Universidad Nacional
Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Las álgebras de medida y categoría

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

F R A N C I S C O S A N T I A G O
N I E T O D E L A R O S A

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. GABRIELA CAMPERO ARENA

2020

Hoja de datos jurídicos.

1. Datos del alumno
Nieto
de la Rosa
Francisco Santiago
55 54 74 78 58
Universidad Nacional
Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
313149595

2. Datos del tutor
Dra.
Gabriela
Campero
Arena

3. Datos del sinodal 1
Dr
Roberto
Pichardo
Mendoza

4. Datos del sinodal 2
Dr
David
Meza
Alcántara

5. Datos del sinodal 3
M. en C.
Fernando Javier
Nuñez
Rosales

6. Datos del sinodal 4
Mat
Manuel Alejandro
Zúñiga
Pérez

7. Datos del trabajo escrito.
Las álgebras de medida y
categoría
104 páginas
2020

Resumen

Dentro de la lógica matemática clásica, una teoría formal se constituye a partir de una lista de axiomas, de algunas reglas de inferencia y de todas las deducciones que puedan hacerse a partir de los axiomas al usar las reglas de inferencia. Según los axiomas que aceptemos en una teoría vamos a poder probar diferentes teoremas; sin embargo, si los teoremas que la teoría pruebe resultan ser contradictorios entre sí, esta teoría será poco útil para los matemáticos pues demostrará cualquier enunciado. Al estar interesados en las teorías que no contradigan nuestros sentidos de la verdad distinguimos aquellas que demuestran contradicciones de las que no; a estas últimas las bautizamos como *consistentes*. Generalmente, para saber si una teoría es consistente basta ver si existe un conjunto que satisfaga los axiomas, a dicho conjunto se le conoce como *modelo* de la teoría.

La matemática clásica está sustentada en la teoría de conjuntos, que resulta ser una teoría formal dentro de la lógica. Por esto, conviene que la teoría de conjuntos abreviada con las letras ZFC sea consistente. Es consecuencia del teorema de incompletitud de Gödel que su consistencia no se pueda demostrar. Así, es común suponer su consistencia.

El objetivo de esta tesis es usar algunas herramientas de teoría de conjuntos para obtener resultados del conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) o una de sus variantes (${}^{\omega}2$) en ciertos modelos de ZFC.

Para este fin resulta importante que el lector esté familiarizado con temas de teoría de conjuntos básica, verbigracia, los números cardinales y ordinales, principio de inducción transfinita y operaciones de conjuntos. También es recomendable que el lector tenga conocimientos de cálculo, como sucesiones de Cauchy y series convergentes. Por último, sería deseable, más no indispensable, tener conocimientos de topología y teoría de la medida, sin embargo, aquí exponemos lo necesario para entender este trabajo, aunque omitiendo algunas pruebas.

En el primer capítulo, titulado preliminares, como es de esperarse haremos un resumen de resultados en topología, fijaremos notación de teoría de conjuntos y hablaremos de ideales, σ-álgebras y álgebras booleanas, temas de alta importancia para el desarrollo de los capítulos consecuentes.

Para el segundo capítulo trabajaremos con el teorema de la categoría de Baire y analizaremos un poco más de topología enfocándonos en $\mathbb{R}$. Además, con el ideal de los conjuntos magros construiremos un álgebra de Boole a la cual llamamos *el álgebra de categoría*.

Similarmente, en el tercer capítulo nos familiarizaremos con la medida de Lebesgue para los números reales y abstraeremos brevemente el concepto de una medida para crear una medida para ${}^{\omega}2$. Fijándonos en el ideal de conjuntos nulos con dicha medida, construiremos otra álgebra booleana conocida como *el álgebra de medida*.

Finalmente, en el último capítulo nos concentraremos en dos tareas. La primera es dar una introducción y explicar el método de forcing, el cual nos permite producir extensiones de un modelo de la teoría de conjuntos, en particular veremos una extensión que se genera al forzar con el álgebra de medida y otra al hacerlo con el álgebra de categoría. La segunda tarea es mostrar una fuerte relación de dualidad entre el álgebra de categoría y la de medida, lo que dará como resultados estrella los siguientes: al forzar con el álgebra de categoría los reales del modelo base resultan ser nulos según Lebesgue en la extensión genérica. Por otro lado, al forzar con el álgebra de medida probamos en la extensión genérica que los reales del modelo base forman un conjunto magro. Tales conexiones por demás interesantes, entre estas dos álgebras involucran pruebas técnicas. En el presente trabajo se presenta con detalle la primera. No obstante, dejamos a la disposición del lector bibliografía para poder abordar la segunda.

Índice general

1. Preliminares **1**

1.1. Teoría de conjuntos 1

1.2. Temas de topología 4

1.3. Álgebras booleanas 12

2. El álgebra de categoría **25**

2.1. Categoría 25

2.2. Álgebra de categoría 30

3. El álgebra de medida **43**

3.1. Medida 43

3.2. Álgebra de medida 50

4. Extensiones genéricas **65**

4.1. El método de forcing 66

4.2. Consecuencias en las extensiones genéricas 76

Bibliografía **95**

Capítulo 1

Preliminares

Con el fin de avanzar de manera fluida en los demás capítulos de la tesis aquí reunimos varios conceptos básicos y resultados cuyo propósito se mostrará más adelante.

1.1. Teoría de conjuntos

Como la bibliografía tiene dividida su notación, encontramos conveniente hacer aclaraciones respecto a ésta.

Definición 1.1. *Sea A un conjunto y $\leq$ una relación binaria, es decir un subconjunto de $A \times A$, donde $(x, y) \in \leq$ se denotará por $x \leq y$. De este modo, la relación leq es:*

1. *reflexiva si para todo $x \in A$ se tiene que $x \leq x$;*
2. *transitiva si para cualesquiera $x, y, z \in A$, siempre que $y \leq x$ y $z \leq y$, ocurre que $z \leq x$;*
3. *simétrica si cada vez que $x, y \in A$ son tales que $x \leq y$, entonces $y \leq x$;*

4. *antisimétrica si para cualesquiera* $x, y \in A$, *si* $y \leq x$ *y* $x \leq y$, *entonces* $x = y$.

Por otro lado, diremos que leq tiene máximo si hay $z \in A$ *tal que para todo* $x \in A$, $x \leq z$.*En el caso en el que* $\leq$ *sea antisimétrica,* z *es único y se le llama el máximo de* A

A la pareja $(A, \leq)$ se le conoce como un conjunto preordenado o un preorden siempre que $\leq$ satisfaga a los incisos 1 y 2. Además, un preorden que satisfaga :

- el tercer inciso de la definición anterior se le conoce como relación de equivalencia en A;
- el tercer inciso de la definición anterior se le conoce como conjunto parcialmente ordenado u orden parcial;
- que tiene máximo se denomina noción de forcing. A dicho máximo lo denotaremos como 1_A.

Es verdad que la potencia de cualquier conjunto ordenado con la contención es un orden parcial.

Definición 1.2. *Dado un conjunto* X *e* $\mathfrak{I} \subseteq \wp(X)$ *diremos que* $\mathfrak{I}$ *es un ideal en* X *si se cumple lo siguiente:*

1. $\emptyset \in \mathfrak{I}$, *pero* $X \notin \mathfrak{I}$;
2. *si* $E \in \mathfrak{I}$ *y* $F \subseteq E$, *entonces* $F \in \mathfrak{I}$;
3. *cada que* $E, F \in \mathfrak{I}$, *ocurre que* $E \cup F \in \mathfrak{I}$.

Si además $\mathfrak{I}$ *cumple que, para todo* $\{E_i : i \in \omega\} \subseteq \mathfrak{I}$, $\bigcup_{i \in \omega} E_i \in \mathfrak{I}$, *entonces* $\mathfrak{I}$ *será llamado* σ-*ideal.*

Ejemplo 1.3. *Si X es un conjunto infinito, la colección $H(X) = \{A \subseteq X : A \text{ es finito}\}$ es un ideal en X.*

Convencerse de que este último ejemplo en verdad es un ideal resulta ser tarea fácil, pues el vacío es un conjunto finito mientras que por hipótesis X no lo es; las uniones finitas de conjuntos finitos también son tales y desde luego los subconjuntos de conjuntos finitos comparten dicha cualidad. No obstante, con estas hipótesis $H(X)$ no es un σ-ideal, aunque, si suponemos que X es un conjunto no numerable, por ejemplo $\mathbb{R}$, y cambiamos la condición $ser\ finito$ por *ser numerable*, con el axioma de elección podemos demostrar que lo que se obtiene es un σ-ideal en X.

Definición 1.4. *Sea κ un cardinal y A un conjunto. Denotamos por:*

1. *κ^+ al cardinal sucesor de κ.*
2. *$[A]^\kappa$ a la colección de subconjuntos de A con cardinalidad κ.*
3. *$[A]^{<\kappa}$ a la colección de subconjuntos de A con cardinalidad estrictamente menor a κ.*
4. *$[A]^{\leq\kappa}$ a la unión de $[A]^\kappa$ y $[A]^{<\kappa}$.*

Definición 1.5. *Dados dos conjuntos A, B, definimos ${}^AB$ como la colección de todas las funciones con dominio A y codominio B.*

Como caso particular de esto tenemos al conjunto ${}^\omega 2$, que son todas las sucesiones de ceros y unos.

Definición 1.6. *Si tenemos que κ es un cardinal y B un conjunto, denotaremos por ${}^{<\kappa}B$ a la unión de la familia $\{{}^\beta B : \beta < \kappa\}$.*

Así, tiene sentido hablar de ${}^{<\omega}2$ como las funciones que van de algún natural en 2.

Definición 1.7. *Sea β un ordinal y $\{X_\alpha : \alpha < \beta\}$ una colección de conjuntos. Definimos al producto cartesiano de los conjuntos X_α como el conjunto de funciones $x : \beta \to \bigcup\{X_\alpha : \alpha < \beta\}$ tales que para cada $\alpha < \beta$ se tiene que $x(\alpha) \in X_\alpha$.*

Definición 1.8. *Sea X un conjunto. $\mathcal{S} \subseteq \wp(X)$ es una σ-álgebra si cumple las siguientes condiciones:*

1. *$\emptyset$ y $X \in \mathcal{S}$;*
2. *para todo $S \in [\mathcal{S}]^{\leq\omega}$, ocurre que $\bigcup S \in \mathcal{S}$;*
3. *si $E \in \mathcal{S}$, entonces $X \setminus E \in \mathcal{S}$.*

Desde luego, si X es un conjunto, $\wp(X)$ y $\{\emptyset, X\}$ son ejemplos de σ-álgebras. Éstos son muy simples, en cambio el siguiente es un poco más interesante.

Ejemplo 1.9. *Si X es un conjunto no numerable, entonces el conjunto*

$$\{A \subseteq X : | A | \leq \omega \text{ o } | X \setminus A | \leq \omega\}$$

es una σ-álgebra.

1.2. Temas de topología

Lo primero que necesitamos para hablar de topología son, obviamente, espacios topológicos. Recordemos que (X, τ) es un espacio topológico siempre que X sea un conjunto no vacío y τ un subconjunto del conjunto potencia de X, tal que cumpla las siguientes condiciones: $\emptyset, X \in \tau$; siempre que $Y \subseteq \tau$, se tiene que $\bigcup Y \in \tau$; y si tal Y es finito, entonces $\bigcap Y \in \tau$. A τ se le llama **una** topología de X. A los elementos de la topología les llamaremos abiertos y a sus complementos cerrados. Abreviaremos comúnmente a la pareja (X, τ) con X, no sin mencionar que X es un espacio topológico.

Fijaremos la siguiente notación para un espacio topológico (X, τ).

1. τ_X denotará a la topología de X con la que se esté considerando al espacio. Si no hay lugar a confusión, se suprimirá el subíndice.

2. $int(E)$ se define como el interior de E en X, es decir,

$$int(E) = \{x \in E : \exists U \in \tau(x \in U \subseteq E)\}.$$

   Si estamos considerando más de un espacio topológico al interior de E en X lo denotaremos con $int_X(E)$.

3. $\overline{E}$ representará la cerradura de E en X, y esto lo entendemos de la siguiente manera:

$$\overline{E} = \bigcap\{F \subseteq X : E \subseteq F \wedge \exists U \in \tau(F = X \setminus U)\}.$$

Del mismo modo, si consideramos más de un espacio topológico, la cerradura de E en X se denotará por $cl_X(E)$.

Notemos que pedir que $X \in \tau$ nos garantiza que la cerradura de E en X sea un conjunto bien definido.

Una observación pertinente es que tanto el interior como la cerradura de un conjunto son operaciones monótonas; todavía más, un ejercicio rutinario comprueba que el interior se distribuye sobre la intersección y la cerradura lo hace sobre la unión, es decir, si $E, F \subseteq X$, entonces $int(E \cap F) = int(E) \cap int(F)$ y $\overline{E \cup F} = \overline{E} \cup \overline{F}$.

Definición 1.10. *Para un espacio topológico* (X, τ)*, un conjunto* $\mathcal{B} \subseteq \tau$ *que cumple que para todo* $U \in \tau$*, existe* $B \subseteq \mathcal{B}$ *de tal modo que* $U = \bigcup B$ *recibirá el nombre de base para* τ*. Cuando la topología sea clara por el contexto, simplemente diremos que* $\mathcal{B}$ *es base.*

De aquí, una observación inmediata es que en un espacio topológico (X, τ), si $\mathcal{B} \subseteq \tau$ una base y U es un abierto de X, entonces existe un $B \in \mathcal{B}$ de manera que $B \subseteq U$.

Proposición 1.11. *Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{B} \subseteq \wp(X)$. Hay una topología de X para la cual $\mathcal{B}$ es base siempre que $\mathcal{B}$ cumpla las dos condiciones siguientes:*

B_1 *para toda $x \in X$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V$;*

B_2 *para cualesquiera $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$ y para toda $x \in V_1 \cap V_2$, hay $V_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V_3$ y $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$.*

Más aún, dicha topología es la única con esa propiedad.

Demostración. Definamos a $\tau = \{\bigcup V : V \in \wp(\mathcal{B})\}$, veamos que cumple con la definición de topología.

1. $\emptyset \in \tau$, pues $\emptyset \in \wp(\mathcal{B})$ y $\bigcup \emptyset = \emptyset$. Por otro lado, para cada $x \in X$, hay $V_x \in \mathcal{B}$ con $x \in V_x$. Por la propiedad B_1, la colección de las V_x tales que $x \in X$ es un subconjunto de $\mathcal{B}$ cuya unión da X. Por tanto $X \in \tau$.

2. Dado $\{U_i : i \in I\} \subseteq \tau$, para cada U_i, hay $\mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{B}$ de tal manera que $\bigcup \mathcal{U}_i = U_i$, así la colección $\{\bigcup \mathcal{U}_i : i \in I\} = \{U_i : i \in I\}$ está contenida en $\mathcal{B}$, entonces $\bigcup(\{\bigcup \mathcal{U}_i : i \in I\}) = \bigcup\{U_i : i \in I\}$. En conclusión, $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

3. Dados $U, W \in \tau$, hay $\mathcal{U}, \mathcal{W} \subseteq \mathcal{B}$ tales que $U = \bigcup \mathcal{U}$ y $W = \bigcup \mathcal{W}$. Denotaremos a los elementos de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ como V_i y V_j con $i \in I$ y $j \in J$, respectivamente.

   Así, $U \cap W = (\bigcup \mathcal{U}) \cap (\bigcup \mathcal{W}) = \bigcup(\{V_i \times V_j : (i, j) \in I \times J\}$. Por B_2, dado $(i_0, j_0) \in I \times J$, para cualquier $x \in V_{i_0} \cap V_{j_0}$, existe $V_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V_x$ y $V_x \subseteq V_{i_0} \cap V_{j_0}$.

Por lo tanto, $\bigcup(\{V_i \times V_j : (i,j) \in I \times J\} = \bigcup\{V_x : \exists i \in I \exists j \in J(x \in (V_i \cap V_j))\}$. Así, concluimos que $U \cap W \in \tau$.

Ya hemos demostrado que τ, en efecto, es una topología para la cual $\mathcal{B}$ es base. Verifiquemos la unicidad, ya que si τ' fuese una topología con base $\mathcal{B}$, al tomar $U \in \tau'$, tendríamos que hay $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \tau$ tal que $U = \bigcup \mathcal{U}$, de aquí inferimos que $U \in \tau$. De la misma manera, si $U \in \tau$, podemos deducir que $U \in \tau'$; probando que $\tau = \tau'$. ■

Es probable que el lector haya oído hablar de espacios métricos, a continuación recordaremos la definición.

Definición 1.12. *Se dirá que la pareja (X, d) es un espacio métrico si X es un conjunto no vacío y d una función de X en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que para todo $x, y, z \in X$:*

- $d(x,y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$*;*
- $d(x,y) = d(y,x)$*;*
- $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$*.*

A d se le llama una métrica para X.

Una métrica d sobre un conjunto X siempre induce una topología, pues dado un punto $x \in X$ y un real positivo r, podemos definir

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\},$$

y considerar la colección

$$\{U \in \wp(X) : (\exists r \in \mathbb{R})(\exists x \in X)(U = B_r(x))\}$$

como una base. A la topología generada por dicha base se le conoce como topología inducida por d. En efecto, esta colección cumple las propiedades B_1 y B_2 de la proposición 1.11.

A partir de esto, diremos que un espacio topológico es metrizable si existe una métrica para dicho espacio cuya topología inducida coincida con la original.

Para ejemplificar esto consideremos a la colección de intervalos abiertos de $\mathbb{R}$, $\{(a,b) : a < b \wedge a, b \in \mathbb{R}\}$, y mostremos que cumple las condiciones B_1 y B_2 de la proposición 1.11:

Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \in (x-1, x+1)$, cumpliendo así con lo requerido por B_1. Si hay dos intervalos $(a,b), (c,d)$ que tengan a x en su intersección, consideramos los siguientes casos:

- Si $c \leq a$ y $b \leq d$, entonces $(a,b) \cap (c,d) = (a,b)$, en este caso hacemos $V_3 = (a,b)$. De manera similar se resuelve el caso en el que las desigualdades $a \leq c$ y $d \leq b$ se dan.

- Si $c \leq a$ y $d \leq b$, con estas condiciones, se tiene que $a \leq d$, pues de no ser así, $(a,b) \cap (c,d) = \emptyset$, pero x está en esta última intersección. En este caso el intervalo $V_3 = (a,d)$ es el que sirve a nuestro propósito.

- Si $a \leq c$ y $b \leq d$, un razonamiento análogo al del caso anterior nos muestra que $c \leq b$. Ahora proponiendo a (c,b) como V_3, obtenemos lo deseado.

Notemos que la función valor absoluto resulta ser una métrica y la base inducida por ésta es equivalente a la que consideramos anteriormente.

En vista de esto último tenemos que $\{(a,b) : a < b \wedge a, b \in \mathbb{R}\}$ es base para alguna topología de $\mathbb{R}$ y será la única con la que trabajaremos en esta tesis.

Además, con una métrica podemos hablar de sucesiones. Recordemos que en un espacio métrico (X, d), una sucesión $\{x_n : n \in \omega\}$ es de Cauchy si satisface la fórmula

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists N \in \omega)(\forall n, m \in \omega)(n, m > N \to d(x_n, x_m) < \epsilon).$$

Luego, diremos que un espacio métrico es completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy contenida en el espacio converge a un punto del mismo.

De nuevo, $\mathbb{R}$ vuelve a ser nuestro mejor ejemplo, pues el valor absoluto es una métrica que vuelve al espacio completo.

Proposición 1.13. *Si (X, d) es un espacio métrico y C un subconjunto de X, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *C es cerrado en X.*
2. *Toda sucesión convergente contenida en C tiene a su punto límite en C.*

Demostración. Para ver que la afirmación 1 implica la afirmación 2, supondremos que existe $\{x_n : n \in \omega\} \subseteq C$, una sucesión convergente cuyo punto límite es x y éste pertenece a $X \setminus C$. Como C es cerrado, $X \setminus C$ es abierto, así que existe un $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $B_r(x) \subseteq X \setminus C$. Como la sucesión es convergente, hay un número natural n de suerte tal que $d(x, x_n) < r$ o equivalentemente $x_n \in B_r(x)$, lo cual contradice que la sucesión esté contenida en C.

En cuanto a la implicación recíproca, procederemos igualmente por contradicción. Si $x \in X \setminus C$, afirmamos que existe una distancia r de modo que $B_r(x) \subseteq C$. De no ser así, para cada $n \in \omega \setminus 1$, sea $x_n \in C \cap B_{\frac{1}{n}}(x)$; luego resulta que $\{x_n : n \in \omega\}$ es una sucesión contenida en C y convergente a x. Por hipótesis llegamos al absurdo de que $x \in C$. Esto prueba que $X \setminus C$ es abierto, pues x fue arbitrario. ∎

Definición 1.14. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que*

1. *el espacio X es de Hausdorff, si para todo par $x, y \in X$, si $x \neq y$, entonces hay dos abiertos ajenos, U, V tales que $x \in U$ y $y \in V$;*

2. *un conjunto $\mathcal{U}$ de abiertos de X es una cubierta abierta, si $\bigcup \mathcal{U} = X$;*

3. *el espacio X es compacto, si toda cubierta abierta contiene un subconjunto finito que siga siendo cubierta; a dicha cubierta le llamaremos subcubierta finita;*

4. *el espacio X es localmente compacto, si para todo $x \in X$ hay un abierto que lo contiene cuya cerradura es compacta, es decir, hay $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y toda cubierta abierta de $\overline{U}$ tiene una subcubierta finita.*

Ejemplo 1.15. *Pensemos en $\mathbb{R}$ como espacio topológico:*

• *$\mathbb{R}$ es de Hausdorff, esto debido a que dados dos números reales, a y b, los abiertos $B_{\frac{a+b}{2}}(a)$ y $B_{\frac{a+b}{2}}(b)$ muestran que la definición se cumple.*

• *Los reales no son un espacio compacto, pues la cubierta abierta*

$$\{(-n, n) : n \in \omega\}$$

no tiene ninguna subcubierta finita. Sin embargo, se verifica que es localmente compacto.

Una implicación clara es que todo espacio X compacto es localmente compacto, pues para cada elemento de X, el mismo X es un abierto que contiene a dicho elemento y es compacto. La implicación contraria no siempre es cierta según nuestro ejemplo anterior.

Otros resultados básicos en el estudio de espacios de Hausdorff, compactos y localmente compactos están en la siguiente proposición, que se quedará sin prueba por simplicidad de los argumentos y para poder proseguir velozmente.

Proposición 1.16. *Los siguientes enunciados son verdaderos para cualquier espacio (X, τ):*

1. *Si X es de Hausdorff y localmente compacto, entonces para todo abierto U y todo $x \in U$, hay un abierto V tal que $x \in V$ y $\overline{V} \subseteq U$.*

2. *Cualquier subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto.*

3. *Supongamos que X es de Hausdorff y localmente compacto. Sean $K, U \subseteq X$ de suerte tal que K es compacto en X, U es abierto y $K \subseteq U$. Entonces hay un abierto V tal que $\overline{V}$ es compacto y $K \subseteq V$ y $\overline{V} \subseteq U$.*

4. *X es compacto si y sólo si toda familia de conjuntos cerrados $\mathscr{F}$ que tenga la propiedad de la intersección finita, tiene intersección no vacía. Es decir, si cumple que para todo $F \in [\mathscr{F}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, se tiene que $\bigcap F \neq \emptyset$, entonces $\bigcap \mathscr{F} \neq \emptyset$.*

5. *Si $\mathcal{B}$ es una base para X, entonces satisface B_1 y B_2 de la proposición 1.11.*

Definición 1.17. *Sea α un ordinal y $\{(X_i, \tau_{X_i}) : i \in \alpha\}$ una familia de espacios topológicos, definimos al producto topológico $\Pi_{i\in\alpha} X_i$ como el producto cartesiano de conjuntos dotado de la topología generada por la siguiente base:*

$$\{\prod_{i\in F} U_i \times \prod_{i\in\alpha\setminus F} X_i : F \in [\alpha]^{<\omega} \wedge (\forall i \leq F)(U_i \in \tau_{X_i}) \wedge n \in \omega\}.$$

En principio no es claro que ese conjunto es una base ni que podemos hablar de un único producto topológico, pero lo asumiremos sin probarlo con el fin de no desviar nuestra atención del objetivo principal de la tesis. Estas pruebas pueden revisarse en [8] al igual que la demostración del siguiente resultado que ademas es equivalente al axioma de elección.

Teorema 1.18 (Tyconoff)**.** *Dada $\{(X_i, \tau_{X_i}) : i \in \alpha\}$, una familia de espacios topológicos, si cada uno de estos es compacto, entonces su producto topológico es compacto.*

1.3. Álgebras booleanas

Naturalmente, si queremos hablar de álgebras booleanas debemos primero entender qué son y explorar su comportamiento.

Definición 1.19. *Dado $(A, \leq)$ un orden parcial, se le denominará retícula si para cualesquiera $a, b \in A$, existen en A el ínfimo y el supremo de $\{a, b\}$, denotaremos a $a \vee b$ como el supremo de a y b, y $a \wedge b$ como el ínfimo.*

Observe que $a \leq b$ es equivalente que $a = a \wedge b$.

