



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**Criterios de generación de
enredamiento multipartito en
sistemas de tres qubits**

TESIS

que para optar por el grado de:

Maestro en Ciencias

P R E S E N T A

Víctor Hernán Torres Brauer

Dra. Andrea Valdés Hernández
Instituto de Física - UNAM

Dr. Pablo Barberis Blosein
Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y
Sistemas-UNAM

Dr. Jorge Gustavo Hirsh Ganievich
Instituto de Ciencias Nucleares- UNAM



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi madre, todo es por ti.

Agradecimientos

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM, IA101918.

A la doctora Andrea, por los regaños, las constantes revisiones, y por siempre tener algo que enseñarme. Vaya, por mostrarme lo que es ser un buen asesor. Esta tesis es tan mía como suya.

A mi familia, por todo su apoyo, son mis pilares y mi motivación.

A mis amigas y amigos, gracias por estar en los buenos y malos ratos, por estar en general.

También a toda la gente de internet que tuvo una palabra o una imagen.

Gracias.

Resumen

El estudio del entrelazamiento cuántico en sistemas multipartitos ha mostrado que existen diferentes formas de enredar los subsistemas de los que estos se componen. En particular, en el caso de qubits, estados con diferentes formas de enredamiento permiten ser utilizados en diferentes aplicaciones. Ésto nos invita a investigar la dinámica y flujo del enredamiento en dichos sistemas, pues el estudio del enredamiento multipartito nos permitirá entender mejor y explotar las aplicaciones del enredamiento cuántico.

En este trabajo contribuimos al estudio de la dinámica del enredamiento en sistemas multipartitos, analizando el sistema multipartito más simple: un sistema de tres qubits. Consideraremos un sistema de dos qubits inicialmente enredados, en el cual uno de ellos interactúa con un tercer qubit por medio de una operación unitaria descrita por un conjunto de operadores de Kraus.

Nuestros resultados nos permiten establecer las condiciones necesarias y suficientes, sobre los operadores de Kraus, para discernir en todo momento de la evolución el tipo de enredamiento presente en el sistema. Es decir, dado un conjunto de operadores de Kraus, somos capaces de reconocer en qué momento de la evolución nuestro sistema tendrá enredamiento bipartito y tripartito (de los tipos W y GHZ). Esto nos da la capacidad de predecir la emergencia, muerte y distribución de todos los tipos de enredamiento que pueden presentarse en el sistema.

El estudio del sistema de tres qubits nos permite dar un paso adelante y analizar sistemas de cuatro qubits donde dos de ellos se encuentran inicialmente enredados e interactúan cada uno localmente con un qubit adicional. En estos casos somos capaces de reconocer la presencia de enredamiento multipartito así como la dinámica en ciertas biparticiones. Dicho análisis se extiende a sistemas de $2N$ qubits, lo que permite establecer una condición sobre las evoluciones locales para garantizar la presencia de enredamiento en $N + m$ qubits ($m < N$).

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	III
Introducción	1
1. Enredamiento.	3
1.1. Fundamentos	3
1.2. Estados enredados	3
1.3. Propiedades de las medidas de enredamiento	5
1.4. Tangle	6
1.4.1. Enredamiento de formación	6
1.4.2. Concurrencia	6
1.4.3. Tangle para estados puros en pares de qudits	7
1.5. Sistemas de tres qubits	9
1.5.1. 3-tangle	9
1.5.2. Equivalencia bajo LOCC y SLOCC	10
1.5.3. Clases de enredamiento	11
1.5.4. Criterios para la distinción de clases de enredamiento.	14
2. Evolución de sistemas cuánticos	15
2.1. Evolución en sistemas cerrados	16
2.2. Evolución en sistemas abiertos	16
2.2.1. Operadores de Kraus	16
2.2.2. Mapas cuánticos	18
2.3. Decoherencia	19
2.4. Canales cuánticos	20
2.4.1. Canal de amortiguamiento de la amplitud	20
2.4.2. Canal de desfaseamiento	21
2.4.3. Canales de volteo de fase, bit y bit-fase	22
2.5. Dinámica de enredamiento	24
3. Generación de enredamiento en sistemas de tres qubits	26
3.1. Definiciones	26
3.1.1. Matrices auxiliares	26
3.1.2. Función g	26
3.1.3. Enredamiento en el estado general de tres qubits	27
3.2. Estado de estudio	28

3.2.1.	Dinámica del 3tangle	29
3.2.2.	Dinámica del enredamiento en las biparticiones	29
3.2.3.	Dinámica de enredamiento qubit-qubit	32
3.3.	Surgimiento garantizado de las diferentes familias de enredamiento	33
3.3.1.	Familia GHZ	33
3.3.2.	Familia W	33
3.3.3.	Familias biseparables	34
3.4.	Ejemplos	35
3.4.1.	Canal de amortiguamiento de la amplitud	37
3.4.2.	Canal de desfasamiento	39
3.4.3.	Canal de volteo de bit, de fase y de bit-fase	41
4.	Hacia la generalización	47
4.1.	Sistema de cuatro qubits	47
4.1.1.	De tres a cuatro qubits	48
4.1.2.	Surgimiento de enredamiento multipartito en cuatro qubits	50
4.2.	Sistemas de $2N$ qubits	51
5.	Conclusiones	54
	Conclusiones	54
	A. Artículo de investigación	56
	B. Propiedades de la función g	69
	C. Enredamientos en un estado arbitrario de 3qubits	72
	D. 3tangle en términos de los operadores de Kraus	74

Introducción

El enredamiento cuántico ha sido tema de acaloradas discusiones desde su primera aparición en 1935 [1]. Hoy en día diversos estudios se realizan en torno al enredamiento, en especial en sistemas compuestos por qubits, motivados por su íntima relación con los procesos de decoherencia y sus múltiples aplicaciones en cómputo cuántico. [2], [3], [4].

En sistemas compuestos por más de dos qubits se ha descubierto una nueva cara del enredamiento, el enredamiento multipartito [5], [6]. Éste ha mostrado ser de vital importancia en el estudio de la dinámica de enredamiento, ayudando a explicar fenómenos como la muerte súbita del enredamiento (ESD) [7], [8] y el nacimiento súbito del enredamiento (ESB) [9]. Con el enredamiento multipartito llegan nuevas clasificaciones de estados, pues sistemas multipartitos pueden estar enredados de diferentes maneras. Estados con diferentes tipos de enredamiento pueden ser utilizados para diferentes tareas en cómputo cuántico [10].

En el caso particular de sistemas de tres qubits existen seis diferentes familias de estados inequivalentes bajo operaciones locales y comunicación clásica aleatoria (SLOCC, por sus siglas en inglés) [6]; dichas familias son: estados separables, tres diferentes familias de estados biseparables, estados tipo W y estados tipo GHZ. En estados W y GHZ se tiene enredamiento en las tres biparticiones, por lo que se dice que tres qubits pueden enredarse de dos maneras inequivalentes. La principal diferencia entre estados tipo W y estados tipo GHZ es la presencia del llamado 3tangle [5], cantidad que representa una forma de enredamiento genuino tripartito y que se encuentra presente en estados con enredamiento tipo GHZ, mientras que es nula en todas las otras familias. En la literatura se han estudiado diversas maneras de clasificar estados de tres qubits a partir de su enredamiento, todos desde una perspectiva estática, es decir, las clasificaciones desarrolladas se encargan de responder a qué familia de enredamiento pertenece un estado específico [11], [12], [13], [14].

En este trabajo se estudia el problema de la clasificación de estados de tres qubits desde una perspectiva dinámica, esto con el afán de contribuir al estudio de la dinámica y generación del enredamiento [15], [16], [17], [18], [19], [20]. Estudiamos un sistema de dos qubits inicialmente enredados (S' y S), uno de los cuales interactúa con un tercer qubit (E) por medio de una evolución unitaria arbitraria U_{SE} , la cual es representada por un conjunto de operadores de Kraus $\{K_0, K_1\}$ [21], [22]. A partir de la medida de enredamiento conocida como tangle [23], [24], obtenemos expresiones originales para todos los posibles enredamientos entre las partes del sistema y entre los subsistemas reducidos en términos de los operadores de Kraus. El análisis de dichas expresiones, válidas para cualquier evolución unitaria, nos permite dar condiciones necesarias y suficientes, no reportadas en la literatura, sobre los operadores de Kraus, para poder distinguir en todo momento de la evolución el tipo de enredamiento presente en el sistema.

En el primer capítulo haremos una breve revisión sobre el enredamiento, las medidas de enredamiento y el surgimiento de la medida que emplearemos para estudiarle, el tangle. Esto con la intención de dar al lector las herramientas para calcular el enredamiento en sistemas de qubits. Además se discute el enredamiento en sistemas de tres qubits, el 3tangle y las clases de enredamiento antes mencionadas.

En el segundo capítulo discutiremos la dinámica de sistemas cuánticos, en particular el formalismo de los operadores de Kraus y sus propiedades. Introduciremos diferentes canales de decoherencia y daremos una breve discusión acerca de cómo la investigación en los procesos de decoherencia dio lugar al estudio de la dinámica de enredamiento.

Estos primeros dos capítulos conforman la revisión de la literatura necesaria para entender los resultados presentados en los capítulos tres y cuatro.

En el tercer capítulo se presentan los resultados originales y centrales de la tesis, los cuales fueron recientemente publicados en el artículo [25], el cual se muestra en el apéndice A. Específicamente, se determinan el 3tangle, los enredamientos en todas las biparticiones y los enredamientos qubit-qubit en términos de los operadores de Kraus, para dar una representación dinámica de tales enredamientos. Esta representación dinámica es utilizada para encontrar condiciones necesarias y suficientes, sobre los operadores de Kraus, para distinguir en todo momento el enredamiento presente en nuestro sistema. Por último, mostramos la aplicación de nuestros resultados, utilizando como ejemplo diferentes canales de decoherencia.

Utilizando los resultados presentes en el capítulo tres, somos capaces de contribuir al estudio de sistemas de 4 qubits y $2N$ qubits, dando así, un primer paso hacia la generalización del problema, estos resultados igualmente novedosos se presentan en el capítulo cuatro. El sistema de 4 qubits se estudia analizando el caso de dos qubits inicialmente enredados (S, S') los cuales interactúan localmente cada uno con un qubit (E, E') , respectivamente, mediante la transformación unitaria $U_{SE} \otimes U_{S'E'}$. Se emplean los resultados obtenidos en el capítulo tres para obtener condiciones necesarias que garanticen enredamiento multipartito en dicho sistema, sin embargo el problema de dar condiciones para distinguir el enredamiento multipartito generado y clasificarlo en cada una de las nueve familias de enredamiento presentes en sistemas de cuatro qubits [26], sigue abierto. Por último, se estudia un sistema de $2N$ qubits en los cuales N de ellos se encuentran inicialmente enredados (S_1, \dots, S_N) y cada uno interactúa localmente con uno de los qubits (E_1, \dots, E_N) por medio de la transformación unitaria $U_{S_1 E_1} \otimes \dots \otimes U_{S_N E_N}$. Utilizando los resultados del capítulo tres y los obtenidos del estudio del sistema de cuatro qubits, es posible dar condiciones necesarias y suficientes para garantizar enredamiento en $N+m$ qubits ($m < N$).

Finalmente en el capítulo cinco se presentan las conclusiones del trabajo y algunas de sus perspectivas a futuro.

Capítulo 1

Enredamiento.

"The best possible knowledge of a whole does not include best possible knowledge of its parts"
Erwin Schrödinger

1.1. Fundamentos

En 1935 A. Einstein, B. Podolsky y N. Rosen [1] publicaron el artículo conocido como EPR, por el nombre de sus autores. En éste, se estudian estados de dos partículas cuya función de onda describe ambos sistemas como uno solo, es decir, los subsistemas que componen los estados *enredados* no pueden ser descritos de manera independiente. EPR encuentra incompatibles a los estados enredados con la noción de localidad. La conclusión de EPR es que si el universo es local entonces la mecánica cuántica no es una teoría completa. El artículo EPR no tuvo el efecto esperado, fue en gran medida ignorado pues la mecánica cuántica seguía dando resultados y su utilidad en la segunda guerra mundial hizo que, incluso, se llegase a considerar 'anticientífico' cuestionar los fundamentos de la teoría [27].

Fue hasta 1965 que John S. Bell en una serie de publicaciones [28] obtuvo diferencias claras entre los resultados que se obtendrían con una teoría local, realista, de variables ocultas, y las predicciones de la mecánica cuántica. Dando así, una manera de examinar las propiedades no locales predichas por la teoría. Hoy en día experimentos tipo Bell se hacen en todo el mundo [29], [30], [31], [32], [33]. Aunque los experimentos no son perfectos y aún existen muchos objetores, los resultados hacen cada vez más difícil ignorar que los estados enredados poseen propiedades no locales.

1.2. Estados enredados

En mecánica cuántica el estado de un sistema es representado por un operador de densidad ρ en el espacio de operadores que actúan sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} . En el caso particular en que el sistema se encuentra en un estado puro, los estados pueden ser descritos por vectores $|\psi\rangle$ en \mathcal{H} . El enredamiento es una propiedad que emerge en *sistemas compuestos*; para estudiarle, consideremos un sistema \mathcal{S} compuesto por N subsistemas. El espacio de Hilbert del sistema \mathcal{S} será $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$, donde \mathcal{H}_i es el espacio de Hilbert asociado al i -ésimo subsistema (en general los \mathcal{H}_i son de dimensión distinta).

Los estados puros de un sistema \mathcal{S} tienen la forma

$$|\psi\rangle = \sum_{j_1, \dots, j_N} c_{j_1, \dots, j_N} |\phi_{j_1}\rangle \otimes \dots \otimes |\phi_{j_N}\rangle \equiv \sum_{j_1, \dots, j_N} c_{j_1, \dots, j_N} |\phi_{j_1}, \dots, \phi_{j_N}\rangle, \quad (1.2.1)$$

donde los c_{j_1, \dots, j_N} son, en general, números complejos que pueden variar a lo largo de la evolución, y $|\phi_{j_i}\rangle$ es el j -ésimo vector de una base en el i -ésimo subespacio \mathcal{H}_i . En este contexto podemos definir los *estados mixtos* como estados de un sistema que no pueden ser descritos como un estado puro, los cuales tienen la forma general

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (1.2.2)$$

donde los $|\psi_i\rangle$ son estados puros de \mathcal{S} y los $p_i \in \mathfrak{R}_{\geq 0}$ cumplen con $\sum_i p_i = 1$. Para continuar nos será de utilidad realizar las siguientes definiciones:

Definición 1 *Estados separables.*

Un estado puro $|\psi_S\rangle$ de un sistema compuesto \mathcal{S} es separable si puede ser escrito como

$$|\psi_S\rangle = |\zeta_1\rangle \otimes \dots \otimes |\zeta_N\rangle \quad (1.2.3)$$

para algún $|\zeta_i\rangle$ del subespacio \mathcal{H}_i .

Por otro lado, el estado mixto ρ_S de un sistema \mathcal{S} es separable si puede ser escrito como

$$\rho_S = \sum_j p_j \rho_1^j \otimes \dots \otimes \rho_N^j, \quad (1.2.4)$$

donde ρ_i^j es una matriz densidad en el subespacio \mathcal{H}_i y $p_j \geq 0$ tal que $\sum_j p_j = 1$.

Para cada estado puro separable $|\psi_S\rangle$ existe un conjunto de operadores de la forma $O = O_1 \otimes \dots \otimes O_N$, tales que $|\psi_S\rangle$ es un eigenvector de dicho operador. En los estados separables puros, cada subsistema se encuentra en un estado puro. A su vez, en los estados separables mixtos cada subsistema se encuentra en una mezcla estadística.

Definición 2 Estados Enredados.

Sea \mathcal{S} un sistema compuesto y sean los vectores $|\phi_{j_1}, \dots, \phi_{j_N}\rangle$ una base de vectores separables del espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$. Un estado puro $|\psi_{\mathcal{S}}\rangle$ de \mathcal{S} es un estado enredado si no existe un conjunto de vectores $|\zeta_i\rangle$ tales que $|\psi_{\mathcal{S}}\rangle$ se escriba como un estado separable, i.e.

$$|\psi_{\mathcal{S}}\rangle = \sum_{j_1, \dots, j_N} c_{j_1, \dots, j_N} |\phi_{j_1}, \dots, \phi_{j_N}\rangle \neq |\zeta_1\rangle \otimes \dots \otimes |\zeta_N\rangle. \quad (1.2.5)$$

De igual manera en caso de estados mixtos, se dice que el estado se encuentra enredado si no puede ser escrito como un estado separable.

El interés en los estados enredados reside, entre otras cosas, en su utilidad para realizar tareas imposibles de llevar a cabo con estados separables. Estas tareas son tales que **no** pueden ser logradas por *operaciones locales y comunicación clásica*. Lo siguiente es preguntarnos si esta diferencia entre estados separables y enredados puede medirse o si existen estados más enredados que otros.

1.3. Propiedades de las medidas de enredamiento

Con el fin de estudiar el enredamiento se han propuesto diversos tipos de medidas, tales como el *enredamiento de destilación*, el *costo de enredamiento*, el *enredamiento de formación*, entre otros [2] [3] [4] [34]. Se han postulado diversas características que debe cumplir cualquier medida que intente cuantificar el enredamiento de un sistema. Las medidas más aceptadas por la comunidad se conocen como monótonas de enredamiento (*entanglement monotonones*), y son aquellas que cumplen con las siguientes propiedades [3], [4];

- Cualquier medida de enredamiento \mathcal{E} es una función que toma un estado cuántico en forma de una matriz densidad ρ y la mapea a un número real positivo, $\rho \rightarrow \mathcal{E}(\rho) \in \mathbf{R}_{\geq 0}$.
- El enredamiento es nulo en estados separables, por lo que cualquier medida que intente cuantificar el enredamiento debe cumplir que

$$\text{si } \rho = \sum_j p_j \rho_1^j \otimes \dots \otimes \rho_N^j \text{ entonces } \mathcal{E}(\rho) = 0. \quad (1.3.1)$$

- El enredamiento no crece bajo operaciones locales y comunicación clásica (LOCC, por sus siglas en inglés) ¹; de esto que si R_{LOCC} es un mapeo construido mediante LOCC tenemos que

$$\mathcal{E}(\rho) \geq \mathcal{E}(R_{LOCC}\rho). \quad (1.3.2)$$

Las transformaciones unitarias locales son un caso particular de transformaciones generadas por LOCC, con la particularidad de que son reversibles. De esto que si dos estados se encuentran relacionados por medio de transformaciones unitarias locales el enredamiento

¹Véase la sección 1.5.2

de ambos debe ser el mismo; así cualquier monótona de enredamiento debe ser invariante ante transformaciones unitarias locales,

$$\mathcal{E}(\rho) = \mathcal{E}(U_1 \otimes \dots \otimes U_N \rho U_N^\dagger \otimes \dots \otimes U_1^\dagger). \quad (1.3.3)$$

Las operaciones unitarias locales son equivalentes a realizar un cambio de base en los subsistemas.

1.4. Tangle

En esta sección introduciremos el concepto de *enredamiento bipartito* que hace alusión al enredamiento entre dos conjuntos de subsistemas en un sistema compuesto. Una *bipartición* de un sistema compuesto de N subsistemas, define dos conjuntos donde uno contiene m subsistemas y otro $N - m$ subsistemas, dicha bipartición se representará con la notación $\{m\}|\{N - m\}$.

1.4.1. Enredamiento de formación

Con el fin de estudiar el enredamiento, introducimos la monótona de enredamiento conocida como *Enredamiento de Formación* propuesta en 1996 por C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin y W. K. Wootters [34]. Consideremos un sistema compuesto por dos subsistemas α y β ², en el estado ρ . El enredamiento de formación se define como

$$E_f = \inf \left\{ \sum_i p_i E(|\psi_i\rangle) \right\}; \quad \rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (1.4.1)$$

es decir, el enredamiento de formación es el menor de los promedios de la entropía de Von Neumann E sobre todas las posibles descomposiciones del estado ρ en estados puros $|\psi_i\rangle$. La entropía de Von Neumann $E(|\psi\rangle)$ es por sí misma una monótona de enredamiento, definida como

$$E(|\psi\rangle) = -Tr(\rho_\alpha \log_2 \rho_\alpha) = -Tr(\rho_\beta \log_2 \rho_\beta), \quad (1.4.2)$$

donde $\rho_\alpha = Tr_\beta(|\psi\rangle \langle \psi|)$, $\rho_\beta = Tr_\alpha(|\psi\rangle \langle \psi|)$ y el símbolo Tr_i indica la traza parcial sobre el subsistema i . Debido a que se requiere la extremización de una medida, el enredamiento de formación es, en la práctica, realmente complicado de calcular.

1.4.2. Concurrencia

En 1997 William K. Wootters [23] encontró que, en general, para estados compuestos por un par de qubits el *Enredamiento de Formación* puede ser calculado como función de una nueva cantidad llamada *concurrencia* C , que es a su vez función del estado a estudiar. Para calcular la concurrencia primero tenemos que introducir la transformación conocida como *spin flip*. Sea $|\psi\rangle$ un estado puro de un qubit. El estado con spin flip, denotado como $|\tilde{\psi}\rangle$, se define como

$$|\tilde{\psi}\rangle = \sigma_y |\psi^*\rangle. \quad (1.4.3)$$

²Análogamente puede considerarse un sistema compuesto de N subsistemas dividido en la bipartición $\alpha|\beta$

Aquí $|\psi^*\rangle$ es el complejo conjugado del estado $|\psi\rangle$ en alguna base y σ_y es la matriz de Pauli $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ en la misma base. Para calcular el estado con spin flip de un estado puro compuesto por N qubits, se aplica la misma transformación N veces, cada una en el subespacio individual de cada qubit, es decir como un producto externo de N matrices de Pauli σ_y aplicadas al complejo conjugado del estado a transformar. Para un estado puro de dos qubits $|\phi\rangle$ tendremos

$$|\tilde{\phi}\rangle = \sigma_y \otimes \sigma_y |\phi^*\rangle. \quad (1.4.4)$$

Para un estado mixto, la transformación se aplica al operador densidad como usualmente se transforma operadores, de modo que el estado con spin flip $\tilde{\rho}$ de un estado ρ de dos qubits se define como

$$\tilde{\rho} = \sigma_y \otimes \sigma_y \rho^* \sigma_y \otimes \sigma_y. \quad (1.4.5)$$

Con esto tenemos las herramientas necesarias para definir la concurrencia C de un estado ρ de dos qubits.

Definición 3 Concurrencia.

Sea ρ la matriz densidad de un estado compuesto por dos qubits. La concurrencia $C(\rho)$ del estado ρ se define como

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}, \quad (1.4.6)$$

donde los λ_i son los eigenvalores de la matriz $R = \sqrt{\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}}$ ordenados de forma decreciente. Equivalentemente se pueden calcular los λ_i como las raíces cuadradas de los eigenvalores de la matriz $R' = \rho\tilde{\rho}$.

La conexión entre la concurrencia y el Enredamiento de Formación fue mostrada en 1997 por Scott Hill y William K. Wootters [35], de modo que dado un estado ρ , con concurrencia $C(\rho)$, el enredamiento de formación se calcula simplemente como

$$E_f(\rho) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}\right); \quad h(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2(1 - x). \quad (1.4.7)$$

Sin embargo, la importancia de la concurrencia reside en que cumple con las propiedades de toda medida de enredamiento, es decir, es por sí misma una monótona de enredamiento. Además E_f varía suave y monótonamente de 0 a 1 conforme C toma valores de 0 a 1. De esto que la concurrencia C pueda ser considerada una medida de enredamiento apropiada para estudiar sistemas de qubits. Para cuantificar el enredamiento utilizaremos el cuadrado de la concurrencia denominado *tangle*, el cual es a su vez una monótona de enredamiento.

1.4.3. Tangle para estados puros en pares de qudits

El tangle, como medida de enredamiento, ha sido bien aceptada por la comunidad por lo que se ha empleado en diferentes estudios, en especial para estados puros. En 2001 P. Rungta, V. Bužek, C. M. Caves, M. Hillery and G. J. Milburn [24] estudiaron la concurrencia para estados puros bipartitos de dimensiones arbitrarias. Para un estado puro $\rho_{\alpha\beta} = |\psi_{\alpha\beta}\rangle\langle\psi_{\alpha\beta}|$ compuesto por dos subsistemas, α y β , de dimensiones d_α y d_β , respectivamente, la acción del spin flip tiene la forma

$$\sigma_y \otimes \sigma_y \rho_{\alpha\beta}^* \sigma_y \otimes \sigma_y = \nu_\alpha \nu_\beta (\mathbb{1}_{\alpha\beta} + \rho_{\alpha\beta} - \mathbb{1}_\alpha \otimes \rho_\beta - \rho_\alpha \otimes \mathbb{1}_\beta), \quad (1.4.8)$$

donde los ν_i son constantes positivas, que dependen de la dimensión del subsistema i . Con esto, es posible generalizar el tangle para estados puros bipartitos de dimensión arbitraria; en particular escribimos el tangle como

$$C^2(|\psi_{\alpha\beta}\rangle) = 2\nu_{\alpha}\nu_{\beta}[1 - \text{Tr}(\rho_{\alpha}^2)] = 2\nu_{\alpha}\nu_{\beta}[1 - \text{Tr}(\rho_{\beta}^2)]. \quad (1.4.9)$$

En general, la ecuación (1.4.9) puede tomar valores entre cero y un máximo que depende de las dimensiones $\{d_{\alpha}, d_{\beta}\}$, sin embargo elegiremos la constante $\nu_{\alpha\beta} = \nu_{\alpha}\nu_{\beta}$ tal que la concurrencia solo tome valores en $[0, 1]$. Para esto estudiaremos los casos límites, siempre tomando en cuenta que el sistema compuesto se encuentra en un estado puro.

- Límite inferior: El límite inferior del tangle corresponde al caso en que el estado es desenredado. En este caso la matriz densidad de cada subsistema corresponderá a un estado puro, por lo que $\text{Tr}(\rho_{\alpha}^2) = \text{Tr}(\rho_{\beta}^2) = 1$ y $C^2(|\psi_{\alpha\beta}\rangle) = 0$.
- Límite superior: El límite máximo para la concurrencia se alcanzará cuando $\text{Tr}(\rho_i^2)$ tome su valor mínimo, el cual está dado por

$$\min\{\text{Tr}(\rho^2)\} = \frac{1}{d}, \quad (1.4.10)$$

donde d es la dimensión del sistema descrito por ρ , y corresponde al estado $\rho = \frac{1}{d}\mathbb{1}$.

En nuestro caso se debe cumplir que $C_{\alpha|\beta}^2 = 2[1 - \text{Tr}(\rho_{\alpha}^2)] = 2[1 - \text{Tr}(\rho_{\beta}^2)]$, por lo que tenemos que $\text{Tr}(\rho_{\alpha}^2) = \text{Tr}(\rho_{\beta}^2)$, de esta manera tendremos dos cotas mínimas dadas por la dimensión de cada subsistema; es claro que la mejor cota será la mayor de estas. i.e.

$$\max\{1/d_{\alpha}, 1/d_{\beta}\} \rightarrow 1/\min\{d_{\alpha}, d_{\beta}\}. \quad (1.4.11)$$

Sea $D = \min\{d_{\alpha}, d_{\beta}\}$, el límite máximo del tangle será entonces

$$\max\{C^2(|\psi_{\alpha\beta}\rangle)\} = 2\nu_{\alpha\beta}\left(\frac{D-1}{D}\right), \quad (1.4.12)$$

por lo que si fijamos el máximo de la concurrencia a 1, tendremos que elegir la constante $\nu_{\alpha\beta}$ como

$$\nu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{D}{D-1}; \quad D = \min\{d_{\alpha}, d_{\beta}\}. \quad (1.4.13)$$

Caso particular $D = 2$

En el caso particular en que uno de los subsistemas es de dimensión dos (lo que se conoce como qubit), se tiene que $D = 2$ y $\nu_{\alpha\beta} = 1$; con esto, el tangle (1.4.9) se reduce a

$$C^2(|\psi_{\alpha\beta}\rangle) = 2[1 - \text{Tr}(\rho_{\alpha}^2)] = 2[1 - \text{Tr}(\rho_{\beta}^2)]. \quad (1.4.14)$$

Esta forma es de interés pues relaciona directamente al tangle con la entropía lineal $S_L(|\psi_{\alpha\beta}\rangle) = 1 - \text{Tr}(\rho_{\alpha}^2) = 1 - \text{Tr}(\rho_{\beta}^2)$, la cual es un caso particular de la entropía de Tsallis [36]. Esto coloca

al tangle como una de las medidas de enredamiento basadas en entropía.

En el caso particular en que una de las partes de la bipartición es un qubit, su matriz densidad reducida ρ_i será una matriz de 2×2 por lo que cumplirá con

$$(Tr \rho_i)^2 - Tr(\rho_i^2) = 2 \det \rho_i, \quad (1.4.15)$$

utilizando esta propiedad podemos calcular el enredamiento de un estado puro en el cual una de las partes es descrita por un qubit, es decir podemos calcular el enredamiento entre un qubit (α) y un qudit (β) como

$$C^2(|\psi_{\alpha\beta}\rangle) = 4 \det \rho_\alpha. \quad (1.4.16)$$

Con esto, tenemos una buena medida del enredamiento en sistemas bipartitos en estados puros: el tangle, además de las herramientas para calcularle de manera efectiva. De ahora en adelante cuando no haya riesgo de confusión, omitiremos la dependencia explícita del estado cuyo enredamiento se está cuantificando.

1.5. Sistemas de tres qubits

1.5.1. 3-tangle

En el año 2000, V. Coffman, J. Kundu y W. K. Wothers [5] utilizaron la concurrencia para estudiar sistemas de tres qubits. Mostraron que el tangle, en el caso de tres qubits, cumple con cierta propiedad denominada *monogamia*, la cual se define como sigue. Consideremos un sistema compuesto de tres qubits A, B y C en el estado ρ_{ABC} . El enredamiento $C_{A|BC}^2$ del qubit A con el resto del sistema, es decir el subsistema BC , nunca es menor que la suma de los enredamientos bipartitos (C_{AB}^2, C_{AC}^2) entre los subsistemas AB y AC ; es decir

$$C_{A|BC}^2 \geq C_{AB}^2 + C_{AC}^2, \quad (1.5.1)$$

donde $C_{A|BC}^2$ cuantifica el enredamiento entre el qubit A y el subsistema BC tratado como un qudit, tal como se estudió en la sección anterior. De este modo podemos estudiar el enredamiento en sistemas tripartitos de manera análoga al caso bipartito (1.4.16). Para qubits tenemos

$$C_{A|BC}^2 = 2[1 - Tr(\rho_A^2)] = 2[1 - Tr(\rho_{BC}^2)] = 4 \det \rho_A. \quad (1.5.2)$$

Por otro lado los enredamientos bipartitos C_{AB}^2 y C_{AC}^2 son calculados a partir de las matrices densidad reducidas ρ_{AB} y ρ_{AC} , respectivamente, y se calculan como el cuadrado de la concurrencia (1.4.6).

La ecuación (1.5.1) es conocida como *desigualdad de la monogamia*, haciendo alusión a que existe una cota en la forma en que se distribuye el enredamiento en cierta bipartición. Sin embargo, esto nos ha llevado a que el enredamiento es una propiedad que no solo se presenta en parejas, es decir, al incrementar el número de subsistemas podemos encontrar un tipo diferente de enredamiento conocido como *enredamiento multipartito*.

De la ecuación (1.5.1), es claro que existe una cantidad de enredamiento residual al tomar la diferencia entre el enredamiento de un qubit con el resto del sistema y la suma de los

enredamientos en pares que involucran a dicho qubit. Este enredamiento residual para el caso de tres qubits en un estado puro $|\psi_{ABC}\rangle$ es conocido como *3tangle*, denotado como τ_{ABC} y definido como

$$\tau(|\psi_{ABC}\rangle) = C_{A|BC}^2 - C_{AB}^2 - C_{AC}^2 \geq 0. \quad (1.5.3)$$

El 3tangle representa el enredamiento tripartito entre los tres qubits presentes en el sistema, es invariante ante permutaciones en los subíndices y es, por sí solo, una monótona de enredamiento. Lo anterior nos permite introducir la descomposición CKW

$$C_{A|BC}^2 = C_{AB}^2 + C_{AC}^2 + \tau_{ABC}, \quad (1.5.4)$$

la cual nos permite entender cómo se distribuye el enredamiento relacionado a una bipartición particular en el caso de tres qubits.

