ventaja (véase figura 4.14).

Por otra parte el método de la entropía **muestra los efectos producidos para ambos bandos debido a una jugada, permitiendo identificar las jugadas clave**, de una forma más sencilla.

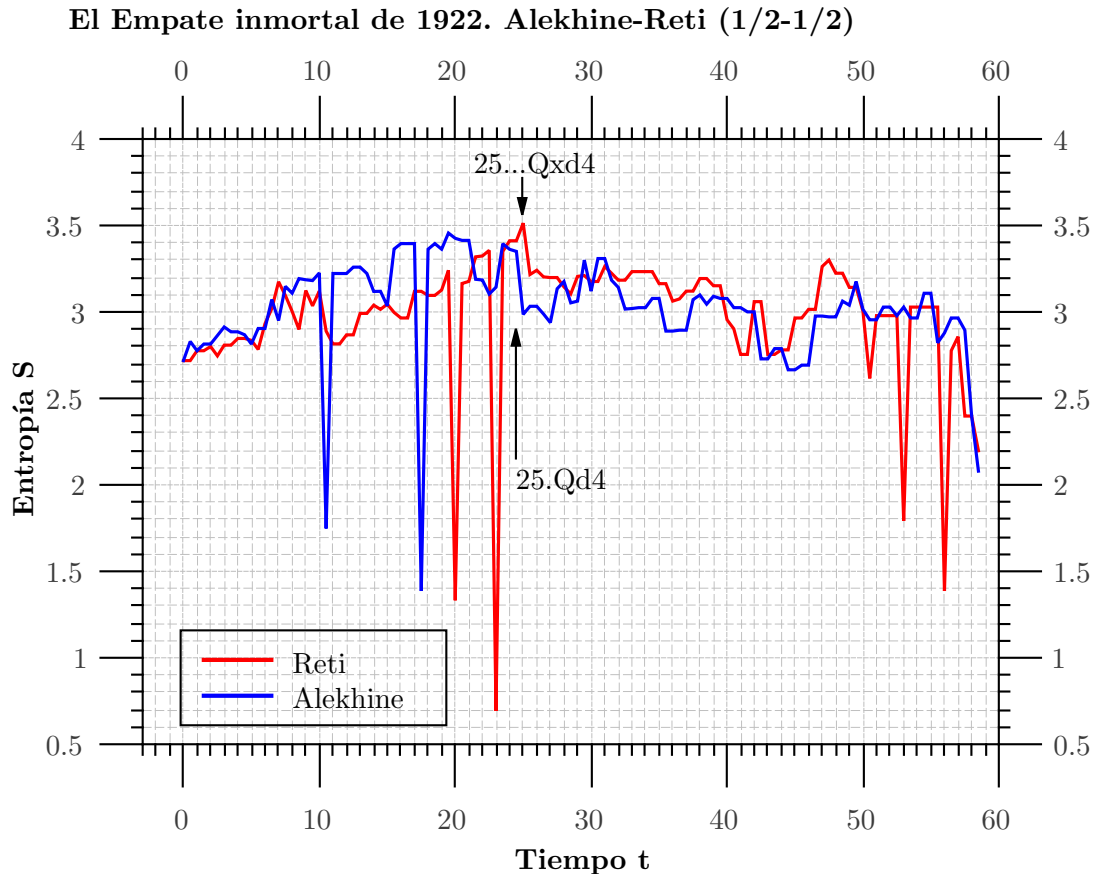
### 4.2.2. El empate inmortal.



**Figura 4.17:** Tablero en el final de la partida Alekine-Reti (1922). En este momento de la partida el valor de la ventaja total 0.3 peones, y la diferencia de entropía acumulada es  $\varpi = 2.83 \text{ nat} * t$ .

Hay dos razones para que la partida entre Alekine y Reti sea un gran juego (véase la partida en el apéndice C.2), primero las tácticas agudas y precisas mostradas por ambos lados entre los movimientos 11 y 23. Segundo, el excelente juego posicional activo con el que Reti logra salvar un empate en un final muy inferior.

La partida se ha inmortalizado por el final (figura 4.17) que se ha celebrado como el "Sorteo inmortal" desde que se jugó. La razón de ser nombrado como "sorteo" es debido a que las piezas blancas no pueden forzar a las negras a salir de la esquina, así que debe ir por el peón negro "b", pero luego el rey negro regresa a tiempo para cerrar al rey blanco en el centro. El rey negro no necesita llegar a  $a8$  ya que  $60.Kf5 Kh6$   $61.Ke5 Kxh5$  lleva al rey blanco a estar atrapado en  $a8$  ... o el rey negro llega allí. Si el peón de la columna "h" estuviese en  $h4$  para el movimiento descrito por la figura 4.17, entonces las blancas ganan.

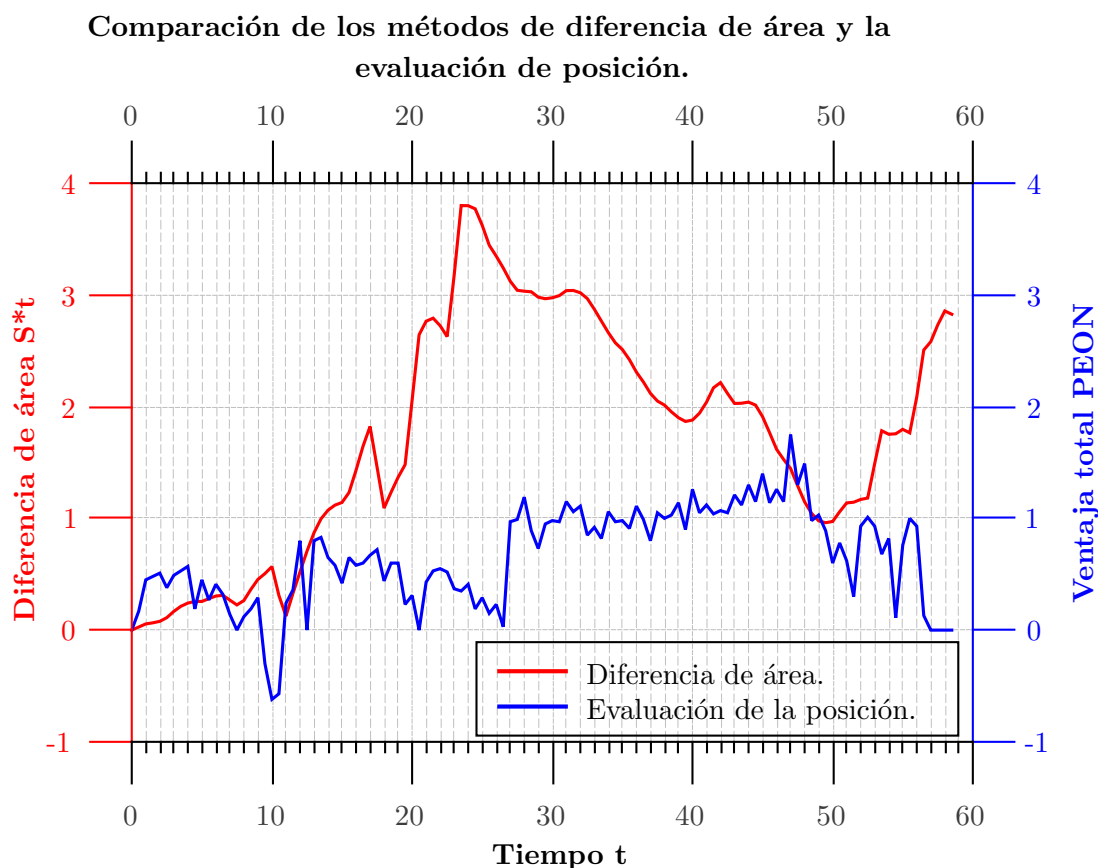


**Figura 4.18:** Evolución de la entropía a lo largo de la partida Karpov-Unzicker (1-0).

El comportamiento de los contrincantes en términos de la entropía (figura 4.18) muestra con claridad el párrafo introductorio anterior, pues señala las jugadas mencionadas entre los movimientos 11 y 23 donde ambos contendientes dan dos jaques al contrario. También quedan nombradas las jugadas donde se intercambian ambas damas, provocando un largo intercambio de piezas.

El comportamiento de ambos contendientes no se bifurca o separa en uno con mayores valores de entropía que otro, situación que va acorde al resultado. El criterio de máximos muestra que las blancas tienen su máximo en la jugada 20 de blancas, y las piezas negras lo tienen en la jugada 25 de negras, por lo que solo hay una diferencia de 5 jugadas (ó 11 movimientos). Al ser una diferencia notable, el criterio puede estar dando la relevancia del juego a las piezas negras. Sin embargo, al analizar el comportamiento por diferencias de entropía acumulada, se obtiene una situación diferente.





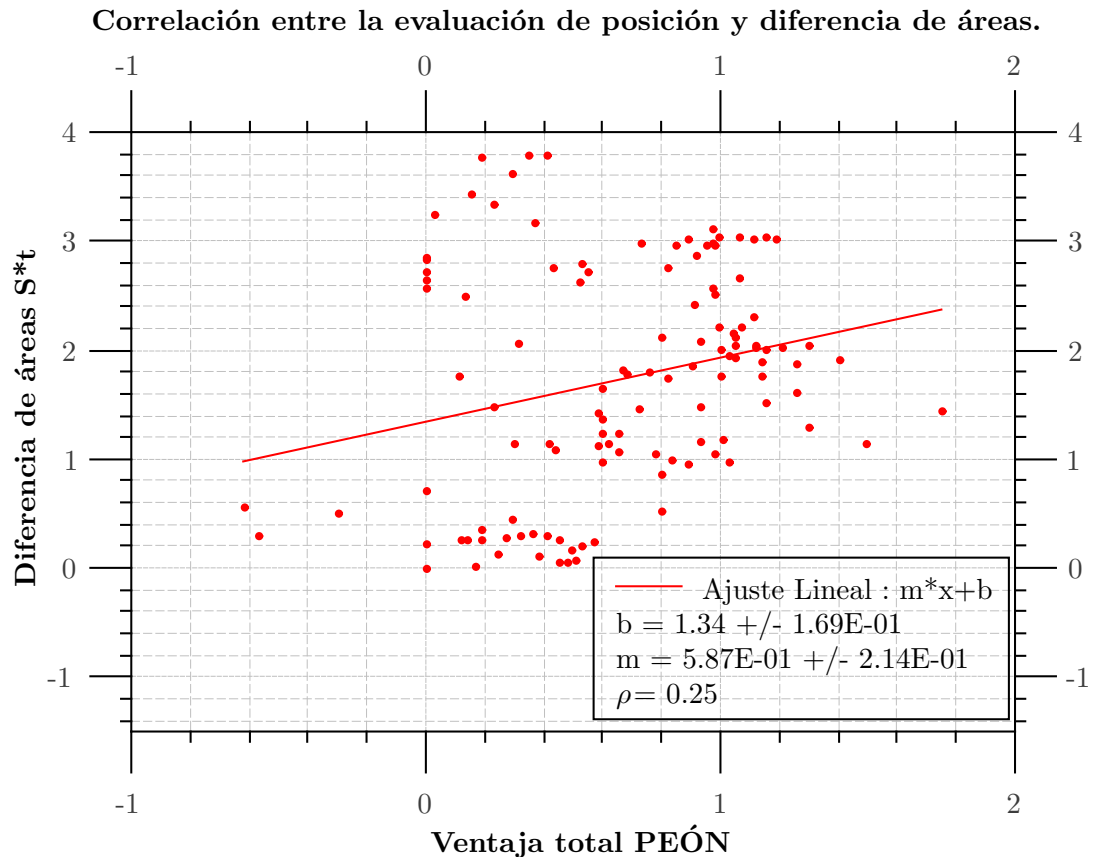
**Figura 4.19:** Comparación de la evaluación de posición, y la diferencia de áreas. Alekhine-Reti (1/2-1/2).