Más aún, siendo A una retícula, si la siguiente igualdad es satisfecha para cualesquiera $a, b, c \in A$, se dirá que es distributiva:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Proposición 1.20. *Para toda retícula distributiva A y cualesquiera $a, b, c \in A$, $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.*

Demostración. Notemos el siguiente truco: Si A es una retícula distributiva y $a, b, c \in A$, entonces $a = a \vee (a \wedge c)$ y $a = (a \vee b) \wedge a$. A este truco se le conoce como absorción. Así, se cumple que

$$\begin{aligned}
a \vee (b \wedge c) =& [a \vee (a \wedge c)] \vee (b \wedge c) \text{(absorción)} \\
=& a \vee [(a \wedge c) \vee (b \wedge c)] \text{(asociatividad)} \\
=& a \vee [c \wedge (a \vee b)] \text{(distributividad)} \\
=& [a \wedge (a \vee b)] \vee [c \wedge (a \vee b)] \text{(absorción)} \\
=& (a \vee b) \wedge (a \vee c) \text{(distributividad aplicada a } a \vee b)
\end{aligned}$$

■

A una retícula se le denominará acotada si tiene elemento máximo y mínimo. Al máximo se le denota como 1, al mínimo como 0. Si A es una retícula acotada, $b \in A$ es un complemento de $a \in A$ si $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$.

Una observación pertinente es que si A es una retícula acotada y distributiva, sus elementos tienen a lo más un complemento; ya que si $a \in A$ tuviera dos complementos $b, c \in A$, tendríamos:

$$b = b \wedge 1 = b \wedge (a \vee c) = (b \wedge a) \vee (b \wedge c) = 0 \vee (b \wedge c) = b \wedge c \leq c \qquad \text{(I)}$$

$$c = c \wedge 1 = c \wedge (a \vee b) = (c \wedge a) \vee (c \wedge b) = 0 \vee (c \wedge b) = c \wedge b \leq b \qquad \text{(II)}$$

De (I) obtenemos que $b \leq c$ y la otra desigualdad de (II).

Definición 1.21. *Un álgebra booleana o álgebra de Boole es una retícula distributiva con máximo y mínimo, donde todo elemento tiene un complemento. Si A es un álgebra booleana, denotaremos por A^+ a $A \setminus \{0\}$.*

Ejemplo 1.22. *Dado un conjunto X, $(\wp(X), \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, más aún, es un álgebra booleana.*

Sea A un álgebra booleana y $a, b \in A$. $\neg a$ representará al complemento de a. De la misma manera, definimos la diferencia de a, b denotada por $a - b$ como $a \wedge (\neg b)$ y la diferencia simétrica $a \triangle b = (a - b) \vee (b - a)$.

Afirmación 1.23. *Sea A un álgebra booleana y $\leq$ el orden de ésta. Si $a, b \in A$, la desiguladad $a \leq b$ equivale a $a - b = 0$.*

Demostración. Sean $a, b \in A$, entonces

$$\begin{aligned} a \leq b \text{ si y sólo si } & a \wedge b = a \\ \text{entonces } & (a \wedge b) \wedge \neg b = a \wedge \neg b \\ \text{si y sólo si } & a \wedge (b \wedge \neg b) = a \wedge \neg b \\ \text{si y sólo si } & a \wedge 0 = a \wedge \neg b \\ \text{si y sólo si } & 0 = a \wedge \neg b \\ \text{si y sólo si } & 0 = a - b. \end{aligned}$$

Para finalizar la prueba es suficiente ver que $(a \wedge b) \wedge \neg b = a \wedge \neg b$ implica $a \wedge b = a$.

$$\begin{aligned} (a \wedge b) \wedge \neg b = a \wedge \neg b \text{ implica } & [(a \wedge b) \wedge \neg b] \vee b = (a \wedge \neg b) \vee b \\ \text{entonces } & [(a \wedge b) \vee b] \wedge (\neg b \vee b) = (a \vee b) \wedge (\neg b \vee b) \\ \text{entonces } & [(a \wedge b) \vee b] \wedge 1 = (a \vee b) \wedge 1. \end{aligned}$$

Como $a \wedge b \leq b$, tenemos que $b = a \vee b$. Equivalentemente $a \leq b$, lo que implica que $a \wedge b = a$. ■

Cuando estemos trabajando con más de un álgebra de Boole, haremos las siguientes distinciones:

- Al orden en A se denotará con $\leq_A$.
- A los ínfimos y supremos calculados en A los representaremos con $\wedge_A$ y $\vee_A$ respectivamente.
- Al elemento máximo y mínimo de A lo distinguiremos con 1_A y 0_A respectivamente.
- Al complemento de un elemento $a \in A$, lo escribiremos como $(\neg a)_A$.

Definición 1.24. *Sean A y B álgebras booleanas tales que $A \subseteq B$. Diremos que A es una subálgebra de B si se cumple que:*

1. *para cualesquiera $a, b \in A$, $a \vee_B b = a \vee_A b$ y $a \wedge_B b = a \wedge_A b$;*

2. *$1_A = 1_B$ y $0_A = 0_B$;*

3. *para todo $a \in A$, el complemento de a en B está en A.*

Definición 1.25. *Sea κ un cardinal. Si A es un álgebra booleana, diremos que A es κ-completa si cualquier $B \in [A]^{<\kappa}$ tiene supremo; de existir este último se denotará por $\bigvee B$. Si el álgebra es $\mid A \mid^+$-completa, diremos solamente que es completa.*

Además, es importante notar que si A es κ- completa, todo subconjunto de cardinalidad menor que κ tiene ínfimo. En efecto, si $S \in [A]^{<\kappa}$, el conjunto $\{\neg a : a \in S\}$ también tiene menos de κ elementos, por lo que tiene un supremo y de manera relativamente sencilla podemos mostrar que ese supremo es la mínima cota inferior de S.

Si $(X, \ll)$ es un conjunto preordenado y $a, b \in X$, diremos que a y b son compatibles, en símbolos $a \mid b$, si hay $c \in X$ tal que $c \ll a$ y $c \ll b$, en caso contrario los llamaremos incompatibles y lo denotaremos por $a \perp b$. De esta manera, dado $S \subseteq X$, decimos que S es una anticadena en X si cualquier par de elementos distintos son incompatibles.

Afirmación 1.26. *C es una anticadena en X si y sólo si todo subconjunto finito de C es una anticadena en X*

Demostración. Supongamos que C es una anticadena en X y sea $D \in [C]^{<\omega}$. Si $a, b \in D$ son distintos, como C es una anticadena, tenemos que $a \perp b$ y, por tanto, D es una anticadena. Por el contrario, si todo $D \in [C]^{<\omega}$ es una anticadena, dados $a, b \in C$ tenemos que $a \perp b$, pues $\{a, b\}$ es una anticadena por hipótesis. ■

Desde luego una anticadena S es maximal si y sólo si no hay otra anticadena que contenga propiamente a S.

Proposición 1.27. *Sea $(X, \ll)$ un conjunto preordenado y sea $Y \subseteq X$. Para toda anticadena $S \subseteq Y$, son equivalentes los siguientes incisos.*

1. *S es maximal en Y.*
2. *Para todo $y \in Y$, hay $s \in S$ tal que $y \mid s$.*

Demostración. Probemos a partir de (1) el inciso (2). Fijemos $y \in Y$, si ocurriera que para todo $s \in S$, $y \perp s$, entonces $S \cup \{y\}$ sería una anticadena y como y no podría estar en S, $S \cup \{y\}$ contendría propiamente a S, contradiciendo la maximalidad de S.

Probemos la otra implicación, procediendo por contrapuesta. Supongamos que S no es una anticadena maximal. Entonces existe una anticadena T, tal que $S \subsetneq T$. De este modo, existe $y \in T \setminus S$ que es incompatible con todo elemento de S, pues T es una anticadena. ■

Hemos hablado de anticadenas maximales sin haber nunca argumentado por qué existen. Sin embargo, usando el lema de Zorn se puede probar el siguiente resultado.

Proposición 1.28. *Sea $(X, \ll)$ un conjunto preordenado y sean S, Y tales que $S \subseteq Y \subseteq X$. Si S es una anticadena en Y, entonces S se puede extender a una anticadena maximal en Y.*

En particular, si A es un álgebra booleana y $a, b \in A^+$, notamos que: a, b son compatibles en A^+ si y sólo si $a \wedge b > 0$ y, por tanto, son incompatibles en A^+ si y sólo si $a \wedge b = 0$. Así, $B \subseteq A^+$ es una anticadena en A^+ si y únicamente si para cualesquiera $x, y \in B$ distintos $x \wedge y = 0$.

Finalmente, notemos que siempre hay anticadenas en un preorden, pues el vacío siempre es una anticadena por vacuidad.

Definición 1.29. *Sea $(X, \ll)$ un conjunto preordenado.Llamaremos celularidad de X al supremo de las cardinalidades de las anticadenas en X y será denotado por $c(X)$. En particular, si $c(X) \leq \omega$, diremos que X tiene la ccc (condición de la cadena contable).*

Para la siguiente prueba será importante recordar una de las versiones más difíciles de pronunciar del Axioma de Elección:

Lema 1.30 (Tukey-Teichmüller)**.** *Sea F un conjunto no vacío, si para cada conjunto A se tiene que $A \in F$ si y sólo si todo subconjunto finito de A pertenece a F, entonces en el orden parcial $(F, \subseteq)$ hay un elemento maximal.*

Si un conjunto F cumple el antecedente del lema de Tukey-Teichmüller, se dice que F tiene caracter finito.

Proposición 1.31. *Si A es un álgebra booleana $c(A)^+$-completa, entonces es completa.*

Demostración. Sea $B \subseteq A$ y consideremos el conjunto

$$B^{\downarrow} = \{a \in A : \exists b \in B(a \leq b)\};$$

sea $\mathcal{C}$ la colección de anticadenas en A contenidas en $B^{\downarrow}$.

Por la afirmación 1.26 tenemos que $\mathcal{C}$ es de carácter finito. Además $\{0\} \in \mathcal{C}$, por lo que la familia es no vacía. Aplicando el lema de Tukey-Teichmüller, encontramos $M \in \mathcal{C}$ elemento maximal con respecto a la contención.

En virtud de que $M \in \mathcal{C}$, la cardinalidad de M es menor o igual que la celularidad de A. Como A es $c(A)^+$-completa hay $m \in A$ que es supremo de M. Afirmamos que m es supremo de B.

Si m no fuera cota superior de B, existiría $b \in B$ tal que $b \not\leq m$. Por la afirmación 1.23. Tenemos que $0 < b - m \leq b$, así $b - m \in B^{\downarrow} \setminus \{0\}$, por la maximalidad de M y la proposición 1.27, tenemos que hay $z \in M$ tal que $(b - m) \mid z$, o equivalentemente $(b - m) \wedge z > 0$. Así:

$$0 < z \wedge (b - m) = z \wedge (b \wedge (\neg m)) = (z \wedge b) \wedge (\neg m) \leq z \wedge (\neg m) = z - m = 0.$$

La última igualdad se da porque $m = \bigvee M$, lo cual implica que $z \leq m$, ergo $z - m = 0$, de nuevo, por la afirmación 1.23.

Con esta contradicción colegimos que para toda $b \in B$ se tiene que $b \leq m$, en otras palabras m, es cota superior de B. Veamos que es la mínima de éstas, o equivalentemente, que si para algún $c \in A$, $m \not\leq c$, entonces c no es cota superior de B.

Sea $c \in A$ tal que $m \not\leq c$, en busca de una contradicción supongamos que c es cota superior para B. Como m es supremo de M, c no es cota superior de M. Luego hay $x \in M$ tal que $x \not\leq c$. En vista de que $M \subseteq B^{\downarrow}$, hay $y \in B$ tal que $x \leq y$. Al ser c cota superior de B, ocurre que $x \leq y \leq c$. Así, la transitividad del orden nos da la contradicción buscada, permitiendo de esta manera concluir que c no es cota superior de B y por ende m es su supremo. ■

Ahora trabajaremos con espacios topológicos, σ-álgebras y σ-ideales con un enfoque booleano.

Sea X un espacio topológico. Definamos a Σ como la siguiente colección:

$$\{A \subseteq \wp(X) : A \text{ es } \sigma\text{-álgebra y } \tau_X \subseteq A\}.$$

Ésta es no vacía pues $\wp(X)$ es un elemento de dicho conjunto. Así que llamaremos Álgebra de Borel a la intersección de dicha colección y la denotaremos por $\mathcal{B}(X)$.

Es sencillo verificar que $\mathcal{B}(X)$ es, en efecto, una σ-álgebra en X. Por definición de Σ, $\bigcap \Sigma = \mathcal{B}(X)$. Si $E \in \mathcal{B}(X)$, entonces para toda $A \in \Sigma$, tenemos que $E \in A$, al ser A σ-álgebra, el complemento de E está en A, por lo tanto, $X \setminus E \in \bigcap \Sigma = \mathcal{B}(X)$. Con un argumento similar, probamos las otras dos condiciones de la definición de σ-álgebra para $\mathcal{B}(X)$.

Teorema 1.32. *Dado un conjunto X, si A es una σ-álgebra en X, entonces A es una subálgebra del álgebra booleana $\wp(X)$. Todavía más, A es cerrada bajo uniones numerables, lo que implica que es ω_1-completa.*

Demostración. Tomemos X y A como en las hipótesis. Notemos que el máximo y el mínimo en A y $\wp(X)$ coinciden, pues al ser A una σ-álgebra, $\emptyset, X \in A$.

El complemento booleano de a en $\wp(X)$ es $X \setminus a$, y si $a \in A$, entonces $X \setminus a$ también está en A.

Si $a, b \in A$, tenemos que $a \cup b \in A$, más aún, de la misma manera que se muestra que $a \cup b$ es la mínima cota superior en $\wp(X)$, se prueba que también es la mínima cota superior en A. Ahora, como A es una σ-álgebra, tenemos que $X \setminus a \in A$ y $X \setminus b \in A$, de aquí, $(X \setminus a) \cup (X \setminus b) \in A$, al sacar complemento de nuevo, concluimos que

$$a \cap b = X \setminus (X \setminus a) \cap X \setminus (X \setminus b) = X \setminus ((X \setminus a) \cup (X \setminus b)) \in A.$$

Un argumento rutinario muestra que la intersección de dos elementos de A es la máxima cota inferior, probando así que A es una subálgebra de $\wp(X)$.

Con un argumento similar nos podemos convencer de que si $\{a_n : n \in \omega\} \subseteq A$, su supremo será $\bigcup_{n\in\omega} a_n$ y su ínfimo $\bigcap_{n\in\omega} a_n$, ésto gracias a que A es cerrada bajo uniones numerables. ∎

A pesar de que definimos a los ideales en la potencia de un conjunto, podemos llevarnos la misma idea a álgebras booleanas, cambiando en la definición $\emptyset$ por 0, X por 1, $\subseteq$ por $\leq$, $\cup$ por $\vee$ y $\cap$ por $\wedge$.

Proposición 1.33. *Sea X un conjunto no vacío y sea B una subálgebra de $\wp(X)$. Si B es cerrada bajo uniones numerables e $\mathcal{I}$ es un σ-ideal en X, entonces $B \cap \mathcal{I}$ es un σ-ideal en el álgebra B.*

Demostración. Hagamos $\mathcal{J} = \mathcal{I} \cap B$. Al ser $\mathcal{I}$ un ideal, ocurre que $X \notin \mathcal{J}$. Como B es una subálgebra, $\emptyset \in B$, ergo $\emptyset \in \mathcal{J}$, pues $\emptyset \in \mathcal{I}$.

Supongamos que $E \in \mathcal{J}$. Trivialmente $E \in \mathcal{I}$. Si $F \in B$ tal que $F \subseteq E$, tenemos que $F \in \mathcal{I}$, así, $F \in \mathcal{J}$. Por lo tanto, $\mathcal{J}$ es cerrado bajo subconjuntos en B.

Ahora, si $S \in [\mathcal{J}]^{\leq\omega}$, dado que $\mathcal{I}$ es un σ-ideal y B es cerrada bajo uniones numerables, concluimos que $\bigcup S \in \mathcal{J}$.

Así, queda demostrado que $\mathcal{J}$ es un σ-ideal en B. ■

Definición 1.34. *Para cualquier álgebra booleana A y un ideal I en ella, definimos la relación $=_I$ en A de la siguiente manera:*

Para todo $a, b \in A$, $a =_I b$ si y sólo si $a \triangle b \in I$.

Como todo ideal tiene a $\emptyset$ como elemento, se tiene que la relación es reflexiva; la simetría de la diferencia simétrica nos garantiza que dados $a, b \in A$, es equivalente $a =_I b$ a $b =_I a$; al ser los ideales cerrados bajo uniones finitas y subconjuntos, $=_I$ es una relación transitiva. Así, acabamos de definir una relación de equivalencia.

Apoyándonos en el último párrafo, consideramos el espacio cociente A/I, que no es más que la colección de las clases de equivalencia generadas por $=_I$. Además, definimos la proyección natural $\pi_I : A \to A/I$ como la función que a cada $a \in A$ le asocia su clase de equivalencia:

$$\pi_I(a) = \{x \in A : a =_I x\}$$

Luego, para todo a, b en el álgebra A que consideramos, podemos deducir las siguientes propiedades a partir del teorema 1.33 los siguientes elementos en A/I:

1. $\pi_I(a) \wedge \pi_I(b) := \pi_I(a \wedge b)$;

2. $\pi_I(a) \vee \pi_I(b) := \pi_I(a \vee b)$;

3. $\neg\pi_I(a) := \pi_I(\neg a)$.

Es importante mencionar que las operaciones definidas no dependen del representante, lo cual también garantiza que si ordenamos al conjunto A/I con la fórmula

$$\pi_I(a) \leq \pi_I(b) \text{ si y sólo si } a - b \in I,$$

el orden está bien definido.

Teorema 1.35. *A/I es un álgebra de Boole.*

Demostración. Debemos verificar las siguientes propiedades: la última relación es un orden parcial para A/I, A/I es una retícula, tiene máximo y mínimo elemento, es distributiva y finalmente, todo elemento de A/I tiene un complemento.

Sean $a, b, c \in A$.

1. Tenemos que $a - a = a \wedge (\neg a) = 0 \in I$, pues I es un ideal, por esto $\pi_I(a) \leq \pi_I(a)$. Las condiciones $\pi_I(a) \leq \pi_I(b)$ y $\pi_I(b) \leq \pi_I(a)$ implican que $a - b, b - a \in I$; entonces, al ser I cerrado bajo supremos, tenemos que $a \triangle b \in I$. De este modo, $a =_I b$, por lo tanto, $\pi_I(a) = \pi_I(b)$.

Si $\pi_I(a) \leq \pi_I(b)$ y $\pi_I(b) \leq \pi_I(c)$, ocurre que $a - b, b - c \in I$. Entonces $(a - b) \vee (b - c) \in I$, pero

$$\begin{aligned}
(a-b) \vee (b-c) &= (a \wedge (\neg b)) \vee (b \wedge (\neg c)) \\
&= ((a \wedge (\neg b)) \vee b) \wedge ((a \wedge (\neg b)) \vee (\neg c) \\
&= [(a \vee b) \wedge (b \vee \neg b)] \wedge [(a \vee \neg c) \wedge (\neg b \vee \neg c)] \\
&= (a \vee b) \wedge (a \vee \neg c) \wedge (\neg b \vee \neg c) \\
&= (a \vee b) \wedge ((a \wedge \neg b) \vee \neg c) \\
&= [(a \vee b) \vee (a \wedge \neg b)] \wedge ((a \vee b) \vee \neg c) \\
&\geq ((a \vee b) \vee (a \wedge \neg b)) \wedge \neg c \\
&\geq a \wedge \neg c = a - c.
\end{aligned}$$

Por esto $a - c \in I$, o equivalentemente, $\pi_I(a) \leq \pi_I(c)$, demostrando así la transitividad.

2. Ahora veamos que $\pi_I(a \wedge b)$ es la máxima cota inferior del conjunto $\{\pi_I(a), \pi_I(b)\}$.

   Tenemos que $a \wedge b \leq a$. Entonces $(a \wedge b) - a = 0$, y $0 \in I$. De igual manera llegamos a que $(a \wedge b) - b \in I$ y por tanto, $\pi_I(a \wedge b)$ es cota inferior del conjunto deseado.

   Si $c \in A$ es tal que $\pi_I(c)$ es una cota inferior para el mismo conjunto, debemos probar que $c - (a \wedge b) \in I$. Para esto notemos que como $c - a \in I$ y $c - b \in I$, entonces $(c - a) \vee (c - b) \in I$. Luego,

$$(c \wedge \neg a) \vee (c \wedge \neg b) = c \wedge (\neg a \vee \neg b) = c \wedge \neg(a \wedge b) = c - (a \wedge b).$$

   Por lo tanto, $\pi_I(c) \leq \pi_I(a \wedge b)$.

Un argumento similar nos permite probar que $\pi_I(a \vee b)$ es la mínima cota superior del conjunto $\{\pi_I(a), \pi_I(b)\}$, y por ende, su supremo.

3. De manera esperada, comprobaremos que $\pi_I(0)$ y $\pi_I(1)$ son el mínimo y el máximo respectivamente en el cociente. Tenemos que para cualquier $a \in A$ $0 \leq a \leq 1$, de aquí $0 - a = 0$ y $a - 1 = 0$, ergo $\pi_I(0) \leq \pi_I(a) \leq \pi_I(1)$.

4. La distributividad de la retícula se sigue de la de A.

5. Sólo nos falta verificar que todo elemento de A/I tiene complemento. En efecto, se cumple que $\pi_I(0) \leq \pi_I(a) \wedge \pi_I(\neg a) = \pi_I(a \wedge \neg a) = \pi_I(0)$.

   De la misma forma, $\pi_I(1) = \pi_I(a) \vee \pi_I(\neg a)$. Con esto, finaliza la prueba.

∎

Para abordar el tema central de la tesis en indispensable pasar por las *álgebras de medida y categoría*, lo que obviamente nos obliga a hablar de estos dos conceptos.

Capítulo 2

El álgebra de categoría

En este capítulo empezaremos hablando de lo que es el concepto de categoría. Una vez hecho esto obtendremos un σ-ideal en los subconjuntos de números reales. Con dicho σ-ideal, empleando algunos teoremas del capítulo previo, obtendremos un álgebra booleana completa a la cual la conoceremos como el álgebra de categoría.

2.1. Categoría

Para empezar a hablar de categoría debemos dar la siguiente definición.

Definición 2.1. *Dado un espacio topológico* (X, τ)*:*

- $D \subseteq X$ *se llamará denso si se tiene que* $\overline{D} = X$.
- *En contra parte,* $D \subseteq X$ *se dirá que es denso en ninguna parte si* $int(\overline{D}) = \emptyset$.
- M *es un conjunto magro si hay* $\{D_n : n \in \omega\}$*, una colección de conjuntos densos en ninguna parte, de forma que* $M = \bigcup\{D_n : n \in \omega\}$.

- (X,τ) *es de Baire si el complemento de todo conjunto magro en* X *es denso en* X.

A partir de ahora, el conjunto formado por todos los conjuntos magros de $\mathbb{R}$ los denotaremos con $\mathcal{M}$. A su vez, si X es un espacio topológico, denotaremos a la colección de magros en X con $\mathcal{M}(X)$.

Así, en un espacio topológico, llamaremos conjuntos de la primera categoría a los conjuntos magros del espacio, todos los demás pertenecerán a la segunda categoría.

Familiaricémonos con estos conceptos a través de la siguiente proposición.

Proposición 2.2. *Sea* (X,τ) *un espacio topológico, los siguientes enunciados son verdaderos:*

1. *X siempre tiene conjuntos magros: el vacío es magro.*

2. *Todo subconjunto de un conjunto magro es magro.*

3. *La unión finita de magros es un conjunto magro.*

4. *Si el espacio es de Baire, todo abierto no vacío no es magro.*

Demostración. 1. Sabemos que $\emptyset = \bigcup_{i\in\omega}\emptyset$, además $\emptyset = int(\emptyset) = int(\overline{\emptyset})$, por lo que deducimos que $\emptyset$ es un conjunto magro.

2. Si $E \subseteq X$ es magro y $F \subseteq E$, entonces, hay una familia $\{E_i : i \in \omega\}$ de densos en ninguna parte tales que $\bigcup\{E_i : i \in \omega\} = E$. Intersectando con F a sendos lados tenemos que $F = F \cap E = (\bigcup\{E_i : i \in \omega\}) \cap F = \bigcup\{E_i \cap F : i \in \omega\}$. Por la monotonía de la cerradura y del interior, tenemos que para todo $i \in \omega$, $E_i \cap F$ es denso en ninguna parte, así demostramos 2.

3. Ahora, dados E y F, conjuntos magros, sean $\{E_i : i \in \omega\}$ y $\{F_i : i \in \omega\}$ las colecciones de conjuntos densos en ninguna parte respectivas que hacen cumplir la definición. Así, para cada natural par i, definimos $H_i = E_{\frac{i}{2}}$; si i, es impar, hacemos $H_i = F_{\frac{i-1}{2}}$. Cada H_i es denso en ninguna parte, más aún $\bigcup_{i\in\omega} H_i = E \cup F$. De manera inductiva se prueba para un número finito de magros.

4. Finalmente, sea $U \in \tau$. Si U es magro, dado que el espacio es de Baire, tenemos que $X \setminus U$ es un cerrado denso, así, $X \subseteq \overline{X \setminus U} = X \setminus U$, por lo tanto, $U = \emptyset$.