Coffman et al. encuentran una expresión general para el 3tangle, considerando el estado más general de tres qubits $|\psi\rangle = \sum_{ijk} c_{ijk} |ijk\rangle$ ($i, j, k = 0, 1$). El 3tangle puede ser calculado como

$$\tau = 2 \left| \sum c_{ijk} c_{i'j'm} c_{npk'} c_{n'p'm'} \epsilon_{ii'} \epsilon_{jj'} \epsilon_{kk'} \epsilon_{mm'} \epsilon_{nn'} \epsilon_{pp'} \right|, \quad (1.5.5)$$

donde ϵ_{ab} es el símbolo de Levi-Civita y la suma corre sobre todos los índices repetidos de 0 a 1. Esta es la forma de 3tangle propuesta por Coffman, Kundu y Wothers; sin embargo en Capítulo 3 se llega a una forma más amigable utilizando un formalismo diferente.

Monogamia en sistemas de N qubits

En 2006 T. J. Osborne y F. Verstraete [37], mostraron que la desigualdad de la monogamia se satisface para sistemas de un número arbitrario de qubits, i.e., si $\rho_{A_1, A_2, \dots, A_N}$ es el estado más general de un sistema compuesto por N qubits, entonces

$$C_{A_1|A_2, \dots, A_N}^2 \geq C_{A_1 A_2}^2 + \dots + C_{A_1 A_N}^2, \quad (1.5.6)$$

donde $C_{A_1|A_2, \dots, A_N}^2$ es el enredamiento entre el qubit A_1 y el resto del sistema y los otros términos del tipo $C_{A_1 A_j}^2$ son los enredamientos bipartitos calculados a partir de las matrices densidad reducidas $\rho_{A_1 A_j}$. Esta generalización a N qubits abre la posibilidad de tener diferentes tipos de enredamientos que involucren un número arbitrario de qubits, en analogía con el 3tangle.

En el caso particular que el sistema se encuentra en un estado puro, podemos calcular fácilmente el enredamiento de un qubit con el resto del sistema considerado un qudit como en la ecuación (1.5.2)

$$C_{A_1|A_2, \dots, A_N}^2 = 2[1 - \text{Tr}(\rho_{A_1}^2)]. \quad (1.5.7)$$

1.5.2. Equivalencia bajo LOCC y SLOCC

Antes de continuar con el estudio de sistemas de tres qubits, tomaremos esta sección para hablar sobre *operaciones locales y comunicación clásica* (LOCC, por sus siglas en inglés) y cómo estas son útiles para clasificar estados cuánticos con respecto al enredamiento que poseen.

Consideremos un sistema compuesto de dos subsistemas y dos observadores separados espacialmente, Alice posee el subsistema A y Bob el subsistema B. Definiremos las *operaciones locales* como aquellas que realizan Alice (o Bob) y que incluyen: transformaciones unitarias, despreciar partes del sistema, adicionar sistemas de apoyo (*ancilla system*) o realizar mediciones, en el subsistema correspondiente. El formalismo LOCC en sistemas bipartitos consiste en que Alice y Bob transformen un estado compuesto aplicando operaciones locales, mientras se comunican entre ellos de manera clásica. En general las LOCC son representadas por un superoperador multilocal $\mathcal{S}_A \otimes \mathcal{S}_B$, donde \mathcal{S}_i representa un mapa completamente positivo sobre el subsistema i (véase la sección 2).

En el año 2000 W. Dür, G. Vidal y J.I. Cirac [6] exploraron la equivalencia de estados bajo *operaciones unitarias y comunicación clásica aleatoria* (SLOCC por sus siglas en inglés); estas operaciones consisten en LOCC cuya probabilidad de transformación entre estados es diferente de uno. Las SLOCC son, en estados compuestos de qubits, representadas por operadores locales invertibles. Esto nos lleva a realizar las siguientes definiciones:

Definición 4 Equivalencia bajo LOCC.

Dos estados $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ compuestos por N subsistemas son equivalentes bajo operaciones locales y comunicación clásica si y solo si están relacionados por operaciones unitarias locales (LU) [38], es decir, si existe una operación unitaria local $U_1 \otimes \dots \otimes U_N$ tal que

$$|\phi\rangle = U_1 \otimes \dots \otimes U_N |\psi\rangle. \quad (1.5.8)$$

Definición 5 Equivalencia bajo SLOCC.

Dos estados $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ compuestos por N qubits son equivalentes bajo operaciones locales y comunicación clásica aleatoria si y solo si están relacionados por operaciones locales invertibles (invertible local operators ILO) [6], es decir, si existe un operador invertible $L_1 \otimes \dots \otimes L_N$, tal que

$$|\phi\rangle = L_1 \otimes \dots \otimes L_N |\psi\rangle. \quad (1.5.9)$$

La equivalencia de estados bajo SLOCC implica que ambos estados son capaces de realizar las mismas tareas en términos de *información cuántica* aunque con diferentes probabilidades. Dichas tareas incluyen la teletransportación cuántica, la criptografía cuántica, entre otros [10].

1.5.3. Clases de enredamiento

El estudio de W. Dür *et al* [6] se centró en sistemas compuestos por dos y tres qubits, encontrando que existe una categoría en el caso de dos qubits y seis diferentes categorías de estados inequivalentes bajo SLOCC para sistemas de tres qubits, clasificados por su tipo de enredamiento.

Sistemas de dos qubits

En sistemas de dos qubits se tiene que existen dos clases de estados, los separables y los enredados. En general cualquier estado compuesto de dos qubits puede ser mapeado por medio de LOCC a un estado con la forma [6]

$$|\psi\rangle = c_\delta|00\rangle + s_\delta|11\rangle, \quad c_\delta \geq s_\delta \geq 0, \quad (1.5.10)$$

donde $c_\delta = \cos \delta$, $s_\delta = \sin \delta$ y δ es una constante que describe el estado. Todos los estados separables, de dos qubits, pueden ser mapeados al estado $|00\rangle$ y todos los estados enredados de dos qubits pertenecen a la misma clase bajo SLOCC.

Sistemas de tres qubits

Para describir las clases de enredamiento en sistemas de tres qubits, consideremos un estado compuesto por los qubits A, B y C . En este sistema existen tres posibles biparticiones cuyos enredamientos están dados por $C_{A|BC}^2, C_{B|AC}^2$ y $C_{C|AB}^2$. Las seis clasificaciones consisten en: estados separables, tres diferentes clases de estados biseparables y dos familias inequivalentes que contienen enredamiento en las tres biparticiones, estas son llamadas GHZ y W. El trabajo de W. Dür *et al.* resalta que existen dos formas inequivalentes de enredar tres qubits, es decir existen dos familias, inequivalentes bajo SLOCC, de estados que cumplen con tener enredamiento en las tres biparticiones. A continuación describimos cada una de estas familias.

- Familia GHZ:

Los estados de la familia GHZ son estados con enredamiento genuino, es decir, poseen enredamiento no nulo en sus tres biparticiones, $C_{i|jk}^2 \neq 0 \forall i \in \{A, B, C\}$, y se caracterizan por tener 3tangle, i.e. $|\psi\rangle$ es un estado con enredamiento tipo GHZ si y solo si $\tau(|\psi\rangle) \neq 0$. El nombre de esta familia viene del estado GHZ

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle), \quad (1.5.11)$$

el cual representa al estado con mayor 3tangle, $\tau(|GHZ\rangle) = 1$.

Pese a que el estado GHZ [39] es quien le da el nombre a esta familia, los estados de la clasificación GHZ tienen algunas diferencias con dicho estado. En el estado GHZ al trazar sobre uno de los subsistemas los dos restantes quedan desenredados, sin embargo, en general, los estados con enredamiento tipo GHZ además de poseer enredamiento genuino tripartito en forma de 3tangle τ , pueden presentar enredamiento bipartito entre un par, o más, de sus subsistemas, i.e. $C_{ij}^2 \neq 0$, siempre respetando la monogamia 1.5.3

$$C_{i|jk}^2 = C_{ij}^2 + C_{ik}^2 + \tau_{ijk}. \quad (1.5.12)$$

En [40] se muestra una representación gráfica del enredamiento presente en el estado GHZ, donde tres anillos se encuentran enredados de tal modo que al romper uno de ellos los otros dos quedan separados, tal como se muestra en la Figura 1.1.

- Familia W:

Los estados de la familia W, al igual que los estados de la familia GHZ, poseen enredamiento en sus tres biparticiones $C_{i|jk}^2 \neq 0 \forall i$, pero a diferencia de los estados tipo GHZ el 3tangle se anula en estos estados. Es decir los estados con enredamiento tipo W poseen enredamiento genuino sin presentar 3tangle. Un estado $|\phi\rangle$ pertenece a la familia W, si y solo si $\tau(|\phi\rangle) = 0$ y $C_{i|jk}^2(|\phi\rangle) \neq 0 \forall i \in \{A, B, C\}$. Es importante notar que en los estados con enredamiento tipo W todo el enredamiento se encuentra en pares de qubits, por lo que la descomposición CKW (1.5.4) toma la forma

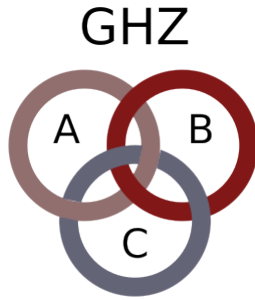


Figura 1.1: Representación del enredamiento en el estado GHZ. Al trazar sobre un qubit los dos restantes quedan densenredados.

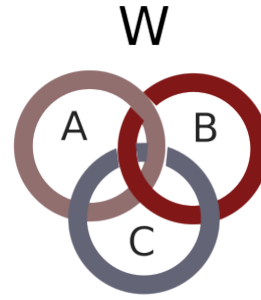


Figura 1.2: Representación del enredamiento en el estado W. Al trazar sobre un qubit los dos restantes se mantienen enredados.

$$C_{ijk}^2 = C_{ij}^2 + C_{jk}^2 + \tau_{ijk}. \quad (1.5.13)$$

La familia W recibe su nombre del estado W [41]

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle), \quad (1.5.14)$$

por ser el más representativo de la familia. El estado W es el estado con enredamiento más robusto, pues al trazar sobre un subsistema, los subsistemas restantes se mantienen enredados.

Esta propiedad no se mantiene en general para todos los miembros de la familia W, es decir existen estados tipo W en los que al trazar sobre uno de los qubits, los dos subsistemas restantes no presenten enredamiento (estos estados cumplen con $C_{ij}^2 \neq 0$, $C_{ik}^2 \neq 0$ y $C_{jk}^2 = 0$). La representación gráfica del estado W consiste en tres anillos enredados de tal forma que al romper uno de estos, los dos restantes se mantienen enredados, tal como se muestra en la Figura 1.2.

- **Biseparable:**

Los estados biseparables forman tres subfamilias independientes las cuales se distinguen por poseer enredamiento bipartito en solamente un par de qubits, de modo que el tercero se encuentra desenredado del resto. Los estados biseparables se encuentran en tres diferentes clases, puesto que existen tres diferentes biparticiones; $A|BC$, $B|AC$ y $C|AB$. Un estado $|\zeta\rangle$ es un estado biseparable en la bipartición $k|ij$ si $C_{ik}^2 = C_{jk}^2 = 0$ y $C_{ij}^2 \neq 0$, de esto es inmediato que $\tau(|\zeta\rangle) = 0$. La representación gráfica de esta familia de estados consiste en dos anillos enredados mientras un tercero se encuentra separado. En la Figura 1.3 se muestra el ejemplo de un estado biseparable de la forma $C|AB$.

Biseparable

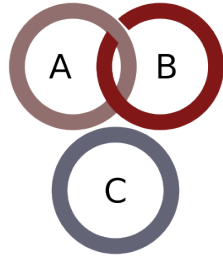


Figura 1.3: Representación del enredamiento en estados biseparables.

Separable

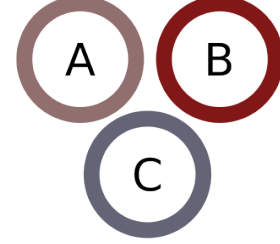


Figura 1.4: Representación del enredamiento en estados separables.

■ Estados separables:

Los estados separables tienen enredamiento nulo, es decir, no poseen enredamiento en ninguna de sus biparticiones, de modo que $C_{i|jk}^2 = 0, \forall i$. De esto que para estos estados $C_{ij}^2 = 0 \forall i, j$ y $\tau = 0$ como sigue de (1.5.3). La representación gráfica en este caso son tres anillos separados, como se muestra en la Figura 1.4.

1.5.4. Criterios para la distinción de clases de enredamiento.

Dada la clasificación en las familias de enredamiento, lo natural es desarrollar criterios que nos permitan, dado un estado de tres qubits, responder ¿a qué familia de enredamiento pertenece? W. Dür *et al.* [6] dan una respuesta a esta pregunta, dando los criterios como se muestra en la Tabla 1.1. Diversos trabajos se han realizado para tratar de clasificar de manera eficiente el tipo de enredamiento presente en un estado de tres qubits, especialmente de manera experimental [11], [12], [13], [14].

Familia de enredamiento	Condición	Enredamiento
GHZ	$\tau \neq 0$	3tangle
	$\tau = 0$	
W	$C_{i jk}^2 \neq 0, \forall \{i, j, k\}$	Enredamiento tripartito.
Biseparable	$C_{i jk}^2 = 0, C_{jk}^2 \neq 0$	$i jk$ separable.
Separable	$C_{i jk}^2 = 0, \forall \{i, j, k\}$	Separable.

Tabla 1.1: Condiciones para la clasificación de un estado de tres qubits en las diferentes familias de enredamiento.

Capítulo 2

Evolución de sistemas cuánticos

Al estudiar la evolución temporal de sistemas cuánticos distinguimos entre dos tipos diferentes de sistemas:

- *Sistemas cerrados*: aquellos cuyos elementos no interactúan ni intercambian información con el exterior.
- *Sistemas abiertos*: aquellos que pueden interactuar con elementos externos de modo que al evolucionar temporalmente el estado final tendrá información del exterior.

En la práctica, los sistemas cerrados son solo una aproximación, sin embargo, podemos considerar el sistema global, compuesto por el sistema de estudio (S) y el resto del universo (o ambiente E) como un sistema cerrado.

La evolución más general en sistemas cuánticos se encuentra descrita por las *operaciones cuánticas* [42]. Las operaciones cuánticas mapean un estado ρ_S a un estado $\rho'_S = \mathcal{S}(\rho_S)$ ¹, donde \mathcal{S} es un *súper operador* el cual cumple con las siguientes propiedades:

- Linealidad: Si $\rho = \sum_i p_i \rho_i$, donde los $p_i (\in \mathfrak{R}_{\geq 0})$ son tales que $\sum_i p_i = 1$, entonces

$$\mathcal{S}(\rho) = \sum_i p_i \mathcal{S}(\rho_i). \quad (2.0.1)$$

- Conserva la traza:

$$\text{Tr}(\mathcal{S}(\rho)) = \text{Tr}(\rho) = 1. \quad (2.0.2)$$

- Es un mapeo completamente positivo. Dado un sistema S_A en el estado ρ_A , el mapeo es positivo si $\mathcal{S}(\rho_A)$ es un operador positivo i.e., si $\langle \phi | \mathcal{S}(\rho_A) | \phi \rangle \geq 0 \forall |\phi\rangle$.

Un mapeo será completamente positivo si al extender el sistema agregando un sistema adicional S_B (de tal manera que el sistema compuesto se encuentre inicialmente en el estado ρ_{AB}), la acción del superoperador $\mathcal{S}_A \otimes \mathbb{1}_B$ conduce el sistema a un estado final ρ'_{AB} que también sea un operador positivo, i.e.

$$\langle \psi_{AB} | \mathcal{S}_A \otimes \mathbb{1}_B(\rho_{AB}) | \psi_{AB} \rangle \geq 0; \quad \forall |\psi_{AB}\rangle. \quad (2.0.3)$$

¹Donde hemos omitido las medidas proyectivas que, en general, disminuyen la traza.

2.1. Evolución en sistemas cerrados

En mecánica cuántica, el *tiempo* no es representado como un operador sino como un parámetro [10]. Para describir la evolución temporal de un sistema cerrado en el estado ρ , es necesario introducir el *operador de evolución temporal* $U(t, t_0)$, el cual es un operador unitario, i.e. $U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0) = \mathbb{1}$.

Consideremos un sistema en el estado $\rho(t_0)$ al tiempo t_0 , que evoluciona al estado $\rho(t)$ en el tiempo t y cuya evolución es descrita como

$$\rho(t) = U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0). \quad (2.1.1)$$

En el caso particular de estados puros, la evolución tiene la forma

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle. \quad (2.1.2)$$

2.2. Evolución en sistemas abiertos

Las operaciones cuánticas son la forma de evolución más general en sistemas cuánticos. Cuando son utilizadas para describir la evolución de sistemas abiertos se les conoce con el nombre de *canales cuánticos*. A continuación introduciremos una nueva herramienta llamada *operadores de Kraus*, útil para representar dichos canales.

2.2.1. Operadores de Kraus

En 1970 K. Kraus [21] [22] desarrolló un tratamiento para estudiar la evolución no unitaria producida por los canales cuánticos.

Consideremos el subsistema de estudio S el cual interactúa con su ambiente E . El sistema $S + E$ es considerado un sistema cerrado por lo que su evolución será descrita por el operador unitario U_{SE} . Sin pérdida de generalidad consideramos que el sistema compuesto se encuentra inicialmente en el estado $\rho_{SE} = \rho_S|0_E\rangle\langle 0_E|$. El sistema $S + E$ evoluciona de acuerdo a la ecuación 2.1.1 conduciendo el sistema al estado $\rho'_{SE} = U_{SE}\rho_{SE}U_{SE}^\dagger$. Para estudiar la evolución del subsistema S , nos fijamos en la matriz densidad reducida $\rho'_S = Tr_E(\rho'_{SE})$. La evolución experimentada por el subsistema S , en general, **no** será unitaria y es calculada como

$$\begin{aligned} \rho'_S &= Tr_E(U_{SE}\rho_{SE}U_{SE}^\dagger) \\ &= Tr_E(U_{SE}\rho_S|0_E\rangle\langle 0_E|U_{SE}^\dagger) \\ &= \sum_i \langle i_E|U_{SE}|0_E\rangle\rho_S\langle 0_E|U_{SE}^\dagger|i_E\rangle \\ &= \sum_i K_i\rho_S K_i^\dagger \\ &= \mathcal{K}(\rho_S), \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

donde al trazar sobre el sistema E hemos elegido una base ortonormal cuyo i -ésimo elemento es el vector $|i_E\rangle$. Además introducimos los *operadores de Kraus*, definidos como

$$K_i = \langle i_E | U_{SE} | 0_E \rangle. \quad (2.2.2)$$

La figura (2.1) tomada del trabajo de A. Salles *et al.* [43], al cual volveremos más adelante, muestra esquemáticamente la diferencia entre la evolución de un sistema cerrado S producido por una evolución unitaria y la evolución de un sistema abierto $S + E$ en el cual se ha trazado sobre el ambiente (representado por el sistema E , el cual inicialmente se encontraba en el estado $|0\rangle$).

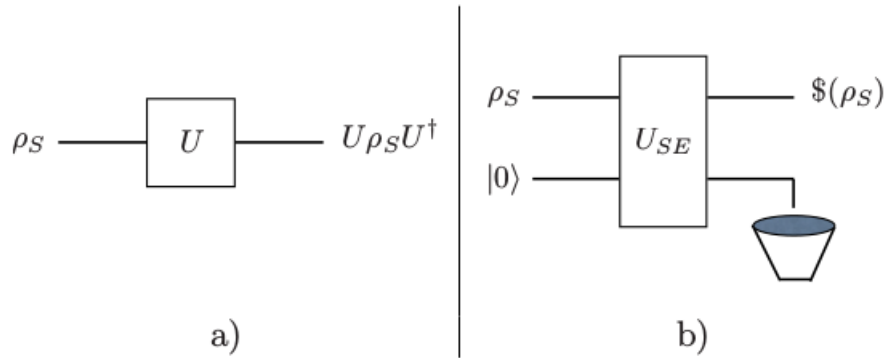


Figura 2.1: a) Evolución unitaria en un sistema cerrado. b) Evolución por medio de una operación cuántica sobre un sistema abierto.

Propiedades de los operadores de Kraus

Algunas de las propiedades de los operadores de Kraus se enlistan a continuación:

- No son únicos, pues dependen de la base en que son definidos.
- Actúan sobre el espacio de Hilbert \mathcal{H}_S por lo que son representados como matrices de dimensión $\dim S$. Además, existirán a lo más $(\dim S)^2$ operadores de Kraus independientes.
- Son un mapa completamente positivo.

Consideremos un sistema compuesto en el estado $\rho_{SS'}$, el cual evoluciona mediante la operación $\mathcal{S}_S \otimes \mathbb{1}_{S'}$ al estado $\rho'_{SS'}$. Es claro que la matriz densidad inicial $\rho_{SS'}$ es un operador positivo, por lo que es suficiente mostrar que $\rho'_{SS'}$ también lo es. Consideremos un estado arbitrario $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_{S'}$, tenemos entonces

$$\begin{aligned} \langle \phi | \rho'_{SS'} | \phi \rangle &= \langle \phi | \mathcal{S}_S \otimes \mathbb{1}_{S'} \{ \rho_{SS'} \} | \phi \rangle \\ &= \sum_i \langle \phi | (K_i \otimes \mathbb{1}_{S'}) \rho_{SS'} (K_i^\dagger \otimes \mathbb{1}_{S'}) | \phi \rangle \\ &= \sum_i \langle \psi_i | \rho_{SS'} | \psi_i \rangle \geq 0, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

donde definimos $|\psi_i\rangle = (K_i^\dagger \otimes \mathbb{1}_{S'}) |\phi\rangle$. Se concluye de aquí que la evolución descrita por operadores de Kraus será siempre un mapeo completamente positivo.

- La evolución descrita por los operadores de Kraus conserva la traza:

$$\begin{aligned}
Tr(\rho'_S) &= Tr\left(\sum_i K_i \rho_S K_i^\dagger\right) \\
&= \sum_i Tr(K_i \rho_S K_i^\dagger) \\
&= \sum_i Tr(K_i^\dagger K_i \rho_S) \\
&= Tr\left(\sum_i K_i^\dagger K_i \rho_S\right) \\
&= Tr(\rho_S) = 1,
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

donde se utilizó que

$$\begin{aligned}
\sum_i K_i^\dagger K_i &= \sum_i \langle 0_E | U_{SE}^\dagger | i_E \rangle \langle i_E | U_{SE} | 0_E \rangle \\
&= \langle 0_E | U_{SE}^\dagger U_{SE} | 0_E \rangle \\
&= \mathbb{1}_S.
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

- La evolución descrita por los operadores de Kraus es lineal; si $\rho = \sum_j p_j \rho_j$, de la linealidad de U_{SE} y la definición de los operadores de Kraus 2.2.2 sigue que el estado evolucionado ρ' será

$$\begin{aligned}
\rho' &= \sum_i K_i \left(\sum_j p_j \rho_j \right) K_i^\dagger \\
&= \sum_{i,j} p_j K_i \rho_j K_i^\dagger \\
&= \sum_j p_j \left(\sum_i K_i \rho_j K_i^\dagger \right) \\
&= \sum_j p_j \rho'_j.
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Hemos mostrado que los operadores de Kraus cumplen con las propiedades de una operación cuántica, por lo que describen perfectamente cualquier canal cuántico.

Los operadores de Kraus nos permiten expresar la evolución, no unitaria del subsistema S , producida por el canal cuántico \mathcal{K} , por medio de operadores derivados de la evolución unitaria U_{SE} que actúa sobre el sistema global.

2.2.2. Mapas cuánticos

Consideremos el sistema compuesto $S + E$, el cual puede ser visto como un sistema cerrado por lo que su evolución estará descrita por el operador unitario U_{SE} . En el caso en el que sistema

se encuentre inicialmente en un estado puro separable, podemos, sin pérdida de generalidad, considerarlo en el estado

$$|\phi\rangle = |\psi_S\rangle \otimes |0_E\rangle, \quad (2.2.7)$$

y la acción del operador unitario U_{SE} sobre dicho estado, será

$$\begin{aligned} |\phi'\rangle &= U_{SE}|\psi_S\rangle|0_E\rangle \\ &= \sum_i |i_E\rangle \langle i_E|U_{SE}|0_E\rangle |\psi_S\rangle \\ &= \sum_i K_i |\psi_S\rangle |i_E\rangle \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

donde K_i es el i -ésimo operador de Kraus y $|i_E\rangle$ es el i -ésimo vector en la base elegida. De esta manera los operadores de Kraus nos permiten determinar la evolución unitaria de cualquier estado ϕ utilizando el siguiente *mapa cuántico*:

$$|i_S\rangle|0_E\rangle \rightarrow \sum_j K_j |i_S\rangle |j_E\rangle. \quad (2.2.9)$$

2.3. Decoherencia

En 1981 W. H. Zurek [44], introdujo el concepto de *decoherencia* al considerar la interacción de los sistemas cuánticos con su ambiente. El programa de decoherencia nos muestra que la interacción de un sistema cuántico con su ambiente es suficiente para eliminar las coherencias en la matriz densidad reducida de dicho sistema, llevándolo a un estado indistinguible del de una distribución de probabilidad clásica.

Consideremos un sistema cuántico S inicialmente en una superposición de estados ortonormales

$$\alpha|\zeta_+\rangle + \beta|\zeta_-\rangle, \quad (2.3.1)$$

con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Si S interactúa con el sistema E inicialmente en el estado $|0\rangle_E$, el estado inicial del sistema $S + E$ será

$$|\psi_0\rangle = (\alpha|\zeta_+\rangle + \beta|\zeta_-\rangle)|0\rangle_E. \quad (2.3.2)$$

Supondremos que la evolución es descrita mediante una transformación unitaria a la que le corresponde el mapa:

$$\begin{aligned} |\zeta_+\rangle|0\rangle_E &\rightarrow |\zeta_+\rangle|\phi_1\rangle, \\ |\zeta_-\rangle|0\rangle_E &\rightarrow |\zeta_-\rangle|\phi_2\rangle, \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

donde $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ son dos estados de E . Así, el estado evolucionado será

$$|\psi\rangle = \alpha|\zeta_+\rangle|\phi_1\rangle + \beta|\zeta_-\rangle|\phi_2\rangle. \quad (2.3.4)$$

Cualquier observable medida en S dependerá únicamente de la matriz densidad reducida del subsistema S , la cual tiene la forma

$$\rho_S = Tr_E(|\psi\rangle\langle\psi|) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^*\langle\phi_2|\phi_1\rangle \\ \alpha^*\beta\langle\phi_1|\phi_2\rangle & |\beta|^2 \end{pmatrix}. \quad (2.3.5)$$

De esto, observamos que en el caso en que la interacción conduzca al sistema E a estados ortonormales i.e. $\langle\phi_2|\phi_1\rangle = 0$, la matriz densidad reducida será

$$\rho_S = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \end{pmatrix}, \quad (2.3.6)$$

la cual representa una mezcla estadística, que puede asociarse a una distribución de probabilidad clásica.

El trabajo de Zurek sugiere que la interacción de un sistema con su ambiente puede explicar el proceso de medición sin necesidad de recurrir al colapso de la función de onda y, con esto, explicar la transición entre el mundo cuántico y clásico. La investigación en los procesos de decoherencia ha conducido al estudio de la dinámica del enredamiento, del cual hablaremos más adelante.

2.4. Canales cuánticos

Con el fin de estudiar la dinámica de enredamiento en qubits, en esta sección presentaremos algunos de los canales cuánticos más populares en la literatura, comúnmente utilizados para representar procesos de decoherencia. Consideraremos un qubit y la interacción con su ambiente, modelado (sin pérdida de generalidad, como se muestra en [9]), como un segundo qubit.

El sistema $S + E$ se encuentra inicialmente en el estado

$$|\phi\rangle = |\psi_S\rangle|0_E\rangle, \quad (2.4.1)$$

mientras que el subsistema S por su parte será descrito por la matriz densidad

$$\rho_0 = |\psi_S\rangle\langle\psi_S| = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 \\ \lambda_1^* & \lambda_2 \end{pmatrix}; \quad \lambda_0 + \lambda_2 = 1. \quad (2.4.2)$$

Además, consideraremos que la evolución, descrita en estos casos por operadores de Kraus, es función de un parámetro $p \in [0, 1]$, el cual puede ser una probabilidad o una parametrización del tiempo, entre otros.

2.4.1. Canal de amortiguamiento de la amplitud

El canal de amortiguamiento de la amplitud (*amplitude damping channel*) representa una interacción disipativa entre los sistemas S y E . Los operadores de Kraus que describen este canal son [43]

$$K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.4.3)$$

los cuales conducen al siguiente mapeo cuántico:

$$\begin{aligned} |0_S 0_E\rangle &\rightarrow |0_S 0_E\rangle, \\ |1_S 0_E\rangle &\rightarrow \sqrt{1-p}|1_S 0_E\rangle + \sqrt{p}|0_S 1_E\rangle. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

La ecuación 2.4.4 hace visible la disipación producida por la interacción, pues si el sistema se encuentra en un estado excitado tendrá una probabilidad $1-p$ de permanecer en su estado excitado, mientras que tendrá una probabilidad p de ceder la excitación al ambiente, siempre decayendo en $p=1$.

El ejemplo emblemático de interacción descrita por este canal es la emisión espontánea en la interacción entre un átomo de dos niveles y los modos del campo electromagnético, en cuyo caso $p = (1 - e^{-\Gamma t})$, donde Γ es la vida media de la excitación.

El estado del sistema S durante la evolución está dado por

$$\rho_S(p) = K_0 \rho_0 K_0^\dagger + K_1 \rho_0 K_1^\dagger = \begin{pmatrix} \lambda_0 + \lambda_2 p & \lambda_1 \sqrt{1-p} \\ \lambda_1^* \sqrt{1-p} & \lambda_2 (1-p) \end{pmatrix}. \quad (2.4.5)$$

Vemos que los términos de coherencia y la población en el estado $|1\rangle$ disminuyen conforme p incrementa, por lo que al finalizar la evolución, la matriz reducida del subsistema S llegará al estado

$$\rho_S(p=1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.4.6)$$

el cual representa un estado sin coherencias, con probabilidad 1 de encontrarse en el estado $|0\rangle$.

2.4.2. Canal de desfasamiento

El canal de desfasamiento (*dephasing channel*) describe una interacción entre un sistema y su ambiente, en la cual no cambian las poblaciones iniciales en el sistema. Los operadores de Kraus que describen este canal son [43]

$$K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{p} \end{pmatrix}. \quad (2.4.7)$$

El mapeo cuántico correspondiente es:

$$\begin{aligned} |0_S 0_E\rangle &\rightarrow |0_S 0_E\rangle \\ |1_S 0_E\rangle &\rightarrow \sqrt{1-p}|1_S 0_E\rangle + \sqrt{p}|1_S 1_E\rangle. \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Este canal puede ser visto como una representación de la dispersión elástica en la que un átomo de dos niveles no cambia su estado pero el ambiente presenta una transición sin intercambiar energía. La interacción descrita por este canal se encuentra a menudo al acoplar átomos de dos niveles con un campo ruidoso.

El estado del sistema S durante la evolución está dado por

$$\rho_S(p) = K_0\rho_0K_0^\dagger + K_1\rho_0K_1^\dagger = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1\sqrt{1-p} \\ \lambda_1^*\sqrt{1-p} & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (2.4.9)$$

por lo que al finalizar la evolución, la matriz reducida del subsistema S será

$$\rho_S(p=1) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (2.4.10)$$

la cual representa una mezcla estadística que puede representar un estado clásico en el cual el sistema S se encuentra con probabilidad λ_0 en el estado $|0_S\rangle$ y con probabilidad λ_2 en el estado $|1_S\rangle$. Es interesante que este canal no modifica las poblaciones en el estado, solamente destruye los términos coherentes.

