



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE POSGRADO EN ASTROFÍSICA
INSTITUTO DE ASTRONOMÍA
ASTROFÍSICA TEÓRICA

MECANISMOS DE FORMACIÓN Y CRECIMIENTO DE LOS AGUJEROS
NEGROS SUPERMASIVOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS (ASTROFÍSICA)

PRESENTA:
LAURA OLIVIA VILLEGAS OLVERA

DR. DARÍO NÚÑEZ ZÚÑIGA
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM

INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES
CIUDAD DE MÉXICO
AGOSTO, 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos.

*“Toda historia tiene un final, pero en la vida,
cada final anuncia un nuevo comienzo“*

Christian Bobin

Cuando era niña, me propuse la meta de estudiar el Universo y todo lo que existía en él. Hoy puedo decir que cumplí un sueño, pero en el camino descubrí que aún hay mucho más allá y que aún no he terminado de soñar.

Una vez más, agradezco a mi familia por impulsarme a seguir mi sueño y por acompañarme en este proyecto. También quiero agradecer al Dr. Darío Núñez Zúñiga, por todo su apoyo y por toda la confianza que ha tenido en mí. Y a todos mis sinodales por sus comentarios que contribuyeron para mejorar este trabajo.

A todos aquellos profesores y amigos que formaron parte de esta etapa de mi vida, les deseo largos días y gratas noches, digo gracias.

Índice general

Resumen.	1
1. Introducción.	3
1.1. Agujeros negros estelares.	5
1.2. Estrellas de población III.	6
1.3. Colapso directo.	7
1.4. Agujeros negros primordiales.	8
2. Movimiento de las partículas.	10
2.1. Potencial gravitacional.	10
2.2. Ecuaciones de movimiento.	11
2.3. Potencial efectivo newtoniano.	14
2.4. Movimiento geodésico.	17
2.5. Agujero Negro de Schwarzschild.	19
2.6. Potencial efectivo de Schwarzschild.	20
2.7. Componentes de la cuadrivelocidad en una métrica de Kerr.	23
2.8. Derivación de la constante de Carter.	26
2.9. Comparación de los potenciales efectivos.	28
3. Materia alrededor de un agujero negro.	31
3.1. Ecuación de Poisson	31
3.2. Acreción de Bondi.	32
3.3. Distribución esférica alrededor de una masa puntual.	36
3.4. Radio de influencia.	39
3.5. Tasas de Acreción.	43
4. Modelo de movimiento de una partícula	46
4.1. Momento angular No conservativo.	46
4.2. Descripción del código.	50
5. Resultados.	56
5.1. Órbitas Circulares y elípticas.	60
5.1.1. Ejemplo: Sistema Solar.	65
5.2. Modelo que rompe la barrera de potencial centrífugo.	68
5.3. Órbitas con momento angular azimutal.	72

Resumen.

Los agujeros negros son de los objetos más impresionantes del universo, debido a que su campo gravitatorio es tan fuerte que nada puede escapar de él, ni siquiera la luz [1]. De acuerdo a la teoría de la relatividad general de Einstein, los agujeros negros son objetos que están caracterizados por su masa, su momento angular y su carga eléctrica [2]. La primer evidencia de la existencia de los agujeros negros es a partir de las observaciones ópticas y en rayos X del sistema binario Cygnus X-1 [3]. Este sistema esta compuesto por una estrella visible ligada gravitacionalmente con un objeto compacto oscuro [4]. En la Galaxia se han encontrado diversos sistemas binarios en los cuales uno de los objetos tiene masa mayor a $3 M_{\odot}$, por lo que es considerado como candidato de agujero negro [5]. Este tipo de agujeros negros se les conoce como agujeros negros de masa estelar. Por otro lado, los estudios de la región central de las galaxias con núcleos activos nos indican que existen agujeros negros con un rango de masas de $10^6 - 10^{10} M_{\odot}$, llamados agujeros negros supermasivos [6]. En la actualidad, sabemos que la mayoría de las galaxias contienen este tipo de objetos y que su evolución de ambos esta vinculada [7].

La importancia del estudio de lo agujeros negros nos ayuda a comprender muchos de los procesos fundamentales que ocurren en el Universo. Por ejemplo, el análisis de la formación de los agujeros negros de masa estelar, nos permite comprender las etapas finales de la evolución estelar [8], además la conexión entre los agujeros negros supermasivos y las galaxias en las que se encuentran, la relación entre la masa del objeto central con la masa del bulbo de la galaxia y su velocidad de dispersión, es un tema relevante en los estudios extragaláctico [9].

El análisis de los agujeros negros ha llevado a considerarlos como una especie de aspiradora cósmica que devora todo a su paso, dejando una estela de vacío. Sin embargo, en realidad la materia que rodea a este tipo de objetos, no es fácilmente absorbida gravitacionalmente. Al hacer un análisis, a partir de la mecánica newtoniana, de la dinámica de las partículas bajo la acción de una masa puntual, observamos que el potencial efectivo contiene una barrera de potencial infinita al considerar partículas con momento angular, esto evita que la materia caiga hacia la masa central, debido a que una partícula con momento angular alcanza un radio mínimo, considerado como punto de retorno, y por lo tanto se aleja de la masa central [10]. Por otra parte, si consideramos la caída de materia bajo un análisis de relatividad general, el potencial efectivo deja de tener una barrera infinita y posee un valor máximo de energía [11]. Entonces, las partículas con energía mayor a este máximo caen hacia el centro del potencial, pero no todas las partículas tienen la energía suficiente para alcanzar ese valor máximo y la gran mayoría llegan al punto de retorno y logran alejarse del objeto central. Por lo tanto, la tasa de acreción desde este análisis es muy pequeña. Además, existen otros fenómenos que se oponen a la absorción de materia; como la generación de radiación por el aumento de presión o por el rozamiento de las partículas así como la radiación que ellas emiten [12].

El objetivo del presente trabajo es estudiar los procesos de formación de los agujeros negros supermasivos y realizar un modelo que describa el crecimiento de un agujero negro, a partir de agregar un término efectivo, a nivel de la lagrangiana, que evite la conservación del momento angular y que permita romper la barrera de potencial centrífugo. Dicho modelo es meramente matemático, debido a que queremos obtener una tasa de acreción lo suficientemente grande para que un agujero negro logre crecer hasta convertirse en un agujero negro supermasivo, sin embargo el mecanismo físico se dejará pendiente para futuros trabajos.

El trabajo está organizado de la siguiente manera, cada capítulo cuenta con una parte introductoria de la parte matemática y física utilizada en los resultados y datos relevantes obtenidos en cada uno de ellos. Para empezar en el Capítulo 1 se realizó una breve reseña histórica del estudio de los agujeros negros y el análisis de algunos de los mecanismos de formación de los agujeros negros supermasivos, la conclusión obtenida en este capítulo es la masa inicial que consideraremos para el modelo de crecimiento. En el segundo capítulo, se describe el movimiento de las partículas a partir del análisis del potencial efectivo desde el punto de vista de la mecánica newtoniana, de las geodésicas en relatividad general y el movimiento geodésico en Kerr. Para este último caso describimos una manera simple y directa para encontrar la constante de Carter, necesaria para describir el movimiento de las partículas en este tipo de agujeros negros, esta descripción es útil para el desarrollo del modelo propuesto en este trabajo. La descripción unificada de los tres casos, nos permite determinar cualitativamente la distancia que debemos considerar para nuestros modelos, dado que las diferencias del movimiento de las partículas ocurren principalmente en regiones muy cercanas al agujero negro y a distancias mayores las tres descripciones son relativamente las mismas. En el capítulo 3 consideramos que una semilla de agujero negro formada a épocas tempranas del Universo interactuó mayormente con un halo de materia oscura. El enfoque utilizado es tomando en cuenta la dinámica de la materia visible en presencia del potencial gravitacional creado por la semilla de agujero negro y el halo, esto nos permite obtener una tasa de acreción que compararemos con el caso de acreción radial descrito por Bondi y por Mitchel. En el siguiente capítulo describimos el modelo propuesto en este trabajo donde introducimos una función efectiva en la lagrangiana en términos de una de las coordenadas angulares, de tal forma que rompa con la conservación angular. De igual forma describiremos el método numérico utilizado para la obtención de los resultados. En el capítulo 5, el modelo propuesto nos permite recrear dos casos importantes en la física; el movimiento kepleriano y las órbitas de 5 planetas del sistema solar. Los resultados obtenidos en este capítulo nos permite verificar que al romper la barrera de potencial por medio de la una función efectiva permite la caída de las partículas hacia una masa puntual, y es posible considerar un tiempo de caída menor comparado con la caída radial. Finalmente, daremos las conclusiones del trabajo y se analizarán posibles mecanismos físicos que logren evitar la conservación de momento angular, dejando abierto el problema para futuros trabajos.

Capítulo 1

Introducción.

La predicción teórica de los agujeros negros, puede ser estudiada a partir de la *Ley de Gravitación Universal*; al considerar un objeto lo suficientemente masivo tal que, la velocidad necesaria para escapar de la atracción gravitacional, sea la velocidad de la luz c , fue con esa idea, que John Michell y Pierre Simon Laplace, de manera independiente, llegaron a la conclusión de que, si estos objetos existieran, serían invisibles y para una masa M con simetría esférica en el marco de la mecánica newtoniana, el radio gravitacional esta dado por

$$R_g = \frac{2GM}{c^2}, \quad (1.1)$$

Estos objetos hipotético fueron llamados *estrellas oscuras*. Debido a que, en ese entonces, no existía evidencia observacional, este tipo de estrellas se volvieron únicamente curiosidades matemáticas [13]. Un año después de que la teoría de la *Relatividad General* fuera postulada, Karl Schwarzschild encontró una solución a las ecuaciones de Einstein que describían un campo gravitacional generado por un objeto esféricamente simétrico y sin carga eléctrica. A partir de la solución de Schwarzschild es posible deducir una expresión matemática de la frontera de una región en donde la luz queda atrapada y no sale nunca, conocida como el **Horizonte de Eventos**.

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (1.2)$$

A pesar de que esta expresión es idéntica a la obtenida por la teoría newtoniana, su significado físico es diferente; por una parte tenemos el concepto de una estrella oscura que por más comprimida que esté, nada impide que tenga una superficie material, mientras que, de acuerdo a la relatividad general, nada puede viajar más rápido que la luz, entonces si la luz se queda atrapada en el radio gravitacional la materia no solo no puede salir, sino que tiene que moverse hacia el centro del objeto, esto implica que este no puede tener una superficie material. Por otra parte, Hans Reissner resolvió las ecuaciones de Einstein para una masa puntual cargada en 1916 [14] y dos años más tarde Gunnar Nordström [15] consideró una masa esféricamente simétrica y cargada eléctricamente. Estas soluciones contienen singularidades en el horizonte de eventos pero las implicaciones no estaban completamente entendidas. Hasta que en 1958, David Finkelstein [16] estudio la naturaleza de dicha superficie y describió al horizonte de eventos como una membrana unidireccional, de tal forma que cualquier cosa que cruce ya no puede influir en la región exterior. Otra solución a las ecuaciones de Einstein, describe el espacio-tiempo de un objeto sin carga eléctrica

pero rotante y fue Roy Kerr quien la encontró en 1963 [17]. Este estudio fue un muy importante para las aplicaciones astrofísicas, debido a que los objetos astronómicos tienen momento angular. Y la solución completa que describe un objeto rotante y cargado fue desarrollada por Ezra Newman y sus colaboradores y es conocida como la *solución Kerr-Newman* [18].

A finales de los años 60's, el término de **Agujero Negro** fue utilizado por primera vez por John A. Wheeler y a partir de ese entonces se incrementó la atención hacia este tipo de objetos teóricos, principalmente por aquellos que trabajaban en Relatividad General [19]. Los agujeros negros eran considerados objetos simples, en el sentido de que podían ser descritos por un número pequeño de parámetros: su masa M , su momento angular J y su carga eléctrica Q [13]. Pero a pesar de todas las teorías que iban surgiendo con el paso del tiempo, los objetos astrofísicos con estas características no habían sido encontrados.

Desde los años 20's era conocido que una estrella al terminar su combustible nuclear, se compacta para encontrar nuevamente una configuración de equilibrio hasta que la presión de los electrones detiene el colapso y la estrella se convierte en una enana blanca. Subrahmanyan Chandrasekhar [20] demostró que existe una masa crítica que al superarla la presión de los electrones no puede detener el colapso lo que llevaría a la enana blanca a convertirse en una estrella de neutrones. Por otra parte, Robert Oppenheimer y George Volkoff descubrieron que incluso una estrella de neutrones tiene una masa máxima lo que indica que al sobrepasar ese valor la estrella de neutrones seguiría colapsando [21]. Años más tarde, el descubrimiento de poderosas fuentes de energía, como los cuásares, requirió de nuevas teorías de radiación acorde con las observaciones. Entonces en 1964, Yakov Zel'dovich y Edwin Salpeter propusieron, de manera independiente y simultánea, que los cuásares fueran impulsados por la acreción del material que orbitaba alrededor de los objetos masivos como los agujeros negros [22]. Pero fue hasta el descubrimiento de Cygnus X-1 y el estudio de su compañera que fue posible considerar el primer candidato a agujero negro de masa estelar. Desde entonces se han obtenido un gran número de datos astronómicos que señalan la existencia de los agujeros negros de masa estelar ($3 - 100 M_{\odot}$) en algunos sistemas binarios de rayos X [23] y agujeros negros supermasivos ($10^6 - 10^{10} M_{\odot}$) en el centro de muchas galaxias [24].

En 1971, los astrofísicos británicos, Donald Lynden-Bell y Martin Rees sugirieron que en el centro de nuestra Galaxia existía un Agujero Negro Masivo, tres años más tarde una fuente compacta de radio fue detectada en la dirección del centro galáctico [13], estas observaciones fueron confirmadas al año siguiente y en 1982, Bruce Balick y Robert Brown, llamaron a esta fuente Sagitario A* [25]. Durante varios años se ha observado la región central de la Vía Láctea para poder medir los movimientos propios de las estrellas cercanas al centro galáctico. En particular, para la estrella llamada S2, se ha podido trazar dos tercios de su órbita, la cual tiene una alta elipticidad, además se ha podido determinar que la mayor aproximación a Sagitario A* es de 5.9×10^{-4} pc, su semieje mayor es de 1.9×10^{-4} pc (5.5 horas luz) y su periodo orbital es de 15 años [26]. Hoy en día sabemos que Sagitario A* tiene una masa aproximada de $(4.1 \pm 0.2) \times 10^6 M_{\odot}$ dentro de un radio $R < 0.01$ pc, y se encuentra a una distancia de $(8.0 \pm 0.6) \times 10^3$ pc de la Tierra [27].

Más recientemente, se han utilizado a los agujeros negros astrofísicos para probar fenómenos que describe la teoría de la relatividad general [28]. Gracias al desarrollo tecnológico el experimento LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) midió las ondas gravitacionales generadas por la fusión de dos agujeros negros [29]. Además, la colaboración EHT (Event Horizon Telescope), mostró por primera vez una imagen de un agujero negro en el año 2019 [30].

Actualmente sabemos que los agujeros negros supermasivos se formaron a solo mil millones de años después del Big-Bang ($z \gtrsim 6$) [31] pero su formación es aun un misterio. De acuerdo con la teoría cosmológica Λ CDM, la formación de estructuras es jerárquica, considerando que los objetos de menor tamaño se generaron en épocas tempranas del Universo y estos evolucionan a unos cada vez más masivos por acreción o fusiones entre varios objetos. Debido a esto se piensa que los agujeros negros supermasivos se formaron a partir de semillas mucho más pequeñas, pero el mecanismo de como alcanzan masas tan grandes en tan corto tiempo sigue siendo una pregunta abierta. Se han propuestos diferentes modelos de semillas de agujero negro en diversos escenarios [32]. Uno de ellos es considerar el colapso de pesadas nubes primordiales y cuyo resultado sería agujeros negros de masas mayores a las del tipo estelar. Pueden haberse formado a partir de la fusión de objetos dentro de un cúmulo denso de estrellas [33]. Algunos modelos consideran un periodo de crecimiento rápido al experimentar el proceso de acreción [34].

En el presente trabajo consideraremos tres teorías de formación de semillas de agujero negro:

1. El colapso de estrellas de población III caracterizadas por masas de 100 a 300 M_{\odot} formadas en $z \sim 20$ [35].
2. El colapso directo de halos de materia de $10^8 M_{\odot}$ que de alguna forma no tuvieron formación estelar y generaron semillas de entre $10^4 - 10^6 M_{\odot}$ a $z \sim 15$ [36].
3. Agujeros negros primordiales

En las siguientes secciones realizaremos una revisión de estos mecanismos de formación, la cuál nos proporcionara la información necesaria para comenzar a marcar los parámetros iniciales en nuestro modelo de crecimiento de los agujeros negros.

1.1. Agujeros negros estelares.

Antes de empezar con los agujeros negros supermasivos, estudiaremos la formación de agujeros negros estelares dado que conocemos mejor el proceso, este tipo de objetos son el producto de la última etapa de evolución de una estrella de gran tamaño, su mecanismo de formación es claro y suponemos que se encuentran por todos lados. Para conocer el destino final de la estrella debemos considerar principalmente su masa inicial y los procesos que la llevaron a ese fin.

Todas las estrellas comienzan en una nube de gas, la cual comienza a colapsarse bajo los efectos de la gravedad. Durante este colapso aproximadamente un 50% de la energía gravitacional se transforma en energía térmica lo que calienta la gas y el resto se emite en forma de radiación. Si la masa del cuerpo colapsado alcanza el valor de $0.08 M_{\odot}$, su energía gravitacional es suficiente para que las temperaturas centrales lleguen al valor crítico necesario para iniciar las reacciones nucleares, la presión generada por ellas eventualmente alcanzara un estado de equilibrio con la fuerza gravitacional y se detendrá el colapso [37]. La mayor parte de la vida de una estrella se mantiene en este estado de equilibrio, a esta etapa se le conoce como Secuencia Principal, que inicia cuando la fusión nuclear comienza y la temperatura es de 10^7 K. Para estrellas masivas el tiempo en que alcanzan esta etapa es menor a las estrellas de poca masa; por ejemplo, una estrella de $15 M_{\odot}$ tarda alrededor de 60,000 años en llegar a la secuencia principal, en cambio una estrella de $0.1 M_{\odot}$ tarda alrededor de 10^8 años [38].

La principal diferencia entre estrellas masivas y de poca masa, es que en las primeras, el núcleo

es convectivo lo que genera una gran cantidad de energía mientras que las menos masivas su núcleo es radiativo y tiene una menor temperatura [38]. En cualquiera de los dos casos cuando la transformación de hidrógeno en helio sea mínima, la estrella abandonara la secuencia principal e iniciará una serie de etapas hasta que las reacciones nucleares disminuyan y la gravedad comience a dominar. Cuando el material de la estrella se consume sus capas exteriores colapsaran esto genera un aumento en la presión lo que evita que se colapse completamente. Para estrellas de poca masa, el proceso de colapso se detiene y forma una enana blanco [12]. Si la masa del núcleo de la estrella es mayor a $3M_{\odot}$ no hay un mecanismo capaz de detener el colapso y se pasa por un proceso violento, conocida como explosión de supernova, en donde expulsa la mayor parte de su material, el objeto remanente puede ser una estrella de neutrones o si la masa lo permite puede convertirse en un agujero negro. La masa mínima de un agujero negro de masa estelar formado por el colapso de una estrella es de $2 - 3M_{\odot}$ [39] mientras que la masa máxima para este tipo de objetos esta alrededor de $100M_{\odot}$ [40].

A partir de los estudios de evolución estelar, se espera que exista una población aproximada de 109 agujeros negros estelares en la Vía Láctea [41]. La búsqueda de agujeros negros se ha centrado principalmente en la identificación de objetos compactos en sistemas binarios de rayos X con masas mayores a las estrellas de neutrones [42]. El mayor agujero negro estelar más masivo conocido hasta la fecha, es de alrededor de $23.1 - 32.7M_{\odot}$, (su estrella progenitora probablemente tendría más de $60M_{\odot}$), y se encuentra en la galaxia IC 10, es una galaxia perteneciente al Grupo local y se encuentra en la constelación de Casiopea. [43].

1.2. Estrellas de población III.

Una posible forma de explicar la formación de los progenitores de agujeros negros se basa en el estudio de la primera generación de estrellas, conocida como estrellas de población III [35]. De acuerdo al modelo estándar de la materia oscura fría, los primeros objetos cosmológicos se formaron en halos con masas de aproximadamente 10^6M_{\odot} a altos redshifts ($z \gtrsim 20$) cuando el gas primordial se condensa debido al enfriamiento del hidrógeno molecular [44]. Las primeras estrellas juegan un papel importante en la evolución del Universo, emitiendo radiación intensa y al ser fuentes de elementos pesados que enriquecen el medio interestelar [45]. Su formación ha sido estudiada a detalle y es indispensable para comprender la historia de la formación estelar del Universo y la evolución química galáctica [46].

Los estudios de la formación de estrellas de población III a través de la condensación de gas por enfriamiento de hidrógeno molecular sugieren que sus masas típicas son mayores a $100M_{\odot}$ [47]. Si la masa de la estrella es mayor a $100M_{\odot}$, la temperatura y la densidad crean abundantemente, en el centro de la estrella, pares de electrón - positrón después de que el helio se agota. Este proceso consume parte de la energía termina, lo que genera una inestabilidad que induce el colapso gravitacional. Para una estrella de masa menor a $260M_{\odot}$, la combustión nuclear es muy rápida y libera suficiente energía para romper por completo la estrella por medio de una explosión de supernova de inestabilidad de pares [48]. Por otro lado, para estrellas con mayor masa la inestabilidad de pares, están tan fuertemente unidas que la fusión de oxígeno no puede revertir la caída y se cree que estas estrellas colapsan a agujeros negros [49]. El tamaño típico de estos agujeros negros es de $45 - 100M_{\odot}$ [50].

Una propiedad importante de las observaciones astronómicas de los agujeros negros que debemos

considerar, es la límite de Eddington, que ocurre cuando el material circundante está siendo absorbido gravitacionalmente por un objeto esféricamente simétrico. Cuando la presión de radiación se encuentra en equilibrio con la fuerza gravitacional [42], la luminosidad es máxima. Entonces, suponiendo que el material es un gas ionizado, el límite de Eddington es

$$L_{edd} = 1.26 \times 10^{39} \frac{M}{10M_{\odot}} \quad (1.3)$$

Si una de estas semillas de agujero negro de $100 M_{\odot}$ acreta en el límite de Eddington con un 10% de eficiencia, comenzando en $z > 20$, alcanzará una masa final de $10^9 M_{\odot}$ en $z = 6.4$ [35]. La acreción es considerado un proceso de crecimiento de los agujeros negros con base a los cálculos anteriores podemos deducir que las estrellas de población III crean semillas de agujeros negros y en el caso de estar acretando continuamente al límite de Eddington, eventualmente se convertirán en agujeros negros supermasivos.

Sin embargo, la historia de formación estelar de las estrellas Pop III es también una pregunta abierta. Observacionalmente, no se cuenta con mucha evidencia debido a que son objetos muy cercanos al inicio del Universo, aun cuando hay evidencias indirectas, actualmente no contamos con la capacidad tecnológica para conseguir datos suficientes y demostrar su existencia [51]. Por otra parte, el hecho de que la semilla de agujero negro acrete a una tasa del límite de Eddington genera un conflicto, pues las simulaciones numéricas has demostrado que al explotar una supernova de inestabilidad de pares de las estrellas de población III, la materia remanente es expulsada lejos del remanente lo que provoca que el agujero negro no tenga el material suficiente para crecer y convertirse en agujero negro supermasivo [52].

1.3. Colapso directo.

Otro de los mecanismos que se han estudiado para la formación de los agujeros negros supermasivos se basa en el colapso directo a partir de una nube de gas densa. El principal problema de estos modelos es la eliminación del momento angular [53]. Entonces, es necesario encontrar un mecanismo de transporte que sea eficiente para que el gas forme un objeto central masivo, que puede colapsar como resultado de una inestabilidad gravitacional. Algunos mecanismos de transporte de momento angular que se han utilizado son: la viscosidad impulsada por campos magnéticos o turbulencias [54], inestabilidades autogravitacionales [55], ondas de Rossby [56], incluso el arrastre de radiación de las microrondas cósmicas de fondo [57].

Para que un agujero negro se forme por colapso directo en una nube de gas primordial es necesario considerar una nube con masa mayor a $10^5 M_{\odot}$, y su temperatura no puede ser menor a $\sim \times 10^4 K$, la masa debe estar en el centro de un halo de materia oscura con una temperatura comparable con la temperatura virial [58]. Estas condiciones pueden producir el colapso del gas para formar un objeto masivo que probablemente acumulará la cantidad suficiente de gas para continuar con el colapso y así formar un agujero negro. Un mecanismo de inestabilidades dinámico se deriva de nubes de gas autogravitantes, estas nubes se vuelven inestables cuando el soporte gravitacional sobrepasa cierto valor. Una barra transporta momento angular hacia el exterior en una escala de tiempo dinámica, a través de torcas gravitacionales e hidrodinámicas, para contraer el radio lo que conduce a una estabilidad mayor. Este tipo de mecanismo produce una “cuasi-estrella” con una entropía específica muy baja dentro del centro del halo [55]. En este modelo es necesario evitar el enfriamiento del hidrógeno molecular, lo que provoca que el gas sea menos denso que la materia

oscura y así evitar el colapso generalizado y la fragmentación de la nube. Bajo estas características es posible que la formación de semillas de agujeros negros en halos masivos en una época anterior de formación de estrellas [59]. Para que exista la inestabilidad también se debe considerar las características de las distribuciones de densidad, presión y momento angular, así como también detalles que dependen del potencial gravitacional.

Para que la “cuasi-estrella” pueda colapsar y formar un agujero negro, el parámetro fundamental que debemos considerar es el momento angular inicial. Si tomamos un momento angular relativamente pequeño, el núcleo debería colapsar a una temperatura aproximadamente constante. Debido al enfriamiento la entropía específica disminuye y la presión del gas comienza a exceder la presión de radiación. La materia alrededor de la “cuasi-estrella” al caer llevaría rápidamente la masa al límite de Chandrasekhar. Y como resultado final se formaría un agujero negro de varias masas solares. Por el contrario el momento angular del núcleo y el material circundante es demasiado grande evitaría el colapso directo, entonces el enfriamiento conduciría a un disco rotante. A medida que la materia se une al disco, la autogravedad generará nuevamente una inestabilidad, mejorará el enfriamiento y facilitaría el colapso al eliminar el momento angular. Como mencionamos, la cantidad de materia acreta por el agujero negro recién formado depende de la distribución del momento angular: El objeto compacto se tragará toda la materia circundante con un momento específico de $J \lesssim GM_{BH}/c$. En este caso el agujero negro no crecerá más allá de su masa inicial. En el caso contrario, la distribución del momento angular puede llevar a la materia a rotar como un cuerpo sólido, entonces, el agujero negro absorbe rápidamente una fracción $\sim (GM_*/rc^2)^{1/2}$ del material circundante. Sin embargo, es poco probable que la masa del agujero negro exceda varias decenas de masas solares, lo que implica que existe una fase de acreción. Pero es posible describir otro escenario en donde la tasa de acreción del agujero negro se incluso mayor que el límite de Eddington [55].

Si consideramos que el valor del transporte del momento angular es del orden de 10^{-6} cuando $m_* \sim 10^5$, la barrera centrífuga forma una pared dentro de la “cuasi-estrella”. Con el tiempo las pérdidas de neutrinos son importantes dentro del radio de influencia del agujero negro y las inestabilidades autogravitacionales transportan el momento angular de una manera efectiva y entonces el agujero negro crece a tal velocidad que la masa está dada por,

$$M_{BH} = 9 \times 10^4 T_9^{-2} \left(\frac{t}{10^7 \text{yr}} \right)^2, \quad (1.4)$$

con T_9 . Por lo tanto la masa de los agujeros negro alcanza un valor de entre $10^4 - 10^6 M_\odot$ [55]

1.4. Agujeros negros primordiales.

Los agujeros negros primordiales son objetos que se formaron en el Universo temprano, incluso antes que las primeras estrellas [60]. La masa de este tipo de objetos podemos definirla al comparar la densidad asociada al agujero negro con la densidad cosmológica a un tiempo t después del Big-Bang,

$$M_{BH} = \frac{c^3 t}{G} \approx 10^{15} \left(\frac{t}{10^{-23} \text{s}} \right) \text{g}, \quad (1.5)$$

de acuerdo con esta relación los agujeros negros primordiales pueden abarcar un enorme rango de masa, dependiendo principalmente del tiempo, es decir, si consideramos el tiempo de Planck entre $10 - 43$ s, la masa del agujero negro sería de comparable con la masa de Planck de 10^5 g. Mientras que

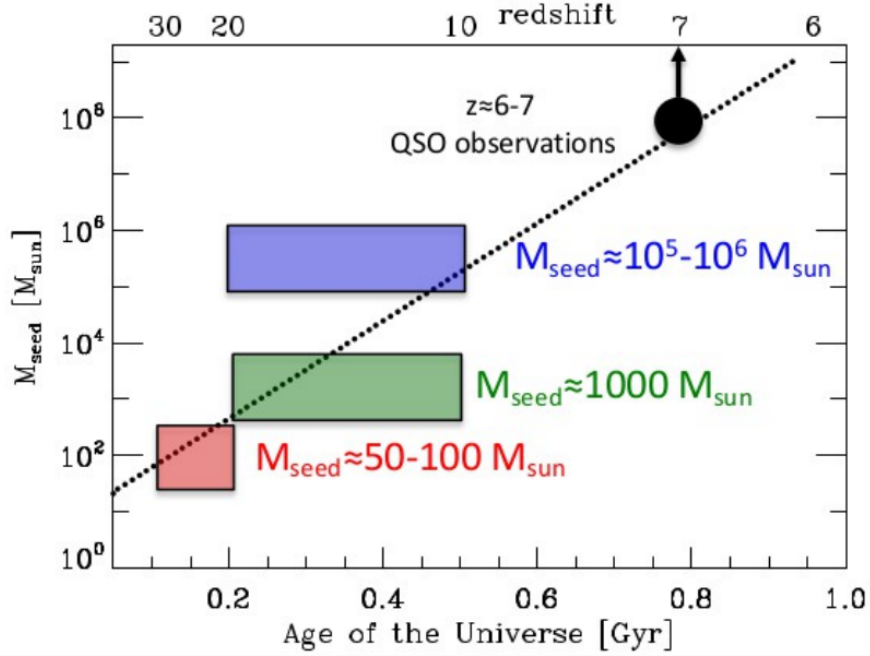


Figura 1.1: Diagrama que muestra las regiones que abarca cada una de las teorías que tratan de explicar la formación de agujeros negros supermasivos [66]

aquellos formado en un tiempo de 1 s tendrían una masa de $10^5 M_{\odot}$ [61]. Existen diversos estudios donde se describen los posibles mecanismos de formación de los agujeros negros primordiales. Por ejemplo, el colapso de regiones densas derivadas de inhomogeneidades de densidad, también es posible considerar una época de alta presión o una fase de transiciones cosmológicas y mecanismos que involucran defectos topológicos [62]. Diversos estudios han sugerido que los agujeros negros supermasivos pueden ser de origen primordial [63]. Sin embargo, la probabilidad de que los agujeros negros primordiales se formen después de 1 s nos marca un valor máximo para la masa de estos objetos, aunque pueden ser considerados como semillas con un valor inicial de $10^5 M_{\odot}$ y luego aumentar de tamaño por medio de acreción [64]. Por otra parte, estudios recientes de la acreción de un campo escalar para un agujero negro primordial aislado indican que es poco probable que la masa aumente lo suficiente para considerarlo como un agujero negro supermasivo [65].

