



Universidad Nacional Autónoma
De México

Facultad De Ciencias

El Punto Crítico de la Cromodinámica
Cuántica para Sistemas Parcialmente
Termalizados

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

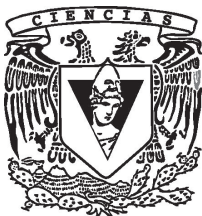
PRESENTA:

Víctor Knapp Pérez

TUTOR

Dr. José Alejandro Ayala Mercado

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2020





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno:

Knapp

Pérez

Víctor

52 07 64 03

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

313039784

2. Datos del tutor:

Dr.

José Alejandro

Ayala

Mercado

3. Datos del sinodal 1:

Dr.

Wolfgang Peter

Bietenholz

4. Datos del sinodal 2:

Dra.

Aurore Marie Pascale Nicole

Courtoy

5. Datos del sinodal 3:

Dr.

Luis Alberto

Hernández

Rosas

6. Datos del sinodal 4:

Dr.

Eleazar

Cuautle

Flores

7. Datos del trabajo escrito:

El Punto Crítico de la Cromodinámica Cuántica para Sistemas Parcialmente
Termalizados

87 p

2020

Agradecimientos

Esta tesis es el producto del apoyo que afortunadamente he contado de la gente que me rodea y a la cual quiero agradecer.

A mi mamá Raquel, gracias por haberme dado todo tu cariño y por enseñarme el valor del trabajo duro y de la constancia, pero sobre todo por ser la principal artífice del hombre que soy ahora.

A mi hermano Beto, por cuidarme, por enseñarme que podemos llegar muy lejos juntos y por hacerme saber que nunca estaremos solos.

A mi papá Víctor Alberto, por todo tu afecto, por inculcarme el gusto a aprender y enseñarme a siempre seguir adelante.

A mis tías Chuy, Mago y Lupe por haber estado siempre ahí para mí y a enseñarme a pensar en la familia.

A mi tío Andrés, mi primo Diego y mi tía Monse, por darme apoyo y siempre creer en mí.

A mi abuelo Andrés y mi abuela Concha por enseñarme que la unión hace la fuerza.

A Eric, gracias por ayudarme a encontrar mi camino, por estar siempre ahí y por ser mi amigo. Gracias por todos los momentos juntos, eres una de las personas más brillantes y trabajadoras que conozco, gracias por todo.

A Iván, por escucharme, ayudarme a tomar mejores decisiones y por hacerme creer en mí. Eres una de las personas más dedicadas y talentosas que conozco. Gracias por ser mi amigo y por todas las risas

A mis amigos Aldo, Daniel y José por las discusiones que tuvimos a lo largo de la carrera, las cuales me han ayudado a ser un mejor científico.

A mi amiga Lucy, por siempre escucharme y brindarme apoyo.

A mis amigos Alan, Elizabeth, Adrica, Benjamín, Carlos y Javier por hacer la universidad una gran etapa de mi vida.

Al Dr. Saúl Ramos, por enseñarme a siempre querer aprender más y por guiarme a lo largo de mi carrera.

Al Dr. Alejandro Ayala, por guiarme en la realización de este trabajo, por resolver siempre mis dudas y darme su indispensable ayuda en la última etapa de mi carrera.

A los Dres. Luis Hernández, Saúl Hernández y Renato Zamora por su enorme apoyo en la realización de este trabajo y por siempre estar abiertos a resolver mis dudas.

A Jorge y José Antonio por auxiliarme en las primeras etapas de este trabajo.

A los Dres. Wolfgang Bietenholz, Aurore Courtoy, Luis Alberto Hernández Rosas y Eleazar Cuautle Flores por sus valiosos comentarios para poder enriquecer esta tesis.

Esta investigación fue realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM AG100219, Exploración teórica y experimental del diagrama de fase de la cromodinámica cuántica. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Índice general

Resumen	ix
1 Introducción	1
2 Introducción a QCD	5
2.1 El Lagrangiano de la QCD y sus simetrías	5
2.2 Consecuencias del rompimiento de la simetría quiral	9
2.3 Libertad asintótica y confinamiento	11
3 Diagrama de Fase de QCD	14
3.1 Teoría de Landau y transiciones de fase	14
3.2 Parámetros de orden en QCD	21
3.3 El Diagrama de Fase Conjeturado de la QCD	23
4 Breve Revisión de Superestadística	27
4.1 Ensembles Canónico y Gran Canónico	27
4.2 Las superestadísticas	31
4.2.1 Distribución uniforme	32
4.2.2 Distribución de dos niveles	33
4.2.3 Distribución Log-Normal	33
4.2.4 Distribución F	34
4.2.5 Distribución χ^2	34
4.3 Superestadística para el Diagrama de fase de QCD	36
5 Conceptos Básicos de Teoría Térmica de Campos	39
5.1 Integral de trayectoria, funciones de correlación y funcional generatriz	39
5.2 Potencial efectivo	41

5.3	Rompimiento espontáneo de la simetría	44
5.4	Formalismo de tiempo imaginario	46
6	Modelo Sigma Lineal acoplado a Quarks y Potencial Efectivo . . .	50
6.1	Lagrangiano del Modelo Sigma Lineal acoplado a Quarks	50
6.2	Potencial efectivo del modelo LSMq	52
6.2.1	Potencial efectivo de materia: Alta temperatura	54
6.2.2	Potencial efectivo de materia: Baja temperatura	58
6.3	Corrección a la constante de acoplamiento g	61
6.3.1	Corrección a la constante de acoplamiento g : Aproximación a Baja Temperatura	63
6.3.2	Corrección a la constante de acoplamiento g : Aproximación a Alta Temperatura	66
6.4	Corrección a la constante de acoplamiento λ	66
6.4.1	Corrección a la constante de acoplamiento λ : Aproximación a Baja Temperatura	68
6.4.2	Corrección a la constante de acoplamiento λ : Aproximación a Alta Temperatura	70
7	Correcciones al Punto Terminal Crítico debidas a la Superes-	
	tadística	72
7.1	Determinación de los parámetros libres del modelo LSMq	72
7.2	Correcciones al CEP por superestadística	73
8	Resumen y conclusiones	79
	Bibliografía	82

El Punto Crítico de la Cromodinámica Cuántica para Sistemas Parcialmente Termalizados

Víctor Knapp Pérez

Resumen

La cromodinámica cuántica (QCD) es la teoría que describe a los componentes de los hadrones conocidos como quarks y a sus mediadores de fuerza conocidos como gluones. Dicha teoría exhibe una transición a altas temperaturas o densidades llamada transición quiral, la cual es responsable de las masas de los hadrones ligeros. En el presente trabajo se presenta un estudio de la transición quiral a partir de un modelo efectivo conocido como modelo sigma lineal acoplado a quarks que emula la transición de QCD. Se presenta el cálculo del potencial efectivo de dicho modelo para clasificar la transición alrededor del diagrama de fase como crossover o de primer orden y así localizar el punto terminal crítico (CEP). Además, se presentan las correcciones a las constantes de acoplamiento del modelo. Debido a que la búsqueda experimental de dicho punto recurre a colisiones de iones pesados relativistas, es importante incluir efectos característicos de sistemas parcialmente termalizados, es decir efectos generados por considerar un volumen y número de partículas finitos. Para esto, se usará el formalismo de superestadística, el cual toma en cuenta que el sistema está formado por diferentes subsistemas que pueden presentar diferentes temperaturas y potenciales químicos. Con esto en mente, se calcularán las correcciones al CEP dado por la superestadística y se discuten los resultados obtenidos. Se encontró que las desviaciones del CEP dadas por la superestadística con respecto al CEP sin superestadística son a lo más del orden de 0.1 MeV en el eje del potencial químico de quarks. Este trabajo es parte del artículo publicado en [1] .

Capítulo 1

Introducción

Fue en la antigua Grecia cuando el filósofo Demócrito propuso el término *átomo* para describir una unidad indivisible de la cual todo lo que nos rodea está hecho. Fue esta la idea que impulsó a numerosos científicos tales como Dalton, Thomson, etc. a proponer cada uno su modelo de la materia. La idea básica que se nos enseña a la mayoría en la educación elemental retrata a la materia compuesta por *átomos*, los cuales están hechos de protones y neutrones indivisibles acumulados en el centro, mientras los electrones indivisibles orbitan alrededor de éstos en una visión similar al de un sistema solar. Esta imagen es errónea e incompleta. Es errónea ya que los electrones no tienen una posición definida como los planetas en el sistema solar sino que se describe a través de una función de onda. Y es incompleta debido a que nunca nos mencionan que los protones están a su vez hechos de otras partículas. En los años 60s y 70s se descubrió que el protón estaba hecho de objetos más fundamentales llamados *quarks* y que éstos están unidos en el núcleo atómico debido a la fuerza nuclear fuerte la cual a su vez está mediada por bosones de norma llamados *gluones*. La teoría actual que describe a la fuerza nuclear fuerte se le conoce como *Cromodinámica Cuántica* o QCD, por sus siglas en inglés “Quantum Chromodynamics”. La QCD es una teoría cuántica de campos. Ésta propone que los quarks son excitaciones de un campo de Dirac, mientras que los gluones son excitaciones de un campo de espín 1 similar al campo de Maxwell. Sin embargo, a diferencia de los fotones, los gluones interactúan entre sí a través de la carga de color que se presenta en tres variedades que se pueden llamar, por ejemplo, rojo, azul y verde. Además,

la fuerza nuclear fuerte, siendo la más intensa de las fuerzas conocidas, presenta el fenómeno de confinamiento. Este fenómeno consiste en que en la naturaleza no observamos quarks o gluones libres sino en grupos con carga de color neta cero. En estos grupos de quarks y gluones encontramos que la diferencia entre quarks y anti-quarks son 2 (para mesones) o 3 (para hadrones). A estos quarks se le conocen como *quarks de valencia*. A pesar del confinamiento, se cree que a muy altas temperaturas o muy altas densidades bariónicas es posible desconfinar a los quark y gluones para tener un nuevo estado de la materia llamado *plasma de quarks y gluones* o QGP, por sus siglas en inglés “Quark-Gluon Plasma”, en donde los quarks no forman hadrones o mesones [2]. Este cambio de estado de la materia puede corresponder a una transición termodinámica. Además, puede existir otra transición de interés en la QCD llamada *transición quiral*. Ésta se cree da lugar a la masa de los hadrones ligeros a partir de los quarks ligeros (la masa de los quarks ligeros están en el rango 2 – 100 MeV, mientras que la masa de los hadrones ligeros es del orden de 1 GeV). O inversamente, da lugar a la masa de los quarks ligeros a partir de los hadrones ligeros. Esta transición es el objeto de estudio de este trabajo. Se cree que a densidades bariónicas cercanas a cero y temperaturas altas la transición quiral fue del tipo *crossover* mientras que a temperaturas bajas y densidades bariónicas grandes la transición quiral se conjetura es de primer orden, tal como es revisado en [3]. El punto en el que la transición pasa (supuestamente) de ser un *crossover* a primer orden se le conoce como *punto terminal crítico* CEP, por sus siglas en inglés, “Critical End Point”, o simplemente punto crítico. Es importante recalcar que la existencia de este punto aún es objeto de estudio.

Debido a la naturaleza no-perturbativa de la QCD, salvo a altas energías, no nos ha sido posible estudiar tal teoría de la misma manera en la que estudiamos la electrodinámica cuántica. Computacionalmente, una de las herramientas más usadas actualmente es la de *Lattice QCD* [4–9]. Sin embargo, el problema del signo [10] ha hecho difícil el estudio de las transiciones de fase de QCD a densidades bariónicas finitas. Es por esto que varias alternativas han sido usadas para poder estudiar la dinámica de los quarks, gluones y, en particular, de la transición quiral. Por esta razón es que también se ha optado por alternativas teóricas. Algunas de

estas alternativas son el uso de las ecuaciones de Dyson-Schwinger [11–14], técnicas holográficas [15–18], reglas de suma [19, 20] y modelos que emulan QCD tales como el modelo Nambu-Jona-Lasinio, [21–25], y el modelo sigma lineal acoplado a quarks [26–28] que será usado en este trabajo.

Experimentalmente, el estudio de la transición quiral y de la transición de desconfinamiento se ha realizado principalmente en los experimentos de colisiones de iones pesados relativistas. Tales experimentos se empezaron a realizar en el acelerador conocido como “Alternating Gradient Synchrotron” (AGS) en Brookhaven y en el “Super Proton Synchrotron” (SPS) en el CERN a energías de centro de masa 5 y 17 GeV por nucleón respectivamente. Después, se realizó el experimento ALICE, por sus siglas en inglés “A Large Ion Collider Experiment”, a energías de 2.76 TeV. Además, también se realizaron los experimentos PHENIX y STAR en RHIC, por sus siglas en inglés “Relativistic Heavy Ion Collider”, en Brookhaven con energías entre 7.7 GeV y 39 GeV para PHENIX y de 62.4 GeV para STAR [29, 30]. Algunos de los futuros laboratorios donde se llevarán a cabo este tipo de experimentos son, por ejemplo, el “Facility for Antiprotons and Ion Research” (FAIR) en Alemania [31] y el “Nuclotron-based Ion Collider fAcility” (NICA) en Rusia [32].

Debido a que el CEP de la QCD se conjetura está a densidades bariónicas altas, la búsqueda experimental de dicho punto se realiza en las colisiones de iones pesados relativistas. En estos sistemas es importante considerar posibles fluctuaciones termodinámicas en el sistema. Por esta razón, es importante estudiar las transiciones de la QCD en un escenario fuera del equilibrio termodinámico. La *superestadística* [33, 34] es un formalismo para estudiar sistemas termodinámicos que presentan fluctuaciones espaciales en alguna de las variables intensivas como la temperatura o el potencial químico. En un trabajo previo [35] se ha estudiado el comportamiento del CEP en este escenario cuando se consideran solamente fluctuaciones en la temperatura. Es el objetivo principal de estudio de este trabajo determinar el comportamiento del CEP cuando se consideran fluctuaciones tanto en la temperatura T como en el potencial químico bariónico μ_B o, de manera equivalente, en la densidad bariónica usando el formalismo de superestadística junto con el modelo sigma lineal acoplado a quarks LSMq, por sus siglas en inglés “Linear Sigma Model Coupled to Quarks”.

El presente trabajo se divide de la siguiente manera. En el capítulo 2 se presentan los conceptos básicos de la teoría de la QCD para entender el rompimiento de la simetría quiral. En el capítulo 3 se describe la teoría de las transiciones de fase de Landau para poder establecer la conexión entre el rompimiento de la simetría quiral en QCD. Además, se presenta el *Diagrama de Fase de QCD*, el cual es un gráfica que muestra las diferentes transiciones de QCD en un plano T - μ_B . En el capítulo 4 se explica el formalismo de la superestadística y se aplica al potencial efectivo de cualquier teoría cuántica de campos. En el capítulo 5 se da una introducción a la teoría térmica de campos. En el capítulo 6 se define el LSMq, se presenta el cálculo de su potencial efectivo en las aproximaciones de alta y baja temperatura así como las correcciones a las constantes de acoplamiento a alta y baja temperatura. En el capítulo 7 se analizan las correcciones dadas por la superestadística al CEP. Finalmente, en el capítulo 8 se dan las conclusiones obtenidas de este trabajo. En este trabajo se usarán unidades tales que $\hbar = 1$, $c = 1$, $k_b = 1$, en donde \hbar es la constante de Planck reducida, c la velocidad de la luz y k_b la constante de Boltzmann.

Capítulo 2

Introducción a QCD

En este capítulo se discute la dinámica de los quarks y de los gluones dados por el Lagrangiano de QCD. Se discuten las simetrías de QCD con énfasis en la simetría quiral y cómo ésta es rota espontáneamente y explícitamente. Al final se discute la libertad asintótica y el desconfinamiento.

2.1. El Lagrangiano de la QCD y sus simetrías

La QCD es una teoría cuántica de campos con simetría de norma $SU(3)_C$, donde la C significa de color. Los quarks son partículas masivas de espín 1/2 por lo que son excitaciones de un campo de Dirac ψ . Los quarks pertenecen a la representación fundamental del grupo $SU(3)_C$ y los antiquarks $\bar{\psi}$ son el complejo conjugado de la representación fundamental de $SU(3)_C$. En la naturaleza hay seis sabores de quarks llamados up, down, strange, charm, bottom y top, por lo que hay seis campos de Dirac por los quarks. Sin embargo, dependiendo de la escala de energía puede ser que se manifiesten físicamente menos quarks, a pesar de que los campos de los seis quarks estén ahí. Por lo que se denota al número de sabores que se manifiestan como N_f .

Los gluones son los bosones de norma no masivos y pertenecen a la representación adjunta del grupo $SU(3)_C$. Debido a que la dimensión de la representación fundamental de $SU(3)_C$ es tres, entonces existen tres tipos de quarks para cada sabor que representan los tres tipos de carga de color comúnmente conocidas como

azul, verde o rojo. Además, como la dimensión de la representación adjunta es ocho, entonces hay 8 tipos de gluones. Todo esto se resume en el Lagrangiano [36–38] dado por

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_i^a (i\gamma^\mu (\partial_\mu \delta^{ab} + ig_s A_\mu^{ab}) - m_i \delta^{ab}) \psi_i^b - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^\alpha G_{\alpha}^{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

en donde

$$G_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha + g_s f^{\alpha\beta\sigma} A_\mu^\beta A_\nu^\sigma, \quad (2.2)$$

con $A_\mu^{ab} = A_\mu^\sigma (\tau_\sigma)^{ab}$ el tensor gluónico; los índices de color de los quarks son $a, b = 1, 2, 3$; los índices de color de los gluones son $\alpha, \beta, \sigma = 1, 2, \dots, 8$; y los índices $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ son índices espacio-temporales; g_s es la constante de acoplamiento de QCD, m_i representa las masas de los N_f quarks y τ_σ son las matrices de Gell-Mann. El campo vectorial A_μ representa el campo gluónico y los campos de Dirac ψ_i representan los i quarks. Además, $f^{\alpha\beta\sigma}$ se conocen como las *constantes de estructura* del álgebra de $SU(3)$. Debido a que $SU(3)$ es un grupo de Lie no Abeliano, se puede definir a cualquier representación T^α del álgebra de $SU(3)$ con los conmutadores

$$[T^\alpha, T^\beta] = if^{\alpha\beta\sigma} T^\sigma. \quad (2.3)$$

En este caso la representación escogida es la representación fundamental que corresponde a $T^\alpha = \frac{\tau^\alpha}{2}$.

El Lagrangiano de (2.1) es invariante bajo las transformaciones dadas por

$$\psi_j(x) \rightarrow e^{i\theta_j} \psi_j(x), \quad (2.4)$$

en donde θ_j es un ángulo global para cada uno de los $j = 1, 2, \dots, N_f$ sabores. Debido al Teorema de Noether, sabemos que para cada transformación global que deja invariante el Lagrangiano de una teoría de campo, existe una carga conservada. En este caso, la carga conservada es el número cuántico de sabor para cada uno de los N_f sabores. Por lo que en interacciones donde sólo actúa la fuerza nuclear fuerte el sabor de los quarks en una reacción no cambia.

Otras simetrías [39] importantes del Lagrangiano de QCD (2.1) son las simetrías discretas de paridad P , inversión temporal T , conjugación de carga C , simetría de Poincaré, y la simetría de norma de $SU(3)_C$. Es decir, que las situaciones en donde

sólo hay interacción nuclear fuerte podemos intercambiar las coordenadas espaciales $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ (simetría P), la coordenada temporal $t \rightarrow -t$ (simetría T) o cambiar la materia por la antimateria, y viceversa (simetría C), de manera independiente y en cualquier combinación sin notar un cambio físico. También las interacciones fuertes son invariantes bajo el grupo de Poincaré, es decir rotaciones espaciales, boosts de Lorentz, y traslaciones. Y por supuesto, la fuerza nuclear fuerte es invariante bajo transformaciones locales del grupo de color $SU(3)_C$.

Además, si la masa de los quarks m_i es igual para todos los quarks, entonces el Lagrangiano (2.1) es invariante bajo las transformaciones del grupo $SU(N_f)$ dadas por

$$\begin{aligned}\psi_i &\rightarrow \psi'_i = e^{-i\alpha^A (T^A)_i^j} \psi_j, \\ \bar{\psi}_i &\rightarrow \bar{\psi}'_i = \bar{\psi}_j e^{i\alpha^A (T^A)_i^j},\end{aligned}\tag{2.5}$$

en donde $A = 1, \dots, N_f^2 - 1$ y T^A son matrices de $N_f \times N_f$ que corresponden a los generadores del grupo $SU(N_f)$, las cuales se pueden elegir como las matrices de Gell-Mann para $SU(3)$ (o a las matrices de Pauli para $SU(2)$).

De acuerdo al teorema de Noether, existen $N_f^2 - 1$ corrientes conservadas $j_\mu^A(x)$ que dan lugar al mismo número de cargas conservadas $Q^A(x)$. Las cargas conservadas siguen el álgebra de $SU(N_f)$, que de manera análoga a $SU(3)$ en la ec. (2.3) siguen los conmutadores

$$[Q^A, Q^B] = ih^{ABC} Q^C,\tag{2.6}$$

con h^{ABC} las constantes de estructura de $SU(N_f)$ y $A, B, C = 1, \dots, N_f^2 - 1$. No obstante, las masas de los quarks no son iguales. Es común dividir a los quarks en dos grupos: los *quarks ligeros* que son los quarks up, down y strange cuya diferencia es del orden de ~ 90 MeV, y los *quarks pesados* que son el bottom, charm y top. Es posible considerar la simetría de sabor dada, por las transformaciones de la ec. (2.5), de manera aproximada si la diferencia de masas es menor a la escala de QCD $\Lambda_{QCD} \sim 300$ MeV [38]. De acuerdo a los recientes valores de las masas registrados en el PDG (“Particle Data Group”) [40], la mínima diferencia de masa en el grupo de quarks pesados es de ~ 1 GeV. Por lo tanto, la simetría de sabor $SU(N_f)$, sólo puede existir aproximadamente para los quarks up y down, o los tres quarks ligeros.

Por otro lado, es posible definir otro tipo de transformaciones llamadas *transformaciones axiales* dadas por

$$\begin{aligned}\psi_i &\rightarrow \psi'_i = e^{-i\alpha^A (T^A)_i^j \gamma_5} \psi_j \\ \bar{\psi}_i &\rightarrow \bar{\psi}'_i = \bar{\psi}_j' e^{i\alpha^A (T^A)_i^j \gamma_5}.\end{aligned}\quad (2.7)$$

Usando las transformaciones axiales (2.7) con un ángulo infinitesimal $\delta\alpha^A$ en el Lagrangiano (2.1) con masas iguales $m_i = m$ se obtiene

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + 2im\delta\alpha^\alpha \bar{\psi}^i (T^A)_i^j \psi_j. \quad (2.8)$$

Por lo que la *simetría axial* sólo es posible si las masas de los quarks son cero. Suponiendo por un momento que son cero, por el teorema de Noether obtenemos $N_f^2 - 1$ corrientes conservadas $j_{5\mu}^A(x)$ con sus correspondientes cargas conservadas Q_5^A . A diferencia de las cargas conservadas de sabor, las transformaciones axiales no cumplen reglas de conmutación similares a las de (2.6) y, por lo tanto, no forman un álgebra de Lie. Sin embargo, es posible definir las cargas izquierdas Q_L^A y derechas Q_R^A como

$$Q_L^A = \frac{1}{2}(Q^A - Q_5^A), \quad Q_R^A = \frac{1}{2}(Q^A + Q_5^A), \quad (2.9)$$

las cuales cumplen los conmutadores

$$[Q_L^A, Q_L^B] = ih^{ABC} Q_L^C, \quad [Q_R^A, Q_R^B] = ih^{ABC} Q_R^C, \quad [Q_R^A, Q_L^B] = 0. \quad (2.10)$$

Por lo tanto, las nuevas cargas conservadas izquierdas y derechas cumplen el álgebra de $SU(N_f)$ de manera independiente, pues no se mezclan entre sí. Así, se define el grupo quiral como el grupo formado por las transformaciones izquierdas y derechas $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$. Es una simetría de QCD si las masas de los quarks son cero. Sin embargo, debido a que las masas de los quarks no son cero en la naturaleza, entonces la simetría es rota explícitamente pero ya que las masas de los quarks ligeros son mucho menores que la escala Λ_{QCD} , entonces es una *simetría aproximada*.

2.2. Consecuencias del rompimiento de la simetría quiral

Una carga conservada Q cuánticamente es un operador que actúa sobre los estados de la teoría. Todos los operadores de un grupo de simetría U se pueden expresar como

$$U = e^{-i\alpha Q}. \quad (2.11)$$

Si hacemos una transformación infinitesimal, es decir con $|\alpha| \ll 1$, en un campo cuántico ϕ , entonces la transformación del grupo de simetría se convierte en

$$U^\dagger \phi U = \phi + i\alpha [Q, \phi] - \frac{\alpha^2}{2} [Q, [Q, \phi]] + \dots, \quad (2.12)$$

en donde se ha usado el teorema de Baker-Campbell-Hausdorff [41].

Así, definimos a la transformación infinitesimal $\delta\phi$ del campo cuántico dada por Q como

$$\alpha [Q, \phi] = \delta\phi. \quad (2.13)$$

Hay dos tipos de simetrías. El primero se le conoce como *modo de Wigner-Weyl* y se lleva a cabo cuando el operador del grupo de simetría deja invariante el vacío, es decir

$$U |0\rangle = |0\rangle. \quad (2.14)$$

Al segundo se le conoce como *modo de Nambu-Goldstone* y ocurre cuando el vacío no es invariante bajo el operador del grupo de simetría,

$$U |0\rangle \neq |0\rangle. \quad (2.15)$$

Desarrollando, $U = 1 - i\alpha Q$ para $|\alpha| \ll 1$, se obtiene que los modos de Wigner-Weyl y Nambu-Goldstone corresponden a

$$Q |0\rangle = 0, \quad (2.16)$$

$$Q |0\rangle \neq 0, \quad (2.17)$$

respectivamente.