2.4.3. Canales de volteo de fase, bit y bit-fase

Los canales volteo de fase (*phase flip*), volteo de bit (*bit flip*) y volteo de bit-fase (*phase bit flip*) representan los posibles errores producidos por el ruido en un canal cuántico. Los operadores de Kraus que describen estos canales son [43]

$$K_0 = \sqrt{1 - \frac{p}{2}}\mathbb{1}, \quad K_1^i = \sqrt{\frac{p}{2}}\sigma_i, \quad (2.4.11)$$

donde σ_i es la i -ésima matriz de Pauli, describiendo cada una un canal. A continuación mostraremos el mapeo y la evolución de la matriz densidad reducida del sistema de cada canal:

Volteo de fase

Al cual corresponde $\sigma_i \rightarrow \sigma_z$, y produce el mapeo:

$$\begin{aligned} |0_S0_E\rangle &\rightarrow \sqrt{1 - \frac{p}{2}}|0_S0_E\rangle + \sqrt{\frac{p}{2}}|0_S1_E\rangle, \\ |1_S0_E\rangle &\rightarrow \sqrt{1 - \frac{p}{2}}|1_S0_E\rangle - \sqrt{\frac{p}{2}}|1_S1_E\rangle. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

La matriz densidad reducida del sistema durante la evolución será

$$\rho_S(p) = K_0\rho_0K_0^\dagger + K_1\rho_0K_1^\dagger = \begin{pmatrix} \lambda_0 & (1-p)\lambda_1 \\ (1-p)\lambda_1^* & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (2.4.13)$$

la cual lleva, en $p=1$, el sistema al estado

$$\rho_S(1) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (2.4.14)$$

El canal de volteo de fase es un canal de decoherencia que no afecta las poblaciones, pero que destruye la coherencia de manera lineal con p , a diferencia del canal de desfaseamiento donde las coherencias caían con $\sqrt{1-p}$.

Volteo de bit

A este canal corresponde $\sigma_i \rightarrow \sigma_x$, produciendo el mapeo

$$\begin{aligned} |0_S 0_E\rangle &\rightarrow \sqrt{1-\frac{p}{2}}|0_S 0_E\rangle + \sqrt{\frac{p}{2}}|1_S 1_E\rangle, \\ |1_S 0_E\rangle &\rightarrow \sqrt{1-\frac{p}{2}}|1_S 0_E\rangle + \sqrt{\frac{p}{2}}|0_S 1_E\rangle. \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

La matriz densidad reducida durante la evolución será

$$\rho_S(p) = K_0 \rho_0 K_0^\dagger + K_1 \rho_0 K_1^\dagger = \begin{pmatrix} (1-\frac{1}{2}p)\lambda_0 + \frac{1}{2}p\lambda_2 & Re\{\lambda_1\} + i(1-p)Im\{\lambda_1\} \\ Re\{\lambda_1^*\} + i(1-p)Im\{\lambda_1^*\} & (1-\frac{1}{2}p)\lambda_2 + \frac{1}{2}p\lambda_0 \end{pmatrix}, \quad (2.4.16)$$

conduciendo así en $p = 1$ el sistema al estado

$$\rho_S(1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & Re\{\lambda_1\} \\ Re\{\lambda_1\} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.4.17)$$

Este canal elimina la parte imaginaria del término de coherencia reduciendo así su magnitud. Este canal que produce un estado con máxima incertidumbre, pues sin importar las poblaciones iniciales, las poblaciones del estado final serán $1/2$.

Volteo de fase-bit

A este canale le corresponde $\sigma_i \rightarrow \sigma_y$, por lo que produce el mapeo

$$\begin{aligned} |0_S 0_E\rangle &\rightarrow \sqrt{1-\frac{p}{2}}|0_S 0_E\rangle + i\sqrt{\frac{p}{2}}|1_S 1_E\rangle, \\ |1_S 0_E\rangle &\rightarrow \sqrt{1-\frac{p}{2}}|1_S 0_E\rangle - i\sqrt{\frac{p}{2}}|0_S 1_E\rangle. \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

Dicho mapeo conduce nuestro sistema de estudio al estado

$$\rho_S(p) = K_0 \rho_0 K_0^\dagger + K_1 \rho_0 K_1^\dagger = \begin{pmatrix} (1-\frac{1}{2}p)\lambda_0 + \frac{1}{2}p\lambda_2 & iIm\{\lambda_1\} + (1-p)Re\{\lambda_1\} \\ -iIm\{\lambda_1\} + (1-p)Re\{\lambda_1\} & (1-\frac{1}{2}p)\lambda_2 + \frac{1}{2}p\lambda_0 \end{pmatrix}, \quad (2.4.19)$$

así en $p = 1$ el sistema se encontrará en el estado

$$\rho_S(p) = K_0\rho_0K_0^\dagger + K_1\rho_0K_1^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & i\text{Im}\{\lambda_1\} \\ -i\text{Im}\{\lambda_1\} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.4.20)$$

Este canal reduce la parte real del término de coherencia de manera lineal en p . Además, produce un estado con máxima incertidumbre pues las poblaciones finales son $1/2$.

2.5. Dinámica de enredamiento

Como mencionamos anteriormente, la investigación sobre procesos de decoherencia condujo al estudio de la dinámica del enredamiento. A continuación citaremos algunos de los trabajos que anteceden la investigación presente en esta tesis.

Muerte y nacimiento súbito del enredamiento

Al investigar sobre el decaimiento en la decoherencia, T. Yu y J. H. Eberly encontraron un nuevo fenómeno relacionado al enredamiento [7], [8]. Estudiando el sistemas de dos átomos (S, S') inicialmente enredados, cada uno de los cuales interactúa por medio de un canal de amortiguamiento de la amplitud con su respectiva cavidad (E, E'), descubrieron que, pese a que la coherencia en el sistema compuesto por ambos átomos decaía de manera exponencial, el enredamiento entre estos no seguía la dinámica de un tiempo de vida medio, sino que decaía en un tiempo finito y aparentemente de forma definitiva. Este fenómeno fue denominado *muerte súbita del enredamiento* (*Entanglement sudden death*, ESD) y fue mostrado de manera experimental un año después (2007) por M. P. Almeida, F. de Melo, M. Hor-Meyll, A. Salles, S. P. Walborn, P.H. Souto Ribeiro, L. Davidovich [45].

El descubrimiento del ESD hizo que la comunidad fijara su atención en la dinámica del enredamiento, tratando de contestar la pregunta ¿a dónde va el enredamiento? Dicha cuestión fue abordada en 2008 por C. E. Lopez, G. Romero, F. Lastra, E. Solano, y J. C. Retamal [9], quienes estudiaron el mismo sistema de dos átomos de dos niveles inicialmente enredados, los cuales fueron separados espacialmente y cada uno interactuaba con su propio medio.² Analizaron la evolución temporal (dinámica) de las concurrencias de dos qubits C_{ij} , cuando la interacción de los átomos con sus ambientes era descrita por un canal de amortiguamiento de la amplitud. Lopez *et al.* encontraron que mientras el enredamiento entre los átomos sufría ESD el enredamiento entre los ambientes (cavidades) sufría lo que llamaron *nacimiento súbito del enredamiento* (*Entanglement sudden birth* ESB), el cual podía surgir antes o después del ESD.

¿A dónde va el enredamiento?

En 2009, Yan-Kiu Bai, Ming-Yong Ye y Z. D. Wang [15] recurrieron a la desigualdad de la monogamia (CKW) (1.5.1) y a la generalización de la concurrencia en qudits con el fin de entender mejor el resultado de Lopez *et al.*, encontrando que durante la evolución se genera enredamiento genuino en el sistema multipartito. Posteriormente, en el trabajo [16] se estudia

²Como ya hemos mencionado antes, en este trabajo muestran que si los sistemas de estudio son qubits, se puede considerar, sin pérdida de generalidad, a los ambientes como qubits.

con detalle el enredamiento multipartito en el sistema de dos qubits inicialmente enredados, los cuales son separados espacialmente y cada uno interactúa con su respectivo ambiente de manera local. Empleando los resultados conocidos para el sistema de tres qubits [17], en [16] se da respuesta a la pregunta ¿a dónde va el enredamiento durante el ESD? La respuesta es que en el caso particular en que los sistemas interactúen por medio de un ADC, el enredamiento es transformado en enredamiento multipartito, en forma de 3tangle y de enredamiento residual de cuatro qubits. Esto marca la importancia del enredamiento multipartito en sistemas de más de dos qubits y nos deja un mensaje claro: el enredamiento multipartito juega un papel fundamental para entender la dinámica y distribución del entrelazamiento en sistemas compuestos por más de dos subsistemas.

En 2009, T. Yu y J. H. Eberly [18] estudiaron la dinámica de enredamiento en el sistema de dos átomos de dos niveles en el que cada uno interactúa de manera local con su respectivo ambiente, en términos del ESD, ESB y los llamados muerte y resurgimiento (*death and revival*) bajo diferentes canales cuánticos, mostrando la riqueza que se puede generar en términos de dinámica de enredamiento en la frase: *By imposing the right interactions almost anything can be made to happen.*

Diversos trabajos sobre dinámica y distribución del enredamiento [43], [19], [20] han mostrado la utilidad de abordar estos estudios desde el formalismo de operadores de Kraus, principalmente desde el ámbito experimental. Así, investigar la dinámica de enredamiento desde esta perspectiva brinda una ventaja predictiva que facilita la experimentación en el estudio del enredamiento.

En este trabajo, estudiaremos a detalle el problema de dos qubits (S, S') inicialmente enredados en el cual uno de ellos interactúa con un tercer qubit (E). La interacción será a través de una evolución arbitraria descrita por un conjunto de operadores de Kraus (K_0, K_1). En lugar de tratar de responder la pregunta ¿a qué clase de enredamiento pertenece un estado? como se discutió en el capítulo anterior, nos concentraremos en investigar qué condiciones debe cumplir la evolución temporal, para garantizar el surgimiento de enredamiento en alguna de las clases. Esto nos dará la capacidad de predecir el tipo de enredamiento presente en el sistema en cada momento de la evolución, y abrirá las puertas para desarrollar nuevos canales que nos permitan realizar distintas tareas a lo largo de una evolución. A pesar de que el sistema de tres qubits es el sistema multipartito más simple, la existencia del 3tangle y la inequivalencia entre los enredamientos tipo GHZ y W dan a estos sistemas propiedades que los hacen de gran utilidad para realización de diferentes tareas. Esto, sumado a la relativa facilidad con que se producen, hace de los sistemas de tres qubits una gran herramienta para estudiar procesos de dinámica de enredamiento.

Capítulo 3

Generación de enredamiento en sistemas de tres qubits

Para el estudio de la generación de enredamiento en sistemas de tres qubits, es necesario introducir un par de entes matemáticos que nos serán de utilidad para realizar y presentar los resultados.

3.1. Definiciones

3.1.1. Matrices auxiliares

El estado puro más general de tres qubits $\{S', S, E\}$, tiene la forma

$$|\psi_{S'SE}\rangle = \sum_{kij} c_{kij} |k_{S'i_S j_E}\rangle. \quad (3.1.1)$$

Este estado está completamente representado por los coeficientes c_{kij} , a partir de los cuales definimos las matrices auxiliares

$$\begin{aligned} [C_0]_{ij} &= a_{ij} = c_{0ij} \\ [C_1]_{ij} &= b_{ij} = c_{1ij}, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

las cuales nos serán de utilidad pues describen cualquier estado puro de tres qubits en la forma (3.1.1). Estas matrices fueron usadas por A. Acín *et al.* [46] para encontrar la descomposición de Schmidt en sistemas de tres qubits, y por J. L. Brylinski [47] para reescribir el 3tangle de Wootters (1.5.5) como

$$\tau_{S'SE} = 4|Det(\psi)| \equiv 4|(Tr(C_0)Tr(C_1) - Tr(C_0C_1))^2 - 4 \det C_0C_1|, \quad (3.1.3)$$

donde el símbolo $Det(\psi)$ hace referencia al *hiperdeterminante* de Cayley, definido para tensores de rango $2 \otimes 2 \otimes 2$, evaluado en el tensor descrito por los coeficientes del estado $|\psi\rangle$ [48].

3.1.2. Función g

Dadas A, B y C matrices $n \times n$, definimos la función g que toma dos matrices y devuelve un número complejo como

$$g(A, B) \equiv \text{Tr}(A)\text{Tr}(B) - \text{Tr}(AB). \quad (3.1.4)$$

Es inmediato que la función g es invariante ante cambio de bases aplicados a las matrices sobre las que actúa, además cumple con las siguientes propiedades:

$$g(A, B) = g(B, A), \quad (3.1.5)$$

$$g(A, B + C) = g(A, B) + g(A, C), \quad (3.1.6)$$

$$[g(A, B)]^* = g(A^\dagger, B^\dagger). \quad (3.1.7)$$

Matrices 2×2

En el caso particular en que las matrices sean 2×2 , se tiene que

$$g(A, B) = \det(A + B) - \det A - \det B, \quad (3.1.8)$$

por lo que la función g satisfará las siguientes nuevas propiedades

$$g(AC, BC) = g(A, B) \det C, \quad (3.1.9)$$

$$g(A, B)g(C, D) = g(AC, BD) + g(AD, BC). \quad (3.1.10)$$

La demostración de todas estas propiedades se encuentra en el Apéndice B.

La función y las matrices auxiliares nos permiten reescribir el 3tangle (3.1.3) como

$$\tau_{S'SE} = 4|g^2(C_0, C_1) - 4 \det(C_0 C_1)|. \quad (3.1.11)$$

Esta forma nos permite emplear la función g que será clave en el desarrollo de este trabajo.

3.1.3. Enredamiento en el estado general de tres qubits

Consideremos un sistema compuesto de tres qubits S' , S y E , en un estado puro arbitrario

$$|\psi_{S'SE}\rangle = \sum_{kij} c_{kij} |k_{S'} i_S j_E\rangle = \sum_{ij} a_{ij} |0ij\rangle + b_{ij} |1ij\rangle. \quad (3.1.12)$$

Podemos calcular el enredamiento en las tres biparticiones directamente de calcular las matrices densidad reducidas empleando la ecuación (1.5.2). Como se muestra en el Apéndice C, dichas matrices están dadas por:

$$\begin{aligned} \rho_{S'} &= \begin{pmatrix} \text{Tr}(C_0 C_0^\dagger) & \text{Tr}(C_0 C_1^\dagger) \\ \text{Tr}(C_1 C_0^\dagger) & \text{Tr}(C_1 C_1^\dagger) \end{pmatrix}, \\ \rho_S &= C_0 C_0^\dagger + C_1 C_1^\dagger, \\ \rho_E &= C_0^\dagger C_0 + C_1^\dagger C_1, \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

de donde es directo que los enredamientos en las biparticiones son

$$C_{S'|SE}^2 = 4[Tr(C_0 C_0^\dagger)Tr(C_1 C_1^\dagger) - Tr(C_0 C_1^\dagger)Tr(C_1 C_0^\dagger)], \quad (3.1.14)$$

$$C_{S|S'E}^2 = 4 \det(C_0 C_0^\dagger + C_1 C_1^\dagger) = 4[|\det C_0|^2 + |\det C_1|^2 + g(C_0 C_0^\dagger, C_1 C_1^\dagger)], \quad (3.1.15)$$

$$C_{E|S'S}^2 = 4 \det(C_0^\dagger C_0 + C_1^\dagger C_1) = 4[|\det C_0|^2 + |\det C_1|^2 + g(C_0^\dagger C_0, C_1^\dagger C_1)]. \quad (3.1.16)$$

Con estas expresiones somos capaces de calcular los enredamientos de un sistema de tres qubits independientemente de la base en la que trabajemos utilizando únicamente las matrices auxiliares y la función g antes definidas.

3.2. Estado de estudio

Consideremos un sistema compuesto por tres qubits en el estado inicial

$$|\phi_0\rangle = |\psi_{S'S}\rangle|0_E\rangle, \quad (3.2.1)$$

donde $|\psi_{S'S}\rangle = \alpha|1_{S'}1_S\rangle + \beta|1_{S'}0_S\rangle + \gamma|0_{S'}1_S\rangle + \delta|0_{S'}0_S\rangle$. El sistema evoluciona al estado $|\phi\rangle$ por medio de la transformación unitaria $\mathbb{1}_{S'} \otimes U_{SE}(p)$, que depende de un parámetro arbitrario $p \in [0, 1]$, tal que $U_{SE}(0) = \mathbb{1}_{SE}$. Denotaremos por $\rho_S(0) = \rho_0$ la matriz densidad reducida del qubit S antes de la evolución.

Los qubits S, S' se encuentran inicialmente enredados, su enredamiento está dado por

$$C_{S'S}^2(0) = C_{S'|SE}^2(0) = C_{S|S'E}^2(0) = \mathcal{E}_0^2 = 4|\alpha\delta - \gamma\beta|^2 = 4 \det \rho_0. \quad (3.2.2)$$

La evolución del sistema describe la interacción entre los qubits S y E . La evolución de la matriz densidad reducida del sistema S , es en general no unitaria, pues la interacción llevará al sistema S a través del canal $\$$ descrito por el conjunto de operadores de Kraus $\{K_0, K_1\}$;

$$\begin{aligned} \rho_S(p) &= \$(\rho_0) \\ &= \sum_i K_i(p)\rho_0 K_i^\dagger(p), \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

donde los $K_\mu(p) = \langle \mu_E | U_{SE} | 0_E \rangle$ son los operadores de Kraus que describen esta evolución. Como hemos mencionado anteriormente, los operadores de Kraus actúan sobre el subespacio S , describen una evolución arbitraria y en general son función del parámetro p .

Dado que el sistema se encuentra inicialmente en un estado puro, podemos aplicar el formalismo de los mapas cuánticos para describir el estado final. La ecuación (2.2.9), aplicada a este caso se reduce a

$$\begin{aligned} |0_S 0_E\rangle &\rightarrow K_0|0_S\rangle|0_E\rangle + K_1|0_S\rangle|1_E\rangle, \\ |1_S 0_E\rangle &\rightarrow K_0|1_S\rangle|0_E\rangle + K_1|1_S\rangle|1_E\rangle. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Para realizar los cálculos, elegimos la base

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.2.5)$$

en la que los operadores de Kraus tienen la siguiente representación matricial:

$$K_0 = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10} & n_{11} \end{pmatrix}. \quad (3.2.6)$$

El estado después de la evolución será

$$|\phi\rangle = \mathbb{1}_{S'} \otimes U_{SE} |\phi_0\rangle = \sum_i K_i |\psi_{S'S}\rangle |i_E\rangle \quad (3.2.7)$$

y está descrito por las matrices auxiliares:

$$\begin{aligned} C_0 &= K_0 M_0(\delta, \gamma) + K_1 M_1(\delta, \gamma), \\ C_1 &= K_0 M_0(\beta, \alpha) + K_1 M_1(\beta, \alpha), \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

donde introdujimos las matrices

$$M_0(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}. \quad (3.2.9)$$

3.2.1. Dinámica del 3tangle

El 3tangle expresado en la ecuación (3.1.11) puede reescribirse utilizando la ecuación (3.2.8) y las propiedades de la función g (como se muestra en el Apéndice III). Con esto podemos expresar el 3tangle en términos de los operadores de Kraus como

$$\tau_{S'SE}(p) = \mathcal{E}_0^2 |g^2(K_0, K_1) - 4 \det K_0 K_1|. \quad (3.2.10)$$

La ecuación (3.2.10) nos permite estudiar la dinámica del 3tangle como función del parámetro p (contenido en los operadores de Kraus). Es importante observar que el 3tangle surge como una redistribución del enredamiento inicial en el sistema, de tal forma que si el enredamiento inicial es nulo ($\mathcal{E}_0^2 = 0$), no existirá evolución unitaria $\mathbb{1}_{S'} \otimes U_{SE}$ que genere 3tangle.

3.2.2. Dinámica del enredamiento en las biparticiones

En esta sección estudiamos el enredamiento presente en cada bipartición $C_{i|jk}^2$ de nuestro sistema, encontrando expresiones para éstos en términos de los operadores de Kraus.

Bipartición $S'|SE$

Debido a que la evolución describe una interacción entre los subsistemas S y E , la operación es local en el subespacio \mathcal{H}_{SE} , por lo que el enredamiento en la bipartición $S'|SE$ se mantiene constante durante toda la evolución, i.e.

$$C_{S'|SE}^2(p) = \mathcal{E}_0^2. \quad (3.2.11)$$

Bipartición $S|S'E$

Emplear las propiedades de la función g nos permite calcular el enredamiento de esta bipartición en todo momento de la evolución. Partiendo de la ecuación (1.5.2) utilizamos la propiedad (3.1.8) para expandir el determinante de la suma:

$$\begin{aligned} C_{S|S'E}^2(p) &= 4 \det (K_0 \rho_0 K_0^\dagger + K_1 \rho_0 K_1^\dagger), \\ &= 4 \det (K_0 \rho_0 K_0^\dagger) + 4 \det (K_1 \rho_0 K_1^\dagger) + 4g(K_0 \rho_0 K_0^\dagger, K_1 \rho_0 K_1^\dagger), \\ &= 4 \det \rho_0 (|\det K_0|^2 + |\det K_1|^2) + 4g(K_0 \rho_0 K_0^\dagger, K_1 \rho_0 K_1^\dagger), \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

utilizando la propiedad (3.1.10), seguida de las propiedades (3.1.9) y (3.1.7) podemos reescribir el último término como

$$\begin{aligned} 4g(K_0 \rho_0 K_0^\dagger, K_1 \rho_0 K_1^\dagger) &= 4g(K_0 \rho_0, K_1 \rho_0)g(K_0^\dagger, K_1^\dagger) - 4g(K_0 \rho_0 K_1^\dagger, K_1 \rho_0 K_0^\dagger), \\ &= 4(\det \rho_0)g(K_0, K_1)g(K_0^\dagger, K_1^\dagger) - 4g(K_0 \rho_0 K_1^\dagger, K_1 \rho_0 K_0^\dagger), \\ &= 4 \det \rho_0 |g(K_0, K_1)|^2 - 4g(K_0 \rho_0 K_1^\dagger, K_1 \rho_0 K_0^\dagger). \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Recordar que el enredamiento inicial está dado por $\mathcal{E}_0^2 = 4 \det \rho_0$, sumado a las ecuaciones (3.2.12) y (3.2.13) nos permite reescribir el enredamiento en la bipartición $S|S'E$ como

$$\begin{aligned} C_{S|S'E}^2 &= \mathcal{E}_0^2 (|\det K_0|^2 + |\det K_1|^2 + |g(K_0, K_1)|^2) - 4g(K_0 \rho_0 K_1^\dagger, K_1 \rho_0 K_0^\dagger), \\ &= \mathcal{E}_0^2 D_S(K) + G(K, \rho_0), \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

donde hemos definido

$$D_S(K) = |\det K_0|^2 + |\det K_1|^2 + |g(K_0, K_1)|^2, \quad (3.2.15)$$

$$G(K, \rho_0) = -4g(K_0 \rho_0 K_1^\dagger, K_1 \rho_0 K_0^\dagger). \quad (3.2.16)$$

Bipartición $E|S'S$

La matriz densidad reducida ρ_E puede ser calculada, a cualquier tiempo, si introducimos un par de identidades $\mathbb{1}_E$ en el subespacio E , de modo que

$$\begin{aligned} \rho_E &= Tr_{S'S}(U_{SE}|0_E\rangle|\psi_{S'S}\rangle\langle\psi_{S'S}| \langle 0_E|U_{SE}^\dagger), \\ &= Tr_S \left(\sum_{\mu} |\mu_E\rangle\langle\mu_E| U_{SE}|0_E\rangle Tr_{S'}(|\psi_{S'S}\rangle\langle\psi_{S'S}|) \langle 0_E|U_{SE}^\dagger \sum_{\nu} |\nu_E\rangle\langle\nu_E| \right), \\ &= Tr_S \left(\sum_{\mu\nu} |\mu_E\rangle K_{\mu} \rho_0 K_{\nu}^\dagger |\nu_E\rangle \right), \\ &= \sum_{\mu, \nu = \{0,1\}} Tr(K_{\mu} \rho_0 K_{\nu}^\dagger) |\mu_E\rangle\langle\nu_E|, \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

por lo que el enredamiento en esta bipartición será

$$\begin{aligned}
 C_{E|S'S}^2 &= 4 \det \rho_E, \\
 &= 4 \left[\text{Tr}(K_0 \rho_0 K_0^\dagger) \text{Tr}(K_1 \rho_0 K_1^\dagger) - \text{Tr}(K_0 \rho_0 K_1^\dagger) \text{Tr}(K_1 \rho_0 K_0^\dagger) \right].
 \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

Utilizando la ciclicidad de la traza podemos reordenar las matrices dentro de la traza, de tal manera que usando la propiedad (3.1.4) se cancelen términos, por último se emplea la propiedad (3.1.9) para volver a distinguir el enredamiento inicial \mathcal{E}_0^2 ;

$$\begin{aligned}
 C_{E|S'S}^2 &= 4 \left[\text{Tr}(\rho_0 K_0^\dagger K_0) \text{Tr}(\rho_0 K_1^\dagger K_1) - \text{Tr}(K_0 \rho_0 K_1^\dagger) \text{Tr}(K_1 \rho_0 K_0^\dagger) \right], \\
 &= 4 \left[g(\rho_0 K_0^\dagger K_0, \rho_0 K_1^\dagger K_1) + \cancel{\text{Tr}(\rho_0 K_0^\dagger K_0 \rho_0 K_1^\dagger K_1)} - \right. \\
 &\quad \left. - g(K_0 \rho_0 K_1^\dagger, K_1 \rho_0 K_0^\dagger) - \cancel{\text{Tr}(K_0 \rho_0 K_1^\dagger K_1 \rho_0 K_0^\dagger)} \right], \\
 &= \mathcal{E}_0^2 g(K_0^\dagger K_0, K_1^\dagger K_1) - 4g(K_0 \rho_0 K_1^\dagger, K_1 \rho_0 K_0^\dagger).
 \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

Con esto escribimos el enredamiento en esta bipartición como

$$\begin{aligned}
 C_{E|S'S}^2 &= \mathcal{E}_0^2 g(K_0^\dagger K_0, K_1^\dagger K_1) - 4g(K_0 \rho_0 K_1^\dagger, K_1 \rho_0 K_0^\dagger), \\
 &= \mathcal{E}_0^2 D_E(K) + G(K, \rho_0),
 \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

donde definimos la función $D_E(K)$ como

$$\begin{aligned}
 D_E(K) &= g(K_0^\dagger K_0, K_1^\dagger K_1), \\
 &= 1 - |\det K_0|^2 - |\det K_1|^2, \\
 &= 1 - D_S + |g(K_0, K_1)|^2.
 \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

Donde se utilizó (3.1.8) y la propiedad de los operadores de Kraus (2.2.5).

Resumen

Con esto hemos logrado escribir los enredamientos bipartitos en términos de los operadores de Kraus, obteniendo:

$$\begin{aligned}
 C_{S'|SE}^2 &= \mathcal{E}_0^2 \\
 C_{S|S'E}^2 &= \mathcal{E}_0^2 D_S(K) + G(K, \rho_0) \\
 C_{E|S'S}^2 &= \mathcal{E}_0^2 D_E(K) + G(K, \rho_0),
 \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

donde se definieron las funciones $D_S(K)$, $D_E(K)$ que dependen únicamente de los operadores de Kraus y la función $G(K, \rho_0)$ que depende de los operadores de Kraus y del estado inicial, además de que es común al enredamiento en las biparticiones $S|S'E$ y $E|SS'$.

3.2.3. Dinámica de enredamiento qubit-qubit

Al conocer los enredamientos en las diferentes biparticiones y el 3tangle, la descomposición CKW (1.5.5), nos permite obtener expresiones para los enredamientos qubit-qubit como sigue

$$C_{ij}^2 = \frac{1}{2}(C_{i|jk}^2 + C_{j|ik}^2 - C_{k|ij}^2) - \frac{1}{2}\tau_{ijk}. \quad (3.2.23)$$

Sustituyendo en (3.2.23) los enredamientos bipartitos (3.2.22) y el 3tangle (3.2.10) en términos de los operadores de Kraus, encontramos los enredamientos entre pares de qubits:

$$\begin{aligned} C_{S'S}^2 &= \frac{\mathcal{E}_0^2}{2}(1 + D_S - D_E) - \frac{\tau_{S'SE}}{2} \\ &= \mathcal{E}_0^2(|\det K_0| + |\det K_1|)^2 - \frac{1}{2}\mathcal{E}_0^2(|u| - |v| + |v - u|), \\ C_{S'E}^2 &= \frac{\mathcal{E}_0^2}{2}(1 + D_E - D_S) - \frac{\tau_{S'SE}}{2} \\ &= \mathcal{E}_0^2\left[1 - (|\det K_0| + |\det K_1|)^2\right] - \frac{1}{2}\mathcal{E}_0^2(|v| - |u| + |v - u|), \\ C_{SE}^2 &= G(K, \rho_0) + \frac{\mathcal{E}_0^2}{2}(D_S + D_E - 1) - \frac{\tau_{S'SE}}{2} \\ &= G(K, \rho_0) + \frac{1}{2}\mathcal{E}_0^2(|v| - |v - u|), \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

donde $u = 4 \det K_0 K_1$ y $v = g^2(K_0, K_1)$, además se utilizó que $\tau_{S'SE} = \mathcal{E}_0^2|u - v|$. Es importante notar en (3.2.24) que si $u = 0$, al menos uno de los operadores de Kraus tiene determinante nulo y la función $G(K, \rho_0)$ coincide directamente con el enredamiento generado entre los qubits S y E .

Cotas inferiores en la generación de enredamiento

Expresar el 3tangle en términos de la función g como en (3.2.10), nos permite encontrar una cota máxima para la generación de 3tangle y cotas inferiores en los enredamientos qubit-qubit. Estas cotas limitan el enredamiento que la evolución descrita por operadores de Kraus podrá generar.

La desigualdad del triángulo

$$|v| + |u| \geq |v - u|, \quad (3.2.25)$$

nos permite encontrar una cota superior para el 3tangle

$$\tau_{S'SE} \leq |g^2(K_0, K_1)| + |4 \det K_0 K_1|, \quad (3.2.26)$$

lo que, aplicado a los enredamientos qubit-qubit (3.2.24), nos permite encontrar cotas inferiores:

$$\begin{aligned} C_{S'S}^2 &\geq \mathcal{E}_0^2(|\det K_0| - |\det K_1|)^2, \\ C_{S'E}^2 &\geq \mathcal{E}_0^2\left[1 - (|\det K_0| + |\det K_1|)^2 - |g^2(K_0, K_1)|\right], \\ C_{SE}^2 &\geq G(K, \rho_0) - 2\mathcal{E}_0^2|\det K_0 K_1|. \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

Estos límites inferiores ocurren en particular cuando u ó $v = 0$.

3.3. Surgimiento garantizado de las diferentes familias de enredamiento

En esta sección utilizaremos los resultados obtenidos hasta el momento para clasificar los operadores de Kraus $\{K_0, K_1\}$, en función del tipo de enredamiento generado al aplicar la evolución correspondiente al estado (3.2.1). Es decir, encontraremos condiciones suficientes y necesarias para que el estado (3.2.7) pertenezca a cada una de las familias de enredamiento discutidas en la sección (1.5.3).

Los criterios dados en este capítulo se diferencian de los mencionados en la sección (1.5.4), pues retoman la perspectiva de T. Konrad *et al.* [19], es decir, nuestros criterios se enfocan en la evolución. Dado el estado inicial (3.2.1) y un par de operadores de Kraus, proporcionamos criterios para predecir el tipo de enredamiento que poseerá el estado en cada momento de la evolución.

3.3.1. Familia GHZ

La condición para que un estado se encuentre en la familia GHZ es que $\tau_{S'SE} \neq 0$, por lo tanto de la ecuación (3.2.10) tenemos que la evolución conducirá a nuestro estado inicial (3.2.1) a un estado con enredamiento tipo GHZ si y solo si

$$4 \det K_0 K_1 \neq g^2(K_0, K_1). \quad (3.3.1)$$

Podemos ver que si los términos involucrados son reales entonces $\det K_0 K_1 < 0$ es una condición suficiente para que el estado posea 3tangle y pertenezca a la familia GHZ.

