



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Una prueba del Teorema de la Cota Superior

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Félix Almendra Hernández

TUTOR

Omar Antolín Camarena





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Notación	ii
Introducción	iv
1 El teorema en politopos convexos	1
1.1 Politopos convexos	1
1.2 El f -vector y el h -vector	6
1.3 Politopos cíclicos	10
1.4 Escalonabilidad y colapsos	12
2 El teorema en triangulaciones de esferas	18
2.1 Triangulaciones	18
2.2 El anillo de Stanley-Reisner	22
2.3 Funciones de Hilbert	24
2.4 Anillos de Cohen-Macaulay	29
2.5 Homología en complejos de Cohen-Macaulay	32
Anotaciones	34
Conclusiones	36
A Álgebra multilineal	38
B Homología	41
C Conjuntos parcialmente ordenados	44
Referencias	49

Notación

\mathbb{R}	números reales 1
$C(n, d)$	politopo cíclico d -dimensional con n vértices 1, 10
$[x, y]$	segmento de recta que une x a $y \in \mathbb{R}^d$ 1
$\text{conv}(A)$	casco convexo de A 1
$\langle x, a \rangle$	producto interior euclidiano de x y a 2
$\text{ext}(K)$	conjunto de los puntos extremos de K 2
$\mathcal{F}(K)$	conjunto de las caras de K 2
$\text{exp}(K)$	conjunto de los puntos expuestos de K 2
$\text{aff}(A)$	espacio afín generado por el conjunto A 3
f_i	i -ésima entrada del f -vector 6
h_k	k -ésima entrada del h -vector 8
\tilde{h}_i	suma de las entradas del h -vector del 0 al i 9
Δ	complejo simplicial 12
$\dim(\Delta)$	dimensión de Δ (cuando Δ es complejo simplicial) 12
Δ_P	complejo de frontera del politopo P 12
$[n]$	números enteros del 1 al n 13
$\bigwedge V$	álgebra exterior del espacio vectorial V 13
$\bigwedge^s V$	s -ésima potencia exterior del espacio vectorial V 13
$\overline{F_j}$	conjunto potencia de F_j 14
$[F_1(\Delta) : F_2(\Delta)]$	caras de Δ contenidas entre $F_1(\Delta)$ y $F_2(\Delta)$ 15
$ \Delta $	realización geométrica del complejo simplicial Δ 19
$lk(F)$	link de la cara $F \in \Delta$ 19
$\tilde{\chi}(\tau)$	característica reducida de Euler 20
$\mathbb{k}[\mathbf{x}]$	anillo de polinomios en n variables x_1, \dots, x_n con coeficientes en \mathbb{k} 22
I_Δ	ideal de Stanley-Reisner de Δ 23
A_Δ	anillo de Stanley-Reisner de Δ 23
$\dim_{\mathbb{k}}(V)$	dimensión del \mathbb{k} -espacio vectorial V 24
$P(M, t)$	serie de Poincaré de M 24
$\mathbb{Z}[[t]]$	anillo de series formales de potencias con coeficientes en \mathbb{Z} 24
$\text{ht}(I)$	altura del ideal I 25
$\dim(R)$	dimensión de Krull de R (cuando R es un anillo) 25

$*\dim(R)$	dimensión homogénea de Krull 26
$*\text{ht}(I)$	altura homogénea del ideal I 26
I^*	ideal generado por los elementos homogéneos de I 26
$\text{supp}(\mathbf{a})$	entradas distintas de cero en $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^d$ 26
$H(M, \mathbf{x})$	serie de Hilbert \mathbb{N}^n -graduada de M 26
$H(M, t)$	serie de Hilbert de M 26
$\text{grade}(I, R)$	grado de I en R 30
$\text{depth}(R)$	profundidad del anillo local R 30
$\text{Spec}(R)$	espectro del anillo R 30
$R_{\mathfrak{p}}$	localización del anillo R en \mathfrak{p} 30
$\text{Ass}(R)$	conjunto de ideales primos asociados en R 30
$V \otimes W$	producto tensorial de V y W 38
$T^k(V)$	k -ésima potencia tensorial de V 39
$T(V)$	álgebra tensorial de V 39
$H_i(C)$	i -ésimo grupo de homología de C 41
$\widetilde{H}_i(C)$	i -ésimo grupo de homología reducida de C 41
$H_i(X, Y)$	i -ésimo grupo de homología de X relativo a Y 43

Introducción

El objetivo de este texto es presentar una prueba detallada en la medida de lo posible, del teorema de la cota superior para triangulaciones de esferas basándonos en su mayor parte en [22], que es un artículo publicado por Richard Stanley con la primer prueba de este. La mayor diferencia entre la prueba aquí presentada y la prueba de Stanley es que no utilizaremos el criterio de Hironaka para caracterizar cuándo un anillo de Stanley-Reisner es de Cohen-Macaulay. En su lugar, probaremos algunas proposiciones que nos ayudarán a concluir con la demostración del teorema.

Con lo anterior se tratará de exponer la creativa forma de conectar la combinatoria con resultados de otras áreas de las matemáticas, en este caso con álgebra conmutativa. Richard Stanley es sin duda un gran referente de lo anterior, lo cual se puede comprobar a través de sus diversos libros y artículos.

Esta tesis se dividirá en dos capítulos, dedicados a la prueba del teorema de la cota superior para politopos convexos (UBTP) y la prueba del teorema para triangulaciones de esferas (UBTS), respectivamente. Trataremos de desarrollar las pruebas de dichos teoremas lo mayor posible, considerando perspectivas de diferentes autores.

El UBTP fue conjeturado por Theodore Motzkin en 1957 y su demostración fue publicada por primera vez en 1970 por Peter McMullen [15], donde las partes fundamentales de la prueba recaen en el uso de las relaciones de Dehn-Sommerville y la escalonabilidad de los complejos de frontera de politopos convexos, resultado publicado por Bruggesser y Mani en [6]. Sin embargo, esta prueba no funciona en general para complejos simpliciales cuyas realizaciones geométricas son esferas. Por esta razón, se necesitarán otras técnicas para la demostración del UBTS.

Para la prueba del UBTS hará falta centrar nuestra atención en el estudio de los anillos de Stanley-Reisner, los cuales nos brindarán información esencial de los complejos simpliciales. Después de esto, se analizarán las propiedades adicionales que se obtienen al pedir que estos anillos sean de Cohen-Macaulay. Los anillos de Cohen-Macaulay suelen ser de gran utilidad en la teoría homológica de anillos conmutativos y como se verá en este texto, tienen varias aplicaciones interesantes en el área de la combinatoria algebraica.

Capítulo 1

El teorema en politopos convexos

Como se mencionó anteriormente, este capítulo está dedicado a la prueba del teorema de la cota superior para politopos convexos:

UBTP Sea $f_i(C(n, d))$ el número de caras i -dimensionales de un politopo cíclico con n vértices sobre la curva de momentos de \mathbb{R}^d . Si P es un politopo d -dimensional con n vértices cualquiera, entonces

$$f_i(P) \leq f_i(C(n, d)) \quad 0 \leq i \leq d - 1.$$

Para demostrar esto, utilizaremos las ideas y resultados de [15], [16] y [2]. La prueba del teorema se puede dividir esencialmente en 4 partes: observar que podemos considerar únicamente politopos simpliciales, establecer una equivalencia útil del teorema a través de las relaciones de Dehn-Sommerville, utilizar algunas propiedades de $C(n, d)$ para calcular $f_i(C(n, d))$ explícitamente y finalmente utilizar resultados que nos brinda la escalonabilidad del complejo de frontera de los politopos simpliciales. A cada una de estas partes se le dedicará una sección del capítulo.

1.1 Politopos convexos

El fin de esta sección será observar que dado un politopo convexo, siempre podemos perturbarlo moviendo sus vértices para obtener un politopo simplicial. Lo interesante de estas perturbaciones es que cada que hacemos una de ellas, el número de caras de cualquier dimensión del politopo convexo que se obtiene, aumenta o se queda igual respecto al número de caras del politopo anterior. Esto será de gran utilidad pues en politopos simpliciales contamos con relaciones que involucran el número de caras del politopo.

Las definiciones y los resultados presentados en la sección fueron consultados principalmente en [11]. Sin embargo, se tratará de explicar las pruebas con un poco más de detalle.

Definición 1.1.1. Un conjunto $K \subset \mathbb{R}^d$ se dice *convexo* si para todos $x, y \in K$ el conjunto $[x, y] = \{(1 - \lambda)x + \lambda y : \lambda \in [0, 1]\}$ se queda contenido en K .

Dado un subconjunto cualquiera $A \subset \mathbb{R}^d$ definimos el *casco convexo* de A por

$$\text{conv}(A) = \bigcap \left\{ K : K \subset \mathbb{R}^d \text{ es convexo y } A \subset K \right\}$$

Observemos que el casco convexo de cualquier subconjunto es convexo, pues intersección arbitraria de convexos es convexo. Más aún, $\text{conv}(A)$ es el conjunto convexo más chico (en términos de contención) que contiene a A . Si A es un conjunto finito $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ entonces

$$\text{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}.$$

Definición 1.1.2. Un *hiperplano afín* en \mathbb{R}^d es un conjunto de la forma $H = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, a \rangle = b\}$ para $a \in \mathbb{R}^d - \{0\}$ y $b \in \mathbb{R}$ fijos. Observemos que H siempre es un espacio afín de dimensión $d - 1$. Diremos que un punto $y \in \mathbb{R}^d$ está arriba (debajo) de H si $\langle y, a \rangle \geq b$ ($\langle y, a \rangle < b$).

Definición 1.1.3. Sea $K \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto convexo. Un *hiperplano de soporte* de K es un hiperplano afín $H = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, a \rangle = b\}$ tal que $\inf\{\langle x, a \rangle : x \in K\} = b$

Definición 1.1.4. Sea K un conjunto convexo de \mathbb{R}^d

- Un punto $x \in K$ es *punto extremo* de K si dados $y, z \in K$ y $\lambda \in (0, 1)$, la igualdad $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ implica que $x = y = z$. En otras palabras x es un punto extremo si no pertenece al interior relativo de ninguno de los segmentos que contiene K . Denotaremos por $\text{ext}(K)$ al conjunto de todos los puntos extremos de K .
- Un conjunto $F \subset K$ es una *cara* de K si $F = \emptyset$, $F = K$ o si existe un hiperplano de soporte H de K tal que $F = K \cap H$. El conjunto de todas las caras de K es denotado por $\mathcal{F}(K)$ y si F es una cara distinta de \emptyset y K se dice que F es una cara propia. Por convención, en algunos casos se dirá que \emptyset tiene dimensión -1 como cara de K .
- Un punto $x \in K$ es un *punto expuesto* de K si $\{x\}$ es una cara de K . El conjunto de los puntos expuestos de K es denotado por $\text{exp}(K)$.

Proposición 1.1.1. Sea $K \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto convexo.

1. Si $F \in \mathcal{F}(K)$ y $x \in F$, entonces $x \in \text{ext}(K)$ si y sólo si $x \in \text{ext}(F)$.
2. $\text{exp}(K) \subset \text{ext}(K)$.
3. Si K es compacto entonces $K = \text{conv}(\text{ext}(K))$. Más aún, si $K = \text{conv}(A)$ entonces $\text{ext}(K) \subset A$.

Demostración. 1. Dada $F \in \mathcal{F}(K)$, es claro que $\text{ext}(K) \cap F \subset \text{ext}(F)$, por lo que sólo resta probar que $\text{ext}(F) \subset \text{ext}(K)$. Sea $H = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, a \rangle = b\}$ un hiperplano de soporte de K tal que $F = K \cap H$. Tomemos $x \in \text{ext}(F)$ y $y, z \in K$, $\lambda \in (0, 1)$ tales que $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$. Sea $p_H := \langle \cdot, a \rangle$, como p_H es lineal tenemos que $b = p_H(x) = \lambda p_H(y) + (1 - \lambda)p_H(z) \geq \lambda b + (1 - \lambda)b = b$ de donde $p_H(y) = p_H(z) = b$, es decir, $y, z \in F$ y como $x \in \text{ext}(F)$ entonces $y = z = x$. Esto significa que $x \in \text{ext}(K)$ y por lo tanto $\text{ext}(F) \subset \text{ext}(K)$. Entonces $\text{ext}(F) = \text{ext}(K) \cap F$, lo cual prueba el enunciado de este inciso.

2. Sea $x \in \text{exp}(K)$ y H un hiperplano de soporte de K tal que $\{x\} = H \cap K$. Si tomamos $\lambda \in (0, 1)$ y $y, z \in K$ tales que $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ por el mismo argumento que en el inciso anterior, podemos ver que $b = p_H(x) = \lambda p_H(y) + (1 - \lambda)p_H(z)$ implica que $p_H(y) = p_H(z) = b$ y por tanto $y = z = x$. Así, $x \in \text{ext}(K)$.
3. Es fácil ver que la igualdad del enunciado es cierta si $\dim(\text{aff}(K)) = 0, 1$ (pues K es un punto o un segmento). Supongamos entonces que para cualquier convexo compacto A con $\dim(\text{aff}(A)) \leq m$ se cumple el enunciado y sea K un convexo compacto con $\dim(\text{aff}(K)) = m + 1$. Claramente $\text{conv}(\text{ext}(K)) \subset K$, por lo que resta probar que $K \subset \text{conv}(\text{ext}(K))$. Consideremos $x \in K$; es claro que si $x \in \text{ext}(K)$ entonces $x \in \text{conv}(\text{ext}(K))$. Por otro lado, si $x \in K - \text{ext}(K)$ consideremos $y \in \text{ext}(K)$ y $L = \text{aff}(\{x, y\})$ (como K es convexo compacto, K tiene caras de dimensión menor a $\dim(\text{aff}(K))$ y utilizando inducción se puede garantizar que $\text{ext}(K) \neq \emptyset$). Notemos que $L \cap K = [z, y]$ con $x = (1 - \lambda)y + \lambda z$ y $\lambda \in (0, 1]$; además z está en la frontera de K por lo que existe un hiperplano de soporte de K que contiene a z y por lo tanto existe una cara propia F de P tal que $z \in F$. Entonces, por la hipótesis de inducción en F (ya que $\dim(\text{aff}(F)) < \dim(\text{aff}(P)) = m + 1$) sabemos que $z \in \text{conv}(\text{ext}(F))$ y así, usando que $y \in \text{ext}(K)$, el inciso 1 ($\text{ext}(F) = \text{ext}(K) \cap F$) y que $x = (1 - \lambda)y + \lambda z$, concluimos que $x \in \text{conv}(\text{ext}(K))$.

Por último, probemos que si $K = \text{conv}(A)$ entonces $\text{ext}(K) \subset A$. Procedamos por contradicción y supongamos que $K = \text{conv}(A)$ y que existe $x \in \text{ext}(K) - A$. Como $x \in \text{ext}(K)$, se puede ver que $K - \{x\}$ es convexo y además contiene a A , por lo que $K = \text{conv}(A) \subseteq K - \{x\}$, lo cuál es una contradicción. \square

Definición 1.1.5. Un conjunto convexo compacto $P \subset \mathbb{R}^d$ es un *politopo convexo* si $\text{ext}(P)$ es finito. Equivalentemente, podemos definir un politopo convexo como el casco convexo de un número finito de puntos en \mathbb{R}^d , los cuales son el conjunto $\text{ext}(P)$.

La dimensión de un politopo P es la dimensión de $\text{aff}(P)$ en \mathbb{R}^n . Diremos que $P \subset \mathbb{R}^n$ es un d -politopo si P es un politopo de dimensión d y por comodidad supondremos siempre que $n = d$.

De la proposición 1.1.1 se sigue que para cada cara F de un politopo convexo P , $\text{ext}(F) = \text{ext}(P) \cap \text{aff}(F)$ y por tanto F es a su vez un politopo convexo. A las 0-caras les diremos *vértices*, a las 1-caras *aristas* y a las caras propias maximales les diremos *facetas*. Si P es un politopo convexo podemos notar que $\text{ext}(P) = \text{exp}(P)$ y $\text{vert}(P) = \text{exp}(P)$ donde $\text{vert}(P)$ es el conjunto de vértices de P .

Definición 1.1.6. Sean $x_0, x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}^n$ afinmente independientes. Diremos que

$$\text{conv}(\{x_0, x_1, \dots, x_d\}) = \left\{ \sum_{i=0}^d a_i x_i : \sum_{i=0}^d a_i = 1, a_i \geq 0 \right\}$$

es un d -simplejo (o simplejo de dimensión d) en \mathbb{R}^n .

Observemos que un d -simplejo es un politopo convexo por definición. Sin embargo no todos los politopos convexos son simplejos pues los vértices de un politopo pueden no ser afínmente independientes.

Definición 1.1.7. Sea $P \subset \mathbb{R}^d$ un d -politopo convexo. Diremos que P es un *politopo simplicial* si todas las k -caras propias de P son k -simplejos para todo $k \in \{0, \dots, d-1\}$.

La siguiente proposición define las perturbaciones que aplicaremos a un politopo convexo cualquiera para llevarlo a un politopo simplicial.

Proposición 1.1.2. Sea $P \subset \mathbb{R}^d$ un d -politopo convexo y $v \in \text{vert}(P)$. Existe un punto $w \in \mathbb{R}^d - P$ tal que $(v, w] = \{(1-t)v + tw : t \in (0, 1]\}$ no intersecta ninguno de los espacios afines $\text{aff}(F)$ generados por F una cara propia de P y v está en el interior de $\text{conv}(P \cup \{w\})$. Diremos que $Q = \text{conv}(P \cup \{w\})$ es el politopo obtenido de P al empujar v a w .

Demostración. Sea u un punto en el interior de P , $L = \{(1-\lambda)u + \lambda v : \lambda \geq 0\}$ el rayo que emana desde u y pasa por v y sea $\{H_F\}_{F \in \mathcal{F}(P)}$ un conjunto de hiperplanos afines tales que para cada $F \in \mathcal{F}(P)$, $F = P \cap H_F$. Luego, para cada $F \in \mathcal{F}(P)$ existe un $w_F \in L$ con $w_F = (1-\lambda_F)u + \lambda_F v$ de manera que $\lambda_F > 1$ y $(u, w_F]$ no intersecta a H_F por lo que si definimos $w = (1-\lambda)u + \lambda v$ con $\lambda = \inf\{\lambda_F : F \in \mathcal{F}(P)\}$ se puede ver que $(u, w]$ no intersecta ningún hiperplano H_F y por tanto no intersecta a ninguno de los espacios $\text{aff}(F)$ para F una cara de P .

Además, dado que u está en el interior de P , consideremos $R > 0$ tal que la bola de radio R en u , $B_R(u)$ se quede contenida en el interior de P . Entonces si $D = \|w - u\|$ y $d = \|w - v\|$, utilizando la convexidad de $\text{conv}(P \cup \{w\})$ tendremos que $B_r(v)$ con $r = \frac{d}{D}R$ se queda contenido en $\text{conv}(B_R(u) \cup \{w\}) \subset \text{conv}(P \cup \{w\})$, es decir, v está en el interior de $\text{conv}(P \cup \{w\})$. \square

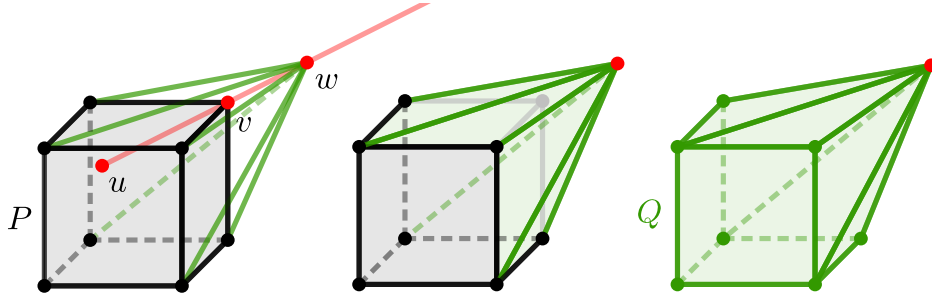


Figura 1.1: El vértice v se empuja a w utilizando el rayo que emana de u y pasa por v .