Fue demostrado por Vafa y Witten [42] que las simetrías de sabor de la sección pasada ocurren en el modo de Wigner-Weyl. Como los operadores Q^A y Q_5^A tienen

paridades opuestas, si las simetrías axiales fueran realizadas también en el modo de Wigner-Weyl, entonces se esperaría que todos los hadrones ligeros tuviesen un compañero de paridad opuesto y con masa aproximadamente la misma, pues la simetría quiral es aproximada. Sin embargo, como se ve en la Figura 2.1, la diferencia de masas entre los compañeros de paridad es muy grande como para considerarlos estados de un multiplete de paridad. Por ejemplo, la masa de los piones está entre 135 – 139 MeV y la masa del posible bosón sigma se ha predicho que es de al menos 400 MeV [40]. Así, la simetría axial se realiza en el modo de Nambu-Goldstone y se dice que la simetría quiral se ha roto *cuasi-espontáneamente*. El adjeivo “cuasi” se debe a que la simetría no es exacta debido a las masas distintas de cero de los quarks ligeros. Por lo tanto, sólo es una simetría aproximada, la cual se ha roto cuasi-espontáneamente.

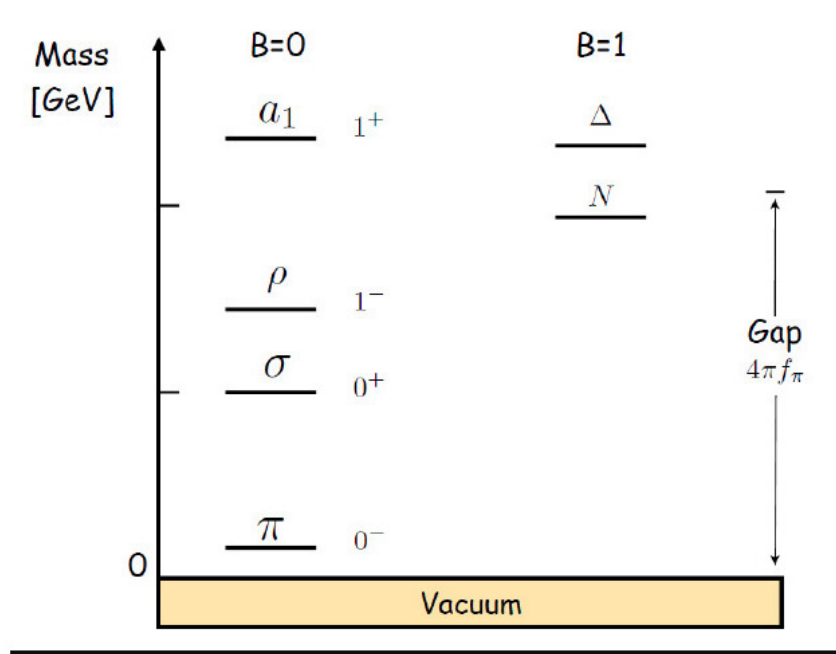


Figura 2.1: Masas de los hadrones menos masivos con sus respectivos candidatos a compañeros de paridad [38].

Por el teorema de Goldstone, por cada simetría continua rota espontáneamente se espera la aparición de un *bosón de Goldstone* no masivo con las mismas características que el operador de la simetría que se ha roto espontáneamente, éstas son las de un bosón pseudoescalar. Para el caso de $N_f = 2$, el número de bosones de

Goldstone son 3 y corresponden a los tres piones π_0, π_+, π_- . La masa de los piones y su pequeña diferencia entre sí se debe a la masa diferente de cero y diferente entre los quarks up y down. Por lo tanto, los piones son *pseudobosones de Goldstone*. El fenómeno de rompimiento espontáneo de la simetría y la aparición de bosones de Goldstone se verá más a fondo en el Capítulo 5.

2.3. Libertad asintótica y confinamiento

Dos de las características más importantes de QCD son la libertad asintótica y confinamiento. El confinamiento es la agrupación de los quarks y gluones en conjuntos con dos (mesones) o tres (bariones) quarks de valencia que tienen carga de color neta cero o *blanca*. Este mecanismo se debe al hecho de que los gluones interactúan entre sí y al corrimiento de la constante de acoplamiento de QCD $\alpha_s = g_s/4\pi$, el cual genera un potencial lineal en distancias del orden de $\gtrsim 1$ fm, por lo que separar un grupo de quarks en quarks libres requeriría energía infinita [43, 44]. Se puede analizar la constante de acoplamiento a orden de un lazo que está dada por

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\tilde{\mu}^2)}{1 + \frac{11N_c - 2N_f}{12\pi} \alpha_s(\tilde{\mu}^2) \ln(Q^2/\tilde{\mu}^2)}, \quad (2.18)$$

en donde Q es el momento transferido, $\tilde{\mu}$ es una escala de energía de referencia, $N_c = 3$ es el número de colores en QCD [38]. Para que la ec. (2.18) sea válida, se asume que la escala de referencia $\tilde{\mu}$ es mucho más grande que el momento transferido Q para que se puedan hacer cálculos perturbativos. De la ec. (2.18) vemos que cuando Q^2 crece, $\alpha_s(Q^2)$ disminuye, y viceversa. A este fenómeno se le conoce como *libertad asintótica*. Si se define Λ_{QCD} como la escala a la que el denominador de (2.18) se hace cero, entonces

$$\Lambda_{QCD}^2 = \tilde{\mu}^2 e^{-\frac{12\pi}{(11N_c - 2N_f)\alpha_s(\tilde{\mu})}}. \quad (2.19)$$

Así, Λ_{QCD} depende del esquema de renormalización usado. En el esquema de renormalización de substracción mínima modificada o \overline{MS} , por sus siglas en inglés “Minimal Subtraction” $\Lambda_{QCD} \sim 300$ MeV [38]. La constante de acoplamiento se escribe en términos de Λ_{QCD} como

$$\alpha_s = \frac{12\pi}{11N_c - 2N_f \ln(Q^2/\Lambda_{QCD}^2)}. \quad (2.20)$$

El régimen en donde $Q^2 \gg \Lambda_{\text{QCD}}^2$ se conoce como el *régimen perturbativo*. Comúnmente se toma a partir de $Q^2 \simeq 1 \text{ GeV}$. La constante de acoplamiento de QCD disminuye conforme la transferencia de momento aumenta. Este comportamiento se muestra en la Figura 2.2. Sin embargo, para $Q^2 < \Lambda_{\text{QCD}}^2$, es decir en el *régimen no-perturbativo*, a pesar de ya contar con estudios sobre esto, aún no hay consenso sobre el comportamiento de $\alpha_s(Q^2)$. Representa uno de los retos actuales de la física de partículas contemporánea. Conocer el comportamiento de α_s a bajas energías podría ayudar a poder establecer teóricamente el mecanismo de confinamiento el cual también se desconoce. A pesar de que una constante de acoplamiento grande es necesaria para que ocurra el confinamiento, aun no se sabe si α_s se congela en un valor fijo a bajas energías o se va hacia infinito [45].

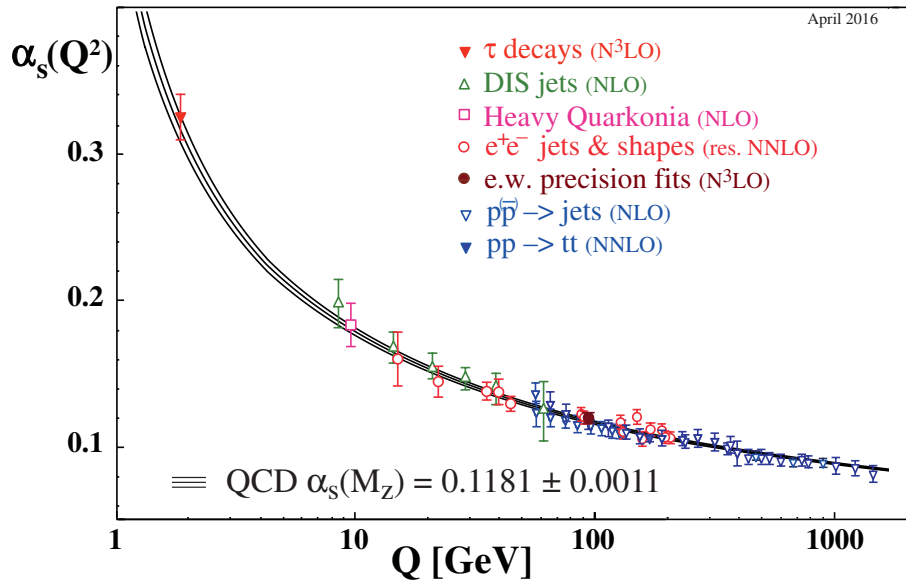


Figura 2.2: Corrimiento de la constante de acoplamiento de QCD α_s predicho teóricamente junto con algunas mediciones [40].

Hemos visto en este capítulo que los quarks presentan dos fenómenos importantes, el rompimiento espontáneo y explícito de la simetría quiral y el de confinamiento. Como se mencionó en la Introducción, a muy altas energías, los quarks se desconfinan debido a que la constante de acoplamiento disminuye drásticamente, es decir,

la existencia de estados de partícula con carga de color no neutra es posible. Así, el cambio de estado de la materia de confinada a desconfinada o con simetría quiral rota a restaurada representan transiciones termodinámicas cuando se toman en cuenta la temperatura y el potencial químico bariónico del sistema. Conocer cómo se realizan estas transiciones es de suma importancia para el estudio de materia nuclear, el estudio del universo temprano y objetos astronómicos como las estrellas de neutrones. Toda esta información de las transiciones de fase de QCD se puede organizar en el *Diagrama de Fase de QCD* que se presenta en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Diagrama de Fase de QCD

En este capítulo se presenta la teoría de transiciones de fase de Landau necesaria para entender las posibles transiciones termodinámicas de QCD. Después, se presentan las diferentes transiciones en QCD y sus respectivos parámetros de orden. Luego, se presenta el conjeturado diagrama de fase de la QCD correspondiente a la transición quiral.

3.1. Teoría de Landau y transiciones de fase

Las transiciones de fase ocurren desde la ebullición del agua líquida a gaseosa en nuestro día a día hasta fenómenos más exóticos como la transición de helio líquido a un superfluido. En todas las transiciones de fase la característica común es la aparición de no-analiticidades (discontinuidades o infinitos) en las derivadas de la energía libre del sistema termodinámico. Físicamente, se puede interpretar estas no-analiticidades como cambios abruptos físicos en el sistema. Otro componente en común en las transiciones de fase que Landau descubrió es que poseen un *parámetro de orden* m . Un parámetro de orden es una función que depende de las variables termodinámicas intensivas, (tales como la temperatura, potencial químico, densidad de magnetización, etc.) que toma un valor fijo (comúnmente se escoge de manera que sea cero) en una fase y cambia de valor en la otra fase. Un ejemplo de parámetro de orden es la magnetización en un sistema de espines en dos dimensiones sin campo externo $H = 0$, el cual está compuesto por una cuadrícula en donde cada punto hay

un espín que puede apuntar hacia arriba o hacia abajo. Si denotamos a un espín arriba como $s_i = +1$ y un espín abajo como $s_i = -1$ en el sitio i de la cuadrícula, entonces el Hamiltoniano del sistema está dado por

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - H \sum_i s_i, \quad (3.1)$$

en donde el símbolo $\langle ij \rangle$ significa que se tomará el promedio sobre los vecinos en la cuadrícula más próximos y J es un parámetro real distinto de cero que cuantifica la interacción entre los espines [46]. Este sistema con el hamiltoniano (3.1) se conoce como *modelo de Ising*. El sistema exhibe una transición de fase a la temperatura crítica T_c y consiste en que para $T < T_c$ la mayoría de los espines del sistema apuntarán en la misma dirección ya sea hacia arriba o hacia abajo como se muestra en la Figura 3.1a y para $T > T_c$ no habrá ninguna mayoría de espines del sistema apuntando hacia arriba o abajo como se ve en la Figura 3.1b. En este caso podemos identificar el parámetro de orden con la magnetización M . La magnetización M está dada por

$$M = \frac{1}{N} \sum_i \langle s_i \rangle = \frac{1}{N\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial H}, \quad (3.2)$$

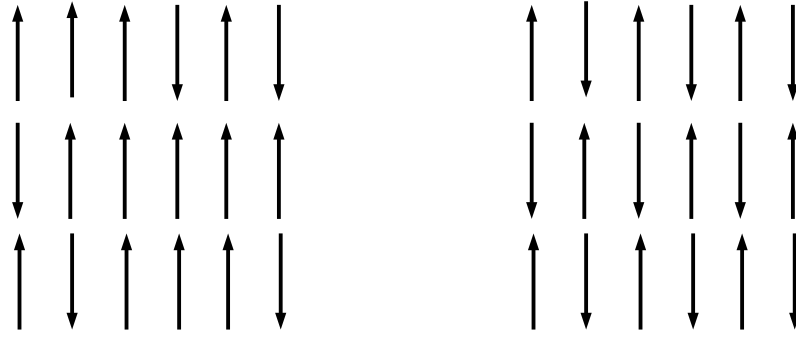
en donde N es el número de sitios en la retícula, $\beta = 1/T$ y Z es la función de partición dada por

$$Z = \sum_{\{s_i\}} e^{-\beta E[s_i]}, \quad (3.3)$$

en donde el símbolo $\{s_i\}$ denota la suma sobre todos los posibles estados del sistema con los diferentes s_i en cada sitio.

Como se mencionó al principio de esta sección, las transiciones de fase exhiben una no-analiticidad en su energía libre. En el caso del modelo de Ising una cantidad que cambia de manera discontinua es el calor específico. Como el calor específico es la segunda derivada de la energía libre respecto a la temperatura, entonces está ocurriendo una transición de fase. Además, será de segundo orden como se justificará más adelante.

Otro punto importante de la transición de fase exhibida en la Figura 3.1 es que para temperaturas mayores a la temperatura crítica existe una simetría dado que el sistema se mantiene invariante si cambiamos arriba por abajo. Sin embargo,



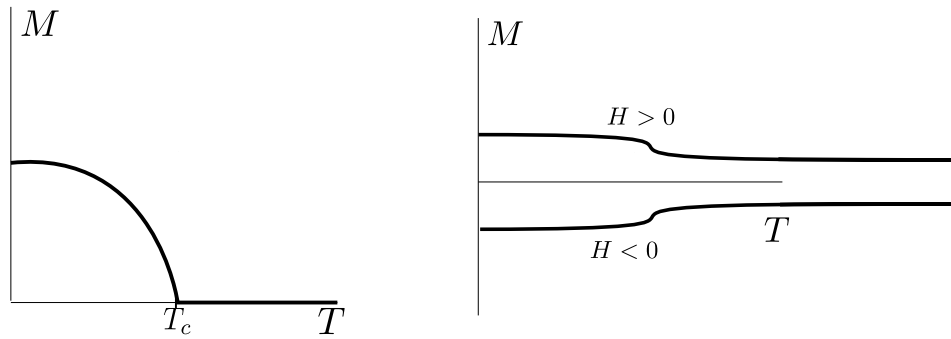
(a) Modelo de Ising con magnetización $M \neq 0$ a $T < T_c$.

(b) Modelo de Ising con magnetización $M = 0$ a $T > T_c$.

Figura 3.1: Cambio de la magnetización en el modelo de Ising de dos dimensiones debido a la temperatura.

para temperaturas menores a la temperatura crítica sí se puede diferenciar el arriba del abajo pues la mayoría de los espines apuntan en una dirección preferida. Este fenómeno es el mismo que nos encontramos en la sección 2.2 y sucede que se ha roto una simetría de forma espontánea. Así, Landau estableció que en ciertos casos se puede relacionar una transición de fase con el rompimiento espontáneo de una simetría.

Una vez establecido la definición de parámetro de orden y cómo se aplica a las transiciones de orden, se usará para clasificar las transiciones de fase. Las transiciones de fase se pueden clasificar como de *primer orden* si el parámetro de orden cambia discontinuamente y de *segundo orden* si lo hace de forma continua [47]. Por ejemplo, la transición de la Figura 3.1 es de segundo orden porque el parámetro de orden, que en este caso es la magnetización, cambia de forma continua desde cero, como se ve en la Figura 3.2a. Por otro lado, si tenemos el sistema de espines de la Figura 3.1 con un campo magnético externo $H \neq 0$ tenemos las curvas de la Figura 3.2b. Si variamos el campo magnético externo H de positivo a negativo vemos que tenemos un brinco discontinuo del parámetro de orden que en este caso es la magnetización. Además, es importante recalcar que para $H \neq 0$ la transición de primer orden no pasa de un estado con simetría restaurada a uno con simetría rota, sino que en ambos casos la simetría ya está rota. Esto refleja el hecho de que no todas las transiciones



(a) Magnetización M como función de la temperatura T sin campo magnético externo $H = 0$ [46].

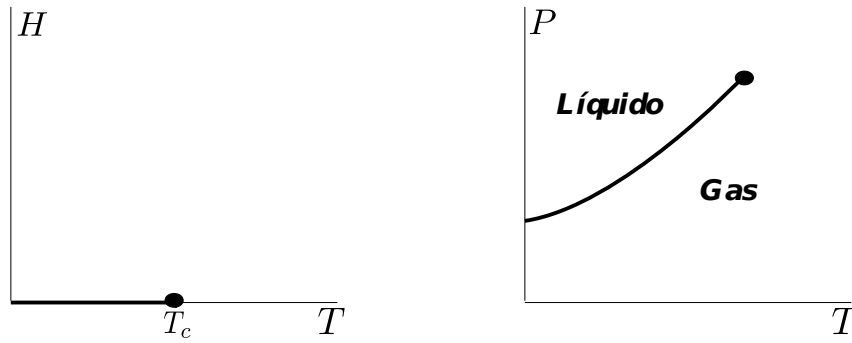
(b) Magnetización M como función de la temperatura T con campo magnético externo $H \neq 0$ [46].

Figura 3.2: Magnetización en el modelo de Ising dos dimensional.

se pueden asociar con el rompimiento espontáneo de una simetría.

Toda la discusión hecha sobre las transiciones de fase en el modelo de Ising en dos dimensiones y volumen infinito se puede resumir de manera cómoda en el *diagrama de fase* del modelo de Ising mostrado en la Figura 3.3a. La línea negra en $H = 0$ representa las variables intensivas en donde la transición es de primer orden mientras que el punto en $T = T_c$ llamado *punto crítico* representa las variables intensivas en donde la transición es de segundo orden. Además, para conectarlo con un ejemplo familiar se presenta el diagrama de fase de la transición del agua entre sus estados gaseoso y líquido en la Figura 3.3b. Análogamente a la transición del modelo de Ising en dos dimensiones, la línea en la Figura 3.3b representa las variables intensivas en donde la transición es de primer orden, mientras que en el punto crítico (CP por sus siglas en inglés “Critical Point”) la transición es de segundo orden. Además, a diferencia del diagrama del modelo de Ising de la Figura 3.3a, se pueden etiquetar regiones enteras del diagrama de fase del agua en donde el estado del agua es gaseoso o líquido.

Algo importante a notar en el diagrama 3.3b es que más allá del punto crítico ya no hay una transición de fase real. Sin embargo, algunas investigaciones [48] afirman que existe un cambio drástico en el comportamiento de algunos fluidos en esta zona. Este cambio drástico se observa al cruzar lo que se conoce como *línea de Widom*.



(a) Diagrama de fase del modelo de Ising en dos dimensiones.

(b) Diagrama de fase de la transición líquido/gas.

Figura 3.3: Diagramas de fase.

Para una transición de gas a líquido a una presión constante menor a la del punto crítico del agua, existe una divergencia en el calor específico y una discontinuidad en la densidad del fluido característica de una transición de primer orden. Para una transición a lo largo de la línea de Widom, se observa que la divergencia del calor específico se convirtió en un máximo y la discontinuidad en la densidad en un punto de inflexión, el cual corresponde a un máximo en la derivada del parámetro de orden con respecto a la temperatura [49, 50]. Así, es convencional fijar la pseudo-temperatura crítica de la línea de Widom como la temperatura a la cual la capacidad calorífica y la derivada del parámetro de orden tienen un máximo. Se dice que al cruzar esta pseudo-temperatura crítica ocurre un *crossover*. Sin embargo, para temperaturas y presiones mucho mayores que la crítica ya no coinciden los puntos en los que el calor específico tiene un máximo y en el que el parámetro de orden tiene un máximo por lo que obtenemos el diagrama que se observa en la Figura 3.4.

Para analizar cuantitativamente el fenómeno de rompimiento espontáneo de la simetría en el contexto de transiciones de fase es conveniente escribir la energía libre F en términos del parámetro de orden. Se supone que la energía libre se puede escribir en series de potencias del parámetro de orden m [46]. Para el caso de la transición de segundo orden del modelo de Ising en dos dimensiones sin campo magnético externo se puede escribir como

$$F(T; m) = F_0(T) + a(T)m^2 + b(T)m^4 + \dots, \quad (3.4)$$

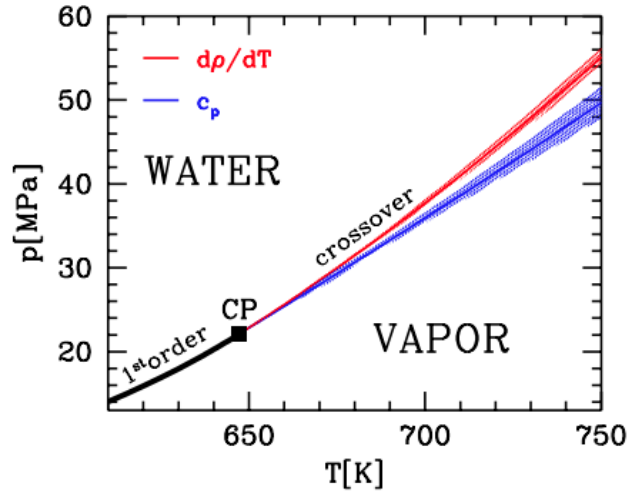


Figura 3.4: Diagrama de fase de la transición líquido/gas extendido en donde se muestra las líneas del crossover. En rojo es la línea a la cual ocurre el máximo en la derivada de la densidad respecto a al temperatura y en azul la línea en la cual ocurre el máximo en el calor específico [51].

en donde la serie sólo contiene términos con potencia par de m ya que son los que dejan invariante a la energía libre del sistema bajo el intercambio $m \rightarrow -m$. La condición que da la energía libre en equilibrio es

$$\frac{\partial F}{\partial m} = 0. \quad (3.5)$$

El parámetro de orden es cercano a cero cuando la temperatura es cercana a la crítica. Por lo que podemos truncar la serie de la ec. (3.5) a orden cuártico. Se trunca hasta el orden cuártico y no cuadrático por la siguiente razón. Asumiendo que $b(T) > 0$, entonces los valores de m que minimizan la energía libre dependen del signo de $a(T)$. Para $a(T) \geq 0$ la única solución real es $m = 0$ como se observa en la Figura 3.5a. Sin embargo, para $a(T) < 0$ existen dos soluciones estables dadas por

$$m = \pm \sqrt{\frac{-a}{2b}}, \quad (3.6)$$

tal como se ve en la Figura 3.5b. Así, el proceso de la Figura 3.5 revela que para temperaturas mayores a la crítica la simetría $m \rightarrow -m$ se mantiene pues el valor en equilibrio del parámetro de orden es $m = 0$, pero para temperaturas menores a la crítica hay dos posibles valores del parámetro de orden dados por la ec. (3.6). Pero

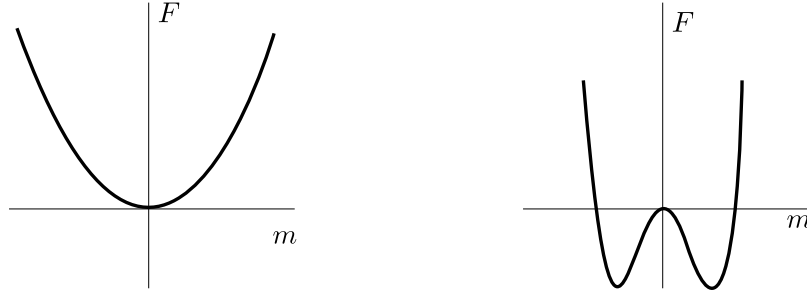
(a) Energía libre para $T > T_c$.(b) Energía libre para $T < T_c$.

Figura 3.5: Energía libre en una transición de segundo orden

el sistema sólo escoge uno de ellos y así, la simetría se ha roto espontáneamente. El término cuártico es necesario para observar este rompimiento espontáneo de la simetría. Además, la no analiticidad de la energía libre se puede observar si se reemplaza el valor en equilibrio del parámetro de orden, esto da las energías libres en equilibrio $F(T)$ dadas por

$$F(T) = \begin{cases} F_0(T), & T > T_c. \\ F_0(T) - \frac{a(T)^2}{4b(T)}, & T < T_c. \end{cases} \quad (3.7)$$

La primera derivada de la energía libre de Helmholtz es continua e igual a $F'_0(T_c)$ en la temperatura crítica ya que como se observa en la Figura 3.5, se tiene que tener que $a(T_c) = 0$. Sin embargo, la segunda derivada de la energía libre es discontinua pues $a'(T_c) \neq 0$.

En el caso de las transiciones de primer orden del modelo de Ising en dos dimensiones con campo externo $H \neq 0$, se incluyen los términos con potencias impares de m ya que en esta transición no hay rompimiento espontáneo de la simetría

$$F(T, H; m) = F_0(T, H) + \alpha(T, H)m + a(T, H)m^2 + \beta(T, H)m^3 + b(T, H)m^4, \quad (3.8)$$

en donde ahora los coeficientes también dependen del campo externo H [46]. En este caso, la forma de la energía libre se ve como en la Figura 3.6. Para $H \neq 0$ los términos impares de (3.8) hacen que uno de los mínimos sea global y el otro local. Físicamente, el sistema se encuentra sólo en el mínimo global. Sin embargo, justo en el campo magnético externo crítico $H = 0$, los dos mínimos son globales

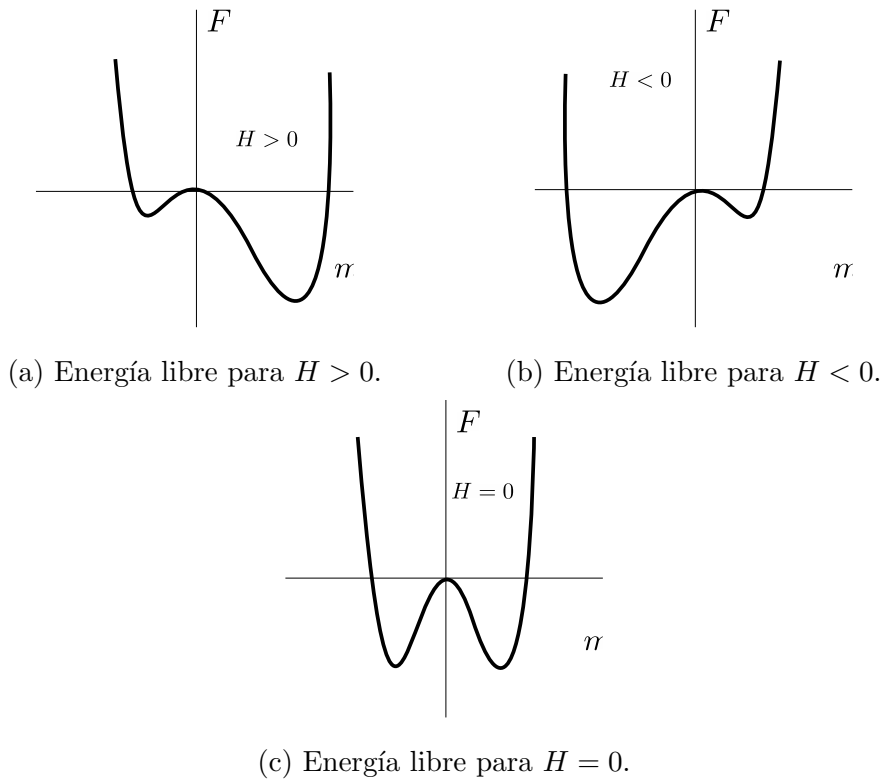


Figura 3.6: Energía libre en una transición de primer orden.

ya que están a la misma altura, lo que significa que ambas fases coexisten. Este comportamiento es el propio de una transición de primer orden. En el caso más familiar de la transición líquido/gas del agua se traduce a que las dos fases coexisten en la temperatura crítica y por eso es que la temperatura no cambia hasta que todo el líquido se ha evaporado.