|                    | Alekhine | Reti   |
|--------------------|----------|--------|
| $\omega (nat * t)$ | 176.86   | 174.03 |

**Cuadro 4.2:** Entropía acumulada para la partida Alekhine-Reti.

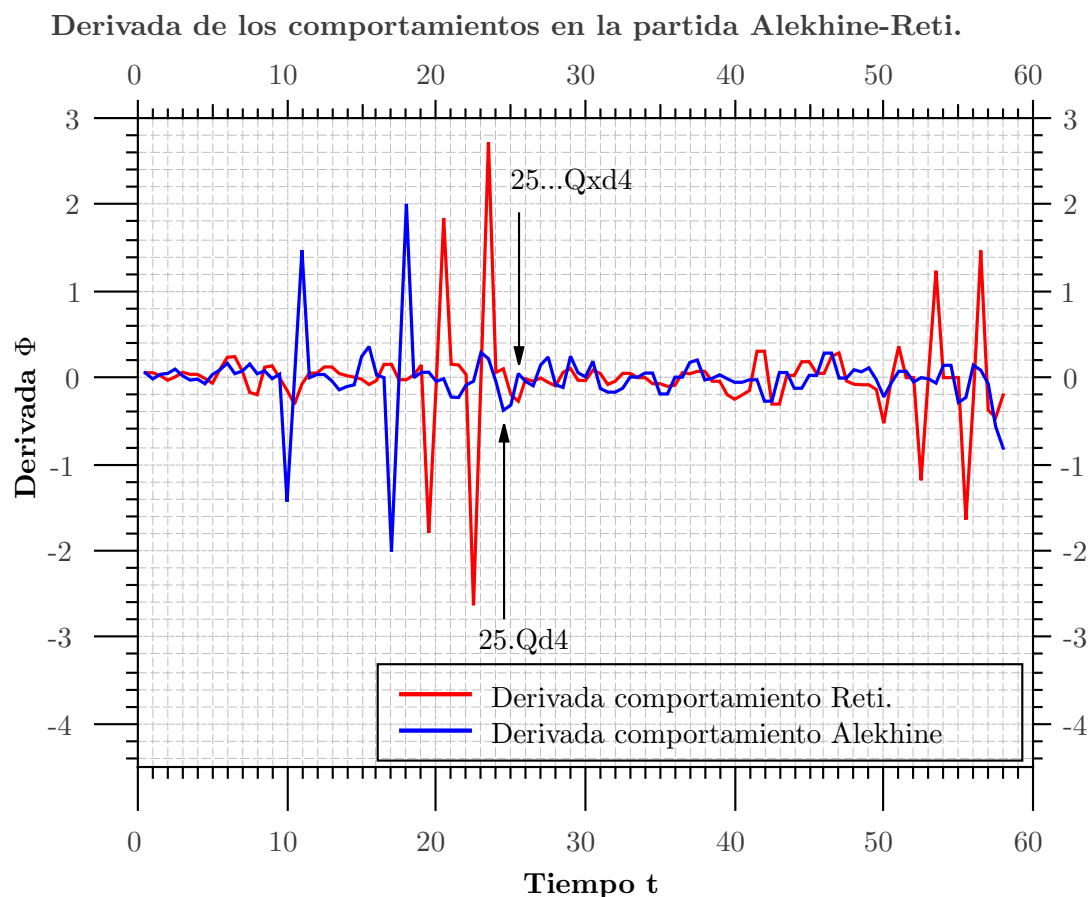
A diferencia con la partida anterior de Karpov-Unziker (1-0), la diferencia de la entropía acumulada presenta un máximo al rededor de la jugada 25, donde Alekhine tiene la delantera respecto a este parámetro, es por ello que el resultado de máximos no queda corroborado por este segundo parámetro. La situación no es controversia o error del método, simplemente el resultado de máximos indica que pese a la oposición de su oponente Reti continua su proceso de aumentar sus opciones en el juego. O Alekhine desarrolla una oposición tardía, o poco efectiva. La diferencia de los valores

para la entropía acumulada en toda la partida es de  $2.83 \text{ nat} * t$  por lo cual se tiene una diferencia del 1.6% al valor total, entonces se concluye que son similares, corroborando el empate.



**Figura 4.20:** Correlación de la evaluación de posición y la diferencia de áreas. Alekhine-Reti (1/2-1/2).

Para este caso en particular la figura 4.20 muestra una correlación pobre entre los métodos de la diferencia de entropía acumulada y el de ventaja total, pese a que se observa concordancia con los nodos. Esta discrepancia puede ser explicada por la disparidad entre la alineación de los máximos para la jugada 25. Además el método propuesto para la entropía muestra claramente el descenso provocado por la serie de intercambios de piezas que se presenta a partir de la jugada 25 hasta la 50, que trae como resultado la aniquilación de todas las piezas mayores. El método de ventaja total insiste en otorgar una ventaja de un peón (a dos peones) entre las jugadas 25 y 50. La veracidad de la ventaja de dos peones es cuestionable considerando el desenlace, sin embargo, el método por diferencia de entropía acumulada muestra como Alekhine pierde la supremacía del juego a medida que Reti se apodera de sus piezas.



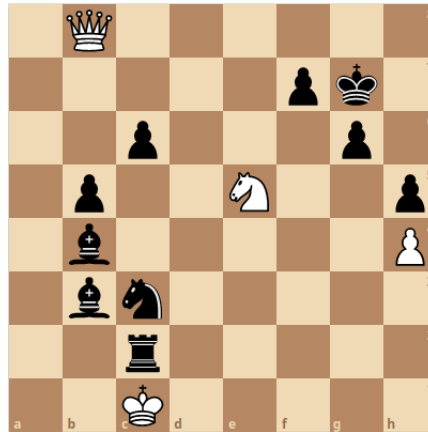
**Figura 4.21:** Derivada de los comportamientos evolutivos de la entropía para la partida Alekhine-Reti (1/2-1/2).

La derivada de ambos comportamientos (figura 4.21) muestra las jugadas relevantes de la partida, antes de la jugada 25 ya se han realizado cuatro jaques, dos al rey blanco que limitaron poco las opciones de las piezas blancas, dos al rey negro que limitó las opciones del bando negro en mayor medida que el anterior. Sin embargo, la jugada 25 resultó de enorme interés pues es la jugada que antecede un comportamiento monótono de fluctuaciones que alteraron de igual forma a ambas derivadas. Esta situación propició que la entropía acumulada de ambos se acercara tanto que el método le otorgase la confirmación del resultado de empate.

En la figura 4.21, la jugada  $25.Qd4$  (figura C.4 en la sección C.2) reduce las opciones de las piezas blancas y aumenta poco las opciones de las piezas negras. Posteriormente la jugada  $25...Qxd4$  (figura C.5 en la sección C.2) reduce las opciones de las piezas negras y aumenta poco las opciones de las piezas blancas. El comentado intercambio de damas puede ser el precursor de la inmortalidad de la partida, ya que ambas jugadas ampliaron las opciones de su oponente y redujeron las propias, que como se ha visto

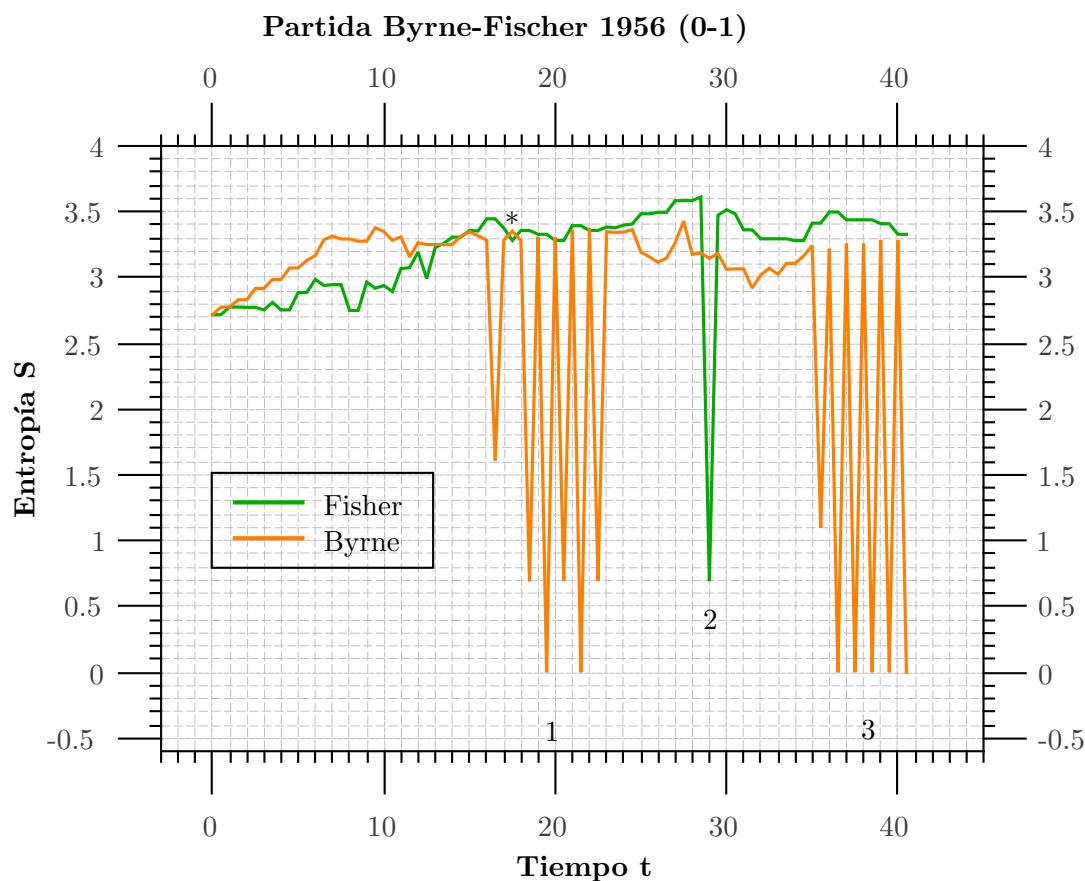
anteriormente es mejor mantener más opciones que el oponente.