En lo que resta de la sección, cuando consideremos un politopo Q obtenido de P al empujar v a w se supondrá que w es un vértice construido como el de la prueba de la proposición anterior. En particular, w satisfará que no está contenido en ningún espacio afín generado por alguna de las caras de P .

Lema 1.1.1. Sea Q un politopo obtenido de P al empujar v a w . Sea F una cara de P que contiene a v y H_F un hiperplano de soporte de P tal que $F = H_F \cap P$, entonces w está debajo de H_F .

Demostración. Digamos que $H_F = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, a \rangle = b\}$ y sea $p_H := \langle \cdot, a \rangle$. Si $v \in F$ sabemos que $p_H(v) = b$ y por cómo fue construido w sabemos que existe u en el interior de P (y por tanto $p_H(u) > b$) tal que $v = (1-t)u + tw$ para algún $t \in (0, 1)$ por lo que $b = p_H(v) = (1-t)p_H(u) + tp_H(w)$ lo cual implica que $p_H(w) < b$, es decir, w está debajo de H_F . \square

Proposición 1.1.3. Sea $Q \subset \mathbb{R}^d$ el politopo obtenido de P al empujar v_d a w . Para todo $0 \leq k \leq d-1$ las k -caras de Q son

- (i) k -caras de P que no contienen a v_d , o
- (ii) envolventes convexas de la forma $\text{conv}(F_{k-1} \cup \{w\})$ donde F_{k-1} es una $(k-1)$ -cara de P que no contiene a v_d .

Demostración. Supongamos que $P = \text{conv}(\{v_0, v_1, \dots, v_d\})$. Entonces como v_d está en el interior de Q , tenemos que $Q = \text{conv}(P \cup \{w\}) = \text{conv}(\{v_0, \dots, v_{d-1}, w\})$. Sea G una k -cara de Q y H_G un hiperplano de soporte de Q tal que $G = H_G \cap Q$. Notemos que como $P \subset Q$, H_G también es un hiperplano de soporte de P .

Como $\text{ext}(G) = \text{ext}(Q) \cap \text{aff}(G)$ y G es un politopo, podemos decir que $G = \text{conv}(A)$ para algún $A \subset \{v_0, \dots, v_{d-1}, w\} = \text{ext}(Q)$. Si $w \notin A$ es claro que G es una k -cara de P y por el lema 1.1.1, G no contiene a v_d . Más aún, por cómo se toma w , todas las k -caras de P que no contienen a v son caras de Q .

Ahora, cuando $w \in A$ podemos ver que si $A = \{w\}$, F_{k-1} en el inciso (ii) será simpleme el conjunto vacío. En otro caso, definimos $G' = \text{conv}(A - \{w\})$ y veamos que como $G = H_G \cap Q$ entonces $G' = H_G \cap P$, por lo que G' es una cara de P . Además, dado que $\dim(\text{aff}(A)) = k$ y $w \notin \text{aff}(A - \{w\})$ (pues $w \notin P$), se sigue que $\dim(\text{aff}(A - \{w\})) = k-1$, es decir, $\dim(G') = k-1$ y por tanto G' es una $(k-1)$ -cara de P . Finalmente observemos que $G = \text{conv}(A) = \text{conv}(\text{conv}(A - \{w\}) \cup \{w\}) = \text{conv}(G' \cup \{w\})$ y por el lema 1.1.1, G' no contiene a v . \square

La proposición anterior nos dice que al obtener un politopo Q después de empujar un vértice v de P a un punto w , las caras de Q son de dos tipos: las que no contienen a w , que son descritas en el inciso (i), y las que contienen a w , descritas en el inciso (ii).

Teorema 1.1.1. Sea $P = \text{conv}(\{v_1, \dots, v_n\}) \subset \mathbb{R}^d$ un d -politopo convexo. Es posible obtener un politopo simplicial Q mediante una sucesión de movimientos de vértices a partir de P .

Demostración. En cualquier politopo todas las 0-caras y 1-caras son simplejos. Luego, consideremos un d -politopo convexo Q obtenido de P al empujar v a w . Por la proposición 1.1.3 toda 2-cara F_2 de Q que contiene a w es de la forma $\text{conv}(F_1 \cup \{w\})$ con F_1 una 1-cara de P (que es un 1-simplejo), es decir, F_2 es un 2-simplejo. Por el otro lado, si consideramos una 2-cara F de Q que no contiene a w , por la proposición 1.1.3, F se quedará como estaba antes

de empujar el vértice v . Es decir, si una 2-cara en P era un 2-simplejo, después de empujar un vértice de P , la cara seguirá siendo un 2-simplejo.

Lo anterior implica que si P_2 es un politopo obtenido al empujar exactamente una vez cada uno de los vértices de P , todas las 2-caras de P_2 serán 2-simplejos, pues cada una de las 2-caras de P_2 contiene al menos uno de los nuevos vértices que se obtuvieron al pasar de P a P_2 .

Sea $P_1 = P$ y para todo $j \in \{2, \dots, d-1\}$ sea P_j el politopo obtenido de P_{j-1} al empujar cada uno de sus vértices exactamente una vez. Supongamos que P_k cumple que para todo $i \leq k$, todas sus i -caras son i -simplejos. Si Q es un politopo obtenido de P_k al mover el vértice v_k a w_k , por la proposición 1.1.3 se sigue que para todo $i \leq k+1$ toda i -cara Q_i de Q que contenga a w_k , es de la forma $\text{conv}(F_{i-1} \cup \{w_k\})$ con F_{i-1} una $(i-1)$ -cara de P_k , de donde por la suposición acerca de las i -caras de P_k (para $i \leq k$), F_{i-1} es un $(i-1)$ -simplejo y entonces Q_i será un i -simplejo. En el caso de que Q_i sea una i -cara de Q que no contiene a w_k , la proposición 1.1.3 implica que Q_i era una cara de P_k , es decir, si Q_i era un i -simplejo en P_k lo seguirá siendo como cara de Q . Siguiendo el mismo razonamiento que en el caso de P_2 , concluimos que P_{k+1} es un d -politopo en el que todas sus i -caras para $i \leq k+1$ son i -simplejos.

Inductivamente concluimos que $\{P_1 = P, \dots, P_d\}$ es una sucesión de politopos en la que para todo $2 \leq k \leq d$, P_k se obtiene de P_{k-1} moviendo todos sus vértices una vez y además todas las i -caras de P_k (con $i \leq k$) son i -simplejos. Entonces P_d es un d -politopo simplicial que se obtuvo después de hacer $n(d-1)$ movimientos (n movimientos en cada paso de P_{k-1} a P_k) de vértices iniciando con el politopo P . \square

1.2 El f -vector y el h -vector

Definición 1.2.1. Dado un d -politopo P , para todo $i \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ denotaremos por $f_i(P)$ al número de caras de dimensión i de P . A veces se escribirá solamente f_i si es claro de qué politopo estamos hablando. Por convención consideraremos siempre $f_{-1} = 1$. A (f_0, \dots, f_{d-1}) se le conoce como f -vector asociado al politopo P . Claramente $f_0 = |\text{vert}(P)|$.

Proposición 1.2.1. Sea Q un politopo obtenido de P al empujar v a w . Entonces $f_0(Q) = f_0(P)$ y $f_k(Q) \geq f_k(P)$ para todo $k \in \{1, \dots, d-1\}$.

Demostración. Por la forma en la que se construye w es claro que $f_0(P) = f_0(Q)$. Para probar el resto de las desigualdades demostraremos que para cualquier $1 \leq k \leq d-1$ se puede definir una función inyectiva del conjunto de k -caras de P en el conjunto de k -caras de Q . Primero, notemos que por cómo se construye w en la proposición 1.1.2, todas las k -caras de P que no contienen a v son caras de Q (que claramente no contienen a w); por lo tanto, en estas caras podemos definir la función identidad.

Resta ver que a cada k -cara de P que contenga a v se le puede asignar una k -cara de Q de manera inyectiva, lo cual se prueba mediante los siguientes incisos (donde (b) asigna una k -cara de Q a una k -cara de P y (a) prueba la inyectividad de esta asignación sobre las k -caras de P que contienen a v):

- a) Si F_1, F_2 son caras de dimensión k de P que contienen ambas a v y H es una cara común de dimensión $k - 1$ de F_1 y F_2 que no contiene a v , entonces $F_1 = F_2$.
- b) Para toda k -cara F de P que contiene a v , existe una $(k - 1)$ -cara G_{k-1} de F que no contiene a v y $\text{conv}(G_{k-1} \cup \{w\})$ es una k -cara de Q .

Supongamos que F_1, F_2 son caras de dimensión k de P que contienen a v y H es una cara común de dimensión $k - 1$ de F_1 y F_2 que no contiene a v . Sea $K = F_1 \cap F_2$. Sabemos que la intersección de dos caras de un politopo convexo es una cara por lo que K es una cara de P , además si $H = \text{conv}(\{v_1, \dots, v_m\})$ tenemos que $F_i = \text{conv}(\{v_1, \dots, v_m, v\} \cup S_i)$ con S_i un subconjunto de vértices de P para $i = 1, 2$. Luego, dado que $\dim(H) = k - 1$ y $v \notin \text{aff}(\{v_1, \dots, v_m\})$ se sigue que $\dim(K) = k$ y por lo tanto $K = F_1 = F_2$ pues la única cara dimensión k de F_i es F_i mismo. Con esto queda probado (a).

Para demostrar (b) probaremos primero por inducción que para toda k -cara F de P que contiene a v , existe una $(k - 1)$ -cara de F que no contiene a v . Consideremos F una k -cara de P que contiene a v . Si $k = 1$ es claro que existe una 0-cara (vértice) de F distinto de v . Supongamos que esta primera parte del enunciado de (b) es cierta para toda $(k - 1)$ -cara que contiene a v . Sea entonces F una k -cara que contiene a v y G una $(k - 1)$ -cara de F ; por hipótesis de inducción existe una $(k - 2)$ -cara G' de G que no contiene a v y también por ser P un politopo, cumple con la propiedad diamante, por lo que G' está contenida en otra $(k - 1)$ -cara G^* de F distinta de G , por lo que si suponemos que $v \in G$, por (a) v no puede estar en G^* pues de lo contrario $G = G^*$ lo cual nos dice que siempre podemos encontrar una $(k - 1)$ -cara de F que no contenga a v .

Habiendo probado lo anterior, dada una k -cara F tal que $v \in F$ consideremos G_{k-1} una $(k - 1)$ -cara de F que no contiene a v . Sea F_1 una faceta de P que contiene a F y definamos $H_1 = \text{aff}(F_1)$. Sea H_2 un hiperplano de soporte de Q tal que $H_2 \cap Q = G_{k-1}$ (este existe ya que G_{k-1} es una cara de Q). Sea $H' = H_1 \cap H_2$, H' es un espacio afín de dimensión $k - 2$ que no contiene a w tal que $H' \cap P = G_{k-1} = H' \cap Q$ por lo que si $H = \text{aff}(H' \cup \{w\})$ entonces $H \cap Q = \text{conv}(G_{k-1} \cup \{w\})$ y además H es un hiperplano de soporte de Q pues w está abajo de H_1 por el lema 1.1.1 y está arriba de H_2 , lo cual nos dice que Q está arriba de H . Con esto concluimos que $\text{conv}(G_{k-1} \cup \{w\})$ es una cara de Q .

La prueba de este inciso concluye la existencia de una función inyectiva de k -caras de P a k -caras de Q , es decir $f_k(Q) \geq f_k(P)$. \square

De la proposición anterior y el teorema 1.1.1 podemos observar que dados $1 \leq j < d < n$, el máximo número posible de j -caras de un d -politopo con n vértices de ser alcanzado, será por un politopo simplicial, lo cual nos permite usar la siguiente herramienta fundamental en la prueba del teorema para politopos convexos.

Teorema 1.2.1. (Relaciones de Dehn-Sommerville) Si P es un d -politopo simplicial con f -vector $(f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$ y $-1 \leq k \leq d - 2$, entonces

$$\sum_{i=k}^{d-1} (-1)^i \binom{i+1}{k+1} f_i = (-1)^{d-1} f_k.$$

Recordemos que en la definición 1.2.1 se dijo que $f_{-1} = 1$ por convención.

Las relaciones de Dehn-Sommerville surgieron por primera vez en el trabajo de Max Dehn, quién en 1905 las probó para dimensión 5 en [9]. Algunas décadas después, D. M. Y. Sommerville demostró el caso general en [21].

Estas relaciones parten de la observación de que para politopos simpliciales se tienen ecuaciones extras en el f -vector al hacer doble conteo. Por ejemplo, para politopos simpliciales de dimensión 3 cada arista está en 2 facetas y cada faceta tiene 3 aristas. Esto nos dice que $2f_1 = 3f_2$.

Definición 1.2.2. Sea $(f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$ el f -vector asociado a un d -politopo P . Definimos el h -vector de P como

$$h_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{d-i}{k-i} f_{i-1}, \quad 0 \leq k \leq d$$

donde $f_{-1} = 1$.

La definición anterior es equivalente a la siguiente igualdad de polinomios

$$\sum_{i=0}^d f_{i-1} (x-1)^{d-i} = \sum_{i=0}^d h_i x^{d-i} \quad (*)$$

con la cual se puede probar que es equivalente definir el f -vector en términos del h -vector como

$$f_{k-1} = \sum_{i=0}^k \binom{d-i}{k-i} h_i, \quad 0 \leq k \leq d.$$

Ahora, si definimos las funciones

$$f(P, x) = \sum_{i=0}^d (-1)^i f_{i-1} x^i \quad \text{y} \quad g(P, x) = \sum_{i=0}^d h_i x^i,$$

y utilizamos (*) podemos probar que

$$g(P, x) = (1-x)^d f\left(P, \frac{x}{x-1}\right). \quad (**)$$

Además, observemos que para todo $k \in \{0, 1, \dots, d\}$,

$$[x^k]f(P, 1-x) = \sum_{i=k-1}^{d-1} \binom{i+1}{i+1-k} (-1)^{k+i+1} f_i \quad \text{y} \quad [x^k](-1)^d f(P, x) = (-1)^{d+k} f_{k-1}$$

donde $[x^k]H(x)$ denota el valor del coeficiente en x^k para cualquier polinomio H ; por lo que se concluye que las relaciones de Dehn-Sommerville son equivalentes a que $f(P, 1-x) = (-1)^d f(P, x)$.

Al usar (**) y suponiendo que $f(P, 1-x) = (-1)^d f(P, x)$, podemos ver que

$$\begin{aligned} x^d g\left(P, \frac{1}{x}\right) &= x^d \left(1 - \frac{1}{x}\right)^d f\left(P, \frac{1}{1-x}\right) = (x-1)^d f\left(P, 1 - \frac{x}{x-1}\right) \\ &= (1-x)^d f\left(P, \frac{x}{x-1}\right) = g(P, x). \end{aligned}$$

Por la definición de $g(P, x)$ y la igualdad $x^d g\left(P, \frac{1}{x}\right) = g(P, x)$ llegamos a que

$$\sum_{k=0}^d h_k x^k = g(P, x) = x^d g\left(P, \frac{1}{x}\right) = x^d \sum_{k=0}^d h_k x^{-k} = \sum_{k=0}^d h_k x^{d-k},$$

por lo que $h_k = h_{d-k}$ para todo $0 \leq k \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$. Más aún, observemos que si se cumplen estas últimas relaciones, podemos obtener todas las igualdades anteriores hasta llegar a que $f(P, 1-x) = (-1)^d f(P, x)$, lo cual ya probamos que es equivalente a las relaciones de Dehn-Sommerville. Por lo tanto la conclusión de todos estos cálculos realizados es el siguiente lema.

Lema 1.2.1. Las relaciones de Dehn-Sommerville son equivalentes a que para todo $0 \leq k \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$, $h_k = h_{d-k}$.

Una vez teniendo este resultado, podemos escribir las entradas del f -vector como combinaciones lineales de $\{h_0, \dots, h_{\lfloor d/2 \rfloor}\}$ utilizando coeficientes no negativos, lo cual nos lleva a querer encontrar la mejor cota para los elementos de $\{h_0, \dots, h_{\lfloor d/2 \rfloor}\}$ tal cual se hace en la primer prueba de este teorema por McMullen [15] en 1970. Sin embargo, en 1985 Alon y Kalai [2] consideraron los valores $\tilde{h}_i = \sum_{j=0}^i h_j$ en vez de las entradas h_i 's dando una solución más compacta para el UBTP.

En vista del lema 1.2.1 y de la definición que dimos del f -vector en términos del h -vector podemos escribir

$$f_{k-1} = \sum_{i=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \left[\binom{d-i}{d-k} + (1 - \delta_{i, d-\lfloor d/2 \rfloor}) \binom{i}{d-k} \right] h_i, \quad 0 \leq k \leq d,$$

(donde $\delta_{i, d-\lfloor d/2 \rfloor} = 1$ si $i = d - \lfloor d/2 \rfloor$ y 0 en otro caso). Utilizando las relaciones $h_i = \tilde{h}_i - \tilde{h}_{i-1}$ en esta última igualdad (por convención $\tilde{h}_{-1} = 0$) podemos escribir cada f_i como combinación lineal de elementos de $\{\tilde{h}_i : 0 \leq i \leq \lfloor d/2 \rfloor\}$ con coeficientes no negativos de la siguiente manera. Si d es impar tenemos que

$$\begin{aligned} f_{k-1} &= \sum_{i=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \left[\binom{d-i}{d-k} + \binom{i}{d-k} \right] h_i = \sum_{i=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \left[\binom{d-i}{d-k} + \binom{i}{d-k} \right] (\tilde{h}_i - \tilde{h}_{i-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor d/2 \rfloor - 1} \left[\binom{d-i}{d-k} + \binom{i}{d-k} - \binom{d-i-1}{d-k} - \binom{i+1}{d-k} \right] \tilde{h}_i \\ &\quad + \left[\binom{d-\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}{d-k} + \binom{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}{d-k} \right] \tilde{h}_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}. \end{aligned}$$

Además, para todo i tenemos (por la identidad de Pascal) que

$$\binom{i}{d-k} - \binom{i+1}{d-k} = -\binom{i}{d-k-1},$$

por lo que se sigue que

$$f_{k-1} = \sum_{i=0}^{\lfloor d/2 \rfloor - 1} \left[\binom{d-i-1}{d-k-1} - \binom{i}{d-k-1} \right] \tilde{h}_i + \left[\binom{d-\lfloor d/2 \rfloor}{d-k} + \binom{\lfloor d/2 \rfloor}{d-k} \right] \tilde{h}_{\lfloor d/2 \rfloor}.$$

Desarrollando de forma análoga podemos obtener que si d es par entonces

$$f_{k-1} = \sum_{i=0}^{(d/2)-1} \left[\binom{d-i-1}{d-k-1} - \binom{i}{d-k-1} \right] \tilde{h}_i + \binom{d/2}{d-k} \tilde{h}_{d/2} + \binom{d/2}{d-k} \tilde{h}_{(d/2)-1}.$$

Dada esta forma de escribir el número de caras, notemos que para dar una cota superior de f_k basta encontrar una cota superior para cada uno de los valores de $\{\tilde{h}_0, \dots, \tilde{h}_{\lfloor d/2 \rfloor}\}$.

1.3 Politopos cíclicos

A continuación analizaremos el politopo $C(n, d)$, que se menciona en el enunciado del UBTP.

Definición 1.3.1. Sea M la curva de momentos en \mathbb{R}^d definida de manera paramétrica por $M_d = \{(x, x^2, \dots, x^d) : x \in (-\infty, \infty)\}$. Un *politopo cíclico* $C(n, d)$ es el casco convexo de cualesquiera $n \geq d + 1$ puntos distintos de M_d .