A pesar de que las energías libres vistas en las Figuras 3.5 y 3.6 se obtuvieron basándose en el modelo de Ising en dos dimensiones, otras transiciones también presentan estas curvas. Es con este formalismo de Landau que se identificará más adelante el tipo de la transición de fase quiral en el modelo sigma lineal acoplado a quarks.

3.2. Parámetros de orden en QCD

Como se vio en la sección pasada para estudiar las transiciones de fase con el enfoque de Landau es necesario identificar los parámetros de orden. Para el caso

de la transición de confinamiento/desconfinamiento mencionada en la Sección 2.3 el parámetro de orden se define a partir del *Loop de Polyakov* [52] dado por

$$L = \mathcal{P} \exp \left[ig_s \oint_C dx^\mu A_\mu \right], \quad (3.9)$$

en donde $A_\mu = A_\mu^\sigma(\tau_\sigma)$ es el campo gluónico tal como se definió en la Sección 2.1, \mathcal{P} indica un operador de ordenamiento de integral de trayectoria y C es una trayectoria tomada a lo largo de un tiempo periódico. El parámetro de orden resulta ser entonces el promedio térmico de la traza del loop de Polyakov, el cual es proporcional a

$$\langle \text{Tr} L \rangle \propto \exp^{-\Delta F_q/T}, \quad (3.10)$$

en donde ΔF_q es la diferencia en la energía libre entre la teoría puramente gluónica (sin quarks) y la teoría gluónica con un quark libre aislado. En el estado confinado, la energía libre necesaria para crear un quark libre aislado es infinita y por lo tanto $\langle \text{Tr} L \rangle = 0$. Por otro lado, en el estado desconfinado, la posibilidad de tener un quark aislado indica que la energía libre necesaria para ello es finita y por lo tanto $\langle \text{Tr} L \rangle \neq 0$. Sin embargo, estos valores del parámetro de orden sólo son posibles en una teoría puramente gluónica donde las masas de los quarks son infinitas y por lo tanto están completamente aislados. En la naturaleza la masa finita de los quarks hace que el parámetro de orden nunca sea cero. En la teoría puramente gluónica ocurre una transición de fase real de confinamiento/desconfinamiento, mientras que para masas finitas la transición es del tipo crossover [3].

La transición de interés en este trabajo es la transición quiral. Para esta transición el parámetro de orden es el *condensado de quarks* $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$. Como se mencionó en la Introducción, en la transición quiral se pasa de estados de hadrones ligeros con masas del orden de 1 GeV a estados de quarks ligeros con masas del orden de 2 – 100 MeV. Así, se espera que para temperaturas bajas en donde la materia está confinada la simetría quiral está rota mientras que a temperaturas muy altas en donde la materia está desconfinada la simetría quiral está restaurada. Estos dos estados corresponden a que el parámetro de orden $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = 0$ cuando la simetría es restaurada y $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$ cuando la simetría ha sido rota. Además, se define la susceptibilidad quiral como

$$\chi_m = \frac{\partial}{\partial m} \langle \bar{\psi}\psi \rangle, \quad (3.11)$$

la cual es infinita en la temperatura crítica. Sin embargo, la transición quiral sólo es una transición real para masas de quarks iguales a cero. Para masas de quarks físicas (es decir para 2 sabores ligeros que corresponden al up y down, y 1 quark pesado que corresponde al strange), la transición se convierte en un crossover y se define la temperatura pseudocrítica cuando ocurre el máximo en la susceptibilidad quiral. Según Y. Aoki *et al.* [51], la temperatura del crossover de la transición quiral a potencial químico bariónico nulo es

$$T_c = 151 \pm 28 \text{ MeV}. \quad (3.12)$$

La incertidumbre viene de la curvatura del máximo de la susceptibilidad quiral y es mayor que cero por el hecho de que no es una transición de fase real sino un crossover. Es importante recalcar que las temperaturas a las que ocurre los crossover del desconfinamiento y la transición quiral a potencial químico bariónico nulo son las mismas. Además, la temperatura y el carácter de la transición (primer, segundo orden o crossover) depende del número de quarks ligeros y masivos tomados en cuenta. En este caso, se dan los valores para dos quarks ligeros (correspondientes al up y down) y un quark masivo (correspondiente al strange). Algunas otras colaboraciones han encontrado otros valores de la temperatura pseudocrítica. La colaboración HotQCD [7] dio el valor de $T_c = 154(9) \text{ MeV}$ en 2011 y un valor más reciente de $T_c = 151(1) \text{ MeV}$ en 2014 [53]. La colaboración Wuppertal-Budapest obtuvo el valor de $T_c = 147(2) \text{ MeV}$ en 2010 [54].

Hay otro parámetro de orden que es importante mencionar en QCD llamado el *condensado de diquarks*. Este parámetro de orden se usa para establecer una transición de fase llamada *superconductividad de color* en la que el vacío de QCD forma pares de Cooper entre quarks a alta densidad bariónica y baja temperatura [3]. Esta transición es de interés para el estudio del núcleo de estrellas de neutrones en donde la densidad bariónica es muy grande [55].

3.3. El Diagrama de Fase Conjeturado de la QCD

Las temperaturas de los crossovers del desconfinamiento y de la transición quiral a potencial bariónico pequeño han sido determinadas. Los métodos utilizados han



Figura 3.7: Transición de confinamiento por una gran densidad bariónica.

sido principalmente mediante programas computacionales en lo que se conoce como Lattice QCD [4–9]. Sin embargo, al usar un potencial químico bariónico distinto de cero $\mu_B \neq 0$, el peso del muestreo estadístico se vuelve complejo, por lo que no es factible estudiar el comportamiento de las transiciones en estas condiciones. A ese problema se le conoce como el *problema del signo* [10]. A pesar de esto se han utilizado otros métodos para estudiar QCD a potencial bariónico finito. Se han utilizado ecuaciones de Dyson-Schwinger [11–14], técnicas holográficas [15–18], reglas de suma [19, 20], modelos efectivos como el Nambu-Jona-Lasinio [21–25], y del modelo sigma lineal acoplado a quarks que será usado en este trabajo [26–28]. Todos estos trabajos indican que también hay una transición quiral cuando hay un potencial químico bariónico distinto de cero. Un gran potencial químico bariónico se puede ver como una medida de la densidad de bariones. Con densidades muy grandes los bariones están tan comprimidos que el interior de los bariones se funden entre sí. Como en el interior de los bariones los quarks están aproximadamente libres, entonces al fundirse el interior entre sí se crea un medio en donde los quarks son casi libres, es decir el plasma de quarks y gluones. Este proceso se representa en la Figura 3.7 y se espera que ocurra a una energía del orden de ~ 1 GeV [3]. Además, las investigaciones mencionadas sugieren que a potencial químico bariónico muy alto la transición es de primer orden.

Debido a que se espera que a potenciales químicos grandes la transición quiral sea de primer orden debería haber un punto en el diagrama de fase $(T - \mu_B)$ en el cual la transición de fase pase de ser de primer orden a un crossover. Este punto se le conoce como el *punto terminal crítico* de la QCD o CEP.

A pesar de que podría ser que la transición de desconfinamiento y quiral ocurren a la misma temperatura según lo dicho en la Sección 3.2, lamentablemente para

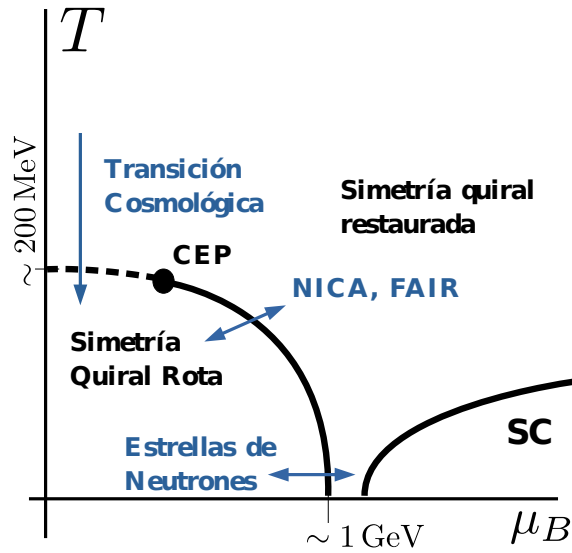


Figura 3.8: Hipotético diagrama de fase de QCD. La línea continua para la transición quiral indica una transición de primer orden hasta el CEP, luego la línea punteada indica un crossover. Las flechas azules indican transiciones conjeturadas en la naturaleza. NICA y FAIR son experimentos en construcción de colisiones de iones pesadas. “SC” significa superconductividad de color. Figura basada en [56–58]

potencial químico bariónico finito aun no se sabe si siguen coincidiendo o no. El conjeturado diagrama de fase se encuentra en la Figura 3.8. Se muestra la línea de transición de fase quiral que separa de los estados con simetría quiral rota y restaurada. La línea continua en la transición quiral representa una transición de primer orden la cual termina en el CEP y continúa con una línea punteada que representa una transición de crossover. También se presenta una línea esquemática de cómo se ve la línea de transición entre el estado de QCD sin superconductividad de color con el que presenta superconductividad de color basado en [56].

En la Figura 3.8 también se presentan las transiciones que se manifiestan en la naturaleza. Debido a que la razón entre el número bariónico y el número de fotones es del orden $\eta \sim 5 \times 10^{-10}$, la cual se puede tomar como una medida de la diferencia entre bariones y antibariones, según PDG [40]; entonces sabemos que el potencial químico bariónico debió haber sido cercano a cero en el universo temprano [59, página 531]. Por esta razón se cree que la transición cosmológica de QCD fue un

crossover. Algunos de los futuros experimentos de colisiones de iones pesados que planean encontrar información del diagrama para potenciales químicos bariónicos grandes son FAIR [31] y NICA [32]. Se presenta esquemáticamente tal transición en la Figura 3.8. También se muestra la transición quiral que se cree ocurre en estrellas de neutrones a bajas temperaturas y alto potencial químico bariónico [60].

Capítulo 4

Breve Revisión de Superestadística

En este capítulo se dará un breve repaso de la estadística de Boltzmann, y del por qué en sistemas termodinámicos con variaciones espaciales de alguna propiedad intensiva esta estadística no es una buena descripción termodinámica. Luego se introducirá el formalismo de superestadística como herramienta de estudio de estos sistemas. Se estudiarán varias posibles superestadísticas y se mencionarán las aplicaciones que han tenido. Finalmente, se usará la superestadística para introducir las herramientas necesarias para estudiar el diagrama de fase de QCD para un sistema fuera del equilibrio térmico y químico.

4.1. Ensembles Canónico y Gran Canónico

En la física estadística se estudia a los sistemas macroscópicos y sus propiedades, como temperatura, potencial químico o energía, como consecuencia de su configuración microscópica, tales como velocidades, y posiciones de cada partícula. Varias configuraciones microscópicas pueden dar lugar al mismo estado macroscópico. Debido a que es imposible estudiar determinísticamente la configuración microscópica de un sistema físico con muchas partículas (típicamente de al menos 10^{23} partículas), se opta por usar un enfoque estocástico. Entonces, de la probabilidad de los posibles estados en los que se encuentran la configuración microscópica, llamados

microestados, se deducen las características macroscópicas del sistema.

Uno de los pilares de la física estadística es la estadística de Boltzmann [61, 62]. Supongamos que tenemos un sistema S en contacto con un sistema R que llamaremos *reservorio* el cual tiene muchos más grados de libertad que S . Esto implica que la energía del reservorio es mucho más grande que la del sistema, $E_S \ll E_R$. En total, el sistema S más el reservorio R , forman un sistema cerrado, es decir en el cual su energía $E = E_R + E_S$ se mantiene constante. Las posibles realizaciones de un sistema cerrado se le conocen como *ensamble microcanónico* y su característica principal es que la probabilidad de encontrar al estado cerrado en un estado de energía E_i es proporcional al número de microestados del sistema $\Omega(E_i)$. Así, la probabilidad P_i de encontrar al sistema S con una energía E_i también debe ser proporcional al número de microestados del sistema completa $S + R$,

$$P_i \propto \Omega_{R+S} = \Omega_R(E - E_i), \quad (4.1)$$

en donde se ha usado que como S ya está en una energía E_i , entonces los microestados posibles ya sólo dependen de R con energía $E_R = E - E_i$. Como $E_i \ll E_R$, entonces $E_i \ll E$ y podemos expandir en serie de Taylor como

$$\ln \Omega_R(E - E_i) = \ln \Omega_R(E) - \left(\frac{\partial \ln \Omega_R(E)}{\partial E} \right) \Big|_{E=E_i} E_i + \dots \quad (4.2)$$

Físicamente, se puede definir

$$\left(\frac{\partial \ln \Omega_R(E)}{\partial E} \Big|_{E=E_i} \right) \equiv \beta = \frac{1}{T}, \quad (4.3)$$

en donde T es la temperatura del reservorio y truncamos la serie de la ec. (4.1) hasta los dos primeros términos, entonces obtenemos que

$$P_i = C e^{-\beta E_i}. \quad (4.4)$$

Finalmente, usando la condición de normalización de probabilidad

$$\sum_i P_i = 1, \quad (4.5)$$

la cual puede ser sustituida por una integral si los microestados i forman un continuo, entonces obtenemos que la probabilidad P_i de encontrar al sistema S con energía E_i

es

$$P_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{\sum_j e^{-\beta E_j}}, \quad (4.6)$$

cuyo denominador debe ser sustituido por una integral si los microestados forman un continuo. El denominador de la ec. (4.6) se le llama *función de partición* y se denota por una letra \mathcal{Z} ,

$$\mathcal{Z} \equiv \sum_i e^{-\beta E_i}. \quad (4.7)$$

A las realizaciones del sistema en contacto con un reservorio a temperatura T se le conoce como *ensamble canónico* y la probabilidad de que una de las realizaciones del sistema tenga energía E_i está dada por la ec. (4.6) la cual se conoce como *Distribución de Boltzmann*. El numerador de la ec. (4.6) se le llama *factor de Boltzmann*.

Cuando el sistema termodinámico que estamos considerando también intercambia partículas entonces debemos considerar que el reservorio ahora tiene una temperatura y potencial químico constante μ_i correspondientes al tipo de partícula i . El potencial químico físicamente representa la cantidad de energía necesaria para introducir una nueva partícula i al sistema. Consideramos que la energía del sistema completo $E = E_R + E_S$ es constante al igual que en el ensamble canónico, pero además también el número de partículas de tipo i es constante en el sistema completo $N_i = N_{i,R} + N_{i,S}$. Como el reservorio es mucho más grande que el sistema también tendremos que $N_{i,S} \ll N_{i,R}$ y $N_{i,S} \ll N_i$. Análogamente al caso del ensamble canónico, como en un ensamble microcanónico la probabilidad de tener un microestado es proporcional al número de microestados con energía E_i , entonces la probabilidad de que el sistema tenga energía E_j y $N_{i,S}$ partículas del tipo i es

$$P_{j,N_{i,S}} \propto \Omega_{R+S} = \Omega_R(E - E_j, N - N_{S,i}). \quad (4.8)$$

Se ha usado que el sistema S ya está en un estado con energía E_j y número de partículas $N_{i,S}$ de tipo i y, por lo tanto, la probabilidad sólo depende del número de

microestados disponibles del reservorio. Usando la serie de Taylor

$$\ln \Omega_R(E - E_j, N_i - N_{i,S}) = \ln \Omega_R(E, N_i) - \left(\frac{\partial \ln \Omega_R(E, N_i)}{\partial E} \right) \Big|_{E=E_j} E_j - \left(\frac{\partial \ln \Omega_R(E, N_i)}{\partial N_i} \right) \Big|_{N_i=N_{i,S}} N_{i,S} + \dots, \quad (4.9)$$

definiendo

$$\left(\frac{\partial \ln \Omega_R(E, N_i)}{\partial N_i} \right) \Big|_{N_i=N_{i,S}} \equiv -\frac{\mu}{T}, \quad (4.10)$$

y usando la nueva condición de normalización

$$\sum_{N_{i,S}, j} P_{j, N_{i,S}} = 1, \quad (4.11)$$

entonces obtenemos que

$$P_{k, N_{i,S}} = \frac{e^{-\beta(E_k - \mu_i N_i)}}{\sum_{N_{i,S}, j} e^{-\beta(E_j - \mu_i N_i)}}. \quad (4.12)$$

Se usa la notación de Einstein que significa que índices repetidos en un mismo término es una suma. El ensamble dado por todas las posibles energías que puede tener el sistema con un reservorio a temperatura T y potencial químico μ_i para cada partícula i se conoce como *ensamble gran canónico* y la probabilidad de tener un estado de este ensamble con energía E_j y partículas $N_{i,S}$ para el tipo de partícula i está dado por la ec. (4.12), [61, 62]. Una vez más al numerador y denominador de (4.12) se le suelen llamar también factor de Boltzmann y función de partición respectivamente.

Las probabilidades del ensamble canónico y gran canónico dadas por las ecuaciones (4.6) y (4.12) respectivamente son probabilidades de sistemas termodinámicos clásicos. Para sistemas termodinámicos cuánticos se puede definir factores de Boltzmann que ahora serán operadores. Para esto sustituimos la energía E_j por el operador hamiltoniano cuántico \hat{H} y el número de partículas $N_{i,S}$ de tipo i por el operador de número \hat{Q}_i . Así, el factor de Boltzmann cuántico $B(\hat{H}, \hat{Q}_i)$ para el ensamble gran canónico es

$$B(\hat{H}, \hat{Q}_i) \equiv e^{-\beta(\hat{H} - \mu_i \hat{Q}_i)}, \quad (4.13)$$

y con $\mu_i = 0$ para el ensamble canónico. La función de partición cuántica se define entonces como

$$\mathcal{Z} = \text{Tr}[B(\hat{H}, \hat{Q}_i)]. \quad (4.14)$$

Para poder deducir las distribuciones de los ensambles canónico y gran canónico se ha supuesto que el reservorio presenta solamente una temperatura y un potencial químico, y debido a que el sistema es mucho más pequeño que el reservorio éste también presenta la misma única temperatura y único potencial químico. Sin embargo, en la naturaleza esto no es cierto. Un ejemplo cotidiano es que si colocamos un cubo de hielo en un vaso de agua, el agua cercana al cubo de hielo presentará una temperatura menor que la que está lejana al cubo de hielo. La experiencia cotidiana dicta que tendríamos que dejar pasar suficiente tiempo para que el agua y el hielo lleguen a la misma temperatura. En estos casos en los que el sistema presenta variaciones espacio-temporales en la temperatura o en el potencial químico, no es posible usar las distribuciones recién mostradas. Así, tenemos que recurrir a termodinámica fuera del equilibrio.

4.2. Las superestadísticas

Una posible manera de estudiar sistemas fuera del equilibrio es con el formalismo de superestadística [33, 34]. En la superestadística se supone que se tiene un sistema termodinámico con una variable intensiva (temperatura, potencial químico, etc.), la cual varía espacialmente en varios subsistemas. No obstante, cada subsistema está en equilibrio termodinámico y se le puede estudiar mediante el ensamble canónico o gran canónico según sea el caso. La variable intensiva x se encuentra distribuida de acuerdo a una función de distribución $f(x)$. Es en este sentido que el sistema presenta una estadística de cada estadística de Boltzmann: una superestadística. Se pueden construir dos distribuciones generalizadas

$$P_i = \frac{\int_0^\infty f(x)e^{-xE_i} dx}{\int_0^\infty \int_0^\infty f(x)e^{-xE} dx dE}, \quad \text{y} \quad (4.15)$$

$$P_i = \int_0^\infty f(x) \frac{1}{Z(x)} e^{-xE_i} dx, \quad (4.16)$$

las cuales corresponden a las Superestadística-A y Superestadística-B y $Z(x)$ es la función de partición de cada subsistema [34]. Notemos que si definimos $\hat{f}(\beta) = cf(\beta)/Z(\beta)$ con c una constante de normalización, entonces la superestadística-B con una f dada es equivalente a la superestadística-A con \hat{f} . En este modo, la superestadística-A y la superestadística-B son equivalentes. Sin embargo, para una misma función $f(x)$ se obtienen diferentes distribuciones para las superestadísticas A y B. Más adelante, se verá que para sistemas suficientemente cerca del equilibrio termodinámico es indiferente la elección de la función de distribución de $f(x)$. A partir de ahora sólo usaremos la superestadística-A.

Una vez establecido la definición de la distribución de probabilidad de superestadística, se darán distintas funciones de distribución $f(x)$ y los factores de Boltzmann superestadísticos que surgen. Este resumen de superestadísticas para diferentes distribuciones $f(x)$ se basa en el estudio por Beck y Cohen [33]. Para cada una se dará, además, el promedio de la variable con la distribución $f(x)$ dado por

$$x_0 \equiv \int_0^{\infty} xf(x)dx = \langle x \rangle, \quad (4.17)$$

y la varianza

$$\sigma \equiv \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}, \quad (4.18)$$

en donde

$$\langle x^2 \rangle \equiv \int_0^{\infty} x^2 f(x)dx. \quad (4.19)$$

Además, el factor de Boltzmann superestadístico $B(E)$ será el numerador de la ec. (4.15).

4.2.1. Distribución uniforme

La distribución uniforme es aquella en la que todos los valores tienen la misma probabilidad de ocurrir y está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b}, & x \in [a, a + b], \\ 0, & x \notin [a, a + b], \end{cases} \quad (4.20)$$

en donde a y b son números reales no negativos arbitrarios. El promedio y la varianza están dados respectivamente por

$$\begin{aligned}x_0 &= a + \frac{b}{2}, \\ \sigma^2 &= \frac{b^2}{12}.\end{aligned}\tag{4.21}$$

El factor de Boltzmann superestadístico está dado por

$$\begin{aligned}B(E) &= \frac{1}{bE} (e^{-(\beta_0 - (1/2)b)E} - e^{-(\beta_0 + (1/2)b)E}), \\ &= e^{-\beta_0 E} \left(1 + \frac{1}{24} b^2 E^2 + \frac{1}{1920} b^4 E^4 + \dots \right),\end{aligned}\tag{4.22}$$

en donde se ha expandido en serie de Taylor para b pequeña en el último renglón.

4.2.2. Distribución de dos niveles

La distribución de dos niveles es aquella en la que sólo hay dos posibles resultados a o $a + b$ para a, b números reales no negativos arbitrarios y está dada por

$$f(x) = \frac{1}{2} \delta(a) + \frac{1}{2} \delta(a + b).\tag{4.23}$$

El promedio y la varianza están dados respectivamente por

$$\begin{aligned}x_0 &= a + \frac{b}{2}, \\ \sigma^2 &= \frac{b^2}{4}.\end{aligned}\tag{4.24}$$

El factor de Boltzmann superestadístico está dado por

$$\begin{aligned}B(E) &= \frac{e^{-\beta_0 E}}{2} (e^{(1/2)bE} + e^{-(1/2)bE}), \\ &= e^{-\beta_0 E} \left(1 + \frac{1}{8} b^2 E^2 + \frac{1}{384} b^4 E^4 + \dots \right),\end{aligned}\tag{4.25}$$

en donde se ha expandido en serie de Taylor para b pequeña en el último renglón.

4.2.3. Distribución Log-Normal

La distribución de log-normal está dada por

$$f(x) = \frac{1}{xs\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(\ln(x/m))^2}{2s^2}\right],\tag{4.26}$$

en donde m, s son parámetros positivos. El promedio y la varianza están dados respectivamente por

$$\begin{aligned} x_0 &= m\sqrt{w}, \\ \sigma^2 &= m^2w(w-1), \end{aligned} \quad (4.27)$$

con $w := e^{s^2}$. El factor de Boltzmann superestadístico de esta distribución no se puede evaluar analíticamente, por lo que sólo es posible dar una serie en potencias de σ dada por

$$B(E) = e^{-\beta_0 E} \left(1 + \frac{1}{2} m^2 w (w-1) E^2 - \frac{1}{6} m^3 w^{3/2} (w^3 - 3w + 2) E^3 + \dots \right). \quad (4.28)$$

4.2.4. Distribución F

La distribución F está dada por

$$f(x) = \frac{\Gamma((v+w)/2)}{\Gamma(v/2)\Gamma(w/2)} \left(\frac{bv}{w} \right)^{v/2} \frac{x^{(v/2)-1}}{(1+(vb/w)x)^{(v+w)/2}}, \quad (4.29)$$

en donde v, w son enteros positivos y $b > 0$ es un parámetro real. El promedio y la varianza están dados respectivamente por

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{w}{b(w-2)}, \\ \sigma^2 &= \frac{2w^2(v+w-2)}{b^2v(w-2)^2(w-4)}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

El factor de Boltzmann superestadístico de esta distribución no se puede evaluar analíticamente, por lo que sólo es posible dar una serie para una varianza σ pequeña dada por

$$B(E) = e^{-\beta_0 E} \left(1 + \frac{w^2(v+w-2)}{b^2v(w-2)^2(w-4)} E^2 - \frac{4w^3(v+w-2)(2v+w-2)}{3b^3v^{3/2}(w-2)^3(w-4)(w-6)} E^3 + \dots \right). \quad (4.31)$$

4.2.5. Distribución χ^2

La distribución χ^2 se obtiene de sumar el cuadrado de N variables aleatorias donde cada una tiene una función de distribución gaussiana. La distribución χ^2 está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(N/2)} \left(\frac{N}{2x_0} \right)^{N/2} x^{N/2-1} e^{-Nx/2x_0}, \quad (4.32)$$

con x_0 el promedio y $\sigma^2 = \frac{2x_0}{N}$, por lo que N es un parámetro que fija la varianza. El factor de Boltzmann superestadístico está dado por

$$\begin{aligned} B(E) &= \left(1 + \frac{2}{N}x_0E\right)^{-\frac{N}{2}}, \\ &= \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{N}\right)x_0^2E^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{N}\right)x_0^3E^3 + \dots\right]e^{-\beta_0E}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

en donde se ha expandido en serie de Taylor para N grande. Esta superestadística da lugar a la *termodinámica de Tsallis* [63].