### 4.2.3. El juego del siglo XX.



**Figura 4.22:** Tablero en el movimiento final de la partida Byrne-Fischer (1956). La diferencia de la entropía acumulada para el final de partida es  $\varpi = -16.47 \text{ nat} * t$ .

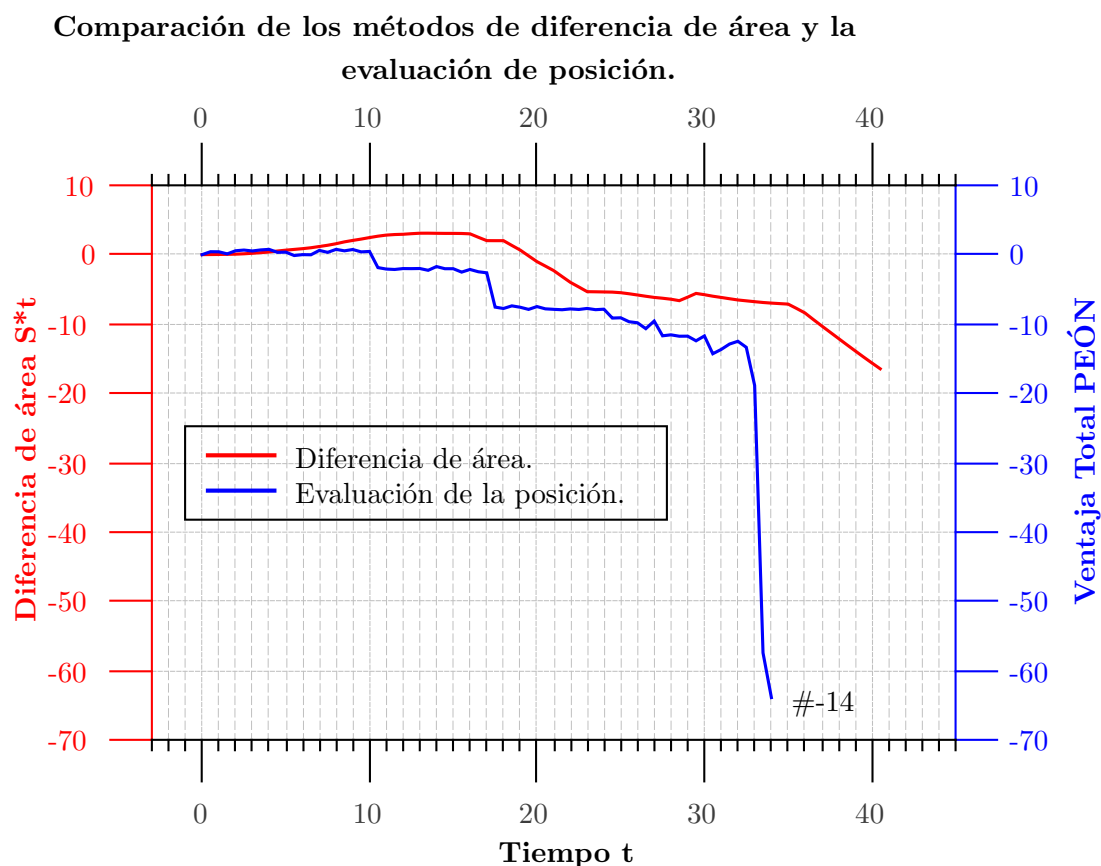
Es conocido por ser el juego del siglo XX. Se jugó entre Donald Byrne, uno de los principales jugadores de ajedrez de Estados Unidos en ese momento, y Bobby Fischer, de 13 años. El juego presenta dos impresionantes sacrificios de Fischer que aplastaron por completo a su oponente de 26 años con la Defensa Grunfeld. El motivo por el que se le otorga la condición de “el juego del siglo XX” es por la decisión que toma Fischer sobre que debiera hacer al respecto del ataque a su dama. El movimiento del que se habló en todo el mundo, Fischer escoge sacrificar la dama  $17...Ae6!!$  (señalada por un asterisco en la figura 4.23).



**Figura 4.23:** Evolución de la entropía a lo largo de la partida Byrne-Fischer (0-1).

La figura 4.23 se muestra la evolución de la entropía para ambos contendientes, el criterio de la bifurcación muestra que los comportamientos entre ambos se separan a partir de la jugada 23 a 25, esto sin considerar el primer bloque de jaques que de igual forma reduce la entropía de Byrne, sin embargo, cada movimiento de las piezas blancas devolvía la entropía a los valores previos al jaque razón por la cual es cuestionable tomar en cuenta esta situación como indicio de la bifurcación.

El criterio de máximos señala que Byrne alcanza el máximo de entropía en la jugada 28 de blancas, a su vez Fischer alcanza su máximo gracias a una jugada de Byrne 29. *Qd8+*. El criterio por diferencia de tiempo de una jugada indica un empate, pero es desmentido por el resultado final y la diferencia de entropía acumulada.



**Figura 4.24:** Comparación de la evaluación de posición, y la diferencia de áreas. Byrne-Fischer (0-1).

|                    | Byrne  | Fisher |
|--------------------|--------|--------|
| $\omega (nat * t)$ | 113.09 | 129.56 |

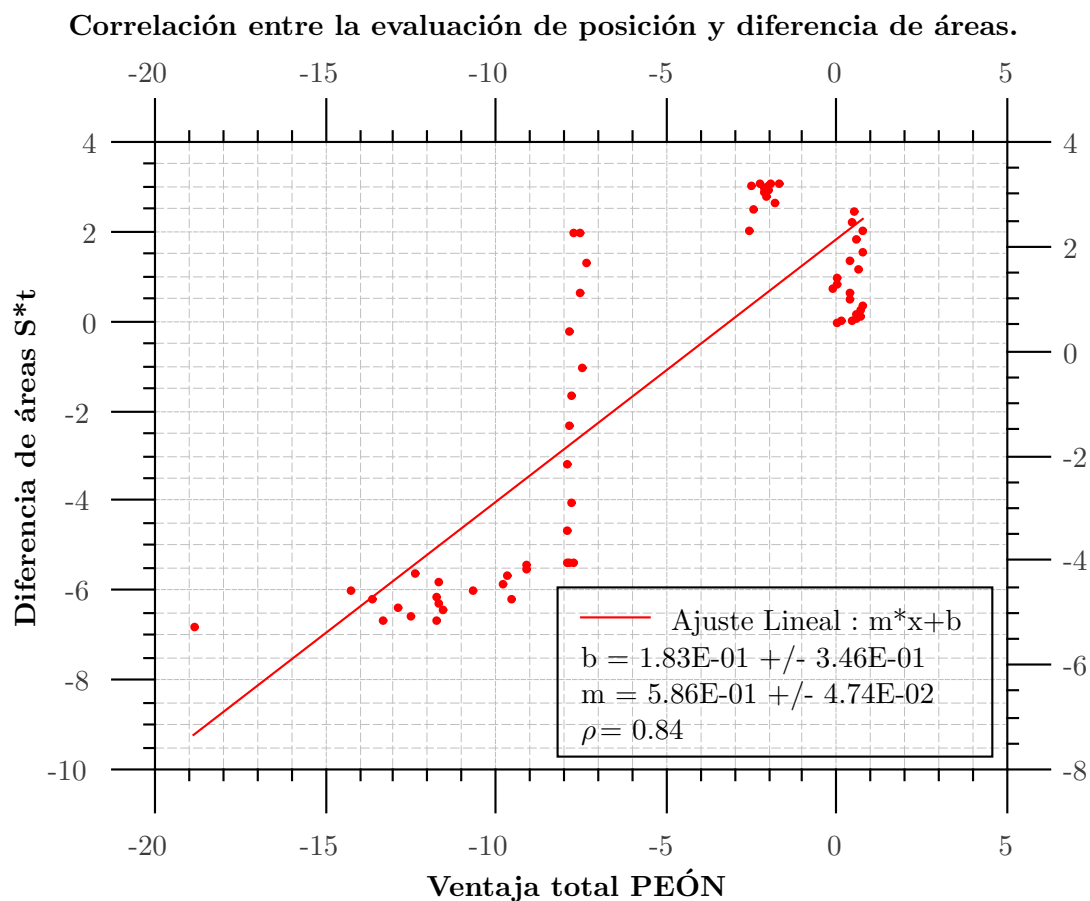
**Cuadro 4.3:** Entropía acumulada para la partida Byrne-Fischer.

La figura 4.24 compara la diferencia del área de ambos contendientes contra la evaluación de posición, ambas comparten la tendencia en la ventaja de las piezas negras. Sin embargo, la evaluación de posición que otorga **Stockfish 9 64 POPCNT** presenta una ventaja adicional al señalar con anterioridad el número de movimientos necesarios para obtener la victoria y de que bando es esta ventaja (en la figura 4.24 señalada con #-14<sup>1</sup>). Esta proyección es obtenida debido a que el motor de ajedrez se apoya de una

<sup>1</sup>Indica que son necesarios 14 movimientos de piezas negras para que estas ganen.