■

Teorema 2.3. *El conjunto $\mathcal{M}(X)$ es un σ-ideal en X siempre que X sea un espacio de Baire.*

Demostración. Los primeros cuatro incisos de la proposición anterior prueban que en un espacio de Baire los magros forman un ideal. Verifiquemos que es un σ-ideal. En efecto, si $\{E_i : i \in \omega\}$ es una familia de conjuntos magros de X, para cada i, hay una familia $\{E_{i_j} : j \in \omega\}$ de densos en ninguna parte tales que $\bigcup\{E_{i_j} : j \in \omega\} = E_i$. Entonces $\{E_{i_j} : i, j \in \omega\}$ es una familia numerable de densos en ninguna parte que tiene por unión a $\bigcup_{i\in\omega} E_i$. ■

Lema 2.4. *En un espacio topológico X, los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *X es de Baire.*

2. *La intersección numerable de densos abiertos es densa en X.*

3. *Ningún abierto no vacío es magro en X.*

Demostración. Para ver que (1) implica (2), sea $\{A_n : n \in \omega\}$ una sucesión de densos abiertos. Por la hipótesis nos basta con ver que $X \setminus \bigcap_{n\in\omega} A_n = \bigcup_{n\in\omega}(X \setminus A_n)$ es un conjunto magro, y para esto, sólo debemos verificar que para cada n, número natural, $X \setminus A_n$ es denso en ninguna parte.

Sea $n \in \omega$. Como A_n es abierto, $X \setminus A_n$ es cerrado. Además, $int(X \setminus A_n)$ es abierto y también vacío, ya que de lo contrario, al ser A_n denso ocurriría que $int(X \setminus A_n) \cap A_n \neq \emptyset$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $X \setminus A_n$ es denso en ninguna parte.

Para demostrar que (2) implica (3), procederemos por contradicción: Sea A un abierto no vacío y conjunto magro de X. Por definición hay una sucesión $\{A_n : n \in \omega\}$ de conjuntos densos en ninguna parte tales que $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$. Observemos que para cada n, $\overline{A_n}$ es denso en ninguna parte, esto se debe a que $int(\overline{A_n}) = int(\overline{\overline{A_n}})$; así $A \subseteq \bigcup_{n\in\omega} \overline{A_n}$. De esta forma, si fijamos a n, $X \setminus \overline{A_n}$ es un abierto que además es denso, pues para todo abierto U, $U \not\subseteq \overline{A_n}$.

Por la hipótesis tenemos que $\bigcap_{m\in\omega}(X \setminus \overline{A_m})$ es denso. Al ser A abierto no vacío, $A \cap \bigcap_{m\in\omega}(X \setminus \overline{A_m}) \neq \emptyset$, lo cual contradice que $A \subseteq \bigcup_{m\in\omega} A_m$ y finaliza la prueba.

Finalmente, para ver que (3) implica (1), sea $M \in \mathcal{M}(X)$ conjunto magro y sea A un abierto no vacío de X. Por hipótesis A no es magro. Entonces $A \not\subseteq M$, por lo que $(X \setminus M) \cap A \neq \emptyset$. Así, todo abierto no vacío intersecta a $X \setminus M$, por lo que $X \setminus M$ es denso en X.

■

Teorema 2.5 (Categoría de Baire)**.** *Sea X un espacio topológico. X es un espacio de Baire si cumple con alguna de las dos condiciones siguientes:*

1. *X es un espacio métrico y completo, o bien,*

2. *X es un espacio localmente compacto y de Hausdorff.*

Demostración. Empezaremos por considerar $\{U_i : i \in \omega\}$, una sucesión de conjuntos abiertos y densos en X. Además, sea $D = \bigcap_{i\in\omega} U_i$. Supongamos que A es un abierto de X. Probemos que suponiendo cualquiera de los incisos, $D \cap A$ no es vacío.

Supongamos el inciso primero. Vamos a denominar con d a la métrica del espacio y con esto en mente, construiremos dos sucesiones, $\{x_n : n \in \omega\} \subseteq X$ y $\{r_n : n \in \omega\} \subseteq (0, 1)$, de manera recursiva.

Como U_0 es denso y A es abierto, existe $x_0 \in U_0 \cap A$. Luego, como esa intersección es un abierto en X, existe un $r_0 \in (0, 1)$ de manera que $\overline{B_{r_0}(x_0)} \subsetneq U_0 \cap A$.

Supongamos construidos a x_n y r_n. Como U_{n+1} es un denso y $B_{r_n}(x_n)$ es un abierto, existe $x_{n+1} \in U_{n+1} \cap B_{r_n}(X_n)$ y existe $r_{n+1} \in (0, \frac{1}{n+1})$ tal que $\overline{B_{r_{n+1}}(x_{n+1})} \subsetneq U_{n+1} \cap B_{r_{n+1}}(x_{n+1})$.

Observemos que para cada par de naturales n, m con $n < m$, ocurre que $x_m \in B_{r_n}(x_n)$, lo que implica que $d(x_m, x_n) < \frac{1}{r_n}$, y como $lim_{k\to\infty} r_k = 0$, podemos inferir que la sucesión es de Cauchy, y por hipótesis converge. Llamemos x al punto de convergencia.

De este modo, la sucesión $\{x_n : n \in \omega\}$ queda contenida en A y cada elemento de la sucesión de cerrados decrecientes $\{\overline{B_{r_{n+1}}(x_{n+1})} : n \in \omega\}$ también. Por la proposición 1.13, para cada $n \in \omega$, $x \in \overline{B_{r_n}(x_n)}$ y por ende $x \in A$. Además, como $\overline{B_{r_n}(x_n)} \subsetneq U_n$, tenemos que $x \in \bigcap_{k\in\omega} U_k$, lo que demuestra que esa intersección es densa.

Ahora, supongamos el segundo inciso. De nuevo vamos a construir por recursión una sucesión, pero ahora de conjuntos compactos. Una vez más, como U_0 es un denso y A es un abierto, hay $x_0 \in U_0 \cap A$. Por el inciso 3 de la proposición 1.16, al considerar al compacto $\{x_0\}$ hay un abierto V_0 de manera que $\overline{V_0}$ es compacto y $x_0 \in V_0 \subseteq \overline{V_0} \subseteq U_0 \cap A$.

Si suponemos que para $n \in \omega$ existen V_n y x_n, como U_{n+1} es denso y V_n es abierto, hay $x_{n+1} \in V_n \cap U_{n+1}$. Con el mismo argumento que en el paso base, existe un abierto V_{n+1} de suerte que $\overline{V_{n+1}}$ es compacto y $x_{n+1} \in V_{n+1} \subseteq \overline{V_{n+1}} \subseteq U_{n+1} \cap V_n$.

Notemos ahora que la familia $\mathscr{F} = \{\overline{V_i} : i \in \omega\}$ tiene la propiedad de la intersección finita, es decir, para todo $W \in [\mathscr{F}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ ocurre que $\bigcap W$ es no vacío. Esto se debe a que si W es de tal forma, existe $n \in \omega$ tal que para todo $\overline{V_i} \in W$, $i \leq n$, y por construcción de la sucesión $\{x_n : n \in \omega\}$, $x_n \in \bigcap W$.

Por último, como $\overline{V_0}$ es compacto, y $\mathscr{F}$ está contenida en $\wp(\overline{V_0})$, se deduce, gracias al cuarto inciso de la proposición 1.16, que $\bigcap \mathscr{F} \neq \emptyset$.

Ahora como $\overline{V_n} \subseteq U_n$, se tiene que $\bigcap_{i\in\omega} \overline{V_i} \subseteq \bigcap_{i\in\omega} U_i$ y finalmente

$$\emptyset \neq \bigcap_{i\in\omega} \overline{V_i} \subseteq D \cap A.$$

Por lo tanto, D es denso. ■

Con este teorema tenemos que $\mathbb{R}$ es un espacio de Baire. Por esto, el teorema 2.3 nos asegura que $\mathcal{M}$ es un σ-ideal en $\mathbb{R}$.

2.2. Álgebra de categoría

Para la construcción de la mentada álgebra de categoría nos basaremos en otra manera de ver a los reales. Esta expresión de los reales estará dotada con una topología diferente y aprovecharemos de manera contundente que su cardinalidad es $2^{\aleph_0}$. Nuestro interés se centrará en el conjunto ${}^{\omega}2$, al que le asignaremos la topología producto, utilizando que se puede definir ${}^{\omega}2$ como producto cartesiano del ordinal 2 consigo mismo una cantidad numerable de veces. Desde luego consideramos la topología discreta para 2, es decir, todo subconjunto de 2 es un abierto en 2.

Según la definición 1.34, si (X, τ) un espacio topológico y $E, F \subseteq X$, tenemos que $E =_{\mathcal{M}(X)} F$, si la diferencia simétrica $E \triangle F$ es un conjunto magro en X.

Definición 2.6. *Se dirá que un subconjunto E de X tiene la propiedad de Baire si hay un abierto U en X tal que $E =_{\mathcal{M}(X)} U$. La colección de los conjuntos que tienen la propiedad de Baire en X se denotará por $BP(X)$.*

Lema 2.7. *Siempre que X sea un espacio topológico, los siguientes enunciados se cumplen.*

1. *$=_{\mathcal{M}(X)}$ es una relación de equivalencia.*
2. *$\tau_X \subseteq BP(X)$.*
3. *Si F es un cerrado en X, entonces $F =_{\mathcal{M}(X)} int(F)$.*
4. *Si $G \in \tau_X$, entonces $G =_{\mathcal{M}(X)} \overline{G}$.*
5. *Si $G \subseteq X$, entonces $int(\overline{G}) =_{\mathcal{M}(X)} \overline{G}$.*

Demostración. Para demostrar el inciso uno primero notemos que si $E, F, G \subseteq X$, se tiene que $E \triangle E = \emptyset$, que es magro; también sabemos que $E \triangle F = F \triangle E$. Finalmente, si $E \triangle F$ y $F \triangle G$ son conjuntos magros en X y le llamamos A y B a cada uno respectivamente, en virtud de que $\emptyset \triangle G = G$ y que $F \triangle F = \emptyset$, tenemos que:

$$E \triangle G = E \triangle ((F \triangle F) \triangle G) = (E \triangle F) \triangle (F \triangle G) = A \triangle B.$$

Además, como se tiene que $A\triangle B \subseteq A \cup B$. Al ser $\mathcal{M}$ un ideal, hemos acabado el primer inciso.

El inciso 2 se tiene por la reflexividad de $=_{\mathcal{M}(X)}$.

Si calculamos $F\triangle(int(F))$, llegamos a que es igual a $F \setminus (int(F))$, que es un conjunto magro si y sólo si tiene interior vacío. Sea $W = int(F \setminus int(F))$. Por la monotonía del interior, llegamos a que $W \subseteq int(F)$. Por otro lado, $W \subseteq F \setminus int(F) \subseteq X \setminus int(F)$, lo cual obliga a W a no tener elementos, demostrando que $F\triangle(int(F))$ es magro.

De igual manera, tenemos que $G\triangle\overline{G} = \overline{G} \setminus G$,. Luego

$$int(\overline{G}\setminus G) = int(\overline{G}\cap(X\setminus G)) = int(\overline{G})\cap(int(X\setminus G)) = int(\overline{G})\cap(X\setminus\overline{G}) = \emptyset.$$

Por lo tanto, $\overline{G} \setminus G \in \mathcal{M}(X)$.

Por último, si G es un abierto en X, entonces, por el inciso 3, $\overline{G} =_{\mathcal{M}(X)} int(\overline{G})$. ■

Proposición 2.8. *Para cualquier espacio topológico X, $BP(X)$ es una σ-álgebra en X.*

Demostración. Como $\emptyset, X \subseteq \tau_X \subseteq BP(X)$, sólo nos falta verificar que $BP(X)$ es cerrado bajo complementos y uniones numerables.

Si $E \in BP(X)$, tenemos por definición que existe $U \in \tau_X$ de tal manera que $E =_c U$. Como $E\triangle U = (X\setminus E)\triangle(X\setminus U)$, tenemos que $X\setminus E =_{\mathcal{M}(X)} X\setminus U$. Luego, por el inciso 3 del lema anterior, al ser $X \setminus U$ un cerrado en X, $X \setminus U =_{\mathcal{M}(X)} int(X \setminus U)$ y, por la transitividad de $=_{\mathcal{M}(X)}$, llegamos a que $int(X \setminus U) =_{\mathcal{M}(X)} X \setminus E$. Así, hemos encontrado un abierto equivalente a $X \setminus E$, por lo que $X \setminus E \in BP(X)$.

Ahora, sea $\{E_i : i \in \omega\} \subseteq BP(X)$ y fijemos $\{U_i : i \in \omega\} \subseteq \tau_X$ de tal modo que para cada $i \in \omega$, $E_i\triangle U_i$ sea magro en X. Luego hagamos $E = \bigcup_{i\in\omega} E_i$ y $U = \bigcup_{i\in\omega} U_i$. Notemos que U es un abierto en X.

Como $\mathcal{M}(X)$ es un σ-ideal, se obtiene que $\bigcup_{i\in\omega}(E_i \triangle U_i)$ es magro en X. Sea $M = \bigcup_{i\in\omega}(E_i \triangle U_i)$. Para cada $i \in \omega$, $U_i \subseteq U$ y por tanto, $E_i \setminus U \subseteq E_i \setminus U_i$. De esta manera,

$$E \setminus U = \bigcup_{i\in\omega}(E_i \setminus U) \subseteq \bigcup_{i\in\omega}(E_i \setminus U_i) \subseteq M.$$

De manera análoga, podemos probar que $U \setminus E \subseteq M$. Usando que $U \triangle E = (U \setminus E) \cup (E \setminus U)$, tenemos que $E \triangle U$ es un magro en X y en consecuencia $E \in BP(X)$. ■

Así, una consecuencia de la proposición anterior es el siguiente lema.

Lema 2.9. *Para cualquier espacio topológico X, $\mathcal{B}(X) \subseteq BP(X)$.*

En virtud del teorema 1.32, $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra ω_1-completa. Si X es de Baire, ya vimos que $\mathcal{M}(X)$ es un σ-ideal en X. Empleando la proposición 1.33, tenemos que $\mathcal{M}(X) \cap \mathcal{B}(X)$ es un σ-ideal en $\mathcal{B}(X)$, y como instancia del teorema 1.35, $\mathcal{B}(X)/(\mathcal{M}(X) \cap \mathcal{B}(X))$ es un álgebra booleana.

En particular, el espacio ${}^{\omega}2$ es compacto, usando el teorema 1.18 pues 2 es finito. Entonces es localmente compacto. Además, si $f, g \in {}^{\omega}2$ son funciones diferentes, sin pérdida de la generalidad, hay $n \in \omega$ tal que $f(n) = 0$ y $g(n) = 1$. Entonces

$$U = \prod_{i\in n} 2 \times \{0\} \times \prod_{i\in\omega\setminus(n+1)} 2 \text{ y } V = \prod_{i\in n} 2 \times \{1\} \times \prod_{i\in\omega\setminus(n+1)} 2$$

son dos abiertos que prueban que el espacio es de Hausdorff.

Luego, por el teorema de categoría de Baire, $\mathcal{M}({}^{\omega}2) \cap \mathcal{B}({}^{\omega}2)$ es un ideal al que denotaremos por $\mathcal{M}^*$ y definiremos

$$\mathbb{C} = \mathcal{B}({}^{\omega}2)/\mathcal{M}^*.$$

Final y esperadamente, el álgebra booleana $\mathbb{C}$ recibe el nombre de álgebra de categoría.

Ahora establezcamos algo de notación. Para todo elemento $E \in \mathcal{B}({}^{\omega}2)$, $[E]_{\mathcal{M}^*} = \pi_{\mathcal{M}^*}(E)$.

Al igual que los espacios topológicos ganan muchas propiedades por el simple hecho de ser compactos, las álgebras booleanas obtienen mayor relevancia cuando son completas. Si se quiere ahondar en el tema, se puede revisar [10].

Así, nos gustaría mostrar que $\mathbb{C}$ es un álgebra de Boole completa. Para conseguir esta conclusión, nos apoyaremos en otra álgebra booleana.

Si (X, τ) es un espacio topológico, $U \subseteq X$ será llamado *abierto regular en* X si $U = int(\overline{U})$; a la colección de éstos se le denotará por $RO(X)$.

Proposición 2.10. *Para todo espacio topológico* (X, τ)*,* $(RO(X), \subseteq)$ *es un álgebra de Boole donde, siempre que* $U, V \in RO(X)$ *se tiene que:*

$$U \wedge V = U \cap V, \qquad U \vee V = int(\overline{U \cup V}) \qquad y \qquad \neg U = X \setminus \overline{U}.$$

Su máximo y mínimo son X *y* $\emptyset$ *respectivamente y si, para cada subconjunto no vacío* S *de* $RO(X)$*, se define*

$$\bigwedge(S) = int(\overline{\bigcap S}) \qquad y \qquad \bigvee(S) = int(\overline{\bigcup S}),$$

entonces es además un álgebra completa.

Demostración. Hagamos algunas observaciones:

1. Si U es un abierto de X, $U \subseteq int(\overline{U})$.

   Esto gracias a que $U \subseteq \overline{U}$ y $U = int(U) \subseteq int(\overline{U})$.

2. Si U y V son abiertos regulares, su intersección también lo es.

   Por (1), $U \cap V \subseteq int(\overline{U \cap V})$. La otra contención se obtiene a partir de que $int(\overline{U \cap V}) \subseteq int(\overline{U}) = U$ y $int(\overline{U \cap V}) \subseteq int(\overline{V}) = V$, así $int(\overline{U \cap V}) \subseteq U \cap V$.

3. Si $A \subseteq X$, $int(\overline{A})$ siempre es un abierto regular.

   Tenemos que $int(\overline{A}) \subseteq \overline{A}$ y por esto, $\overline{int(\overline{A})} \subseteq \overline{A}$; así

   $$int\left(\overline{int(\overline{A})}\right) \subseteq int(\overline{A}).$$

   Por otro lado, por (1) tenemos la otra contención.

4. Si U es un abierto en X, $int(\overline{U})$ es el menor abierto regular que contiene a U.

   De (1) y (3) se tiene que $U \subseteq int(\overline{U})$ y $int(\overline{U}) \in RO(X)$. Sea $V \in RO(X)$ tal que $U \subseteq V$. Entonces $int(\overline{U}) \subseteq int(\overline{V})$.

5. Para todo $A \subseteq X$ y U abierto de X, $U \cap int(\overline{A}) \subseteq int(\overline{U \cap A})$.

   Tenemos que $U \cap \overline{A} \subseteq \overline{U \cap A}$ y entonces $int(U \cap \overline{A}) \subseteq int(\overline{U \cap A})$. Como $U = int(U)$ y el interior abre intersecciones, obtenemos lo deseado.

6. Si U y V son abiertos de X tales que $U \cap V = \emptyset$, entonces $int(\overline{U}) \cap int(\overline{V}) = \emptyset$.

   Como $U \subseteq X \setminus V$, $\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V$, y así $int(\overline{U}) \cap V = \emptyset$. Ahora apliquemos el razonamiento previo a los abiertos ajenos V y $int(U)$ para obtener la consecuencia deseada.

Armados con estas observaciones probaremos el teorema. Podemos notar que $(RO(X), \subseteq)$ es un orden parcial. Probaremos que $(RO(X), \subseteq)$ es un álgebra de Boole y, posteriormente, que es completa.

Por la observación 2, tenemos que nuestros candidatos a ínfimo y supremo son abiertos regulares. Naturalmente, $U \cap V$ es el ínfimo de U y V, y por la observación 4, que en efecto $int(\overline{U \cup V})$ es el supremo de dichos conjuntos. Además, X y $\emptyset$ siempre son abiertos regulares.

Supongamos que $U, V, W \in RO(X)$. Para probar la distributividad, tenemos que $U \wedge (V \vee W) = U \cap int(\overline{V \cup W})$. Por el inciso 5, el conjunto del lado derecho de la igualdad está contenido en

$$int(\overline{U \cap (V \cup W)}) = int(\overline{(U \cap V) \cup (U \cap W)}).$$

Por la definición de supremo en $RO(X)$ dada en la proposición que estamos probando, la última expresión es igual a $(U \cap V) \vee (U \cap W) = (U \wedge V) \vee (U \wedge W)$.

Notemos que, la otra desigualdad se tiene en todas las retículas, pues $U \geq U \wedge V$ y $U \geq U \wedge W$, implica que $U \geq (U \wedge V) \vee (U \wedge W)$. También ocurre que $V \geq U \wedge V$ y $W \geq U \wedge W$, así que $V \vee W \geq (U \wedge V) \vee (U \wedge W)$. De todo esto se obtiene que $U \wedge (V \vee W) \geq (U \wedge V) \vee (U \wedge W)$.

En virtud de la observación 1, para ver que $(RO(X) \subseteq)$, es un álgebra de Boole, sólo debemos probar que $int\left(\overline{X \setminus \overline{U}}\right) \subseteq X \setminus \overline{U}$, ya que es necesario probar que $\neg U \in RO(X)$.

Para simplificar la prueba, hagamos $A = int\left(\overline{X \setminus \overline{U}}\right)$ y $B = X \setminus \overline{U}$, y en la búsqueda de una contradicción supongamos que $A \cap \overline{U} \neq \emptyset$. Observemos que $A \cap \overline{U} = A \setminus B$.

En general, si A es un abierto que intersecta a la cerradura de un conjunto C, A intersecta a C. En efecto, si A y la frontera de C se intersectan en un punto, digamos x, al estar en la frontera de C, todo abierto que contenga a x va a cortar al interior de C y $int(C) \subseteq C$, en particular sucede para A.

Dado que $A\cap\overline{U} \neq \emptyset$, aplicando el párrafo anterior, tenemos que$A\cap U \neq \emptyset$. Además, $A \subseteq \overline{B}$ y $A \cap U \neq \emptyset$, por lo que $\overline{B} \cap U \neq \emptyset$. Empleando de nuevo el párrafo anterior, obtenemos que $B \cap U$ es no vacío, pero eso es un absurdo por cómo se definió B.

Ahora veamos que es un álgebra completa: Sea S un subconjunto no vacío de $RO(X)$. Como $\bigcup S$ es un abierto, por la observación 4, se tiene que $\bigvee S$ es la mínima cota superior de S en $RO(X)$.

Notemos que, por la observación 3, $\bigwedge S \in RO(X)$, y si $W \in RO(X)$ es una cota inferior de S, entonces $W \subseteq \bigcap S$, por la monotonía de la cerradura y el interior, $int(\overline{W}) \subseteq \bigwedge S$. Por lo tanto, $\bigwedge S$ es la máxima cota inferior de S en $RO(X)$. ■

En vista de que las siguientes demostraciones se vuelven un poco turbias, pero son necesarias para demostrar que el álgebra de categoría $\mathbb{C}$, es completa, analizaremos un poco este objeto.

Los elementos en $\mathbb{C}$ son clases de equivalencia de conjuntos borelianos de ${}^{\omega}2$. Partiendo de esto, pensemos en una función $f : \omega \to 2$. Ésta puede estar en un conjunto boreliano B. Ahora, la clase de equivalencia de B con respecto a $\mathcal{M}^*$ son todos los conjuntos borelianos que al hacer diferencia simétrica con B dan un conjunto de funciones que es magro y es boreliano. De este modo, tenemos que

$$f \in B \in [B]_{\mathcal{M}^*} = \{C \in \mathcal{B}({}^{\omega}2) : C \triangle B \in \mathcal{B}({}^{\omega}2) \cap \mathcal{M}({}^{\omega}2)\} \in \mathbb{C}.$$

Lema 2.11. *Si (X, τ) es un espacio topológico de Baire, entonces el cociente $\mathcal{B}(X)/(\mathcal{B}(X) \cap \mathcal{M}(X))$ es isomorfo a $RO(X)$.*

Demostración. Primero convengamos en una notación que aligere la redacción de la prueba: a $\mathcal{B}(X)$ lo abreviaremos con $\mathcal{B}$, a $\mathcal{B}(X) \cap \mathcal{M}(X)$ lo denotaremos con $\mathcal{M}^{\dagger}$ y al cociente $\mathcal{B}(X)/\mathcal{B}(X)\cap\mathcal{M}(X)$ con $\mathcal{B}^{\dagger}$. De igual manera, para cualquier $E \in \mathcal{B}$, por $[E]_\dagger$ denotaremos al conjunto $\pi_{\mathcal{M}^\dagger}(E) = \{F \in \mathcal{B} : F \triangle E \in \mathcal{M}^\dagger\} = \{F \in \mathcal{B} : F =_{\mathcal{M}(X)} E\}$.

Definimos $h : RO(X) \to \mathcal{B}^\dagger$, nuestro candidato a isomorfismo, de manera que $h(U) = [U]_\dagger$. Osérvese que h está bien definida ya que $RO(X) \subseteq \tau \subseteq \mathcal{B}$.