En la figura (1.1) se muestra un diagrama de los diferentes modelos de semilla de formación de agujeros negros supermasivos. En ella observamos que la edad del Universo en el eje horizontal y el tamaño de la semilla en masas solares en el eje vertical. Además en la parte superior tenemos la edad del Universo en redshift. El círculo negro representa las observaciones de cuásares a $z \sim 7$ y la línea punteada el tiempo que le tomaría a cada semilla llegar al valor conocido de los agujeros negros supermasivos. El recuadro rosa representa el modelo de estrellas de población III, el de color verde se refiere al modelo de cúmulo denso de estrellas, el cual no se consideró en este trabajo y por último el recuadro morado representa el colapso directo. Para el modelo de agujeros negros primordiales está fuera de la escala de este diagrama.

Capítulo 2

Movimiento de las partículas.

El objetivo principal de este capítulo es realizar un análisis de las ecuaciones que describen el movimiento de las partículas sometidas a una fuerza gravitacional generada por una masa puntual. A partir de los conceptos básicos de la mecánica newtoniana es posible definir un potencial efectivo que permite caracterizar las trayectorias de las partículas por medio de su energía. Uno de los resultados importantes del estudio del potencial efectivo es la caracterización de las órbitas keplerianas las cuales mencionaremos más adelante. Cuando analizamos el potencial efectivo newtoniano considerando partículas con momento angular, notamos la presencia de una barrera de potencial que evita la caída de las partículas hacia el centro del potencial. En el caso del potencial efectivo relativista esta barrera desaparece y presenta un máximo de energía. Entonces aquellas partículas con mayor energía que este valor máximo de potencial pueden ser absorbidas por la masa central. Sin embargo, el potencial efectivo relativista depende de la métrica que utilicemos para encontrar las ecuaciones de movimiento, por lo tanto, analizaremos dos casos importantes en este trabajo, la métrica de Schwarzschild y la métrica de Kerr. En este último caso proponemos una derivación de la constante de Cárter, que nos permitirá separar desacoplar las ecuaciones de movimiento.

Para entender mejor el comportamiento de la partícula en los tres casos; Newtoniano, Schwarzschild y Kerr, realizaremos una comparación de los tres potenciales efectivos. Es bien conocido que a distancias lejanas del objeto central el potencial efectivo Newtoniano y el relativista son prácticamente iguales, pero la diferencia es considerable en regiones cercanas. A partir de dicha diferencia definiremos la región que ocuparemos para nuestro modelo.

2.1. Potencial gravitacional.

Una partícula que está ligada gravitacionalmente a un agujero negro es sometida a una fuerza central, este tipo de fuerzas se definen como aquellas cuya línea de acción pasan a través de un punto fijo y sus magnitudes dependen únicamente de la distancia a dicho punto [67]. Debido a esto, las fuerzas centrales no dependen explícitamente del tiempo, además el trabajo realizado no depende de la trayectoria que sigue una partícula al moverse de un punto a otro. Todo esto nos permite afirmar que una fuerza central es conservativa [68] y se le puede asociar un potencial central,

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\Phi, \tag{2.1}$$

donde $\Phi = \Phi(r)$ es una función escalar, que describe el campo gravitatorio. Para encontrar una expresión de esta función, consideraremos la ley de gravitación universal descrita como $\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}$ [69]. Dado el gradiente $\vec{\nabla}$ en coordenadas esféricas tomamos en cuenta únicamente la coordenada radial, de tal forma que al integrar obtenemos,

$$\Phi(r) = \int_{r_0}^r G \frac{Mm}{r^2} dr = -G \frac{Mm}{r} + G \frac{Mm}{r_0}, \quad (2.2)$$

al considerar una partícula que parte desde el infinito $r_0 \rightarrow \infty$, podemos considerar que la función escalar $\Phi(r_0) \rightarrow 0$, por lo tanto,

$$\Phi(r) = -\frac{GMm}{r}, \quad (2.3)$$

esta función $\Phi(r)$ es el potencial gravitatorio generado por una partícula puntual M y es equivalente a considerar el trabajo que realizan las fuerzas al desplazar una partícula m desde el infinito hasta un punto situado a distancia r . El signo corresponde a la oposición del campo a dicho desplazamiento, lo que implica que las fuerzas son atractivas [70]. En mecánica newtoniana, el campo se propaga instantáneamente, es decir, conforme el tiempo transcurre y las masas que generan el campo se mueven, este último se mantendrá en un estado de equilibrio instantáneo.

2.2. Ecuaciones de movimiento.

Para determinar la trayectoria de un objeto sometido a un campo gravitatorio, podemos utilizar un desarrollo lagrangiano, que nos permite simplificar considerablemente muchos problemas físicos, es por ello que haremos uso de esta descripción para encontrar las constantes de movimiento y las ecuaciones dinámicas que describen el comportamiento de las partículas.

La mecánica lagrangiana consiste en determinar de forma directa las ecuaciones de movimiento que satisfacen las coordenadas generalizadas q_i que describen un sistema de N partículas [71]. Si al sistema le corresponde una función potencial $\Phi(q_i, \dot{q}_i, t)$, la trayectoria de un objeto es obtenida encontrando el camino que minimiza la acción [72].

Definimos a la función lagrangiana \mathcal{L} , como una función escalar a partir de la cuál se puede obtener la evolución temporal, las leyes de conservación y otras propiedades importantes de un sistema dinámico. La función lagrangiana está dada como la diferencia entre la energía cinética K y la energía potencial $\Phi(r)$. En coordenadas esféricas es posible escribirla como,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 \right) - \Phi(r), \quad (2.4)$$

de manera inmediata observamos que la función \mathcal{L} no depende explícitamente del tiempo y el potencial es independiente de las velocidades, lo que implica que la energía mecánica total E es una cantidad conservada. Esto se debe a que las coordenadas generalizadas q_i que no aparecen explícitamente en la lagrangiano su momento canónico p_i asociado a dicha coordenada, es una cantidad conservada, este tipo de coordenadas son llamadas cíclicas [73]. Otra coordenada de este tipo es el ángulo azimutal ϕ , que nos proporciona otra cantidad conservada. Al utilizar las ecuaciones de Euler-Lagrange, definidas como:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (2.5)$$

vemos claramente como el segundo termino se anula, debido a que la lagrangiana no depende de ϕ y al derivarla con respecto a $\dot{\phi}$ obtenemos,

$$\frac{d}{dt} \left(m r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \right) = 0 \quad (2.6)$$

$$m r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = p_\phi, \quad (2.7)$$

momento angular azimutal p_ϕ corresponde a la simetría axial del sistema. Además podemos encontrar las ecuaciones de movimiento, utilizando nuevamente las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.5) para las dos coordenadas restantes,

$$m\ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 - \frac{p_\phi^2}{m r^3 \sin^2 \theta} - \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} = 0, \quad (2.8)$$

$$m r^2 \ddot{\theta} + 2 m r \dot{\theta} - \frac{p_\phi^2 \cos \theta}{m r^2 \sin^3 \theta} = 0. \quad (2.9)$$

Una solución trivial de la ecuación (2.9) es $\theta = \pi/2$, esta solución restringe el movimiento al plano ecuatorial y la fuerza ejercida sobre la partícula en simetría esférica depende unicamente de la dirección radial. Por lo tanto, el problema se reduce a resolver las ecuaciones (2.7) y (2.8). A partir de esta última ecuación podemos reescribirla como,

$$m\ddot{r} - \frac{p_\phi^2}{m r^3} + \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} = 0, \quad (2.10)$$

Por otra parte, el momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ es una cantidad conservada y su magnitud esta dada por $L = m r^2 \dot{\phi} = p_\phi$ [70].

La otra cantidad conservada, como mencionamos anteriormente, es la energía total dada por la ecuación

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2 m r^2} + \Phi(r), \quad (2.11)$$

de esta expresión podemos despejar la velocidad radial, de tal forma que

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - \Phi(r)] - \frac{L^2}{m^2 r^2}}, \quad (2.12)$$

dado que $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ podemos integrar la expresión anterior y despejar de tal manera que obtenemos

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - \Phi(r)] - \frac{L^2}{m^2 r^2}}}, \quad (2.13)$$

no obstante, es preferible tener una expresión para r en función de ϕ , para obtener la ecuación de la trayectoria, ya que al considerar el potencial gravitacional la expresión anterior se simplifica y puede ser integrada fácilmente obteniendo resultados interesantes que analizaremos más adelante. Para obtener una función $r(\phi)$ utilizamos la regla de la cadena, descrita como $\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{dr}$ e integramos para obtener la siguiente expresión

$$\phi(r) - \phi_0 = \int_{r_0}^r \frac{L}{r^2 \sqrt{2 m [E - \Phi(r)] - \frac{L^2}{r^2}}} dr, \quad (2.14)$$

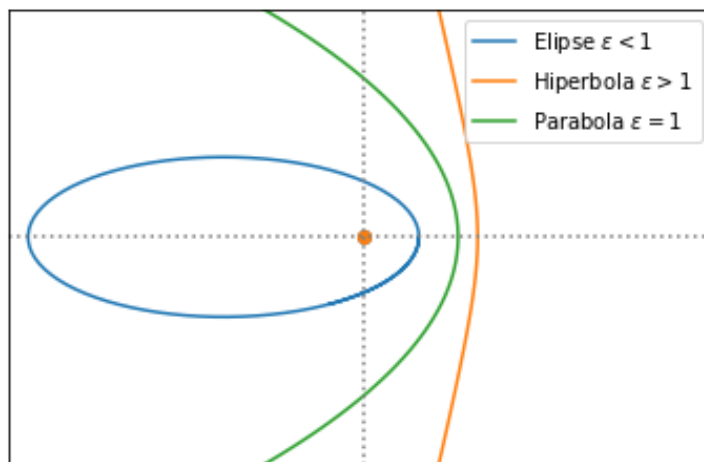


Figura 2.1: Diagrama de las trayectorias de una partícula sometida a un potencial gravitacional, de acuerdo al valor de la excentricidad.

al resolver la integral del término de la derecha, podemos invertir la ecuación y obtener una expresión que estamos buscando. Para el caso de un potencial gravitacional (2.3) utilizamos un cambio de variable $u = -GMmr^{-1}$, por lo que al integrar la solución de la ecuación (2.14) es,

$$r = \frac{L^2}{GMm^2} \left(\frac{1}{1 + \epsilon \cos \phi} \right), \quad (2.15)$$

donde ϵ es la excentricidad de una sección cónica y esta dada por

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{m^3 G^2 M^2}} \quad (2.16)$$

Un análisis detallado de esta ecuación puede ser estudiado en las referencias [70] y [73]. A partir de la ecuación (2.15), podemos describir las órbita de las partículas, las cuales dependen de la magnitud de la excentricidad ϵ , figura (2.1). Las características de cada órbita se enuncian a continuación,

- Si $\epsilon > 0$ entonces $E > 0$, la órbita describe una trayectoria hiperbólica,
- si $\epsilon = 1$ entonces $E = 0$, la órbita representa una trayectoria parabólica,
- si $\epsilon < 1$ entonces $E < 0$, entonces la partícula seguirá una trayectoria elíptica y
- si $\epsilon = 0$ entonces $E = -m^3 G^2 M^2 / 2 L^2$, la partícula se moverá en una trayectoria circular.

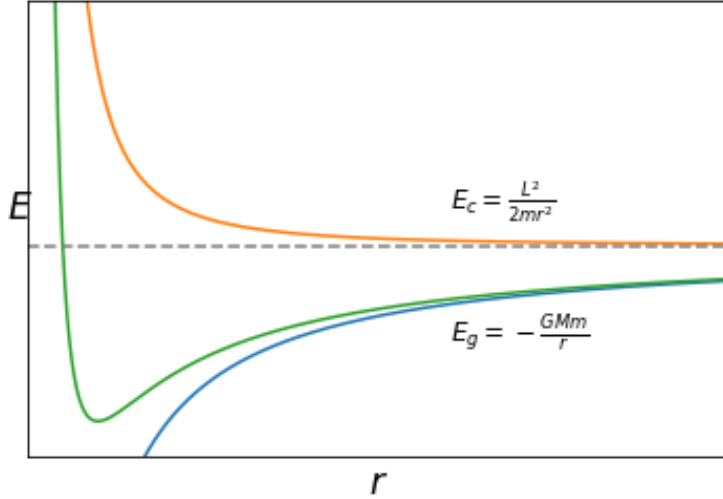


Figura 2.2: El movimiento de una partícula sometida aun potencial $\Phi(r)$ está restringida a las zonas donde $E \geq V(r)$. Donde $V(r)$ corresponde al potencial efectivo (verde), definido como la suma del potencial gravitatorio y un término centrífugo.

Cuando la excentricidad $\epsilon < 1$, la distancia máxima de la partícula en una órbita elíptica recibe el nombre de afelio y corresponde al eje mayor de la elipse, esto ocurre cuando $\phi = \pi$. Mientras que la distancia mínima, conocida como perihelio, esta definida cuando $\phi = 0$ y corresponde al eje menor de la elipse. Entonces, podemos reescribir la ecuación (2.15) como,

$$r_{max} = \frac{L^2}{GMm^2} \left(\frac{1}{1 + \epsilon} \right), \quad \phi = 0, \quad (2.17)$$

$$r_{min} = \frac{L^2}{GMm^2} \left(\frac{1}{1 - \epsilon} \right), \quad \phi = \pi. \quad (2.18)$$

$$(2.19)$$

Sin embargo, como se mencionó anteriormente, la ecuación (2.12) no es fácil de resolver analíticamente, pero utilizamos a las expresiones de las cantidades conservadas para caracterizar las órbitas de las partículas a través de su energía [74].

2.3. Potencial efectivo newtoniano.

Como vimos en la sección anterior, el problema de la trayectoria de una partícula sometida a un campo gravitacional puede ser reducida a un problema unidimensional, considerando las dos cantidades conservadas. A partir de la ecuación de la energía total (2.11) expresada como,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \Phi(r) \quad (2.20)$$

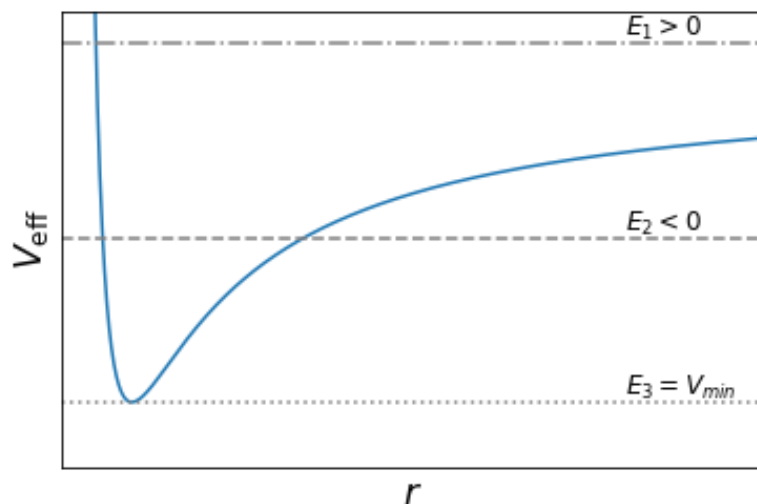


Figura 2.3: Dependiendo de la energía de las partículas existen regiones en donde las órbitas son acotadas o abiertas. Aquellas con energía E_1 , corresponden a órbitas hiperbólicas, en cambio las partículas con energía E_2 tienen órbitas elipsoidales, mientras que en el caso de tener energía E_3 , su órbita será circular

reescribimos la ecuación como,

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = E \quad (2.21)$$

donde definimos al potencial efectivo V_{eff} como la función en términos de cantidades conservadas que permite analizar un problema de dos dimensiones como uno dimensional,

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + \Phi(r), \quad (2.22)$$

el primer término de la ecuación anterior se le conoce como el término centrífugo [73]. El segundo término representa la influencia de ϕ en el movimiento en la dirección r . En el caso particular del potencial gravitacional (2.3), podemos reescribir al potencial efectivo como,

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}, \quad (2.23)$$

el comportamiento general de esta ecuación se ve fácilmente en la Figura (2.2). Observamos que cuando $r \rightarrow \infty$, el término centrífugo $L^2/2mr^2$, es despreciable comparado con el término gravitatorio $-GMm/r$ y el potencial efectivo es negativo y tiende al valor de E . Por otro lado, cuando $r \rightarrow 0$ el término centrífugo domina sobre el gravitatorio y en consecuencia el potencial efectivo es positivo.

Dependiendo de las condiciones iniciales, la partícula puede seguir diferentes trayectorias. Dada la energía total E , el término $\frac{1}{2}mv^2$ siempre es mayor o igual a cero, por lo tanto, el movimiento se encuentra confinado a aquellas regiones que cumplen $E \geq V(r)$. Entonces, si consideramos el caso en donde $E > 0$, una partícula con esta energía puede moverse por encima de la curva hasta llegar a un radio mínimo cuando $E = V(r)$ y en donde existe una barrera de potencial. Esto significa que una partícula que se acerque al origen del campo gravitatorio, alcanzará un radio r_{min} entonces su velocidad tiende a cero, entonces se moverá hacia el exterior y al no haber otros puntos con estas características, la partícula se escapa hacia el infinito y por lo tanto tendrá una órbita abierta. Si por el contrario la partícula cuenta con una energía $E < 0$, esta puede encontrarse atrapada entre dos valores de r , suponiendo que la partícula se mueve hacia el exterior del campo alcanzando una distancia máxima r_{max} en donde su velocidad total tiende a cero e invierte el signo, entonces cambiará de dirección hacia el interior hasta alcanzar una distancia mínima r_{min} donde el signo de la velocidad se invierte nuevamente, esto forma una órbita acotada. Finalmente, cuando la partícula tiene una energía igual al valor mínimo del potencial efectivo $E = V_{min}$, los dos puntos de retorno del caso anterior son iguales, lo que implica que la partícula queda atrapada en un radio fijo y por lo tanto forma una órbita circular [75]. Este análisis puede ser esquematizado en la figura (2.3) Esta clasificación de órbitas nos permite relacionarlas con la ecuación de las secciones cónicas como vimos en la sección anterior.

El análisis del potencial efectivo nos permite describir cualitativamente las órbitas de las partículas sometidas a un campo gravitacional. Un método que utilizaremos, a lo largo de las siguientes secciones, para facilitar el análisis físico y realizar comparaciones entre los modelos que se estudiaron en este trabajo, será el de adimensionalizar las ecuaciones por medio de cantidades patrón.

En el caso del potencial efectivo, definimos las cantidades patrón M_0 , R_0 , q_0 para la masa, la distancia y la velocidad respectivamente, entonces consideramos $M = n M_0$, donde M es un múltiplo de la masa patrón M_0 y por practicidad utilizamos $n = 1$. En el caso de la distancia $\vec{r} = R_0 \hat{r}$ como múltiplo de la distancia patrón y \hat{r} como una cantidad adimensional, para la energía tenemos que $E = m q_0^2 \hat{e}$ y la magnitud del momento angular $L = m R_0 q_0 l$ con $q_0^2 = \frac{G M_0}{R_0}$, donde \hat{e} y l son cantidades adimensionales. Esto nos permite reescribir la ecuación (2.23) como,

$$\hat{V}_{\text{eff}} = -\frac{1}{\hat{r}} + \frac{l^2}{2\hat{r}^2}, \quad (2.24)$$

definiendo el potencial efectivo adimensional como $V(r) = m q^2 \hat{V}_{\text{eff}}$. En la figura (2.4) vemos el potencial efectivo con diferentes valores del momento angular l . Cuando $l \neq 0$ existe una barrera de potencial que evita que las partículas lleguen hasta el centro del campo gravitacional y de acuerdo al valor de la energía de la partícula puede tener una órbita abierta o acotada, de acuerdo con el análisis presentado anteriormente. Sin embargo, cuando $l = 0$, el potencial efectivo corresponde a la energía gravitatoria y las partículas con energía mayor a \hat{V}_{eff} pueden acercarse sin ninguna restricción al centro del campo.

Por otro lado, esta barrera de potencial que presenta el potencial efectivo newtoniano, no está presente cuando consideramos la teoría de la relatividad general, pues dicho potencial presenta un máximo de energía y todas aquellas partículas con energía mayor pueden ser absorbidas por un agujero negro aun cuando tenga momento angular, pero antes de mostrarlo estudiaremos el movimiento de las partículas desde el punto de vista relativista.

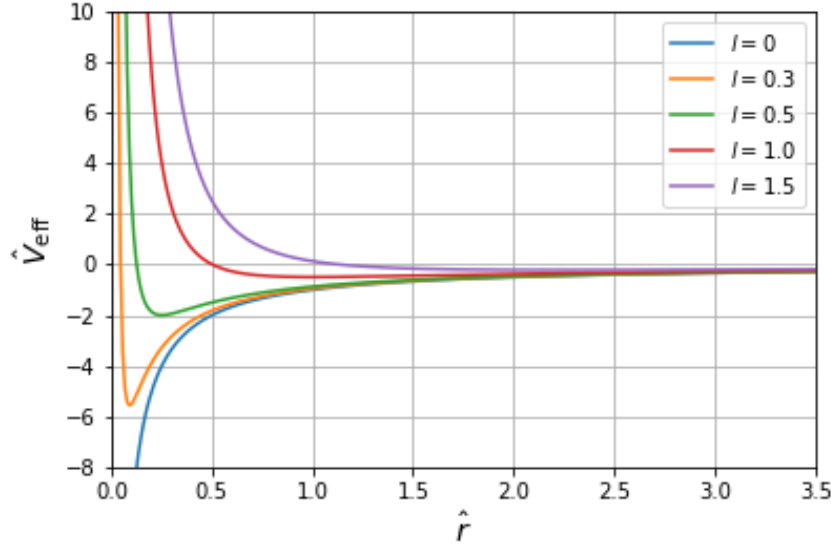


Figura 2.4: Potencial efectivo adimensional (2.24) para diferentes valores del momento angular de la partículas. Vemos que, cuando l aumenta la barrera de potencial generada por el termino centrífugo domina sobre el gravitacional, esto evita que las partículas sean absorbidas por el agujero negro.

2.4. Movimiento geodésico.

La teoría de la relatividad general, postulada por Albert Einstein a finales de 1915, nos describe mejor la interdependencia entre la curvatura del espacio-tiempo y la distribución de materia presente en él [76]. En esta teoría se muestra que la gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo generado por un cuerpo masivo y el movimiento de las partículas, sometidas a la acción de la gravedad, están descritas por las curvas geodésicas, que son las trayectorias con mínima distancia, en un espacio caracterizado por el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ [77]. Para obtener una ecuación capaz de representar el movimiento de las partículas podemos utilizar el calculo variacional, al definir a la diferencial del elemento de línea al cuadrado como, la longitud de la curva entre dos puntos,

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (2.25)$$

considerando que la métrica debe ser simétrica y los indices que utilizamos son mudos, es decir, que podemos nombrarlos a conveniencia, podemos demostrar que la ecuación de las geodésicas en términos del tiempo propio adopta la forma,

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0, \quad (2.26)$$

donde $\Gamma_{\alpha\mu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} (g_{\nu\alpha,\mu} + g_{\nu\mu,\alpha} - g_{\mu\alpha,\nu})$ son los llamados símbolos de Christoffel y pueden ser calculados a partir de la métrica [77]. De manera inmediata, en la ecuación anterior, identificamos las componentes de la cuadrivelocidad, definidas como $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$. Ahora, al utilizar la definición

de derivada covariante reescribimos la ecuación de las geodésicas como,

$$u^\nu u^\mu{}_{;\nu} = 0, \quad (2.27)$$

esta expresión es válida para cualquier sistema de referencia. Una curva geodésica es la generalización en el espacio-tiempo curvo de una línea recta en el espacio Euclidiano.

Cuando trabajamos con campos escalares, podemos utilizar la función lagrangiana, pues queremos una acción invariante. Entonces podemos identificar el tiempo t como x^α , las coordenadas generalizadas q^i para el caso del campo gravitacional $q^i = g_{\mu\nu}$ y las velocidades generalizadas $\dot{q}^i = g_{\mu\nu,\lambda}$ [77]. Por lo tanto, definimos la función lagrangiana de una partícula libre en relatividad como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu. \quad (2.28)$$

Un hecho importante que se debe considerar es que la norma de la cuadrivelocidad es una constante, por un lado si tomamos partículas masivas moviéndose con velocidades menores a la luz, es decir, describen una trayectoria dentro del cono de luz, la norma de la cuadrivelocidad es $-c^2$. Pero por otro lado los eventos que ocurren sobre el cono de luz, son señales viajando a la velocidad de la luz y por lo tanto la norma de la cuadrivelocidad es cero. Considerar ambos casos nos permite escribir a la función lagrangiana como,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu + k c^2), \quad (2.29)$$

donde $k = 1$ para partículas masivas y $k = 0$ para partículas que se mueven a la velocidad de la luz. A partir de la lagrangiana, podemos encontrar las ecuaciones de movimiento con las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a cada coordenada generalizada. [78].

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\kappa} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\kappa} = 0, \quad (2.30)$$

Para demostrar que estas ecuaciones corresponden a las ecuaciones de las geodésicas, utilizamos la ecuación (2.29), la sustituimos en la expresión anterior y desarrollamos las derivadas correspondientes [79]. Entonces, considerando que μ, ν, κ y σ son índices mudos, podemos escribir la ecuación

$$g_{\kappa\mu} \frac{du^\sigma}{d\tau} + g_{\kappa\mu,\nu} u^\mu u^\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\kappa} u^\mu u^\nu = 0, \quad (2.31)$$

multiplicamos la expresión anterior por $g^{\kappa\sigma}$, y sustituimos $g_{\kappa\mu,\nu} = \frac{1}{2}(g_{\kappa\mu,\nu} + g_{\kappa\nu,\mu})$ ya que $u^\mu u^\nu$ es simétrico bajo el intercambio de μ y ν , así su coeficiente puede ser remplazado como,

$$\frac{du^\sigma}{d\tau} + \frac{1}{2} g^{\kappa\sigma} (g_{\kappa\mu,\nu} + g_{\kappa\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\kappa}) u^\mu u^\nu = 0, \quad (2.32)$$

Por la definición de los símbolos de Christoffel obtenemos,

$$\frac{du^\sigma}{d\tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma u^\mu u^\nu = 0, \quad (2.33)$$

la cual es equivalente a la expresión (2.26). Entonces, a partir de la lagrangiana podemos realizar un análisis similar al realizado en mecánica newtoniana para encontrar las ecuaciones de movimiento, pero primero necesitamos una métrica que describa la geometría del problema.

2.5. Agujero Negro de Schwarzschild.

Como ya hemos dicho, existe una fuerte relación entre la curvatura del espacio-tiempo y la distribución de materia. Dicha relación esta descrita por las ecuaciones de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}, \quad (2.34)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento asociado a la distribución de materia. En el caso de un conjunto de partículas que no interactúan entre sí, esta dado por

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu, \quad (2.35)$$

con la densidad de las partículas ρ_0 . Por otro lado, el tensor $G_{\mu\nu}$ corresponde a la parte geométrica de la ecuación y describe la curvatura del espacio-tiempo definido como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (2.36)$$

este tensor está en función de la métrica $g_{\mu\nu}$ y sus derivadas, por medio del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ y el escalar de curvatura R [80]. Las ecuaciones de Einstein son un conjunto de 10 ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, no lineales y acopladas, lo que hacen que sean muy difíciles de resolver analíticamente, aunque es posible encontrar algunas soluciones en casos de mucha simetría. Es importante notar que las ecuaciones en relatividad general bajo ciertas condiciones deben recuperar las ecuaciones de física newtoniana. El límite no relativista ocurre cuando el campo gravitatorio es débil y cuasi-estático, es decir, cuando la curvatura del espacio-tiempo es prácticamente cero y todas las partículas tienen velocidades mucho más bajas que la velocidad de la luz [81].

Karl Schwarzschild encontró la primera solución a las ecuaciones de Einstein a los pocos meses de que fueran publicadas [79]. La solución de Schwarzschild considera un campo gravitatorio simétricamente esférico estacionario, esto implica que las componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ son independientes de la coordenada temporal. Además, se considera una solución de las ecuaciones del vacío, es decir, el tensor de energía-momento es cero $T_{\mu\nu} = 0$ y las ecuaciones de Einstein (2.34) se reducen a

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (2.37)$$

con estas propiedades, la solución de Schwarzschild viene dada por la expresión,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.38)$$

En espacios con poca curvatura y estáticos podemos encontrar que la componente g_{00} del tensor métrico es proporcional al potencial gravitatorio $g_{00} = -\left(1 - \frac{2\Phi(r)}{c^2}\right)$, si comparamos con la componente g_{00} de la métrica de Schwarzschild, podemos observar que bajo estas condiciones es el potencial gravitatorio newtoniano (2.23) por unidad de masa m [82]. Una propiedad importante de esta solución, ocurre cuando consideramos grandes distancias del objeto central, la expresión (2.38) se reduce a la métrica de un espacio plano, conocido como métrica de Minkowski,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.39)$$

Las soluciones que tiene esta propiedad se llaman asintóticamente planas y los objetos que generan el campo pueden considerarse como objetos aislados.

Cuando analizamos la ecuación (2.38), vemos que existen dos singularidades en el espacio-tiempo cuando $r = 0$ y $r = 2GM/c^2$, en esta última singularidad reconocemos el horizonte de eventos (1.2), mejor conocido como radio de Schwarzschild. Esta singularidad es física y representa la frontera de una región donde el campo gravitacional es tan fuerte que nada puede escapar [81]. Por otro lado, podemos interpretar a la primera singularidad $r = 0$, como el punto donde la materia está concentrada y que se encuentra fuera del espacio-tiempo pero que causó la curvatura del espacio-tiempo [77]. En astrofísica conocemos un objeto que cumple con estas características y que es parte fundamental de este trabajo, es el Agujero Negro de Schwarzschild.

El radio de Schwarzschild también es considerada como una singular geométrica, debido a que al realizar un cambio de coordenadas la expresión (1.2) desaparece. Un de las coordenadas que podemos considerar para evitar la singular en r_s , son las coordenadas de Eddington-Finkelstein. A partir de la siguiente transformación

$$c dt' = dt \pm \left(\frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \right) dr', \quad (2.40)$$

podemos sustituirlas en la ecuación (2.38) y simplificar para obtener el elemento de línea escrito como (quitamos las primas, sin que genere confusión),

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 \pm \frac{4GM}{c^2 r} c dt dr + \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.41)$$

si tomamos el signo positivo del segundo término, las coordenadas se conocen como entrantes y en caso de considerar el signo negativo se les llama coordenadas salientes. Estas coordenadas son perfectamente regulares en el horizonte y en el resto del espacio-tiempo, por ello se les conoce como coordenadas penetrantes. Para un agujero negro y la dinámica de los objetos en las vecindades cercanas es útil considerar las entrantes [77].