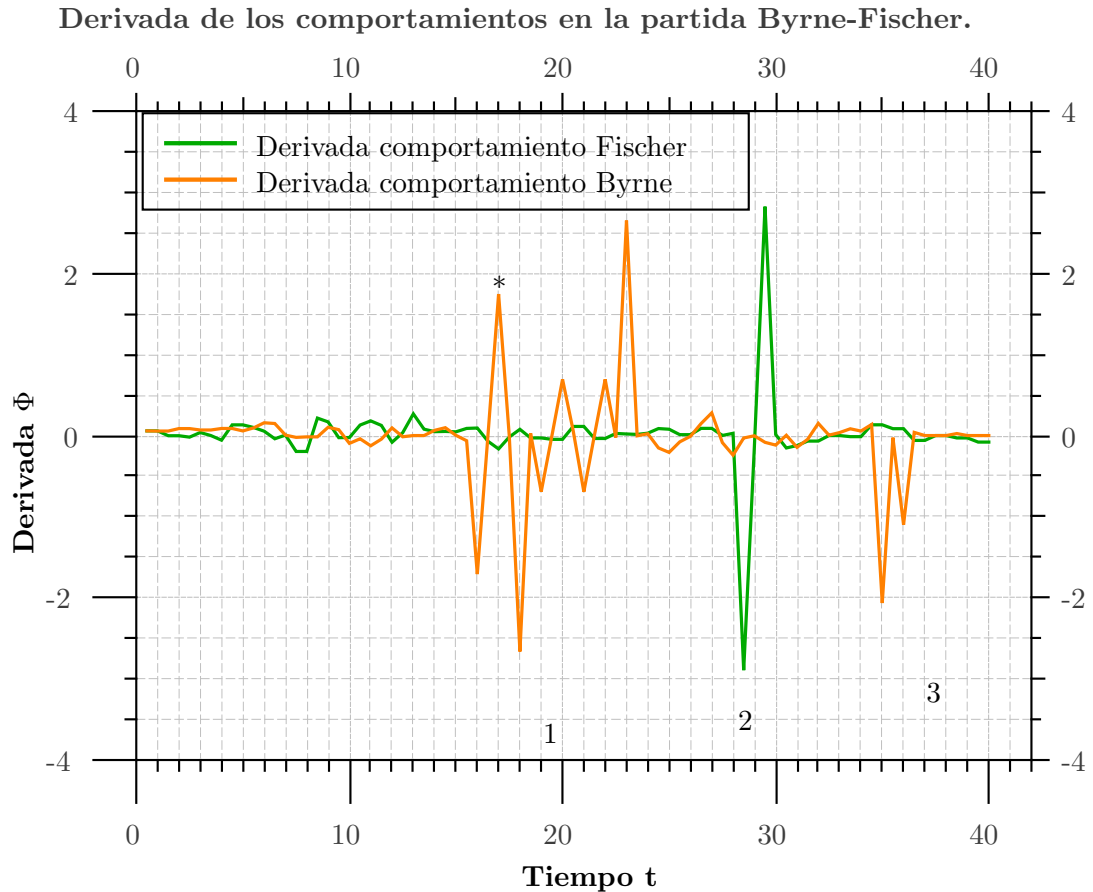
#### 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

base de datos de finales, con el cual puede realizar esta predicción.



**Figura 4.25:** Correlación de la evaluación de posición y la diferencia de áreas. Byrne-Fischer (0-1).

La figura 4.25 muestra que la correlación entre ambos métodos para el análisis de la partida entre Byrne y Fischer es muy buena, ya que la pendiente del ajuste lineal es positivo, este no interfiere con el signo y esta acorde a la tendencia mostrada por ambos métodos que dan la ventaja a Fischer.



**Figura 4.26:** Derivada de los comportamientos evolutivos de la entropía para la partida Byrne-Fischer (0-1).

Finalmente la derivada de los comportamientos da muestra de las jugadas más relevantes de la partida, en este sentido se encuentran tres bloques y un punto relevante para analizar. Principiando con la famosa jugada del sacrificio de dama por parte de Fischer (señalada por un asterisco en la figura 4.26) se observa que el movimiento *17...Be6!!* (figura C.6 en la sección C.3) trae como consecuencia un pico positivo para las piezas blancas y una derivada negativa pero no muy pronunciada a comparación del efecto proporcionado a la derivada de las blancas. El movimiento siguiente de las blancas dando captura a la dama (*18.Bxb6*) provoca en la derivada una disminución considerable que es capitalizada por Fischer y pronunciar aún más esta caída de la derivada (movimiento *18...Bxc4+*). Al mismo tiempo Fischer aumenta el valor de la derivada a lo largo de estos dos últimos movimientos, como consecuencia aumentan sus opciones en tan solo tres movimientos.

El primer bloque de jaques señalados por el número uno, muestra que entre las jugadas 15 y 23 Byrne tuvo un comportamiento oscilatorio que le permitía recuperarse de las



#### 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

---

jugadas de Fischer, ante esto Fischer continua aumentando sus opciones.

El segundo bloque es el jaque a Fischer del cual se recupera rápidamente. El tercer bloque de jaques hacia Byrne (movimientos del 35 al 41), a diferencia del primer bloque, muestra un comportamiento no oscilatorio, mostrando que de este segunda ofensiva no se logró recuperar e incluso para los últimos movimientos se tiene una derivada nula para Byrne. Es decir, su entropía se mantiene en cero debido a que las blancas solo tienen una opción posible, terminando completamente dominado hasta su final por jaque mate.

## Conclusiones

---

*El mundo entero puede encontrarse en cada pueblo y en la magia de este pequeño lugar incluso los más grandes eventos del mundo se reflejan.*

Heinrich Böll

En esta tesis se define una entropía original que no tiene precedentes, desarrollada para el estudio específico del ajedrez orientado a la evaluación de las partidas. Aunque el **concepto de entropía** es utilizado por los físicos, siendo Boltzmann y Gibbs quienes relacionaron la cantidad “entropía” con la *probabilidad de encontrar una cierta configuración, en un sistema*. En este trabajo se construye una entropía del ajedrez a partir de la distribución que tiene la movilidad del bando analizado. Son los distintos movimientos de las piezas (movilidad) y la probabilidad de que ocurran, quienes desarrollan dichas configuraciones y dan sentido a la entropía.

Otro aspecto original es la implementación de una base de datos elaborada por jugadores azarosos, los cuales son generados por computadora mediante el programa “Generador de partidas de ajedrez al azar” desarrollado por La Morsa Software Co. 2013, este programa realiza movimientos válidos para ambos jugadores y las jugadas se eligen de un listado de movimientos posibles y se seleccionan al azar con igual probabilidad. El análisis de estos jugadores permiten utilizarlos como un grupo de control, puesto que sólo realizan movimientos válidos, lo que permite observar la diferencia en el comportamiento cuando existe una estrategia u oposición.

En el caso más general los jugadores humanos tienen un mejor aprovechamiento de las primeras jugadas para aumentar su entropía a comparación de los jugadores azarosos, debido a que los jugadores humanos poseen la ventaja del aprendizaje sobre el juego, en contra parte, los jugadores azarosos realizan su partida de forma aleatoria y por ende, sin ninguna estrategia definida lo que ocasiona su baja entropía en la apertura.

La evolución de la entropía muestra que entre el movimiento 20 al 30 comienza el cambio del comportamiento creciente a uno decreciente. La magnitud del cambio discrimina los distintos resultados de la partida, es decir, estadísticamente se encuentra que en el “medio juego” se ordena jerárquicamente el nivel del jugador al relacionarlo con su entropía.

Este cambio del comportamiento se debe a la pérdida de entropía, para los jugadores

## 5. CONCLUSIONES

---

humanos es debido al conflicto existente en contra de su oponente, al llevar a cabo estrategias de oposición. Estas oposiciones pueden ser capturas y eliminación de formaciones con piezas (o estructuras). La pérdida de entropía implica una disminución de las opciones, es decir, el jugador es limitado.

Las reglas del ajedrez exigen que la movilidad de un bando coincida con la movilidad del contrincante para poder realizar una captura. **Para ganar** se requiere que la movilidad del bando coincida con la movilidad del rey contrario, sin la posibilidad de huir, donde se alcanza el estado de **jaque mate**. Para los jugadores azarosos, la competencia no existe, ya que no se enfrentan a estrategias de oposición, ni desarrollan alguna, por ello tienen un proceso lento para el decaimiento de la entropía, ya que el estado aleatorio de los movimientos eventualmente realizará las jugadas de capturas o fractura de estructuras. Corroborando la máxima del ajedrez: “el objetivo del ajedrez, es el desarrollo de la **ofensiva** para obtener el fin... *capturar al rey contrario*”.

Los tres casos analizados permiten concluir que el comportamiento evolutivo de la entropía ( $S$ ) permite visualizar el resultado de la partida al percatarse de la existencia de una bifurcación de los valores. De existir, muestra una condición favorable, en términos de ganar la partida, para el bando con valores de entropía superiores. De no existir una bifurcación pronunciada se considera que la partida puede terminar en empate.

Al analizar la diferencia de áreas ( $\varpi$ ) entre el comportamiento evolutivo de ambos contendientes, se presentan dos casos posibles: (1) De obtenerse una diferencia de áreas con valor absoluto superior, se establece quien tiene mayores posibilidades de ganar o perder, según sea el signo de la diferencia. (2) De obtenerse una diferencia de áreas con valor absoluto ínfimo aumentan las posibilidades de un empate.

La correlación entre la diferencia de áreas y el método de evaluación posicional es fuerte en los casos donde hay un ganador, pero en el caso del empate inmortal fue deficiente. Si se pretende utilizar como conversión o aproximación de la ventaja total debe ser tomado con cautela esta correlación de valores. Además el ajuste lineal es particular para cada partida.

La derivada del comportamiento evolutivo de la entropía ( $\Phi$ ) muestra las alteraciones a la entropía producidas por las jugadas, en especial muestra las jugadas que pueden considerarse como las más relevantes, pues causaron una mayor alteración. En el caso de los ganadores, las fluctuaciones son pequeñas, a diferencia de los perdedores que es mayor. Para los empates se presentan fluctuaciones mayormente complementarias entre los contrincantes.

Estos tres parámetros ( $S$ ,  $\varpi$ ,  $\Phi$ ) son los más apropiados para determinar o corroborar el resultado de una partida, sin embargo, existe otro parámetro que compara la ocurrencia del máximo para el comportamiento. Este parámetro de máximos también debe de ser tomado con cautela ya que no es definitivo al tomar partidas individuales, a diferencia de la estadística donde señala que los jugadores que los ganadores aumentan sus opciones durante un periodo de tiempo más largo a comparación de los no ganadores. La entropía en función de la movilidad caracteriza apropiadamente el triunfo de los jugadores, los resultados de la partida están clasificados por la entropía en dos. Uno es para los ganadores, el otro son los no ganadores (empate, perdedor, en ese orden de

---

mayor a menor jerarquía).

El análisis para la competencia de una partida de ajedrez, revela **la importante estrategia** que es el mayor aporte al ajedrecista: *el ganador es aquel que optimiza su juego al aumentar sus opciones realizando jugadas óptimas, además provoca la reducción de las opciones del contrincante*, a pesar de ser lógico (u obvio) el enunciado, la diferencia radica en que ahora es posible cuantificar esta situación.

La gran ventaja que muestra la entropía sobre la evaluación posicional es la economía computacional, puesto que los motores de ajedrez usan muchas variables para determinar aproximadamente el valor que ofrecen como evaluación posicional, en cambio, el cálculo de la entropía no sólo depende de una sola variable (**la movilidad**), sino que también proporciona un valor concreto inmutable. Por otra parte, el análisis sobre los movimientos permite identificar cuales son las jugadas clave, además determina la contribución que produce la jugada.