3.3.2. Familia W

En esta familia existe enredamiento en las tres biparticiones, por lo que $C_{ijk}^2 \neq 0$, sin embargo $\tau_{S'SE} = 0$, lo cual nos lleva a que $4 \det K_0 K_1 = g^2(K_0, K_1)$. Consecuentemente nuestras funciones D_S y D_E tomarán la forma (véase (3.2.15) y (3.2.21))

$$\begin{aligned} D_S &\rightarrow D_S|_{\tau=0} = (|\det K_0| + |\det K_1|)^2 + 2|\det K_0 K_1| \\ D_E &\rightarrow D_E|_{\tau=0} = 1 - (|\det K_0| + |\det K_1|)^2 + 2|\det K_0 K_1|. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Al sustituir estas expresiones en los enredamientos qubit-qubit (3.2.24), obtenemos los enredamientos entre pares de qubits para el caso en que $\tau_{S'SE} = 0$:

$$C_{S'S}^2|_{\tau=0} = \mathcal{E}_0^2 (|\det K_0| + |\det K_1|)^2 = \mathcal{E}_0^2 d_S, \quad (3.3.3)$$

$$C_{S'E}^2|_{\tau=0} = \mathcal{E}_0^2 \left[1 - (|\det K_0| + |\det K_1|)^2 \right] = \mathcal{E}_0^2 d_E, \quad (3.3.4)$$

$$C_{SE}^2|_{\tau=0} = G(K, \rho_0) + 2\mathcal{E}_0^2 |\det K_0 K_1|, \quad (3.3.5)$$

donde hemos definido las funciones

$$d_S = 1 - d_E = (|\det K_0| + |\det K_1|)^2. \quad (3.3.6)$$

En este caso podemos observar que las funciones d_S y d_E representan una distribución del enredamiento inicial \mathcal{E}_0^2 entre los pares de qubits $S'S$ y $S'E$, respectivamente, siempre teniendo que $d_S + d_E = 1$. Además de que si el determinante de alguno de los operadores de Kraus se anula ($\det K_i = 0$), la función $G(K, \rho_0) > 0$ será un número positivo y corresponderá al enredamiento generado entre los qubits S y E .

Con la finalidad de encontrar condiciones sobre los operadores de Kraus para generar enredamiento tipo W, utilizamos la descomposición CKW (1.5.4) donde sustituimos los enredamientos bipartitos (3.3.3, 3.3.4, 3.3.5), siempre considerando $\tau_{S'SE} = 0$, obteniendo así:

$$C_{S'|SE}^2 = \mathcal{E}_0^2 \quad (3.3.7)$$

$$C_{S|S'E}^2 = \mathcal{E}_0^2 d_S + C_{SE}^2 \quad (3.3.8)$$

$$C_{E|S'S}^2 = \mathcal{E}_0^2 d_E + C_{SE}^2. \quad (3.3.9)$$

De los enredamientos entre los qubits $S'S$ (3.3.3) y $S'E$ (3.3.4) podemos ver que

$$\begin{aligned} (|\det K_0| + |\det K_1|)^2 = 0 &\Rightarrow C_{S'S}^2 = 0, \\ (|\det K_0| + |\det K_1|)^2 = 1 &\Rightarrow C_{S'E}^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

La condición para que un estado tenga enredamiento tipo W es que exista enredamiento en todas las biparticiones i.e. $C_{i|jk}^2 > 0, \forall i, j, k$. De esto, las expresiones de los enredamientos en las biparticiones (3.3.7, 3.3.8 y 3.3.9), la evolución llevará a un estado con enredamiento tipo W, si ocurre que $\tau_{S'SE} = 0$ y uno de los siguientes casos

- $C_{SE}^2 \neq 0$, i.e.

$$G(K, \rho_0) + 2\mathcal{E}_0^2 |\det K_0 K_1| \neq 0 \quad (3.3.11)$$

- $d_S \neq 0$ y $d_E \neq 0$, i.e.

$$1 > |\det K_0| + |\det K_1| > 0. \quad (3.3.12)$$

El primer caso involucra la función $G(K, \rho_0)$, la cual depende, además de los operadores de Kraus, del estado inicial, mientras que la segunda condición depende únicamente de la evolución.

3.3.3. Familias biseparables

De los enredamientos en las biparticiones para el caso en que $\tau_{S'SE} = 0$, los cuales se muestran en las ecuaciones (3.3.7), (3.3.8) y (3.3.9), podemos obtener condiciones para que la evolución genere un estado con enredamiento únicamente bipartito.

Separabilidad en el qubit S

La evolución nos llevará a un estado biseparable en la bipartición $S|S'E$ si y solo si el enredamiento en dicha bipartición es nulo, i.e. si y solo si la ecuación (3.3.8) se anula;

$$C_{S|S'E}^2 = \mathcal{E}_0^2 (|\det K_0| + |\det K_1|)^2 + C_{SE}^2 = 0. \quad (3.3.13)$$

Dado que la ecuación (3.3.13) es la suma de dos términos positivos, la única forma en que la suma sea cero es que ambos sean cero. Esto, seguido de (3.3.5) nos lleva a que para que la evolución anule estos términos es necesario y suficiente que

$$\det K_0 = \det K_1 = G(K, \rho_0) = 0. \quad (3.3.14)$$

Separabilidad en el qubit E

A partir de las ecuaciones (3.3.9) y (3.3.6), podemos ver que la evolución conducirá a un estado biseparable en la bipartición $E|S'S$ si y solo si

$$C_{E|S'S}^2 = \mathcal{E}_0^2 (1 - |\det K_0|^2 - |\det K_1|^2) + G(K, \rho_0) = 0. \quad (3.3.15)$$

Por lo que la evolución llevará el estado (3.2.1) a la familia biseparable en la bipartición $E|S'S$ si y solo si

$$G(K, \rho_0) = \mathcal{E}_0^2 (|\det K_0|^2 + |\det K_1|^2 - 1). \quad (3.3.16)$$

Familia separable

Dado que la transformación actúa sobre el subespacio SE , no hay forma de que ésta afecte el enredamiento en la bipartición $S'|SE$, dejándolo así, constante durante toda la evolución. Por lo tanto no es posible llevar al estado (3.2.1) a un estado biseparable en la bipartición $S'|SE$.

Resumen

El resumen de los resultados originales y de mayor relevancia obtenidos en esta tesis, se muestra en la Tabla 3.1. En ella mostramos las condiciones necesarias y suficientes para que la evolución genere cada una de las clases de enredamiento antes mencionadas, excepto en el caso del enredamiento tipo W donde se tienen condiciones suficientes.

3.4. Ejemplos

En esta sección tomaremos como ejemplo los canales cuánticos descritos en la sección 2.4 para mostrar la utilidad de los resultados de la Tabla 3.1. Dichas condiciones dependen de los operadores de Kraus (dados por cada canal) y la matriz densidad reducida del subsistema S antes de la evolución ρ_0 , por lo que consideraremos una matriz de la forma general

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 \\ \lambda_1^* & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (3.4.1)$$

donde $\lambda_0 + \lambda_2 = 1$. Dado que el enredamiento inicial está dado por

Familia de enredamiento	Condición	Enredamiento
GHZ	$\det K_0 K_1 - g^2(K_0, K_1) \neq 0$	3tangle
	$\det K_0 K_1 = g^2(K_0, K_1)$	
W	$0 < \det K_0 + \det K_1 < 1$ $G + 2\mathcal{E}_0^2 \det K_0 K_1 > 0$	Enredamiento tripartito.
Biseparable $S S'E$	$\det K_0 = \det K_1 = G(K, \rho_0) = 0$	S separable.
Biseparable $E S'S$	$G(K, \rho_0) = \mathcal{E}_0^2 (\det K_0 ^2 + \det K_1 ^2 - 1)$	E separable.

Tabla 3.1: Condiciones sobre los operadores de Kraus para la generación de enredamiento del estado (3.2.1). Todas las condiciones son necesarias y suficientes, excepto en el caso del enredamiento tipo W, donde tenemos dos condiciones, cada una de estas es, por separado, suficiente para garantizar el enredamiento tipo W.

$$\mathcal{E}_0^2 = 4 \det \rho_0 = 4[\lambda_2(1 - \lambda_2) - |\lambda_1|^2], \quad (3.4.2)$$

se cumple que:

$$|\lambda_1|^2 = \operatorname{Re}(\lambda_1)^2 + \operatorname{Im}(\lambda_1)^2 = \lambda_2(1 - \lambda_2) - \frac{1}{4}\mathcal{E}_0^2. \quad (3.4.3)$$

Tomando en cuenta que $\{\lambda_2, \mathcal{E}_0^2\} \in [0, 1]$, podemos observar que $|\lambda_1|^2$ toma valores en el rango entre $[0, 1/4]$, además de que dado un enredamiento inicial solo algunos valores de λ_2 tendrán sentido, esto se muestra en la Figura 3.1. Podemos observar que si el enredamiento inicial es máximo $\mathcal{E}_0^2 = 1$ no hay coherencia en el estado reducido inicial ρ_0 , además de que $\lambda_2 = 1/2$. Mientras que si el enredamiento inicial es nulo $\mathcal{E}_0^2 = 0$ podemos alcanzar el valor máximo de la coherencia, en este caso $|\lambda_1|^2 = 1/4$ y todos los valores de λ_2 están permitidos.

Esto nos servirá para realizar los cálculos necesarios en cada canal, y nos permitirá contar la historia de la dinámica del enredamiento para cada caso.

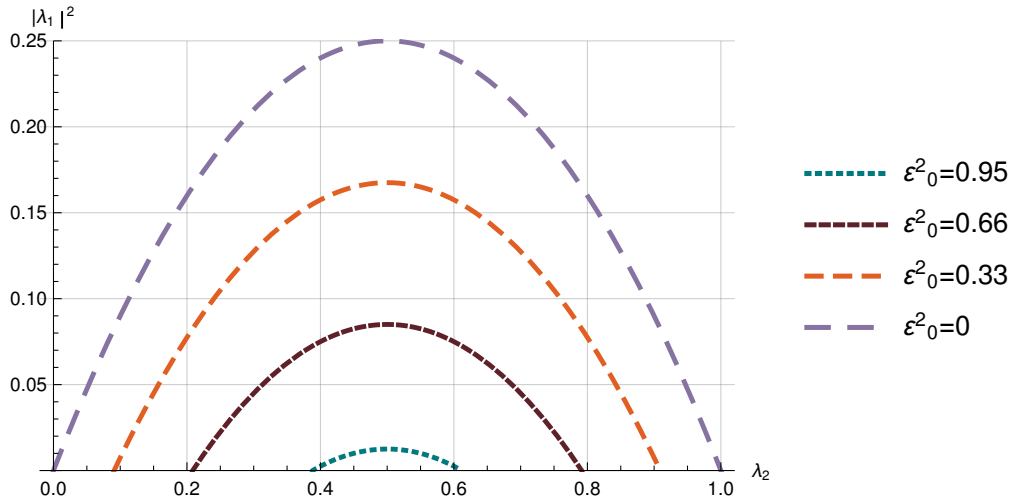


Figura 3.1: Módulo al cuadrado del término de coherencia, en función de la población inicial excitada para diferentes valores del enredamiento inicial.

3.4.1. Canal de amortiguamiento de la amplitud

En este canal los operadores de Kraus tienen la representación matricial [43]

$$K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4.4)$$

De estas, es directo que

$$\begin{aligned} \det K_0 &= \sqrt{1-p}, \\ \det K_1 &= 0, \\ g(K_0, K_1) &= 0, \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

por lo que tenemos $\tau_{S'SE} = 0$. Nuestras funciones de interés serán

$$\begin{aligned} D_E &= \mathcal{E}_0^2 p, \\ D_S &= \mathcal{E}_0^2 (1-p), \\ G &= 4\lambda_2^2 p(1-p). \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Sustituyendo en las ecuaciones (3.3.7)-(3.3.9) y (3.3.3)-(3.3.5) podemos calcular los enredamientos en las biparticiones y entre pares de qubits, respectivamente. Los resultados se muestran en la Tabla 3.2.

Enredamiento en las biparticiones	Enredamiento en pares de qubits
$C_{S' SE}^2 = \mathcal{E}_0^2$	$C_{S'S}^2 = \mathcal{E}_0^2(1 - p)$
$C_{S S'E}^2 = \mathcal{E}_0^2(1 - p) + 4\lambda_2^2 p(1 - p)$	$C_{S'E}^2 = \mathcal{E}_0^2 p$
$C_{E S'S}^2 = \mathcal{E}_0^2 p + 4\lambda_2^2 p(1 - p)$	$C_{SE}^2 = 4\lambda_2^2 p(1 - p)$

Tabla 3.2: Enredamientos bipartitos para el canal de amortiguamiento de la amplitud.

Recordando que $p \in [0, 1]$, somos capaces de estudiar la evolución del estado y la dinámica de enredamiento producida por este canal, apoyándonos de las Figuras 3.2 y 3.3.

- En $p = 0$ el sistema se encuentra en un estado E separable.
- Para $1 > p > 0$ se cumple que $1 > |\det K_0| + |\det K_1| > 0$, por lo tanto el estado contará con enredamiento tipo W como se muestra en la Tabla 3.1, i.e. existirá enredamiento en las tres biparticiones, sin 3tangle.
- En $p = 1$ tendremos que $\det K_0 = \det K_1 = G(K, \rho_0) = 0$, por lo que el estado pertenecerá a la familia S separable. Además, en $p = 1$ tenemos que $C_{S'E}^2 = \mathcal{E}_0^2$.
- Este canal no genera 3tangle.

Vemos entonces que la interacción entre los sistemas S y E por medio del canal de amortiguamiento de amplitud es tal que durante la evolución genera enredamiento bipartito entre los subsistemas S, E proporcional al valor de λ_2 , es decir, es proporcional a la probabilidad inicial de encontrar al sistema en el estado $|1\rangle$. Este canal también reduce de manera lineal el enredamiento $C_{S'S}^2$ e incrementa de manera lineal el enredamiento $C_{S'E}^2$. Al final de la evolución desaparece el enredamiento entre los sistemas S', S y S, E , dejando un enredamiento entre los subsistemas S', E igual al enredamiento inicial, i.e. este canal transfirió el enredamiento inicial entre el par de qubits S' y S , a enredamiento entre el par S' y E .

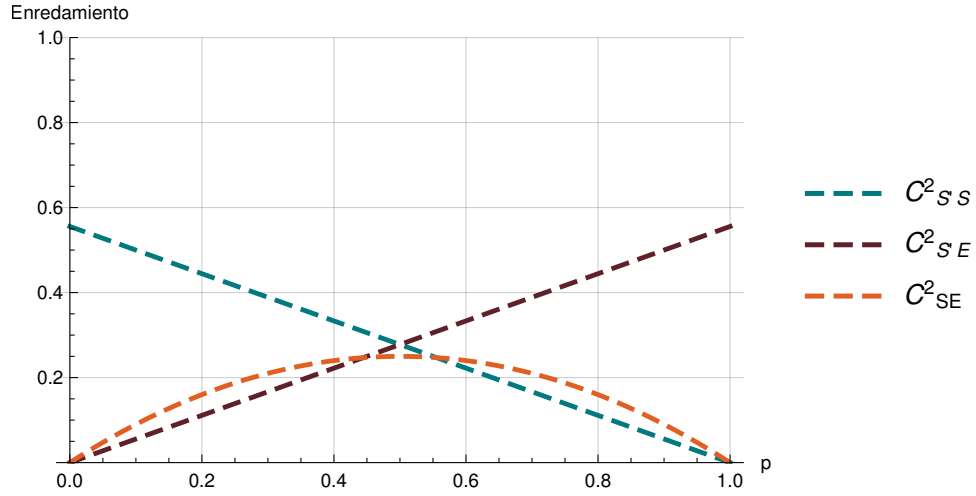


Figura 3.2: Ejemplo de la dinámica de enredamiento qubit-qubit para el canal de amortiguamiento de la amplitud, para $\mathcal{E}_0^2 = 5/9$, $\lambda_2 = 1/2$.

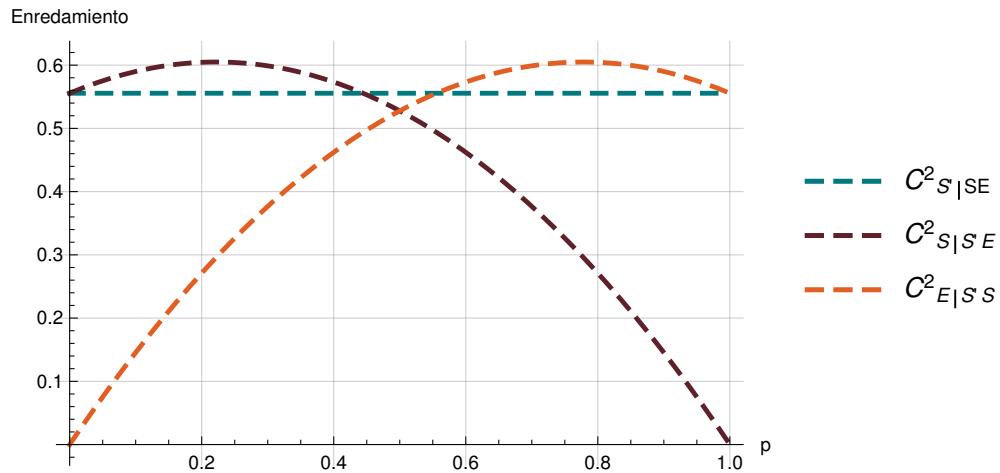


Figura 3.3: Ejemplo de enredamientos bipartitos para el canal de amortiguamiento de la amplitud, para $\mathcal{E}_0^2 = 5/9$, $\lambda_2 = 1/2$. Se observa que en el intervalo en que $0 < p < 1$, existe enredamiento en todas las biparticiones, generando enredamiento tipo W.

3.4.2. Canal de desfaseamiento

Las representaciones matriciales de los operadores de Kraus en este canal son [43]

$$K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{p} \end{pmatrix}. \quad (3.4.7)$$

De donde podemos calcular directamente

$$\begin{aligned} \det K_0 &= \sqrt{1-p}, \\ \det K_1 &= 0, \\ g(K_0, K_1) &= \sqrt{p}, \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

esto nos lleva a que

$$\tau_{S'SE} = \mathcal{E}_0^2 p, \quad (3.4.9)$$

por lo que para $p > 0$ el sistema presentará 3tangle. Nuestras funciones de interés serán entonces

$$\begin{aligned} D_E &= \mathcal{E}_0^2 p, \\ D_S &= \mathcal{E}_0^2, \\ G &= 4|\lambda_1|^2 p = 4p(\lambda_2(1 - \lambda_2) - \frac{1}{4}\mathcal{E}_0^2). \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Los enredamientos en cada bipartición y en pares de qubits se muestran en la Tabla 3.3.

Enredamiento en las biparticiones	Enredamiento en pares de qubits
$C_{S' SE}^2 = \mathcal{E}_0^2$	$C_{S'S}^2 = \mathcal{E}_0^2(1 - p)$
$C_{S S'E}^2 = \mathcal{E}_0^2 + 4 \lambda_1 ^2 p$	$C_{S'E}^2 = 0$
$C_{E S'E}^2 = \mathcal{E}_0^2 p + 4 \lambda_1 ^2 p$	$C_{SE}^2 = 4 \lambda_1 ^2 p$

Tabla 3.3: Enredamientos bipartitos para el canal de desfaseamiento.

Esto nos permite estudiar la dinámica del enredamiento presente en el sistema, producida este canal, como sigue:

- El estado inicialmente es E separable.
- En cuanto comienza la interacción $p > 0$, emerge el 3tangle y el enredamiento entre los qubits $S'S$ comienza a decaer, ambos de manera lineal con p . Además surge enredamiento entre el par de qubits SE proporcional a $|\lambda_1|^2$ y a p . Esto se muestra en la Figura 3.4.
- Para $p = 1$ el enredamiento entre los qubits S', S es nulo, es decir, todo el enredamiento inicialmente contenido en la bipartición $S'|SE$ fue transformado de enredamiento en pares de qubits a enredamiento genuino tripartito, 3tangle. Esto produce que el enredamiento en las biparticiones nunca decrezca, tal y como se muestra en la Figura 3.5.

La interacción de los sistemas S y E a través del canal de desfaseamiento es tal que transforma el enredamiento inicial entre los qubits S', S en 3tangle, el cual se comparte entre los tres qubits. Es importante notar que en ningún momento se genera enredamiento bipartito entre los pares de qubits $S'E$. Por otro lado, pese a la presencia de 3tangle sí se genera un enredamiento bipartito entre los pares de qubits SE , el cual es proporcional a los términos de coherencia.

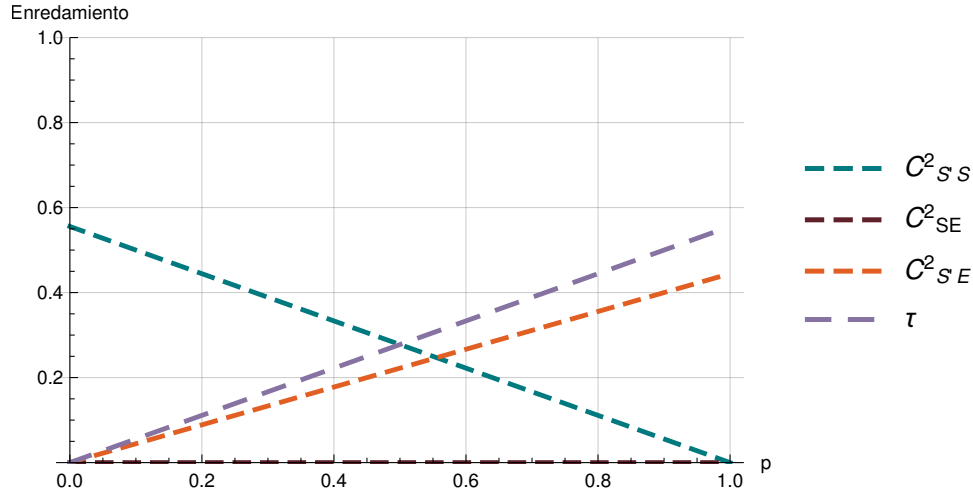


Figura 3.4: Ejemplo de la dinámica de enredamiento qubit-qubit y 3tangle para el canal de desfaseamiento, para $\mathcal{E}_0^2 = 5/9$, $\lambda_2 = 1/2$, $|\lambda_1|^2 = 1/9$.

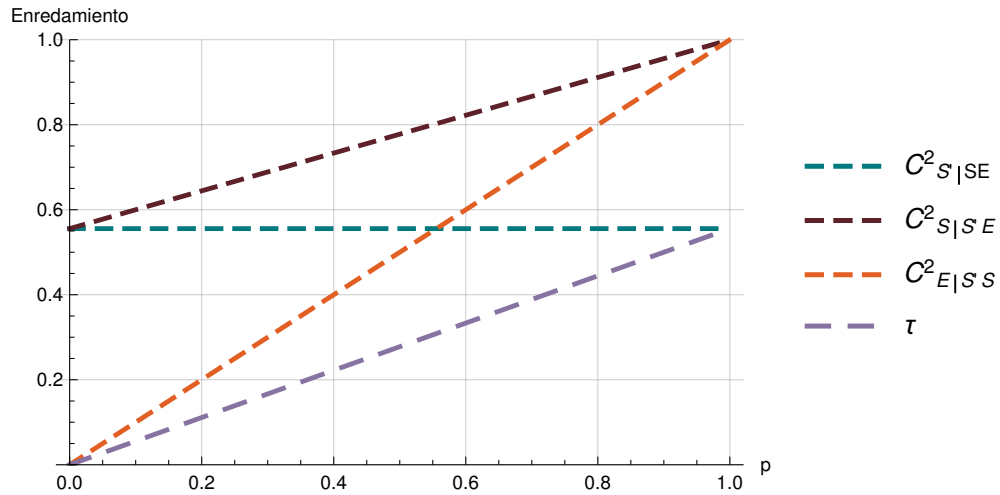


Figura 3.5: Ejemplo de la dinámica de los enredamientos bipartitos y 3tangle en el canal de desfaseamiento, para $\mathcal{E}_0^2 = 5/9$, $\lambda_2 = 1/2$, $|\lambda_1|^2 = 1/9$. Vemos como para $p \neq 0$ emerge 3tangle, incrementando de manera lineal.

3.4.3. Canal de volteo de bit, de fase y de bit-fase

Los operadores de Kraus que representan estos canales son [43]

$$K_0 = \sqrt{1 - \frac{p}{2}} \mathbb{1}, \quad K_1^i = \sqrt{\frac{p}{2}} \sigma_i, \quad (3.4.11)$$

donde al canal volteo de bit le corresponde la matriz de Pauli σ_x , al canal de volteo de fase la matriz de Pauli σ_z y al canal de volteo de bit-fase la matriz de Pauli σ_y . Sin embargo, estos tres canales comparten que

$$\begin{aligned}
 \det K_0 &= 1 - \frac{1}{2}p, \\
 \det K_1^i &= -\frac{p}{2}, \\
 g(K_0, K_1) &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

por lo que el 3tangle seguirá la misma dinámica en los tres canales, dada por:

$$\tau_{S'SE} = 2\mathcal{E}_0^2 p \left(1 - \frac{1}{2}p\right) = \mathcal{E}_0^2 [1 - (1-p)^2]. \tag{3.4.13}$$

Esto quiere decir que los tres canales de volteo nos conducirán a un estado con enredamiento tipo GHZ para $p > 0$. Es interesante notar que el 3tangle en estos canales incrementa de forma cuadrática y no lineal.

Las funciones D_S y D_E también serán comunes en los tres canales, teniendo

$$\begin{aligned}
 D_S &= \mathcal{E}_0^2 \left[1 - p \left(1 - \frac{1}{2}p\right)\right] = \frac{1}{2}\mathcal{E}_0^2 [1 + (1-p)^2], \\
 D_E &= \mathcal{E}_0^2 p \left(1 - \frac{1}{2}p\right) = \frac{1}{2}\mathcal{E}_0^2 [1 - (1-p)^2].
 \end{aligned} \tag{3.4.14}$$

Con esto, procedemos a estudiar cada canal por sus diferencias.

Para estos ejemplos consideraremos $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(1 + \frac{i}{3}\right)$, de modo que $|\lambda_1|^2 = 1/9$, $Re^2(\lambda_1) = 1/10$ y $Im^2(\lambda_1) = 1/90$.

Volteo de fase

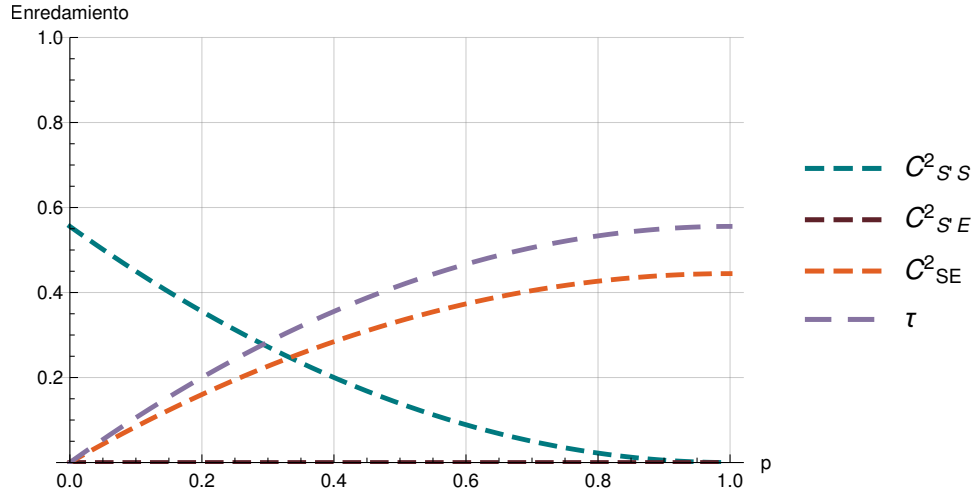
Calculos directos nos dan para este canal, la forma de la función G

$$G = p \left(1 - \frac{1}{2}p\right) [\mathcal{E}_0^2 + 8|\lambda_1|^2]. \tag{3.4.15}$$

De esto, calculamos los enredamientos en las biparticiones y entre pares de qubits. Los resultados se muestran en la Tabla 3.4.

Enredamiento en las biparticiones	Enredamiento en pares de qubits
$C_{S SE}^2 = \mathcal{E}_0^2$	$C_{S'S}^2 = \mathcal{E}_0^2(1-p)^2$
$C_{S S'E}^2 = \mathcal{E}_0^2 + 8 \lambda_1 ^2 p(1 - \frac{1}{2}p)$	$C_{S'E}^2 = 0$
$C_{E S'S}^2 = 2p(1 - \frac{1}{2}p)[\mathcal{E}_0^2 + 4 \lambda_1 ^2]$	$C_{SE}^2 = 8p(1 - \frac{1}{2}p) \lambda_1 ^2$

Tabla 3.4: Enredamientos bipartitos para el canal de volteo de fase.


 Figura 3.6: Ejemplo de dinámica de enredamiento qubit-qubit y 3tangle en el canal de volteo de fase, para $\mathcal{E}_0^2 = 5/9$, $\lambda_2 = 1/2$, $|\lambda_1|^2 = 1/9$.

Para este canal podemos ver que el enredamiento entre los qubits S y E depende del módulo del término de coherencia, detalle que comparte con el canal de desfaseamiento, sin embargo, dependencia en p no es lineal. El enredamiento C_{SE}^2 crece como $1 - (1 - p)^2$.

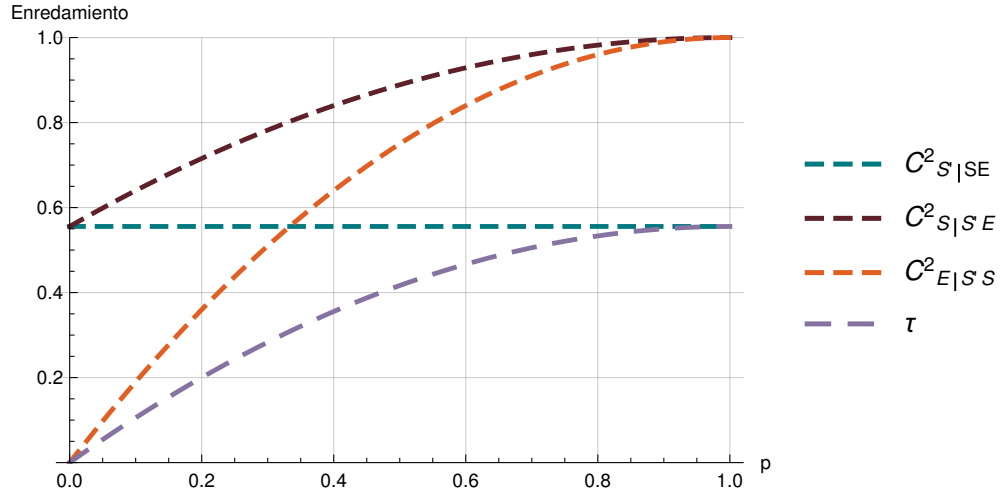


Figura 3.7: Ejemplo de dinámica en los enredamientos bipartitos y 3tangle para el canal de volteo de fase, para $\mathcal{E}_0^2 = 5/9$, $\lambda_2 = 1/2$, $|\lambda_1|^2 = 1/9$.

Canal de volteo de bit

Para este canal tenemos que

$$G(K, \rho_0) = 2p(1 - \frac{1}{2}p)[1 - \frac{1}{2}\mathcal{E}_0^2 - 4Re^2(\lambda_1)]. \quad (3.4.16)$$

De esto que los enredamientos en cada bipartición serán

Enredamiento en las biparticiones	Enredamiento en pares de qubits
$C_{S' SE}^2 = \mathcal{E}_0^2$	$C_{S'S}^2 = \mathcal{E}_0^2(1 - p)^2$
$C_{S S'E}^2 = \mathcal{E}_0^2(1 - p)^2 + 2p(1 - \frac{1}{2}p)[1 - 4Re^2\lambda_1]$	$C_{S'E}^2 = 0$
$C_{E S'S}^2 = 2p(1 - \frac{1}{2}p)[1 - 4Re^2\lambda_1]$	$C_{SE}^2 = 2p(1 - \frac{1}{2}p)[1 - 4Re^2\lambda_1 - \mathcal{E}_0^2]$

Tabla 3.5: Enredamientos bipartitos para el canal de volteo de bit.