Notemos que dado un hiperplano afín $H = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \hat{x}, \hat{a} \rangle = b\}$, el conjunto $H \cap M_d$ tiene cardinalidad igual al número de soluciones de la ecuación polinómica

$$\langle (x, x^2, \dots, x^d), (a_1, \dots, a_d) \rangle - b = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 x - b = 0,$$

que es igual al número de raíces reales de un polinomio de grado d , es decir, la cardinalidad de $H \cap M_d$ es menor o igual a d .

En general, para definir un politopo cíclico se puede considerar cualquier curva en \mathbb{R}^d tal que para cualquier hiperplano en \mathbb{R}^d , este no la intersekte en más de d puntos. Sin embargo, es conveniente usar M_d pues facilita los cálculos que se tienen hacer para probar algunas propiedades del politopo.

Sea $n > 0$ un entero tal que $n \geq d + 1$ y sean $\hat{V} = \{x_1 < \dots < x_n\}$ números reales. Definamos

$$V = \{(x_i, x_i^2, \dots, x_i^d) : 1 \leq i \leq n\} \subset M_d,$$

en lo que resta del texto se considerará $C(n, d) = \text{conv}(V)$.

Proposición 1.3.1. $C(n, d)$ es un politopo simplicial.

Demostración. Consideremos $W = \{(y_i, y_i^2, \dots, y_i^d)\}_{i=0}^d \subset V$. Notemos que W es afínmente independiente pues tenemos que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & y_0 & y_0^2 & \dots & y_0^d \\ 1 & y_1 & y_1^2 & \dots & y_1^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & y_d & y_d^2 & \dots & y_d^d \end{pmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq d} (y_j - y_i) \neq 0.$$

Donde el cálculo del determinante es conocido pues tenemos una matriz de Vandermonde. Entonces, como cualquier hiperplano intersecta a V en a lo más d puntos y subconjuntos de conjuntos afínmente independientes son afínmente independientes concluimos que el conjunto de vértices de cualquier cara de $C(n, d)$ es afínmente independiente y por lo tanto $C(n, d)$ es un politopo simplicial. \square

Proposición 1.3.2. Sea k un entero positivo tal que $2k \leq d$. Para cualquier subconjunto $\hat{V}_k \subset \hat{V} = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ con k elementos, $\text{conv}(\hat{V}_k)$ es una cara de $C(n, d)$.

Demostración. Supongamos que $\hat{V}_k = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ y consideremos un punto $y \in \mathbb{R}$ tal que $y < x_0$. Definimos el polinomio

$$P_k(x) = (x - y)^{d-2k} \prod_{i=1}^k (x - y_i)^2 = a_0 + a_1x + \dots + a_dx^d.$$

Notemos que $P_k(y_i) = 0$ para todo $y_i \in \hat{V}_k$ y $P_k(x) > 0$ para $x \in \hat{V} - \hat{V}_k$. Luego si $a = (a_1, a_2, \dots, a_d)$ y tomamos el hiperplano $H_k = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, a \rangle = -a_0\}$ podemos notar que $H_k \cap \hat{V} = \hat{V}_k$ y todo $x \in \hat{V} - \hat{V}_k$ está arriba de H_k por lo que H_k es un hiperplano de soporte de $C(n, d)$ tal que $H_k \cap C(n, d) = \text{conv}(\hat{V}_k)$, es decir, $\text{conv}(\hat{V}_k)$ es una cara de $C(n, d)$. \square

De la proposición anterior podemos concluir que

$$f_i(C(n, d)) = \binom{n}{i+1}, \quad 0 \leq i < \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor,$$

es decir, $C(n, d)$ maximiza el número de i -caras para $i < \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$. Luego, veamos que si $P = C(n, d)$, entonces los coeficientes de $f(P, x) = \sum_{i=0}^d (-1)^i f_{i-1} x^i$ y $(1-x)^n$ coinciden en los términos de orden menor o igual a $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ por lo que recordando que $g(P, x) = (1-x)^d f\left(P, \frac{x}{x-1}\right)$, tenemos que los coeficientes de $g(P, x)$ y de

$$(1-x)^d \left(1 - \frac{x}{x-1}\right)^n = (1-x)^{-(n-d)} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n-d+i-1}{i} x^i$$

también coinciden en los términos de orden menor o igual a $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$, de donde

$$h_i(C(n, d)) = \binom{n-d+i-1}{i} \quad \text{para } 0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor.$$

Contando con esta igualdad, McMullen demuestra por inducción sobre k que dado un politopo simplicial d -dimensional con n vértices y h -vector (h_0, h_1, \dots, h_d) , para todo $0 \leq i$ se cumple la desigualdad

$$\frac{h_{i+1}}{h_i} \leq \frac{\binom{n-d+i}{i+1}}{\binom{n-d+i-1}{i}},$$

lo cual implica que $h_i \leq \binom{n-d+i-1}{i}$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor\}$ y con esto concluye con la prueba del teorema para politopos convexos.

Sin embargo, como se mencionó antes, expondremos la forma en la que Alon y Kalai abordan la solución del problema. Haciendo las cuentas correspondientes tenemos que

$$\tilde{h}_i(C(n, d)) = \binom{n-d+i}{i} \quad 0 \leq i \leq \lfloor d/2 \rfloor$$

Por lo que probaremos que para todo politopo simplicial con n vértices y h -vector (h_0, \dots, h_d)

$$\tilde{h}_i \leq \binom{n-d+i}{i} \quad 0 \leq i \leq \lfloor d/2 \rfloor.$$

Probando lo anterior y haciendo uso de la forma en la que se escribe a f_i como combinación lineal de los elementos de $\{\tilde{h}_i : 0 \leq i \leq \lfloor d/2 \rfloor\}$ (con coeficientes no negativos) se puede concluir con la prueba del UBTP.

1.4 Escalonabilidad y colapsos

En esta última sección, se dará una exposición de la prueba de la cota superior de los elementos de $\{\tilde{h}_i : 0 \leq i \leq \lfloor d/2 \rfloor\}$, desarrollada en [2].

Definición 1.4.1. Sea V un conjunto finito. Un *complejo simplicial* Δ , es una familia de subconjuntos finitos de V llamados caras o simplejos, que cumplen que para todo $v \in V$, $\{v\} \in \Delta$ y que si $\sigma \in \Delta$ es una cara y $\tau \subset \sigma$ entonces $\tau \in \Delta$. Una cara $\sigma \in \Delta$ de cardinalidad $|\sigma| = i+1$ tiene *dimensión* i y se le llama i -cara de Δ . La dimensión $\dim(\Delta)$ de Δ es el máximo de las dimensiones de sus caras. Si todas las caras maximales (también llamadas *facetas*) de Δ tienen la misma cardinalidad $\dim(\Delta) + 1$, diremos que Δ es un complejo simplicial *puro*.

Notemos que Δ está completamente determinado por sus facetas dada la definición de complejo simplicial.

Ejemplo 1.4.1. Dado un politopo P , es podemos asociarle un complejo simplicial Δ_P donde las facetas de Δ_P son el conjunto de vértices de las facetas de P . Además, cuando P es simplicial, Δ_P es un complejo simplicial puro de dimensión $\dim(P) - 1$. Dicho complejo simplicial suele llamarse *complejo de frontera*, del politopo en cuestión.

Dado un complejo simplicial d -dimensional Δ definimos su f -vector $f = (f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$ donde f_i es el número de caras de dimensión i en Δ y por convención siempre se define $f_{-1} = 1$,

al igual que cuando de definió el f -vector de un politopo. Notemos que para un politopo simplicial, su f -vector coincide con el f -vector de su complejo de frontera. El h -vector de Δ se define respecto a f de la misma manera que en el que se definió para un politopo, por lo que todas las relaciones que teníamos entre el f -vector y el h -vector se siguen manteniendo a excepción de las relaciones de Dehn-Sommerville ya para que estas ecuaciones se cumplan se requieren condiciones adicionales sobre Δ como por ejemplo, que sea el complejo de frontera de un politopo simplicial.

El siguiente es un lema combinatorio que se utilizará en la prueba de la proposición 1.4.1. En caso de que no se tenga conocimiento de las propiedades que usamos del álgebra tensorial de un espacio vectorial, se puede revisar el apéndice A.

Lema 1.4.1. Sean $n > 1$ y $1 \leq s \leq m \leq n$. Para cada $1 \leq i \leq f$ sean $A_i, B_i \subset [n]$ tales que $|A_i| \leq s$, $m \leq |B_i|$ y $A_i \subset B_i$. Supongamos que $A_i \not\subset B_j$ si $i < j$. Entonces

$$f \leq \binom{n-m+s}{s}.$$

(Aquí, $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$).

Demostración. Primero observemos que dada una sucesión $S = \{(A_i, B_i)\}_{i \in [f]}$ en la que los A_i, B_i cumplen con las condiciones del lema, podemos tomarnos una nueva sucesión $S' = \{(A'_i, B_i)\}_{i \in [f]}$ tal que para todo $1 \leq i \leq f$, $A_i \subset A'_i$ y $|A'_i| = s$ (en donde A'_i se obtiene agregando cualesquiera elementos de B_i a A_i hasta que se llegue a un conjunto de cardinalidad s). Es claro que los A'_i, B_i de esta nueva sucesión cumplen con las condiciones del lema. Por tanto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que para todo $1 \leq i \leq f$, $|A_i| = s$.

Consideremos el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^{n-m+s}$ y su álgebra exterior $\bigwedge V$.

Sea $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ un conjunto de vectores en posición general, es decir, cualesquiera $n - m + s$ de estos vectores son linealmente independientes. Para todo $1 \leq i \leq f$ sean $w_i = \bigwedge_{j \in A_i} v_j$ y $\bar{w}_i = \bigwedge_{j \in [n] - B_i} v_j$. Observemos que para todo $i \in [f]$, $w_i, \bar{w}_i \in \bigwedge V$, y en particular $w_i \in \bigwedge^s V$ por la suposición de que $|A_i| = s$.

Recordemos que dados $x_1, \dots, x_k \in V$ tenemos que $x_1 \wedge \dots \wedge x_k \neq 0$ si y sólo si $\{x_1, \dots, x_k\}$ es un conjunto linealmente independiente. Luego, como $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ están en posición general y $A_i \cap ([n] - B_i) = \emptyset$, se sigue que para todo $1 \leq i \leq f$, $w_i \wedge \bar{w}_i \neq 0$. Y como para todo $i < j$, $A_i \cap ([n] - B_j) \neq \emptyset$, entonces $w_i \wedge \bar{w}_j = 0$.

Finalmente, utilizando lo anterior probemos que $\{w_1, \dots, w_f\} \subset \bigwedge^s V$ es un conjunto linealmente independiente, pues siendo así tendremos que $f \leq \dim_{\mathbb{R}} (\bigwedge^s V) = \binom{n-m+s}{s}$.

Supongamos que $\{w_1, \dots, w_f\}$ es linealmente dependiente, digamos que $\sum_{i \in I} c_i w_i = 0$ con $c_i \neq 0$ para todo $i \in I$ y sea $j = \max\{i \in I\}$. Por las observaciones hechas anteriormente tenemos que $0 = (\sum_{i \in I} c_i w_i) \wedge \bar{w}_j = c_j w_j \wedge \bar{w}_j$, y como $w_j \wedge \bar{w}_j \neq 0$ esto implicaría que $c_j = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\{w_1, \dots, w_f\}$ es un conjunto linealmente independiente, lo cual concluye la prueba del lema. \square

Definición 1.4.2. Sea Δ un complejo simplicial. Una cara $F \in \Delta$ se dice *libre* si está contenida en una única cara maximal $M \in \Delta$. La operación de eliminar de Δ todas las

caras que contienen a F (incluyendo F) es un *colapso elemental*. Si $|F| = f$ y $|M| = m$ decimos que es un (f, m) -*colapso elemental*. Un *proceso de colapso* en Δ es una sucesión $\Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \dots \supset \Delta_t$ de complejos simpliciales tales que para todo $1 \leq i \leq t$, Δ_i se obtiene de Δ_{i-1} por medio de un colapso elemental.

La siguiente proposición será fundamental en la prueba de las desigualdades que queremos para los elementos de $\{\tilde{h}_i : 0 \leq i \leq \lfloor d/2 \rfloor\}$.

Proposición 1.4.1. Sea Δ un complejo simplicial con n vértices y sean s, m enteros no negativos $s \leq m \leq n$. El número de (s', m') -colapsos elementales con $s' \leq s$ y $m \leq m'$ en cualquier proceso de colapso en Δ es a lo más $\binom{n-m+s}{s}$.

Demostración. Sea $\Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \dots \supset \Delta_t$ un proceso de colapso y sea $(L_i, M_i)_{i=1}^f$ la subsucesión de las parejas que inducen colapsos en la cadena y tales que L_i es una cara libre con cara maximal M_i y $|L_i| \leq s$, $m \leq |M_i|$. Observemos que $L_i \subset M_i$ y $L_i \not\subset M_j$ si $i < j$ por lo que por el lema 1.4.1 $f \leq \binom{n-m+s}{s}$. \square

Ahora, daremos una definición de escalonabilidad, la cual se puede definir de un par de formas equivalentes las cuales se pueden consultar en [7]. Esta propiedad es fundamental en esta prueba así como en la prueba de McMullen.

Definición 1.4.3. Un complejo simplicial puro Δ se dice *escalonable* si sus facetas pueden ser ordenadas de forma F_1, \dots, F_t , tal que para todo $1 \leq i \leq t$, el conjunto $\overline{F}_i - \bigcup_{j < i} \overline{F}_j$ tiene una única cara minimal (donde \overline{F}_j es el conjunto potencia de F_j y hablamos de minimalidad en el sentido de contención). A este elemento minimal le llamaremos la *restricción* de F_i y se denotará por $r(F_i)$. Por convención $r(F_1) = \emptyset$. El orden F_1, F_2, \dots, F_t se llama *orden de escalonamiento*.

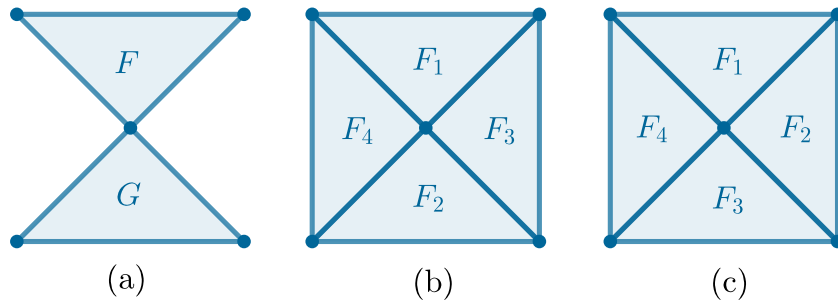


Figura 1.2: Complejos simpliciales escalonables y no escalonables

En la figura 1.2, (a) es un complejo simplicial no escalonable pues $\overline{F} - \overline{G}$ (o $\overline{G} - \overline{F}$) tiene dos elementos minimales. En (b) el orden de las facetas del complejo simplicial no es un orden de escalonamiento pues $\overline{F}_2 - \overline{F}_1$ tiene dos elementos minimales. Por otro lado, en (c) el orden de las facetas es un orden de escalonamiento donde $r(F_1) = \emptyset$, $r(F_2)$ y $r(F_3)$ son cada

uno vértices y $r(F_4)$ es la arista lateral izquierda del cuadrado.

Observemos que dado un complejo simplicial puro escalonable Δ , este se puede ver como una unión disjunta $\Delta = \bigsqcup_{i=1}^t [r(F_i) : F_i]$, donde para cualesquiera $F_1(\Delta), F_2(\Delta)$ caras de Δ con $F_1 \subseteq F_2$, $[F_1(\Delta) : F_2(\Delta)] = \{G \in \Delta : F_1(\Delta) \subseteq G \subseteq F_2(\Delta)\}$. Utilizando esta propiedad, en la siguiente proposición demostraremos que si Δ posee un orden de escalonamiento F_1, \dots, F_t entonces $h_i(\Delta) = |\{j : |r(F_j)| = i\}|$.

Vale la pena mencionar que el h -vector fue definido por vez primera para complejos simpliciales particionables. Un complejo simplicial Δ con facetas F_1, F_2, \dots, F_s , se dice *particionable* si es puro y para todo $1 \leq i \leq s$, existen $R_i \subseteq F_i$ de forma que $\Delta = \bigsqcup_{i=1}^s [R_i : F_i]$. Los complejos simpliciales escalonables son particionables como se notó anteriormente. A partir de una partición $\Delta = \bigsqcup_{i=1}^s [R_i : F_i]$ se puede observar que si $|R_j| = i$ entonces hay exactamente $\binom{d-i}{k-i}$ $(k-1)$ -caras contenidas en $[R_j : F_j]$ por lo que

$$f_{k-1} = \sum_{j=1}^s \binom{d-|R_j|}{k-|R_j|}.$$

Teniendo esta relación, se define el h -vector de un complejo simplicial particionable $(d-1)$ -dimensional Δ como la sucesión $h = (h_0, h_1, \dots, h_d)$ donde h_i es el número de partes en la partición que tienen tamaño i , es decir, $h_i = |\{j : |R_j| = i, 1 \leq j \leq s\}|$. Observemos que como las entradas del f vector se pueden escribir como combinación lineal de las entradas del h vector de la siguiente forma

$$f_{k-1} = \sum_{i=0}^k \binom{d-i}{k-i} h_i,$$

el h -vector queda completamente determinado por el f -vector y por lo tanto podemos definir h independientemente de la partición que se considere. Podemos notar al considerar los polinomios

$$f(x) = f_{d-1} + f_{d-2}x + \dots + f_0x^{d-1} + f_{-1}x^d \quad \text{y}$$

$$h(x) = h_d + h_{d-1}x + \dots + h_1x^{d-1} + h_0x^d,$$

que se satisface la igualdad $f(x) = h(x+1)$. Esto motivó a dar la definición del h -vector para cualquier complejo simplicial como la sucesión de enteros (h_0, h_1, \dots, h_d) tal que se satisface la igualdad polinomial mencionada. En la actualidad algunos autores definen el h -vector simplemente por la forma de escribir las entradas de h como combinación lineal de entradas del f -vector, tal y como lo hicimos en la sección 1.2. La siguiente proposición nos dice que la definición dada en la sección 1.2 implica la discutida previamente cuando Δ es escalonable, sin embargo la misma prueba sirve para el caso en el que Δ es particionable pues es la única propiedad utilizada en la demostración.

Proposición 1.4.2. Sea Δ un complejo simplicial puro $(d-1)$ -dimensional y escalonable con orden de escalonamiento F_1, \dots, F_t . Entonces se tiene que $h_i(\Delta) = |\{j : |r(F_j)| = i\}|$.