## 5. CONCLUSIONES

---

## Información complementaria.

---

### A.0.4. Notación algebraica.

Las reglas oficiales de la FIDE (2017) lo establece como único sistema de notación oficial en ajedrez desde 1997. Es el lenguaje universal en el que están escritos las bases de datos oficiales, su finalidad es representar la secuencia de movimientos en una partida de ajedrez, partiendo de la posición de cada pieza en el arreglo inicial de una partida, véase figura A.1.

Cada una de las 64 casillas del tablero de ajedrez es identificada con dos caracteres de manera única. El primer carácter identifica la columna de la casilla, y se representa por una de las siguientes letras minúsculas a, b, c, d, e, f, g y h, en ese orden desde la izquierda del jugador con piezas blancas hasta su derecha; el segundo carácter de una casilla identifica su fila y se representa por un número del 1 al 8 (en orden ascendente) desde el lado del jugador de piezas blancas hasta el lado contrario con piezas negras, creando así un sistema coordenado, véase figura A.2.

Cada movimiento de una pieza se indica por la abreviatura del nombre de la pieza en cuestión y la casilla de llegada. No hay necesidad de un guión entre nombre de pieza y casilla, siendo el ajedrez un sistema heterogéneo, cada tipo de pieza se identifica de forma individual por una letra mayúscula asociada, y varía en función del idioma del anotador<sup>1</sup>. Aunque los peones también suelen tener asociada una letra, ésta no es usada para describir partidas en la notación algebraica, basta con anotar su casilla correspondiente.([4] , p. 21-24)

#### A.0.4.1. Movimientos.

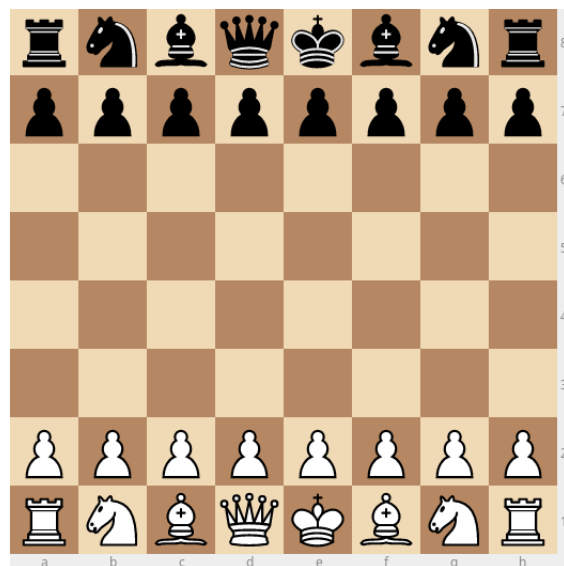
Como ya ha sido mencionado anteriormente, el sistema es heterogéneo al tener diferentes tipos de piezas con características individuales. En particular poseen diferentes

---

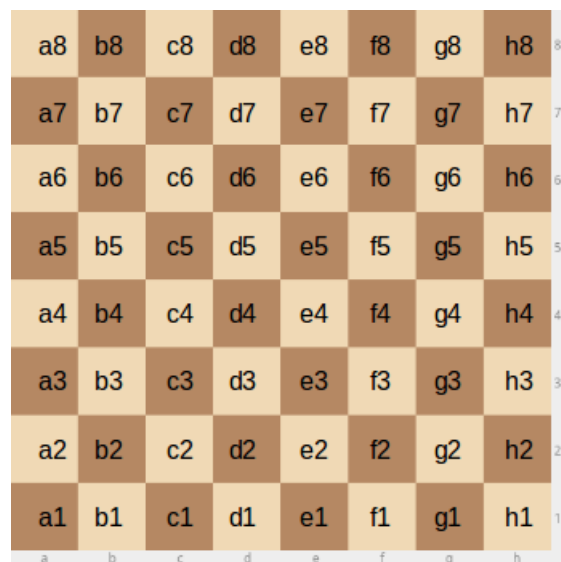
<sup>1</sup>Las partidas de ajedrez utilizadas se encuentran en inglés, por ello se utiliza la letra **K** para el rey, **Q** para la dama, **R** para la torre, **B** para el alfil, **N** para el caballo.

## A. INFORMACIÓN COMPLEMENTARIA.

---



**Figura A.1:** Tablero de ajedrez en arreglo inicial de una partida.



**Figura A.2:** Notación algebraica, localización coordenada de casillas.

---

formas de moverse dentro del tablero así como el modo en el que se capturan las piezas contrarias:

- **Rey:** De uno en uno, es decir, una casilla en todas las direcciones, tal como se muestra en la figura [A.3a](#).
- **Dama:** Tantas casillas como pueda en una misma dirección por filas, columnas y diagonales, tal como en la figura [A.3b](#).
- **Torre:** Tantas casillas como pueda en una misma dirección por columnas y filas, véase la figura [A.3c](#).
- **Alfil:** Tantas casillas como pueda en una misma dirección por diagonales, ejemplificado en la figura [A.3d](#).
- **Caballo:** Se mueve formando una “L” con las casillas que transita, es la única pieza que puede “saltar”<sup>1</sup> por encima de otras piezas, obsérvese en la figura [A.3e](#).

Las piezas anteriores capturan las piezas enemigas que se encuentran en las casillas a las que pueden moverse.

- **Peón:** Siempre avanza y nunca retrocede. En su primer movimiento puede avanzar dos casillas sobre la misma columna, después de una en una. Para capturar lo hace en diagonal, es decir, las casillas laterales de la casilla inmediata siguiente.

Cuando el peón llega a su octava línea enemiga, es promovido automáticamente en cualquier otra pieza a elección del jugador, constate en la figura [A.3f](#).

#### A.0.4.2. Anotación y ambigüedades.

La FIDE (2017) establece que un movimiento básico se escribe con la letra de la pieza que se mueve (omitiéndose para los peones), seguido de la identificación de la casilla destino. Un movimiento de captura se representa con la letra **x** inmediatamente antes de la casilla destino; la captura por parte de un peón incluye, antes del carácter **x**, la letra de la columna de la casilla de origen.

Enroque corto (del lado del rey) es indicado con **0-0**, y enroque largo (o del lado de la dama) queda indicado por **0-0-0**, véase figura [A.4](#).

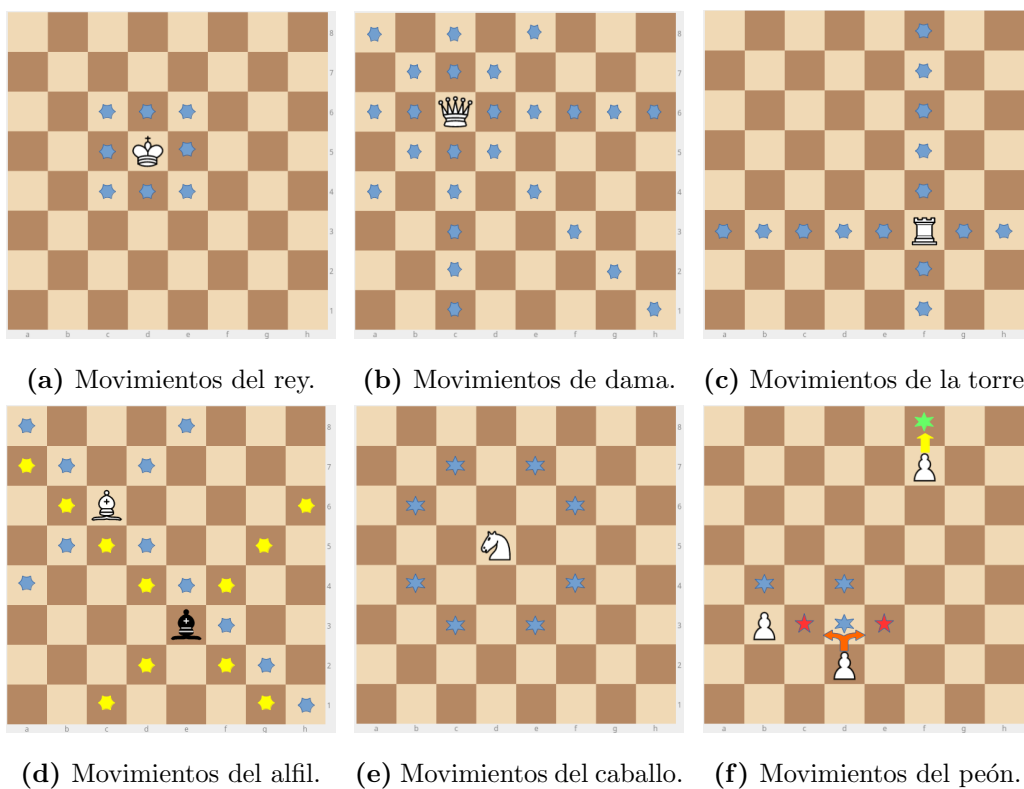
Las capturas al paso no tienen una forma especial, aunque pueden añadirse las siglas **a.p.** al final de la notación. Las promociones se indican incluyendo la letra (en mayúscula) de la pieza promocionada después de la casilla destino. Ejemplo: Si un peón blanco situado en la casilla **g7** se mueve, alcanzando la fila octava y promocionando a una Dama, se escribiría: **g8Q**.

En caso de ambigüedades (donde varias piezas del mismo tipo se pueden mover a la casilla destino), se procede en el siguiente orden:

---

<sup>1</sup>Su movimiento no es bloqueado u obstruido por las demás piezas.





**Figura A.3:** Las estrellas de seis picos señalan las posiciones específicas que puede tomar la pieza. Su dirección va en sentido del mismo color de las estrellas, la estrella verde hace referencia a la promoción automática del peón y por último la estrella roja hace referencia a la forma en que captura el peón (inciso f).