Con la ecuación (2.41) podemos encontrar las ecuaciones de movimiento de las partículas alrededor de un agujero negro de Schwarzschild (es decir, un agujero negro esféricamente simétrico no rotante), así mismo es posible describir sus trayectorias a partir de su energía con ayuda del potencial efectivo.

2.6. Potencial efectivo de Schwarzschild.

Una vez que definimos la métrica del espacio-tiempo podemos encontrar las constantes de movimiento y las ecuaciones geodésicas, estas últimas son ecuaciones de segundo orden y cuyas primeras integrales son precisamente las ecuaciones de movimiento. A partir de la ecuación de la función lagrangiana (2.29) y utilizando las coordenadas penetrantes, obtenemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left[- \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) u^0{}^2 + \frac{4GM}{c^2 r} u^0 u^r + \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right) u^r{}^2 + r^2 (u^\theta{}^2 + \sin^2 \theta u^\phi{}^2) - k c^2 \right], \quad (2.42)$$

de acuerdo a la expresión anterior, observamos que la lagrangiana no depende explícitamente del tiempo, ni de la coordenada ϕ , esto implica que para ambas coordenadas su momento canónico es

una cantidad conservada al igual que en el caso newtoniano. Para encontrar las expresiones de los momentos canónicos, utilizamos la ecuación

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad (2.43)$$

entonces para cada una de las coordenadas generalizadas x^i , obtenemos los momentos:

$$p_0 = -m \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) u^0 + \frac{2GMm}{c^2 r} u^r, \quad (2.44)$$

$$p_\theta = mr^2 u^\theta \quad (2.45)$$

$$p_\phi = mr^2 \sin^2 \theta u^\phi, \quad (2.46)$$

a partir de la expresión (2.44) obtenemos la componente temporal de la cuadrivelocidad en términos de p_0

$$u^0 = \frac{\frac{2GM}{c^2 r} u^r - \frac{p_0}{m}}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}, \quad (2.47)$$

además de la ecuación (2.46) tenemos la componente ϕ en términos de p_ϕ .

$$u^\phi = \frac{p_\phi}{mr^2 \sin^2 \theta}, \quad (2.48)$$

sustituimos estas dos componentes de la cuadrivelocidad en la lagrangiana (2.42), para obtener la expresión en términos de cantidades conservadas,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left[u^{r^2} - \frac{p_0^2}{m^2} + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \left(r^2 u^{\theta^2} + \frac{p_\phi^2}{m^2 r^2 \sin^2 \theta} - kc^2 \right) \right], \quad (2.49)$$

En coordenadas esféricas, la norma del momento angular total es $L^2 = (mr^2 \sin \theta p_\phi)^2 + (mr^2 p_\theta)^2$, dada las ecuaciones (2.45) y (2.46), de tal manera que podemos escribir la cantidad

$$L^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}, \quad (2.50)$$

esta expresión nos permite reescribir la lagrangiana, de tal forma que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left[u^{r^2} - \frac{p_0^2}{m^2} + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \left(\frac{L^2}{m^2 r^2} - kc^2 \right) \right], \quad (2.51)$$

reagrupando términos podemos escribirla como,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mu^{r^2} - \frac{\frac{p_0^2}{m} + mkc^2}{2} - \frac{GMm}{r}k + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GML^2}{mc^2 r^3}, \quad (2.52)$$

hacemos un cambio de variable considerando $E = \frac{p_0^2 + mkc^2}{2}$. Dado que $\mathcal{L} = 0$ cuando consideramos partículas físicas, de la ecuación (2.21) podemos definir el potencial efectivo de Schwarzschild como,

$$V_{\text{eff}} = -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GML^2}{mc^2 r^3}, \quad (2.53)$$

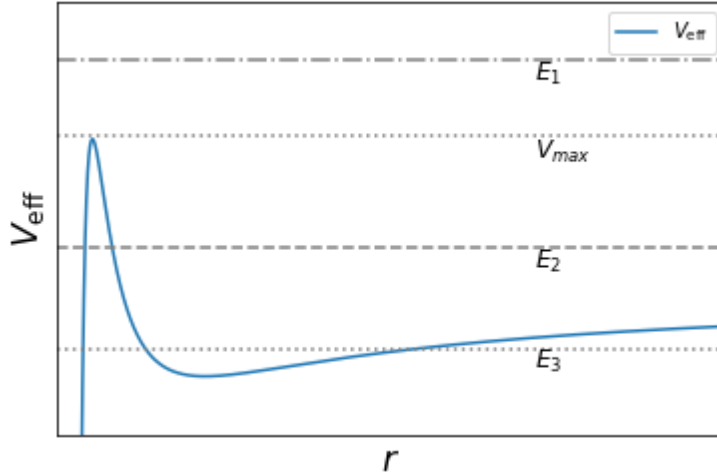


Figura 2.5: Potencial efectivo de Schwarzschild. Aquellas partículas que tengan energía mayor a V_{max} pueden ser acretadas hacia el agujero negro, por otro lado aquellas que tienen energía E_2 su trayectoria será abierta y pueden escapar hacia el infinito, mientras aquellas que se encuentren la región cerca a E_3 , tendrán órbitas acotadas.

a diferencia del potencial efectivo newtoniano, esta expresión presenta un término extra r^{-3} el cual se conoce como corrección relativista, esto nos permite tener un máximo y un mínimo de energía y evitar la barrera infinita vista en el caso newtoniano. Considerando $L = 0$, los potenciales newtoniano y de Schwarzschild corresponden únicamente al potencial dado por la masa central. Por otro lado, cuando las partículas tienen momento angular, es importante notar que a distancias suficientemente grandes el término de r^{-3} es despreciable y a velocidades pequeñas comparadas con la luz la derivada con respecto al tiempo propio τ puede ser remplazada por el tiempo coordenado t , por lo tanto, bajo estas condiciones recuperamos la ecuación (2.23). El valor máximo y mínimo del potencial efectivo de Schwarzschild, se obtiene derivando la expresión (2.53) con respecto a r e igualando a cero, obtenemos una ecuación de segundo grado, que al resolverla obtenemos, los radios donde se encuentran el máximo y el mínimo del potencial efectivo

$$r_{\pm} = \frac{L^2}{2GMm} \left[1 \pm \sqrt{1 - 12 \left(\frac{GMm}{cL} \right)^2} \right], \quad (2.54)$$

En la figura (2.5) se muestra el potencial efectivo de Schwarzschild, el análisis del movimiento de las partículas es similar al de mecánica newtoniana, pues de acuerdo a su energía sus trayectorias serán acotadas o abiertas, sin embargo no están limitadas a la forma de las cónicas que estudiamos en la sección anterior. Entonces, si consideramos partículas que tienen energía mayor al máximo del potencial E_1 , al no existir la barrera de potencial, las partículas pueden ser acretadas por un agujero negro. En el caso de que la energía de las partículas sea $E = V_{\text{eff}}$ la trayectoria puede comenzar o acabar en el infinito y genera una órbita abierta, que corresponde a regiones de energía

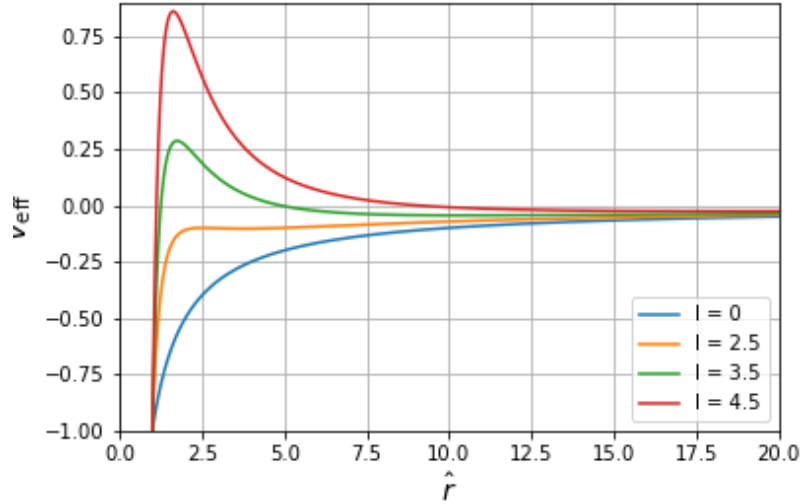


Figura 2.6: Potencial efectivo de Schwarzschild adimensional a diferentes valores del momento angular de la partículas, donde $n=1$. Cuando el momento angular aumenta, el máximo del potencial efectivo también aumenta, lo que ocasiona que se forme una barrera de potencial cada vez más grande.

E_2 . Otro caso ocurre cuando existen dos puntos de retorno E_3 , en donde la órbita oscila entre los valores r_{\pm} y por lo tanto está acotada aunque no necesariamente cerrada.

Para poder describir cualitativamente la dinámica de las partículas sometidas a este potencial, utilizamos nuevamente las cantidades patrón definidas en la sección anterior, de tal forma que obtenemos,

$$\hat{V}_{\text{eff}} = -\frac{1}{\hat{r}} + \frac{l^2}{2\hat{r}^2} - \frac{l^2}{2\hat{r}^3}, \quad (2.55)$$

El potencial efectivo se muestra en la figura (2.6) con diferentes valores de momento angular. Observamos que entre mayor sea esta cantidad l el máximo de energía aumenta. La comparación entre el potencial efectivo newtoniano y de Schwarzschild la realizaremos más adelante debido a que antes consideraremos un caso aún más general.

2.7. Componentes de la cuadrivelocidad en una métrica de Kerr.

La solución de Kerr para las ecuaciones de Einstein considera un espacio-tiempo estacionario y axisimétrico generado por uno objeto masivo M con momento angular J . Este tipo de objetos presentan un horizonte de eventos determinado tanto por la masa como por su rotación. En esta sección derivaremos el potencial efectivo de Kerr mediante un análisis similar al utilizado para el potencial efectivo de Schwarzschild, a partir de la función lagrangiana y obteniendo los momentos

canónicos del sistema.

La métrica de Kerr escrita en coordenadas penetrantes podemos definirla a partir del elemento de línea (2.25) y su derivación se encuentra en la referencia [83]. Entonces,

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & - \left(1 - \frac{2GMr}{c^2 \left(r^2 + \frac{J^2 \cos^2 \theta}{c^2 M^2} \right)} \right) dt^2 + \frac{4GMr}{c^2 \left(r^2 + \frac{J^2 \cos^2 \theta}{c^2 M^2} \right)} dt dr - \frac{4r J G \text{sen}^2 \theta}{c^3 \left(r^2 + \frac{J^2 \cos^2 \theta}{c^2 M^2} \right)} dt d\phi \\
 & + \left(1 + \frac{2GMr}{c^2 \left(r^2 + \frac{J^2 \cos^2 \theta}{c^2 M^2} \right)} \right) dr^2 - \frac{2J \text{sen}^2 \theta}{cM} \left(1 + \frac{2GMr}{r^2 \left(r^2 + \frac{J^2 \cos^2 \theta}{c^2 M^2} \right)} \right) dr d\phi \\
 & + \left(r^2 + \frac{J^2 \cos^2 \theta}{c^2 M^2} \right) d\theta^2 + \left(r^2 + \frac{J^2}{c^2 M^2} + \frac{2r G J^2 \text{sen}^2 \theta}{M c^4 \left(r^2 + \frac{J^2 \cos^2 \theta}{c^2 M^2} \right)} \right) \text{sen}^2 \theta d\phi^2,
 \end{aligned} \quad (2.56)$$

Utilizando la definición de la función lagrangiana (2.29), podemos escribirla en términos de la ecuación anterior como,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & \frac{1}{2} m \left[- \left(1 - \frac{2GM}{rc^2 \Delta_0} \right) u^{0^2} + \frac{4GM}{rc^2 \Delta_0} u^0 u^r - \frac{4JG \text{sen}^2 \theta}{rc^3 \Delta_0} u^0 u^\phi \right. \\
 & + \left(1 + \frac{2GM}{rc^2 \Delta_0} \right) u^{r^2} - \frac{2J \text{sen}^2 \theta}{cM} \left(1 + \frac{2GM}{rc^2 \Delta_0} \right) u^r u^\phi + r^2 \Delta_0 u^{\theta^2} \\
 & \left. + \left(r^2 + \frac{J^2}{c^2 M^2} + \frac{2GJ^2 \text{sen}^2 \theta}{rc^4 M \Delta_0} \right) \text{sen}^2 \theta u^{\phi^2} - k c^2 \right], \quad (2.57)
 \end{aligned}$$

donde $\Delta_0 = 1 + \left(\frac{J \cos \theta}{rcM} \right)^2$. De manera inmediata vemos nuevamente que las coordenadas t y ϕ son cíclicas, por lo tanto los momentos canónicos son constantes de movimiento. Al considerar los momentos generalizados p_j dados en la ecuación (2.43), es posible asociar los momentos p_θ y p_ϕ a las componentes del momento angular correspondientes. Entonces, al aplicar la ecuación (2.43) a la expresión (2.57) obtenemos,

$$p_0 = m \left[- \left(1 - \frac{2GM}{rc^2 \Delta_0} \right) u^0 + \frac{2GM}{rc^2 \Delta_0} u^r - \frac{2JG \text{sen}^2 \theta}{rc^3 \Delta_0} u^\phi \right], \quad (2.58)$$

$$p_\phi = m \text{sen}^2 \theta \left[- \frac{2JG}{rc^3 \Delta_0} u^0 - \frac{J}{cM} \left(1 + \frac{2GM}{rc^2 \Delta_0} \right) u^r + \left(r^2 + \frac{J^2}{c^2 M^2} + \frac{2GJ^2 \text{sen}^2 \theta}{rc^2 M \Delta_0} \right) u^\phi \right], \quad (2.59)$$

$$p_\theta = m r^2 \Delta_0 u^\theta, \quad (2.60)$$

como mencionamos, utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.30) podemos demostrar que tanto la energía y el momento angular en la coordenada p_ϕ son constantes de movimiento, de la misma forma que demostramos en la sección pasada. Entonces, de las ecuaciones (2.58), (2.59) y (2.60), podemos despejar u^0 , u^ϕ y u^θ respectivamente,

$$u^0 = \frac{\frac{p_0}{m} - \frac{2GM}{rc^2 \Delta_0} u^r + \frac{2JG \text{sen}^2 \theta}{rc^3 \Delta_0} u^\phi}{-1 + \frac{2GM}{rc^2 \Delta_0}}, \quad (2.61)$$

$$u^\phi = \frac{\frac{p_\phi}{m \text{sen}^2 \theta} + \frac{2JG \text{sen}^2 \theta}{rc^3 \Delta_0} u^0 + \frac{J \text{sen}^2 \theta}{cM} \left(1 + \frac{2GM}{rc^2 \Delta_0} \right) u^r}{\left(r^2 + \frac{J^2}{c^2 M^2} + \frac{2GJ^2 \text{sen}^2 \theta}{rc^2 M \Delta_0} \right)}, \quad (2.62)$$

$$u^\theta = \frac{p_\theta}{m r^2 \Delta_0}, \quad (2.63)$$

Sin embargo, observamos que las dos primeras ecuaciones están acopladas pero es necesario escribirlas en términos de las cantidades conservadas que hasta el momento tenemos. Si resolvemos el sistema de ecuaciones sustituyendo u^ϕ en u^0 , agrupamos y despejamos para obtener,

$$u^0 = \frac{\frac{2GM\Delta_0}{rc^2} u^r + \frac{p_0}{m} \left[1 + \left(\frac{J}{rcM}\right)^2 \left(1 + \frac{2GM}{rc^2} + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \cos^2 \theta\right) + \left(\frac{J}{rcM}\right)^4 \cos^2 \theta \right] - \frac{2GJp_\phi}{mr^3c^3}}{1 - \frac{2GM}{rc^2} + \left(\frac{J}{rcM}\right)^2 \left(1 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \cos^2 \theta\right) + \left(\frac{J}{rcM}\right)^4 \cos^2 \theta}, \quad (2.64)$$

una vez que tenemos a u^0 en términos de u^r y cantidades conservadas podemos sustituirla en u^ϕ de tal forma que nos queda,

$$u^\phi = \frac{\frac{J\Delta_0}{r^2cM} u^r + \frac{2GJp_0}{mr^3c^3} + \frac{p_\phi}{mr^2 \sin^2 \theta} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} + \left(\frac{J}{rcM}\right)^2 \cos^2 \theta\right)}{1 - \frac{2GM}{rc^2} + \left(\frac{J}{rcM}\right)^2 \left(1 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \cos^2 \theta\right) + \left(\frac{J}{rcM}\right)^4 \cos^2 \theta}, \quad (2.65)$$

estas dos ultimas ecuaciones nos permite reescribir la función lagrangiana (2.57) como,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{-\left[\Delta_0 + \left(\frac{J}{rcM}\right)^2 \left(\Delta_0 + \frac{2GM \sin^2 \theta}{rc^2}\right)\right] p_0^2 + \frac{4GJp_0p_\phi}{r^3c^3} + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} + \left(\frac{J \cos \theta}{rcM}\right)^2\right) \left(\frac{p_\phi}{r \sin \theta}\right)^2}{2m\Delta_0\Delta} \\ & + \frac{m}{2} \left(\frac{\Delta_0}{\Delta} u^{r2} + \frac{p_\phi^2}{m^2 r^2 \Delta_0} - k c^2\right) \end{aligned} \quad (2.66)$$

donde utilizamos el cambio de variable $\Delta = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \left(\frac{J}{rcM}\right)^2$ para simplificar la expresión. Como hicimos en la sección anterior, para obtener la ecuación dinámica utilizamos el hecho de que $\mathcal{L} = 0$, lo que nos permite despejar a u^r y obtener la ecuación de movimiento. Entonces,

$$\begin{aligned} u^{r2} = & \left[\Delta_0 + \left(\frac{J}{rcM}\right)^2 \left(\Delta_0 + \frac{2GM \sin^2 \theta}{rc^2}\right)\right] \frac{p_0^2}{m^2 \Delta_0^2} - \frac{4GJp_0p_\phi}{m^2 r^3 c^3 \Delta_0^2} \\ & - \left[1 - \frac{2GM}{rc^2} + \left(\frac{J \cos \theta}{rcM}\right)^2\right] \left(\frac{p_\phi}{mr \sin \theta \Delta_0}\right)^2 - \left[\left(\frac{p_\theta}{mr \Delta_0}\right)^2 + \frac{k c^2}{\Delta_0}\right] \Delta, \end{aligned} \quad (2.67)$$

Un resultado importante ocurre cuando consideramos un agujero negro de Schwarzschild, es decir, el caso esféricamente simétrico no rotante $J = 0$, es posible reducir las constantes $\Delta_0 = 1$ y $\Delta = 1 - \frac{2GM}{rc^2}$. Entonces, la ecuación anterior se reduce a la siguiente expresión,

$$u^{r2} = \frac{p_0^2}{m^2} - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \left(\frac{1}{m^2 r^2} \left[p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}\right] + k c^2\right), \quad (2.68)$$

considerando la norma del momento angular L^2 descrita por la ecuación (2.50) es posible reescribir la ecuación (2.68) como,

$$u^{r2} = \frac{p_0^2}{m^2} - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \left(\frac{L^2}{m^2 r^2} + k c^2\right), \quad (2.69)$$

al acomodar la ecuación anterior podemos reescribirla como,

$$\frac{1}{2} m u^{r2} - \frac{p_0^2}{m} - m k c^2 - \frac{GMm}{r} k + \frac{L^2}{2 m r^2} - \frac{G M L^2}{m c^2 r^3} = 0, \quad (2.70)$$

definimos $\mathcal{E} = \frac{p_0^2 - m^2 k c^2}{2}$ y considerando que $\frac{1}{2} m u^2 + V_{\text{eff}}$ podemos escribir la ecuación anterior como

$$V_{\text{eff}} = -\mathcal{E} - \frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2m r^2} - \frac{GML^2}{mc^2 r^3}, \quad (2.71)$$

que corresponde al potencial efectivo de Schwarzschild. Sin embargo, en el caso de un agujero negro de Kerr la expresión (2.67) no es posible agruparla de este modo, debido a la dependencia que tiene la ecuación con p_ϕ . Para describir las trayectorias de las partículas en un espacio-tiempo de Kerr, necesitamos las ecuaciones de movimiento escritas en términos de las cantidades conservadas. Como mencionamos, estas cantidades son fáciles de identificar al considerar las coordenadas cíclicas, que en el caso de la ecuación (2.56), son t y ϕ , por lo tanto, los momentos canónicos asociados a estas coordenadas son constantes de movimiento. Sin embargo, a comparación de la métrica de Schwarzschild en el caso de Kerr el momento angular total no es una cantidad conservada, por lo que necesitamos encontrar un valor que nos permita separar la parte radial de la parte angular de las ecuaciones de movimiento, esta cantidad es la constante de Carter.

2.8. Derivación de la constante de Carter.

Para demostrar que el momento angular total en el caso de Kerr no se conserva, consideramos la definición de la norma de esta cantidad, descrita por la ecuación (2.50). Al derivarla con respecto al tiempo propio obtenemos,

$$\frac{dL^2}{d\tau} = 2 \left(p_\theta \frac{dp_\theta}{d\tau} - \frac{p_\phi^2 \cos \theta}{\text{sen}^3 \theta} u^\theta \right), \quad (2.72)$$

utilizando la ecuación de Euler-Lagrange para la coordenada θ dada por la expresión $\frac{dp_\theta}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}$, sustituimos la ecuación (2.57) para encontrar la derivada del momento angular canónico asociado a la coordenada θ . Es importante notar que este procedimiento debe realizarse a partir de la ecuación original de la lagrangiana, antes de sustituir las cantidades conservadas, ya que al utilizar (2.66) la derivación se complica y no es fácil identificar el como separar las ecuaciones. Entonces, obtenemos la ecuación,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = & m \text{sen} \theta \cos \theta \left[\left(r^2 + \left(1 + \frac{J^2 \text{sen}^2 \theta}{r^2 c^2 M^2 \Delta_0} \right) \frac{2GJ^2 \text{sen}^2 \theta}{rc^2 M \Delta_0} + \frac{J^2 \text{sen}^2 \theta}{c^2 M^2} + \frac{2GJ^2 \text{sen}^2 \theta}{rc^4 M \Delta_0} \right) u^{\phi^2} \right. \\ & + \frac{2GJ^2}{r^3 c^4 M \Delta_0^2} (u^0 + u^r)^2 - \frac{J^2}{c^2 M^2} u^{\theta^2} - \frac{4GJ}{rc^3 \Delta_0} \left(1 + \frac{J^2 \text{sen}^2 \theta}{c^2 M^2 \Delta_0} \right) u^0 u^\phi \\ & \left. - \frac{2J}{cM} \left(1 + \frac{2GM}{rc^2 \Delta_0} + \frac{2GJ^2 \text{sen}^2 \theta}{rc^4 M \Delta_0^2} \right) u^r u^\phi \right] \end{aligned} \quad (2.73)$$

considerando que la energía es una cantidad conservada asociada al momento canónico (2.58), tomamos $p_0 = E$ y utilizando las ecuaciones, (2.59) y (2.60), reducimos la expresión anterior tal

que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = & \frac{2E^2 G J^2 \text{sen} \theta \cos \theta}{m M r^3 c^4 \Delta \Delta_0} \left(1 + \frac{J^2}{c^2 M^2 r^2} \right) + \frac{p_\phi^2 \cos \theta}{m r^2 \text{sen}^3 \theta \Delta \Delta_0^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \\ & + \frac{p_\phi^2 J^2 \cos^2 \theta}{m M^2 r^4 c^2 \text{sen}^3 \theta \Delta \Delta_0^2} \left[\frac{2GM}{c^2 r} + \left(2 - \frac{4GM}{c^2 r} + \frac{J^2 \cos^2 \theta}{c^2 r^2 M^2} \right) \cos^2 \theta \right] \\ & - \frac{m J^2 \text{sen} \theta \cos \theta}{M^2 c^2 r^2 \Delta} u^{r^2} - \frac{p_\theta^2 J^2 \text{sen} \theta \cos \theta}{m M^2 r^4 c^2 \Delta_0^2} - \frac{4 p_\phi G J^3 E \text{sen} \theta \cos \theta}{M^2 c^5 r^5 \Delta \Delta_0^2}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

la expresión anterior está escrita en términos de las cantidades conservadas y de la coordenada θ del momento angular. Así mismo, observamos que la expresión contiene la componente u^{r^2} , la cual podemos sustituir con la ecuación (2.67), por lo tanto, escribimos la ecuación,

$$\frac{dp_\theta}{d\tau} = - \frac{J^2 \text{sen} \theta \cos \theta}{M^2 r^2 c^2 \Delta_0} \left(\frac{E^2}{m} + k m c^2 \right) + \frac{\cos \theta p_\phi^2}{m r^2 \text{sen}^3 \theta \Delta_0}, \quad (2.75)$$

al sustituir esta expresión en la ecuación (2.72) y utilizando $p_\theta = m r^2 \Delta_0 u^\theta$, encontramos,

$$\frac{dL^2}{d\tau} = - \frac{2J^2 \text{sen} \theta \cos \theta}{M^2 c^2} (E^2 + k m^2 c^2) u^\theta, \quad (2.76)$$

esta ecuación corresponde la pérdida de momento angular en el caso de un agujero negro de Kerr. Sin embargo, si consideramos que $-2 \text{sen} \theta \cos \theta u^\theta = \frac{d \cos^2 \theta}{d\tau}$, podemos reescribir la ecuación anterior como,

$$\frac{dL^2}{d\tau} = \frac{J^2}{M^2 c^2} (E^2 + k m^2 c^2) \frac{d \cos^2 \theta}{d\tau}, \quad (2.77)$$

debido a que el término $\frac{J^2}{M^2 c^2} (E^2 + k m^2 c^2)$ es constante, podemos escribir

$$\frac{d}{d\tau} \left(L^2 - \frac{J^2}{M^2 c^2} (E^2 + k m^2 c^2) \cos^2 \theta \right) = 0, \quad (2.78)$$

y por lo tanto, $L^2 - \frac{J^2}{M^2 c^2} (E^2 + k m^2 c^2) \cos^2 \theta$ es una cantidad conservada. Entonces, podemos definir

$$cC^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\text{sen}^2 \theta} - \left(\frac{J}{Mc} \right)^2 (E^2 + k m^2 c^2) \cos^2 \theta, \quad (2.79)$$

esta cantidad es constante y por lo tanto es una cantidad conservada en el espacio de Kerr, en donde el momento angular L^2 no es una constante de movimiento. La expresión (2.79) es conocida como la constante de Carter pues fue derivada originalmente por Brandon Carter en 1968 usando el formalismo de Hamilton Jacobi [84]. Esta constante cC junto con la energía E , el momento angular p_ϕ y la masa de reposo m de partículas proporcionan las cuatro cantidades conservadas necesarias para determinar de forma única todas las órbitas en Kerr. Entonces si consideramos un agujero negro de Kerr, el momento angular de las partículas no se conserva, pero aun así, es posible definir otra cantidad que pueda ser de importancia para estudiar las trayectorias de las partículas. Ahora podemos encontrar la ecuación de movimiento u^r en términos de las cantidades conservadas y así poder definir un potencial efectivo. Utilizamos la función lagrangiana escrita como,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2m \Delta \Delta_0} \left[- \left(1 + \frac{J^2}{c^2 M^2 r^2} + \frac{2GJ^2}{Mc^4 r^3} \right) E^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \frac{p_\phi^2}{r^2} + \frac{2p_\phi G J E}{c^3 r^3} \right. \\ & \left. + m^2 \Delta_0^2 u^{r^2} + \frac{\Delta c C^2}{r^2} - k m^2 c^2 \Delta^2 \right], \end{aligned} \quad (2.80)$$

nuevamente usamos el hecho de que $\mathcal{L} = 0$ para despejar el valor de u^{r^2} ,

$$u^{r^2} = \frac{1}{2m\Delta_0^2} \left[\left(1 + \frac{J^2}{c^2 M^2 r^2} - \frac{2GJ^2}{Mc^4 r^3} \right) E^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \frac{p_\phi^2}{r^2} - \frac{2p_\phi G J E}{c^3 r^3} - \frac{cC^2 \Delta}{r^2} + k m c^2 \Delta \right], \quad (2.81)$$

entonces, como vimos anteriormente, $\frac{1}{2} m u^{r^2} + V_{\text{eff}} = 0$, acomodando la ecuación (2.81) encontraremos el potencial efectivo para la métrica de Kerr,

$$V_{\text{eff}} = -\frac{1}{2m\Delta_0} \left[\left(1 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \frac{J^2}{c^2 r^2 M^2} \right) E^2 + k m^2 c^2 \Delta - \frac{4G J E p_\phi}{c^3 r^3} - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \left(\frac{p_\phi^2 + cC}{r^2} + \frac{J^2 c C^2}{M^2 c^2 r^4} \right) \right], \quad (2.82)$$

observamos que la dependencia de θ en el potencial efectivo se encuentra en $\Delta_0 = 1 + \left(\frac{J \cos \theta}{M r c} \right)^2$, cuando $r \rightarrow \infty$ el ángulo θ es despreciable y solo es importante cuando estamos a radios cercanos al origen.