Demostración. Sea $r_i = |\{j : |r(F_j)| = i\}|$ para todo $0 \leq i \leq d-1$, y sea

$$H(x) = \sum_{i=0}^d h_i x^{d-i} = \sum_{i=0}^d f_{i-1} (x-1)^{d-i} = \sum_{F \in \mathcal{F}(\Delta)} (x-1)^{d-|F|}.$$

Dado que $\mathcal{F}(\Delta) = \bigsqcup_{i=1}^t [r(F_i) : F_i]$, podemos escribir

$$H(x) = \sum_{i=1}^t \left(\sum_{F \in [r(F_i) : F_i]} (x-1)^{d-|F|} \right),$$

pero observemos que el número de caras $F \in [r(F_i) : F_i]$ con $|F| = |r(F_i)| + k$ (con $0 \leq k \leq d - |r(F_i)|$ fijo) es igual a $\binom{d - |r(F_i)|}{k}$ por lo que

$$\begin{aligned} H(x) &= \sum_{i=0}^t \left(\sum_{j=0}^{d-|r(F_i)|} \binom{d-|r(F_i)|}{j} (x-1)^{d-|r(F_i)|-j} \right) \\ &= \sum_{i=0}^d r_i \left(\sum_{j=0}^{d-i} \binom{d-i}{j} (x-1)^{d-i-j} \right), \end{aligned}$$

por lo que utilizando la expansión del binomio concluimos que $H(x) = \sum_{i=0}^d r_i x^{d-i}$ y así $h_i = r_i$ para todo $0 \leq i \leq d$. \square

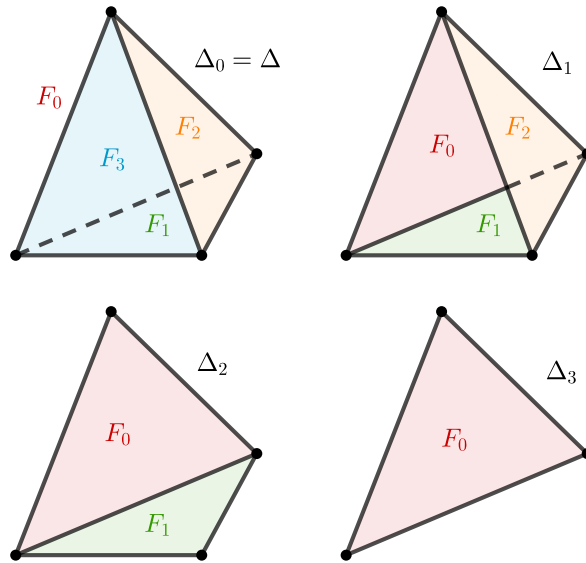


Figura 1.3: Proceso de colapso en el tetraedro dado por el orden de escalonamiento F_0, F_1, F_2, F_3 .

Finalmente, consideremos un politopo simplicial P y su complejo de frontera Δ , el cual se sabe que es escalonable por un resultado de Bruggesser y Mani en [6]. Sea F_0, F_1, \dots, F_t un orden de escalonamiento en las facetas de Δ y para todo $0 \leq i < t$ definamos $\Delta_i = \bigcup_{j=0}^{t-i} \overline{F}_j$. Observemos que $r(F_i)$ es libre en $\Delta_{t-i} = \bigcup_{j=0}^i \overline{F}_j$ (pues $r(F_i)$ sólo está contenida en la cara maximal F_i de Δ_{t-i}) y al hacer el colapso elemental asociado al par $(r(F_i), F_i)$ se obtiene Δ_{t-i+1} , por lo que de esta forma obtenemos un proceso de colapso $\Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \dots \supset \Delta_t$ (un ejemplo de lo anterior se puede ver en la figura 1.3). Luego, observemos que por la proposición 1.4.2 $\tilde{h}_i = \sum_{j=0}^i r_j$ es el número de (i', d) -colapsos en el proceso de colapso, con $i' \leq i$, por lo que gracias a la proposición 1.4.1 concluimos que $\tilde{h}_i \leq \binom{n-d+i}{i}$ y por lo tanto queda demostrado el UBTP.

Capítulo 2

El teorema en triangulaciones de esferas

Este capítulo consiste en la prueba del teorema de la cota superior para triangulaciones de esferas.

UBTS Sea Δ un complejo simplicial con vértices en $\{1, \dots, n\}$ tal que su realización geométrica es una esfera $(d - 1)$ -dimensional. Entonces

$$f_i(\Delta) \leq f_i(C(n, d)) \quad 0 \leq i \leq d - 1.$$

Con el fin de probar esto, como se ha mencionado en la introducción, se hará uso de algunas herramientas algebraicas y combinatorias que se irán introduciendo a lo largo de las secciones del capítulo. En pocas palabras, lo que se hará es probar que si un anillo (que denominaremos más adelante por A_Δ) definido a partir de un complejo simplicial Δ , cumple con ser de Cohen-Macaulay, entonces este satisfará las desigualdades mencionadas en el teorema de la cota superior. Posteriormente estudiaremos un poco qué clase de anillos A_Δ cumplen la propiedad de ser de Cohen-Macaulay.

2.1 Triangulaciones

En la última sección del capítulo anterior se introdujo la definición de complejo simplicial. En este capítulo asociaremos algunos objetos algebraicos a los complejos simpliciales y también podemos asociarle un espacio topológico como se verá a continuación.

Consideremos un complejo simplicial no vacío Δ y V su conjunto de vértices (o caras de dimensión 0). Sea $|\Delta| \subset \mathbb{R}^V$ el conjunto de todas las funciones α de V a $I = [0, 1]$ tales que

- (a) Para todo α , $\{v \in \Delta \mid \alpha(v) \neq 0\}$ es una cara de Δ (en particular, $\alpha(v) \neq 0$ para un número finito de vértices).
- (b) Para todo α , $\sum_{v \in \Delta} \alpha(v) = 1$.

Para cada vértice $v \in V$ consideremos $\alpha_v \in \mathbb{R}^V$ definida por

$$\alpha_v(u) = \begin{cases} 1, & \text{si } u = v \\ 0, & \text{si } u \neq v. \end{cases}$$

Notemos que el conjunto de funciones $\{\alpha_v | v \in V\}$ es un conjunto linealmente independiente. En particular, para cada cara $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_m\} \in \Delta$, el conjunto $\{\alpha_{v_0}, \alpha_{v_1}, \dots, \alpha_{v_m}\}$ es afínmente independiente. Definamos

$$|\sigma| = \langle \{\alpha_{v_0}, \dots, \alpha_{v_m}\} \rangle = \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i \alpha_{v_i} \mid \lambda_i > 0 \text{ y } \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1 \right\},$$

luego, podemos ver que

$$|\Delta| = \bigcup_{\sigma \in \Delta} |\sigma| \subset \mathbb{R}^V.$$

Este conjunto equipado con la topología coherente (o débil) respecto a $\{|\sigma| : \sigma \in \Delta\}$ es un espacio topológico asociado a Δ el cual denotaremos simplemente por $|\Delta|$. (Es decir, $U \subset |\Delta|$ será un abierto si y sólo si $U \cap |\sigma|$ es un abierto en $|\sigma|$ para todo $\sigma \in \Delta$.) Cuando tenemos un espacio topológico X y un complejo simplicial Δ tal que $X \cong |\Delta|$ se dice que Δ es una triangulación de X . De aquí en adelante todos los complejos simpliciales Δ que consideremos tendrán a $\{1, \dots, n\}$ como conjunto de vértices si este no se especifica.

Usualmente $|\Delta|$ nos da información topológica que de una u otra forma contiene información combinatoria acerca de Δ , lo cual es sumamente importante para nuestros propósitos.

Ahora, veamos algunas definiciones y resultados que nos permitirán reformular el planteamiento del teorema sobre complejos simpliciales que triangulan esferas.

Definición 2.1.1. Sea Δ un complejo simplicial $(d-1)$ -dimensional y $F \in \Delta$, el *link* de F , denotado por $lk(F)$ se define como

$$lk(F) = \{G \in \Delta \mid G \cap F = \emptyset \text{ y } G \cup F \in \Delta\}.$$

Notemos que $lk(F)$ es un subcomplejo de Δ , en particular $lk(\emptyset) = \Delta$ y $lk(F) = \{\emptyset\}$ si F es una cara maximal. Además, tenemos que para cualquier $G \in lk(F)$, $G \subseteq M - F \in lk(F)$ donde M es una cara maximal de Δ que contiene a F . Es decir, si F_1, \dots, F_t son las caras maximales de Δ que contienen a F , entonces $F_1 - F, \dots, F_t - F$ serán las caras maximales de $lk(F)$. Si suponemos que Δ es puro todas las facetas F_i tienen la misma cardinalidad, lo cual implica que todas las caras maximales de $lk(F)$ tiene la misma cardinalidad, es decir, $lk(F)$ es puro y $\dim(lk(F)) = d - |F| - 1$.

Los links de las caras de un complejo simplicial son de gran utilidad pues sirven para conectar propiedades combinatorias con propiedades topológicas del complejo simplicial como veremos más adelante. Otros conjuntos que se definen a partir de un complejo simplicial Δ y que van muy de la mano con la definición de $lk(F)$ son la *estrella* de F definida por $st(F) = \{G \in \Delta \mid G \in F\}$ y la *estrella cerrada* de F denotada por $\overline{st}(F)$, la cuál es el subcomplejo de Δ más chico que contiene a $st(F)$. Los últimos dos conjuntos definidos no serán mencionados

más adelante pero se utilizan en las pruebas de los teoremas 2.5.2 y 2.5.3 (las cuáles omitimos en este texto) así como en la prueba de McMullen de que $h_i \leq \binom{n-d+i-1}{i}$.

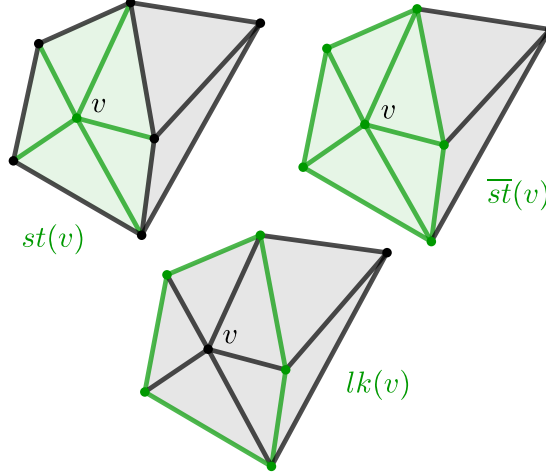


Figura 2.1: Link, estrella y estrella cerrada de un complejo simplicial.

Definición 2.1.2. Un complejo simplicial $(d-1)$ -dimensional Δ se dice *Euleriano* si es puro y satisface que para todo $F \in \Delta$, $\tilde{\chi}(lk(F)) = (-1)^{\dim(lk(F))}$. Aquí, $\tilde{\chi}(\tau)$ es la característica reducida de Euler del complejo simplicial τ , definida por

$$\tilde{\chi}(\tau) = \sum_{i=-1}^{d-1} (-1)^i f_i(\tau).$$

Para ver algunas propiedades de esta función se pueden revisar los apéndices B y C.

Recordemos que ya que el f -vector está completamente determinado por el h -vector, para probar el teorema de la cota superior basta probar que para cualquier complejo simplicial $(d-1)$ -dimensional con n vértices Δ , tal que $|\Delta| \cong S^{d-1}$, $h_i(\Delta) \leq h_i(C(n, d))$.

En la sección 1.3 del primer capítulo se calculó que

$$h_i(C(n, d)) = \binom{n-d+i-1}{i} \quad \text{para todo } 0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor,$$

y para $\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor < i \leq d$, $h_i(C(n, d))$ queda determinado por las relaciones de Dehn-Sommerville.

Por lo tanto, al igual que en el caso para politopos convexos, para probar la UBTS es suficiente demostrar que para cualquier complejo simplicial $(d-1)$ -dimensional con n vértices Δ , tal que $|\Delta| \cong S^{d-1}$, se tiene que $h_i = h_{d-i}$ para todo $1 \leq i \leq d$ y que

$$h_i \leq \binom{n-d+i-1}{i} \quad \text{para todo } 0 \leq i \leq \lfloor d/2 \rfloor.$$

Antes de continuar, tratemos de convencernos de que no es posible extender de una forma inmediata la prueba del teorema para polítopos convexos a triangulaciones de esferas. Para esto, observemos cuáles son las ideas más importantes de las 2 componentes principales de la prueba para polítopos convexos. Analicemos si dichas ideas siguen funcionando al considerar triangulaciones de esferas simpliciales y en caso de que no, qué otras herramientas se conocían para solucionar estos problemas.

Las dos partes más importantes de la prueba de la UBTP son:

- (i) Demostrar que si Δ_P es el complejo de frontera de un polítopo simplicial entonces $h_i(\Delta_P) = h_{d-i}(\Delta_P)$ para todo $1 \leq i \leq d$.

Se demostró que estas ecuaciones son equivalentes a las relaciones de Dehn-Sommerville, las cuáles se cumplen cuando trabajamos con el f -vector de un polítopo simplicial. Para probar que las relaciones de Dehn-Sommerville se satisfacen al trabajar con polítopos simpliciales se utiliza fuertemente el resultado de Bruggesser y Mani de que el complejo de frontera de todo polítopo simplicial es escalonable. En la demostración de este resultado, es fundamental la propiedad diamante en Δ_P y la geometría del polítopo P . Esto podría sugerir que dada una triangulación Δ de una esfera, habría que determinar si el conjunto parcialmente ordenado de sus caras cumple con la propiedad diamante y si puede extenderse la prueba de Bruggesser y Mani explotando la geometría de $|\Delta|$. Sin embargo, existen ejemplos de complejos simpliciales Δ cuya realización geométrica es homeomorfa a una esfera, pero que no son el complejo de frontera de un polítopo convexo (véase el ejemplo 5.10 de la sección 5.4 en [29]). Esto nos dice que no es inmediato obtener igualdades tipo Dehn-Sommerville (de la forma en que se hace para Δ_P) sin una estructura de polítopo y por lo tanto, es razonable considerar una familia más amplia de complejos simpliciales que cumplan con las relaciones $h_i(\Delta) = h_{d-i}(\Delta)$ para todo $1 \leq i \leq d$. Una familia de complejos simpliciales que satisface estas relaciones son los complejos Euleriano, lo cuál porbaremos más adelante (corolario 2.3.3). Además, luego probaremos que si $|\Delta| \cong S^{d-1}$, entonces Δ es Euleriano (proposición 2.5.1), lo cuál nos deja con un sólo trabajo pendiente: acotar h_i (para $i \leq \lfloor d/2 \rfloor$). La definición de Euleriano surge a partir de la búsqueda de teoremas de reciprocidad en combinatoria, utilizando conjuntos parcialmente ordenados. Si se desea ver más a detalle el origen de esta definición y su relación con la característica de Euler se puede consultar el apéndice C.

- (ii) Demostrar que $h_i(\Delta_P) \leq \binom{n-d+i-1}{i}$ (para $1 \leq i \leq \lfloor d/2 \rfloor$).

Para probar esto se utilizó que Δ_P es particionable, pues al tener una partición $\Delta_P = \bigsqcup [R_i : F_i]$ se sigue que $h_i = |\{j : |R_j| = i\}|$ y se puede definir un proceso de colapso en el que $\tilde{h}_i = \sum_{j=0}^i h_j$ cuenta el número de (i', d) -colapsos elementales para $i' \leq i$, lo cuál ya sabemos como acotar. En su momento, dado que la prueba de McMullen del UBTP utiliza que Δ_P es escalonable y no solamente particionable, una pregunta con bastate sentido era si toda esfera simplicial era escalonable. Sin embargo, en [27] se puede ver un ejemplo de una 3-esfera simplicial no escalonable. La siguiente pregunta intuitiva

era si toda esfera simplicial es particionable. Desafortunadamente, esto continúa siendo un problema abierto.

Dado que se veía complicado seguir un camino similar al de la prueba para politopos convexos para acotar las entradas del h -vector, y en su momento Stanley descubrió que el h -vector aparecía al considerar cierto anillo definido a partir de las caras de un complejo simplicial Δ (anillo de Stanley-Reisner), se optó por seguir un camino más algebraico con el cuál se encontró una elegante solución al problema de acotar las entradas del h -vector. En las siguientes tres secciones veremos como utilizar herramientas algebraicas para acotar las entradas del h -vector.

2.2 El anillo de Stanley-Reisner

En esta sección daremos las definiciones de los objetos algebraicos con los que estaremos trabajando de aquí en adelante. El anillo de Stanley-Reisner nos proporcionará toda la información que necesitaremos acerca de Δ para concluir si este satisface las desigualdades del teorema.

Definición 2.2.1. Un anillo graduado es un anillo A con una familia $\{A_n\}_{n \geq 0}$ de grupos aditivos tales que $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ y $A_m \cdot A_n \subset A_{m+n}$ para todo $m, n \geq 0$. Así, A_0 es un subanillo de A , y cada A_n es un A_0 -módulo.

Si A es un anillo graduado, un A -módulo graduado es un A -módulo M junto con una familia de grupos aditivos $\{M_n\}_{n \geq 0}$ tales que $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ y $A_m \cdot M_n \subset M_{m+n}$ para todo $m, n \geq 0$. Cada M_n se puede ver como un A_0 -módulo.

Un elemento x de M es *homogéneo* si $x \in M_n$ para algún $n \geq 0$ y en tal caso se dice que n es el grado de x . Un ideal de un anillo graduado A se dice ideal homogéneo si es generado por elementos homogéneos (o equivalentemente, si es un ideal graduado de A).

Definición 2.2.2. Un anillo A es *Noetheriano* si para cualquier sucesión de ideales de A , $\{I_n\}_{n \geq 0}$ tales que $I_n \subset I_{n+1}$ para todo $n \geq 0$, existe algún $n \geq 0$ tal que $I_m = I_n$ para todo $m \geq n$.

Cabe mencionar que cualquier cociente de un anillo Noetheriano también es Noetheriano.

Ejemplo 2.2.1. Todo campo es Noetheriano ya que tiene únicamente los dos ideales triviales.

La siguiente proposición es un resultado conocido acerca de anillos graduados Noetherianos que se puede consultar en [3].

Proposición 2.2.1. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo graduado $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$:

1. A es un anillo Noetheriano,
2. A_0 es un anillo Noetheriano y A es finitamente generado como A_0 -álgebra.

Sea \mathbb{k} un campo, en las siguientes secciones consideraremos el anillo $S = \mathbb{k}[\mathbf{x}]$ de polinomios sobre \mathbb{k} en n variables x_1, \dots, x_n .

Definición 2.2.3. Un *monomio* en S es un producto de la forma $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$, para $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ un vector de enteros no negativos. Un ideal $I \subset \mathbb{k}[\mathbf{x}]$ es llamado un *ideal monomial* si es un ideal generado por monomios.

Como espacio vectorial sobre \mathbb{k} , el anillo de polinomios S es una suma directa

$$S = \bigoplus_{m \geq 0} S_m,$$

donde $S_m = \bigoplus_{|\mathbf{a}|=m} \mathbb{k}[\mathbf{x}^{\mathbf{a}}]$ es el subespacio vectorial generado por los monomios de grado m .

Dado que el producto $S_i \cdot S_j$ se queda contenido en S_{i+j} , podemos decir que S es un \mathbb{k} -álgebra graduada. Además, por la proposición anterior tenemos que S es Noetheriano y por tanto cualquier ideal de este será finitamente generado. Sea I un ideal homogéneo de S sabemos que si $A = S/I$ entonces

$$A \cong \bigoplus_{m \geq 0} S_m / (S_m \cap I) = \bigoplus_{m \geq 0} A_m$$

donde $A_m = S_m / (S_m \cap I)$. Notemos que A también es un \mathbb{k} -álgebra graduada.

Definición 2.2.4. Un monomio $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ es *libre de cuadrados* si cada coordenada de \mathbf{a} es 0 o 1. Un ideal es libre de cuadrados si es generado por monomios libres de cuadrados.

Por notación, cada subconjunto $\sigma \subset \{1, 2, \dots, n\}$ lo identificaremos con su vector característico en $\{0, 1\}^n$, es decir, aquel que tiene 1 en la i -ésima coordenada si $i \in \sigma$ y 0 en otro caso. Esta convención nos permite escribir $\mathbf{x}^\sigma = \prod_{i \in \sigma} x_i$.

Definición 2.2.5. El *ideal de Stanley-Reisner* del complejo simplicial Δ es el ideal monomial libre de cuadrados

$$I_\Delta = \langle \mathbf{x}^\tau \mid \tau \notin \Delta \rangle$$

generado por los monomios correspondientes a las *no-caras* de Δ . El *anillo de Stanley-Reisner* es el anillo cociente $A_\Delta = S/I_\Delta$.

En el siguiente ejemplo tenemos que $I_{\Delta_1} = \langle x_1 x_4, x_2 x_3 x_4, x_1 x_3 x_4, x_1 x_2 x_4 \rangle = \langle x_1 x_4, x_2 x_3 x_4 \rangle$ y $A_{\Delta_1} = S[x_1, x_2, x_3, x_4] / \langle x_1 x_4, x_2 x_3 x_4 \rangle$.