Notemos que en todas las superestadísticas vistas, se ha expandido respecto a un parámetro que hace que la varianza sea pequeña. De hecho, para cualquier distribución $f(x)$ con promedio x_0 y varianza σ , se puede expandir el factor de Boltzmann superestadístico como

$$\begin{aligned} B(E) &= e^{-\beta_0}\left(1 + \frac{1}{2}\sigma^2E^2 + \sum_{r=3}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\langle(\beta - \beta_0)^r\rangle E^r\right), \\ &= e^{-\beta_0E}\left(1 + \frac{1}{2}(q-1)\beta_0E^2 + g(p)\beta_0E^3 + \dots\right), \end{aligned} \quad (4.34)$$

en donde $q = \frac{\langle x^2 \rangle}{\langle x \rangle^2}$ y $\langle x^n \rangle$ se define de forma análoga a (4.19) pero con $2 \rightarrow n$ [34]. El parámetro $q \in [1, \infty)$ se conoce como *parámetro de no-extensividad* y se usa para cuantizar qué tan alejado se encuentra el factor de Boltzmann superestadístico del factor de Boltzmann usual. De (4.34) observamos que para $q = 1$, o equivalentemente para $\sigma = 0$ recuperamos la estadística de Boltzmann usual. El hecho de que $\sigma = 0$ significa que no hay variación espacio-temporal del parámetro intensivo, es decir el sistema está en equilibrio.

Debido a que según la ec. (4.34) todas las superestadísticas son aproximadamente las mismas para σ suficientemente grande, decidiremos trabajar con la función χ^2 ya que permite hacer los cálculos de manera analítica y podemos controlar qué tan alejado se encuentra la superestadística del factor de Boltzmann usual con el parámetro N . En el límite $N \rightarrow \infty$ recuperamos la estadística de Boltzmann.

Algunas aplicaciones de la superestadística en sistemas físicos son el estudio de flujos turbulentos [64–66] usando superestadística con una función de distribución log-normal, el estudio de movimientos de convección usando una función de distribución χ^2 [67], el estudio de rayos cósmicos [68], colisiones de iones pesados relativistas [69], y en QCD [70].

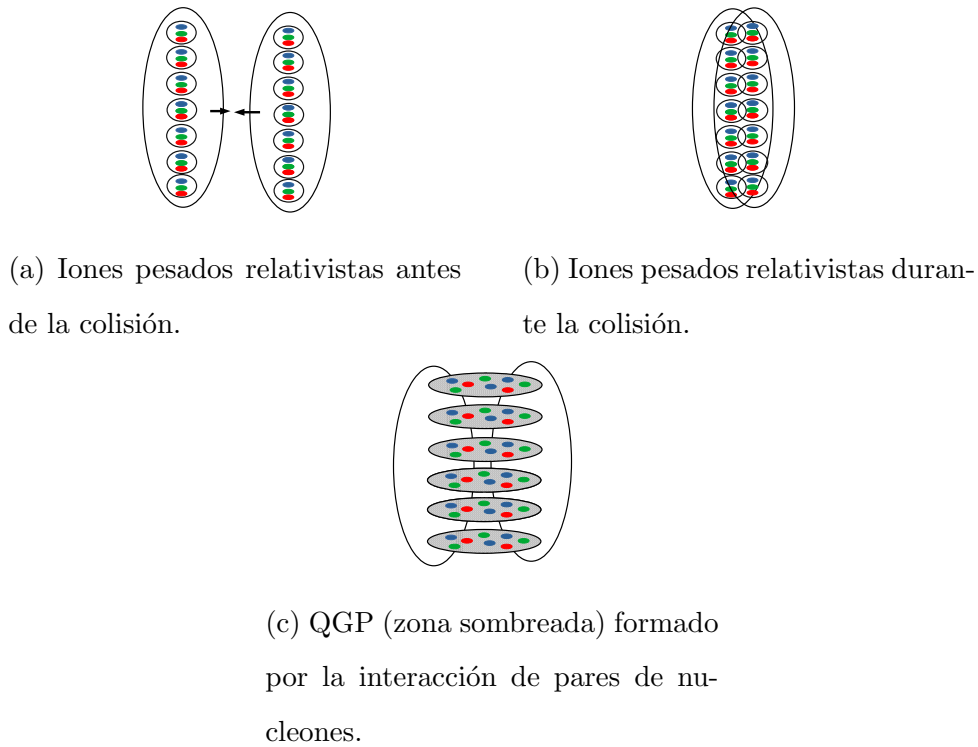


Figura 4.1: Esquema de una colisión de iones pesados relativistas.

4.3. Superestadística para el Diagrama de fase de QCD

Para entender por qué es necesario el uso de termodinámica fuera del equilibrio en el estudio del diagrama de fase de QCD veamos la pequeña caricatura de una colisión de iones pesados relativistas que se presenta en la Figura 4.1. Antes de la transición tenemos dos iones pesados los cuales tienen muchos nucleones. Cuando chocan los iones se crea una interacción fuerte entre pares de nucleones, los cuales generan un QGP. Al principio sólo los pares de nucleones alcanzan el equilibrio térmico y químico por lo cual presentan una distribución canónica o gran canónica, según sea el caso. No obstante, es necesario que transcurra más tiempo para que el equilibrio se alcance en ambos iones. Es por esto que es necesario trabajar con formalismos en los que se tome en cuenta esta variación espacial de la temperatura y del potencial químico.

El caso para variación en la temperatura ya se ha sido estudiado por Ayala *et al.* en [35] por lo que se procederá al estudio con temperatura y potencial químico

variable. Debido a que estudiaremos un sistema cuántico (QCD) tenemos que usar una superestadística cuántica. El factor de Boltzmann del ensamble gran canónico está dado por

$$B(\hat{H}, \hat{Q}) = \int_0^\infty \int_0^\infty F(\beta, \mu) e^{-\beta\hat{H} + \beta\mu\hat{Q}} d\beta d\mu, \quad (4.35)$$

en donde \hat{Q} es el operador de número, $F(\beta, \mu)$ es una función de distribución de las dos variables β, μ . Para poder hacer los cálculos de manera analítica, recordemos que las variables β y $\eta \equiv \beta\mu$ son independientes y por lo tanto, $F(\beta, \mu) = f(\beta)g(\eta)$. Además, supongamos que las funciones de distribución $f(\beta)$ y $g(\eta)$ están dadas por una función χ^2 como en (4.32). Así, el factor de Boltzmann es

$$\begin{aligned} B(\hat{H}, \hat{Q}) &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(\beta)g(\eta) e^{-\beta\hat{H} + \eta\hat{Q}} d\beta d\eta = \left(1 + \frac{2}{N}\beta_0\hat{H}\right)^{-\frac{N}{2}} \times \left(1 - \frac{2}{N}\eta_0\hat{Q}\right)^{-\frac{N}{2}} \\ &= \left[1 + \frac{1}{N}\beta_0^2\hat{H}^2 + \dots\right] \times e^{-\beta_0\hat{H}} \times \left[1 + \frac{1}{N}\eta_0^2\hat{Q}^2 + \dots\right] \times e^{\eta_0\hat{Q}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{N}\beta_0^2\hat{H}^2 + \frac{1}{N}\eta_0^2\hat{Q}^2\right) e^{-\beta_0\hat{H} + \eta_0\hat{Q}}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

en donde β_0 y η_0 son cantidades promedio de β y η , y se ha usado la ec. (4.33) y nos hemos quedado a primer orden en $\sigma^2 = \frac{2}{N}$. La ec. (4.36) se puede reescribir en términos de derivadas como

$$B(\hat{H}, \hat{Q}) = \left(1 + \frac{\beta_0^2}{N} \left(\frac{\partial}{\partial \beta_0}\right)^2 + \frac{\eta_0^2}{N} \left(\frac{\partial}{\partial \eta_0}\right)^2\right) e^{-\beta_0\hat{H} + \eta_0\hat{Q}}. \quad (4.37)$$

La función de partición se puede obtener sacando la traza de (4.37) de acuerdo a la ec. (4.7), lo que da

$$Z = \left(1 + \frac{\beta_0^2}{N} \left(\frac{\partial}{\partial \beta_0}\right)^2 + \frac{\eta_0^2}{N} \left(\frac{\partial}{\partial \eta_0}\right)^2\right) Z_0, \quad (4.38)$$

en donde Z_0 es la función de partición usual dada por la ec.

$$Z_0 = e^{-V\beta_0 V_{eff}}, \quad (4.39)$$

en donde V_{eff} es el potencial efectivo, el cual es una densidad de energía, de la teoría sin superestadística, β_0 es el promedio de los inversos de las temperaturas y V el volumen. El potencial efectivo es el análogo de la energía libre en física estadística clásica y se usa de manera similar para estudiar las transiciones de fase según la

teoría de Landau vista en la Sección 3.1. En el Capítulo 5 se verá más a fondo este objeto y se hablará de dónde viene la ec. (4.39).

Cambiando la variable β por la temperatura a través de la regla de la cadena obtenemos

$$Z = Z_0 \left[1 + \frac{2T_0}{NZ_0} \left(\frac{\partial Z_0}{\partial T_0} + \frac{T_0}{2} \frac{\partial^2 Z_0}{\partial T_0^2} \right) + \frac{\eta_0^2}{NZ_0} \frac{\partial^2 Z_0}{\partial \eta_0^2} \right]. \quad (4.40)$$

La definición del potencial superestadístico [71] está dada por

$$Z = e_q^{-\frac{V}{T_0} V_{sup}^{eff}(v, T_0, \eta_0)}, \quad (4.41)$$

en donde la *exponencial-q* está definido como

$$e_q(x) \equiv [1 + (1 - q)x]^{1/(1-q)}, \quad (4.42)$$

y su función inversa el *logaritmo-q* por

$$\ln_q(x) \equiv \frac{1 - x^{1-q}}{q - 1}, \quad (4.43)$$

con q el parámetro extensivo. Las funciones $e_q(x)$ y $\ln_q(x)$ resultan ser la exponencial y logaritmo usual para $q = 1$. Así, como estamos suponiendo que $\sigma = \frac{2}{N}$ es lo suficientemente pequeño y por lo tanto, q es cercano a 1, entonces podemos usar, como primer aproximación, el logaritmo y la exponencial usual. Por lo tanto, de las ecuaciones (4.40) y de (4.41) obtenemos

$$V_{sup}^{eff}(v, T_0, \eta_0) = V^{eff}(v, T_0, \eta_0) - \frac{T_0}{V} \ln \left[1 + \underbrace{\frac{2T_0}{NZ_0} \left(\frac{\partial Z_0}{\partial T_0} + \frac{T_0}{2} \frac{\partial^2 Z_0}{\partial T_0^2} \right)}_{\text{Corrección en } T} + \underbrace{\frac{\eta_0^2}{NZ_0} \frac{\partial^2 Z_0}{\partial \eta_0^2}}_{\text{Corrección en } \eta} \right]. \quad (4.44)$$

Así, para un potencial efectivo de cualquier teoría cuántica de campos podemos obtener las correcciones de superestadística dadas por la ec. (4.44) y estudiar las propiedades termodinámicas de la teoría con este nuevo potencial superestadístico. Con estas nuevas correcciones es que se estudiará el movimiento del CEP del diagrama de fase de QCD para diferentes valores de N .

Capítulo 5

Conceptos Básicos de Teoría Térmica de Campos

La teoría térmica de campos es la teoría física que estudia las propiedades termodinámicas de teorías cuánticas de campos. Debido a que dicha teoría es vasta sólo se presentarán los fundamentos necesarios para estudiar el potencial efectivo del modelo sigma lineal acoplado a quarks en el Capítulo 6; en muchos casos, sin demostrar explícitamente los resultados. Primero se dará un breve resumen de la integral de trayectoria, su relación con los propagadores, cómo generar los propagadores a partir del funcional generatriz y el potencial efectivo. Luego, se darán expresiones para el potencial efectivo a un loop. Después, se discutirá la relación entre el rompimiento espontáneo de una simetría y las transiciones de fase en una teoría cuántica de campos. Finalmente, se dará una breve introducción al formalismo del tiempo imaginario para introducir efectos termodinámicos.

5.1. Integral de trayectoria, funciones de correlación y funcional generatriz

En mecánica cuántica la amplitud de probabilidad $U(x_a, x_b, T)$ de que un estado $|x_a\rangle$ se encuentre en el estado $|x_b\rangle$ después de un tiempo T está dada por

$$U(x_a, x_b, T) = \langle x_b | e^{-i\hat{H}T} | x_a \rangle, \quad (5.1)$$

en donde \hat{H} es el operador hamiltoniano del sistema, y suponemos que H no depende explícitamente del tiempo. Las amplitudes de probabilidad en mecánica cuántica toman en cuenta todas las posibles maneras en las que el sistema puede ir del estado $|x_a\rangle$ al estado $|x_b\rangle$ e incluso hay interferencia entre las posibles maneras de hacer esto. La expresión matemática de la afirmación pasada está dada por

$$U(x_a, x_b, T) = \int \mathcal{D}x(t) e^{iS[x(t)]}, \quad (5.2)$$

en donde $S[x(t)] = \int_0^T dt \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{L}$ es la acción con la constricción de que la configuración inicial es $x_i = x_a$ y la final $x_f = x_b$. Debido a que la acción es un funcional, es decir una función que toma funciones y devuelve escalares, el símbolo de diferencial en una integral funcional se escribe como $\mathcal{D}x(t)$ para distinguirlas de las integrales de funciones de números reales. A esta integral funcional se le conoce como *integral de trayectoria*. El símbolo $\mathcal{D}x(t)$ se puede entender con la Figura 5.1. Se divide el intervalo temporal en pequeños intervalos de duración ϵ , se suma $e^{iS[x(t)]}$ para todos los posibles valores de $x_n, n = 1, 2, \dots, N - 1$ y se toma el límite $\epsilon \rightarrow 0$.

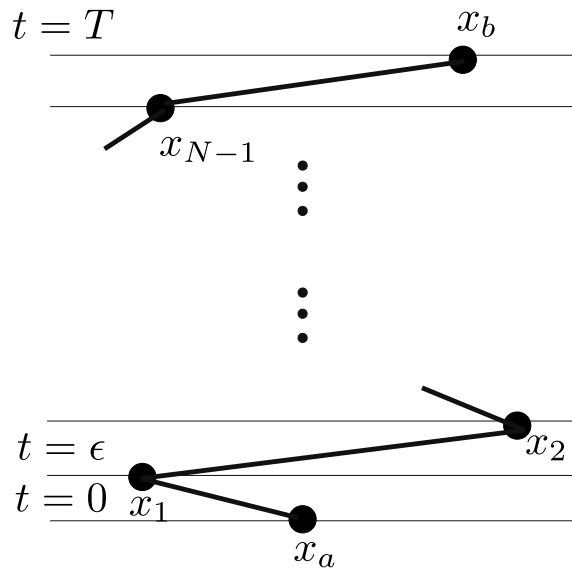


Figura 5.1: Visualización de la integral de trayectoria. Imagen basada en [72].

La integral de trayectoria también se puede aplicar a una teoría cuántica de campos. A partir de ahora, por simplicidad, trabajaré con una teoría cuántica de campo escalar real ϕ^4 . Para una teoría escalar, la amplitud de probabilidad se puede

escribir como

$$\langle \phi_b(\vec{x}) | e^{-iHT} | \phi_a(\vec{x}) \rangle = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int_0^T dt \int d^3x \mathcal{L} \right], \quad (5.3)$$

en donde \mathcal{L} es la densidad Lagrangiana. Un resultado sumamente importante de este formalismo de integral de trayectoria es que es posible construir las funciones de correlación a partir de integrales de trayectoria [72]. La función de correlación de n puntos está dada por

$$\langle \Omega | \mathcal{T} \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) \exp \left[i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L} \right]}{\int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L} \right]}, \quad (5.4)$$

en donde $|\Omega\rangle$ es el vacío de la teoría.

Una manera cómoda de generar las funciones de correlación con la ec. (5.4) es con el funcional generatriz $Z[J]$ dado por

$$Z[J] \equiv \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int_0^T dt \int d^3x [\mathcal{L} + J\phi] \right], \quad (5.5)$$

en donde J es una fuente externa que se acopla al campo escalar. El funcional generatriz es el análogo de la función de partición definida en la Sección 4.1 en una teoría cuántica de campos y genera las funciones de correlación a través de

$$\langle \Omega | \mathcal{T} \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) | \Omega \rangle = \left[\left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \right) \cdots \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_n)} \right) \frac{Z[J]}{Z[J=0]} \right] \Bigg|_{J=0}, \quad (5.6)$$

en donde $\frac{\delta}{\delta J(x)}$ se conoce como la derivada funcional [72]. La derivada funcional es el análogo a la derivada usual pero para funcionales. Cumple relaciones muy similares a las derivadas usuales, como por ejemplo que la derivada funcional de $F[x]$ con respecto a sí misma $F[y]$ es la delta de Dirac $\frac{\delta J(x)}{\delta J(y)} = \delta^4(x - y)$.

5.2. Potencial efectivo

Para poder estudiar las transiciones de fase en una teoría cuántica de campos se debe identificar la cantidad que corresponde al análogo a la energía libre para

poder usar la teoría de Landau desarrollada en la Sección 3.1. Para esto se define el funcional de energía $E[J]$ como

$$E[J] = i \ln Z[J]. \quad (5.7)$$

Así, por las ecuaciones (5.5) y de (5.1) se obtiene que la derivada funcional de $E[J]$ es

$$\frac{\delta E[J]}{\delta J(x)} = -\frac{\int \mathcal{D}\phi e^{i \int \mathcal{L} + J\phi} \phi(x)}{\int \mathcal{D}\phi e^{i \int \mathcal{L} + J\phi}} = -\langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle_J, \quad (5.8)$$

en donde el subíndice J indica que se está considerando el Lagrangiano $\mathcal{L} + J\phi$ en lugar de sólo \mathcal{L} . Se define la *acción efectiva* $\Gamma[\phi_{cl}]$ como la transformada de Legendre de $E[J]$ y depende del *campo clásico* definido como $\phi_{cl}(x) = \langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle_J$. Así, la acción efectiva es

$$\Gamma[\phi_{cl}] \equiv -E[J] - \int d^4y J(y) \phi_{cl}(y). \quad (5.9)$$

Y su derivada funcional cumple que

$$\frac{\delta}{\delta \phi_{cl}(x)} \Gamma[\phi_{cl}] = -J(x). \quad (5.10)$$

A la cantidad ϕ_{cl} se llama campo clásico porque en el límite clásico $\hbar \rightarrow 0$ (a pesar de que se fijó $\hbar = 1$ en este trabajo, se puede reescribir todas las expresiones incluyendo \hbar) cumple que

$$F[\phi_{cl}] = J(x), \quad (5.11)$$

donde $F[\phi]$ es el operador que resulta de minimizar la acción $\delta S = 0$ sin la fuente externa J . Es decir, que sin fuentes el campo clásico cumple la ec. clásica [73]. Si se fija que no haya fuente externa $J(x) = 0$, la ec. (5.10) nos pide que encontremos puntos extremos de la acción efectiva. Además, si el vacío de la teoría es invariante bajo traslaciones espacio-temporales, entonces ϕ_{cl} ya no depende de x y la ec. (5.10) se convierte en una ec. a resolver para la variable ϕ_{cl} . Se define el potencial efectivo como

$$\Gamma[\phi_{cl}] = -\int d^4x V_{eff}(\phi_{cl}) = -\mathbf{V} T V_{eff}(\phi_{cl}), \quad (5.12)$$

en donde \mathbf{V} es el volumen, y T el intervalo de tiempo. Entonces la condición de la ec. (5.10) se convierte en

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial \phi_{cl}} = 0. \quad (5.13)$$

Así, las soluciones a la ec. (5.13) corresponden a vacíos de la teoría invariantes bajo traslaciones espacio-temporales (es decir constantes) y con $J = 0$.

Una vez dada la definición del potencial efectivo y el significado físico de sus puntos extremos se debe dar un método para calcularlo. Para calcularlo se usa una serie perturbativa la cual se puede calcular con diagramas de Feynman o análogamente como

$$V_{eff} = V^0 + V^1 + \mathcal{O}(V^2), \quad (5.14)$$

en donde el término V^0 representa el potencial a nivel clásico o a *nivel árbol*. El potencial clásico es el que se encuentra en la densidad Lagrangiana, por ejemplo para una teoría puramente escalar $\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - V$, V es el potencial a nivel árbol V^0 . La primera corrección cuántica es la de 1-loop que es V^1 . Para encontrar la expresión del potencial a 1-loop se supone que ϕ_0 cumple la ec. clásica de la acción $S^J = \int S + J\phi$. Si se expande alrededor de la solución $\phi \approx \phi_0 + \chi$, entonces la acción S^J se expande como

$$S^J(\phi) = S^J(\phi_0) - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \chi(x) G^{-1}(x, y) \chi(y), \quad (5.15)$$

en donde se han despreciado los términos después del término cuadrático, pues estos ya no corresponden al término de 1-loop de (5.14). Además, se ha usado el hecho de que ϕ_0 satisface la ec. clásica con fuente externa para eliminar el término linear en χ de (5.15) y se define el propagador $G^{-1}(x, y)$ como

$$G^{-1}(x, y) = - \left. \frac{\delta^2 S^J(\phi)}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \right|_{\phi=\phi_0} = - \left. \frac{\delta^2 S(\phi)}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \right|_{\phi=\phi_0}, \quad (5.16)$$

en donde el término $J\phi$ de S^J se anula al derivar dos veces respecto a ϕ . El propagador de la ec. (5.16) se usa para expandir la serie del potencial efectivo de la ec. (5.14) en términos de diagramas de Feynman de manera análoga a las funciones de correlación comunes en teoría cuántica de campos. Usando (5.16) en el funcional generatriz (5.5) se obtiene

$$\begin{aligned} Z[J] &= e^{iS^J(\phi_0)} \int \mathcal{D}\chi e^{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y \chi(x) G^{-1}(x, y) \chi(y)} \\ &\propto e^{iS^J(\phi_0)} [\det(G^{-1})]^{-1/2}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

en donde se ha usado el determinante funcional. El determinante funcional está definido de manera análoga al determinante de una matriz, es decir la multiplicación de sus eigenvalores. Expandiendo alrededor del campo clásico $\phi_{cl} \approx \phi_0(x) + \phi_1(x)$, usando que $\ln \det A = \text{Tr} \ln A$ y junto con las ecuaciones (5.7), (5.9) y (5.12) se puede obtener que [73] el potencial bosónico a 1-loop es

$$V^{1,b}(\phi_{cl}) = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln(-k^2 + m_b^2(\phi_{cl})). \quad (5.18)$$

Para el caso que veremos en el Capítulo 6, los fermiones adquirirán masa a través del valor de expectación de un campo clásico. Por esta razón, es posible afirmar que la forma de la acción fermiónica que estudiaremos es $S = \int d^4x \left[\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m_f(\phi_{cl}))\psi \right]$. Entonces el propagador funcional sin fuentes externas es

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[i \int d^4x \left[\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m_f(\phi_{cl}))\psi \right] \right] = \det(i\cancel{\partial} - m_f(\phi_{cl})). \quad (5.19)$$

Con el funcional generatriz de (5.19) se puede obtener [74] que el potencial efectivo fermiónico es

$$V_{eff}^{1,f}(\phi_{cl}) = 4\frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln(-k^2 + m_f^2(\phi_{cl})), \quad (5.20)$$

en donde notamos que es la misma expresión que para el caso bosónico (5.18) pero con un factor de -4 . Este factor proviene del hecho de que estamos tratando con un espinor que tiene 4 grados de libertad más que un campo escalar real. Con el potencial efectivo bosónico (5.18) y fermiónico (5.20) se podrá obtener el potencial efectivo del modelo sigma lineal aplicado a quarks en el Capítulo 6. Ahora se verá la conexión entre el potencial efectivo y el estudio de las transiciones de fase a través del rompimiento espontáneo de la simetría.