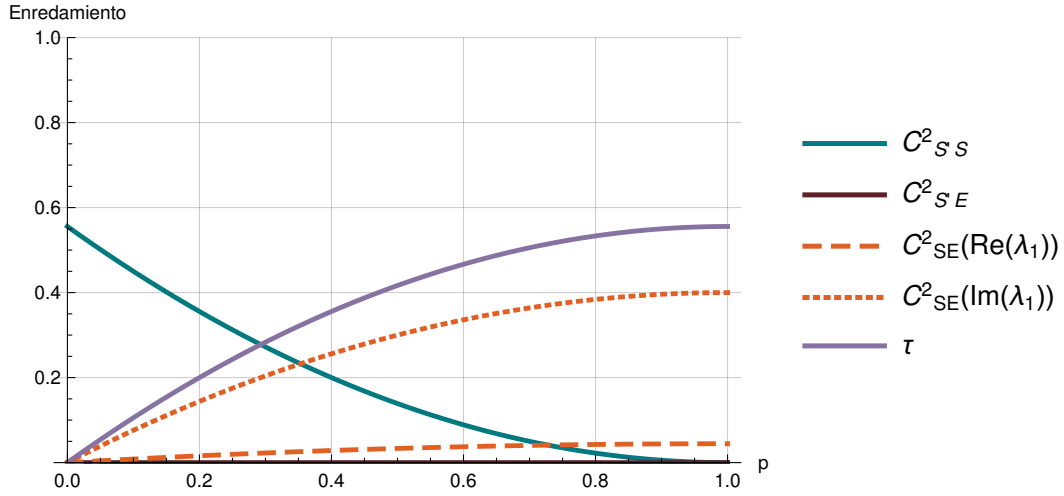


Figura 3.8: Ejemplo de dinámica de enredamiento qubit-qubit y 3tangle en el canal de volteo de bit y volteo de bit-fase, para $\mathcal{E}_0^2 = 5/9$, $\lambda_2 = 1/2$, $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1 + \frac{i}{3})$. Las líneas sólidas corresponden a los enredamientos que comparten ambos canales, las franjas al canal de volteo de bit y las líneas punteadas al canal de volteo de bit-fase.

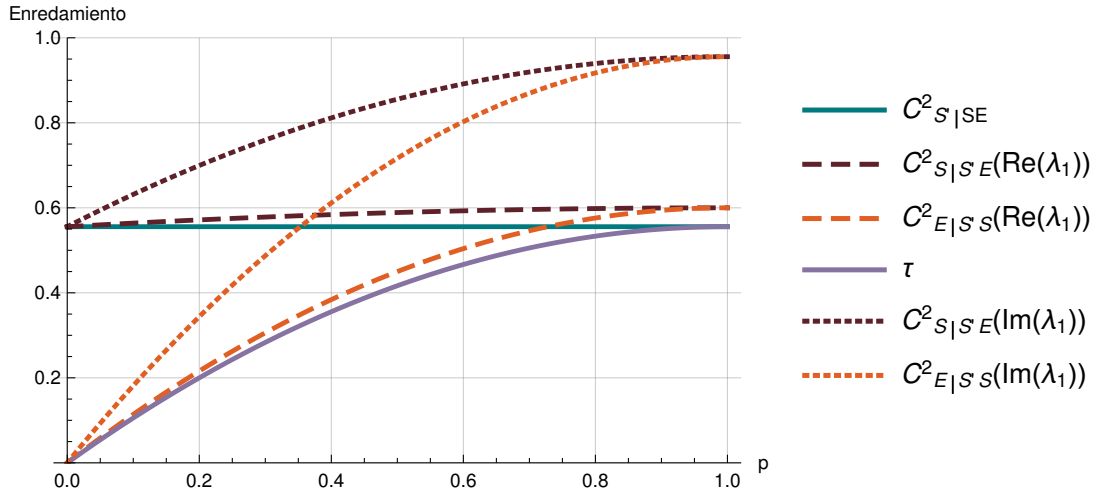


Figura 3.9: Ejemplo de dinámica en los enredamientos bipartitos y 3tangle del canal de volteo de bit y volteo de bit-fase, para $\mathcal{E}_0^2 = 5/9$, $\lambda_2 = 1/2$, $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1 + \frac{i}{3})$. Las líneas sólidas corresponden a los enredamientos que comparten ambos canales, las franjas al canal de volteo de bit y las líneas punteadas al canal de volteo de bit-fase.

Es interesante notar que en este canal el enredamiento entre los qubits S y E depende del cuadrado de la parte real del término de coherencia, además de depender también del enredamiento inicial. Si el término de coherencia es un número real, entonces, por la ecuación (3.4.3), el enredamiento C_{SE}^2 puede reescribirse como $C_{SE}^2 = 2p(1 - \frac{1}{2}p)[1 - 4\lambda_2(1 - \lambda_2)]$, es decir únicamente dependerá de las poblaciones iniciales.

Volteo de bit-fase

Para este canal tenemos que

$$G(K, \rho_0) = 2p(1 - \frac{1}{2}p) [1 - 4Im^2(\lambda_1) - \frac{1}{2}\mathcal{E}_0^2]. \quad (3.4.17)$$

Por lo que los resultados serán completamente análogos a los del canal de volteo de bit mostrados en la Tabla 3.5 cambiando la dependencia en el cuadrado de la parte real de λ_1 por el cuadrado de la parte imaginaria, i.e. $Re^2(\lambda_1) \rightarrow Im^2(\lambda_1)$.

En las gráficas 3.8 y 3.9 se compara la dinámica de enredamiento en los canales de volteo de bit y volteo de bit-fase, evaluados para $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1 + \frac{i}{3})$.

Resumen de los canales de volteo

La historia de la evolución en los canales de volteo de fase, bit y fase-bit es como sigue:

- En cuanto comienza la interacción, emerge 3tangle en el sistema, el cual incrementará como $1 - (1 - p)^2$ hasta un valor máximo igual al enredamiento inicial. Es decir en los tres canales el enredamiento inicial fue completamente transformado en 3tangle.
- El enredamiento bipartito entre los qubits S y S' decae como $(1 - p)^2$, sugiriendo que dicho enredamiento se transforma en 3tangle, el cual sigue la misma dinámica en los tres canales.
- Los qubits E y S' no se enredan de forma bipartita, solamente en forma de 3tangle.
- Se genera un enredamiento entre los qubits S y E el cual depende del término coherente en la matriz densidad inicial. Para cada caso la dependencia es distinta teniendo
 - Volteo de fase: $C_{SE}^2(|\lambda_1|^2)$.
 - Volteo de bit: $C_{SE}^2(Re\{\lambda_1\})$.
 - Volteo de bit-fase: $C_{SE}^2(Im\{\lambda_1\})$.
- En las figuras 3.6 y 3.8 se muestran los enredamientos bipartitos evaluados para el mismo valor de $\lambda_1 = \frac{1}{10}(1 - \frac{i}{3})$. Para el caso de los canales de volteo de bit y volteo de fase-bit, si el término de coherencia cumpliera $Re(\lambda_1) = Im\lambda_1$, la dinámica sería idéntica.

Capítulo 4

Hacia la generalización

Los resultados obtenidos del sistemas de tres qubits pueden ser implementados, en cierta medida, para el estudio en sistemas de un número mayor de qubits, abriendo así el camino hacia la generalización del problema [9], [15], [16] .

4.1. Sistema de cuatro qubits

Consideremos un sistema de cuatro qubits $\{S, S', E, E'\}$, donde los qubits S y S' se encuentran inicialmente enredados mientras que los qubits E y E' se encuentran inicialmente en un estado separable. El estado inicial del sistema será:

$$|\phi_0\rangle = |\psi_{SS'}\rangle|0_E0_{E'}\rangle. \quad (4.1.1)$$

Supondremos que la evolución del sistema es representada por la transformación unitaria $U_{SE} \otimes U_{S'E'}$, por lo que existirá interacción entre los pares de qubits $\{S, E\}$ y $\{S', E'\}$. Cada una de estas transformaciones unitarias tendrá un conjunto de operadores de Kraus que las describa. Es decir, la matriz reducida del subsistema S evolucionará por medio de los operadores de Kraus $\{K_0, K_1\}$ y la del subsistema S' con los operadores $\{K'_0, K'_1\}$. El enredamiento inicial en el sistema está dado por

$$C_{S|ES'E'}^2(0) = C_{S'|SEE'}^2(0) = C_{SS'}^2(0) = \mathcal{E}_0^2. \quad (4.1.2)$$

En lo que sigue utilizaremos la notación $\rho_0 = Tr_{ES'E'}(|\phi_0\rangle\langle\phi_0|)$ y $\rho'_0 = Tr_{SEE'}(|\phi_0\rangle\langle\phi_0|)$.

Este sistema fue estudiado anteriormente por G. H. Aguilar, A. Valdés-Hernández, L. Davidovich, S. P. Walborn y P. H. S. Ribeiro [17]. En este trabajo, los autores estudian el enredamiento multipartito del sistema descomponiendo el enredamiento residual en términos de enredamientos tripartitos bien definidos, física y operacionalmente, que involucran tríos de qubits y triadas de subsistemas, como se verá a continuación.

La descomposición CKW para el caso de cuatro qubits tiene la forma

$$C_{i|jkl}^2 = C_{ij}^2 + C_{ik}^2 + C_{il}^2 + R_i, \quad (4.1.3)$$

donde R_i denota el enredamiento residual en la bipartición $i|jkl$. Análogo al 3tangle, estos enredamientos residuales contienen información sobre el enredamiento multipartito del sistema, sin embargo, a diferencia del 3tangle en el caso de tres qubits, dichos enredamientos residuales

no son invariantes frente a las permutaciones de los índices. En [17] se muestra que estos enredamientos pueden ser reescritos como

$$R_i = \tau_{ikl} + \tau_{ij(kl)}, \quad (4.1.4)$$

donde

$$\begin{array}{c} i, j \in \{S, E\} \quad y \quad k, l \in \{S', E'\} \\ o \\ i, j \in \{S', E'\} \quad y \quad k, l \in \{S, E\}. \end{array}$$

En la ecuación (4.1.4), τ_{ikl} representa el enredamiento residual correspondiente a la bipartición $i|kl$ de la matriz densidad reducida ρ_{ijk} (la cual es en general un estado mezcla), es decir

$$\tau_{ikl} = C_{i|kl}^2 - C_{ik}^2 - C_{il}^2, \quad (4.1.5)$$

y $\tau_{ij(kl)}$ representa el enredamiento tripartito en la forma de 3tangle entre los qubits i , j y kl . Estos enredamientos surgen pues los pares de sistemas (S, E) y (S', E') pueden ser considerados como un solo sistema de dos niveles (qubit), esto debido a que las matrices densidad reducidas ρ_{SE} y $\rho_{S'E'}$ son de rango 2 y se mantendrán así durante toda la evolución.

4.1.1. De tres a cuatro qubits

Utilizando los resultados obtenidos en el capítulo tres, somos capaces de contribuir al estudio de sistemas de cuatro qubits.

Siguiendo la metodología de G. H. Aguilar *et al.* aplicamos la evolución unitaria U_{SE} considerando el subsistema $S'E'$ como un qubit. Los enredamientos $C_{S|E'S'E'}^2$, $C_{E|SS'E'}^2$, C_{SE}^2 , $C_{S|S'E'}^2$, $C_{E|S'E'}^2$ y $\tau_{SE(S'E')}$, se mantendrán invariantes ante la transformación $U_{S'E'}$ debido la invarianza del enredamiento ante transformaciones unitarias locales, por lo que podemos calcularles suponiendo $U_{S'E'} = \mathbb{1}_{S'E'}$. Esto nos permitirá utilizar los resultados obtenidos en el sistema de tres qubits, simplemente tomando $(S'E')$ como el tercer qubit, los enredamientos en dichas biparticiones serán:

$$\begin{aligned} C_{S'E'|SE}^2 &= [C_{S'|SE}^2]_{3qubit} = \mathcal{E}_0^2, \\ C_{S|E'S'E'}^2 &= [C_{S|E'S'}^2]_{3qubit} = \mathcal{E}_0^2 D_S(K) + G(K, \rho_0), \\ C_{E|SS'E'}^2 &= [C_{E|SS'}^2]_{3qubit} = \mathcal{E}_0^2 D_E(K) + G(K, \rho_0), \\ \tau_{SE(S'E')} &= [\tau_{SES'}(K)]_{3qubit} = \mathcal{E}_0^2 |g^2(K_0, K_1) - 4 \det K_0 K_1|. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Los resultados presentes en (4.1.6) muestran el enredamiento en algunas de las biparticiones del sistema de cuatro qubits a partir de las correspondientes expresiones del caso de tres qubits, en términos de los operadores de Kraus. Estos resultados se mantendrán sin importar la forma de la interacción $U_{S'E'}$. Es importante notar que pese a que estos enredamientos tienen el mismo valor que su análogo en el caso de tres qubits el significado físico difiere.

Considerando el subsistema (S', E') como un qubit podemos calcular también los siguientes enredamientos

$$\begin{aligned}
 C_{S'|S'E'}^2 &= [C_{SS'}^2]_{3qubit} = \frac{1}{2}\mathcal{E}_0^2(1 + D_S(K) - D_E(K)) - \frac{1}{2}\tau(K), \\
 C_{E'|S'E'}^2 &= [C_{ES'}^2]_{3qubit} = \frac{1}{2}\mathcal{E}_0^2(1 + D_E(K) - D_S(K)) - \frac{1}{2}\tau(K), \\
 C_{SE}^2 &= G(K, \rho_0) + \frac{1}{2}\mathcal{E}_0^2|g(K_0, K_1)|^2 - \frac{1}{2}\tau(K),
 \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

donde G (3.2.16), D_S (3.2.15), D_E (3.2.21) son las funciones antes definidas y $\tau(K)$ denota la función (3.2.10).

De igual manera, si consideramos el subsistema (SE) como un qubit y aplicamos la transformación unitaria $U_{S'E'} \otimes \mathbb{1}_{SE}$, podemos calcular los enredamientos en las biparticiones que permanecerán invariantes ante la transformación U_{SE} , obteniendo así:

$$\begin{aligned}
 C_{SE|S'E'}^2 &= [C_{S'|S'E'}^2]_{3qubit} = \mathcal{E}_0^2, \\
 C_{S'|SEE'}^2 &= [C_{S'|SE'}^2]_{3qubit} = \mathcal{E}_0^2 D_S(K') + G(K', \rho'_0), \\
 C_{E'|SES'}^2 &= [C_{E'|SS'}^2]_{3qubit} = \mathcal{E}_0^2 D_E(K') + G(K', \rho'_0), \\
 \tau_{S'E'(SE)} &= [\tau(K')_{S'E'S}]_{3qubit} = \mathcal{E}_0^2 |g^2(K'_0, K'_1) - 4 \det K'_0 K'_1|.
 \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

Análogamente a la ecuación (4.1.7) tenemos:

$$\begin{aligned}
 C_{S'|SE}^2 &= [C_{S'S}^2]_{3qubit} = \frac{1}{2}\mathcal{E}_0^2(1 + D_S(K') - D_E(K')) - \frac{1}{2}\tau(K'), \\
 C_{E'|SE}^2 &= [C_{E'S}^2]_{3qubit} = \frac{1}{2}\mathcal{E}_0^2(1 + D_E(K') - D_S(K')) - \frac{1}{2}\tau(K'), \\
 C_{S'E'}^2 &= G(K', \rho'_0) + \frac{1}{2}\mathcal{E}_0^2|g(K'_0, K'_1)|^2 - \frac{1}{2}\tau(K').
 \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Los enredamientos $C_{S'|S'E'}^2$, $C_{E'|S'E'}^2$, $C_{S'|SE}^2$ y $C_{E'|SE}^2$ son de particular interés, pues dependen de las matrices densidad reducidas $\rho_{SS'E'}$, $\rho_{ES'E'}$, $\rho_{SES'}$ y $\rho_{SEE'}$, respectivamente, las cuales son, en general, matrices densidad de estados mixtos. Estos enredamientos pueden descomponerse como en la ecuación (4.1.5)

$$\begin{aligned}
 C_{S'|S'E'}^2 &= C_{SS'}^2 + C_{SE'}^2 + \tau_{\underline{SS'E'}}, \\
 C_{E'|S'E'}^2 &= C_{ES'}^2 + C_{EE'}^2 + \tau_{\underline{ES'E'}}, \\
 C_{S'|SE}^2 &= C_{SS'}^2 + C_{ES'}^2 + \tau_{\underline{S'SE}}, \\
 C_{E'|SE}^2 &= C_{SE'}^2 + C_{EE'}^2 + \tau_{\underline{E'SE}}.
 \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

Esta descomposición nos da las herramientas para calcular los enredamientos tripartitos τ_{ikl} , sin embargo, para calcularles debemos obtener expresiones para los enredamientos entre pares de qubits donde uno de los subíndices es primado y el otro no, lo cual se deja como trabajo a futuro.

4.1.2. Surgimiento de enredamiento multipartito en cuatro qubits

A partir de los resultados anteriores podemos encontrar condiciones que garanticen el surgimiento de enredamiento multipartito en el sistema de cuatro qubits, como se explica a continuación.

Utilizando los resultados de la Tabla 3.1, obtenemos condiciones suficientes para que los enredamientos en las biparticiones mostradas del sistema de cuatro qubits (4.1.6), (4.1.8) sean diferentes de cero. Dichas condiciones son:

1. Ambas evoluciones producen 3tangle, es decir $\tau_{SE(S'E')} \neq 0$ y $\tau_{S'E'(SE)} \neq 0$. i.e.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0^2 |4 \det K_0 K_1 - g^2(K_0, K_1)| &\neq 0, \\ \mathcal{E}_0^2 |4 \det K'_0 K'_1 - g^2(K'_0, K'_1)| &\neq 0. \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

En este caso tenemos enredamiento residual en las cuatro biparticiones, i.e. $R_i > 0, \forall i$.

2. Una evolución produce 3tangle y la otra enredamiento tipo W. Sin pérdida de generalidad supondremos que U_{SE} produce 3tangle y $U_{S'E'}$ enredamiento tipo W, teniendo así:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0^2 |4 \det K_0 K_1 - g^2(K_0, K_1)| &\neq 0, \\ 1 > |\det K'_0| + |\det K'_1| &> 0. \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

La primera condición garantiza que $R_i > 0$ para $i \in \{S, E\}$. Además el enredamiento tipo W producido por $U_{S'E'}$ nos garantiza que $C_{S'|SE}^2 > 0$ y $C_{E'|SE}^2 > 0$, por lo que puede existir además enredamiento residual de la forma $\tau_{ikl}, i \in \{S', E'\}$.

3. Ambas evoluciones producen enredamiento tipo W. Para este caso tenemos que

$$\begin{aligned} 1 > |\det K_0| + |\det K_1| &> 0, \\ 1 > |\det K'_0| + |\det K'_1| &> 0. \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Esta condición genera enredamiento en todas las biparticiones y permite la presencia de enredamiento residual de la forma τ_{ikl} , para $i \in \{S, E\}$ y $k, l \in \{S', E'\}$ o $i \in \{S', E'\}$ y $k, l \in \{S, E\}$.

Podemos observar que en el caso en que una de las evoluciones U_{SE} o $U_{S'E'}$ no genere enredamiento tripartito, el enredamiento en al menos un qubit será cero, por lo que no existirá enredamiento multipartito en los cuatro qubits. De esto concluimos que es necesario que ambas evoluciones U_{SE} y $U_{S'E'}$ produzcan enredamiento multipartito en el caso de tres qubits, para que se genere enredamiento multipartito en los cuatro qubits del sistema.

El problema de dar condiciones para distinguir el enredamiento multipartito generado y clasificarlo en cada una de las nueve familias de enredamiento presentes en sistemas de cuatro qubits [26], sigue abierto.

4.2. Sistemas de $2N$ qubits

Ahora estudiaremos brevemente el sistema de N qubits $\{S_i\}$ inicialmente enredados y N qubits inicialmente separables $\{E_i\}$, tratando de aplicar los resultados obtenidos en el sistema de 3qubits. El estado inicial del sistema será:

$$|\phi_{S_1, \dots, S_N, E_1, \dots, E_N}\rangle = |\psi_{S_1, \dots, S_N}\rangle |0_{E_1}, \dots, 0_{E_N}\rangle. \quad (4.2.1)$$

Denotaremos por μ_i al junto compuesto por los $2N$ del sistema menos el par $\{S_i, E_i\}$, es decir

$$\mu_i = \{S_1, E_1, \dots, S_N, E_N\} - \{S_i, E_i\}. \quad (4.2.2)$$

El enredamiento inicial en la bipartición correspondiente al qubit S_i estará dado por

$$C_{S_i|E_i, \mu_i}^2(0) = 4 \det \rho_{S_i} = \mathcal{E}_i^2 > 0, \forall i, \quad (4.2.3)$$

donde $\rho_{S_i} = Tr_{\mu_i, E_i}(|\phi\rangle\langle\phi|)$.

Cada uno de los qubits enredados S_i interactúa con uno de los qubits externos E_i , por medio de la transformación unitaria $U_{S_i E_i}$, de modo que para cada interacción tendremos un par de operadores de Kraus $\{K_0^i, K_1^i\}$, los cuales llevan el estado ρ_{S_i} al estado ρ'_{S_i} de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \rho'_{S_i}(p) &= Tr_{E_i \mu_i} \left[U_{S_i, E_i} \otimes U_{\mu_i} (\rho_{S_1, \dots, S_N} |0\rangle\langle 0|_{E_1, \dots, E_N}) U_{S_i, E_i}^\dagger \otimes U_{\mu_i}^\dagger \right], \\ &= Tr_{E_i} \left\{ Tr_{\mu_i} \left[U_{S_i, E_i} \otimes U_{\mu_i} (\rho_{S_1, \dots, S_N} |0\rangle\langle 0|_{E_1, \dots, E_N}) U_{S_i, E_i}^\dagger \otimes U_{\mu_i}^\dagger \right] \right\}, \\ &= Tr_{E_i} \left\{ Tr_{\mu_i} \left[U_{S_i, E_i} (U_{\mu_i}^\dagger U_{\mu_i}) (\rho_{S_1, \dots, S_N} |0\rangle\langle 0|_{E_1, \dots, E_N}) U_{S_i, E_i}^\dagger \right] \right\}, \\ &= Tr_{E_i} \left\{ U_{S_i, E_i} Tr_{\mu_i} \left[\mathbb{1}_{\mu_i} (\rho_{S_1, \dots, S_N} |0\rangle\langle 0|_{E_1, \dots, E_N}) \right] U_{S_i, E_i}^\dagger \right\}, \\ &= Tr_{E_i} \left(U_{S_i, E_i} (\rho_{S_i} |0\rangle\langle 0|_{E_i}) U_{S_i, E_i}^\dagger \right), \\ &= Tr_{E_i} \left(U_{S_i, E_i} \rho_{S_i} U_{S_i, E_i}^\dagger \right), \\ &= \sum_{j=\{0,1\}} K_j^i \rho_{S_i} (K_j^i)^\dagger, \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

donde $\rho_{S_1, \dots, S_N} = |\psi\rangle\langle\psi|_{S_1, \dots, S_N}$, $U_{\mu_i} = U_{S_1, E_1} \otimes \dots \otimes U_{S_{i-1}, E_{i-1}} \otimes U_{S_{i+1}, E_{i+1}} \otimes \dots \otimes U_{S_N, E_N}$ y se utilizó la ciclicidad de la traza en el subespacio μ_i . Siguiendo el proceso en la ecuación (3.2.17), y utilizando la ciclicidad en la traza en el subespacio μ_i , obtenemos la evolución en el subsistema E_i como

$$\rho'_{E_i} = \sum_{m,n=\{0,1\}} Tr (K_m^i \rho_{S_i} (K_n^i)^\dagger) |m_{E_i}\rangle\langle n_{E_i}|. \quad (4.2.5)$$

De esto que la evolución de cada par de subsistemas S_i, E_i dependerá únicamente de los operadores de Kraus con superíndice i y el estado inicial del subsistema S_i . Con esto podemos calcular los enredamientos entre cada qubit con el resto del sistema, de manera completamente análoga al caso de tres qubits. Es decir, utilizando las ecuaciones (3.2.14) y (3.2.20) simplemente cambiando $\rho_0 \rightarrow \rho_{S_i}$, $\mathcal{E}_0^2 \rightarrow \mathcal{E}_i^2$ y $K_j \rightarrow K_j^i$, para cada caso, teniendo así:

$$\begin{aligned} C_{S_i|E_i,\mu_i}^2 &= \mathcal{E}_i^2 D_S(K^i) + G(K^i, \rho_{S_i}), \\ C_{E_i|S_i,\mu_i}^2 &= \mathcal{E}_i^2 D_E(K^i) + G(K^i, \rho_{S_i}), \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

donde G (3.2.16), D_S (3.2.15), D_E (3.2.21), son las funciones antes definidas, evaluadas en los operadores de Kraus correspondientes al par (S_i, E_i) . Podemos observar que la dinámica del enredamiento en cada qubit es completamente análoga al caso de tres qubits.

De las ecuaciones (4.2.6) podemos observar que la condición para obtener enredamiento de ambos qubits S_i y E_i con el resto del sistema puede ser escrita como

$$\begin{aligned} C_{S_i|E_i,\mu_i}^2 > 0 &\iff \mathcal{E}_i^2(|\det K_0^i|^2 + |\det K_1^i|^2) + \mathcal{E}_i^2|g(K_0^i, K_1^i)|^2 + G(K^i, \rho_{S_i}) > 0, \\ C_{E_i|S_i,\mu_i}^2 > 0 &\iff \mathcal{E}_i^2 - \mathcal{E}_i^2(|\det K_0^i|^2 + |\det K_1^i|^2) + G(K^i, \rho_{S_i}) > 0. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Estas condiciones pueden ser combinadas para obtener una sola condición que nos garantice enredamiento en ambos qubits $C_{S_i|E_i,\mu_i}^2$ y $C_{E_i|S_i,\mu_i}^2$, teniendo así:

$$\mathcal{E}_i^2 + G(K^i, \rho_{S_i}) > \mathcal{E}_i^2(|\det K_0^i|^2 + |\det K_1^i|^2) > -[\mathcal{E}_i^2|g(K_0^i, K_1^i)|^2 + G(K^i, \rho_{S_i})]. \quad (4.2.8)$$

Si la condición (4.2.8) se cumple para m de los N pares de qubits, podemos garantizar la existencia de enredamiento en $N + m$ qubits. Mostraremos esta afirmación como sigue:

Supongamos que en algún momento de la evolución, los operadores de Kraus asociados a m de los N operadores $U_{S_i E_i}$ cumplen con la condición (4.2.8), así, en dicho momento tendremos que

$$\begin{aligned} C_{S_i|E_i,\mu_i}^2 &> 0, \\ C_{E_i|S_i,\mu_i}^2 &> 0, \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

para $i = 1, 2, \dots, m$, ambos qubits del par $\{S_i, E_i\}$ se encontrarán enredados con el resto del sistema. Esto es cierto para los m pares cuya interacción cumple con la condición (4.2.8), por lo que podemos garantizar que $2m$ qubits poseen enredamiento con el resto del sistema.

Las $N - m$ evoluciones unitarias $U_{S_j E_j}$ que no cumplen la condición (4.2.8), se dividen en dos grupos:

- Aquellas para las cuales se cumple:

$$\begin{aligned} C_{S_i|E_i,\mu_i}^2 &> 0, \\ C_{E_i|S_i,\mu_i}^2 &= 0, \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

para $i = m + 1, \dots, m + p$, con $p \leq N - m$.

- Aquellas para las cuales

$$\begin{aligned} C_{S_i|E_i\mu_i}^2 &= 0, \\ C_{E_i|S_i\mu_i}^2 &> 0, \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

para $i = m + p + 1, \dots, N$.

Sea cual sea el caso, vemos que las $N - m$ evoluciones unitarias U_{S_j, E_j} que no cumplen con (4.2.8), son tales que uno de los qubits del par $\{S_j, E_j\}$ se encuentra enredado con el resto del sistema. Al contar la cantidad total de qubits cuyo enredamiento con el resto del sistema es no nulo, tendremos $2m$ qubits asociados a las evoluciones que cumplen con la condición (4.2.8) y $N - m$ qubits asociados a las evoluciones que cumplen (4.2.10) y (4.2.11), teniendo así un total de $2m + (N - m) = N + m$ qubits enredados en el sistema.

El problema de identificar cómo cambia la dinámica del enredamiento dependiendo del enredamiento inicial en los N qubits enredados, así como diferenciar entre los diferentes tipos de enredamientos que se puedan generar sigue siendo un problema abierto.

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis hemos estudiado un sistema de tres qubits (S', S, E) en el estado (3.2.1), que evoluciona por medio de una transformación unitaria arbitraria de la forma $U_{SE} \otimes \mathbb{1}_{S'}$, la cual es completamente representada por un par de operadores de Kraus $\{K_0, K_1\}$. Los resultados principales de esta investigación nos permiten calcular de manera exacta todos los enredamientos presentes en términos de los operadores de Kraus y la matriz densidad reducida del sistema S antes de la evolución, ρ_0 . Esto nos permite estudiar y predecir la dinámica y emergencia de todos los enredamientos presentes en el sistema.

Una vez calculadas las expresiones para los enredamientos del sistema en todo momento de la evolución, fuimos capaces de encontrar novedosas condiciones necesarias y suficientes, sobre los operadores de Kraus, que garanticen la emergencia de los diferentes enredamientos accesibles. Es decir, los resultados presentados en la Tabla (3.1) nos permiten predecir el tipo de enredamiento presente en el sistema únicamente en función de los operadores de Kraus que describen dicha evolución y el estado inicial del subsistema S . Estos resultados fueron ejemplificados en diferentes canales cuánticos mostrando su utilidad para discernir el tipo de enredamiento presente en el sistema en todo momento de la evolución.

El estudio del sistema de tres qubits y los resultados obtenidos nos permitieron, además, explorar sistemas con un mayor número de qubits. La primera de estas generalizaciones es el caso de dos qubits inicialmente enredados donde cada uno de estos interactúa con un qubit adicional. Los resultados del sistema de tres qubits nos permitieron encontrar expresiones para los enredamientos en las biparticiones y entre los pares de qubits que interactúan localmente, esto permite calcularlos de una manera más sencilla y no reportada en la literatura. Encontramos tres condiciones suficientes para la generación de enredamiento multipartito en el sistema de cuatro qubits, además de ser capaces de distinguir, en algunos casos, la presencia de enredamiento residual. Además se encontró que es necesario que las interacciones U_{SE} y $U_{S'E'}$ evaluadas en el caso de tres qubits generen enredamiento multipartito para que exista enredamiento multipartito en el caso de cuatro qubits.

Extendiendo esta idea, pudimos realizar un breve análisis del sistema de N qubits inicialmente enredados en el que cada uno de ellos interactúa localmente con un qubit adicional. Obtuvimos expresiones para el enredamiento de cada qubit con el resto del sistema, en forma análoga al caso de tres qubits, y establecimos innovadoras condiciones para garantizar la presencia de enredamiento en $N + m$ qubits ($m < N$).

El trabajo presentado en esta tesis deja abiertos una gran cantidad de problemas que pueden ser explorados desde esta perspectiva, algunos de ellos son:

- Continuar el estudio del sistema de cuatro qubits previamente discutido, ahondando ahora en la generación del enredamiento tetrapartido, y en general, de los diferentes tipos de enredamiento que pueden existir en sistemas de cuatro qubits.
- Abordar el estudio del enredamiento en un sistema de dos qubits inicialmente enredados en el cual ambos interactúen con el mismo qubit adicional, permitiendo la interacción no directa entre estos.
- Plantear el estudio de tres qubits inicialmente enredados en el cual uno de ellos interactúa con un sistema externo. Semejante estudio nos permitirá entender la influencia del tipo de enredamiento inicial en la evolución, es decir, ya que tres qubits pueden estar enredados de dos maneras diferentes (GHZ y W), se espera encontrar diferencias en la dinámica.
- Por último, se buscará ahondar en las implementaciones prácticas de los resultados obtenidos, es decir, buscar aplicaciones en las que sea necesario favorecer la generación de algún tipo específico de enredamiento, para alguna tarea en particular.

Apéndice A

Artículo de investigación

Guaranteed emergence of genuine entanglement in 3-qubit evolving systems

A. Valdés-Hernández, V. T. Brauer, F. S. Zamora
*Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México,
 Apartado Postal 20-364, Ciudad de México, Mexico**

Multipartite entanglement has been shown to be of particular relevance for a better understanding and exploitation of the dynamics and flow of entanglement in multipartite systems. This calls for analysis aimed at identifying the appropriate processes that guarantee the emergence of multipartite entanglement in a wide range of scenarios. Here we carry on such analysis considering a system of two initially entangled qubits, one of which is let to interact with a third qubit according to an arbitrary unitary evolution. We establish necessary and sufficient conditions on the corresponding Kraus operators, to discern whether the evolved state pertains to either one of the classes of 3-qubit pure states that exhibit some kind of entanglement, namely biseparable, W-, and GHZ- genuine entangled classes. Our results provide a classification of the Kraus operators according to their capacity of producing 3-qubit entanglement, and pave the way for extending the analysis to larger systems and determining the particular interactions that must be implemented in order to create, enhance and distribute entanglement in a specific manner.