Un resultado importante al considerar la métrica de Kerr es el análisis de las singularidades que están presentes en la métrica. Sin embargo como se mencionó anteriormente, las coordenadas penetrantes evitan la presencia del horizonte de eventos. Para encontrar una expresión que defina estas singularidades necesitamos utilizar la coordenadas Boyer-Lindquist [85]. La derivación de este parámetro puede encontrarse en la referencia [13], para fines prácticos utilizamos la expresión

$$r_h = \frac{GM}{c^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{Jc}{GM^2} \right)^2} \right), \quad (2.83)$$

de esta expresión podemos ver que Kerr posee dos horizontes de eventos. Ambos tienen forma elipsoidal y podemos llamarlos horizonte exterior (R_+) y horizonte interior (R_-). Al analizar la expresión anterior de manera inmediata vemos que $\left(\frac{Jc}{GM^2} \right)^2 < 1$, lo que me permite considerar un valor máximo para el momento angular $J = J_{\text{max}} \hat{j}$, con \hat{j} , donde consideramos J como un múltiplo del momento angular máximo, \hat{j} es una cantidad adimensional. Entonces,

$$J_{\text{max}} = \frac{G M^2}{c}, \quad (2.84)$$

Por lo que el horizonte queda descrito por

$$r_h = \frac{GM}{c^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \hat{j}^2} \right), \quad (2.85)$$

2.9. Comparación de los potenciales efectivos.

Para poder caracterizar las órbitas de las partículas alrededor del agujero negro de Kerr y poder compararlo con los casos de las secciones anteriores, utilizamos las cantidades patrón, usadas anteriormente y considerando $J_{\text{max}} = cM \sigma^2 r_0$, donde definimos $\sigma^2 = G M_0 / c^2$. La forma que tomamos

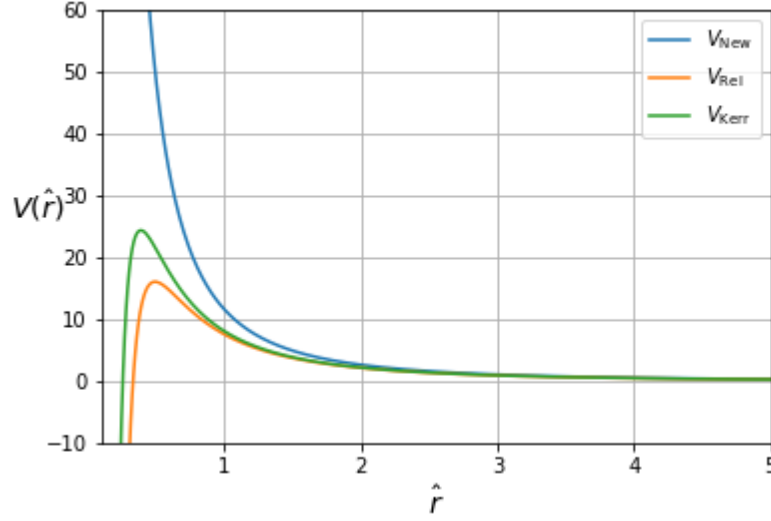


Figura 2.7: Comparación de los potenciales efectivos, Newtoniano, Schwarzschild y de Kerr. Demostremos que a grandes distancias los tres potenciales se comportan igual, mientras que en regiones cercanas la diferencia es notable. En el caso de Schwarzschild y Kerr desaparece la barrera de potencial.

a J como un múltiplo de J_{\max} , es decir, $J = J_{\max} \hat{j}$. Y para adimensionalizar la constante de Carter, consideramos la expresión $cC = m^2 R_0^2 q_0^2 l_c^2$. Para $k = 1$ el potencial efectivo adimensionalizado toma la siguiente forma, notablemente simple

$$\hat{V}_{\text{eff}} = -\frac{\hat{e} + \frac{2}{\hat{r}} - \frac{\sigma^2 \hat{j}^2}{\hat{r}^2} - \frac{l_c^2 + l_\phi^2}{\hat{r}^2} \left(1 - \frac{2\sigma^2}{\hat{r}}\right) + \frac{\sigma^2 \hat{j}^2 (\hat{e}\sigma^2 + 1)}{\hat{r}^2} \left(1 + \frac{2\sigma^2}{\hat{r}}\right) - \frac{4\sqrt{\hat{e}\sigma^2 + 1} \sigma^3 l_\phi \hat{j}}{\hat{r}^3} - \frac{\sigma^4 \hat{j}^2 l_c^2}{\hat{r}^4}}{2 \left(1 + \frac{\sigma^4 \hat{j} \cos^2 \theta}{\hat{r}^2}\right)^2}, \quad (2.86)$$

y tomando $k = 0$, es decir a la luz, obtenemos la siguiente expresión

$$\hat{V}_{\text{eff}} = -\frac{\hat{e} - \frac{l_c^2 + l_\phi^2}{\hat{r}^2} \left(1 - \frac{2\sigma^2}{\hat{r}}\right) + \left(\frac{\sigma \hat{j}}{\hat{r}}\right)^2 \left(1 + \frac{2\sigma^2}{\hat{r}}\right) \hat{e} - \frac{4\sigma^4 \hat{j} \sqrt{\hat{e}} l_\phi}{\hat{r}^3} - \left(\frac{\sigma^2 \hat{j} l_c}{\hat{r}^2}\right)^2}{2 \left[1 + \left(\frac{\sigma^2 \hat{j} \cos \theta}{\hat{r}}\right)^2\right]^2} \quad (2.87)$$

De igual manera que los capítulos anteriores podemos hacer un análisis detallado del potencial efectivo. Uno de los resultados importantes se obtiene cuando $\hat{j} = 0$, entonces tenemos que el potencial efectivo se reduce a la expresión,

$$\hat{V}_{\text{eff}} = -\hat{e} - \frac{1}{\hat{r}} + \frac{l^2}{2\hat{r}^2} - \frac{l^2}{2\hat{r}^3}, \quad (2.88)$$

donde identificamos que $l^2 = l_c^2 + l_\phi^2$, esta expresión corresponde al potencial efectivo de Schwarzschild adimensional. Por otra parte, si consideramos $\sigma = 0$, tenemos

$$\hat{V}_{\text{eff}} = -\hat{e} - \frac{1}{\hat{r}} + \frac{l^2}{2\hat{r}^2}, \quad (2.89)$$

que es simplemente el potencial efectivo newtoniano. Por lo tanto, esto nos permite verificar que el potencial efectivo de Kerr se reduce al caso de Schwarzschild (2.88) y al caso newtoniano (2.89). Entonces, gracias a las coordenadas patrón podemos realizar una comparación cualitativa entre los tres casos presentados en este capítulo. En la figura (2.7) observamos que la diferencia en los potenciales ocurre a distancias muy cercanas al agujero negro, en el caso newtoniano tenemos la barrera de potencial descrita en la sección 2.3 y como se mencionó, las partículas con momento angular no pueden ser absorbidas. Para el caso relativista, para Kerr el potencial presenta un comportamiento similar que el de Schwarzschild, con la diferencia en el máximo de energía que deben tener las partículas para que sean absorbidas. Para Schwarzschild este máximo es menor que para Kerr.

Para ejemplificar esta descripción cualitativa vamos a utilizar un ejemplo simple en donde consideraremos la masa del Sol como nuestra cantidad patrón $M_0 = 1.988 \times 10^{33} g$ [86] y la distancia característica $R_0 = 6.963 \times 10^8 m$ [87] corresponde al radio Solar. A partir de estos valores característicos podemos calcular la energía inicial de las partículas de acuerdo a la definición de energía que consideramos en los diferentes casos,

$$\hat{e}_{New} = -0.0045970795024337479719, \quad (2.90)$$

$$\hat{e}_{Sch} = -0.00459707950349151647002, \quad (2.91)$$

$$\hat{e}_{Kerr} = -0.0045970795034905464352, \quad (2.92)$$

observamos que la diferencia entre la energía en el potencial newtoniano y los otros dos potenciales ocurre hasta la 12va cifra, lo que indica que el potencial de Schwarzschild y el de Kerr para las partículas que tienen esta energía son prácticamente una barrera infinita al igual que el caso newtoniano. Esto nos permite situarnos a una distancia en el límite en donde la mecánica newtoniana siga siendo una buena descripción pero que nos encontremos lo más cerca posible al agujero negro sin considerar efectos relativistas.

En un agujero negro la última órbita estable se encuentra en $3r_s$ y a partir de esta distancia las partículas son absorbidas prácticamente en caída radial. Sin embargo, como veremos más adelante, aún cuando este mecanismo nos genera una tasa de acreción alta, no es suficiente para que una semilla de agujero negro de $100 M_\odot$ en un tiempo menor a la edad del Universo. La acreción radial o de Bondi se analizará en el siguiente capítulo con mayor detalle. En los modelos presentados en este trabajo ocuparemos una distancia de $10 R_0$ considerando como nuestro radio patrón al radio del horizonte r_s , esto nos permite realizar mantenernos en el régimen newtoniano y para futuros trabajos nos centraremos en distancias cercanas al horizonte y poder desarrollar un análisis relativista para el caso de Schwarzschild y de Kerr.

Capítulo 3

Materia alrededor de un agujero negro.

Al estudiar la distribución de una galaxia y la densidad de las estrellas y el gas en el disco, se esperaba que las curvas de rotación mostraran un crecimiento en la velocidad de rotación de las estrellas a distancias cercanas al centro hasta alcanzar un máximo y después una disminución a grandes radio [88]. Sin embargo, las observaciones mostraron que distancias lejanas al centro galáctico, el comportamiento de la curva de rotación era constante. Una manera de explicar este aplanamiento fue considerar que las galaxias tenían más masa de la que podía ser vista, lo que generó la idea de la existencia de materia oscura como la masa faltante en las galaxias [38].

El objetivo de este capítulo es considerar una masa puntual rodeado por una distribución esféricamente simétrica de materia caracterizada por una función de densidad $\rho(r)$ y estudiar la influencia que tiene el potencial gravitatorio del objeto comparado con diferentes potenciales, en este trabajo, consideramos los potenciales que describen el halo de materia oscura en la galaxia dado que los potenciales presentan una divergencia para valores cercanos a cero (Potencial isoterma y Navarro-Frenk-White) y lo compararemos con un potencial que se aplanan para las regiones cercanas al origen (Isoterma-Truncado). También analizaremos la tasa de acreción correspondiente para cada caso y la compararemos con el caso más conocido que es la acreción de Bondi.

Como introducción a este capítulo, en la sección 3.1 derivamos la ecuación de Poisson a partir de la ley de gravitación, dado que esta ecuación representa la relación que existe entre la distribución de materia y el potencial generado por la masa puntual, así mismo, definiremos la ecuación para la masa a partir de la función de densidad, los cuales son cantidades importantes para las secciones subsecuentes.

3.1. Ecuación de Poisson

Como mencionamos, Podemos deducir de una manera sencilla la ecuación de Poisson, tomando en cuenta la ley de gravitación universal. Entonces, tomando la expresión

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}, \quad (3.1)$$

definimos $\vec{F} = m\vec{g}$ una aceleración debido al campo gravitatorio, al considerar un flujo de campo que atraviesa una superficie S , podemos escribir

$$\int_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M. \quad (3.2)$$

dado que la diferencial de superficie en coordenadas esféricas esta dado por la expresión $dS = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$. Además por definición, la densidad $\rho(r)$ está relacionada con la masa M , de tal forma que podemos utilizar la expresión

$$M = \int_V \rho(r) dV, \quad (3.3)$$

para obtener,

$$\int_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G \int_V \rho(r) dV. \quad (3.4)$$

Al aplicar el teorema de la divergencia en el termino de la izquierda de la expresión anterior y utilizando la ecuación (2.1), obtenemos

$$\begin{aligned} \int_S \vec{g} \cdot d\vec{S} &= \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{g} dV, \\ &= - \int_V \nabla^2 \Phi dV, \end{aligned} \quad (3.5)$$

podemos igualar las ecuaciones (3.4) y (3.5). Por lo tanto, llegamos a la expresión,

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho(r). \quad (3.6)$$

Esta expresión recibe el nombre de ecuación de Poisson y representa el potencial gravitatorio Φ , en la región dentro de una distribución de materia materia [89]. De este modo, dado el potencial gravitatorio, es directo determinar la distribución de densidad pero el problema inverso, es decir, dada la distribución de densidad determinar el potencial gravitatorio, no es trivial pues en muchos casos la densidad de materia $\rho(r)$ puede ser una función complicada.

El caso más simple, ocurre cuando estamos en regiones libres de materia $\rho = 0$, entonces el problema se reduce a resolver la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad (3.7)$$

para resolver cualquier problema, es necesario considerar la región dentro de la distribución de materia y la región exterior, tomando en cuenta que las soluciones de ambas deben de coincidir en la frontera, con el fin de que exista continuidad del potencial gravitatorio en todo el espacio [90].

3.2. Acreción de Bondi.

Consideramos un objeto compacto de masa M y radio R que está absorbiendo gravitacionalmente una nube de materia de masa m la cantidad de energía liberada por este proceso esta dada por la ecuación,

$$E = \frac{G M m}{R} = \frac{R_s}{2R} m c^2, \quad (3.8)$$

donde r_s es el radio de Schwarzschild de la masa M . Pero a pesar de ser un mecanismo eficiente, existe un límite para la cantidad de materia que puede absorber y en consecuencia la energía que libera. Al suponer que el material absorbido en una nube de gas de hidrógeno ionizado, la luminosidad L del objeto compacto genera una fuerza de radiación sobre los electrones libres mediante la dispersión de Thomson. Esta fuerza es radial y está dirigida hacia afuera de la distribución, entonces podemos considerar la ecuación,

$$F = \frac{\sigma_T L}{4\pi r^2 c}, \quad (3.9)$$

donde $\sigma_T = 6.7 \times 10^{-25} \text{cm}^2$ es la sección transversal de Thomson. Dado que el electrón se mueve hacia afuera, puede arrastrar un protón para conservar una carga neutra. Por otro lado, la fuerza gravitatorio sobre el par electrón-protón esta dada por

$$F_g = \frac{GMm_p}{r^2}, \quad (3.10)$$

y está dirigida hacia el objeto compacto. El límite de luminosidad ocurre cuando estas dos fuerzas se encuentran en equilibrio, por lo tanto,

$$L_{Edd} = \frac{4\pi G M m_p c}{\sigma_T} = 3.4 \times 10^4 L_\odot \left(\frac{M}{M_\odot} \right), \quad (3.11)$$

esta cantidad recibe el nombre de luminosidad de Eddington, la cuál habíamos mencionado anteriormente. A partir de esta ecuación podemos considerar que existe una tasa de acreción máxima a la que el objeto compacto absorbe materia. Suponiendo que la energía E se convierte completamente en radiación, entonces la tasa de acreción máxima es

$$\dot{M}_{Edd} = 1 \times 10^{-3} M_\odot \text{yr}^{-1} \left(\frac{R}{R_\odot} \right), \quad (3.12)$$

sin embargo, en un escenario real, la conversión de energía no es 100% eficiente. observaciones de los rayos X de los núcleos activos de galaxias, sugieren que el objeto central debe ser un agujero negro generando una luminosidad cercanas a la de Eddington. Sin embargo, como mencionamos en capítulos anteriores, para que una semilla de agujero negro pueda crecer hasta formar un agujero negro supermasivo debió estar acretando desde su nacimiento con una tasa de acreción de Eddington, lo que es muy poco probable.

Otra situación muy estudiada es la acreción de Bondi, que se refiere a la caída radial y esféricamente simétrica de un gas hacia un objeto compacto [91]. Consideramos una nube de gas con una densidad ρ_∞ y presión P_∞ uniforme a distancias lejanas del objeto compacto. Si consideramos un gas con condiciones dinámicas típicas del medio interestelar o el intercambio de materia que existe entre un sistema binario, se espera que el flujo de acreción hacia el objeto compacto pueda describirse con las ecuaciones de la hidrodinámica [92]. Suponemos que el gas es politrópico y su flujo es adiabático, utilizamos la ecuación de estado

$$P = k\rho^\Gamma, \quad (3.13)$$

donde k y Γ son constantes. Si definimos a la velocidad del sonido en un medio con la ecuación:

$$v_s = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^{1/2}. \quad (3.14)$$

para distancias lejanas al objeto central la velocidad del sonido está dada por $v_\infty^2 = kP_\infty/\rho_\infty$. Es posible caracterizar el flujo del gas a grandes distancias del objeto compacto utilizando la mecánica newtoniana. Mientras que la acreción a distancias cercanas al horizonte $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ pueden ser evaluadas usando mecánica relativista, sin embargo deben existir condiciones de regularidad entre estos valores. Estas condiciones de regularidad nos ayudan a determinar la tasa de acreción \dot{M} . A partir de la ecuación (3.13) podemos deducir que el sistema puede ser descrito por las ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \rho u = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho u) = 0, \quad (3.15)$$

y por la ecuación de Euler,

$$u \frac{du}{dr} = \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - \frac{GM}{r^2}, \quad (3.16)$$

con u definida como la velocidad radial del gas. Las ecuaciones (3.15) y (3.16) pueden expresarse de esa forma cuando el flujo alcanza un estado estable. Sustituyendo la expresión de la velocidad del sonido (3.14) en la ecuación anterior, obtenemos,

$$u \frac{du}{dr} + \frac{v_s^2}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{GM}{r^2} = 0, \quad (3.17)$$

y la ecuación de conservación de masa puede escribirse como,

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{2}{r} - \frac{1}{u} \frac{du}{dr}, \quad (3.18)$$

al sustituir esta ecuación en la expresión (3.17), encontramos

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{v_s^2}{u^2} \right) \frac{du^2}{dr} = -\frac{GM}{r^2} \left(1 - \frac{2v_s^2 r}{GM} \right), \quad (3.19)$$

esta ecuación representa la acreción en un estado estable, esféricamente simétrica de un gas no autogravitante. Considerando el término entre paréntesis del lado derecho de la ecuación, podemos observar que Cuando $r \rightarrow \infty$ la velocidad del sonido se aproxima a v_∞ y como consecuencia tenemos que $1 - 2v_s^2 r/GM$ es negativo. Por otro lado, cuando $r \rightarrow 0$ el término $1 - 2v_s^2 r/GM$ se incrementa. Entonces, podemos definir un radio crítico cuando $1 - 2v_s^2 r/GM = 0$, esto implica que

$$r_s = \frac{GM}{2v_s^2}. \quad (3.20)$$

Existen seis familias de soluciones a la ecuación de Bondi, su comportamiento se caracteriza por su velocidad evaluada en el radio crítico y los límites $r \rightarrow \infty$ y $r \rightarrow 0$. Considerando que la velocidad del gas tiende a cero $u^2 \rightarrow 0$, tenemos $u(r_s)^2 = v_s(r_s)^2$ y lo que implica dos posibles soluciones conocidas como transónica. Los puntos de la distribución en donde se satisfacen estas condiciones; con $r \rightarrow \infty$ y $r \rightarrow 0$. En estas soluciones el radio es conocido como punto sónico. Cuando $\frac{du^2}{dr}|_{r_s} = 0$, considerando la velocidad radial del gas menor a la velocidad del sonido ($u^2 < v_s^2$), tenemos el caso subsónico y representa una caída suave que gradualmente alcanza el equilibrio hidrostático en radios pequeños. Cuando consideramos la velocidad del gas mayor a la del sonido $u^2 > v_s^2$ se le conoce como solución supersónica. Por último, tenemos dos soluciones matemáticamente posibles pero físicamente imposibles cuando $u(r_s)^2 = v_s(r_s)^2$ con $r > r_s$ y $r < r_s$. En estos casos, tendríamos dos valores diferentes de la velocidad u a un solo valor de r y

por lo tanto no tienen relevancia en el proceso de acreción [93]. En la figura (3.1) se muestran las soluciones físicas descritas anteriormente.

Vamos a enfocarnos en la solución transónica cuando $r \rightarrow \infty$ debido a que podemos determinar la tasa de acreción en términos de la masa M y de la densidad y la velocidad de la luz en el infinito, que son cantidades que podemos conocer. Integrando la ecuación de momento y utilizando la ecuación de estado de un gas politrópico, encontramos la ecuación de Bernoulli [94], escrita como:

$$\frac{u^2}{2} + \frac{v_s^2}{\Gamma - 1} - \frac{GM}{r} = \frac{v_\infty^2}{\Gamma - 1}, \quad (3.21)$$

evaluando el punto sónico en esta ecuación obtenemos,

$$r_s = \frac{5 - 3\Gamma}{4} \left(\frac{GM}{v_\infty^2} \right), \quad (3.22)$$

al utilizar la razón entre la densidad del medio a un cierto radio y la densidad en el infinito, obtenemos la expresión:

$$\rho = \rho_\infty \left(\frac{u_s}{u_\infty} \right)^{2/(\Gamma-1)}, \quad (3.23)$$

como el objetivo es encontrar una expresión para la tasa de acreción utilizamos la definición de masa en una distribución esférica

$$M = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho(r), \quad (3.24)$$

al derivar con respecto a r y utilizando la regla de la cadena en el término de la izquierda, obtenemos

$$\frac{dM}{dt} = 4\pi r^2 \rho(r) \frac{dr}{dt}, \quad (3.25)$$

y por lo tanto

$$\dot{M} = 4\pi r^2 u \rho(r), \quad (3.26)$$

sustituimos (3.23) en esta ecuación la tasa de acreción está dada como:

$$\dot{M} = 4\pi \lambda \left(\frac{GM}{v_\infty^2} \right)^2 \rho_\infty v_\infty, \quad (3.27)$$

donde λ es una constante en términos del índice adiabático y que depende del tipo de gas que consideremos. Para tener una idea de los valores físicos reales, podemos utilizar valores característicos del medio como la densidad $\rho_\infty = 10^{-24} \text{ g cm}^{-3}$ la velocidad del sonido en el infinito $v_\infty = 10 \text{ km s}^{-1}$ el índice adiabático $\Gamma = 5/3$ y por lo tanto $\lambda = 0.25$ [92], nos permiten redefinir la tasa de acreción

$$\dot{M} = 3.38 \times 10^{-9} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 M_\odot \text{ yr}^{-1}, \quad (3.28)$$

al considerar una semilla de agujero negro de masa inicial de $\approx 100 M_\odot$, la tasa de acreción es de $\dot{M} = 3.38 \times 10^{-5} M_\odot/\text{yr}$. Considerando que la caída es radial y que el material que esta acretando es infinito, le tomaría aproximadamente 121.3Gyr en alcanzar una masa de $4.1 \times 10^6 M_\odot$. Pero a pesar de considerar condiciones idealizadas, este tiempo es mucho mayor a la edad del Universo. Entonces, si tomamos una semilla de masa inicial de $10^4 M_\odot$ debida al colapso directo de una nube

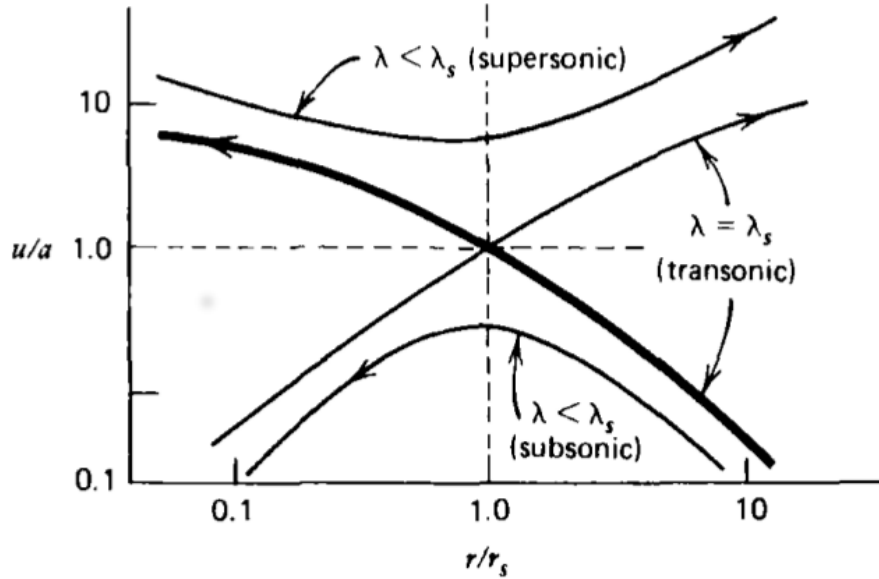


Figura 3.1: Soluciones de la ecuación de Bondi [92]. Dos de estas soluciones son conocidas como solución transónica, una de ellas es subsónicas y otra es supersonica.

densa, con esta tasa de acreción tardaría 0.012Gyr en alcanzar la masa de Sagitario A*, pero como mencionamos este escenario se encuentra idealizado y al momento de considerar los otros factores que evitan la acreción, el tiempo de crecimiento se reduciría.

En la siguiente sección estudiaremos los potenciales de la esfera isoterma, la esfera isoterma-truncada y el modelo de Navarro-Frenk-White (NFW) [95] para verificar como afecta la forma del potencial al radio de influencia de la masa puntual y definir una tasa de acreción.

3.3. Distribución esférica alrededor de una masa puntual.

El modelo del halo isoterma presenta una simplicidad matemática y un perfil de velocidad de rotación constante, que reproduce las regiones externas de la curva de rotación de las galaxias [96]. El perfil de densidad está descrito por la ecuación,

$$\rho_{\text{iso}} = \frac{\sigma_{0,\text{iso}}^2}{2\pi G r^2}, \quad (3.29)$$

donde σ_0 es una velocidad característica que utilizaremos para los diferentes perfiles. Por otra parte, al utilizar la definición de masa (3.3) obtenemos,

$$M = \frac{2\sigma_{0,\text{iso}}^2}{G} r. \quad (3.30)$$

por lo tanto la masa contenida dentro de la esfera isoterma es directamente proporcional al radio, lo que provoca el aplanamiento en la curva de rotación [97].

Ahora, podemos encontrar el potencial correspondiente a esta densidad, para ello usamos la ecuación de Poisson, tomando la parte radial del laplaciano en coordenadas esféricas, podemos escribir (3.6) como,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi_{\text{iso}}}{\partial r} \right) = 4\pi G \rho_{\text{iso}}, \quad (3.31)$$

sustituyendo (3.29) e integrando con respecto a r , tenemos

$$\frac{\partial \Phi_{\text{iso}}}{\partial r} = \frac{2\sigma_{0\text{iso}}^2}{r}, \quad (3.32)$$

al integrar nuevamente, en un intervalo de r_0 hasta r , llegamos a que el potencial esta dado por la expresión,

$$\Phi_{\text{iso}} = 2\sigma_{0\text{iso}}^2 \ln \left(\frac{r}{r_0} \right). \quad (3.33)$$

Por otra parte, un modelo que está diseñado para producir una curva de rotación que evite la divergencia de la densidad cuando $r = 0$, es el modelo de esfera isoterma-truncada que tiene un comportamiento similar al caso anterior pero con un núcleo plano. El perfil de densidad esta dado por

$$\rho_{\text{trun}} = \frac{\sigma_{0\text{trun}}^2}{2\pi G(r^2 + r_0^2)}, \quad (3.34)$$

de manera análoga al caso isoterma, podemos encontrar el potencial correspondiente. Entonces utilizando nuevamente la ecuación (3.6) e integrando llegamos a la expresión,

$$\frac{\partial \Phi_{\text{trun}}}{\partial r} = \frac{2\sigma_{0\text{trun}}^2}{r^2} \left[r - r_0 \arctan \left(\frac{r}{r_0} \right) \right], \quad (3.35)$$

por lo tanto, el potencial isoterma-truncado es,

$$\Phi_{\text{trun}} = \sigma_{0\text{trun}}^2 \left[\ln \left(1 + \frac{r^2}{r_0^2} \right) + \frac{2r_0}{r} \arctan \left(\frac{r}{r_0} \right) \right]. \quad (3.36)$$

El ultimo caso que analizaremos es el perfil Navarro-Frenk-White, el cual es uno de los modelos más utilizados en simulaciones numéricas [98], la ecuación para la densidad esta dada por

$$\rho_{\text{NFW}} = \frac{\rho_{0\text{NFW}}}{\frac{r}{r_0} \left(1 + \frac{r}{r_0} \right)^2}, \quad (3.37)$$

el perfil de Navarro-Frenk-White se le conoce como “universal” porque trabaja para una gran variedad de masas de halo que abarcan cuatro órdenes de magnitud, desde galaxias individuales hasta halos de cúmulos de galaxias. Este perfil tiene un potencial gravitatorio finito aunque la masa total todavía diverge [99]. Este potencial esta descrito por la expresión

$$\Phi_{\text{NFW}} = -4\pi G \rho_0 r_0^2 \frac{\ln \left(1 + \frac{r}{r_0} \right)}{\frac{r}{r_0}}, \quad (3.38)$$

Con el fin de comparar las características de los perfiles de densidad y de los potenciales de cada uno de los modelos de los halos, utilizamos las cantidades patrón definidas en la sección anterior y agregando a la velocidad característica σ_0 como

$$\sigma_0^2 = \frac{GM'_0}{R_0} = \frac{4\pi G \rho_0 R_0^2}{3}, \quad (3.39)$$

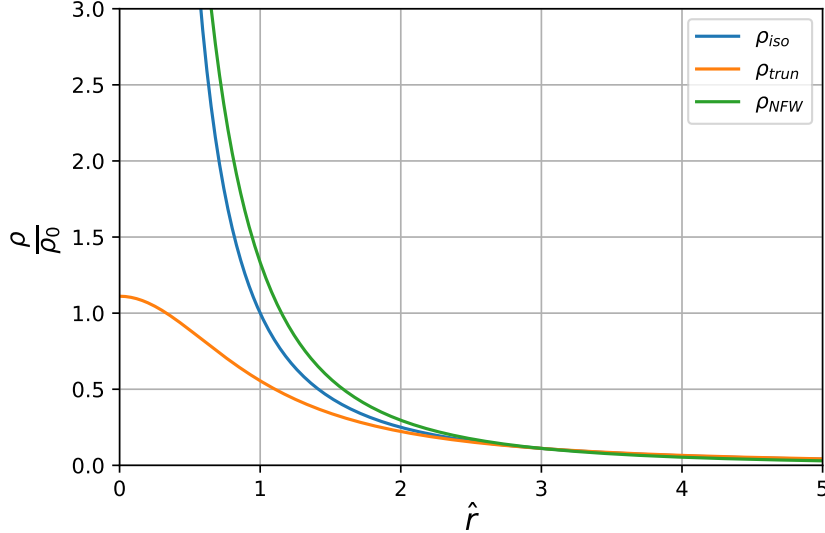


Figura 3.2: Perfiles de densidad adimensionales, elegimos $\hat{r}_0 = 3$ para poder escalar los valores de los tres casos considerados en este trabajo, este punto es donde los tres perfiles son iguales.

donde $M'_0 = \frac{4\pi}{3}\rho_0 R_0^3$ representa la masa patrón para el halo de materia. De acuerdo a la referencia [96] podemos relacionar las densidades características de cada uno de los modelos, exigiendo que la densidad tenga el mismo valor cuando $\hat{r}_0 = 3$ considerando $r_0 = R_0 \hat{r}_0 = 3 R_0$, donde recordemos que R_0 es una cantidad patrón. Por lo tanto, podemos reescribir los perfiles de densidad en términos de ρ_0 , de tal forma que

$$\rho_{\text{iso}} = \frac{\rho_0}{\hat{r}^2}, \quad (3.40)$$

$$\rho_{\text{trun}} = \frac{10\rho_0}{9(1+\hat{r}^2)}, \quad (3.41)$$

$$\rho_{\text{NFW}} = \frac{16\rho_0}{3\hat{r}(1+\hat{r})^2}, \quad (3.42)$$

cada uno de estos perfiles se muestran en la figura (3.2) donde observamos que los modelos isoterma y Navarro-Frenk-White presentan una divergencia cuando $r \rightarrow 0$ mientras que la esfera isoterma-truncada tiene un núcleo plano, como se mencionó anteriormente. Entonces, a partir de las ecuaciones (3.40) - (3.42) estas ecuaciones podemos definir los potenciales adimensionales para los halos, considerando que $\Phi_i = m \sigma_0^2 V_i$, donde V_i es una cantidad adimensional,

$$V_{\text{iso}} = 3\ln(\hat{r}), \quad (3.43)$$

$$V_{\text{trun}} = \frac{5}{3} \left[\ln(1+\hat{r}^2) + \frac{2\arctan(\hat{r})}{\hat{r}} \right], \quad (3.44)$$

$$V_{\text{NFW}} = -16 \frac{\ln(1+\hat{r})}{\hat{r}}, \quad (3.45)$$

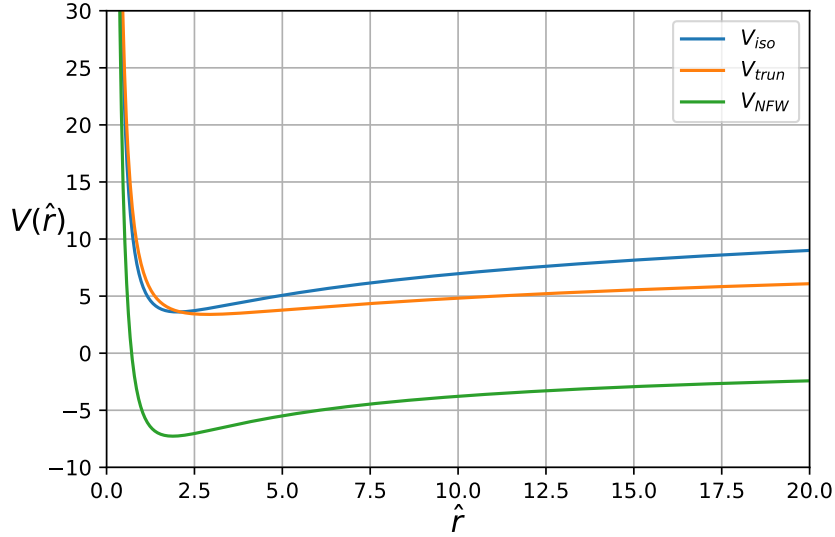


Figura 3.3: Potenciales efectivos adimensionales de diferentes modelos de halos. Esfera isoterma (Azul), Esfera isoterma-truncada (Naranja) y NFW (Verde).

al agregar el termino centrifugo $\frac{l^2}{2\hat{r}^2}$ obtenemos el potencial efectivo, los cuales se muestran en la figura (3.3).