Luego, tenemos que $h(\emptyset) = [\emptyset]_\dagger$ es el mínimo de $\mathcal{B}^\dagger$. Análogamente $h(X) = [X]_\dagger$ es el máximo. Además, según las definiciones de ínfimos y supremos que se usaron para el álgebra cociente, para todo par de abiertos regulares U, V

$$h(U \wedge V) = h(U \cap V) = [U \cap V]_\dagger = [U]_\dagger \wedge [V]_\dagger = h(U) \wedge h(V).$$

Ahora, para deducir $h(U \vee V) = h(U) \vee h(V)$, recordemos el lema 2.7, por el inciso 4, $U \cup V =_{\mathcal{M}(X)} int(\overline{U \cup V})$; además, como $int(\overline{U \cup V})$ es un abierto regular en X, entonces $[int(\overline{U \cup V})]_\dagger = [U \cup V]_\dagger$, así

$$h(U \vee V) = h(int(\overline{U \cup V})) = [int(\overline{U \cup V})]_\dagger = [U \vee V]_\dagger = [U]_\dagger \vee [V]_\dagger = h(U) \vee h(V).$$

Si $U \in RO(X)$ y $h(U) = [\emptyset]_\dagger$, entonces $U = U \triangle \emptyset$ es magro en X; como el espacio es de Baire, $U = \emptyset$.

Demostremos que h es inyectiva. En efecto, si $h(U) = h(V)$, entonces $h(U) - h(V) = [\emptyset]_\dagger$; por como se define h, $h(U - V) = [\emptyset]_\dagger$. Dado que el único conjunto que va a dar al $[\emptyset]_\dagger$ es el vacío, $U - V = \emptyset$, por la afirmación 1.23 $U \leq V$. Análogamente podemos deducir que $U \geq V$.

Únicamente nos falta corroborar la suprayectividad de la función. Sea $a \in \mathcal{B}^\dagger$ y sea $E \in a$. De aquí, $E \in \mathcal{B}$. Como todo boreliano tiene la propiedad de Baire, tal como vimos en el lema 2.9, existe $U \in \tau$ de manera que $U =_{\mathcal{M}(X)} E$. Una vez más, por los incisos 1, 4 y 5 del lema 2.7, y en virtud de que $int(\overline{U})$ es un abierto regular, $E =_{\mathcal{M}(X)} int(\overline{U})$. Por lo tanto, $h(int(\overline{U})) = a$. ■

De este último lema obtenemos de inmediato el siguiente resultado.

Teorema 2.12. $\mathbb{C}$ *es un álgebra booleana completa.*

Vamos a estudiar un poco más de $\mathbb{C}$.

Primero para cada $t \in^{<\omega} 2$, definimos $\langle t \rangle = \{x \in^{\omega} 2 : t \subseteq x\}$ y denominamos como $\mathscr{H}$ al conjunto $\{\langle t \rangle : t \in {}^{<\omega}2\} \cup \{\emptyset\}$.

Lema 2.13. *La colección* $\{\langle t \rangle : t \in {}^{<\omega}2\}$ *es una base para una topología de* ${}^{\omega}2$.

Demostración. En virtud de la proposición 1.11, basta ver las propiedades B_1 y B_2 de la misma.

Si $f \in {}^{\omega}2$, entonces definimos t como la función $\{(0, f(0))\}$, es claro que $t \in {}^{<\omega}2$. Además, $f \in \langle t \rangle$ pues, $(0, f(0)) \in f$. Así, B_1 es satisfecha.

Ahora, dadas $s, t \in {}^{<\omega}2$, demostremos que para toda $f \in \langle s \rangle \cap \langle t \rangle$ hay una función $r \in {}^{<\omega}2$ de manera tal que $f \in \langle r \rangle$ y $\langle r \rangle \subseteq \langle s \rangle \cap \langle t \rangle$. En efecto, $f \in \langle s \rangle \cap \langle t \rangle$ implica que s y t son funciones compatibles, pues de lo contrario f no sería una función; tomemos r como la unión de s y t, se sigue que r es función y también que $r \subseteq f$, por lo que $f \in \langle r \rangle$.

Aparte, si $g \in \langle r \rangle$, $s \cup t = r \subseteq g$, así $g \in \langle s \rangle$ y $g \in \langle t \rangle$ simultáneamente. Demostrando así que la familia $\{\langle t \rangle : t \in {}^{\omega}2\}$ cumple con la propiedad B_2. ■

Sin embargo, la topología generada por la base $\mathscr{H}$ no es cualquiera, resulta que coincide con la topología producto de ${}^{\omega}2$. La prueba de dicha afirmación es la proposición 4.1 de [9].

Ahora bien, al ser $\mathscr{H}$ una base y como ${}^{\omega}2$ es de Baire, para toda función $t \in^{<\omega} 2$, tenemos que $[\langle t \rangle]_{\mathcal{M}^*} \in \mathbb{C}^+$.

Proposición 2.14. *La función* $e :^{<\omega} 2 \to \mathbb{C}^+$ *dada por* $e(t) = [\langle t \rangle]_{\mathcal{M}^*}$, *satisface que:*

1. *Para cada* $s, t \in^{<\omega} 2$, $t \supseteq s$ *si y sólo si* $e(t) \leq e(s)$.

2. *Si* $a \in \mathbb{C}^+$, *entonces hay una* $t \in^{<\omega} 2$ *tal que* $e(t) \leq a$.

Demostración. Primero verifiquemos que si $s, t \in^{<\omega} 2$, entonces $\langle t\rangle \setminus \langle s\rangle$ es un abierto en ${}^{\omega}2$. Sea $x \in \langle t\rangle \setminus \langle s\rangle$ y consideremos a $\langle x \upharpoonright (dom(t) \cup dom(s))\rangle$. Obviamente x es un elemento de ese conjunto, más aún, mostremos que si y también lo es, $y \in \langle t\rangle \setminus \langle s\rangle$. En efecto, si $a \in dom(t)$, tenemos que $y(a) = x(a)$, donde $x(a) = t(a)$. Además, sabemos que hay $b \in dom(s)$ tal que $x(b) \neq s(b)$ y de nuevo, como $y(b) = x(b)$, se tiene que $s \not\subseteq y$.

Del párrafo anterior tenemos que para todo $x \in \langle t\rangle \setminus \langle s\rangle$,

$$x \in \langle x \upharpoonright (dom(t) \cup dom(s))\rangle \subseteq \langle t\rangle \setminus \langle s\rangle;$$

por lo tanto, $\bigcup\{\langle x \upharpoonright (dom(t) \cup dom(s))\rangle : x \in \langle t\rangle \setminus \langle s\rangle\} = \langle t\rangle \setminus \langle s\rangle$ y $\langle t\rangle \setminus \langle s\rangle$ es un abierto en ${}^{\omega}2$.

Tomemos $s, t \in^{\omega} 2$. Si tenemos la suerte de que $t \supseteq s$, entonces se sigue que $\langle t\rangle \subseteq \langle s\rangle$. Así, $\langle s\rangle \setminus \langle t\rangle = \emptyset$. Como $\emptyset \in \mathcal{M}^*$, tenemos que $e(t) \leq e(s)$.

Por el contrario, si $t \not\supseteq s$, tenemos dos posibilidades, $|s| \leq |t|$, o bien, $|t| < |s|$. En el primer caso, hay $i < |s|$ tal que $s(i) \neq t(i)$ y entonces

$$x = t \cup ((\omega \setminus |t|) \times \{t(i)\})$$

es un elemento de ${}^{\omega}2$ que está en $\langle t\rangle \setminus \langle s\rangle$. Ahora, cuando $|t| < |s|$, entonces $|t| \in dom(s)$, así, definimos

$$y = t \cup ((\omega \setminus |t|) \times \{1 - s(|t|)\});$$

de nuevo $y \in \langle t\rangle \setminus \langle s\rangle$.

En ambos casos, se tiene que $\langle t\rangle \setminus \langle s\rangle$ es no vacío y como el espacio es de Baire, ocurre que $\langle t\rangle \setminus \langle s\rangle \notin \mathcal{M}^*$, lo que veremos que implica que, $e(t) = [\langle t\rangle]_{\mathcal{M}^*} \not\leq [\langle s\rangle]_{\mathcal{M}^*} = e(s)$:

$$\begin{aligned}
e(t) \leq e(s) &\Rightarrow [\langle t\rangle]_{\mathcal{M}^*} \leq [\langle s\rangle]_{\mathcal{M}^*} \\
&\Rightarrow [\langle t\rangle]_{\mathcal{M}^*} \wedge [\langle s\rangle]_{\mathcal{M}^*} = [\langle t\rangle]_{\mathcal{M}^*} \\
&\Rightarrow [\langle t\rangle \wedge \langle s\rangle]_{\mathcal{M}^*} = [\langle t\rangle]_{\mathcal{M}^*} \\
&\Rightarrow (\langle t\rangle \cap \langle s\rangle)\triangle\langle t\rangle \in \mathcal{M}^* \\
&\Rightarrow (\langle t\rangle \cap \langle s\rangle \cap ({}^{\omega}2 \setminus \langle t\rangle)) \cup (\langle t\rangle \cap^{\omega} 2 \setminus (\langle t\rangle \cap \langle s\rangle)) \in \mathcal{M}^*.
\end{aligned}$$

Podemos notar que el uniendo de la izquierda es vacío, además, si distribuimos la intersección en la diferencia del uniendo de la derecha obtenemos que:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \emptyset \cup \langle t\rangle\triangle\langle s\rangle \cup ({}^{\omega}2 \setminus (\langle t\rangle \cup \langle s\rangle)) \in \mathcal{M}^* \\
&\Rightarrow \langle t\rangle \setminus \langle s\rangle \in \mathcal{M}^*.
\end{aligned}$$

En cuanto al segundo inciso, sea $a \in \mathbb{C}^+$ y $E \in a$. En virtud de que todo conjunto del álgebra de Borel tiene la propiedad de Baire tenemos que $E \in BP(X)$. Por definición, existe un abierto U en ${}^{\omega}2$ tal que $U =_{\mathcal{M}^*} E$ y entonces $[U]_{\mathcal{M}^*} = a$. Al no ser a el 0, tenemos que U es no vacío. Sabemos que existe $t \in^{<\omega} 2$ con la característica de que $\langle t\rangle \subseteq U$. Dado que $\langle t\rangle \setminus E \subseteq U \setminus E$, $U \setminus E \subseteq U\triangle E$ y $U\triangle E \in \mathcal{M}^*$, deducimos que $e(t) = [\langle t\rangle]_{\mathcal{M}^*} \leq [E]_{\mathcal{M}^*} = a$. ■

Éste es el último resultado del capítulo, tendrá utilidad en la parte final de la tesis, sin embargo, cesaremos el estudio del álgebra de categoría para empezar con la de medida.

Capítulo 3

El álgebra de medida

Ahora nos corresponde hablar de medida. Primero exploramos la medida de Lebesgue para los números reales. Será una buena introducción para tener conceptos suficientes para dotar de una medida a ${}^{\omega}2$ y de aquí obtendremos otro σ-ideal que nos producirá el álgebra booleana completa que denominaremos como el álgebra de medida.

3.1. Medida

Consideremos al conjunto de números reales $\mathbb{R}$ con su topología habitual, es decir, la topología definida en el primer capítulo de la tesis.

La longitud de un intervalo acotado no vacío I de $\mathbb{R}$, representada por $\ell(I)$, se definirá como la diferencia entre sus extremos, es decir, la resta entre el supremo de I menos el ínfimo de I. De manera esperada, si el intervalo no está acotado, se definirá como infinito.

Para la siguiente definición debemos tomar supremos e ínfimos, sin embargo, no sólo de números reales. Al conjunto $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ le llamamos los reales extendidos y lo denotamos por $\mathbb{R}^*$. El supremo de un subconjunto de reales extendidos es ∞, si éste pertenece a dicho conjunto o no está acotado en $\mathbb{R}$; de otra manera se calcula como es habitual. El ínfimo de $\{\infty\}$ es ∞.

Definición 3.1. *En los reales definimos la medida exterior de un conjunto con la función $\mu^* : \wp(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ de la siguiente manera, si $E \subseteq \mathbb{R}$, entonces definimos $\mu^*(E)$ como el ínfimo de todas las cantidades de la forma*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \ell(I_k),$$

donde $\{I_k : k < \omega\}$ es una sucesión de intervalos abiertos no vacíos y acotados que satisfacen $E \subseteq \bigcup\{I_k : k < \omega\}$.

Si $E \subseteq \mathbb{R}$ y para todo $A \subseteq \mathbb{R}$ se tiene que $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$, a E se le llamará Lebesgue medible o simplemente medible.

Denotemos por $\mathfrak{L}$ a la colección de conjuntos Lebesgue medibles. Llamamos medida de Lebesgue a la función μ^* restringida a $\mathfrak{L}$ y en esta restricción la denotaremos simplemente con μ.

Una pequeña observación pertinente es que la medida exterior es monótona, es decir, si $A \subseteq B$, entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, ya que los intervalos que cubran a B también cubrirán a A. Además veremos a continuación que es numerablemente subaditiva.

Lema 3.2. *La función μ^* es numerablemente subaditiva, es decir, si $\{D_i\}_{i\in\omega} \subseteq \wp(\mathbb{R})$, entonces $\mu^*(\bigcup_{i\in\omega} D_i) \leq \sum_{i\in\omega} \mu^*(D_i)$.*

Más aún, si n es un número natural, $\{E_i : i < n\}$ es una colección ajena por pares de conjuntos medibles y A un subconjunto de números reales cualquiera, entonces

$$\mu^*(A \cap (\bigcup_{i<n} E_i)) = \sum_{i<n} \mu^*(A \cap E)$$

Demostración. Si hay algún $m \in \omega$ tal que $\mu^*(D_m) = \infty$, ambos lados de la desigualdad son infinitos. Por ende supongamos que para todo i, $\mu^*(D_i) < \infty$.

Sea $\epsilon > 0$. Desde luego, para cada $m \in \omega$, $\mu^*(D_m) < \mu^*(D_m) + \frac{\epsilon}{2^{m+1}}$. Por definición de medida exterior, hay una familia $\{I_n^m : n \in \omega\}$ de intervalos tal que $D_m \subseteq \bigcup_{n\in\omega} I_n^m$ y $\sum_{n\in\omega} \ell(I_n^m) \leq \mu^*(D_m) + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$.

Dado $m \in \omega$, es un hecho que $\{I_n^m : n \in \omega\}$ es numerable, entonces la colección $\{I_n^m : n, m \in \omega\}$ es una familia numerable de intervalos abiertos y acotados que cumple

$$\bigcup_{i\in\omega} D_i \subseteq \bigcup\{I_n^m : n, m \in \omega\}.$$

Si reenumeramos a dicha familia de esta manera, $\{J_i : i \in \omega\}$, tenemos que $\sum_{i\in\omega} \ell(J_i) = \sum_{m\in\omega} \sum_{n\in\omega} \ell(I_n^m)$, pues, como todos los términos de las series son positivos, el reordenamiento no altera la suma. Por lo tanto, $\mu^*(\bigcup_{i\in\omega} D_i) \leq \sum_{i\in\omega} \ell(J_i)$.

Luego, $\sum_{i\in\omega} \ell(J_i) \leq \sum_{m\in\omega}(\mu^*(D_m)+\frac{\epsilon}{2^{m+1}}) = \sum_{m\in\omega} \mu^*(D_m)+\sum_{m\in\omega} \frac{\epsilon}{2^{m+1}} = \sum_{m\in\omega} \mu^*(D_m) + \epsilon$.

Concluimos que $\mu^*(\bigcup_{i\in\omega} D_i) \leq \sum_{i\in\omega} \mu^*(D_i) + \epsilon$. Como ϵ fue arbitrariamente pequeña, Obtenemos la primera parte del lema.

Para verificar la segunda empecemos por fijar A, procederemos por inducción. Cuando $n = 1$ se cumple claramente la igualdad. Supongamos que para cualquier familia de conjuntos medibles ajena por pares con cardinalidad n se satisface la igualdad.

Sea $\{E_i : i < n+1\}$ una colección ajena por pares de conjuntos medibles. Entonces

$$A \cap E_n = A \cap (\bigcup_{i<n+1} E_i) \cap E_n,$$

y al mismo tiempo,

$$A \cap (\mathbb{R} \setminus E_n) \cap (\bigcup_{i<n+1} E_i) = A \cap (\bigcup_{i<n} E_i).$$

Ahora, empleando la hipótesis de inducción junto con el hecho de que E_n es medible obtenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned}\mu^*(A \cap (\bigcup_{i<n+1} E_i)) &= \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \cap (\bigcup_{i<n} E_i)) \\ &= \mu^*(A \cap E_n) + \sum_{i<n} \mu^*(A \cap E_i) \\ &= \sum_{i<n+1} \mu^*(A \cap E_i).\end{aligned}$$

■

Una aplicación inmediata del último resultado es: para todo $E \subseteq \mathbb{R}$, se cumple que si A es un subconjunto cualquiera de números reales, $\mu^*(A) = \mu^*((A \cap E) \cup (A \setminus E))$ y por lo tanto $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$. Así, para probar que un conjunto es medible basta verificar la desigualdad contraria.

A los conjuntos cuya medida de Lebesgue sea 0 les llamaremos *nulos* y a la colección de éstos la denotaremos con $\mathcal{N}$. Una forma de demostrar que $E \subseteq \mathbb{R}$ tiene medida exterior 0 es corroborar que para toda $\epsilon > 0$ hay $\{I_k\}_{k \in \omega}$, sucesión de intervalos abiertos y acotados tal que $E \subseteq \bigcup_{k \in \omega} I_k$ y $\sum_{k=0}^{\infty} \ell(I_k) < \epsilon$.

Desde luego, si un conjunto E tiene medida exterior 0, es medible, pues $A \subseteq \mathbb{R}$ implica que $\mu^*(A \cap E) \leq \mu^*(E) = 0$, y $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \setminus E)$, por tanto, E es medible.

Lema 3.3. *$\mathcal{L}$ es cerrada bajo complementos y uniones finitas.*

Demostración. Sean $F, E \in \mathcal{L}$ y $A \subseteq \mathbb{R}$. Inmediatamente se tiene $\mathbb{R} \setminus E \in \mathcal{L}$ puesto que

$$\mu^*(A \cap (\mathbb{R} \setminus E)) + \mu^*(A \setminus (\mathbb{R} \setminus E)) = \mu^*(A \setminus E) + \mu^*(A \cap E) = \mu^*(A).$$

Para la segunda parte, basta probar que $F \cup E \in \mathcal{L}$.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, arbitrario. Tenemos que $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$. Por otro lado, $\mu^*(A \setminus E) = \mu^*((A \setminus E) \cap F) + \mu^*((A \setminus E) \setminus F)$, puesto que F es medible.

Notemos que:

- $(A \setminus E) \setminus F = A \setminus (E \cup F)$.
- $A \cap (E \cup F) = A \cap E \cup [(A \setminus E) \cap F]$.
- $\mu^*(A \cap (E \cup F)) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*((A \setminus E) \cap F)$.

Así, $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*((A \setminus E) \cap F) + \mu^*((A \setminus E) \setminus F)$ por lo que, $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap (E \cup F)) + \mu^*(A \setminus (E \cup F))$. ■

Lema 3.4. *Dada $\{E_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{L}$ siempre existe una familia $\{F_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{L}$, ajena por pares tal que, $\bigcup_{n\in\omega} E_n = \bigcup_{n\in\omega} F_n$.*

La demostración del lema se basa simplemente en definir cada F_n como la unión de los primeros E_i (con $i \leq n$) y a eso restar la unión de los E_i con $i < n$.

Definición 3.5. *Supongamos que $\mathcal{S}$ es una σ-álgebra, diremos que $\nu : \wp(X) \to \mathbb{R}^*$ es una medida en $\mathcal{S}$ siempre que $\nu(\emptyset) = 0$ y si $\{E_i\}_{i\in\omega} \subseteq \mathcal{S}$ es una familia ajena dos a dos, entonces $\nu(\bigcup_{i\in\omega} E_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \nu(E_i)$.*

Teorema 3.6. *$\mathcal{L}$ es una σ-álgebra.*

Demostración. Veamos que $\emptyset$ es de medida 0, lo que implica que es medible: Dada $\epsilon > 0$ para cada $i \in \omega$, definimos $I_i = (\frac{-\epsilon}{2^{i+1}}, \frac{\epsilon}{2^{i+1}})$. Naturalmente $\emptyset \subseteq \bigcup_{i\in\omega} I_i$ y de esto tenemos que $\ell(I_i) = \frac{\epsilon}{2^i}$. Entonces $\mu^*(\emptyset) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \ell(I_i) \leq \epsilon$. Por lo tanto, $\mu(\emptyset) = 0$ y $\emptyset \in \mathcal{L}$.

Para verificar que $\mathbb{R}$ es medible observe que para todo A contenido en $\mathbb{R}$, $A \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ y $A = A \cap \mathbb{R}$.

Por lo anterior y el lema 3.3, sólo nos falta probar que $\mathcal{L}$ es cerrado bajo uniones numerables.

Para cada $i \in \omega$, sea E_i un conjunto medible. Corroboremos que $\bigcup_{i\in\omega} E_i \in \mathcal{L}$. Hagamos $E = \bigcup_{i\in\omega} E_i$ Por el lema 3.4, encontramos $\{F_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{L}$, ajena por pares, tal que $\bigcup_{n\in\omega} F_n = E$. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Para cada natural n, definimos $H_n = \bigcup\{F_k : k \leq n\}$ y por el lema 3.3 cada H_n es medible, así $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap H_n) + \mu^*(A \setminus H_n)$. Además, $H_n \subseteq E$, por lo que $\mu^*(A \setminus E) \leq \mu^*(A \setminus H_n)$ y por el lema 3.2, $\mu^*(A \cap H_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap F_n)$. Entonces:

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap H_n) + \mu^*(A \setminus E) = \sum_{k=0}^{n} \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \setminus E).$$

Notemos que en la expresión de arriba n fue arbitrario. Por lo que podemos asegurar que

$$\mu^*(A) \geq \sum_{i<\omega} \mu^*(A \cap F_i) + \mu^*(A \setminus E).$$

Como μ^* es numerablemente subaditiva, tenemos que $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$, tal como buscábamos. ■

Teorema 3.7. *La medida exterior de cualquier intervalo coincide con su longitud y además, todo intervalo es medible.*

Demostración. Probemos primero que si a es un real, el intervalo (a, ∞) es medible. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Sin pérdida de la generalidad, podemos suponer que $a \notin A$. Entonces podemos separar a A de la siguiente forma:

$$A_1 = A \cap (-\infty, a) \text{ y } A_2 = A \cap (a, \infty).$$

Así, basta con probar que $\mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) \leq \mu^*(A)$. Por definición, sólo debemos verificar que para toda familia $\{I_k : k \in \omega\}$ de intervalos abiertos y acotados que cubren a A,

$$\mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \ell(I_k).$$

Luego, para todo $k \in \omega$, dividimos a I_k de la siguiente manera:

$$I'_k = I_k \cap (-\infty, a) \text{ y } I''_k = I_k \cap (a, \infty).$$

Desde luego, tanto I'_k como I''_k son intervalos, y además, $\ell(I_k) = \ell(I'_k) + \ell(I''_k)$.

Tenemos que $\{I'_k : k \in \omega\}$ y $\{I''_k : k \in \omega\}$ son dos familias de intervalos acotados que cubren a A_1 y A_2 respectivamente. Por la definición de medida exterior,

$$\mu^*(A_1) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \ell(I'_k) \text{ y } \mu^*(A_2) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \ell(I''_k).$$

Por lo tanto, $\mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \ell(I_k)$.

De la misma manera que probamos que (a, ∞) es medible, podemos probar que $(-\infty, a)$ lo es. Ahora, para verificar que (a, b) también lo es sólo debemos recordar que $(a, b] = (a, \infty) \setminus (b, \infty)$. Por ser $\mathcal{L}$ una σ-álgebra, $(a, b]$ es medible, y es fácil probar que $\{b\}$ también lo es, dado que $(a, b) = (a, b] \setminus \{b\}$. Así, cualquier intervalo es medible.

Con esto, podemos verificar que $\{(a, b)\}$ es la mínima familia de intervalos que cubre a (a, b), por lo tanto $\mu((a, b)) = \ell((a, b))$.

$\blacksquare$

Además, μ es una medida en $\mathcal{L}$. La prueba de esto se encuentra en [3, proposición 7, sec. 2.3].

Teorema 3.8. *El conjunto* $\mathcal{N}$ *es un* σ*-ideal en* $\mathbb{R}$.

Demostración. Veamos primero 1, 2 y 3 de la definición de ideal y luego veamos que en efecto es σ-ideal:

1. Ya vimos que $\emptyset \in \mathcal{N}$. Además, $\mu^*(\mathbb{R}) = \infty$, puesto que la medida exterior es monótona y para todo $n \in \omega$, $(-n, n) \subseteq \mathbb{R}$, por lo que $\mathbb{R}$ no está en $\mathcal{N}$.

2. Por la monotonía de la medida exterior, se cumple el inciso 2 de la definición para $\mathcal{N}$.

3. Basta observar el lema 3.3 para colegir que $\mathcal{N}$ cumple el inciso 3.

Hasta el momento $\mathcal{N}$ es un ideal en $\mathbb{R}$.

Dada $\{E_i : i \in \omega\} \subseteq \mathcal{N}$, se tiene que $\mu^*(\bigcup_{i\in\omega} E_i) \leq \sum_{i\in\omega} \mu^*(E_i) = \sum_{i\in\omega} 0 = 0$ y por lo tanto, $\mathcal{N}$ es un σ-ideal.

■

3.2. Álgebra de medida

Al igual que en la construcción del álgebra de categoría trabajaremos con ${}^{\omega}2$, asignándole la topología producto.

Un corolario inmediato del teorema 1.32 es que $\mathcal{B}({}^{\omega}2)$ es un álgebra de Boole ω_1-completa.