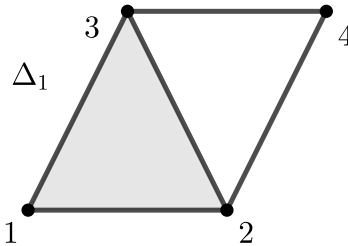


Figura 2.2: Complejo simplicial.

2.3 Funciones de Hilbert

Una vez que hemos definido los objetos que vamos a estudiar, podemos definir algunas otras herramientas que nos darán información acerca de estos objetos. Estas herramientas son en su mayoría de álgebra conmutativa, por lo que nos apoyamos en algunos textos de la materia tales como [3] y [17] para enunciar y probar algunos resultados que nos serán de utilidad.

Definición 2.3.1. Una sucesión de A -módulos y A -homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

se dice exacta en M_i si $\text{Im}(f_i) = \text{Ker}(f_{i+1})$. La sucesión es exacta si es exacta en cada M_i .

En particular tenemos que:

$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M$ es exacta si y sólo si f es inyectiva,

$M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ es exacta si y sólo si g es suprayectiva,

$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ es exacta si y sólo si f es inyectiva, g es suprayectiva y g induce un isomorfismo de $M/f(M')$ sobre M'' .

Una sucesión del último tipo se denomina una *sucesión exacta corta*. Para cada sucesión exacta larga (como la de la definición) podemos obtener sucesiones cortas: si $N_i = \text{Im}(f_i) = \text{Ker}(f_{i+1})$, se tienen sucesiones exactas cortas $0 \rightarrow N_i \rightarrow M_i \rightarrow N_{i+1} \rightarrow 0$ para cada i .

Definición 2.3.2. Sea \mathcal{C} una clase de A -módulos y sea λ una función sobre \mathcal{C} con valores en \mathbb{Z} . La función λ es *aditiva* si para cada sucesión exacta corta $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ en la que todos los términos pertenecen a \mathcal{C} , se tiene $\lambda(M') - \lambda(M) + \lambda(M'') = 0$.

Observemos que dado un campo \mathbb{k} , con \mathcal{C} la clase de todos los \mathbb{k} -espacios vectoriales, se tiene que $V \rightarrow \dim_{\mathbb{k}}(V)$ es una función aditiva. Cuando consideramos esta función restringida a una \mathbb{k} -álgebra graduada suele llamarse *función de Hilbert*.

Consideremos $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ un anillo Noetheriano graduado. En vista de la proposición 2.2.1, A_0 es un anillo Noetheriano y A es generado (como A_0 -álgebra) por elementos x_1, x_2, \dots, x_m que podemos considerar homogéneos de grados d_1, \dots, d_m , respectivamente, todos mayores a 0.

Sea $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ un A -módulo graduado finitamente generado. M es generado por un número finito de elementos homogéneos, digamos $\{m_1, \dots, m_t\}$ con r_i el grado de m_i para todo $i \in [t]$. Cada elemento x de M_n es entonces de la forma $\sum_{i=1}^t f_i(x)m_i$ con $f_i(x) \in A$ homogéneo de grado $n - r_i$ (y cero si $n < r_i$). Luego, podemos deducir que M_n es finitamente generado (como A_0 -módulo) ya que es generado por todos los $\{g_i(x)m_i\}$ donde $g_i(x)$ es un monomio en las variables x_1, \dots, x_m , de grado total $n - r_i$.

Definición 2.3.3. Sea λ una función aditiva (con valores en \mathbb{Z}) en la clase de todos los A_0 -módulos finitamente generados. La *serie de Poincaré* de M (respecto a λ) es la serie formal de potencias

$$P(M, t) = \sum_{n \geq 0} \lambda(M_n) t^n \in \mathbb{Z}[[t]].$$

En lo que resta del texto, consideraremos este tipo de series cuando λ es la función de Hilbert por lo que a la serie asociada le llamamos *serie de Hilbert*.

Teorema 2.3.1. Sea $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ un A -módulo graduado finitamente generado por elementos homogéneos $\{m_1, \dots, m_t\}$. Entonces $P(M, t)$ es un función racional en t de la forma

$$\frac{f(t)}{\prod_{i=1}^m (1 - t^{d_i})},$$

donde $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ y $\{d_1, \dots, d_m\}$ es un conjunto de enteros positivos.

Demostración. Por observaciones anteriores sabemos que $A = A_0[x_1, \dots, x_m]$ donde $d_i = \deg(x_i)$ para todo $i \in [m]$. Ahora, probemos el teorema por inducción sobre m . Si $m = 0$ vamos a tener que $M_n = 0$ para n suficientemente grande (n mayor al máximo grado de los elementos que generan a M ya que M es un módulo finitamente generado) por lo tanto $P(M, t)$ será un polinomio.

Ahora, supongamos que el enunciado del teorema es cierto para $m - 1$ con $m > 0$ y que $A = A_0[x_1, \dots, x_m]$. Veamos que para todo $n \geq 0$ la multiplicación por x_m es un morfismo de módulos $x_m^{(n)} : M_n \rightarrow M_{n+d_m}$ por lo que si definimos $K_n = \ker(x_m^{(n)})$ y $L_{n+d_m} = M_{n+d_m}/x_m^{(n)}(M_n)$ para todo $n \geq 0$ tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow M_n \xrightarrow{x_m^{(n)}} M_{n+d_m} \rightarrow L_{n+d_m} \rightarrow 0.$$

Además, observemos que $K = \bigoplus_{n \geq 0} K_n$ y $L = \bigoplus_{n \geq 0} L_n$ son A -módulos finitamente generados (pues se tiene la sucesión exacta $0 \rightarrow K \rightarrow M \xrightarrow{x_m} M \rightarrow L \rightarrow 0$ y M es finitamente generado) y x_m multiplicado por cualquier elemento de K o L es cero por lo que K, L son $A_0[x_1, \dots, x_{m-1}]$ -módulos. Aplicando la aditividad de λ en la sucesión exacta anterior obtenemos la igualdad

$$\lambda(K_n) - \lambda(M_n) + \lambda(M_{n+d_m}) - \lambda(L_{n+d_m}) = 0$$

por lo que multiplicando por t^{n+d_m} y sumando sobre $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ llegamos a que

$$(1 - t^{d_m})P(M, t) = P(L, t) - t^{d_m}P(K, t) + g(t)$$

donde $g(t) = \sum_{i=0}^{d_m-1} (\lambda(M_i) - \lambda(L_i))t^i$ es un polinomio en t , por lo tanto, utilizando la hipótesis de inducción en $P(K, t)$ y $P(L, t)$ concluimos que $P(M, t)$ tiene la forma que dice el enunciado del teorema. \square

Definición 2.3.4. Sea R un anillo conmutativo e I un ideal primo de R . Definimos la *altura de I en R* como el supremo de las longitudes de cadenas de ideales primos contenidos en I la cual denotamos con $\text{ht}(I)$ y definimos la *dimensión de Krull de R* (o simplemente *dimensión de R*) como el supremo de las longitudes de cadenas de ideales primos contenidas en R , denotado por $\dim(R)$. Observemos que si R es de dimensión finita, entonces $\dim(R) = \max\{\text{ht}(I) \mid I \text{ es un ideal maximal}\}$.

De manera similar, dado un anillo conmutativo R , definimos la **dimensión de R* como el supremo de las longitudes de cadenas de ideales primos homogéneos en R y lo denotamos por

$^* \dim(R)$. Si I es un ideal homogéneo, se define la *altura homogénea de I* como el supremo de las longitudes de cadenas de ideales primos homogéneos contenidos en I , denotado por $^* \text{ht}(I)$. Dado un ideal I de R , denotaremos por I^* al ideal generado por los elementos homogéneos de I .

Un resultado que se utilizará más adelante es el siguiente corolario del teorema 2.3.1, del cual omitiremos la prueba. Sin embargo, esta puede consultarse en [3], capítulo 11.

Corolario 2.3.1. Si A es finitamente generado como A_0 -álgebra por elementos de grado 1, entonces para todo n suficientemente grande, $\lambda(M_n)$ es un polinomio en n (con coeficientes racionales) de grado $d-1$ donde, d es la dimensión de Krull de A cuando $M = A$, considerando este como un A -módulo en sí mismo.

En el caso en que A_Δ es el anillo de Stanley-Reisner de un complejo simplicial Δ de dimensión $d-1$, la dimensión de Krull de A_Δ es igual al máximo número de elementos algebraicamente independientes en A_Δ .

Observemos que como I_Δ es homogéneo, $A_\Delta \cong \bigoplus_{m \geq 0} A_\Delta^m$ donde

$$\begin{aligned} A_\Delta^m &= S_m / (S_m \cap I_\Delta) \\ &= \bigoplus \{ \mathbb{k}[\mathbf{x}^{\mathbf{a}}] \mid \deg(\mathbf{a}) = m \text{ y } \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \notin I_\Delta \} \\ &= \bigoplus \{ \mathbb{k}[\mathbf{x}^{\mathbf{a}}] \mid \deg(\mathbf{a}) = m \text{ y } \text{supp}(\mathbf{a}) \in \Delta \} \end{aligned}$$

con $\text{supp}(\mathbf{a}) = \{i \in [n] \mid a_i \neq 0\}$. Entonces, se puede ver que $\dim_{\mathbb{k}}(A_\Delta^0) = 1$ y

$$\dim_{\mathbb{k}}(A_\Delta^m) = |\{ \mathbf{a} \in \mathbb{N}^n : \deg(\mathbf{a}) = m \text{ y } \text{supp}(\mathbf{a}) \in \Delta \}| = \sum_{i=0}^{d-1} f_i \binom{m-1}{i}$$

para $m > 0$, lo cual nos dice que para $m > 0$, $\dim_{\mathbb{k}}(A_\Delta^m)$ es un polinomio de grado $d-1$ en m y por lo tanto del corolario anterior, considerando A_Δ un A_Δ -módulo en sí mismo, se sigue que la dimensión de Krull de A_Δ es d cuando Δ es un $(d-1)$ -complejo simplicial.

Ahora, calculemos la serie de Hilbert del anillo de Stanley-Reisner usando una \mathbb{N}^n -graduación de este.

Definición 2.3.5. Un S -módulo (con $S = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ como anteriormente) M se dice \mathbb{N}^n -graduado si $M = \bigoplus_{\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n} M_{\mathbf{b}}$ y $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} M_{\mathbf{b}} \subset M_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$ para todo $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$. Si la dimensión del \mathbb{k} -espacio vectorial $M_{\mathbf{a}}$, $\dim_{\mathbb{k}}(M_{\mathbf{a}})$ es finita para todo $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$, entonces la serie formal

$$H(M, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} \dim_{\mathbb{k}}(M_{\mathbf{a}}) \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{a}}$$

es la *serie de Hilbert \mathbb{N}^n -graduada* de M . Si $M = \bigoplus_{i \geq 0} M_i$ con $M_i = \bigoplus_{|\mathbf{a}|=i} M_{\mathbf{a}}$; sustituyendo $x_i = t$ para todo i obtenemos la (usual) serie de Hilbert $H(M; t, \dots, t)$ que denotaremos simplemente por $H(M, t)$.

Teorema 2.3.2. Sea Δ un complejo simplicial de dimensión d con vértices $[n]$ y $S = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$. El anillo de Stanley Reisner A_Δ tiene serie de Hilbert

$$H(A_\Delta; \mathbf{x}) = H(A_\Delta; x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \Delta} \prod_{i \in \sigma} \frac{x_i}{1 - x_i}.$$

Demostración. Como se había visto anteriormente tenemos que

$$A_\Delta \cong \bigoplus_{m \geq 0} A_\Delta^m \cong \bigoplus_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} \{\mathbb{k}[\mathbf{x}^{\mathbf{a}}] \mid \text{supp}(\mathbf{a}) \in \Delta\}.$$

Por tanto tenemos que

$$\begin{aligned} H(A_\Delta; \mathbf{x}) &= \sum \{\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \mid \mathbf{a} \in \mathbb{N}^n \text{ y } \text{supp}(\mathbf{a}) \in \Delta\} \\ &= \sum_{\sigma \in \Delta} \sum \{\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \mid \mathbf{a} \in \mathbb{N}^n \text{ y } \text{supp}(\mathbf{a}) = \sigma\} \\ &= \sum_{\sigma \in \Delta} \prod_{i \in \sigma} \frac{x_i}{1 - x_i}. \end{aligned}$$

□

Corolario 2.3.2. Sea $(f_{-1}, f_0, \dots, f_{d-1})$ el f -vector de Δ , entonces

$$H(A_\Delta, t) = \frac{1}{(1-t)^n} \sum_{i=0}^d f_{i-1} t^i (1-t)^{n-i},$$

donde $d = \dim(\Delta) + 1$.

Luego, recordemos que en la sección 1.2, partiendo únicamente de la definición del h -vector en términos del f -vector de P , se demostró que $g(P, t) = (1-t)^d f\left(P, \frac{t}{t-1}\right)$ con $f(P, t) = \sum_{i=0}^d (-1)^i f_{i-1} t^i$ y $g(P, x) = \sum_{i=0}^d h_i t^i$. Dado que la definición del h -vector de un complejo simplicial en términos del f -vector es la misma que para polítopos convexos podemos utilizar la relación $g(\Delta, t) = (1-t)^d f\left(\Delta, \frac{t}{t-1}\right)$ (definiendo $f(\Delta, t)$ y $g(\Delta, t)$ naturalmente) junto al corolario 2.3.2 para probar que

$$H(A_\Delta, t) = \frac{1}{(1-t)^n} \sum_{i=0}^d f_{i-1} t^i (1-t)^{n-i} = \frac{h_0 + h_1 t + \dots + h_d t^d}{(1-t)^d}.$$

Este resultado será muy útil para acotar las entradas del h -vector de un complejo simplicial siempre y cuando pidamos ciertas condiciones sobre A_Δ .

Además, con el cálculo del teorema 2.3.2 tenemos la siguiente proposición que nos implica que si Δ es un complejo simplicial Euleriano entonces $h_i = h_{d-i}$ para todo $1 \leq i \leq d$.

Proposición 2.3.1. Sea Δ un complejo simplicial con $\{1, \dots, n\}$ como conjunto de vértices. Entonces

$$H(A_\Delta; t_1^{-1}, \dots, t_n^{-1}) = \sum_{F \in \Delta} (-1)^{\dim(F)} \tilde{\chi}(lk(F)) \prod_{i \in F} \frac{t_i}{1 - t_i}.$$

Demostración. Por el teorema 2.3.2 sabemos que $H(A_\Delta; t_1, \dots, t_n) = \sum_{G \in \Delta} \prod_{i \in G} \frac{t_i}{1-t_i}$. Si sustituimos t_i por t_i^{-1} tenemos que $\frac{t_i^{-1}}{1-t_i^{-1}} = -\left(1 + \frac{t_i}{1-t_i}\right)$ y por lo tanto

$$\prod_{i \in G} \frac{t_i^{-1}}{1-t_i^{-1}} = (-1)^{\dim(G)+1} \prod_{i \in G} \left(1 + \frac{t_i}{1-t_i}\right) = (-1)^{\dim(G)+1} \sum_{F \subseteq G} \left(\prod_{i \in F} \frac{t_i}{1-t_i}\right),$$

entonces

$$\begin{aligned} H(A_\Delta, t_1^{-1}, \dots, t_n^{-1}) &= \sum_{G \in \Delta} (-1)^{\dim(G)+1} \sum_{F \subseteq G} \left(\prod_{i \in F} \frac{t_i}{1-t_i}\right) \\ &= \sum_{F \in \Delta} \left(\sum_{\substack{G \in \Delta \\ F \subseteq G}} (-1)^{\dim(G)+1}\right) \prod_{i \in F} \frac{t_i}{1-t_i}. \end{aligned}$$

Por otro lado, usando que para todo $F \in \Delta$, $\dim(F) = |F| - 1$ y que $\{H \in \Delta \mid F \subseteq H\}$ está en biyección con $lk(F) = \{K \in \Delta \mid F \cap K = \emptyset \text{ y } F \cup K \in \Delta\}$ (pues basta mandar H a $H - F$), se tiene que

$$\tilde{\chi}(lkF) = \sum_{i=0}^d (-1)^{i-1} f_{i-1}(lk(F)) = \sum_{G \in lk(F)} (-1)^{\dim(G)} = \sum_{\substack{H \in \Delta \\ F \subseteq H}} (-1)^{|H|-|F|-1}$$

de donde

$$(-1)^{\dim(F)} \tilde{\chi}(lk(F)) = \sum_{\substack{H \in \Delta \\ F \subseteq H}} (-1)^{|H|-2} = \sum_{\substack{H \in \Delta \\ F \subseteq H}} (-1)^{|H|} = \sum_{\substack{H \in \Delta \\ F \subseteq H}} (-1)^{\dim(H)+1},$$

lo cual concluye la prueba de la proposición. \square

Corolario 2.3.3. Si Δ es un complejo simplicial Euleriano entonces $h_i = h_{d-i}$ para todo $1 \leq i \leq d$.

Demostración. Si Δ es Euleriano, por la proposición anterior tenemos que

$$\begin{aligned} H(A_\Delta; t_1^{-1}, \dots, t_n^{-1}) &= \sum_{F \in \Delta} (-1)^{\dim(F)+d-|F|-1} \prod_{i \in F} \frac{t_i}{1-t_i} \\ &= (-1)^d \sum_{F \in \Delta} \prod_{i \in F} \frac{t_i}{1-t_i} = (-1)^d H(A_\Delta; t_1, \dots, t_n), \end{aligned}$$

por lo que $H(A_\Delta, 1/t) = (-1)^d H(A_\Delta, t)$.

Recordemos que en la sección 1.2 se vio que demostrar que $h_i = h_{d-i}$ para todo $1 \leq i \leq d$ es equivalente a probar que $f(\Delta, 1-x) = (-1)^d f(\Delta, x)$ donde $f(\Delta, x) = \sum_{i=0}^d (-1)^i f_{i-1} x^i$. Además, veamos que $f(\Delta, x) = H(A_\Delta, \frac{x}{1-x})$, por lo que probar que $f(\Delta, 1-x) = (-1)^d f(\Delta, x)$ es equivalente a demostrar que $H(A_\Delta, \frac{1-x}{x}) = (-1)^d H(A_\Delta, \frac{x}{1-x})$, lo cual se sigue de lo probado al inicio de esta demostración. \square

Para obtener las cotas sobre los h_i 's vamos a introducir algunos conceptos combinatorios.

Definición 2.3.6. Un conjunto \mathcal{M} de monomios en variables x_1, \dots, x_n se dice *multicomplejo* en $[n]$ si para cualquier $u \in \mathcal{M}$, todos los divisores de u están en \mathcal{M} . Si d es el máximo grado de un monomio en \mathcal{M} , diremos que (f_0, f_1, \dots, f_d) es el f -vector de \mathcal{M} donde $f_i = |\{w \in \mathcal{M} : \deg(w) = i\}|$.

Dado un conjunto \mathcal{M} de monomios en variables y_1, \dots, y_n , el orden lexicográfico en \mathcal{M} se define de la siguiente manera: si $u = y_1^{a_1} \cdots y_m^{a_m}$ y $v = y_1^{b_1} \cdots y_m^{b_m}$ (con $a_i, b_i \geq 0$) decimos que $u < v$ si la última coordenada no negativa de $(b_1 - a_1, \dots, b_m - a_m, \sum b_i - \sum a_i)$ es positiva.

Por ejemplo, si tenemos el conjunto de los monomios en variables x_1, x_2, x_3 los primeros elementos del orden lexicográfico inverso son:

$$1 < x_1 < x_2 < x_3 < x_1^2 < x_1x_2 < x_2^2 < x_1x_3 < x_2x_3 < x_3^2 < x_1^3 < x_1^2x_2 < x_1x_3 < \dots$$

Observación 2.3.1. Notemos que si \mathcal{M}^c es el complemento de \mathcal{M} en el conjunto de los monomios generados por x_1, \dots, x_n entonces \mathcal{M}^c es una \mathbb{k} -base para el ideal generado por los monomios en \mathcal{M}^c .