I. INTRODUCTION

Quantum entanglement constitutes an extremely rich phenomenon that has occupied a prominent role in contemporary physics. Ranging from inquiries regarding foundational aspects of quantum mechanics, to the search of methods aimed at efficiently exploiting this resource in quantum information tasks, the lines of research involving entanglement have been rapidly multiplied in the last decades. One of them, which is of particular interest for the present analysis, focuses on the dynamics and flow of entanglement in multipartite systems.

The study of the evolution of initially entangled systems has made clear that entanglement is a dynamical resource that is considerable enriched in multipartite systems [1–3]. In particular, multipartite entanglement in qubit systems has been shown to play a relevant role in the construction of dynamical invariants of entanglement that allow to introduce the notion of a flow of correlations among the constituents of the complete system [4–6]. The analysis of the distribution of entanglement acquires special relevance in the context of open quantum systems, where decoherence processes are involved [3, 7]. Whereas the interaction of an entangled bipartite system with an environment tends to degrade their entanglement, the inclusion of the environment transforms the bipartite system into a multipartite one, thus allowing for the entanglement to distribute in the form of bipartite and multipartite entanglement between the different subsystems. Therefore, in appropriate circumstances the disentanglement of some subsystems is accompanied by the entanglement of others, giving rise to phenomena such as the transference and transformation of entanglement assisted by the environment. This observations have allowed, for example, to understand phenomena such as the Sudden Death of Entanglement [8–10], characterized by

the fact that the extinction of the entanglement precedes the extinction of the coherences.

Further, the analysis of the dynamics of entangled systems has posed questions on the fragility of this resource in different kind of entangled states, on the development of strategies to increase some type of entanglement in decoherence processes, and more ambitiously on the establishment of the global laws that govern the evolution of entanglement in multipartite systems. To take a step further in these directions it becomes necessary to identify the appropriate processes that guarantee the emergence of specific classes of entanglement, particularly of multipartite entanglement. Here we tackle this problem for a 3-qubit pure state. In spite of being the simplest multipartite system, it is well-known that it allows for the existence of 3-partite entangled states that have been successfully realized in different physical systems [11–14], and exhibit different robustness and features [15] that are required in various quantum information tasks [16–19].

We contribute to the study of the emergence of genuine tripartite entanglement by considering a system of two initially entangled qubits, one of which is let to interact with a third qubit under an *arbitrary* unitary transformation. Resorting to the formalism of Kraus operators [3, 20] to represent the evolution, we classify them according to their capacity of producing genuine tripartite entanglement, either of the W- or GHZ-type, which are the two inequivalent classes of multipartite entanglement in 3-qubit systems [15, 21, 22]. We establish necessary and sufficient conditions —based on basic and similarity-invariant properties of the Kraus operators— for the evolved state to pertain to each of the three families of 3-qubit pure states that exhibit some kind of entanglement, namely biseparable, W-, and GHZ- entangled classes. Our results enrich and add to other classification schemes aimed at distinguishing the particular nature of the entanglement of a 3-qubit state [23–28], by offering a classification of the *evolution operators* that drive the initial state into one with a specific type of entanglement. Moreover, by relating the emergence of 3-partite corre-

*andreavh@fisica.unam.mx

lations with the structure of the Kraus operators, our classification settles the basis for establishing the type of operations (or Hamiltonians) that must be implemented in order to create and distribute entanglement in a convenient way.

The paper is structured as follows. Sections II and III contain preliminary material related, respectively, to the Kraus formalism applied to the system of interest, and to the emergence of genuine tripartite entanglement. In Section IV we find an expression for the so-called 3-tangle [29] in terms of the initial entanglement and an invariant function of the Kraus operators, and in Section V we derive the expressions for *all* the possible bipartite entanglements also in terms of the Kraus operators. We then present our main results in Section VI, where necessary and sufficient conditions to guarantee the different kinds of entanglement in the evolved state are established, in terms of the Kraus operators. We discuss the dependence of the generation of tripartite entanglement on the amount of initial bipartite entanglement, and look briefly into the extension of our results to 4-qubit systems evolving under local channels. In Section VII the emergence and distribution of entanglement is analyzed for some examples involving paradigmatic quantum decoherence maps, and some final comments are presented in Section VIII.

II. KRAUS OPERATORS AND QUANTUM MAPS

Consider a 3-qubit system composed of subsystems S , S' , and E . The tripartite system is assumed to be initially in a pure state of the form

$$|\phi(0)\rangle_{S'SE} = |\psi_0\rangle_{S'S} |0\rangle_E, \quad (1)$$

with $|\psi_0\rangle_{S'S}$ an arbitrary state of the $S + S'$ subsystem. S then starts to interact with E , so the evolution operator decomposes as $U(p) = \mathbb{I}_{S'} \otimes U_{SE}(p)$, with U_{SE} an arbitrary unitary transformation, and p a real parameter (e.g., an appropriate time parametrization) such that at $p = 0$, $U_{SE}(0) = \mathbb{I}_{SE}$. The evolved state has the general form (with $n, l, m = 0, 1$)

$$|\phi(p)\rangle_{S'SE} = \sum_{nlm} c_{nlm}(p) |nlm\rangle_{S'SE}, \quad (2)$$

with specific coefficients c_{nlm} that will be determined below. The corresponding tripartite density matrix reads

$$\begin{aligned} \rho(p) &= |\phi(p)\rangle \langle \phi(p)| = U(p) \rho(0) U^\dagger(p) \\ &= [\mathbb{I}_{S'} \otimes U_{SE}(p)] (|\psi_0\rangle \langle \psi_0| \otimes |0\rangle \langle 0|) [\mathbb{I}_{S'} \otimes U_{SE}^\dagger(p)], \end{aligned} \quad (3)$$

and the (reduced) state of subsystem S follows a (in general non-unitary) evolution given by [3, 20]

$$\rho_S(p) = \text{Tr}_{(S'E)} \rho(p) = \sum_{\mu=0,1} K_\mu(p) \rho_0 K_\mu^\dagger(p), \quad (4)$$

where $\rho_0 \equiv \rho_S(0)$, and $\{K_\mu(p) \equiv \langle \mu|_E U_{SE}(p) |0\rangle_E\}$ stand for the Kraus operators associated to the transformation U_{SE} , which satisfy the restriction

$$\sum_{\mu} K_\mu^\dagger K_\mu = \mathbb{I}_S \quad (5)$$

that guarantees the normalization condition $\text{Tr} \rho_S(p) = 1$.

In terms of the Kraus operators, the unitary evolution of the $S + E$ system can be alternatively represented by the following quantum map:

$$\begin{aligned} |00\rangle_{SE} &\xrightarrow{U_{SE}} (K_0(p) |0\rangle_S) |0\rangle_E + (K_1(p) |0\rangle_S) |1\rangle_E \\ |10\rangle_{SE} &\xrightarrow{U_{SE}} (K_0(p) |1\rangle_S) |0\rangle_E + (K_1(p) |1\rangle_S) |1\rangle_E. \end{aligned} \quad (6)$$

By writing the matrix representation of K_0 and K_1 in the basis $\{|0\rangle = (1, 0)^\top, |1\rangle = (0, 1)^\top\}$ as

$$K_0 = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} \\ m_{10} & m_{11} \end{pmatrix}, K_1 = \begin{pmatrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10} & n_{11} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

with $m_{ij} = m_{ij}(p)$, and $n_{ij} = n_{ij}(p)$, the transformation (6) can be recasted in the form

$$\begin{aligned} |00\rangle_{SE} &\xrightarrow{U_{SE}} m_{00} |00\rangle + m_{10} |10\rangle + n_{00} |01\rangle + n_{10} |11\rangle, \\ |10\rangle_{SE} &\xrightarrow{U_{SE}} m_{01} |00\rangle + m_{11} |10\rangle + n_{01} |01\rangle + n_{11} |11\rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

The matrix elements of the Kraus operators represent thus the probability amplitudes of the transformed states, and therefore can be used to describe the effective evolution associated to the unitary transformation. In what follows we will resort to this (Kraus) formalism to extract conclusions regarding the dynamics of entanglement, via an analysis of the properties of the matrices K_μ (in what follows we omit the explicit dependence of these matrices on the parameter p).

III. EMERGENCE OF GENUINE ENTANGLEMENT

Since the tripartite state $\rho(p)$ is pure, a suitable measure of the (bipartite) entanglement between subsystems i and $j+k$ (with $i, j, k \in \{S, S', E\}$) is given by the tangle, or squared concurrence C^2 , given by [30],

$$C_{ijk}^2 = 2(1 - \text{Tr} \rho_i^2) = 2(1 - \text{Tr} \rho_{jk}^2), \quad (9)$$

where $\rho_i = \text{Tr}_{(jk)} \rho$ stands for the reduced density matrix of subsystem i . The information regarding the distribution of entanglement among the different constituents of the system is contained in the following (CKW) decomposition [29]

$$C_{ijk}^2(p) = C_{ij}^2(p) + C_{ik}^2(p) + \tau(p), \quad (10)$$

which involves the concurrence C_{ij} —that measures the entanglement between subsystems i and j [31]—and the

so-called 3-tangle, τ . For a general tripartite state of the form (2), and in terms of $a_{ij} \equiv c_{0ij}$ and $b_{ij} \equiv c_{1ij}$, it is given by [29]

$$\tau = 4|d_1 - 2d_2 + 4d_3|, \quad (11)$$

where

$$d_1 = a_{00}^2 b_{11}^2 + a_{01}^2 b_{10}^2 + a_{10}^2 b_{01}^2 + a_{11}^2 b_{00}^2, \quad (12a)$$

$$d_2 = a_{00} a_{11} b_{00} b_{11} + a_{01} a_{10} b_{10} b_{01} + (a_{10} b_{01} + a_{01} b_{10})(a_{00} b_{11} + a_{11} b_{00}), \quad (12b)$$

$$d_3 = a_{00} a_{11} b_{10} b_{01} + a_{01} a_{10} b_{00} b_{11}. \quad (12c)$$

The quantity τ divides the set of 3-qubit pure states into two inequivalent (under Stochastic Local Operations and Classical Communication) families [21]: those for which $\tau \neq 0$ (GHZ-family), and those for which $\tau = 0$ (W-family). In the former case, the nonzero 3-tangle guarantees that the states in the GHZ-family are entangled in *all* bipartitions, meaning that they are genuine tripartite entangled [22]. In its turn, the W-family contains three (also inequivalent) subfamilies, comprising: i) fully separable states, for which $C_{i|jk}^2 = 0$ for *all* i , hence no entanglement is present; ii) biseparable states, for which $C_{i|jk}^2 = 0$ for a *single* subsystem i , so that (only) one subsystem is disentangled from the rest; and iii) 3-partite entangled states, satisfying $C_{i|jk}^2 > 0$ for *all* i , hence the state is genuine tripartite entangled. The members of this last (sub)family constitute 3-partite entangled states whose multipartite entanglement is not detected by τ . Therefore, τ is considered as a quantitative measure of (only) GHZ-type genuine entanglement.

The lack of a suitable measure of W-type genuine entanglement difficults to determine (without explicitly calculating all $C_{i|jk}^2$) whether a given state is genuine tripartite entangled, biseparable, or fully separable. However, some classification criteria have been established, based on: entangled hypergraphs [24]; hyper- and sub-determinants, providing necessary and sufficient conditions for separability [23]; construction of appropriate observables [25] and Bell inequalities [26] that determine the family to which a given state pertains; expectation values of Pauli operators that distinguishes between fully separable, biseparable and 3-partite entangled states [27], and device-independent witnesses that discriminate between W- and GHZ-type entanglement [28]. It is the aim of the following sections to enrich the existent criteria from a dynamical perspective, establishing the conditions on the Kraus operators, according to their capacity of producing each type of entanglement in the evolved state $|\phi(p)\rangle$.

IV. 3-TANGLE IN TERMS OF THE KRAUS OPERATORS

Let us introduce the matrices

$$C_0 = [a_{ij}] = [c_{0ij}], \quad C_1 = [b_{ij}] = [c_{1ij}], \quad (13)$$

and rewrite Eq. (12c) as

$$\begin{aligned} d_3 &= a_{00} a_{11} (b_{10} b_{01} - b_{00} b_{11}) + a_{01} a_{10} (b_{00} b_{11} - b_{10} b_{01}) + \\ &\quad + a_{11} a_{00} b_{00} b_{11} + a_{01} a_{10} b_{01} b_{10} \\ &= -\det(C_0 C_1) + a_{11} a_{00} b_{00} b_{11} + a_{01} a_{10} b_{01} b_{10}. \end{aligned} \quad (14)$$

Direct calculation thus gives

$$d_1 - 2d_2 + 4d_3 = -4 \det(C_0 C_1) + (a_{00} b_{11} + a_{11} b_{00} - a_{01} b_{10} - a_{10} b_{01})^2. \quad (15)$$

Recognizing in the second line of this expression the quantity

$$\begin{aligned} \text{Tr } C_0 \text{Tr } C_1 - \text{Tr}(C_0 C_1) &= \\ &= a_{00} b_{11} + a_{11} b_{00} - a_{01} b_{10} - a_{10} b_{01}, \end{aligned} \quad (16)$$

we obtain the following simplified expression of Eq. (11):

$$\tau = 4 |4 \det(C_0 C_1) - g^2(C_0, C_1)|, \quad (17)$$

where

$$g(A, B) \equiv \text{Tr } A \text{Tr } B - \text{Tr}(AB), \quad (18)$$

so that

$$g(A, B) = g(B, A) = g^*(A^\dagger, B^\dagger), \quad (19a)$$

$$g(\lambda_1 A, \lambda_2 [B + C]) = \lambda_1 \lambda_2 [g(A, B) + g(A, C)], \quad (19b)$$

with $\lambda_{1,2}$ arbitrary complex numbers.

Notice that $g(A, B)$ is a similarity-invariant function, and that whenever A and B are 2×2 matrices, Eq. (18) is equivalent to

$$g(A, B) = \det(A + B) - \det A - \det B, \quad (20)$$

and thus the following property holds:

$$g(A, B)g(C, D) = g(AC, BD) + g(AD, BC). \quad (21)$$

In particular, for $A = B$ this gives $g(A, A)g(C, D) = 2g(AC, AD)$, and with the aid of Eq. (20) we get

$$g(AC, AD) = \det A g(C, D). \quad (22)$$

Also, from Eqs. (18) and (20) it follows that for A with unit trace, $1 - \text{Tr } A^2 = 2 \det A$, whence

$$C_{i|jk}^2 = 2(1 - \text{Tr } \rho_i^2) = 4 \det \rho_i. \quad (23)$$

Let us now come back to the initial state (1), and write $|\psi_0\rangle_{S'S}$ in its general form:

$$|\psi_0\rangle_{S'S} = \alpha |11\rangle + \beta |10\rangle + \gamma |01\rangle + \delta |00\rangle, \quad (24)$$

with $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$. Under the map (8), the coefficients of the evolved state (2) are such that

$$C_0 = K_0 M_0(\delta, \gamma) + K_1 M_1(\delta, \gamma), \quad (25a)$$

$$C_1 = K_0 M_0(\beta, \alpha) + K_1 M_1(\beta, \alpha), \quad (25b)$$

where $M_{0,1}(x, y)$ are the matrices

$$M_0(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Substitution of Eqs. (25) into (17) leads, after some algebraic manipulation, to

$$\tau = \mathcal{E}_0^2 |4 \det(K_0 K_1) - g^2(K_0, K_1)|, \quad (27)$$

where \mathcal{E}_0 stands for the initial entanglement between S and S' (hereafter assumed to be nonzero):

$$\mathcal{E}_0^2 \equiv C_{S'S}^2(0) = C_{S'|SE}^2(0) = C_{S|S'E}^2(0) = 4 \det \rho_0. \quad (28)$$

Equation (27) shows that the amount of 3-tangle depends on the initial state only through the initial (bipartite) entanglement, and that its dynamics is completely determined by the Kraus operators that characterize the quantum map (6). As discussed in [5] (where a similar, though less simplified, version of Eq. (27) was derived), the 3-tangle thus emerges as a mere redistribution of the initial entanglement $C_{S'S}^2(0)$, induced by the interaction between S and E .

V. BIPARTITE ENTANGLEMENT IN TERMS OF THE KRAUS OPERATORS

Now that we have the expression (27) for the 3-tangle as a function of the matrices $\{K_\mu\}$ that determine the dynamics of the system, our next aim is to find the expressions of the bipartite entanglements $C_{i|jk}^2$ and C_{ij}^2 , also in terms of the Kraus operators.

Since the evolved state $\rho(p)$ results from applying a unitary transformation in the $S + E$ subsystem, the entanglement in the partition $S'|SE$ is not affected at all during the evolution. Consequently

$$C_{S'|SE}^2(p) = C_{S'|SE}^2(0) = \mathcal{E}_0^2, \quad (29)$$

and $C_{S'|SE}^2$ is independent of the specific Kraus operators. In what follows we thus focus on the entanglement $C_{i|jk}^2$ for $i = S, E$.

Resorting to Eqs. (4) and (23) we get, with the aid of (20),

$$\begin{aligned} C_{S|S'E}^2 &= 4 \det(K_0 \rho_0 K_0^\dagger + K_1 \rho_0 K_1^\dagger) \\ &= 4 \det \rho_0 (|\det K_0|^2 + |\det K_1|^2) + \\ &\quad + 4 g(K_0 \rho_0 K_0^\dagger, K_1 \rho_0 K_1^\dagger). \end{aligned} \quad (30)$$

Now, from Eqs. (21) and (22) we obtain

$$\begin{aligned} &g(K_0 \rho_0 K_0^\dagger, K_1 \rho_0 K_1^\dagger) = \\ &= \det \rho_0 |g(K_0, K_1)|^2 - g(K_0 \rho_0 K_0^\dagger, K_1 \rho_0 K_0^\dagger), \end{aligned} \quad (31)$$

and therefore

$$\begin{aligned} C_{S|S'E}^2 &= \mathcal{E}_0^2 (|\det K_0|^2 + |\det K_1|^2 + |g^2(K_0, K_1)|) - \\ &\quad - 4 g(K_0 \rho_0 K_0^\dagger, K_1 \rho_0 K_0^\dagger). \end{aligned} \quad (32)$$

As for $C_{E|SS'}^2$, we start from Eq. (4) and write (with $\{|n\rangle\}$ and $\{|n'\rangle\}$ orthonormal basis of the Hilbert space of S and S' , respectively, and $\{|\mu\rangle\}$, $\{|\nu\rangle\}$ orthonormal basis of the Hilbert space of E)

$$\begin{aligned} \rho_E &= \text{Tr}_{(SS')} \rho = \sum_{nn'} \langle nn' | U(|\psi_0\rangle \langle \psi_0| \otimes |0\rangle \langle 0|) U^\dagger |nn'\rangle \\ &= \sum_n \langle n | U_{SE} |0\rangle \left(\sum_{n'} \langle n' | \psi_0 \rangle \langle \psi_0 | n' \rangle \right) \langle 0 | U_{SE}^\dagger |n\rangle \\ &= \sum_{n\mu\nu} \langle n | |\mu\rangle \langle \mu | U_{SE} |0\rangle \rho_0 \langle 0 | U_{SE}^\dagger |\nu\rangle \langle \nu | n\rangle \\ &= \sum_{\mu\nu} \left(\sum_n \langle n | K_\mu \rho_0 K_\nu^\dagger |n\rangle \right) |\mu\rangle \langle \nu| \\ &= \sum_{\mu\nu} \text{Tr}(K_\mu \rho_0 K_\nu^\dagger) |\mu\rangle \langle \nu|. \end{aligned} \quad (33)$$

Equation (23) thus leads to (using the cyclic property of the trace)

$$\begin{aligned} C_{E|SS'}^2 &= 4 [\text{Tr}(\rho_0 K_0^\dagger K_0) \text{Tr}(\rho_0 K_1^\dagger K_1) - \\ &\quad - \text{Tr}(K_0 \rho_0 K_1^\dagger) \text{Tr}(K_1 \rho_0 K_0^\dagger)]. \end{aligned} \quad (34)$$

We now resort to Eq. (18) to get

$$\begin{aligned} C_{E|SS'}^2 &= \\ &= 4 [g(\rho_0 K_0^\dagger K_0, \rho_0 K_1^\dagger K_1) + \text{Tr}(\rho_0 K_0^\dagger K_0 \rho_0 K_1^\dagger K_1) - \\ &\quad - g(K_0 \rho_0 K_1^\dagger, K_1 \rho_0 K_0^\dagger) - \text{Tr}(K_0 \rho_0 K_1^\dagger K_1 \rho_0 K_0^\dagger)]. \end{aligned} \quad (35)$$

The trace terms in this expression cancel each other due to the cyclic property of the trace, and Eq. (22) leads finally to

$$\begin{aligned} C_{E|SS'}^2 &= \mathcal{E}_0^2 g(K_0^\dagger K_0, K_1^\dagger K_1) - \\ &\quad - 4 g(K_0 \rho_0 K_1^\dagger, K_1 \rho_0 K_0^\dagger). \end{aligned} \quad (36)$$

Gathering results we get:

$$C_{S'|SE}^2 = \mathcal{E}_0^2, \quad (37a)$$

$$C_{S|S'E}^2 = \mathcal{E}_0^2 D_S(K) + G(K, \rho_0), \quad (37b)$$

$$C_{E|SS'}^2 = \mathcal{E}_0^2 D_E(K) + G(K, \rho_0), \quad (37c)$$

where

$$D_S(K) = |\det K_0|^2 + |\det K_1|^2 + |g^2(K_0, K_1)|, \quad (38a)$$

$$D_E(K) = g(K_0^\dagger K_0, K_1^\dagger K_1), \quad (38b)$$

represent contributions independent of the initial conditions, and

$$G(K, \rho_0) = -4 g(K_0 \rho_0 K_1^\dagger, K_1 \rho_0 K_0^\dagger) \quad (39)$$

represents the contribution (common to $C_{S|S'E}^2$ and $C_{E|SS'}^2$) that bears the information regarding the initial state ρ_0 . Now, resorting to the condition (5) satisfied

by the Kraus operators we obtain $g(K_0^\dagger K_0, K_1^\dagger K_1) = 1 - |\det K_0|^2 - |\det K_1|^2$, a result that relates D_S and D_E according to

$$D_S = 1 - D_E + |g^2(K_0, K_1)| = 1 + g(K_0^\dagger K_1, K_1^\dagger K_0). \quad (40)$$

From the CKW decomposition (10) it follows that

$$C_{ij}^2 = \frac{1}{2}(C_{ijk}^2 + C_{jik}^2 - C_{kij}^2 - \tau), \quad (41)$$

whence Eqs. (27), (37), and (40) give

$$C_{S'S}^2 = \mathcal{E}_0^2 (|\det K_0| + |\det K_1|)^2 - \frac{1}{2}\mathcal{E}_0^2 (|u| - |v| + |u - v|), \quad (42a)$$

$$C_{S'E}^2 = \mathcal{E}_0^2 [1 - (|\det K_0| + |\det K_1|)^2] - \frac{1}{2}\mathcal{E}_0^2 (|v| - |u| + |u - v|), \quad (42b)$$

$$C_{SE}^2 = G + \frac{1}{2}\mathcal{E}_0^2 (|v| - |u - v|), \quad (42c)$$

where we wrote

$$u = 4 \det(K_0 K_1), \quad v = g^2(K_0, K_1), \quad (43)$$

so that $\tau = \mathcal{E}_0^2 |u - v|$. Notice from Eq. (42c) that whenever u vanishes (at least one K_μ has vanishing determinant), G coincides with C_{SE}^2 . In such case the contribution $G(K, \rho_0)$ in Eqs. (37b) and (37c) represents the entanglement directly *generated* as a result of the interaction between S and E , and consequently D_S and D_E represent the amount of entanglement that is being *distributed*, from the initial available entanglement \mathcal{E}_0^2 .

Resorting to the inequality $|u - v| \leq |u| + |v|$ we find the following lower bounds of C_{ij}^2 :

$$\mathcal{E}_0^2 (|\det K_0| - |\det K_1|)^2 \leq C_{S'S}^2, \quad (44a)$$

$$\mathcal{E}_0^2 [1 - (|\det K_0| + |\det K_1|)^2 - |g^2(K_0, K_1)|] \leq C_{S'E}^2, \quad (44b)$$

$$G - 2\mathcal{E}_0^2 |\det(K_0 K_1)| \leq C_{SE}^2. \quad (44c)$$

The equality sign holds whenever $|u - v| = |u| + |v|$. This will occur, in particular, whenever $u = 0$ and/or $v = 0$, which is the case of all the examples below.

VI. NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE EMERGENCE OF GENUINE ENTANGLEMENT

Our aim now is to establish the conditions under which the transition from bipartite to multipartite entanglement is guaranteed. Specifically, we focus on the general properties that the Kraus operators able to create tripartite entanglement must satisfy.

We first resort to Eq. (27), which allows us to determine whether the evolved state $|\phi(p)\rangle$ exhibits GHZ-type genuine entanglement ($\tau \neq 0$), or not ($\tau = 0$), as follows:

$$4 \det(K_0 K_1) \neq g^2(K_0, K_1) \iff |\phi(p)\rangle \text{ has 3-tangle.} \quad (45)$$

From here it follows, in particular, that if the quantities involved are real, then $\det(K_0 K_1) < 0$ is a sufficient condition to produce 3-tangle.

The result (45) establishes necessary and sufficient conditions (on the Kraus operators) for the state (2) to pertain to the GHZ-family, yet it provides only necessary conditions for the state to belong to the W-(sub)family of 3-partite entangled states. In order to determine sufficient conditions for the emergence of W-type multipartite entanglement, we must assure that, while having $\tau = 0$, the state is entangled in all bipartitions, i.e., $C_{ijk}^2 = C_{ij}^2 + C_{ik}^2 > 0$ for all $i = S, S', E$. As seen from Eq. (29), this is automatically met for $i = S'$ (recall that we assume nonzero \mathcal{E}_0).

Now, since $\tau = 0$ we have $4 \det(K_0 K_1) = g^2(K_0, K_1)$, or $u = v$, whence Eqs. (42) reduce to

$$C_{S'S}^2 = \mathcal{E}_0^2 (|\det K_0| + |\det K_1|)^2, \quad (46a)$$

$$C_{S'E}^2 = \mathcal{E}_0^2 - C_{S'S}^2, \quad (46b)$$

$$C_{SE}^2 = G + 2\mathcal{E}_0^2 |\det(K_0 K_1)|, \quad (46c)$$

and therefore

$$C_{S|S'E}^2 = \mathcal{E}_0^2 d_S(K) + C_{ES}^2, \quad (47a)$$

$$C_{E|SS'}^2 = \mathcal{E}_0^2 d_E(K) + C_{ES}^2, \quad (47b)$$

where $\mathcal{E}_0^2 d_S = C_{S'S'}^2 \geq 0$, $\mathcal{E}_0^2 d_E = C_{E'S'}^2 \geq 0$, and

$$d_S = 1 - d_E = (|\det K_0| + |\det K_1|)^2. \quad (48)$$

Since $C_{ES}^2 \geq 0$, it follows from Eqs. (47) that $d_S > 0$ and $d_E > 0$ are sufficient conditions for having, respectively, $C_{S|S'E}^2 > 0$ and $C_{E|SS'}^2 > 0$ (of course, the condition $C_{ES}^2 > 0$ also suffices for guaranteeing entanglement in both bipartitions, yet it involves the specific form of the initial state ρ_0 —via the dependence of C_{ES}^2 on G —and would not lead to a condition involving the Kraus operators only). This leads to

$$0 < |\det K_0| + |\det K_1| \Rightarrow C_{S|S'E}^2 > 0, \quad (49a)$$

$$|\det K_0| + |\det K_1| < 1 \Rightarrow C_{E|SS'}^2 > 0, \quad (49b)$$

and consequently to the final condition (of course, provided $\tau = 0$):

$$0 < |\det K_0| + |\det K_1| < 1 \Rightarrow |\phi(p)\rangle \text{ has W-type tripartite entanglement.} \quad (50)$$

It is worth noting that since (50) ensued from imposing that the terms proportional to \mathcal{E}_0^2 in Eqs. (47) were strictly positive, it constitutes a condition for having *distributed* W-type genuine entanglement, i.e., for guaranteeing the emergence of tripartite entanglement given that an initial amount of initial (bipartite) entanglement was present. By imposing instead the less restrictive conditions $C_{S|S'E}^2 > 0$ and $C_{E|SS'}^2 > 0$ in Eqs. (47) we would

Family	Condition	Entanglement
GHZ	$4 \det(K_0 K_1) \neq g^2(K_0, K_1)$	3-tangle
W	$4 \det(K_0 K_1) = g^2(K_0, K_1)$	no 3-tangle
W-subfamilies	$0 < \det K_0 + \det K_1 < 1$	3-partite
	$\det K_0 = \det K_1 = G(K, \rho_0) = 0$	biseparable (S -separable)
	$G(K, \rho_0) = \mathcal{E}_0^2 (\det K_0 ^2 + \det K_1 ^2 - 1)$	biseparable (E -separable)

TABLE I: Families to which the evolved state $|\phi(p)\rangle$ pertains according to basic properties of the Kraus operators. All conditions are sufficient and necessary, except for the condition involving the W-subfamily of 3-partite entangled states, which is only sufficient. Note that S' -separable and fully separable states do not occur since we are considering $C_{S'|SE}^2 = \mathcal{E}_0^2 > 0$.

obtained more general conditions for $|\phi(p)\rangle$ to exhibit W-type entanglement; however, as mentioned before and by virtue of the term C_{ES}^2 , those conditions will in general depend on the initial state ρ_0 . Thus, in general, the presence of W-type entanglement depends on the initial state ρ_0 , contrary to the 3-tangle (27), which is independent of ρ_0 .

The above results serve also to establish the conditions under which K_0 and K_1 drive the initial state to a biseparable one, i.e., separable in either the bipartition $S|S'E$ or $E|SS'$. Specifically, from Eqs. (46c), (47) and (48) we arrive at

$$C_{S'|S'E}^2 = 0 \iff \det K_0 = \det K_1 = G = 0 \quad (51a)$$

$$\Rightarrow C_{E|SS'}^2 = \mathcal{E}_0^2,$$

$$C_{E|SS'}^2 = 0 \iff G = \mathcal{E}_0^2 (|\det K_0|^2 + |\det K_1|^2 - 1)$$

$$\Rightarrow C_{S'|S'E}^2 = \mathcal{E}_0^2. \quad (51b)$$

The first of these equations thus determines the conditions for having a state that is S -separable (yet entangled in the $E + S'$ subsystem), whereas the second one corresponds to an E -separable state (in which all the entanglement is between S and S').

A summary of the results obtained in this section is shown in Table I, where the different inequivalent families and each type of entanglement are identified according to the conditions on the Kraus operators. Notice that such conditions are invariant under (local) unitary transformations U_S , hence do not depend on the basis in which the matrices are expressed.

A. Tripartite entanglement as a function of the initial entanglement

The results shown in Table I were obtained assuming a nonzero initial (bipartite) entanglement \mathcal{E}_0^2 . As follows

from the previous analysis, it is clear that the condition $\mathcal{E}_0^2 > 0$ is necessary in order to create tripartite entanglement (otherwise the only entanglement present would be, at most, C_{SE}^2), yet the dependence of the generation of tripartite entanglement on the amount of initial entanglement has not been discussed. We now briefly comment on this.

Equation (27) shows that the 3-tangle depends linearly on \mathcal{E}_0^2 , so for an appropriate given evolution (fixed Kraus operators that comply with the conditions (45)), an increase/decrease of the initial entanglement changes the GHZ-type tripartite entanglement accordingly, and 3-tangle exists for all $\mathcal{E}_0^2 \in (0, 1]$.