Hasta el momento, en nuestro estudio de $\mathcal{B}({}^{\omega}2)$, hemos obtenido que es tanto un álgebra booleana como una σ-álgebra, sin embargo, aún no es suficiente para el objetivo de la tesis. Los párrafos siguientes motivarán nuestro objetivo, el cual es dotar de una medida a ${}^{\omega}2$.

Tomemos la función $\rho : \wp(2) \to [0,1]$ como sigue: $\rho(\emptyset) = 0$, $\rho(\{0\}) = \frac{1}{2} = \rho(\{1\})$ y $\rho(2) = 1$. De esta manera ρ es una medida para 2, más aún, aunque no es el enfoque que buscamos en esta tesis, podemos pensar en los elementos del 2 como posibles resultados de lanzar un "volado limpio" y ρ indica la probabilidad de que el evento ocurra.

Por otro lado, si $t \in {}^{<\omega}2$, recordemos que habíamos definido $\langle t \rangle = \{x \in {}^{\omega}2 : t \subseteq x\}$. Denotamos por $\mathscr{H}$ al conjunto $\{\langle t \rangle : t \in {}^{<\omega}2\} \cup \{\emptyset\}$, probamos que $\mathscr{H}$ era una base y mencionamos que producía la misma topología que el producto topológico.

Ahora, definimos la función $\lambda_0 : \mathscr{H} \to [0,1]$ dada por $\lambda_0(\langle t \rangle) = 2^{-|t|}$ y $\lambda_0(\emptyset) = 0$, para cualquier $t \in {}^{<\omega}2$. La interpretación probabilista en este caso es el lanzamiento de $|t|$ volados independientes con una moneda justa.

Para proseguir con nuestro objetivo tenemos que generalizar algunas ideas expuestas anteriormente cuando se habló de la medida de Lebesgue.

Sean X un conjunto, $S \subseteq \wp(X)$ y $\nu : S \to \mathbb{R}^*$ una función.

- Diremos que ν es *numerablemente monótona* siempre que, dado $E \in S$, y $\{E_i : i \in \omega\} \subseteq S$ si $E \subseteq \bigcup\{E_i : i \in \omega\}$, entonces $\nu(E) \leq \sum_{i\in\omega} \nu(E_i)$.

- También, diremos que ν es *finitamente aditiva* si cualquier familia finita y ajena por pares $\{E_k : k \in n\} \subseteq S$ cuya unión pertenezca a S, satisface que

$$\nu(\textstyle\bigcup_{k<n} E_k) = \sum_{k<n} \nu(E_k).$$

- Definimos a $\nu^* : \wp(X) \to \mathbb{R}^*$ como una *medida exterior* si $\nu^*(\emptyset) = 0$ y es numerablemente monótona.

- Denominamos a ν una *premedida* si es numerablemente monótona, finitamente aditiva y además, si $\emptyset \in S$, $\nu(\emptyset) = 0$.

Además, generalicemos la definición de medida que se dio para una σ-álgebra. Esto es una función μ que va de una σ-álgebra A al intervalo $[0,\infty]$ tal que $\mu(\emptyset)=0$ y si $\{E_i : i<\omega\}\subseteq A$ es una familia disjunta, entonces

$$\sum_{i<\omega}\mu(E_i)=\mu(\bigcup_{i<\omega}E_i).$$

Si una función f cumple la última condición, se dice que f es numerablemente aditiva.

Ejemplo 3.9. *La función que en la sección anterior se le dio nombre de medida exterior, en efecto cumple con la definición previa. Del mismo modo, la medida de Lebesgue es una medida según nuestra definición.*

Proposición 3.10. *La función λ_0 definida hace unos párrafos es una pre-medida.*

Demostración. Veamos que es finitamente aditiva. Para esto usaremos una familia de dos elementos y con un argumento inductivo habremos obtenido esta propiedad.

Notemos que si $\{t,s\}\subseteq^{<\omega}2$ y $\langle t\rangle\cup\langle s\rangle\in\mathscr{H}$, habría hay una función $r\in^{<\omega}2$ tal que $\langle t\rangle\cup\langle s\rangle=\langle r\rangle$, y entonces, $t\cup s\subseteq r$, pero como r es función, s y t tendrían que ser compatibles. Sin embargo, para probar que λ_0 es finitamente aditiva, tendríamos que considerar que $\langle t\rangle\cap\langle s\rangle=\emptyset$, pero entonces s y t no serían funciones compatibles. Así, por vacuidad, λ_0 es finitamente aditiva.

Demostremos que λ_0 es numerablemente monótona:

Sea $\{t_i : i\in\omega\}\cup\{t\}\subseteq^{<\omega}2$ de manera que $\langle t\rangle\subseteq\bigcup_{i<\omega}\langle t_i\rangle$. Queremos que $\lambda_0(\langle t\rangle)\leq\sum_{n\in\omega}\lambda_0(\langle t_n\rangle)$. Supongamos que n_0 es un natural tal que $\lambda_0([t])=2^{-n_0}$ y procedamos por contradicción.

Si $\sum_{n\in\omega} \lambda_0(\langle t_n \rangle) < 2^{-n_0}$, entonces hay una sucesión $\{m_i : i \in \omega\} \subseteq \omega$ tal que $\lambda_0(\langle t_i \rangle) = 2^{-m_i}$. Notemos que para toda $i \in \omega$, $2^{-m_i} < 2^{n_0}$, por lo tanto $dom(t) < dom(t_i)$.

Ahora, hay dos caso que considerar. El primero es que para cualesquiera $i, j < \omega$, $m_i \neq m_j$. En este caso podemos asegurar que existe $f \in \langle t \rangle$ que contiene al siguiente conjunto:

$$\bigcup_{i\in\omega}\{(m_i - 1, 1 - t_i(m_i - 1))\}.$$

Inmediatamente tenemos que para toda i, $f \notin \langle t_i \rangle$.

El segundo caso es que hay $i, \ell < \omega$ tales que $m_i = m_\ell$. En este caso construiremos una sucesión como sigue:

Sea m_i el mínimo valor que se repite en la sucesión $\{m_j : j < \omega\}$. Sea $k = m_i - n_0$. Observemos que a lo más hay 2^{k-1} elementos de la sucesión $\{m_n : n \in \omega\}$ iguales a m_i, pues de lo contrario

$$\sum_{j\in\omega} \lambda_0(\langle t_j \rangle) > \sum_{j<2^k} 2^{-m_i} = 2^k(2^{-m_i}) = 2^{k-m_i} = 2^{m_i-n_0-m_i} = 2^{n_0}$$

Es fácil comprobar que sólo hay 2^k funciones en ${}^{m_i}2$ que pueden extender a t. Por lo tanto, hay $s_0 \in^{m_i} 2 \setminus (\bigcup_{j\in\omega} t_j)$.

Ya obtuvimos a nuestro primer elemento de la sucesión, ahora supondremos que tenemos a s_n definido, vamos a definir a s_{n+1} dependiendo de lo siguiente:

Si para toda $\{m_j : j < \omega\}\setminus(| s_n | +1)$ es un conjunto libre de repeticiones, entonces hacemos $s_{n+1} = s_n$. Si por el contrario $\{m_j : j < \omega\} \setminus (| s_n | +1)$ no está libre de repeticiones, tomamos al mínimo m_i que se repite y obtenemos una función $s_n + 1 \in^{m_i} 2 \setminus (\bigcup_{j\in\omega} t_j)$ que extiende a s_n del mismo modo que se obtuvo a s_0.

Sea $s = \bigcup_{n<\omega} s_n$. Como s_{n+1} extiende a s_n podemos asegurar que s es una función. Si s es finita, entonces hay $f \in \langle s \rangle$ tal que para toda i, $f \notin \langle t_i \rangle$. Por otro lado, si s es infinita, entonces para toda i, $s \notin \langle t_i \rangle$.

En cualquier caso, llegamos a la conclusión de que hay una función que extiende a t pero para cualquier i no extiende a t_i. En otras palabras lo que obtuvimos es que $\langle t \rangle \not\subseteq \bigcup_{i<\omega} \langle t_i \rangle$, lo cual es la contradicción buscada. ■

Para el siguiente teorema adoptaremos la definición que se presenta en [3] de un *semianillo* en un conjunto X: S recibe tal denominación si es una colección de subconjuntos de X donde para todo $A, B \in S$ se tiene que $A \cap B \in S$ y para algún $n \in \omega$, hay $\{C_k : k \in n\}$ familia de elementos S ajenos por pares de tal suerte que

$$A \setminus B = \bigcup \{C_k : k \in n\}.$$

Para aterrizar este concepto, podemos pensar en algunos ejemplos triviales: $\{\emptyset\}$, $\wp(X)$ y $[X]^{<\omega}$ son semianillos para X.

Un ejemplo menos trivial es:

Proposición 3.11. *El conjunto $\mathscr{H}$, previamente definido es un semianillo en ${}^{\omega}2$*

Demostración. Dados $\langle t \rangle, \langle s \rangle \in \mathscr{H}$, queremos asegurar que $\langle t \rangle \cap \langle s \rangle \in \mathscr{H}$, es decir, queremos encontrar una función $r \in^{<\omega} 2$ de modo que $\langle r \rangle = \{f \in^{\omega} 2 : t \subseteq f \wedge s \subseteq f\}$, o bien, ver que $\langle t \rangle \cap \langle s \rangle = \emptyset$. Para esto consideremos dos casos.

1. s y t son funciones incompatibles: De ser así no hay función alguna que cumpla lo que r debe, por lo tanto, $\langle t \rangle \cap \langle s \rangle = \emptyset$.

2. s y t son funciones compatibles: Basta hacer $r = t \cup s$ y observar que se cumple con lo requerido.

Ahora, con los mismos $\langle t\rangle, \langle s\rangle \in \mathscr{H}$, $\langle t\rangle \setminus \langle s\rangle = \{f \in^{\omega} 2 : t \subseteq f \wedge s \nsubseteq f\}$. Necesitamos $\{r_i : i \leq n\} \subseteq^{<\omega} 2$, para algún $n \in \omega$, tal que $\bigcup_{i \leq n}\langle r_i\rangle$ coincida con la diferencia $\langle t\rangle \setminus \langle s\rangle$. Para esto consideramos el siguiente conjunto,

$$R = dom(s) \setminus dom(t).$$

Éste resulta ser finito, digamos de cardinalidad n, y enumeremos a los elementos de R como $\{m_i : i \leq n\}$. Definimos $r_i = t \cup \{(m_i, 1 - s(m_i))\}$, donde $(m_i, 1 - s(m_i))$ es la pareja ordenada. Notemos que $r_i \in^{\omega} 2$, pues

$$dom(r) = dom(t) \cup \{m_i : i \leq n\} = dom(s) \in \omega.$$

Luego, se tiene de inmediato que $\bigcup_{i \leq n}\langle r_i\rangle \subseteq \langle t\rangle \setminus \langle s\rangle$. Para verificar la otra contención basta notar que si $f \in \langle t\rangle \setminus \langle s\rangle$, hay $m_i \in R$ tal que $f(m_i) \neq s(m_i)$, por lo tanto, $f \in \langle r_i\rangle$. Comprobando así que $\mathscr{H}$ es un semianillo. ■

Antes de usar estos ejemplos para nuestro objetivo, estudiamos un poco más las propiedades de medidas y premedidas.

En general, dado un conjunto X, $\nu^* : \wp(X) \to \mathbb{R}^*$ es una medida exterior si es monótona, numerablemente subaditiva y $\nu^*(\emptyset) = 0$.

De la misma manera que definimos a los conjuntos Lesbegue medibles, un conjunto $E \in \wp(X)$ es medible respecto a una medida exterior ν^*, si para todo $A \in \wp(X)$,

$$\nu^*(A) = \nu^*(A \cap E) + \nu^*(A \setminus E).$$

Sea X un conjunto. Siempre que $S \subseteq \wp(X)$ no sea vacío y tengamos una función $\nu : S \to \mathbb{R}^*$, si definimos $\nu^*(\emptyset) = 0$ y para todo $E \in \wp(X) \setminus \{\emptyset\}$,

$$\nu^*(E) = inf \textstyle\sum_{i \in \omega} \nu(E_i),$$

donde el ínfimo es tomado sobre todas las familias $\{E_i : i \in \omega\} \subseteq S$ que cubren a E, se tiene que $\nu^* : \wp(X) \to \mathbb{R}^*$ es una medida exterior, conocida como la *medida exterior inducida por* ν.

Todavía más, si N es la colección de los conjuntos medibles respecto a ν^*, N es una σ-álgebra, $\overline{\nu} = \nu^* \restriction N$ es una medida en N y a $\overline{\nu}$ se le llama la *medida de Carathéodory inducida por* ν.

Lema 3.12. *Sea X un conjunto. Si $S \subseteq \wp(X)$ es cerrado bajo diferencias y $\nu : S \to [1, \infty]$ es una premedida, entonces la medida de Carathéodory $\overline{\nu} : N \to [0, \infty]$ es una extensión de ν; en particular, $S \subseteq N$.*

Demostración. Sea $A \in S$. Para ver que A es medible respecto a ν es suficiente ver que para cualquier $E \subseteq X$ de medida exterior finita y cualquier $\epsilon > 0$ se cumple que

$$\nu^*(E) + \epsilon \geq \nu^*(A \cap E) + \nu^*(E \cap (X \setminus A)) \tag{I}$$

Por definición de medida exterior, hay una familia $\{E_k : k \in \omega\} \subseteq S$ que cubre a E y

$$\nu^*(E) + \epsilon \geq \sum_{k=0}^{\infty} \nu(E_k). \tag{II}$$

Para cada $k \in \omega$, tanto $E_k \setminus A$ como $E_k \setminus (E_k \setminus A)$ pertenecen a S. Luego, en vista de que $E_k \cap A = E_k \setminus (E_k \setminus A)$ y que la premedida es finitamente aditiva, tenemos que

$$\nu(E_k) = \nu(E_k \cap A) + \nu(E_k \cap (X \setminus A)).$$

Entonces al sumar todas las igualdades tenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \nu(E_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu(E_k \cap A) + \sum_{k=0}^{\infty} \nu(E_k \cap (X \setminus A)). \tag{III}$$

Nótese que $\{E_k \cap A : k \in \omega\}$ y $\{E_k \cap (X \setminus A) : k \in \omega\}$ son dos subconjuntos numerables de S que cubren a $E \cap A$ y $E \cap (X \setminus A)$ respectivamente. Por la definición de medida exterior, tenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \nu(E_k \cap A) \geq \nu^*(E \cap A) \text{ y } \sum_{k=0}^{\infty} \nu(E_k \cap (X \setminus A)) \geq \nu^*(E \cap (X \setminus A)). \quad \text{(IV)}$$

Así, obtenemos (I) de (II), (III) y (IV). Ahora, si $E \in S$, claramente tenemos que $\nu(E) = \nu^*(E)$, pues ν es numerablemente monótona. Por lo tanto, $S \subseteq N$ y para todo $E \in S$, $\nu(E) = \overline{\nu}(E)$. ■

Lema 3.13. *Sea S un semianillo en X. Definimos S' como la colección de uniones de familias finitas y disjuntas de S. Entonces S' es cerrado bajo diferencias. Más aún, toda premedida sobre S tiene una extensión a una premedida con dominio S'.*

Demostración. Desde luego, por ser S un semianillo S', es cerrado bajo uniones e intersecciones finitas, es decir, para todo $T \in [S]^{<\omega}$, tanto $\cup T$ como $\cap T$ están en S. Si $n, m \in \omega$ y $\{A_i : i < n\}$, $\{B_i : i < m\}$ son dos subconjuntos de S, entonces:

$$(\bigcup_{i<n} A_i) \setminus (\bigcup_{i<m} B_i) = \bigcup_{i<n} (\bigcap_{j<m} (A_i \setminus B_j)).$$

Tenemos que $A_i \setminus B_j$ pertenece a S' ya que podemos ver dicha diferencia como una unión finita y disjunta de elementos de S. Con esto concluimos que S' es cerrado bajo diferencias.

Ahora sea ν una premedida sobre S. Definimos a $\nu' : S' \to [0, \infty]$ de la siguiente manera: si $E \in S'$ y $\{A_i : i < n\}$ es una familia ajena por pares tal que $E = \bigcup\{A_i : i < n\}$, entonces $\nu'(E) = \sum_{i<n} \nu(A_i)$. Primero probemos que está bien definida.

Si $\{B_i : i < m\} \subseteq S$ es disjunta y tiene por unión a E, debemos probar que $\sum_{i<n} \nu(A_i) = \sum_{i<m} \nu(B_i)$. Sin embargo, como ν es finitamente aditiva,

tenemos que para cada $j < m$ y para cada $k < n$,

$$\nu(B_j) = \sum_{i<n} \nu(A_i \cap B_j) \text{ y } \nu(A_k) = \sum_{i<m} \nu(A_k \cap B_i);$$

entonces,

$$\sum_{j<m} \nu(B_j) = \sum_{j<m} \sum_{k<n} \nu(A_k \cap B_j) = \sum_{k<n} \sum_{j<m} \nu(A_k \cap B_j) = \sum_{k<n} \nu(A_k).$$

Con esto, sólo falta probar que ν' es, en efecto, una premedida. Primero, como ν es finitamente aditiva y por la definición ν', ν' es finitamente aditiva. Para probar que también es numerablemente monótona, consideremos a $\{E\} \cup \{E_k : k \in \omega\} \subseteq S'$ de manera que $\bigcup\{E_k : k \in \omega\}$ cubre a E. Sin perder la generalidad, podemos suponer que $\{E_k : k \in \omega\}$ es disjunta en S. Fijemos $n \in \omega$ tal que para cada $i < n$ hay un $A_i \in S$ de forma que $E = \bigcup\{A_i : i < n\}$ y $\{A_i : i < n\}$ es una familia ajena dos a dos. Para cada $i < n$ ocurre que A_i es cubierto por $\bigcup\{A_i \cap E_k : k \in \omega\}$, que es una familia numerable de conjuntos en S. Por la monotonía de ν, tenemos que

$$\nu(A_i) \leq \sum_{k<\omega} \nu(A_i \cap E_k).$$

De nuevo, la por monotonía,

$$\begin{aligned}
\nu'(E) = \sum_{i<n} \nu(A_i) &\leq \sum_{i<n} \sum_{k<\omega} \nu(A_i \cap E_k) \\
&= \sum_{k<\omega} \sum_{i<n} \nu(A_i \cap E_k) \\
&= \sum_{k<\omega} \nu(E \cap E_k) \\
&\leq \sum_{k<\omega} \nu'(E_k).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, ν' es numerablemente monótona. ■

Teorema 3.14 (Carathéodory-Hahn). *Sean X un conjunto, S un semianillo en X y $\nu : S \to [0, \infty]$ una premedida. Entonces la medida de Carathéodory, $\overline{\nu}$, extiende a ν.*

Demostración. Por el lema 3.13, S se extiende a un conjunto cerrado bajo diferencias S' y ν a una premedida ν' sobre S'. Aplicando el lema 3.12, tenemos que la medida de Carathéodory $\overline{\nu}$, inducida por ν', es una medida que extiende a ν. ■

Como instancia de este último teorema aplicado al semianillo $\mathscr{H}$ y a la premedida λ_0, tenemos que hay una σ-álgebra $\mathscr{A} \subseteq \wp({}^{\omega}2)$ y una función $\lambda : \mathscr{A} \to [0, 1]$ que es una medida en $\mathscr{A}$ y que además es una extensión de λ_0.

Proposición 3.15. *Los siguientes enunciados son ciertos.*

1. $\mathcal{B}({}^{\omega}2) \subseteq \mathscr{A}$.
2. $\lambda(\{x\}) = 0$ *siempre que* $x \in {}^{\omega}2$.
3. $\lambda({}^{\omega}2) = 1$.

Demostración.

1. Para esto basta ver que $\mathscr{A}$ contiene a la topología, o todavía menos, a $\mathscr{H}$, ya que ésta es una base numerable. Sin embargo, es tarea fácil, pues λ extiende a λ_0.

2. Dado $x \in {}^{\omega}2$, para cada $n \in \omega$ definimos $x_n = x \restriction n$. Luego, tenemos que $\forall n \in \omega (x \in \langle x_n \rangle)$.

   Para probar que $\{x\}$ es nulo, es suficiente con tomar $\epsilon > 0$ y verificar que $\lambda(\{x\}) \leq \epsilon$. Sea $n \in \omega$ tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Así, $\{x_k : n \leq k < \omega\}$ es una familia numerable donde para cada k, $\{x\} \subseteq \langle x_k \rangle$. Por lo tanto, $\lambda(\{x\}) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_0(\langle x_k \rangle) = \frac{1}{2^n} < \epsilon$.

3. Como ${}^{\omega}2 = \langle\emptyset\rangle$, $\lambda({}^{\omega}2) = \lambda(\langle\emptyset\rangle) = 1$.

■

En general, si X es una σ-álgebra y ν una medida en X al conjunto de nulos se le denotará por $\mathcal{N}(X)$.

Como λ es una medida en ${}^{\omega}2$, consideramos su colección de conjuntos nulos, $\mathcal{N}({}^{\omega}2) = \{E \subseteq {}^{\omega}2 : \lambda(E) = 0\}$.

Teorema 3.16. $\mathcal{N}({}^{\omega}2)$ *es un* σ*-ideal en* ${}^{\omega}2$*.*

Demostración. Como λ es una medida en ${}^{\omega}2$, sabemos que $\lambda(\emptyset) = 0$ y, por la proposición anterior, $\lambda({}^{\omega}2) = 1$.

Las medidas son monótonas (pues es un caso particular de ser numerablemente monótona), por lo que, si E es nulo en ${}^{\omega}2$ y $F \subseteq E$, entonces $\lambda(F) = 0$.

Finalmente, tomemos $\{E_i : i \in \omega\} \subseteq \mathcal{N}({}^{\omega}2)$, usando la monotonía numerable, tenemos que $\lambda(\bigcup_{i\in\omega} E_i) \leq \sum_{i\in\omega} 0 = 0$. ■

Ahora estamos listos para la construcción del álgebra de medida, y como es de esperarse nos basaremos en ${}^{\omega}2$.

Recordemos que $\mathcal{B}({}^{\omega}2)$ es una subálgebra ω_1-completa de $\wp({}^{\omega}2)$, tal como se vio en la construcción del álgebra de categoría. Por la proposición 1.33 y el teorema anterior, tenemos que $\mathcal{N}({}^{\omega}2) \cap \mathcal{B}({}^{\omega}2)$ es un σ-ideal en $\mathcal{B}({}^{\omega}2)$, el cual denotaremos por $\mathcal{N}^*$.

Por el teorema 1.35, al hacer

$$\mathbb{M} = \mathcal{B}({}^{\omega}2)/\mathcal{N}^*$$

obtenemos un álgebra booleana. Desde luego, ésta es el álgebra de medida.

Al igual que hicimos con el álgebra de categoría, establecemos la siguiente notación: si E está en $\mathcal{B}({}^{\omega}2)$, usaremos $[E]_{\mathcal{N}^*}$ para expresar al conjunto $\pi_{\mathcal{N}^*}(E)$.

Las mismas consideraciones hechas para los elementos de $\mathbb{C}$ se pueden recrear para $\mathbb{M}$ con la sustitución de un álgebra por la otra, es decir: Si $f \in^\omega 2$ y B es un boreliano de ${}^\omega 2$ puede ocurrir que

$$f \in B \in [B]_{\mathcal{N}^*} = \{C \in \mathcal{B}({}^\omega 2) : C \triangle B \in \mathcal{B}({}^\omega 2) \cap \mathcal{N}({}^\omega 2)\} \in \mathbb{M},$$

en otras palabras, los elementos de $\mathbb{M}$ son clases de equivalencia de conjuntos borelianos de funciones.

Lema 3.17. $\mathbb{M}$ *tiene la ccc.*

Demostración. Procederemos por contradicción: supongamos que $\mathbb{M}$ tiene una anticadena de cardinalidad ω_1, llamémosla W y fijemos $\{a_\zeta : \zeta \in \omega_1\}$, una enumeración libre de repeticiones de sus elementos. Así, $a_\zeta \wedge a_\eta = [\emptyset]_{\mathcal{N}^*}$, siempre que $\eta < \zeta < \omega_1$. Si para cada $\zeta < \omega_1$ fijamos $x_\zeta \in a_\zeta$, obtenemos un conjunto completo de representantes para W.

Notemos que para todo $\zeta < \omega_1$, $\lambda(x_\zeta) > 0$, pues de lo contrario $x_\zeta \in [\emptyset]_{\mathcal{N}^*}$, y sin embargo, $W \subseteq \mathbb{M}^+$. De este razonamiento concluimos que $\zeta < \omega_1$ implica $x_\zeta \notin \mathcal{N}^*$.

Si para cada natural i, definimos $S_i = \{\zeta \in \omega_1 : \lambda(x_\zeta) \geq 2^{-i}\}$, tenemos que, $\bigcup_{n\in\omega} S_n = \omega_1$. Luego, dado que ω_1 es un cardinal regular, garantizamos que hay $\ell \in \omega$ tal que $|S_\ell| = \omega_1$. En particular, fijamos $f : \omega \to S_\ell$, una función inyectiva.