5.3. Rompimiento espontáneo de la simetría

Una vez definido el potencial efectivo conviene hacer la conexión entre los mínimos de esta cantidad y el fenómeno del rompimiento espontáneo de la simetría. Para esto usaremos el desarrollo que hace Das [73] en su libro con una teoría escalar compleja ϕ^4 con Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi + m^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2, \quad (5.21)$$

con $m^2, \lambda > 0$. Definiendo $\sigma(x), \chi(x) \in \mathbb{R}$ como

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma + i\chi), \\ \phi^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma - i\chi),\end{aligned}\quad (5.22)$$

entonces la densidad Lagrangiana se escribe como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi + \frac{m^2}{2}(\sigma^2 + \chi^2) - \frac{\lambda}{8}(\sigma^2 + \chi^2)^2, \quad (5.23)$$

la cual es invariante bajo la transformación $\phi \rightarrow e^{i\epsilon}\phi$, con $\epsilon \in \mathbb{R}$. Las transformaciones infinitesimales son

$$\begin{aligned}\delta\phi &= i\epsilon\phi \\ \delta\sigma &= -\epsilon\chi \\ \delta\chi &= \epsilon\sigma.\end{aligned}\quad (5.24)$$

Una posible solución a la ec. clásica dada por la densidad Lagrangiana (5.21) es una solución constante de los campos σ y χ y que cumplan que $\frac{\partial V}{\partial\sigma} = \frac{\partial V}{\partial\chi} = 0$. Las soluciones a esta condición corresponde a $\sigma = \chi = 0$ y $\chi^2 + \sigma^2 = \frac{2m^2}{\lambda}$. La primera solución corresponde a un máximo y la segunda a un conjunto de mínimos. La segunda solución son infinitas soluciones que corresponden al círculo de radio $\phi^2 = \frac{m^2}{\lambda}$. Todas estas soluciones corresponden a vacíos de la teoría y son invariantes bajo la transformación de simetría $\phi \rightarrow e^{i\epsilon}\phi$. Sin embargo, al escoger uno de estos puntos del círculo la simetría se romperá espontáneamente. Escogiendo el vacío dado por $\sigma = v = \sqrt{\frac{2m^2}{\lambda}}$, $\chi = 0$. Entonces, cuánticamente se está eligiendo que $\langle\Omega|\sigma|\Omega\rangle = v$ y $\langle\Omega|\chi|\Omega\rangle = 0$. Por lo tanto,

$$\langle[Q, \chi]\rangle = i\delta\langle\chi\rangle = i\epsilon\langle\sigma\rangle \neq 0, \quad (5.25)$$

en donde Q es la carga conservada dada por la transformación de simetría y se ha usado la ec. (2.13) y (5.24). De (5.25) se sigue que $Q|0\rangle \neq 0$ que corresponde con la ec. (2.17). Para mostrar cuáles son los bosones de Goldstone se introduce el valor de expectación v en el Lagrangiano a través de $\sigma \rightarrow \sigma + v$, entonces

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - m^2\sigma^2 + \frac{m^4}{2\lambda} - m\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\sigma(\sigma^2 + \chi^2) - \frac{\lambda}{8}(\sigma^2 + \chi^2)^2, \quad (5.26)$$

de donde vemos que hay un bosón χ no masivo que corresponde al bosón de Goldstone y ha surgido otro bosón σ^2 con masa $\sqrt{2}m$. Por otro lado, si $m^2 < 0$ sólo habría una solución para el mínimo del potencial correspondiente a $\chi = \sigma = 0$ y no habría rompimiento espontáneo de la simetría pues $\langle \sigma \rangle = 0$.

En los párrafos anteriores únicamente se usó el potencial a nivel árbol. Para un estudio cuántico del rompimiento espontáneo de la simetría se debe estudiar el potencial efectivo. En este caso, el potencial dependería del valor de expectación $\langle \Omega | \chi | \Omega \rangle$ y $\langle \Omega | \sigma | \Omega \rangle$. Del ejemplo anterior vemos que cuando los campos adquieren un valor de expectación distinto de cero se rompe espontáneamente la simetría. Como se estableció en el Capítulo 3, cuando se rompe espontáneamente una simetría puede haber una transición de fase. En este caso el parámetro de orden sería el valor de expectación $\langle \Omega | \sigma | \Omega \rangle = v$ que es cero en una fase y distinto de cero en la otra. Además v corresponde al campo clásico ϕ_{cl} que minimiza el potencial efectivo. Así, el potencial efectivo cumple la función de una energía libre que depende de un parámetro de orden. Con este potencial efectivo podremos estudiar el orden de la transición de acuerdo a lo visto en el Capítulo 3. El ingrediente final para esto es agregar temperatura y potencial químico a la teoría cuántica de campos.

5.4. Formalismo de tiempo imaginario

El formalismo de tiempo imaginario, o formalismo de Matsubara, se usa para poder introducir temperatura a una teoría cuántica de campos. La idea central de este formalismo es darse cuenta que el factor de Boltzmann $e^{-\beta H}$ tiene la forma del operador de evolución temporal cuántico $U = e^{-iHt}$ pero con $\beta = it$. Esto provoca que el momento también cambie en lo que se conoce como *rotación de Wick*

$$k_0 \rightarrow ik_4, \quad (5.27)$$

que hace que la métrica de Minkowski se transforme en la de Euclides $k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 \rightarrow k^2 = -k_4^2 - \vec{k}^2 = -k_E^2$, en donde los subíndices con E indicaran que estaremos en el

espacio euclideo. Además, ahora el momento estará cuantizado como

$$k_4 = \omega_n = \begin{cases} 2\pi nT, & \text{bosones,} \\ (2n+1)\pi T & \text{fermiones,} \end{cases} \quad (5.28)$$

en donde T es la temperatura. Entonces, las integrales en el espacio de momento cambien como

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \rightarrow iT \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad (5.29)$$

con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Las frecuencias cuantizadas de la ec. (5.28) se les conoce como *frecuencias de Matsubara* mientras que las sumas sobre n de la ec. (5.29) se les conoce como sumas de Matsubara [73]. Con esto en mente, el potencial a 1-loop térmico se obtiene de (5.18) y es

$$V^{1,b}(\phi_{cl}) = \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln(\omega_n^2 + \vec{k}^2 + m_b^2(\phi_{cl})), \quad (5.30)$$

para bosones. En el caso de los fermiones también se puede introducir un potencial químico μ . La manera de hacer esto es realizar la transformación $\tilde{\omega}_n \rightarrow \tilde{\omega}_n - i\mu$, en donde desde ahora denotaremos a las frecuencias de Matsubara fermiónicas como $\tilde{\omega}_n$. Para bosones, también se puede introducir un potencial químico de manera análoga, pero en el modelo de este trabajo, no será necesario un potencial químico para bosones. Así, el potencial a 1-loop fermiónico es

$$V^{1,f}(\phi_{cl}) = -2T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln((\tilde{\omega}_n - i\mu)^2 + \vec{k}^2 + m_f^2(\phi_{cl})). \quad (5.31)$$

Finalmente, de (5.12) y (5.5) se llega a la ec. (4.39) dada por

$$Z_0 = e^{-V\beta_0 V_{eff}}.$$

Para acabar el capítulo se desarrollará un poco más los potenciales efectivos de (5.31) y (5.30). Para el potencial efectivo bosónico

$$\begin{aligned} V^{1,b}(\phi_{cl}) &= \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int dm_b^2 \frac{\partial}{\partial m_b^2} \ln(\omega_n^2 + \vec{k}^2 + m_b^2(\phi_{cl})) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int dm_b^2 \left[T \sum_n \frac{1}{\omega_n^2 + \omega^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int dm_b^2 \left[\frac{1}{2\omega} + \frac{n_B(\omega)}{\omega} \right], \end{aligned} \quad (5.32)$$

en donde se ha definido $\omega^2 = \vec{k}^2 + m_b^2(\phi_{cl})$, y se han usado las propiedades matemáticas [73]

$$\sum_n \frac{1}{n^2 + y^2} = \frac{\pi}{y} \coth \pi y,$$

$$\coth \beta x = 1 + 2n_B(2x), \quad (5.33)$$

con $n_B(x)$ la distribución de Bose-Einstein dada por

$$n_B(x) = \frac{1}{e^{\beta x} - 1}. \quad (5.34)$$

En (5.32) se observa que el primer término no depende de propiedades térmicas, mientras que la segunda parte sí. Así, la primera parte la llamamos *parte del vacío* y la segunda *parte de materia* y son respectivamente

$$V_{\text{eff,vac}}^{1,b} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int dm_b^2 \left[\frac{1}{2\sqrt{k^2 + m_b^2(\phi_{cl})}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dk k^2}{2\pi^2} \left[\sqrt{k^2 + m_b^2(\phi_{cl})} \right], \quad (5.35)$$

$$V_{\text{eff,mat}}^{1,b} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int dm_b^2 \left[\frac{n_B \left(\sqrt{k^2 + m_b^2(\phi_{cl})} \right)}{k^2 + m_b^2(\phi_{cl})} \right]$$

$$= T \int \frac{dk k^2}{2\pi^2} \left[\ln \left(1 - e^{-\sqrt{k^2 + m_b^2(\phi_{cl})}\beta} \right) \right]. \quad (5.36)$$

Para el potencial fermiónico

$$V^{1,f}(\phi_{cl}) = -T \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\ln((\tilde{\omega}_n - i\mu)^2 + \tilde{\omega}^2) + \ln(-\tilde{\omega}_n - i\mu)^2 + \tilde{\omega}^2 \right]$$

$$= -T \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\ln(\tilde{\omega}_n^2 + (\tilde{\omega} - \mu)^2) + \ln(\tilde{\omega}_n^2 + (\tilde{\omega} + \mu)^2) \right]$$

$$= - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\int d(\tilde{\omega} - \mu)^2 T \sum_n \left(\frac{1}{\tilde{\omega}_n^2 + (\tilde{\omega} - \mu)^2} \right) + \right.$$

$$\left. \int d(\tilde{\omega} + \mu)^2 T \sum_n \left(\frac{1}{\tilde{\omega}_n^2 + (\tilde{\omega} + \mu)^2} \right) \right]$$

$$= -T \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\sqrt{\vec{k}^2 + m_f^2(\phi_{cl})} + 2T \ln(1 + e^{-(\sqrt{\vec{k}^2 + m_f^2(\phi_{cl})} - \mu)\beta}) + \right.$$

$$\left. 2T \ln(1 + e^{-(\sqrt{\vec{k}^2 + m_f^2(\phi_{cl})} + \mu)\beta}) \right], \quad (5.37)$$

en donde se ha definido $\tilde{\omega}^2 = \vec{k}^2 + m_f^2(\phi_{cl})$, y se han usado las propiedades matemáticas [75]

$$\sum_n \frac{1}{(2n+1)^2 + y^2} = \frac{\pi}{2y} \tanh \frac{\pi y}{2},$$

$$\tanh \beta x = 1 - 2n_F(2x), \quad (5.38)$$

con $n_F(x)$ la distribución de Fermi-Dirac dada por

$$n_F(x) = \frac{1}{e^{\beta x} + 1}. \quad (5.39)$$

Así, el potencial efectivo fermiónico del vacío y de materia son respectivamente

$$V_{\text{eff,vac}}^{1,f} = - \int \frac{dk k^2}{\pi^2} \left[\sqrt{k^2 + m_f^2(\phi_{cl})} \right], \quad (5.40)$$

$$V_{\text{eff,mat}}^{1,f} = -T \int \frac{dk k^2}{\pi^2} \left[\ln(1 + e^{-(\sqrt{k^2 + m_f^2(\phi_{cl})} - \mu)\beta}) + \ln(1 + e^{-(\sqrt{k^2 + m_f^2(\phi_{cl})} + \mu)\beta}) \right]. \quad (5.41)$$

Ya con las expresiones de los potenciales efectivos térmicos y con potencial químico finito se podrá obtener el potencial efectivo del modelo sigma lineal acoplado a quarks y así poder estudiar la transición quiral que se exhibe en dicho modelo.

Capítulo 6

Modelo Sigma Lineal acoplado a Quarks y Potencial Efectivo

En este capítulo introduciremos el modelo sigma lineal acoplado a quarks y las consecuencias del rompimiento espontáneo y explícito de la simetría quirral en dicho modelo. Luego, se dará el desarrollo del cálculo del potencial efectivo en la aproximación de alta y baja temperatura junto con los autoenergías de los bosones y fermiones en ambas aproximaciones. Al final, se desarrollarán las correcciones térmicas de las constantes de acoplamiento del modelo.

6.1. Lagrangiano del Modelo Sigma Lineal acoplado a Quarks

Debido a la dificultad de trabajar con el Lagrangiano de la QCD (2.1) por el hecho de que aún no se sabe cómo pasar de los grados de libertad hadrónicos a los quarks y gluones durante la transición, se puede optar por usar un Lagrangiano efectivo que emule el rompimiento de la simetría quirral de la QCD. Se usará el LSMq. En este modelo tenemos 4 bosones dados por el bosón singulete sigma σ y los tres piones agrupados en el triplete $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$, en donde el pión neutro es $\pi_3 = \pi^0$ y los piones cargados son $\pi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 \mp i\pi_2)$. Estos bosones están acoplados entre sí mediante la constante de acoplamiento λ . También se incluyen los quarks

up y down en el espinor ψ el cual es un doblete de isoespín $SU(2)$. El acoplamiento entre los quarks y los bosones se realiza a través de la constante de acoplamiento g . Así, el Lagrangiano del modelo es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\vec{\pi})^2 + \frac{a^2}{2}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - g\bar{\psi}(\sigma + i\gamma_5\vec{\tau}\cdot\vec{\pi})\psi, \quad (6.1)$$

en donde $\vec{\tau}$ son las matrices de Pauli y los bosones tienen un parámetro de masa a con $a > 0$. Como vemos, el modelo sigma lineal es similar al visto en la Sección 5.3. Así, al igual que en el modelo visto en tal sección, hacemos que el bosón σ desarrolle un valor de expectación distinto de cero v . Es decir,

$$\sigma \rightarrow \sigma + v, \quad (6.2)$$

en donde v será el parámetro de orden de la teoría y lo identificamos como el campo clásico ϕ_{cl} visto en la Sección 5.2. Por lo tanto, el nuevo Lagrangiano de LSMq es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 - \frac{1}{2}(3\lambda v^2 - a^2)\sigma^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\vec{\pi})^2 - \frac{1}{2}(\lambda v^2 - a^2)\pi^2 + \frac{a^2}{2}v^2 - \frac{\lambda}{4}v^4 \\ & + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - gv\bar{\psi}\psi - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 - g\bar{\psi}(\sigma + i\gamma_5\vec{\tau}\cdot\vec{\pi})\psi, \end{aligned} \quad (6.3)$$

de donde podemos identificar que las masas ahora dependen del valor de expectación y están dadas por

$$\begin{aligned} M_q &= gv, \\ M_\pi^2 &= \lambda v^2 - a^2, \\ M_\sigma^2 &= 3\lambda v^2 - a^2. \end{aligned} \quad (6.4)$$

El potencial a nivel árbol del Lagrangiano de la ec. (6.3) tiene un mínimo en $v = \sqrt{\frac{a^2}{\lambda}}$ el cual es distinto de cero. Por lo tanto, por lo visto en la Sección 5.3 se ha roto espontáneamente la simetría quiral y ocurrió una transición de fase. Para estudiar de qué tipo es la transición de fase tendremos que calcular el potencial efectivo. Antes de hacer esto, recordemos que en QCD además de el rompimiento espontáneo de la simetría existe un rompimiento explícito dado por la masa finita de los quarks. Dicho rompimiento genera que los piones sean masivos. Por esta razón introducimos esta masa finita de los piones mediante

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{m_\pi^2}{2}v(\sigma + v), \quad (6.5)$$

y usamos el valor de los piones cargados $m_\pi = 139 \text{ MeV}$ [40]. Esto genera que el potencial a orden árbol sea

$$V^0 = -\frac{a^2 + m_\pi^2}{2}v^2 + \frac{\lambda}{4}v^4, \quad (6.6)$$

el cual tiene un mínimo en

$$v_0 = \sqrt{\frac{a^2 + m_\pi^2}{\lambda}}. \quad (6.7)$$

Notemos que si sustituimos la ec. (6.7) en (6.4), obtenemos que $M_\pi^2 = m_\pi^2$ que es justo lo que esperaríamos. Esto quiere decir, que la simetría quiral es rota explícitamente por una masa distinta de cero, emulando lo que ocurre en QCD cuando obtenemos piones masivos debido a la masa distinta de cero de los quarks up y down.

6.2. Potencial efectivo del modelo LSMq

El potencial efectivo a 1-loop está dividido en una parte de materia y otra de vacío. La parte de vacío bosónica y fermiónica difieren solamente por un factor -4 , por lo que basta calcular la parte de vacío de una. La parte de vacío del potencial efectivo bosónica está dada por la ec. (5.35)

$$V_{\text{eff,vac}}^{1,b} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int dm_b^2 \left[\frac{1}{2\sqrt{\vec{k}^2 + m_b^2(v)}} \right]. \quad (6.8)$$

La integral de (6.8) tiene una divergencia ultravioleta, por lo que es necesario usar técnicas de regularización y renormalización para calcular la integral. En d dimensiones se sabe [72] que

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\vec{k}^2 + m_b^2}} &\rightarrow \mu^{3-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{\sqrt{\vec{k}^2 + m_b^2}} \\ &= \mu^{3-d} \frac{(i)i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{d}{2})}{\Gamma(1/2)} \left(\frac{1}{-m_b^2} \right)^{1/2-d/2} \\ &= -\frac{(-1)^{1/2-d/2} \Gamma(\frac{1}{2} - \frac{d}{2})}{\Gamma(1/2)} \left[\frac{\mu^{3-d}}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{m_b^2} \right)^{1/2-d/2} \right], \end{aligned} \quad (6.9)$$

en donde se ha introducido la escala de regularización μ . Sustituyendo $d \rightarrow 3 - 2\epsilon$ y expandiendo en Serie de Taylor obtenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\vec{k}^2 + m_b^2}} &\rightarrow -\frac{(-1)^{-1+\epsilon} \Gamma(-1+\epsilon)}{(4\pi)^{3/2} \Gamma(1/2)} \left(\frac{\mu^2 4\pi}{m_b^2}\right)^\epsilon m_b^2 \\ &= \frac{m_b^2}{(4\pi)^{3/2} \sqrt{\pi}} \left(-\frac{1}{\epsilon} - \ln\left(\frac{\mu^2}{m_b^2}\right) + \gamma_E - 1 - \ln 4\pi + \mathcal{O}(\epsilon) \right), \end{aligned} \quad (6.10)$$

en donde $\gamma_E \approx 0.577$ es la constante de Euler. La manera en la que decidimos eliminar los términos de la última expresión en (6.10) se conoce como *esquema de renormalización*. En el esquema MS, por sus siglas en inglés “Minima Subtraction”, sólo eliminamos el término divergente $\propto \frac{1}{\epsilon}$. Además, la escala de regularización es la escala de energía más alta en el sistema físico que se estudia. Como se verá más adelante, la escala más grande será el potencial químico crítico de quarks μ_c al que se fijará que ocurre la transición para $T = 0$. Elegimos $\mu = \mu_c e^{1/2}$. Entonces,

$$\begin{aligned} V_{\text{eff,vac}}^{1,b} &= \frac{1}{4} \int dm_b^2 \frac{m_b^2}{8\pi^2} \left[\ln\left(\frac{m_b^2}{4\pi\mu_c^2}\right) + \gamma_E - 2 \right] \\ &= -\frac{m_b^4}{64\pi^2} \left[\ln\left(\frac{4\pi\mu_c^2}{m_b^2}\right) + \frac{5}{2} - \gamma_E \right]. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Y por lo tanto, la parte de vacío para fermiones es

$$V_{\text{eff,vac}}^{1,f} = \frac{m_f^4}{16\pi^2} \left[\ln\left(\frac{4\pi\mu_c^2}{m_b^2}\right) + \frac{5}{2} - \gamma_E \right]. \quad (6.12)$$

Debido a que el término de vacío del potencial a 1-loop no contiene variables termodinámicas, se deben introducir contratérminos $\delta\lambda$ y δa^2 que fijen el mínimo del potencial para que el vacío cuántico siga coincidiendo con el vacío clásico,

$$V^{\text{vac}} = -\frac{a^2 + \delta a^2 + m_\pi^2}{2} v^2 + \frac{\lambda + \delta\lambda}{4} v^4 + N_f N_c V_{\text{eff,vac}}^{1,f} + 3V_{\text{eff,vac}}^{1,\pi} + V_{\text{eff,vac}}^{1,\sigma}, \quad (6.13)$$

es decir, que el mínimo de la ec. (6.13) coincida con la ec. (6.7) [76]. Notemos que el potencial de (6.13) está tomando en cuenta los diferentes grados de libertad de los quarks mediante el número de sabores $N_f = 2$ y el número de colores $N_c = 3$. El mínimo v_0 se fija con las condiciones

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV^{\text{vac}}}{dv} \right|_{v=v_0} &= 0 \\ \left. \frac{d^2V^{\text{vac}}}{dv^2} \right|_{v=v_0} &= 2(a^2 + m_\pi^2). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Estas condiciones dan que los contratérminos deben ser

$$\begin{aligned} \delta a^2 &= \frac{3}{16\pi^2\lambda} \left[8a^2g^4 - 2\gamma_E a^2\lambda^2 + a^2\lambda^2 \ln\left(\frac{4\pi\mu_c^2}{m_\pi^2}\right) + a^2\lambda^2 \ln\left(\frac{4\pi\mu_c^2}{3(a^2 + m_\pi^2) - a^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + 8g^4m_\pi^2 - 4\lambda^2m_\pi^2 \right] \\ \delta\lambda &= \frac{3}{16\pi^2} \left[-8g^4 \ln\left(\frac{4\pi\lambda\mu_c^2}{g^2(a^2 + m_\pi^2)}\right) + 3\lambda^2 \ln\left(\frac{4\pi\mu_c^2}{3(a^2 + m_\pi^2) - a^2}\right) + 8\gamma_E g^4 - 8g^4 \right. \\ &\quad \left. - 4\gamma_E\lambda^2 + 4\lambda^2 + \lambda^2 \ln\left(\frac{4\pi\mu_c^2}{m_\pi^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (6.15)$$

Ahora procederemos a calcular la parte de materia en las dos aproximaciones de temperatura alta y temperatura baja.

6.2.1. Potencial efectivo de materia: Alta temperatura

La parte de materia bosónica está dada por la ec. (5.36). Haciendo un cambio de variable a $x = \frac{k}{T}$, entonces da

$$V_{\text{eff,mat}}^{1,b} = \frac{T^4}{2\pi^2} \int dx x^2 \ln(1 - e^{-\sqrt{x^2 + \frac{m_b^2}{T^2}}}). \quad (6.16)$$

De acuerdo a [77], la ec. (6.16) se puede calcular como serie perturbativa respecto a la variable $y_b = \frac{m_b}{T} \ll 1$. Dando

$$V_{\text{eff,mat}}^{1,b} = -\frac{\pi^2 T^4}{90} + \frac{m_b^2 T^2}{24} - \frac{m_b^3 T}{12\pi} - \frac{m_b^4}{64\pi^2} \ln\left(\frac{m_b^4}{4\pi T^2}\right) + \mathcal{O}(m_b^6/T^2). \quad (6.17)$$

Para obtener el siguiente término en la serie de la ec. (6.16) usamos el comentario dado en el apéndice de [77] afirmando que la siguiente contribución está dada por

$$\frac{32\pi^2 T^4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{y_b^2}{4\pi^2 n^2}\right)^{3/2} - 1 - \frac{3y_b^2}{\pi^2 n^2} - \frac{3y_b^4}{128\pi^2 n^4} \right]. \quad (6.18)$$

Si expandemos en serie de Taylor el primer término de (6.18) para $y_b \ll 1$ se obtiene que los primeros tres términos de la serie se cancelan con los demás términos de (6.18). La contribución dominante es

$$-\frac{m_b^6}{96\pi^4 T^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = -\zeta(3) \frac{m_b^6}{96\pi^4 T^2}, \quad (6.19)$$

en donde se ha usado la definición de la Zeta de Riemann ζ . Por lo tanto, el potencial efectivo a 1-loop de materia bosónica es

$$V_{\text{eff,mat}}^{1,b} = -\frac{\pi^2 T^4}{90} + \frac{m_b^2 T^2}{24} - \frac{m_b^3 T}{12\pi} - \frac{m_b^4}{64\pi^2} \ln\left(\frac{m_b^4}{(4\pi T^2)}\right) - \zeta(3) \frac{m_b^6}{96\pi^4 T^2} \quad (6.20)$$

De la expresión (6.20) notamos que hay un término que va como $\sim m_b^3$. Para masas con $m_b^2 < 0$ este término es imaginario. Para resolver este problema es necesario ir al siguiente orden en el potencial bosónico. El potencial efectivo a 1-loop se dice que está dentro de la aproximación de *campo medio* [76]. El siguiente término en el potencial efectivo no es el de 2-loops sino el llamado término de *anillo*. El término de anillo físicamente está tomando en cuenta efectos de interacción a grandes distancias. Este término está dado por [76, 78]

$$V_{\text{eff}}^{\text{anillo}} = \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\ln \left(1 + \Pi(T, \mu_q, \omega_n, \vec{k}) \left(\frac{1}{\omega_n^2 + \vec{k}^2 + m_b^2} \right) \right) \right], \quad (6.21)$$

en donde Π es la autoenergía del bosón. La autoenergía del bosón físicamente es la corrección a la masa del bosón y está dada por los diagramas de la Figura 6.1. La expresión en la aproximación de alta temperatura $k/T \ll 1$ según [27] está dada por

$$\Pi(T, \mu_q)_b^{AT} = -N_c N_f g^2 \frac{T^2}{\pi^2} [\text{Li}_2(-e^{\frac{\mu_q}{T}}) + \text{Li}_2(-e^{-\frac{\mu_q}{T}})] + \frac{\lambda T^2}{2}, \quad (6.22)$$

en donde Li_2 es la función polilogarítmica de orden 2. El primer término de (6.22) proviene de la interacción entre los bosones con los fermiones y es por eso que depende directamente del acoplamiento g y de los grados de libertad fermiónicos $N_f N_c$, mientras que el segundo término proviene de la interacción entre los bosones por lo que depende directamente de la constante de acoplamiento entre los bosones λ y no aparece algún potencial químico pues se supone un potencial químico bosónico nulo.

Se puede mostrar [27, 76] que el potencial de anillo de la ec. (6.21) está dado por

$$V^{\text{anillo}} = \frac{T}{12\pi} (m_b^3 - (m_b^2 + \Pi_b(T, \mu_q))^{3/2}), \quad (6.23)$$

en donde la autoenergía bosónica está dada por la ec. (6.22).

De las ecuaciones (6.20) y (6.23) notamos que el término con m_b^3 se cancela exactamente eliminando los posibles términos imaginarios.