3.4. Radio de influencia.

La idea principal de esta sección es encontrar la zona en que el potencial de la masa puntual Φ_G domina sobre el potencial del halo Φ_H . Considerando el punto en donde el potencial gravitatorio y el potencial del halo debe ser igual para que pueda existir continuidad, es decir, cuando,

$$\Phi_G = \Phi_H, \quad (3.46)$$

podemos obtener un radio de equilibrio entre ambos potenciales. Dado que queremos compara los potenciales a una misma escala, utilizamos nuevamente las cantidades patrón y las ecuaciones adimensionales para los potenciales, obtenidas en la sección anterior. En el caso del potencial gravitatorio, consideramos $\Phi_G = m q_0^2 V_G$, con q_0 definida en el capítulo anterior. Entonces, tenemos

$$q_0^2 V_G = \sigma_0^2 V_i, \quad (3.47)$$

por otro lado podemos considerar el potencial gravitatorio adimensional como utilizando la expresión (3.43) y considerando el potencial gravitatorio adimensional como $V_G = -1/\hat{r}$, obtenemos

$$V_G = \frac{\sigma_0^2}{q_0^2} V_i, \quad (3.48)$$

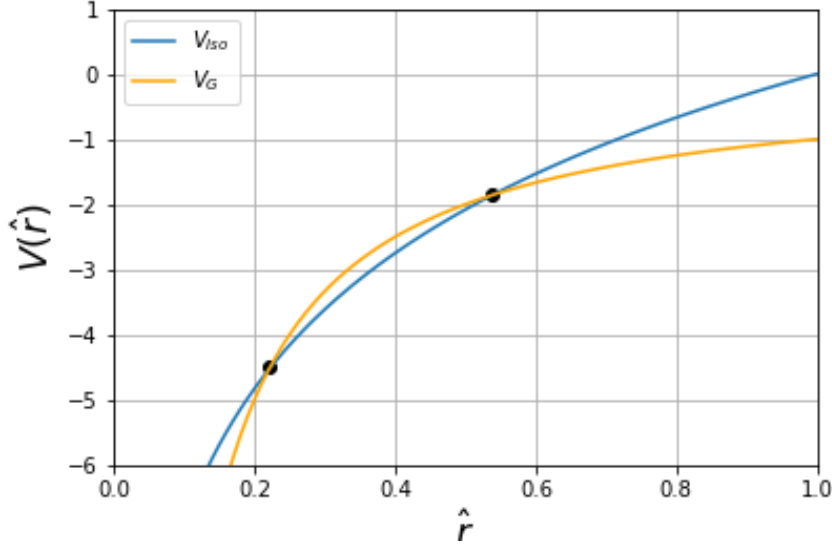


Figura 3.4: Radios de equilibrio para el halo isotermo y el potencial gravitatorio. Considerando $\gamma = 1$, observamos dos valores para el radio de equilibrio $r_{e1} = 0.538 R_0$ y $r_{e2} = 0.222 R_0$.

si consideramos que σ_0^2 es múltiplo de la velocidad característica q_0^2 . Definimos $\gamma = \frac{\sigma_0^2}{q_0^2}$ como una constante adimensional.

$$\frac{1}{\hat{r}} + 3\gamma \ln(\hat{r}) = 0, \quad (3.49)$$

$$\frac{1}{\hat{r}} + \frac{5\gamma}{3} \left[\ln(1 + \hat{r}^2) + \frac{2\arctan(\hat{r})}{\hat{r}} \right] = 0, \quad (3.50)$$

$$\frac{1}{\hat{r}} - 16\gamma \frac{\ln(1 + \hat{r})}{\hat{r}} = 0. \quad (3.51)$$

Al resolver la ecuación (3.49), obtenemos dos soluciones para el radio de equilibrio del halo isotermo cuyo valor depende principalmente de la constante adimensional γ que representa la relación que existe entre las masas del objeto central y del halo de materia que lo rodea. Para demostrar este vínculo consideramos la razón σ_0^2/q_0^2 . Por otro lado, tomamos la definición de q_0^2 del capítulo anterior $q_0^2 = G M_0/R_0$, donde M_0 es la masa patrón del objeto central, si consideramos que la masa del halo es un múltiplo de la masa del objeto central, es decir, $M'_0 = \gamma M_0$, obtenemos

$$\frac{\sigma_0^2}{q_0^2} = M'_0/M_0 = \gamma, \quad (3.52)$$

En la figura (3.4), observamos las dos soluciones de la ecuación (3.49) cuando $\gamma = 1$, que representa que las masas del objeto central y del halo son iguales. Al tomar el valor absoluto de los potenciales, vemos que existe una región en donde el potencial gravitatorio domina hasta alcanzar r_{e1} y una vez que pasamos ese punto la dinámica de la materia esta dominada completamente por el halo hasta

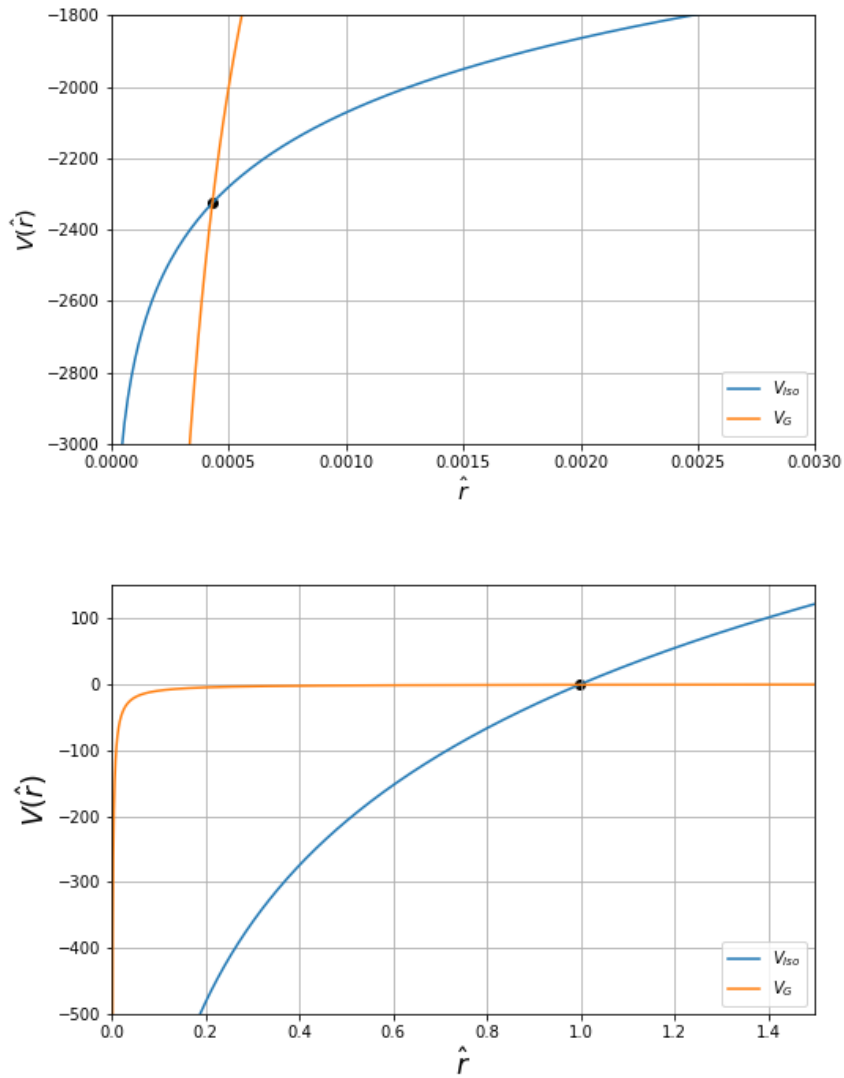


Figura 3.5: Radio de equilibrio, representado por el punto en donde se interceptan los potenciales de una masa puntual y una esfera isoterma. Tomando el valor de $\gamma = 100$, los radios de influencia son $r_{e_1} = 0.00043 R_0$ (Arriba) y $r_{e_2} = 0.99661 R_0$ (Abajo).

r_{e_2} . Sin embargo, conforme aumentamos el valor de γ , es decir, considerando la masa del halo mayor comparada con el objeto central, los radios de equilibrio van cambiando. Para el caso del radio r_{e_1} disminuye y se acerca cada vez más a 0 mientras que el valor r_{e_2} aumenta y tiende a 1. Utilizando $\gamma = 100$ los radios de equilibrio correspondientes son $r_{e_1} = 2.5 \times 10^{-6} R_0$ y $r_{e_2} = 0.9966 R_0$. En la figura (3.5) se muestra los radios de influencias en dos gráficas separadas debido a la diferencia que existe en cada una de ellas. Para el análisis que estamos realizando ocuparemos únicamente el radio r_{e_1} debido que esta dentro del sistema que definimos.

Para dimensionar los valores obtenidos podemos considerar el tamaño del halo de materia oscura en la Vía Láctea. De acuerdo con en el artículo [100], la masa del halo de materia oscura en la Galaxia es de $M_H = 1.37 \times 10^{11} M_\odot$ a un radio de 20 Kpc. En este trabajo ocupamos estos valores como referencia para obtener un radio de equilibrio y poder compararlos con los diferentes casos que estamos considerando. Además, como masa patrón consideramos la masa de Sagitario A* [101], esto implica que $\gamma = 2.9 \times 10^4$. Por lo tanto, los radios de equilibrio son $r_{e_1} = 1.8 \times 10^{-8} R_0$ y $r_{e_2} = 0.999 R_0$ en unidades físicas obtenemos para el primer radio $r_{e_1} = 1.4 \times 10^{-2}$ pc.

Por otra parte, podemos considerar el radio de influencia del agujero negro en términos de la dispersión de la velocidad de las estrellas o el gas a su alrededor [102], descrito como

$$r_{BH} \sim 0.4 \left(\frac{M}{10^6 M_\odot} \right) \left(\frac{\sigma}{100 \text{ km/s}} \right)^{-2} \text{ pc}, \quad (3.53)$$

para una velocidad de $\sigma = 14 \text{ km/s}$ [100] a una distancia de 20 Kpc, obtenemos que el radio de influencia es 2.04×10^{-3} pc, es decir, un orden de magnitud menor al obtenido con la influencia del halo isoterma.

Para el caso del potencial descrito por Navarro-Frenk-White, resolvemos la ecuación (3.51) y calculamos el radio de influencia de la masa puntual, de igual forma que hicimos en el caso anterior. En la figura (3.6) se muestra el radio de equilibrio considerando $\gamma = 100$, en este caso, al tomar valor absoluto del potencial, tenemos que la masa puntual domina hasta una distancia de $r_e = 6.25 \times 10^{-4} R_0$.

Nuevamente consideramos las cantidades patrón para obtener un radio de equilibrio en unidades físicas, por lo tanto, utilizando $\gamma = 2.9 \times 10^4$ el radio de equilibrio obtenido es $r_e = 1.87 \times 10^{-6} R_0$, que corresponde a un valor físico de $r_e = 3.74 \times 10^{-2}$ pc. Vemos que en este caso la diferencia entre el radio de influencia obtenido por la ecuación (3.53) es menor. Comparado con el radio obtenido en el caso de la esfera isoterma, tenemos una mejor aproximación con el potencial de Navarro-Frenk-White. Como mencionamos anteriormente, este perfil densidad tiene un mayor uso y una mejor aproximación a los valores observables en las galaxias.

Por último, estudiaremos el caso del halo isoterma-truncado, dado que este potencial tiene un aplastamiento en regiones cercanas al origen y es la diferencia que tiene a comparación del potencial de la esfera isoterma y del potencial de Navarro-Frenk-White. En la figura (3.7), mostramos que no existe un punto en donde se intersecten los potenciales. Sin embargo, si consideramos el valor absoluto de los potenciales, antes de resolver la ecuación (3.50), podemos encontrar un valor del radio de equilibrio que corresponde a $r_e = 0.00999 R_0$, el cuál se observa en la segunda figura (3.7). Al considerar las cantidades físicas, de manera análoga a los casos anteriores, obtenemos que el radio de influencia para un agujero negro es de $r_e = 2.9 \times 10^{-5} R_0 = 0.598$ pc. Al comparar el radio de equilibrio de los tres casos observamos que la distancia en la que el objeto central domina es menor a 1 pc.

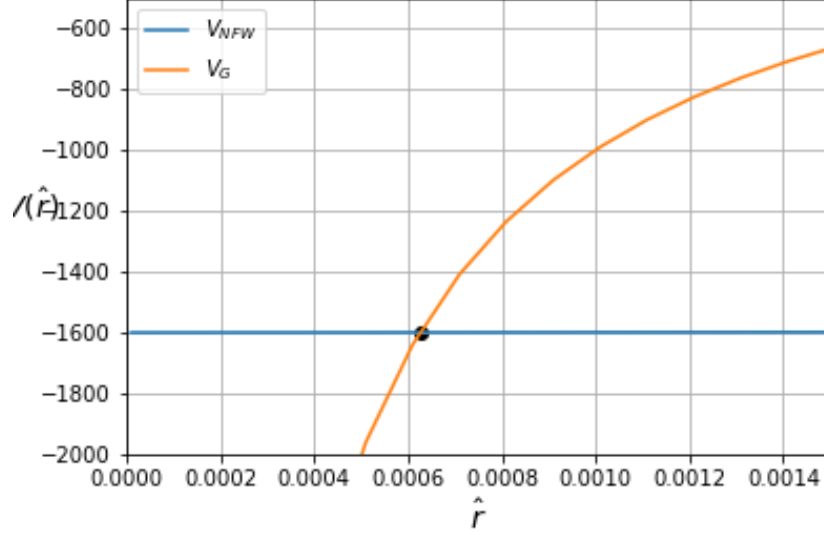


Figura 3.6: Comparación de los potenciales de una masa puntual y de un halo descrito por Navarro-Frenk-White. Considerando a $\gamma = 100$ el radio de equilibrio es de $r_e = 6.25 \times 10^{-4} R_0$, valor obtenido al resolver la ecuación (3.51).

3.5. Tasas de Acreción.

Para obtener una expresión de la tasa de acreción en términos de los perfiles de densidad que estudiamos anteriormente, tomamos la ecuación (3.26), \dot{M} nos describe la materia absorbida en un tiempo determinado. Al considerar una distribución de materia esféricamente simétrica que cae radialmente, escribimos la velocidad como

$$u = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad (3.54)$$

entonces, reescribimos la tasa de acreción (3.26) de la siguiente manera,

$$\dot{M} = 4\pi\sqrt{2GM}r^{3/2}\rho(r), \quad (3.55)$$

debido a que queremos comparar las tasas de acreción en los diferentes casos que presentamos en las secciones anteriores, necesitamos adimensionalizar la expresión anterior ocupando las cantidades patrón. Para ello definimos $\rho = \rho_0\hat{\rho}$ y $M = M_0'\mathcal{M}$, con \mathcal{M} una cantidad adimensional. Entonces, reescribimos la tasa de acreción adimensional como,

$$\dot{\mathcal{M}} = 3\sqrt{2\mathcal{M}}\hat{r}^{3/2}\hat{\rho}, \quad (3.56)$$

utilizando las expresiones de $\hat{\rho}$ a partir de las expresiones para el halo isoterma (3.40), el halo isoterma-tuncado (3.41) y el halo de Navarro-Frenk-White (3.42), obtenemos las siguientes ecua-

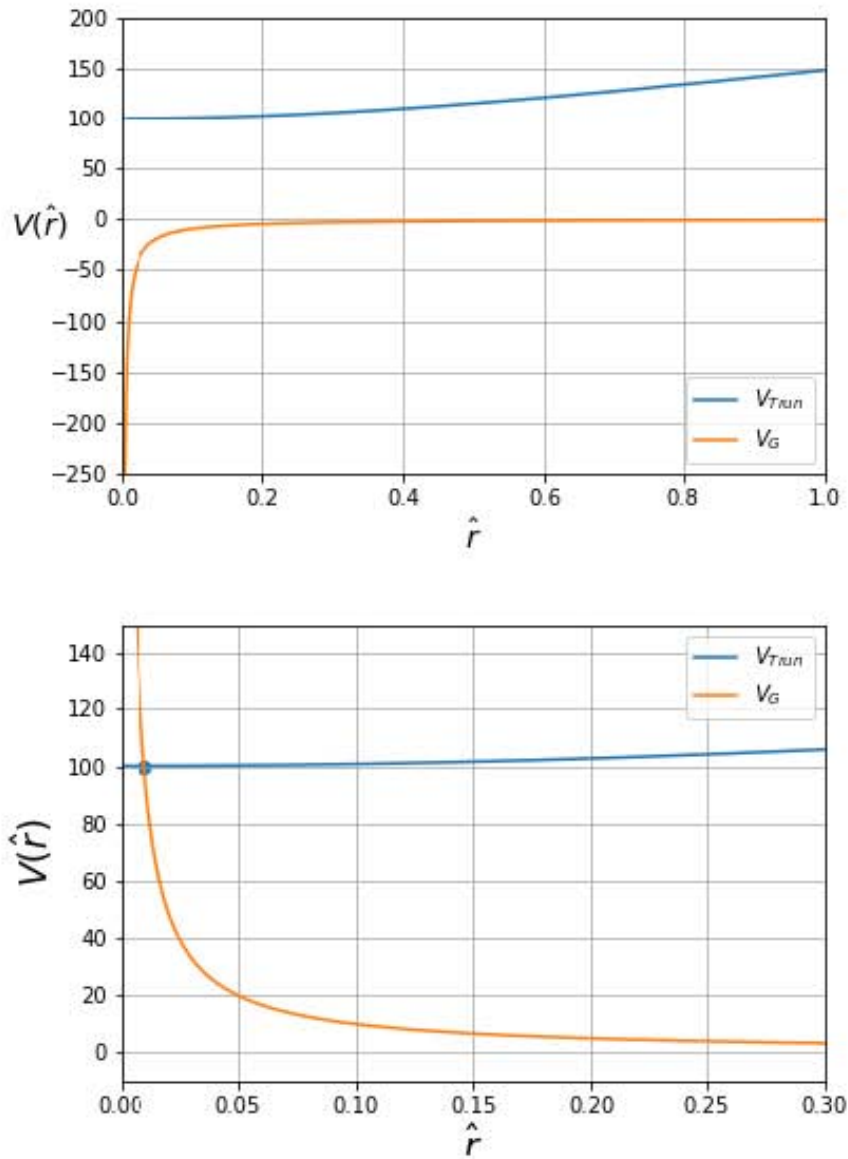


Figura 3.7: Potencial gravitatorio de una masa puntual comparado con el potencial de una esfera isoterma-truncada con $\gamma = 100$. Observamos que el potencial del halo isoterma-truncado se aplatina a distancias cercanas al origen a diferencia del potencial de masa puntual que diverge cuando $r \rightarrow 0$.

ciones para la tasa de acreción,

$$\dot{\mathcal{M}}_{\text{iso}} = 3\sqrt{\frac{2\mathcal{M}}{\hat{r}}}\rho_0, \quad (3.57)$$

$$\dot{\mathcal{M}}_{\text{Trun}} = \frac{10}{3} \left(\sqrt{\frac{2\mathcal{M}}{\hat{r}}}\rho_0 \right) \frac{\hat{r}^2}{(1+\hat{r}^2)}, \quad (3.58)$$

$$\dot{\mathcal{M}}_{\text{NFW}} = 16 \left(\sqrt{\frac{2\mathcal{M}}{\hat{r}}}\rho_0 \right) \frac{\hat{r}}{(1+\hat{r})^2}, \quad (3.59)$$

de manera inmediata identificamos el término entre parentesis de las ds últimas ecuaciones como $\sqrt{\frac{2\mathcal{M}}{\hat{r}}}\rho_0 = \frac{\dot{\mathcal{M}}_{\text{iso}}}{3}$ entonces, podemos reescribir las ecuaciones en terminos de la tasa de acreción del halo isoterma,

$$\dot{\mathcal{M}}_{\text{Trun}} = \frac{10}{9} \frac{\hat{r}^2}{(1+\hat{r}^2)} \dot{\mathcal{M}}_{\text{iso}}, \quad (3.60)$$

$$\dot{\mathcal{M}}_{\text{NFW}} = \frac{16}{3} \frac{\hat{r}}{(1+\hat{r})^2} \dot{\mathcal{M}}_{\text{iso}}, \quad (3.61)$$

Utilizando el radio de equilibrio calculado en la sección anterior del halo isoterma $r_e = 1.8 \times 10^{-8} R_0 = 1.4 \times 10^{-2}$ pc, para una masa de $M = 4.1^6 M_\odot$, la tasa de acreción es de $\dot{M}_{\text{iso}} = 3.32 \times 10^4 M_\odot \text{yr}^{-1}$. Y para los diferentes modelos de halo tenemos,

$$\dot{M}_{\text{Trun}} = 6.5 M_\odot \text{yr}^{-1}, \quad (3.62)$$

$$\dot{M}_{\text{NFW}} = 452.31 M_\odot \text{yr}^{-1}, \quad (3.63)$$

Capítulo 4

Modelo de movimiento de una partícula

El modelo que presentamos en este trabajo se basa en una partícula que esta sometida a la influencia de un potencial central, la cual pierde momento angular a partir de modificar el potencial gravitacional agregando una función dependiente de la coordenada θ . El objetivo principal de esta sección es derivar las ecuaciones de movimiento de la partícula que pierde momento angular y resolverlas a través de un método numérico que nos permita asegurar la conservación de la energía total del sistema a lo largo de largos períodos de tiempo. Estos métodos se les conoce como métodos simplécticos y utilizaremos específicamente el método de Leapfrog, el cuál se estudiara a detalle en las siguientes secciones.

4.1. Momento angular No conservativo.

Como vimos en las secciones anteriores el momento angular total es una cantidad conservada para el movimiento bajo una fuerza central, si consideramos la ecuación de la lagrangiana en tres dimensiones, definida por la ecuación (2.4). El caso de Kerr muestra un claro ejemplo de un sistema en donde el momento angular no es una cantidad conservada pero que es posible encontrar una cantidad que se conserve y pueda describir, junto con las otras constantes de movimiento, las trayectorias de las partículas.

En este capítulo describiremos un modelo que evitemos la barrera de potencial generado por el potencial efectivo y para ello modificaremos el potencial Φ , de tal forma que rompamos la conservación del momento angular y así vencer la barrera de potencial generada por el potencial efectivo (2.23). Entonces, tomamos la superposición del potencial gravitacional (2.3) con un potencial que genere un cambio en una de las coordenadas angulares, dado que queremos conservar la simetría axial, consideramos una función efectiva que dependa explícitamente del ángulo θ . Por otro lado, queremos que la contribución de este termino en el potencial sea significativo a distancias cercanas al objeto central y disminuya conforme la distancia aumente. Entonces proponemos un potencial de la forma,

$$\Phi(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{k}{r^2}f(\theta), \quad (4.1)$$

donde k es una constante y debe tener unidades de momento angular al cuadrado por unidad de masa, para que las unidades del segundo término sean correctas consideramos que la función $f(\theta)$. Uno de los objetivos de este trabajo es demostrar que el agregar una función $f(\theta)$ pueda contribuir a que el momento angular no se conserve y que la caída de partículas hacia el objeto central sea posible y que el momento angular no sea una restricción, sin embargo el análisis es meramente matemático y dejaremos para estudios futuros el encontrar una función que corresponda a un proceso físico. Para empezar el análisis de $f(\theta)$ nos concentraremos en el caso newtoniano de masa puntual. Con la expresión (4.1) escribimos a la función lagrangiana como una lagrangiana efectiva con la forma,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 \right) + \frac{GMm}{r} - \frac{k}{r^2}f(\theta), \quad (4.2)$$

Como hemos visto en las secciones anteriores, la ecuación (4.2) no depende explícitamente del tiempo, entonces la energía es una cantidad conservada. Utilizando la expresión (2.43) encontramos los siguientes momentos canónicos para las coordenadas angulares,

$$p_\phi = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}, \quad (4.3)$$

$$p_\theta = m r^2 \dot{\theta}, \quad (4.4)$$

dado que ϕ es una coordenada cíclica tenemos que p_ϕ es constante. Por otra parte, considerando la norma del momento angular definida en la ecuación (2.50), al derivarla con respecto al tiempo obtenemos

$$\frac{dL^2}{dt} = 2p_\theta \frac{dp_\theta}{dt} - 2 \frac{\cos \theta p_\phi^2}{\sin^3 \theta} \frac{d\theta}{dt}, \quad (4.5)$$

recordemos que $\frac{dp_\theta}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}$ y de la ecuación (4.4) obtenemos que $\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{m r^2 \sin^2 \theta}$. Entonces,

$$\frac{dp_\theta}{dt} = \frac{\cos \theta p_\phi^2}{m r^2 \sin^3 \theta} - \frac{k}{r^2} \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta}, \quad (4.6)$$

sustituyendo en la ecuación (4.5), podemos obtener la siguiente expresión,

$$\frac{dL^2}{dt} = -2mk \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \dot{\theta}, \quad (4.7)$$

esta ecuación implica que existe una pérdida de momento angular debida a la función $f(\theta)$ y por lo tanto no es una cantidad conservada. Sin embargo, observamos que el término de la derecha puede escribirse como una derivada con respecto al tiempo, de tal forma que

$$\frac{d}{dt} (L^2 + 2mkf(\theta)) = 0, \quad (4.8)$$

por lo tanto, la expresión $L^2 + 2mkf(\theta)$ es una nueva constante de movimiento, para cualquier función $f(\theta)$ lo que nos permite definir una variable L_N

$$L_N = (m r^2 \dot{\theta})^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} + 2mkf(\theta), \quad (4.9)$$

al igual que en el caso de la constante de Carter, L_N es una constante de movimiento. Esta constante es de suma importancia para los resultados presentados en este trabajo, debido a que, aún cuando el momento angular no sea conservativo, el movimiento de las partículas está descrito a través de

un potencial efectivo que permite caracterizar el movimiento a partir de su energía. Para encontrar una expresión equivalente a (2.23), necesitamos calcular las ecuaciones de movimiento en términos de esta nueva cantidad conservada. De manera inmediata, podemos encontrar la expresión para $\dot{\phi}$ dada por la expresión (2.48) considerando $\dot{\phi} = u^\phi$. Por otra parte $\dot{\theta} = u^\theta$

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2 \sin^2 \theta} \quad (4.10)$$

por otro lado, a partir de la ecuación (4.9) obtenemos

$$\dot{\theta} = \frac{1}{mr^2} \sqrt{L_N - \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} - 2mkf(\theta)}, \quad (4.11)$$

con ambas ecuaciones, podemos calcular la energía total del sistema. Utilizando coordenadas esféricas tenemos la expresión,

$$E = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - \frac{GMm}{r} + \frac{k}{r^2} f(\theta), \quad (4.12)$$

sustituyendo las expresiones (4.10) y (4.11), la energía se puede escribir como

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_N}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}, \quad (4.13)$$

con la ecuación (2.21), podemos escribir al potencial efectivo para este caso

$$V_{eff} = -E + \frac{L_N}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}, \quad (4.14)$$

La mayor diferencia notable en el caso del momento angular conservativo, es el valor de L_N que al ser una constante arbitraria puede adoptar valores positivos y negativos. Con la ecuación (4.13) obtenemos una expresión para \dot{r} , de tal manera que

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{L_N}{2mr^2} + \frac{GMm}{r} \right)}, \quad (4.15)$$

por lo tanto se debe cumplir que $E - \frac{L_N}{2mr^2} + \frac{GMm}{r} > 0$, una solución a esta desigualdad es considerar que $L_N < 0$ y de manera general se debe cumplir que $L_N < 2mr^2 \left(E + \frac{GMm}{r} \right)$.

Una vez que tenemos las primeras derivadas de cada una de las componentes de la posición de la partícula, podemos derivarlas con respecto del tiempo para poder obtener las ecuaciones que describen su movimiento, de tal manera que obtenemos

$$\ddot{\theta} + \frac{2\dot{r}}{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r^4} \left(\frac{\cos \theta p_\phi^2}{m^2 \sin^3 \theta} - \frac{k}{m} \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \right), \quad (4.16)$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{2p_\phi}{m} \left(\frac{\cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta} \dot{\theta} + \frac{\dot{r}}{r^3 \sin^3 \theta} \right), \quad (4.17)$$

para la última ecuación consideramos la lagrangiana descrita en (4.2), y utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.30) y ocupando (4.11) y (4.10), para obtener,

$$\ddot{r} = \frac{L_N}{m^2 r^3} - \frac{GMm}{r^2}, \quad (4.18)$$

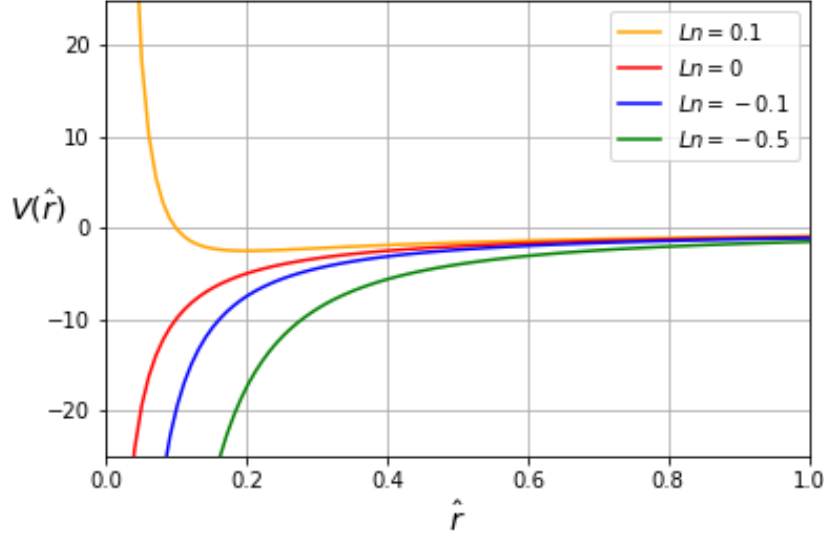


Figura 4.1: Potencial efectivo para distintos valores de L_N , observamos que al aumentar el valor de la constante conservada el potencial adquiere una barrera de potencial (amarillo) pero al adoptar valores negativos existe un pozo de potencial a pesar de que las partículas cuentan con un momento angular (azul), este pozo aumenta conforme L_n disminuye (verde) .

y como era de esperarse, observamos que la única ecuación de movimiento que depende de esta función efectiva es la expresión (4.16) para $\dot{\theta}$. Para obtener las órbitas que siguen las partículas es necesario resolver el sistema de ecuaciones obtenidas en esta sección. Sin embargo, como hemos estado manejando a lo largo de todos los capítulos, la descripción cualitativa y el tiempo de cómputo que requiere el análisis, se simplifica si utilizamos cantidades patrón y ecuaciones adimensionalizadas, es por ello que utilizaremos nuevamente este método para obtener el potencial efectivo (4.14), la mayoría de las cantidades patrón que utilizaremos ya han sido definidas en los capítulos anteriores, por lo tanto, de manera inmediata obtenemos,

$$\hat{V}_{\text{eff}} = -ee + \frac{l_n}{2\hat{r}^2} - \frac{1}{\hat{r}} \quad (4.19)$$

y por lo tanto, la ecuación (4.15) se convierte en,

$$\dot{\hat{r}} = \sqrt{2 \left(ee - \frac{l_n}{2\hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}} \right)}, \quad (4.20)$$

La figura (4.1) representa el potencial de la ecuación (4.19). Cuando $l_n = 0$, de igual forma que el potencial newtoniano, cualquier partícula con energía mayor a \hat{V}_{eff} cae de manera radial y por lo tanto las partículas no cuentan con momento angular. Por otro lado, $l_n > 0$ genera nuevamente una barrera de potencial infinita lo que implica que ninguna partícula puede ser absorbida por el objeto central. Y por último, el caso $l_n < 0$ permite que las partículas aún cuando tienen momento

angular, pueden ser acretadas debido a que se crea un pozo de potencial sin barrera centrífuga, que es nuestro objetivo principal.