Notemos que, dados $k < n < \omega$, tenemos que $f(n)$ y $f(k)$ son diferentes ordinales de ω_1, por lo que

$$[\emptyset]_{\mathcal{N}^*} = a_{f(k)} \wedge a_{f(n)} = [x_{f(k)}]_{\mathcal{N}^*} \wedge [x_{f(n)}]_{\mathcal{N}^*} = [x_{f(k)} \cap x_{f(n)}]_{\mathcal{N}^*}.$$

Así, $x_{f(k)} \cap x_{f(n)} \in \mathcal{N}^*$. Luego, para cada $n \in \omega$, si definimos

$$y_n = x_{f(n)} \setminus \bigcup_{k<n} x_{f(k)} = x_{f(n)} \setminus \bigcup_{k<n} (x_{f(k)} \cap x_{f(n)}),$$

resulta que, para todo par $j, k \in \omega$, $k < j$ implica que $y_k \cap y_j = \emptyset$. Probemos ahora que $\lambda(y_k) \geq 2^{-\ell}$.

Como λ es finitamente aditiva (pues por ser medida es numerablemente aditiva) y $x_{f(k)} = y_k \cup (\bigcup_{n<k}(x_{f(n)} \cap x_{f(k)}))$ tenemos que

$$\lambda(x_{f(k)}) = \lambda(y_k) + \lambda(\bigcup_{n<k}(x_{f(n)} \cap x_{f(k)})).$$

Como $\mathcal{N}^*$ es un σ-ideal, $\bigcup_{n<k}(x_{f(n)} \cap x_{f(k)})$ tiene medida 0. Así, $\lambda(y_k) = \lambda(x_{f(k)}) \geq 2^{-\ell}$.

Ahora definimos $p = 2^{\ell+1}$, obteniendo que

$$\lambda(\bigcup\{y_k : k < p\}) = \textstyle\sum_{k<p}(y_k) \geq \sum_{k<p} 2^{-\ell} = p \cdot 2^{-\ell} = 2.$$

Con este procedimiento obtenemos la contradicción buscada, ya que λ está acotada por 1. ■

Lema 3.18. *Sea A un álgebra booleana ω_1-completa. Si I es un σ-ideal en A, entonces el cociente A/I es ω_1-completo.*

Demostración. Primero fijemos $\mathcal{J} \subseteq A/I$ tal que $|\mathcal{J}| = \omega$. Entonces hay $S \in [A]^\omega$ de tal manera que $\{\pi_I(x) : x \in S\} = \mathcal{J}$ y hacemos $z = \bigvee S$ el supremo de S calculado en A. Por definición, para toda $x \in S$ ocurre que $z \geq x$, entonces, si definimos $a = \pi_I(z)$, tenemos que a es cota superior para $\mathcal{J}$.

Afirmamos que a es la mínima cota superior de $\mathcal{J}$ en A/I:

Supongamos que $b \in A/I$ satisface que $\pi_I(x) \leq b$, siempre que $x \in \mathcal{J}$. Fijemos un $w \in b$, entonces tenemos que $\{x - w : x \in S\} \subseteq I$.

Por último, $z - w = (\bigvee S) - w = \bigvee\{x - w : x \in S\} \in I$, en conclusión, $a = \pi_I(z) \leq \pi_I(w) = b$. ■

Por consiguiente, tenemos el siguiente teorema, el cual se sigue de los dos lemas anteriores y la proposición 1.31.

Teorema 3.19. $\mathbb{M}$ *es un álgebra booleana completa.*

Con todos los resultados que hemos recopilado en el tercer capitulo contamos con herramientas suficientes para abordar el tema central de la tesis en el último capítulo de la misma.

Capítulo 4

Extensiones genéricas

El método de forcing fue creado en 1963 por el matemático Paul Cohen para probar la independencia de la Hipótesis del Continuo, de la cual hablaremos más tarde. En resumen, si suponemos que ZFC es consistente, con este método es posible encontrar un modelo de ZFC donde la Hipótesis del Continuo es verdadera- y otro donde es falsa. Esto implica que ni la Hipótesis del Continuo ni su negación se puede probar desde ZFC, suponiendo la consistencia de ZFC.

Para el resto de la tesis supondremos que M es un modelo transitivo y numerable de la teoría de conjuntos, al cual llamaremos modelo base. Esto es "casi" posible, pues, de acuerdo con el Segundo Teorema de Incompletud de Gödel, no podemos producir dentro de ZFC un modelo de todos y cada uno de los axiomas de ZFC. Por esto, nos vemos obligados a trabajar fuera de ZFC, donde supondremos todos los axiomas de la teoría de conjuntos sumando la suposición que ZFC es consistente, e incluso asumiendo un poco más: que ZFC tiene un modelo transitivo y numerable. De nuevo, por causa del teorema de Gödel esta nueva teoría no puede probar su propia consistencia, pero al igual que la de conjuntos, supondremos que sí es consistente para que tenga sentido el resto de la tesis.

Sin embargo, no es necesario hacer tantas suposiciones. Tal como se muestra en el Capítulo IV, sección 7 de [6], dentro de ZFC es posible obtener un modelo transitivo y numerable de una cantidad finita de axiomas de ZFC; en vista de que las pruebas son sucesiones finitas de fórmulas, no requerimos más que una cantidad finita de axiomas. Dicho esto, si M satisface todos los axiomas requeridos, no nos será perceptible si M no modela toda la teoría de conjuntos.

Cabe mencionar que los argumentos y teoremas empleados en dicho libro son avanzados y su correcta exposición tomaría mucho espacio en esta tesis, por tal motivo se decidió trabajar con la teoría en la que ZFC tiene un modelo transitivo y numerable citada arriba.

Por último, vamos a asumir que el lector tiene conocimientos de la lógica de predicados, en particular, de la formación de fórmulas de primer orden. Una vez aclarado todo esto, podemos empezar el último capítulo de esta tesis.

Los resultados de la primera sección del capítulo que no mostramos con detalle se pueden consultar en [6].

4.1. El método de forcing

Si ϕ y ψ son dos fórmulas y x, y variables, definimos la relativización de una fórmula a M de la siguiente manera:

1. $(x = y)^M$ se define como $x = y$;

2. $(x \in y)^M$ se define como $x \in y$;

3. $(\phi \wedge \psi)^M$ como $\phi^M \wedge \psi^M$;

4. $(\neg\phi)^M$ como $\neg(\phi)^M$;

5. $(\exists x\phi(x))$ como $\exists x(x \in M \wedge \phi^M)$.

Una formula ϕ es verdadera en M si ϕ^M es verdadera o equivalentemente $M \models \phi$.

Definición 4.1. *A una fórmula ϕ la llamamos absoluta para M si la fórmula $\phi^M \leftrightarrow \phi$ es verdadera.*

Así, podemos decir que un conjunto es absoluto en M si la fórmula que lo describe es absoluta, de igual manera, una relación o función es absoluta si la fórmula que hace o no pertenecer un elemento a dicha relación o función es absoluta.

Una observación importante es que para todos los modelos de ZFC, ω es un conjunto absoluto y además es un elemento de M, por lo que no aporta nada hacer la diferencia cuando hablamos del conjunto relativizado.

Ahora recordemos un par de definiciones que se dieron en la sección 1.1. En un conjunto preordenado P dos elementos p, q de dicho orden son compatibles, simbolizado por $p \mid q$, si existe $r \in P$ de manera que $r \leq p$ y $r \leq q$, de lo contrario son incompatibles y esto se escribe como $p \perp q$.

A partir de este momento utilizaremos frecuentemente nociones de forcing, por lo que se le recomienda al lector revisar este concepto en la primera definición de la tesis.

Definición 4.2. *Dada una noción de forcing $\mathbb{P}$ y un subconjunto D de ésta, diremos que D es un conjunto denso en $\mathbb{P}$ si para cualquier $p \in \mathbb{P}$ existe un $q \in D$ tal que $p \geq q$*

A partir de ahora, si $\mathbb{P}$ es una noción de forcing y p y q son dos elementos de $\mathbb{P}$, diremos que p es una extensión de q siempre que $p \leq q$.

Definición 4.3. *Si $\mathbb{P}$ es una noción de forcing, entonces $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro en $\mathbb{P}$ si:*

- *G no es vacío;*
- *para todo $p \in G$ y $q \in \mathbb{P}$, si $p \leq q$, entonces $q \in G$;*
- *para cualesquiera $p, q \in G$, entonces hay $r \in G$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$.*

Si, además, $\mathbb{P}, G, \in M$ y para todo $D \in M$, subconjunto denso de $\mathbb{P}$, ocurre que $G \cap D \neq \emptyset$, entonces G es un filtro $(M, \mathbb{P})$-genérico.

Proposición 4.4. *Sean $\mathbb{P} \in M$ y $G \subseteq \mathbb{P}$. Que G sea un filtro $(M, \mathbb{P})$-genérico es equivalente a que G no sea vacío y para cualesquiera elementos $a, b \in \mathbb{P}$ se cumplan los siguientes incisos:*

1. *si $p, q \in G$, entonces hay $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$;*
2. *si $p \in G$ y $p \leq q$, entonces $q \in G$; y*
3. *dado cualquier $D \subseteq \mathbb{P}$, si $D \in M$ y D es denso en $\mathbb{P}$, entonces $G \cap D$ es no vacío.*

Demostración. Como se puede observar, la definición de filtro genérico implica inmediatamente los incisos 2 y 3, y para ver el primer inciso basta observar que si alguien es elemento de G, también es elemento de $\mathbb{P}$. Así, sólo hay que ver la implicación recíproca.

Supongamos que $G \subseteq \mathbb{P}$ es un conjunto no vacío que satisface los incisos de la proposición,. Así tenemos los dos primeros puntos de la definición de filtro satisfechos por G. Por esta razón sólo nos queda verificar que si $p, q \in G$, hay $r \in G$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$.

Empecemos por fijar a p y q en G. Entonces definimos

$$D = \{r \in \mathbb{P} : r \perp p \vee r \perp q \vee (r \leq p \wedge r \leq q)\}.$$

Como D es un conjunto absoluto para M, pues $p, q \in \mathbb{P} \in M$ y M es transitivo, por el tercer inciso de la proposición: si D es un conjunto denso en $\mathbb{P}$, existe un $r \in G \cap D$. Observe que si $r \perp p$, se contradice el primer inciso de esta proposición; de igual manera si $r \perp q$. Así, debe ocurrir que $r \leq p$ y $r \leq q$, tal como deseamos.

Con esto, es suficiente probar que D es denso para acabar la prueba. Sea $s \in \mathbb{P}$. Si ocurriera que para cualquier $r \leq s$, r es incompatible con p o q, de inmediato tenemos que $r \in D$. En caso contrario, si toda extensión de s es compatible con p y q, en particular s lo es, de esto deducimos que hay $t \in \mathbb{P}$ tal que $t \leq s, p$. Como t es una extensión de s, t es compatible con q, por lo que existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq t, q$; en consecuencia, $r \in D$. Con esto concluimos que D es denso. ■

Con el fin de evitar repetir en cada definición, lema o proposición que $\mathbb{P}$ es una noción de forcing, convendremos que $\mathbb{P}$ siempre es una noción de forcing arbitraria.

Lema 4.5. *Si $\mathbb{P} \in M$, entonces para cualquier $p \in \mathbb{P}$ ha de existir un filtro $(M, \mathbb{P})$-genérico G tal que $p \in G$.*

Demostración. Comencemos por juntar a todos los subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ que pertenecen a M, sea $\{D_n : n \in \omega\}$ una lista libre de repeticiones de aquellos conjuntos. Definimos la sucesión $\{q_n : n \in \omega\}$ de la siguiente manera:

- Primero, $q_0 = p$.
- Dado q_n, q_{n+1} será un elemento de D_n tal que $q_{n+1} \leq q_n$.

Gracias a la densidad de cada D_n tenemos que nuestra sucesión decreciente está bien definida. Ahora definimos $G = \{q \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega \, (q_n \leq q)\}$ y veremos que en efecto G es un filtro $(M, \mathbb{P})$-genérico.

Desde luego, G es no vacío. Si $q \in G$ y $q \leq r$, inmediatamente tenemos que $r \in G$. Si $q, r \in G$ entonces hay $n, m \in \omega$ tal que $q_m \leq q$ y $q_n \leq r$, en particular $q_{max\{m,n\}} \leq q, r$ y $q_{max\{m,n\}} \in G$. De este párrafo tenemos que G es un filtro.

Sea D un subconjunto denso de $\mathbb{P}$. Entonces hay $n \in \omega$ de modo que $D_n = D$ y se tiene por definición de G que $q_{n+1} \in D_n \cap G$. Por lo tanto, G es un filtro $(M, \mathbb{P})$-genérico. ■

He aquí una importante razón para pedir que nuestro modelo de ZFC sea numerable: es importante notar que en la última prueba se usó fuertemente la numerabilidad de M, pues de otro modo no es posible asegurar que ω indice a todos los densos en $\mathbb{P}$.

Proposición 4.6. *Si $\mathbb{P} \in M$ y E es un subconjunto de $\mathbb{P}$ tal que $E \in M$, entonces para todo filtro $(M, \mathbb{P})$-genérico G, $G \cap E \neq \emptyset$ o bien hay $q \in G$ tal que para todo $r \in E$, $r \perp q$.*

Demostración. Dado $E \subseteq \mathbb{P}$ definimos $E^{\downarrow} = \{p \in \mathbb{P} : \exists q \in E\ (p \leq q)\}$ y $E^{\perp} = \{p \in \mathbb{P} : \forall q \in E\ (p \perp q)\}$. Afirmamos que si hacemos $D = E^{\downarrow} \cup E^{\perp}$, obtenemos un conjunto denso en $\mathbb{P}$.

Sea $p \in \mathbb{P} \setminus D$. En particular $p \notin E^{\perp}$. Entonces hay un $r \in E$ tal que $p \mid r$, luego, existe $q \in \mathbb{P}$ tal que $q \leq r$ y $q \leq p$, así $q \in E^{\downarrow}$ y es una extensión de p. Por lo tanto, D es denso. Más aún, como $E \in M$, $D \in M$.

Luego, al ser G un filtro $(M, \mathbb{P})$-genérico, hay $q \in G \cap D$ y ahora ocurre una de dos, $q \in E^{\downarrow}$ o $q \in E^{\perp}$. De ocurrir lo primero hay $p \in E$ tal que $q \leq p$; como $q \in G$ y G es filtro, $p \in G \cap E$. Si ocurre que $q \in E^{\perp}$, entonces para todo $r \in E$ se tiene que $r \perp p$. ■

Lema 4.7. *Sean $\mathbb{P} \in M$, G y H un par de filtros $(M, \mathbb{P})$-genéricos. Si $G \subseteq H$, entonces $H = G$.*

Demostración. Tenemos que probar que $H \subseteq G$. Procedamos por contradicción: supongamos que hay $p \in H$ tal que $p \notin G$. Entonces ocurre que $G \cap \{p\} = \emptyset$. Por la proposición 4.6, hay un $q \in G$ tal que $q \perp p$. Sin embargo, como $G \subseteq H$, resulta ser que H tiene dos elementos incompatibles, a saber q y p, lo cual no es posible debido a que H es filtro. ■

Una extensión genérica de un modelo transitivo y numerable de ZFC no es más que un supraconjunto del modelo base, que también es un modelo transitivo y numerable de ZFC. Como el nombre lo delata, una extensión genérica de M está dada a partir de un filtro $(M, \mathbb{P})$-genérico (para alguna $\mathbb{P} \in M$), sin embargo para conseguir un conjunto que cumpla todo lo que pedimos, será necesario "codificar" la información del modelo base y del filtro a tratar. Para este fin usaremos las siguientes definiciones.

Definición 4.8. *Dada una noción de forcing $\mathbb{P}$, diremos que un conjunto $\dot{x}$ es un $\mathbb{P}$-nombre si es una relación binaria cuyo dominio es una colección de $\mathbb{P}$-nombres y su codominio es un subconjunto de $\mathbb{P}$.*

En otras palabras, un conjunto $\dot{x}$ es llamado $\mathbb{P}$-nombre si

$$\forall(\dot{y}, p) \in \dot{x}\, (\dot{y} \text{ es un } \mathbb{P} - \text{nombre y } p \in \mathbb{P}).$$

Es natural pensar que la definición es incoherente, pues se usa el mismo objeto que se define, sin embargo, gracias a una generalización del teorema de recursión ([6, Teorema 5.6, p. 103]) se valida nuestra definición.

Ejemplo 4.9. • *Por vacuidad, $\emptyset$ es un $\mathbb{P}$-nombre.*

• *Si $p \in \mathbb{P}$ y hacemos $\dot{x} = \{(\emptyset, p)\}$, $\dot{x}$ es un $\mathbb{P}$-nombre.*

A la colección de $\mathbb{P}$-nombres en M la denotaremos por $M^{\mathbb{P}}$. Notemos que las nociones usadas para definir $\mathbb{P}$-nombres son absolutas, así la fórmula queda inerte al relativizarla. Sin embargo, no todos los $\mathbb{P}$-nombres están en $M^{\mathbb{P}}$, pues M es numerable y podemos definir toda una clase propia de $\mathbb{P}$-nombres.

Definición 4.10. *Si G es un filtro en $\mathbb{P}$, para cada $\mathbb{P}$-nombre $\dot{x}$, definimos la valuación de $\dot{x}$ en G, denotada por $\dot{x}_G$, como*

$$\{\dot{y}_G : \exists p \in G((\dot{y}, p) \in \dot{x})\}.$$

Para todo filtro G, $\emptyset_G = \{\dot{y}_G : \exists p \in G((\dot{y}, p) \in \emptyset)\} = \emptyset$.

Pero las valuaciones dependen del filtro G. Pensemos en el ejemplo 4.9, si $p \notin G$, la valuación de $\dot{x}$ es el vacío y por el contrario, si $p \in G$, $\dot{x}_G = \{(\emptyset, p)\}_G = \{\emptyset_G\} = \{\emptyset\}$.

Definición 4.11. *Si x es un conjunto, el $\mathbb{P}$-nombre canónico de x es*

$$\check{x} = \{(\check{y}, 1_{\mathbb{P}}) : y \in x\},$$

donde naturalmente $1_{\mathbb{P}}$ es el elemento máximo de $\mathbb{P}$.

Como es de esperarse, todos los $\mathbb{P}$-nombres canónicos, o simplemente nombres canónicos, son $\mathbb{P}$-nombres. Más aún, si G es un filtro, entonces $\check{x}_G = x$.

Definición 4.12. *Si G es un filtro $(M, \mathbb{P})$-genérico, definimos $M[G] = \{\dot{x}_G : \dot{x} \in M^{\mathbb{P}}\}$. A este nuevo conjunto le llamaremos la extensión genérica de M respecto a G.*

Resulta que, al ser M un modelo de ZFC, $M[G]$ también lo es, y a pesar de no ser un hecho trivial, hacer la prueba de esto nos desviaría del tema central. Además, la transitividad de M se hereda a $M[G]$ y $M[G]$ es numerable.

Una forma de interpretar a $M[G]$ es la siguiente: x pertenece a $M[G]$ si y sólo si x es definible en $M[G]$ a partir de G y una cantidad finita de elementos de M y por tanto, le corresponde un nombre.

Gracias a la definición de los nombres canónicos y a que todo filtro G tiene al máximo de $\mathbb{P}$, tenemos que $M \subseteq M[G]$. Más aún, $M[G]$ es la mínima extensión que contiene a M.

Lema 4.13. *Si N es un modelo transitivo de ZFC, $G \in N$ y $M \subseteq N$, entonces $M[G] \subseteq N$.*

Demostración. Sea $x \in M[G]$. Por definición hay $\dot{x} \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $x = \dot{x}_G$. Entonces $\dot{x} \in N$, y como $G \in N$, tenemos que $\dot{x}_G$ es un conjunto absoluto en N. Por lo tanto, $x \in N$. ■

Ya podemos sumergirnos al método de forcing.

Definición 4.14. *Sean $\mathbb{P} \in M$ y $\phi(v_1, ..., v_n)$ una fórmula con todas sus variables libres exhibidas. Además sean $\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n \in M^{\mathbb{P}}$ y p un elemento de la noción de forcing en cuestión. Diremos que p fuerza a la fórmula $\phi(v_1, ..., v_n)$, en símbolos $p \Vdash \phi(\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)$, si para todo filtro $(M, \mathbb{P})$-genérico G tal que $p \in G$, se tiene que $M[G] \models \phi((\dot{x}_1)_G, ..., (\dot{x}_n)_G)$.*

Proposición 4.15. *Sean $\mathbb{P} \in M$ y $\phi(x_1, ..., x_n)$ una fórmula con todas sus variables exhibidas. Si $\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n \in M^{\mathbb{P}}$ y $p, q \in \mathbb{P}$, se tiene la siguiente implicación*

$$\textit{Si } [(q \leq p) \wedge p \Vdash \phi(\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)], \textit{ entonces } q \Vdash \phi(\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n).$$

Demostración. Sea G un filtro genérico que tiene a q. según la definición anterior, hay que ver que $M[G] \models \phi((\dot{x}_1)_G, ..., (\dot{x}_n)_G)$. Como $q \leq p$, se tiene que $p \in G$. De la hipótesis obtenemos que $p \Vdash \phi(\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)$ y así, $M[G] \models \phi((\dot{x}_1)_G, ..., (\dot{x}_n)_G)$. ■

En general, un filtro genérico sobre la noción de forcing $\mathbb{P}$ no está obligado a pertenecer al modelo base M, de hecho, nos interesan únicamente las nociones de forcing cuyos filtros genéricos no se encuentran en M, por lo cual no tiene sentido pensar en una relativización de $\Vdash$ a M, pues en principio está definido ese símbolo con parámetros fuera del modelo.

Con esto en mente, se puede definir el símbolo $\Vdash^*$, el cual podrá ser relativizado a M y tal como lo muestra [6, Teorema 3.6, p. 200]. Dicha relativización será lógicamente equivalente a la noción de forzar dada arriba. Gracias a esto, nos es posible hablar de manera formal de forzar dentro del modelo base M.

Además de la importante equivalencia lógica entre $\Vdash$ y $\Vdash^*$, el Teorema 3.6 citado en el párrafo anterior también establece el siguiente resultado.

Teorema 4.16. *Para cualquier filtro $(M, \mathbb{P})$-genérico G y para cualesquiera $\dot{x_1}, ..., \dot{x_n} \in M^{\mathbb{P}}$, $M[G] \models \phi(\dot{x}_{1G}, ..., \dot{x}_{nG})$ si y sólo si $\exists p \in G(p \Vdash \phi(\dot{x_1}, ..., \dot{x_n}))$.*

También se deriva el siguiente lema:

Lema 4.17. *Si $p \in \mathbb{P}$ y $p \Vdash \exists x(x \in \dot{X} \wedge \phi(x, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n))$, para alguna fórmula ϕ, entonces $\exists r \leq p \exists \dot{x} \in dom(\dot{X})(r \Vdash \phi(\dot{x}, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n))$.*

Demostración. Fijemos a un filtro genérico G que tenga a p. De la definición de $\Vdash$ se sigue que hay $x \in \dot{X}_G$ de modo que $M[G] \models \phi(\dot{x}, x_1, ..., x_n))$, pero $x \in \dot{X}_G$ si y sólo si para algún $\dot{x} \in dom(\dot{X})$ se tiene que $x = \dot{x}_G$. Por la proposición 4.16, hay un $q \in G$ de manera que $q \Vdash \phi(\dot{x}, \dot{x_1}, ..., \dot{x_n})$. Finalmente, como p y q están en G, hay $r \in G$ tal que $r \leq q, p$. Por la proposición 4.15, tenemos que $r \Vdash \phi(\dot{x}, \dot{x_1}, ..., \dot{x_n})$. ■

Como mencionamos al principio del capítulo, el método de forcing fue diseñado para probar la independencia de la Hipótesis del Continuo. Esta afirma que en los números reales no podemos encontrar conjuntos no numerables que no sean equipotentes con $\mathbb{R}$. La hipótesis fue planteada en 1878 por

Georg Cantor, el cual pensaba que era verdadera, sin embargo jamás pudo dar prueba. Tiempo después, en 1940 Gödel prueba su consistencia basándose en la clase de conjuntos constructibles y finalmente en 1963 se probó su independencia gracias a Cohen. [6]

Sin embargo, mientras se obtenían estas pruebas, hubo varios intentos de demostrar la Hipótesis del Continuo pero también de refutarla. Esa última labor parecía un poco más sencilla que buscar una prueba, pues basta con proponer un subconjunto de los reales cuya cardinalidad se encuentre entre la de ω y $\mathbb{R}$. Un intento de encontrar dicho conjunto no se buscó en $\mathbb{R}$, sino en ${}^{\omega}\omega$.

Sea $D \subseteq^{\omega} \omega$. Decimos que D es una familia dominante si para todo $f \in^{\omega} \omega$ existe $g \in D$ tal que $\{n \in \omega : g(n) \leq f(n)\}$ es finito; esto se abrevia como $f \leq^{*} g$. Notemos que las familias dominantes existen, pues ${}^{\omega}\omega$ es una. Así, la cardinalidad de una familia dominante es a lo más $\mathfrak{c}$, pero podemos decir más. Si $D \in [{}^{\omega}\omega]^{\leq\omega}$, no puede ser una familia dominante, pues si $\{f_i : i \in \omega\}$ es una enumeración de D, definiendo a $f : \omega \to \omega$ de la siguiente manera

$$f(n) = max\{f_i(n) : i \leq n\} + 1$$

nos convencemos que D no es dominante. Por esto, las familias numerables no pueden ser dominantes. Si definimos

$$\mathfrak{d} = min\{| D |: D \text{ es una familia dominante}\},$$

tenemos que $\omega < \mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$. Ahora, una manera de refutar la Hipótesis del Continuo, sería encontrar una familia dominante con caridnalidad menor que $\mathfrak{c}$. Sin embargo, dado que la Hipótesis del Continuo es independiente, es claro ahora que esto no es posible en ZFC.