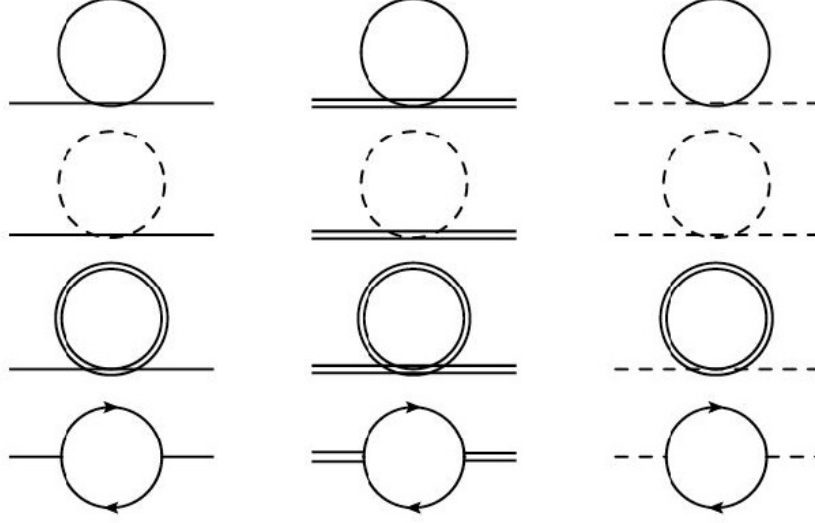


Figura 6.1: Diagramas de Feynman de la autoenergía del bosón. Las líneas con flechas denotan a los quarks, la línea punteada denota a los piones cargados, la doble línea denota al pión neutro y la línea continua denota al sigma. [27]

Ahora pasaremos a evaluar la contribución fermiónica al potencial efectivo dada por la ec. (5.41). Para poder resolver esta integral, reexpresamos la integral en términos de las variables $x = k/T$, $y_f = m_f/T$, y $z = \mu_q/T$,

$$V_{\text{eff,mat}}^{1,f} = -\frac{T^4}{\pi^2} \int dx x^2 \left[\ln(1 + e^{-(\sqrt{x^2+y_f^2}-z)}) + \ln(1 + e^{-(\sqrt{x^2+y_f^2}+z)}) \right], \quad (6.24)$$

en donde hemos usado que el potencial químico μ es el potencial químico de quarks μ_q . Si se expande para temperaturas altas $y_f^2 \ll 1$, tendremos una serie de Taylor dada por

$$V_{\text{eff,mat}}^{1,f} = V_{\text{eff,mat}}^{1,f} \Big|_{y_f^2=0} + \frac{\partial V_{\text{eff,mat}}^{1,f}}{\partial y_f^2} \Big|_{y_f^2=0} y_f^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_{\text{eff,mat}}^{1,f}}{\partial y_f^4} \Big|_{y_f^2=0} y_f^4 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 V_{\text{eff,mat}}^{1,f}}{\partial y_f^6} \Big|_{y_f^2=0} y_f^6 + \dots \quad (6.25)$$

El primer término está dado por

$$\begin{aligned} V_{\text{eff,mat}}^{1,f} \Big|_{y_f^2=0} &= -\frac{T^4}{\pi^2} \int dx x^2 \left[\ln(1 + e^{-(x-z)}) + \ln(1 + e^{-(x+z)}) \right] \\ &= \frac{16T^4}{8\pi^2} [\text{Li}_4(-e^{-\frac{\mu_q}{T}}) + \text{Li}_4(-e^{-\frac{\mu_q}{T}})], \end{aligned} \quad (6.26)$$

en donde se ha evaluado en $x = k/T = 0$ después de realizar la integración pues

estamos en el límite de temperatura alta. Luego, el segundo término está dado por

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial V_{\text{eff,mat}}^{1,f}}{\partial y^2} \right|_{y^2=0} &= \frac{T^4}{2\pi^2} \int dx x \left[\frac{1}{e^{x-z} + 1} + \frac{1}{e^{x+z} + 1} \right] \\ &= -\frac{T^4}{2\pi^2} [\text{Li}_2(-e^{-z}) + \text{Li}_2(-e^z)], \end{aligned} \quad (6.27)$$

en donde nuevamente hemos evaluado para $x = k/T = 0$. Para el tercer término

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 V_{\text{eff,mat}}^{1,f}}{\partial (y_f^2)^2} \right|_{y_f^2=0} &= -\frac{T^4}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dx \frac{1}{\sqrt{x^2 + y_f^2}} \left[\frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + y_f^2} - z}} + \frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + y_f^2} + z}} \right] \\ &= -\frac{T^4}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dx \left[\frac{1}{\tilde{\omega}} - 2 \sum_n \frac{1}{((2n+1)\pi + iz)^2 + \tilde{\omega}^2} \right], \end{aligned} \quad (6.28)$$

en donde se ha integrado por partes en la primera línea y luego se han usado las propiedades de las ecuaciones (5.38) en el segundo renglón. Para resolver las dos integrales que resultaron en (6.28) se debe incluir un regularizador $x^{-\epsilon}$ en el numerador de ambas integrales y expandir para ϵ pequeña. Las integrales dan

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx \frac{1}{\tilde{\omega}} &= \frac{1}{\epsilon} + \ln\left(\frac{2}{y}\right) \\ \int_0^\infty dx - 2 \sum_n \frac{1}{((2n+1)\pi + iz)^2 + \tilde{\omega}^2} &= -\frac{1}{\epsilon} + \ln(2\pi) + \\ &\frac{1}{2} \left(\psi^{(0)}\left(\frac{1}{2} + i\frac{z}{2\pi}\right) + \psi^{(0)}\left(\frac{1}{2} - i\frac{z}{2\pi}\right) \right). \end{aligned} \quad (6.29)$$

De las integrales (6.29) notamos que el término divergente $\frac{1}{\epsilon}$ se cancela exactamente.

Y por lo tanto, la siguiente contribución al potencial efectivo está dada por

$$\left. \frac{\partial^2 V_{\text{eff,mat}}^{1,f}}{\partial (y_f^2)^2} \right|_{y_f^2=0} = \frac{T^4}{8\pi^2} \left[\ln\left(\frac{y_f^2}{(4\pi)^2}\right) - \psi^{(0)}\left(\frac{1}{2} + i\frac{z}{2\pi}\right) + \psi^{(0)}\left(\frac{1}{2} - i\frac{z}{2\pi}\right) \right]. \quad (6.30)$$

Notamos que la dependencia de y_f en el término $\ln(y_f^2/(4\pi)^2)$ se cancela con la parte de materia fermiónica dada por la ec. (6.12) eliminando así la divergencia que resultaría de evaluar en $y_f^2 = 0$.

Luego, el siguiente término de acuerdo a [28] está dado por

$$\left. \frac{\partial^3 V_{\text{eff,mat}}^{1,f}}{\partial (y_f^2)^3} \right|_{y_f^2=0} = \frac{T^4}{16\pi^2} \left[\psi^{(2)}\left(\frac{3}{2} + \frac{iz}{2\pi}\right) + \psi^{(2)}\left(\frac{3}{2} - \frac{iz}{2\pi}\right) \right]. \quad (6.31)$$

Por lo tanto, el potencial efectivo en la aproximación de alta temperatura [28] es

$$\begin{aligned}
V_{\text{eff}}^{\text{AT}}(v) = & -\frac{a^2 + \delta a^2}{2}v^2 + \frac{\lambda + \delta\lambda}{4}v^4 - 3\left\{ \frac{M_\pi^4}{64\pi^2} \left[\ln\left(\frac{\mu_c^2}{4\pi T^2}\right) + \frac{5}{2} - \gamma_E \right] + \frac{\pi^2 T^4}{90} \right. \\
& - \frac{T^2 M_\pi^2}{24} + \frac{T(M_\pi^2 + \Pi_b^{\text{AT}})^{3/2}}{12\pi} + \left. \frac{\zeta(3)M_\pi^6}{96\pi^4 T^2} \right\} - \left\{ \frac{M_\sigma^4}{64\pi^2} \left[\ln\left(\frac{\mu_c^2}{4\pi T^2}\right) + \frac{5}{2} - \gamma_E \right] + \frac{\pi^2 T^4}{90} \right. \\
& - \frac{T^2 M_\sigma^2}{24} + \frac{T(M_\sigma^2 + \Pi_b^{\text{AT}})^{3/2}}{12\pi} + \left. \frac{\zeta(3)M_\sigma^6}{96\pi^4 T^2} \right\} + \frac{N_c N_f}{16\pi^2} \left\{ M_q^4 \left[\ln\left(\frac{\mu_c^2}{4\pi T^2}\right) + \frac{5}{2} - \gamma_E \right. \right. \\
& \left. \left. - \psi^{(0)}\left(\frac{1}{2} + \frac{i\mu_q}{2\pi T}\right) - \psi^{(0)}\left(\frac{1}{2} - \frac{i\mu_q}{2\pi T}\right) \right] - 8M_q^2 T^2 [\text{Li}_2(-e^{\mu_q/T}) + \text{Li}_2(-e^{-\mu_q/T})] \right. \\
& \left. + 32T^4 [\text{Li}_4(-e^{\mu_q/T}) + \text{Li}_4(-e^{-\mu_q/T})] + \frac{M_q^6}{6T^2} \left[\psi^{(2)}\left(\frac{3}{2} + \frac{i\mu_q}{2\pi T}\right) + \psi^{(2)}\left(\frac{3}{2} - \frac{i\mu_q}{2\pi T}\right) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{6.32}$$

6.2.2. Potencial efectivo de materia: Baja temperatura

Nuevamente, el potencial efectivo de materia bosónico está dado por la ec. (5.36).

Usando la serie de Taylor para $\ln(1-x)$ para $|x| \ll 1$ y haciendo el cambio de variable a $\omega = \sqrt{k^2 + m_b^2}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
V_{\text{eff,mat}}^{1,b} = & -\frac{T}{2\pi^2} \int_0^\infty d\omega \sqrt{\omega^2 - m_b^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-\frac{n\omega}{T}}}{n} \\
= & -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{Tm_b}{n}\right)^2 K_2\left(\frac{Tm_b}{n}\right) \\
\approx & -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{Tm_b}{n}\right)^2 \sqrt{\frac{\pi T}{2m_b n}} e^{-\frac{m_b n}{T}} \\
= & -T \left(\frac{Tm_b}{2\pi}\right)^{3/2} \text{Li}_{5/2}(e^{-\frac{m_b}{T}}),
\end{aligned} \tag{6.33}$$

en donde K_2 es la función de Bessel modificada de segundo tipo y se ha expandido para $m_b/T \ll 1$. En el último renglón se usó la definición de la función polilogaritmo.

Para el potencial fermiónico de materia tendremos que usar la expansión a baja temperatura de [79]. Esta expansión es sobre el término de materia junto con el de

vacío, es decir

$$\begin{aligned}
V_{\text{eff}}^{1,f} &= V_{\text{eff},0}^{1,f}(v, \mu_q + xT) \Big|_{T=0} + \frac{\pi^2 T^2}{6} \left[\frac{\partial^2}{\partial (xT)^2} V_{\text{eff},0}^{1,f}(v, \mu_q + xT) \right] \Big|_{T=0} \\
&+ \frac{7\pi^4 T^4}{360} \left[\frac{\partial^4}{\partial (xT)^4} V_{\text{eff},0}^{1,f}(v, \mu_q + xT) \right] \Big|_{T=0} + \frac{31\pi^6 T^6}{15120} \left[\frac{\partial^6}{\partial (xT)^6} V_{\text{eff},0}^{1,f}(v, \mu_q + xT) \right] \Big|_{T=0} + \dots,
\end{aligned} \tag{6.34}$$

en donde $V_{\text{eff},0}^{1,f}(v, \mu_q) = V_{\text{eff}}^{1,f}(v, \mu_q, T) \Big|_{T=0}$. Para el primer término de la serie ya tenemos calculado la parte de vacío, la parte de materia evaluada en $T = 0$ es

$$\begin{aligned}
V_{\text{eff,mat}}^{1,f}(v, \mu_q, T) \Big|_{T=0} &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 (\tilde{\omega} - \mu_q) \Theta(\mu_q - \tilde{\omega}) \\
&= \frac{3m_f^4}{24\pi^2} \ln \left(\frac{m_f}{\mu_q + \sqrt{\mu_q^2 - m_f^2}} \right) + \frac{1}{24\pi^2} \mu_q (5m_f^2 - 2\mu_q^2) \sqrt{\mu_q^2 - m_f^2},
\end{aligned} \tag{6.35}$$

en donde se ha usado que $\tilde{\omega} = \sqrt{k^2 + m_f^2}$. Entonces, el primer término de la ec. (6.34) es

$$\begin{aligned}
V_{\text{eff},0}^{1,f}(v, \mu_q + xT) \Big|_{T=0} &= V_{\text{eff},0}^{1,f}(v, \mu_q) \\
&= \frac{m_f^4}{16\pi^2} \left[\ln \left(\frac{4\pi\mu_c^2}{(\mu_q + \sqrt{\mu_q^2 - m_f^2})^2} \right) - \gamma_E + \frac{5}{2} \right] - \frac{\mu_q \sqrt{\mu_q^2 - m_f^2}}{24\pi^2} (2\mu_q^2 - 5m_f^2).
\end{aligned} \tag{6.36}$$

Por lo tanto, las derivadas dan

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2 T^2}{6} \left[\frac{\partial^2}{\partial (xT)^2} V_{\text{eff},0}^{1,f}(v, \mu_q + xT) \right] \Big|_{T=0} &= -\frac{T^2 \mu_q}{6} \sqrt{\mu_q^2 - m_f^2} \\
\frac{7\pi^4 T^4}{360} \left[\frac{\partial^4}{\partial (xT)^4} V_{\text{eff},0}^{1,f}(v, \mu_q + xT) \right] \Big|_{T=0} &= -\frac{7\pi^2 T^4 \mu_q (2\mu_q^2 - 3m_f^2)}{360 (\mu_q^2 - m_f^2)^{3/2}} \\
\frac{31\pi^6 T^6}{15120} \left[\frac{\partial^6}{\partial (xT)^6} V_{\text{eff},0}^{1,f}(v, \mu_q + xT) \right] \Big|_{T=0} &= \frac{31\pi^4 \mu_q m_f^4 T^6}{1008 (\mu_q^2 - m_f^2)^{7/2}}.
\end{aligned} \tag{6.37}$$

Para complementar el potencial efectivo, podemos sustituir la masa bosónica por su masa corregida $m_b + \Pi_b^{BT}$. La autoenergía del bosón en el límite de baja temperatura se puede obtener a partir de la expresión dada en (6.22) y con una serie análoga a (6.34). Con esto en mente [28], se obtiene que

$$\Pi_b^{BT} = N_c N_f g^2 \left(\frac{\mu_q^2}{2\pi^2} + \frac{T^2}{6} \right). \tag{6.38}$$

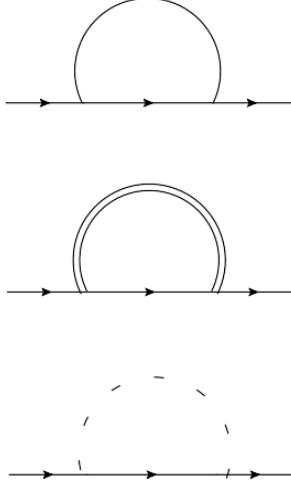


Figura 6.2: Diagramas de Feynman de la autoenergía del fermión. Las líneas con flechas denotan a los quarks, la línea punteada denota a los piones cargados, la doble línea denota al pión neutro y la línea continua denota al sigma [80].

Por lo tanto, el potencial a baja temperatura está dado por

$$\begin{aligned}
V_{\text{eff}}^{\text{BT}}(v) = & -\frac{a^2 + \delta a^2}{2}v^2 + \frac{\lambda + \delta\lambda}{4}v^4 - 3 \left\{ \frac{(M_\pi^2 + \Pi_b^{\text{BT}})^2}{64\pi^2} \left[\ln \left(\frac{4\pi\mu_c^2}{M_\pi^2 + \Pi_b^{\text{BT}}} \right) + \frac{5}{2} - \gamma_E \right] \right. \\
& \left. + T \left(\frac{T\sqrt{M_\pi^2 + \Pi_b^{\text{BT}}}}{2\pi} \right)^{3/2} \text{Li}_{5/2} \left(e^{-\sqrt{M_\pi^2 + \Pi_b^{\text{BT}}}/T} \right) \right\} \\
& - \left\{ \frac{(M_\sigma^2 + \Pi_b^{\text{BT}})^2}{64\pi^2} \left[\ln \left(\frac{4\pi\mu_c^2}{M_\sigma^2 + \Pi_b^{\text{BT}}} \right) + \frac{5}{2} - \gamma_E \right] \right. \\
& \left. + T \left(\frac{T\sqrt{M_\sigma^2 + \Pi_b^{\text{BT}}}}{2\pi} \right)^{3/2} \text{Li}_{5/2} \left(e^{-\sqrt{M_\sigma^2 + \Pi_b^{\text{BT}}}/T} \right) \right\} + \\
N_c N_f \left\{ \frac{M_q^4}{16\pi^2} \left[\ln \left(\frac{4\pi\mu_c^2}{(\mu_q + \sqrt{\mu_q^2 - M_q^2})^2} \right) - \gamma_E + \frac{1}{2} \right] - \frac{\mu_q \sqrt{\mu_q^2 - M_q^2}}{24\pi^2} (2\mu_q^2 - 5M_q^2) \right. \\
& \left. - \frac{T^2\mu_q}{6} \sqrt{\mu_q^2 - M_q^2} - \frac{7\pi^2 T^4 \mu_q}{360} \frac{(2\mu_q^2 - 3M_q^2)}{(\mu_q^2 - M_q^2)^{3/2}} + \frac{31\pi^4 \mu_q M_q^4 T^6}{1008(\mu_q^2 - M_q^2)^{7/2}} \right\}. \quad (6.39)
\end{aligned}$$

Además, como se verá más adelante, para las correcciones a las constante de acoplamiento se requerirá de la autoenergía del fermión en la aproximación para baja temperatura Π_f^{BT} . Esta corrección está dada por los diagramas de Feynman de las

Figuras 6.2. En [80] esta autoenergía fue calculada en la aproximación de HTL, por sus siglas en inglés “Hard Thermal Loop”. Esta aproximación se usa para manejar de manera más sencilla las divergencias infrarrojas que surgen en las expansiones perturbativas de teorías térmicas de campos [81]. La autoenergía es

$$\Pi_f^{AT} = \frac{g^2 T^2}{\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{3} - \text{Li}_2(-e^{\mu_q/T}) - \text{Li}_2(-e^{-\mu_q/T}) \right). \quad (6.40)$$

Para obtener el límite de baja temperatura de (6.40) basta con expandir en serie análoga a (6.34). Por lo tanto, la autoenergía del fermión en la aproximación de baja temperatura es

$$\Pi_f^{BT} = g^2 \left(\frac{\mu_q^2}{2\pi^2} + \frac{T^2}{2} \right). \quad (6.41)$$

Ya con los potenciales efectivos a altas y bajas temperaturas podría ser posible encontrar el CEP con el análisis de Landau visto en la Sección 3.1. Sin embargo, hace falta el último ingrediente que consiste en calcular las correcciones a la constante de acoplamiento.

6.3. Corrección a la constante de acoplamiento g

Los diagramas para las correcciones a la constante de acoplamiento entre los fermiones y los bosones g está dada por los diagramas de Feynman de la Figura 6.3 [27]. La estructura de todos es la misma dado que lo único que cambia en los diferentes diagramas son las masas de los bosones virtuales. Si asumimos que todos los bosones tienen masa igual a la autoenergía, entonces basta calcular un diagrama y luego sumar todas las contribuciones.

Se empieza calculando el diagrama de la Figura 6.4. Dicho diagrama está dado por

$$G = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(\mathbf{p}_2) (-ig)(i\tau_3 \gamma_5) S(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}) (-ig) S(\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}) (-ig)(i\tau_3 \gamma_5) D(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}_1), \quad (6.42)$$

en donde los propagadores fermiónicos y bosónicos están dados por

$$S(\mathbf{k}) = i \frac{\not{k} + m_f}{k^2 - m_f^2} \quad (6.43)$$

$$D(\mathbf{k}) = \frac{i}{k^2 - m_b^2}, \quad (6.44)$$

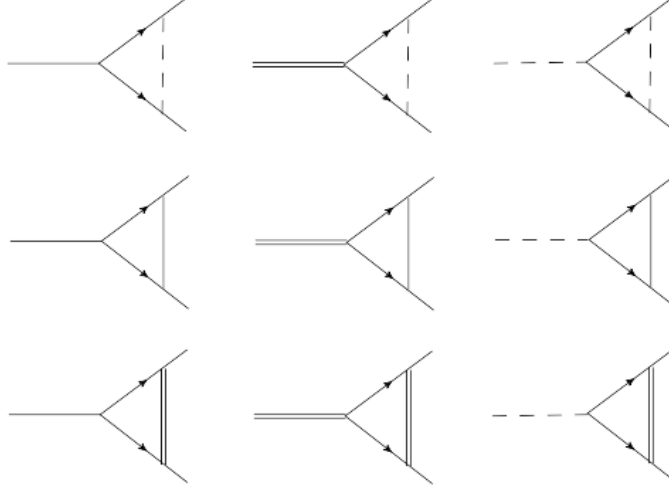


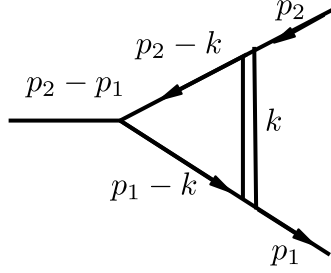
Figura 6.3: Diagramas de Feynman de la constante de acoplamiento g . Las líneas con flechas denotan a los quarks, la línea punteada denota a los piones cargados, la doble línea denota al pión neutro y la línea continua denota al sigma [27].

y u y \bar{u} son los espinores base. Realizando la rotación de Wick para incluir efectos térmicos y con el potencial químico fermiónico dado por $p_{0,i} \rightarrow i\tilde{\omega}_i + \mu_q$ para $i = 1, 2$ los dos fermiones virtuales y $k_0 \rightarrow i\omega_n$ para el bosón virtual, definiendo $E_i^2 = (\vec{p}_i - \vec{k})^2 + m_f^2$ para ambos fermiones y $E^2 = (\vec{p}_2 - \vec{k})^2 + m_b^2$ para el bosón se obtiene que

$$G = (-ig)(g^2) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\underbrace{T \sum_n \frac{1}{[(\tilde{\omega}_1 - i\mu_q + \omega_n)^2 + E_1^2][(\tilde{\omega}_2 - i\mu_q + \omega_n)^2 + E_2^2]}}_I - \underbrace{m_b^2 T \sum_n \frac{1}{[(\tilde{\omega}_1 - i\mu_q + \omega_n)^2 + E_1^2][(\tilde{\omega}_2 - i\mu_q + \omega_n)^2 + E_2^2][\omega_n^2 + E^2]}}_{II} \right], \quad (6.45)$$

en donde se han definido las dos sumas de Matsubara bosónicas I y II . Dichas sumas están dadas [78] por

$$I = \sum_{s_1 s_2 = \pm} \frac{s_1 s_2}{4E_1 E_2} \frac{1}{i(\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2) - s_1 E_1 - s_2 E_2} [-1 + n_f(s_2 E_2 + \mu_q) + n_f(s_1 E_1 - \mu_q)], \quad (6.46)$$

Figura 6.4: Diagramas de Feynman de la constante de acoplamiento g genérico.

y

$$II = \sum_{s, s_1, s_2 = \pm} \frac{-s s_1 s_2}{8E E_1 E_2} \frac{1}{[i(\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2) + s_2 E_2 - s_1 E_1]} \left[\frac{1 + n_B(sE) - n_F(s_1 E_1 - \mu_q)}{i\tilde{\omega}_1 - \mu_q - sE - s_1 E_1} - \frac{1 + n_B(sE) - n_F(s_2 E_2 - \mu_q)}{i\tilde{\omega}_2 - \mu_q - sE - s_2 E_2} \right]. \quad (6.47)$$

6.3.1. Corrección a la constante de acoplamiento g : Aproximación a Baja Temperatura

Para realizar el cálculo en la aproximación se usará la misma serie perturbativa de la ec. (6.34) pero para la integral G de la ec. (6.42). En el límite de $T \rightarrow 0$ la distribución de Bose-Einstein se anula mientras que la de Fermi-Dirac se convierte en la función de Heaviside $\Theta(-x)$. Además, si se hace la aproximación $E_1 = E_2$ y que $p_1^0 = p_2^0 = \tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_1 = 0$ que físicamente significan que las energías fermiónicas son despreciables y que los 3-momentos fermiónicos son despreciables (límite estático) respecto al bosónico obtenemos que

$$I = \frac{1}{4E_1^3} [1 - \Theta(\mu_q - E_1)], \quad (6.48)$$

y

$$II = \frac{2E_1 + E}{4E_1^3 E (E_1 + E)^2} + \frac{(3E_1^3 E - E^3) n_f(E_1 - \mu_q)}{4E_1^3 E (E_1^2 - E^2)^2}. \quad (6.49)$$

Los primeros términos de las ecuaciones (6.48) y (6.49) representan la parte de vacío de las correcciones a la constante de acoplamiento debido a que no dependen

de cantidades termodinámicas. Debido a que podemos partir de una constante de acoplamiento renormalizada podemos ignorar la parte de vacío y tomar sólo la parte de materia que toma en cuenta los efectos termodinámicos. Realizando las integrales de las sumas de la ec. (6.45) con las ecuaciones (6.48) y (6.49) se obtiene que

$$G(T \rightarrow 0) = (-ig)(g^2) \left[\frac{\sqrt{\mu_q^2 - m_f^2}}{8\pi^2 \mu_q} - \frac{1}{8\pi^2} \left[\log \left(\frac{\mu_q + \sqrt{\mu_q^2 - m_f^2}}{m_f} \right) \right] - \frac{m_b^2}{16\pi^2 \mu_q (m_f^2 - m_b^2)^2} \left[-2\mu_q m_b^2 \text{Log} \left(\frac{\mu_q + \sqrt{\mu_q^2 - m_f^2}}{m_f} \right) + 2\sqrt{\mu_q^2 - m_f^2} (\mu_q^2 - m_f^2 + m_b^2) \right] \right], \quad (6.50)$$

lo que finalmente da

$$G = (-ig)(g^2) \left[\frac{\sqrt{\mu_q^2 - m_f^2}}{8\pi^2 \mu_q} - \frac{1}{8\pi^2} \left[\log \left(\frac{\mu_q + \sqrt{\mu_q^2 - m_f^2}}{m_f} \right) \right] - \frac{m_b^2}{16\pi^2 \mu_q (m_f^2 - m_b^2)^2} \left[-2\mu_q m_b^2 \text{Log} \left(\frac{\mu_q + \sqrt{\mu_q^2 - m_f^2}}{m_f} \right) + 2\sqrt{\mu_q^2 - m_f^2} (\mu_q^2 - m_f^2 + m_b^2) \right] + \frac{T^2 (-2m_f^6 + m_f^4 (\mu_q^2 + 2m_b^2) - \mu_q^2 m_f^2 m_b^2 - 2\mu_q^4 m_b^2)}{48 \mu_q^3 \sqrt{\mu_q^2 - m_f^2} (m_f^2 - m_b^2)^2} \right]. \quad (6.51)$$

Para sumar todas las contribuciones de los diagramas de la Figura 6.3, usamos como masa fermiónica a la autoenergía térmica de (6.41) y como masa bosónica la autoenergía térmica de (6.38) para todos los bosones. Así, la constante de acoplamiento efectiva está dada por

$$g_{eff} = g \left[1 + \frac{1}{(-ig)} (4G_0(T, \mu_q, m_b = \sqrt{\Pi_b}, m_f = \sqrt{\Pi_f})) \right], \quad (6.52)$$

en donde se ha tomado en cuenta los 4 diferentes bosones de la teoría. Por lo tanto, la expresión final de la constante de acoplamiento efectiva es

$$\begin{aligned}
g_{\text{eff}}^{BT} = g & \left[1 + 4g^2 \left[\frac{\sqrt{\mu_q^2 - \Pi_f^{BT}}}{8\pi^2 \mu_q} - \frac{1}{8\pi^2} \ln \left(\frac{\mu_q + \sqrt{\mu_q^2 - \Pi_f^{BT}}}{\sqrt{\Pi_f^{BT}}} \right) \right. \right. \\
& + \frac{2(\Pi_b^{BT})^2}{16\pi^2(\Pi_f^{BT} - \Pi_b^{BT})^2} \left[\ln \left(\frac{\mu_q + \sqrt{\mu_q^2 - \Pi_f^{BT}}}{\sqrt{\Pi_f^{BT}}} \right) - \left(1 - \frac{\Pi_f^{BT}}{\mu_q^2} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{\mu_q^2 - \Pi_f^{BT}}{\Pi_b^{BT}} \right) \right] \\
& \left. \left. + \frac{T^2}{48} \frac{(-2(\Pi_f^{BT})^3 + (\Pi_f^{BT})^2(\mu_q^2 + 2\Pi_b^{BT}) - \mu_q^2 m_f^2 \Pi_b^{BT} - 2\mu_q^4 \Pi_b^{BT})}{\mu_q^3 \sqrt{\mu_q^2 - \Pi_f^{BT}} (\Pi_f^{BT} - \Pi_b^{BT})^2} \right] \right]. \quad (6.53)
\end{aligned}$$

En la Figura 6.5 podemos apreciar la constante de acoplamiento efectiva g_{eff}^{BT} para diferentes potenciales químicos de quark. Observemos que entre la temperatura es mayor la constante de acoplamiento decrece. Además, entre más aumenta el potencial químico la constante de acoplamiento g_{eff}^{BT} aumenta. Es importante recalcar que se está trabajando en la aproximación del límite estático, por lo que los los momentos externos son cero. Esto quiere decir que si se quisiera observar el comportamiento de las constantes de acoplamiento como función del momento transferido, de manera análoga a la Figura 2.2, se tendría que prescindir de la aproximación del límite estático.