**Figura A.4:** ilustración del movimiento de enroque corto y enroque largo.

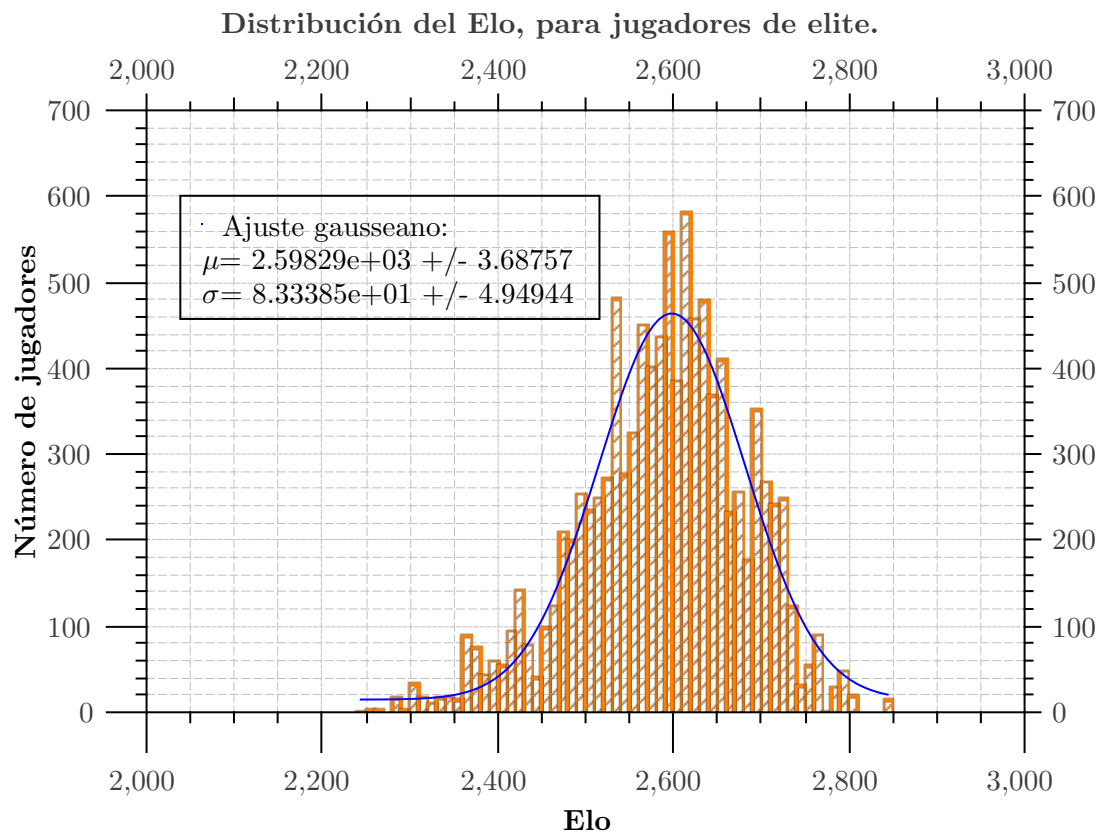
- Si las piezas pueden ser distinguidas por sus columnas originales, entonces la letra de la columna es insertada después de la letra de la pieza. (Sólo cuando el primero falla).
- Si las piezas pueden ser distinguidas por sus filas originales, entonces el número de la fila es insertado después de la letra de la pieza.
- Cuando las filas y las columnas son distintas, se prefiere el primer inciso.

Si un movimiento provoca jaque, se puede añadir opcionalmente el signo + como sufijo del movimiento anotado; si el movimiento es mate se usa # o ++ ([4], p. 24).

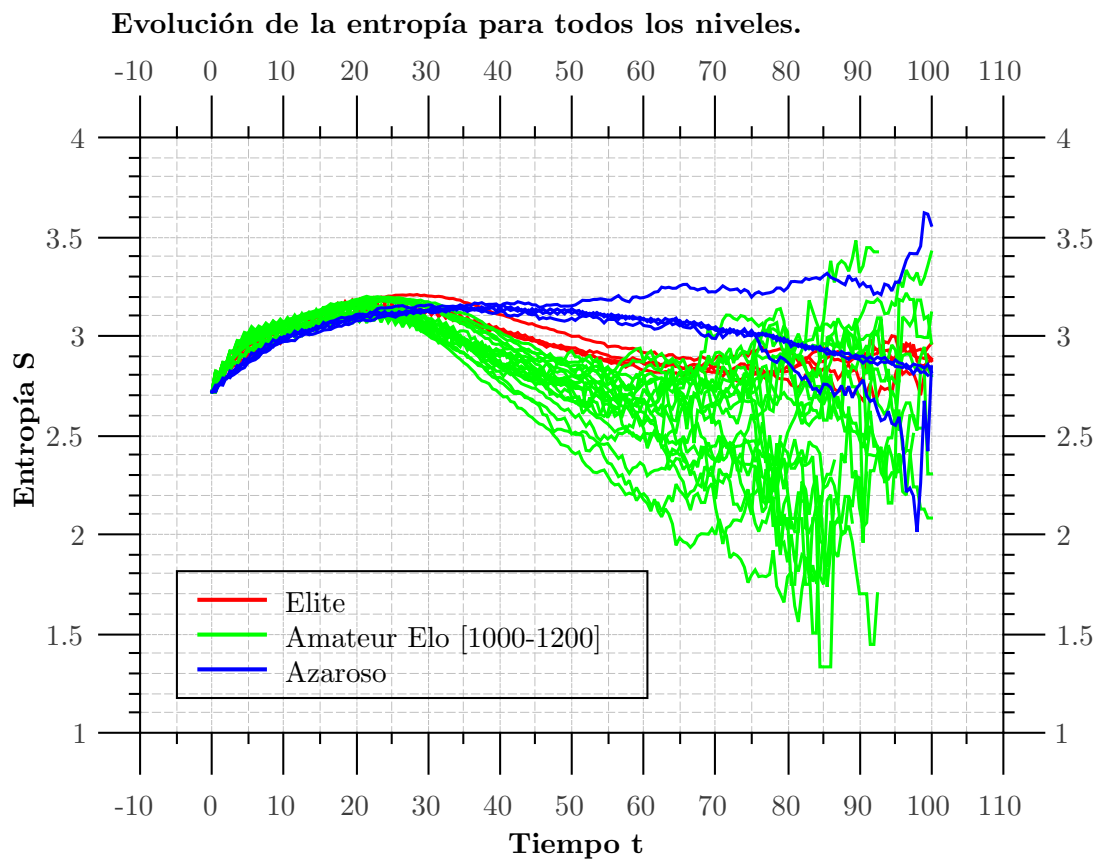
A. INFORMACIÓN COMPLEMENTARIA.

---

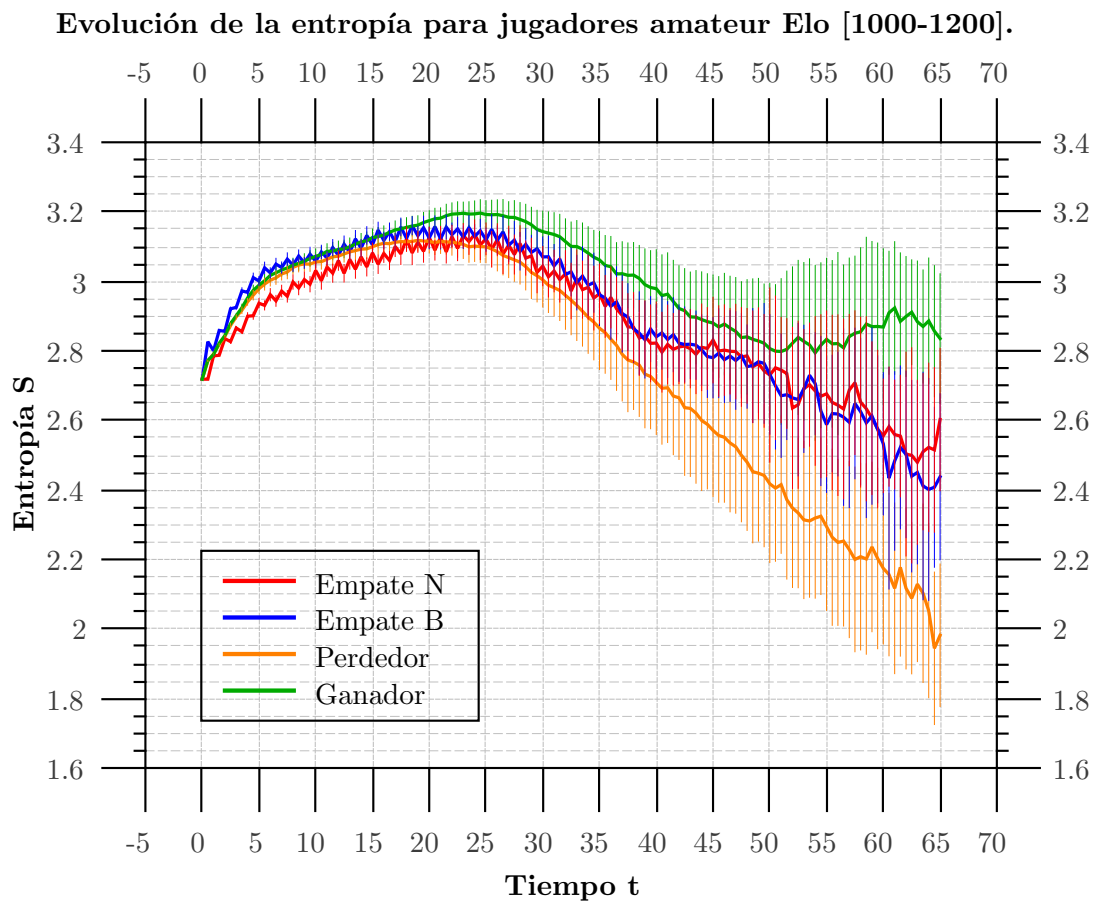
## Imágenes complementarias



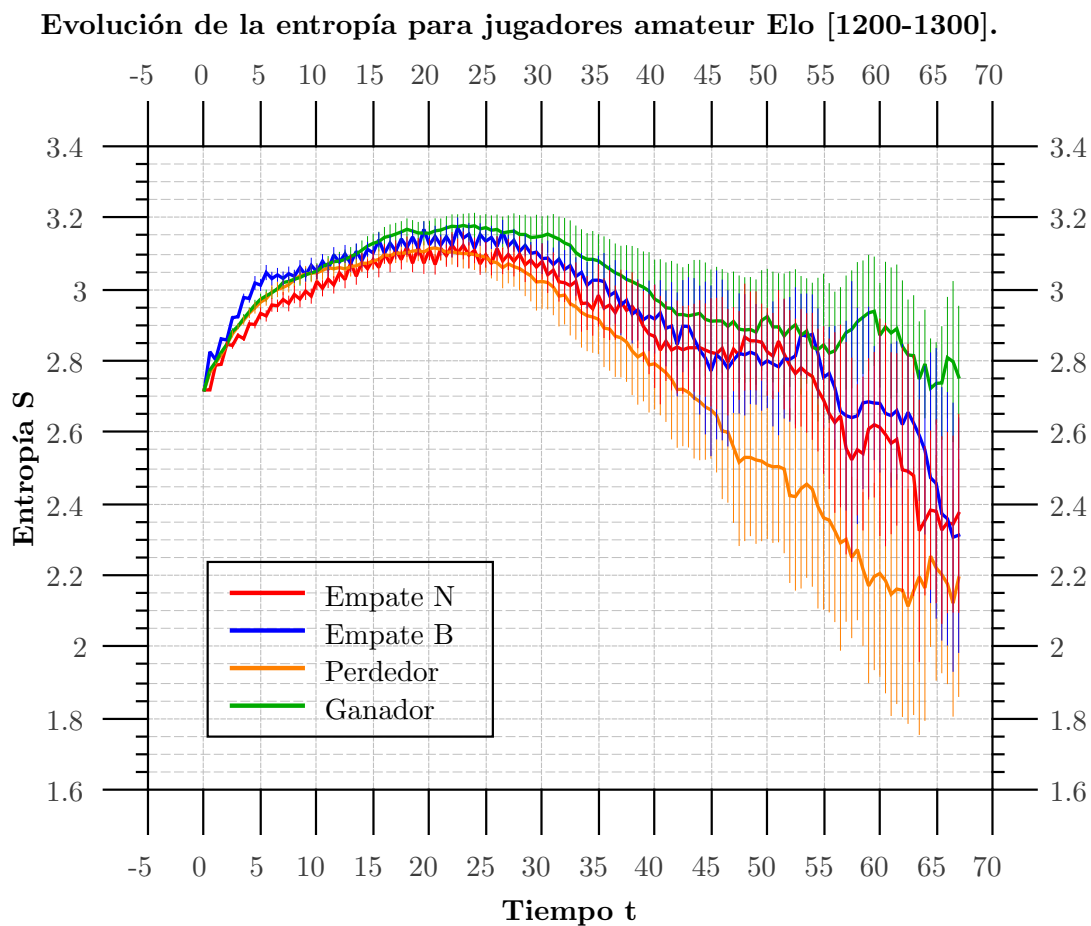
**Figura B.1:** Distribución normal para jugadores de elite por valor de Elo.