Como este intento de demostrar que la hipótesis del continuo fue inútil, hubo varios intentos de demostrar que la Hipótesis del Continuo era falsa con la misma esencia, encontrar una propiedad y una familia en ${}^{\omega}\omega$ que cumpla dicha propiedad, luego ver que esas familias no pueden ser numerables y buscar el cardinal mínimo de una familia de éstas. A los cardinales con esas propiedades se les conoce como características del continuo, y se puede encontrar más sobre este tema en [1].

Si bien es cierto que el forcing fue creado para demostrar la independencia de enunciados con respecto a ZFC, en los últimos años el enfoque de esta herramienta ha cambiado. A parte de buscar una extensión genérica que cumpla alguna propiedad, actualmente también se estudian las propiedades de las extensiones genéricas mismas. Veremos algunos resultados que se obtienen en las extensiones genéricas producidas por el álgebra de medida y categoría.

4.2. Consecuencias en las extensiones genéricas

Anteriormente invertimos muchas páginas en la construcción de $\mathbb{C}$ y $\mathbb{M}$, y desde luego lo hicimos con el fin de utilizarlas en este capítulo. Deseamos generar extensiones genéricas de M a partir de estas dos álgebras; aunque formalmente la acción de forzar fue definida en una noción de forcing, cuando decimos que forzamos con un álgebra de Boole A, estamos forzando con la noción de forcing A^+.

Al igual que con los $\mathbb{P}$-nombres, la cardinalidad de M impide que todos los números reales estén en el modelo, por lo que $\mathbb{R}$ no es una definición absoluta, sin embargo, tal cual se construyen los reales en ZFC, se pueden construir en M, más aún, la versión en el modelo, $\mathbb{R}^M$, coincide con $\mathbb{R} \cap M$.

En ZFC podemos probar que ${}^{\omega}\omega$ y $\mathbb{R}$ son equipotentes, entonces interpretamos a cada número real como una función. Rescatando la idea de las familias dominantes de ${}^\omega\omega$, dado un conjunto $D \subseteq^\omega \omega$, podemos preguntarnos si hay algún real dominante para dicho conjunto, es decir, si existe una función $g \in^\omega \omega$ tal que para toda $f \in D$, ocurre que, salvo un número finito de naturales, $f \leq g$. Al no tener M a todos los números reales, tiene sentido preguntarnos si una noción de forcing $\mathbb{P} \in M$ añade reales dominantes, esto es, si para cada filtro $(M, \mathbb{P})$-genérico G, existe una función $g \in M[G] \cap {}^\omega\omega$ tal que g es dominante en $M \cap {}^\omega\omega$.

Teorema 4.18. *El álgebra de categoría no añade reales dominantes.*

Para poder probar el teorema no trabajaremos directamente con las extensiones de $\mathbb{C}$, pero sí en algo equivalente. Para explicar esto echaremos mano de las siguientes definiciones y un teorema que no sólo nos ayudará para este resultado.

Definición 4.19. *Dados dos preórdenes P y Q y una función $e : P \to Q$, diremos que la función e es un encaje si para todo par de elementos $x, y \in P$ se cumple que*

1. *la condición $x \leq y$ implica que $e(x) \leq e(y)$ y*
2. *si $x \perp y$, entonces $e(x) \perp e(y)$.*

Además, e es un encaje completo si para toda anticadena maximal A en P, se tiene que $e[A]$ es anticadena maximal en Q. Por último, e es un encaje denso si la imagen de e es un conjunto denso en Q.

Observemos que podemos pensar a $({}^{<\omega}2, \supseteq)$ como noción de forcing cuyo elemento máximo es la función vacía. Así, la función e definida en la proposición 2.14 es un encaje denso. La demostración de que e es un encaje es un corolario inmediato del primer inciso de la proposición, mientras que la densidad se sigue del segundo.

Proposición 4.20. *Sean P y Q dos preórdenes y además $e : P \to Q$ un encaje. El encaje e es completo si y sólo si para todo $q \in Q$, existe $p \in P$ tal que si $r \leq p$, entonces $e(r) \mid q$.*

Demostración. Para la implicación directa procederemos por contrapuesta. Así, supongamos que existe un $q \in Q$, tal que para todo $p \in P$ hay algún $r \leq p$ de suerte que $e(r) \perp q$. Por esto, $D = \{r \in P : e(r) \perp q\}$, es un conjunto denso en P. Ahora, sea A una anticadena maximal en D. Probemos que A es una anticadena maximal en P. Si $p \in P$, hay un $d \in D$ tal que $d \leq p$, por la densidad de D. Por la proposición 1.27, hay $a \in A$ tal que $d \mid a$. Sea t testigo de dicha compatibilidad, como $d \leq p$, tenemos que $t \leq p, a$. Así, hemos probado que todo elemento de P es compatible con algún elemento de A, lo que implica que A es maximal en P. Luego, como e preserva incompatibilidad, $e[A]$ es una anticadena en Q. Notemos que $q \notin e[A]$, pues de lo contrario, $q \in e[D]$ y por tanto $q \perp q$. Además, para todo $r \in A$, $e(r) \perp q$, por lo que $e[A] \cup \{q\}$ es una anticadena que contiene propiamente a $e[A]$. Así, e no es un encaje completo.

Resta probar la implicación recíproca, y para esto procederemos por contradicción. Sea $A \subseteq P$ una anticadena maximal cuya imagen bajo e no es una anticadena maximal en Q. Así, hay un $q \in Q \setminus e[A]$ tal que $e[A] \cup \{q\}$ es una anticadena. Por hipótesis, para este q hay un $p \in P$ tal que si $r \leq p$, entonces $e(r) \mid q$. Como A es una anticadena maximal en P, por la proposición 1.27 existe un $a \in A$ tal que $p \mid a$. Sea $r \leq p, a$, entonces $e(r) \mid q$ y además, $e(r) \leq e(a)$, pues e preserva el orden. Sea $s \leq e(r), q$, por lo anterior tenemos que $s \leq e(a), q$, lo que contradice que $e[A] \cup \{q\}$ sea una anticadena. ∎

Gracias a esta proposición nos será fácil demostrar el siguiente lema.

Lema 4.21. *Sean* $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$ *dos nociones de forcing y* $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$*. Son equivalentes:*

1. *e es un encaje completo.*

2. *Para todo filtro $(M, \mathbb{Q})$-genérico H, se tiene que $e^{-1}[H]$ es un filtro $(M, \mathbb{P})$-genérico y $M[e^{-1}[H]] \subseteq M[H]$.*

Demostración. Probemos que (1) implica (2). Sea H un filtro $(M, \mathbb{Q})$-genérico, definimos $G = e^{-1}[H]$, por la proposición 4.4 basta ver que G satisface los 3 incisos de la misma.

Sean $p, q \in G$, entonces $e(p), e(q) \in H$. Como H es un filtro, tenemos que $e(p) \mid e(q)$ y, como e es un encaje, preserva incompatibilidad, o equivalentemente, $e(p) \mid e(q)$ implica $p \mid q$. De lo último tenemos que hay $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$. Por lo tanto, se satisface el primer inciso.

Sea $p \in G$ y $q \in \mathbb{P}$ tal que $p \leq q$. Como e preserva el orden, $e(p) \leq e(q)$ y $e(p) \in H$, al ser H un filtro, tenemos que $e(q) \in H$. Así, $q \in G$ y G satisface el segundo inciso.

Sea $D \in M$ un subconjunto denso en $\mathbb{P}$, en busca de una contradicción supongamos que $D \cap G = \emptyset$. Notemos que $e[D] \cap H = \emptyset$, pues si $q \in e[D] \cap H$, hay $p \in D$ tal que $q = e(p)$, y entonces $p \in G \cap D$. Así, $H \cap e[D] = \emptyset$ y H es un filtro, por la proposición 4.6, tenemos que existe $q \in H$ tal que para todo $r \in e[D]$ ocurre que $r \perp q$, entonces para todo $r' \in D$, $e(r') \perp q$. Luego, como estamos suponiendo que e es completo, usando la proposición anterior para q, hay un $p \in \mathbb{P}$ tal que para cada $s \leq p$, pasa que $e(s) \mid q$. Como D es denso en $\mathbb{P}$, hay $s \leq p$ tal que $s \in D$, pero eso implica que $e(s) \perp q$, por cómo se eligió a q, contradiciendo que $e(s) \mid q$. Por este absurdo concluimos que no es posible que $D \cap G = \emptyset$.

Ahora comprobemos la implicación recíproca, de nuevo, buscando un absurdo. En virtud de la proposición 4.20, vamos a suponer que existe un $q \in \mathbb{Q}$ tal que toda $p \in \mathbb{P}$ si $r \leq p$, entonces $e(r) \perp q$. Por el lema 4.5, sabemos de la existencia de un filtro $(M, \mathbb{Q})$-genérico H que contiene a q. Definimos $D = \{p \in \mathbb{P} : e(p) \perp q\}$.

Afirmamos que D es denso en $\mathbb{P}$, debido a nuestra suposición. Además, como $\mathbb{P}, e, q \in M$, concluimos que $D \in M$. A pesar de todo esto, tenemos que $D \cap e^{-1}[H] = \emptyset$, pues si $p \in D$, entonces $e(p) \perp q$, al ser q elemento de H, y ser H un filtro, colegimos que $e(p) \notin H$, o en otras palabras $p \notin e^{-1}[H]$. Por este argumento, H no es $(M, \mathbb{P})$-genérico, lo cual es el absurdo buscado.

Verifiquemos ahora la contención entre extensiones genéricas. Como $e \in M \subseteq M[H]$ y $H \in M[H]$, tenemos que $e^{-1}[H] \in M[H]$. Por el lema 4.13, tenemos que $M[e^{-1}[H]] \subseteq M[H]$.

■

Teorema 4.22. *Todo encaje denso es un encaje completo.*

Demostración. Sean $e : P \to Q$ un encaje denso y $q \in Q$. Por la densidad de $e[P]$, sabemos que hay un $p \in P$ tal que $e(p) \leq q$. Si $r \leq p$, $e(r) \leq e(p)$, y a su vez, $e(r) \leq q$. Así, $e(r) \mid q$, cumpliendo así la equivalencia dada en la proposición 4.20. Por lo tanto, e es un encaje completo. ■

Si P y Q son dos preórdenes y $e : P \to Q$ es una función, para cada $X \subseteq P$ definimos

$$\tilde{e}(X) = \{q \in Q : \exists p \in X e(p) \leq q\}.$$

Teorema 4.23. *Sea $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ un encaje denso entre dos nociones de forcing. Supongamos que $e, \mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$.*

1. *Si G es un filtro $(M, \mathbb{P})$-genérico, entonces $\tilde{e}(G)$ es un filtro $(M, \mathbb{Q})$-genérico y $G = e^{-1}[\tilde{e}(G)]$. En este caso, $M[G] = M[\tilde{e}(G)]$.*

2. *Si $H \subseteq \mathbb{Q}$ es un filtro $(M, \mathbb{Q})$-genérico, entonces $e^{-1}[H]$ es un filtro $(M, \mathbb{P})$-genérico y $H = \tilde{e}(e^{-1}[H])$. En este caso $M[H] = M[e^{-1}[H]]$.*

Demostración. Para probar el inciso (1), comencemos por ver que $\tilde{e}(G)$ es un filtro. Sean $q_1, q_2 \in \tilde{e}(G)$, entonces hay $p_1, p_2 \in G$ tales que $e(p_1) \leq q_1$ y $e(p_2) \leq q_2$. Como G es un filtro, hay $r \in G$ tal que extiende a p_1 y p_2, y como e preserva el orden, se tiene que $e(r) \leq q_1, q_2$. Así, $e(r) \in \tilde{e}(G)$.

Si ahora $q_1 \in \tilde{e}(G)$ y $q_1 \leq q_2$, por definición hay $p_1 \in G$ tal que $e(p_1) \leq q_1$. Por ende, $e(p_1) \leq q_2$ y $q_2 \in \tilde{e}(G)$.

Por último, supongamos que $D \in M$ es un conjunto denso en $\mathbb{Q}$. Ahora definimos $E = \{p \in \mathbb{P} : \exists q \in D(e(p) \leq q)\}$ que resulta ser un conjunto denso en $\mathbb{P}$. Procedamos a la prueba de esta afirmación: sea $p \in \mathbb{P}$, al ser D denso en $\mathbb{Q}$, hay $q \in D$ tal que $q \leq e(p)$, luego, al ser $e[\mathbb{P}]$ también un conjunto denso, hay un $r \in \mathbb{P}$ con la característica de que $e(r) \leq q$. De esta manera, $e(r) \leq e(p)$, en particular $e(r) \mid e(p)$, de donde obtenemos que $p \mid r$ y fijamos a s como un testigo de dicha compatibilidad. Como e preserva el orden, tenemos que $e(s) \leq e(r) \leq q \in D$. Por tanto, $s \in E$ y dado que $s \leq p$, concluimos que E es denso.

Como $D, e, \mathbb{P} \in M$, $E \in M$, luego, hay $p \in E \cap G$, para el cual existe un $q \in D$ tal que $e(p) \leq q$, pero éstas son las condiciones para que $q \in \tilde{e}(G)$. Por lo tanto, gracias a la proposición 4.4, tenemos que $\tilde{e}(G)$ es un filtro $(M, \mathbb{P})$-genérico.

Ahora verifiquemos que $G = e^{-1}[\tilde{e}(G)]$. Por el lema 4.21, como e es un encaje completo por ser denso, tenemos que $e^{-1}[\tilde{e}(G)]$ es un filtro $(M, \mathbb{P})$-genérico. Además, se sabe que $e[G] \subseteq \tilde{e}(G)$, entonces $G \subseteq e^{-1}[\tilde{e}(G)]$. En resumen, $G \subseteq e^{-1}[\tilde{e}(G)]$ y $e^{-1}[\tilde{e}(G)]$ es un filtro $(M, \mathbb{P})$-genérico. Gracias al lema 4.7, obtenemos la igualdad buscada.

Para finalizar el primer inciso, veamos que las extensiones genéricas obtenidas por los filtros G y $\tilde{e}(G)$ son la misma. Primero invocamos nuevamente el lema 4.21, para obtener que $M[G] \subseteq M[\tilde{e}(G)]$. Después, como $e, \mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M \subseteq M[G]$, podemos definir a $\tilde{e}(G)$ en $M[G]$. Por el lema 4.13 tenemos que $M[\tilde{e}(G)] = M[G]$.

Ahora demos la prueba del segundo inciso de este teorema. Nuevamente, usando el lema 4.21 tenemos que $e^{-1}[H]$ es un filtro $(M, \mathbb{P})$-genérico.

Por el primer inciso de este teorema, tenemos que $\tilde{e}(e^{-1}[H])$ es un filtro $(M, \mathbb{Q})$-genérico. Afirmamos que $\tilde{e}(e^{-1}[H]) \subseteq H$: sea $q \in \tilde{e}(e^{-1}[H])$, por definición, hay un $p \in e^{-1}[H]$ tal que $e(p) \leq q$, pero $e(p) \in H$ por la elección de p, luego, como H es un filtro ocurre que $q \in H$. Usando nuevamente el lema 4.7, tenemos que $\tilde{e}(e^{-1}[H]) = H$.

Lo último que nos queda por mostrar es que las extensiones generadas por H y $e^{-1}[H]$ son iguales, y esto lo haremos con la misma técnica que usamos para el primer inciso. Por el lema 4.21, llegamos a que $M[e^{-1}[H]] \subseteq M[H]$. Para ver que H es definible en $M[e^{-1}[H]]$, observemos que $\tilde{e}(e^{-1}[H])$ lo es y luego, por el párrafo anterior, tendremos a H en $M[e^{-1}[H]]$. Como $e^{-1}[H] \in M[e^{-1}[H]]$, $e, \mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$ y$M \subseteq M[e^{-1}[H]]$, $H \in M[e^{-1}[H]]$. Finalmente, por el lema 4.13, tenemos que $M[e^{-1}[H]] = M[H]$. ∎

La idea con la que nos quedamos a partir de este resultado es que si una noción de forcing se encaja de manera densa en otra, para cada extensión genérica en la primera existe una extensión equivalente en la segunda y viceversa.

Ahora sí estamos en condiciones óptimas para dar la prueba del teorema 4.18 que afirma que el álgebra de categoría no añade reales dominantes.

Demostración. Gracias al teorema 4.23, toda extensión genérica de $\mathbb{C}$ se puede obtener como una generada por ${}^{<\omega}2$; por esto último, es suficiente ver que ${}^{<\omega}2$ no añade reales dominantes.

Así, sea $\dot{f}$ un ${}^{<\omega}2$-nombre y $p \in^{<\omega} 2$ de tal suerte que $p \Vdash \dot{f} : \omega \to \omega$, esto es, que p fuerza a $\dot{f}$ a ser una función de ω en ω.

Denotemos, para cada $r \in^{<\omega} 2$, por $r^{\downarrow}$ a la colección $\{t \in^{<\omega} 2 : t \supseteq r\}$, y sea $\{p_i : i \in \omega\}$ una enumeración sin repeticiones de $p^{\downarrow}$. Así, para cada $n \in \omega$, empleando la proposición 4.15, como $p_n \supseteq p$, se tiene que $p_n \Vdash \dot{f} : \omega \to \omega$; en particular, $p_n \Vdash \exists x(x \in \omega \wedge \dot{f}(\check{n}) = x)$. Luego, por el lema 4.17, para cada $n \in \omega$, hay $q_n \in^{<\omega} 2$ y $k_n \in \omega$ de modo que $q_n \supseteq p_n$ y $q_n \Vdash \dot{f}(\check{n}) = \check{k}_n$.

Ahora trabajemos en M. Definimos $g : \omega \to \omega$ con la regla que envía a cada $n \in \omega$ a $k_n + 1$. En virtud del Teorema 4.16, basta con ver que $p \Vdash \check{g} \not\leq^* \dot{f}$.

Buscando una contradicción, supondremos que $p \not\Vdash \check{g} \not\leq^* \dot{f}$. Eso quiere decir que hay una extensión de p, digamos p_i tal que $p_i \Vdash \check{g} \leq^* \dot{f}$, equivalentemente, $p_i \Vdash \exists x[x \in \omega \wedge \forall y \in \omega \setminus x(\check{g}(y) \leq \dot{f}(y))]$. Una vez más, por el lema 4.17, hay $l \in \omega$ y $t \in^{<\omega} 2$ tales que $t \supseteq p_i$ y $t \Vdash \forall n > l\check{g}(n) \leq \dot{f}(n)$.

Notemos ahora que $t^{\downarrow}$ es un subconjunto infinito de $p^{\downarrow}$, por lo que hay un $m \in \omega \setminus l$ de manera que $p_m \supseteq t$. De aquí, por la elección de q_m y k_m, tenemos que $q_m \supseteq t$ y $q_m \Vdash \dot{f}(\check{m}) = \check{k}_n$. Como hicimos $g(m) = k_m + 1$, tenemos que $q_m \Vdash \dot{f}(m) < \check{g}(m)$. Por otro lado, a partir de que $q_m \supseteq t$ y $m > l$, inferimos que $q_m \Vdash \check{g}(\check{m}) \leq \dot{f}(\check{m})$, obteniendo así una contradicción. ■

Regresemos brevemente a hablar de órdenes y preórdenes.

Definición 4.24. *Si $(X, \ll)$ es un preorden, decimos que X es no atómico si para todo $x \in X$, hay $a, b \in X$ tales que $a \ll x$, $b \ll x$ y $a \perp b$.*

Además, haremos $x^{\downarrow} = \{y \in X : y \leq x\}$.

Lema 4.25. *Sea P un conjunto preordenado no atómico. Si $p, q \in P$ son compatibles, entonces existe $A \subseteq P$ tal que:*

1. *A es una anticadena infinita;*

2. para todo $r \in P$, si $r \leq p$, entonces hay $a \in A$ tal que $a \mid r$;

3. existe $a_0 \in A$ el cual es menor que q; y

4. $A \subseteq p^{\downarrow}$.

Demostración. Sea $t \in P$ testigo de la compatibilidad entre p y q. Afirmamos que existen $\{r_i \in P : i < \omega\}$ y $\{s_i \in P : i < \omega\}$ que satisfacen lo siguiente.

(a) $\{r_i : i < \omega\}$ es una sucesión decreciente en P.

(b) Para cada $i < \omega$, ocurre que $s_{i+1} \leq r_i$.

(c) Para cada $i < \omega$, tenemos que $r_i \perp s_i$.

Naturalmente vamos a construirlas por recursión: como P es no atómico, hay r_0 y s_0 tales que $t \geq r_0, s_0$ y $r_0 \perp s_0$. Ahora supongamos que para algún $n < \omega$ ya tenemos a s_n y r_n cumpliendo los incisos. De nuevo, como P es no atómico, existen r_{n+1} y s_{n+1} con la virtud de que $r_n \geq r_{n+1}, s_{n+1}$ y $r_{n+1} \perp s_{n+1}$.

Comprobemos que estas sucesiones son las buscadas. Por construcción $\{r_i : i \in \omega\}$ satisface (a). Sea $i < \omega$, tanto r_{i+1} como s_{i+1} son extensiones de r_i, en particular $s_{i+1} \leq r_i$, como solicita (b). Por último (c) se cumple trivialmente por la construcción.

Hagamos $B = \{s_i \in P : i \in \omega\}$, afirmamos que B es una anticadena infinita: sea $n < m$ y mostremos que $s_n \perp s_m$. En busca de un absurdo, supongamos que $s_n \mid s_m$, luego, hay un s testigo de dicha compatibilidad. Por construcción, $s_m \leq r_{m-1} \leq r_n$. Así, $s \leq s_n, r_n$, pero eso contradice que $r_n \perp s_n$. Además, como para cada $n, m < \omega$, si son diferentes, tenemos que $s_n \perp s_m$, concluimos que en particular $s_n \neq s_m$. Por lo tanto, B es infinito.

También tenemos que $B \subseteq t^{\downarrow} \subseteq p^{\downarrow}$. Gracias a la proposición 1.28, B se extiende a una anticadena maximal en $p^{\downarrow}$, llamémosla A y corroboremos que es la deseada.

Ya tenemos los incisos (1) y (4) de este lema, veamos el inciso (2). Sea $r \in P$ que extiende a p, como A es una anticadena maximal en $p^{\downarrow}$ y $r \in p^{\downarrow}$, por la proposición 1.27, hemos acabado. Para el inciso (3), basta notar que $s_0 \in B \subseteq A$ y por, cómo se construyó, es menor que q. ■

Para las siguientes dos pruebas vamos a considerar a $\mathbb{P}$ como una noción de forcing numerable y tomaremos a $\{p_n : n \leq \omega\}$ una enumeración sin repeticiones de $\mathbb{P}$ y p_0 el máximo de $\mathbb{P}$.

Lema 4.26. *Existe una sucesión $\{A_n : n \in \omega\}$ de anticadenas en $\mathbb{P}$ tal que para cada $n \in \omega$:*

1. *A_n es una anticadena maximal infinita en $\mathbb{P}$;*
2. *existe un $a \in A_n$ tal que $a \leq p_n$;*
3. *para todo $x \in A_n$, $| \{y \in A_{n+1} : y \leq x\} |= \omega$; y*
4. *para cada $y \in A_{n+1}$, existe $x \in A_n$ tal que $y \leq x$.*

Demostración. Consideremos a p_0, aplicando el lema 4.25 tomando a $p = p_0 = q$, hay una anticadena A_0 que es maximal en $p_0^{\downarrow} = \mathbb{P}$, como p_0 es el máximo de $\mathbb{P}$ se cumple (2).

Supongamos que para algún $n \in \omega$ ya existe $\{A_i : i \leq n\}$ sucesión que satisface (1), (2), (3), y (4). Como A_n es una anticadena maximal, por la proposición 1.27 para p_{n+1}, hay un $a_n \in A_n$ tal que $a_n \mid p_{n+1}$; aplicando el lema 4.25 con $p = a_n$ y $q = p_{n+1}$, hay una anticadena $A_n(a_n)$ que satisface los incisos del lema 4.25.

También para cada $x \in A_n \setminus \{a_n\}$, podemos aplicar el lema 4.25 considerando $p = x = q$ y obtener una anticadena $A_n(x)$ que cumple las condiciones del mismo lema. Definimos $A_{n+1} = \bigcup\{A_n(x) : x \in A_n\}$ y probaremos que satisface los incisos de esta proposición.

(1): Ya tenemos que A_{n+1} es infinita, veamos que es anticadena. Sean $y, z \in A_{n+1}$ tales que $z \mid y$, por pertenecer a A_{n+1} hay $x, x' \in A_n$ las cuales cumplen que $y \in A_n(x)$ y $z \in A_n(x')$. Como $z \mid y$, hay $w \in A_{n+1}$ tal que $w \leq y, z$. Por la construcción de $A_n(x)$ y $A_n(x')$ respectivamente, sabemos que $y \leq x$ y $z \leq x'$, por ende $w \leq x, x'$, lo que quiere decir que $x \mid x'$. Al ser A_n una anticadena, ocurre que $x = x'$. Luego, $y, z \in A_n(x) = A_n(x')$, como $A_n(x)$ es anticadena, entonces $z = y$, probando así que A_{n+1} también lo es.