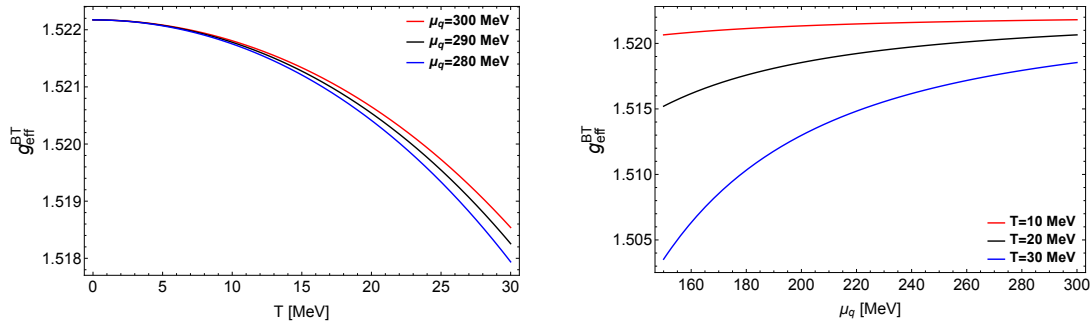


Figura 6.5: Constante de acoplamiento efectiva g entre bosones y fermiones para diferentes potenciales químicos de quarks μ_q y diferentes temperaturas T en la aproximación de baja temperatura con $g = 1.77$ y $\lambda = 1.5$. Se usaron estos valores de λ y g pues serán los que se usen en el estudio del diagrama de fase en el Capítulo 7.

6.3.2. Corrección a la constante de acoplamiento g : Aproximación a Alta Temperatura

En la aproximación de alta temperatura sólo se toman los términos dominantes que van como $\sim T^2$. Con esto en mente, se puede mostrar que la suma de Matsubara I de (6.46) en la aproximación de que $E_1 = E_2$, y tomando en cuenta sólo los términos de materia, es despreciable. Realizando estas mismas aproximaciones para la suma de matsubara II de (6.47) se obtiene que

$$II = \frac{k^2}{8EE_1^2} \left(\frac{2n_b(E) + n_f(E_1 + \mu_q) + n_f(E_1 - \mu_q)}{m_b^4} \right). \quad (6.54)$$

Luego, realizando la integral de la ec. (6.45) con la ec. (6.54) se obtiene que

$$G = (-ig)(g^2) \frac{T}{4\pi m_b^2} [-\pi m_b - T(\text{Li}_2(-e^{-\frac{\mu_q}{T}}) - \text{Li}_2(-e^{\frac{\mu_q}{T}}))]. \quad (6.55)$$

Nuevamente tomando en cuenta todas las contribuciones de g_{eff} dadas por la ec. (6.52) se obtiene que la constante de acoplamiento efectiva en la aproximación de alta temperatura está dada por

$$g_{\text{eff}}^{AT} = g \left[1 - 4g^2 \frac{T^2}{4\pi^2 \Pi_b^{AT}} \left[\frac{\pi(\Pi_b^{AT})^{1/2}}{T} + \text{Li}_2(-e^{-\frac{\mu_q}{T}}) + \text{Li}_2(-e^{\frac{\mu_q}{T}}) \right] \right]. \quad (6.56)$$

En la Figura 6.6 se muestra el comportamiento de la constante de acoplamiento efectivo en la aproximación de alta temperatura. Una vez más se aprecia el comportamiento de que la constante de acoplamiento disminuye entre la temperatura aumente más. Además, entre más se aumenta el potencial químico, la constante de acoplamiento g_{eff}^{AT} aumenta y entre se acerca al límite $\mu_q \rightarrow 0$, el valor de g_{eff}^{AT} tiende a un mismo valor sin importar la temperatura.

6.4. Corrección a la constante de acoplamiento λ

Se presenta en la Figura 6.7 los diagramas correspondientes para la corrección de la constante de acoplamiento entre los bosones λ . La estructura de todos los diagramas es la misma, pues lo único que cambia es la masa de los diferentes bosones virtuales, los cuales se tomarán todos iguales a la autoenergía bosónica. Por lo tanto,

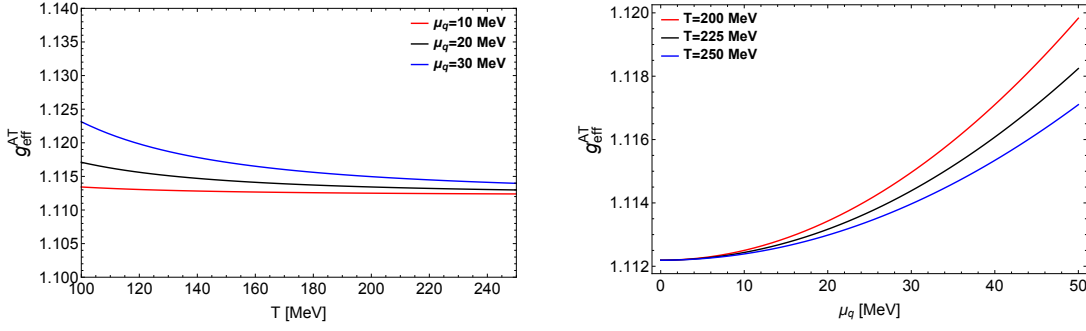


Figura 6.6: Constante de acoplamiento efectiva g entre bosones y fermiones para diferentes potenciales químicos de quarks μ_q y diferentes temperaturas T en la aproximación de alta temperatura $g = 1.77$ y $\lambda = 1.5$. Se usaron estos valores de λ y g pues serán los que se usen en el estudio del diagrama de fase en el Capítulo 7.

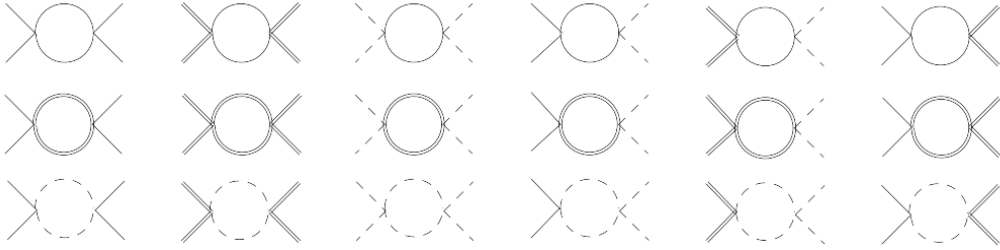


Figura 6.7: Diagramas de Feynman de la constante de acoplamiento λ . Las líneas con flechas denotan a los quarks, la línea punteada denota a los piones cargados, la doble línea denota al pión neutro y la línea continua denota al sigma. [27]

se procederá a calcular la integral genérica dada por el diagrama de Feynman de la Figura 6.8.

El diagrama de la Figura 6.8 está dado por

$$I(p, m_b^2) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} D(p-k) D(k), \quad (6.57)$$

en donde $D(k)$ es el propagador bosónico de la ec. (6.44). En el espacio euclídeo, usando $k_0 = i\omega_n$ con $\omega_n = 2\pi nT$ y $p_0 = i\omega$, se obtiene que

$$\begin{aligned} I(p^2, m_b^2) &= -iT \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(\omega - \omega_n)^2 + (\vec{p} - \vec{k})^2 + m_b^2][\omega_n^2 + \vec{k}^2 + m_b^2]} \\ &= -iT \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(\omega - \omega_n)^2 + E_1^2][\omega_n^2 + E_2^2]}, \end{aligned} \quad (6.58)$$

en donde se ha definido $E_1^2 = (\vec{p} - \vec{k})^2 + m_b^2$ y $E_2^2 = \vec{k}^2 + m_b^2$.

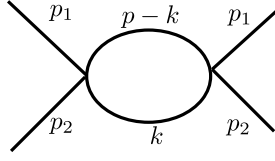


Figura 6.8: Diagrama de Feynman de la constante de acoplamiento λ genérico con $p = p_1 + p_2$.

La suma de Matsubara de (6.58) se puede calcular usando [78]

$$T \sum_n \frac{1}{(\omega_n - \omega)^2 + E_1^2} \frac{1}{\omega_n^2 + E_2^2} = \sum_{s_1, s_2 = \pm} \frac{-s_1 s_2}{4E_1 E_2} \frac{1 + f(s_1 E_1) + f(s_2 E_2)}{i\omega - s_1 E_1 - s_2 E_2}. \quad (6.59)$$

Haciendo la aproximación de que $E_1 = E_2 \equiv E$ se obtiene

$$I(p^2 \rightarrow 0, m_b^2, \vec{k}^2 \rightarrow 0) = \frac{-i}{16\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{(k^2 + m_b^2)^{3/2}} \left[2 + \frac{4}{e^{\frac{\sqrt{k^2 + m_b^2}}{T}} + 1} \right], \quad (6.60)$$

en donde nuevamente podemos distinguir que el primer término no depende de cantidades térmicas por lo que lo ignoramos.

6.4.1. Corrección a la constante de acoplamiento λ : Aproximación a Baja Temperatura

Para la aproximación de baja temperatura usamos el hecho de que

$$-2 \frac{\partial}{\partial m_b^2} \left[\frac{1}{\sqrt{k^2 + m_b^2}} \frac{1}{e^{\frac{\sqrt{k^2 + m_b^2}}{T}} - 1} \right] \simeq \frac{1}{(k^2 + m_b^2)^{3/2}} \frac{1}{e^{\frac{\sqrt{k^2 + m_b^2}}{T}} - 1}, \quad (6.61)$$

para $T \approx 0$. Usando (6.61) en (6.60) se obtiene que

$$\begin{aligned} I(p^2 \rightarrow 0, m_b^2)_{BT} &\simeq \frac{-i}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial m_b^2} \int_m^\infty dw \sqrt{w^2 - m_b^2} \frac{e^{-w/T}}{1 - e^{-w/T}} \\ &= \frac{-i}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial m_b^2} \sum_{n=1}^\infty \int_{m_b}^\infty dw \sqrt{w^2 - m_b^2} e^{-\frac{nw}{T}}, \end{aligned} \quad (6.62)$$

en donde se ha usado la serie geométrica del primer renglón al segundo renglón. Esta integral es una expresión similar a la de (6.33). Por lo tanto, procediendo de manera

análoga se obtiene que

$$I(p^2 \rightarrow 0, m_b^2)_{LTL} = \frac{-i}{2\pi^2} \left(\frac{T^3 \pi}{2} \right)^{1/2} \left[\frac{1}{4m^{3/2}} \text{Li}_{3/2}(e^{-\frac{m_b}{T}}) - \frac{1}{2Tm^{1/2}} \text{Li}_{1/2}(e^{-\frac{m_b}{T}}) \right]. \quad (6.63)$$

Luego, la expresión de la constante de acoplamiento efectiva λ_{eff} está dada por

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda \left(1 + \lambda \left(\frac{24}{16} \frac{4}{-i} 14 I(p^2 \rightarrow 0, m_b^2) \right) \right), \quad (6.64)$$

en donde se han tomado en cuenta las permutaciones posibles por intercambiar las patas externas para cada diagrama de la Figura 6.7 y todos los diagramas de la misma Figura. Suponiendo que la masa de los bosones está dada por su autoenergía térmica Π_b^{BT} de la ec. (6.38), entonces la constante de acoplamiento efectiva λ en la aproximación de baja temperatura está dada por

$$\lambda_{\text{eff}}^{BT} = \lambda \left[1 + \frac{24\lambda}{4} 14 \left(\frac{T^3}{8\pi^3} \right)^{1/2} \left[\frac{\text{Li}_{3/2}(e^{-\frac{(\Pi_b^{BT})^{1/2}}{T}})}{4(\Pi_b^{BT})^{3/4}} - \frac{\text{Li}_{1/2}(e^{-\frac{(\Pi_b^{BT})^{1/2}}{T}})}{2T(\Pi_b^{BT})^{1/4}} \right] \right]. \quad (6.65)$$

El comportamiento de la constante de acoplamiento efectiva $\lambda_{\text{eff}}^{BT}$ se muestra en la Figura 6.9 para diferentes potenciales químicos de quarks. Se aprecia que entre la temperatura aumenta, la constante de acoplamiento disminuye. Además, se aprecia que cuando se aumenta el potencial químico de quarks, la constante de acoplamiento $\lambda_{\text{eff}}^{BT}$ aumenta de manera similar a g_{eff}^{BT} en la Figura 6.5.

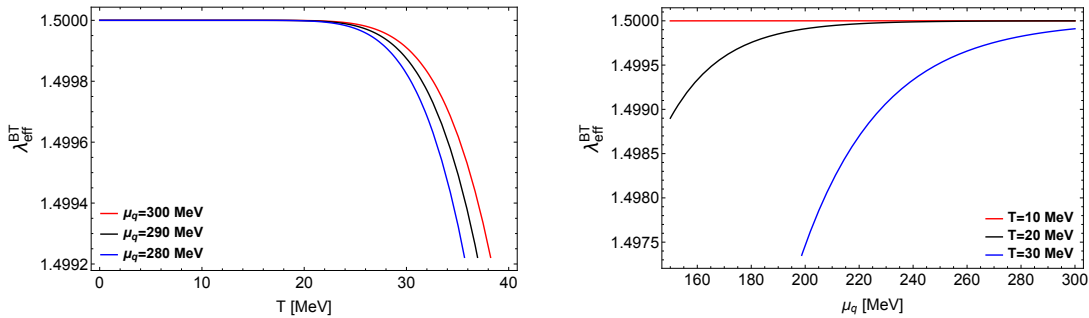


Figura 6.9: Constante de acoplamiento efectiva λ entre bosones para diferentes potenciales químicos de quarks μ_q y diferentes temperaturas T en la aproximación de baja temperatura $g = 1.77$ y $\lambda = 1.5$. Se usaron estos valores de λ y g pues serán los que se usen en el estudio del diagrama de fase en el Capítulo 7.

6.4.2. Corrección a la constante de acoplamiento λ : Aproximación a Alta Temperatura

En la aproximación de alta temperatura el segundo término de (6.61) no es dominante. Así, tenemos

$$I(P^2 \rightarrow 0, m_b^2)_{HTL} = -\frac{i}{2\pi^2} \frac{1}{T^2} \frac{\partial}{\partial y_b^2} T^2 \int_0^\infty dx \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y_b^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + y_b^2}} - 1}, \quad (6.66)$$

en donde se ha definido $x = \frac{k}{T}$, $y_b = \frac{m_b}{T}$. Esta integral se puede resolver como una serie perturbativa para $y_b \ll 1$ usando la función

$$h_n(y) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{dx x^{n-1}}{\sqrt{x^2 + y_b^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + y_b^2}} - 1}, \quad (6.67)$$

la cual cumple que

$$\frac{dh_{n+1}(y_b)}{dy_b} = -\frac{y_b h_{n-1}}{n}. \quad (6.68)$$

Por lo tanto,

$$I(P^2 \rightarrow 0, m_b^2)_{HTL} = \frac{i}{4\pi^2} h_1(y_b), \quad (6.69)$$

y finalmente usando la serie de $h_1(y_b)$ para $y_b \ll 1$ [81], se obtiene que

$$I(P^2 \rightarrow 0, m_b^2)_{HTL} = \frac{-i}{4\pi^2} \left[\frac{\pi T}{2m} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{m_b}{4\pi T} \right) + \frac{1}{2} \gamma_E \right]. \quad (6.70)$$

Por lo tanto, la constante efectiva λ en la aproximación de alta temperatura es

$$\lambda_{\text{eff}}^{AT} = \lambda \left[1 - \frac{24\lambda}{4} \frac{14}{4\pi^2} \left[\frac{\pi T}{2(\Pi_b^{AT})^{1/2}} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(\Pi_b^{AT})^{1/2}}{4\pi T} \right) + \frac{1}{2} \gamma_E \right] \right]. \quad (6.71)$$

El comportamiento de $\lambda_{\text{eff}}^{AT}$ se muestra en la Figura 6.10 para diferentes potenciales químicos de quark y nuevamente entre la temperatura aumenta más, la constante de acoplamiento disminuya más. Además, entre el potencial químico aumenta, la constante de acoplamiento $\lambda_{\text{eff}}^{AT}$ aumenta de manera similar a lo visto en la Figura 6.6.

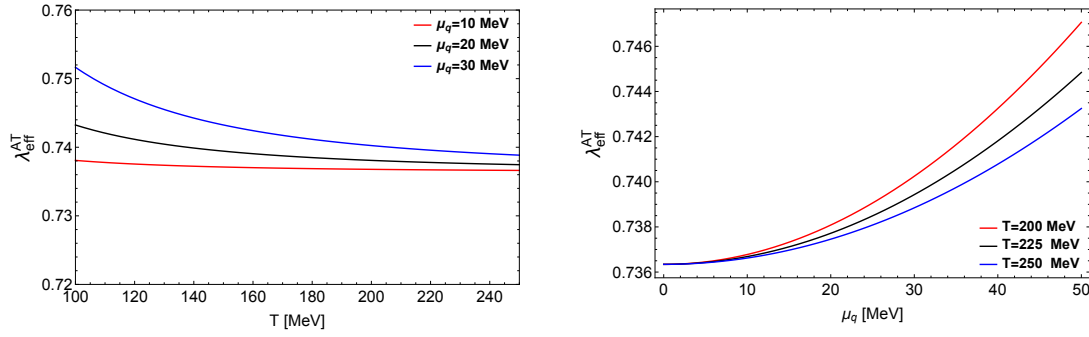


Figura 6.10: Constante de acoplamiento efectiva λ entre bosones para diferentes potenciales químicos de quarks μ_q y diferentes temperaturas T en la aproximación de alta temperatura $g = 1.77$ y $\lambda = 1.5$. Se usaron estos valores de λ y g pues serán los que se usen en el estudio del diagrama de fase en el Capítulo 7.

Las constantes efectivas λ_{eff} y g_{eff} se introducirán los potenciales efectivos a alta y baja temperatura, en las masas dinámicas (6.4) y en los contratérminos de la ec. (6.15), pero en las autoenergías no se usarán las constantes efectivas. Finalmente se han dado todas las herramientas necesarias para poder encontrar el CEP del diagrama de fase de QCD. Y ahora proseguimos a realizar el análisis con los potenciales efectivos, las autoenergías y las constantes de acoplamiento efectivas dadas en este capítulo.

Capítulo 7

Correcciones al Punto Terminal Crítico debidas a la Superestadística

En este capítulo se darán las condiciones para determinar los parámetros libres del potencial efectivo deducido en el capítulo anterior del modelo LSMq. Luego, se discutirá brevemente, haciendo analogía a lo visto en la Sección 3.1, cómo clasificar las transiciones de fase del modelo LSMq. Finalmente, se determinará la posición del CEP para diferentes grados de termalización N , usando superestadística solamente en T , solamente en $\eta = \frac{\mu_q}{T}$ y la combinación entre ellas. Se discutirá el comportamiento observado.

7.1. Determinación de los parámetros libres del modelo LSMq

Como se vio en el Capítulo 6 el potencial efectivo depende de las constantes de acoplamiento *desnudas* λ y g y del parámetro de masa a . Para fijar estos parámetros usaremos la observación dicha en la Sección 3.3. Se espera que a una temperatura $T = 0$, el potencial bariónico crítico μ_B debe de ser ≈ 1 GeV [3, 82, 83]. Por lo tanto, suponiendo que el potencial químico de quarks μ_q cumple $\mu_B = 3\mu_q$, es decir

que los bariones están hechos de 3 quarks constituyentes, entonces debemos fijar el potencial químico crítico a $T = 0$ como $\mu_c \approx 300$ MeV. Además, debido a que a $T = 0$ se espera una transición de primer orden, el potencial efectivo debe exhibir dos mínimos degenerados. Redefiniendo el potencial efectivo como

$$V^{eff}(T, \mu_q, v) \rightarrow \frac{1}{a^4}(V^{eff}(T, \mu_q, v) - V^{eff}(T, \mu_q, 0)), \quad (7.1)$$

entonces las condiciones de tener un primer orden en $T = 0$ y μ_c son

$$\begin{aligned} \frac{d}{dv} V_{LT}^{eff}(T = 0, \mu_c, v) \Big|_{v=v_0} &= 0, \\ V_{LT}^{eff}(T = 0, \mu_c, v) \Big|_{v=v_0} &= 0, \end{aligned} \quad (7.2)$$

en donde v_0 es el mínimo degenerado y es ahora un nuevo parámetro libre. Podemos obtener otra condición notando que de las masas dinámicas (6.4) es posible obtener que $2a^2 = M_\sigma^2 - 3M_\Pi^2$. No obstante, esta relación no incluyen efectos térmicos. Para esto agregamos la autoenergía bosónica Π_b^{LT} en la aproximación de baja temperatura (usamos esta aproximación pues la determinación de parámetros libres se realiza usando el potencial efectivo a baja temperatura) de manera que la masa cuadrada de un bosón es $m_b^2 + \Pi_b^{LT}$. Por lo tanto, otra condición es

$$a = \left(\frac{M_\sigma^2 - 3M_\pi^2 - 2\Pi_b^{LT} \Big|_{T=0, \mu_q=\mu_c}}{2} \right)^{1/2}, \quad (7.3)$$

en donde se usaran los valores de $M_\sigma = 500$ MeV y $M_\pi = 139$ MeV los cuales están acordes con estimaciones actuales [40]. Por lo tanto, tenemos 4 parámetros libres λ , g , a y v_0 con $\mu_c \approx 300$ MeV. Con estas ecuaciones, se usaron los valores de ($\lambda = 1.5, \mu_c = 300$ MeV) y ($\lambda = 1.6, \mu_c = 290$ MeV) para determinar los parámetros restantes. Estos valores de λ fueron escogidos para que la temperatura crítica a $\mu = 0$ no sobrepasara los 200 MeV para que concordara con los límites establecidos en la Sección 3.2.

7.2. Correcciones al CEP por superestadística

Para poder encontrar el CEP tenemos que determinar el potencial químico y la temperatura crítica a la cual el orden de la transición cambia. Como se vio en la

Sección 3.3, la transición pasa de un primer orden a un crossover. Sin embargo, en el modelo usado el punto crítico ocurre cuando la transición pasa de ser un primer orden a un segundo orden. En las Figuras 7.1 y 7.2 se muestran los comportamientos de las transiciones de primer y segundo orden respectivamente. Comparando con las Figuras 3.5 y 3.6 notamos que exhiben la misma forma de la energía libre en el modelo de Ising. El potencial efectivo graficado en las Figuras 7.1 y 7.2 es una función par respecto a v , por lo que sólo se muestra para $v \geq 0$. Por lo tanto, el potencial efectivo en el potencial químico crítico de la Figura 7.1 presenta los dos mínimos característicos de una transición de primer orden, mientras que la Figura 7.2 sólo presenta un mínimo en $v = 0$ en el potencial químico crítico lo que indica una transición de segundo orden. Las formas del potencial efectivo cambian dependiendo del potencial químico usado, como se muestra en las Figuras 7.1 y 7.2, pero también cambian con la temperatura. Así, la manera en la que se determinan las temperaturas y potenciales químicos críticos es fijar una de estas dos cantidades, por ejemplo T , e ir variando la otra, en este caso μ , hasta obtener un potencial efectivo similar a los dos mostrados en las Figuras 7.1 y 7.2. Una vez obtenido el potencial químico crítico que le corresponde a la temperatura seleccionada, se prosigue a cambiar la temperatura y realizar el mismo procedimiento.

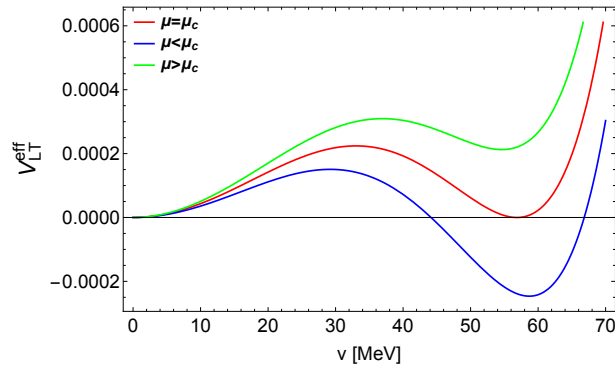


Figura 7.1: Potencial efectivo a baja temperatura antes y después de una transición de primer orden.