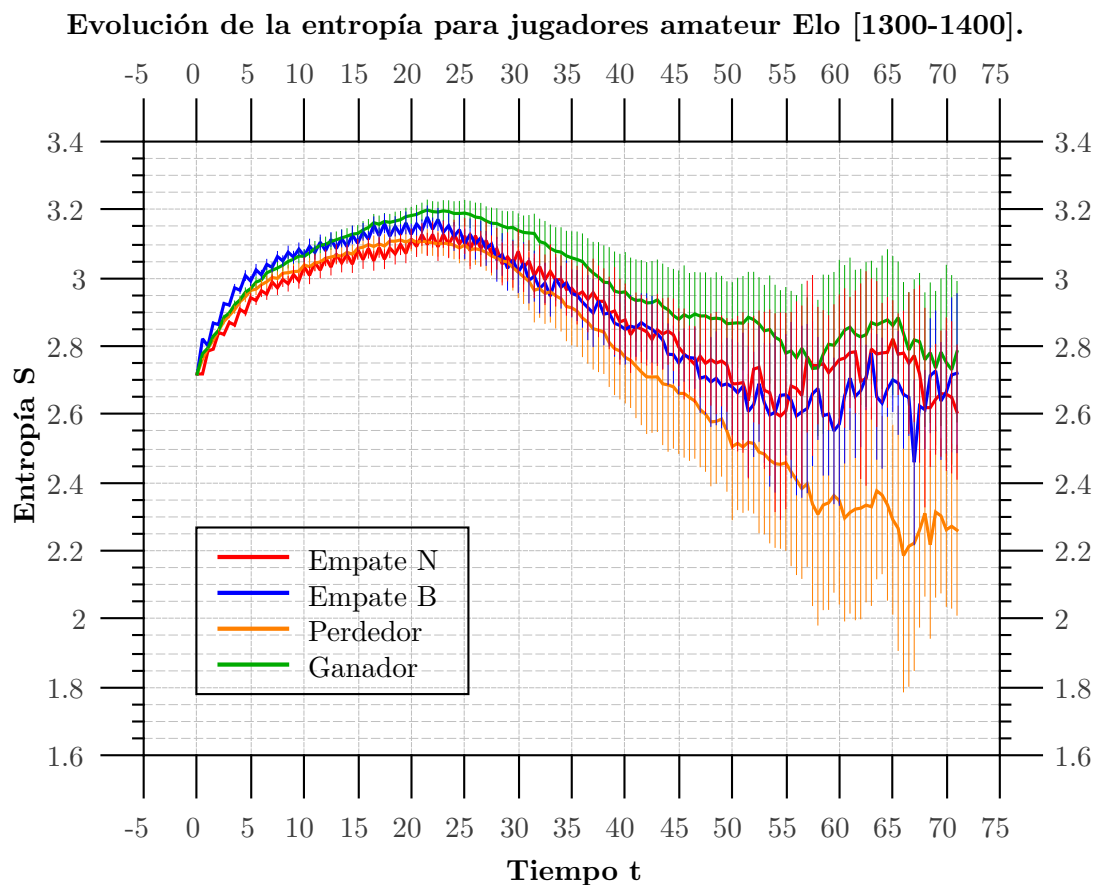
**Figura B.2:** Evolución de las entropías promedio, para toda la base de datos, el código de color clasifica el nivel de los jugadores en cada caso. Se muestra el comportamiento de la entropía hasta el final de las partidas.