Proposición 2.3.2. Sea $S = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$, I un ideal homogéneo de S y $A = S/I = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$. Supongamos que y_1, \dots, y_m es una \mathbb{k} -base para A_1 . Entonces existe un multicomplejo \mathcal{M} en las variables y_1, \dots, y_m que es una \mathbb{k} -base para A .

Demostración. Sea \mathcal{N} el conjunto de todos los monomios en las variables y_1, \dots, y_m . Definimos el orden lexicográfico inverso en \mathcal{N} , el cual es un orden total.

Ahora, definimos una sucesión de monomios de manera recursiva. Primero definimos $u_1 = 1$ y para $i > 1$ se define u_{i+1} como el elemento más chico en \mathcal{N} (considerando el orden lexicográfico inverso) tal que $\{u_1, \dots, u_i, u_{i+1}\}$ es linealmente independiente sobre \mathbb{k} . Si u_{i+1} no existe para algún i , entonces $\mathcal{M} = \{u_1, \dots, u_i\}$, en otro caso \mathcal{M} es una sucesión infinita.

Observemos que \mathcal{M} es por construcción una \mathbb{k} -base para A . Supongamos que \mathcal{M} no es un multicomplejo, entonces podemos tomarnos $u_i \in \mathcal{M}$ tal que $u_i = v \cdot w$ con $v \in \mathcal{N} - \mathcal{M}$ por lo que existen $u_1, \dots, u_k \in \mathcal{M}$ con $k < i$ y $u_j < v$ para todo $j \in [k]$ tales que $v = \sum_{j=1}^k \lambda_j u_j$. Luego podemos ver que $u_j \cdot w < v \cdot w = u_i$ para todo $j \in [k]$, y como tenemos que $u_i = v \cdot w = \sum_{j=1}^k \lambda_j (u_j \cdot w)$ se concluye que $u_i \in \text{span}_{\mathbb{k}}\{u_1, \dots, u_{i-1}\}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto \mathcal{M} es un multicomplejo. \square

Definición 2.3.7. Dada una sucesión finita o infinita $k = (k_0, k_1, \dots)$ de enteros, diremos que es una *O-sucesión* si existe un multicomplejo \mathcal{M} tal que k es su f -vector.

La proposición 2.3.2 implica el siguiente corolario.

Corolario 2.3.4. Sea I un ideal homogéneo de $S = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ y $H(m) = \dim_{\mathbb{k}}(A_m)$ la función de Hilbert de S/I , entonces $\{H(m)\}_{m \geq 0}$ es una *O-sucesión*.

2.4 Anillos de Cohen-Macaulay

En esta sección probaremos que si A_{Δ} es un anillo de Cohen-Macaulay entonces Δ satisfará el teorema de la cota superior.

En [22] Stanley enuncia una caracterización de los anillos de Cohen-Macaulay cuando estos son cocientes de $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ por un ideal primo. Esta caracterización es conocida por algunos autores como el criterio de Hironaka y en [4] y [26] se habla un poco acerca de este criterio. Sin embargo, para nuestros propósitos nos basta suponer que A_Δ es de Cohen-Macaulay y probar que bajo esta suposición, Δ cumple el teorema de la cota superior. Esta prueba es en esencia una exposición del teorema 5.1.10 en [7], la cual concluimos con algunas ideas en [22].

Primero daremos algunas definiciones necesarias para definir qué es un anillo de Cohen-Macaulay.

Definición 2.4.1. Una sucesión x_1, \dots, x_m de elementos de un anillo R es una *sucesión regular* si se satisfacen las siguientes condiciones:

- (i) x_i no es divisor de cero en $R/(x_1, \dots, x_{i-1})$ y
- (ii) $R \neq (x_1, \dots, x_m)$.

Dado un ideal I en R se define el *grado* de I en R como la máxima longitud que puede alcanzar una sucesión regular contenida en I y es denotado por $\text{grade}(I, R)$.

Cuando R es un anillo local con ideal maximal \mathfrak{m} se define la *profundidad* de R como $\text{depth}(R) = \text{grade}(\mathfrak{m}, R)$.

Definición 2.4.2. Se dice que un anillo Noetheriano local R es de *Cohen-Macaulay* si $\text{depth}(R) = \dim(R)$. (En general siempre se tiene la desigualdad $\text{depth}(R) \leq \dim(R)$.)

Cuando el anillo R no es local, se dice que es Cohen-Macaulay si $R_{\mathfrak{p}}$ es de Cohen-Macaulay para todo $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ donde $R_{\mathfrak{p}}$ es la localización de R en \mathfrak{p} y $\text{Spec}(R)$ es el conjunto de ideales primos de R . Para una explicación detallada de qué es la localización en un anillo conmutativo se puede revisar [3] (pág. 36-38).

Proposición 2.4.1. Sea $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ un anillo Noetheriano graduado con $R_0 = \mathbb{k}$ un campo infinito e I un ideal propio homogéneo de R generado por elementos de grado 1. Entonces existe una sucesión regular y_1, \dots, y_d (de elementos de grado 1 en I), donde $d = \text{grade}(I, R)$.

Demostración. Por un resultado de Rees que se puede consultar en [14] (teorema 16.7), si I es un ideal propio de R , entonces todas las sucesiones regulares maximales contenidas en I tienen la misma longitud. Por lo tanto nos basta con encontrar una sucesión regular maximal contenida en I para asegurar que es de longitud d .

Al ser R Noetheriano tenemos que $D_R = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(R)} \mathfrak{p}$ donde D_R es el conjunto de divisores de cero en R y $\text{Ass}(R)$ el conjunto de ideales primos asociados de R . Más aún, $\text{Ass}(R)$ es un conjunto finito. Por lo tanto, dado que $I = \bigoplus_{n \geq 0} I_n$ (por ser I homogéneo) tenemos que $I_1 \cap \text{Ass}(R)$ es un conjunto finito de subespacios vectoriales de I_1 y por ser \mathbb{k} infinito se sigue que existe $y_1 \in I_1 - D_R$; pues dado un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo infinito, este no se puede escribir como unión de un número finito de subespacios.

Luego, podemos aplicar el mismo argumento a $R/(y_1)$ y $I/(y_1)$ y siguiendo inductivamente terminamos con una sucesión regular maximal y_1, \dots, y_d contenida en I . □

Proposición 2.4.2. Sea $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ un anillo graduado con $R_0 = \mathbb{k}$ un campo infinito y x_1, \dots, x_d una sucesión regular de elementos de grado 1. Entonces $H(R/(x_1, \dots, x_d), t) = (1-t)^d H(R, t)$.

Demostración. Probemos que si $x \in R_1$ no es un divisor de cero entonces $H(R/(x), t) = (1-t)H(R, t)$. Luego, por inducción se obtendrá el resultado enunciado en la proposición.

Observemos que se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{x} R \longrightarrow R/(x) \longrightarrow 0,$$

por lo que para todo $i \geq 1$ se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow R_{i-1} \xrightarrow{x} R_i \longrightarrow R_i/(x) = (R/(x))_i \longrightarrow 0,$$

por lo que como $\dim_{\mathbb{k}}$ es una función aditiva, tenemos que para todo $i \geq 1$

$$\dim_{\mathbb{k}}((R/(x))_i) = \dim_{\mathbb{k}}(R_i) - \dim_{\mathbb{k}}(R_{i-1}).$$

Además, es claro que $\dim_{\mathbb{k}}((R/(x))_0) = 1$ y por lo tanto

$$H(R/(x), t) = (1-t)H(R, t).$$

□

Proposición 2.4.3. Sea $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ un anillo Noetheriano graduado y sea $\mathcal{M} = \bigoplus_{i > 0} R_i$. Entonces $\dim(R_{\mathcal{M}}) = \dim(R)$.

Demostración. Sabemos que si I es un ideal primo, existe una biyección entre los ideales primos de R_I y el conjunto de ideales primos de R contenidos en I por lo que $\dim(R_I) = \text{ht}(I)$. Además, sabemos que un ideal es homogéneo si y sólo si es un ideal graduado. Considerando esto, veamos que el teorema 1.5.8 de [7] nos dice que si R es un anillo Noetheriano graduado con I un ideal primo, entonces

- (a) si I es un ideal homogéneo, $\text{ht}(I) = {}^*\text{ht}(I)$ y
- (b) si I no es homogéneo, $\text{ht}(I) = \text{ht}(I^*) + 1$.

Por lo que para cualquier ideal primo homogéneo I , $\dim(R_I) = \text{ht}(I) = {}^*\text{ht}(I)$. Además, si consideramos el ideal primo $\mathcal{M} = \bigoplus_{i > 0} R_i$, dado que todo ideal homogéneo está contenido en \mathcal{M} se sigue que ${}^*\text{ht}(\mathcal{M}) = {}^*\dim(R)$. Finalmente, probaremos que ${}^*\dim(R) = \dim(R)$ para concluir que

$$\dim(R_{\mathcal{M}}) = \text{ht}(\mathcal{M}) = {}^*\text{ht}(\mathcal{M}) = {}^*\dim(R) = \dim(R).$$

Por definición tenemos que ${}^*\dim(R) \leq \dim(R)$. Para probar la otra desigualdad basta demostrar que para cualquier ideal maximal M , hay un ideal maximal homogéneo I tal que $\text{ht}(I) \geq \text{ht}(M)$. Si M es un ideal maximal no homogéneo, por el inciso (b) del teorema 1.5.8 de [7] tenemos que $\text{ht}(M^*) = \text{ht}(M) - 1$, así que es suficiente con construir un ideal maximal homogéneo I que contenga propiamente a M^* para que $\text{ht}(I) > \text{ht}(M^*)$ y por lo tanto $\text{ht}(I) \geq \text{ht}(M^*) + 1 = \text{ht}(M)$.

Sea $I = (M \cap R_0) \oplus \bigoplus_{i \geq 1} R_i$. Es claro que I es maximal, homogéneo y que contiene a M^* por lo que concluimos con la demostración. □

Teorema 2.4.1. Sea Δ un complejo simplicial $d - 1$ dimensional tal que A_Δ es de Cohen-Macaulay. Entonces Δ satisface el teorema de la cota superior.

Demostración. Anteriormente probamos que la dimension de Krull de A_Δ es d . Además, por la proposición anterior se sigue que para $\mathcal{M} = \bigoplus_{i>0} A_\Delta^i$, $\dim((A_\Delta)_\mathcal{M}) = \dim(A_\Delta) = d$, y por ser \mathcal{M} maximal también tenemos que $\text{grade}(\mathcal{M}, A_\Delta) = \text{depth}((A_\Delta)_\mathcal{M})$ (por la proposición 1.2.10 en [7]). Por lo tanto, si A_Δ es de Cohen-Macaulay, $\text{grade}(\mathcal{M}, A_\Delta) = \text{depth}((A_\Delta)_\mathcal{M}) = \dim((A_\Delta)_\mathcal{M}) = d$ y de la proposición 2.4.1 sabemos que existe una sucesión regular x_1, \dots, x_d de elementos de grado 1; más aún, por la proposición 2.4.2

$$H(A_\Delta/(x_1, \dots, x_d), t) = (1 - t)^d H(A_\Delta, t) = h_0 + h_1 t + \dots + h_d t^d,$$

donde la última igualdad se sigue del cálculo explícito que hicimos de $H(A_\Delta, t)$ en la sección anterior.

Luego, suponiendo que el conjunto de vértices de Δ es $[n]$ tenemos

$$A_\Delta^1 = \bigoplus \{\mathbb{k}[\mathbf{x}^{\mathbf{a}}] : \deg(\mathbf{a}) = 1 \text{ y } \text{supp}(\mathbf{a}) \in \Delta\} = \bigoplus_{i=0}^n \mathbb{k}[x_i]$$

de donde $\dim_{\mathbb{k}}(A_\Delta^1) = n$ y al ser x_1, \dots, x_d linealmente independientes concluimos que $h_1 = \dim_{\mathbb{k}}(A_\Delta^1/A_\Delta^1 \cap (x_1, \dots, x_d)) = n - d$.

Finalmente, recordemos que por el corolario 2.3.3, (h_0, h_1, \dots, h_d) es una O -sucesión y por lo anterior es una O -sucesión en $n - d$ variables. Por lo tanto

$$h_i = |\{w \in \mathcal{M} \mid \deg(w) = i\}| \leq \binom{n - d + i - 1}{i},$$

es decir, Δ satisface el teorema de la cota superior. \square

2.5 Homología en complejos de Cohen-Macaulay

Para concluir con la demostración de la UBTS lo único que resta es probar que si $|\Delta| \cong S^{d-1}$, Δ es Euleriano y A_Δ es de Cohen-Macaulay. Para demostrar esto, será esencial el criterio de Reisner [20], el cual caracteriza cuándo un anillo A_Δ es de Cohen-Macaulay.

Contando con este criterio, enunciaremos algunos otros resultados que nos permitirán deducir que las triangulaciones de esferas cumplen con el teorema y que para cualquier variedad suave existe al menos una triangulación que cumple con el teorema.

Teorema 2.5.1. (G. Reisner) A_Δ es un anillo de Cohen-Macaulay si y sólo si para todo $F \in \Delta$ y todo $i < \dim(\text{lk}(F))$, $\widetilde{H}_i(\text{lk}(F); \mathbb{k}) = 0$.

Relacionando este teorema de Reisner con el siguiente resultado de Munkres ([19], corolario 3.4), obtenemos que el que A_Δ sea de Cohen-Macaulay es una propiedad topológica.

Teorema 2.5.2. (Munkres) Sea Δ un complejo simplicial tal que $X \cong |\Delta|$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i) para todo $F \in \Delta$ y todo $i < \dim(lk(F))$, $\widetilde{H}_i(lk(F); \mathbb{k}) \cong 0$,
- (ii) para todo $p \in X$ y todo $i < \dim X = d - 1$, $\widetilde{H}_i(X; \mathbb{k}) \cong H_i(X, X - \{p\}; \mathbb{k}) \cong 0$.

Por lo tanto, dado que $\widetilde{H}_i(S^i, \mathbb{k}) \cong \mathbb{k}$ y $\widetilde{H}_j(S^i, \mathbb{k}) \cong 0$ si $j \neq i$, podemos concluir que si un complejo simplicial Δ tiene realización geométrica homeomorfa a una esfera, A_Δ es de Cohen-Macaulay. Lo único que resta es probar que si $|\Delta| \cong S^{d-1}$, Δ es Euleriano y por lo tanto, por el corolario 2.3.3 tendremos que $h_i = h_{d-i}$ para todo $1 \leq i \leq d$. Para probar esto utilizaremos el siguiente resultado, también de Munkres, el cual es una reformulación del lema 63.1 en [18].

Teorema 2.5.3. (Munkres) Sea Δ un complejo simplicial con vértices en $[n]$ y sea \mathbb{k} un campo. Supongamos que X es un espacio tal que $|\Delta| \cong X$ donde $\alpha : [n] \rightarrow |\Delta| \subset \mathbb{R}^{d-1}$ induce la realización geométrica de Δ . Sea $F \in \Delta$ una cara de dimensión j y $p \in \text{relint}(\text{conv}(\alpha(F)))$. Si $lk(F) \neq \{\emptyset\}$, entonces

$$H_i(X, X - \{p\}; \mathbb{k}) \cong \widetilde{H}_{i-j-1}(lk(F); \mathbb{k}) \quad \text{para todo } i$$

y si $lk(F) = \{\emptyset\}$, entonces $H_i(X, X - \{p\}; \mathbb{k}) \cong \begin{cases} \mathbb{k} & \text{para } i = j \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Proposición 2.5.1. Sea Δ un complejo simplicial tal que $|\Delta| \cong S^{d-1}$, entonces Δ es Euleriano.

Demostración. Dado que A_Δ es de Cohen Macaulay, sabemos que se satisfacen las condiciones equivalentes del teorema 2.5.2. Si $F \in \Delta$ es una cara maximal, tenemos que $lk(F) = \{\emptyset\}$ y por el teorema 2.5.3, se sigue que $\dim(F) = d - 1$ si y sólo si $H_{d-1}(X, X - \{d\}) \cong \mathbb{k}$; lo cual es cierto cuando $X = S^{d-1}$. Esto nos dice que si $|\Delta| \cong S^{d-1}$, Δ es puro y por lo tanto para cualquier $F \in \Delta$, $\dim(lk(F)) = d - 1 - |F|$.

Más aún, por el teorema 2.5.3 y la condición (ii) en el teorema 2.5.2 se sigue que si F no es una cara maximal (o equivalentemente $lk(F) \neq \{\emptyset\}$), entonces para todo $i < d - 1$, $\widetilde{H}_{i-\dim(F)-1}(lk(F); \mathbb{k}) \cong \widetilde{H}_i(S^{d-1}; \mathbb{k}) \cong 0$ y

$$\widetilde{H}_{d-1-\dim(F)-1}(lk(F); \mathbb{k}) = \widetilde{H}_{d-|F|-1}(lk(F); \mathbb{k}) \cong H_{d-1}(S^{d-1}, S^{d-1} - \{p\}; \mathbb{k}) \cong \mathbb{k},$$

lo cual implica que para toda cara $F \in \Delta$

$$\widetilde{\chi}(lk(F)) = \sum_{i=1}^{d-1} (-1)^i \dim H_i(lk(F); \mathbb{k}) = (-1)^{d-|F|-1},$$

es decir, Δ es Euleriano. □

En conclusión, cuando $|\Delta| \cong S^{d-1}$, los teoremas 2.5.1 y 2.5.2 implican que A_Δ es de Cohen-Macaulay y los teoremas 2.5.2 y 2.5.3 implican que Δ es Euleriano. Por lo tanto, por el corolario 2.3.3 y el teorema 2.4.1, si $|\Delta| \cong S^{d-1}$, Δ satisface las condiciones de la cota superior y por lo tanto hemos terminado de probar el UBTS.

Anotaciones

1. En la demostración del teorema 2.4.1 probamos que si Δ es un complejo simplicial tal que A_Δ es de Cohen-Macaulay, entonces su h -vector es una O -sucesión. Un dato interesante es que dada una O -sucesión h , uno puede construir un complejo simplicial escalonable con h su h -vector y además se puede demostrar que para todo complejo simplicial escalonable Δ , A_Δ es de Cohen-Macaulay. Es decir, $h = (h_0, h_1, \dots, h_d)$ es una O -sucesión si y sólo si existe un complejo simplicial Δ con A_Δ de Cohen-Macaulay cuyo h -vector es h . Esta equivalencia se conoce como el teorema de Kruskal-Katona para complejos de Cohen-Macaulay y se puede encontrar su prueba en el teorema 6 de [23].

2. A pesar de saber cómo caracterizar cuándo un anillo A_Δ es de Cohen-Macaulay a partir de $|\Delta|$, no se conocen propiedades puramente combinatorias sobre Δ para determinar si A_Δ es de Cohen-Macaulay.

Como mencionamos en el punto anterior, se puede probar que si Δ es escalonable, entonces A_Δ es de Cohen-Macaulay. Sin embargo, si debilitamos esta condición y únicamente pedimos que Δ sea particionable, no es necesariamente cierto que A_Δ sea de Cohen-Macaulay, un ejemplo de esto es el complejo simplicial Δ_0 de la figura 2.3.

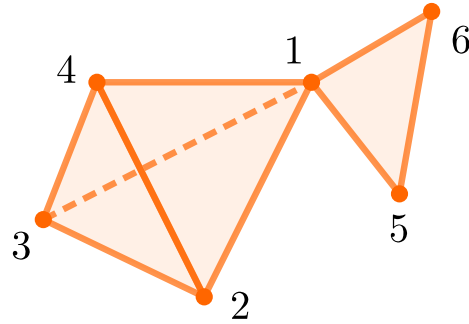


Figura 2.3: Ejemplo de un complejo simplicial Δ_0 particionable que no es Cohen-Macaulay.