La caída de potencial es más pronunciada que para la caída radial libre, por lo que esperamos poder tener tasas de acreción aún mayores a las de caída radial.

El programa que desarrollamos para este trabajo, utiliza el método de Leapfrog para resolver las ecuaciones de movimiento en coordenadas cartesianas, si observamos las ecuaciones (4.16), (4.17) y (4.18), vemos que forman un sistema de ecuaciones acoplado por medio de las componentes \dot{r} y $\dot{\theta}$, además de ser un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Computacionalmente, resolverlas tiene una mayor complicación pues necesitamos realizar una sustitución de variables para poder obtener ecuaciones de primer orden. Sin embargo, esta complicación podemos evitarla considerando un cambio en las coordenadas esféricas a un coordenadas cartesianas, las ecuaciones que se analizar, aún cuando son de segundo orden, están relacionadas únicamente a sus componentes espaciales x , y y z . Para resolverlas utilizamos el método leapfrog, el cual presentaremos en la siguiente sección. Por último realizaremos una descripción detallada del código creado específicamente para este trabajo.

4.2. Descripción del código.

Los algoritmos simplécticos, son métodos importantes para resolver sistemas Hamiltonianos que cubren casi todos los procesos físicos reales con disipación de energía despreciable, tales como el movimiento de cuerpos celestes y satélites artificiales o la dinámica molecular. Una propiedad fundamental de los sistemas Hamiltonianos es que su flujo en el espacio fase preserva la estructura geométrica. Sin embargo, los métodos numéricos convencionales descuidan esta especial característica y conllevan un aumento o disipación artificial de la energía mecánica total. Una ventaja importante de los algoritmos simplécticos es que son adecuados para el seguimiento durante largos períodos de tiempo y para simulaciones cualitativas.

Como en toda ley física, las relaciones establecidas provienen de aproximaciones a los casos del mundo natural, necesarias para la formulación de los problemas y la construcción de modelos que reproducen, con cierto grado de veracidad, las observables en tales experiencias. En este trabajo utilizamos la teoría de la gravitación universal de la mecánica clásica.

Cómo ya mencionamos, este modelo proporciona una descripción adecuada (dentro de condiciones preestablecidas) de la interacción gravitacional entre cuerpos masivos. Entonces, nos ocuparemos de trasladar este modelo físico, a un modelo en el dominio del cálculo de diferencias finitas, por medio de los métodos numéricos y computacionales.

Hablamos de aproximar, debido a que las operaciones que realizaremos no estarán exentas de error, es más, estaremos estableciendo un error como punto de partida en la formulación del problema y un error inherente en las operaciones realizadas en el procesador de cálculo. Este error, podemos controlarlo dentro de cierto rango y veremos que está presente cada vez que implementemos operaciones aritméticas en el computador, mientras que el error al que nos referimos en un principio, será establecido una única vez al plantear nuestro problema. Podemos referirnos al error como el truncamiento en nuestra aproximación al modelo físico y lo definimos como la precisión en nuestras operaciones en el procesador de cálculo, o errores de redondeo.

Dado que deseamos reproducir las ecuaciones del mencionado modelo, tenemos que poder representar el concepto de derivada de cierto sentido en el marco de variables de dominio discreto. Así debemos pasar a modelar un problema en el dominio continuo a uno discreto, sin alejarnos de los resultados conocidos. Todo modelo presenta, dada la naturaleza de las leyes de Newton, de relaciones entre los observables a través de ecuaciones diferenciales, aquí de la importancia del concepto de derivada, que tenemos que aproximar en nuestro nuevo dominio. Así, comencemos por plantear la definición de la derivada de una función de una sola variable como,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (4.21)$$

Dada entonces, una ecuación diferencial de un cierto campo escalar unidimensional $x(t)$

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (4.22)$$

debemos expresarla en nuestro nuevo dominio finito, es decir se tendrán los términos como $t \rightarrow t_i = i\Delta t$ con $i = 0, 1, 2, \dots$, la o las variables $x(t) \rightarrow x_i = x(t_i)$ con $f(x) = f(x_i)$. A su vez, pasamos a crear la equipartición del dominio espacial $x_{i+1} - x_i = \Delta x$. Esto nos permite poder definir al menos tres criterios para representar el concepto de derivada en este dominio finito, que surge de la equipartición de cierto intervalo,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x_{i+1} - x_i}{h} = x'_{FT}, \quad (4.23)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x_i - x_{i-1}}{h} = x'_{BT}, \quad (4.24)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{h} = x'_{CT}, \quad (4.25)$$

Definimos x'_{FT} o Forward Time, x'_{BT} o Backward Time y x'_{CT} o Center Time tres criterios para definir el concepto de derivada como diferencias finitas. Tales criterios aparecen de considerar un desarrollo de Taylor de $x(t)$ hasta el primer orden, $x(t) \approx x(t_i) + (t - t_i)(dx/dt)_{t_i} + \dots$, de esta manera, estamos considerando las anteriores definiciones a primer orden, dado que cada término en estas incluirán un error $O(h)$ de primer orden en nuestra aproximación. Nos referiremos a este error $O(h)$ como error de truncamiento. A mejor aproximación, menor será este error, o mayor su orden en la aproximación empleada. De los diversos métodos presentes en la literatura, nos centraremos en dos métodos similares para resolver el problema, el método de Verlet y el método Leapfrog.

Para problemas de segundo orden en los que f depende sólo de x , el esquema de integración de Leapfrog de segundo orden se usa ampliamente. Su simplicidad lo convierte en una alternativa atractiva. Sin embargo, nos obliga a modificar la forma de cómo y cuándo se definen nuestros datos. Generalmente todos los datos son sincrónicos, es decir, todos los componentes del vector se definen al mismo tiempo. Sin embargo, al menos en los sistemas de segundo orden, a menudo es ventajoso definir las velocidades en los puntos medios de los intervalos; se dice que las velocidades son escalonadas con respecto a las posiciones x , figura (4.2).

Considerando un solo grado de libertad, las ecuaciones de movimiento cumplen con las siguientes

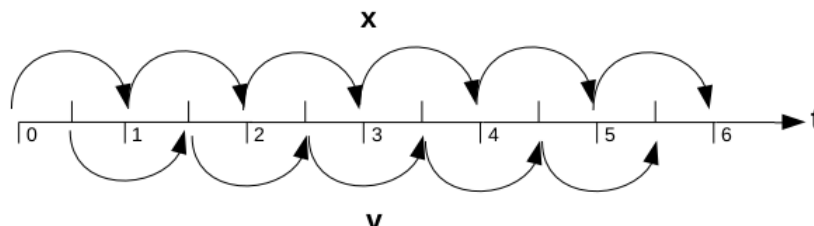


Figura 4.2: Representación de la estructura del método leapfrog.

relaciones

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad (4.26)$$

$$\frac{dv}{dt} = f(x) = \left(-\frac{dU}{dx}\right), \quad (4.27)$$

donde $f(x)$ representa la fuerza que actúa sobre una partícula, la cual suponemos es conservativa lo que nos permite especificar el potencial $U(x)$. Podemos aproximar la ecuación considerando el punto medio de un intervalo de tiempo δt , de acuerdo a la expresión

$$x_1 = x_0 + v_{1/2}\delta t, \quad (4.28)$$

sin embargo, no conocemos $v_{1/2}$, si inferimos la aproximación en la ecuación de la velocidad en (4.27) por el método del punto medio, es decir,

$$v_{3/2} = v_{1/2} + f(x_1)\delta t, \quad (4.29)$$

dado que conocemos el valor de x_1 . Por lo tanto, podemos obtener el valor para x_2 de acuerdo con la relación $x_2 = x_1 + v_{3/2}\delta t$ y avanzar en la posición, para obtener el valor de $f(x_2)$ y de esta manera obtener un nuevo para la velocidad $v_{5/2} = v_{3/2} + f(x_2)\delta t$. Entonces, de manera general, con esta definición podemos expresar el método Leapfrog a partir de las ecuaciones

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + v_{i+1/2}\delta t, \\ v_{i+3/2} &= v_{i-1/2} + f(x_{i+1})\delta t, \end{aligned} \quad (4.30)$$

con $i = 0, 1, 2, \dots$. En la figura (4.2) la simetría entre las formas en que x y v avanzan en el tiempo. Este esquema de hecho da una precisión de segundo orden en x . Por supuesto, las condiciones iniciales rara vez se especifican en los tiempos escalonados requeridos por el esquema de salto. Por lo general, debemos usar el llamado esquema de “arranque automático” (como Euler, Mid-point o Runge-Kutta-4) para dar el primer paso y establecer el valor de $v_{1/2}$. El interés en este método yace en la simplicidad del código y la conservación de cantidades físicas de interés en los sistemas, como son la energía y el momento angular, además de ser más eficiente al compararse con otros métodos más sofisticado. La preservación de la energía o del momento angular, podemos observarla a través de la oscilación de estos valores entorno al valor real proveniente de la solución analítica

acotados por un error global de orden 2. Este método presenta una herramienta útil para obtener una descripción cualitativa de un sistema con una estabilidad asegurada. Debemos tener en cuenta que al momento del cómputo de cantidades como energía, o momento angular, se precisa evaluar las posiciones y velocidades en un mismo instante, por lo tanto es necesario correr los valores de posición o velocidad para que estén evaluados en un mismo tiempo. Podemos considerar dos formas de obtener posiciones y velocidades evaluadas en los mismos pasos de tiempo:

- Dado un paso n y una velocidad en $v_{n+1/2}$, retrasar la velocidad con los datos conocidos de aceleración y posición en el paso n , como $v_n = v_{n+1} - f(x_n)dt/2$
- Considerar una variación del método conocido como Velocidad Verlet. En el cual la velocidad y posiciones pueden ser conocidas a iguales intervalos de tiempo según,

$$v_{n+1/2} = v_n + \frac{1}{2}f(x_n)\delta t, \quad (4.31)$$

$$x_{n+1} = x_n + v_{n+1/2}\delta t, \quad (4.32)$$

$$v_{n+1} = v_{n+1/2} + \frac{1}{2}f(x_{n+1})\delta t \quad (4.33)$$

En el presente trabajo, utilizaremos esta ultima opción. Otra ventaja del método de Leapfrog es la reversibilidad en el tiempo debido a la simetría en que se define, que nos permite conservar la energía, el momento angular y cualquier otra cantidad conservada en cada uno de los pasos de tiempo de tal forma que no tenemos pérdida de estas cantidades debida al código y nos permite realizar el análisis físico de estas cantidades con un error mínimo.

El código numérico desarrollado para este trabajo consta de dos partes: la primera está programada en fortran la cual es la base de todos los resultados obtenidos, debido a que dadas las posiciones y las velocidades iniciales, resuelve las ecuaciones de movimiento a través del método Leapfrog descrito anteriormente, los archivos de salida generados por el sistema son:

- **init_pos.dat:** valores x , y , z de las posiciones iniciales de las partículas sobre una esfera determinada por un radio r_0 .

Para generar cada una de los valores iniciales de la posición, definimos un vector unitario totalmente aleatorio a través de la función **random_number** de fortran, esta nos dará un valor dentro del intervalos $[0, 1]$ y ya que queremos que las partículas se encuentren rodeando a objeto central, el cual definiremos en el origen, necesitamos generar puntos en el intervalo $[-1, 1]$. Por lo tanto, definiremos:

```
do i = 1, n_particles
  call random_number(ran)
  x0 = 2.*(ran(1)-0.5)
  y0 = 2.*(ran(2)-0.5)
  z0 = 2.*(ran(3)-0.5)

  x(1,i) = r0*x0/sqrt(x0**2 + y0**2 + z0**2)
  x(2,i) = r0*y0/sqrt(x0**2 + y0**2 + z0**2)
  x(3,i) = r0*z0/sqrt(x0**2 + y0**2 + z0**2)
end do
```

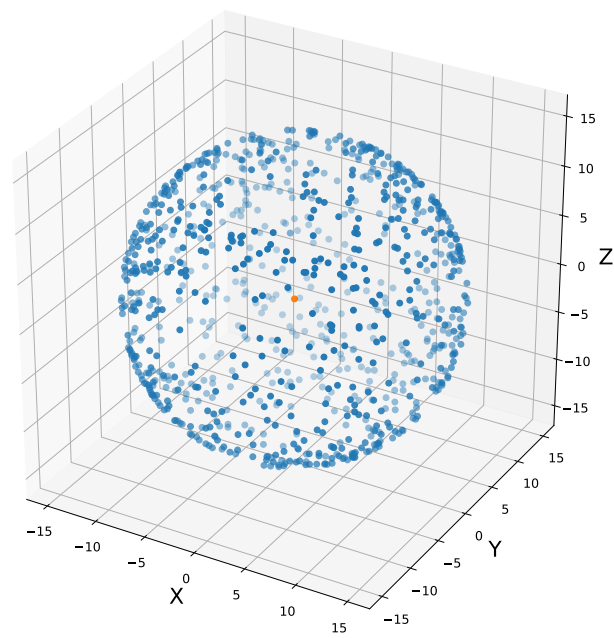


Figura 4.3: Ejemplo de la distribución inicial de partículas considerando $N=1000$, a cada una de ellas se le asigna una velocidad descrita por una función gaussiana

ya que queremos que las partículas se encuentren inicialmente en un radio, multiplicamos el vector unitario creado por la función `Random` por r_0 , esto crea una esfera alrededor del origen, figura (4.3).

- **init_vel.dat**: componentes iniciales de velocidad.

Vamos a considerar diversos casos en los cuales la velocidad inicial corresponda a una distribución gaussiana, así como también una velocidad constante y para probar el código en una situación física, consideraremos las velocidades de los 5 planetas del sistema solar. En el código, la subrutina en donde definimos cada uno de los casos es **init_velocity(v0,v)**.

- **energia.dat**: genera la energía total en cada paso de tiempo para cada una de las partículas, a partir de la ecuación:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{k}{x^2 + y^2 + z^2}f(x, y, z), \quad (4.34)$$

donde v es la norma de la velocidad definida como $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, con E una cantidad conservada. Esta expresión está implementada en la subrutina **energy(total_energy)**, la cual requiere de la posición $x(3,N)$ y la velocidad $v(3,N)$.

- **momento.dat**: genera el momento angular en cada paso de tiempo para todas las partículas. Por definición tomamos la ecuación $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, de la cual podemos obtener las componentes del vector y por lo tanto la norma del momento angular, considerando la expresión,

$$L^2 = (y v_z - z v_y)^2 + (z v_x - x v_z)^2 + (x v_y - y v_x)^2 \quad (4.35)$$

La subrutina **momento(total_momentum)** requiere de la posición $x(3,N)$ y de la velocidad $v(3,N)$.

- **orbita.dat**: genera las trayectorias de las partículas en un tiempo dado. En la subrutina que crea este archivo, se resuelven las ecuaciones de movimiento, una vez que se define el valor para la función $f(x, y, z)$ en coordenadas cartesianas y utilizando los valores de la posición y la velocidad generadas por el método Leapfrog, en el siguiente capítulo analizaremos con mayor detalle dicha solución.
- **distancia.dat**: se refiere a la distancia a la que se encuentra la partícula con respecto al objeto central.

El método de Leapfrog esta descrito en tres subrutinas: **integrator_leapfrog_part1** para obtener las posiciones en cada paso de tiempo; **integrator_leapfrog_part1** para las velocidades y por ultimo, **gravity_calculate_acceleration** la corrección de velocidad Velvet para obtener las posiciones y velocidades en un mismo tiempo.

La segunda parte del programa consiste en una rutina en lenguaje Python, la cual se utilizará para el análisis de datos y para la generación de las gráficas correspondientes a los valores obtenidos, los cuales se presentan en el siguiente capítulo.

Capítulo 5

Resultados.

Como vimos en el capítulo anterior, el programa desarrollado en este trabajo resuelve las ecuaciones de movimiento de las partículas alrededor de una masa central. Dichas partículas cuentan con momento angular por lo que es necesario proponer un mecanismo que permita romper la barrera de potencial generada por el potencial efectivo cuando el momento angular se conserva. El modelo que desarrollamos agrega un término efectivo al potencial gravitacional, por medio de una función dependiente de la coordenada angular θ . La función propuesta en este capítulo está considerada a partir de la ecuación (4.11) por lo cual proponemos la siguiente expresión

$$f(\theta) = \frac{1}{2m} \left(L_N - \frac{p_\phi^2}{\text{sen}^2\theta} \right) e^{-q(\text{sen}^2\theta - \lambda)^2}, \quad (5.1)$$

donde q es una constante arbitraria, cuyo significado explicaremos más adelante. Utilizamos una función exponencial por que queremos que la función $f(\theta)$ este localizada alrededor de un ángulo determinado, el cual está representado a través del término $\text{sen}^2\theta$ y proporcional a una forma tipo gaussiana, además de tener una transformación simple a coordenadas cartesianas requerida para el código. Entonces, cuando sustituimos en la expresión (4.11) y (4.16), obtenemos las ecuaciones

$$\dot{\theta} = \frac{1}{mr^2} \sqrt{\left(L_N - \frac{p_\phi^2}{\text{sen}^2\theta} \right) (1 - k e^{-q(\text{sen}^2\theta - \lambda)^2})}, \quad (5.2)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2\dot{r}}{r} \dot{\theta} = \frac{\cos\theta p_\phi^2}{r^4 m^2 \text{sen}^3\theta} (1 - k e^{-q(\text{sen}^2\theta - \lambda)^2}), \quad (5.3)$$

es en estas expresiones en donde el valor de q juega un papel importante, ya que si elegimos $q = 0$ podemos fácilmente eliminar la función exponencial y así poder determinar ciertas características de la función. Además, cuando consideramos el caso en donde $k = 1$, ambas ecuaciones se anulan, es decir, $\dot{\theta} = 0$ y $\ddot{\theta} = 0$, esto implica que la órbita de la partícula mantiene un ángulo fijo alrededor del objeto central. Dado que el ángulo θ puede ser arbitrario, al imponer que las partículas tengan una velocidad (5.23), las órbitas generadas se mantienen en un plano θ como vemos en la figura (5.1). Debido al valor de k , las partículas pierden momento angular y por lo tanto se acercan al origen, por lo que se genera una trayectoria en espiral donde las partículas caen al centro. De manera general cuando $q \neq 0$ el plano cambiará, aumentando o disminuyendo alrededor del valor de θ . Dado que necesitamos que la partícula caiga hacia el centro, buscaremos el valor de q para

que esto ocurra. Como hemos manejado hasta el momento las ecuaciones adimensionales ésto nos permite realizar un mejor análisis cualitativo de resultados importantes que pueden ser observados de manera inmediata, es por ello que, con ayuda de las cantidades patrón definidas anteriormente, reescribimos las ecuaciones (4.17), (4.18) y (5.3), de la siguiente manera,

$$\ddot{\phi} = -2\hat{p}_\phi \left(\frac{\cos\theta}{\hat{r}^2 \sin^3\theta} \dot{\theta} + \frac{\dot{\hat{r}}}{\hat{r}^3 \sin^3\theta} \right), \quad (5.4)$$

$$\ddot{\hat{r}} = \frac{l_n}{\hat{r}^3} - \frac{1}{\hat{r}^2}, \quad (5.5)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2\dot{\hat{r}}}{\hat{r}} \dot{\theta} = \frac{\cos\theta \hat{p}_\phi^2}{\hat{r}^4 \sin^3\theta} \left(1 - k e^{-q(\sin^2\theta - \lambda)^2} \right), \quad (5.6)$$

donde $\dot{\hat{r}}$ y $\dot{\theta}$ están dados por las expresiones, también adimensionales,

$$\dot{\hat{r}} = \sqrt{2 \left(e e - \frac{l_n}{2\hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}} \right)}, \quad (5.7)$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\hat{r}^2} \sqrt{\left(l_n - \frac{\hat{p}_\phi^2}{\sin^2\theta} \right) \left(1 - k e^{-q(\sin^2\theta - \lambda)^2} \right)}, \quad (5.8)$$

Una vez definida la función $f(\theta)$, es necesario expresar las ecuaciones de movimiento en términos de ella, ya que el código numérico se encuentra definido en coordenada cartesianas. Utilizando la transformación usual de coordenadas esféricas a coordenadas cartesianas,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \quad \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad (5.9)$$

encontramos el valor para $\sin\theta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + z^2 + z^2}$. De igual forma que en los capítulos anteriores, ocuparemos cantidades patrón lo que nos permite adimensionar nuestras ecuaciones y reducir el tiempo y la memoria utilizada en el computo. Entonces, a partir de este momento se sobre entiende que x , y , y z son adimensionales. Por lo tanto, aplicando estos cambios en la ecuación de la lagrangiana obtenemos,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{k}{x^2 + y^2 + z^2} f(x, y, z), \quad (5.10)$$

$$\text{con } f(x, y, z) = \frac{1}{2} \left[l_n - \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2} \hat{p}_z \right)^2 \right] e^{-q \left[\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} - \lambda \right]^2}, \quad (5.11)$$

utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.5), encontramos de manera inmediata las ecuaciones que describen el movimiento, entonces,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{k}{x^2 + y^2 + z^2} \frac{d f(x, y, z)}{dx} + \frac{2xk}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} f(x, y, z) \quad (5.12)$$

donde,

$$\frac{d f(x, y, z)}{dx} = x z^2 e^{-q \left[\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} - \lambda \right]^2} \left[\frac{\hat{p}_z^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2q \left(l_n - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2} \hat{p}_z \right) \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2} - \lambda \right)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right] \quad (5.13)$$

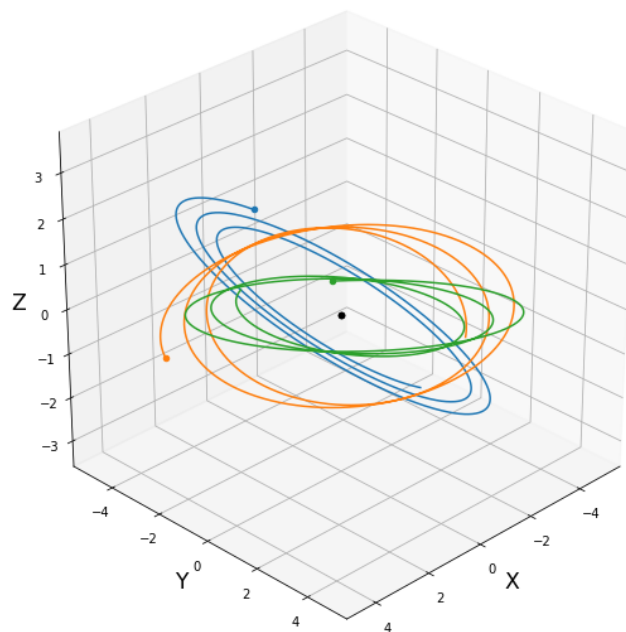


Figura 5.1: Trayectoria de 3 partículas alrededor de un objeto central, considerando $q = 0$ y $k = 1$, observamos que el movimiento permanece en el plano definido por θ constante.

para simplificar la expresión utilizamos un cambio de notación, pero seguimos en cartesianas, dado por $\tilde{r} = x^2 + y^2 + z^2$, demás utilizamos $\tilde{s} = x^2 + y^2$ entonces podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\frac{df(x, y, z)}{dx} = xz^2 e^{-q[\frac{\tilde{s}}{\tilde{r}} - \lambda]^2} \left[\frac{\hat{p}_z^2}{\tilde{s}^2} - \frac{2q \left(l_n - \frac{\tilde{r}}{\tilde{s}} \hat{p}_z^2 \right) \left(\frac{\tilde{s}}{\tilde{r}} - \lambda \right)}{\tilde{r}^2} \right], \quad (5.14)$$

al sustituir esta expresión en la ecuación (5.12), obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} = & -\frac{x}{\tilde{r}^{3/2}} - \frac{kxz^2 e^{-q[\frac{\tilde{s}}{\tilde{r}} - \lambda]^2}}{\tilde{r}} \left[\frac{\hat{p}_z^2}{\tilde{s}^2} - \frac{2q \left(l_n - \frac{\tilde{r}}{\tilde{s}} \hat{p}_z^2 \right) \left(\frac{\tilde{s}}{\tilde{r}} - \lambda \right)}{\tilde{r}^2} \right] \\ & + \frac{2xk}{\tilde{r}^2} \left[\frac{1}{2} \left(l_n - \frac{\tilde{r}}{\tilde{s}} \hat{p}_z^2 \right) e^{-q[\frac{\tilde{s}}{\tilde{r}} - \lambda]^2} \right], \end{aligned} \quad (5.15)$$

simplificando y acomodando los términos podemos reescribir la ecuación como,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{\tilde{r}^{3/2}} - \frac{xke^{-q[\frac{\tilde{s}}{\tilde{r}} - \lambda]^2}}{\tilde{r}} \left[\frac{z^2 \hat{p}_z^2}{\tilde{s}^2} - \frac{\left(l_n - \frac{\tilde{r}}{\tilde{s}} \hat{p}_z^2 \right) \left(\frac{2qz^2}{\tilde{r}} \left(\frac{\tilde{s}}{\tilde{r}} - \lambda \right) + 1 \right)}{\tilde{r}} \right] \quad (5.16)$$

de manera similar podemos obtener la ecuación de movimiento para la coordenada y , por lo tanto,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{\tilde{r}^{3/2}} - \frac{yke^{-q[\frac{\tilde{s}}{\tilde{r}} - \lambda]^2}}{\tilde{r}} \left[\frac{z^2 \hat{p}_z^2}{\tilde{s}^2} - \frac{\left(l_n - \frac{\tilde{r}}{\tilde{s}} \hat{p}_z^2 \right) \left(\frac{2qz^2}{\tilde{r}} \left(\frac{\tilde{s}}{\tilde{r}} - \lambda \right) + 1 \right)}{\tilde{r}} \right] \quad (5.17)$$

pero para la ecuación de z , la derivada de la función $f(x, y, z)$ con respecto a esta coordenada, cambia en comparación con las dos anteriores, entonces,

$$\frac{df(x, y, z)}{dz} = z e^{-q[\frac{\tilde{s}}{\tilde{r}} - \lambda]^2} \left[-\frac{\hat{p}_z^2}{\tilde{s}} + \frac{2q\tilde{s}}{\tilde{r}^2} \left(l_n - \frac{\tilde{r}}{\tilde{s}} \hat{p}_z^2 \right) \left(\frac{\tilde{s}}{\tilde{r}} - \lambda \right) \right], \quad (5.18)$$

entonces, usando nuevamente la ecuación (5.12), pero para la coordenada z y reducimos términos, obtenemos la tercera ecuación de movimiento de la partícula,

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{z}{\tilde{r}^{3/2}} + \frac{kze^{-q[\frac{\tilde{s}}{\tilde{r}} - \lambda]^2}}{\tilde{r}} \left[\frac{\hat{p}_z^2}{\tilde{s}} - \frac{\left(l_n - \frac{\tilde{r}}{\tilde{s}} \hat{p}_z^2 \right) \left(\frac{2q\tilde{s}}{\tilde{r}} \left(\frac{\tilde{s}}{\tilde{r}} - \lambda \right) - 1 \right)}{\tilde{r}} \right] \quad (5.19)$$

por lo tanto las ecuaciones (5.16), (5.17) y (5.19), describen la trayectoria de una partícula, que sufre un cambio de momento angular. La solución a estas ecuaciones, no es analítica, por lo que necesitamos utilizar un método numérico que sea adecuado para resolverlo. Sin embargo, bajo ciertas condiciones estas ecuaciones se reducen a los casos usuales, en donde las partículas no cuentan con momento angular y el caso en donde el momento angular se conserva, para ello iniciaremos el análisis de estas situaciones para demostrar la validez de los cálculos matemáticos y del programa desarrollado en este trabajo que en nuestro caso es $k = 0$.

5.1. Órbitas Circulares y elípticas.

Uno de los casos más sencillos que podemos considerar y el cuál podemos comparar con los resultados de la literatura, es aquel en donde $k = 0$ lo que nos reduce las ecuaciones al movimiento de una partícula bajo la influencia de una fuerza central en donde el momento angular se conserva. Entonces, las ecuaciones de movimiento en coordenadas cartesianas, descritas anteriormente, pueden escribirse como,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -\frac{x}{\tilde{r}^{3/2}}, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\frac{y}{\tilde{r}^{3/2}}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -\frac{z}{\tilde{r}^{3/2}},\end{aligned}\tag{5.20}$$

Como vimos en el primer capítulo las trayectorias que siguen las partículas en esta situación están determinadas por la ecuación de las cónicas (2.15), las cuales dependen de la velocidad y por lo tanto la energía de cada una de ellas. Tomando el potencial efectivo, definido en la sección (2.3), y escrita por la ecuación,

$$\hat{V}_{eff} = -ee - \frac{1}{\hat{r}} + \frac{l_n^2}{2\hat{r}^2},\tag{5.21}$$

Al analizar las trayectorias de las partículas considerando el punto en donde el potencial efectivo es mínimo, es decir, cuando $r = l^2$, vimos en el capítulo 2 que en dicho punto las órbitas serán circulares alrededor de la masa central. Bajo éstas condiciones podemos definir los parámetros iniciales que usaremos en el código.