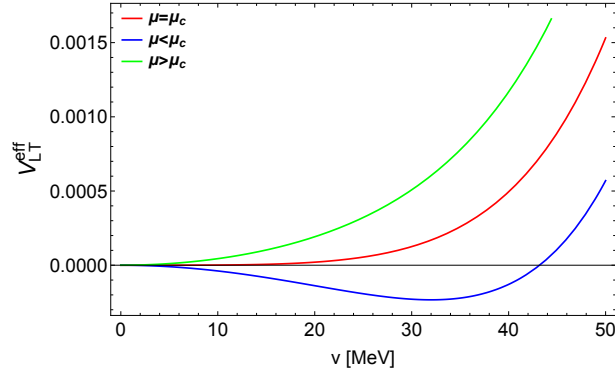


Figura 7.2: Potencial efectivo a baja temperatura antes y después de una transición de segundo orden.

Teniendo esto en mente analizamos los potenciales a alta y baja temperatura para $(\lambda = 1.5, \mu_c = 300 \text{ MeV})$ y $(\lambda = 1.6, \mu_c = 290 \text{ MeV})$ y usando la ec. (4.44) para $N = 100$ y $N = 300$, en donde N mide qué tan fuera del equilibrio se encuentra el sistema según la ec. (4.33), con las correcciones de superestadística dadas por sólo T , sólo η y la combinación de ambas $T\eta$. Se encontraron los diagramas de fase de las Figura 7.3 y 7.4. El volumen usado en la ec. (4.44) fue el de una esfera con radio nuclear [84] dado por

$$r = 1.2(N_n)^{1/3} \text{ fm}, \quad (7.4)$$

en donde N_n es el número de nucleones. Recordemos la imagen de una colisión de iones pesados relativistas de la Figura 4.1. Podemos suponer que el volumen que se forma del QGP está dado por una esfera de radio nuclear dado por la ec. (7.4) y con $N_n = 2N_p$ en donde N_p es el número de nucleones de uno de los iones y asumimos ambos iones tienen el mismo número de nucleones. Además, supondremos que el parámetro $N = N_p$, lo cual tiene sentido pues en el límite termodinámico, es decir cuando hay muchas partículas en el sistema, debemos recuperar la estadística de Boltzmann lo cual ocurre cuando $N \rightarrow \infty$.

En los diagramas de fase de las Figuras 7.3 y 7.4 se presentan dos curvas negras con un punto negro a bajas temperaturas y un cuadro mostrando un acercamiento a la zona del círculo negro. Las curvas negras representan las temperaturas y potenciales químicos críticos para la termodinámica de Boltzmann usual, denotada como $N = \infty$ y el punto negro representa el CEP para $N = \infty$. Debido a que las curvas

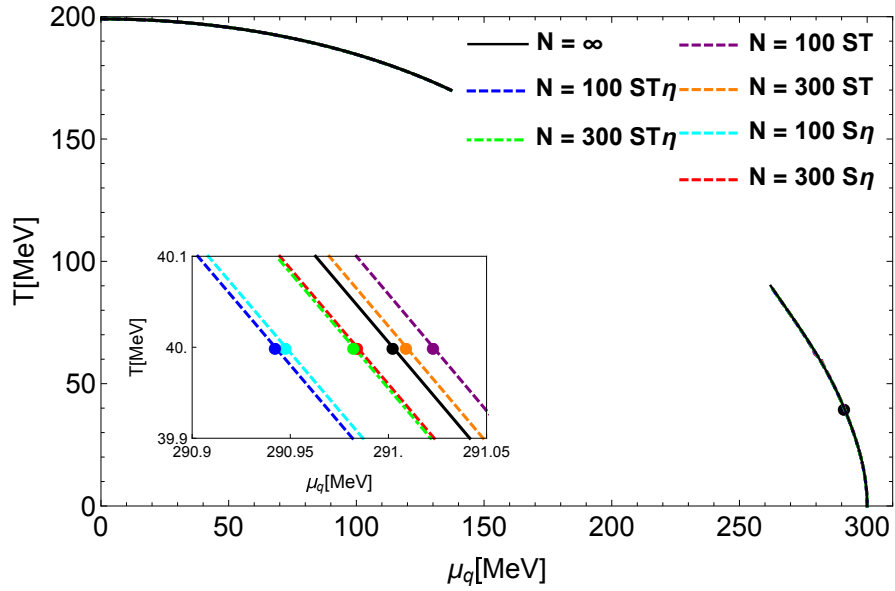


Figura 7.3: Diagrama de fase obtenido a partir las aproximaciones de alta y baja temperatura de los potenciales efectivos del modelo LSMq con $\mu_c = 300$ MeV y $\lambda = 1.5$ con los correspondientes valores de $g = 1.77$ y $a = 102$ MeV. El CEP está representado por los círculos.

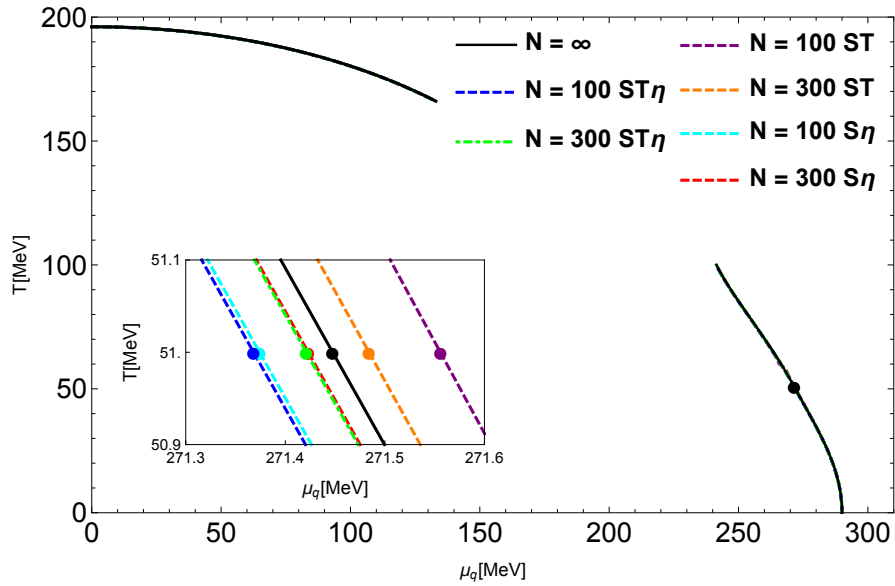


Figura 7.4: Diagrama de fase obtenido a partir las aproximaciones de alta y baja temperatura de los potenciales efectivos del modelo LSMq con $\mu_c = 290$ MeV y $\lambda = 1.6$ con los correspondientes valores de $g = 1.85$ y $a = 93.4$ MeV. El CEP está representado por los círculos.

para las diferentes superestadísticas no varían mucho con respecto a la curva sin superestadística $N = \infty$, éstas no se aprecian en las Figuras mencionadas. Sin embargo, se muestra un acercamiento a la zona del CEP en los recuadros presentados en la parte izquierda inferior de las Figuras 7.3 y 7.4, el cual muestra cómo se mueve el CEP con las diferentes superestadísticas.

La curva negra en las Figuras 7.3 y 7.4 que empieza en $T = 0$ y llega hasta $T \approx 100$ MeV representa los potenciales químicos y temperaturas críticos encontrados con el potencial efectivo en la aproximación de bajas temperaturas. Para temperaturas menores a las del CEP se encontraron potenciales efectivos de la forma de la Figura 7.1 indicando transiciones de primer orden, mientras que para temperaturas mayores a las del CEP se encontraron potenciales de la forma de la Figura 7.2 que representan transiciones de segundo orden, que corresponden a crossovers en QCD. La curva del potencial efectivo a bajas temperaturas se tiene que cortar, ya que al ser una aproximación para bajas temperaturas si se empieza a aumentar la temperatura, la curvatura empezará a tener valores no físicos. La curva negra para temperaturas desde $T \approx 200$ MeV hasta $T \approx 150$ MeV son las temperaturas y potenciales químicos críticos obtenidos con el potencial efectivo en la aproximación de alta temperatura. En este caso, se encontró que todas los puntos corresponden a transiciones de segundo orden, o crossovers en QCD. Una vez más la curva se cortó hasta ahí para asegurar que la curvatura no empezara a tomar valores físicos.

El CEP se localiza en la parte de baja temperatura ya que en la zona de alta temperatura sólo se encontró transiciones de segundo orden con los parámetros usados. Lo primero a notar en ambas figuras es que entre N es más grande, el CEP y su respectiva curva de temperaturas y potenciales químicos críticos se acercan al CEP obtenido con la termodinámica de Boltzmann denotada en la Figura por $N = \infty$. Debido a que la N tiene la interpretación de ser el número de nucleones en un ión en la colisión, podemos relacionar el concepto de centralidad con cuánto se aleja el CEP con superestadística respecto al CEP sin superestadística. La centralidad en una colisión es qué tan grande es el parámetro de impacto b en la colisión. Entre b sea más grande, se dice que la colisión es más periférica. Por lo tanto, entre la colisión sea menos periférica, el número de nucleones que colisionan es mayor, por

lo que la N aumenta y el CEP se aleja menos.

Después notamos que el efecto de sólo superestadística en la temperatura T , denotado como ST en las Figuras, mueve al CEP hacia la derecha del diagrama mientras que el efecto dado por sólo la superestadística en η , denotado como $S\eta$, mueve el CEP hacia la izquierda del diagrama. La curva que representa el combinado de las superestadísticas en η y T , denotado por $ST\eta$, mueve también hacia la izquierda el CEP. Notamos que en ninguna de las posibles superestadísticas con los N mostrados, se mueve apreciablemente el CEP.

Comparado con lo encontrado en el trabajo previo sobre los efectos de superestadística en el diagrama de fase dado por el modelo LSMq [35] notamos que el CEP se mueve mucho menos ahora. Esto ocurre porque los valores de los parámetros elegidos en este trabajo se fijaron con las condiciones físicas descritas en la Sección 7.1 mientras que los parámetros elegidos en [35] no fueron constreñidos de esta manera y, por lo tanto, no corresponden estrictamente a las mismas condiciones físicas.

Por lo tanto, de las Figuras 7.3 y 7.4 observamos que las desviaciones dadas por la superestadística son a lo más del orden de 0.1 MeV en el potencial químico de quarks respecto al CEP con la termodinámica de Boltzmann.

Capítulo 8

Resumen y conclusiones

En este trabajo se presentaron las correcciones al CEP de la QCD dadas por la superestadística usando el modelo sigma lineal acoplado a quarks. Para esto, se presentaron todos los antecedentes necesarios para el análisis. Se empezó dando una introducción a la QCD y al rompimiento de la simetría quiral responsable de las masas de los hadrones ligeros; además, también se discutió el comportamiento de la constante de acoplamiento de QCD a altas energías. Luego, se dio un breve resumen de la teoría de transiciones de Landau y su relación con los rompimientos espontáneos de simetrías y los parámetros de orden para así discutir los principales parámetros de orden en las diferentes transiciones de QCD e introducir el conjeturado diagrama de fase de QCD. También se mencionaron los escenarios de la naturaleza en los que aparecen estas transiciones tales como el universo temprano, estrellas de neutrones y colisiones de iones pesados relativistas. Después, se dio una introducción al formalismo de la termodinámica fuera del equilibrio usado en este trabajo conocido como superestadística y de las posibles superestadísticas que surgen a partir de diferentes funciones de distribución de probabilidad; con esto, se aplicó la superestadística de una distribución de probabilidad χ^2 , también conocida como la termodinámica de Tsallis, para calcular las correcciones al potencial efectivo de cualquier teoría cuántica de campos. Además, se motivó la necesidad de usar formalismos de termodinámica fuera del equilibrio para colisiones de iones pesados relativistas. Luego, se presentaron los resultados principales de la teoría térmica de campos para establecer las expresiones de los potenciales efectivos a 1-loop. Pos-

teriormente, se presentó el modelo sigma lineal acoplado a quarks que se usó para emular el comportamiento del rompimiento de la transición quiral y se presentó el cálculo del potencial efectivo a 1-loop en las aproximaciones de alta y baja temperatura, además de las correcciones de las constantes de acoplamiento del mismo modelo. Finalmente, con los potenciales efectivos y las constantes de acoplamiento corregidas se calcularon las correcciones al CEP del diagrama de fase de QCD dadas por la superestadística suponiendo que hay fluctuaciones de la temperatura y del potencial químico. Se obtuvo que las desviaciones dadas por las superestadística son a lo más del orden de 0.1 MeV, en el eje del potencial químico de quarks, con respecto del CEP sin superestadística para 100 nucleones en cada ión en una colisión central de iones pesados relativistas.

Aunque la finalidad de este trabajo no fue calcular la posición precisa del CEP sino las desviaciones que tiene éste para diferentes grados de termalización, en [28] se dio una estimación con el mismo modelo. El CEP se encuentra en la región $5.02 < \mu_B/T < 5.18$, $0.14 < \mu_B/T_c < 0.23$, en donde $\mu_B = \frac{\mu_q}{3}$ es el potencial químico de bariones y T_c es la temperatura crítica para $\mu_B = 0$. Por lo que, de acuerdo al presente trabajo, el CEP se desplazaría a lo más 0.3 MeV en el eje del potencial químico de bariones respecto a los valores dados.

Este trabajo es la continuación de [35] y comparando con dicho trabajo, se encontró que el CEP se movió menos en el diagrama de fase. Esta disminución del movimiento se puede adjudicar al hecho de que los parámetros usados en este trabajo fueron fijados con condiciones físicas distintas a las del trabajo previo. Además, en dicho trabajo se discute cómo el parámetro N , el cual establece qué tan fuera del equilibrio está el sistema, puede ser determinado de manera más exacta mediante el calor específico, el número de participantes en la colisión N_p , el número de masa del átomo con menos nucleones A y el parámetro ξ que en [85] se estima como $\xi = N_p/A$. Por lo tanto, para poder explorar el diagrama con las correcciones de superestadística dadas por los experimentos es necesario encontrar estos parámetros para poder determinar la N correcta.

Se espera que este trabajo sirva como precedente para el estudio de la transición quiral en QCD en sistemas con temperatura y potencial químico fluctuante. Este es-

cenario es el esperado en una colisión de iones relativistas. Además, los experimentos que buscan encontrar el CEP se basan principalmente en estas colisiones.

Bibliografía

- [1] A. Ayala, S. Hernandez-Ortiz, L. A. Hernandez, V. Knapp-Perez, and R. Zamora, Phys. Rev. D **101** (2020), no. 7, 074023, [arXiv:2003.04505](#) [hep-ph].
- [2] M. Connors, C. Nattrass, R. Reed, and S. Salur, Rev. Mod. Phys. **90** (2018), 025005, [arXiv:1705.01974](#) [nucl-ex].
- [3] K. Fukushima and T. Hatsuda, Rept. Prog. Phys. **74** (2011), 014001, [arXiv:1005.4814](#) [hep-ph].
- [4] K. G. Wilson, Phys. Rev. D **10** (1974), 2445.
- [5] H. Rothe, *Lattice gauge theories: An Introduction*, World Sci.Lect.Notes Phys. 43, World Scientific, 1992.
- [6] I. Montvay and G. Münster, *Quantum fields on a lattice*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1997.
- [7] A. Bazavov et al., Phys. Rev. **D85** (2012), 054503, [arXiv:1111.1710](#) [hep-lat].
- [8] W. Bietenholz, P. de Forcrand, and U. Gerber, JHEP **12** (2015), 070, [arXiv:1509.06433](#) [hep-lat].
- [9] Flavour Lattice Averaging Group, S. Aoki et al., Eur. Phys. J. C **80** (2020), no. 2, 113, [arXiv:1902.08191](#) [hep-lat].
- [10] P. de Forcrand, PoS **LAT2009** (2009), 010, [arXiv:1005.0539](#) [hep-lat].
- [11] C. Roberts and S. Schmidt, Prog. Part. Nucl. Phys. **45** (2000), S1 .
- [12] C. S. Fischer, J. Luecker, and C. A. Welzbacher, Phys. Rev. **D90** (2014), no. 3, 034022, [arXiv:1405.4762](#) [hep-ph].

- [13] C. Shi, Y.-L. Du, S.-S. Xu, X.-J. Liu, and H.-S. Zong, Phys. Rev. D **93** (2016), 036006.
- [14] C. S. Fischer, Prog. Part. Nucl. Phys. **105** (2019), 1, arXiv:1810.12938 [hep-ph].
- [15] J. M. Maldacena, Int. J. Theor. Phys. **38** (1999), 1113, hep-th/9711200.
- [16] J. Casalderrey-Solana, H. Liu, D. Mateos, K. Rajagopal, and U. A. Wiedemann, *Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions*, Cambridge University Press, 2014.
- [17] R. Rougemont, R. Critelli, J. Noronha-Hostler, J. Noronha, and C. Ratti, Phys. Rev. D **96** (2017), 014032.
- [18] J. Knaute, R. Yaresko, and B. Kämpfer, Phys. Lett. **B778** (2018), 419, arXiv:1702.06731 [hep-ph].
- [19] P. Colangelo and A. Khodjamirian, *QCD sum rules, a modern perspective*, At The Frontier of Particle Physics (M. Shifman and B. Ioffe, eds.), World Scientific, 10 2001, pp. 1495–1576.
- [20] A. Ayala, A. Bashir, C. A. Dominguez, E. Gutierrez, M. Loewe, and A. Raya, Phys. Rev. **D84** (2011), 056004, arXiv:1106.5155 [hep-ph].
- [21] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122** (1961), 345.
- [22] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **124** (1961), 246.
- [23] P. Costa, M. C. Ruivo, and C. A. de Sousa, Phys. Rev. **D77** (2008), 096001, arXiv:0801.3417 [hep-ph].
- [24] G. A. Contrera, A. G. Grunfeld, and D. Blaschke, Eur. Phys. J. **A52** (2016), no. 8, 231, arXiv:1605.08430 [hep-ph].
- [25] F. Marquez and R. Zamora, Int. J. Mod. Phys. A **32** (2017), no. 26, 1750162, arXiv:1702.04161 [hep-ph].

- [26] A. Ayala, C. Dominguez, L. Hernandez, M. Loewe, and R. Zamora, Phys. Rev. D **92** (2015), no. 9, 096011, [arXiv:1509.03345 \[hep-ph\]](#), [Addendum: Phys.Rev.D 92, 119905 (2015)].
- [27] A. Ayala, S. Hernandez-Ortiz, and L. A. Hernandez, Rev. Mex. Fis. **64** (2018), no. 3, 302, [arXiv:1710.09007 \[hep-ph\]](#).
- [28] A. Ayala, L. Hernandez, M. Loewe, J. Rojas, and R. Zamora, Eur. Phys. J. A. **56** (2020).
- [29] PHENIX Collaboration, J. Mitchell et al., AIP Conf. Proc. **1422** (2012), 104.
- [30] RHIC Collaboration, H. Wang et al., J. Phys. Conf. Ser. **458** (2013), 012001.
- [31] FAIR Collaboration, P. Senger et al., J. Phys. Conf. Ser. **798** (2017), 012062.
- [32] NICA Collaboration, P. N. Batyuk et al., PoS **ICHEP2016** (2017), 1007.
- [33] C. Beck and E. Cohen, Physica A **322** (2003), no. C, 267.
- [34] C. Beck, Continuum Mech Therm **16** (2004), no. 3, 293.
- [35] A. Ayala, M. Hentschinski, L. A. Hernandez, M. Loewe, and R. Zamora, Phys. Rev. **D98** (2018), no. 11, 114002, [arXiv:1809.04728 \[hep-ph\]](#).
- [36] H. Fritzsche, M. Gell-Mann, and H. Leutwyler, Phys. Lett. B **47** (1973), 365.
- [37] H. Sazdjian, EPJ Web Conf. **137** (2017), 02001, [arXiv:1612.04078 \[hep-ph\]](#).
- [38] A. Ayala, CERN Yellow Reports: School Proceedings **4** (2019), no. 0, 125.
- [39] T. W. Donnelly, J. A. Formaggio, B. R. Holstein, R. G. Milner, and B. Sorrow, *Foundations of Nuclear and Particle Physics*, Cambridge University Press, 2017.
- [40] Particle Data Group, M. Tanabashi et al., Phys. Rev. **D98** (2018), no. 3, 030001.
- [41] J. Sakurai and J. Napolitano, *Modern quantum mechanics*, Addison-Wesley, 2011.
- [42] C. Vafa and E. Witten, Nucl. Phys. **B234** (1984), 173.

- [43] D. J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30** (1973), 1343.
- [44] H. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30** (1973), 1346.
- [45] A. Deur, S. J. Brodsky, and G. F. de Teramond, Prog. Part. Nucl. Phys. **90** (2016), 1, [arXiv:1604.08082](https://arxiv.org/abs/1604.08082) [hep-ph].
- [46] D. Tong, *Lectures on statistical physics*, <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/statphys.htm>, 2012.
- [47] P. Chaddah, *First order phase transitions of magnetic materials*, Boca Raton: CRC Press, 2018.
- [48] G. Simeoni, T. Bryk, F. Gorelli, M. Krisch, G. Ruocco, M. Santoro, and T. Scopigno, Nat. Phys. **6** (2010), 503.
- [49] D. Banuti, M. Raju, and M. Ihme, Supercritical pseudoboiling for general fluids and its application to injection., 211, 01 2016, pp. 211–221.
- [50] P. Linstrom, *Nist chemistry webbook, nist standard reference database 69*, National Institute of Standards and Technology, 1997.
- [51] Y. Aoki, Z. Fodor, S. Katz, and K. Szabo, Phys. Lett. B **643** (2006), 46, [hep-lat/0609068](https://arxiv.org/abs/hep-lat/0609068).
- [52] A. Ayala, J. Phys. Conf. Ser. **761** (2016), no. 1, 012066, [arXiv:1608.04378](https://arxiv.org/abs/1608.04378) [hep-ph].
- [53] HotQCD Collaboration, T. Bhattacharya et al., Phys. Rev. Lett. **113** (2014), 082001.
- [54] Wuppertal-Budapest Collaboration, S. Borsanyi et al., JHEP **09** (2010), 073, [arXiv:1005.3508](https://arxiv.org/abs/1005.3508) [hep-lat].
- [55] M. G. Alford, A. Schmitt, K. Rajagopal, and T. Schäfer, Rev. Mod. Phys. **80** (2008), 1455.
- [56] M. A. Stephanov, Int. J. Mod. Phys. A **20** (2005), 4387, [arXiv:hep-ph/0402115](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0402115) [hep-ph].

- [57] The DOE/NSF Nuclear Science Advisory Committee, The Frontiers of Nuclear Science, A Long Range (2008), [arXiv:0809.3137](#) [nucl-ex].
- [58] A. Sissakian et. al., *Progress of the NICA project*, 07 2009, p. 051.
- [59] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley and Sons, New York, 1972.
- [60] G. Baym, T. Hatsuda, T. Kojo, P. D. Powell, Y. Song, and T. Takatsuka, Rept. Prog. Phys. **81** (2018), no. 5, 056902, [arXiv:1707.04966](#) [astro-ph.HE].
- [61] W. Greiner, D. Rischke, L. Neise, and H. Stöcker, *Thermodynamics and statistical mechanics*, Classical Theoretical Physics, Springer New York, 2000.
- [62] F. Reif, *Fundamentals of statistical and thermal physics*, Waveland Press, 2009.
- [63] C. Tsallis, J. Stat. Phys. **52** (1988), no. 1, 479.
- [64] C. Beck, G. S. Lewis, and H. L. Swinney, Phys. Rev. E **63** (2001), 035303.
- [65] A. La Porta, G. A. Voth, A. M. Crawford, J. Alexander, and E. Bodenschatz, Nature **409** (2001), no. 6823, 1017.
- [66] G. A. Voth, A. La Porta, A. M. Crawford, J. Alexander, and E. Bodenschatz, J. Fluid Mech **469** (2002), 121–160.
- [67] K. Daniels and E. Bodenschatz, Chaos **13** (2003), 55.
- [68] C. Tsallis, J. Anjos, and E. Borges, Phys.Lett. A **310** (2003), 372.
- [69] G. Wilk and Z. Włodarczyk, Eur. Phys. J. **A40** (2009), 299, [arXiv:0810.2939](#) [hep-ph].
- [70] J. Rozynek and G. Wilk, Eur. Phys. J. **A52** (2016), no. 9, 294, [arXiv:1606.09033](#) [hep-ph].
- [71] G. L. Ferri, S. Martinez, and A. Plastino, Physica A **347** (2005), 205.
- [72] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*, Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.

- [73] A. Das, *Finite temperature field theory*, World Scientific Lecture Notes in Physics, World Scientific, 1997.
- [74] M. Laine and A. Vuorinen, *Basics of thermal field theory: A tutorial on perturbative computations*, Lecture Notes in Physics, Springer International Publishing, 2016.
- [75] L. Lin, J. Lu, L. Ying, and E. Weinan, *Chin. Ann. Math. Ser. B* **30** (2009), no. 6, 729–742.
- [76] M. E. Carrington, *Phys. Rev.* **D45** (1992), 2933.
- [77] L. Dolan and R. Jackiw, *Phys. Rev.* **D9** (1974), 3320.
- [78] M. Bellac, *Thermal field theory*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1996.
- [79] C. O. Dib and O. Espinosa, *Nucl. Phys. B.* **612** (2001), no. 3, 492, [arXiv:math-ph/0012010](#) [math-ph].
- [80] A. Ayala, C. Dominguez, L. Hernandez, M. Loewe, and R. Zamora, *Phys. Rev. D* **92** (2015), no. 9.
- [81] J. I. Kapusta and C. Gale, *Finite-temperature field theory: Principles and applications*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 2011.
- [82] R. Hagedorn, *Nuovo Cim. Suppl.* **3** (1965), 147.
- [83] R. Hagedorn, *Nuovo Cim. A* **56** (1968), 1027.
- [84] B. Povh, K. Rith, M. Lavelle, C. Scholz, and F. Zetsche, *Particles and nuclei: An introduction to the physical concepts*, Physics and astronomy online library, Springer, 2004.
- [85] G. Wilk and Z. Włodarczyk, *Phys. Rev. C* **79** (2009), 054903.