The analysis for the W-type tripartite entanglement is more elaborated, since the expressions for C_{ijk}^2 in Eqs. (37) are not explicit functions of \mathcal{E}_0^2 , due to the term $G(K, \rho_0)$ and its dependence on the initial state ρ_0 , whose determinant gives precisely \mathcal{E}_0^2 (see Eq. (28)). In order to express G as an explicit function of the initial entanglement, we first write ρ_0 in the form

$$\rho_0 = \rho_0(\rho_{ee}, \varphi, |\rho_{ge}|) = \begin{pmatrix} 1 - \rho_{ee} & |\rho_{ge}|e^{i\varphi} \\ |\rho_{ge}|e^{-i\varphi} & \rho_{ee} \end{pmatrix}, \quad (52)$$

and decompose the matrix $K_0 \rho_0 K_1^\dagger$ as

$$K_0 \rho_0 K_1^\dagger = M(K, \rho_{ee}) + |\rho_{ge}| N(K, \varphi), \quad (53)$$

with M and N the matrices

$$M = K_0 \sigma_{ee} K_1^\dagger, \quad N = K_0 \sigma_\varphi K_1^\dagger, \quad (54)$$

and

$$\sigma_{ee} = \begin{pmatrix} 1 - \rho_{ee} & 0 \\ 0 & \rho_{ee} \end{pmatrix}, \quad \sigma_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi} \\ e^{-i\varphi} & 0 \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Substituting Eq. (53) into (39) we obtain, with the aid of the properties (19),

$$G(K, \rho_0) = -4g(M, M^\dagger) - 8|\rho_{ge}| \operatorname{Re}[g(M, N^\dagger)] - 4|\rho_{ge}|^2 g(N, N^\dagger). \quad (56)$$

Now, resorting to Eq. (28) written explicitly as

$$\mathcal{E}_0^2 = 4\rho_{ee}(1 - \rho_{ee}) - 4|\rho_{eg}|^2, \quad (57)$$

we can write $|\rho_{ge}|$ as a function of the initial excited population ρ_{ee} and entanglement \mathcal{E}_0^2 ; the set of the independent variables $(\rho_{ee}, \varphi, |\rho_{ge}|)$ becomes substituted by $(\rho_{ee}, \varphi, \mathcal{E}_0^2)$, and we are led to

$$G(K_0, \rho_0) = G(K, \rho_{ee}, \varphi, \mathcal{E}_0^2) = \mathcal{G}_1(K, \rho_{ee}, \varphi) + \mathcal{G}_2(K, \rho_{ee}, \varphi) \sqrt{4\rho_{ee}(1 - \rho_{ee}) - \mathcal{E}_0^2} + \mathcal{G}_3(K, \varphi) \mathcal{E}_0^2, \quad (58)$$

with

$$\mathcal{G}_1 = -4 [g(M, M^\dagger) + \rho_{ee}(1 - \rho_{ee})g(N, N^\dagger)], \quad (59a)$$

$$\mathcal{G}_2 = -4 \operatorname{Re} [g(M, N^\dagger)], \quad (59b)$$

$$\mathcal{G}_3 = g(N, N^\dagger). \quad (59c)$$

When we substitute Eq. (58) into (46c) we get, from Eqs. (47),

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{ijS'}^2}{\partial \mathcal{E}_0^2} &= (d_i + 2|\det(K_0 K_1)|) + \\ &+ g(N, N^\dagger) + \frac{2 \operatorname{Re} [g(M, N^\dagger)]}{\sqrt{4\rho_{ee}(1 - \rho_{ee}) - \mathcal{E}_0^2}}, \end{aligned} \quad (60)$$

where $i, j = S, E$ (and of course $i \neq j$). Equation (60) gives the general expression for the change of the bipartite entanglements $C_{S|S'E}^2$ and $C_{E|SS'}^2$ with respect to \mathcal{E}_0^2 in absence of 3-tangle, thus allows to analyze the behaviour of bipartite and W-type tripartite entanglement as \mathcal{E}_0^2 varies. The specific rate of change will clearly depend on the set of Kraus operators, and on the value of \mathcal{E}_0^2 provided $\operatorname{Re} [g(M, N^\dagger)] \neq 0$. However, it should be stressed that the conditions for the emergence of bipartite or W-type genuine entanglement summarized in Table I do not depend on the amount of initial entanglement, so whenever those conditions are satisfied, the corresponding type of entanglement exists for all $\mathcal{E}_0^2 \in (0, 1]$.

B. Emergence of multipartite entanglement in 4-qubit systems

The approach developed here throws some light into the emergence of multipartite entanglement in 4-qubit systems in which two of them (S and S'), initially entangled, interact locally with the remaining two (E and E'). The initial state is thus of the form

$$|\phi(0)\rangle_{S'SEE'} = |\psi_0\rangle_{S'S} |0\rangle_E |0\rangle_{E'}, \quad (61)$$

where $|\psi_0\rangle_{S'S}$ is an entangled state, and the evolution operator factorizes as $U = U'_{S'E'} \otimes U_{SE}$, with $U'_{S'E'}$ and U_{SE} arbitrary unitary operators associated, respectively, to the set of Kraus operators $\{K'_0, K'_1\}$ and $\{K_0, K_1\}$. The dynamics of entanglement in this type of systems has been studied in [6], where it is shown that the residual entanglement in the bipartition $i|jkl$, namely

$$R_i \equiv C_{ij|kl}^2 - C_{ij}^2 - C_{ik}^2 - C_{il}^2, \quad (62)$$

can be expressed as

$$R_i = \tau_{ikl} + \tau_{ij(kl)} \quad (63)$$

for $i, j \in \{S, E\}$ and $k, l \in \{S', E'\}$, or $i, j \in \{S', E'\}$ and $k, l \in \{S, E\}$. Here τ_{ikl} stands for the residual entanglement —corresponding to the bipartition $i|kl$ — of the (in

general mixed) reduced 3-qubit state $\rho_{ikl} = \operatorname{Tr}_j \rho$, i.e.,

$$\tau_{ikl} \equiv C_{i|kl}^2 - C_{ik}^2 - C_{il}^2, \quad (64)$$

and $\tau_{ij(kl)}$ represents the 3-tangle of the pure evolved state $U|\phi(0)\rangle$, generated among the subsystems i, j and $k+l$ (as discussed in [6], the subsystem $k+l$ behaves as a two-level system, hence can be considered as an effective qubit, here denoted as (kl)). Equation (63) thus shows that the residual entanglement can be decomposed in terms of well-identified (physically and operationally) multipartite entanglement contributions involving 3 and 4 qubits (see [6] for details).

Now, due to the invariance of entanglement under local operations, the quantities $C_{S|E'S'E'}^2$, $C_{E|SS'E'}^2$, C_{SE}^2 , $C_{S|S'E'}^2$, $C_{E|S'E'}^2$, and $\tau_{SE(S'E')}$ do not depend on the particular transformation $U'_{S'E'}$, and consequently can be computed setting $U'_{S'E'} = \mathbb{I}_{S'E'}$. In this case the qubit E' becomes ineffective (remains disentangled from the rest), and formally the problem amounts to solve the 3-qubit system studied here. This observation leads thus to

$$C_{S|E'S'E'}^2 = C_{S|S'E}^2(K_0, K_1, \rho_0), \quad (65a)$$

$$C_{E|S'S'E'}^2 = C_{E|SS'}^2(K_0, K_1, \rho_0), \quad (65b)$$

$$C_{SE}^2 = C_{SE}^2(K_0, K_1, \rho_0), \quad (65c)$$

$$C_{S|S'E'}^2 = C_{SS'}^2(K_0, K_1, \rho_0), \quad (65d)$$

$$C_{E|S'E'}^2 = C_{ES'}^2(K_0, K_1, \rho_0), \quad (65e)$$

$$\tau_{SE(S'E')} = \tau_{SS'E}(K_0, K_1), \quad (65f)$$

where the left-hand side expressions refer to the 4-qubit problem, and the quantities in the right-hand side correspond to those derived in the previous sections, for the 3-qubit case. It is important to stress that the equalities in Eqs. (65) represent only a numerical (not physical) correspondence, and that they hold for *all* $U = U'_{S'E'} \otimes U_{SE}$ (considering $U'_{S'E'} = \mathbb{I}_{S'E'}$ was only a useful assumption that served to establish the numerical equivalence). Analogously, we can make the substitution $i \leftrightarrow i'$ ($i = S, S', E, E'$) throughout the previous analysis (including Eqs. (37) and (42)), and proceed mutatis mutandis to obtain:

$$C_{S'|E'SE}^2 = C_{S'|E'S}(K'_0, K'_1, \rho'_0), \quad (66a)$$

$$C_{E'|S'SE}^2 = C_{E'|S'S}(K'_0, K'_1, \rho'_0), \quad (66b)$$

$$C_{S'E'}^2 = C_{S'E'}^2(K'_0, K'_1, \rho'_0), \quad (66c)$$

$$C_{S'|SE}^2 = C_{SS'}^2(K'_0, K'_1, \rho'_0), \quad (66d)$$

$$C_{E'|SE}^2 = C_{E'S}(K'_0, K'_1, \rho'_0), \quad (66e)$$

$$\tau_{S'E'(SE)} = \tau_{SS'E'}(K'_0, K'_1). \quad (66f)$$

From Table I and Eqs. (65f), (66f), and (63), it follows that whenever the Kraus operators corresponding to the transformation U_{SE} , and those corresponding to the transformation $U'_{S'E'}$ comply with the conditions

$$4 \det(K_0 K_1) \neq g^2(K_0, K_1), \quad (67a)$$

$$4 \det(K'_0 K'_1) \neq g^2(K'_0, K'_1), \quad (67b)$$

all R_i ($i = S, E, S', E'$) will be nonzero, and therefore multipartite entanglement (embodied in the residual entanglement) will be present in the 4-qubit system. Notice that conditions (67) guarantee only multipartite entanglement in the form of $\tau_{ij(kl)}$. In order to guarantee tripartite entanglement in the form τ_{ikl} , the explicit expressions for the qubit-qubit entanglements C_{ik}^2, C_{il}^2 (with one primed index and one unprimed index) need to be calculated directly, as functions of the Kraus operators.

Also, it follows from Table I and Eqs. (65a), (65b), (66a), and (66b), that whenever U_{SE} and $U'_{S'E'}$ generate W-type tripartite entanglement, that is, whenever

$$4 \det(K_0 K_1) = g^2(K_0, K_1), \quad 0 < |\det K_0| + |\det K_1| < 1, \quad (68a)$$

$$4 \det(K'_0 K'_1) = g^2(K'_0, K'_1), \quad 0 < |\det K'_0| + |\det K'_1| < 1, \quad (68b)$$

the 4-qubit system will be entangled in all bipartitions, thus guaranteeing the emergence of genuine entanglement.

VII. EXAMPLES

We will now apply the results obtained for the 3-qubit system to analyze the distribution and emergence of genuine entanglement, considering different quantum channels of interest and an initial state ρ_0 expressed as (52).

A. Amplitude Damping Channel

The Amplitude Damping (AD) Channel represents a dissipative interaction between S and E . A paradigmatic example is that of an initially excited two-level atom (S) that decays spontaneously in an initially empty cavity (E), which absorbs the emitted photon with some probability p [32]. The corresponding Kraus operators are:

$$K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (69)$$

with $p \in [0, 1]$.

Direct calculation gives $u = 4 \det(K_0 K_1) = 0$, $v = g^2(K_0, K_1) = 0$ for all p , whence $\tau = 0$ and any initial state (1) that evolves under the AD map pertains to the W-family. Moreover, since $\det K_1 = 0$ and $\det K_0 = \sqrt{1-p} > 0$ for $p < 1$, condition (50) becomes

$$0 < p < 1 \Rightarrow |\phi(p)\rangle \text{ is (W-type) genuine entangled.} \quad (70)$$

We also get $G = 4\rho_{ee}^2 p(1-p)$, so the condition for having a S -separable state (see Table I) is satisfied only at $p = 1$. Analogously, the condition for having an E -separable state holds only at $p = 0$. This simple analysis on the

Kraus operators thus leads us to conclude that under the AD map, W-type genuine entanglement is created during all the evolution, except at the extreme points $p = 0, 1$, in which the entanglement exists only in bipartite form. At $p = 0$ there is only entanglement between S and S' , and at $p = 1$ the same amount of entanglement is completely transferred between E and S' .

To analyze the distribution of entanglement we resort to the following expressions, obtained by direct application of Eqs. (46):

$$C_{S'S}^2 = \mathcal{E}_0^2(1-p), \quad (71a)$$

$$C_{S'E}^2 = \mathcal{E}_0^2 p, \quad (71b)$$

$$C_{SE}^2 = G = 4\rho_{ee}^2 p(1-p). \quad (71c)$$

Further, Eqs. (47) lead to

$$C_{S|S'E}^2 = \mathcal{E}_0^2(1-p) + 4\rho_{ee}^2 p(1-p), \quad (72a)$$

$$C_{E|SS'}^2 = \mathcal{E}_0^2 p + 4\rho_{ee}^2 p(1-p). \quad (72b)$$

Figures (1) and (2) show the evolution of these entanglements as a function of p and ρ_{ee} , for $\mathcal{E}_0^2 = 0.4$. Notice that though ρ_{ee} can acquire values in the interval $[0, 1]$, Eq. (57) imposes $\mathcal{E}_0^2 - 4\rho_{ee}(1-\rho_{ee}) \leq 0$, so for \mathcal{E}_0^2 fixed, the range of ρ_{ee} is restricted to $\rho_{ee} \in [\rho_{ee}^-, \rho_{ee}^+]$, where ρ_{ee}^\pm are the roots of the equation $\mathcal{E}_0^2 - 4\rho_{ee}(1-\rho_{ee}) = 0$, namely $\rho_{ee}^\pm = (1/2)(1 \pm \sqrt{1-\mathcal{E}_0^2})$.

As seen in Figs. (1) and (2), for fixed $p \in (0, 1)$, the entanglement in both bipartitions $S|S'E$ and $E|SS'$ increases monotonically with the initial population of excited states in S . Also, as $\rho_{ee} \rightarrow 0$, $C_{E|SS'}^2$ and $C_{S|ES'}^2$ increases and decreases, respectively, linearly with p and at the same rate. Notice that once the evolution starts ($p = 0$) the entanglement $C_{E|SS'}^2$ always increases (irrespective of the value of ρ_{ee}), yet the sign of $(\partial C_{S|ES'}^2 / \partial p)|_{p=0}$ depends on the value of ρ_{ee} : for $\rho_{ee} < \mathcal{E}_0/2$ the initial entanglement in the bipartition $S|ES'$ starts to decrease, but increases for $\rho_{ee} > \mathcal{E}_0/2$.

Figure (3) shows the entanglement in the bipartitions $E|SS'$ and $S|S'E$ as a function of p and \mathcal{E}_0^2 , for $\rho_{ee} = 0.5$. It serves to illustrate the presence of W-type entanglement as the amount of initial entanglement varies. In line with (70), we verify that entanglement exists in all bipartitions for $0 < p < 1$, irrespective of the value of \mathcal{E}_0^2 .

B. Dephasing Channel

We now analyze the evolution under the Dephasing (D) Channel, which has the following Kraus operators:

$$K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{p} \end{pmatrix}, \quad (73)$$

again with $p \in [0, 1]$. This channel represents a non-dissipative interaction between S and E , describing, e.g.,

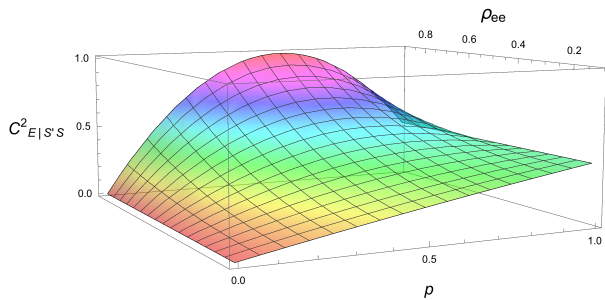


FIG. 1: $C^2_{E|S'S'}$ as a function of p and ρ_{ee} , for $\mathcal{E}_0^2 = 0.4$ under the AD channel. Subsystem E is initially ($p = 0$) disentangled from the rest, it gets entangled with the $S + S'$ system during the evolution, and at $p = 1$ becomes entangled with S' only. W-type genuine entanglement exists for all $0 < p < 1$.

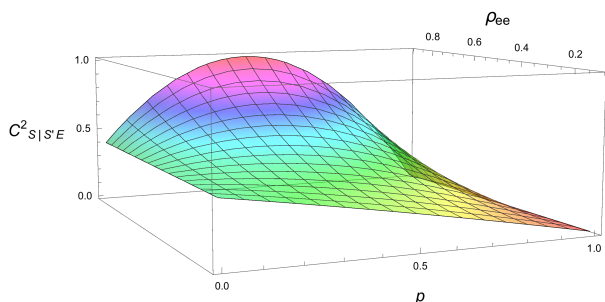


FIG. 2: $C^2_{S|S'E}$ as a function of p and ρ_{ee} , for $\mathcal{E}_0^2 = 0.4$ under the AD channel. Subsystem S is initially ($p = 0$) entangled with S' , its entanglement with the $E + S'$ system starts to decrease or increase depending on the value of ρ_{ee} (see text), and finally S disentangles from the rest, at $p = 1$. W-type genuine entanglement exists for all $0 < p < 1$.

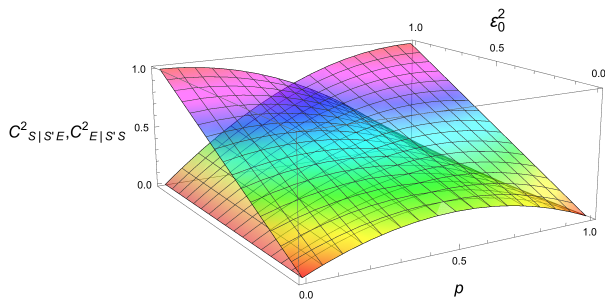


FIG. 3: $C^2_{S|S'E}$ and $C^2_{E|S'S'}$ as a function of p and \mathcal{E}_0^2 , for $\rho_{ee} = 0.5$ under the AD channel. $C^2_{S|S'E}$ ($C^2_{E|S'S'}$) decreases (increases) as $p \rightarrow 1$, and entanglement in all bipartitions – hence W-type tripartite entanglement – exists for all $p \in (0, 1)$ and $\mathcal{E}_0^2 \in (0, 1]$.

an elastic scattering with probability p , where the state of S does not change, but E is allowed to perform a transition without exchanging energy with S [32].

Direct calculation gives $u = 4 \det(K_0 K_1) = 0$, so that $\tau = \mathcal{E}_0^2 |g^2(K_0, K_1)| = \mathcal{E}_0^2 p$, and thus

$$0 < p \leq 1 \Rightarrow |\phi(p)| \text{ is (GHZ-type) genuine entangled. (74)}$$

We now resort to Eqs. (42) to calculate all qubit-qubit entanglements, obtaining

$$C^2_{S'S} = \mathcal{E}_0^2(1 - p), \quad (75a)$$

$$C^2_{S'E} = 0, \quad (75b)$$

$$C^2_{SE} = G = 4p|\rho_{eg}|^2. \quad (75c)$$

The above results lead to

$$\begin{aligned} C^2_{S|S'E} &= \mathcal{E}_0^2 + 4p|\rho_{eg}|^2 \\ &= \mathcal{E}_0^2(1 - p) + 4\rho_{ee}(1 - \rho_{ee})p, \end{aligned} \quad (76a)$$

$$\begin{aligned} C^2_{E|S'S'} &= \mathcal{E}_0^2 p + 4p|\rho_{eg}|^2 \\ &= 4\rho_{ee}(1 - \rho_{ee})p, \end{aligned} \quad (76b)$$

where in the last line Eq. (57) has been used.

Figures (4) and (5) show the evolution of $C^2_{E|S'S'}$, $C^2_{S|S'E}$, and τ as functions of $p \in [0, 1]$ and $\rho_{ee} \in [\rho_{ee}^-, \rho_{ee}^+]$, for $\mathcal{E}_0^2 = 0.4$. We observe that under the dephasing evolution the initial entanglement distributes in such a way that the 3-tangle increases linearly and attains its maximum value at $p = 1$, where the only nonzero qubit-qubit entanglement is $C^2_{SE}(p = 1) = 4|\rho_{eg}|^2$. This means that for $\rho_{eg} = 0$ (i.e., $\rho_{ee} = \rho_{ee}^\pm$), all the amount of initial bipartite entanglement \mathcal{E}_0^2 is completely transformed (at $p = 1$) into genuine (GHZ-type) entanglement.

Figure (6) shows the variation of the 3-tangle as a function of p and \mathcal{E}_0^2 for $\rho_{ee} = 0.5$. As expected, the GHZ-genuine entanglement increases with the amount of initial entanglement.

C. Phase Flip Channel

The Phase Flip (PF) Channel corresponds to one of the possible errors that can occur, with probability $p/2$, in quantum computation [32]. It is characterized by the following Kraus operators:

$$K_0 = \sqrt{1 - p/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, K_1 = \sqrt{p/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (77)$$

with $p \in [0, 1]$. In this case we get $u = 4 \det(K_0 K_1) = p(p - 2) < 0$ for all positive p , which is a sufficient condition for having nonzero 3-tangle (see below Eq. (45)). Hence

$$0 < p \leq 1 \Rightarrow |\phi(p)| \text{ is (GHZ-type) genuine entangled, (78)}$$

as in the dephasing channel case. However, here we have $v = g^2(K_0, K_1) = 0$, and consequently from Eqs. (27) and (42) we find

$$\tau = \mathcal{E}_0^2 p(2 - p), \quad (79a)$$

$$C^2_{S'S'} = \mathcal{E}_0^2(1 - p)^2, \quad (79b)$$

$$C^2_{S'E} = 0, \quad (79c)$$

$$C^2_{SE} = [4\rho_{ee}(1 - \rho_{ee}) - \mathcal{E}_0^2]p(2 - p). \quad (79d)$$

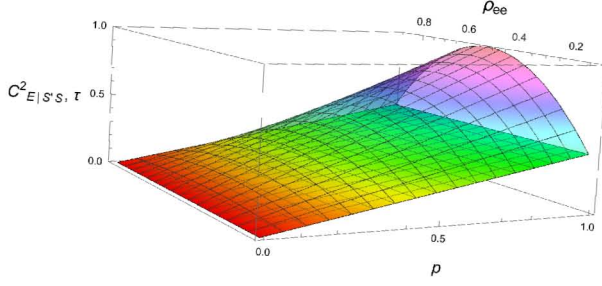


FIG. 4: $C_{E|S'S'}^2$ and τ as a function of p and ρ_{ee} , for $\mathcal{E}_0^2 = 0.4$ under the D channel. Subsystem E is initially disentangled from the rest. As the system evolves $C_{E|S'S'}^2$ (curved surface) increases linearly with p with a slope that depends on ρ_{ee} , whereas τ (flat surface) increases linearly with p , at a rate independent of ρ_{ee} . At $p = 1$ and $\rho_{ee} = 1/2$, $C_{E|S'S'}^2$ acquires its maximum value.

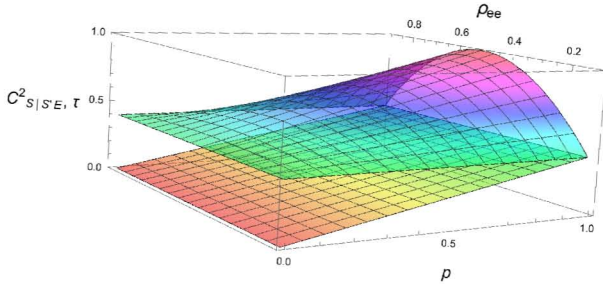


FIG. 5: $C_{S|S'E}^2$ and τ as a function of p and ρ_{ee} , for $\mathcal{E}_0^2 = 0.4$ under the D channel. At $p = 0$ all the entanglement exists in bipartite form (between S and S'). During the evolution, $C_{S|S'E}^2$ (curved surface) increases at a constant rate that depends on ρ_{ee} , and τ (flat surface) increases linearly with p . At $p = 1$ and $\rho_{ee} = 1/2$, $C_{S|S'E}^2$ acquires its maximum value.

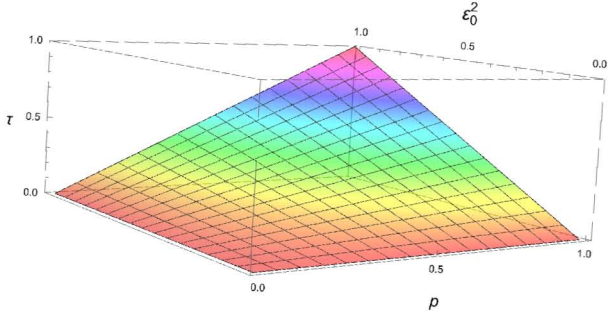


FIG. 6: τ as a function of p and \mathcal{E}_0^2 for $\rho_{ee} = 0.5$ under the D channel. The GHZ-type genuine entanglement increases with \mathcal{E}_0^2 .

Further, we get

$$C_{S|S'E}^2 = \mathcal{E}_0^2(1-p)^2 + 4\rho_{ee}(1-\rho_{ee})p(2-p), \quad (80a)$$

$$C_{E|S'S'}^2 = 4\rho_{ee}(1-\rho_{ee})p(2-p). \quad (80b)$$

Figures (7) and (8) show, respectively, the evolution of $C_{E|S'S'}^2$ and $C_{S|S'E}^2$ given by Eqs. (80), together with τ as

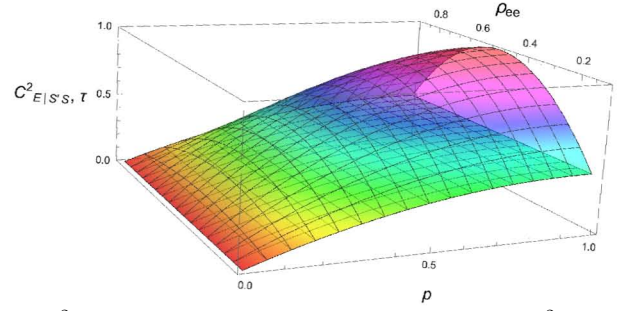


FIG. 7: $C_{E|S'S'}^2$ and τ as a function of p and ρ_{ee} , for $\mathcal{E}_0^2 = 0.4$ under the PF map. Along the evolution, $C_{E|S'S'}^2$ (outer surface) and τ (inner surface) increase monotonically with p , the latter in a way that is independent of the initial excited population ρ_{ee} . At $p = 1$ the curves coincide with those of the D map.

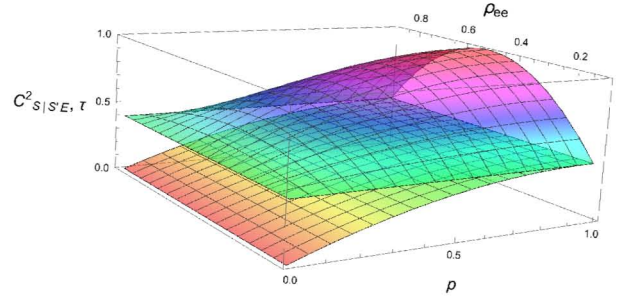


FIG. 8: $C_{S|S'E}^2$ and τ as a function of p and ρ_{ee} , for $\mathcal{E}_0^2 = 0.4$ under the PF map. During the evolution, $C_{S|S'E}^2$ (outer surface) and τ (inner surface) increase monotonically with p , yet the behaviour of the 3-tangle does not depend on ρ_{ee} . At the final point ($p = 1$) the curves coincide with those of the D map.

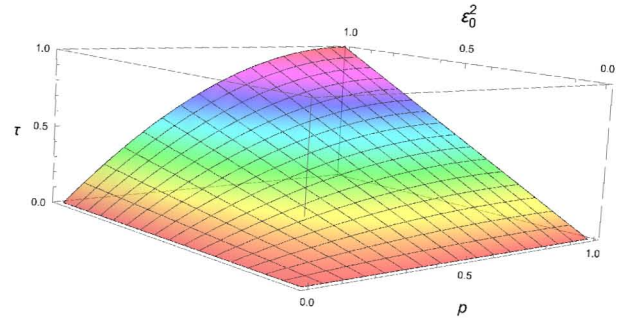


FIG. 9: τ as a function of p and \mathcal{E}_0^2 for $\rho_{ee} = 0.5$ under the PF map. The GHZ-type genuine entanglement increases with \mathcal{E}_0^2 .

a function of $p \in [0, 1]$ and $\rho_{ee} \in [\rho_{ee}^-, \rho_{ee}^+]$, for $\mathcal{E}_0^2 = 0.4$. The dynamics of these quantities is similar to that exhibited in the D channel case, but now all entanglements evolve quadratically (instead of linearly) in p .

Finally, Figure (9) shows the emergence of 3-tangle as a result of the evolution and the nonzero initial entanglement. The GHZ-type genuine entanglement is always

larger than in the Dephasing channel case.

VIII. CONCLUDING REMARKS

We disclosed basic and unitarily-invariant properties that the Kraus operators must satisfy in order to guarantee the emergence of each type of entanglement allowed in a 3-qubit pure state, assuming an evolution dictated by Eq. (4). We found that the condition distinguishing states in the GHZ-family from those in the W-family depends *only* on functions involving determinants of the Kraus operators, which means that the emergence of 3-tangle is determined by the structure of the evolution operator only, and is independent of the particular initial (entangled) state ρ_0 . Sufficient conditions for having W-type genuine entanglement are also found that are independent of the initial state. Conditions involving ρ_0 appear instead in the criteria for having biseparability.

Our analysis provides the expression for *all* entanglement measures, namely C_{ij}^2 , C_{ijk}^2 , and τ , in terms of the Kraus operators and a single function (G) that isolates all the information regarding the initial state ρ_0 , and that determines the entanglement between S and E . Further, a general expression for G as a function of the initial entanglement was obtained, thus allowing for a more complete analysis of the different types of entanglement as \mathcal{E}_0^2 varies. In addition, lower bounds are found for the qubit-qubit entanglements.

Since we have considered evolutions in which S is initially entangled with S' , and the only interaction is between S and E , our analysis refers to 3-partite entanglement *induced by local channels, and assisted by the initial entanglement*. If we allow both S and S' to interact with E , the dynamics would be described by a *global* channel, communication between S and S' through E will arise in

general, and the emergence of all kinds of entanglement is possible—even if S and S' are initially uncorrelated—since the evolution corresponds to nonlocal dynamics.

Our results allow for a detailed analysis of the dynamics, emergence and distribution of entanglement in a wide range of scenarios, particularly in those involving decoherence processes, as those depicted in the examples. In all these, it became clear that the loss of entanglement between the central systems (in this case S and S') is accompanied by the creation of genuine entanglement among S , S' , and E (which in this case plays the role of environment). If access to the degrees of freedom of E were possible (as in, e.g., [33]) decoherence could therefore be used to create or enhance useful genuine entanglement, by mere application of the appropriate Kraus operators.

The present classification of the Kraus operators according to their capacity of producing specific types of entanglement, opens the path to investigate whether similar analysis can be performed on larger systems (such as the 4-qubit case briefly studied here), and also to determine the basic structure of the evolution operators—or rather of the specific Hamiltonians—that must be implemented in the system in order to create and distribute quantum correlations as required for specific tasks. This would favor the development and experimental implementation of strategies aimed at making the most of initially entangled, evolving systems.

Acknowledgments

The authors gratefully acknowledge financial support from DGAPA-UNAM through Project PAPIIT IA101918. They also thank A. Leonides for helping in the elaboration of the graphical abstract.