**Figura B.3:** Evolución de la entropía para los jugadores con Elo [1000-1200] con varianza.

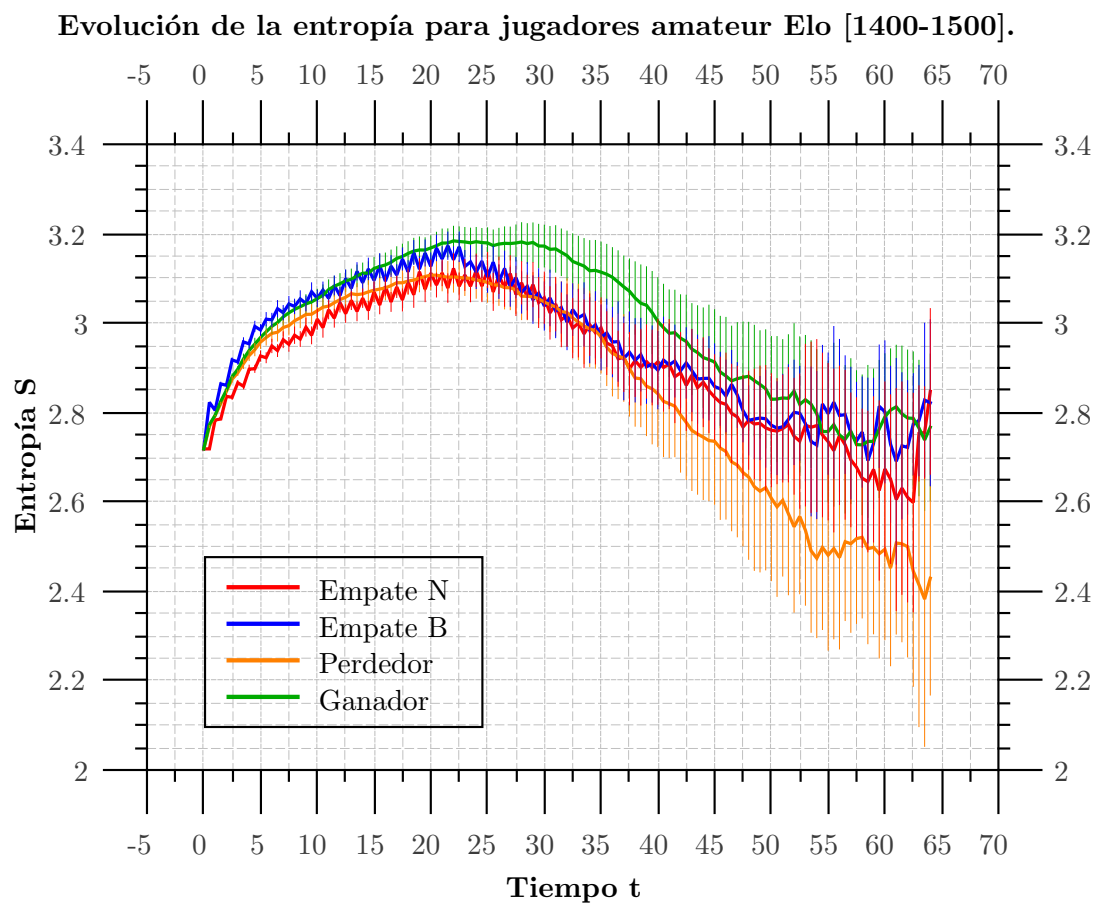


**Figura B.4:** Evolución de la entropía para los jugadores con Elo [1200-1300] con varianza.

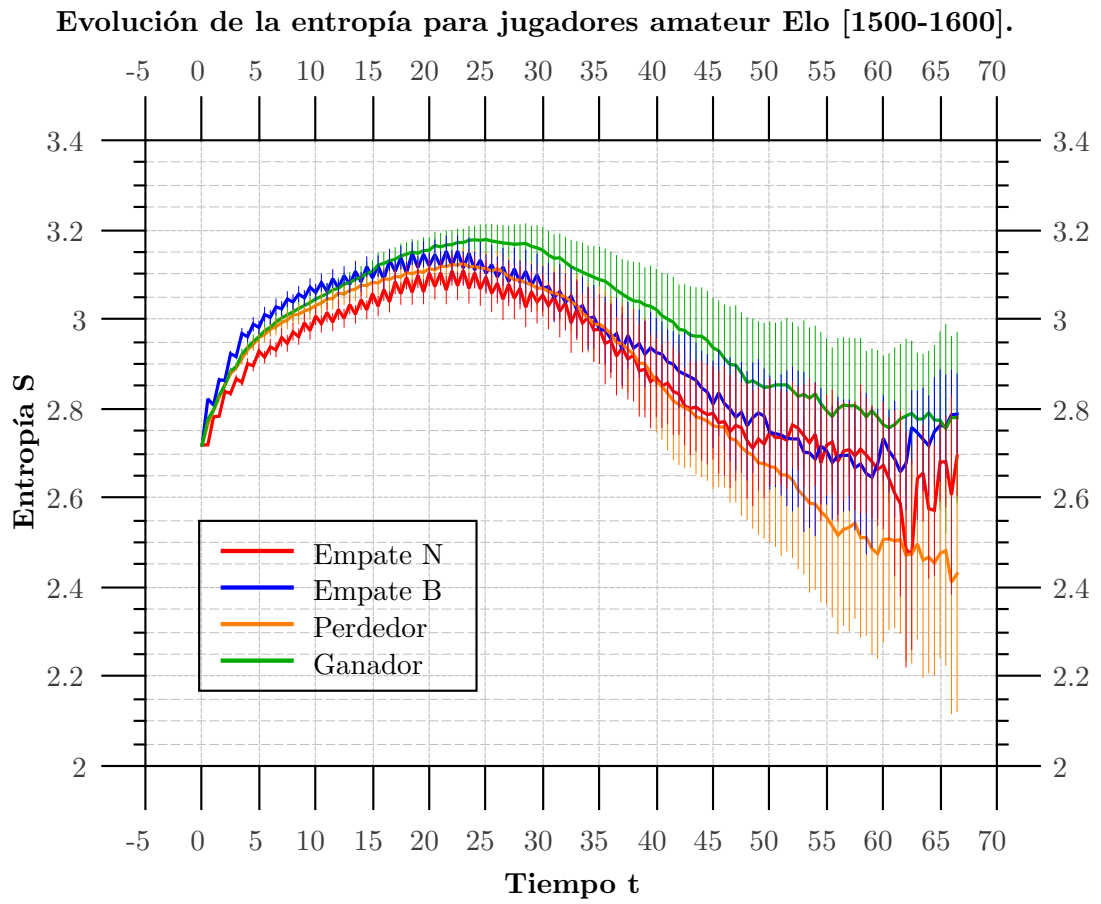


**Figura B.5:** Evolución de la entropía para los jugadores con Elo [1300-1400] con varianza.





**Figura B.6:** Evolución de la entropía para los jugadores con Elo [1400-1500] con varianza.



**Figura B.7:** Evolución de la entropía para los jugadores con Elo [1500-1600] con varianza.

## B. IMÁGENES COMPLEMENTARIAS

---

## Partidas analizadas

---

### C.1. Karpov-Unzicker (1974).

```
[Event "Nice ol (Men) fin-A"]  
[Site "Nice"]  
[Date "1974.???.??"]  
[Round "3"]  
[White "Karpov, Anatoly"]  
[Black "Unzicker, Wolfgang"]  
[Result "1-0"]  
[WhiteElo "2700"]  
[BlackElo "2535"]  
[ECO "C98"]
```

```
1.e4 e5 2.Nf3 Nc6 3.Bb5 a6 4.Ba4 Nf6 5.O-O Be7 6.Re1 b5  
7.Bb3 d6 8.c3 O-O 9.h3 Na5 10.Bc2 c5 11.d4 Qc7 12.Nbd2 Nc6  
13.d5 Nd8 14.a4 Rb8 15.axb5 axb5 16.b4 Nb7 17.Nf1 Bd7  
18.Be3 Ra8 19.Qd2 Rfc8 20.Bd3 g6 21.Ng3 Bf8 22.Ra2 c4  
23.Bb1 Qd8 24.Ba7 Ne8 25.Bc2 Nc7 26.Rea1 Qe7 27.Bb1 Be8  
28.Ne2 Nd8 29.Nh2 Bg7 30.f4 f6 31.f5 g5 32.Bc2 Bf7 33.Ng3 Nb7  
34.Bd1 h6 35.Bh5 Qe8 36.Qd1 Nd8 37.Ra3 Kf8 38.R1a2 Kg8  
39.Ng4 Kf8 40.Ne3 Kg8 41.Bxf7+ Nxf7 42.Qh5 Nd8 43.Qg6 Kh8  
44.Nh5 1-0
```



**Figura C.1:** Tablero de ajedrez en la jugada 30.f4. El blanco busca la apertura de columnas para la penetración de sus piezas, las cuales pueden trasladarse más fácilmente de flanco a flanco que las piezas negras por la ventaja de espacio que la estructura de peones le otorga.



**Figura C.2:** Tablero de ajedrez en la jugada 35...Qe8. A partir de esta jugada y de la siguiente (36...Nd8), el repliegue de las negras es casi total y prácticamente se quedan sin movimientos útiles.



**Figura C.3:** Tablero de ajedrez en la jugada 41.  $Bxf7+$ , jaque al rey negro. Se elimina de esta forma a la pieza defensora más importante de las negras y en las jugadas siguientes el blanco fuerza a las negras a encontrarse en una situación de *zugzwang*, después de la cual las negras se rinden. (NOTA: no hay jaque mate, es victoria por rendición).

## C.2. Alekhine-Reti (1922).

```
[Event "Vienna"]
[Site "Vienna AUT"]
[Date "1922.11.13"]
[EventDate "1922.11.13"]
[Round "1"]
[Result "1/2-1/2"]
[White "Alexander Alekhine"]
[Black "Richard Reti"]
[ECO "C77"]
[WhiteElo "?"]
[BlackElo "?"]
[PlyCount "118"]

1. e4 e5 2. Nf3 Nc6 3. Bb5 a6 4. Ba4 Nf6 5. Nc3 b5 6. Bb3 Bc5
7. Nxe5 Nxe5 8. d4 Bd6 9. dxe5 Bxe5 10. f4 Bxc3+
11. bxc3 O-O 12. e5 c5 13. Ba3 $3 Qa5 14. O-O Qxa3 15. exf6
c4 16. Qd5 Qa5 17. fxg7 Qb6+ 18. Kh1 Kxg7 19. Bxc4 Bb7
20. Qe5+ Qf6 21. Bd3 Rfe8 22. Qh5 h6 23. Qg4+ Kh8
24. Qxd7 Re7 25. Qd4 Qxd4 26. cxd4 Rd8 27. f5 f6
28. Rae1 Rg7 29. Be4 Rxd4 30. Bxb7 Rxb7 31. Re6 Kg7 32. Rxa6 Rc4
33. Rf3 Rxc2 34. h3 Kf7 35. Rg3 Rf2 36. Rg6 Rxf5 37. Rxb6 Kg7 38. Rh4
```

## C. PARTIDAS ANALIZADAS

---

b4 39.Rg4+ Kf7 40.Rg3 Rfb5 41.Rb3 Kg6 42.Kh2 Rc5 43.Ra4  
Rcb5 44.h4 R5b6 45.Kh3 Rb8 46.g3 f5 47.Ra5 Rc8 48.Rf3 Rf6  
49.Kg2 Rc3 50.Ra8 Rxf3 51.Kxf3 Rc6 52.Rb8 Rc4 53.Rb6+ Kg7  
54.h5 Rd4 55.Rc6 Re4 56.Rg6+ Kf7 57.g4 Rxf4 58.Rxf4  
fxg4+ 59.Kxg4 Kg7 1/2-1/2



**Figura C.4:** Tablero de ajedrez en la jugada 25.*Qd4*. En un intento de evitar el avance de la dama negra, las piezas blancas bloquean el peón desprotegido en c4 con la dama, provocando un intercambio de damas.



**Figura C.5:** Tablero de ajedrez en la jugada 25...*Qxd4*. Reti acepta el intercambio y comienza una serie de intercambios de las piezas mayores.

### C.3. Byrne-Fischer (1956).

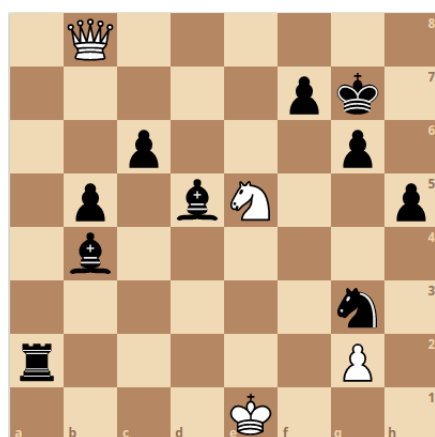
```
[Event "Third Rosenwald Trophy"]
[Site "New York, NY USA"]
[Date "1956.10.17"]
[EventDate "1956.10.07"]
[Round "8"]
[Result "0-1"]
[White "Donald Byrne"]
[Black "Robert James Fischer"]
[ECO "D92"]
[WhiteElo "?"]
[BlackElo "?"]
[PlyCount "82"]
```

```
1.Nf3 Nf6 2.c4 g6 3.Nc3 Bg7 4.d4 O-O 5.Bf4 d5 6.Qb3 dxc4
7.Qxc4 c6 8.e4 Nbd7 9.Rd1 Nb6 10.Qc5 Bg4 11.Bg5 Na4 12.Qa3 Nxc3
13.bxc3 Nxe4 14.Bxe7 Qb6 15.Bc4 Nxc3 16.Bc5 Rfe8+ 17.Kf1 Be6
18.Bxb6 Bxc4+ 19.Kg1 Ne2+ 20.Kf1 Nxd4+ 21.Kg1 Ne2+ 22.Kf1 Nc3+
23.Kg1 axb6 24.Qb4 Ra4 25.Qxb6 Nxd1 26.h3 Rxa2 27.Kh2 Nxf2
28.Re1 Rxe1 29.Qd8+ Bf8 30.Nxe1 Bd5 31.Nf3 Ne4 32.Qb8 b5
33.h4 h5 34.Ne5 Kg7 35.Kg1 Bc5+ 36.Kf1 Ng3+ 37.Ke1 Bb4+
38.Kd1 Bb3+ 39.Kc1 Ne2+ 40.Kb1 Nc3+ 41.Kc1 Rc2# 0-1
```



**Figura C.6:** Tablero de ajedrez en la jugada 17...Be6. El famoso sacrificio de dama que le dio el título “el juego del siglo XX”.





**Figura C.7:** Tablero de ajedrez en la jugada 37...Bb4+. En este momento las negras conducen al rey hacia su final al darle una sola opción para moverse.

## Bibliografía

---

- [1] Ayres, R. (1994). *Information entropy, and progress. A new evolutionary paradigm.* American Institute of Physics., New York, USA.
- [2] Ben-Naim, A. (2012). *Entropy and the second law. Interpretation and Misinterpretationsss. (1st ed.).* World Scientific, Israel. 8
- [3] Capablanca, J. R. (1984). *¿Cómo jugar ajedrez?(1a ed. en español; Romero R., Trad.).* Científico-Técnica, La Habana, Cuba.
- [4] FIDE (2017). Leyes del ajedrez de la fide. pages 1–37. Recuperado 12 de abril del 2019 en <http://feda.org/feda2k16/wp-content/uploads/Leyes-2017.pdf>. 8, 53, 57
- [5] García, L. (2013). *Ajedrez y ciencia, pasiones mezcladas.* Crítica, Barcelona, España. 3
- [6] Hesse, C. (2010). *Expediciones al mundo del ajedrez.* Chessy, España. 3
- [7] Ibero, R. (1977). *Diccionario de ajedrez.* Martinez Roca, Barcelona, España. 2
- [8] Kotov, A. (1998). *Entrene como un gran maestro. (3a ed. rev. en español; F. Amillátegui, Trad.).* Fundamentos, Madrid, España. 33
- [9] Mansilla, R. & Nieto, J. c. (2017). *La termodinámica de los sistemas complejos.* (Primera edición). Colección debate y reflexión., México. 7
- [10] Rifá, J. & Huguet, L. (1991). *Comunicación digital. Teoría matemática de la información, codificación algebraica, criptología. (1a ed.).* MASSON,S.A., Barcelona, España. 7
- [11] Ross, D. (2007). Arpad Elo y el sistema de puntuación elo. Recuperado 29 de octubre del 2019 en <https://es.chessbase.com/post/arpad-elo-y-el-sistema-de-puntuacion-elo>. 13