Para mostrar que A_{n+1} es anticadena maximal en $\mathbb{P}$ nos apoyaremos en la proposición 1.27. Sea $r \in \mathbb{P}$, como A_n es anticadena maximal en $\mathbb{P}$, hay $x \in A_{n+1}$ tal que $r \mid x$, sea r' testigo de dicha compatibilidad. Como $A_n(x)$ satisface la segunda condición del lema 4.25 haciendo $p = x$, hay $a \in A_n(x) \subseteq A_{n+1}$ tal que $a \mid r'$. Tomemos $a' \leq a, r'$ y recordemos que $r' \leq r$, por lo tanto, $a \mid r$.

(2): Al $A_n(a_n)$ satisfacer el tercer inciso del lema 4.25, hay $a \in A_n(a_n) \subseteq A_{n+1}$ tal que $a \leq q = p_{n+1}$.

(3): Sea $x \in A_n$, de nuevo, gracias a que $A_n(x)$ fue obtenido según el lema 4.25, se tiene en particular que satisface el primer inciso, en esencia $\mid A_n(x) \mid = \omega$. De aquí $\mid \{y \in A_{n+1} : y \leq x\} \mid \geq \omega$. Ahora, como $A_{n+1} \subseteq \mathbb{P}$, $\mid A_{n+1} \mid = \omega$.

(4): Por definición, si $y \in A_{n+1}$, hay $x \in A_n$ tal que $y \in A_n(x)$ y, por cómo se construyó $A_n(x)$, $y \leq x$. ■

Vamos a considerar $\{A_n : n \in \omega\}$ la sucesión de anticadenas obtenidas en el lema anterior para $\mathbb{P}$. Para el siguiente resultado hagamos $\mathbb{Q} = ({}^{<\omega}\omega, \supseteq)$

y $\mathbb{Q}_n = ({}^{n+1}\omega, \supseteq)$.

Lema 4.27. *Existe* $\{e_i : i \in \omega\}$ *tal que para todo* $i < \omega$*:*

1. $e_i : \mathbb{Q}_i \to A_i$*, donde* e_i *es una función biyectiva;*

2. *si* $p \in \mathbb{Q}_{n+1}$ *y* $r \in \mathbb{Q}_i$ *con* $i \leq n$ *y* $p \leq r$*, entonces* $e_{n+1}(p) \leq e_i(r)$*; y*

3. *si* $p \in \mathbb{Q}_{n+1}$ *y* $r \in \mathbb{Q}_i$ *con* $i \leq n$*, son tales que* $p \perp r$*, entonces* $e_{n+1}(p) \perp e_i(r)$*.*

Demostración. Usemos un argumento recursivo para esto: $\mathbb{Q}_0 = \{0\} \times \omega$, por lo tanto $\mid \mathbb{Q}_0 \mid = \mid A_0 \mid = \omega$.

Supongamos que hay una $n \in \omega$ de modo que $\{e_i : i \leq n\}$ es una sucesión que cumple (1), (2) y (3). Para cada $p \in \mathbb{Q}_n$, definimos $\mathbb{Q}_n(p) = \{q \in \mathbb{Q}_{n+1} : q \leq p\}$.

Hagamos las siguientes observaciones:

(i) Para toda $p \in \mathbb{Q}_n$, $\mid \mathbb{Q}_n(p) \mid = \omega$.

Sólo notemos que $\mathbb{Q}_n(p) = \{p \cup \{(n+1, i)\} : i < \omega\}$.

(ii) Si $p, q \in \mathbb{Q}_n$ y $p \neq q$, entonces $\mathbb{Q}_n(p) \cap \mathbb{Q}_n(q) = \emptyset$.

Si $r \in \mathbb{Q}_n(p) \cap \mathbb{Q}_n(q)$, $r \leq p, q$ y r es función, por lo que $p \mid q$. Como además tienen el mismo dominio, ocurre que $p = q$.

(iii) Para cada $x \in A_n$ definimos $A_n(x) = \{r \in A_{n+1} : r \leq x\}$ (resulta ser igual al conjunto con mismo nombre usado en la prueba del lema 4.26). Por el inciso tercero del mismo lema, resulta que $\mid A_n(x) \mid = \omega$, y por el cuarto, $A_{n+1} = \bigcup \{A_n(x) : x \in A_n\}$.

(iv) Se tiene que $A_n(x) \cap A_n(y) = \emptyset$, siempre que $x \neq y$.

Si $z \in A_n(x) \cap A_n(y)$, se tiene que $x \mid y$ y $x, y \in A_n$ y, como A_n es anticadena, $x = y$.

Ahora, para cada $p \in \mathbb{Q}_n$ fijemos $e_n^p : \mathbb{Q}_n(p) \to A_n(e_n(p))$ una biyección. Notemos que gracias a (iii) y a que e_n es una biyección ocurre que $\{A_n(e_n(p)) : p \in \mathbb{Q}_n\}$ es una partición de A_{n+1}. Además, trivialmente tenemos que si $p \in \mathbb{Q}_n(r)$, entonces $e_n^r(p) \in A_n(e_n(r))$.

Definimos a $e_{n+1} = \bigcup\{e_n^p : p \in \mathbb{Q}_n\}$. Verifiquemos que cumple con lo prometido:

(1) Notemos que e_{n+1} es una función, pues por (ii) $dom(e_{n+1}) = \bigcup\{\mathbb{Q}_n(p) : p \in \mathbb{Q}_n\}$ es una unión ajena por pares. Además, su dominio es $\mathbb{Q}_{n+1}$, en efecto, cada $\mathbb{Q}_n(p) \subseteq \mathbb{Q}_{n+1}$ con $p \in \mathbb{Q}_n$, por tanto la unión de todos ellos también está contenida en $\mathbb{Q}_{n+1}$; para la contención recíproca, si $p \in \mathbb{Q}_{n+1}$, entonces $p \restriction n+1$ es una función en $\mathbb{Q}_n$, y por eso $p \in \mathbb{Q}_n(p \restriction n+1) \subseteq dom(e_{n+1})$.

Veamos que es inyectiva: sean $p_1, p_2 \in \mathbb{Q}_{n+1}$ distintos, a partir de aquí hay dos posibles casos, el más sencillo es cuando difieren en la última entrada, aquí notamos que hay un $q \in \mathbb{Q}_n$ tal que $p_1, p_2 \in \mathbb{Q}_n(q)$, recordando que e_n^q es una biyección, tenemos que $e_n^q(p_1) \neq e_n^q(p_2)$. Si en cambio, difieren en una de las primeras $n+1$ parejas ordenadas, hay $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}_n$ distintas tales que $p_1 \in \mathbb{Q}_n(q_1)$ y $p_2 \in \mathbb{Q}_n(q_2)$, entonces $e_n^{q_1}(p_1) \in A_n(e_n(q_1))$ y $e_n^{q_2}(p_2) \in A_n(e_n(q_2))$, como e_n es inyectiva $e_n(q_1) \neq e_n(q_2)$, luego, por (iv) se sigue que $e_n^{q_1}(p_1)$ no puede ser igual a $e_n^{q_2}(p_2)$.

Ahora corroboremos la suprayectividad, sea $z \in A_{n+1}$, como $A_{n+1} = \bigcup\{A_n(e_n(p)) : p \in \mathbb{Q}_n\}$, hay $p \in \mathbb{Q}_n$ tal que $z \in A_n(e_n(p))$, como e_n^p es una biyección, existe $q \in \mathbb{Q}_n(p)$ tal que $e_{n+1}(q) = e_n^p(q) = z$.

(2) Sean $p \in \mathbb{Q}_{n+1}$, $i \leq n$ y $r \in \mathbb{Q}_i$ con $p \leq r$, por hipótesis e_n satisface el inciso (2). Notemos que $p \restriction n+1 \in \mathbb{Q}_n$. Si $i < n$, tenemos que $e_n(p \restriction n+1) \leq e_i(r)$, después observemos que $e_n(p \restriction n+1) \in A_n$, entonces $e_{n+1}(p) \in A_n(e_n(p \restriction n+1))$, por cómo se definió este último conjunto, obtenemos que $e_{n+1}(p) \leq e_n(p \restriction n+1)$, y por tanto, $e_{n+1}(p) \leq e_i(r)$.

Si $i = n$, podemos deducir que $p \in \mathbb{Q}_n(r)$, entonces $e_{n+1}(p) \in A_n(e_n(r))$, de nuevo, esto nos permite concluir que $e_{n+1}(p) \leq e_n(r)$.

(3) De nuevo, tomemos p, r, i como en el inciso anterior pero a diferencia de éste, supongamos que $p \perp r$, entonces hay $k \in \omega$ tal que $p(k) \neq r(k)$. Notemos que como $i \leq n < n+1$, $k < i$, de aquí colegimos que $p \restriction n+1 \perp r$ y, como e_n cumple el inciso (3), $e_n(p \restriction n+1) \perp e_i(r)$ siempre que $i < n$. Aplicando el inciso (2) a e_{n+1}, $e_{n+1}(p) \leq e_n(p \restriction n+1)$, en particular, $e_{n+1}(p) \mid e_n(p \restriction n+1)$, por lo tanto, $e_{n+1}(p) \perp e_i(r)$.

Cuando $i = n$ procedemos del siguiente modo. Tal como vimos en el inciso (2), $e_{n+1}(p) \leq e_n(p \restriction n+1)$. Como $p \restriction n+1 \perp r$, en particular $p \restriction n+1 \neq r$, como e_n es biyección, $e_n(p \restriction n+1) \neq e_n(r)$, más aún, $e_n(p \restriction n+1) \perp e_n(r)$, pues A_{n+1} es una anticadena. Finalmente, si $e_{n+1}(p) \mid e_n(r)$, entonces $e_n(p \restriction n+1) \mid e_n(r)$, lo cual sería una contradicción. Por lo tanto, $e_{n+1}(p) \perp e_n(r)$. ■

Después de 3 horrorosos lemas:

Teorema 4.28. *Si $\mathbb{P}$ es una noción de forcing no atómica, entonces hay un encaje denso entre $({}^{<\omega}\omega, \supseteq)$ y $\mathbb{P}$.*

Demostración. Rápidamente podemos comprobar que $({}^{<\omega}\omega, \supseteq)$ es una noción de forcing. Consideremos la sucesión $\{e_i : i < \omega\}$ que asegura el lema 4.27 que existe.

Definimos $e = (\bigcup_{i\in\omega} e_i) \cup \{(\emptyset, 1_{\mathbb{P}})\}$.

Notemos que $dom(e) = \bigcup_{i\in\omega} dom(e_i) \cup \{\emptyset\} = \bigcup_{i\in\omega} \mathbb{Q}_i \cup \{\emptyset\} =^{<\omega} \omega$. Además $img(e) = \bigcup_{i\in\omega} img(e_i) \cup \{1_{\mathbb{P}}\} = \bigcup_{i\in\omega} A_i \cup \{1_{\mathbb{P}}\} \subseteq \mathbb{P}$.

Primero veamos que es una función, esto pues si $m < n$, $\mathbb{Q}_n$ y $\mathbb{Q}_m$ son ajenos, ya que los dominios de las funciones en esos conjuntos son $n+1$ y $m+1$ respectivamente.

Afirmamos que $e :^{<\omega} \omega \to \mathbb{P}$ es un encaje denso.

Veamos que $img(e)$ es denso en $\mathbb{P}$. Recordemos que teníamos una enumeración para los elementos de $\mathbb{P}$. Fijemos $k \in \omega$, por el segundo inciso del lema 4.26, para p_k hay $a \in A_k \subseteq img(e)$ tal que $a \leq p_k$.

Ahora probemos que es inyectiva la función en cuestión, lo cual es cosa fácil recordando que $\{A_n : n \in \omega\} \cup \{1_{\mathbb{P}}\}$ es una partición de la imagen de e y cada e_n es una biyección entre $\mathbb{Q}_n$ y A_n.

Continuemos mostrando que e preserva el orden; sean $p, q \in^{<\omega} \omega$ con $p \leq q$ y veamos los casos posibles. Si $q = \emptyset$, entonces $e(p) \leq e(q) = 1_{\mathbb{P}}$, si $p = q$, entonces $e(p) = e(q)$. Por último, si $p < q < \emptyset$, sabemos que hay $i < m < \omega$ tales que $dom(p) = m + 1$ y $dom(q) = i + 1$, haciendo $n = m - 1$ tenemos las hipótesis exactas del lema 4.27 (2), por lo cual $e(p) = e_m(p) \leq e_i(q) = e(q)$.

Por último, explicaremos por qué e preserva incompatibilidad. Sean p y q en $^{<\omega}\omega$ incompatibles, ni p ni q pueden ser el vacío, pues éste es compatible con todas las funciones, apelando a esto, hay $i, m \in \omega \setminus 1$ tales que $p \in \mathbb{Q}_m$ y $q \in \mathbb{Q}_i$. Si $i = m$, $e(p), e(q) \in A_m$, como A_m es anticadena, e_m una biyección y $p \neq q$, concluimos que $e(p) \perp e(q)$. Si no ocurre que $i = m$, podemos suponer sin perder la generalidad que $i \leq m$, con un argumento similar al párrafo anterior, por el último inciso del lema 4.27 tenemos que $e(p) \perp e(q)$. ■

Regresemos ahora a las álgebras de medida y categoría. Resulta que estos órdenes parciales están relacionados en varios sentidos, pero nos enfocaremos solamente en la dualidad que se produce al trabajar con las extensiones generadas a partir de $\mathbb{C}$ y $\mathbb{M}$.

Denotemos por $\mathscr{U}$ a la colección de todos los intervalos abiertos, acotados y no vacíos de $\mathbb{R}$ que tienen como extremos números racionales en M.

La siguiente construcción será hecha en M, por lo que a pesar de omitir las relativizaciones en los enunciados, consideraremos todas las restricciones que implica trabajar en el modelo base.

Para cada $n \in \omega$, definimos a $\mathbb{P}_n$ de manera que, $p \in \mathbb{P}_n$ si y sólo si hay un $\mathscr{V} \in [\mathscr{U}]^{<\omega}$ tal que $p = \bigcup \mathscr{V}$ y $\mu(p) < 2^{-n}$, recordando que μ es la medida de Lebesgue.

Proposición 4.29. *Para todo $n \in \omega$, $(\mathbb{P}_n, \supseteq, \emptyset)$ es una noción de forcing donde para cualesquiera elementos p, q, si $\mu(p \cup q) \geq 2^{-n}$, entonces p y q son incompatibles.*

Demostración. Como la contención siempre induce un orden parcial, tenemos que $\mathbb{P}_n$ es una noción de forcing. Ahora, sea $n \in \omega$ y sean $p, q \in \mathbb{P}_n$, y supongamos que son compatibles. Entonces debemos probar que su unión tiene medida menor que 2^{-n}. Esto es tarea fácil pues resulta que para toda extensión común de p y q, digamos r, se tiene que $p \cup q \subseteq r$ y $\mu(r) < 2^{-n}$. Así, por la monotonía de la medida de Lebesgue, hemos terminado. ■

Notemos que como ω es una noción absoluta en cualquier modelo de la teoría de conjuntos, entonces el conjunto de números racionales, $\mathbb{Q}$, también es una noción absoluta.

Lema 4.30. *Si H es un filtro $(M, \mathbb{P}_n)$-genérico, entonces, en $M[H]$, la medida exterior de $\mathbb{R} \cap M$ es menor o igual que 2^{-n}.*

Demostración. Los siguientes argumentos serán planteados en M: para cada $t \in \mathbb{R}$, definimos $D_t = \{q \in \mathbb{P}_n : t \in q\}$ y afirmamos que D_t es un conjunto denso. Así, sea $p \in \mathbb{P}_n \setminus D_t$. Por definición, existe $\mathscr{V} \in [\mathscr{U}]^{<\omega}$ de manera tal que $p = \bigcup \mathscr{V}$ y $\mu(p) < 2^{-n}$. Hagamos $\delta = \frac{1}{4}(2^{-n} - \mu(p))$. Como $\delta > 0$, existen $a, b \in \mathbb{Q}$ tales que $t - \delta < a < t < b < t + \delta$. Si definimos $\mathscr{W} = \{(a, b)\} \cup \mathscr{V}$ y hacemos $q = \bigcup \mathscr{W}$, resulta que $q \in \mathbb{P}_n$ puesto que $\mathscr{W} \in [\mathscr{U}]^{<\omega}$ y

$$\mu(q) \leq (b - a) + \mu(p) < 2\delta + \mu(p) = \frac{1}{2}(2^{-n} + \mu(p)) < 2^{-n}.$$

Notemos que $t \in q$, así $q \in D_t$, y $q \leq p$, por lo que D_t es denso.

Así como podemos considerar en M a $\mathscr{U}$, podemos relativizar el mismo conjunto en $M[H]$, sin embargo, si $a, b \in \mathbb{Q}$ son tales que $a < b$, en principio $(a, b)^M$ y $(a, b)^{M[H]}$ no tienen que coincidir como conjuntos.

De este modo, si $\mathscr{V} \in ([\mathscr{U}]^{<\omega})^M$ y $p \in \mathbb{P}_n$ tal que $p = \bigcup \mathscr{V}$, entonces

$$p^{M[H]} = \bigcup \{U^{M[H]} : U \in \mathscr{V}\}.$$

Por lo que resta de la prueba, μ representará a la medida de Lebesgue relativizada a M y $\overline{\mu}$ a $M[H]$. Además, para cada $p \in \mathbb{P}_n$, tenemos que $\mu(p) = \overline{\mu}(p^{M[H]})$.

Ahora trabajemos en $M[H]$, sea $\{p_i : i \in \omega\}$ una enumeración de H, notemos que por construcción, $M \models |\mathbb{P}_n| = \omega$. Para cada $k \in \omega$, definimos

$$E_k = \bigcup \{p_i^{M[H]} : i \leq k\}.$$

Ocurre que como $M \models$ "D_t es denso en $\mathbb{P}_n$", $h \cap D_t \neq \emptyset$, por lo que existe $j \in \omega$ tal que $p_j \in D_t$, por esto último $t \in p_j \subseteq p_j^{M[H]} \subseteq E_j$. De este modo $\mathbb{R} \cap M$ está contenido en $\bigcup_{i\in\omega} E_i$, por lo que para finalizar la prueba basta con ver que $\overline{\mu}(\bigcup_{i\in\omega} E_i) \leq 2^{-n}$.

Al ser $\{E_i : i \in \omega\}$ una sucesión creciente, nos será suficiente comprobar que $\overline{\mu}(E_k) \leq 2^{-n}$ para alguna $k \in \omega$. Con este plan en mente, recordemos que al ser $\{p_i : i \leq k\}$ un subconjunto finito de H, hay $j \in \omega$ de suerte tal que para cada $i \leq k$, $p_j \leq p_i$, lo que se traduce en $\bigcup_{i<k} p_i \subseteq p_j$, entonces, $E_k \subseteq p_j^{M[H]}$. Luego, $\overline{\mu}(E_k) \leq \overline{\mu}(p_j^{M[H]}) = \mu(p_j) < 2^{-n}$. ■

Teorema 4.31. *Sea G un filtro $(M, \mathbb{C})$-genérico, entonces en $M[G]$ ocurre que $\mathbb{R}^M$ tiene medida de Lebesgue 0.*

Demostración. El argumento es el siguiente: vamos a mostrar que para cualquier natural n, tanto $({}^{<\omega}2, \supseteq)$ como $\mathbb{P}_n$ son nociones de forcing numerables y no atómicas.

Empecemos con $({}^{<\omega}2, \supseteq)$. Sea $p \in {}^{<\omega} 2$, entonces hay $n < \omega$ tal que $dom(p) = n$, entonces $p \cup \{(n, 0)\}$ y $p \cup \{(n, 1)\}$ son extensiones de p incompatibles. Con esto corroboramos que ${}^{<\omega}2$ es no atómico y evidentemente es numerable.

Sea $n \in \omega$, $| \mathbb{P}_n |=| [\mathscr{U}]^{<\omega} |=| \mathscr{U} || \omega |=| \omega |$, pues $\mathscr{U} \subseteq M$.

Sea $p \in \mathbb{P}_n$. Si $p = \emptyset$, entonces los intervalos $q = (-2^{-(n+1)}, 0)$ y $r = (0, 2^{-(n+1)})$ extienden a p y son incompatibles, pues $\mu(q \cup r) = \mu(q) + \mu(r) = 2^{-n}$. En el caso $p \neq \emptyset$, hacemos $a = inf(p)$ y $d = sup(p)$. Por definición, hay $\mathscr{V} \in [\mathscr{U}]^{<\omega}$ tal que $p = \bigcup \mathscr{V}$, entonces hay b, c dos racionales de modo que $(a, b), (c, d) \in \mathscr{V}$.

Como $p \in \mathbb{P}_n$, $\mu(p) < 2^{-n}$, al definir $\delta = \frac{1}{2}(2^{-n} - \mu(p))$ es un número racional positivo. Si hacemos $\mathscr{V}_0 = \{(a - \delta, b)\} \cup \mathscr{V} \setminus \{(a, b)\}$, si $q = \bigcup \mathscr{V}_0$, $q = (a - \delta, a] \cup p$ y

$$\mu(q) = \delta + \mu(p) = \frac{1}{2}(2^{-n} - \mu(p)) + \mu(p) = \frac{1}{2}(2^{-n} + \mu(p)) < \frac{1}{2}(2^{-n} + 2^{-n}) = 2^{-n}.$$

Similarmente, hacemos $\mathscr{V}_1 = \{(c, d+\delta)\} \cup \mathscr{V} \setminus \{(c, d)\}$ y $r = \bigcup \mathscr{V}_1$, tenemos que $r = [c, d+\delta) \cup p$ y, por el mismo argumento que se usó para q, concluimos que $\mu(r) < 2^{-n}$.

Tanto q como r extienden a p, sin embargo

$$\mu(q \cup r) = \mu((a - \delta, a] \cup p \cup [c, d + \delta)) = 2\delta + \mu(p) = 2^{-n}.$$

Por lo tanto, $q \cup r$ no está en $\mathbb{P}_n$, entonces $q \perp r$.

Hasta ahora hemos demostrado todo lo que dice el primer párrafo de esta prueba. Recordemos que según la proposición 2.14, $({}^{<\omega}2, \supseteq)$ se encaja de manera densa en $\mathbb{C}$.

Luego, gracias al teorema 4.28, en todas estas nociones se encaja de manera densa $({}^{<\omega}\omega, \supseteq)$, luego, gracias al teorema 4.23, todas las nociones de forcing mencionadas producen las mismas extensiones genéricas. En particular, por el lema 4.30, $M[G] \models \mu(\mathbb{R}^M) \leq 2^{-n}$, debido a la arbitrariedad de n concluimos lo deseado. ■

Para concluir con este trabajo tenemos otro teorema que es bastante relevante y embellece al anterior.

Teorema 4.32. *Si H es un filtro $(M, \mathbb{M})$-genérico, entonces $\mathbb{R}^M$ es un conjunto magro según $M[H]$.*

En resumen, resulta que al forzar M con el álgebra de categoría nos permite probar que la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^M = \mathbb{R} \cap M$ es cero en la extensión genérica. En contraparte, forzar con el álgebra de medida provoca que, en la extensión genérica, $\mathbb{R}^M$ sea un conjunto magro en sí mismo.

No daremos prueba del último resultado. Sin embargo, se puede encontrar en [7] [teorema 3.20 p. 907] y no suficiente con eso, en el mismo libro se pueden encontrar más resultados de las extensiones genéricas de las álgebras de medida y categoría.

Bibliografía

[1] Blass, A. *Combinatorial Cardinal Characteristics of the Continuum.* En Foreman, M. y Kanamori, A. *Handbook of Set Theory*, Springer Netherlands, 2010.

[2] Celis Martínez, A. L. *Encajes entre nociones de forcing.* Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2013.

[3] Fitzpatrick, P. M. y Royden, H. L. *Real analysis.* 4ta edición, Pearson Education, Inc., 2010.

[4] Hernández Hernández,F. *Teoría de Conjuntos (una introducción).* Aportaciones Matemáticas, Serie Textos 13, Sociedad Matemática Mexicana, 1998.

[5] Koppelberg, S. *Handbook of Boolean algebras*, vol. 1, North Holland, 1989.

[6] Kunen, K. *Set theory. An introduction to independence proofs.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 102, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980.

[7] Kunen, K. *Random and Cohen reals. Handbook of Set Theoretic Topology*, pp. 887-913. North-Holland, Amsterdam, 1984.

[8] Munkres, J. *Topología.* Segunda edición, Pearson Education, traducido por A. Fernández Izquierdo, 2002.

[9] Pichardo Mendoza, R. *Rudimentos de la teoría de espacios polacos, Topología y sus aplicaciones* 4 Angoa Amador,J. J., Escobedo, R. y Ibarra,M. Editores. Textos Científicos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2016, pp. 3-26.

[10] Pichardo Mendoza,R. y Tamariz Mascarúa,Á. *Álgebras booleanas y espacios topológicos.* Aportaciones Matemáticas, Serie Textos 40, Sociedad Matemática Mexicana, 2018.

[11] Riecan,B. *On Some Properties of Haar Measure. Matematický* casopis, Vol 17 (1967), No. 1, 59-63.

[12] Sánchez Arévalo,C. A. *Medida y categoría: un enfoque conjuntista.* Tesis que para obtener el título de maestria en ciencias; Asesor Roberto Pichardo Mendoza, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2018.