-
- [1] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki, Rev. Mod. Phys. **81**, 865 (2009).
 - [2] M. Walter, D. Gross, J. Eisert, arXiv:1612.02437 [quant-ph] (2016).
 - [3] L. Aolita, F. de Melo, L. Davidovich, Rep. Prog. Phys. **78**, 042001 (2015).
 - [4] O. Jiménez Farías, A. Valdés-Hernández, G. H. Aguilar, P. H. Souto Ribeiro, S. P. Walborn, L. Davidovich, Xiao-Feng Qian, J. H. Eberly, Phys. Rev. A **85**, 012314 (2012).
 - [5] G. H. Aguilar, O. Jiménez Farías, A. Valdés-Hernández, P. H. Souto Ribeiro, L. Davidovich, S. P. Walborn, Phys. Rev. A **89**, 022339 (2014).
 - [6] G. H. Aguilar, A. Valdés-Hernández, L. Davidovich, S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, Phys. Rev. Lett. **113**, 240501 (2014).
 - [7] L. Davidovich, Phys. Scr. **91**, 063013 (2016).
 - [8] M. Yona, T. Yu, J. H. Eberly, J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys. **39**, 621 (2006).
 - [9] Y. S. Weinstein, Phys. Rev. A **79**, 012318 (2009).
 - [10] M. P. Almeida, F. de Melo, M. Hor-Meyll, A. Salles, S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, L. Davidovich, Science **316**, 579 (2007).
 - [11] J.-W. Pan et al., Nature (London) **403**, 515 (2000).
 - [12] A. Rauschenbeutel et al., Science **288**, 2024 (2000).
 - [13] M. Eibl, N. Kiesel, M. Bourennane, C. Kurtsiefer, H. Weinfurter, Phys. Rev. Lett. **92**, 077901 (2004).
 - [14] C. F. Roos et al., Science **304**, 5676 (2004).
 - [15] I. Bengtsson, K. Życzkowski, arXiv:1612.07747 [quant-ph] (2016).
 - [16] M. Hillery, V. Bužek, A. Berthiaume, Phys. Rev. A **59**, 1829 (1999).
 - [17] Z. Zhao, Y.-A. Chen, A.-N. Zhang, T. Yang, H. J. Briegel, J.-W. Pan, Nature (London) **430**, 54 (2004).
 - [18] A. I. Lvovsky, B. C. Sanders, W. Tittel, Nature Photon. **3**, 706 (2009).
 - [19] E. D'Hondt E, P. Panangaden, Jour. Quantum Inf. and Comp., **6**, 173-183 (2005).
 - [20] K. Kraus, *States, Effects and Operations: Fundamental Notions of Quantum Theory*, Springer Verlag (1983).
 - [21] W. Dür, G. Vidal, J. Cirac, Phys. Rev. A **62**, 62314

- (2000).
- [22] O. Gühne, G. Tóth, Phys. Rep. **474**, 1-75 (2009).
- [23] A. I. Solomon, C-L. Ho, J. Phys.: Conf. Ser. **343**, 012114 (2012).
- [24] L. Anticoli, M. G. Ghahi, Int. J. Quant. Inf. **16**, 1850055 (2018).
- [25] C. Datta, S. Sazim, A. Das, P. Agrawal, Eur. Phys. J. D **72** (9), 157 (2018).
- [26] A. Das, C. Datta, P. Agrawal, Phys. Lett. A **381**, 3928 (2017).
- [27] M.-J. Zhao, T.-G. Zhang, X. Li-Jost and S.- M. Fei, Phys. Rev. A **87**, 012316 (2013).
- [28] N. Brunner, J. Sharam, T. Vertesi, Phys. Rev. Lett. **108**, 110501 (2012).
- [29] V. Coffman, J. Kundu, W. Wootters, Phys. Rev. A **61**, 52306 (2000).
- [30] P. Rungta, V. Buzek, C. M. Caves, M. Hillery, G. J. Milburn, Phys. Rev. A **64**, 042315 (2001).
- [31] W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).
- [32] J. Audretsch, *Entangled Systems*, Wiley-VCH (2007).
- [33] O. Jiménez Farías, G. H. Aguilar, A. Valdés-Hernández, P. H. Souto Ribeiro, L. Davidovich, S. P. Walborn, Phys. Rev. Lett. **109**, 150403 (2012).

Apéndice B

Propiedades de la función g

Partiendo de la definición de la función g (3.1.4), ésta hereda directamente las primeras propiedades de la traza:

- Propiedad (3.1.5): $g(A, B) = g(B, A)$, utilizando la ciclicidad de la traza tenemos

$$g(A, B) = Tr(A)Tr(B) - Tr(AB) = Tr(B)Tr(A) - Tr(BA) = g(B, A). \quad (B.0.1)$$

- Propiedad (3.1.6): $g(A, B + C) = g(A, B) + g(A, C)$, utilizando la linealidad de la traza tenemos

$$\begin{aligned} g(A, B + C) &= Tr(A)Tr(B + C) - Tr[A(B + C)], \\ &= Tr(A)[Tr(B) + Tr(C)] - [Tr(AB) + Tr(AC)], \\ &= Tr(A)Tr(B) - Tr(AB) + Tr(A)Tr(C) - Tr(AC), \\ &= g(A, B) + g(A, C). \end{aligned} \quad (B.0.2)$$

- Propiedad (3.1.7): $g(A^\dagger, B^\dagger) = [g(A, B)]^*$, utilizando que $Tr(A^\dagger) = Tr(A)^*$ y la ciclicidad de la traza, tenemos

$$\begin{aligned} g(A^\dagger, B^\dagger) &= Tr(A^\dagger)Tr(B^\dagger) - Tr(A^\dagger B^\dagger), \\ &= Tr(A)^*Tr(B)^* - Tr[(BA)^\dagger], \\ &= Tr(A)^*Tr(B)^* - Tr(BA)^*, \\ &= [Tr(A)Tr(B) - Tr(AB)]^*, \\ &= g(A, B)^*. \end{aligned} \quad (B.0.3)$$

En el caso particular en que las matrices son de 2×2 tenemos que la función g además cumple con (3.1.8) por lo que adquiere las nuevas propiedades:

- Propiedad (3.1.9): $g(AC, BC) = g(A, B) \det C$, utilizando que $\det AC = \det A \det C$, tenemos

$$\begin{aligned}
 g(AC, BC) &= \det(AC + BC) - \det(AC) - \det(BC), \\
 &= \det[(A + B)C] - \det A \det C - \det B \det C, \\
 &= \det(A + B) \det C - (\det A + \det B) \det C, \\
 &= [\det(A + B) - (\det A + \det B)] \det C, \\
 &= g(A, B) \det C.
 \end{aligned} \tag{B.0.4}$$

- Propiedad (3.1.10): $g(A, B)g(C, D) = g(AC, BD) + g(AD, BC)$, utilizando la definición de la función g en términos de los determinantes (3.1.8) y el hecho de que $\det A \det B = \det AB$, tenemos

$$\begin{aligned}
 g(A, B)g(C, D) &= g(A, B)[\det(C + D) - \det(C) - \det(D)], \\
 &= g(A, B) \det(C + D) - g(A, B)[\det(C) + \det(D)], \\
 &= [\det(A + B) - \det(A) - \det(B)] \det(C + D) - g(A, B)[\det(C) + \det(D)], \\
 &= \det(A + B) \det(C + D) - \det(C + D)[\det(A) + \det(B)], \\
 &\quad - g(A, B)[\det(C) + \det(D)], \\
 &= \det(AC + AD + BC + BD) - \det(C + D)[\det(A) + \det(B)], \\
 &\quad - g(A, B)[\det(C) + \det(D)],
 \end{aligned} \tag{B.0.5}$$

utilizando una vez más la propiedad (3.1.8) tenemos que

$$\begin{aligned}
 g(A, B)g(C, D) &= \det(AC + BD) + \det(AD + BC) + g(AC + BD, AD + BC) \\
 &\quad - \det(C + D)[\det(A) + \det(B)] - g(A, B)[\det(C) + \det(D)],
 \end{aligned} \tag{B.0.6}$$

además de las propiedades (3.1.5), (3.1.6) y (3.1.9) podemos escribir

$$\begin{aligned}
 g(AC + BD, AD + BC) &= g(AC, AD) + g(AC, BC) + g(BD, AD) + g(BD, BC), \\
 &= \det(A)g(C, D) + \det(C)g(A, B) + \det(D)g(A, B) + \det(B)g(C, D), \\
 &= g(A, B)[\det(C) + \det(D)] + g(C, D)[\det(A) + \det(B)],
 \end{aligned} \tag{B.0.7}$$

de esto

$$\begin{aligned}
 g(A, B)g(C, D) &= \det(AC + BD) + \det(AD + BC) + \\
 &\quad + \cancel{g(A, B)[\det(C) + \det(D)]} + g(C, D)[\det(A) + \det(B)], \\
 &\quad - \det(C + D)[\det(A) + \det(B)] - \cancel{g(A, B)[\det(C) + \det(D)]}, \\
 &= \det(AC + BD) + \det(AD + BC) + \\
 &\quad + [\det(A) + \det(B)][g(C, D) - \det(C + D)],
 \end{aligned} \tag{B.0.8}$$

donde una vez más utilizamos (3.1.8) para obtener

$$\begin{aligned} g(A, B)g(C, D) &= \det(AC + BD) + \det(AD + BC) - \\ &\quad - [\det(A) + \det(B)][\det(C) + \det(D)], \\ &= [\det(AC + BD) - \det(AC) - \det(BD)] + \\ &\quad + [\det(AD + BC) - \det(AD) - \det(BC)], \\ &= g(AC, BD) + g(AD + BC). \end{aligned} \tag{B.0.9}$$

Apéndice C

Enredamientos en un estado arbitrario de 3qubits

Consideremos el estado más general de tres qubits $|\psi\rangle = \sum_{kij} c_{kij} |kij\rangle_{S'SE}$, definiendo las matrices auxiliares $[C_0]_{ij} = a_{ij} = c_{0ij}$ y $[C_1]_{ij} = b_{ij} = c_{1ij}$. De este modo la matriz densidad del sistema estará dada por

$$\rho_{S'SE} = \begin{pmatrix} |a_{00}|^2 & a_{00}a_{01}^* & a_{00}a_{10}^* & a_{00}a_{11}^* & a_{00}b_{00}^* & a_{00}b_{01}^* & a_{00}b_{10}^* & a_{00}b_{11}^* \\ a_{01}a_{00}^* & |a_{01}|^2 & a_{01}a_{10}^* & a_{01}a_{11}^* & a_{01}b_{00}^* & a_{01}b_{01}^* & a_{01}b_{10}^* & a_{01}b_{11}^* \\ a_{10}a_{00}^* & a_{10}a_{01}^* & |a_{10}|^2 & a_{10}a_{11}^* & a_{10}b_{00}^* & a_{10}b_{01}^* & a_{10}b_{10}^* & a_{10}b_{11}^* \\ a_{11}a_{00}^* & a_{11}a_{01}^* & a_{11}a_{10}^* & |a_{11}|^2 & a_{11}b_{00}^* & a_{11}b_{01}^* & a_{11}b_{10}^* & a_{11}b_{11}^* \\ b_{00}a_{00}^* & b_{00}a_{01}^* & b_{00}a_{10}^* & b_{00}a_{11}^* & |b_{00}|^2 & b_{00}b_{01}^* & b_{00}b_{10}^* & b_{00}b_{11}^* \\ b_{01}a_{00}^* & b_{01}a_{01}^* & b_{01}a_{10}^* & b_{01}a_{11}^* & b_{01}b_{00}^* & |b_{01}|^2 & b_{01}b_{10}^* & b_{01}b_{11}^* \\ b_{10}a_{00}^* & b_{10}a_{01}^* & b_{10}a_{10}^* & b_{10}a_{11}^* & b_{10}b_{00}^* & b_{10}b_{01}^* & |b_{10}|^2 & b_{10}b_{11}^* \\ b_{11}a_{00}^* & b_{11}a_{01}^* & b_{11}a_{10}^* & b_{11}a_{11}^* & b_{11}b_{00}^* & b_{11}b_{01}^* & b_{11}b_{10}^* & |b_{11}|^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.0.1})$$

de donde podemos calcular de manera directa las matrices densidad reducidas y sus respectivos enredamientos como:

- $\rho_{S'}$:

La matriz reducida será

$$\begin{aligned} \rho_{S'} &= \text{Tr}_{SE}(\rho_{S'SE}), \\ &= \begin{pmatrix} |a_{00}|^2 + |a_{01}|^2 + |a_{10}|^2 + |a_{11}|^2 & a_{00}b_{00}^* + a_{01}b_{01}^* + a_{10}b_{10}^* + a_{11}b_{11}^* \\ a_{00}^*b_{00} + a_{01}^*b_{01} + a_{10}^*b_{10} + a_{11}^*b_{11} & |b_{00}|^2 + |b_{01}|^2 + |b_{10}|^2 + |b_{11}|^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.0.2}) \\ &= \begin{pmatrix} \text{Tr}(C_0 C_0^\dagger) & \text{Tr}(C_0 C_1^\dagger) \\ \text{Tr}(C_1 C_0^\dagger) & \text{Tr}(C_1 C_1^\dagger) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y el enredamiento en esta bipartición

$$C_{S'|SE}^2 = 4 \det \rho_{S'} = \text{Tr}(C_0 C_0^\dagger) \text{Tr}(C_1 C_1^\dagger) - \text{Tr}(C_0 C_1^\dagger) \text{Tr}(C_1 C_0^\dagger). \quad (\text{C.0.3})$$

- ρ_S :

La matriz densidad reducida será

$$\begin{aligned}
 \rho_S &= Tr_{S'E}(\rho_{S'SE}), \\
 &= \begin{pmatrix} |a_{00}|^2 + |a_{01}|^2 + |b_{00}|^2 + |b_{01}|^2 & a_{00}a_{10}^* + a_{01}b_{10}^* + b_{00}b_{10}^* + b_{01}b_{11}^* \\ a_{00}^*a_{10} + a_{01}^*b_{10} + b_{00}^*b_{10} + b_{01}^*b_{11} & |a_{10}|^2 + |a_{11}|^2 + |b_{10}|^2 + |b_{11}|^2 \end{pmatrix}, \quad (C.0.4) \\
 &= C_0C_0^\dagger + C_1C_1^\dagger,
 \end{aligned}$$

y el enredamiento en esta bipartición

$$C_{S|S'E}^2 = 4 \det \rho_S = 4 \det (C_0C_0^\dagger + C_1C_1^\dagger). \quad (C.0.5)$$

- ρ_E : La matriz densidad reducida será

$$\begin{aligned}
 \rho_E &= Tr_{S'S}(\rho_{S'SE}), \\
 &= \begin{pmatrix} |a_{00}|^2 + |a_{01}|^2 + |b_{00}|^2 + |b_{01}|^2 & a_{00}^*a_{10} + a_{01}^*b_{10} + b_{00}^*b_{10} + b_{01}^*b_{11} \\ a_{00}a_{10}^* + a_{01}b_{10}^* + b_{00}b_{10}^* + b_{01}b_{11}^* & |a_{10}|^2 + |a_{11}|^2 + |b_{10}|^2 + |b_{11}|^2 \end{pmatrix}, \quad (C.0.6) \\
 &= C_0^\dagger C_0 + C_1^\dagger C_1,
 \end{aligned}$$

y el enredamiento en esta bipartición

$$C_{E|S'S}^2 = 4 \det \rho_E = 4 \det (C_0^\dagger C_0 + C_1^\dagger C_1). \quad (C.0.7)$$

Apéndice D

3tangle en términos de los operadores de Kraus

El 3tangle en su forma general dada por las matrices auxiliares (3.1.2) está dado por

$$\tau = 4|g(C_0, C_1)^2 - 4 \det C_0 C_1|. \quad (\text{D.0.1})$$

Esta expresión es válida en todo momento, durante la evolución las matrices auxiliares tendrán la forma $C_0 = K_0 M_0(\delta, \gamma) + K_1 M_1(\delta, \gamma)$ y $C_1 = K_0 M_0(\beta, \alpha) + K_1 M_1(\beta, \alpha)$, donde

$$M_0(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}. \quad (\text{D.0.2})$$

En lo siguiente utilizaremos la notación

$$\begin{aligned} \mu_0^0 &= M_0(\delta, \gamma), & \mu_1^0 &= M_1(\delta, \gamma), \\ \mu_0^1 &= M_0(\beta, \alpha), & \mu_1^1 &= M_1(\beta, \alpha). \end{aligned} \quad (\text{D.0.3})$$

Es importante notar que $M_0(x, y) = M_1(x, y)\sigma_x$, donde σ_x es la matriz de Pauli $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, por lo que

$$\mu_0^i = \mu_1^i \sigma_x. \quad (\text{D.0.4})$$

Además $Tr(\mu_i^0)Tr(\mu_i^1) = Tr(\mu_i^0 \mu_i^1)$, por lo tanto

$$g(\mu_i^0, \mu_i^1) = 0. \quad (\text{D.0.5})$$

Evaluaremos primero el término $g(C_1, C_0)$. Utilizando la linealidad de la función g y la propiedad (3.1.9) seguida de (D.0.5) obtenemos

$$\begin{aligned} g(C_0, C_1) &= g(K_0 \mu_0^0 + K_1 \mu_1^0, K_0 \mu_0^1 + K_1 \mu_1^1), \\ &= g(K_0 \mu_0^0, K_0 \mu_0^1) + g(K_0 \mu_0^0, K_1 \mu_1^1) + g(K_1 \mu_1^0, K_0 \mu_0^1) + g(K_1 \mu_1^0, K_1 \mu_1^1), \\ &= \det K_0 g(\mu_0^0, \mu_0^1) + \det K_1 g(\mu_1^0, \mu_1^1) + g(K_0 \mu_0^0, K_1 \mu_1^1) + g(K_1 \mu_1^0, K_0 \mu_0^1), \\ &= 0 + 0 + g(K_0 \mu_0^0, K_1 \mu_1^1) + g(K_1 \mu_1^0, K_0 \mu_0^1). \end{aligned} \quad (\text{D.0.6})$$

Ahora usamos la propiedad (3.1.10) sobre el primer término y la identidad (D.0.4) sobre el segundo, además de la propiedad (3.1.9) y el hecho de que $\det \sigma_x = 1$ para obtener

$$\begin{aligned} g(C_0, C_1) &= [g(K_0, K_1)g(\mu_0^0, \mu_1^1) - g(K_0\mu_1^1, K_1\mu_0^0)] + g(K_1\mu_0^0\sigma_x, K_0\mu_1^1\sigma_x), \\ &= g(K_0, K_1)g(\mu_1^1, \mu_0^0) - 2g(K_0\mu_1^1, K_1\mu_0^0). \end{aligned} \quad (D.0.7)$$

Evaluaremos ahora el otro término de nuestro 3tangle i.e. $\det C_0C_1$, para esto utilizaremos la relación (3.1.8), además del hecho de que $\det(\mu_j^i) = 0$ por lo que tenemos

$$\begin{aligned} \det(C_0C_1) &= \det(C_0)\det(C_1) = \det(K_0\mu_0^0 + K_1\mu_1^0)\det(K_0\mu_0^1 + K_1\mu_1^1), \\ &= [g(K_0\mu_0^0, K_1\mu_1^0) - \det(K_0\mu_0^0) - \det(K_1\mu_1^0)] [g(K_0\mu_0^1, K_1\mu_1^1) - \det(K_0\mu_0^1) - \det(K_1\mu_1^1)], \\ &= g(K_0\mu_0^0, K_1\mu_1^0)g(K_0\mu_0^1, K_1\mu_1^1). \end{aligned} \quad (D.0.8)$$

Sustituyendo en la expresión del 3tangle, expandiendo y reagrupando, tenemos

$$\begin{aligned} \tau/4 &= |[g(C_0, C_1)]^2 - 4\det C_0C_1|, \\ &= |[g(K_0, K_1)g(\mu_0^0, \mu_1^1) - 2g(K_0\mu_1^1, K_1\mu_0^0)]^2 - 4g(K_0\mu_0^0, K_1\mu_1^0)g(K_0\mu_0^1, K_1\mu_1^1)|, \\ &= |[g(K_0, K_1)g(\mu_0^0, \mu_1^1)]^2 + \\ &\quad + 4\left\{ [g(K_0\mu_1^1, K_1\mu_0^0)]^2 - g(K_0, K_1)g(\mu_0^0, \mu_1^1)g(K_0\mu_1^1, K_1\mu_0^0) - g(K_0\mu_0^0, K_1\mu_1^0)g(K_0\mu_0^1, K_1\mu_1^1) \right\}|, \\ &= |[g(K_0, K_1)g(\mu_0^0, \mu_1^1)]^2 + \\ &\quad + 4\left\{ [g(K_0\mu_1^1, K_1\mu_0^0)] [g(K_0\mu_1^1, K_1\mu_0^0) - g(K_0, K_1)g(\mu_0^0, \mu_1^1)] - g(K_0\mu_0^0, K_1\mu_1^0)g(K_0\mu_0^1, K_1\mu_1^1) \right\}|. \end{aligned} \quad (D.0.9)$$

A continuación usamos la propiedad (3.1.10), seguida de la propiedad (3.1.9) y (D.0.4) para obtener

$$\begin{aligned} \tau/4 &= |[g(K_0, K_1)g(\mu_0^0, \mu_1^1)]^2 - 4\left\{ g(K_0\mu_1^1, K_1\mu_0^0)g(K_0\mu_0^0, K_1\mu_1^1) + g(K_0\mu_0^0, K_1\mu_1^0)g(K_0\mu_0^1, K_1\mu_1^1) \right\}|, \\ &= |[g(K_0, K_1)g(\mu_0^0, \mu_1^1)]^2 + 4\left\{ g(K_0\mu_0^1, K_1\mu_1^0)g(K_0\mu_0^0, K_1\mu_1^1) - g(K_0\mu_0^0, K_1\mu_1^0)g(K_0\mu_0^1, K_1\mu_1^1) \right\}| \end{aligned} \quad (D.0.10)$$

En el caso particular en el que las matrices A, B, C y D tienen las formas

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & 0 \\ a_{10} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b_{01} \\ 0 & b_{11} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & c_{01} \\ 0 & c_{11} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_{00} & 0 \\ d_{10} & 0 \end{pmatrix}, \quad (D.0.11)$$

y utilizando la representación matricial de la función g

$$g(A, B) = a_{00}b_{11} + a_{11}b_{00} - a_{01}b_{10} - a_{10}b_{01}, \quad (D.0.12)$$

podemos evaluar

$$\begin{aligned} g(A, B)g(C, D) - g(A, C)g(B, D) &= (a_{00}b_{11} - a_{10}b_{01})(d_{00}c_{11} - d_{10}c_{01}) - \\ &\quad - (a_{00}c_{11} - a_{10}c_{01})(d_{00}b_{11} - d_{10}b_{01}), \\ &= (a_{00}d_{10} - a_{10}d_{00})(c_{11}b_{01} - b_{11}c_{01}), \\ &= g(A, D\sigma_x)g(C, B\sigma_x). \end{aligned}$$

Así, el término entre corchetes en la ecuación (D.0.11), donde $A = K_0\mu_0^0$, $B = K_1\mu_1^1$, $C = K_1\mu_1^0$ y $D = K_0\mu_0^1$, puede ser reescrito como

$$\begin{aligned}
 g(K_0\mu_0^0, K_1\mu_1^1)g(K_1\mu_1^0, K_0\mu_0^1) - g(K_0\mu_0^0, K_1\mu_1^0)g(K_0\mu_0^1, K_1\mu_1^1) &= g(K_0\mu_0^0, K_0\mu_0^1\sigma_x)g(K_1\mu_1^0, K_1\mu_1^1\sigma_x), \\
 &= [\det(K_0)g(\mu_0^0, \mu_1^1)] [\det(K_1)g(\mu_0^0\sigma_x, \mu_1^1\sigma_x)], \\
 &= -\det(K_0K_1)[g(\mu_0^0, \mu_1^1)]^2.
 \end{aligned}
 \tag{D.0.13}$$

Sustituyendo en nuestra expresión del 3tangle tendremos entonces

$$\begin{aligned}
 \tau &= 4|[g(K_0, K_1)g(\mu_0^0, \mu_1^1)]^2 - 4\det(K_0K_1)[g(\mu_0^0, \mu_1^1)]^2|, \\
 &= 4|g(\mu_0^0, \mu_1^1)|^2|g^2(K_0, K_1) - 4\det(K_0K_1)|, \\
 &= 4|\alpha\delta - \gamma\beta|^2|g^2(K_0, K_1) - 4\det(K_0K_1)|, \\
 &= \varepsilon_0^2|g^2(K_0, K_1) - 4\det(K_0K_1)|.
 \end{aligned}
 \tag{D.0.14}$$

Bibliografía

- [1] A. EINSTEIN, B. PODOLSKY AND N. ROSEN , *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*, Phys. Rev. 47 777 (1935).
- [2] C. H. BENNETT, H. BERNSTEIN, S. POPESCU AND B. SCHU-MACHER, (1996). *Concentrating partial entanglement by local operations*. Phys. Rev. A 53, 2046 (1996).
- [3] MARTIN B. PLENIO AND SHASHANK VIRMANI.(2007). *An Introduction to entanglement measures* Quant.Inf.Comput. 7 (2007) 1-51.
- [4] LEANDRO AOLITA AND FERNANDO DE MELO AND LUIZ DAVIDOVICH. (2015). *Open-system dynamics of entanglement*. Reports on Progress in physics, 78(4), 042001.
- [5] VALERIE COFFMAN, JOYDIP KUNDU, AND WILLIAM K. WOOTTERS. (2000). *Distributed entanglement*. Phys. Rev. A. 61, 052306.
- [6] W. DÜR, G. VIDAL, AND J. I. CIRAC. (2000). *Three qubits can be entangled in two inequivalent ways*. Phys. Rev. A 62, 062314.
- [7] T. YU AND J. H. EBERLY, *Finite-Time Disentanglement Via Spontaneous Emission*. Phys. Rev. Lett. 93, 140404 (2004).
- [8] T. YU AND J. H. EBERLY, *Quantum Open System Theory: Bipartite Aspects*. Phys. Rev. Lett. 97, 140403 (2006).
- [9] C. E. LOPEZ, G. ROMERO, F. LASTRA, E. SOLANO, AND J. C. RETAMAL, *Sudden Birth versus Sudden Death of Entanglement in Multipartite Systems*. Phys. Rev. Lett. 101, 080503 (2008).
- [10] M. A. NIELSEN AND I. L. CHUANG. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000.
- [11] C. DATTA, S. SAZIM, A. DAS, P. AGRAWAL, Eur. Phys. J. D 72 (9), 157 (2018).
- [12] A. DAS, C. DATTA, P. AGRAWAL, Phys. Lett. A 381, 3928 (2017).
- [13] M.-J. ZHAO, T.-G. ZHANG, X. LI-JOST AND S.- M. FEI, Phys. Rev. A 87, 012316 (2013).
- [14] N. BRUNNER, J. SHARAM, T. VERTESI, Phys. Rev. Lett. 108, 110501 (2012).
- [15] YAN-KIU BAI, MING-YONG YE AND Z. D. WANG, *Entanglement monogamy and entanglement evolution in multipartite systems*. PHYSICAL REVIEW A 80, 044301 (2009).

- [16] G. H. AGUILAR, A. VALDÉS-HERNÁNDEZ, L. DAVIDOVICH, S. P. WALBORN, AND P. H. SOUTO RIBEIRO, *Experimental Entanglement Redistribution under Decoherence Channels*. PRL 113, 240501 (2014).
- [17] G. H. AGUILAR, O. JIMÉNEZ FARÍAS, A. VALDÉS-HERNÁNDEZ, P. H. SOUTO RIBEIRO, L. DAVIDOVICH, AND S. P. WALBORN, *Flow of quantum correlations from a two-qubit system to its environment*. Rev. A 89, 022339 (2014).
- [18] TING YU AND H. EBERLY, *Sudden Death of entanglement*, Science Vol 323, Issue 5914.
- [19] THOMAS KONRAD, FERNANDO DE MELO, MARKUS TIERSCH, CHRISTIAN KASZTELAN, ADRIANO ARAGAO, AND ANDREAS BUCHLEINTNER. *Evolution equation for quantum entanglement*, Nature Physics volume 4(2008).
- [20] O. JIMÉNEZ FARÍAS, C. LOMBARD LATUNE, S. P. WALBORN, L. DAVIDOVICH, P. H. SOUTO RIBEIRO, *Determining the dynamics of entanglement*. Science 1171544 (2009).
- [21] K. KRAUS, 1970, *General State Changes in Quantum Theory*, Annals of Physics volume 64, Issue 2.
- [22] K. KRAUS, *States, Effects and Operations: Fundamental Notions of Quantum Theory*, Springer Verlag (1983).
- [23] WILLIAM K. WOOTTERS. (1997). *Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits* PhysRevLett.80.2245.
- [24] PRANAW RUNGTA, V. BUŽEK, CARLTON M. CAVES, M. HILLERY, AND G. J. MILBURN (2001). *Universal state inversion and concurrence in arbitrary dimensions*. Phys. Rev. A 64, 042315.
- [25] ANDREA VALDÉS-HERNANDEZ, VÍCTOR H. T. BRAUER AND F. SANTIAGO ZAMORA, *Guaranteed emergence of genuine entanglement in 3-qubit evolving systems*, Eur. Phys. J. D (2019) 73: 245.
- [26] F. VERSTRAETE, J. DEHAENE, B. DE MOOR, AND H. VERSCHELDE, *Four qubits can be entangled in nine different ways*, Phys. Rev. A 052112 (2002).
- [27] ADAM BECKER, (2018). *What is real?*. New York: Basic Books, 9781541698970.
- [28] J. S. BELL, *Speakable and Unspeakeable in Quantum Mechanics*. Cambridge University Press. (1988). ISBN 978-0-521-36869-8.
- [29] W. BRENDL, JÜRGEN GISIN, B. HERZOG, T ZBINDEN, HUGO GISIN, NICOLAS. (1997). *Experimental Demonstration of Quantum Correlations Over More Than 10 km*. Physical Review A. 57. 10.1103/PhysRevA.57.3229.
- [30] ALAIN ASPECT, JEAN DALIBARD, AND GÉRARD ROGER. (1982). *Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers*, Phys. Rev. Lett. 49, 1804.
- [31] SALART, D BAAS, A HOUWELINGEN, JEROEN GISIN, NICOLAS ZBINDEN, HUGO. (2008). *Spacelike Separation in a Bell Test Assuming Gravitationally Induced Collapses*. Physical review letters. 100. 220404. 10.1103/PhysRevLett.100.220404.

- [32] JOHANNES HANDSTEINER, ANDREW S. FRIEDMAN, DOMINIK RAUCH, JASON GALLICCHIO, BO LIU, HANNES HOSP, JOHANNES KOFLER, DAVID BRICHER, MATTHIAS FINK, CALVIN LEUNG, ANTHONY MARK, HIEN T. NGUYEN, ISABELLA SANDERS, FABIAN STEINLECHNER, RUPERT URSIN, SÖREN WENGEROWSKY, ALAN H. GUTH, DAVID I. KAISER, THOMAS SCHEIDL, AND ANTON ZEILINGER. (2017). *osmic Bell Test: Measurement Settings from Milky Way Stars*. Phys. Rev. Lett. 118, 060401.
- [33] THE BIG BELL TEST COLLABORATION, (2018). *Challenging local realism with human choices*. Nature 557, 212–216.
- [34] CHARLES H. BENNETT, DAVID P. DIVINCENZO, JOHN A. SMOLIN, AND WILLIAM K. WOOTTERS. (1996). *Mixed-state entanglement and quantum error correction*. Phys. Rev. A 54, 3824.
- [35] SCOTT HILL AND WILLIAM K. WOOTTERS. (1997). *Entanglement of a Pair of Quantum Bits*. PhysRevLett.78.5022.
- [36] CONSTANTINO TSALLIS. (1998). *Possible Generalization of Boltzman-Gibb Statistics*. J Stat Phys (1988).
- [37] TOBIAS J. OSBORNE AND FRANK VERSTRAETE.(2006).*General Monogamy Inequality for Bipartite Qubit Entanglement*. PRL 96, 220503.
- [38] CHARLES H. BENNETT, SANDU POPESCU, DANIEL ROHRLICH, JOHN A. SMOLIN AND ASHISH V. THAPLIYAL. (1999). *Exact and asymptotic measures of multipartite pure-state entanglement*. Phys. Rev. A 63, 012307.
- [39] DANIEL M. GREENBERGER, MICHAEL A. HORNE AND ANTON ZEILINGER, *Going beyond Bell's Theorem* (1989). 10.1007/978 – 94 – 017 – 0849 – 4₁₀.
- [40] INGEMAR BENGTTSSON, KAROL ZYCKOWSKI, 2016, *A brief introduction to multipartite entanglement*, arxiv:1612.07747.
- [41] A. ZEILINGER, M. A. HORNE, AND D. M. GREENBERGER, NASA Conf. Publ. No. 3135 (National Aeronautics and Space Administration, Code NTT, Washington, DC, 1997).
- [42] JÜRGEN AUDRETSCH. *Entangled Systems*. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA (2005)
- [43] A. SALLES, F. DE MELO, M. P. ALMEIDA, M. HOR-MEYLL, S. P. WALBORN, P. H. SOUTO RIBEIRO, Y L. DAVIDOVICH. *Experimental investigation of the dynamics of entanglement: Sudden death, complementarity, and continuous monitoring of the environment*. Phys. Rev. A 78, 022322, (2008)
- [44] W. H. ZUREK, *Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse?*, Phys. Rev. D. 24 1516.
- [45] M. P. ALMEIDA, F. DE MELO, M. HOR-MEYLL, A. SALLES, S. P. WALBORN, P.H. SOUTO RIBEIRO, L. DAVIDOVICH, *Environment-Induced Sudden Death of Entanglement*, Science Vol 316, Issue 5824.

- [46] A. ACÍN, A. ANDRIANOV, L. COSTA, E. JANÉ, J. I. LATORRE, AND R. TARRACH, *Generalized Schmidt Decomposition and Classification of Three-Quantum-Bit States*, Phys. Rev. Lett. 85, 1560 (2000).
- [47] J.-L. BRYLINSKI, *Algebraic measures of entanglement, Chapter I in Mathematics of Quantum Computation*, Chapman and Hall/CRC, 2002, pp. 3-23.
- [48] A. CAYLEY. *On the theory of linear transformations*. Camb. Math. J., 4:193, 1845.