Consideramos una distribución esférica de 100 partículas alrededor del origen del sistema de referencia, figura (4.3). Como vimos en la sección 2.7, el potencial efectivo newtoniano y relativista son iguales a cierta distancia, por lo que podemos elegir una distancia límite en donde el potencial newtoniano sea válido y que estemos lo suficientemente cerca de la masa puntual, en términos del radio del horizonte r_h tomamos $r_0 = 10 r_h$. Para que las trayectorias de las partículas sean circulares, se utiliza la tercera ley de Kepler, que considera a la fuerza gravitacional $F_g = \frac{GMm}{r^2}$ en equilibrio con la fuerza centrífuga $F_c = m\omega^2 r$, donde ω es la velocidad angular definida en términos del periodo, como $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Entonces,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3,\tag{5.22}$$

Por otro lado podemos considerar la norma de la velocidad como $v^2 = v_r^2 + v_T^2$, donde $v_r = \dot{r}$ es la componente radial y v_T es la componente tangencial de la velocidad definida como $v_T^2 = r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\phi}^2)$ en coordenadas esféricas. Sabemos que la velocidad tangencial está dada por la expresión $v_T = \omega r = \frac{2\pi}{T} r$, utilizando la ecuación (5.22) obtenemos,

$$v_T = \sqrt{\frac{GM}{r}},\tag{5.23}$$

dado que el código se encuentra en coordenadas cartesianas, utilizamos la transformación de coordenadas (5.9), para r para obtener una expresión para la velocidad. Entonces, derivando la

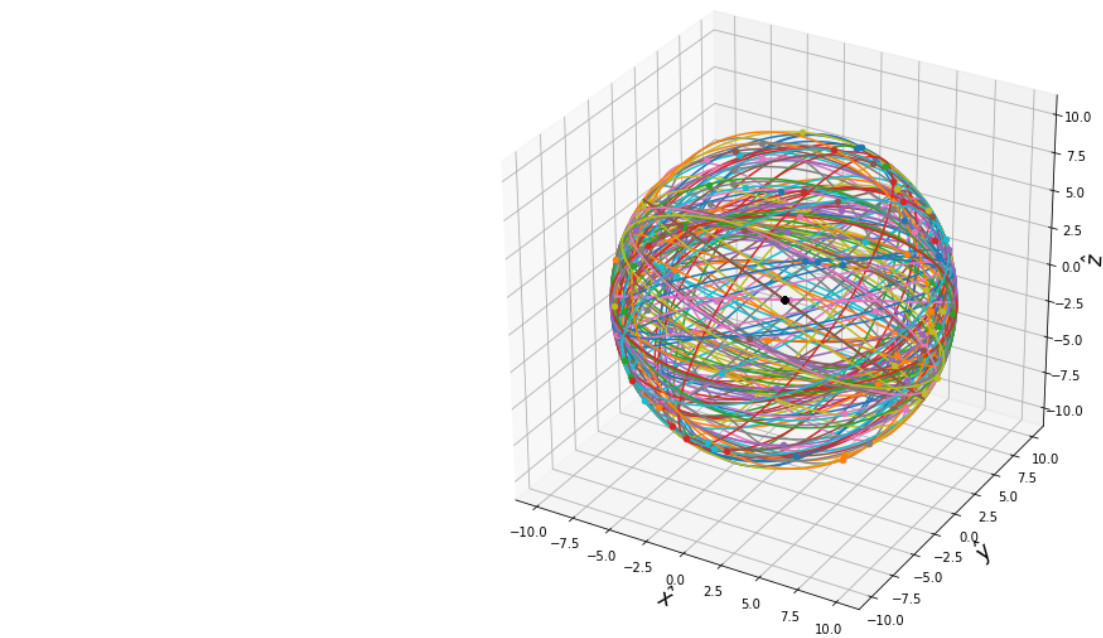


Figura 5.2: Trayectoria de 100 partículas a una distancia de $\hat{r} = 10 r_h$ y con una velocidad inicial de $\hat{v}_T = 0.3162$. Cada una de las partículas tiene una energía de $ee = -0.099 E$ y un momento angular $l = 3.1622 L$

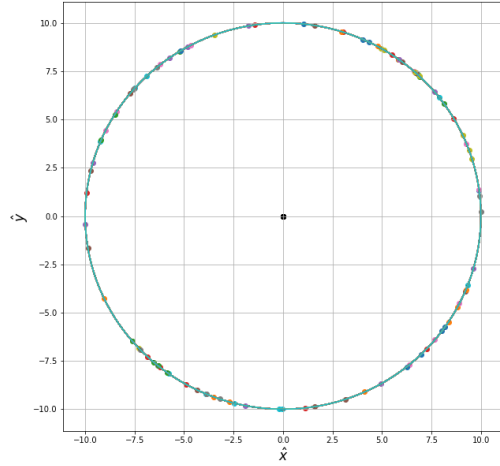


Figura 5.3: Trayectorias circulares de 100 partículas alrededor de una masa central ubicada en el origen del sistema de referencia, las distancias x , y , z son cantidades adimensionales las cuales son múltiplos del radio del horizonte.

expresión $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ con respecto al tiempo

$$v_r = \frac{1}{r} (x v_x + y v_y + z v_z), \quad (5.24)$$

Para mantener una órbita circular, la velocidad radial es nula y solo depende de la velocidad tangencial. Entonces,

$$x v_x + y v_y + z v_z = 0, \quad (5.25)$$

además utilizando la norma de la velocidad en coordenadas cartesianas $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v_T^2$. Por practicidad consideramos la componente z de la velocidad como $v_z = 0$, y resolvemos el sistema formado por estas dos últimas ecuaciones, de tal forma que obtenemos,

$$v_x = \frac{y v_T}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (5.26)$$

$$v_y = -\frac{x v_T}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (5.27)$$

Nuevamente utilizamos las cantidades patrón para poder obtener los resultados de manera cualitativa de las trayectorias de las partículas y verificar que la energía y el momento angular se conserva. Para ello tomamos a la velocidad tangencial como, $v_T = q_0 \hat{v}_T$ donde $q_0^2 = \frac{GM_0}{R_0}$ por lo tanto reescribimos la ecuación (5.23) como,

$$\hat{v}_T = \frac{1}{\sqrt{\hat{r}}}, \quad (5.28)$$

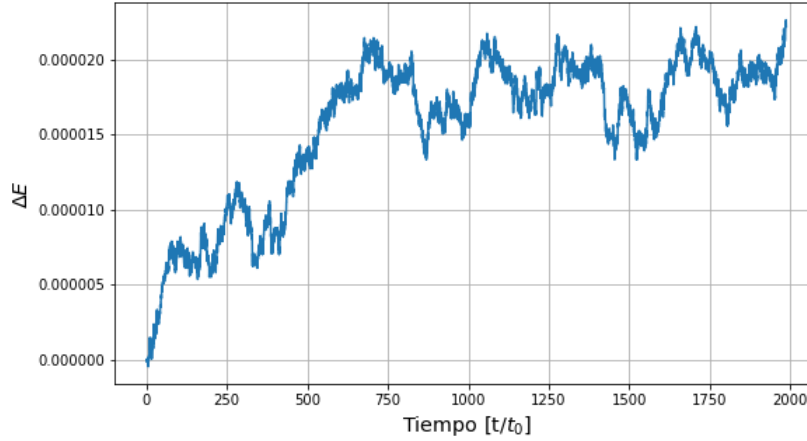


Figura 5.4: Variación de la energía para las órbitas circulares. Considerando las condiciones iniciales para la energía $E = -0.05 \hat{e}$.

Ya que las partículas inicialmente se encuentran a una distancia $\hat{r} = 10 r_h$, la velocidad que deben tener para mantenerse en una órbita circular es de aproximadamente $\hat{v}_T = 0.3162$. Por otro lado consideramos que el tiempo que tarda en dar una vuelta completa alrededor de la masa puntual (5.22) en cantidades patrón es,

$$\hat{t} = 2\pi\hat{r}^{3/2}, \quad (5.29)$$

que corresponde a un valor de $\hat{t} = 198.6917 T$. Las trayectorias obtenidas en este caso se muestran en la figura (5.3).

Sin embargo, para una mejor visualización podemos restringir el movimiento en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$ que en coordenadas cartesianas corresponde a $z = 0$. Donde vemos que las 100 partículas giran alrededor de la masa puntual, bajo las condiciones iniciales usadas, el código calcula la energía y el momento angular en cada paso del tiempo de tal forma que obtenemos en promedio, una energía de $ee = -0.05 E$ y un momento angular de $l = 3.1622 L$ ya que, recordemos que $E = m q_0^2 ee$ y $L = m q_0 R_0 l$. De acuerdo a las figuras (5.4) y (5.5), observamos que tanto la energía como el momento angular son cantidades conservadas, el cambio de dichas cantidades a cada paso de tiempo es del orden de 10^{-6} .

Podemos demostrar que la órbita es circular cuando la excentricidad es cero, por lo que utilizamos la ecuación (2.16), la cuál de manera adimensional se escribe como,

$$\epsilon = \sqrt{1 + l^2 ee}, \quad (5.30)$$

al utilizar los datos obtenidos por el código. comprobamos que $\epsilon = 2.7 \times 10^{-6}$, que podemos interpretar como $\epsilon \approx 0$. Concluimos que las ecuaciones derivadas en la sección anterior, con la condición de $k = 0$ reproducen el problema de una partícula sometida a una fuerza central, en el caso de las órbitas circulares.

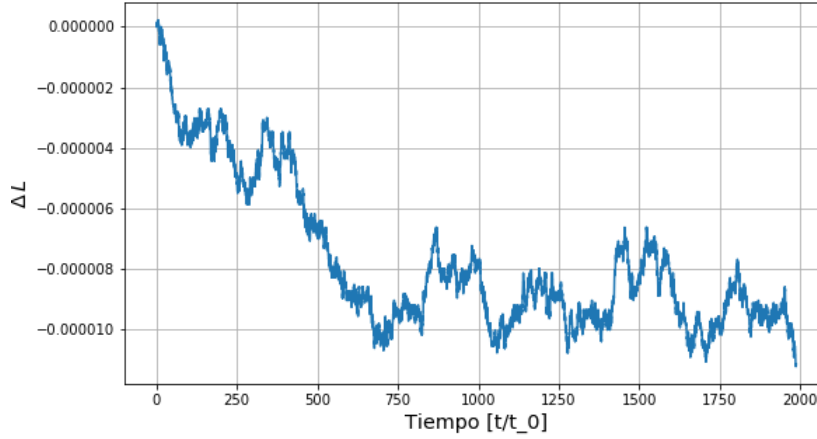


Figura 5.5: Cambio del momento angular. Tomando una partícula que órbita alrededor de una masa puntual considerando un momento inicial de $L = 3.14l$

El programa también reproduce órbitas elípticas, basta con modificar la velocidad inicial de cada una de las partículas. Para ello, consideramos una distribución gaussiana descrita por la ecuación,

$$f(v) = v_0 \exp\left(\frac{-(v_0 - 1)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (5.31)$$

donde σ es la dispersión de la distribución. Tomamos el valor máximo de la velocidad inicial v_0 como la velocidad tangencial (5.23), implementando esta condición en el código y manteniendo el movimiento en el plano ecuatorial, podemos apreciar que las partículas que tienen velocidades cercanas al valor máximo de la distribución $v_0 = 0.31622$ siguen órbitas circulares. Mientras que aquellas con velocidad menor recorren una órbita elíptica, como vemos en la figura (5.6).

Debido a que el momento angular depende de la velocidad de acuerdo a la siguiente expresión, considerando $v_z = 0$ y $z = 0$,

$$l = x v_y - y v_x, \quad (5.32)$$

para cada una de las partículas l es diferente. La figura (5.7), muestra el potencial efectivo (5.21) para cada partícula observamos que el valor de mínima energía corresponde a un valor diferente de la posición de acuerdo a $\hat{r} = l^2$, en la figura el punto mínimo está representado por la intersección de las líneas punteadas. Como las tres partículas se encuentran inicialmente a una distancia $\hat{r} = 10 R_0$, sólo una de ellas se encuentra en el punto que corresponde a orbitas circulares, mientras que las otras dos este punto se encuentra a una distancia menor, sin embargo se encuentran en la región en donde las orbitas están acotadas, lo que corresponden a trayectorias elípticas con la excentricidad $\epsilon_1 = 0.846$ y $\epsilon_2 = 0.527$.

Gracias a este análisis, el modelo presentado en este trabajo reproduce de manera adecuada el movimiento de una partícula alrededor de una masa puntual. Con el fin de analizar este caso cuantitativamente en la siguiente sección utilizaremos, a modo de ejemplo, valores característicos

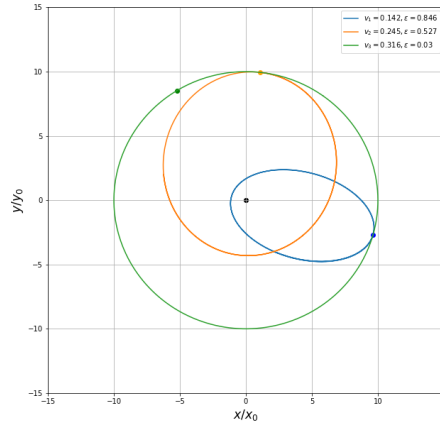


Figura 5.6: Trayectorias de 3 partículas con diferentes velocidades dadas por una distribución gaussiana. La órbita circular corresponde a una velocidad inicial de $v_T = 0.3162$, y las órbitas elípticas tienen una velocidad menor a la velocidad tangencial.

del sistema solar y reproduciremos el periodo, el afelio y el perihelio de los primeros cinco planetas.

5.1.1. Ejemplo: Sistema Solar.

El objetivo de esta sección es analizar un problema físico real, verificar el código numérico y dar un ejemplo del uso de las cantidades patrón que hemos utilizado durante todo el trabajo, esto nos permite tener una idea de cómo calcular los resultados físicos para el modelo que estamos proponiendo.

A partir de las ecuaciones (5.20) podemos calcular las trayectorias de los planetas del Sistema Solar, para ello consideraremos que el Sol se encuentra en el origen de nuestro sistema de referencia. De la referencia [103] tomamos las distancias y la velocidad inicial de cada uno de los planetas del Sistema Solar, estas cantidades se encuentran en términos de los parámetros terrestres,

$$\begin{aligned}
 M_0 &= 1.9 \times 10^{30} \text{ kg}, \\
 R_0 &= 149.60 \times 10^9 \text{ m}, \\
 t_0 &= 365.256 \text{ días}, \\
 v_0 &= 29.78 \times 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}},
 \end{aligned}$$

considerando M_0 como la masa del Sol y R_0 , T_0 , v_0 son la distancia del Sol a la Tierra, el período orbital y la velocidad orbital de la Tierra respectivamente.

Durante todo el trabajo hemos definido las cantidades patrón que nos ayudan a adimensionar las ecuaciones más importantes que ocupamos, estas cantidades permiten describir cualitativamente

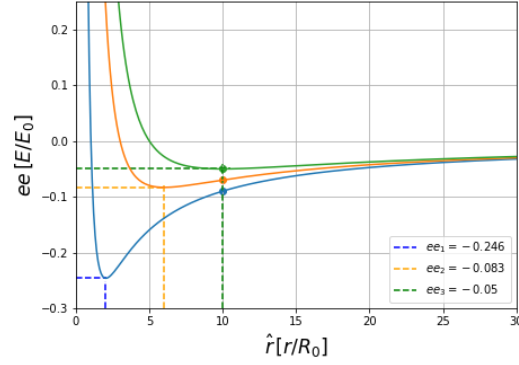


Figura 5.7: Potencial efectivo de tres partículas. La intersección de las líneas punteadas marca el punto mínimo de energía que deben tener las partículas para seguir órbitas circulares. Las partículas 1 y 2 se encuanetran en la región correspondiente a órbitas acotadas, mientras que la partícula 3 esta en el punto mínimo de energía.

el movimiento de las partículas a una sola escala, cuando definimos los valores físicos que requiere el problema obtenemos la escala adecuada al problema que queremos analizar. Por lo tanto, antes que nada recordemos que las cantidades patrón estan definidas como:

Masa	$M = nM_0$	$n = 1$
Distancia	$r = R_0 \hat{r}$	
Velocidad	$v = q_0 \hat{v}$	$q_0^2 = \frac{GM_0}{R_0}$
Período	$T = \frac{2\pi R_0}{q_0} = \frac{2\pi}{t_0}$	con $t_0 = \frac{R_0}{q_0}$
Energía	$E = m q_0^2 ee$	
Momento Angular	$L = m q_0 R_0 l$	

Para definir el tiempo de integración que ocuparemos, utilizamos la ecuación (5.29) utilizando $r = a$ como el semieje mayor al adimensionarlo definimos $\hat{a} = \hat{r}$, por conveniencia definimos cada paso de tiempo como $\hat{t} = 6.2831$ lo que corresponde a un $t = 1$ año terrestre, e integraremos durante 100 años. Las órbitas obtenidas se muestran en la figura (5.8) el código resuelve las ecuaciones de movimiento y nos da la evolución de la posición y la velocidad en cada uno de los pasos de tiempo, por lo que a partir de los datos obtenidos encontramos el semieje mayor y la velocidad orbital para calcular el período y la excentricidad de cada uno de los planetas, además del perihelio y el afelio dados por las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned} \text{afelio} &= a(1 + \epsilon), \\ \text{perihelio} &= a(1 - \epsilon) \end{aligned} \quad (5.33)$$

donde ϵ se define en la ecuación (2.16), los cuales compararemos con los valores de la literatura. Los valores obtenidos se muestran en las siguientes tablas, la primera columna para cada planeta corresponde a las cantidades de la literatura, mientras que la segunda columna son los valores obtenidos del código.

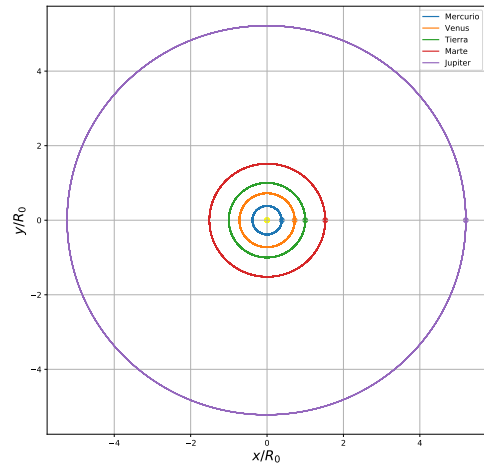


Figura 5.8: Órbitas de los primeros cinco planetas del sistema solar.

		Mercurio Real	Calculado	Δ	Venus Real	Calculado	Δ
Semieje Mayor	$10^9 m$	57.91	57.83	0.0013	108.21	108.50	0.0026
Velocidad Orbital	$10^3 m/s$	47.36	47.40	0.0008	35.02	34.911	0.0031
Período	días	87.96	87.78	0.0020	224.701	225.61	0.0040
Excentricidad		0.205	0.0267	0.3024	0.0067	0.0063	0.0597
Perihelio	$(10^9 m)$	46.00	56.28	0.2234	107.48	107.84	0.0033
Afelio	$(10^9 m)$	69.82	59.37	0.1496	108.94	109.22	0.0025

		Tierra Real	Calculado	Δ	Marte Real	Calculado	Δ
Semieje Mayor	$10^9 m$	149.6	149.78	0.0012	227.92	226.92	0.0048
Velocidad Orbital	$10^3 m/s$	29.78	29.743	0.0012	24.07	24.175	0.0043
Período	días	365.25	365.94	0.0018	686.98	682.40	0.0060
Excentricidad		0.0167	0.0159	0.0479	0.0935	0.0993	0.0620
Perihelio	$(10^9 m)$	147.09	147.39	0.0020	206.62	204.412	0.0106
Afelio	$(10^9 m)$	152.10	152.18	0.0005	249.23	249.488	0.0010

		Júpiter Real	Calculado	Δ
Semieje Mayor	$10^9 m$	778.57	780.78	2.21
Velocidad Orbital	$10^3 m/s$	13.06	13.01	0.05
Período	días	4332.589	4355.08	2.49
Excentricidad		0.0489	0.047	0.004
Perihelio	$(10^9 m)$	740.52	743.867	3.34
Afelio	$(10^9 m)$	816.62	817.773	1.15

Al comparar los resultados obtenidos por el código y los valores característicos de cada uno de los planetas observamos que la diferencia entre ambas cantidades en la mayoría de los casos es del orden de 10^{-1} - 10^{-2} lo que implica que el código puede reproducir valores físicos reales hasta con un 1 % de error en los valores. Por lo tanto el código reproduce hasta con un 90 % de precisión y alcanza hasta un 99 %.

En el caso de la energía y del momento angular, los cuales son valores dados por el código, tomamos como ejemplo los valores de la Tierra, pues las características cualitativas son similares en todos los planetas. Considerando la Figura (5.9) observamos que la energía se mantiene constante a lo largo del tiempo de integración y de igual forma el momento angular es una cantidad conservada. De acuerdo al valor obtenido $ee = -0.999$ y las cantidades patrón, corresponde a una energía de $E = -2.623 \times 10^{33} [J]$, por otra parte el momento angular $l = 1.0$, corresponde a $L = 2.7 \times 10^{40} \left[\frac{kg m^2}{s} \right]$, el error en ambos casos son del orden de 10^{-6} .

Hasta el momento se ha considerado problemas ya conocidos y con el código desarrollado en el presente trabajo hemos reproducido de manera eficaz las características cualitativas y cuantitativas del movimiento de las partículas desde el punto de vista newtoniano, en la siguiente sección analizaremos el caso en donde $l_n \neq 0$, y resolver las ecuaciones de movimiento (5.16), (5.17) y (5.19).

5.2. Modelo que rompe la barrera de potencial centrífugo.

En esta sección analizaremos el caso en donde las partículas son absorbidas por la masa central, considerando las ecuaciones de movimiento en coordenadas cartesianas desarrolladas en este capítulo, tomando $k \neq 0$, lo que implica que usaremos la función (5.1). En este caso, impondremos que cada una de las partículas tenga una velocidad inicial tal que el momento angular total L sea igual a cero. Cuando tenemos esta condición en el potencial efectivo newtoniano (2.24), no existe la barrera de potencial por lo tanto las partículas caen radialmente. En el modelo propuesto en este trabajo tenemos que el potencial efectivo depende de l_n que es una cantidad contante diferente de cero.

Para establecer la condición de que el momento angular sea cero, nos limitamos al plano ecuatorial dado por $\theta = \pi/2$, esto implica que el valor de $z = 0$, debido a la transformación de coordenadas $z = r \cos(\pi/2) = 0$, además tomamos que la velocidad en la coordenada z es cero $v_z = 0$. Esto es posible gracias al análisis realizado anteriormente de las ecuaciones (5.2) y (5.3) cuando $k = 1$ y

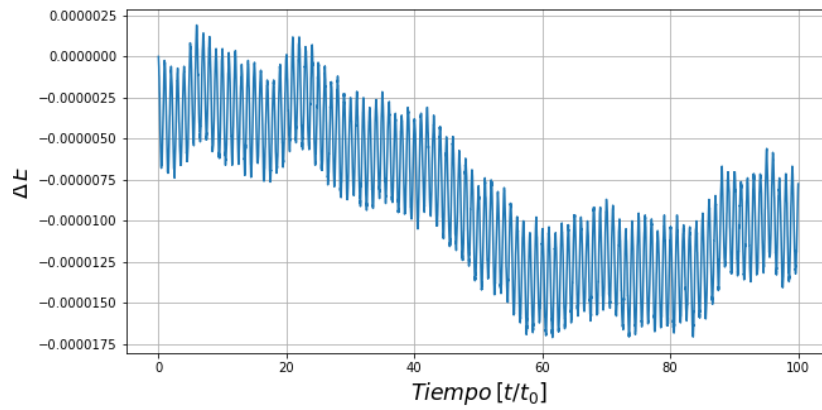


Figura 5.9: Variación de la energía para la órbita de la tierra alrededor del sol. Considerando la energía inicial de $E_0 = -2.623 \times 10^{33} J$ en un tiempo de $t_0 = 100$ años

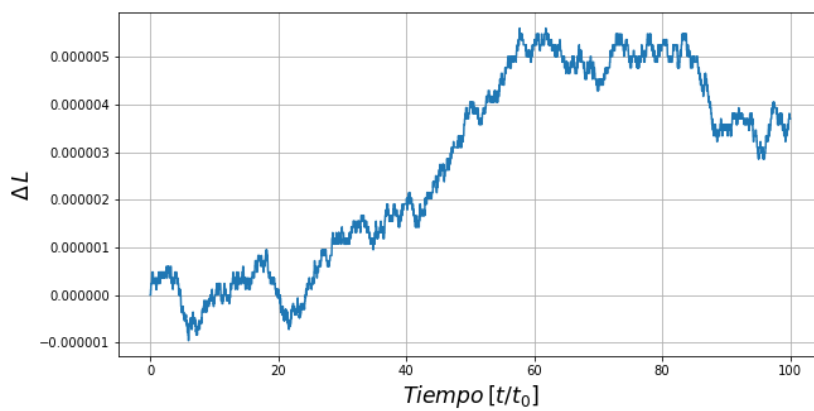


Figura 5.10: Variación del momento angular. Considerando la órbita de la Tierra alrededor del Sol, con un momento inicial de $L_0 = 2.66 \times 10^{40} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$ durante 100 años

$q = 0$. Entonces las ecuaciones de movimiento se pueden escribir como,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{x}{\tilde{r}^{3/2}} - \frac{x l_n}{\tilde{r}^2}, \quad (5.34)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{y}{\tilde{r}^{3/2}} - \frac{y l_n}{\tilde{r}^2}, \quad (5.35)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = 0, \quad (5.36)$$

donde $\frac{\tilde{r}}{s} = 1$ y considerando la norma del momento angular (2.50) obtenemos $\tilde{p}_z = 0$. Considerando el sistema de ecuaciones dado por la norma de la velocidad $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ y la norma del momento angular,

$$l = x v_y - y v_x = 0, \quad (5.37)$$

podemos encontrar las expresiones correspondientes a las componentes de la velocidad v_x y v_y ,

$$v_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} v, \quad (5.38)$$

$$v_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} v, \quad (5.39)$$

donde v podemos considerarla de manera inicial como la velocidad tangencial como hemos hecho en las secciones anteriores, con estas ecuaciones podemos garantizar que el momento angular inicial es $l = 0$, entonces todas las partículas deben ser acretadas.

Como mencionamos anteriormente la variable l_n es una cantidad conservada y podemos considerarla negativa, esto nos permite romper con la barrera de potencial generada comúnmente por el potencial efectivo gravitatorio. Considerando la expresión para el potencial efectivo en términos de la constante l_n

$$V_{eff} = -ee + \frac{l_n}{2\tilde{r}^2} - \frac{1}{\tilde{r}}. \quad (5.40)$$

La figura (5.11) muestra el potencial efectivo con diferentes valores de l_n , cuando $l_n = 0$ el potencial efectivo corresponde al caso newtoniano usual y la partículas caen de manera radial. Por otra parte, cuando $l_n < 0$ cualitativamente podemos observar que la caída de potencial tiene una pendiente mayor a la del caso de caída radial por lo tanto la cantidad de materia que cae hacia el centro es mayor y el tiempo de crecimiento de la masa central debe ser más rápida.

Cuantitativamente vamos a considerar una distribución de partículas a una distancia inicial de $\hat{r}_0 = 10 r_h$ sobre el plano ecuatorial, cada una de las partículas cuenta con la misma velocidad dada por la ecuación (5.28) correspondiente a un valor de $\hat{v} = 0.3162$. Con estas condiciones iniciales, la energía inicial de la partícula es $ee = -0.0999$ y como hemos demostrado anteriormente la energía se conserva a lo largo de todo el tiempo.

Para obtener el tiempo de caída, definimos el valor del radio del horizonte en cantidades adimensionales como $\hat{r}_h = 1$, entonces todas las partículas que llegan a dicho valor se considera que fueron absorbidas por la masa puntual. En la siguiente tabla vemos diferentes valores de $l_n < 0$ y el tiempo que tardan en alcanzar el radio del horizonte,

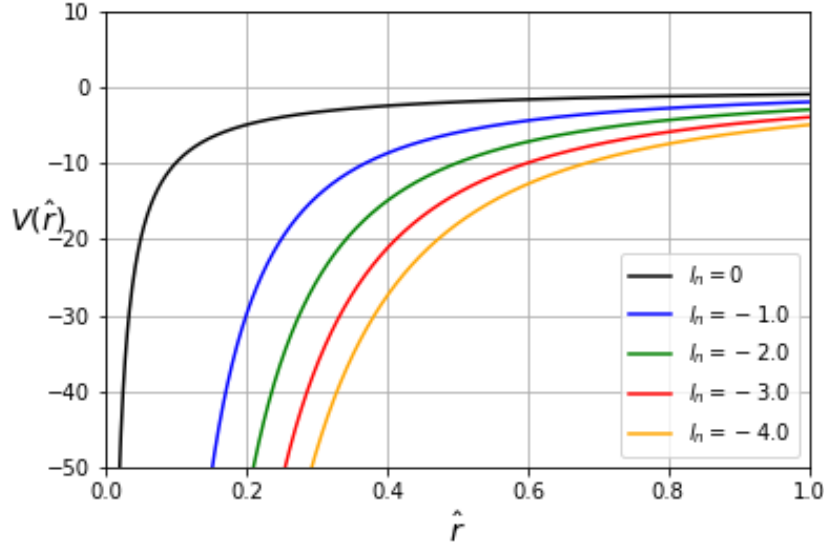


Figura 5.11: Potencial efectivo para valores diferentes de l_n , observamos que el pozo de potencial abarca una región mayor.

l_n	\hat{t}
0	176
-1.0	169
-2.0	164
-3.0	159
-4.0	155
-5.0	151

Observamos que el tiempo que le toma a una partícula llegar al radio del horizonte es menor conforme en el valor de la constante l_n disminuye. Cuando $l_n = 0$ tenemos que $\hat{t} = 169t_0$, para los obtener valores físicos reales necesitamos dimensionar con las cantidades patrón que depende de la escala que estamos considerando, en este caso tomamos

$$\begin{aligned}
 M_0 &= 4.1 \times 10^6 M_\odot, \\
 R_0 &= 6.957 \times 10^8 \text{ m}, \\
 v_0 &= 100 \times 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}},
 \end{aligned}$$

donde M_0 es la masa del objeto central y R_0 es el radio del Sol, v_0 es la velocidad del orden de la velocidad de dispersión de las estrellas que se encuentran en el bulbo de la Galaxia [27].. Con estos valores el radio del horizonte se encuentra en $r_h = 1.209 \times 10^7 \text{ km}$.