Observemos que Δ_0 puede ser particionado de la forma $\Delta_0 = [\emptyset : 156] \sqcup [2 : 123] \sqcup [3 : 134] \sqcup [4 : 124] \sqcup [234 : 234]$. Recordando que $h_i = |\{j : |R_j| = i\}|$, se sigue que el h -vector de este complejo está dado por $h_{\Delta_0} = (1, 3, 0, 1)$, pero por el teorema 5.1.15(a) de [7], si un complejo es de Cohen-Macaulay y $h_j = 0$ para algún j , se debe cumplir que $h_k = 0$ para todo $k > j$, lo cuál no sucede en Δ_0 .

Por el otro lado, podemos preguntarnos qué propiedad cumple Δ si A_Δ es de Cohen-Macaulay. Anteriormente mencionamos que existen triangulaciones de esferas que no son escalonables, lo cuál nos da un ejemplo de un complejo de Cohen-Macaulay que no es escalonable (ver [27]).

En 1979 Stanley conjeturó que todos los complejos de Cohen-Macaulay eran particionables, sin embargo en 2016 se dio un contraejemplo para dicha conjetura en [10]. En este artículo también se exponen algunas preguntas que permanecen abiertas respecto a la caracterización

combinatoria de los complejos de Cohen-Macaulay.

3. La conclusión del teorema de Reisner nos puede servir en principio para triangulaciones particulares de otros espacios topológicos, pues sólo necesitamos que la homología de los links de las caras de la triangulación del espacio satisfagan ciertas propiedades.

Definición 2.5.1. Sea X una n -variedad topológica y Δ un complejo simplicial que triangula a X ($X \cong |\Delta|$). Decimos que esta es una *triangulación combinatoria* de X si la realización geométrica del link de cada i -cara de Δ es homeomorfo a una esfera de dimensión $n - i$.

Dada esta definición, es claro que cualquier triangulación combinatoria de una variedad satisfará el teorema de la cota superior. En 1949, J. H. C. Whitehead [28] demostró que todas las variedades suaves admiten al menos una triangulación combinatoria. Es decir, para cualquier variedad suave siempre podemos encontrar una triangulación que satisfaga el teorema de la cota superior. Sin embargo, no todas las triangulaciones de una variedad suave son combinatorias.

Hay ejemplos de triangulaciones no combinatorias en n -esferas para $n \geq 5$. Por ejemplo, si consideramos M la 3-esfera homológica de Poincaré, tendremos por el teorema de la doble suspensión de Cannon [8], que su doble suspensión $\Sigma^2 M$ es homeomorfa a S^5 , por lo que dada una triangulación de M podemos triangular a S^5 de manera que la realización del link de una de sus caras sea M , la cual a pesar de ser una 3-esfera homológica, no es una esfera topológica pues el grupo fundamental de M es no trivial.

En 1998 Isabella Novik extendió el teorema de la cota superior para complejos simpliciales Eulerianos que realizan variedades homológicas de dimensión impar.

Conclusiones

La aportación final de este trabajo fue la exposición de las distintas formas en las que se ha abordado el teorema de la cota superior dando un enfoque combinatorio dentro de lo posible y tratando de dejar una idea clara de las diversas técnicas utilizadas. Esto con el fin de fomentar en el lector el interés por las conexiones entre la combinatoria con otras áreas de las matemáticas. Para hacerlo, la idea principal de la tesis es mostrar las ideas fundamentales que han sido utilizadas en las pruebas del teorema de la cota superior.

En el primer capítulo dimos una prueba detallada de conjetura de la cota superior para politopos convexos basándonos en los trabajos de Peter McMullen [15] y de Gil Kalai y Noga Alon [2] dejando ver la gran utilidad de algunos conceptos combinatorios tales como escalonabilidad y procesos de colapso.

En el segundo capítulo explicamos por qué no es posible extender de manera inmediata las pruebas del teorema para politopos convexos a triangulaciones de esferas. Se dieron argumentos acerca de las nuevas condiciones en las que nos podíamos apoyar y una estrategia a partir de ello. En este capítulo se expuso la demostración del teorema de la cota superior para triangulaciones de esferas explicando con profundidad las ideas combinatorias y acoplando las ideas presentadas por Stanley en [22] con el enfoque algebraico de Winfried Bruns y Jürgen Herzog en [7]. En la parte algebraica, en lugar de aplicar el criterio de Hironaka para determinar si A_Δ era de Cohen-Macaulay como lo hace Stanley, se conectaron algunos resultados del libro de Herzog y Bruns para obtener el resultado deseado.

Apéndices

Apéndice A

Álgebra multilineal

En este apéndice se dan algunos resultados básicos relacionados con productos tensoriales y el álgebra exterior de un espacio vectorial.

Sean V, W espacios vectoriales sobre un campo \mathbb{k} y sea $F = \mathbb{k}^{V \times W}$ el espacio vectorial libre generado por $V \times W$ (es decir, el espacio vectorial de combinaciones lineales formales de elementos de $V \times W$ con coeficientes en \mathbb{k}). Podemos decir que $\{(v, w) \mid v \in V, w \in W\}$ es una base para F . Sea I el subespacio vectorial de F generado por los elementos que son de alguna de las siguientes formas:

$$\begin{aligned}(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w), \\ (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2), \\ (\alpha v, w) - (v, \alpha w)\end{aligned}$$

donde $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

Definición A.0.1. Sean V, W \mathbb{k} -espacios vectoriales, el *producto tensorial* de V y W , denotado por $V \otimes W$ es el espacio vectorial cociente F/I . Para $v \in V$ y $w \in W$, el elemento de $V \otimes W$ que es la imagen canónica del elemento $(v, w) \in F = \mathbb{k}^{V \times W}$ se denota por $v \otimes w$ y se llama producto tensorial de v y w .

La función canónica $(v, w) \mapsto v \otimes w$ de $V \times W$ a $V \otimes W$ es una función bilinear, es decir, se satisfacen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}(v_1 + v_2) \otimes w &= v_1 \otimes w + v_2 \otimes w, \\ v \otimes (w_1 + w_2) &= v \otimes w_1 + v \otimes w_2, \\ \text{y } \alpha v \otimes w &= v \otimes \alpha w\end{aligned}$$

para cualesquiera $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

Además tenemos que $V \otimes W$ satisface la siguiente propiedad universal: para cualquier función bilinear $\beta : V \times W \rightarrow U$ a un \mathbb{k} -espacio vectorial U , existe una única función lineal de $V \otimes W$ a U tal que $v \otimes w \mapsto \beta(v, w)$. Esta propiedad universal determina el producto tensorial salvo isomorfismo.

Si $\{e_i\}$ y $\{f_j\}$ son bases de V y W , respectivamente, los elementos $\{e_i \otimes f_j\}$ forman una base para $V \otimes W$.

De manera similar, tenemos el producto tensorial $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ de un número finito de espacios vectoriales con su función multilineal universal

$$V_1 \times \cdots \times V_n \rightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_n,$$

que lleva (v_1, \dots, v_n) a $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$. (Recordemos que una función de un producto cartesiano $V_1 \times \cdots \times V_n$ a un espacio vectorial U es multilineal si cuando todos los factores excepto uno son fijos, la función restringida resultante de V_i a U es lineal.)

La construcción del producto tensorial es conmutativa:

$$V \otimes W \cong W \otimes V;$$

distributiva:

$$(V_1 \oplus V_2) \otimes W \cong (V_1 \otimes W) \oplus (V_2 \otimes W);$$

y asociativa:

$$(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W) \cong U \otimes V \otimes W.$$

En particular, podemos definir las potencias tensoriales $T^k(V) = V^{\otimes k} = V \otimes \cdots \otimes V$ para un espacio vectorial V fijo. Por convención, $T^0V = V^{\otimes 0}$ es el campo sobre el que se define el espacio vectorial.

Definición A.0.2. Dado un \mathbb{k} -espacio vectorial V , se define su álgebra tensorial $T(V)$ por

$$T(V) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} T^i(V) = \mathbb{k} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \cdots$$

El producto en $T(V)$ está definido por el isomorfismo canónico

$$T^n V \otimes T^m V \rightarrow T^{n+m} V \quad (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \otimes (u_1 \otimes \cdots \otimes u_m) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes u_1 \otimes \cdots \otimes u_m.$$

Esta multiplicación nos dice que $T(V)$ es un álgebra graduada donde $T^k V$ es el subespacio de grado k .

La construcción del producto tensorial se puede hacer en general para módulos sobre anillos, para leer más al respecto se puede consultar [3] (pág. 29).

Definición A.0.3. Sea V un espacio vectorial y J el subespacio de $T^n V$ generado por los elementos $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ tales $v_i = v_j$ para algún par $i \neq j$. Definimos la n -ésima *potencia exterior* de V como el espacio vectorial cociente $\bigwedge^n V = T^n V / J$. Denotamos por $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ a la imagen de la proyección canónica $T^n V \rightarrow \bigwedge^n V = T^n V / J$.

Notemos que si $n > \dim(V)$, entonces $\bigwedge^n V = 0$.

La potencia exterior $\bigwedge^n V$ viene equipada con una función multilineal alternante

$$V \times \cdots \times V \rightarrow \bigwedge^n V, \quad v_1 \times \cdots \times v_n \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_n,$$

que es universal: para $\beta : V \times \cdots \times V \rightarrow U$ una función multilineal es alternante a un espacio vectorial U , existe una única función lineal de $\bigwedge^n V$ a U que lleva $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ a $\beta(v_1, \dots, v_n)$. Recordemos que una función multilineal alternante si $\beta(v_1, \dots, v_n) = 0$ cuando $v_i = v_j$ para algún par $i \neq j$. Esto implica que $\beta(v_1, \dots, v_n)$ cambia de signo cuando dos vectores son intercambiados.

Si $\{e_i\}$ es una base para V , entonces

$$\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_n\}$$

es una base para $\bigwedge^n V$. (Por convención $\bigwedge^0 V$ es el campo sobre el cual se define V .) Por lo tanto tenemos que si $\dim(V) = m$, entonces $\dim(\bigwedge^n V) = \binom{m}{n}$.

Las potencias exteriores de V nos pueden dar información útil acerca del espacio vectorial tal como en la siguiente proposición.

Proposición A.0.1. Sea V un espacio vectorial de dimensión m y sea $S = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V$. S es un conjunto linealmente dependiente en $\bigwedge^k V$ (y por tanto en $\bigwedge V$) si y sólo si $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = 0$.

Demostración. Supongamos que S es un conjunto linealmente dependiente, entonces existe v_j tal que $v_j = \sum_{i < j} c_i v_i$ y por lo tanto

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_j \wedge \cdots \wedge v_k = v_1 \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{i < j} c_i v_i \right) \wedge \cdots \wedge v_k = \sum_{i < j} v_1 \wedge \cdots \wedge v_i \wedge \cdots \wedge c_i v_i \wedge \cdots \wedge v_k = 0.$$

Luego, si $\{v_1 \cdots v_k\}$ es un conjunto linealmente independiente, sabemos que se puede extender a una base $\{v_1, \dots, v_k, \dots, v_m\}$ para V y $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_m$ es una base para $\bigwedge^m V$ por lo que $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k \neq 0$. \square

Definición A.0.4. Sea V un \mathbb{k} -espacio vectorial y sea I el ideal en su álgebra tensorial, generado por el conjunto $\{v \otimes v \mid v \in V\}$. Se define el *álgebra exterior* de V como el espacio vectorial cociente $\bigwedge V = T(V)/I$.

Se puede ver que

$$\bigwedge V = \bigoplus_{i=0}^{\dim(V)} \bigwedge^i V,$$

por lo que $\bigwedge V$ es un álgebra graduada en donde el producto de dos elementos $(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) \wedge (u_1 \wedge \cdots \wedge u_l)$ está dado por $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \wedge u_1 \wedge \cdots \wedge u_l \in \bigwedge^{k+l} V$.

Apéndice B

Homología

En este apéndice recopilaremos algunas definiciones y resultados básicos de homología, los cuales se pueden encontrar en varios libros de topología algebraica. Las fuentes de dichas definiciones y resultados fueron recopiladas de [12], [24] y [19].

Definición B.0.1. Un *complejo de cadenas* C sobre un anillo A es una sucesión $C = \{C_i, \partial_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ de A -módulos C_i y homomorfismos $\partial_i : C_i \rightarrow C_{i-1}$ tales que $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$, esto se escribe como

$$C : \quad \cdots \rightarrow C_{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \rightarrow \cdots$$

y dado que $\partial_i \partial_{i+1} = 0$, tenemos que $\text{im} \partial_{i+1} \subset \ker \partial_{i+1}$. Luego, definimos el i -ésimo grupo de homología de C por

$$H_i(C) = \ker \partial_i / \text{im} \partial_{i+1}.$$

Definición B.0.2. El *complejo de cadenas aumentado* del complejo de cadenas C es la pareja (C, ϵ) donde $\epsilon : C_0 \rightarrow A$ es un epimorfismo tal que $\epsilon \partial_1 = 0$. Esto se denota por

$$(C, \epsilon) : \quad \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\epsilon} A \rightarrow 0.$$

Los *grupos de homología reducidos* $\widetilde{H}_i(C)$ son los grupos de homología del complejo de cadenas aumentadas (C, ϵ) . Se puede ver que la homología y la homología reducida se relacionan por

$$H_i(C) \cong \begin{cases} \widetilde{H}_i(C), & i > 0 \\ \widetilde{H}_0(C) \oplus A, & i = 0. \end{cases}$$

También notemos que $\widetilde{H}_{-1}(C) \cong A$.

Ahora, consideremos un complejo simplicial Δ con un orden total en sus vértices. Denotaremos por $[v_{k_0}, \dots, v_{k_i}]$ a la i -cara de Δ con vértices $v_{k_0} < \dots < v_{k_i}$ dado el orden inicial en los vértices. Por comodidad siempre denotaremos las i -caras de Δ con vértices ordenados $v_0 < \dots < v_i$ por $[v_0, \dots, v_i]$. Fijemos un anillo A (conmutativo y con unidad). Sea $C_i(\Delta)$ el A -módulo libre generado por las caras (ordenadas) de dimensión i de Δ . Definimos homomorfismos $\partial_i : C_i(\Delta) \rightarrow C_{i-1}(\Delta)$ para $i \geq 0$ definiéndolos en los elementos de la base

por

$$\partial_i[v_0, \dots, v_i] = \sum_{j=0}^i (-1)^j [v_0, \dots, v_{j-1}, \hat{v}_j, v_{j+1}, \dots, v_i],$$

donde \hat{v}_j significa que v_j no está en la $(i-1)$ -cara. Se puede verificar que $\partial_i \partial_{i+1} = 0$. El complejo de cadenas $C(\Delta) = \{C_i(\Delta), \partial_i\}$ se llama *complejo orientado de cadenas* de Δ .

Sea $C_{-1}(\Delta)$ el A -módulo libremente generado por $\{\emptyset\}$ y definamos $\epsilon : C_0(\Delta) \rightarrow C_{-1}(\Delta) \cong A$ por $\epsilon(x) = 0$ para todo vértice $x \in V$. El complejo de cadenas aumentado $(C(\Delta), \epsilon)$ es el *complejo de cadenas aumentado orientado* de Δ sobre A .

Definición B.0.3. El *i -ésimo grupo de homología reducido* de Δ con coeficientes en A , denotado por $\widetilde{H}_i(\Delta; A)$ es el i -ésimo grupo de homología del complejo de cadenas aumentado orientado de Δ sobre A .

Observemos que si $\dim(\Delta) = m$ entonces $C_i(\Delta) = 0$ para todo $i > m$ y por lo tanto, por definición, $H_i(\Delta; A) = \widetilde{H}_i(\Delta; A) = 0$ para todo $i > m$.

Ahora definamos los grupos de homología para espacios topológicos en general. Sea X un espacio topológico y denotemos por $\Delta^i = [e_1, \dots, e_{i+1}] \subset \mathbb{R}^{i+1}$ el simplejo estándar i -dimensional con los vértices ordenados. Un *i -simplejo singular* es una función continua $\sigma : \Delta^i \rightarrow X$. Sea $C_i(X)$ el A -módulo libremente generado por todos los i -simplejos singulares. Los elementos de $C_i(X)$ son sumas formales finitas $\sum_i a_i \sigma_i$ para $a_i \in A$ y σ_i un i -simplejo singular. Los morfismos $\partial_i : C_i(X) \rightarrow C_{i-1}(X)$ se definen por la misma fórmula que usamos anteriormente

$$\partial_i(\sigma) = \sum_j (-1)^j \sigma|[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n]$$

donde se está haciendo implícitamente la identificación de $[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i]$ con Δ^{j-1} preservando el orden de los vértices para ver a $\sigma|[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i]$ como una función de Δ^{i-1} a X , es decir, un $(i-1)$ -simplejo singular. Como anteriormente, se cumple que $\partial_i \partial_{i+1} = 0$ por lo que $C(X) = \{C_i(X), \partial_i\}$ es un complejo de cadenas llamado el *complejo de cadenas singular de X* sobre A . Luego, definimos $\epsilon : C_0 \rightarrow A$ por $\epsilon(\sigma) = 1$ para todos los 0-simplejos singulares σ . Dado este ϵ definimos $\widetilde{C}(X)$ como el *complejo de cadenas singular aumentado de X* sobre A .

Definición B.0.4. El *i -ésimo grupo de homología singular reducido* de X con coeficientes en A , denotado por $\widetilde{H}_i(X; A)$ es el i -ésimo grupo de homología del complejo de cadenas singular aumentado de X sobre A .

Finalmente tenemos la siguiente relación entre la homología simplicial y la singular cuya prueba se puede consultar en [12].

Teorema B.0.1. Sea Δ un complejo simplicial con $X = |\Delta|$. Entonces existe un isomorfismo

$$\widetilde{H}_i(\Delta; A) \cong H_i(X; A)$$

para todo i .

Dado un espacio topológico X y un subespacio Y , definamos $C_i(X, Y) = C_i(X)/C_i(Y)$. Es fácil ver que en el complejo de cadenas singular de X , $C(X) = \{C_i(X), \partial_i\}$, para todo $i \geq 0$, $\partial_i(C_i(Y)) \subseteq C_{i-1}(Y)$; por lo que podemos definir $\partial_i : C_i(X, Y) \rightarrow C_{i-1}(X, Y)$ de manera natural. De esta forma obtenemos un complejo de cadenas $C(X, Y) = \{C_i(X, Y), \partial_i\}$ y por lo tanto podemos definir el i -ésimo *grupo de homología relativo a Y* como $H_i(X, Y) = \ker \partial_i / \text{im} \partial_{i+1}$.

Uno de los invariantes topológicos que usamos en el texto es el siguiente.

Definición B.0.5. Sea Δ un complejo simplicial $(d-1)$ -dimensional. La *característica de Euler* de Δ se define por $\chi(\Delta) = \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i f_i$. Y la *característica reducida de Euler* se define por $\tilde{\chi}(\Delta) = \sum_{i=-1}^{d-1} (-1)^i f_i$ (recordemos que $f_{-1} = 1$ por convención), por lo que $\tilde{\chi}(\Delta) + 1 = \chi(\Delta)$.

Un resultado conocido que relaciona la característica de Euler con los grupos de homología de un complejo simplicial es el siguiente.

Teorema B.0.2. Sea Δ un complejo simplicial y \mathbb{k} un campo, entonces

$$\chi(\Delta) = \sum_{i=0}^{\dim(\Delta)} (-1)^i \dim(H_i(|\Delta|; \mathbb{k})).$$

Apéndice C

Conjuntos parcialmente ordenados

Destinaremos este apéndice a entender de manera combinatoria qué significa que un conjunto parcialmente ordenado sea Euleriano, cómo podemos llegar con esto a las ecuaciones de Dehn-Sommerville y qué tiene que ver la característica de Euler con los complejos simpliciales Eulerianos. La teoría contenida en este apéndice fue consultada en los libros [25] (sección 3.8) y [5] (secciones 2.3 y 3.5).

Definición C.0.1. Un *conjunto parcialmente ordenado* P (o COPO para abreviar) es un conjunto (que por abuso de notación también llamamos P), junto con una relación binaria denotada por \leq , que satisfacen los siguientes tres axiomas:

1. Para todo $t \in P$, $t \leq t$ (reflexividad).
2. Si $s \leq t$ y $t \leq s$, entonces $s = t$ (antisimetría).
3. Si $s \leq t$ y $t \leq u$ entonces $s \leq u$ (transitividad).

Dos elementos $s, t \in P$ son comparables si $s \leq t$ o $t \leq s$. Si $s < t$ y no existe $u \in P$ tal que $s < u < t$, escribimos $s \triangleleft t$. Una *cadena* es un COPO en el que cualesquiera dos elementos son comparables. Un subconjunto C de un COPO P es una *cadena* si C es una cadena con el orden heredado de P . Si la cadena $t_1 < \dots < t_k$ cumple que $t_i \triangleleft t_{i+1}$ para todo i se dice que la cadena es *saturada*. Una cadena C de P se llama *maximal* si no está contenida en ninguna otra cadena de P . La longitud de una cadena C está dada por $\ell(C) = \#C - 1$ y la longitud (o rango) de un COPO P está dada por

$$\ell(P) := \max\{\ell(C) : C \text{ es una cadena de } P\}.$$

La longitud de un intervalo $[s : t] = \{u \in P \mid s \leq u \leq t\}$ se denota por $\ell(s, t)$. Si todas las cadenas maximales en P tienen la misma longitud n decimos que P es *graduado de rango* n . En este caso existe una única *funcion de rango* $\rho : P \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$ tal que $\rho(s) = 0$ si s es un elemento minimal de P y $\rho(t) = \rho(s) + 1$ si $s \triangleleft t$. Si $s \leq t$ también podemos escribir $\rho(s, t) = \rho(t) - \rho(s) = \ell(s, t)$. Si $\rho(s) = i$, decimos que s tiene *rango* i .

Decimos que P tiene $\hat{0}$ si existe $\hat{0} \in P$ tal que $\hat{0} \leq t$ para todo $t \in P$ y de manera similar decimos que tiene $\hat{1}$ si existe $\hat{1} \in P$ tal que $t \leq \hat{1}$ para todo $t \in P$. Denotamos por \hat{P} al

COPO obtenido de P al agregarle $\hat{0}$ y $\hat{1}$ (a pesar de que ya tengan alguno de estos). Por ejemplo, si P es la cadena $1 < 2$, entonces \hat{P} es la cadena $\hat{0} < 1 < 2 < \hat{1}$.

Una *multicadena* del COPO P es una cadena con elementos repetidos, es decir, un multiconjunto cuyo conjunto subyacente es una cadena de P . Una multicadena de longitud n la denotaremos como una sucesión $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ de elementos de P .

Ahora introduciremos una herramienta algebraica que nos ayudará a explotar información combinatoria en los conjuntos parcialmente ordenados.

Definición C.0.2. Dado un COPO P , definimos el álgebra de incidencia $I(P)$ como el \mathbb{C} -espacio vectorial generado por las funciones $\alpha : P \times P \rightarrow \mathbb{C}$ tales que

$$\alpha(s, t) = 0 \text{ cuando } s \not\leq t.$$

Definimos el producto (convolución) de $\alpha, \beta : P \times P \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$(\alpha * \beta)(s, t) := \sum_{r \leq s \leq t} \alpha(r, s)\beta(s, t),$$

y junto con $\delta \in I(P)$ definida por

$$\delta(s, t) := \begin{cases} 1 & \text{si } s = t, \\ 0 & \text{si } s \neq t, \end{cases}$$

se dota a $I(P)$ con la estructura de un \mathbb{C} -álgebra asociativa con unidad δ . La *función zeta* $\zeta \in I(P)$ definida por

$$\zeta(s, t) := \begin{cases} 1 & \text{si } s \leq t \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

jugará un papel importante en nuestros intereses.

Proposición C.0.1. Sea P un COPO finito y $s, t \in P$. Entonces $\zeta^n(s, t)$ es igual al número de multicadenas $s = s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n = t$ de longitud n .

Además, si consideramos $\eta \in I(P)$ definida por

$$\eta(s, t) := \begin{cases} 1 & \text{si } s < t, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

se sigue que $\zeta = \delta + \eta$ y por lo tanto

$$\zeta^n(s, t) = (\delta + \eta)^n(s, t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \eta^k(s, t),$$

lo cual implica lo siguiente.

Proposición C.0.2. Si P es un COPO finito con $\hat{0}$ y $\hat{1}$, $\zeta^n(\hat{0}, \hat{1})$ es un polinomio en n . Este polinomio es conocido como el *polinomio zeta* de P y se denota por $Z_P(n) := \zeta^n(\hat{0}, \hat{1})$.

Cuando P es un COPO finito con $|P| = n$, se puede identificar $I(P)$ con un subálgebra de las matrices triangulares superiores de $n \times n$. Con esta interpretación se puede probar la siguiente proposición.

Proposición C.0.3. Un elemento $\alpha \in I(P)$ es invertible si y sólo si $\alpha(s, s) \neq 0$ para todo $s \in P$.

De la proposición anterior se sigue que la función ζ de un COPO finito P es invertible; su inversa es llamada la *función de Möbius* de P y es denotada por μ . Observemos que se puede calcular de función de Möbius de manera recursiva al desarrollar la igualdad $(\mu * \zeta)(r, t) = \delta(r, t)$ para todo $r, t \in P$, lo cual nos da

$$\mu(r, t) = - \sum_{r < s \leq t} \mu(s, t) = - \sum_{r \leq s < t} \mu(r, s) \text{ para } r < t \text{ y } \mu(r, r) = 1.$$

Afortunadamente se cuenta con la siguiente importante herramienta para calcular las funciones de Möbius.

Proposición C.0.4. (Philip Hall) Sea P un COPO finito y sea \hat{P} el COPO que resulta de añadirle $\hat{0}$ y $\hat{1}$ a P . Para todo i sea c_i el número de cadenas $\hat{0} = t_0 < t_1 < \dots < t_i = \hat{1}$ de longitud i entre $\hat{0}$ y $\hat{1}$. Entonces

$$\mu_{\hat{P}}(\hat{0}, \hat{1}) = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \dots$$

La importancia de la proposición anterior es que demuestra que $\mu(\hat{0}, \hat{1})$ (y por lo tanto $\mu(s, t)$ para cualquier intervalo $[s, t]$) puede ser interpretado como una característica de Euler y por lo tanto conecta la función de Möbius de P con la poderosa maquinaria de topología algebraica. Para ver esta conexión, recordemos que la función reducida de Euler de un complejo simplicial $(d-1)$ -dimensional Δ está definida por $\tilde{\chi}(\Delta) = \sum_{i=-1}^{d-1} (-1)^i f_i(\Delta)$.

Ahora, si tenemos un COPO P , podemos asociarle un complejo simplicial $\Delta(P)$ de la siguiente forma: los vértices de $\Delta(P)$ serán los elementos de P y sus caras serán las cadenas de P . El complejo simplicial $\Delta(P)$ es llamado *complejo de orden* del COPO P y de la proposición anterior se concluye fácilmente el siguiente resultado.

Proposición C.0.5. Sea P un COPO finito. Entonces

$$\mu_{\hat{P}}(\hat{0}, \hat{1}) = \tilde{\chi}(\Delta P).$$

En general, si consideramos $s, t \in \hat{P}$ con $s < t$, de la proposición anterior se sigue que $\mu_{\hat{P}}(s, t) = \tilde{\chi}(\Delta(s, t))$ donde $(s, t) = \{u \in P | s < u < t\}$.

Recordemos que la característica reducida de Euler $\tilde{\chi}(X)$ del espacio $X = |\Delta|$ está definida por

$$\tilde{X} = \sum_i (-1)^i \text{rank} \tilde{H}_i(X, \mathbb{k}),$$

y como se mencionó en el apéndice de homología, es un hecho conocido de topología algebraica que $\tilde{\chi}(\Delta) = \tilde{\chi}(|\Delta|)$ por lo que si tenemos un COPO P , la función de Möbius $\mu_{\hat{P}}$ depende

únicamente del espacio topológico $\Delta(P)$.

Cuando tenemos un complejo simplicial Γ , se le puede asociar un COPO $P(\Gamma)$ conformado por todas las caras propias de Γ ordenadas por contención. La propiedad más importante que nos interesa de este complejo es que $|\Delta(P(\Gamma))| \cong |\Gamma|$. De esta propiedad y la proposición C.0.5 se concluye que

Proposición C.0.6. Si Γ es un complejo simplicial y $P = P(\Gamma)$, entonces

$$\mu_{\hat{P}}(\hat{0}, \hat{1}) = \tilde{\chi}(|\Gamma|).$$

Dado un COPO finito P , podemos observar una curiosa relación entre la función de Möbius de P y la característica de Euler del link de las caras $F \in \Delta(P)$. Consideremos $s < t$ en P y tomemos cadenas saturadas $s_1 < s_2 < \dots < s_j = s$ y $t = t_1 < t_2 < \dots < t_k$ en P donde s_1 es un elemento minimal y t_k un elemento maximal en P . Sea $F = \{s_1, s_2, \dots, s_j, t_1, \dots, t_k\} \in \Delta(P)$. Entonces, $lk(F) = \{G \in \Delta(P) : G \cap F = \emptyset \text{ y } G \cup F \in \Delta(P)\}$ está compuesto por las cadenas contenidas entre s y t (sin incluirlos), es decir, $lk(F)$ es simplemente el complejo $\Delta(s, t)$ (el complejo asociado a la sección (s, t) de P). Por lo tanto, $\mu_{\hat{P}} = \tilde{\chi}(\Delta(s, t)) = \tilde{\chi}(lk(F))$.

Ahora, si consideramos un complejo simplicial Γ que triangula a una variedad, por resultados de topología algebraica se tiene que el link de una cara no vacía de Γ tiene los mismo grupos de homología que una esfera o una bola de dimensión $\dim(lk(F))$. El siguiente corolario nos dice qué sucede en general.

Proposición C.0.7. Sea Γ un complejo simplicial. Supongamos que $|\Gamma|$ es una variedad (con o sin frontera). Sea $P = P(\Gamma)$, entonces

$$\mu_{\hat{P}}(s, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } s \neq \hat{0}, t = \hat{1} \text{ y } s \text{ está en la frontera de } |\Gamma| \\ \tilde{\chi}(|\Gamma|), & \text{si } (s, t) = (\hat{0}, \hat{1}) \\ (-1)^{\ell(s, t)}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Motivados por esta proposición, y la relación dada entre la función de Möbius y la característica de Euler tenemos la siguiente definición.

Definición C.0.3. Sea P un COPO finito graduado con $\hat{0}$ y $\hat{1}$. Decimos que P es Euleriano si para todo $s, t \in P$, $\mu_P(s, t) = (-1)^{\ell(s, t)}$.

Recordemos que en la sección 2.1 definimos un complejo simplicial Euleriano Δ como aquel tal que para toda cara $F \in \Delta$, $\tilde{\chi}(F) = (-1)^{\dim(lk(F))}$. Se puede demostrar que si Γ es un complejo simplicial con $\hat{P}(\Gamma)$ Euleriano, entonces Γ es Euleriano y que si P es un COPO con $\Delta(P)$ Euleriano, entonces \hat{P} es Euleriano. Utilizando esto y el teorema 2.5.2 se puede ver que Γ es Euleriano si y sólo si $\hat{P}(\Gamma)$ es Euleriano.

En la sección 2.5 demostramos utilizando herramientas algebraicas que si Δ $(d - 1)$ -dimensional es un complejo simplicial Euleriano entonces $h_i(\Delta) = h_{d-i}(\Delta)$ para todo $1 \leq i \leq d$. Sin embargo, vamos a ver como demostrar estas igualdades de manera combinatoria utilizando que $\hat{P}(\Delta)$ es Euleriano. Probablemente este hecho fue el que motivó a fijarse en la propiedad de ser Euleriano.

Recordemos que dado un COPO finito P con $\hat{0}$ y $\hat{1}$, se define su polinomio zeta de la forma $Z(P) = \zeta^n(\hat{0}, \hat{1})$.

En combinatoria enumerativa es de gran interés encontrar teoremas de reciprocidad. Es decir, supongamos que uno tiene una clase χ de objetos combinatorios y una función $f(n)$ que cuenta el número de objetos en χ de tamaño n (donde con "tamaño" nos referimos a una cantidad específica naturalmente asociada con los objetos en χ). Digamos que $f(n)$ se comporta de manera agradable, por ejemplo como la restricción de una función polinomial. Entonces, nos interesa calcular $f(-n)$, ver qué nos dice de manera combinatoria y cómo se relaciona con $f(n)$. Este es el caso del polinomio $Z_P(n)$, por lo que aquí veremos algunas interpretaciones que se le pueden dar a sus evaluaciones en números negativos.

Para empezar, se puede calcular que

$$Z(-n) = \zeta^{-n}(\hat{0}, \hat{1}) = \mu^n(\hat{0}, \hat{1}) = \sum \mu(t_0, t_1)\mu(t_1, t_2) \cdots \mu(t_{n-1}, t_n)$$

donde la suma es sobre todas las multicadenas $\hat{0} = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = \hat{1}$.

Dada esta interpretación de $Z(-n)$, se pueden obtener otras interpretaciones al considerar COPOS P con ciertas propiedades. Por ejemplo, si P es Euleriano ($\mu(s, t) = (-1)^{\ell(s,t)}$) cada sumando de la suma es simplemente $(-1)^r$ donde r es el rango de P y por lo tanto $Z_P(-n)$ es igual a $(-1)^r$ por el número de multicadenas de tamaño n que empiezan en $\hat{0}$ y terminan en $\hat{1}$, lo cuál es igual a $\zeta^n(\hat{0}, \hat{1}) = Z_P(n)$. Por lo tanto tenemos el siguiente teorema de reciprocidad.

Teorema C.0.1. Sea P un COPO Euleriano de rango r . Entonces

$$Z_P(-n) = (-1)^r Z_P(n).$$

Una equivalencia que a veces resulta útil es que P es Euleriano si y sólo si para todo $s < t$, el intervalo $[s, t]$ tiene la misma cantidad de elementos de rango par que de rango impar. Un ejemplo conocido de un COPO Euleriano es el látice de caras $\Phi(P)$ de un politopo P . En este caso podemos ver que $Z_{\Phi(P)}(n)$ es el número de multicadenas $\emptyset = F_0 \leq F_1 \leq \cdots \leq F_n = P$ formadas por caras de P . Utilizando algunos trucos se puede demostrar a partir del teorema C.0.1, la siguiente proposición.

Proposición C.0.8. Para un politopo simplicial P d -dimensional y todo $0 \leq j \leq d$,

$$(-1)^d \sum_{k=0}^d (-n)^k f_{k-1} = \sum_{j=0}^d n^j \sum_{k=j}^d (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f_{k-1}.$$

Fijándonos en los coeficientes de n^j en ambos lados, la igualdad anterior implica que para todo $0 \leq j \leq d$ se cumplen las relaciones de Dehn-Sommerville

$$(-1)^d f_{j-1} = \sum_{k=j}^d (-1)^k \binom{k}{j} f_{k-1}.$$

En la prueba de la proposición C.0.8 sólo se utiliza que $\Phi(P)$ es Euleriano y que las caras de P son simplejos por lo que el resultado se puede extender a el COPO de caras de un complejo simplicial Δ Euleriano.

Referencias

- [1] K. ADIPRASITO, *Combinatorial Lefschetz theorems beyond positivity*, 2018, preprint, <https://arxiv.org/abs/1812.10454>.
- [2] N. ALON AND G. KALAI, *A simple proof of the Upper Bound Theorem*, *Europ. J. Combinatorics* **6**, (1985), 211-214.
- [3] M. F. ATIYAH AND I. G. MACDONALD, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass-London-Don Mills, Ont. 1969.
- [4] K. BACLAWSKI AND A.M. GRASIA: *Combinatorial decompositions of a class of rings*, *Advances in Mathematics*, **39**, (1981), 155-184.
- [5] M. BECK AND R. SANYAL, *Combinatorial Reciprocity Theorems*, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 2018.
- [6] H. BRUGGESSER AND P. MANI, *Shellable decompositions of cells and spheres*, *Math. Scand* **29**, (1971), 197-205.
- [7] W. BRUNS AND J. HERZOG, *Cohen-Macaulay Rings*, Cambridge studies on advanced mathematics, **39**, Cambridge University Press, 1993.
- [8] J. W. CANNON, *Shrinking cell-like decompositions of manifolds. Codimension three.*, *Annals of mathematics* **110**, (1979), 83-112.
- [9] M. DEHN, *Die Eulersche Formel im Zusammenhang mit dem Inhalt in der nichteuklidischen Geometrie*, *Math. Ann.* **61**, (1905), 279-298.
- [10] M. DUVAL, B. GOECKER, C. KLIVANS, J. MARTIN, *A non-partitionable Cohen-Macaulay simplicial complex*, *Advances in Mathematics* **299**, (2016).
- [11] B. GRÜNBAUM, *Convex Polytopes*, John Wiley and sons, London-New York-Sydney, 2da edición, 1975.
- [12] A. HATCHER, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [13] V. KLEE, *A combinatorial analogue of Poincaré's duality theorem*, *Canadian J. Math.* **16**, (1964), 517-531.

-
- [14] H. MATSUMURA, *Commutative ring theory*, vol. 8 en Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, segunda edición, 1989.
- [15] P. McMULLEN: *The maximum number of faces of a convex polytope*, *Mathematika*, **17**, (1970), 179-184.
- [16] P. McMULLEN AND G.C. SHEPARD, *Convex Polytopes and the Upper Bound Conjecture*, Cambridge University Press, London Mathematical Society Lecture Notes Series, **3**, (1971).
- [17] E. MILLER AND B. STURMFELS, *Combinatorial Commutative Algebra*, Graduate Text in Mathematics, Springer, 2005.
- [18] J. MUNKRES, *Elements of algebraic topology*, Westview Press, 1984.
- [19] J. MUNKRES, *Topological results in combinatorics*, *Michigan Math. J.* **31**, (1984), 113-128.
- [20] G. A. REISNER: *Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings*, Ph.D. thesis, Univ. of Minn., 1974.
- [21] D. M. Y. SOMMERVILLE, *The relation connecting the angle-sums and volume of a polytope in space of n dimensions*, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **115**, (1927), 103-119.
- [22] R. P. STANLEY: *The Upper Bound Conjecture and Cohen-Macaulay rings*, *Studies in Applied Mathematics*, **54**(2), (1975), 135-142.
- [23] R. P. STANLEY: *Cohen-Macaulay complexes*, *Higher Combinatorics*, Reider, Dordrecht and Boston, 1977, pp. 51-62.
- [24] R. P. STANLEY, *Combinatorics and Commutative Algebra*, Second edition, *Progress in Mathematics*, 41, Birkhäuser Boston, Inc. Boston, MA, 1996.
- [25] R. P. STANLEY, *Enumerative Combinatorics*, Second edition, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, 49, Cambridge University Press, 2011.
- [26] B. STURMFELS AND N. WHITE: *Computing combinatorial decompositions of rings*, *Combinatorica*, **11**(3), (1991), 275-293.
- [27] A. VINCE: *A Non-Shellable 3-Sphere*, *European Journal of Combinatorics*, **6**(1), (1985), 91-100.
- [28] J. H. C. WHITEHEAD, *On C^1 -complexes*, *Annals of mathematics* **41**, (1949), 809-824.
- [29] G. M. ZIEGLER, *Lectures on Polytopes*, *Graduate Text in Mathematics* 152, Springer, 1995.