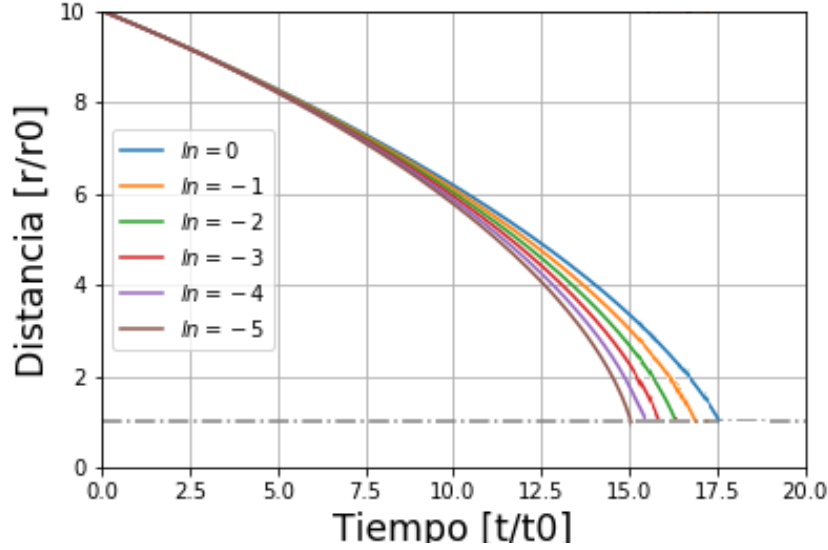


Figura 5.12: Tiempo de caída de las partículas con $p_z = 0$ a diferentes valores de l_n , observamos que entre mayor es l_n , el tiempo que tarda en caer es menor

5.3. Órbitas con momento angular azimutal.

En la sección anterior consideramos las ecuaciones (5.34) e impusimos que la velocidad inicial de cada partícula fuera tal que el momento angular es igual cero y por lo tanto todas las partículas caen radialmente, pero el tiempo de caída varía dependiendo del valor de l_n que elijamos. Sin embargo, dado el modelo propuesto en este trabajo, las partículas pueden ser acretadas aún cuando su momento angular es diferente de cero, pues la constante de movimiento l_n rompe con la barrera de potencial. Para tal fin la componente azimutal del momento angular p_z es diferente de cero, lo que ocasiona que el movimiento sea en forma de espiral y tarde menos tiempo comparado con la caída sin momento angular. Entonces, en las ecuaciones (5.16), (5.17) y (5.19) tomamos $k = 1$ y $q = 0$, nos limitamos al plano ecuatorial seguimos considerando que $z = 0$, por lo tanto, las ecuaciones que debemos resolver son,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{x}{\tilde{r}^{3/2}} + \frac{x(l_n - p_z^2)}{\tilde{r}^2}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{y}{\tilde{r}^{3/2}} + \frac{y(l_n - p_z^2)}{\tilde{r}^2}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.41)$$

Como condiciones iniciales consideramos las componentes de la posición x y y aleatorias con $z = 0$ y para las componentes de la velocidad, aquellas descritas por las expresiones (5.26).

Una de las ventajas que tenemos en nuestro análisis es el potencial efectivo al que le estamos dando

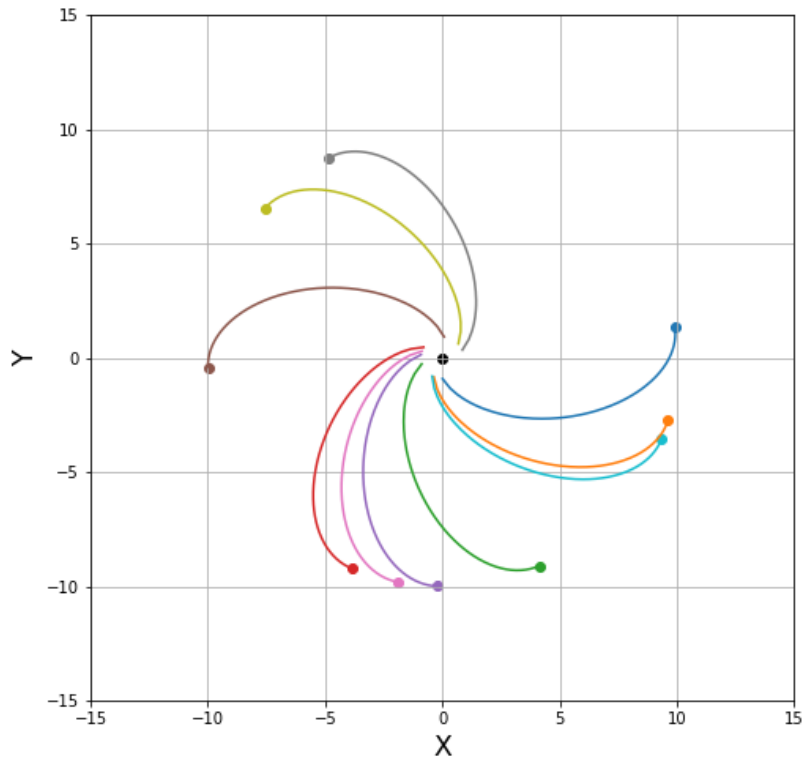


Figura 5.13: Trayectoria de una muestra de 10 partículas, a pesar de que las partículas cuentan con momento angular, pueden ser acretadas por el objeto central. Considerando $p_z = 6$ y $l_n = -1$, el tiempo de caída es de $\hat{t} = 167t$

un papel fundamental en este trabajo, pues gracias a su expresión podemos darnos una idea de las trayectorias de las partículas alrededor de una masa puntual y a pesar de que cuenten con momento angular el potencial efectivo no depende explícitamente de éste, si observamos la figura (5.11) las partículas deben ser absorbidas pero al contar con un valor del momento angular estas partículas deben ir girando hacia el objeto central.

Nuevamente consideramos una distribución de partículas a una distancia inicial de $\hat{r}_0 = 10r_h$ con una velocidad de $\hat{v}_0 = r^{-1/2}$, resolvemos las ecuaciones (5.41), las cuales dependen de las constantes l_n y p_z para que las partículas caigan en espiral hacia el centro de la distribución, figura (5.13). Para calcular y comparar el tiempo que tardan en caer, fijaremos el valor del momento angular azimutal y variaremos la cantidad de l_n en diferentes compilaciones del código, los resultados se muestran en la siguiente tabla.

	$p_z = 1.0$	$p_z = 2.0$	$p_z = 3.0$
l_n	\hat{t}	\hat{t}	\hat{t}
-10.0	326.9	282.9	237.9
- 9.0	343.4	294.9	245.9
-8.0	37.29	309.9	253.9
-7.0	Ninguna	326.9	261.9
-6.0		346.9	271.9
-5.0		372.9	282.9
-4.0		Ninguna	294.9
-3.0			309.9
-2.0			326.9
-1.0			346.9

Con los datos anteriores podemos observar que al aumentar el momento angular y mantener $l_n = -10$ el tiempo en que tardan en caer las partículas va disminuyendo. Sin embargo aún es mayor que el tiempo en caída radial de la sección anterior ($\hat{t} = 176.0$). Por otro lado, al fijar el valor de p_z y aumentar el valor de l_n el tiempo que tardan en ser absorbidas se incrementan y en algunos casos dejan de caer. Considerando este análisis encontramos un caso en donde las partículas caen en un tiempo menor al de caída radial, con momento angular $p_z = 6$ y la constante $l_n = -1.0$. Así el tiempo de caída es 167.0 y al disminuir la constante l_n tendríamos un tiempo cada vez menor.

Un resultado importante encontrado en el análisis de las ecuaciones de movimiento es que a pesar de que el momento angular no sea conservado, el movimiento de las partículas está descrito a través de un potencial efectivo (5.21) que caracteriza el movimiento a partir de su energía. Para resolver dichas ecuaciones, el desarrollo del código numérico nos permite determinar las trayectorias de las partículas en estos casos así como su visualización, lo que nos lleva a analizar diversos casos de gran interés. Es importante mencionar que se ha encontrado casos en donde la tasa acreción tiene un valor mayor que la tasa asociada a la acreción radial de Bondi. Se han obtenido resultados cualitativos importantes, que nos estimula a continuar la investigación en esta línea de trabajo buscando la determinación del mecanismo físico que describa la función efectiva introducida y que está relacionada con la pérdida de momento angular de las partículas.

Capítulo 6

Conclusiones.

En este trabajo presentamos un análisis matemático que desaparece la barrera de potencial centrífuga, presente en el análisis del potencial efectivo en mecánica clásica, a través de agregar un término efectivo (5.1) a la función lagrangiana. Este modelo permite la acreción de todas las partículas, aún cuando poseen momento angular, incluso más rápido que en caída radial, formando un espiral alrededor de un objeto central (5.13) además de conservar la energía y de generar una pérdida de momento angular que permite la caída de la materia hacia el centro de la distribución.

Parte del objetivo de este trabajo, fue estudiar las características de los mecanismo de formación de las semillas de los agujeros negros y los procesos que limitan su crecimiento al absorber la materia a su alrededor. Los modelos que se presentaron requieren un mecanismo de crecimiento en un tiempo corto para poder formar agujeros negros supermasivos. Se considero el proceso de acreción como parte fundamental del crecimiento aunque en la realidad existen diversos factores que afectan la absorción de materia. Sin embargo, el trabajo se acotó a la captura de partículas por el campo gravitatorio de una masa puntual cuyo movimiento puede ser descrito por un potencial efectivo.

Al utilizar un enfoque newtoniano, observamos que la barrera de potencial formada por el momento angular evita la caída de materia. Cuando se ocupa la descripción relativista, esta barrera desaparece. Para este análisis utilizamos una métrica de Schwarzschild y de Kerr, donde este último caso nos permitió mostrar un ejemplo de un sistema donde el momento angular total L no se conserva. Pero es posible encontrar una constante que permita la separación de la parte radial de la angular. En este trabajo propusimos una derivación de la constante de Carter desde un desarrollo lagrangiano la cuál no fue encontrada en la literatura. El mecanismo usual es a partir de los vectores de Killing o el desarrollo Hamilton-Jacobi. Por otra parte, es bien conocido que la diferencia entre el movimiento de las partículas desde un enfoque newtoniano y relativista ocurre en regiones cercanas a la masa central. En la sección correspondiente, se hizo la comparación de tres potenciales efectivos, poniendo especial atención a los datos iniciales y las escalas adecuadas. Esto nos permitió definir una región lo suficientemente cercana al centro, tal que la descripción no sea afectada por los fenómenos relativistas y quedarnos en la región de la mecánica newtoniana.

En el capítulo 3, consideramos una masa puntual rodeada por una distribución esférica de materia caracterizada por una función ρ . El objetivo de esa sección fue estudiar la diferencia que presentan dos tipos de potenciales, aquellos conocidos como “cuspy” y aquellos que son planos cerca del centro de la distribución. Utilizamos tres potenciales que comúnmente se utilizan para describir el

halo de materia oscura en las galaxias ya que cumplen con las características que deseamos. Los resultados obtenidos en esta sección fueron los radios de influencia de la masa puntual y las tasas de acreción de los tres casos; esfera isoterma, isoterma-truncado y halo de Navarro-Frenk-White. Este último parámetro lo comparamos con el caso de acreción de Bondi, que a pesar de ser un método idealizado, no es suficiente para que una semilla se convierta en agujero negro en un tiempo considerable. Por otro lado, los valores obtenidos de la tasa de acreción debido a los potenciales considerados, nos arrojan resultados interesantes, para valores característicos de la Vía Láctea. Pero como sabemos, astrofísicamente, el halo de materia oscura en una galaxia no contribuye en regiones cercanas al agujero negro central. Lo interesante de este análisis, es la diferencia que presentan estos valores, de dos o tres ordenes de magnitud, al cambiar la forma matemática del potencial.

Como se mencionó, el modelo está basado en considerar inicialmente al aspecto matemático del problema, por medio de la introducción a nivel de la lagrangiana de un término efectivo que, como mostramos, logra quitar la barrera de potencial por lo que permite entonces el que se dé la acreción de materia de un modo eficiente. En general, todos los modelos de acreción propuestos consideran que se da o que existe un mecanismo de transporte de momento angular. Una de las bondades del presente trabajo es ofrecer la forma matemática de este tipo de mecanismos. Más aún, la manera original en la que logramos la derivación de la constante de Carter para el espacio-tiempo de Kerr, nos dio la habilidad de construir un constante de movimiento para cualquier función $f(\theta)$ que se agregue a la lagrangiana (4.2). Así el razonamiento fue, las partículas, que en general tienen momento angular, no caen hacia el cuerpo central pues lo rodean, lo que se representa como una barrera de potencial centrífugo; ese momento angular se conserva por la simetría del espacio, ergo, rompiendo la simetría, se deja conservar el momento angular con lo que se quita la barrera de potencial y se logra la acreción. Al aplicar este programa, en efecto dejamos de tener una cantidad conservada, el momento angular, pero fuimos capaces de construir otra, con lo que nos fue posible integrar al movimiento y seguir pudiendo construir a un potencial efectivo. Consideramos que los mecanismos de transporte de momento angular comúnmente utilizados pueden estar relacionados con nuestro modelo. La pérdida del momento angular puede deberse procesos turbulentos en el disco de acreción, de inestabilidades convectivas en el medio. Aunque también puede deberse a fenómenos electrodinámicos que genere una pérdida de momento angular en las partículas al caer hacia el centro de la distribución.

Para nuestro modelo, consideramos que se mantuviera la simetría axial, por lo tanto que dependa de la coordenada azimutal y que pueda describir un movimiento parecido a un torbellino de tal forma que las partículas puedan ser absorbidas por el objeto central. Las ecuaciones en coordenadas esféricas se encuentran acopladas a través de las componentes de la velocidad, a diferencia de la descripción cartesiana que depende únicamente de las coordenadas espaciales, lo que la vuelve un sistema de ecuaciones más fácil de resolver computacionalmente. Con el desarrollo de un código numérico encontramos resultados importantes, como la visualización de las trayectorias que siguen las partículas. El cambio en el momento angular que sufren cuando se acercan al centro de la distribución. Y la demostración de la conservación de la energía en todos los casos, además de encontrar casos en donde la tasa de acreción tiene un valor mayor que la tasa asociada a la acreción radial de Bondi. Estos resultados son cualitativos, que nos estimula a continuar la investigación en esta línea de trabajo buscando la determinación del mecanismo físico que describa la función efectiva introducida y que está relacionada con la pérdida de momento angular de las partículas. Finalmente el tratamiento presentado en este trabajo se puede aplicar al caso relativista de Schwarzschild y estamos en estudios para llevarlo inclusive al caso de Kerr.

Los resultados son interesantes: en efecto, se logra tener la acreción de materia hacia el agujero negro aún con momento angular, con lo que se resuelve el problema de la barrera infinita de potencial centrífugo y se están explorando casos para los que se tenga una tasa de acreción mayor inclusive que la correspondiente tasa en el caso de acreción radial. Estos resultados cualitativos están aún siendo determinados, así como el mecanismo por el cual se tiene la pérdida de momento angular. Sin embargo, el modelo presentado tiene valores intrínsecos que permiten seguir considerándolo como una posible solución de la formación de los agujeros negros supermasivos.

Bibliografía

- [1] D. Nardo. *Black Holes*. Gale Virtual Reference Library. Lucent Books, 2004.
- [2] Remo Ruffini and John A. Wheeler. Introducing the black hole. *Phys. Today*, 24(1):30, 1971.
- [3] S. Bowyer, E. T. Byram, T. A. Chubb, and H. Friedman. Cosmic x-ray sources. *Science*, 147(3656):394–398, 1965.
- [4] J. B. Hutchings, D. Crampton, J. Glaspey, and G. A. H. Walker. Optical observations and model for Cygnus X-1. 182:549, Jun 1973.
- [5] Ronald A. Remillard and Jeffrey E. McClintock. X-ray Properties of Black-Hole Binaries. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 44:49–92, 2006.
- [6] John Kormendy and Douglas Richstone. Inward Bound—The Search For Supermassive Black Holes In Galactic Nuclei. 33:581, Jan 1995.
- [7] D. M. Alexander and R. C. Hickox. What drives the growth of black holes? 56:93–121, June 2012.
- [8] Jacob D. Bekenstein. Black holes: Physics and astrophysics. Stellar-mass, supermassive and primordial black holes. In *Neutrinos and explosive events in the universe. Proceedings, NATO Advanced Study Institute, Erice, Italy, July 2-13, 2004*, pages 149–173, 2004.
- [9] G. Yang et al. Linking black hole growth with host galaxies: the accretion–stellar mass relation and its cosmic evolution. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 475(2):1887–1911, 2018.
- [10] S.T. Thornton and J.B. Marion. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Brooks/Cole, 2004.
- [11] J. B. Hartle. *Gravity. An introduction to Einstein’s General Relativity*. Pearson Education, San Fransisco, U.S.A., 2003.
- [12] H. Karttunen, P. Kröger, H. Oja, M. Poutanen, and K.J. Donner. *Fundamental Astronomy*. Physics and Astronomy Online Library. Springer Berlin Heidelberg, 2003.
- [13] V.P. Frolov and A. Zelnikov. *Introduction to Black Hole Physics*. OUP Oxford, 2011.
- [14] H. Reissner. Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie. *Annalen der Physik*, 355(9):106–120, Jan 1916.

- [15] G. Nordstrom. On the Energy of the Gravitation field in Einstein's Theory. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences*, 20:1238–1245, Jan 1918.
- [16] David Finkelstein. Past-future asymmetry of the gravitational field of a point particle. *Phys. Rev.*, 110:965–967, May 1958.
- [17] Roy P. Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys. Rev. Lett.*, 11:237–238, Sep 1963.
- [18] E T. Newman, R. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, and R. Torrence. Metric of a Rotating, Charged Mass. *J. Math. Phys.*, 6:918–919, 1965.
- [19] O. Miramontes and K. Volke. *Fronteras de la Física en el Siglo XXI*. Copit-Arxives, 2013.
- [20] Subrahmanyan Chandrasekhar. The maximum mass of ideal white dwarfs. *The Astrophysical Journal*, 74:81, 1931.
- [21] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff. On massive neutron cores. *Phys. Rev.*, 55:374–381, Feb 1939.
- [22] E. E. Salpeter. Accretion of Interstellar Matter by Massive Objects. 140:796–800, Aug 1964.
- [23] D. Prialnik. *An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution*. Cambridge University Press, 2000.
- [24] F. Duccio Macchetto. Supermassive black holes and galaxy morphology. *Astrophys. Space Sci.*, 269:269–291, 1999.
- [25] F. Melia. *The Galactic Supermassive Black Hole*. Princeton paperbacks. Princeton University Press, 2007.
- [26] R. Schodel et al. A Star in a 15.2 year orbit around the supermassive black hole at the center of the Milky Way. *Nature*, 2002. [Nature419,694(2002)].
- [27] A. M. Ghez, S. Salim, N. N. Weinberg, J. R. Lu, T. Do, J. K. Dunn, K. Matthews, M. R. Morris, S. Yelda, E. E. Becklin, T. Kremenek, M. Milosavljevic, and J. Naiman. Measuring distance and properties of the milky way's central supermassive black hole with stellar orbits. *The Astrophysical Journal*, 689(2):1044, 2008.
- [28] Clifford M. Will. The confrontation between general relativity and experiment. *Living Reviews in Relativity*, 17(1), Jun 2014.
- [29] B. P. Abbott et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116(6):061102, 2016.
- [30] Kazunori Akiyama et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. IV. Imaging the Central Supermassive Black Hole. *Astrophys. J.*, 875(1):L4, 2019.
- [31] Xue-Bing Wu, Feige Wang, Xiaohui Fan, Weimin Yi, Wenwen Zuo, Fuyan Bian, Linhua Jiang, Ian D McGreer, Ran Wang, Jinyi Yang, et al. An ultraluminous quasar with a twelve-billion-solar-mass black hole at redshift 6.30. *Nature*, 518(7540):512–515, 2015.

- [32] Marta Volonteri. Formation of supermassive black holes. *The Astronomy and Astrophysics Review*, 18(3):279–315, Apr 2010.
- [33] Ruth A. Daly, S. G. Djorgovski, Kenneth A. Freeman, Matthew P. Mory, C. P. O’Dea, P. Kharb, and S. Baum. Improved constraints on the acceleration history of the universe and the properties of the dark energy. *The Astrophysical Journal*, 677(1):1–11, apr 2008.
- [34] Alberto Sesana, Francesco Haardt, and Piero Madau. Interaction of massive black hole binaries with their stellar environment. i. ejection of hypervelocity stars. *The Astrophysical Journal*, 651(1):392–400, Nov 2006.
- [35] Marcelo A. Alvarez, John H. Wise, and Tom Abel. ACCRETION ONTO THE FIRST STELLAR-MASS BLACK HOLES. *The Astrophysical Journal*, 701(2):L133–L137, aug 2009.
- [36] John A. Regan, Peter H. Johansson, and John H. Wise. THE DIRECT COLLAPSE OF a MASSIVE BLACK HOLE SEED UNDER THE INFLUENCE OF AN ANISOTROPIC LYMAN-WERNER SOURCE. *The Astrophysical Journal*, 795(2):137, oct 2014.
- [37] F. LeBlanc. *An Introduction to Stellar Astrophysics*. Wiley, 2011.
- [38] E.B. López. *Introducción a la astrofísica*. Ciencia y Tecnología. Alianza, 1999.
- [39] Mario Spera, Michela Mapelli, and Alessandro Bressan. The mass spectrum of compact remnants from the parsec stellar evolution tracks, 2015.
- [40] Krzysztof Belczynski, Tomasz Bulik, Chris L. Fryer, Ashley Ruitter, Francesca Valsecchi, Jorick S. Vink, and Jarrod R. Hurley. On the maximum mass of stellar black holes. *The Astrophysical Journal*, 714(2):1217–1226, Apr 2010.
- [41] Edward P. J. van den Heuvel. Endpoints of stellar evolution: the incidence of stellar mass black holes in the Galaxy. Technical report, Jul 1992.
- [42] Cosimo Bambi. Astrophysical Black Holes: A Compact Pedagogical Review. *Annalen Phys.*, 530:1700430, 2018.
- [43] Jeffrey M. Silverman and Alexei V. Filippenko. On IC 10 X-1, the Most Massive Known Stellar-Mass Black Hole. *Astrophys. J.*, 678:L17–L20, 2008.
- [44] Tom Abel, John H Wise, and Greg L Bryan. The h ii region of a primordial star. *The Astrophysical Journal Letters*, 659(2):L87, 2007.
- [45] Space Telescope Science Institute (U.S.). Symposium, M. Livio, E. Villaver, and Space Telescope Science Institute (U.S.). *Massive Stars: From Pop III and GRBs to the Milky Way*. Space Telescope Science Institute Symposium Series. Cambridge University Press, 2009.
- [46] Volker Bromm, Naoki Yoshida, Lars Hernquist, and Christopher F McKee. The formation of the first stars and galaxies. *Nature*, 459(7243):49–54, 2009.
- [47] Naoki Yoshida, Kazuyuki Omukai, Lars Hernquist, and Tom Abel. Formation of primordial stars in a Λ CDM universe. 652(1):6–25, nov 2006.
- [48] Ken’ichiro Nakazato, Kohsuke Sumiyoshi, and Shoichi Yamada. Gravitational collapse and neutrino emission of population III massive stars. *The Astrophysical Journal*, 645(1):519–533, jul 2006.

- [49] Kohei Inayoshi, Kazumi Kashiyama, Eli Visbal, and Zoltán Haiman. Gravitational wave background from population iii binary black holes consistent with cosmic reionization. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 461(3):2722–2727, Jun 2016.
- [50] Daniel J. Whalen and Chris L. Fryer. The formation of supermassive black holes from low-mass pop iii seeds. *The Astrophysical Journal*, 756(1):L19, Aug 2012.
- [51] Yoshiyuki Inoue, Yasuyuki T. Tanaka, Grzegorz M. Madejski, and Alberto Domínguez. Upper bound on the first star formation history. *The Astrophysical Journal*, 781(2):L35, Jan 2014.
- [52] Tetsu Kitayama and Naoki Yoshida. Supernova explosions in the early universe: Evolution of radiative remnants and the halo destruction efficiency. *The Astrophysical Journal*, 630(2):675, 2005.
- [53] Savvas M. Koushiappas, James S. Bullock, and Avishai Dekel. Massive black hole seeds from low angular momentum material. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 354(1):292–304, Oct 2004.
- [54] Gordon I. Ogilvie. Astrophysical fluid dynamics. *Journal of Plasma Physics*, 82(3), May 2016.
- [55] Mitchell C. Begelman, Marta Volonteri, and Martin J. Rees. Formation of supermassive black holes by direct collapse in pregalactic halos. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 370:289–298, 2006.
- [56] Stirling A. Colgate, Renyue Cen, Hui Li, Nathan Currier, and Michael S. Warren. Cosmological mestel disks and the rossby vortex instability: The origin of supermassive black holes. *The Astrophysical Journal*, 598(1):L7–L10, Oct 2003.
- [57] Masayuki Umemura, Abraham Loeb, and Edwin L. Turner. Early cosmic formation of massive black holes. *The Astrophysical Journal*, 419:459, Dec 1993.
- [58] Ruben Krasnopolsky, Zhi-Yun Li, and Hsien Shang. Disk formation enabled by enhanced resistivity. *The Astrophysical Journal*, 716(2):1541, 2010.
- [59] M. A. Montesinos Armijo and J. A. de Freitas Pacheco. The growth of supermassive black holes fed by accretion disks. 526:A146, Jan 2011.
- [60] Jane H MacGibbon, Tilan N. Ukwatta, J. T. Linnemann, S. S. Marinelli, D. Stump, and K. Tollefson. Primordial Black Holes. In *5th International Fermi Symposium Nagoya, Japan, October 20-24, 2014*, 2015.
- [61] Bernard J Carr. Primordial black holes-recent developments. *arXiv preprint astro-ph/0504034*, 2005.
- [62] M. Khlopov. Primordial black holes. *Research in Astronomy and Astrophysics*, 10:495, 06 2010.
- [63] S. G. Rubin, A. S. Sakharov, and M. Yu. Khlopov. The formation of primary galactic nuclei during phase transitions in the early universe. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 92(6):921–929, Jun 2001.

- [64] Ya. B. Zel'dovich and I. D. Novikov. The Hypothesis of Cores Retarded during Expansion and the Hot Cosmological Model. 10:602, Feb 1967.
- [65] Tomohiro Harada and Bernard J. Carr. Growth of primordial black holes in a universe containing a massless scalar field. *Phys. Rev.*, D71:104010, 2005.
- [66] Seed black holes. url <http://www.ifug.ugto.mx/msabido/XII.Escuela/sgallerani.pdf>.
- [67] W. Greiner and D.A. Bromley. *Classical Mechanics: Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics*. Number v. 1 in Classical theoretical physics. Springer, 2003.
- [68] Ignacio Martín Bragado. *Física General*. <https://fisicas.ucm.es/data/cont/media/www/pag-39686/fisica-general-libro-completo.pdf>, Universidad de Valladolid, 2003.
- [69] John Dirk Walecka. *Introduction to General Relativity*. World Scientific, Singapore, 2007.
- [70] H. Goldstein and J.F. Ferrer. *Mecánica clásica*. Reverté, 1987.
- [71] Notas de curso: Mecánica teórica. url www.um.es/oller/docencia/versionmteor.pdf.
- [72] Mecánica lagrangiana. url fml.usal.es/pilar/MyO/tema4/tema4.pdf.
- [73] Mario Consenza. *Mecánica Clásica*. Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela, 2015.
- [74] D.J. Raine and E.G. Thomas. *Black Holes: An Introduction*. Black Holes: An Introduction. Imperial College Press, 2010.
- [75] V. P. Frolov and I. D. Novikov, editors. *Black hole physics: Basic concepts and new developments*. 1998.
- [76] L. P. Hughston and K. P. Tod. *An Introduction to General Relativity*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1991.
- [77] Darío Núñez and Juan Carlos Degollado. *Relatividad General. Notas para el curso de la Facultad de Ciencias, UNAM*. <http://nucleares.unam.mx/nunez>, Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM - U de G, 2013.
- [78] R. M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago, U.S.A., 1984.
- [79] L. Ryder. *Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [80] M.P. Hobson, G.P. Efstathiou, and A.N. Lasenby. *General Relativity: An Introduction for Physicists*. Cambridge University Press, 2006.
- [81] Bert Janssen. *Teoría de la relatividad general*. Universidad de Granada, Depto. de Física Teórica y del Cosmos., 2013.
- [82] J. Foster and J.D. Nightingale. *A Short Course in General Relativity*. Longman Mathematical Texts. Longman, 1979.
- [83] S. Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford classic texts in the physical sciences. Clarendon Press, 1998.
- [84] B. Carter. Hamilton-Jacobi and Schrodinger separable solutions of Einstein's equations. *Commun. Math. Phys.*, 10(4):280–310, 1968.

- [85] Robert H. Boyer and Richard W. Lindquist. Maximal analytic extension of the Kerr metric. *J. Math. Phys.*, 8:265, 1967.
- [86] M. Harwit. *Astrophysical Concepts*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer New York, 2000.
- [87] M. Emilio, J. R. Kuhn, R. I. Bush, and I. F. Scholl. MEASURING THE SOLAR RADIUS FROM SPACE DURING THE 2003 AND 2006 MERCURY TRANSITS. *The Astrophysical Journal*, 750(2):135, apr 2012.
- [88] Colleen0 Gilhuly. The Milky Way's Dark Matter Halo. 2014.
- [89] L.S. Sparke and J.S. Gallagher. *Galaxies in the Universe: An Introduction*. Cambridge University Press, 2000.
- [90] Jerson Ivan Reina Medrano. *Potencial gravitacional, densidad superficial y velocidad circular para modelos planos de galaxias*. Tesis de Licenciatura en Física, Universidad industrial de Santander, Bucaramanga, 2004.
- [91] J. C. Degollado Daza. *Ondas gravitacionales y acreción hacia agujeros negros*. Tesis de Maestría, Posgrado en Ciencias Físicas, 2010.
- [92] S.L. Shapiro and S.A. Teukolsky. *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. Wiley, 2008.
- [93] Spherical accretion. [urlhttp://www.astronomy.ohio-state.edu/ryden/ast825/ch8.pdf](http://www.astronomy.ohio-state.edu/ryden/ast825/ch8.pdf).
- [94] Sandip K. Chakrabarti. Accretion processes on a black hole. *Phys. Rept.*, 266:229–392, 1996.
- [95] D. Núñez P. Domínguez. *Sobre la dinámica de las partículas: Ecuación de Vlasov y la materia oscura*. Tesis de Licenciatura en Física, Facultad de Ciencias, UNAM, 2015.
- [96] Paola Domínguez-Fernández, Erik Jiménez-Vázquez, Miguel Alcubierre, Edison Montoya, and Darío Núñez. Description of the evolution of inhomogeneities on a Dark Matter halo with the Vlasov equation. *Gen. Rel. Grav.*, 49(9):123, 2017.
- [97] J. Binney and S. Tremaine. *Galactic dynamics*. Princeton University Press, Cambridge, Mass., U.S.A., 1987.
- [98] Julio F. Navarro, Carlos S. Frenk, and Simon D. M. White. The Structure of cold dark matter halos. *Astrophys. J.*, 462:563–575, 1996.
- [99] J. F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. M. White. A Universal Density Profile from Hierarchical Clustering. *apj*, 490:493–508, December 1997.
- [100] Posti, Lorenzo and Helmi, Amina. Mass and shape of the milky way's dark matter halo with globular clusters from gaia and hubble. *A&A*, 621:A56, 2019.
- [101] Yoshiaki Sofue. Grand Rotation Curve and Dark-Matter Halo in the Milky Way Galaxy. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 64(4), 08 2012.
- [102] P. Schneider. *Extragalactic Astronomy and Cosmology: An Introduction*. Springer, 2006.
- [103] Planetary fact sheet - metric. [urlhttp://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/index.html](http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/index.html).